

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS**

LUCAS VIEIRA GUERREIRO RODRIGUES PERES

**A modelagem estocástica aplicada à  
manutenção da diversidade cultural**

São Carlos  
2010



LUCAS VIEIRA GUERREIRO RODRIGUES PERES

# A modelagem estocástica aplicada à manutenção da diversidade cultural

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física do Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo, para a obtenção do título de Mestre em Ciência.

Área de Concentração: Física Básica  
Orientador: Prof. Dr. José Fernando Fontanari

São Carlos  
2010

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pelo Serviço de Biblioteca e Informação IFSC/USP

Peres, Lucas Vieira Guerreiro Rodrigues

A modelagem estocástica aplicada à manutenção da diversidade cultural. / Lucas Vieira Guerreiro Rodrigues Peres; orientador José Fernando Fontanari. – São Carlos, 2010.

84p.

Dissertação (Mestrado em Ciência - Área de concentração: Física Básica) – Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo.

1. Modelos estocásticos. 2. Manutenção das diferenças culturais. 3. Modelo de Axelrod. 4. Mecânica estatística. I. Título

## FOLHA DE APROVAÇÃO

Lucas Vieira Guerreiro Rodrigues Peres

Dissertação apresentada ao Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Ciências.  
Área de Concentração: Física Básica

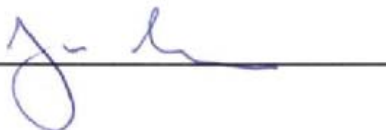
Aprovado(a) em: 29.06.2010

### Comissão Julgadora

Prof(a). Dr(a). José Fernando Fontanari

Instituição: IFSC/USP

Assinatura



Prof(a). Dr(a). Paulo Roberto de Araújo Campos

Instituição: UFRPE/Recife

Assinatura



Prof(a). Dr(a). Miled Hassan Youssef Moussa

Instituição: IFSC/USP

Assinatura







# *Agradecimentos*

Primeiramente agradeço à minha família. Pelo suporte da minha mãe, as comidas da minha avó, e as conversas noite a dentro com meu irmão. Agradeço a minha namorada pela companhia e pelas incontáveis conversas aleatórias no Skype. Agradeço meu orientador por ter me aturado durante todo este tempo. Agradeço aos meus companheiros de República e meus amigos, tanto aqueles me fazem sair da toca as quatro da tarde para ir comer todo dia, como aqueles que eu vejo apenas uma vez por semana, e até mesmo aqueles que eu nunca vejo mas sei que todos se esforçam para tornar a minha vida sempre um pouco mais miserável. Agradeço ao Yogg-Saron por ter me feito parar de jogar WoW e ter tempo pra escrever esta dissertação. Agradeço ao Rorschach por ter me mostrado que pessoas sem super poderes podem ter feitos heroicos, mas agradeço muito mais ao Dr. Manhatam por mostrar que ter super poderes é muito mais legal. Agradeço ao desconhecido que matou os pais de Bruce Wayne, não pela existência do Batman mas sim pela existência do Coringa o qual me mostrou que um pouco de caos faz bem a vida. Agradeço a infra estrutura do Instituto de Física de São Carlos a qual sem ela seria impossível realizar este trabalho e a Deus.





*"If people tend to become more alike in their beliefs, attitudes, and behavior  
when they interact, why do not all such differences  
eventually disappear?"*  
— ROBERT AXELROD



# *Resumo*

PERES, Lucas Rodrigues *A modelagem estocástica aplicada à manutenção da diversidade cultural*. 2010. 85 p. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2010

A modelagem estocástica sociocultural introduzida por Robert Axelrod é tradicionalmente referida à manutenção das diferenças, pois gera o efeito contra-intuitivo do aparecimento de heterogeneidades ao ser atingido o estado de equilíbrio, apesar de sua interação fundamental homogenizar os interagentes. Devido à sua simplicidade, inúmeras releituras do Modelo de Axelrod foram propostas, como também adendos e pequenas modificações. Um campo externo constante homogenizador, interpretado como a mídia, é um exemplo de uma possível alteração no modelo. Já um exemplo de releitura vem com a alteração funcional da interação bipolar do modelo de Axelrod por uma assimilação cultural, usando o mecanismo de Viés de Frequência. Nesta dissertação analisaremos as simulações propostas por Axelrod, sem e com a mídia externa. Para simularmos a mídia externa usaremos o artifício de adicionar um vizinho fictício à cada elemento da rede. Além disso, analisaremos o mecanismo de assimilação via Viés de Frequência, mostrando sua relação com o modelo do voto da Maioria da Mecânica Estatística.

Palavras-chave: Modelos estocásticos. Manutenção das diferenças culturais. Modelo de Axelrod. Mecânica estatística.



# *Abstract*

PERES, Lucas Rodrigues *The stochastic modeling applied to the maintenance of cultural diversity*. 2010. 85 p. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2010

The sociocultural stochastic modeling introduced by Robert Axelrod is traditionally referred to as the maintenance of cultural diversity. Since it generates the appearance of heterogeneities on a steady state, even the primordial interaction tends to gauge the interactors. Due to its simplicity, numerous interpretations of this model were studied, as well as additions and minor modifications. One example of a possible change in the model can be a constant external field, interpreted as the media. Another example of a reinterpretation could be changing the Axelrod Model bipolar interaction by a cultural assimilation, using the mechanism of frequency bias. This dissertation aims to study the Axelrod simulation with and without the external media. In order to simulate the external media we will add a virtual neighbor to all elements. Furthermore, we analyze the mechanism of assimilation via Bias frequency, showing its relationship with the model of majority voting in Statistical Mechanics.

Keywords: Stochastic models. Maintenance of cultural differences. Axelrod model. Statistical mechanics.



# Lista de Figuras

Figura 2.1 - <i>Primeiros vizinhos de uma rede quadrada (vizinhança de von Neumann).</i> . . . . .	30
Figura 2.2 - <i>Diagrama de Fluxo da iteração Cultural no Modelo de Axelrod</i> . . .	32
Figura 2.3 - <i>Diagrama de Fluxo da iteração Cultural no Modelo de Axelrod usando a otimização da Lista de Sítios Ativos</i> . . . . .	34
Figura 2.4 - <i>Dependência do número médio de domínios equiculturais para um regime homogêneo <math>\langle N_d^h \rangle</math> com a dimensão da rede <math>L</math> no modelo de Axelrod para <math>q = 15</math> e <math>F = 5</math>. Cada símbolo representa uma média sobre <math>N_a = 1000</math> amostras.</i> . . . . .	34
Figura 2.5 - <i>Dependência do número médio de domínios equiculturais para um regime homogêneo <math>\langle N_d^h \rangle</math> normalizado por <math>L^2</math> pela dimensão da rede <math>L</math> no modelo de Axelrod para <math>q = 15</math> e <math>F = 5</math> em uma escala dilogarítmica. Cada símbolo representa uma média sobre <math>N_a = 1000</math> amostras. A reta tracejada é a regressão linear pela Equação 2.8</i> . .	35
Figura 2.6 - <i>Dependência do tempo médio de relaxação em regimes homogêneos <math>\langle Tr^h \rangle</math> pela dimensão da rede <math>L</math> no modelo de Axelrod para <math>q = 5</math> e <math>F = 15</math>. Cada símbolo representa uma média sobre <math>N_a = 1000</math> amostras.</i> . . . . .	37
Figura 2.7 - <i>Dependência do tempo médio de relaxação em regimes homogêneos <math>\langle Tr^h \rangle</math> pela dimensão da rede <math>L</math> no modelo de Axelrod para <math>q = 5</math> e <math>F = 15</math> em uma escala dilogarítmica. Cada símbolo representa uma média sobre <math>N_a = 1000</math> amostras. A reta tracejada é a regressão linear pela Equação 2.9.</i> . . . . .	37
Figura 2.8 - <i>Dependência do número médio de domínios equiculturais em regimes inomogêneos <math>\langle N_d^i \rangle</math> pela dimensão da rede <math>L</math> no modelo de Axelrod para <math>q = 3</math> e <math>F = 50</math>. Cada ponto representa uma média sobre <math>N_a = 1000</math> amostras.</i> . . . . .	38



Figura 2.9 - Dependência do número médio de domínios equiculturais em regimes inhomogêneos $\langle N_d^i \rangle$ pela dimensão da rede ao quadrado $L^2$ no modelo de Axelrod para $q = 3$ e $F = 50$ em uma escala dilogarítmica. Cada ponto representa uma média sobre $N_a = 1000$ amostras. A reta tracejada é a regressão linear pela Equação 2.10 . . . . .	38
Figura 2.10 - Dependência do tempo de relaxação médio em regimes inhomogêneos $\langle Tr^i \rangle$ pela dimensão da rede $L$ no modelo de Axelrod para $q = 3$ e $F = 50$ . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 1000$ amostras. . . . .	39
Figura 2.11 - Dependência do tempo de relaxação médio em regimes inhomogêneos $\langle Tr^i \rangle$ pela dimensão da rede $L$ no modelo de Axelrod para $q = 3$ e $F = 50$ em uma escala dilogarítmica. Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 1000$ amostras. A reta tracejada é a regressão linear pela Equação 2.11. . . . .	40
Figura 2.12 - Dependência do número médio de domínios equiculturais $\langle N_d \rangle$ e do tempo médio de relaxação $\langle Tr \rangle$ pela razão da variação dos fatores culturais pela dimensão do vetor de fatores culturais $\frac{q}{F}$ no modelo de Axelrod para $L = 20$ e $F = 5$ . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 1000$ amostras. . . . .	41
Figura 2.13 - Diagrama de Fluxo para o Modelo de Axelrod com a mídia Externa proposta por Shibantai e Colaboradores . . . . .	42
Figura 2.14 - Dependência do número médio de domínios equiculturais $\langle N_d \rangle$ , com a probabilidade de interação com o sítio fictício $p$ no modelo de Axelrod com a mídia externa para redes de dimensão descritas no gráfico, cujos conjuntos de fatores culturais tem tamanho $F = 5$ e variação $q = 2$ . Cada ponto representa uma média sobre $N_a = 1000$ amostras. . . . .	43
Figura 2.15 - Dependência do número médio de domínios equiculturais $\langle N_d \rangle$ , com a probabilidade de interação com o sítio fictício $p$ no modelo de Axelrod com a mídia externa para redes descritas no gráfico, cujos conjuntos de fatores culturais tem tamanho $F = 5$ e variação $q = 2$ . Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 1000$ amostras. . . . .	44

Figura 2.16 - <i>Dependência do número médio de domínios equiculturais <math>\langle N_d \rangle</math> normalizado pela dimensão da rede ao quadrado <math>L^2</math> com a dimensão da rede <math>L</math> no modelo de Axelrod com a média externa para probabilidades de interação <math>p</math> descritas no gráfico, cujos conjuntos de fatores culturais tem tamanho <math>F = 3</math> e variação <math>q = 3</math>. Cada símbolo representa uma média sobre <math>N_a = 1000</math> amostras. . . . .</i>	45
Figura 2.17 - <i>Dependência do número médio de domínios equiculturais <math>\langle N_d \rangle</math> normalizado pela dimensão da rede ao quadrado <math>L^2</math> com 1 menos a dimensão da rede <math>L</math> no modelo de Axelrod com a média externa para probabilidades de interação <math>p</math> descritas no gráfico, cujos conjuntos de fatores culturais tem tamanho <math>F = 3</math> e variação <math>q = 3</math>. Cada símbolo representa uma média sobre <math>N_a = 1000</math> amostras. . . . .</i>	46
Figura 2.18 - <i>Dependência do número médio de domínios equiculturais <math>\langle N_d \rangle</math> normalizado pela dimensão da rede ao quadrado <math>L^2</math> no regime <math>L \rightarrow \infty</math> com a intensidade do campo <math>p</math> no modelo de Axelrod com a média externa, cujos conjuntos de fatores culturais tem tamanho <math>F = 3</math> e variação <math>q = 3</math>. A reta tracejada é a regressão linear pela equação 2.15. . . . .</i>	47
Figura 3.1 - <i>Primeiros e segundos vizinhos de uma rede quadrada (vizinhança de Moore). . . . .</i>	49
Figura 3.2 - <i>Diagrama de Fluxo da Assimilação Cultural. . . . .</i>	50
Figura 3.3 - <i>Dependência do número médio de domínios equiculturais <math>\langle N_d \rangle</math> com o número de ciclos <math>T</math> no modelo Autômato de Parisi e colaboradores para <math>L = 100</math> e <math>F = 6</math>. Cada símbolo representa uma média sobre <math>N_a = 1000</math> amostras. . . . .</i>	51
Figura 3.4 - <i>Diagrama de Fluxo da Assimilação Cultural Sequencial. . . . .</i>	52
Figura 3.5 - <i>Exemplo de um estado absorvente inhomogêneo de uma rede de dimensão <math>L = 500</math> e <math>F = 1</math> para a dinâmica de Viés de Frequência com a vizinhança de Moore. Os pontos amarelos são sítios com <math>\Psi_{i0} = 1</math> e os pontos cinzas <math>\Psi_{i0} = 0</math>. . . . .</i>	53

Figura 3.6 - Dependência do número médio de domínios equiculturais $\langle N_d \rangle$ com a dimensão linear $L$ da rede quadrada no modelo Sequencial para valores de $F$ incluídos na figura. Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 1000$ amostras. . . . .	54
Figura 3.7 - Dependência do número médio de domínios equiculturais $\langle N_d \rangle$ com a dimensão quadrática $L^2$ da rede no modelo Sequencial para valores de $F$ incluídos na figura. Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 1000$ amostras. . . . .	54
Figura 3.8 - Dependência do coeficiente angular $\Gamma$ com a dimensão do vetor de fatores culturais $F$ no modelo Sequencial com topologia de primeiros e segundos vizinhos. . . . .	55
Figura 3.9 - Dependência de $1-\Gamma$ com a dimensão do vetor de fatores culturais $F$ no modelo Sequencial com topologia de primeiros e segundos vizinhos em escala monologarítmica. A linha tracejada é a regressão linear pela função 3.3. . . . .	56
Figura 3.10 - Dependência do tempo de relaxação normalizado $\langle Tr \rangle$ com a dimensão linear $L$ da rede quadrada no modelo de Viés de Frequência para valores de $F$ incluídos na figura. Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 1000$ amostras. . . . .	57
Figura 3.11 - Dependência do tempo de relaxação normalizado assintótico $\Delta$ pela dimensão do vetor de fatores culturais $F$ no modelo proposto por Parisi e colaboradores. A reta tracejada é a regressão linear pela função (3.6). . . . .	57
Figura 3.12 - Exemplo de um estado absorvente inhomogêneo de uma rede de dimensão $L = 500$ e $F = 1$ para a dinâmica de Viés de Frequência com a vizinhança de von Neumann. Os pontos amarelos são sítios com $\Psi_{i0} = 1$ e os pontos cinzas $\Psi_{i0} = 0$ . . . . .	58
Figura 3.13 - Dependência do número médio de domínios $\langle N_d \rangle$ pela dimensão linear $L$ no modelo com vizinhança de von Neumann para valores de $F$ indicados na figura. Cada símbolo representa uma média sobre $N_a = 1000$ amostras. . . . .	59

Figura 3.14 - <i>Dependência do número médio de domínios <math>\langle N_d \rangle</math> pela dimensão quadrática <math>L^2</math> com vetores de fatores culturais com dimensão <math>F = 15</math> para as vizinhanças indicadas na figura. Cada símbolo representa uma média sobre <math>N_a = 1000</math> amostras independentes. . . . .</i>	60
Figura 3.15 - <i>Diagrama de Fluxo da Assimilação Cultural do Modelo de Voto da Maioria. . . . .</i>	61
Figura 3.16 - <i>Histograma do tamanho de domínio normalizado <math>T_d</math> no Modelo de Voto da Maioria para uma rede de dimensão <math>L = 200</math> e <math>F = 1</math> e um conjunto amostral de <math>N_a = 5000</math> amostras. . . . .</i>	61
Figura 3.17 - <i>Rede de dimensão <math>L = 200</math> com vetores de fator cultura de dimensão <math>F = 1</math> em um estado absorvente no modelo de voto da maioria. Os pontos amarelos são sítios com <math>\Psi_{i0} = 1</math> e os pontos cinzas <math>\Psi_{i0} = 0</math>. . . . .</i>	62
Figura 3.18 - <i>Histograma do tamanho de domínio normalizado <math>T_d</math> no Modelo de viés de frequência para uma rede de dimensão <math>L = 200</math> e <math>F = 1</math> e um conjunto amostral de <math>N_a = 5000</math> amostras. . . . .</i>	63
Figura A.1 - <i>Vizinhança de von Neumann em função de <math>p</math> . . . . .</i>	74
Figura A.2 - <i>Vizinhança de Moore em função de <math>p</math> . . . . .</i>	74
Figura A.3 - <i>Estrutura de dados de cada Elemento da Rede . . . . .</i>	74
Figura A.4 - <i>Estrutura de dados do Sistema . . . . .</i>	75
Figura B.1 - <i>Diagrama de Fluxo da Contagem de Domínios para a vizinhança de von Neumann. . . . .</i>	80
Figura B.2 - <i>Diagrama de Fluxo da Aplicação de condições periódicas de contorno à Contagem de Domínios com vizinhança de von Neumann. . . . .</i>	83



## *Lista de Tabelas*

Tabela 2.1 - Coeficientes da Equação 2.8 . . . . .	35
Tabela 2.2 - Coeficientes da Equação 2.9 . . . . .	36
Tabela 2.3 - Coeficientes da Equação 2.9 . . . . .	36
Tabela 2.4 - Coeficientes da Equação 2.11 . . . . .	40
Tabela 2.5 - Coeficientes da Equação 2.13 para vários valores de $p$ . . . . .	45
Tabela 2.6 - Coeficientes da Equação 2.15 . . . . .	46
Tabela 3.1 - Coeficientes da equação 3.3 . . . . .	55
Tabela 3.2 - Coeficientes da equação 3.6 . . . . .	56



# *Sumário*

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>25</b>
<b>2</b>	<b>O Modelo de Axelrod</b>	<b>29</b>
2.1	O Modelo Livre . . . . .	29
2.1.1	Motivação e Descrição do Modelo . . . . .	29
2.1.2	Algoritmo . . . . .	30
2.1.3	Otimização do Código, a lista de sítios ativos . . . . .	32
2.1.4	Resultados . . . . .	33
2.2	Mídia Externa . . . . .	41
2.2.1	Motivação e descrição do Algoritmo . . . . .	41
2.2.2	Resultados . . . . .	42
2.3	Modificações no Modelo . . . . .	47
<b>3</b>	<b>Modelo de Viés de Frequência</b>	<b>49</b>
3.1	O Modelo Autômato . . . . .	49
3.1.1	Motivação e Descrição do Modelo . . . . .	49
3.1.2	Algoritmo . . . . .	50
3.1.3	Resultados . . . . .	51
3.2	O Modelo Sequencial . . . . .	52
3.2.1	Modificações do Algoritmo . . . . .	52
3.2.2	Resultados . . . . .	52
3.3	O Modelo Sequencial com Vizinhança de von Neumann . . . . .	58



3.3.1	Descrição do Modelo e a Dependência com o Número de Vizinhos . . . . .	58
3.3.2	O Modelo de Voto da Maioria e o Critério de Desempate . . . . .	59
<b>4</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>65</b>
	<b>Referências</b>	<b>69</b>
	<b>Apêndice A – Estrutura de Dados</b>	<b>73</b>
	<b>Apêndice B – Contagem de Domínios</b>	<b>77</b>
B.1	Algoritmo de Hoshen e Kopelman, o algoritmo de rótulo de rótulos . . . . .	77
B.2	Contagem de sítios com primeiros vizinhos . . . . .	79
B.3	Contagem Primeiros e Segundos Vizinhos . . . . .	81
B.4	Inclusão das Condições Periódicas de Contorno . . . . .	82

# 1 INTRODUÇÃO

O termo cultura do homógrafo latino *cultura*, é derivado de *colere*, cujo significado é “o ato de cultivar”. Atualmente, este termo possui diferentes significados, sendo os mais usados: o gosto para a boa arte, culinária, música em geral e um conjunto de conhecimentos, crenças, comportamentos que dependem da capacidade simbólica e do aprendizado social.

Levando em consideração a segunda interpretação de cultura citada, podemos nos perguntar se esse conjunto é estático no decorrer do tempo ou se com o passar deste, temos uma modificação dos elementos. Assumindo que há uma modificação com o passar do tempo, é válido nos questionarmos como essa modificação é feita, por qual mecanismo podemos alterar esse conjunto e qual a sua dependência explícita com o tempo. O princípio de todas as respostas a essas indagações vem com a teoria da evolução multilinear de Julian Steward (1), que examina a forma pela qual as sociedades se adaptam ao meio que as cerca. Steward rejeita a noção de progresso definido no século XIX, levando em consideração a ideia darwinística de adaptação, argumentando que todas as sociedades tendem a se adaptar ao seu meio ambiente. Ele argumenta também que diferentes adaptações podem ser estudadas através de recursos específicos explorados pela sociedade, assim como a tecnologia e a divisão do trabalho empregada por ela. Um terceiro argumento de Steward seria que meios ambientes e tecnologias distintas geram distintas formas de adaptação, gerando assim mudanças culturais na sociedade. Em outras palavras, a cultura não se altera de acordo com uma lógica interna, e sim por uma relação dinâmica com um meio ambiente também dinâmico.

Analisando efeitos como a formação de estados, integrações transnacionais, e “Domestic Cleavages”, isto é, o conceito usado em ciência política para exemplificar a segregação de pessoas votantes em blocos, podemos conjecturar que, ao interagir socialmente, o ser humano em geral tende a adquirir e igualar trejeitos, opiniões, etc. Levando em consideração a homogenização acima descrita e os princípios da teoria de evolução multilinear

de Steward, nos perguntamos então: Por que as pessoas possuem opiniões, gostos e outras características distintas? Essa é a questão fundamental abordada por Axelrod ao maquinar seu modelo homônimo (2). Este tem a finalidade de simular a difusão cultural baseando-se na influência social e é considerado o paradigma para a modelagem estocástica de comportamento coletivo. Essa modelagem visa reduzir um fenômeno coletivo a sua essência funcional, e suas características básicas são: a simplicidade e o retorno de resultados não triviais, como, por exemplo, a manutenção das diferenças culturais. No Modelo de Axelrod cada elemento interagente pode ser interpretado como um único ser humano ou uma sociedade homogênea culturalmente, e esses elementos são representados por um vetor de fatores culturais de dimensão  $F$ , cujas componentes podem variar no intervalo  $[0, q - 1]$ . Todos os elementos em questão estão localizados e imóveis, interagindo apenas com a sua vizinhança próxima. Esta interação se dá com uma probabilidade proporcional a sua similaridade cultural, ou seja, proporcional ao número de fatores culturais em comum. O resultado dessa interação entre os dois elementos é o aumento da similaridade cultural entre eles, pois um deles iguala um fator cultural previamente distinto. Elaboraremos melhor este modelo no Capítulo 2.

Apesar de termos, por construção do modelo, como único padrão social interativo uma força que tende a homogeneizar os elementos interagentes, a modelagem proposta por Axelrod nos retorna um efeito inesperado: ocorre uma polarização global, isto é, há uma probabilidade não nula de o sistema atingir estados estacionários não homogêneos. Mais interessante de enfatizar, pelo menos no âmbito da Mecânica Estatística, é o fato de que a competição da configuração desordenada inicial e do viés de ordenação da interação social produz um fenômeno de limiar não trivial, mais precisamente, uma transição de fase, a qual separa os parâmetros do modelo de acordo com a homogeneidade do sistema absorvente. Para entender como o sistema apresenta essa não homogeneidade lembramos que, de acordo com as regras do Modelo de Axelrod, dois vizinhos interagentes que não possuam nenhum fator cultural em comum são inaptos a interagir socialmente, e é trivial o entendimento de que a interação entre dois vizinhos cujos fatores culturais são totalmente idênticos não altera o sistema. Concluímos então que os estados absorventes caracterizam-se por ser aqueles em que cada elemento do sistema faz vizinhança com um elemento cujos fatores culturais são totalmente distintos ou completamente idênticos.

Temos com o trabalho de Kennedy (3) a comprovação de que a forma da probabilidade de interação gera as inomogeneidades já discutidas. Kennedy efetuou simulações desse modelo ignorando a regra da probabilidade proporcional à similaridade cultural, obtendo então, como único resultado, estados estacionários homogêneos. Além disso, uma

segunda modificação no modelo vem com Klemm e colaboradores (4). Eles inserem um ruído externo ao sistema, ou seja, um fator cultural aleatório de um elemento escolhido aleatoriamente é alterado, resultando na desestabilização dos estados inhomogêneos finais. Baseando-nos nesses resultados, podemos concluir que a inhomogeneidade final dos estados no Modelo de Axelrod é extremamente frágil.

Igualmente motivados pelo interesse na fragilidade da heterogeneidade dos estados absorventes, Shibantai e colaboradores (5) introduzem uma mídia externa global perene. Essa é tratada durante a simulação como um vizinho fictício adicional e constante no tempo. Defini-se  $p$  como a probabilidade de interagirmos com esse vizinho e, consequentemente,  $1 - p$  é a probabilidade de interagirmos com a vizinhança próxima. No jargão físico  $p$  é a intensidade do campo externo aplicado. Esperava-se, graças aos resultados previamente descritos e à tendência homogeneizadora do campo aplicado, um aumento de sistemas absorventes homogêneos. No entanto, o efeito observado é oposto. Redes, cujas amostras, em sua maioria, atingiam estados homogêneos no modelo livre, atingiram estados absorventes inhomogêneos ao aplicarmos o campo externo. Então, da mesma forma que conjecturado para o modelo livre, pode-se esperar a obtenção de pontos críticos para a transição de fase já descrita. É importante lembrar que agora o valor do ponto crítico também é dependente da intensidade do campo externo  $p$ . Essa análise foi efetuada por González e colaboradores (6). Todavia, mostramos nessa dissertação que a noção de valor crítico não se aplica ao sistema sob a influência da mídia, pois, no regimes assintóticos da dimensão da rede  $L \rightarrow \infty$  para qualquer conjunto de valores  $[p, F, q]$ , o sistema sempre atingirá um estado absorvente inhomogêneo (7).

Apesar de a interpretação do campo externo aplicado ser a mídia, isto é, televisão, jornais, revistas, internet, etc, foge do escopo dessa discussão comparar os resultados obtidos através da modelagem com resultados conhecidos da sociologia, além daqueles motivadores da criação do Modelo. O enfoque desta é a análise meticulosa dos aspectos quantitativos e qualitativos dos modelos.

A modelagem engenhada por Axelrod inspirou outros inúmeros modelos de influência social. Por exemplo, Parisi e colaboradores (8) efetuaram uma releitura do trabalho de Axelrod com o intuito de simplificá-lo e diminuir o tempo de execução das simulações. Com isso, temos a possibilidade de estudar redes com dimensões maiores, e/ou aumentar o conjunto amostral, diminuindo assim o desvio padrão das variáveis calculadas. A primeira simplificação vem assumindo  $q = 2$  sempre, isto é, os fatores culturais na modelagem proposta por Parisi e colaboradores são binários, diminuindo em 1 as variáveis

do sistema. A segunda simplificação vem com a forma da interação entre elementos da rede. Na modelagem original havia uma interação bipolar com uma probabilidade bem definida. Já nesse novo modelo utilizaremos o mecanismo de viés de frequência. Este mecanismo assume que cada elemento assimilará o valor cultural mais comum entre os vizinhos próximos, ou seja, assumiremos que as pessoas possuem a tendência de assimilar os fatores culturais da maioria. Essas simplificações não alteram o resultado contra-intuitivo do Modelo de Axelrod: mesmo com uma interação homogeneizadora teremos estados absorventes inomogêneos. A única desvantagem dessa releitura é a ausência de transições de fase, pois, independentemente da dimensão da rede ou do vetor de fatores culturais, os estados absorventes serão inomogêneos. Uma discussão mais elaborada será feita no Capítulo 3.

Essa dissertação procura efetuar uma descrição qualitativa e quantitativa mais minuciosa tanto do modelo de Axelrod com e sem a inserção da mídia (Capítulo 2), e da releitura feita por Parisi e colaboradores (Capítulo 3). Nos dois apêndices após as conclusões apresentaremos uma discussão mais técnica sobre a estrutura de dados do sistema (Apêndice A) e do algoritmo de contagem de domínios (9) (Apêndice B).

## 2 *O Modelo de Axelrod*

### 2.1 O Modelo Livre

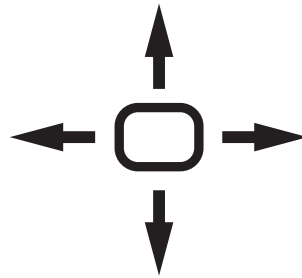
#### 2.1.1 Motivação e Descrição do Modelo

O propósito do modelo de Axelrod é simular computacionalmente a relação entre seres humanos no que se diz respeito à interação social, ou seja, a partir de uma dinâmica homogeneizadora e uma distribuição espacial dos indivíduos, evoluímos temporalmente esse sistema e encontramos um estado de equilíbrio dinâmico.

Infelizmente, não temos uma variável adequada para descrevermos a variedade de elementos por meio dos quais um indivíduo possa influenciar e ser influenciado socialmente. No entanto, sabemos que uma grande faixa de possibilidades é coberta por: crenças, atitudes, comportamento, linguagem, artes, normas sociais, etc. Pensar uma forma mais genérica de descrever esses elementos é pensar em cultura. Cada um dos elementos citados acima e muitos outros são o que denominamos fatores culturais. Portanto, o termo cultura será usado para indicar o conjunto de atributos individuais sujeitos à alterações pela influência/interação social.

A modelagem baseia-se em assumir que o conjunto de fatores culturais de cada elemento interagente é definido como um vetor de  $F$  componentes, sendo cada componente um inteiro variando no intervalo  $[0, q - 1]$ . Note que cada fator cultural, *a priori*, é totalmente independente dos outros; o acoplamento destes virá com a definição da dinâmica do sistema. Temos também que cada elemento interagente está situado em um ponto fixo de uma rede quadrada de lado  $L$ , e interage apenas com seus vizinhos próximos, caracterizando a vizinhança de von Neumann (vide Figura 2.1). Assumimos condições periódicas de contorno neste caso. Uma das modificações possíveis neste modelo é a topologia da interação, isto é, com quais elementos da rede cada sítio pode interagir. Serão discutidas de forma mais detalhada as possíveis mudanças no modelo na Secção 2.3.

Com a topologia e os estados de cada indivíduo dados, basta definirmos a dinâmica



**Figura 2.1** – Primeiros vizinhos de uma rede quadrada (vizinhança de von Neumann).

de interação entre estes para completar o modelo. Sabemos que, ao interagir socialmente, os indivíduos homogeneizam-se culturalmente. Em termos das variáveis do modelo, a dinâmica entre os elementos da rede torna os conjuntos de fatores culturais mais idênticos. Assumimos também que, para haver essa interação, é necessário pelo menos um fator comum entre os indivíduos interagentes, e a chance de a interação acontecer é maior quando existem mais fatores em comum.

Devido à forma pela qual a interação foi construída, é fácil ver que esse sistema tende a atingir um estado estacionário absorvente. Uma das variáveis a ser calculada ao atingirmos esse estado é a distribuição espacial dos conjuntos de fatores, podendo então classificá-los de acordo com a quantidade de regiões cujos sítios possuem o mesmo estado cultural. Sistemas absorventes em que todos os sítios apresentam o mesmo estado cultural são definimos como homogêneos; já para todos os outros casos temos estados inhomogêneos por definição. A característica não trivial deste modelo é a aparição de estados absorventes não homogêneos, pois a interação entre elementos da rede tende a homogenizá-los. A aparição desses estados corrobora a validade do modelo proposto, pois responde a pergunta motivadora do modelo "[...] If people tend to become more alike in their beliefs, attitudes, and behavior when they interact, why do not all such differences eventually disappear? [...]".

### 2.1.2 Algoritmo

Será usada a estrutura de dados descrita no Apêndice A. Levando em consideração a redução da dimensão discutida no próprio apêndice (vide Equações A.1 e A.2), definimos de forma genérica o estado cultural de cada elemento pelo seguinte vetor linha

$$\Psi_i = [\Psi_{i,1}, \Psi_{i,2}, \dots, \Psi_{i,F}]. \quad (2.1)$$

Exemplificando: para o caso particular de  $F = 5$  e  $q = 10$  temos um dos  $5^{10}$  estados possíveis na equação abaixo

$$\Psi_i = [2, 1, 0, 8, 6]. \quad (2.2)$$

Conseqüentemente, mantendo  $F$  e  $q$  inalterados, uma rede de dimensão  $L = 10$  em um estado completamente aleatório pode ser escrita como

$$\begin{pmatrix} 91292 & 49757 & 76385 & 14322 & 03195 & 86451 & 21067 & 67061 & 15220 & 15028 \\ 24146 & 14035 & 15731 & 46664 & 03044 & 47693 & 81783 & 63065 & 47103 & 12345 \\ 64576 & 60108 & 13116 & 61498 & 14391 & 66948 & 95165 & 21419 & 16038 & 26246 \\ 86014 & 74993 & 23666 & 07722 & 94308 & 01067 & 69454 & 75690 & 28233 & 98754 \\ 20202 & 34341 & 81219 & 61233 & 72651 & 16796 & 56957 & 96659 & 13916 & 99056 \\ 55645 & 06320 & 41097 & 44741 & 51349 & 90656 & 16162 & 35650 & 19565 & 53387 \\ 50062 & 79748 & 69073 & 07830 & 21458 & 01582 & 29288 & 30715 & 06884 & 57364 \\ 89573 & 60187 & 94144 & 42298 & 99920 & 46408 & 10849 & 57850 & 08140 & 29558 \\ 63027 & 66176 & 88008 & 70876 & 24964 & 85073 & 62658 & 94974 & 31589 & 84267 \\ 65864 & 53692 & 19646 & 32370 & 40193 & 79383 & 23754 & 63881 & 39028 & 39085 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

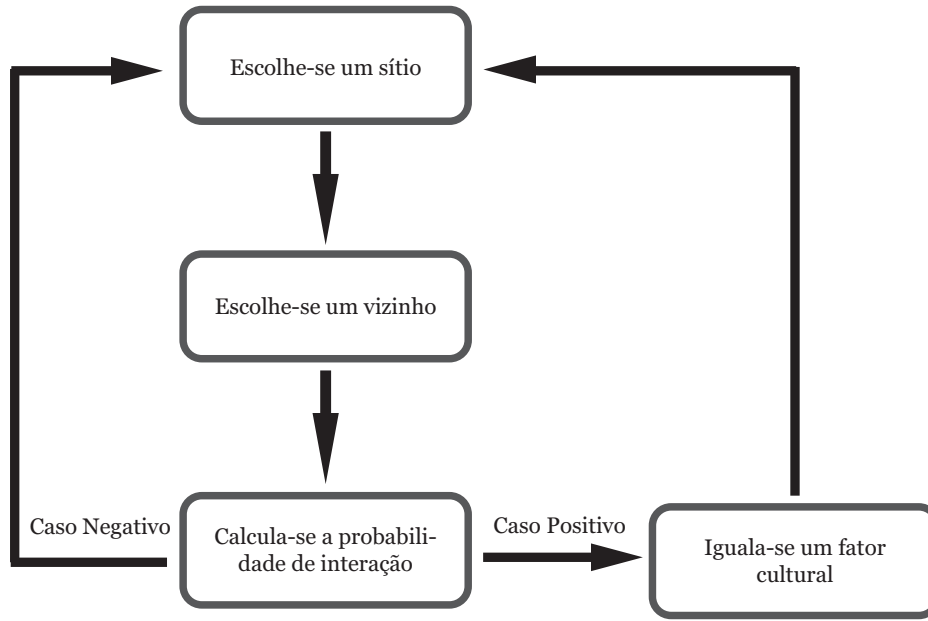
A iteração dá-se escolhendo aleatoriamente um sítio  $i$  e em seguida um vizinho próximo aleatório  $j$  (vide Figura 2.1), tendo assim a dupla interagente. Após isto calculamos a probabilidade de interação entre eles  $p_{i \rightarrow j}$  efetuando a soma

$$p_{i \rightarrow j} = \frac{1}{F} \sum_{k=1}^F \delta_{\Psi_{i,k}, \Psi_{j,k}}, \quad (2.4)$$

onde  $\delta_{ij}$  é a delta de Kronecker. Caso a interação ocorra, escolhemos aleatoriamente um dos fatores do sítio e o igualamos ao respectivo de seu vizinho. Do texto original de Robert Axelrod podemos escrever resumidamente a interação social como "[...] with probability equal to their cultural similarity, a randomly chosen site will adopt one of the cultural features of a randomly chosen neighbor [...]".

Essa iteração em forma de um diagrama de fluxo é mostrada na Figura 2.2. A simulação começa com um sistema totalmente aleatório, como mostrado na Rede 2.3, e será repetido a iteração da Figura 2.2 até que o sistema atinga um estado absorvente. Note que a iteração da Figura 2.2 nunca altera o conjunto de fatores culturais caso a dupla interagente possua conjuntos totalmente distintos, pois a Equação 2.4 retorna valor nulo. O mesmo efeito acontece também no caso de uma dupla interagente cujos conjuntos são totalmente idênticos. Concluímos que os estados absorventes são aqueles em que todos os sítios fazem vizinhança apenas com elementos cujo conjunto de fatores culturais





**Figura 2.2** – Diagrama de Fluxo da iteração Cultural no Modelo de Axelrod

é idêntico ao seu ou totalmente distinto dele. Temos na rede seguinte um exemplo de estado absorvente inhomogêneo,

$$\begin{pmatrix}
 91292 & 91292 & 76385 & 76385 & 76385 & 76385 & 76385 & 76385 & 15220 & 15220 \\
 91292 & 91292 & 76385 & 76385 & 76385 & 76385 & 76385 & 76385 & 15220 & 15220 \\
 76385 & 91292 & 91292 & 76385 & 76385 & 76385 & 76385 & 76385 & 15220 & 15220 \\
 76385 & 91292 & 91292 & 76385 & 60187 & 60187 & 60187 & 76385 & 15220 & 15220 \\
 76385 & 76385 & 76385 & 76385 & 60187 & 60187 & 60187 & 60187 & 15220 & 15220 \\
 60187 & 60187 & 60187 & 60187 & 60187 & 60187 & 60187 & 60187 & 15220 & 15220 \\
 60187 & 60187 & 60187 & 60187 & 60187 & 60187 & 60187 & 42298 & 15220 & 15220 \\
 60187 & 60187 & 60187 & 42298 & 42298 & 42298 & 42298 & 42298 & 15220 & 15220 \\
 60187 & 60187 & 60187 & 42298 & 42298 & 42298 & 42298 & 42298 & 15220 & 15220 \\
 60187 & 60187 & 60187 & 42298 & 42298 & 42298 & 42298 & 42298 & 15220 & 15220
 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Ao atingirmos esses estados calculamos o tamanho e a quantidade de domínios equiculturais formados, e para isto usamos o algoritmo do Apêndice B.

### 2.1.3 Otimização do Código, a lista de sítios ativos

A principal dificuldade encontrada para simularmos computacionalmente esse modelo é o tempo de computação necessário para atingirmos um estado absorvente. Uma discussão mais detalhada da dependência analítica desse tempo para diferentes homo-

geneidades será feita posteriormente. Otimizamos a modelagem proposta por Axelrod introduzindo uma segunda estrutura de dados, uma lista de sítios ativos. Esta consiste em uma lista encadeada dos sítios cujas interações com seus vizinhos alterem o sistema. Assim, ao invés de escolhermos aleatoriamente um sítio da rede, escolhemos aleatoriamente um sítio da lista, evitando escolher sítios cujas possíveis interações não alteram o sistema, diminuindo estrondosamente o número de iterações inúteis.

Para efetuarmos essa lista é necessário obter a atividade de cada sítio, sendo a mesma uma variável booleana, na qual 0 é entendido como inativo e 1 como ativo. Então, após gerarmos o sistema inicialmente aleatório (vide Rede 2.3), percorre-se a rede calculando a atividade de cada elemento dada pela equação

$$A_i = 1 - \delta_{Na_i,0}, \quad (2.6)$$

sendo

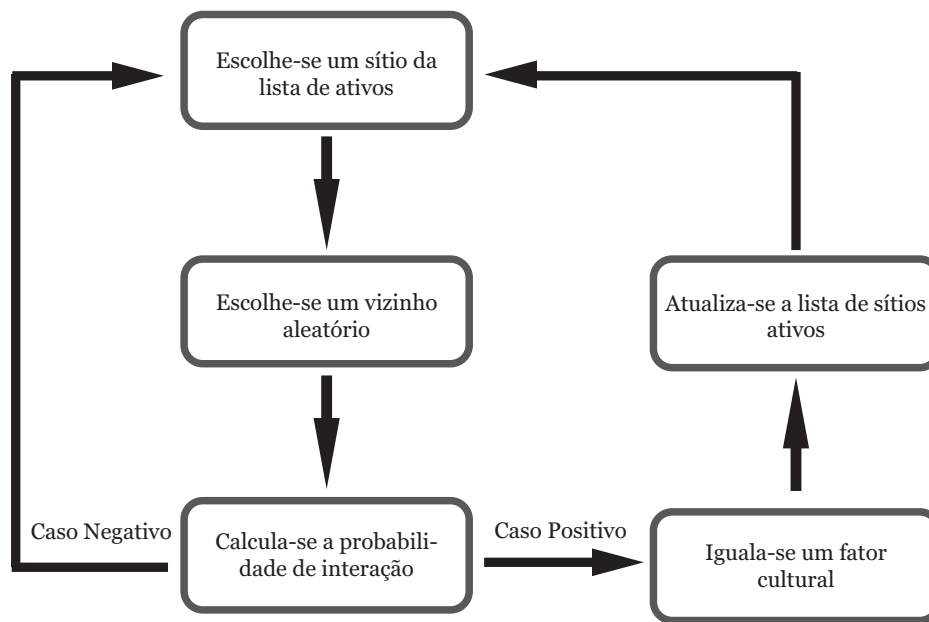
$$Na_i = \frac{1}{2} \sum_{\text{vizinhos}} (1 - \delta_{p_{i \rightarrow \bar{i}},0})(1 - \delta_{p_{i \rightarrow \bar{i}},1}). \quad (2.7)$$

É importante lembrar que a soma nos vizinhos é a mesma soma feita na equação B.4 com a relação B.5a para a variável  $\bar{i}$ . Sabemos que  $p_{i \rightarrow \bar{i}}$  é a probabilidade de interação calculada pela Equação 2.4. Note também que a variável  $Na_i$  é o número de vizinhos do sítio alvo  $i$  cujas interações são possíveis.

Essa lista é atualizada a cada nova iteração adicionando ou removendo elementos dela. A introdução desta nos permite também obter um critério de parada, pois o sistema atinge um estado estacionário absorvente quando a lista de sítios ativos não possuir mais elementos. Incluindo essa otimização no algoritmo da Figura 2.2 temos a Figura 2.3.

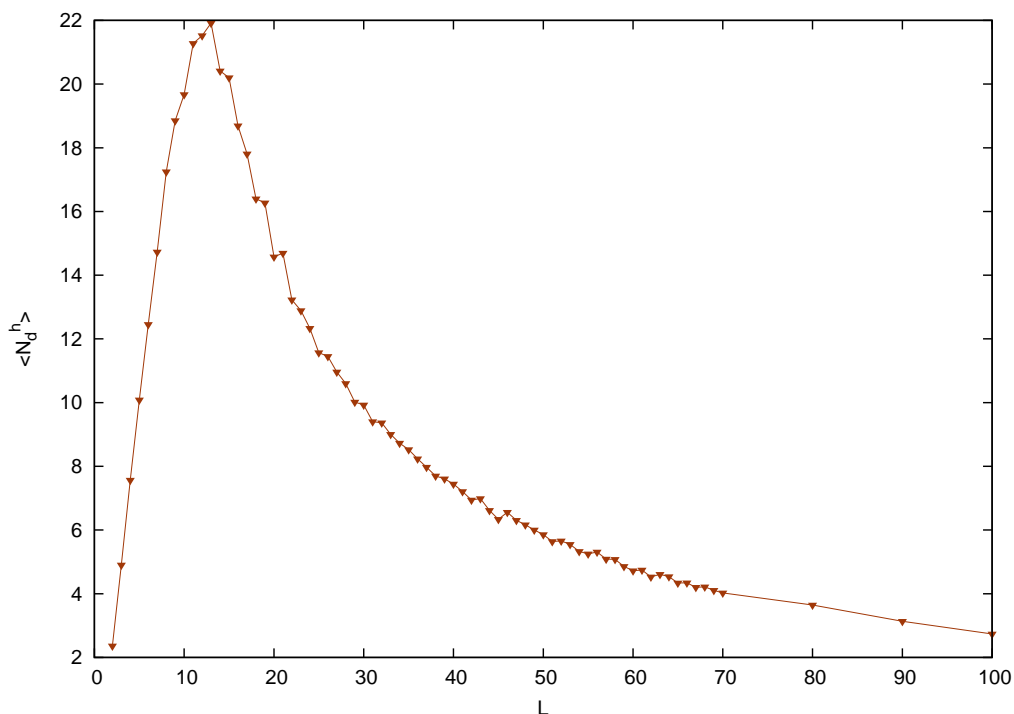
### 2.1.4 Resultados

Como citado anteriormente, o efeito contra intuitivo da modelagem social de Axelrod é o aparecimento de estados absorventes inomogêneos. Isso advém da forma como a probabilidade de interação é definida (vide Equação 2.4), pois um elemento cujo vizinho interagente possui um conjunto de fatores culturais totalmente distintos do seu próprio tem uma probabilidade zero de interação. Vamos analisar a dependência do número médio de domínios  $\langle N_d \rangle$  para os regimes homogêneos e inomogêneos. Executamos então o algoritmo descrito na secção anterior analisando primeiramente o número médio de domínios equiculturais formados no estado estacionário homogêneo  $\langle N_d^h \rangle$  em função dos parâmetros da rede: dimensão  $L$ , número de fatores culturais  $F$  e variação dos fatores  $q$ .



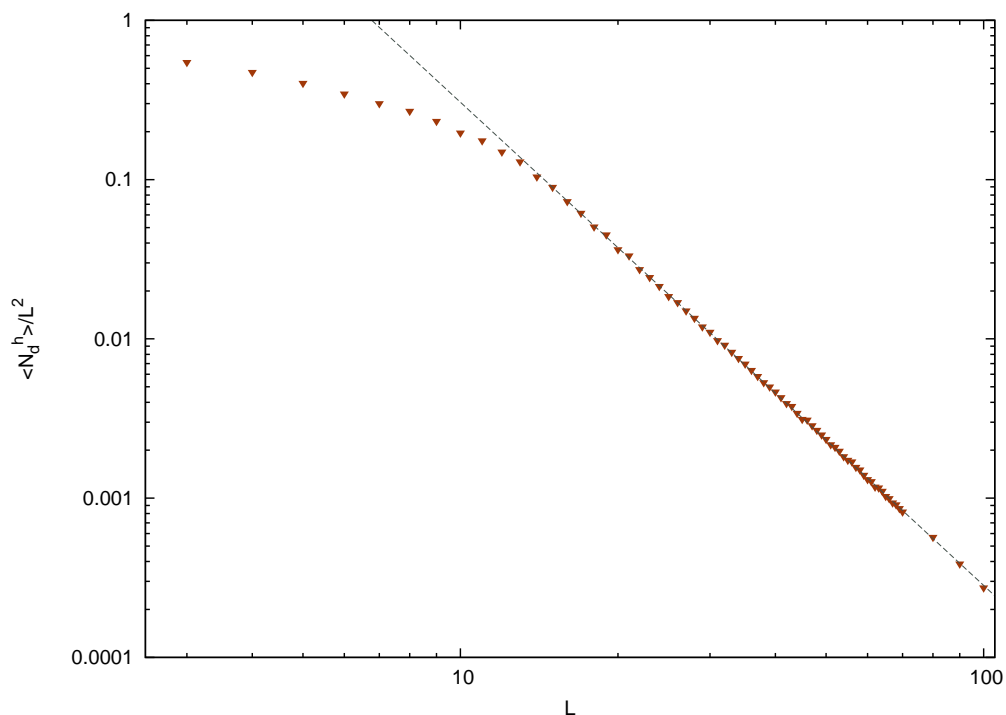
**Figura 2.3** – Diagrama de Fluxo da iteração Cultural no Modelo de Axelrod usando a otimização da Lista de Sítios Ativos

Analisando essa dependência em função da dimensão da rede  $L$  temos a Figura 2.4.



**Figura 2.4** – Dependência do número médio de domínios equiculturais para um regime homogêneo  $\langle N_d^h \rangle$  com a dimensão da rede  $L$  no modelo de Axelrod para  $q = 15$  e  $F = 5$ . Cada símbolo representa uma média sobre  $N_a = 1000$  amostras.

Note que obtivemos um pico no número de domínios, caracterizando o sistema como



**Figura 2.5** – Dependência do número médio de domínios equiculturais para um regime homogêneo  $\langle N_d^h \rangle$  normalizado por  $L^2$  pela dimensão da rede  $L$  no modelo de Axelrod para  $q = 15$  e  $F = 5$  em uma escala dilogarítmica. Cada símbolo representa uma média sobre  $N_a = 1000$  amostras. A reta tracejada é a regressão linear pela Equação 2.8

homogêneo no regime  $L \rightarrow \infty$ , pois a razão  $\frac{\langle N_d^h \rangle}{L^2} \rightarrow 0$ . Obtivemos um resultado similar ao encontrado por Axelrod em seu trabalho (2). A fim de mapearmos essa dependência, normalizaremos o número médio de domínios  $\langle N_d^h \rangle$  pela dimensão da rede ao quadrado  $L^2$  e efetuamos o gráfico dilogarítmico da Figura 2.5. Observa-se claramente dois regimes distintos: um transiente inicial entendido como o pico da Figura 2.4 e o regime homogêneo. Como nosso enfoque é a caracterização do regime homogêneo, aproximaremos a curva obtida pela função abaixo no intervalo  $L > 15$ , resultando nos coeficientes da Tabela 2.1.

$$\frac{\langle N_d^h \rangle}{L^2} = C_h L^{\alpha_h} \quad (2.8)$$

**Tabela 2.1** – Coeficientes da Equação 2.8

Coeficientes	Valor	Erro
$C_h$	330	10
$\alpha_h$	-3,03	0,01

Apesar de correto, devido ao pequeno intervalo de  $L$  em que foi efetuado as simulações e, conseqüentemente, o gráfico da Figura 2.5, não podemos assumir que a dependência

encontrada é geral, ou seja, dado  $L$ ,  $F$ ,  $q$  teremos número médio de domínios  $\langle N_d^h \rangle$  definido pela Função 2.8. Obtivemos então um limite para pequenos valores de  $L$  e regimes homogêneos.

Como citado anteriormente um fator complicador para simularmos o Modelo de Axelrod nos limites assintóticos da dimensão da rede  $L \rightarrow \infty$  é o tempo de relaxação médio  $\langle Tr \rangle$ . Este aumenta estrondosamente com o aumento de  $L$ . Estamos interessados em descobrir qual é a dependência desse crescimento, além de analisarmos uma possível dependência com a homogeneidade do estado absorvente. Para isto efetuamos o gráfico da Figura 2.6. Suporemos como boa aproximação para a curva obtida uma expressão da seguinte forma:

$$\langle Tr^h \rangle = K_h L^{\beta_h}. \quad (2.9)$$

Alterando a escala do gráfico da Figura 2.6 para uma escala dilogarítmica e regredindo linearmente a curva pela expressão 2.9, foram obtidos o gráfico da Figura 2.7 e a tabela de coeficientes 2.2.

**Tabela 2.2** – Coeficientes da Equação 2.9

Coeficientes	Valor	Erro
$K_h$	5,42	0,07
$\beta_h$	4,018	0,003

Vamos efetuar os mesmos procedimentos para o número médio de domínios equiculturais  $\langle N_d^i \rangle$  e para o tempo de relaxação médio  $\langle Tr^i \rangle$  em regimes inomogêneos. Começando então pelo número médio de domínios, temos o gráfico da Figura 2.8.

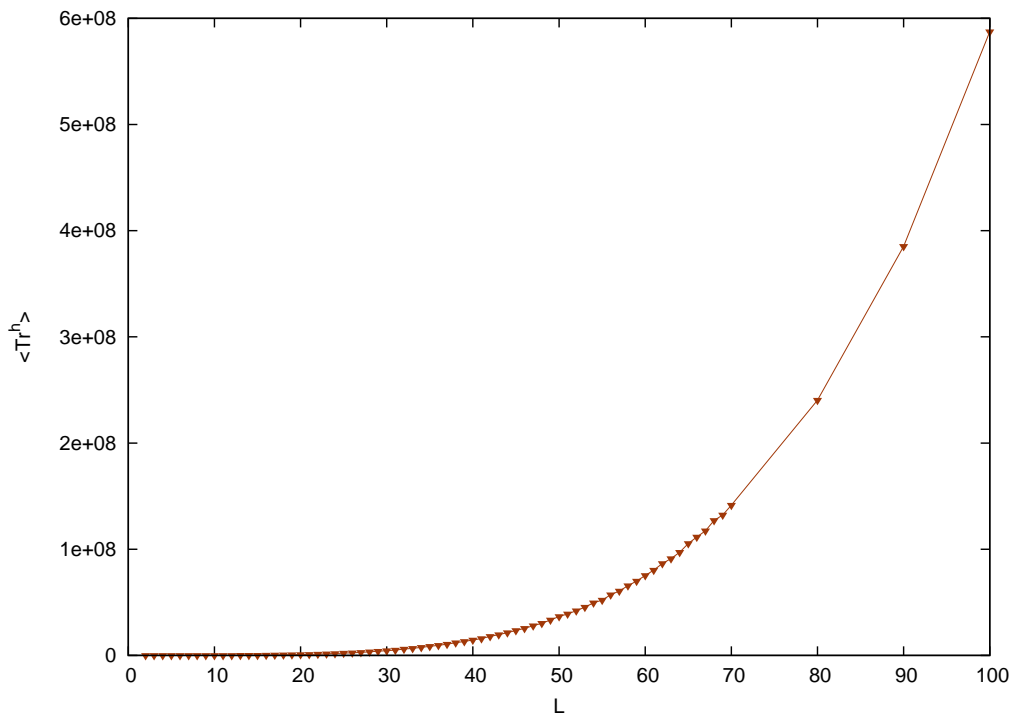
Obtivemos então o que nos parece ser uma dependência da seguinte forma

$$\langle N_d^i \rangle = C_i L^{\alpha_i}. \quad (2.10)$$

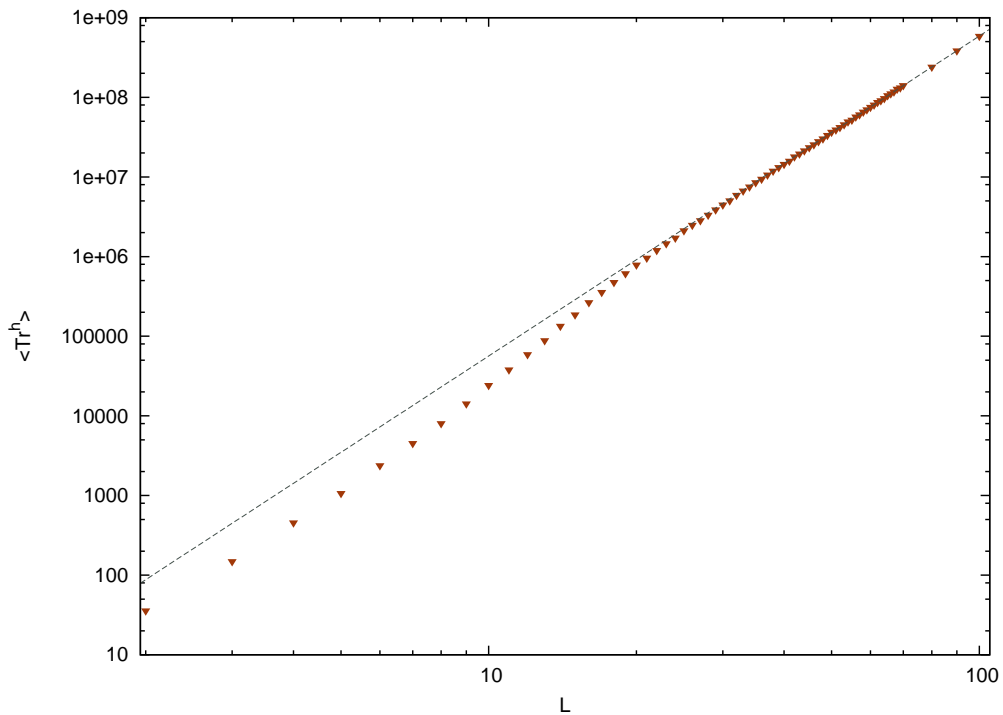
Para comprovarmos a nossa hipótese refaremos o gráfico anterior mudando a escala linear para uma dilogarítmica obtendo a curva da Figura 2.9. Efetuando uma regressão linear pela Função 2.10, obtemos os resultados da tabela 2.3.

**Tabela 2.3** – Coeficientes da Equação 2.9

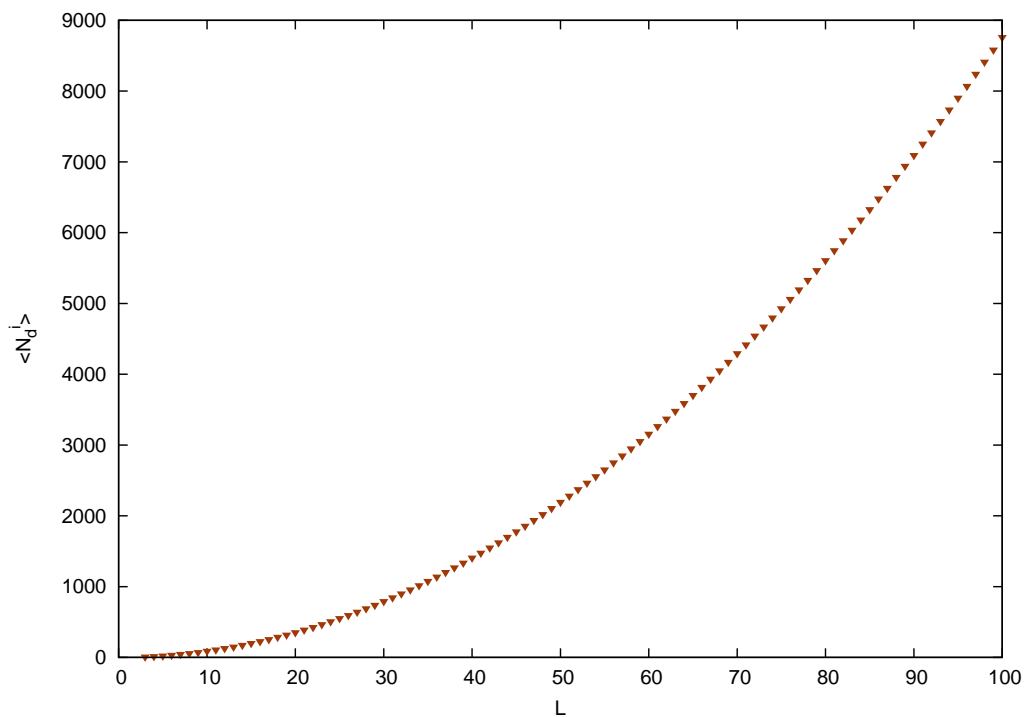
Coeficientes	Valor	Erro
$C_i$	0,8850	0,0004
$\alpha_i$	1,9977	0,0001



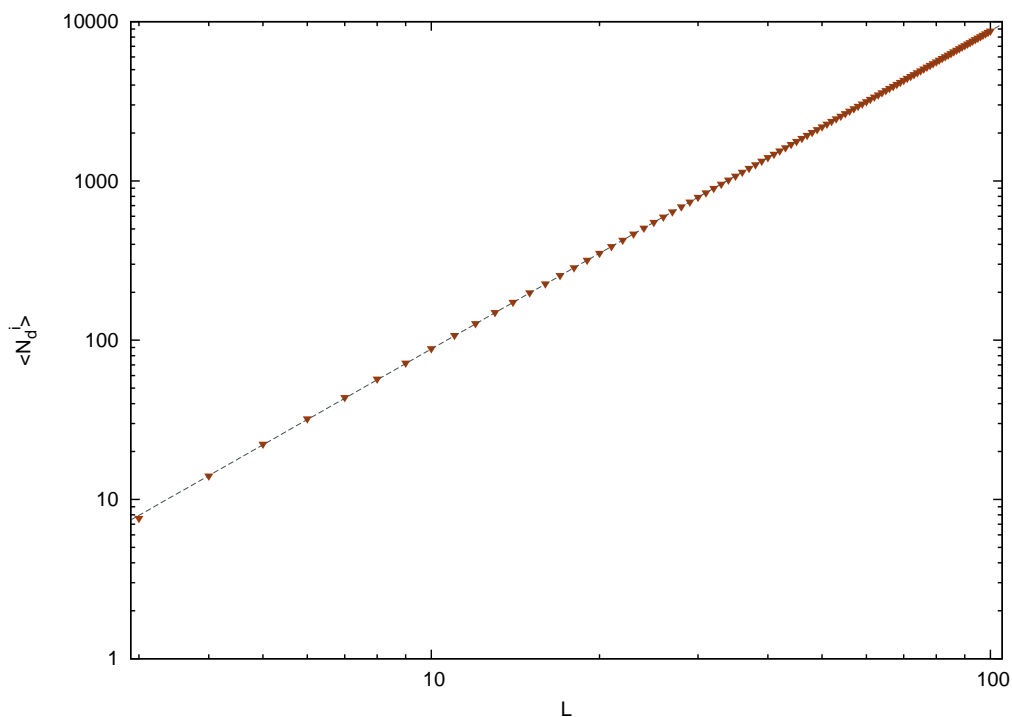
**Figura 2.6** – Dependência do tempo médio de relaxação em regimes homogêneos  $\langle Tr^h \rangle$  pela dimensão da rede  $L$  no modelo de Axelrod para  $q = 5$  e  $F = 15$ . Cada símbolo representa uma média sobre  $N_a = 1000$  amostras.



**Figura 2.7** – Dependência do tempo médio de relaxação em regimes homogêneos  $\langle Tr^h \rangle$  pela dimensão da rede  $L$  no modelo de Axelrod para  $q = 5$  e  $F = 15$  em uma escala dilogarítmica. Cada símbolo representa uma média sobre  $N_a = 1000$  amostras. A reta tracejada é a regressão linear pela Equação 2.9.

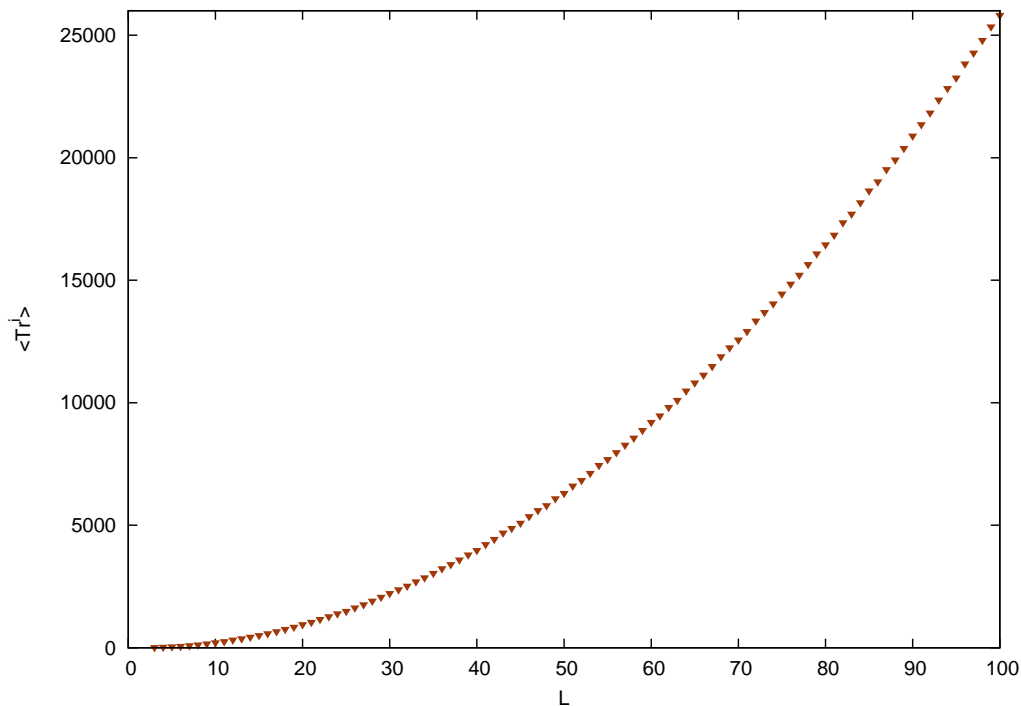


**Figura 2.8** – Dependência do número médio de domínios equiculturais em regimes inhomogêneos  $\langle N_d^i \rangle$  pela dimensão da rede  $L$  no modelo de Axelrod para  $q = 3$  e  $F = 50$ . Cada ponto representa uma média sobre  $N_a = 1000$  amostras.



**Figura 2.9** – Dependência do número médio de domínios equiculturais em regimes inhomogêneos  $\langle N_d^i \rangle$  pela dimensão da rede ao quadrado  $L^2$  no modelo de Axelrod para  $q = 3$  e  $F = 50$  em uma escala dilogarítmica. Cada ponto representa uma média sobre  $N_a = 1000$  amostras. A reta tracejada é a regressão linear pela Equação 2.10

Note que a dependência do número médio de domínios equiculturais esta totalmente correlacionada ao regime do estados absorvente em que nos encontramos, pois, para o regime homogêneo, temos um decréscimo proporcional à  $L^{-1}$ ; já para regimes inhomogêneos observamos um crescimento proporcional à  $L^2$ . Podemos conjecturar que, além do número de domínios, o tempo de relaxação também dependa da homogeneidade dos estados absorventes. A fim de analisarmos essas diferenças efetuaremos o gráfico da Figura 2.10.



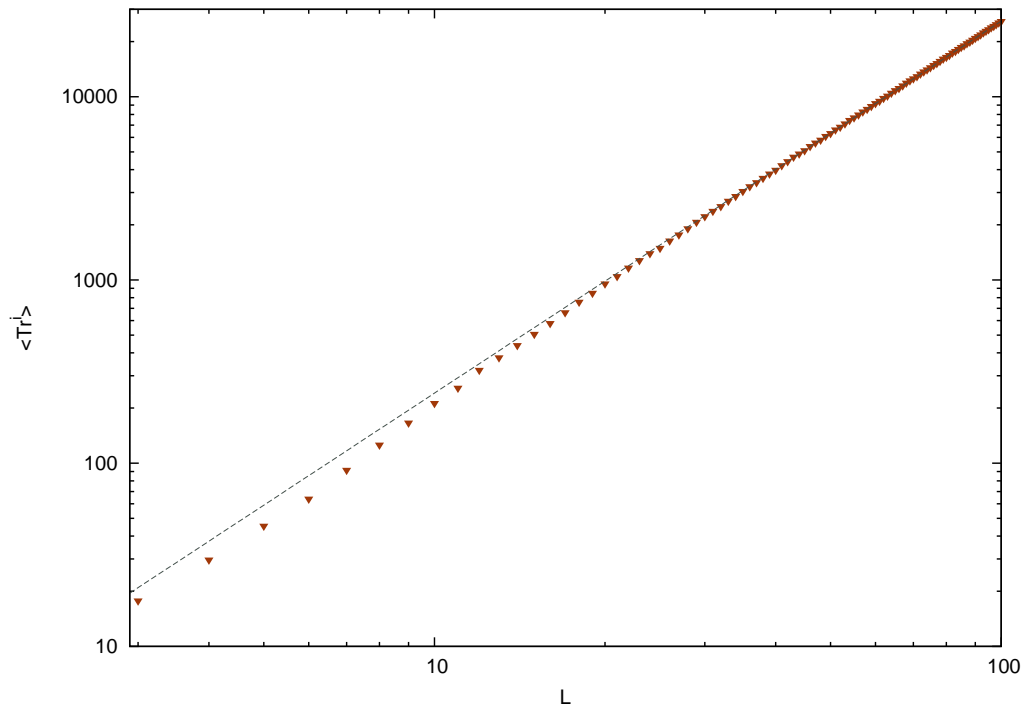
**Figura 2.10** – Dependência do tempo de relaxação médio em regimes inhomogêneos  $\langle Tr^i \rangle$  pela dimensão da rede  $L$  no modelo de Axelrod para  $q = 3$  e  $F = 50$ . Cada símbolo representa uma média sobre  $N_a = 1000$  amostras.

De forma totalmente análoga à executada para todos os resultados obtidos até o presente momento, assumiremos como melhor aproximação para os pontos do gráfico da Figura 2.10 a função abaixo. Alteraremos a escala linear para uma escala dilogarítmica e efetuando a regressão linear, obtemos o gráfico da Figura 2.11 e os coeficientes da Tabela 2.4:

$$\langle Tr^i \rangle = K_i L^{\beta_i}. \quad (2.11)$$

Pensando na dependência do tempo de relaxação médio  $\langle Tr \rangle$  com a dimensão da rede  $L$  como a complexidade do código, notamos um aumento significativo desse para sistemas homogêneos. Concluindo que a maior parte do tempo de computação gasto advém de





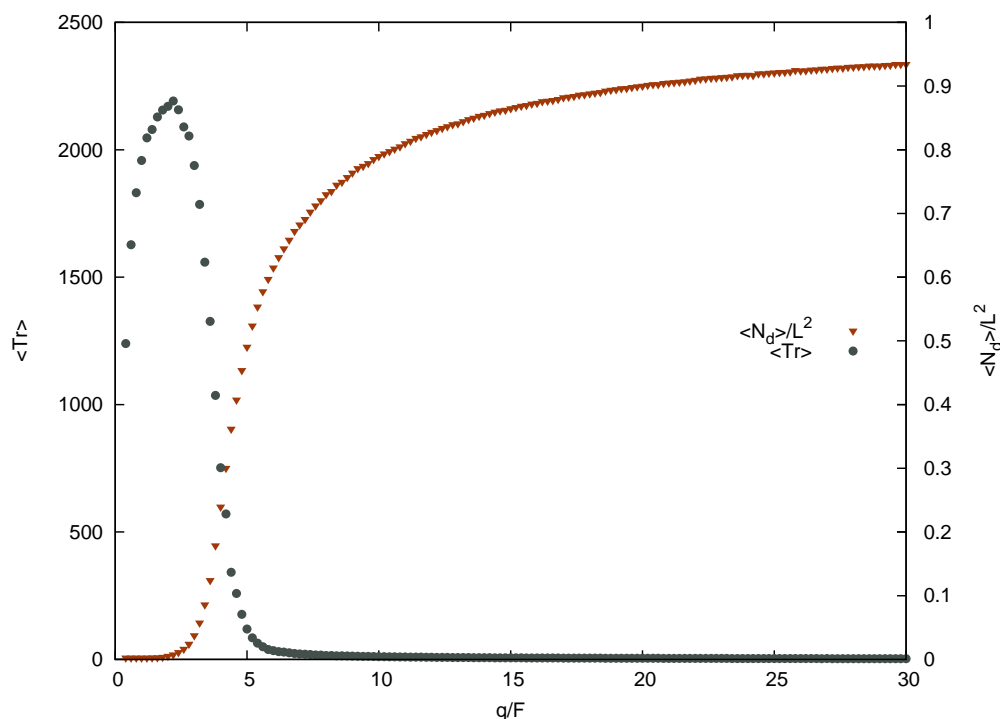
**Figura 2.11** – Dependência do tempo de relaxação médio em regimes inhomogêneos  $\langle Tr^i \rangle$  pela dimensão da rede  $L$  no modelo de Axelrod para  $q = 3$  e  $F = 50$  em uma escala dilogarítmica. Cada símbolo representa uma média sobre  $N_a = 1000$  amostras. A reta tracejada é a regressão linear pela Equação 2.11.

**Tabela 2.4** – Coeficientes da Equação 2.11

Coeficientes	Valor	Erro
$K_i$	2,25	0,01
$\beta_i$	2,031	0,001

amostras cuja a probabilidade de atingir um estado estacionário homogêneo é grande. Demonstrando de uma forma visual, efetuamos a simulação mantendo a dimensão da rede e a dimensão do conjunto de fator cultural fixos em  $L = 20$  e  $F = 5$ , variamos apenas o tamanho do conjunto com os possíveis valores dos fatores culturais  $q$ , tendo então o gráfico da Figura 2.12.

Note que obtivemos claramente uma transição de fase homogênea para uma fase inhomogênea em  $\frac{q}{F} \approx 4$ . É observado o efeito comentado acima: para regimes homogêneos temos um enorme tempo de relaxação e uma simulação praticamente instantânea para regimes inhomogêneos.



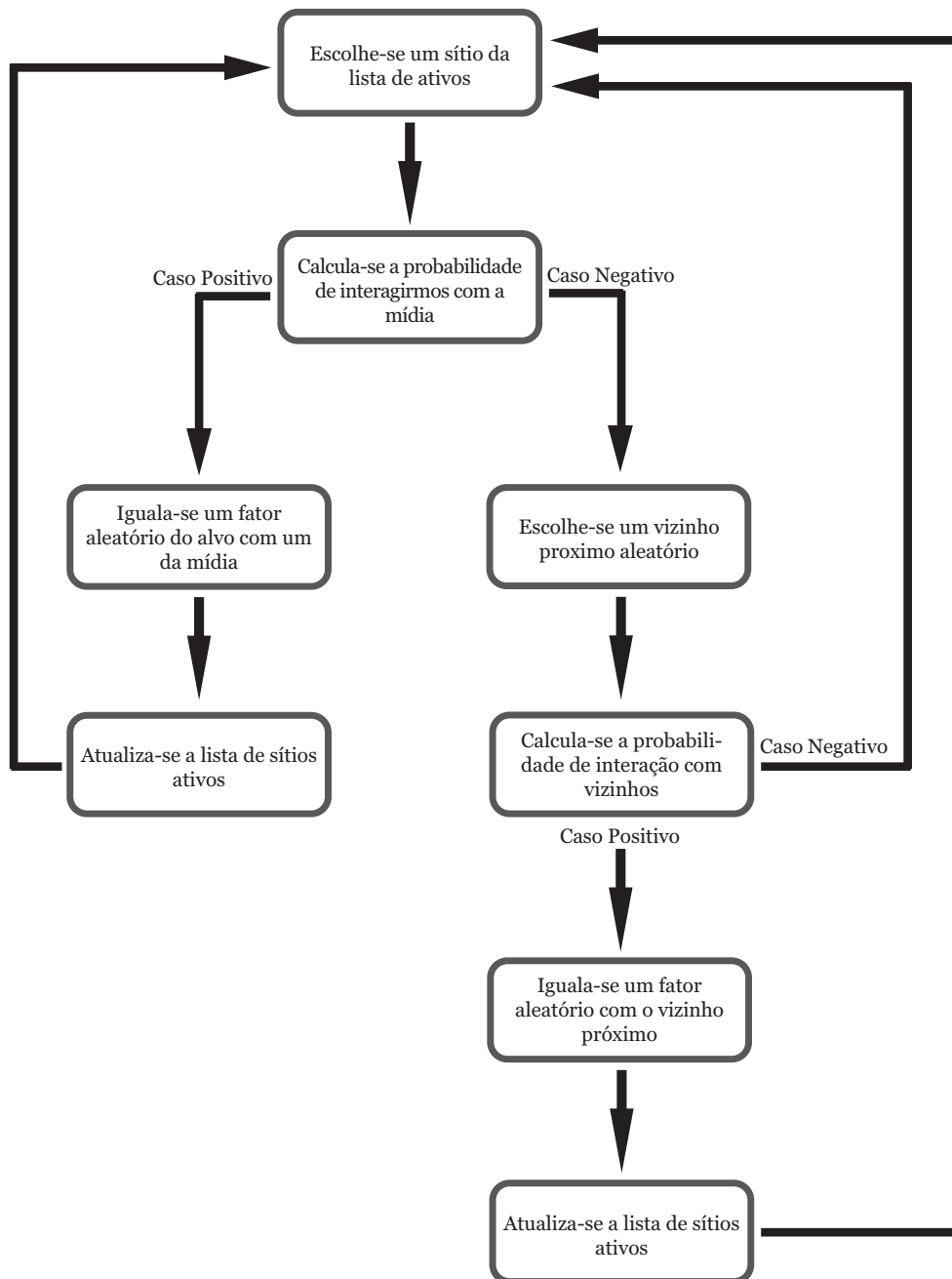
**Figura 2.12** – Dependência do número médio de domínios equiculturais  $\langle N_d \rangle$  e do tempo médio de relaxação  $\langle Tr \rangle$  pela razão da variação dos fatores culturais pela dimensão do vetor de fatores culturais  $\frac{q}{F}$  no modelo de Axelrod para  $L = 20$  e  $F = 5$ . Cada símbolo representa uma média sobre  $N_a = 1000$  amostras.

## 2.2 Mídia Externa

### 2.2.1 Motivação e descrição do Algoritmo

Um fato conhecido dos meios de comunicação em massa é a geração de opinião, de uma outra forma a manipulação do senso comum das massas. Visando a este tipo de efeito é que adicionaremos ao modelo livre uma mídia externa. No jargão físico adicionamos a um sistema que intrinsecamente interage homogenizando-se um campo externo também homogenizador.

A fim de incluirmos este campo externo, usaremos o procedimento proposto por Shibani e colaboradores (5). Esse procedimento consiste em adicionar um vizinho fictício aleatório comum para todos os elementos da rede. Cada elemento possui uma probabilidade  $p$  de interagir com esse vizinho fictício e conseqüentemente, uma probabilidade  $1 - p$  de interagir com seus vizinhos próximos. Note que a intensidade do campo advém do valor pré definido de  $p$ . Aplicando esse novo algoritmo no modelo de Axelrod otimizado pela lista de sítios ativos (vide Figura 2.3), temos a Figura 2.13.

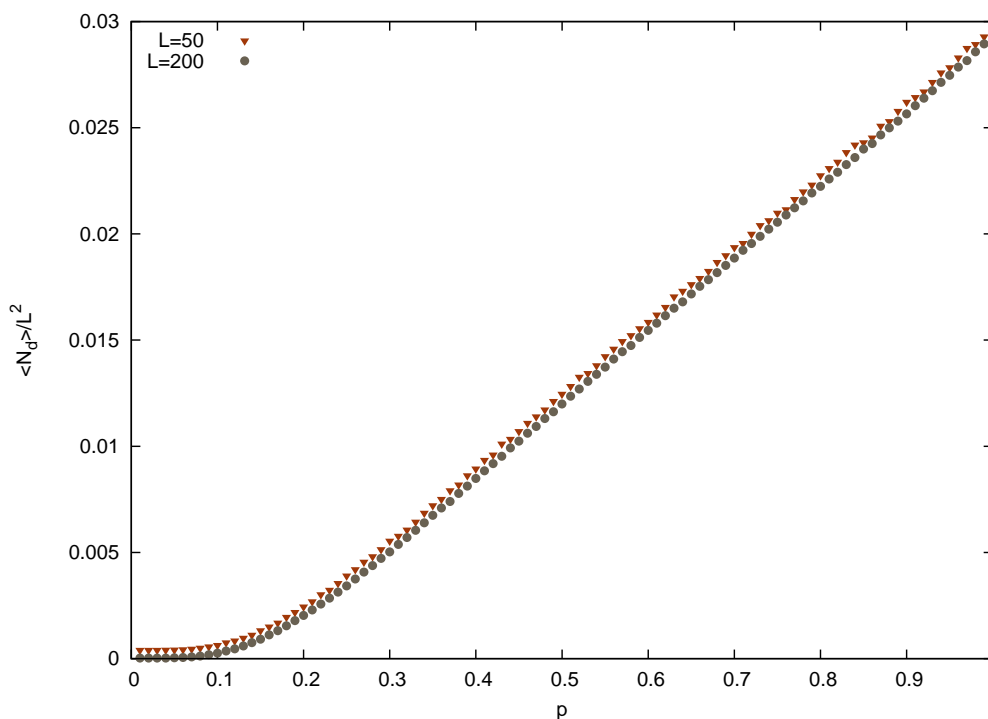


**Figura 2.13** – Diagrama de Fluxo para o Modelo de Axelrod com a mídia Externa proposta por Shibanaí e Colaboradores

## 2.2.2 Resultados

Analogamente ao feito para o modelo de Axelrod livre, iremos analisar o número médio de domínios formados  $\langle N_d \rangle$  em função dos parâmetros da rede  $[L, F, q]$  e da intensidade do campo  $p$ . Temos primeiramente o gráfico de  $\langle N_d \rangle$  para redes de várias dimensões, com seus conjuntos de fatores culturais de tamanho  $F = 5$  e variação de fatores  $q = 2$  em função de  $p$  na Figura 2.14. Escolhemos esses parâmetros porque, ao analisarmos o

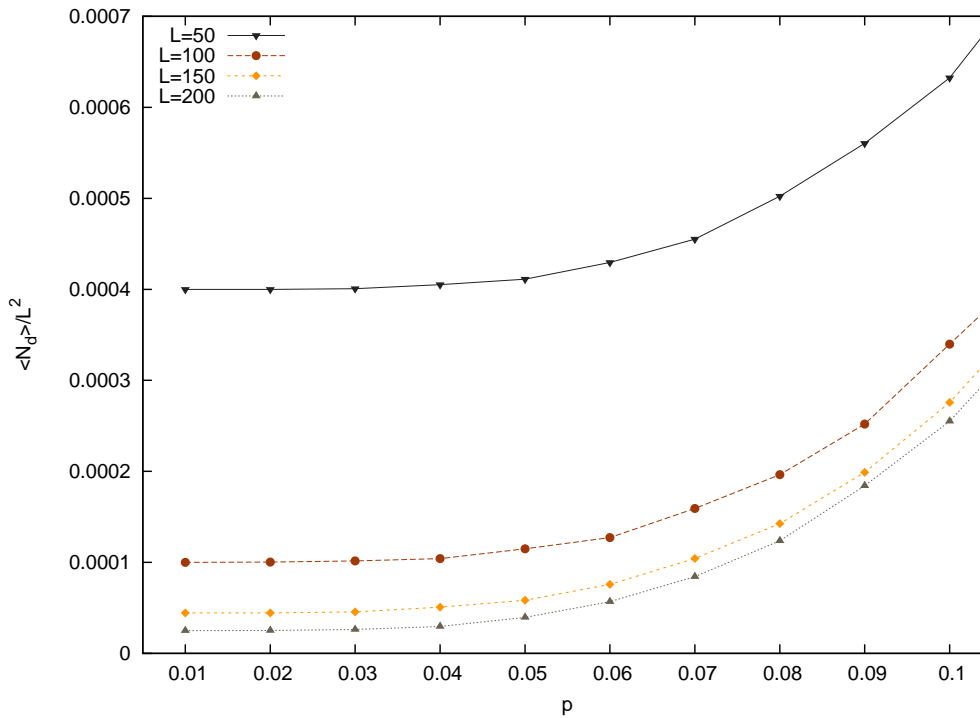
gráfico da Figura 2.12 pudemos observar que, na ausência da mídia externa, o sistema é homogêneo.



**Figura 2.14** – Dependência do número médio de domínios equiculturais  $\langle N_d \rangle$ , com a probabilidade de interação com o sítio fictício  $p$  no modelo de Axelrod com a mídia externa para redes de dimensão descritas no gráfico, cujos conjuntos de fatores culturais tem tamanho  $F = 5$  e variação  $q = 2$ . Cada ponto representa uma média sobre  $N_a = 1000$  amostras.

Note que obtivemos um resultado totalmente contra-intuitivo: a partir de um valor crítico  $p_{crit} \approx 0,005$ , quanto mais forte é aplicado o campo externo homogenizador mais heterogêneo o sistema estabiliza-se, ou seja, o efeito da aplicação do campo aumenta a probabilidade de termos um sistema absorvente heterogêneo. Isto vai contra a nossa intuição pois o efeito do campo atuando em um único sítio tende a homogeneizá-lo. Com este efeito comentado queremos agora descobrir a dependência desse novo sistema com a dimensão da rede  $L$ . Primeiramente, efetuaremos o mesmo gráfico da Figura 2.14 mudando apenas os limites do eixo das abcissas e inserindo mais curvas para diferentes valores de  $L$ . Temos assim o gráfico da Figura 2.15.

Obtivemos um decréscimo de  $\langle N_d \rangle$  dependente da dimensão. Perguntamo-nos agora se no limite  $L \rightarrow \infty$  temos  $\langle N_d \rangle \rightarrow 0$  ou temos um valor assintótico diferente de zero. Vamos então efetuar a análise da dimensão para um valor fixo da intensidade do campo  $p$  e dos parâmetros da rede  $q$  e  $F$ . Para isto efetuamos um conjunto de curvas mostrado na Figura 2.16.



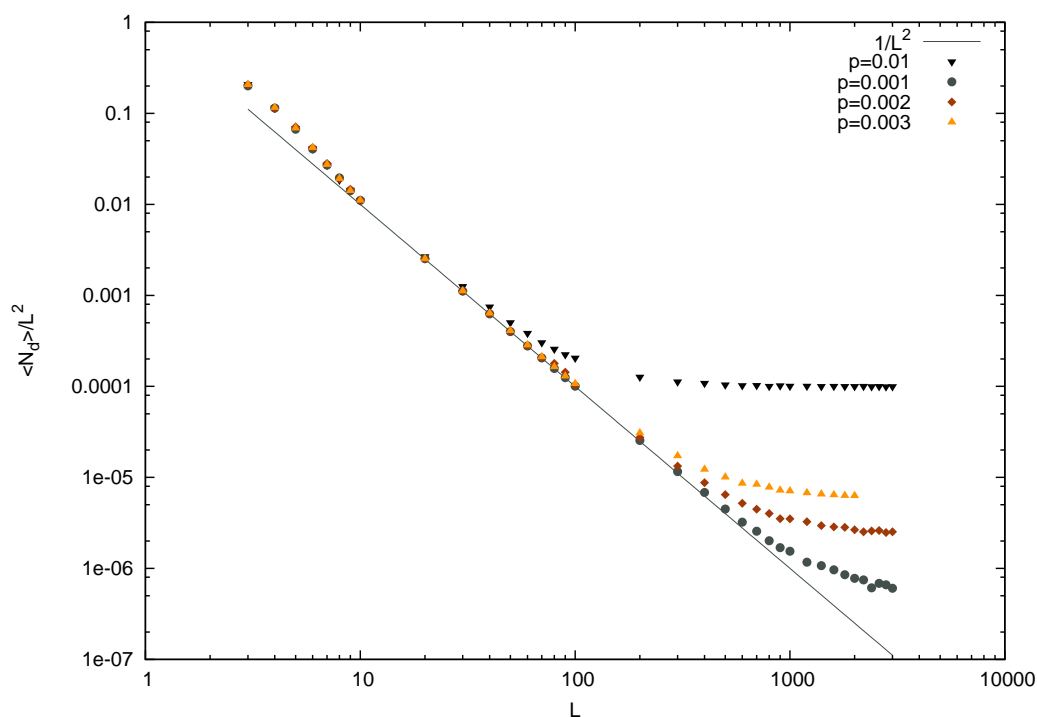
**Figura 2.15** – Dependência do número médio de domínios equiculturais  $\langle N_d \rangle$ , com a probabilidade de interação com o sítio fictício  $p$  no modelo de Axelrod com a média externa para redes descritas no gráfico, cujos conjuntos de fatores culturais tem tamanho  $F = 5$  e variação  $q = 2$ . Cada símbolo representa uma média sobre  $N_a = 1000$  amostras.

Essa figura nos mostra primeiramente uma forma de classificarmos os estados de acordo com sua homogeneidade, isto é, pontos que se aproximam da reta tracejada são estados homogêneos; já os pertencentes às diferentes retas paralelas ao eixo das abcissas são estados inhomogêneos. Concluimos isto porque a reta tracejada é a reta

$$\frac{\langle N_d \rangle}{L^2} = \frac{1}{L^2}. \quad (2.12)$$

É fácil ver que  $\langle N_d \rangle = 1$  ou seja, um regime homogêneo.

Como comentado anteriormente, nossa busca é pela forma como o número médio de domínios  $\langle N_d \rangle$  varia ao variarmos  $L$ , mais especificamente, qual é o valor no limite assintótico  $L \rightarrow \infty$  para um determinado valor de  $p$ . Afinal de contas, devido ao efeito de inhomogeneidade com a aplicação da média externa mostrado anteriormente, assumíamos que aumentando a ordem da matriz o estado final seria homogêneo. Assim, o aumento da rede compensaria a inhomogeneidade inserida pela média. No entanto, é trivial ver, pelo gráfico da Figura 2.16, que, mesmo para campos extremamente fracos, temos no limite assintótico um regime heterogêneo. A fim de obtermos esses regimes, efetuamos o gráfico da Figura 2.17. Tendo estas curvas em mãos assumiremos que a equação mais apropriada



**Figura 2.16** – Dependência do número médio de domínios equiculturais  $\langle N_d \rangle$  normalizado pela dimensão da rede ao quadrado  $L^2$  com a dimensão da rede  $L$  no modelo de Axelrod com a mídia externa para probabilidades de interação  $p$  descritas no gráfico, cujos conjuntos de fatores culturais tem tamanho  $F = 3$  e variação  $q = 3$ . Cada símbolo representa uma média sobre  $N_a = 1000$  amostras.

para esses pontos é a que segue:

$$\frac{\langle N_d \rangle}{L^2} = \langle N_d \rangle_\infty + \frac{\Gamma}{L^\delta}. \quad (2.13)$$

É de fácil entendimento a denominação do primeiro termo deste polinômio pois

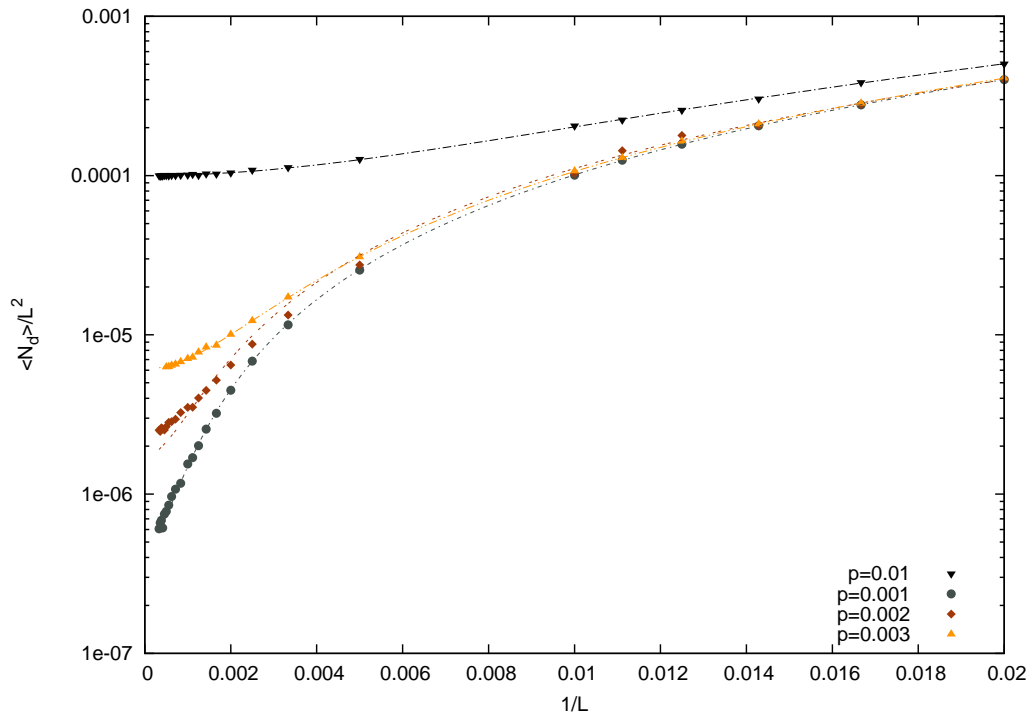
$$\langle N_d \rangle_\infty = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\langle N_d \rangle}{L^2}. \quad (2.14)$$

Efetuada então a regressão linear dos pontos obtidos pela Equação 2.13 obtivemos os coeficientes da Tabela 2.5.

**Tabela 2.5** – Coeficientes da Equação 2.13 para vários valores de  $p$ .

$p$	$\langle N_d \rangle_\infty$	$\Gamma$	$\delta$
0,001	$(4,7 \pm 0,5)10^{-7}$	$0,970 \pm 0,007$	$1,992 \pm 0,002$
0,002	$(2 \pm 1)10^{-6}$	$0,60 \pm 0,09$	$1,87 \pm 0,04$
0,003	$(6,1 \pm 0,2)10^{-6}$	$1,05 \pm 0,02$	$2,010 \pm 0,005$
0,01	$(1,001 \pm 0,004)10^{-4}$	$0,94 \pm 0,05$	$1,98 \pm 0,01$

Podemos concluir com apenas estes dados que  $\delta \approx 2$  e  $\Gamma \approx 1$ . Para finalmente



**Figura 2.17** – Dependência do número médio de domínios equiculturais  $\langle N_d \rangle$  normalizado pela dimensão da rede ao quadrado  $L^2$  com 1 menos a dimensão da rede  $L$  no modelo de Axelrod com a média externa para probabilidades de interação  $p$  descritas no gráfico, cujos conjuntos de fatores culturais tem tamanho  $F = 3$  e variação  $q = 3$ . Cada símbolo representa uma média sobre  $N_a = 1000$  amostras.

mapearmos a dependência de  $\langle N_d \rangle_\infty$  com a intensidade do campo  $p$  vamos efetuar essas simulações para diferentes valores de  $p$  obtendo assim o gráfico da Figura 2.18.

Vamos assumir como boa aproximação desses dados a função

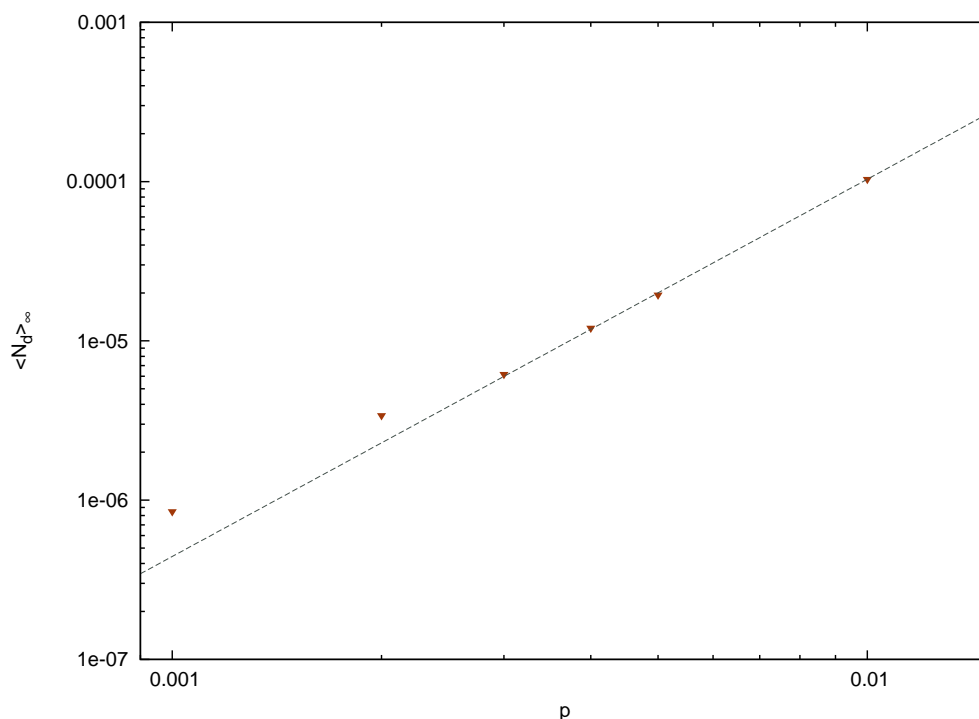
$$\langle N_d \rangle_\infty = C_\infty p^{\alpha_\infty}. \quad (2.15)$$

Efetuando a regressão dos pontos da Figura 2.18, obtemos a Tabela 2.6.

**Tabela 2.6** – Coeficientes da Equação 2.15

Coeficientes	Valor	Erro
$C_\infty$	5,6	0,9
$\alpha_\infty$	2,37	0,04

A quantidade reduzida de pontos na Figura 2.18 é devido ao grande tempo computacional necessário para obtermos cada ponto acima de  $L = 1000$  no gráfico da Figura 2.16. Assim, não foi possível ainda obtermos uma dependência analítica explícita do número médio de domínios equiculturais no regime  $L \rightarrow \infty$  em função de  $p$ . O enfoque futuro será aumentar a eficiência do programa utilizado paralelismo computacional (MPI



**Figura 2.18** – Dependência do número médio de domínios equiculturais  $\langle N_d \rangle$  normalizado pela dimensão da rede ao quadrado  $L^2$  no regime  $L \rightarrow \infty$  com a intensidade do campo  $p$  no modelo de Axelrod com a mídia externa, cujos conjuntos de fatores culturais tem tamanho  $F = 3$  e variação  $q = 3$ . A reta tracejada é a regressão linear pela equação 2.15.

e OpenMp). Apesar de não termos a dependência analítica explícita, este resultado nos mostra que não há transições de fase neste regime, como era conjecturado por González e colaboradores (10). O que temos é sempre um sistema inomogêneo no limite assintótico de  $L$  e independente dos outros parâmetros da rede. Com isso, a ideia de termos um valor crítico tanto para  $p$  como para a razão  $\frac{F}{q}$  em que distingui-se qual regime o sistema evolui torna-se equivocada.

## 2.3 Modificações no Modelo

Mostramos na secção anterior a inclusão da mídia externa, a qual é uma forma de modificarmos o modelo proposto por Axelrod. No entanto, não apenas essa inclusão é válida na modificação da modelagem original. Pode-se pensar em alterar a topologia do sistema, incluir outros tipos de interações não apenas vizinhos próximos, alterar a forma do calculo da probabilidade, incluir um *drift* cultural, ou seja, alterações aleatórias de fatores culturais, etc.

No âmbito da mudança de topologia, temos duas possíveis categorias de mudanças.



A primeira visa o aumento do número de vizinhos próximos, ou seja, mudamos da vizinhança de von Neumann (vide Figura 2.1) para, por exemplo, a vizinhança de Moore (vide Figura 3.1). No capítulo seguinte será efetuada uma discussão detalhada dos efeitos dessas mudanças. A segunda categoria visa uma mudança mais drástica, ou seja, será feito um grafo dos vizinhos interagentes e será adicionado um efeito de interação a distância, o que seria uma possível modelagem para a internet e outros meios de comunicação não necessariamente homogenizadores globais, como tratado até o presente momento.

Vimos que a nossa intuição não é útil para prevermos o efeito na homogeneidade dos estados absorventes ao inserirmos uma modificação no modelo original. No entanto, conhece-se da literatura uma grande quantidade de modificações na modelagem original. Por exemplo Kennedy (3) alterou a forma explícita da probabilidade (vide Equação 2.4) e Klemm e colaboradores (4) incluíram um ruído externo, o *drift* cultural, entre inúmeros outros trabalhos. Estes, em específico, resultaram em aumentos da homogeneidade. Isto nos mostra uma fragilidade da inomogeneidade cultural, tornando a mídia externa global uma modificação interessante por ir contra os resultados canônicos.

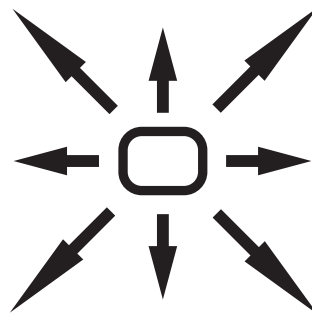
## 3 Modelo de Viés de Frequência

### 3.1 O Modelo Autômato

#### 3.1.1 Motivação e Descrição do Modelo

Domenico Parisi e colaboradores, em seu trabalho (8), tem como motivação obter os mesmos resultados do modelo de Axelrod, ou seja, a partir de uma dinâmica homogeneizadora obter um estado estacionário inhomogêneo, mudando, no entanto, o paradigma sequencial do modelo de Axelrod (2) para um autômato e a interação cultural bipolar por um de viés de frequência (11).

Da mesma forma que no modelo de Axelrod, cada indivíduo é caracterizado por um vetor de fatores culturais de dimensão  $F$ . Todavia, neste caso será atribuído a cada fator valores booleanos, 0 e 1. Exceto pelo conjunto de vizinhos influenciadores, a topologia do sistema permanece, sendo a rede quadrada de lado  $L$  com condições periódicas de contorno e estados iniciais aleatórios. Agora cada sítio interage com os primeiros e segundos vizinhos, como mostrado na Figura 3.1.



**Figura 3.1** – Primeiros e segundos vizinhos de uma rede quadrada (vizinhança de Moore).

Como citado anteriormente, o intercâmbio cultural entre indivíduos, neste caso, não é mais a interação bipolar, como no modelo de Axelrod: teremos uma assimilação cultural, ou seja, a cada passo temos que os fatores culturais do sítio alvo receberão o fator respectivo mais abundante entre os seus vizinhos próximos. Essa forma de interação caracteriza

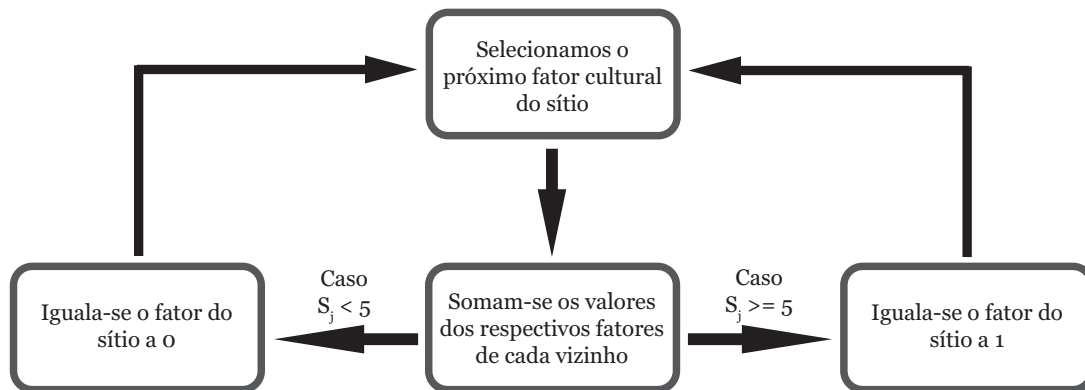
a regra da maioria e nomeia o modelo viés de frequência. Note que, pela topologia definida acima (vide Figura 3.1), teremos um número par de vizinhos; conseqüentemente um critério de desempate deve ser definido. Para o desempate, neste caso, computaremos também o valor do fator do próprio sítio alvo. Uma discussão mais detalhada será feita posteriormente, mostrando os efeitos nos estados absorventes decorrentes da escolha do critério de desempate.

### 3.1.2 Algoritmo

Como estamos supondo uma evolução do tipo autômato, o código executará a assimilação cultural para todos os sítios simultaneamente, definindo assim o tempo  $T$ , cuja denominação será ciclo. Em cada iteração calcula-se a seguinte soma para todos os fatores de cada sítio da rede,

$$S_j = \sum_{i=0}^8 \Psi_{i,j}. \quad (3.1)$$

Mantendo a notação do capítulo anterior, sabemos que  $i$  denota os sítios e  $j$  os fatores. Por definição  $i = 0$  será o sítio alvo e  $i > 0$  seus respectivos primeiros e segundos vizinhos. Devido à propriedade booleana dos fatores e a condição periódica de contorno, basta comparar o valor de  $S_j$  com 5 para descobrirmos qual é o fator mais abundante neste caso, e com isso, alterarmos valor do sítio alvo. Temos graficamente o algoritmo na Figura 3.2.



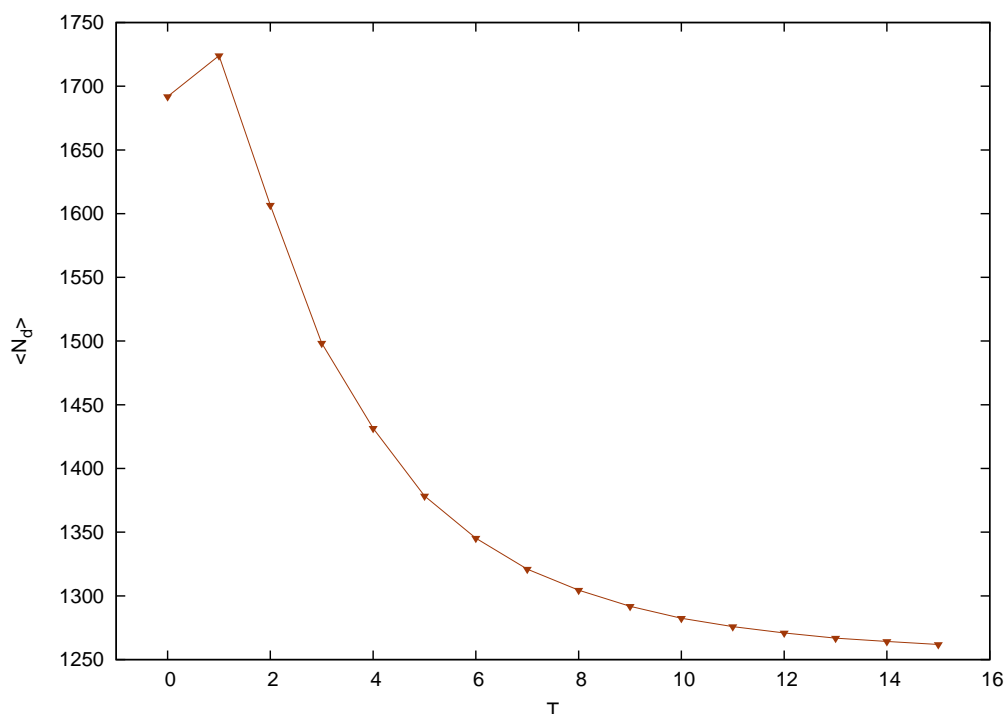
**Figura 3.2** – Diagrama de Fluxo da Assimilação Cultural.

Como comentado anteriormente, essa iteração é repetida simultaneamente em todos os sítios e, em seguida, é atualizada a matriz do sistema. de forma análoga à do modelo de Axelrod, as iterações são efetuadas até o sistema atingir um estado absorvente. Calcularemos então o número de domínios equiculturais, que, neste caso, são todos aqueles com tamanho maior que a unidade. O algoritmo usado para o cálculo desses domínios é

o descrito no Apêndice B.

### 3.1.3 Resultados

O algoritmo discutido acima foi executado em uma rede quadrada com  $L = 100$ , sendo o número de fatores culturais de cada sítio  $F = 6$ . Cada ponto do gráfico da Figura 3.3 representa uma média sobre  $N_a = 300$  amostras. Essa figura mostra o número médio de domínios  $\langle N_d \rangle$  em função do número de ciclos  $T$ .



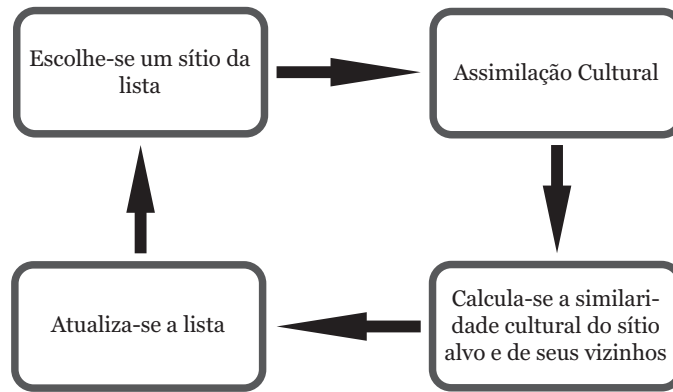
**Figura 3.3** – Dependência do número médio de domínios equiculturais  $\langle N_d \rangle$  com o número de ciclos  $T$  no modelo Autômato de Parisi e colaboradores para  $L = 100$  e  $F = 6$ . Cada símbolo representa uma média sobre  $N_a = 1000$  amostras.

Obtivemos um comportamento decrescente do número médio de domínios  $\langle N_d \rangle$  em função do número de ciclos. Sabemos que a grande quantidade de domínios no início da simulação advém da aleatoriedade inicial definida pelo algoritmo. O fato interessante é que apesar do número diminuir com o passar do tempo, ele não atinge o valor mínimo possível, que seria 1, ou seja, o sistema em um regime homogêneo. Mostramos então que o modelo estudado por Parisi e colaboradores (8) possui a mesma propriedade não intuitiva do modelo de Axelrod: ambos são modelos estocásticos com interações homogenizadoras atingindo sistemas absorventes inhomogêneos.

## 3.2 O Modelo Sequencial

### 3.2.1 Modificações do Algoritmo

Neste novo modelo voltaremos ao paradigma sequencial, mantendo a assimilação cultural proposta por Parisi e colaboradores. Basicamente, o algoritmo utilizado será uma combinação da lista de sítios ativos proposta no capítulo anterior com o mecanismo de assimilação cultural descrito acima, conforme ilustrado na Figura 3.4.



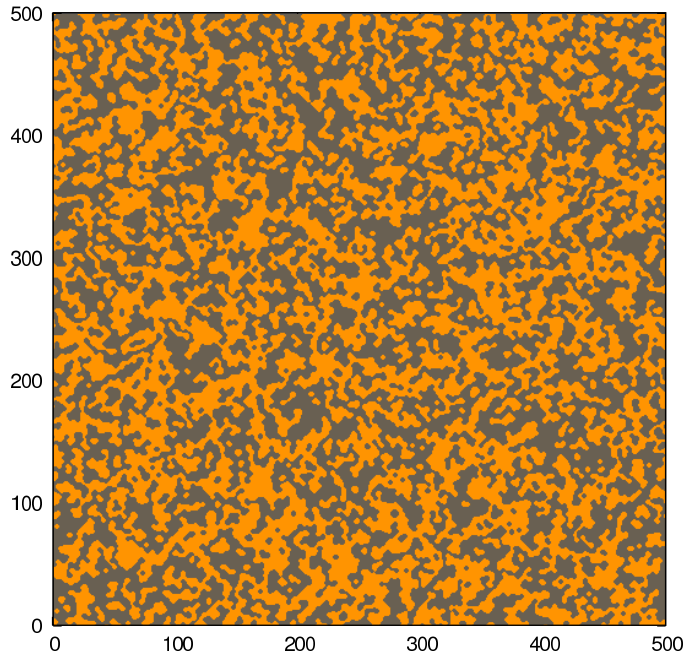
**Figura 3.4** – Diagrama de Fluxo da Assimilação Cultural Sequencial.

É importante ressaltar que o passo denominado *Assimilação Cultural* é a repetição  $F$  vezes do algoritmo da Figura 3.2. Da mesma forma que os modelos anteriores, esta iteração repete-se até atingirmos os estados absorventes. Só então calculamos as propriedades dos domínios equiculturais e do tempo para atingirmos o estado absorvente.

### 3.2.2 Resultados

Os dados retornados pelo programa são as médias do número de domínios  $\langle N_d \rangle$  e do tempo de relaxação normalizado  $\langle Tr \rangle$ , onde utilizamos  $N_a = 1000$  amostras independentes. Definimos o tempo de relaxação normalizado como o número de iterações executadas até ser atingido um estado absorvente dividido pelo número de sítios na rede,  $L^2$ . Lembremos que um sistema é caracterizado ao darmos apenas sua ordem  $L$  e a dimensão do vetor cultural  $F$ , pois ainda estamos supondo valores booleanos para os fatores culturais. Primeiramente exemplificamos um estado estacionário para uma rede de dimensão  $L = 500$  e  $F = 1$  na Figura 3.5.

Queremos analisar a dependência do número médio de domínios existentes nos estados estacionários (vide Figura 3.5) em função dos parâmetros da rede  $L$  e  $F$ , e, para isto,



**Figura 3.5** – Exemplo de um estado absorvente inhomogêneo de uma rede de dimensão  $L = 500$  e  $F = 1$  para a dinâmica de Viés de Frequência com a vizinhança de Moore. Os pontos amarelos são sítios com  $\Psi_{i0} = 1$  e os pontos cinzas  $\Psi_{i0} = 0$ .

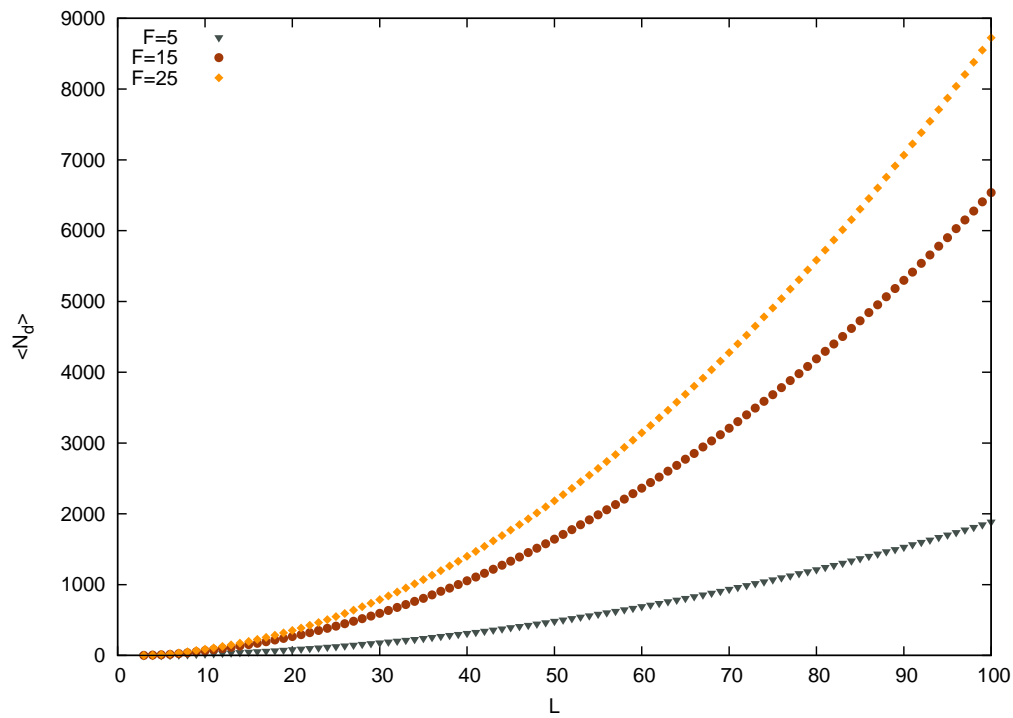
confeccionamos os gráficos do número médio de domínios equiculturais em função da dimensão linear  $L$  (Figura 3.6) e da dimensão ao quadrado  $L^2$  (Figura 3.7) da rede para alguns valores de  $F$ . Como obtivemos retas que passam pela origem para o gráfico em função de  $L^2$  (Figura 3.7), concluímos que a dependência do número médio de domínios deve ser dada pela relação

$$\langle N_d \rangle = \Gamma \cdot L^2. \quad (3.2)$$

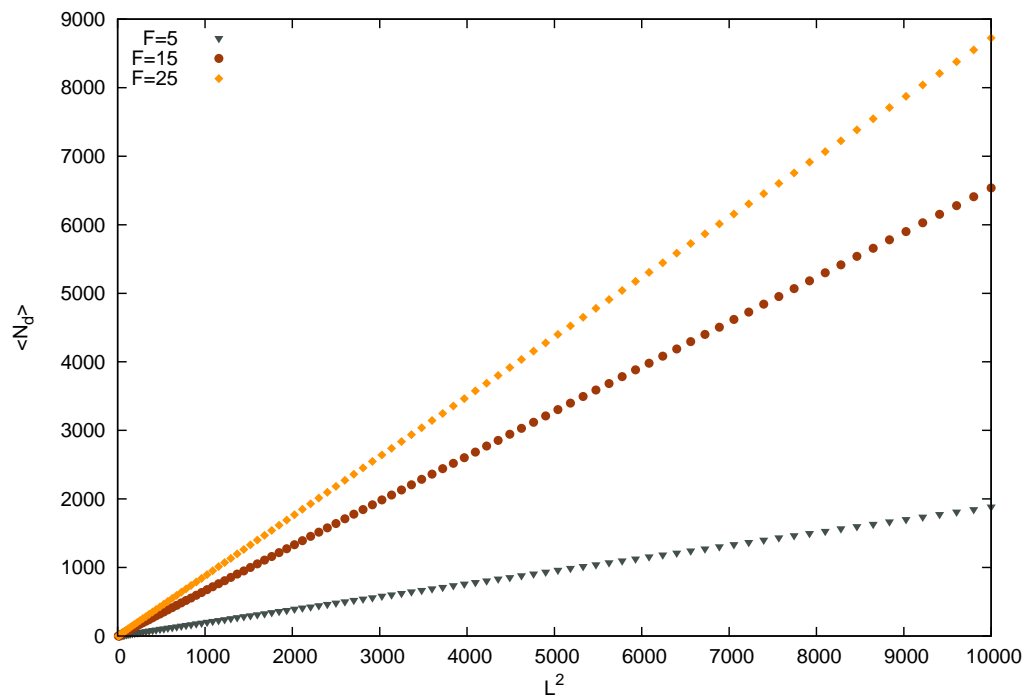
Com o propósito de obtermos a dependência de  $\Gamma$  com  $F$  efetuamos as simulações descritas acima, variando  $F$  desde 1 até 100, ou seja, para cada valor de  $F$  variamos a dimensão  $L$  de 3 a 100. Em seguida calculamos o coeficiente angular  $\Gamma$  das retas resultantes e efetuamos um gráfico de  $\Gamma$  em função do número de fatores culturais  $F$ . Os resultados são apresentados na Figura 3.8. Vamos supor que a dependência de  $\Gamma$  com  $F$  seja

$$\Gamma = 1 - Ce^{-bF}. \quad (3.3)$$

Para comprovarmos esta hipótese efetuaremos o gráfico da figura 3.9. Note que obtivemos uma reta, comprovando a hipótese da dependência do tipo exponencial. Efetuando então uma regressão linear dos pontos obtidos através da expressão 3.3 obtivemos os valores dos coeficientes  $C$  e  $b$  com seus respectivos desvios, conforme mostrado na Tabela 3.1.



**Figura 3.6** – Dependência do número médio de domínios equiculturais  $\langle N_d \rangle$  com a dimensão linear  $L$  da rede quadrada no modelo Sequencial para valores de  $F$  incluídos na figura. Cada símbolo representa uma média sobre  $N_a = 1000$  amostras.



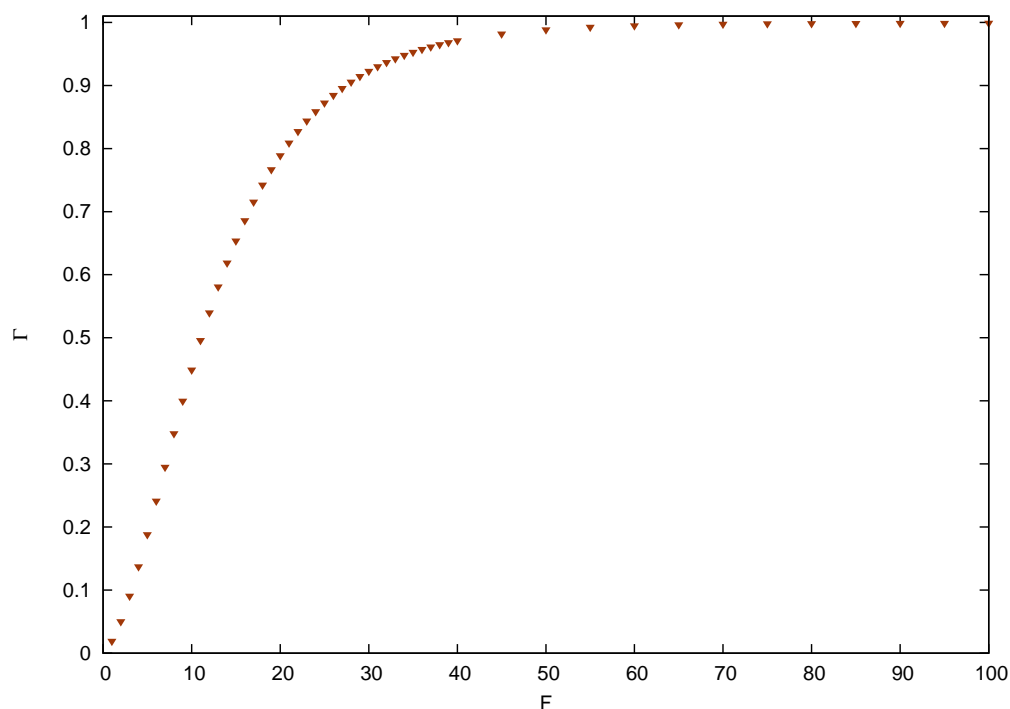
**Figura 3.7** – Dependência do número médio de domínios equiculturais  $\langle N_d \rangle$  com a dimensão quadrática  $L^2$  da rede no modelo Sequencial para valores de  $F$  incluídos na figura. Cada símbolo representa uma média sobre  $N_a = 1000$  amostras.

**Tabela 3.1** – Coeficientes da equação 3.3

Coeficientes	Valor	Erro
C	1,484	0,008
b	0,0977	0,0004

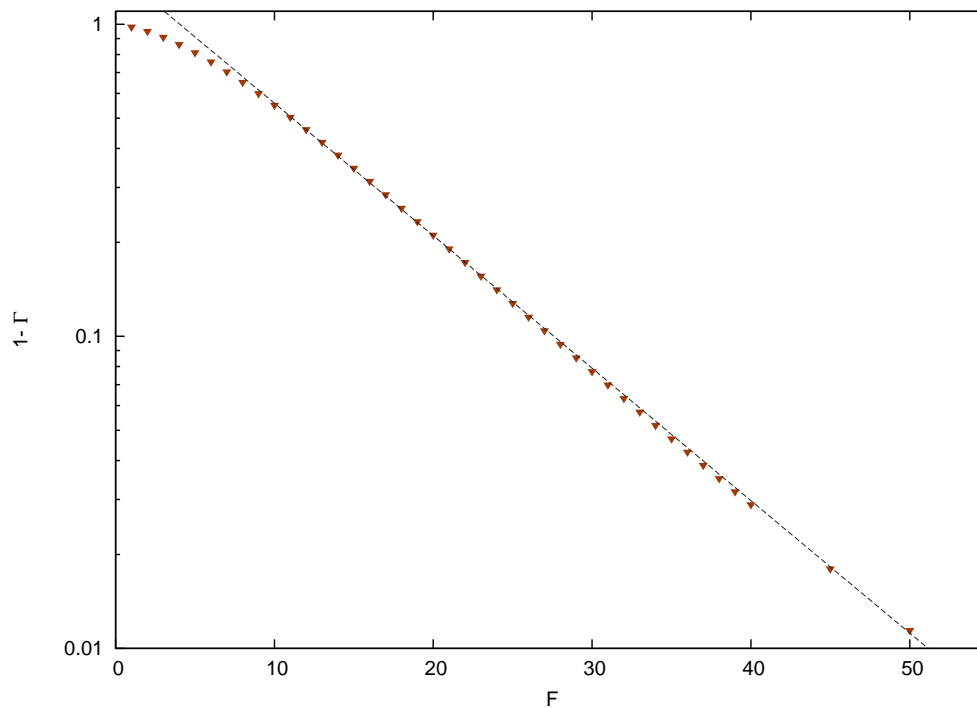
Com o sistema caracterizado, podemos obter algumas propriedades dos regimes assintóticos. Para  $F \rightarrow \infty$  obtemos  $\langle N_d \rangle = L^2$ , ou seja, a quantidade de fatores e consequentemente, a diversidade cultural é tão grande que cada elemento da rede é distinto de todos os outros. Além disso, obtemos da Figura 3.8 que a razão  $\langle N_d \rangle / L^2$  permanece constante no regime assintótico,

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\langle N_d \rangle}{L^2} = \Gamma. \quad (3.4)$$

**Figura 3.8** – Dependência do coeficiente angular  $\Gamma$  com a dimensão do vetor de fatores culturais  $F$  no modelo Sequencial com topologia de primeiros e segundos vizinhos.

Efetuada uma análise similar para o tempo de relaxação médio normalizado, apresentamos primeiramente o gráfico de  $\langle Tr \rangle$  como função de  $L$  na Figura 3.10. Observa-se um transiente para o tempo de relaxação no regime de  $L$  pequeno e, em seguida, um valor constante deste. Suporemos, como primeira aproximação, o tempo de relaxação como sendo constante para qualquer valor de  $L$ . A expressão seguinte nos mostra a dependência





**Figura 3.9** – Dependência de  $1 - \Gamma$  com a dimensão do vetor de fatores culturais  $F$  no modelo Sequencial com topologia de primeiros e segundos vizinhos em escala monolgarítmica. A linha tracejada é a regressão linear pela função 3.3.

do tempo de relaxação médio com a dimensão:

$$\langle Tr \rangle = \Delta. \quad (3.5)$$

Para encontrarmos a dependência de  $\Delta$  com  $F$ , efetuaremos o gráfico de  $\langle Tr \rangle$  no limite assintótico ( $L \rightarrow \infty$ ) contra  $F$  da Figura 3.11. Interpolaremos estes pontos pela função

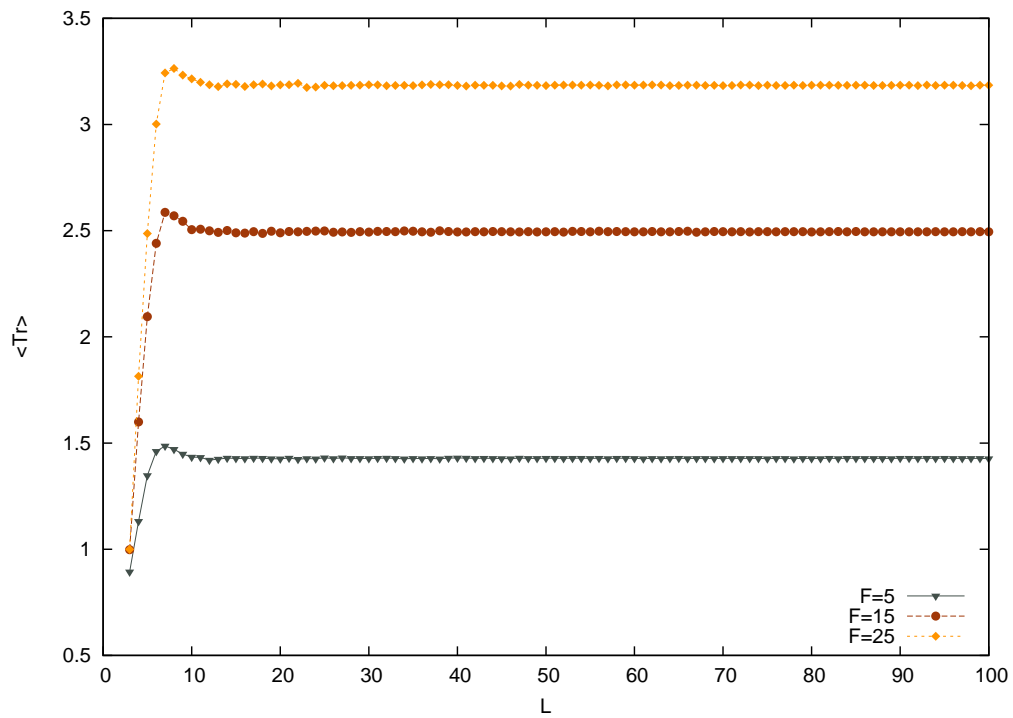
$$\langle Tr \rangle = AF^\alpha, \quad (3.6)$$

obtendo os resultados da Tabela 3.2.

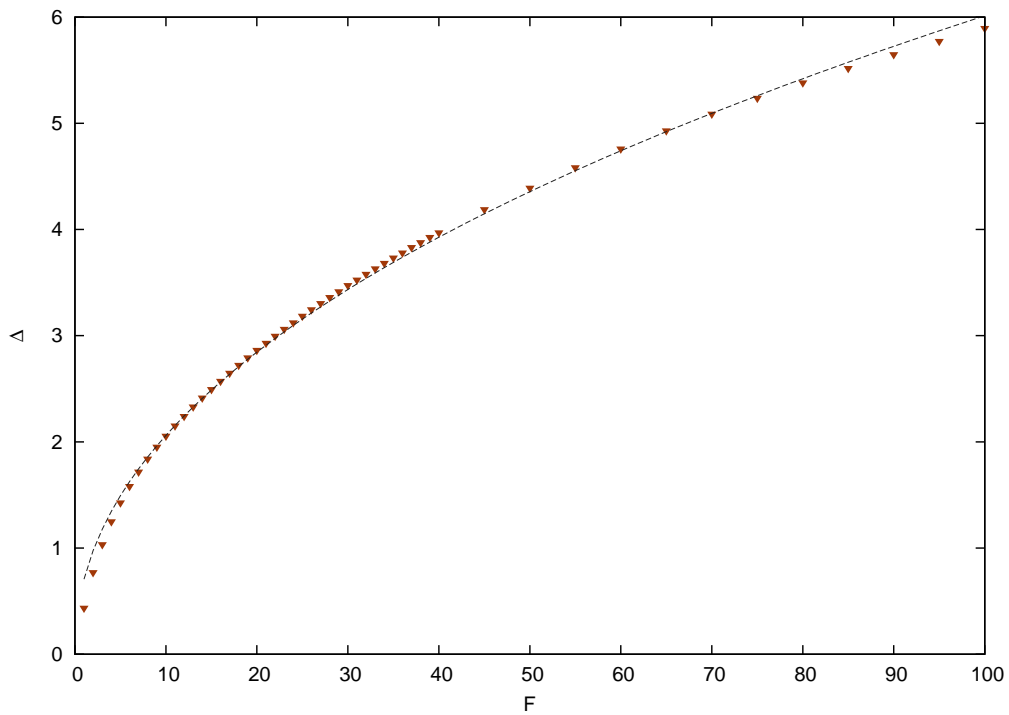
**Tabela 3.2** – Coeficientes da equação 3.6

Coeficientes	Valor	Erro
A	0,71	0,01
$\alpha$	0,465	0,004

Concluimos então que, no limite  $F \rightarrow \infty$ ,  $\langle Tr \rangle \rightarrow \infty$ , o que já era esperado, pois quanto maior o vetor de fatores culturais maior é a quantidade de possibilidades culturais



**Figura 3.10** – Dependência do tempo de relaxação normalizado  $\langle Tr \rangle$  com a dimensão linear  $L$  da rede quadrada no modelo de Viés de Frequência para valores de  $F$  incluídos na figura. Cada símbolo representa uma média sobre  $N_a = 1000$  amostras.



**Figura 3.11** – Dependência do tempo de relaxação normalizado assintótico  $\Delta$  pela dimensão do vetor de fatores culturais  $F$  no modelo proposto por Parisi e colaboradores. A reta tracejada é a regressão linear pela função (3.6).

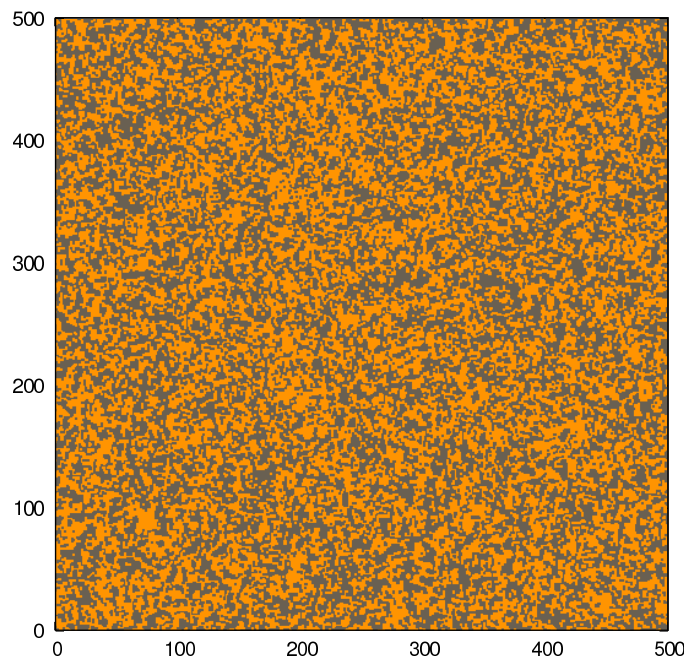
que cada sítio pode ter, aumentando o tempo médio para o sistema atingir um estado absorvente. O curioso deste resultado é a dependência  $\langle Tr \rangle \approx \sqrt{F}$ .

### 3.3 O Modelo Sequencial com Vizinhança de von Neumann

#### 3.3.1 Descrição do Modelo e a Dependência com o Número de Vizinhos

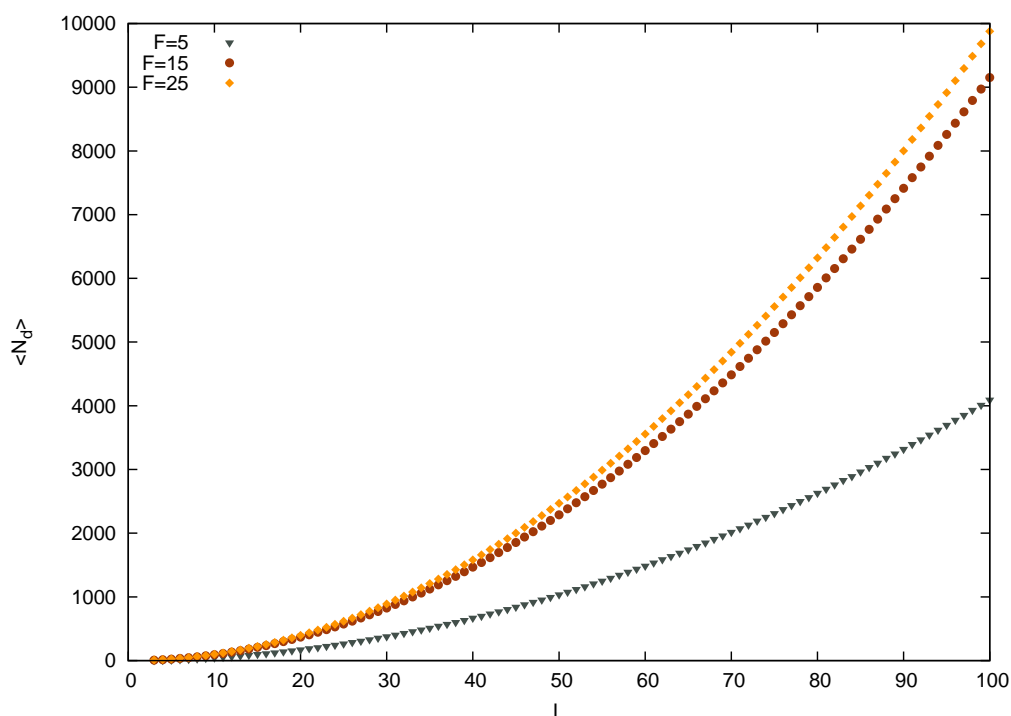
A segunda modificação feita no modelo proposto por Parisi e colaboradores será na topologia da interação. Em particular, voltaremos a usar apenas os primeiros vizinhos, semelhantemente ao usado no modelo de Axelrod (Figura 2.1), a fim de explorarmos as possíveis alterações no comportamento do sistema em função da vizinhança. No entanto, manteremos uma interação do tipo assimilação cultural.

Da mesma forma à feita para o modelo com topologia de primeiros e segundos vizinhos, analisaremos o comportamento do número médio de domínios equiculturais  $\langle N_d \rangle$ . De forma análoga à feita para o modelo sequencial com topologia de primeiros e segundos vizinhos mostramos na Figura 3.12 um exemplo de um estado absorvente inhomogêneo.



**Figura 3.12** – Exemplo de um estado absorvente inhomogêneo de uma rede de dimensão  $L = 500$  e  $F = 1$  para a dinâmica de Viés de Frequência com a vizinhança de von Neumann. Os pontos amarelos são sítios com  $\Psi_{i0} = 1$  e os pontos cinzas  $\Psi_{i0} = 0$ .

É trivial notar o aumento drástico do número de domínios ao compararmos as Figuras 3.12 e 3.5. Concluimos então que o aumento do número de vizinhos interagentes aumenta a homogeneidade do sistema. Com o efeito do aumento da homogeneidade encontrado vamos verificar a dependência de  $\langle N_d \rangle$  com a dimensão da rede  $L$ , analisando o gráfico do número médio de domínios  $\langle N_d \rangle$  (Figura 3.13) para uma rede de dimensões  $L$  variando de 3 até 100 para diferentes valores de  $F$  e um conjunto amostral de  $N_a = 1000$  amostras com a topologia de apenas primeiros vizinhos.

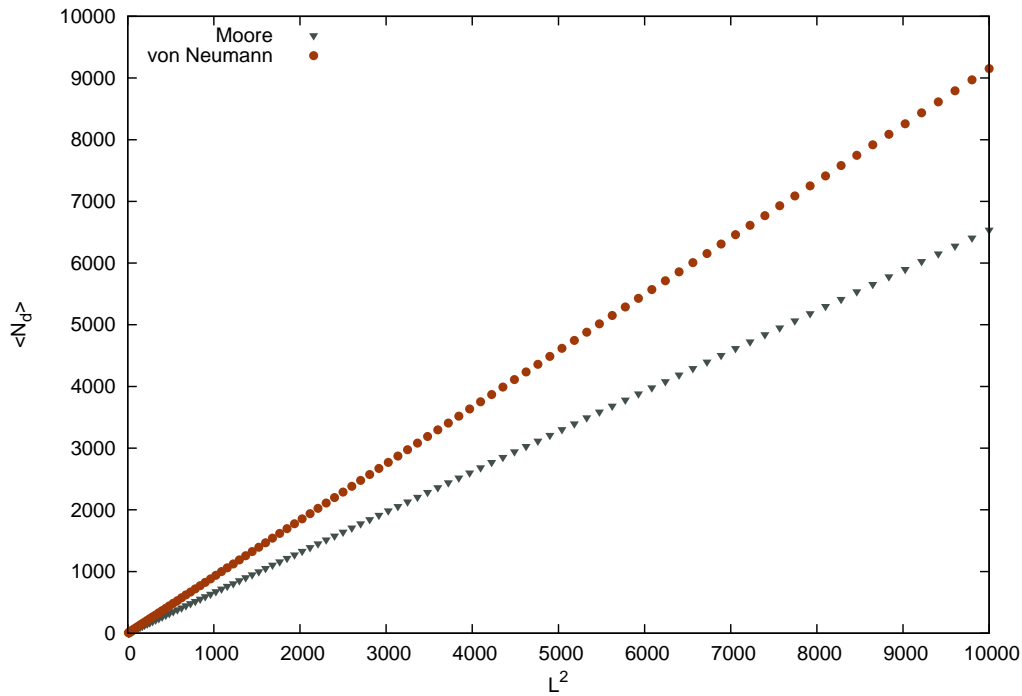


**Figura 3.13** – Dependência do número médio de domínios  $\langle N_d \rangle$  pela dimensão linear  $L$  no modelo com vizinhança de von Neumann para valores de  $F$  indicados na figura. Cada símbolo representa uma média sobre  $N_a = 1000$  amostras.

Note que obtivemos curvas qualitativamente similares às da figura 3.6, mostrando então que a alteração do número de vizinhos interagentes não altera a dependência linear com  $L^2$ . No entanto, como comentado anteriormente, obtivemos uma maior quantidade de domínios. Efetuando o gráfico do número médio de domínios  $\langle N_d \rangle$  em função da dimensão da rede  $L^2$  para  $F = 15$  e diferentes topologias (vide Figura 3.14), comprovamos quantitativamente o efeito já observado e discutido.

### 3.3.2 O Modelo de Voto da Maioria e o Critério de Desempate

É conhecido da mecânica estatística moderna o Modelo de Voto da Maioria, o qual pode ser descrito como um modelo similar ao modelo de viés de frequência com quatro



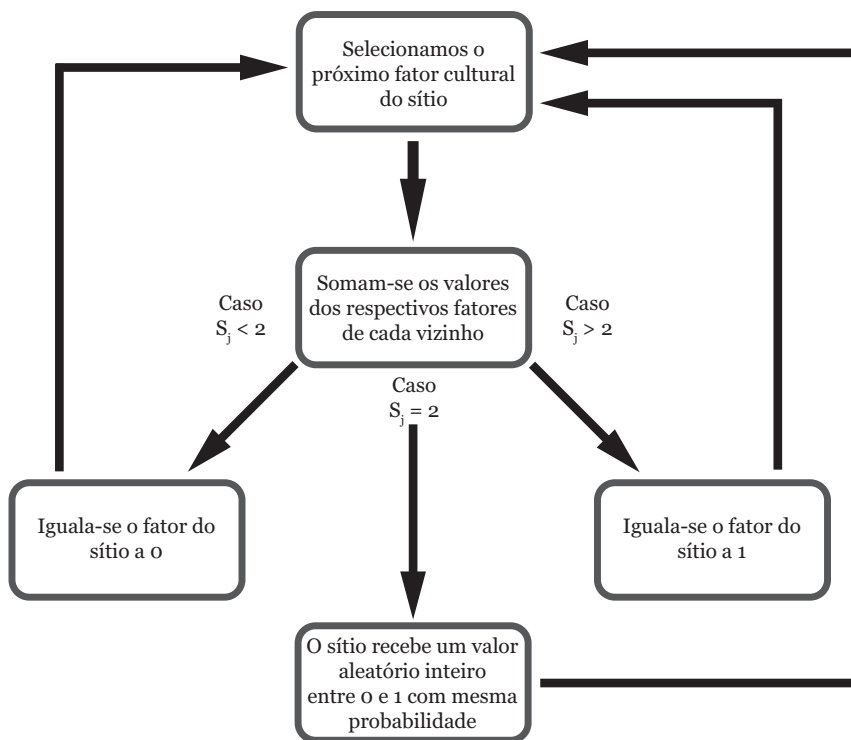
**Figura 3.14** – Dependência do número médio de domínios  $\langle N_d \rangle$  pela dimensão quadrática  $L^2$  com vetores de fatores culturais com dimensão  $F = 15$  para as vizinhanças indicadas na figura. Cada símbolo representa uma média sobre  $N_a = 1000$  amostras independentes.

vizinhos mostrado acima. Esse modelo caracteriza-se por ser sequencial na rede com apenas os primeiros vizinhos influenciando o sítio (vide Figura 2.1) e uma interação da forma assimilação cultural (vide Figura 3.2), mas com  $F = 1$ . No entanto, a diferença encontra-se no critério de desempate, pois como discutido no começo do capítulo, o conjunto de vizinhos próximos em questão possui um número par de elementos. Para o modelo de viés de frequência, adicionamos na conta da maioria entre os vizinhos o valor do próprio sítio alvo (Equação 3.1) e, para o modelo da Maioria, assumimos que, no caso de empate, o fator pode receber 0 ou 1 com a mesma probabilidade. O algoritmo para o modelo da Maioria pode ser então descrito pela Figura 3.15.

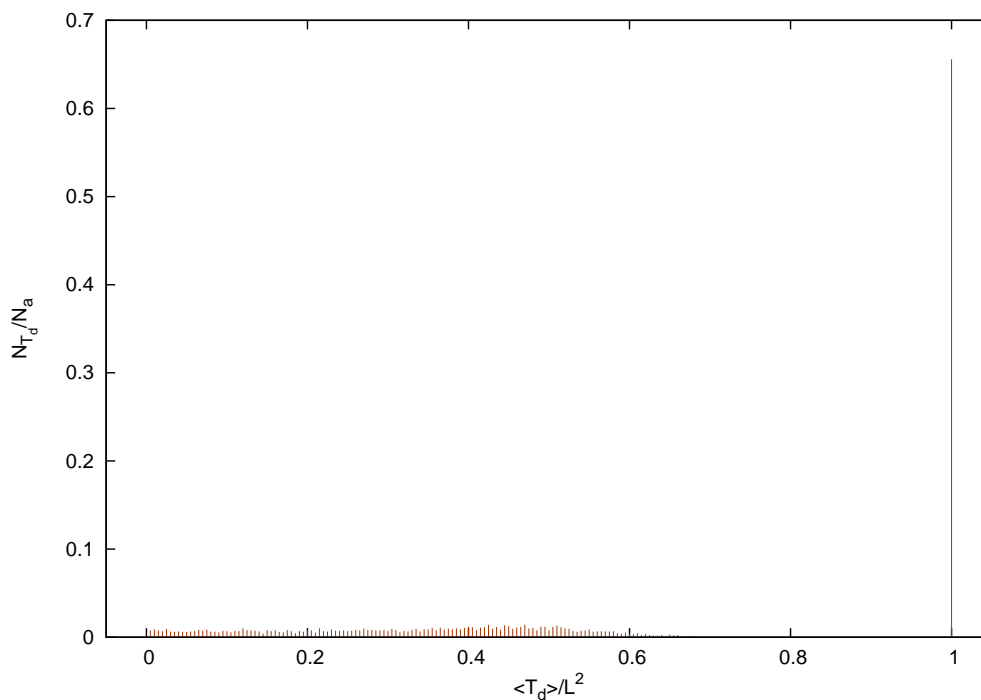
Da mesma forma que o modelo de viés de frequência a iteração descrita na Figura 3.15 é repetida até atingirmos um estado absorvente, e, em seguida, contamos o tamanho dos domínios utilizando novamente o algoritmo do Apêndice B.

Para a simulação do modelo de voto da maioria, utilizaremos uma rede de dimensão  $L = 200$  e um conjunto amostral de  $N_a = 5000$  amostras, resultando no histograma do tamanho de domínios  $T_d$  mostrado na Figura 3.16.

Note que obtivemos a grande maioria das amostras com  $\frac{\langle T_d \rangle}{L^2} = 1$ , ou seja, um regime



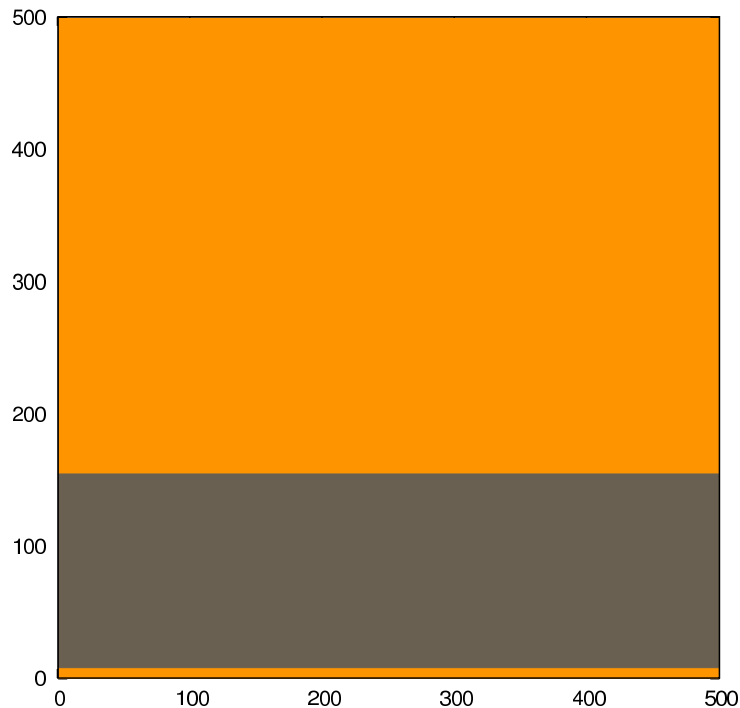
**Figura 3.15** – Diagrama de Fluxo da Assimilação Cultural do Modelo de Voto da Maioria.



**Figura 3.16** – Histograma do tamanho de domínio normalizado  $T_d$  no Modelo de Voto da Maioria para uma rede de dimensão  $L = 200$  e  $F = 1$  e um conjunto amostral de  $N_a = 5000$  amostras.

homogêneo. Já nas outras amostras, as quais em tese representam sistemas inhomogêneos, foi observado domínios em forma de tiras. Para entendermos melhor a formação destas

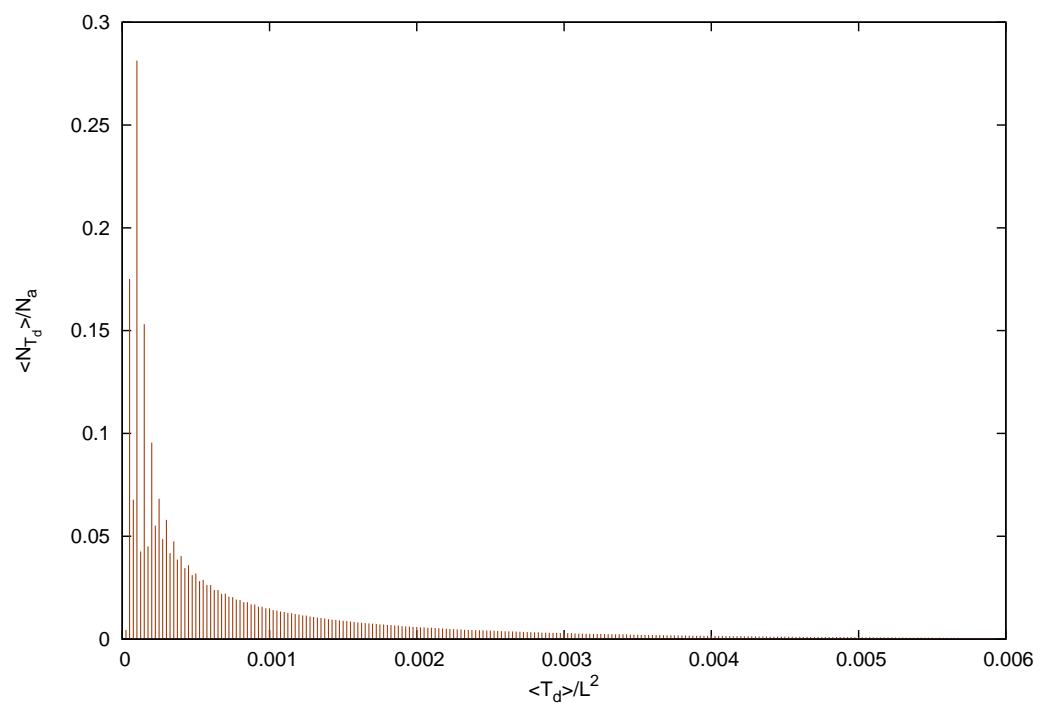
tiras equiculturais temos na Figura 3.17 uma rede neste tipo de estado absorvente.



**Figura 3.17** – Rede de dimensão  $L = 200$  com vetores de fator cultura de dimensão  $F = 1$  em um estado absorvente no modelo de voto da maioria. Os pontos amarelos são sítios com  $\Psi_{i0} = 1$  e os pontos cinzas  $\Psi_{i0} = 0$ .

Com esses resultados concluímos que, a menos de algumas amostras cujos estados absorventes estão em tiras, o modelo de voto da maioria sempre resulta em um sistema absorvente homogêneo. Efetuando o mesmo cálculo, no entanto, para o modelo de viés de frequência temos o histograma da Figura 3.18.

É trivial ver que, para o modelo de viés de frequência, sempre obtemos sistemas totalmente inhomogêneos. Ao compararmos os histogramas (Figuras 3.16 e 3.18) e os exemplos (Figuras 3.12 e 3.17) notamos uma total diferença na homogeneidade dos estados absorventes, e ao compararmos os algoritmos (Figuras 3.15 e 3.4) concluímos que a forma do critério de desempate altera drasticamente a homogeneidade do sistema.



**Figura 3.18** – Histograma do tamanho de domínio normalizado  $T_d$  no Modelo de viés de frequência para uma rede de dimensão  $L = 200$  e  $F = 1$  e um conjunto amostral de  $N_a = 5000$  amostras.





## 4 CONCLUSÃO

Este trabalho teve como enfoque o estudo de modelos estocásticos aplicados a sistemas sociais. A motivação inicial advém do paradoxo da manutenção das diferenças, ou seja, assumindo que indivíduos ao interagir socialmente, tornam-se gradativamente mais parecidos, como entender a diversidade cultural? Para responder essa questão é que Robert Axelrod elaborou seu modelo estocástico (2). Nosso intuito foi analisar mais cuidadosamente os aspectos quantitativos desse modelo e algumas de suas modificações.

Primeiramente, analisamos o comportamento do número médio de domínios  $\langle N_d \rangle$  e do tempo de relaxação médio  $\langle Tr \rangle$ . Nosso foco foi encontrar a dependência dessas grandezas com os parâmetros do modelo  $[L, F, q]$ . Após efetuarmos várias simulações, observamos que, para ambas as grandezas, a dependência com os parâmetros do modelo depende da homogeneidade final do sistema. É trivial ver que para  $\langle N_d \rangle$  essa afirmação é válida. Assim, foi obtido um crescimento proporcional à  $L^2$  no regime inhomogêneo (vide Figura 2.9) e um decréscimo proporcional à  $L^{-1}$  para o regime homogêneo (vide Figura 2.5). O efeito curioso surge ao se analisar o  $\langle Tr \rangle$ , pois este também depende da homogeneidade. Temos então para o regime homogêneo um crescimento proporcional à  $L^4$  (vide Figura 2.7) e um crescimento proporcional à  $L^2$  no regime inhomogêneo (vide Figura 2.11). Observa-se, conseqüentemente, que a maior parte do tempo computacional é gasto nas amostras homogêneas.

A primeira modificação na modelagem original vem com a inclusão da mídia externa, ou seja, adicionamos ao modelo de Axelrod um campo externo constante. Para a adição desse campo utilizamos a ideia de Shibanaï e colaboradores (5), o qual adiciona para cada elemento da rede um vizinho fictício constante, e introduzimos um novo parâmetro  $p$  como a probabilidade de interação com a mídia. O interessante dessa modelagem é o aumento da inhomogeneidade final do sistema (vide Figura 2.14), ou seja, mesmo para campos extremamente pequenos ( $p \approx 10^{-2}$ ) redes que se estabilizavam em um regime homogêneo em sua maioria, estabilizam-se agora inhomogeneamente. Esse efeito é interessante pois,

além da contra-intuitividade - afinal de contas o campo aplicado ao agir em um único elemento da rede tende a homogeneizá-lo -, demonstra que a inhomogeneidade final não é algo frágil como era conjecturado. Além disso, ao analisarmos o regime assintótico da dimensão da rede  $L \rightarrow \infty$ , observamos que independente dos parâmetros dela  $[F, q]$  e da intensidade do campo  $p$  o sistema sempre atingirá um regime inhomogêneo (vide Figura 2.16). Esse resultado mostra que a ideia de um coeficiente crítico como introduzido por González e colaboradores (6), não é correta.

Para a segunda modificação do sistema, alteramos a forma funcional da interação a fim de trabalharmos com um modelo cujo tempo de relaxação, ou seja, o número de iterações necessárias para atingirmos um estado absorvente, seja menor. Usamos o paradigma introduzido por Parisi e colaboradores (8), inserindo o mecanismo de viés de frequência como forma de interação social, além de termos valores binários para os fatores culturais. De fato, foi perdido um pouco de generalidade da modelagem, pois, com este novo paradigma, não há possibilidade de termos um estado estacionário homogêneo. Apesar disto, foi efetuado uma análise quantitativa do comportamento dos estados absorventes e do tempo de relaxação. Obtivemos para  $\langle N_d \rangle$  uma dependência idêntica ao modelo de Axelrod inhomogêneo (vide Figura 3.7), ou seja  $\langle N_d \rangle \propto L^2$ , mostrando assim que essa dependência advém apenas da inhomogeneidade do sistema, e não da forma funcional da interação. Para o tempo de relaxação também obtivemos uma dependência proporcional à  $L^2$  (vide Figura 3.10). No entanto, mostra-se também uma dependência proporcional à  $\sqrt{F}$  para  $L$  fixo (vide Figura 3.11). Novamente podemos concluirmos que as dependências com a dimensão da rede para ambas as variáveis em questão dependem apenas da homogeneidade final do sistema.

A partir do modelo proposto por Parisi e colaboradores (8), foi analisado quais alterações no mesmo mudariam a homogeneidade do sistema, pois a semelhança do modelo acima discutido com o modelo do voto da maioria é enorme. No entanto, é sabido da literatura que o modelo do voto da maioria sempre atinge estados absorventes homogêneos (vide Figuras 3.16 e Figura 3.17) em contradição com o observado para o modelo de viés de frequência. Alteramos primeiramente o número de vizinhos interagentes mudando a vizinhança de Moore (vide Figura 3.1) para a vizinhança de von Neumann (vide Figura 2.1), e observamos apenas um aumento na heterogeneidade do sistema (vide Figura 3.14), sendo a dependência com os parâmetros do modelo  $L$  e  $F$  mantidas. Voltando a comparação com o modelo do voto da maioria concluirmos que o critério de desempate, ou seja, como atribuímos o valor do sítio alvo quando o número de vizinhos com fator 0 é idêntico ao número de vizinhos com fator 1 é definido, é o responsável pela homogeneidade

final do sistema. Para um critério probabilístico temos estados absorventes homogêneos, já para um critério determinístico obtivemos heterogeneidade nos estados absorventes.

Como sequência desse trabalho, visamos aumentar a eficiência do código utilizando o método de paralelização computacional (openMP e MPI), o “Multispin Coding”. Precisamos diminuir os tempos de computação e obter uma maior precisão nos regimes assintóticos da dimensão da rede, principalmente no modelo de Axelrod. Visamos com essas otimizações encontrar a dependência do número médio de domínios  $\langle N_d \rangle$  e do tempo de relaxação  $\langle Tr \rangle$  com os parâmetros do modelo, tanto para um sistema livre como com o campo externo, e assim chegar a uma descrição quantitativa mais precisa e completa de ambos os modelos.



## *Referências*

- 1 STEWARD, J. H. *Theory of culture change : the methodology of multilinear evolution*. Illinois: University of Illinois Press, 1955.
- 2 AXELROD, R. The dissemination of culture: a model with local convergence and global polarization. *Journal of Conflict Resolution*, v. 41, n. 2, p. 203–226, 1997.
- 3 KENNEDY, J. Thinking is social: experiments with the adaptive culture model. *Journal of Conflict Resolution*, v. 42, n. 1, p. 56–76, 1998.
- 4 KLEMM, K. et al. Global culture: a noise-induced transition in finite systems. *Physical Review E*, v. 67, n. 4, p. 045101, 2003.
- 5 SHIBANAI, Y.; YASUNO, S.; ISHIGURO, I. Effects of global information feedback on diversity: extensions to axelrod’s adaptive culture model. *Journal of Conflict Resolution*, v. 45, n. 1, p. 80–96, 2001.
- 6 GONZÁLEZ-AVELLA, J. C. et al. Local versus global interactions in nonequilibrium transitions: a model of social dynamics. *Physical Review E*, v. 73, n. 4, p. 046119, 2006.
- 7 PERES, L. R.; FONTANARI, J. F. The mass media destabilizes the cultural homogenous regime in axelrod’s model. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, v. 43, n. 5, p. 055003, 2010.
- 8 PARISI, D.; CECCONI, F.; NATALE, F. Cultural change in spatial environments: the role of cultural assimilation and internal changes in cultures. *Journal of Conflict Resolution*, v. 47, n. 2, p. 163–179, 2003.
- 9 STAUFFER, D. et al. *Biology, sociology, geology by computational physicists*. Amsterdã: Elsevier, 2006.
- 10 GONZÁLEZ-AVELLA, J. C.; COSENZA, M. G.; TUCCI, K. Nonequilibrium transition induced by mass media in a model for social influence. *Physical Review E*, v. 72, n. 6, p. 065102, 2005.
- 11 BOYD, R.; RICHERSON, P. J. *Culture and the evolutionary process*. Chicago: University of Chicago Press, 1988.
- 12 RODRÍGUEZ, A. H.; CASTILLO-MUSSOT, M. del; VÁZQUEZ, G. J. Induced monoculture in axelrod model whith clever mass media. *International Journal of Modern Physics C*, v. 20, n. 8, p. 1233–1245, 2009.
- 13 ARNOLD, M. *Culture and anarchy*. 2. ed. London: Cornell University Library, 1875.
- 14 BEN-NAIM, E.; REDNER, S. Dynamics of social diversity. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, v. 2005, n. 11, p. L11002, 2005.

- 15 BONABEAU, E.; DORIGO, M.; THERAULAZ, G. Inspiration for optimization from social insect behaviour. *Nature*, v. 406, n. 6791, p. 39–42, 2000.
- 16 BORDOGNA, C. M.; ALBANO, E. V. Statistical methods applied to the study of opinion formation models: a brief overview and results of a numerical study of a model based on the social impact theory. *Journal of Physics: Condensed Matter*, v. 19, n. 6, p. 065144, 2007.
- 17 CANDIA, J.; MAZZITELLO, K. I. Mass media influence spreading in social networks with community structure. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, v. 2008, n. 07, p. P07007, 2008.
- 18 BARBOSA, L. A.; FONTANARI, J. F. Culture-area relation in axelrod's model for culture dissemination. *Theory in Biosciences*, v. 128, n. 2, p. 205–210, 2009.
- 19 CASTELLANO, C.; FORTUNATO, S.; LORETO, V. Statistical physics of social dynamics. *Reviews of Modern Physics*, v. 81, n. 2, p. 591–646, 2009.
- 20 CASTELLANO, C.; MARSILI, M.; VESPIGNANI, A. Nonequilibrium phase transition in a model for social influence. *Physical Review Letters*, v. 85, n. 16, p. 3536–3539, 2000.
- 21 CAVALLI-SFORZA, L. L.; FELDMAN, M. W. *Cultural transmission and evolution*. Princeton: Princeton University Press, 1981.
- 22 CENTOLA, D. et al. Homophily, cultural drift, and the co-evolution of cultural groups. *Journal of Conflict Resolution*, v. 51, n. 6, p. 905–929, 2007.
- 23 CHWE, M. S.-Y. Structure and strategy in collective action. *American Journal of Sociology*, v. 105, n. 1, p. 128–156, 1999.
- 24 EPSTEIN, J. M.; AXTELL, R. L. *Growing Artificial Societies: social science from the bottom Up*. Cambridge: The MIT Press, 1996.
- 25 FELLER, W. *An introduction to probability theory and its applications*. 3. ed. New York; London: John Wiley & Sons, inc: Chapman & Hall, ltd., 1966.
- 26 FORBELLONE, A. L. V. *Lógica de Programação : a construção de algoritmos e estruturas de dados*. 3. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007.
- 27 FRIEDKIN, N. E.; JOHNSEN, E. C. Social influence and opinions. *Journal of Mathematical Sociology*, v. 15, p. 193–195, 1990.
- 28 GALAM, S.; WONCZAK, S. Dictatorship from majority rule voting. *The European Physical Journal B*, v. 18, n. 1, p. 183–186, 2000.
- 29 GIRVAN, M.; NEWMAN, M. E. J. Community structure in social and biological networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, v. 99, n. 12, p. 7821–7826, 2002.
- 30 GOLDSPIK, C. Methodological implications of complex systems approaches to sociality: simulation as a foundation for knowledge. *Journal of Artificial Societies and Social Simulation*, v. 5, 2002.

- 31 GOLDSTONE, R. L.; JANSSEN, M. A. Computational models of collective behavior. *Trends in Cognitive Sciences*, v. 9, n. 9, p. 424–429, 2005.
- 32 GRANOVETTER, M. Threshold models of collective behavior. *American Journal of Sociology*, v. 83, n. 6, p. 1420, 1978.
- 33 GREIG, J. M. The end of geography?: globalization, communications, and culture in the international system. *Journal of Conflict Resolution*, v. 46, n. 2, p. 225–243, 2002.
- 34 HINRICHSEN, H. Nonequilibrium critical phenomena and phase transitions into absorbing states. *Advances in Physics*, v. 49, p. 815, 2000.
- 35 HOLLAND, J. H. *Hidden order: how adaptation builds complexity*. Redwood City: Addison Wesley Longman Publishing Co., Inc., 1995.
- 36 HOSHEN, J.; KOPELMAN, R. Percolation and cluster distribution. i. cluster multiple labeling technique and critical concentration algorithm. *Physical Review B*, v. 14, n. 8, p. 3438–3445, 1976.
- 37 ISHIGURO, I.; YASUNO, S.; SHIBANAI, Y. Application of global information as generalized other to computer simulation of dynamic social impact theory. *Japanese Journal of Social Psychology*, v. 16, n. 2, p. 114–123, 2000.
- 38 IYENGAR, S. *Is anyone responsible? : how television frames political issues*. Chicago: University of Chicago Press, 1991.
- 39 KLEMM, K. et al. Role of dimensionality in Axelrod's model for the dissemination of culture. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 327, n. 1-2, p. 1–5, 2003.
- 40 KUPERMAN, M.; ZANETTE, D. Stochastic resonance in a model of opinion formation on small-world networks. *The European Physical Journal B*, v. 26, n. 3, p. 387–391, 2002.
- 41 KUPERMAN, M. N. Cultural propagation on social networks. *Physical Review E*, v. 73, n. 4, p. 046139, 2006.
- 42 LAMBIOTTE, R.; AUSLOOS, M.; HOLYST, J. A. Majority model on a network with communities. *Physical Review E*, v. 75, n. 3, p. 030101, 2007.
- 43 LAMPORT, L. *LATEX: a document preparation system: user's guide and reference manual*. 2. ed. Massachusetts: Addison-Wesley Pub. Co., 1994.
- 44 LIGGETT, T. M. *Interacting particle systems*. New York: Springer, 1985.
- 45 MACY, M. W.; WILLER, R. From factors to actors: computational sociology and agent-based modeling. *Annual Review of Sociology*, v. 28, n. 1, p. 143–166, 2002.
- 46 MARRO, J.; DICKMAN, R. *Nonequilibrium phase transitions in lattice models*. 3. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
- 47 MAZZITELLO, K. I.; CANDIA, J.; DOSSETTI, V. Effects of mass media and cultural drift in a model for social influence. *International Journal of Modern Physics C*, v. 18, n. 9, p. 1475, 2007.



- 48 NOWAK, A.; SZAMREJ, J.; LATAN, B. From private attitude to public opinion: a dynamic theory of social impact. *Psychological Review*, v. 97, p. 362–376, 1990.
- 49 RADILLO-DÍAZ, A.; PÉREZ, L. A.; CASTILLO-MUSSOT, M. del. Axelrod models of social influence with cultural repulsion. *Physical Review E*, v. 80, n. 6, p. 066107, 2009.
- 50 REICHL, L. E. *A modern course in statistical physics*. 3. ed. New York: John Wiley & Sons, Inc, 1998.
- 51 RESNICK, M. *Turtles, termites, and traffic jams: explorations in massively parallel microworlds*. Cambridge: The MIT Press, 1994.
- 52 SCHILDT, H. *Linguagem C - Guia do Usuário*. New York: Mcgraw-Hill, 1986.
- 53 SIMMEL, G. *On individuality and social forms*. Chicago: University of Chicago Press, 1971.
- 54 SOLOMON, S. et al. Social percolation models. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 277, n. 1-2, p. 239–247, 2000.
- 55 OLIVEIRA, S. M. de; OLIVEIRA, P. M. C.; STAUFFER, D. *Evolution, money, war, and computers*. Wiesbaden: Teubner Verlag, 1999.
- 56 VAZQUEZ, F.; REDNER, S. Non-monotonicity and divergent time scale in axelrod model dynamics. *Europhysics Letters*, v. 78, n. 1, p. 18002, 2007.
- 57 VILONE, D.; VESPIGNANI, A.; CASTELLANO, C. Ordering phase transition in the one-dimensional axelrod model. *The European Physical Journal B*, v. 30, n. 3, p. 399–406, 2002.
- 58 WEIDLICH, W. Sociodynamics: a systematic approach to mathematical modelling in the social sciences. *Journal Artificial Societies and Social Simulation*, v. 7, n. 4, 2004.
- 59 STAUFFER, D.; AHARONY, A. *Introduction to percolation theory*. 2. ed. New York: Taylor & Francis Ltd., 1994.

## APÊNDICE A – Estrutura de Dados

Uma das partes mais importantes para a eficiência do código esta na forma de organizar os dados a serem trabalhados. Para o caso do Modelo de Axelrod e do Modelo de Viés de Frequência temos uma matriz volumétrica, ou seja, necessitamos de 2 índices espaciais para termos a posição do elemento na rede  $\{i, j\}$  e um índice de cultura  $k$ . Para simplificarmos a busca na rede retiraremos a bidimensionalidade da matriz transformando-a em um vetor através da transformação linear A.1,

$$p = iL + j \tag{A.1}$$

e sua inversa dada pelo conjunto de equações A.2,

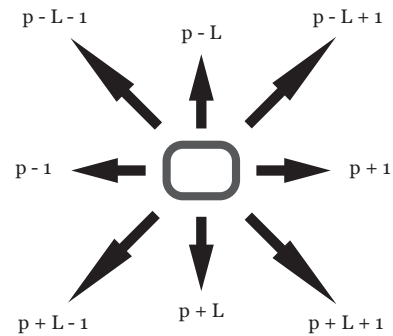
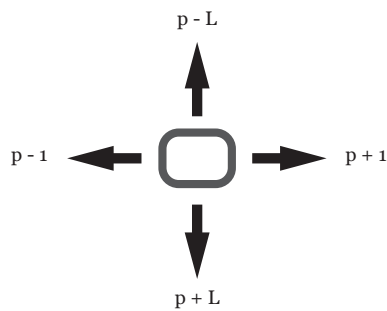
$$i = \frac{p}{L}, \tag{A.2a}$$

$$j = \text{mod}(p, L), \tag{A.2b}$$

Com  $p$  o novo índice espacial,  $L$  a dimensão da rede e  $\text{mod}(x, y)$  o resto da divisão inteira de  $x$  por  $y$ . Tendo as transformações lineares definidas acima, necessitamos das relações entre os primeiros e segundos vizinhos e a variável  $p$ . Graficamente as expressões da vizinhança de von Neumann e de Moore são mostradas nas Figuras A.1 e A.2 respectivamente.

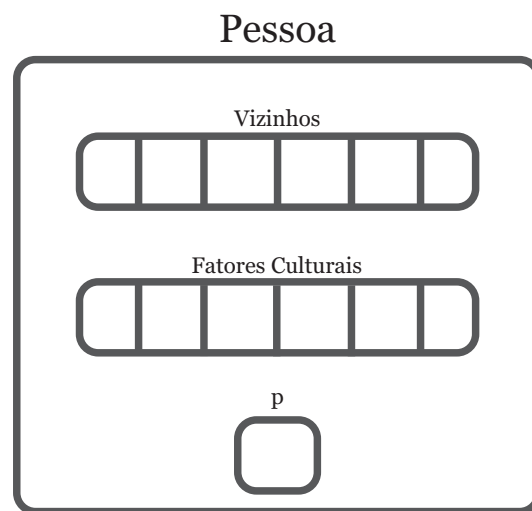
Após a simplificação da dimensionalidade do problema necessitamos de uma forma rápida de acessarmos todas as informações de cada elemento, ou seja, o conjunto de fatores culturais, conjunto de vizinhos interagentes, etc. Para isso usaremos o comando *struc* da linguagem C definindo o nosso novo tipo de variável denominada *Pessoa*. Este tipo de variável é um conjunto de elementos de todas as variáveis descritas anteriormente. Uma maneira mais fácil de compreendermos esta estrutura será observando a Figura A.3.

Nosso sistema então será um vetor de  $L^2$  elementos de *Pessoas* o que aumenta o gasto de memória pois armazenamos os vizinhos durante toda a simulação mas ganhamos tempo de execução pois não temos que gerar o conjunto de vizinhos a cada iteração. Algo não



**Figura A.1** – *Vizinhança de von Neumann em função de  $p$*

**Figura A.2** – *Vizinhança de Moore em função de  $p$*

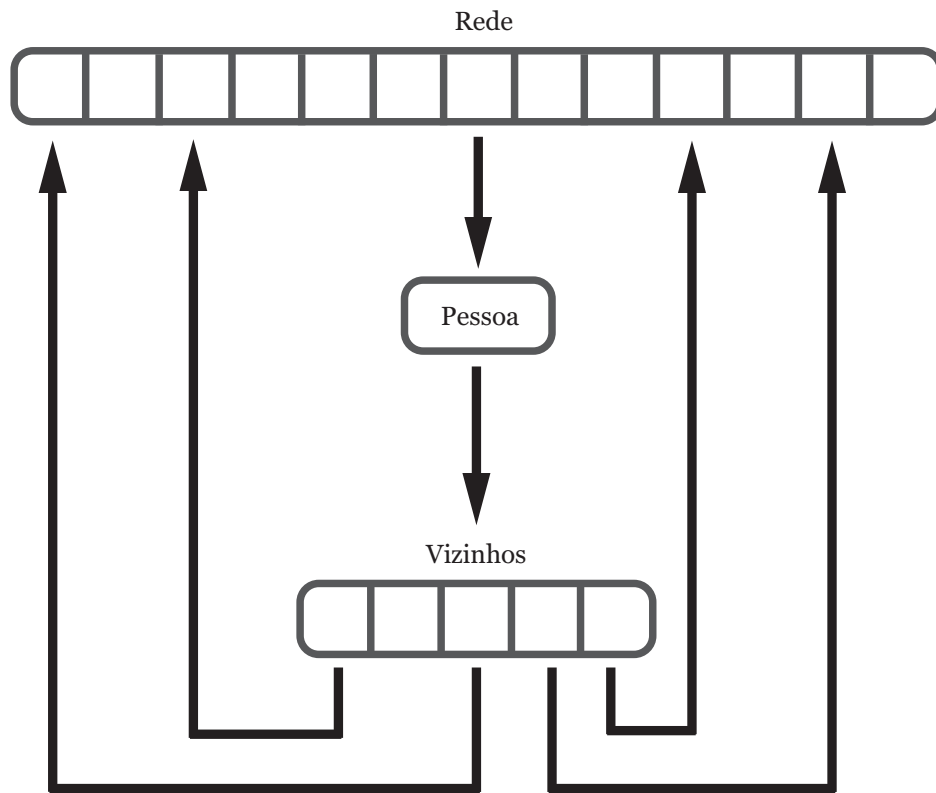


**Figura A.3** – *Estrutura de dados de cada Elemento da Rede*

comentado até o presente momento é forma de armazenamento dos vizinhos, é fácil ver da Figura A.3 que temos um vetor de  $n$  posições designado aos vizinhos de cada sítio. É intuitivo pensar em guardar o índice de cada vizinho por exemplo para uma matriz de  $L = 3$  o sítio  $p = 4$  teria em seu vetor o seguinte conjunto de índices  $v_4 = \{1, 3, 5, 7\}$  no entanto, usaremos o conceito de ponteiros. Do livro de Schildt (52) temos a seguinte definição:

Um ponteiro é uma variável que contém um endereço de memória. Esse endereço é normalmente a posição de uma outra variável na memória. Se uma variável contém o endereço de uma outra então a primeira variável é dita para *apontar* para a segunda.

Com esta definição mãos temos uma forma mais inteligente de guardarmos a lista de vizinhos, teremos variáveis apontando para outros elementos do próprio vetor. Então é extremamente simples acessarmos não só o vizinho como também as informações do vizinho. Um esboço desta estrutura é mostrada na Figura A.4.



**Figura A.4** – Estrutura de dados do Sistema

Com a retirada da bidimensionalidade do problema, e a facilidade de termos os dados de um sítio e seus respectivos vizinhos, aumentamos drasticamente a eficiência do código.



## *APÊNDICE B – Contagem de Domínios*

### **B.1 Algoritmo de Hoshen e Kopelman, o algoritmo de rótulo de rótulos**

Uma parte crucial da caracterização de um estado absorvente é a contagem do tamanho e da quantidade de domínios equiculturais na rede. Para efetuarmos esse cálculo usaremos o método de Hoshen e Kopelman (36). Esse método caracteriza-se por atribuir à cada elemento da rede um rótulo de domínio e um rótulo para este rótulo, ou seja, percorre-se toda a rede, caracterizado uma complexidade proporcional à  $L^2$ , e verifica-se a semelhança do conjunto de fatores culturais e do rótulo de domínio. Levaremos em consideração apenas os vizinhos norte e oeste (vide figura 2.1) para o caso da topologia de primeiros vizinhos. As modificações do modelo para primeiros e segundos vizinhos (vide Figura 3.1) será comentado posteriormente. A priori não será usado a periodicidade da rede, usaremos condições fechadas de contorno. Um segundo algoritmo será aplicado para incluirmos esta periodicidade.

Sabemos que nas condições mostradas acima, ou seja, topologia de primeiros vizinhos e condições fechadas de contorno cada elemento da rede enquadra-se em uma das seguintes situações: possui 2, 1 ou nenhum vizinho idêntico. No entanto, apenas com estas três situações teremos conflitos de rótulos. Vamos mostrar esse conflito com o exemplo que Sauffer escreve em seu livro (59). Dada a matriz B.1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

Partiremos sempre do elemento do canto superior esquerdo percorrendo da esquerda da rede para a direita e de cima para baixo. Enumeraremos apenas os sítios cheios, ou seja, com valores 1 na matriz B.1. Para o primeiro sítio ocupado, que seria o do topo superior esquerdo, daremos o valor 1 para o rótulo de domínio. Para o sítio adjacente

não é necessário darmos rótulo pois seu valor é nulo; seguindo para a esquerda, rotulamos o segundo sítio ocupado como 2 e conseqüentemente o terceiro sítio ocupado como 3. A próxima linha começa com um sítio ocupado vizinho a um sítio rotulado como 1, assim rotulamos o mesmo como 1. O segundo sítio está vazio e o terceiro está ao lado de um sítio rotulado como 2, assim rotularemos o mesmo como 2. O quarto sítio é vizinho apenas de um rotulado como 2, assim também o rotularemos como 2. Temos até o momento a matriz B.2 de rótulos de domínios.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & ? \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

Note que os sítios vazios foram marcados com zero. A pergunta feita agora é: Qual rótulo deve ser escolhido para o sítio marcado com a interrogação? Seu vizinho à oeste diz 2 e seu vizinho ao norte diz 3. Neste caso todos os sítios rotulados como 3 e como 2 pertencem ao mesmo domínio o qual rotularemos como 2 a fim de termos sempre os menores números possíveis para os rótulos. Tendo ocorrido o efeito do rótulo comum no sítio em questão temos então que voltar ao começo da matriz e rerotular todos os sítios de rótulo 3 para 2, o que aumentaria gigantescamente a complexidade do código. A otimização deste algoritmo vem com o trabalho de Hoshen e Kolpeman (36).

Esta otimização baseia-se em dividir o conjunto de rótulos em subconjuntos de rótulos bons e ruins. Os rótulos bons são aqueles que caracterizam domínios distintos. Já os rótulos ruins são aqueles que à primeira vista temos um novo domínio mas ao continuarmos o calculo o mesmo torna-se parte de um domínio já definido. Para efetuarmos esta divisão introduzimos um segundo conjunto de rótulos tendo então o que denomina o método, rótulos de rótulos, do inglês *label of label*.

Para o exemplo da matriz B.1, ao chegarmos no sítio do ponto de interrogação, tínhamos 3 rótulos marcados como bons,  $R(1) = 1$ ,  $R(2) = 2$ ,  $R(3) = 3$ , onde  $R$  é a função rótulo de rótulo, pois ao definirmos o primeiro sítio ocupado com rotulação 1, o segundo sítio da primeira linha a matriz B.1 como 2, e conseqüentemente o terceiro sítio como 3. Ao prosseguirmos com o calculo nada foi alterado para  $R(1)$  e  $R(2)$ , no entanto, encontramos que 3 é um rótulo ruim, assim temos  $R(3) = 2$ .

Concluindo o calculo para a terceira linha da matriz, o primeiro sítio ocupado possui apenas um vizinho norte com o rótulo 1, rotulamos então como 1, mantendo  $R(1)$  inalterado. O segundo sítio também será rotulado como 1, devido à sua vizinhança oeste. O conflito de rótulos é gerado no terceiro sítio entre os rótulos 1 e 2, tendo então que

$R(2) = 1$ . Obtivemos então a matriz de rótulos B.3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})$$

Com o seguinte conjunto de rótulos de rótulos  $R(1) = 1, R(2) = 1, R(3) = 2$ . Para termos o número de domínios e seus respectivos tamanhos basta então percorrermos a matriz rerotulando cada sítio e contando os rótulos.

## B.2 Contagem de sítios com primeiros vizinhos

Com a finalidade de diminuirmos a complexidade do sistema eliminando a rerotulação, efetuamos duas listas encadeadas, uma com os domínios e outra com os rótulos de rótulos denominadas *tags*. Em cada elemento da lista de domínios temos armazenado o rótulo de domínio e seu tamanho. Já na lista de tags temos o rótulo maior em seguida o menor.

O algoritmo proposto é extremamente parecido com o citado acima no fato de verificarmos apenas os vizinhos norte e sul (vide Figura 2.1) e condições fechadas de contorno para cada elemento da rede. Basicamente percorremos toda a rede calculando o fator B.4 para cada elemento.

$$c_i = \sum_{j=0}^1 [(\delta_{F(i,\bar{i}),1} C(i,j)) + D(i,\bar{i})], \quad (\text{B.4})$$

sendo

$$\bar{i} = i - 1 + j(L - 1), \quad (\text{B.5a})$$

$$F(i,j) = \sum_{k=0}^{q-1} \frac{\delta_{\Psi_{i,k}, \Psi_{j,k}}}{q-1}, \quad (\text{B.5b})$$

$$C(i,j) = [1 - \delta_{\text{mod}(i,L),0} \delta_{j,1}] [1 - \delta_{\frac{i}{L},0} \delta_{j,0}], \quad (\text{B.5c})$$

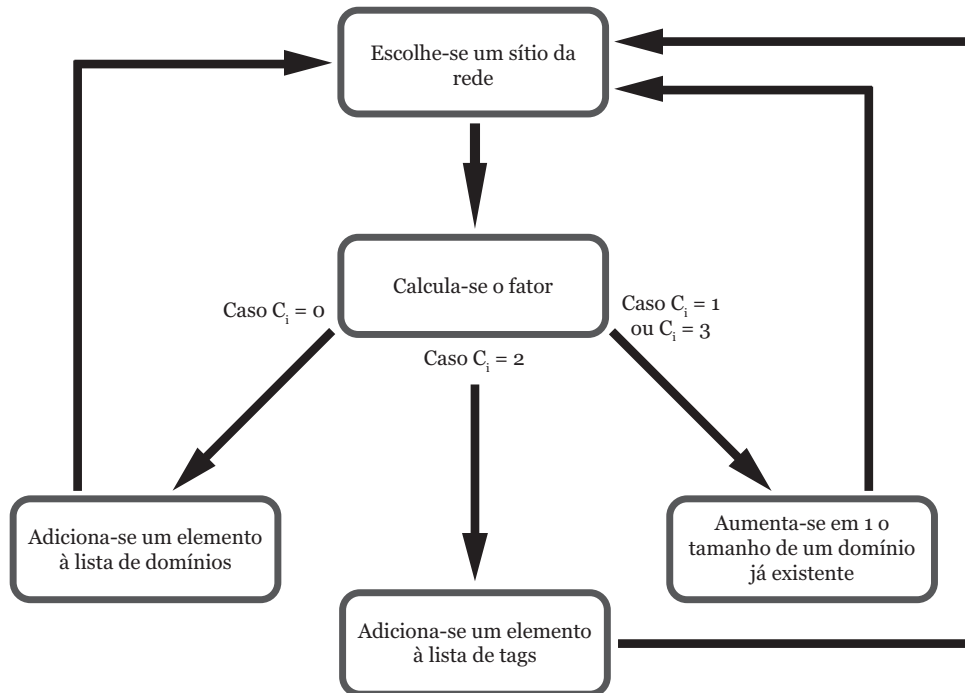
$$D(i,j) = \frac{1}{2} \delta_{C_0(i),2} \delta_{\gamma_i, \gamma_j}, \quad (\text{B.5d})$$

$$C_0(i) = \sum_{j=0}^1 [\delta_{F(i,\bar{i}),1} C(i,j)]. \quad (\text{B.5e})$$

Analogamente ao definido no apêndice A,  $\text{mod}(x,y)$  é o resto da divisão inteira de  $x$  por  $y$ ,



$\gamma$  é rótulo de domínios e  $\delta$  a delta de Kronecker. É fácil ver que a função B.5a nos retorna o vizinho norte para  $j = 1$  e oeste para  $j = 0$  (vide Figura A.1). Já B.5b é a comparação do conjunto de fator cultural do sítio alvo com um de seus vizinhos normalizado pelo número total de fatores, B.5c é a condição fechada de contorno e B.5d é a comparação dos rótulos de domínios. Note então que a variável  $c_i$  caracteriza cada sítio em 4 categorias de acordo com a igualdade do sítio alvo e seus vizinhos e o rótulo de domínio: sítio sem vizinhos idênticos  $c_i = 0$ , sítios com apenas um vizinho idêntico  $c_i = 1$ , dois vizinhos idênticos com rótulos distinto  $c_i = 2$  e dois vizinhos idênticos com rótulos idênticos  $c_i = 3$ . Para cada valor de  $c_i$  enumerado anteriormente é feito uma ação com a lista de domínios ou com a lista de tags como mostrado na figura B.1



**Figura B.1** – Diagrama de Fluxo da Contagem de Domínios para a vizinhança de von Neumann.

Após a confecção de ambas as listas efetua-se uma mesclagem dos tamanhos dos sítios de acordo com as tags obtidas. Com este procedimento aumentamos a eficiência do modelo pelo fato de não termos que percorrer todos os  $L^2$  elementos da rede na rerotulagem para a obtenção dos tamanhos e do número total real de domínios e sim apenas nos elementos da lista de domínios e tags.

## B.3 Contagem Primeiros e Segundos Vizinhos

Temos que por definição um domínio equicultural é um conjunto de elementos da rede os quais compartilham com pelo menos um vizinho os mesmos conjuntos de fatores culturais. Note que devido a forma pela qual o domínio foi definido ele é intimamente correlacionado com a definição da topologia. Levando isso em consideração teremos que modificar o algoritmo otimizado de Hoshen e Kopelman para incluirmos os segundos vizinhos (vide Figura 3.1). Basicamente adicionaremos mais um vizinho na soma B.4, o vizinho noroeste. Com esta adição ao calculo aumenta-se o conjunto de possibilidades de combinações conjunto de fatores/rótulos de domínios para 10: nenhum vizinho idêntico, 1 vizinho idêntico com domínios idênticos, 1 vizinho idêntico com domínios distintos, 2 vizinhos idênticos com domínios idênticos, 2 vizinhos idênticos com domínios totalmente distintos e 2 vizinhos idênticos com pelo menos 1 domínio idêntico, 3 vizinhos idênticos com todos os domínios idênticos, 3 vizinhos idênticos com pelo menos 2 domínios idênticos, 3 vizinhos idênticos com pelo menos 1 vizinho idêntico e 3 vizinhos idênticos com domínios totalmente distintos. Da mesma forma que o calculo para primeiros vizinhos calculamos o fator B.6 e adicionamos tags, aumentamos o tamanho de um domínio existente ou criamos domínios.

$$c_i^s = \sum_{j=-1}^1 [\delta_{F^s(i, \bar{i}^s), 1} C^s(i, j)] + D^s(i, \bar{i}^s), \quad (\text{B.6})$$

sendo

$$\bar{i}^s = i + [j(1 - L) - (1 + L)][1 - \frac{1}{2}(1 - \delta_{j,0})], \quad (\text{B.7a})$$

$$F^s(i, j) = \sum_{k=0}^{q-1} \frac{\delta_{\Psi_{i,k}, \Psi_{j,k}}}{q-1}, \quad (\text{B.7b})$$

$$C^s(i, j) = [1 - \delta_{\text{mod}(i,L), 0}(\delta_{j,0} + \delta_{j,-1})][1 - \delta_{\frac{i}{L}, 0}(\delta_{j,1} + \delta_{j,0})], \quad (\text{B.7c})$$

$$D^s(i, j) = \delta_{C_0^s(i), 1} \delta_{\gamma_i, \gamma_j} + \delta_{C_0^s(i), 2} (\delta_{\gamma_i, \gamma_j} + \frac{1}{3}) + \delta_{C_0^s(i), 3} (\delta_{\gamma_i, \gamma_j} + 1), \quad (\text{B.7d})$$

$$C_0^s(i) = \sum_{j=-1}^1 [\delta_{F^s(i, \bar{i}), 1} C(i, j)]. \quad (\text{B.7e})$$

É importante lembrar que após o calculo do fator B.6 efetua-se o mesmo procedimento descrito na Figura B.1 com as transformações  $c_i = 2 \rightarrow c_i^s = 1, 3, 4, 6, 7, 8$  e  $c_i = 1 \rightarrow c_i^s = 2, 5, 7$ . Não será efetuado maiores mudanças na topologia como enfoque no aumento do número de vizinhos devido ao grande aumento na complexidade do calculo de tamanho e

número de domínios resultantes.

## B.4 Inclusão das Condições Periódicas de Contorno

Usando novamente a hipótese de correlação entre domínios equiculturais e topologia de vizinhos interagentes a qual foi motivação para o cálculo da seção anterior, vamos exemplificar e calcular agora as modificações no algoritmo de contagem de domínios quando assumimos condições periódicas de contorno. Primeiramente exemplificaremos esta correlação analisando a rede de dimensão  $L = 5$ ,  $F = 2$ , e  $q = 2$ , utilizando a notação do modelo de Axelrod, da Figura B.8.

$$\begin{pmatrix} 11 & 00 & 00 & 00 & 00 \\ 11 & 00 & 00 & 00 & 11 \\ 11 & 00 & 00 & 00 & 11 \\ 00 & 00 & 00 & 00 & 11 \\ 00 & 00 & 00 & 11 & 11 \end{pmatrix} \quad (\text{B.8})$$

No caso de condições fechadas de contorno teríamos um total de 3 domínios equiculturais, já para o caso de condições periódicas de contorno teremos 2. Devido à esse fato teremos que adicionar ao algoritmo de contagem de domínios a condição periódica a qual foi ignorada até o presente momento. Para isto adicionaremos após a contagem de domínios uma verificação nas bordas da rede, efetuando uma segunda lista de tags a qual será novamente combinada com a lista de sítios ativos. Analogamente ao feito para a contagem inicial de domínios, é percorrido os elementos da borda superior e da borda esquerda exceto o elemento  $i = 0$  o qual é analisado separadamente, calculando o fator B.9 e assim classificando os elementos em 3 categorias: sem vizinhos idênticos  $c_i^p = 0$ , 1 vizinho idêntico com mesmo rótulo  $c_i^p = 2$  e 1 vizinho idêntico de rótulo diferentes  $c_i^p = 1$ .

$$c_i^p = \sum_{j=0}^1 [(\delta_{F^p(i, \bar{i}), 1} C^p(i, j)) + D^p(i, \bar{i})], \quad (\text{B.9})$$

sendo

$$\bar{i} = i - 1 + j(L - 1), \quad (\text{B.10a})$$

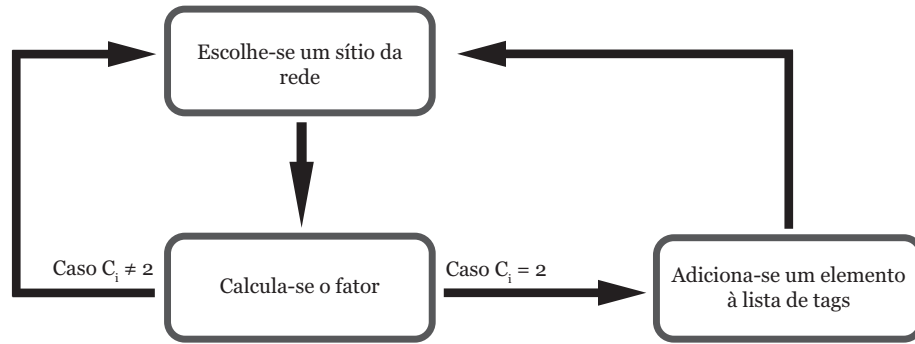
$$F^p(i, j) = \sum_{k=0}^{q-1} \frac{\delta_{\Psi_{i,k}, \Psi_{j,k}}}{q - 1}, \quad (\text{B.10b})$$

$$C^p(i, j) = [\delta_{\text{mod}(i,L),0} \delta_{j,1}] [\delta_{\frac{i}{L},0} \delta_{j,0}], \quad (\text{B.10c})$$

$$D^p(i, j) = \delta_{C_0(i),1} \delta_{\gamma_i, \gamma_j}, \quad (\text{B.10d})$$

$$C_0^p(i) = \sum_{j=0}^1 [\delta_{F(i,\bar{i}),1} C(i, j)]. \quad (\text{B.10e})$$

Estamos usando a mesma notação da equação B.4 para as condições de contorno, a comparação dos fatores, etc. Note que será efetuada alguma ação nas listas apenas para  $c_i^p = 2$  onde adicionamos uma tag. De uma forma visual temos o diagrama da Figura B.2.



**Figura B.2** – Diagrama de Fluxo da Aplicação de condições periódicas de contorno à Contagem de Domínios com vizinhança de von Neumann.

Após calcularmos  $c_i^p$  para todos elementos em questão, consequentemente gerando a lista de tags, mesclamos uma segunda vez essas tags com a lista de domínios e a inclusão da periodicidade da rede esta incluída.

Necessitamos também de um calculo de condições periódicas de contorno para a vizinhança de Moore (vide Figura 3.1). Para isto efetuamos o mesmo procedimento feito acima, adicionamos o vizinho noroeste as equações B.9. Temos então o seguinte conjunto de expressões para o calculo do fator B.11.

$$c_i^{ps} = \sum_{j=-1}^1 [\delta_{F^{ps}(i,\bar{i}^s),1} C^{ps}(i, \bar{i}^s)] + D^{ps}(i, \bar{i}^{ps}), \quad (\text{B.11})$$

sendo

$$\bar{i}^{ps} = i + [j(1 - L) - (1 + L)][1 - \frac{1}{2}(1 - \delta_{j,0})], \quad (\text{B.12a})$$

$$F^{ps}(i, j) = \sum_{k=0}^{q-1} \frac{\delta_{\Psi_{i,k}, \Psi_{j,k}}}{q - 1}, \quad (\text{B.12b})$$

$$C^{ps}(i, j) = [\delta_{\text{mod}(i,L),0}(\delta_{j,0} + \delta_{j,-1})][\delta_{\frac{i}{L},0}(\delta_{j,1} + \delta_{j,0})], \quad (\text{B.12c})$$

$$D^{ps}(i, j) = \delta_{C_0^s(i),1} \delta_{\gamma_i, \gamma_j} + \delta_{C_0^s(i),2} (\delta_{\gamma_i, \gamma_j} + \frac{1}{3}), \quad (\text{B.12d})$$

$$C_0^{ps}(i) = \sum_{j=0}^1 [\delta_{F^s(i,\bar{i}),1} C(i, j)]. \quad (\text{B.12e})$$

Neste caso teremos vários critérios redundantes, ou seja situações em que a operação sobre a lista de domínios ou a lista de tags é a mesma no entanto, a disposição dos sítios/rótulos de domínios são distintos. Temos então o mesmo procedimento mostrado na Figura B.2 com a transformação  $c_i^p = 2 \rightarrow c_i^{ps} = 2, 3, 4$ . Com isso todas as possibilidades de topologia de vizinhos interagentes e condições de contorno foram demonstradas e calculadas.