

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS**

Iago Israel

**O potencial quântico da mecânica bohmiana como ponte
entre as mecânicas clássica e quântica**

São Carlos

2022

Iago Israel

**O potencial quântico da mecânica bohmiana como ponte
entre as mecânicas clássica e quântica**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de concentração: Física Teórica e Experimental

Orientador: Prof. Dr. Leonardo Paulo Maia

Versão corrigida
(versão original disponível na Unidade que aloja o Programa)

São Carlos
2022

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Israel , Iago

O potencial quântico da mecânica bohmiana como ponte entre as mecânicas clássica e quântica / Iago Israel ; orientador Leonardo Paulo Maia - versão corrigida -- São Carlos, 2022.

90 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Física Básica) -- Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2022.

1. Efeito Aharonov-Bohm . 2. Potencial quântico . 3. Limite clássico . 4. Mecânica bohmiana. I. Maia, Leonardo Paulo , orient. II. Título.

Dedico esta dissertação à minha mãe, à minha companheira e à minha viúva. E a você também!

Em memória de Ana Laura Cezario Israel

AGRADECIMENTOS

Não é sobre ter todas as pessoas do mundo pra si É sobre saber que em algum lugar alguém zela por ti É sobre cantar e poder escutar mais do que a própria voz É sobre dançar na chuva de vida que cai sobre nós É saber se sentir infinito num universo tão vasto e bonito É saber sonhar E então fazer valer a pena Cada verso daquele poema sobre acreditar Não é sobre chegar no topo do mundo, saber que venceu É sobre escalar e sentir que o caminho te fortaleceu É sobre ser abrigo e também ter morada em outros corações E assim ter amigos contigo em todas as situações A gente não pode ter tudo Qual seria a graça do mundo se fosse assim? Por isso, eu prefiro sorrisos E os presentes que a vida trouxe pra perto de mim

(Ana Vilela - Trem-Bala)

Gratidão!

Desde que peguei em mãos uma dissertação de mestrado ou tese de doutorado pela primeira vez, antes de ingressar na graduação em física, me peguei pensando o quanto acabaria tendo que implementar um princípio de Mach do amor e agradecer ao universo como um todo. Fazê-lo-ei, sempre! Isso posto, gostaria de citar explicitamente uma lista (ainda que necessariamente incompleta) de seres, iniciando por: gratidão por tudo! Tudo de bom sempre, a todos os seres! O rolê é buscar transcendência e plenitude, internas e externas, acopladas!

Alguém me ensinou desde o útero que o Amor (saudável e sincero) é a maior força da alma, e que, quando conseguirmos, deveríamos cultivá-lo. Nunca conheci professora tão sábia e íntegra nisso quanto a Angela Aparecida. Valeu, mãezinha! Te amo! Gratidão!

Ocorre uma coisa legal quando N é maior ou igual a 3, você nunca é maioria. Valeu por me ensinarem o que significa dar rolê e por todo o treinamento em gravidade aumentada. Quem é Sandy, Cindy and Mindy perto de toi, mu e guinho?? Amo vocês, maninhús!

Joaquim, Clara, tio Bruno, Ana, Vicente, tamo junto!

Tudo começa na 7A.... gratidão por serem ohana!

Mautospapos era um nome temporário, mas pegou.... quanta coisa né? Gratidão pela companhia na alma!

Agradeço profundamente aes professoras(es) que estavam ali de corpo e alma. O mundo é vasto, mas ficou bem mais bonito com a parceria de vocês!

Rosi, te amo! É nós!

Tia Berê e Tio Zé, melhores apamadriões não haveria!

Gratidão pra sempre, Davi e Lia, inclusive pela maçã!

À EFC, que semanas, que semanas....

Ao Carlos Grossi e a todo comitê secreto legal, todo o carinho meu, dos seres elementais e dos multiversos!

$GT|\Psi\rangle$, aaaaa goiaaaabaaaaaa, goiaaaabooooo!!! Amo vocês!!! Transformação de vida! Vista este parangolé e bora dar role!

Filosofísica, (para não perder o hábito) um grupo horizontal, aberto, livre, democrático, fundado em 2011 e de discussão em temas de filosofia da ciência e afins, desde que temas apresentados de modo a serem expansores de horizonte. Parafraseando uma amada e querida professora: vida longa ao Filosofísica!

Muiraquitã, higgs, rolê B, pane, cefisc, reino 11, pugnaculum, nuances, mandagô, tupo, ixomph, berl: forte abraço e continuemos juntas!

eloyinyiaang são conhecidas em muitas culturas como aquelas que moram no paraíso, é vdd, o paraíso é onde vocês estiverem

vini maori, você mudou minha vida, gratidão! Fica junto mesmo se corrido e longe, sei que você sabe.

Bê, Espeto, Ésquines, Raimundo, Mani, Fucci, Talles, Leon, as palavras não expressam o quanto, mas valeu!

Saudades nadar e surfar com você, Kirby!!! Bora rolêe

Valeu família, tata, bibi e beber, por tudo e pela companhia! Mesmo mesmo! Foi com vocês, por vocês e pra vocês! Pra sempre grato!!

Caramba, Camila, quem diria que essa seria a história. Fico feliz! Valeu pela companhia, pela cura, e por me ajudar a tornar minha psique permeável ao amor.

Luchesiane Currie não transmutou apenas átomos, mexeu também com as sonhos e destinos. Recomendo, faz bem pra saúde da alma e da pele. O mundo é frio demais pra saber aceitar tanto calor humano.

Uirá, eu achava que a física proibiria alguém ser tão amigo, humano, dedicado e fritão, daí você mostrou o erro na minha demonstração por contra-exemplo. Quero crescer sempre junto com você!

à lr.gui, agradeço por ser a melhor dobradora de sonhos que poderia haver, as coisas ainda vão ser mais fáceis, mas lembra que eu te amo sempre!

Gratidão e tudo de bom a todos os seres, sempre!! Tamo junto!

*“Where the road
runs through the valley,
where the river flows,
I will follow every highway
to the place I know.
Long, long journey
through the darkness,
long, long way to go;
but what are miles
across the ocean
to the heart that’s coming home?”
Enya - Long long journey*

*“In just seven days I can make you a... master.”
Dre. Frank N Furter*

RESUMO

ISRAEL, I. **O potencial quântico da mecânica bohmiana como ponte entre as mecânica clássica e quântica.** 2022. 90p. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2022.

Neste trabalho, buscamos uma interpretação física para o Efeito Aharonov-Bohm, um dos primeiros e mais famosos casos de fase geométrica na mecânica quântica. Para isso, fazemos uso do formalismo bohmiano da mecânica quântica, para podermos formular uma condição precisa (a saber, que a escala de variação espacial do potencial clássico seja muito maior do que a dimensão característica do pacote de onda) para o limite clássico e argumentarmos que o Efeito Aharonov-Bohm depende da violação dessa condição, o que é possível devido à topologia não simplesmente conexa do espaço base acessível ao elétron. Ademais, utilizamos a mecânica bohmiana para recuperar a mecânica quântica a partir da mecânica clássica via abordagem quasi-newtoniana, demonstrando que o potencial quântico, que é a origem da não-classicidade da mecânica quântica, está latente na estrutura da mecânica clássica. Apresentamos uma interpretação termodinâmica para o potencial quântico bohmiano e qual seria a origem machiana do potencial quântico na validade do Princípio de Mach, para compreendermos mais a fundo as bases da mecânica quântica.

Palavras-chave: Efeito Aharonov-Bohm. Potencial quântico. Limite clássico. Mecânica bohmiana.

ABSTRACT

ISRAEL, I. **The quantum potential of the bohmian mechanics as a bridge between classical and quantum mechanics.** 2022. 90p. Dissertation. (Master in Science) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2022.

In this dissertation, we search for a physical interpretation of the Aharonov-Bohm effect, one of the first and most famous cases of geometric phase in quantum mechanics. In order to do that, we use the bohmian formalism of quantum mechanics to formulate a precise condition (namely, the scale of spacial variation of the classical potential be greater than the characteristic dimension of the wave) for the classical limit and argue that the Aharonov-Bohm effect depends on the violation of this condition, which is possible due to the not simply connected topology of the phase space accessible to the eletron. Furthermore, we use the bohmiana mechanics to recover quantum mechanics from classical mechanics through a quasi-newtonian approach, showing that the quantum potential, which is que origem of non-classicality of quantum mechanics, is latent in the structure of classical mechanics. We present a thermodynamical interpretation for the quantum bohmian potential and which would be the machian origin of the quantum potential in the validity of the Mach Principle, in order to achieve a deeper compreheension of the foundations of quantum mechanics.

Keywords: Aharonov-Bohm effect. Quantum potential. Classical limit. Bohmian mechanics.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Efeito Aharonov-Bohm: no experimento de difração de elétrons por dupla fenda, ocorre o deslocamento do padrão de interferência no detector devido ao fluxo magnético confinado no solenoide.	29
Figura 2 – Perfil do Potencial Quântico e Trajetórias Bohmianas no experimento da difração por dupla fenda.	40
Figura 3 – Perfil do potencial quântico no experimento da difração por dupla fenda com campo magnético confinado ao solenoide. Nessa figura, note a assimetria do potencial quântico decorrente do Efeito Aharonov-Bohm, em contraste com a situação simétrica da Figura 2.	56
Figura 4 – pacote de onda da mecânica quântica em movimento unidimensional (a posição está representada no eixo esquerda-direita da imagem) em um meio 1 incidindo sobre a interface com um meio 2. A passagem temporal está representada no eixo vertical, de baixo para cima. Trajetórias bohmianas (as linhas amarelas) podem refletir ou refratar. Note o padrão de acumulação-depleção.	61
Figura 5 – Representação do clássico experimento do balde de Newton.	65
Figura 6 – Ilustração de pêndulo em vagão. Se o Princípio de Mach for válido, acelerar o vagão produzirá o mesmo resultado que acelerar o universo distante com mesma intensidade mas sentido contrário. Contudo, na mecânica newtoniana, nada ocorre com o pêndulo quando se acelera o universo	69

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
2	O PARADOXO DE AHARONOV-BOHM E SUA HISTÓRIA	23
2.1	Revisão de eletromagnetismo	24
2.2	Cálculo do efeito Aharonov-Bohm	25
2.2.1	A equação de uma partícula quântica sujeita a potencial \vec{A}	25
2.2.2	O efeito Aharonov-Bohm (magnético)	28
2.2.3	Formulação matemática do efeito Aharonov - Bohm	30
2.3	Observação experimental	31
3	MECÂNICA BOHMIANA	33
3.1	Revisão: Equação de Continuidade e Equação de Hamilton-Jacobi	33
3.2	Apresentação da formulação bohmiana	34
3.3	Interpretação da formulação bohmiana	37
3.4	Comentários adicionais	40
4	DE QUÂNTICA PARA CLÁSSICA E DE CLÁSSICA PARA QUÂN- TICA	43
4.1	O limite clássico da mecânica quântica	43
4.2	Dedução das equações bohmianas via abordagem quasi-newtoniana	49
5	INTERPRETAÇÃO TERMODINÂMICA DO POTENCIAL QUÂN- TICO	57
5.1	Revisão: equação de onda linear, lei de Fourier, leis de Fick e equação de difusão	57
5.2	Ondas de difusão	58
5.3	Interpretando o significado físico do formato matemático do poten- cial quântico	59
6	MASSA, PRINCÍPIO DE MACH E POTENCIAL QUÂNTICO	63
6.1	Princípio de Mach	63
6.2	Mecânica Relacional	65
6.3	Origem “machiana” do potencial quântico	69
7	CONCLUSÃO	71
	REFERÊNCIAS	75

	APÊNDICES	81
	APÊNDICE A – FIBRADOS	83
A.1	Um exemplo motivador: Fibrado tangente	83
A.2	Fibrados e G-fibrados com fibra F	84
A.3	Mapas de fibrados	86
A.4	Fibrados principais	86
A.5	Conexões em Fibrados Principais	87
A.6	Conexão local e potencial de calibre	89
A.7	Holonomia	90

1 INTRODUÇÃO

O objetivo desta dissertação de mestrado foi, pelo menos para situações particulares, tentar estruturar uma abordagem de mecânica quântica não-relativística que seja intuitivamente compatível com a forma de pensar da mecânica clássica, isto é, uma abordagem que permita a um(a) físico(a) ter “insights” sobre o que há de quântico (isto é, o que há de não-clássico) na mecânica quântica. Embora, para fins técnico-operacionais, a mecânica quântica possa ser obtida da mecânica clássica por meio de abordagens como a substituição do Parênteses de Poisson de grandezas clássicas pelo comutador dos respectivos operadores quânticos (1,2), esse método é, hodiernamente, introduzido como um postulado “caixa-preta” ou como uma analogia não dedutível intuitivamente, de modo que, ainda que cálculos possam ser efetuados, a compreensão conceitual da mecânica quântica corre o risco de manter-se refém de caixas-pretas não acessíveis à intuição clássica.

A pesquisa que embasou esta dissertação iniciou-se pelo problema do Efeito Aharonov-Bohm (ou Paradoxo de Aharonov-Bohm, ou, ainda, Efeito Ehrenberg-Siday-Aharonov-Bohm). Esse efeito quântico, previsto teoricamente (3) e mensurado experimentalmente (4), não seria teoricamente possível segundo a mecânica clássica munida da eletrodinâmica clássica, motivo pelo qual foi designado como paradoxo. Como o Efeito Aharonov-Bohm ocorre em mecânica quântica, mas não ocorre em mecânica clássica, a autoria dessa dissertação acreditou que, caso encontrasse uma ponte de ida e volta entre a mecânica clássica e a mecânica quântica (pelo menos, para situações particulares de interesse), poderia não apenas, por um lado, descrever, ao tomar o limite da mecânica quântica para a mecânica clássica, o Efeito Aharonov-Bohm desaparecer, mas também, por outro lado, demonstrar, ao obter a mecânica quântica da mecânica clássica, o ressurgimento do Efeito Aharonov-Bohm, de modo que o sucesso dessa ideia possivelmente elucidaria questões sobre a intuição clássica desse paradoxo.

Apesar de existirem tentativas filosoficamente rigorosas de elaboração de abordagens primitivas de mecânica quântica (isto é, abordagens que lidem com a mecânica quântica sem assumirem alguma formulação particular) (5–7), há diversas formulações (ou interpretações) distintas para a mecânica quântica (8), como a Interpretação de Copenhague (9,10), a Interpretação de Muitos Mundos (11–16) e a Interpretação de Bohm. (17–20) Nesta dissertação, visando à construção de uma transição quântico-clássica e clássico-quântica, empregou-se a Formulação Bohmiana da Mecânica Quântica.

Tal escolha se justificou, em primeiro lugar, por motivo prático; a saber, dentre as formulações de mecânica quântica investigadas, foi com a formulação bohmiana que a autoria desta dissertação encontrou, na literatura, tanto a transição quântico-clássica, quanto a transição clássico-quântica (transições essas com a conveniente qualidade de

se adequarem à exigência de preservarem a intuição clássica “passo a passo”), mesmo que tal sucesso não signifique que vindouras tentativas análogas com outras formulações fracassariam.

Em segundo lugar, a adoção da formulação bohmiana nesta dissertação se deve à própria motivação fundamental dessa formulação: ora, na mecânica clássica, dado um sistema de referência, a cada instante, um corpo pontual ocupará, com 100% de probabilidade, uma única posição espacial, com momento linear determinado, de modo que, se conhecidas as condições iniciais, é possível determinar-lhe a função horária da posição; ora, a formulação bohmiana da mecânica quântica caracteriza-se por trocar, equivalentemente, a Equação de Schrödinger de uma função de onda complexa por duas equações de funções reais, uma sendo uma equação de continuidade de probabilidade e outra sendo uma equação de Hamilton-Jacobi com adição do potencial quântico, de modo que torna-se intuitivamente simples aceitar que, caso ao elétron (melhor dizendo, a uma função de onda descrita pela Equação de Schrödinger de que partimos) seja associado um hipotético corpo pontual e a condição inicial do movimento deste, é consistente que a função horária da posição desse corpo pontual seja a determinada pela formulação bohmiana da mecânica quântica para essa dada condição inicial, ou seja, a formulação bohmiana é a formulação da mecânica quântica que lida com a função horária da trajetória que o corpo pontual associado a uma função de onda seguiria se, de fato, tal corpo pontual existisse e se, em seu movimento, seguisse uma trajetória contínua. No decorrer desta dissertação, demonstrou-se que dessas premissas depreende-se que a formulação bohmiana foi adequada a essa pesquisa.

No Capítulo 2 desta dissertação, apresentamos o Paradoxo Aharonov-Bohm (magnético). Esse paradoxo serve de motivação a este trabalho, pois serviu de inspiração à busca por uma compreensão física conceitual mais classicamente intuitiva sobre o que há de diferente na mecânica quântica em relação à mecânica clássica, visto que, entre essas diferenças, haveria o ingrediente que permite a ocorrência quântica desse fenômeno. Após uma breve revisão de eletromagnetismo necessária à sua compreensão, deduzimos esse efeito, em sua apresentação mais simples, e comentamos, em termos de geometria de fibrados (ver apêndice), seu conteúdo. Nota-se que a descrição matemática do Efeito Aharonov-Bohm auxilia na compreensão do efeito, mas não necessariamente esgota a elucidação de sua origem física. Finalmente, descrevemos uma breve recapitulação do histórico do Efeito Aharonov-Bohm, com ênfase experimental.

No Capítulo 3, introduzimos a mecânica bohmiana (formulação bohmiana da mecânica quântica), comentamos sua interpretação e, ao final, adicionamos alguns comentários que auxiliam na contextualização geral da compreensão dessa abordagem. Essa formulação foi escolhida após a autoria dessa dissertação pesquisar diversas formulações e interpretações de mecânica quântica e concluir que a mecânica bohmiana se mostra muito apropriada

à elaboração de uma abordagem conceitualmente elucidativa entre a mecânica clássica e a mecânica quântica, pois contém as Equações de Madelung, que são equivalentes à Equação de Schrödinger, mas também são equações interpretáveis em termos da intuição da física clássica (equação da continuidade e Equação de Hamilton-Jacobi com modificação por adição do potencial quântico bohmiano).

No Capítulo 4, utilizamos a mecânica bohmiana para formularmos, por um lado, uma condição física em que o limite clássico exista e, em particular, comentamos que a situação em que ocorre o Efeito Aharonov-Bohm não satisfaz essa condição, de modo que seu limite clássico não existe. Por outro lado, partimos da Equação de Hamilton-Jacobi da mecânica clássica e chegamos, via abordagem quasi-newtoniana (sem menção à Equação de Schrödinger), à dedução das Equações de Madelung, recuperando, a menos de uma escolha de constantes, a mecânica quântica não-relativística e até mesmo a mecânica quântica relativística, motivo pelo qual concluímos que, em algum sentido, a mecânica quântica jaz latente no mundo clássico. Também comentamos que os operadores quânticos e seus auto-valores podem ser deduzidos a partir das equações da mecânica bohmiana, sem a necessidade de serem postulados. Esses resultados permitem uma ponte de mão-dupla entre o mundo clássico e o mundo quântico, sendo conceitualmente importantes para elaborar uma intuitiva transição continua entre esses mundos que, hodiernamente, são considerados separados por um abismo paradigmático.

No Capítulo 5, revisamos brevemente a equação de onda linear, a equação de difusão, as leis de Fick e introduzimos as ondas difusão. Na sequência, apresentamos uma interpretação termodinâmica para o potencial quântico bohmiano, por meio de resultados que utilizam considerações de termodinâmica fora do equilíbrio para demonstrarem que a expressão matemática do potencial quântico o faz ter, na mecânica quântica, um papel semelhante ao que o termo perturbativo $q(\vec{r})e^{i.\omega.t}$ tem nas ondas de difusão em sistemas clássicos. A equação de Schrödinger pode ser recuperada a partir dessa abordagem, indicando que a compreensão da física do potencial quântico está longe de se tratar de uma abstração irrealista.

No Capítulo 6, apresentamos um princípio físico conhecido como Princípio de Mach, e o contextualizamos. Em seguida, apresentamos uma teoria física chamada Mecânica Relacional, que parte de primeiros princípios e, ao empregar alterações na segunda lei de Newton e na lei da gravitação universal (substituindo-a pela lei de força de Weber gravitacional, análoga à Lei de força de Weber da eletrodinâmica), implementa o Princípio de Mach como consequência, razão pela qual permite-nos expandir a compreensão desse princípio. Por fim, enunciemos a consequência conceitual para a origem do potencial quântico. A saber, como o Princípio de Mach afirma que a origem da inércia de um corpo decorre da interação com os demais corpos do universo, a massa inercial deriva da interação gravitacional com os corpos do universo, de modo que a energia cinética passa a ser uma

energia de interação com a matéria distante e, uma vez que o potencial quântico é uma correção quântica na energia cinética que orienta as trajetórias bohmianas, o potencial quântico, na validade do Princípio de Mach, também será decorrência da interação do corpo pontual com os demais corpos do universo.

2 O PARADOXO DE AHARONOV-BOHM E SUA HISTÓRIA

Neste capítulo, apresentaremos o efeito conhecido como Paradoxo Ehrenberg-Siday-Aharonov-Bohm (ou, simplesmente, Paradoxo Aharonov-Bohm), um efeito da mecânica quântica que não pode ocorrer na mecânica clássica munida da eletrodinâmica clássica. (21) Nesse efeito, a difração eletrônica por dupla fenda pode ser utilizada para medir o fluxo magnético confinado em um solenoide que está localizado entre as duas fendas, mas absolutamente blindado e inacessível ao elétron. Ou seja o elétron sente informação da presença de um campo magnético sem nunca ter ocupado alguma região onde o campo fosse não nulo.

Fixado um referencial inercial, sejam R e S duas regiões espaciais (ambas conexas por caminhos) de interseção vazia, mantidas inalteradas e em repouso em relação ao referencial. Suponha que os campos elétrico e magnético são mantidos nulos na região R. Desse modo, classicamente, seria impossível medirmos alguma alteração na dinâmica de um corpo pontual confinado à região R decorrente da alteração do campo magnético confinado à região S.

Entretanto, o efeito Aharonov-Bohm é um exemplo de um fenômeno do tipo descrito como impossível no parágrafo anterior. Estudando elétrons numa região R desprovida de campo magnético, pode-se medir o fluxo de campo magnético numa região S, sendo que R e S não têm interseção. Isso é classicamente impossível e, no entanto, tal efeito já foi observado experimentalmente. (22)

Nesse experimento, o tradicional cenário de difração de elétrons por dupla fenda é modificado pela adição de um solenoide com campo magnético constante e homogêneo, em uma região blindada que se localiza logo após as fendas, no ponto médio entre elas. O padrão de interferência detectado no anteparo é alterado, o que não é previsto classicamente, pois o campo eletromagnético manteve-se nulo na região acessada pelo elétron. É a esse fenômeno que denominamos Efeito Aharonov-Bohm. (23)

Neste capítulo, revisitaremos noções fundamentais da eletrodinâmica clássica (24) que demonstram a impossibilidade de detectar uma alteração no padrão de interferência desse experimento de dupla fenda modificado. Em seguida, demonstraremos como a mecânica quântica prediz essa alteração (25), enfatizando a pouca intuição sobre o fenômeno físico envolvido nesse efeito que a teoria provê. (26) Então, enunciaremos a formulação matemática do efeito, o que é adequadamente feito com o uso da geometria de fibrados (ver apêndice), para se demonstrar que esse efeito é um exemplo de a função de onda sendo sensível à holonomia não-trivial (por isso o efeito existe) da conexão do potencial vetor \vec{A} , mesmo sem passar por pontos onde o campo magnético \vec{B} (a curvatura) seja não-nulo.

Por fim, fazemos uma breve recapitulação histórica dos marcos experimentais em relação ao Efeito Aharonov-Bohm.

2.1 Revisão de eletromagnetismo

Na teoria clássica do eletromagnetismo, em uma região espacial de vácuo (a menos de fontes de carga elétrica e de corrente elétrica), os campos elétrico $\vec{E}(\vec{r}, t)$ e magnético $\vec{B}(\vec{r}, t)$ se relacionam com as densidades de carga elétrica $\rho(\vec{r}, t)$ e de corrente elétrica $\vec{J}(\vec{r}, t)$ segundo as Equações de Maxwell (onde a permissividade elétrica do vácuo ε_0 e a permeabilidade magnética do vácuo μ_0 são constantes). A saber:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\vec{r}, t) \quad (2.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \quad (2.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \vec{J}(\vec{r}, t) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (2.4)$$

Para uma situação física que se desenrole em uma dada região espacial, conhecidas as fontes ρ e \vec{J} e as condições de contorno que os campos \vec{E} e \vec{B} devem satisfazer, é possível determinar os campos \vec{E} e \vec{B} como solução desse sistema de equações diferenciais parciais (embora pareça, essa proposição não é simplesmente um corolário direto do Teorema da Decomposição de Helmholtz, pois os campos \vec{E} e \vec{B} também estão, respectivamente, presentes no lado direito da igualdade das equações 2.4 e 2.3; entretanto, ideias do Teorema de Helmholtz podem ser aproveitadas).

Na eletrodinâmica clássica, observando-se de um referencial inercial, a força eletromagnética $\vec{F}_{EM}(\vec{r}(t), t)$ sobre um corpo pontual (sem estrutura) de carga q , que, no instante t , esteja na posição \vec{r} , com velocidade \vec{v} , é dada pela Lei de Força de Lorentz:

$$\vec{F}_{EM}(\vec{r}(t), t) = q \cdot \vec{E}(\vec{r}(t), t) + q \cdot \vec{v}(t) \times \vec{B}(\vec{r}(t), t) \quad (2.5)$$

Se, em vez de um corpo pontual, lidarmos com um sistema material extenso munido com densidade de carga elétrica $\rho(\vec{r}, t)$, podemos definir a densidade de força eletromagnética $\vec{f}_{EM}(\vec{r}, t)$ sobre um ponto do sistema, dada por:

$$\vec{f}_{EM}(\vec{r}(t), t) = \rho(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) + \rho(\vec{r}, t) \cdot \vec{v}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t) \quad (2.6)$$

De modo que, a cada instante, a força eletromagnética líquida sobre o sistema é obtida por integração espacial.

Pode-se afirmar, das equações 2.2 e 2.3 respectivamente, que, dados \vec{E} e \vec{B} , existem duas funções $\phi(\vec{r}, t)$ e $\vec{A}(\vec{r}, t)$, de mesmo domínio que as Equações de Maxwell para os campos \vec{E} e \vec{B} , tais que:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t) \quad (2.7)$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}, t) - \frac{\partial\vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (2.8)$$

Por esse motivo, pode-se usar as equações 2.7 e 2.8 para reescrever as equações de 2.1 a 2.6, substituindo \vec{E} e \vec{B} em termos de ϕ e \vec{A} . Essa mudança matemática é um recurso útil, mas, como a física da eletrodinâmica clássica pôde ser (ao menos, no vácuo) totalmente enunciada pelas equações de 2.1 a 2.6 em termos dos campos \vec{E} e \vec{B} (logo, sem menção aos potenciais), os potenciais ϕ e \vec{A} não precisam ser considerados (em outras palavras, em particular, se uma conclusão física for corretamente inferida em termos dos campos \vec{E} e \vec{B} , o emprego dos potenciais ϕ e \vec{A} não contradizerá essa conclusão).

Os potenciais ϕ e \vec{A} não são unicamente obtidos, mas quaisquer ϕ e \vec{A} obtidos de 2.2 e 2.3 levam aos mesmos campos \vec{E} e \vec{B} em 2.7 e 2.8, e, assim, à mesma física, logo são equivalentes. Iremos determinar ϕ e \vec{A} adotando uma condição adicional que deverá ser obedecida (dados ϕ' e \vec{A}' que não satisfaçam tal condição, matematicamente podemos sempre determinar unicamente ϕ e \vec{A} fisicamente equivalentes que a satisfaçam). Isso significa adotar um calibre (gauge). Adotaremos o calibre de Lorentz, definido pela seguinte condição:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial\phi(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad (2.9)$$

onde c é a constante de velocidade instantânea de propagação da luz no vácuo.

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad (2.10)$$

2.2 Cálculo do efeito Aharonov-Bohm

2.2.1 A equação de uma partícula quântica sujeita a potencial \vec{A}

Suponha uma partícula (sem spin), de massa m (finita e não-nula), cuja função de onda é confinada a uma região espacial R (conexa por caminhos) onde ϕ e \vec{A} são identicamente nulos (consequentemente: \vec{E} e \vec{B} são identicamente nulos). De acordo com

a Mecânica Quântica, tal função de onda ψ sujeita a um potencial $V(\vec{r})$, deve obedecer à Equação de Schrödinger:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\vec{r},t) + V(\vec{r},t)\psi(\vec{r},t) = i\hbar\frac{\partial\psi(\vec{r},t)}{\partial t} \quad (2.11)$$

Suponha, agora, o mesmo caso que no parágrafo acima, com exceção de não mais se exigir que o potencial vetor \vec{A} seja nulo, mas ainda exigir-se que ϕ , \vec{E} e \vec{B} sejam mantidos nulos. Note que, juntamente com a equação 2.8, essas condições obrigam que \vec{A} seja estacionário, isto é, $\frac{\partial\vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t} = 0$. A dinâmica de evolução temporal da função de onda agora deverá levar em conta a interação eletrodinâmica entre a partícula quântica e o campo eletromagnético. Para enunciarmos tal cálculo, levaremos em conta a aproximação dada pelo acoplamento mínimo, explicada a seguir.

Em princípio, por um lado, um sistema com carga elétrica sofrerá influência do campo eletromagnético a que esteja submetido; por outro lado, tal sistema, por possuir natureza elétrica, perturbará o campo elétrico externo inicial em que foi imerso, por ser uma das fontes elétricas que contribuem para a determinação do campo resultante. Se assumirmos que, para nossos fins, o corpo teste perturbará insignificamente o campo eletromagnético externo, poderemos tratar o campo eletromagnético resultante como determinado por fatores externos, imperturbáveis pelo corpo teste, restando ao corpo teste ser afetado pelo campo eletromagnético externo sem, entretanto, afetá-lo. Essa é a hipótese denominada de acoplamento mínimo entre um campo e um sistema físico. O acoplamento mínimo é, em palavras técnicas, o truncamento em ordem zero da influência do corpo sobre o campo simultaneamente ao truncamento em primeira ordem da influência do campo sobre o corpo.

Após essa digressão, retornemos à situação da partícula quântica sujeita ao potencial vetor \vec{A} estacionário. Se carga elétrica da partícula é q , de acordo com a Mecânica Quântica, na validade da hipótese de acoplamento mínimo entre o campo eletromagnético e a carga elétrica, sua função de onda Ψ deve obedecer a:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - q\vec{A}\right)^2\Psi(\vec{r},t) + V(\vec{r},t)\Psi(\vec{r},t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(\vec{r},t)}{\partial t} \quad (2.12)$$

Em 2.12, o potencial vetor \vec{A} está presente, mesmo que ϕ , \vec{E} e \vec{B} sejam mantidos nulos em toda a região R .

Como, por 2.7, temos que na região R vale $\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r},t) = 0$, podemos definir (já que, nessas condições, a seguinte integral de linha pode ser calculada de modo unívoco por qualquer caminho contido em R que não “dê a volta” ao redor de S):

$$g(\vec{r}) - g(\vec{r}_0) = \frac{q}{\hbar} \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{A}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}, \quad (2.13)$$

onde o ponto \vec{r}_0 , pertencente à região R, é um ponto de referência (escolhido arbitrariamente) e onde, por simplicidade, a integral de linha é calculada em um caminho arbitrário de R que não “dê voltas” ao redor de S. Para os cálculos a seguir (desta sub-seção), por simplicidade, sem perda de generalidade, assumiremos $g(\vec{r}_0) = 0$.

Agora, escrevemos a função de onda $\Psi(\vec{r}, t)$ da equação 2.12 como um produto:

$$\Psi(\vec{r}, t) = e^{ig(\vec{r})}\psi(\vec{r}, t) \quad (2.14)$$

Substituindo 2.14 em 2.12, pode-se verificar que, com essa mudança, $\psi(\vec{r}, t)$ satisfaz 2.11, isto é, satisfaz a equação de Schrödinger com $\vec{A}(\vec{r}, t)$ identicamente nulo.

Mostraremos isso:

Note que, de 2.13, usando o Teorema do Gradiente (Teorema Fundamental do Cálculo no caso de integrais de linha), temos:

$$\vec{\nabla}g(\vec{r}) = \frac{q}{\hbar}\vec{A}(\vec{r}). \quad (2.15)$$

De 2.14, pela regra do produto, temos:

$$\vec{\nabla}\Psi(\vec{r}, t) = e^{ig(\vec{r})}(i\vec{\nabla}g(\vec{r})\psi(\vec{r}, t) + e^{ig(\vec{r})}(\vec{\nabla}\psi(\vec{r}, t))). \quad (2.16)$$

Substituindo 2.15 em 2.16, usando 2.14 e multiplicando ambos os lados por $\frac{\hbar}{i}$, chega-se em:

$$\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - q\vec{A}(\vec{r})\right)\Psi(\vec{r}, t) = \frac{\hbar}{i}e^{ig(\vec{r})}(\vec{\nabla}\psi(\vec{r}, t)) \quad (2.17)$$

De onde segue que:

$$\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - q\vec{A}(\vec{r})\right)^2\Psi(\vec{r}, t) = -\hbar^2 e^{ig(\vec{r})}(\nabla^2\psi(\vec{r}, t)). \quad (2.18)$$

Nota-se que a passagem da equação 2.17 para a equação 2.18 pode ser feita tanto por cálculo direto (análogo ao que fizemos há pouco) quanto pelo argumento de que, na equação 2.17, observamos que o efeito do operador $\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - q\vec{A}(\vec{r})\right)$ aplicado à função de onda $\Psi(\vec{r}, t) = e^{ig(\vec{r})}\psi(\vec{r}, t)$ foi o de fazer surgir o fator multiplicativo $\frac{\hbar}{i}$ e o de aplicar o operador ∇ na função que multiplica a exponencial $e^{ig(\vec{r})}$.

Substituindo 2.18 em 2.12 e usando 2.14, provamos, após cancelarmos o fator comum $e^{ig(\vec{r})}$, o que queríamos demonstrar, a saber: que ψ satisfaz 2.11.

Em resumo: Na região R, onde \vec{E} , \vec{B} e ϕ são nulos (e, portanto, \vec{A} é estacionária): dada $\Psi(\vec{r}, t)$ satisfazendo 2.12, com a substituição 2.14 a escrevemos como um produto de um fator conhecido graças a (2.13), multiplicado por um fator $\psi(\vec{r}, t)$ que satisfaz 2.11. Logo, reduzimos o problema de resolver 2.12 ao de resolver 2.11.

2.2.2 O efeito Aharonov-Bohm (magnético)

Suponha a situação onde dentro de uma caixa cúbica realizamos, no vácuo, o experimento da dupla fenda, usando elétrons. Temos uma fonte que incide um fluxo de elétrons sobre um primeiro anteparo, com duas fendas. A função de onda eletrônica difrata por ambas as fendas, propaga-se, interferindo consigo mesma nos locais onde se sobrepõem, e, então, incide sobre um segundo anteparo, que mede (marca) onde o elétron incidiu (detecção). Entretanto, logo após o primeiro anteparo, na posição média das duas fendas, temos uma região cilíndrica inacessível aos elétrons, dentro da qual existe um solenoide ideal de raio a que mantém um fluxo de campo magnético constante. Pelos equipamentos do laboratório, esse fluxo pode ser ajustado, como um parâmetro, mas, entre os ajustes, ele é constante. O campo magnético (e também o elétrico) do solenoide está confinado a uma região S, dentro da qual a função de onda eletrônica é asseguradamente nula. Esse confinamento dos campos é seguro, feito com camadas de materiais, inclusive supercondutores. Na região R em que a função de onda do elétron pode ser não nula, os campos são mantidos nulos. R e S tem inserção vazia e, além disso, tanto R quanto S são conexas por caminhos. A Figura 1 traz uma representação esquemática desse experimento.

Mostraremos que o fluxo do campo magnético na região S pode ser medido pela dinâmica eletrônica na região R, ainda que o elétron nunca esteja na região S, e esteja confinado a uma região R livre de campos \vec{E} e \vec{B} . Esse é o Efeito Aharonov-Bohm (magnético).

O campo \vec{B} do solenoide na região interna dele é dado por (I é a corrente elétrica no fio, N é a densidade de voltas do fio):

$$\vec{B}_{int}(\vec{r}, t) = \mu_0 I N \hat{z}, \quad (2.19)$$

enquanto, fora do solenoide, o campo é dado por:

$$\vec{B}_{ext}(\vec{r}, t) = \vec{0}, \quad (2.20)$$

Na região externa ao solenoide, o potencial vetor \vec{A}_{ext} é dado por:

$$\vec{A}_{ext}(\vec{r}) = \frac{\Phi_B}{2\pi\rho} \hat{\phi}, \quad (2.21)$$

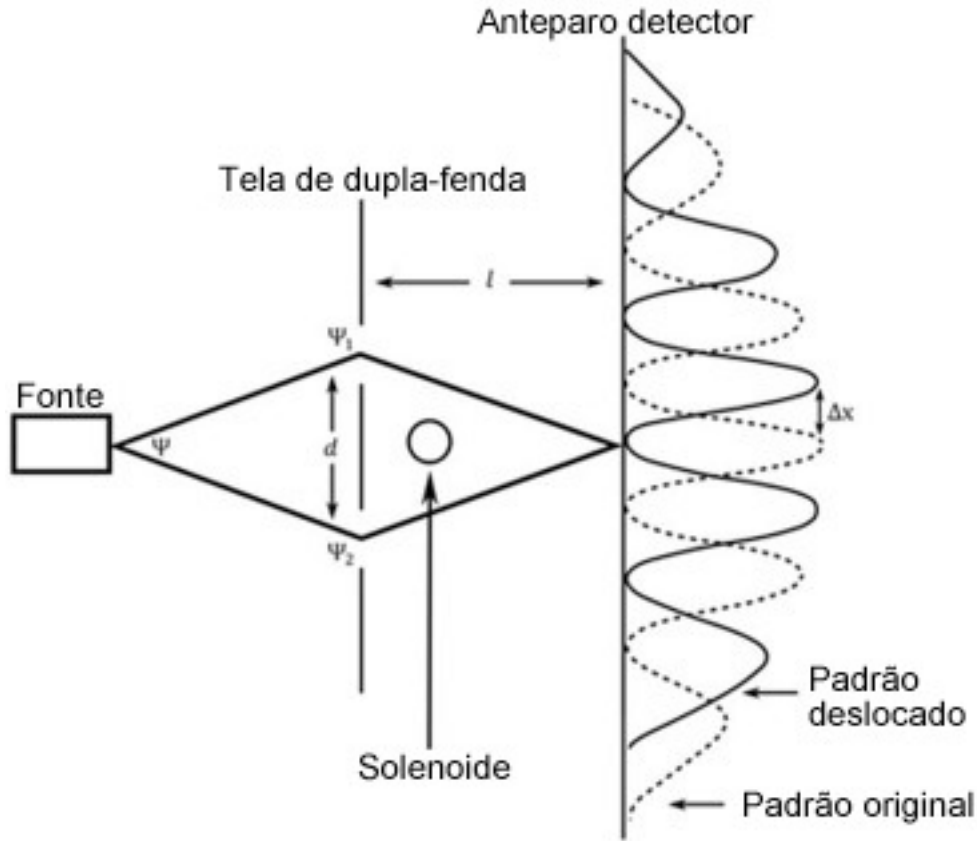


Figura 1 – Efeito Aharonov-Bohm: no experimento de difração de elétrons por dupla fenda, ocorre o deslocamento do padrão de interferência no detector devido ao fluxo magnético confinado no solenóide.

Fonte: Adaptada de SHECH. (27)

na região externa do solenóide, isto é, $\rho > a$ (sendo a o raio do solenóide e ρ a distância, num plano transversal ao eixo do solenóide, entre o centro do solenóide e o ponto \vec{r}), onde $\Phi_B = \pi a^2 \vec{B}_{int}(\vec{0}, t)$ é o fluxo do vetor magnético \vec{B} , no solenóide, através da seção transversal a \vec{B} (equação 2.19), de onde temos:

$$\Phi_B = \mu_0 I N \pi a^2 \quad (2.22)$$

Num ponto \vec{r}_{sim} do anteparo, localizado no plano de simetria do sistema, calculemos $g(\vec{r}_{sim})$ por dois caminhos diferentes: ambos começam na fonte e terminam no anteparo final, porém um atravessa pela fenda da esquerda (caminho indicado por Ψ_1), enquanto o outro pela fenda da direita (caminho indicado por Ψ_2):

$$g(\vec{r}_{sim}) - g(\vec{r}_0) = \frac{q}{\hbar} \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_{sim}} \vec{A}(\vec{x}) d\vec{x} = \frac{q\Phi_B}{2\pi\hbar} \int \left(\frac{1}{\rho} \hat{\varphi} \right) \cdot (\rho \hat{\varphi} d\varphi) = \pm \frac{q\Phi_B}{2\hbar}, \quad (2.23)$$

onde \vec{r}_0 é a origem do feixe de elétrons. O sinal positivo significa que a integração foi feita no sentido de \vec{A} , e, assim, no sentido de I no solenoide. O sinal negativo é o contrário.

A diferença de fase, no ponto \vec{r}_{sim} , entre esses dois caminhos será:

$$\delta_{central} = \frac{q\Phi_B}{\hbar}. \quad (2.24)$$

Ou seja, como, por um lado:

$$g_{direita} - g(\vec{r}_0) = +\frac{q\Phi_B}{2\hbar} \quad (2.25)$$

e, por outro lado:

$$g_{esquerda} - g(\vec{r}_0) = -\frac{q\Phi_B}{2\hbar} \quad (2.26)$$

temos, portanto:

$$\delta_{central} = g_{direita} - g_{esquerda} = \frac{q\Phi_B}{\hbar} \quad (2.27)$$

Isto é, a diferença de fase (observável no experimento, por exemplo, pelo padrão de interferência ondulatória) é diretamente proporcional ao fluxo Φ_B de campo magnético \vec{B} , mesmo que a função de onda seja nula na região S, dentro da qual o campo \vec{B} está confinado.

Aproveitando a descrição que fizemos, imaginemos agora uma outra situação. Suponha que a fonte de elétrons está desligada. Confinamos uma função de onda de um elétron a um trilho unidimensional fechado, uma circunferência de raio b que pode ser desenhada seguindo-se uma linha de campo de $\hat{\varphi}$ numa região de R (sem cruzar a região de S). Pode-se mostrar que o fluxo Φ_B quebra a degenerescência de níveis de energia desse elétron:

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2mb} \left(n - \frac{q\Phi_B}{2\pi\hbar} \right)^2, \quad (2.28)$$

com n inteiro, isto é, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

E, como podemos notar (equação 2.28), para $\frac{q\Phi_B}{2\pi\hbar}$ não inteiro (nem semi-inteiro), quebra-se a degenerescência entre os níveis de energia.

2.2.3 Formulação matemática do efeito Aharonov - Bohm

Nesta sub-seção, enunciaremos o Efeito Aharonov-Bohm na linguagem matemática da geometria em fibrados (ver apêndice).

Qual a formulação geométrica do efeito Aharonov-Bohm? Primeiramente, como o problema é essencialmente bidimensional (já que é tridimensional, mas, na situação do experimento, por simetria no arranjo do laboratório, todo plano transversal ao eixo do solenoide é congruente entre si), faremos essa simplificação, considerando um plano sem sua origem, isto é, $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, onde, por simplificação, estamos, sem perda de generalidade, considerando um solenoide de diâmetro infinitamente pequeno, localizado na origem.

O grupo de Gauge associado é o grupo $U(1) = \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ (leia-se: $U(1)$ é o grupo das matrizes complexas unitárias de ordem 1, ou seja, a circunferência que, no plano complexo, é o conjunto dos números complexos de módulo 1), e, portanto, o fibrado de interesse é $\mathbb{S}^1 \rightarrow P \rightarrow M$.

Por motivos topológicos, é possível mostrar (referência (21)) que o único fibrado principal sobre $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ é o fibrado trivial, e, portanto, $P = M \times \mathbb{S}^1$ e $\pi : P \rightarrow M$ é a projeção.

O outro fibrado de interesse é o fibrado vetorial associado $E = P \times_{\mathbb{S}^1} \mathbb{C}$ onde \mathbb{S}^1 age em \mathbb{C} como rotações. $E \rightarrow M$ é um fibrado de linha complexo e, fisicamente, seções desse fibrado correspondem a funções de onda ψ .

Vamos considerar, então, a 1-forma (com valores na álgebra de Lie) $\mathcal{A} = iA = iA_\mu dx^\mu$, onde A_μ denota o potencial vetor (\vec{A}, A_0) .

O Efeito Aharonov Bohn pode, então, ser descrito como uma medida da holonomia não trivial dessa conexão. De fato, a diferença de fase $\delta_{central}$, obtida na equação (2.24), corresponde exatamente ao fator aditivo na transformação de holonomia ao longo de uma curva fechada simples em torno do solenoide (curva fechada simples qualquer, desde que externa ao solenoide).

2.3 Observação experimental

A observação experimental do Efeito Aharonov-Bohm é de grande interesse da comunidade científica dada sua importância conceitual e sua contradição com previsões clássicas, constituindo, portanto, um teste de validade para a própria mecânica quântica. Em seu trabalho original (4), Aharonov e Bohm não só demonstraram que a teoria quântica sugere que a dinâmica do elétron seria afetada por um campo eletromagnético em uma região inacessível à partícula, mas também propuseram experimentos que permitiriam testar a validade dessa previsão.

A primeira descrição de uma observação experimental do efeito Aharonov-Bohm surgiu um ano depois (28) (mais precisamente, uma observação da diferença de fase no efeito Aharonov-Bohm magnético descrita na seção anterior). Tal resultado recebeu muitas críticas da comunidade à época, sendo o principal questionamento relativo à possibilidade de os

elétrons não estarem totalmente blindados do campo magnético devido à impraticabilidade experimental de se construir um solenoide infinito para que se eliminassem os efeitos de borda do campo magnético.

Foi na década de 1980 que surgiram experimentos utilizando ímãs toroidais para medirem padrões de interferência ondulatória entre pacotes de onda de elétrons que atravessavam as regiões de dentro (o buraco no centro do toro) e de fora do ímã. (29–31) Foram observadas diferenças de fase compatíveis com a previsão de Aharonov-Bohm. Esse conjunto de experimentos são provavelmente as observações desse efeito mais aceitas pela academia até os dias de hoje.

Também podem ser encontradas, na literatura, descrições de experimentos do Efeito Aharonov-Bohm elétrico (32), bem como manifestações do efeito em sistemas de estado sólido, como elétrons circulando em um anel mesoscópico de metal não-supercondutor. (33)

Ainda assim, o assunto está longe de ser esgotado. Além de possíveis aplicações nessa nova era de eletrônica quântica, é interessante destacar que a dedução do Efeito Aharonov-Bohm apresentada aqui pode ser generalizada para qualquer teoria quântica com invariância de gauge, abrindo a possibilidade de observar tal predição em inúmeros sistemas de física de partículas. (34)

3 MECÂNICA BOHMIANA

Neste capítulo, na seção Revisão, apresentaremos a Equação de Continuidade e a Equação de Hamilton-Jacobi, que serão citadas no desenvolvimento desse capítulo. Na seção Apresentação, introduziremos as equações da formulação bohmiana da Mecânica Quântica. Na seção de Interpretação, essas equações serão interpretadas, comparando-as com suas análogas clássicas.

Observa-se que, ao falarmos em “formulação bohmiana” da mecânica quântica, estamos nos referindo a uma forma alternativa de apresentação da mecânica quântica usual, sem perda de generalidade. Ainda que se possa pensar que duas abordagens equivalentes para o mesmo problema sejam redundantes e não adicionem novidades, contra-argumentamos que abordagens alternativas de uma mesma teoria têm seu valor, pois fornecem diferentes visões para um dado problema, podendo sugerir experimentos distintos, previsões mais favoráveis à sua arquitetura teórica, e modificações que a outra abordagem não sugeriria. Ou seja, certas propostas de inovações (que busquem aperfeiçoamento da teoria) da mecânica quântica podem, por exemplo, se tornarem mais intuitivamente concebíveis em algumas formulações da mecânica quântica do que em outras. Enfatizamos que a formulação bohmiana é equivalente às abordagens tradicionais de mecânica quântica, diferindo de outras abordagens em que haja modificação da física da mecânica quântica, como, por exemplo, na abordagem que introduz uma modificação estocástica da Equação de Schrödinger, visando à resolução do problema do colapso da função de onda. (35–37)

3.1 Revisão: Equação de Continuidade e Equação de Hamilton-Jacobi

Nesta seção, introduziremos duas equações que serão citadas posteriormente neste capítulo.

Quando uma grandeza física escalar estiver espacialmente distribuída (isto é, for um campo escalar) e, a cada instante, for localmente conservada, ela satisfará, a cada instante e em cada ponto do espaço, a assim chamada Equação de Continuidade:

$$-\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (\rho(\vec{r}, t) \cdot \vec{v}(\vec{r}, t)), \quad (3.1)$$

onde $\rho(\vec{r}, t)$ é a densidade volumétrica dessa grandeza física e $\vec{v}(\vec{r}, t)$ é a velocidade instantânea local com que o campo escalar flui do ponto \vec{r} no instante t .

Essa equação descreve a conservação local dessa grandeza física escalar ρ , isto é, ela afirma que a taxa temporal com que ρ diminui em um ponto num dado instante é igual à taxa de variação espacial do fluxo $\rho(\vec{r}, t) \cdot \vec{v}(\vec{r}, t)$ nesse mesmo ponto nesse instante. Em

outras palavras, dado qualquer instante, a taxa temporal com que essa grandeza diminui em um ponto é igual à taxa espacial com que o fluxo dessa grandeza se eleva nesse ponto. Isto é, o que estiver temporalmente diminuindo num ponto precisa estar espacialmente extravazando para a vizinhança: nada se cria, nada se perde.

Na Mecânica Clássica, um dos modos de se enunciar a equação que rege a evolução dinâmica de um corpo pontual é chamado de Equação de Hamilton-Jacobi. (38) A Equação de Hamilton-Jacobi de um corpo pontual de massa m sujeito a uma energia potencial $V_c(\vec{r}, t)$ é dada por:

$$-\frac{\partial S_c}{\partial t} = \frac{(\vec{\nabla} S_c)^2}{2m} + V_c(\vec{r}, t), \quad (3.2)$$

onde S_c é uma função ação (clássica) das coordenadas do espaço de fase associado a esse corpo.

A menos do formalismo matemático, essa equação 3.2 é conceitualmente similar à equação de conservação da energia mecânica na dinâmica de um corpo pontual, isto é:

1. o termo $-\frac{\partial S_c}{\partial t}$ é a hamiltoniana do corpo pontual, no instante t , portanto é referente à energia mecânica total do corpo pontual;
2. o termo $\frac{(\vec{\nabla} S_c)^2}{2m}$ é a energia cinética do corpo pontual no instante t ;
3. o termo $V_c(\vec{r}, t)$ é a energia potencial do corpo pontual no instante t .

Ressalta-se que, em coordenadas canônicas, o momento linear do corpo pontual é dado por:

$$\vec{p}_c = \vec{\nabla} S_c. \quad (3.3)$$

Além do mais, conforme explicado, em coordenadas canônicas, a energia mecânica total do corpo pontual é dada por:

$$E_c = -\frac{\partial S_c}{\partial t}, \quad (3.4)$$

3.2 Apresentação da formulação bohmiana

Na Mecânica Quântica não-relativística, a equação que descreve a evolução da função de onda Ψ associada a uma única partícula sem spin, de massa finita não-nula, é a chamada Equação de Schrödinger:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}, t) \Psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (3.5)$$

onde \hbar é a constante de Planck reduzida, m é a massa da partícula, V é o potencial a que a função de onda da partícula está sujeita. Exige-se que Ψ satisfaça a condição de normalização, isto é:

$$\int |\Psi(\vec{r}, t)|^2 d^3x = 1. \quad (3.6)$$

Na Equação de Schrödinger:

1. o termo $i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t}$ é o termo hamiltoniano, ou seja, refere-se ao operador quântico da energia mecânica total aplicado ao estado Ψ ;
2. o termo $-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\vec{r}, t)$ é o termo cinético, ou seja, refere-se ao operador quântico de energia cinética aplicado ao estado Ψ ;
3. o termo $V(\vec{r}, t)\Psi(\vec{r}, t)$ é o termo potencial, ou seja, refere-se ao operador quântico da energia potencial aplicado ao estado Ψ .

Nota-se que esses três termos fazem menção apenas ao estado quântico em si, isto é, à função de onda associada à partícula, ou seja, não fazem menção a alguma partícula (no sentido de corpo pontual).

Neste capítulo, introduziremos a formulação bohmiana da mecânica quântica, substituindo a forma usual da Equação de Schrödinger pelo formato chamado de Equações de Madelung, também chamadas de Equações da Hidrodinâmica Quântica. (39)

A Equação de Schrödinger é uma equação linear em que a função incógnita é uma função a valores complexos $\Psi(\vec{r}, t)$. As Equações de Madelung são um sistema de duas equações acopladas, em que as duas funções incógnitas são funções a valores reais, a saber, $R(\vec{r}, t)$ e $S(\vec{r}, t)$.

Para deduzirmos as Equações de Madelung a partir da Equação de Schrödinger, fazemos, sem perda de generalidade, a seguinte substituição:

$$\Psi(\vec{r}, t) = R(\vec{r}, t) \cdot e^{(\frac{i}{\hbar} S(\vec{r}, t))}, \quad (3.7)$$

onde \hbar é a constante de Planck reduzida, $S(\vec{r}, t)$ é uma função real chamada de ação e com dimensão de momento angular (a mesma dimensão de \hbar), e $R(\vec{r}, t)$ é o módulo de $\Psi(\vec{r}, t)$, isto é, $R(\vec{r}, t)$ é uma função real não-negativa que, no caso do espaço tridimensional, tem dimensão de comprimento elevado ao expoente $-3/2$ (a mesma dimensão de $\Psi(\vec{r}, t)$).

Na verdade, observando-se as equações 3.7, 3.8, 3.9, 3.10, 3.12, 3.15, 3.16, nota-se que não haveria problema algum em se permitir que $R(\vec{r}, t)$ assumisse valores reais tanto positivos quanto negativos. Segundo a equação 3.7, a única alteração seria na respectiva

fase de $e^{\frac{i}{\hbar}S(\vec{r},t)}$, que, inclusive, pode, em algumas situações, deixar de ter descontinuidades para passar a ser contínua, por exemplo.

Ao se introduzir a substituição 3.7 acima na Equação de Schrödinger 3.5, chegamos, após aplicarmos as regras de cálculo diferencial e cancelarmos fatores comuns aos dois lados da igualdade, a uma equação de valores complexos (equivalente à Equação de Schrödinger original), que pode ser separada em duas equações de valores reais que precisam ser satisfeitas simultaneamente, isto é, um sistema de duas equações, sendo uma equação para a parte real (equação 3.9) e outra equação para a parte imaginária (equação 3.8). Essas passagens matemáticas trivialmente valem no sentido de ida e de volta, razão pela qual as Equações de Madelung recuperam a Equação de Schrödinger, sendo, pois, equivalentes a ela.

A equação da parte imaginária é:

$$-\frac{\partial R^2}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \left(R^2 \frac{\vec{\nabla} S}{m} \right). \quad (3.8)$$

A equação da parte real é:

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{(\vec{\nabla} S)^2}{2m} + V(\vec{r}, t) + Q_B(\vec{r}, t), \quad (3.9)$$

onde foi introduzido o termo $Q_B(\vec{r}, t)$ pela seguinte definição:

$$Q_B(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R}. \quad (3.10)$$

O termo $Q_B(\vec{r}, t)$ é chamado de Potencial Quântico (Bohmiano).

Observa-se que é possível reescrever a equação 3.10, em termos de $\rho = R^2$. Fazendo essa mudança na equação 3.10, com o uso das regras de cálculo diferencial, temos:

$$Q_B(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\nabla^2 \rho}{2\rho} - \left(\frac{\vec{\nabla} \rho}{2\rho} \right)^2 \right) \quad (3.11)$$

Ressalta-se que, no formato das Equações de Madelung, a condição de normalização assume a forma

$$\int (R(\vec{r}, t))^2 d^3x = 1. \quad (3.12)$$

São sugestivas a comparação da equação (3.8) com a Equação de Continuidade (equação 3.13) e a comparação da equação (3.9) com a Equação de Hamilton-Jacobi da mecânica clássica (equação 3.14):

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (\rho \cdot \vec{v}), \quad (3.13)$$

$$-\frac{\partial S_c}{\partial t} = \frac{(\vec{\nabla} S_c)^2}{2m} + V_c(\vec{r}, t), \quad (3.14)$$

Mas a validade dessa comparação sugere, pelas equações 3.3 e 3.4, a interpretação:

$$E_{particle} = -\frac{\partial S}{\partial t}, \quad (3.15)$$

$$\vec{p}_{particle} = \vec{\nabla} S. \quad (3.16)$$

3.3 Interpretação da formulação bohmiana

Para introduzirmos a formulação bohmiana da Mecânica Quântica, deduzimos as Equações de Madelung, que são equivalentes à Equação de Schrödinger. Por essa razão, toda elucidação conceitual que as Equações de Madelung permitirem concluir também será válida para situações que se prefira descrever empregando-se a Equação de Schrödinger, e vice-versa, desde que todas as conclusões sejam inferidas com o devido rigor.

Uma grande vantagem técnica de se trabalhar com a Equação de Schrödinger é que essa é uma equação linear. Em contrapartida, uma desvantagem conceitual é que a Equação de Schrödinger tem funções incógnitas de valor complexo, o que dificulta a interpretação física da entidade Ψ , podendo levar a conclusões equivocadas. (40)

Por outro lado, as Equações de Madelung são um sistema não-linear de duas equações e duas funções incógnitas, mas, pelo menos, tanto as funções quanto as equações utilizam puramente números reais, que são mais diretamente acessíveis à intuição que exercitamos nas demais grandezas físicas reais.

De fato, não é fisicamente correto imaginar-se a função de onda $\psi(\vec{r}, t)$ como ente físicos ontológico tal como um campo escalar complexo, ou seja, dois campos escalares reais somados da forma $\psi(\vec{r}, t) = Re(\psi(\vec{r}, t)) + iIm(\psi(\vec{r}, t))$. Um argumento para isso pode ser visto na referência (40), que mostrará que, se assim imaginarmos, concluiremos o desagradável resultado de que esse campo escalar complexo não-relativístico $\psi(\vec{r}, t)$ não obedece à transformação de Galileo, a menos que realizemos a introdução de uma correção ad hoc. Os campos $R(\vec{r}, t)$ e $S(\vec{r}, t)$, entretanto, que utilizamos para introduzir a mecânica bohmiana, transformam-se corretamente.

Seguiremos com as introdução e interpretação da mecânica bohmiana. A Equação de Madelung que é análoga à equação de continuidade (equação 3.13) é:

$$-\frac{\partial R^2}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \left(R^2 \frac{\vec{\nabla} S}{m} \right). \quad (3.17)$$

onde $\rho = R^2$ é a densidade espacial de probabilidade de a partícula ser detectada num dado instante e local.

Essa analogia indica que a grandeza física $\frac{\vec{\nabla} S}{m}$ se comporta de fato como a velocidade com que o fluxo de probabilidade flui, nesse instante, nesse ponto.

Até aqui, a formulação bohmiana da mecânica quântica é totalmente compatível com qualquer formulação de Mecânica Quântica em que a Equação de Schrödinger de que partimos seja válida (note que empregamos a palavra “formulação”). A interpretação bohmiana deixa de ser perfeitamente compatível com outras interpretações de Mecânica Quântica quando assume que há de fato uma única partícula (um corpo pontual) que é guiada, ao longo de seu movimento, pela função de onda (ou por alguma entidade análoga), não necessitando de algum colapso de função de onda para ter posição e momento linear definidos (note que empregamos a palavra “interpretação”). Caso se assuma a interpretação bohmiana da mecânica quântica, é natural identificarmos que, dados um instante e a posição em que o corpo pontual esteja nesse instante, o momento linear instantâneo desse corpo pontual será dado por:

$$\vec{p}_{particle} = \vec{\nabla} S. \quad (3.18)$$

De modo similar, na Equação de Madelung análoga à Equação de Hamilton-Jacobi (equação 3.14):

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{(\vec{\nabla} S)^2}{2m} + V(\vec{r}, t) + Q_B(\vec{r}, t), \quad (3.19)$$

é natural identificar que, num dado instante, na posição ocupada pelo corpo pontual nesse instante, a energia mecânica do corpo pontual será $-\frac{\partial S}{\partial t}$, a energia cinética será $\frac{(\vec{\nabla} S)^2}{2m}$, e a energia potencial será $V(\vec{r}, t)$.

Contudo, o termo $Q_B(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R}$ não possui análogo na Equação de Hamilton-Jacobi da Mecânica Clássica.

Embora esse termo seja matematicamente uma correção quântica na energia cinética do estado Ψ , pois adveio do termo $-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\vec{r}, t)$ na Equação de Schrödinger, esse termo $Q_B(\vec{r}, t)$ acaba funcionando como uma correção efetiva (exclusiva da teoria quântica) no termo de energia potencial $V(\vec{r}, t)$, motivo pelo qual $Q_B(\vec{r}, t)$ é nomeado como Potencial Quântico Bohmiano (ou, simplesmente, potencial quântico).

Como os demais termos das Equações de Madelung são satisfeitos pela mecânica clássica de um corpo pontual, os efeitos exclusivamente quânticos da mecânica quântica não-

relativística de uma única partícula sem spin precisam estar, de alguma forma, relacionados ao potencial quântico, mesmo se esse não for o único ingrediente.

Nota-se que, ao tomarmos o negativo do gradiente espacial da equação 3.19, recuperaremos a expressão da segunda lei de Newton, mas com uma modificação, a saber, a presença de uma aparente força quântica (derivada do potencial quântico) influenciando a aceleração (e, portanto, o movimento) do corpo pontual.

Outra relevante observação é que, na mecânica clássica de um corpo pontual, a equação de conservação da probabilidade (ou da massa) do corpo pontual é trivialmente satisfeita, já que o corpo pontual sempre tem toda sua massa ocupando a mesma posição que seu centro de massa. Não ocorre o mesmo na formulação bohmiana da mecânica quântica de uma partícula, já que a densidade de probabilidade pode se distribuir em região extensa (não-pontual).

Ainda mais, como o termo $Q_B(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R}$ depende de R e de suas derivadas espaciais, o potencial quântico depende do estado como um todo para ser determinado. Logo, ele permite que a partícula (corpo pontual) seja influenciada por interações que afetaram pontos do estado Ψ distantes dela, desde que sempre respeitando a causalidade na propagação de interação. Essa constatação é por vezes referida como não-localidade dos estados na mecânica quântica, no sentido de que os estados não podem ser completamente definidos em um dado ponto se ignorarmos informações que a função de onda “sinta” na vizinhança em que se faça presente (isto é, no fecho topológico da região espacial em que tenha amplitude não-nula), pois o estado quântico é um objeto extenso.

A Figura 2 ilustra a formulação bohmiana aplicada ao experimento da dupla fenda. Na imagem da esquerda, observa-se o perfil do potencial quântico, sendo possível notar regiões em que seu gradiente espacial é menos intenso (trajetórias bohmianas serão menos repelidas) e regiões em que seu gradiente espacial é mais intenso (trajetórias bohmianas sofrerão força quântica mais intensa, sendo repelidas dessas regiões). Na imagem da direita, notam-se as trajetórias bohmianas da difração por dupla fenda.

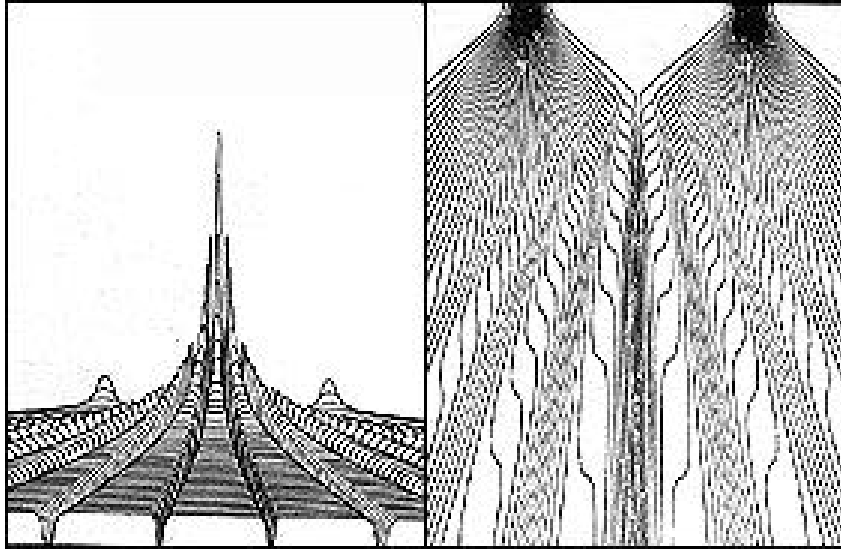


Figura 2 – Perfil do Potencial Quântico e Trajetórias Bohmianas no experimento da difração por dupla fenda.

Fonte: PYLKKANEN. (41)

3.4 Comentários adicionais

Essa seção é dedicada a comentários adicionais sobre a mecânica bohmiana.

Enfatizamos que, nesta dissertação, chamamos de "mecânica bohmiana" a formulação da mecânica quântica com que David Joseph Bohm trabalhou. Linhas teóricas que posteriormente a Bohm foram chamadas de mecânica bohmiana (como, por exemplo, feito por Sheldon Goldstein, e, posteriormente, discutido criticamente por Basil Hiley), sem manterem relação com o sentido original do termo, não foram investigadas neste trabalho. Agradecemos ao prof. Olival Freire Junior por essa importante e atenciosa ressalva.

Como a desigualdade de Bell afirma que não é possível uma teoria física estender a mecânica quântica, mantendo suas previsões, de forma a torná-la determinística por ter-se adicionado a ela variáveis ocultas locais (42,43), poder-se-ia pensar que a desigualdade de Bell proíbe a interpretação bohmiana da mecânica quântica, já que, de posse das Equações de Madelung, caso assumamos a existência de um corpo pontual associado à função de onda, a evolução da função de onda e do corpo pontual serão determinísticas. Entretanto, o próprio Bell elogiou a formulação bohmiana da mecânica quântica e não tinha desgosto por essa interpretação. (43) A falha no argumento de que a desigualdade de Bell proibiria a interpretação bohmiana da mecânica quântica é que a desigualdade de Bell se refere a uma teoria que estenda a mecânica quântica adicionando a ela variáveis ocultas locais, mas a interpretação bohmiana da mecânica quântica torna a mecânica quântica determinística por adicionar a ela variáveis ocultas globais que são naturais à mecânica quântica em si. (44,45)

A formulação bohmiana da mecânica quântica, ao se assumir a existência do corpo associado à função de onda, trata da evolução do estado quântico e da partícula quântica sem assumir que houve um colapso da função de onda (46, 47), nem perda de coerência, para que seja possível falarmos desse corpo pontual. (48) Em outras palavras, a mecânica bohmiana não trabalha com a ideia de decoerência nem de colapso da função para falar de condições nas quais exista o limite clássico (49, 50), esse limite clássico de que falaremos no Capítulo 4.

Uma das importantes aplicações da formulação bohmiana da mecânica quântica é em cosmologia, para se modelar a evolução cosmológica de um universo primordial quântico sem se falar em colapso de função de onda por processo de medida. Uma ótima referência sobre o assunto é a tese de doutorado “Evolução bohmiana das flutuações primordiais”. (51)

Visto que nesta dissertação não tratamos de mecânica bohmiana para partículas quânticas com spin não nulo, nem de mecânica bohmiana para mecânica quântica relativística, nem mecânica bohmiana para várias partículas, nem de mecânica bohmiana para fótons, talvez hipostasiássemos a hipótese de que a formulação bohmiana só pode ser aplicada para lidarmos com uma única partícula quântica de massa finita não-nula sem spin. Essa sugestão, no entanto, não é verdadeira, ainda que de fato o foco nesta dissertação tenha sido na mecânica bohmiana no escopo da Equação de Schrodinger (equação da mecânica quântica não-relativística sem spin) de uma única partícula. Para um belo e didático uso da formulação bohmiana para a resolução do átomo de hidrogênio tanto no caso não-relativístico sem spin (Equação de Schrödinger), quanto no caso não-relativístico com spin $s = \frac{1}{2}$ (Equação de Pauli), quanto, também, no caso relativístico de spin $s = \frac{1}{2}$ (Equação de Dirac), ver a tese de doutorado “The de Broglie-Bohm casual interpretation of quantum mechanics and its application to some simple systems”. (19)

Dada a relevância da expressão matemática (equação 3.10) do Potencial Quântico Bohmiano $Q_B(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R}$, gostaríamos de, ao menos brevemente, interpretar esse termo. Para tal, revisaremos a interpretação do operador laplaciano.

O operador laplaciano de um campo escalar real é igual ao divergente do gradiente desse campo. O gradiente de um campo escalar real é um campo vetorial que aponta para a direção e para o sentido de maior taxa de variação espacial desse campo e indica, em seu módulo, essa taxa. O divergente de um campo vetorial é um campo escalar real que nos indica, num dado ponto, num dado instante, a densidade volumétrica de saldo líquido de fluxo desse campo vetorial que flui para a vizinhança desse ponto, ou seja, o divergente é diretamente proporcional à densidade volumétrica de fluxo do campo vetorial que, nesse instante, “nasce” desse ponto. Pode-se interpretar o operador laplaciano como o divergente do gradiente, contudo tal recurso hermenêutico talvez não seja trivialmente elucidativo.

Outra interpretação conhecida para o operador laplaciano (e consistente com

sua definição matemática) é que o laplaciano de um campo escalar real é diretamente proporcional à média espacial do valor do campo na vizinhança imediata do ponto mas subtraída do valor do campo no ponto. Em outras palavras, para interpretarmos o laplaciano: fixamos um instante e escolhemos um ponto para, em seguida, calcularmos o valor médio do campo nos pontos infinitesimalmente próximos de nosso ponto; após calculada essa média, subtraímos dela o valor do campo exatamente no ponto; o resultado será diretamente proporcional ao valor do laplaciano nesse ponto, nesse instante.

Por exemplo, se o laplaciano for positivo num ponto: por um lado, significa que o valor do campo no ponto está menor do que a média desse valor na vizinhança imediata; por outro lado, significa que o divergente do gradiente do campo no ponto é positivo, ou seja, é positiva a densidade de saldo do fluxo de linhas de campo vetorial gradiente que extravaza para a vizinhança desse ponto, o que significa que, ao caminharmos do ponto para a vizinhança imediata, na média, veremos o valor da função crescer (se tornar mais positivo e/ou menos negativo do que no ponto).

No caso do Potencial Quântico Bohmiano, o laplaciano do campo R é dividido por R . De posse do raciocínio anterior, podemos compreender que esse termo $\frac{\nabla^2 R}{R}$ significa que a diferença entre o valor médio na vizinhança imediata e o valor no ponto é dividida pelo valor do campo no ponto, ou seja, essa diferença absoluta (entre o valor na vizinhança imediata e no ponto exato) será substituída por uma diferença relativa (a diferença absoluta dividida pelo valor do campo no ponto). Para reconstruirmos o Potencial Quântico Bohmiano, basta multiplicarmos $\frac{\nabla^2 R}{R}$ por $-\frac{\hbar^2}{2m}$ (note o sinal negativo). Por essas razões, o valor do Potencial Quântico Bohmiano num ponto, num instante, indica, a menos de uma constante de proporcionalidade, quanto o valor de R no ponto é maior do que o valor de R na vizinhança imediata, em relação ao valor de R no ponto.

4 DE QUÂNTICA PARA CLÁSSICA E DE CLÁSSICA PARA QUÂNTICA

No Capítulo 2, apresentamos o Paradoxo Aharonov-Bohm e explanamos que esse efeito ocorre (teórica e experimentalmente) na mecânica quântica, mas não pode ocorrer na mecânica clássica munida da eletrodinâmica clássica. Essa assimetria entre o comportamento do mundo quântico e o comportamento do mundo clássico levanta um questionamento duplo.

Por um lado, o que ocorreria com o Efeito Aharonov-Bohm caso formulássemos condições em que pudéssemos tomar, rigorosamente, um limite clássico da mecânica quântica? E o que ocorreria caso, em sentido inverso, deduzíssemos as equações da mecânica quântica a partir do mundo clássico? Neste capítulo, com base no conteúdo apresentado no Capítulo 3, utilizaremos a formulação bohmiana da mecânica quântica como ponte entre esses mundos, concluindo, na seção 4.1, que o Efeito Aharonov-Bohm viola as condições do limite clássico para persistir como um efeito puramente quântico (pelo menos, na situação eletromagnética em que é originalmente enunciado). Trabalhos posteriores poderão utilizar o escopo apresentado na seção 4.2 para, a partir da hamiltoniana eletromagnética da mecânica clássica, deduzirem o operador Hamiltoniano eletromagnético da mecânica quântica e estudarem o surgimento do Efeito Aharonov-Bohm nessa abordagem.

Por outro lado, uma vez construída essa “via de mão dupla” entre o mundo clássico e o mundo quântico, independentemente de termos utilizado o Efeito Aharonov-Bohm como motivador, o que poderemos aprender sobre a mecânica quântica, utilizando essas ferramentas? Há trabalhos que tentam abordar a questão da conciliação entre o mundo clássico e o mundo quântico, como “Decoherence and the classical limit of quantum mechanics”. (52)

Observamos que a seção 4.1 e a seção 4.2 deste capítulo são independentes e cada uma poderia, inclusive, ser um capítulo individual. Não só foram baseadas em referências bibliográficas de autorias distintas, como também não partimos de uma para desenvolvermos a outra. Se assim o fizéssemos, talvez cometeríamos um erro de circularidade. O motivo de ambas estarem no mesmo capítulo é por considerarmos que se completam conceitualmente.

4.1 O limite clássico da mecânica quântica

De posse das equações bohmianas para descrição quântica da dinâmica de uma partícula, determinamos as trajetórias bohmianas que as linhas de momento linear seguem (ou seja, trajetórias que, intuitivamente, um corpo pontual sujeito a essa dinâmica, naquela posição e instante, seguiria). Em condições em que exista um limite da clássico da mecânica quântica desse sistema, esperamos, ao tomarmos esse limite, que as trajetórias bohmianas

relevantes se aproximem da trajetória newtoniana que a partícula clássica seguiria. Nessa seção, seguiremos os artigos “Seven steps towards the classical world” (53) e “On the classical limit of quantum mechanics” (54) para apresentarmos condições em que o limite exista e as interpretaremos. Há diversas abordagens que sugerem obter um limite clássico da mecânica quântica, ou que sugerem que o Teorema de Ehrenfest já tenha solucionado tal questão. No entanto, não acreditamos que o Teorema de Ehrenfest seja suficiente para elucidar esse problema (55), nem que abordagens que o resolvam com cálculos matemáticos esgotem a demanda por intuição física nesse assunto. (56–60)

Uma vez conhecida a equação bohmiana da energia (equação de Hamilton-Jacobi com potencial quântico, equação 3.9), teremos que a equação dinâmica associada, análoga à equação da segunda lei de Newton da mecânica clássica, seria:

$$m \cdot (\vec{r})'' = \vec{F} + \vec{F}_Q, \quad (4.1)$$

onde \vec{F} seria a força “clássica”, derivada do potencial V :

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}(V), \quad (4.2)$$

e \vec{F}_Q seria uma força efetiva, de natureza quântica, derivada do potencial quântico Q_B :

$$\vec{F}_Q = -\vec{\nabla}Q_B. \quad (4.3)$$

Ou seja, o desvio da classicalidade no comportamento da linha de momento linear (i.e., no movimento do corpo pontual ao longo de sua trajetória, caso a partícula exista) é devido ao termo \vec{F}_Q , de modo que um comportamento clássico ocorrerá quando:

$$m \cdot (\vec{r})'' \approx \vec{F}. \quad (4.4)$$

A condição 4.4 também poderia, quase equivalentemente, ser enunciada como a dominância da energia cinética clássica sobre o potencial quântico bohmiano (que é a correção quântica na energia cinética) :

$$|Q_B| \ll \left| \frac{(\vec{\nabla}S)^2}{2m} \right| \quad (4.5)$$

Se λ indicar o comprimento de onda de de Broglie da função de onda, e se L indicar a escala característica da taxa de variação espacial do potencial $\vec{V}(\vec{r}, t)$ à qual a partícula está sujeita, mostraremos, nesta seção, que $\lambda \ll L$ é uma condição suficiente para tomarmos o limite clássico, isto é, observarmos aproximadamente comportamento newtoniano nas trajetórias bohmiânicas relevantes de uma função de onda. Condição análoga

ocorre ao se estudar em quais situações a óptica geométrica pode ser tida como limite da óptica ondulatória.

Se definirmos o parâmetro adimensional $\epsilon(\vec{r}) = \frac{\sigma}{L(\vec{r})}$, a seguinte condição (que será demonstrada mais adiante), se satisfeita, permite-nos obter o limite clássico da mecânica quântica para nossa situação física:

$$\epsilon(\vec{r}) = \frac{\sigma}{L(\vec{r})} \ll 1, \quad (4.6)$$

(para todo \vec{r} relevantemente ocupado pela partícula quântica),

onde σ é o comprimento espacial do pacote de onda do elétron (estimativa), e $L(\vec{r})$ é uma escala (local) de variação espacial do potencial $V(\vec{r})$ a que a partícula quântica está sujeita dada por:

$$L(\vec{r}) = \sqrt{\left| \frac{V'}{V'''} \right|}. \quad (4.7)$$

Como exemplo, a condição 4.6 (com a definição 4.7) é o bastante para demonstrarmos o motivo pelo qual, no sistema solar Terra-Sol ideal, a Terra se comporta de modo clássico, enquanto que, no sistema atômico hidrogenóide elétron-núcleo, o elétron tem comportamento quântico não-clássico. Assumindo, em ambos os casos, um potencial V diretamente proporcional a $(1/r^2)$, o valor de L , na definição 4.7, será diretamente proporcional a r (cálculo direto). Por outro lado, se temporariamente ignorarmos a questão do colapso da função de onda e da decoerência e se estimarmos σ para a função de onda da Terra no sistema solar, σ será muito menor do que r (a distância Terra-Sol), logo a condição de validade do limite clássico da mecânica quântica estará satisfeita e esse sistema terá comportamento clássico. Entretanto, se estimarmos σ para a função de onda do elétron no átomo de Hidrogênio, será da ordem de r (sendo até mesmo maior do que r), logo a condição de limite clássico não é satisfeita nesse sistema.

Após a digressão desse exemplo, retornemos ao desenvolvimento dessa seção. Em pacotes de onda não-confinados e antes de ocorrerem fenômenos de interferência ondulatória, podemos fazer uso da aproximação de onda plana local, e estimar $\sigma \sim \lambda$, sendo que o comprimento de onda de de Broglie, por sua vez, é dado por:

$$\lambda_{\Psi} = \frac{h}{\sqrt{2mE_{kin}}}. \quad (4.8)$$

ou, no caso local:

$$\lambda(\vec{r}, t) = \frac{h}{|\vec{\nabla}S(\vec{r}, t)|}. \quad (4.9)$$

Para o caso do potencial $\vec{A}(\vec{r})$, como, no efeito Aharonov-Bohm descrito, a equação 2.21 afirma que $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\Phi_B}{2\pi\rho}\hat{\phi}$, temos, pela equação 4.7, que $L(\vec{r})$ é da ordem de $|\vec{r}|$, de modo que, se não fosse pela interferência ondulatória que ocorre quando porções do pacote eletrônico se sobrepõem após contornarem ao redor do solenoide, elétrons de alta energia não “perceberiam” o potencial, pois estariam, a todo ponto, obedecendo à condição de limite clássico, já que estariam “localizados”, isto é, devido à alta energia, seu pacote eletrônico seria espacialmente bem menor do que o raio $|\vec{r}|$.

De fato, no experimento da interferência ondulatória após difração eletrônica por dupla fenda com campo magnético confinado (experimento do Efeito Aharonov-Bohm), caso uma das fendas estivesse bloqueada para a passagem do pacote eletrônico, o Efeito Aharonov-Bohm não ocorreria, ou seja, o efeito depende do fenômeno de interferência ondulatória.

Entretanto, com as duas fendas desbloqueadas, quando o pacote eletrônico contorna o solenoide e se reencontra (interferência ondulatória), não podemos mais “dominar” sua extensão por $\sigma \ll |\vec{r}| \sim L(\vec{r})$, e, assim, desvios do limite clássico podem sobreviver. O motivo para a condição 4.6 deixar de ser válida é que ela foi deduzida para um pacote que não esteja em estado ligado e que não esteja sofrendo interferência ondulatória. Fazendo alusão à situação em que uma das fendas está bloqueada, podemos compreender essa violação. Antes da interferência ondulatória, quando o pacote de onda se dividir em duas porções (direita e esquerda), nenhuma das quais tendo acesso à origem do vetor \vec{r} (pois, no Experimento de Aharonov-Bohm, a região em que o fluxo magnético está confinada é inacessível ao elétron), cada porção poderia se comportar obedecendo à condição de limite clássico. Após a interferência ondulatória, entretanto, o reencontro das porções compõe um estado que pôde dar uma volta completa em torno da região em que o fluxo magnético está confinado, o que permite ao pacote, como um todo, “sentir” uma informação que não é localmente mensurável (o fluxo do campo magnético confinado). Caso o solenoide confinante do fluxo magnético estivesse à direita da fenda direita ou à esquerda da fenda esquerda (em outras palavras, não estivesse entre as duas fendas), o Efeito Aharonov-Bohm não ocorreria, o que demonstra a necessidade de a função de onda violar a condição de classicalidade da desigualdade 4.6 e envolver o solenoide (violação essa que, nessa situação, um sistema localizado não poderia realizar, pois demandaria que um pacote de onda localizado percorresse, paralelamente, caminhos diametralmente opostos em relação à posição do inacessível solenoide, deixando de respeitar a condição 4.6).

Um corpo pontual, na mecânica clássica, é um objeto local, só é sensível a informações que localmente o afetem. Uma partícula quântica, conquanto, existindo ou não um corpo pontual a ela associado, está vinculada a uma função de onda (ou entidade análoga), razão pela qual é um sistema não pontual, ou seja, pode se comportar como sistema extenso, sendo capaz de mensurar grandezas de maneiras que um corpo pontual ou sistema

localizado não poderiam. No caso de assumirmos a interpretação bohmiana e afirmarmos que, de fato, há um corpo pontual associado à função de onda, esse corpo pontual, na situação do Efeito Aharonov-Bohm, não sofrerá campo eletromagnético algum durante seu movimento, logo não sofrerá força eletromagnética, porém, ainda assim, o padrão de detecção no anteparo sofrerá alteração em função do fluxo magnético Φ_B confinado no solenoide. Nessa hipótese, quem “informa” o corpo pontual que ele deva seguir trajetórias diferentes, em função do fluxo magnético confinado, é a função de onda.

Isso está de acordo com o teorema matemático (O espaço matemático classificador de conexões planas em fibrados principais triviais é $H_{dR}^1(M, \mathfrak{g})/[M, G]$ (referência (21))) que afirma, em nosso caso, que, se o campo magnético for nulo na região acessível ao elétron (o que faz do potencial vetor, nessa região, uma conexão plana, isto é, uma conexão sem curvatura), e essa região for contrátil (O que implica $H_{dR}^1(M, \mathfrak{g}) = 0$), em particular, sendo necessário que essa região seja simplesmente conexa, então o elétron deveria ser incapaz de “sentir” o fluxo magnético no solenoide (pois a conexão deveria ser trivial e, portanto, teria holonomia trivial). Mais precisamente, é possível mostrar que, em nosso caso, o espaço classificador $H_{dR}^1(M, \mathfrak{g})/[M, G]$ é de fato isomorfo a \mathbb{S}^1 (o grupo formado pelos pontos da circunferência), isto é, não é trivial, e, assim, o Efeito Aharonov-Bohm é uma comprovação experimental da não trivialidade deste espaço classificador.

O Efeito Aharonov-Bohm é, portanto, um efeito que atesta que a função de onda é capaz de, no caso do experimento, testemunhar que a topologia do espaço base (onde o elétron pode se mover, na situação do experimento do Efeito Aharonov-Bohm) é não-trivial, ou seja, não é um espaço homeomorfo ao \mathbb{R}^3 (espaço vetorial real de dimensão 3), pois, como se proíbe que o elétron acesse a região onde o solenoide está, o espaço base é, topologicamente, \mathbb{R}^3 subtraído de uma reta infinita. Note que, localmente, esse espaço ainda é homeomorfo ao \mathbb{R}^3 , então o elétron foi capaz de perceber algo que não é possível se perceber pontualmente. Nesse efeito, enfatizamos, a função de onda do elétron foi capaz de sentir globalmente o fluxo magnético confinado a uma região inacessível ao elétron, mesmo nunca ocupando pontos onde o campo eletromagnético fosse não-nulo. Isso não seria possível se o espaço de base tivesse topologia trivial (não é o caso, no experimento, pois é um espaço não simplesmente conexo, já que uma reta infinita foi removida de \mathbb{R}^3).

Para finalizar esta seção, esboçaremos brevemente a dedução da condição 4.6, pelo menos para as situações mais simples:

Dado um instante t (variável), indiquemos por \vec{X} a função horária da posição de uma trajetória bohmiana. A média, ponderada pela densidade de probabilidade $\rho = R^2 = |\psi(\vec{x}, t)|^2$, será:

$$\langle \vec{X}(t) \rangle = \int \vec{x} |\psi(\vec{x}, t)|^2 d^3x = \int \vec{x} (R(\vec{x}, t))^2 d^3x \quad (4.10)$$

Sabemos que:

$$m \frac{d}{dt} \vec{X} = \vec{p} \quad (4.11)$$

Por manipulação similar à do Teorema de Ehrenfest , temos:

$$m \frac{d}{dt} \langle \vec{X} \rangle = \langle \vec{p} \rangle \quad (4.12)$$

De onde segue:

$$m \frac{d^2}{dt^2} \langle \vec{X} \rangle = \frac{d}{dt} \langle \vec{p} \rangle \quad (4.13)$$

Mas, também por manipulação similar à do Teorema de Ehrenfest:

$$\frac{d}{dt} \langle \vec{p} \rangle = -\langle \vec{\nabla} V \rangle \quad (4.14)$$

Portanto, temos:

$$m \frac{d^2}{dt^2} \langle \vec{X} \rangle = -\langle \vec{\nabla} V(\vec{X}) \rangle \quad (4.15)$$

Ou seja:

$$m \frac{d^2}{dt^2} \langle \vec{X} \rangle = -\langle \vec{\nabla} V(\vec{X}) \rangle = -\int \vec{\nabla} V(\vec{x}) |\psi(\vec{x}, t)|^2 d^3x \quad (4.16)$$

Expandindo em Taylor $\langle -\vec{F}(\vec{x}, t) \rangle = \langle \vec{\nabla} V(\vec{x}) \rangle$ em torno de $\langle \vec{x} \rangle$, temos:

$$\langle \vec{\nabla} V(\vec{x}) \rangle = \vec{\nabla} V(\langle \vec{x} \rangle, t) + \langle \vec{x} - \langle \vec{x} \rangle \rangle \cdot \nabla^2 V(\langle \vec{x} \rangle, t) + \frac{1}{2} \sum_{j,k} \Delta_{j,k} \frac{\partial^2 \vec{\nabla} V}{\partial x_j \partial x_k}(\langle \vec{x} \rangle, t) + \dots \quad (4.17)$$

onde, para $j = 1, 2, 3$ e $k = 1, 2, 3$, definimos:

$$\Delta_{j,k} = \langle x_j x_k \rangle - \langle x_k \rangle \langle x_j \rangle \quad (4.18)$$

Por exemplo:

$$\Delta_{j,j} = \langle x_j x_j \rangle - \langle x_j \rangle \langle x_j \rangle = \langle x_j^2 \rangle - \langle x_j \rangle^2 \quad (4.19)$$

Na equação 4.17, note que, se as médias existem, então:

$$\langle \vec{x} - \langle \vec{x} \rangle \rangle = \vec{0} \quad (4.20)$$

Das equações 4.15, 4.17 e 4.20, fazemos, pois, uma expansão em Taylor conveniente em torno do centro de massa:

$$m \frac{d^2}{dt^2} \langle \vec{X} \rangle = \vec{F}(\langle \vec{X} \rangle) + \frac{1}{2} \sum_{j,k} \Delta_{j,k} \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_k} (\langle \vec{X} \rangle) + \dots \quad (4.21)$$

onde os termos $\Delta_{j,k} = \langle x_j x_k \rangle - \langle x_k \rangle \langle x_j \rangle$ são da ordem do diâmetro σ do pacote de onda (por definição, são menores ou iguais a esse diâmetro). Assim, se a seguinte condição for satisfeita:

$$\sigma^2 \left| \frac{\partial^3 V}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \right| \ll \left| \frac{\partial V}{\partial x_i} \right| \quad (4.22)$$

garante-se a validade dessa aproximação. Por essa razão, para a garantia de existência do limite clássico, demandamos que:

$$\sigma^2 \ll \left| \frac{V'}{V'''} \right| \quad (4.23)$$

De onde tiramos a condição 4.6.

Para situações mais delicadas, o mesmo tipo de argumento pode ser formulado, mas demandando tratamento mais geral. Recomenda-se a consulta à referência. (53)

4.2 Dedução das equações bohmianas via abordagem quasi-newtoniana

Esta seção foi baseada nos trabalhos de Mahdi Atiq. (61–63)

Na seção 4.1, partimos da mecânica quântica não-relativística de uma partícula de massa finita não-nula, sem spin, para formularmos uma condição em que o limite clássico possa ser obtido, isto é, em que o comportamento das trajetórias bohmianas seja aproximadamente o comportamento de corpos pontuais na mecânica clássica.

Nesta seção, deduziremos as equações bohmianas (Equações de Madelung) a partir de uma abordagem quasi-newtoniana. Em outras palavras, não partiremos da Equação de Schrödinger, mas da Equação de Hamilton-Jacobi da mecânica clássica, para deduzirmos, a menos de uma escolha de constantes, o potencial quântico e, portanto, encontrarmos a mecânica quântica.

Suponha que disponhamos de uma amostra de corpos pontuais (idênticos e distinguíveis) a serem submetidos a uma mesma situação física para que se analisem suas trajetórias. A princípio, poderíamos assumir que os corpos pontuais serão perfeitamente guiados segundo a dinâmica dada pela Equação de Hamilton-Jacobi. Contudo, para refinarmos nosso modelo, vamos hipotetizar que talvez os corpos pontuais sigam estatisticamente

uma distribuição possivelmente diferente (essa distribuição será uma função da posição espacial e do instante temporal). Dividindo a distribuição pelo número total de partículas, chegaremos a uma densidade de probabilidade (normalizada) de, em função da posição e do instante, dada uma dessas partículas, ela ocupar essa dada posição nesse certo instante. Como essa função, fixado um instante qualquer, se trata de uma distribuição de probabilidade, iremos, sem perda de generalidade, defini-la como o quadrado de uma função real $R(\vec{r}, t)$, de modo que a densidade de probabilidade será $\rho(\vec{r}, t) = R^2(\vec{r}, t)$.

Caso a distribuição dada por $R^2(\vec{r}, t)$ não seja exatamente a determinada pela Equação de Hamilton-Jacobi da mecânica clássica, podemos esperar que haja alguma outra entidade física codificada por uma função matemática que modifique a evolução da amostra de partículas de modo que a distribuição de seus sucessivos lançamentos seja dada por $R^2(\vec{r}, t)$, como, por exemplo, uma aparente energia potencial adicional. Como primeira tentativa de refinamento do modelo, vamos assumir que essa função matemática $Q(\vec{r}, t)$ esteja modificando a hamiltoniana (logo, modificando a Equação de Hamilton-Jacobi da mecânica clássica) por ser uma parcela aditiva. Em outras palavras, a Equação de Hamilton-Jacobi modificada será:

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{(\vec{\nabla}S)^2}{2m} + V(\vec{r}, t) + Q(\vec{r}, t), \quad (4.24)$$

onde ainda não conhecemos a função $Q(\vec{r}, t)$.

Se, por boa-aventurança, pudermos assumir que existe a relação inversa entre $R(\vec{r}, t)$ e $Q(\vec{r}, t)$ (isto é, se, em vez de determinarmos R a partir de Q , for possível a partir de R determinar Q , ou, em notação que explicita essa dependência, Q_R), esperamos que $Q_R(\vec{r}, t)$ será determinável em função da geometria de $R(\vec{r}, t)$, ou seja, determinável em função de $R(\vec{r}, t)$ e de suas derivadas.

Estamos agora diante do problema de determinar $Q_R(\vec{r}, t)$ em função de $R(\vec{r}, t)$. Talvez não encontremos um único formato para Q_R , mas seria útil reduzirmos a lista a candidatos fisicamente interessantes.

Como, a depender da situação física, R pode assumir formatos variados, R pode ser entendida como uma função-variável, de modo que $Q_R(\vec{r}, t)$, como função de R , pode ser entendido como um funcional.

A equação (4.24) é a hamiltoniana de cada uma dessas partículas, de modo que a energia mecânica de uma dessas partículas em instante e posição conhecidos será

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{(\vec{\nabla}S)^2}{2m} + V(\vec{r}, t) + Q_R(\vec{r}, t). \quad (4.25)$$

Logo, a energia média de uma partícula qualquer dessa amostra será:

$$\begin{aligned}
\langle E \rangle &= \int R^2 \cdot \left(-\frac{\partial S}{\partial t} \right) d^3x dt \\
&= \int R^2 \cdot \left[\frac{(\vec{\nabla} S)^2}{2m} + V(\vec{r}, t) + Q_R(\vec{r}, t) \right] d^3x dt.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Visando à escolha de bons candidatos para Q_R , iremos axiomatizar que, assim como ocorre na mecânica clássica, essa Equação de Hamilton-Jacobi modificada precisa ser tal que a energia média é minimizada. Ou seja, exigimos uma condição: o funcional Q_R , seja qual for o R , precisa, para tornar o funcional $\langle E \rangle$ estacionário, satisfazer:

$$\delta \langle E \rangle = 0 \tag{4.27}$$

onde o símbolo δ indica a derivada variacional.

Por simplicidade, introduziremos:

$$g = R^2 \cdot \left[\frac{(\vec{\nabla} S)^2}{2m} + V(\vec{r}, t) + Q_R(\vec{r}, t) \right] \tag{4.28}$$

Do cálculo variacional (ver referência (64)), com as notações $\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial \alpha}$ e $R_\alpha = \partial_\alpha R$, essa exigência 4.27 induz duas equações, a saber:

$$\frac{\partial g}{\partial R} - \partial_\alpha \frac{\partial g}{\partial R_\alpha} + \partial_\alpha \partial_\beta \frac{\partial g}{\partial R_{\alpha\beta}} + \partial_\alpha \partial_\beta \partial_\sigma \frac{\partial g}{\partial R_{\alpha\beta\sigma}} + \dots = 0 \tag{4.29}$$

e

$$\partial_\alpha \frac{\partial g}{\partial S_\alpha} = 0, \tag{4.30}$$

onde $\alpha, \beta, \sigma \dots \in \{0, 1, 2, 3\}$, isto é, os índices dados por letras gregas percorrem as coordenadas espaciais e temporal. Observa-se que estamos adotando a notação de Einstein, omitindo o símbolo de somatório.

A segunda equação (equação 4.30) é, após a substituição de g , idêntica à equação (3.8), ou seja, é a equação de continuidade:

$$-\frac{\partial R^2}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \left(R^2 \frac{\vec{\nabla} S}{m} \right). \tag{4.31}$$

A primeira equação (equação 4.29) é uma equação mais complexa. A substituição de g nela resulta em:

$$R^2 \frac{\partial Q}{\partial R} - \partial_\alpha \left(R^2 \frac{\partial Q}{\partial R_\alpha} \right) + \partial_\alpha \partial_\beta \left(R^2 \frac{\partial Q}{\partial R_{\alpha\beta}} \right) - \partial_\alpha \partial_\beta \partial_\sigma \left(R^2 \frac{\partial Q}{\partial R_{\alpha\beta\sigma}} \right) + \dots = 0. \quad (4.32)$$

Excluiremos as derivadas temporais, porque, como o funcional Q_R deve ter o mesmo formato independentemente da função $R(\vec{r}, t)$, esperamos que Q_R dependa da geometria instantânea de $R(\vec{r}, t)$, não esperamos dependência temporal explícita. Por essa razão, temos:

$$R^2 \frac{\partial Q}{\partial R} - \partial_i \left(R^2 \frac{\partial Q}{\partial R_i} \right) + \partial_i \partial_j \left(R^2 \frac{\partial Q}{\partial R_{ij}} \right) - \partial_i \partial_j \partial_\sigma \left(R^2 \frac{\partial Q}{\partial R_{ijk}} \right) + \dots = 0, \quad (4.33)$$

onde $i, j, k, \dots \in \{1, 2, 3\}$, ou seja, os índices dados por letras latinas percorrem as coordenadas espaciais. Observa-se que permanecemos adotando a notação de Einstein, omitindo o símbolo de somatório.

Para resolvê-la, procuramos soluções para Q_R que sejam polinômios cujas variáveis são potências de $\vec{\nabla}$ aplicadas a R , ou seja, procuramos solução que sejam construídas de somas e produtos de R com suas derivadas espaciais, como, por exemplo: $R(\vec{r}, t)$, $|\vec{\nabla} R(\vec{r}, t)|$ e $\nabla^2 R(\vec{r}, t)$.

Note que as potências ímpares de $\vec{\nabla}$, quando aplicadas em $R(\vec{r}, t)$, produzem vetores, daí a necessidade de tomarmos o módulo. Entretanto, após analisarmos os expoentes de cada potência, concluimos que as derivadas de ordem ímpar terão sempre expoente zero na solução geral. Em outras palavras, a solução geral será um polinômio em $R(\vec{r}, t)$ e em derivadas espaciais de ordem par de $R(\vec{r}, t)$. Na verdade, a solução geral será ainda mais simples, a saber, será o somatório de um termo geral que é o produto de alguma constante (a ser ajustada), multiplicado por R^{-1} e por alguma potência par de ∇ aplicada a R , isto é, a menos de constantes A_{2n} a serem ajustadas:

$$Q_{2n} = A_{2n} R^{-1} \nabla^{2n} R \quad (4.34)$$

para $n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

Observa-se que utilizamos a notação:

$$\nabla^{2n} = \underbrace{\nabla^2 \nabla^2 \dots \nabla^2}_{n \text{ vezes}}, \quad (4.35)$$

De modo que a solução geral, nesse formato, é:

$$Q_R = \sum_n Q_{2n}, \quad (4.36)$$

ou seja:

$$Q_R = R^{-1}(A_0R + A_2\nabla^2R + A_4\nabla^2(\nabla^2R) + \dots). \quad (4.37)$$

Note que as constantes A_{2n} não são adimensionais e, inclusive, possuem dimensões distintas entre si, já que seus respectivos monômios contém potências distintas do operador ∇^2 .

Sem perda de generalidade, mas com inspiração na equação de Klein-Gordon (a equação da mecânica quântica relativística para uma partícula de massa finita não-nula sem spin), podemos realizar a mudança:

$$A_{2n} = a_{2n}mc^2\left(\frac{-i\hbar}{mc}\right)^{2n}, \quad (4.38)$$

onde c é a constante da velocidade da luz, m é a massa (de repouso) da partícula, \hbar é a constante de Planck reduzida, i é a unidade imaginária. Desse modo, as novas constantes arbitrárias a_{2n} são adimensionais. Essa substituição resulta em:

$$Q_{2n} = a_{2n}mc^2\left(\frac{-i\hbar}{mc}\right)^{2n} R^{-1}\nabla^{2n}R, \quad (4.39)$$

de modo que a solução geral, nesse formato, será:

$$Q_R = mc^2R^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}\left(\frac{i\hbar\nabla}{mc}\right)^{2n} R \quad (4.40)$$

Caso desejemos ajustar as constantes a_{2n} de modo a recuperarmos o caso exato da mecânica quântica relativística, deveremos escolher, para cada n natural:

$$a_{2n} = (-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}\frac{1}{2^{2n}}\frac{(2n)!}{(n!)^2}, \quad n = 0, 1, 2, 3\dots \quad (4.41)$$

No caso de $n = 0$, temos uma constante sendo adicionada à equação de Hamilton-Jacobi (equação 4.24), que pode ser interpretada como a energia de repouso, ainda que essa interpretação não seja necessária, pois, de qualquer modo, a constante não alterará a dinâmica do corpo pontual:

$$Q_0 = A_0 = a_0.mc^2, \quad (4.42)$$

de modo que, da escolha 4.41, temos que $a_0 = 1$, o que resulta em:

$$Q_0 = mc^2 \quad (4.43)$$

No caso de $n = 1$, encontramos, a menos de uma constante, a equação 3.10, isto é, o já conhecido potencial quântico bohmiano Q_B :

$$Q_2 = A_2 R^{-1} \nabla^2 R = a_2 \left(\frac{-\hbar^2}{m} \right) R^{-1} \nabla^2 R, \quad (4.44)$$

o que, com a escolha 4.41, leva a $a_2 = \frac{1}{2}$, de modo que Q_2 se torna exatamente a equação 3.10 :

$$Q_2 = \left(\frac{-\hbar^2}{2m} \right) R^{-1} \nabla^2 R. \quad (4.45)$$

No caso de $n = 2$, recuperamos, a menos de uma constante, a primeira ordem de correção relativística na energia:

$$Q_4 = A_4 R^{-1} \nabla^2 (\nabla^2 R) = a_4 \left(\frac{\hbar^4}{m^3 c^2} \right) R^{-1} \nabla^2 (\nabla^2 R). \quad (4.46)$$

Com a escolha 4.41, temos $a_4 = -\frac{1}{8}$, e recuperamos exatamente a correção relativística de primeira ordem:

$$Q_4 = -\frac{1}{8} \frac{\hbar^4}{m^3 c^2} \frac{\nabla^2 (\nabla^2 R)}{R}. \quad (4.47)$$

Concluimos o objetivo inicial dessa seção. Em outras palavras, partimos da Equação de Hamilton-Jacobi da mecânica clássica e, propondo sua modificação por meio da adição de uma correção efetiva do potencial que justificasse alterações na densidade de probabilidade da amostra de cópias de um corpo pontual, mostramos que, se postularmos que a energia média da amostra deva ser estacionária (que, matematicamente, é uma condição necessária para que a energia seja minimizada, ou, melhor dizendo, seja um mínimo local), encontraremos, a menos de constantes a serem ajustadas, a mecânica clássica (como ordem zero), a mecânica quântica não-relativística (como ordem 1), e as sucessivas correções que, juntas, recuperam a equação da mecânica quântica relativística sem spin. As constantes precisariam de alguma informação física adicional para serem determinadas, mas, pelo menos, essa dedução demonstra que o formato matemático do potencial quântico bohmiano e, mesmo, relativístico, já jazem latentes na estrutura da mecânica clássica. Como a Equação de Schrodinger é totalmente equivalente às Equações de Madelung, recuperamos a mecânica quântica a partir de uma abordagem que parte da mecânica clássica e propõe modificações compreensíveis à intuição física.

Reiterando: Deduzimos as equações bohmiânicas (que são equivalentes à Equação de Schrodinger) sem fazer alusão à mecânica quântica nem à Equação de Schrödinger, pelo menos até compararmos com a mecânica quântica para ajustarmos coeficientes.

Esse resultado é conceitualmente notável e parece sugerir que, de alguma forma, a correção que a Equação de Schrödinger ou mesmo a Equação de Klein-Gordon (equação da mecânica quântica relativística para uma partícula com massa finita não-nula e spin zero) trazem à descrição do sistema físico de um corpo pontual já estavam, de alguma forma, latentes na estrutura da mecânica clássica.

Ademais, a mecânica quântica não-relativística não é composta apenas pela função de onda Ψ e pela Equação de Schrödinger. Há também os operadores e seus auto-valores. A partir das equações bohmianas (deduzidas, nesse caso, via abordagem quasi-newtoniana) é possível, por exemplo, deduzir os operadores e os auto-valores do momento angular, em um estado ligado, inclusive demonstrando que a quantização dos auto-valores desses operadores é consequência de o estado ser um estado ligado (energia negativa) e de a equação da continuidade ser respeitada, logo sem que seja necessário algum postulado para a existência desse operador nem para a quantização de seus auto-valores. (62) Como exemplo de que modo o conceito de potencial quântico pode refinar a intuição física sobre um experimento, nota-se que o Efeito Aharonov-Bohm altera o potencial quântico, desviando as trajetórias bohmianas, razão pela qual, na interpretação bohmiana, altera a fase da interferência ondulatória eletrônica incidente no anteparo. A assimetria do potencial quântico na Figura 3 ilustra esse efeito.

Se esse raciocínio da dedução dos operadores quânticos via abordagem quasi-newtoniana puder ser estendido a outras grandezas físicas e operadores associados, sem a necessidade de postular esses operadores, a intuição clássica sobre a mecânica quântica se estenderá progressivamente.

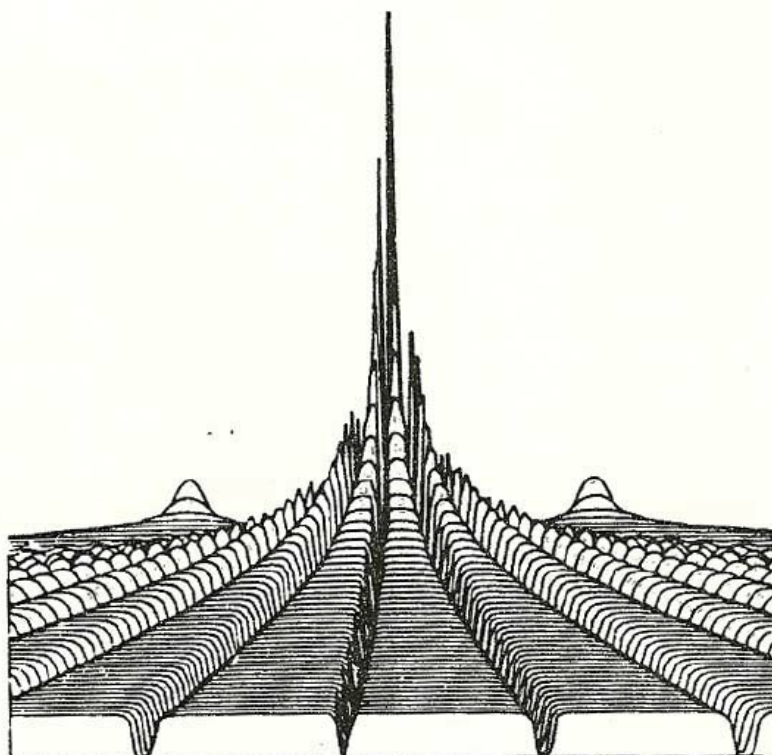


Figura 3 – Perfil do potencial quântico no experimento da difração por dupla fenda com campo magnético confinado ao solenoide. Nessa figura, note a assimetria do potencial quântico decorrente do Efeito Aharonov-Bohm, em contraste com a situação simétrica da Figura 2.

Fonte: PYLKKANEN. (41)

5 INTERPRETAÇÃO TERMODINÂMICA DO POTENCIAL QUÂNTICO

Este capítulo foi baseado em (65) e em. (66) Para outra tentativa de adicionar intuição física ao potencial quântico bohmiano, ver. (67–69) Para uma terceira abordagem, consultar. (70)

Neste capítulo, faremos uma breve revisão das equações que regem a difusão (inclusive, em particular, a difusão de calor), para, em seguida, apresentarmos as ondas de difusão, que podem ser tomadas como um análogo clássico dos fenômenos que o potencial quântico bohmiano induz sobre a dinâmica quântica. Por fim, apresentaremos a visão geral do resultado que as referências (65,66) demonstraram acerca da interpretação termodinâmica do potencial quântico a partir de considerações intuitivas do problema em questão e da termodinâmica do não-equilíbrio.

5.1 Revisão: equação de onda linear, lei de Fourier, leis de Fick e equação de difusão

A assim chamada equação de onda (linear), nas situações mais simples, é, para algum dado campo escalar ξ que a obedeça, uma equação diferencial parcial da forma:

$$\nabla^2 \xi(\vec{r}, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi(\vec{r}, t) = 0 \quad (5.1)$$

onde v é a constante de velocidade da onda.

Note que a equação de onda 5.1 apresenta segunda derivada espacial e segunda derivada temporal (ou seja, derivada parcial de segunda ordem tanto na variável do espaço quanto na variável do tempo).

A primeira lei de Fick dos fenômenos de difusão é dada por:

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = -D(\xi, \vec{r}) \cdot \vec{\nabla} \xi(\vec{r}, t) \quad (5.2)$$

onde ξ é algum campo escalar que esteja se difundindo (como a concentração de alguma grandeza que assim o faça), \vec{J} é a densidade volumétrica de corrente de difusão da grandeza ξ , D é o coeficiente de difusão dessa grandeza nesse meio, em função da posição e da densidade ξ .

A equação 5.2 afirma que a densidade de corrente de difusão é diretamente proporcional ao gradiente espacial químico ou, na lei de Fourier (que é o análogo da lei de Fick para o caso particular da difusão de calor), ao gradiente espacial de temperatura. Em situações apropriadas, essas leis podem ser deduzidas por meio de uma expansão em

Taylor seguida do truncamento na primeira ordem (termo linear), caso essa aproximação seja válida nas condições de interesse.

A equação de continuidade de uma grandeza escalar ξ localmente conservada (ver equação 3.1 e seção 3.1) afirma que:

$$-\frac{\partial \xi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{J}(\vec{r}, t)) \quad (5.3)$$

Substituindo-se a equação 5.2 na equação 5.3, chegamos à equação da difusão, também chamada de segunda lei de Fick:

$$\frac{\partial \xi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (D(\xi, \vec{r}) \cdot \vec{\nabla} \xi(\vec{r}, t)) \quad (5.4)$$

Caso $D(\xi, \vec{r})$ não dependa da concentração ξ e seja espacialmente homogêneo, será constante, de modo que chegaremos a uma forma particular simplificada da equação 5.4 :

$$\frac{\partial \xi(\vec{r}, t)}{\partial t} = D_0 \nabla^2 \xi(\vec{r}, t) \quad (5.5)$$

Ou, equivalentemente:

$$\nabla^2 \xi(\vec{r}, t) - \frac{1}{D_0} \frac{\partial}{\partial t} \xi(\vec{r}, t) = 0 \quad (5.6)$$

A comparação da equação de onda (equação 5.1) com a equação de difusão (equação 5.6) evidencia semelhanças. Contudo, a equação de onda 5.1 apresenta segunda derivada no tempo (derivada parcial de segunda ordem na variável temporal), ao passo que a equação de difusão 5.6 apresenta primeira derivada no tempo (derivada parcial de primeira ordem na variável temporal).

5.2 Ondas de difusão

As chamadas ondas de difusão são descritas pela equação diferencial parcial que surge ao perturbarmos persistentemente, com velocidade angular ω , a equação de difusão 5.6, em cada ponto do espaço, por um termo oscilatório de amplitude $q(\vec{r})$, ou seja:

$$\nabla^2 \Psi(\vec{r}, t) - \frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = q(\vec{r}) e^{i\omega t} \quad (5.7)$$

Observa-se que ondas difusivas apresentam primeira derivada temporal (não apresentam segunda derivada temporal, diferindo da equação de onda linear 5.1) e, em vez de um comportamento de lei quadrática, exibem velocidades de propagação infinitas, com perturbações presentes na totalidade de seu domínio. Dentro da mecânica clássica, essas velocidades de propagação poderem ser infinitas não constitui um paradoxo. Na vigência

da teoria da relatividade, entretanto, fenômenos análogos precisariam ter propagação causal limitada à velocidade da luz c .

O transporte (de energia ou de matéria, a depender da onda) em ondas de difusão é de acordo com as leis de Fick (transporte de difusão linear decorrente dos gradientes espaciais). Ver equações 5.2 e 5.6.

Uma fonte oscilando com frequência ω em um meio com difusividade D promove uma densidade energética (ou de partícula) dada por $\rho(\vec{r}, \omega)$ com densidade de corrente difusiva resultante $\vec{J}(\vec{r}, \omega)$. As primeira e segunda leis de Fick, nesse caso, são:

$$\vec{J}(\vec{r}, \omega) = -D\vec{\nabla}\rho(\vec{r}, \omega) \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = D\nabla^2\rho. \quad (5.9)$$

Devido ao transporte linear da difusão, as ondas de difusão seguem uma lei de depleção-acumulação diante de interfaces, ao invés de se comportarem conforme refração-reflexão.

5.3 Interpretando o significado físico do formato matemático do potencial quântico

O potencial quântico bohmiano (equações 3.10 e 3.11) será introduzido neste Capítulo 5 por uma letra diferente, já que a letra Q será utilizada para denotar calor. Utilizaremos U_B para indicar o potencial quântico bohmiano neste capítulo:

$$U_B(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R(\vec{r}, t)}{R(\vec{r}, t)} \quad (5.10)$$

Nota-se que o potencial quântico não depende da intensidade do campo R (diferentemente do que ocorre nas ondas lineares, mais precisamente, na relação entre a densidade local de energia e a amplitude local da onda), mas de seu formato geométrico. Em outras palavras, se, artificialmente, multiplicássemos o campo R por um número real não-nulo λ , visto que o operador laplaciano ∇^2 é um operador linear, tanto o numerador quanto o denominador do lado direito da equação 5.10 seriam multiplicados por λ , de modo que o potencial quântico bohmiano U_B se manteria inalterado. Pode-se estender essa explicação para o caso em que multiplicássemos por λ a amplitude de R em apenas uma região espacial aberta do domínio de R , razão pela qual o argumento continuaria válido. Logo, U_B depende da geometria espacial do campo R , mas não depende isoladamente do valor de R .

A equação de Schrödinger pode ser derivada da termodinâmica de não-equilíbrio. Nesse contexto, consideramos n partículas estando envoltas por um banho térmico com o qual elas trocam energia. O papel do potencial quântico sobre a distribuição de probabilidade ρ , pode-se demonstrar, é o mesmo que o papel que a perturbação $q(\vec{r})e^{i\omega t}$ tem, nas

ondas de difusão. A energia total do sistema é decomposta em duas componentes, a saber, uma energia média distribuída entre as partes do sistema e energias de flutuação térmica que resultam de flutuações de momento δp . Considerando que a densidade de probabilidade de detecção coincide com uma intensidade de onda e que a probabilidade estacionária segue das trocas de calor com o reservatório de forma que $\rho(x, t) = \rho(x, 0)e^{-\Delta Q/kT}$, conclui-se que a ação da partícula se relaciona com as trocas de calor conforme

$$\Delta Q = 2\omega(\delta S(t) - \delta S(0)). \quad (5.11)$$

Introduzindo a transformação de Madelung $\Psi = R.e^{iS/\hbar}$, com $\rho = R^2$, chega-se à Equação de Schrödinger, com o potencial quântico definido por meio da equação modificada de Hamilton-Jacobi e expresso em termos termodinâmicos, conforme:

$$U_B = \sum_{i=1}^n \frac{\hbar^2}{4m_i} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\vec{\nabla}_i Q}{\hbar\omega_i} \right)^2 - \frac{\nabla_i^2 Q}{\hbar\omega_i} \right] \quad (5.12)$$

Seguindo as leis de Fick, pode-se reescrever essa dependência em termos de difusão. Em geral, para uma partícula quântica livre de forças clássicas (em outras palavras, uma função de onda em que o gradiente do potencial V seja identicamente nulo), vale que:

$$U_B = -\frac{\hbar}{4\omega m} \left[\nabla^2 Q - \frac{1}{D} \frac{\partial Q}{\partial t} \right] \quad (5.13)$$

Aqui vemos que, mesmo para $U_B = 0$, isto é, para uma partícula livre tanto no domínio clássico quanto no quântico (entenda-se: uma função de onda em que tanto o gradiente do potencial clássico V quanto o do potencial quântico bohmiano U_B se mantenham identicamente nulos), a partícula dissipa calor de acordo com uma lei clássica de dissipação (de acordo com o teorema de flutuação do vácuo). Além disso, o papel do potencial quântico é o de dar a forma espacial e temporal desse fluxo de calor no caso das partículas não livres. Nesse caso, o resultado se torna uma equação de onda parabólica (a equação 5.13) com soluções dadas em termos de campos de ondas-difusão clássicos (DWF). (71) Isso resulta em uma energia térmica distribuída “não-localmente” ao longo de todo o aparato experimental com velocidade infinita de propagação. O comportamento de ondas parabólicas conduz ao aparecimento de zonas de acumulação e depleção (ver Figura 4). Essa compreensão auxilia a interpretação física do potencial quântico e das trajetórias bohmianas, em particular quanto aos atributos de não-localidade.

Na Figura 4, vemos um pacote de onda da mecânica quântica se propagando da esquerda para a direita, numa situação unidimensional. A passagem do tempo está representada na coordenada vertical, de baixo para cima. As trajetórias bohmianas (funções horárias da posição) estão representadas por linhas amarelas. Os dois pontos de interface entre os meios, assumidos como em repouso relação ao referencial do experimento, estão representados por linhas retas vermelhas verticais. Nota-se que algumas trajetórias

bohmianas sofrem reflexão antes da primeira interface entre meios, enquanto que outras refratam para o segundo meio e ou retornam ao primeiro ou atravessam para o terceiro. Quanto à luminosidade do fundo, quanto mais escuro, menor a densidade de probabilidade de a partícula estar naquela posição naquele instante; quanto mais claro, maior a densidade de probabilidade. O padrão de acumulação-depleção característico das equações de onda parabólicas, como é o caso da equação de difusão de calor, pode ser observado como picos e vales de densidade de probabilidade que surgem antes do anteparo.

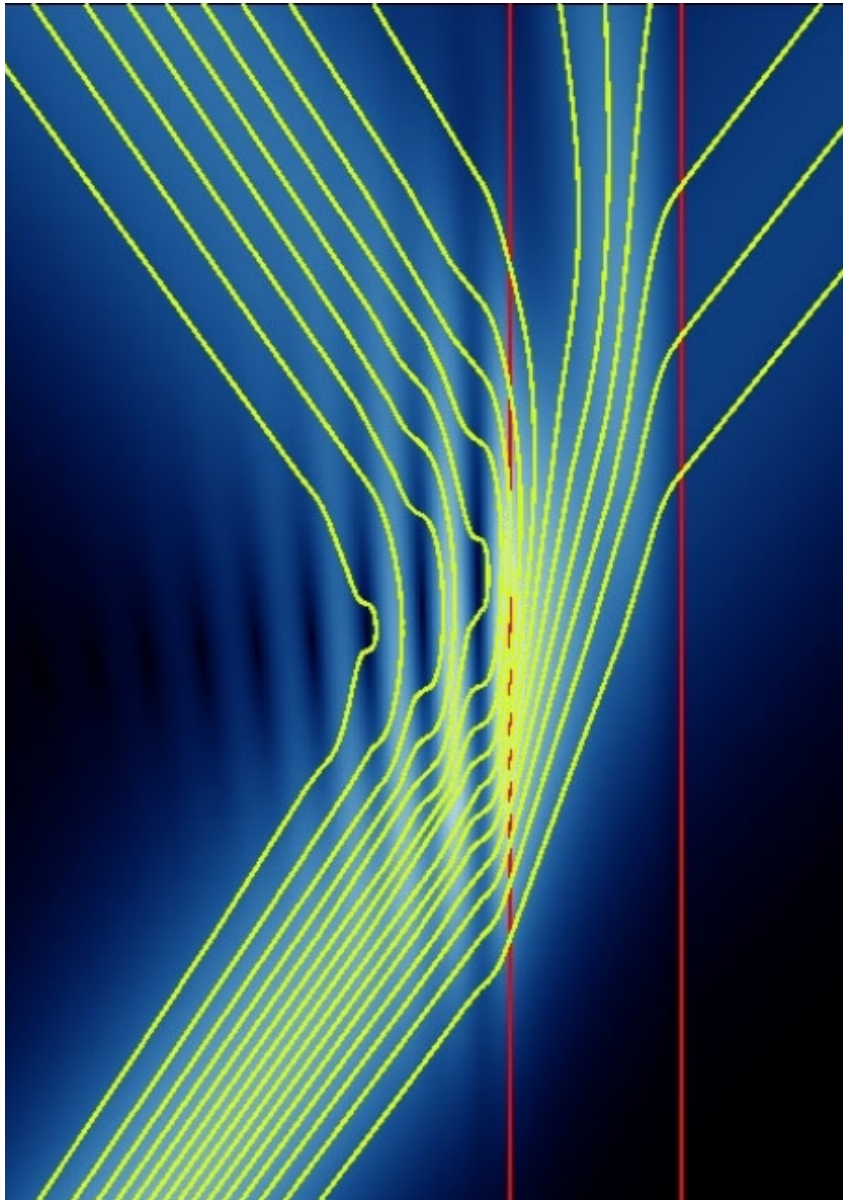


Figura 4 – pacote de onda da mecânica quântica em movimento unidimensional (a posição está representada no eixo esquerda-direita da imagem) em um meio 1 incidindo sobre a interface com um meio 2. A passagem temporal está representada no eixo vertical, de baixo para cima. Trajetórias bohmianas (as linhas amarelas) podem refletir ou refratar. Note o padrão de acumulação-depleção.

6 MASSA, PRINCÍPIO DE MACH E POTENCIAL QUÂNTICO

Discute-se, neste capítulo, o Princípio de Mach, a teoria da Mecânica Relacional (uma teoria física semelhante à mecânica clássica, mas em que o Princípio de Mach é válido) e a consequência sobre o potencial quântico da validade do Princípio de Mach.

6.1 Princípio de Mach

O Princípio de Mach é um princípio físico que afirma que a inércia de qualquer corpo deve ser integralmente consequência de todos os outros corpos do universo. Num experimento mental em que o universo estivesse vazio de corpos exceto de um corpo pontual teste, um corolário desse princípio é que, nessa situação, esse corpo se comportaria com inércia nula, ou seja, na validade desse princípio, a massa inercial de um corpo não seria completamente uma característica intrínseca desse corpo. Nota-se que, caso esse princípio valha integralmente, a noção de quais sistemas de referência seriam ou não inerciais (referencial inercial) não seria uma noção intrínseca ao espaço vazio, mas dependeria da distribuição de corpos (matéria) do universo. Isso contraria a noção de referencial inercial da mecânica newtoniana, pois, nela, a menção que se faz aos demais corpos do universo quando se vai definir referencial inercial é exclusivamente para evitar que corpos próximos estejam interagindo com o corpo teste em questão. Logo, na mecânica newtoniana, um corpo isolado num universo vazio “saberia” se está ou não acelerando em relação a um referencial inercial que existiria independentemente de corpos materiais.

O Princípio de Mach não é válido na mecânica clássica newtoniana, nem na teoria da relatividade geral, nem na mecânica quântica, pelo menos não em seus enunciados usuais. Esse princípio não é implementado em nenhuma das teorias físicas hegemônicas, pelo menos não integralmente. Como as teorias físicas cotidianas não implementam o Princípio de Mach, poder-se-ia pensar que esse princípio se trata de um postulado abandonado, sem chances realistas de ser implementado em alguma teoria física suficientemente semelhante às que demonstraram grande sucesso em suas previsões; ainda mais, o(a) leitor(a) desavisado(a) poderia pensar que esse princípio não é fisicamente interessante e que físicos(as) profissionais não deveriam dedicar atenção conceitual a ele. Contudo, como discutido no livro de referência deste capítulo, diversos grandes nomes da física ou afirmaram que a natureza deveria ter esse princípio como válido ou tentaram implementar teorias físicas (ou modificações em teorias) que implementassem esse princípio, nomes como Leibniz, Berkeley, o próprio Mach, Weber, Immanuel Friedlaender, Höfler, Hofmann, Reissner, Albert Einstein e Erwin Schrödinger. Uma das motivações de Einstein na formulação da Relatividade Geral era acreditar que essa teoria implementaria o Princípio de Mach, o que, entretanto, não ocorreu (segundo o prof. Daniel Augusto Turolla Vanzella, um motivo para

a Teoria da Relatividade Geral sem modificações não poder implementar integralmente o Princípio de Mach é que as equações da Relatividade Geral são equações diferenciais parciais, o que significa que, pelo menos de modo explícito, admitem apenas informações locais nas equações, ao passo que, para se implementar integralmente o Princípio de Mach, o modo mais trivial seria via introdução de informações globais nas equações). O último artigo de Schrödinger antes de seu artigo inaugural na mecânica quântica foi explorando uma modificação da lei de força gravitacional da gravitação universal newtoniana para tentar deduzir resultados afins ao Princípio de Mach.

Nas discussões entre a escola newtoniana e a escola leibniziana, esse debate (da validade ou não do Princípio de Mach) está inserido num debate maior acerca das diferentes concepções de espaço de Newton (“espaço absoluto”, em que a Primeira Lei de Newton é postulada e o Princípio de Mach não é válido) e de Leibniz (“espaço relativo”, em que o Princípio de Mach seria válido). A postura de Newton nesse tema é por vezes chamada de pragmática, teleológica, ontológica (ou metafísica), e teológica, enquanto a de Leibniz é considerada filosófica e apriorística. Isto é, por um lado, a escola leibniziana argumenta filosoficamente que o espaço relativo (em que a posição de corpos só fizesse sentido com relação a outros corpos) faz mais sentido físico, em detrimento do espaço absoluto de Newton, porém Leibniz não apresenta uma teoria física concorrente à mecânica newtoniana e que implemente o Princípio de Mach. Por outro lado, entretanto, Newton pragmaticamente argumenta que, de posse de sua teoria (a mecânica newtoniana), o Teorema das Cascas Esféricas de massa demonstra que uma distribuição homogênea de massas distantes não realizaria qualquer efeito gravitacional sobre a dinâmica de um corpo teste próximo à origem do sistema de referência, de modo que, para Newton, o Princípio de Mach deveria ser preterido caso não haja uma teoria que o implemente e que seja tão útil quanto a mecânica newtoniana (um problema com o argumento do Teorema das Cascas Esféricas é que ele depende da origem adotada para o sistema de referência, pois, caso o sistema esteja distante, a conclusão é que a força das matérias distantes não será nula, resultado conhecido como “Paradoxo Gravitacional”). Ademais, Newton afirma, teleologicamente ou ontologicamente, que faria sentido que o espaço intrinsecamente (isto é, independentemente dos corpos materiais) privilegiasse alguns referenciais (os referenciais inerciais), pois esses referenciais seriam aqueles que estivessem em repouso ou em movimento retilíneo uniforme em relação ao *Sensorium Diei* (o órgão sensorial de Deus).

Na próxima sessão, introduziremos a teoria da Mecânica Relacional, uma teoria física que implementa o Princípio de Mach. Como motivação, introduziremos um experimento mental utilizado para levantar reflexões sobre o Princípio de Mach. A ilustração desse experimento está na Figura 5.

No clássico experimento do balde de Newton, em uma haste rígida mantida em

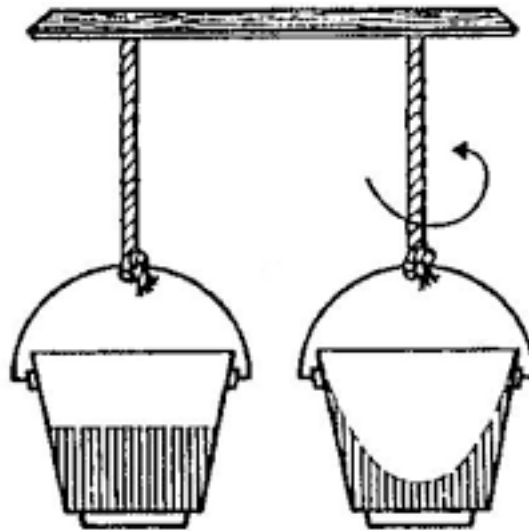


Figura 5 – Representação do clássico experimento do balde de Newton.

Fonte: ASSIS. (72)

reposo em relação à superfície da Terra, penduram-se, por cordas, dois baldes com conteúdo líquido, como água líquida. Inicialmente, em ambos, será possível observar que a superfície de interface líquido-atmosfera será plana e perpendicular à gravidade. Ao se torcer a corda de um dos baldes e, em seguida, liberá-la, observa-se que este balde começará a rotacionar ao redor de seu eixo e, por consequência do atrito viscoso entre o balde e seu conteúdo líquido, o líquido irá progressivamente passar a rotacionar com mesma velocidade angular que o balde, de modo que sua superfície de interface líquido-atmosfera assumirá o formato de um parabolóide de revolução. Mecânica Clássica e Mecânica Relacional concordam nesse resultado. O que aconteceria se, em vez de colocarmos o balde para girar em relação à Terra, mantivéssemos o balde e a Terra inalterados e girássemos o restante do universo? Na Mecânica Newtoniana, a superfície líquida permanecerá plana. Na validade do Princípio de Mach, entretanto, o parabolóide surgirá.

6.2 Mecânica Relacional

O físico brasileiro André K. T. Assis é autor de uma teoria física chamada Mecânica Relacional (72) que é talvez a única teoria física até o momento a implementar o Princípio de Mach sem precisar postulá-lo, isto é, nessa teoria, deduz-se o Princípio de Mach como consequência não ad-hoc de uma teoria que faz previsões muito semelhantes (não conceitualmente, mas quantitativamente) à mecânica clássica.

Nessa teoria, em vez das Leis mecânicas de Newton e da Lei de força gravitacional da Gravitação Universal, são postuladas as Leis mecânicas da Mecânica Relacional e a Lei

de força gravitacional de Weber (análoga à lei de força da Eletrodinâmica de Weber, que fundamenta uma eletrodinâmica não-convencional que é capaz de recuperar as Equações de Maxwell, pelo menos parcialmente, mas que não é equivalente à eletrodinâmica clássica hodiernamente adotada pela comunidade física, isto é, a eletrodinâmica que se caracteriza por postular as Equações de Maxwell e a força de Lorentz munida da interpretação de Einstein). Na Mecânica Relacional, não é feita menção a referencial inercial (ainda que a noção de referencial inercial possa ser satisfatoriamente recuperada) e não existem forças fictícias (isto é, as expressões que, na mecânica newtoniana, são consideradas forças inerciais, são, na mecânica relacional, dedutivamente re-interpretadas como forças de interação).

As Leis mecânicas da Mecânica Relacional são:

1. a interação entre corpos pontuais é dada por grandezas vetoriais (força) que obedecem ao princípio da sobreposição;
2. lei da ação e reação (num dado instante, a força que um corpo pontual A aplica sobre um corpo pontual B é uma força de mesma natureza, de mesma intensidade e direção, mas de sentido contrário, à que B aplica em A);
3. a qualquer instante, o somatório vetorial de todas as forças que atuam sobre um corpo pontual é nulo.

Nota-se que essa terceira lei da Mecânica Relacional é análoga (mas distinta) ao princípio fundamental da dinâmica da Mecânica Clássica (isto é, a segunda lei de Newton).

A Lei de força gravitacional de Weber entre dois corpos pontuais 1 e 2 é dada por:

$$\vec{F}_{21} = -Gm_1m_2 \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \left[1 - \frac{\xi}{c^2} \left(\frac{\dot{r}_{12}^2}{2} - r_{12}\ddot{r}_{12} \right) \right] = -\vec{F}_{12}, \quad (6.1)$$

onde c é a velocidade da luz, ξ é uma constante adimensional que assumiremos valer exatamente 6 (pois, com esse valor para essa constante, o fenômeno da precessão do periélio da órbita do planeta Mercúrio em torno do Sol se torna, com sucesso quantitativo, adequadamente bem modelado pela Mecânica Relacional), e r_{12} é a distância entre o corpo 1 e o corpo 2. Nota-se que as massas m_1 e m_2 são as massas gravitacionais.

Expandindo em termos da velocidade relativa e da aceleração relativa, tem-se:

$$\vec{F}_{21} = -Gm_1m_2 \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \left[1 + \frac{\xi}{c^2} \left(\vec{v}_{12} \cdot \vec{v}_{12} - \frac{3}{2}(\hat{r}_{12} \cdot \vec{v}_{12})^2 + \vec{v}_{12} \cdot \vec{a}_{12} \right) \right] = -\vec{F}_{12}. \quad (6.2)$$

A energia potencial gravitacional correspondente é:

$$U_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}} \left(1 - \xi \frac{\dot{r}_{12}^2}{2c^2} \right). \quad (6.3)$$

De posse do enunciado das leis da mecânica clássica e das leis da mecânica relacional, pode-se comparar ambas teorias. Uma questão interessante é como o termo $m_i \vec{a}$ (massa inercial vezes vetor aceleração medido a partir de um referencial inercial) que aparece na expressão da segunda lei de Newton surgirá na mecânica relacional.

Na mecânica clássica, conforme enunciamos brevemente, assume-se que os corpos distantes (isto é, em uma escala espacial grande o bastante para que o universo já possa ser modelado como homogêneo e isotrópico, conforme a astronomia observa que ocorre em escalas grande o bastante e extrapola que também ocorra para além do universo observável) não exercem força resultante sobre um corpo teste próximo à origem (hipótese essa que é motivada na lei de força da gravitação newtoniana, por meio dos teoremas das cascas esféricas). Por essa razão, precisaremos computar, para realizar a análise dinâmica do corpo teste k em um referencial inercial I , apenas as forças exercidas pelos corpos próximos, que chamaremos de forças anisotrópicas. O resultado é inserido na célebre equação da segunda lei de Newton, em que postula-se que o somatório das forças sobre o corpo k (no caso, apenas as anisotrópicas, pois as de longuíssima distância zerariam) resultam na massa inercial no corpo k multiplicada pela aceleração desse corpo nesse referencial inercial I :

$$\sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^N \vec{F}_{pk} = \sum \vec{F}_{aniso} = (m_k)_{inercial} \vec{a}_I. \quad (6.4)$$

Na mecânica relacional, a terceira lei mecânica afirma que o somatório vetorial das forças atuando sobre um corpo teste qualquer é sempre nula, isto é, sempre, para qualquer corpo, $\sum \vec{F} = \vec{0}$. Se, didaticamente, classificarmos essas forças em ou advindas de corpos próximos (forças anisotrópicas) ou advindas de corpos distantes (forças isotrópicas), teremos que as forças anisotrópicas serão, via de regra, as mesmas (pelo menos, em situações em que forças gravitacionais de corpos próximos não sejam importantemente distintas das forças gravitacionais newtonianas), ao passo que as forças isotrópicas deverão ser calculadas pela equação 6.1. Para um corpo pontual, esse cálculo das forças isotrópicas foi realizado em (72). O resultado, exibido a seguir, guarda semelhanças (não conceitualmente, mas quantitativamente) com a expressão da segunda lei de Newton, mas note que, além do sinal negativo e de o somatório não incluir as forças de interação com corpos próximos (forças anisotrópicas), a proporcionalidade direta com a aceleração do corpo teste foi diretamente deduzida por cálculo (por integração da força de interação gravitacional de Weber do corpo teste com os corpos distantes), ou seja, em contraste com a mecânica newtoniana, não foi assumida como axioma. No referencial U do centro de massa das

estrelas fixas (isto é, do universo observável), a resultante das forças isotrópicas sobre um corpo k será:

$$\sum \vec{F}_{iso} = -\Phi_{\infty}(m_k)_{gravitacional}\vec{a}_U, \quad (6.5)$$

onde Φ_{∞} é uma constante de proporcionalidade positiva entre a massa gravitacional e a massa inercial efetiva de um corpo pontual na mecânica relacional. Nota-se que, para previsões no universo usual, $\Phi_{\infty} = 1$, mas que, pode-se deduzir, Φ_{∞} é diretamente proporcional à densidade de matéria, em escala isotrópica, do universo observável. Portanto poderia ser diferente nessa teoria, diferentemente de como ocorre no arcabouço teórico da mecânica clássica (em que de nenhum modo a densidade de matéria do universo distante influenciariam a relação entre a massa gravitacional e a massa inercial de um corpo). Em particular, na mecânica relacional, caso a densidade de matéria do universo observável fosse matematicamente alterada para zero, a inércia do corpo teste também se anularia, o que demonstra a validade do Princípio de Mach.

Como, na mecânica relacional, conforme sua terceira lei, o somatório de todas as forças agindo sobre um corpo num instante é nulo, infere-se que, em particular, a soma do somatório das forças anisotrópicas sobre um corpo com o somatório das forças isotrópicas sobre esse mesmo corpo também será sempre nula:

$$\sum \vec{F}_{aniso} + \sum \vec{F}_{iso} = \vec{0} \quad (6.6)$$

Portanto, pelas equações 6.5 e 6.6, temos que:

$$\sum \vec{F}_{aniso} = \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^N \vec{F}_{pk} = \Phi_{\infty}(m_k)_{gravitacional}\vec{a}_{kU}. \quad (6.7)$$

Isto é, deduz-se resultado análogo à segunda lei de Newton.

Entretanto, nota-se que, na equação acima, a aceleração do corpo teste k é medida em relação ao referencial do centro de massa do universo observável, enquanto que, na segunda lei de Newton, a aceleração é medida em relação a um referencial inercial. Portanto, na mecânica newtoniana, caso a distribuição de matéria do universo observável isotrópico passe a desempenhar uma aceleração não-nula em relação ao referencial inercial inicialmente fixado, em nada se alterará a previsão da segunda lei de Newton. Ao passo que, na Mecânica Relacional, caso o universo observável isotrópico passe por essa alteração, o novo referencial do centro de massa do universo sofrerá a mesma aceleração. Assim, o corpo teste exibirá a mesma aceleração relativa que exibia antes da alteração, mas agora em relação a esse novo referencial do universo observável, não mais em relação ao referencial do universo observável anterior à alteração (desde que o somatório das forças anisotrópicas sobre esse corpo teste seja mantido o mesmo). A Figura 6 ilustra essa conclusão.

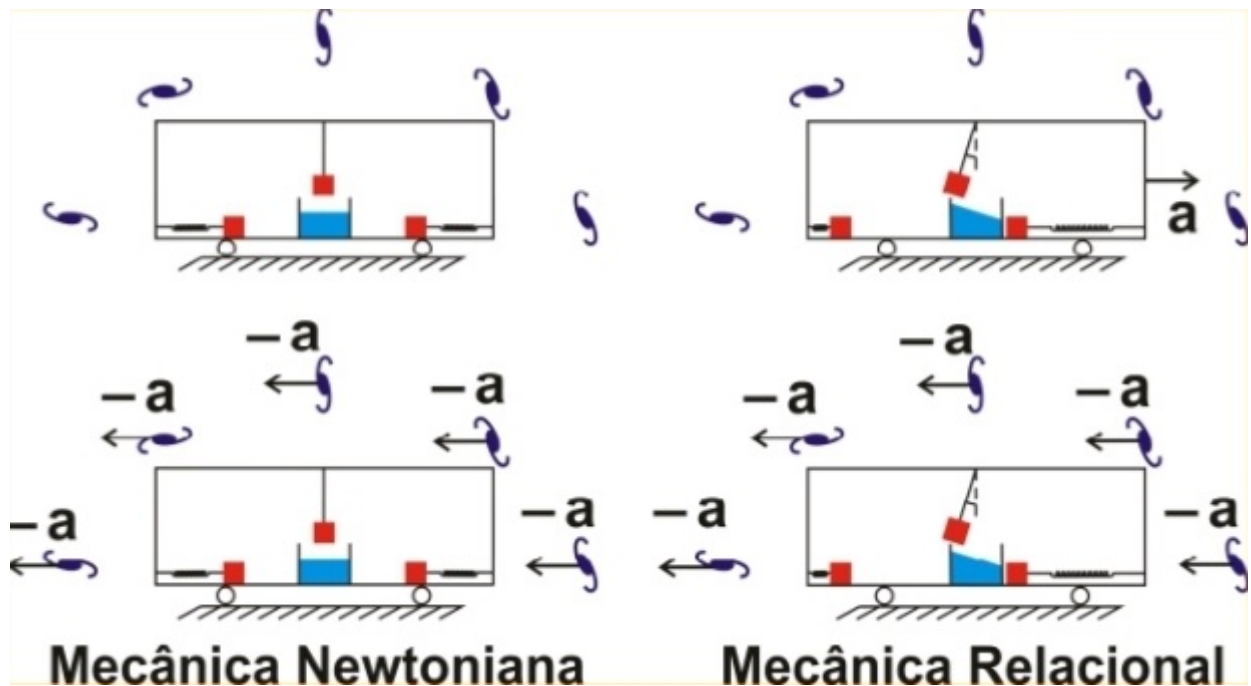


Figura 6 – Ilustração de pêndulo em vagão. Se o Princípio de Mach for válido, acelerar o vagão produzirá o mesmo resultado que acelerar o universo distante com mesma intensidade mas sentido contrário. Contudo, na mecânica newtoniana, nada ocorre com o pêndulo quando se acelera o universo

Fonte: ASSIS. (72)

6.3 Origem “machiana” do potencial quântico

Outro resultado da mecânica relacional que é conceitualmente interessante para nosso escopo é que, nessa teoria, dado um sistema de referência, a energia cinética de um corpo pontual será uma energia de interação gravitacional com os corpos distantes, não sendo uma energia intrínseca ao estado de movimento do corpo teste isolado em relação a um referencial inercial. Ou seja, diferindo do que ocorre na mecânica clássica.

Embora, nesta dissertação, tenha-se enunciado, apenas no contexto da mecânica relacional, que a energia cinética seja uma energia de interação gravitacional, é necessário que conclusão análoga seja válida em todas teorias mecânicas em que o Princípio de Mach seja integralmente satisfeito, pois, na forma como é compreendida na mecânica clássica, a energia cinética de um corpo pontual depende da massa inercial desse corpo, inércia essa que, em teorias em que o Princípio de Mach seja satisfeito, deverá ser decorrente da interação desse corpo teste com os demais corpos do universo.

No contexto da mecânica quântica, via formulação bohmiana da mecânica quântica, vimos, nos Capítulos 3 e 4 desta dissertação, que o potencial quântico pode ser entendido como uma correção quântica da energia cinética de uma partícula. Ora, se, no caso de

uma teoria mecânica análoga à mecânica clássica implementar o Princípio de Mach, a energia cinética deve ser uma energia de interação gravitacional com os corpos do universo isotrópico, e, se a mecânica quântica, em sua formulação bohmiana, pode ser obtida da mecânica clássica por abordagem quase-newtoniana (o que nos leva a interpretar o potencial quântico como uma correção da energia cinética de uma partícula quântica), então é de se esperar que, caso o Princípio de Mach seja válido numa teoria em que a mecânica quântica seja recuperada, o potencial quântico, nessa teoria, seja consequência da interação da partícula com os corpos do universo isotrópico.

Como pode ser visto na referência (73), resultado análogo ao enunciado no parágrafo acima é válido para a mecânica quântica relativística de uma partícula sem spin. Ou seja, caso se assuma o Princípio de Mach e, de modo análogo ao que fizemos no Capítulo 4, infra-se, no formalismo bohmiano, a equação de Klein-Gordon (equação da mecânica quântica para uma partícula quântica sem spin e compatível com a relatividade restrita), o potencial quântico relativístico também será uma correção da energia cinética relativística e, outrossim, será consequência da interação da partícula com a distribuição espacial de matéria.

Não se pretende, nesta dissertação, nem afirmar nem negar que a natureza deva satisfazer o Princípio de Mach, assim como também não se ambiciona aqui elencar a formulação bohmiana como uma formulação de mecânica quântica que “monogamicamente” exclua outras abordagens. Contudo, diante do exposto, faz-se inegável que tanto a formulação bohmiana da mecânica quântica quanto a apresentação não apenas do Princípio de Mach mas também de teorias que o explorem (como a Mecânica Relacional) podem ser fonte de enriquecedoras reflexões filosóficas e de profundas elucidacões conceituais, mesmo para quem não deseje se aprofundar nesses arcabouços teóricos.

Talvez, por exemplo, a formulação de uma teoria que concilie os resultados da teoria quântica com a relatividade geral dependa de um repertório de ideias capaz de se desapegar tanto da noção de referencial inercial como ponto de partida, quanto de um princípio de equivalência independente dos corpos distantes, bem como de um potencial quântico etéreo e introduzido por quantizações de operadores abstratos.

7 CONCLUSÃO

Nesta dissertação, procuramos apresentar ideias que possam ser úteis ao aprofundamento conceitual da natureza física da mecânica quântica. Ficaremos felizes se, ao menos, tivermos suscitado pertinentes reflexões interessantes e agradado às mentes curiosas e intelectualmente honestas.

A autoria deste trabalho iniciou suas pesquisas com o desejo de compreender matematicamente a estrutura geométrica (ver apêndice A) que abstrai com precisão a excentricidade do Paradoxo de Aharonov-Bohm (Efeito Ehrenberg-Siday-Aharonov-Bohm), apresentado no Capítulo 2. Contudo, no decorrer desse percurso, percebeu que não se contentaria em apenas descrever matematicamente o fenômeno, mas que também gostaria de compreender sua origem física, isto é, quais ingredientes físicos que lhe propiciam a existência.

Para tal, notou que, por se tratar de um fenômeno que de fato existe na mecânica quântica mas que é proibido na mecânica clássica munida de eletrodinâmica clássica, poderia, caso fosse alegoricamente possível elaborar um caminho da mecânica quântica para a mecânica clássica e outro da mecânica clássica para a mecânica quântica, fazer o experimento mental de imaginar o Efeito Aharonov-Bohm percorrer o primeiro caminho, desaparecendo ao se transladar para a mecânica clássica, mas, em seguida, pelo segundo caminho, retornar para a mecânica quântica, ressurgindo. No entanto, um caminho que assim o fizesse, mas que fosse puramente uma manipulação matemática sem rigorosa compreensão da intuição física subjacente, não traria consigo a almejada elucidação conceitual.

A autoria, então, se deu conta de que algo como uma transição clássico \leftrightarrow quântica era um problema, em certo sentido, ainda em aberto, sendo tema atual de publicações científicas. Por essa razão, a esperança de se encontrar a resposta para a empreitada seria buscar as perguntas certas para ir ao encontro da literatura adequada, mas logo ficou evidente que as propostas da literatura para essa transição clássico \leftrightarrow quântica eram fortemente dependentes da formulação da mecânica quântica utilizada (ou mesmo da interpretação de mecânica quântica adotada).

Por esse motivo, a autoria decidiu partir para o estudo de diferentes formulações (e subformulações) de mecânica quântica, descobrindo dezenas delas, visando às que se mostrassem mais apropriadas a fornecerem um limite clássico da mecânica quântica e/ou uma dedução da mecânica quântica a partir da mecânica clássica. A condição era serem rigorosas e acessíveis à intuição física.

Nesse contato com diferentes formulações, pode-se aprender que é necessário ser

muito detalhista não apenas com as diferentes formas de cálculos que surgem mas também com o aspecto filosófico de cada formulação, pois a figura de linguagem da elipse, num contexto rico em diversas formulações, cada qual com termos conceitualmente intrincados, pode levar a confusões teóricas.

Dentre todas as formulações estudadas nesse processo, a que mais se destacou aos objetivos da pesquisa foi a formulação bohmiana da mecânica quântica, também conhecida como mecânica bohmiana, apresentada no Capítulo 3. Essa abordagem não se incomoda em trabalhar com a função de onda Ψ nem com a Equação de Schrödinger, mas enfatiza a utilização das Equações da Hidrodinâmica Quântica (Equações de Madelung), uma forma equivalente de se apresentar a Equação de Schrödinger, porém que trabalha com duas equações de variáveis reais que modelam dois campos com comportamentos familiares à física clássica (equação da continuidade e equação de Hamilton-Jacobi com introdução de um potencial quântico bohmiano). Como a dinâmica descrita pela segunda lei de Newton é equivalente à descrição da Equação de Hamilton-Jacobi, a mecânica bohmiana permite uma comparação mais simples entre o mundo quântico e o mundo clássico.

A formulação bohmiana da mecânica quântica não exige que exista um corpo pontual associado à função de onda, mas seu formalismo é tal que, caso a partícula exista, seu movimento é bem posto, ou seja, pode-se falar que a partícula seguiria a trajetória bohmiana compatível com a dinâmica do meio e com as condições iniciais da partícula. Talvez, para a mecânica quântica hodierna, não seja prioridade se falar sobre corpo pontual, no entanto, para a mecânica clássica, essa abordagem é muito conveniente.

Tendo formado uma base teórica em formulação bohmiana da mecânica quântica, a autoria dessa dissertação encontrou um resultado que permite percorrer o primeiro dos caminhos, ir (com rigor e intuição) da mecânica quântica para a mecânica clássica, desde que satisfeitas as condições do limite clássico, como apresentado no Capítulo 4, na seção 4.1. O resultado é deduzido buscando-se a condição em que os efeitos do potencial quântico (uma correção quântica da energia cinética) pouco influenciarão as trajetórias bohmanas, o que, infere-se, ocorre quando o pacote da função de onda não tem alcance espacial (por exemplo, por ter baixo comprimento de onda) o bastante para notar rápido o bastante a escala de variação espacial do potencial V , de modo que as pequenas turbulências do potencial quântico pouco interferem no fluir da energia cinética das trajetórias bohmanas ao longo do estável rio do potencial V . Surpresa, talvez previsível, é que o Efeito Aharonov-Bohm existe exatamente quando necessariamente consegue violar essa condição, persistindo como um efeito quântico sem limite clássico.

Não tendo conseguido ver o Efeito Aharonov-Bohm desaparecer num limite clássico, mas tendo visto quão interessante é trabalhar com o potencial quântico, por ele ser o principal responsável pelo que há de quântico não-clássico na mecânica quântica, a autoria dessa dissertação procurou formas de compreender melhor a intuição física sobre o potencial

quântico e sua expressão matemática: $Q_B(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R}$.

Assim, encontrou uma abordagem quasi-newtoniana, apresentada no Capítulo 4, na seção 4.2, que deduz a mecânica quântica (a mecânica bohmiana) partindo da Equação de Hamilton-Jacobi da mecânica clássica mas procurando modificações nela que respeitem o princípio de energia média estacionária (ou, simplesmente, princípio de mínima energia média), concluindo, como consequência, a equação de continuidade da probabilidade bem como o potencial quântico bohmiano da mecânica quântica não-relativística sem spin (Equação de Schrödinger) mas também o formato dos demais termos de correção na energia cinética da mecânica quântica relativística sem spin (Equação de Klein-Gordon). Essa abordagem se mostrou, pelo menos em casos particulares, o bastante para deduzir, da mecânica clássica, os operadores quânticos de momento angular e seus auto-valores, sem a necessidade de axiomatizá-los. Trabalhos futuros poderão utilizar essa heurística para deduzirem, via abordagem quasi-newtoniana, o operador Hamiltoniano do acoplamento mínimo e o consequente surgimento do Efeito Aharonov-Bohm sem terem postulado, como ponto de partida, nem operadores nem funções de onda, para a descrição física desse fenômeno.

A percepção de que o potencial quântico é uma correção da energia cinética quântica que já existe latente na estrutura da mecânica clássica levou a autoria dessa dissertação ao questionamento de qual a intuição subjacente ao formato matemático do potencial quântico ser exatamente o que é, ou seja, à dúvida de qual o comportamento físico implícito nesse formato matemático, o que levou ao Capítulo 5, onde investiga-se que o formato matemático do potencial quântico o faz ser o maestro de uma onda de energia cinética que obedece à equação de difusão, e dá origem aos fenômenos quânticos, interferindo nas trajetórias bohmianas como um banho térmico que seguisse uma partícula mas também fosse alimentado pelo movimento delas.

Diante do questionamento de qual o sentido de se imaginar um banho de energia cinética seguindo um corpo pontual e a que essa energia cinética estaria vinculada, a autoria dessa dissertação considerou que, como o potencial quântico é uma correção da energia cinética das partículas na mecânica quântica, faria sentido, visando à elucidação dos fundamentos da mecânica quântica, questionar a que a energia cinética de um corpo pontual, na mecânica clássica, está vinculada. Esse questionamento remete ao antigo debate conceitual na física sobre qual a origem da inércia dos corpos e se referenciais inerciais existem independentemente dos corpos ou se, por exemplo, são aparentemente inerciais os referenciais que efetivamente estejam em repouso ou em movimento retilíneo uniforme em relação ao centro de massa do universo. Para suscitar enriquecimento conceitual nesse debate, apresentamos, no Capítulo 6, o Princípio de Mach e sua breve história. Em seguida, introduzimos a Mecânica Relacional, uma teoria física que, em situações cotidianas, é quantitativamente (ainda que não conceitualmente) semelhante à mecânica newtoniana,

mas que, diferentemente dela, implementa o Princípio de Mach, e, ainda mais, o faz de primeiros princípios, deduzindo, como consequência, que a energia cinética de um corpo pontual na mecânica relacional é uma energia de interação, a saber, uma energia potencial de interação gravitacional com os corpos do universo distante. Mostramos também que, se o Princípio de Mach for assumido como válido, o potencial quântico (que se trata de correção quântica na energia cinética) também terá a mesma origem física.

Gratidão!

REFERÊNCIAS

- 1 COHEN-TANNOUDJI, C.; DIU, B.; LALOE, F. **Quantum mechanics**. New York: Wiley-Interscience, 1986. v. 1.
- 2 COHEN-TANNOUDJI, C.; DIU, B.; LALOE, F. **Quantum mechanics**. New York: Wiley-Interscience, 1986. v. 2.
- 3 AHARONOV, Y.; BOHM, D. Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory. **Physical Review**, APS, v. 115, n. 3, p. 485–491, 1959. DOI: 10.1103/PhysRev.115.485.
- 4 PESHKIN, M.; TONOMURA, A. **The Aharonov-Bohm effect**. Berlin: Springer Verlag, 1989. DOI: 10.1007/BFb0032076.
- 5 ALLORI, V. Primitive ontology in a nutshell. **International Journal of Quantum Foundations**, v. 1, n. 3, p. 107–122, 2015.
- 6 ALLORI, V. Primitive ontology and the classical world. *In*: KASTNER, R. E.; JEKNIĆ-DUGIĆ, J.; JAROSZKIEWICZ, G. (ed.). **Quantum structural studies: classical emergence from the quantum level**. London: World Scientific Publishing Europe Ltd, 2017. p. 175–199. DOI: 10.1142/9781786341419_0007.
- 7 ALLORI, V. *et al.* Predictions and primitive ontology in quantum foundations: a study of examples. **The British Journal for the Philosophy of Science**, Oxford University Press, v. 65, n. 2, p. 323–352, 2014. DOI: 10.1093/bjps/axs048.
- 8 STYER, D. F. *et al.* Nine formulations of quantum mechanics. **American Journal of Physics**, American Association of Physics Teachers, v. 70, n. 3, p. 288–297, 2002. DOI: 10.1119/1.1445404.
- 9 BOHR, N. **Atomic theory and the description of nature: four essays with an introductory survey**. New York: Cambridge University Press, 1961.
- 10 HEISENBERG, W. **The physical principles of the quantum theory**. New York: Dover Publications, 1949.
- 11 Everett III, H. “Relative state” formulation of quantum mechanics. **Reviews of Modern Physics**, APS, v. 29, n. 3, p. 454–462, 1957. DOI: 10.1103/RevModPhys.29.454.
- 12 WHEELER, J. A. Assessment of Everett’s “relative state” formulation of quantum theory. **Reviews of Modern Physics**, APS, v. 29, n. 3, p. 463–465, 1957. DOI: 10.1103/RevModPhys.29.463.
- 13 ALLORI, V. *et al.* Many worlds and Schrödinger’s first quantum theory. **British Journal for the Philosophy of Science**, Oxford University Press, v. 62, n. 1, p. 1–27, 2011. DOI: 10.1093/bjps/axp053,.
- 14 MAUDLIN, T. Can the world be only wavefunction. *In*: SAUNDERS, S. *et al.* (ed.). **Many worlds: Everett, quantum theory, and reality**. Oxford: Oxford University Press, 2010. p. 121–143. DOI: 10.1093/acprof:oso/9780199560561.003.0005.

- 15 VAIDMAN, L. **Many-worlds interpretation of quantum mechanics**. 2002. Disponível em: <https://seop.illc.uva.nl/entries/qm-manyworlds>. Acesso em: 10 jun. 2022.
- 16 WALLACE, D. Decoherence and ontology (or: how i learned to stop worrying and love FAPP. *In*: SAUNDERS, S. *et al.* (ed.). **Many worlds: Everett, quantum theory, and reality**. Oxford: Oxford University Press, 2010. p. 53–72. DOI: 10.1093/acprof:oso/9780199560561.001.0001.
- 17 BOHM, D. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of “hidden” variables I. **Physical Review**, APS, v. 85, n. 2, p. 166–179, 1952. DOI: 10.1103/PhysRev.85.166.
- 18 BOHM, D. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of “hidden” variables II. **Physical Review**, APS, v. 85, n. 2, p. 180–193, 1952. DOI: 10.1103/PhysRev.85.180.
- 19 COLIJN, C. **The de Broglie-Bohm causal interpretation of quantum mechanics and its application to some simple systems**. 2003. Thesis (Doctor) - University of Waterloo, Waterloo, 2003.
- 20 SOLÉ, A. Bohmian mechanics without wave function ontology. **Studies in History and Philosophy of Science part B: studies in history and philosophy of modern physics**, Elsevier, v. 44, n. 4, p. 365–378, 2013. DOI: 10.1016/j.shpsb.2013.07.004.
- 21 AGUILAR, M.; SOCOLOVSKY, M. Aharonov–Bohm effect, flat connections, and Green’s theorem. **International Journal of Theoretical Physics**, v. 41, p. 839–860, 2002. DOI: 10.1023/A:1015780806734.
- 22 WANG, R.-F. An experimental proposal to test the physical effect of the vector potential. **Scientific Reports**, Nature Publishing Group, v. 6, n. 1, p. 1–5, 2016. DOI: 10.1038/srep19996.
- 23 MINE, T. The Aharonov-Bohm solenoids in a constant magnetic field. **Annales Henri Poincaré**, Springer, v. 6, n. 1, p. 125–154, 2005. DOI: 10.1007/s00023-005-0201-4.
- 24 GRIFFITHS, D. J. **Introduction to electrodynamics**. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1999.
- 25 GRIFFITHS, D. J. **Introduction to quantum mechanics**. Upper Saddle River: Pearson Prentice Hall, 2005.
- 26 ARDOUREL, V.; GUAY, A. Why is the transference theory of causation insufficient? the challenge of the Aharonov-Bohm effect. **Studies in History and Philosophy of Science part B: studies in history and philosophy of modern physics**, v. 63, p. 12–23, 2018. DOI: 10.1016/j.shpsb.2017.09.009.
- 27 SHECH, E. Infinite idealizations in physics. **Philosophy Compass**, Wiley Online Library, v. 13, n. 9, p. e12514, 2018. DOI: 10.1111/phc3.12514.
- 28 CHAMBERS, R. G. Shift of an electron interference pattern by enclosed magnetic flux. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 5, p. 3–5, 1960. DOI: 10.1103/PhysRevLett.5.3.

-
- 29 TONOMURA, A. *et al.* Observation of Aharonov-Bohm Effect by electron holography. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 48, p. 1443–1446, 1982. DOI: 10.1103/PhysRevLett.48.1443.
- 30 TONOMURA, A. *et al.* Evidence for Aharonov-Bohm effect with magnetic field completely shielded from electron wave. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 56, p. 792–795, 1986. DOI: 10.1103/PhysRevLett.56.792.
- 31 OSAKABE, N. *et al.* Experimental confirmation of Aharonov-Bohm effect using a toroidal magnetic field confined by a superconductor. **Physical Review A**, American Physical Society, v. 34, p. 815–822, 1986. DOI: 10.1103/PhysRevA.34.815.
- 32 MATTEUCCI, G. d. f.; POZZI, G. New diffraction experiment on the electrostatic Aharonov-Bohm effect. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 54, p. 2469–2472, 1985. DOI: 10.1103/PhysRevLett.54.2469.
- 33 WEBB, R. A. *et al.* Observation of $\frac{h}{e}$ Aharonov-Bohm oscillations in normal-metal rings. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 54, p. 2696–2699, 1985. DOI: 10.1103/PhysRevLett.54.2696.
- 34 BATELAAN, H.; TONOMURA, A. The Aharonov-Bohm effects: variations on a subtle theme. **Physics Today**, American Institute of Physics, v. 62, p. 38–43, 2009. DOI: 10.1063/1.3226854.
- 35 ADLER, S. L.; MILLARD, A. C. Generalized quantum dynamics as pre-quantum mechanics. **Nuclear Physics B**, Elsevier, v. 473, n. 1-2, p. 199–244, 1996. DOI: 10.1016/0550-3213(96)00253-2.
- 36 ADLER, S. L. Is quantum theory a form of statistical mechanics? **Journal of Physics: conference series**, Castello de Piombino: IOP Publishing, v. 67, n. 1, p. 012014, 2007. DOI: 110.1088/1742-6596/67/1/012014.
- 37 ADLER, S. L. Quantum theory as an emergent phenomenon: Foundations and phenomenology. **Journal of Physics: conference series**, Vienna: IOP Publishing, v. 361, n. 1, p. 012002, 2012. DOI: 10.1088/1742-6596/361/1/012002.
- 38 LEMOS, N. A. **Mecânica analítica**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.
- 39 MADELUNG, E. Quantum theory in hydrodynamical form. **Zeitschrift für Physik**, v. 40, p. 322–326, 1927. DOI: 10.1007/BF01400372.
- 40 ALLORI, V. A new argument for the nomological interpretation of the wave function: the galilean group and the classical limit of nonrelativistic quantum mechanics. **International Studies in the Philosophy of Science**, Taylor & Francis, v. 31, n. 2, p. 177–188, 2017. DOI: 10.1080/02698595.2018.1424759.
- 41 PYLKKANEN, P.; HILEY, B.; PÄTTINIEMI, I. **Bohm’s approach to quantum mechanics and individuality**. 2014. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1405.4772>. Acesso em: 08 jun. 2022.
- 42 BELL, J. S. On the problem of hidden variables in quantum mechanics. **Review of Modern Physics**, American Physical Society, v. 38, p. 447–452, 1966. DOI: 10.1103/RevModPhys.38.447.

- 43 BELL, J. S. **Speakable and unspeakable in quantum mechanics**. Cambridge: Cambridge University Press, 1987.
- 44 DEUTSCH, D. Vindication of quantum locality. **Proceedings of the Royal Society A: mathematical, physical and engineering sciences**, The Royal Society Publishing, v. 468, n. 2138, p. 531–544, 2012. DOI: 10.1098/rspa.2011.0420.
- 45 WALLACE, D.; TIMPSON, C. **Non-locality and gauge freedom in Deutsch and Hayden’s formulation of quantum mechanics**. 2005. Disponível em <https://doi.org/10.48550/arXiv.quant-ph/0503149>. Acesso em: 09 jun. 2022.
- 46 COLIN, S.; VALENTINI, A. Instability of quantum equilibrium in Bohm’s dynamics. **Proceedings of the Royal Society A: mathematical, physical and engineering sciences**, The Royal Society Publishing, v. 470, n. 2171, p. 20140288, 2014. DOI: 10.1098/rspa.2014.0288.
- 47 GISIN, N. **Collapse. What else?** 2018. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1701.08300>. Acesso em: 09 jun. 2022.
- 48 MARKOWICH, P.; PAUL, T.; SPARBER, C. Bohmian measures and their classical limit. **Journal of Functional Analysis**, Elsevier, v. 259, n. 6, p. 1542–1576, 2010. DOI: 10.1016/j.jfa.2010.05.013.
- 49 MATZKIN, A. Bohmian mechanics, the quantum-classical correspondence and the classical limit: the case of the square billiard. **Foundations of Physics**, v. 39, n. 8, p. 903–920, 2009. DOI: 10.1007/s10701-009-9304-y.
- 50 ROMANO, D. **Bohmian classical limit in bounded regions**. 2016. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1603.03060>. Acesso em: 07 jun. 2022.
- 51 SANTOS, G. B. dos. **Evolução bohmiana das flutuações primordiais**. 2012. Tese (Doutorado) - Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro. 2012.
- 52 ALLORI, V. **Decoherence and the classical limit of quantum mechanics**. 2002. Thesis (Doctor) - University of Genova, Italy, 2002.
- 53 ALLORI, V. *et al.* Seven steps towards the classical world. **Journal of Optics B: quantum and semiclassical optics**, IOP Publishing, v. 4, n. 4, p. S482–S488, 2002. DOI: 10.1088/1464-4266/4/4/344.
- 54 ALLORI, V.; ZANGHÌ, N. On the classical limit of quantum mechanics. **Foundations of Physics**, Springer, v. 39, n. 1, p. 20–32, 2009. DOI: 10.1007/s10701-008-9259-4.
- 55 BALLENTINE, L. E.; YANG, Y.; ZIBIN, J. Inadequacy of Ehrenfest’s theorem to characterize the classical regime. **Physical Review A**, APS, v. 50, n. 4, p. 2854–2859, 1994. DOI: 10.1103/PhysRevA.50.2854.
- 56 BOLIVAR, A. O. The Wigner representation of classical mechanics, quantization and classical limit. **Physica A: statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 301, n. 1-4, p. 219–240, 2001. DOI: 10.1016/S0378-4371(01)00382-X.
- 57 BOLIVAR, A. O. Limite clássico da mecânica quântica. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, SciELO Brasil, v. 25, n. 2, p. 169–175, 2003. DOI: 10.1590/S0102-47442003000200006.

-
- 58 DÜRR, D.; RÖMER, S. On the classical limit of bohmian mechanics for Hagedorn wave packets. **Journal of Functional Analysis**, Elsevier, v. 259, n. 9, p. 2404–2423, 2010. DOI: 10.1016/j.jfa.2010.07.011.
- 59 GHIRARDI, G. C.; RIMINI, A.; WEBER, T. Unified dynamics for microscopic and macroscopic systems. **Physical Review D**, APS, v. 34, n. 2, p. 470–491, 1986. DOI: 10.1103/PhysRevD.34.470.
- 60 MARCHIOLLI, M. A. Mecânica quântica no espaço de fase: I. formulação de Weyl-Wigner. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, SciELO Brasil, v. 24, n. 4, p. 421–436, 2002. DOI: 10.1590/S0102-47442002000400009.
- 61 ATIQ, M.; KARAMIAN, M.; GOLSHANI, M. A quasi-newtonian approach to bohmian mechanics I: quantum potential. **Annales de la Fondation Louis de Broglie**, v. 34, n. 1, p. 67, 2009. DOI: 10.48550/arXiv.1311.6497.
- 62 ATIQ, M.; KARAMIAN, M.; GOLSHANI, M. A quasi-newtonian approach to bohmian mechanics II: inherent quantization. **Annales de Fondation Louis de Broglie**, v. 34, n. 2, p. 165–181. DOI: 10.48550/arXiv.1311.6498.
- 63 ATIQ, M.; KARAMIAN, M.; GOLSHANI, M. A new way for the extension of quantum theory: non-bohmian quantum potentials. **Foundations of Physics**, Springer, v. 39, n. 1, p. 33–44, 2009. DOI: 10.1007/s10701-008-9260-y.
- 64 GELFAND, I. M.; FOMIN, S. V. **Calculus of variations**. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 1963.
- 65 GRÖSSING, G. The vacuum fluctuation theorem: Exact Schrödinger equation via nonequilibrium thermodynamics. **Physics Letters A**, Elsevier, v. 372, n. 25, p. 4556–4563, 2008. DOI: 10.1016/j.physleta.2008.05.007.
- 66 GRÖSSING, G. On the thermodynamic origin of the quantum potential. **Physica A: statistical mechanics and its applications**, Elsevier, v. 388, n. 6, p. 811–823, 2009. DOI: 10.1016/j.physa.2008.11.033.
- 67 LIPOVKA, A. **Nature of the quantum potential**. 2016. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1603.01642>. Acesso em 08 jun. 2022.
- 68 CETTO, A.; DE LA PEÑA, L.; VALDÉS-HERNÁNDEZ, A. Quantization as an emergent phenomenon due to matter-zero-point field interaction. **Journal of Physics: conference series**, Vienna: IOP Publishing, v. 361, n. 1, p. 012013, 2012. DOI: 10.1088/1742-6596/361/1/012013.
- 69 CETTO, A.; DE LA PEÑA, L. Radiative corrections for the matter-zero-point field system: establishing contact with quantum electrodynamics. **Physica Scripta**, IOP Publishing, n. T151, p. 014009, 2012. DOI: 10.1088/0031-8949/2012/T151/014009.
- 70 HALL, M.; DECKERT, D. A.; WISEMAN, H. Quantum phenomena modeled by interactions between many classical worlds. **Physical Review X**, v. 4, p. 041013, 2014. DOI: 10.1103/PhysRevX.4.041013.
- 71 MANDELIS, A. **Diffusion-wave fields: mathematical methods and Green functions**. New York: Springer, 2001. DOI: 10.1007/978-1-4757-3548-2.

72 ASSIS, A. K. T. **Mecânica relacional**: e implementação do princípio de Mach com a força de Weber gravitacional. Montreal: C. Roy Keys, Inc., 2013.

73 RAHMANI, F.; GOLSHANI, M. Some clarifications on the relation between bohmian quantum potential and Mach's principle. **International Journal of Theoretical Physics**, Springer, v. 56, n. 10, p. 3096–3107, 2017. DOI: 10.1007/s10773-017-3476-6.

74 TU, L. W. **Differential geometry**: connections, curvature, and characteristic classes. New York: Springer, 2017. DOI: 10.1007/978-3-319-55084-8.

75 TAPP, K. **Differential geometry of curves and surfaces**. New York: Springer, 2016. DOI: 10.1007/978-3-319-39799-3.

76 KATANAEV, M. On geometric interpretation of the aharonov–bohm effect. **Russian Physics Journal**, v. 54, p. 507–514, 2011. DOI: 10.1007/s11182-011-9646-8.

APÊNDICES

APÊNDICE A – FIBRADOS

Neste apêndice, revisamos brevemente algumas noções de geometria diferencial (74, 75) pertinente à interpretação geométrico-matemática do Efeito Aharonov-Bohm. (76)

A.1 Um exemplo motivador: Fibrado tangente

Dada uma variedade diferenciável M de dimensão m , podemos munir o espaço

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$$

com uma estrutura de variedade diferenciável da seguinte maneira: Considere $\{U_i\}$ uma cobertura aberta de M e $x^\mu = \phi_i(p)$ o sistema de coordenadas em U_i . Então, um elemento de

$$TU_i = \bigcup_{p \in U_i} T_p M$$

é determinado por um ponto $p \in U_i$ e por um vetor $V = V^\mu(p)(\partial/\partial x^\mu)|_p \in T_p M$ e temos a identificação $TU_i \cong U_i \times \mathbb{R}^m$. Temos a projeção $\pi : TM \rightarrow M$ e suas restrições $\pi_i = \pi : TU_i \rightarrow U_i$ que "esquecem" a informação sobre o vetor. Naturalmente $\pi^{-1}(p) = T_p M$. O espaço TM é chamado de fibrado tangente, $T_p M$ a fibra em p e as identificações $TU_i \cong U_i \times \mathbb{R}^m$ são chamadas de trivializações locais.

Realizando a construção acima para $M = \mathbb{R}^m$, vemos que o próprio fibrado tangente pode ser expresso como um produto $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$. No entanto isso não é sempre verdade, e a não trivialidade do fibrado tangente mede, de certo modo, a não trivialidade da topologia de M .

Considere cartas locais U_i e U_j tais que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, e seja $y^\nu = \psi(p)$ as coordenadas em U_j . Seja $V \in T_p M$ tal que $p \in U_i \cap U_j$. Então V tem duas possíveis representações coordenadas:

$$V = V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Big|_p = \tilde{V}^\nu \frac{\partial}{\partial y^\nu} \Big|_p$$

Está claro que $\tilde{V}^\nu = \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu}(p)V^\mu$ e, como a mudança de coordenadas $x^\mu \rightarrow y^\nu$ é um difeomorfismo, a matriz $(G_\mu^\nu) = (\partial y^\nu / \partial x^\mu)$ é não singular. Ou seja, quando mudamos de coordenadas, o vetor V é rotacionado por um elemento $(G_\mu^\nu) \in GL(m, \mathbb{R})$, dizemos que $GL(m, \mathbb{R})$ é o grupo estrutural de TM . Assim as trivializações locais TU_i podem ser coladas de maneira bastante intrincada, que podem dar origem a uma complicada estrutura topológica.

Com essa terminologia, podemos pensar em campos vetoriais suaves como mapas suaves $X : M \rightarrow TM$ tais que $\pi \circ X = Id_M$.

A.2 Fibrados e G -fibrados com fibra F

Vamos agora generalizar a construção do fibrado tangente para fibrados mais gerais:

A.2.1 Definição. Dizemos que (E, M, π, F) é um fibrado com fibra F sobre M se

- $\pi : E \rightarrow M$ é uma submersão sobrejetora chamada de projeção.
- Existe $\{U_i\}$ cobertura aberta de M e difeomorfismos $\phi_i : U_i \times F \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$, chamados de trivializações locais, tal que $\pi(\phi_i(p, f)) = p$. Em particular, para cada $p \in M$ temos que a fibra $F_p = \pi^{-1}(p)$ é difeomorfa à F .

Diremos que o fibrado (E, M, π, F) é trivial se $E = M \times F$ (justificando a nomenclatura, trivializações locais).

Note que se escrevemos $\phi_{i,p}(f) = \phi_i(p, f)$, então $\phi_{i,p} : F \rightarrow F_p$ é um difeomorfismo e para $p \in U_i \cap U_j \neq \emptyset$ está definido o mapa $t_{ij}(p) = \phi_{i,p}^{-1} \circ \phi_{j,p} : F \rightarrow F$.

Os mapas $t_{ij}(p) \in Diff(F)$ são chamados de funções de transição e satisfazem

$$\begin{aligned} t_{ii}(p) &= Identidade & (p \in U_i) \\ t_{ij}(p) &= t_{ji}(p)^{-1} & (p \in U_i \cap U_j) \\ t_{ij}(p) \cdot t_{jk}(p) &= t_{ik}(p) & (p \in U_i \cap U_j \cap U_k) \end{aligned}$$

Note que é possível reconstruir o fibrado a partir do espaço base e das funções de transição, mais precisamente:

A.2.1 Teorema. Dados $M, \{U_i\}, t_{ij}(p)$ e F como acima, podemos reconstruir o fibrado $(\pi : E \rightarrow M, F)$, isto é encontrar únicos $E, \pi : E \rightarrow M$ e $\{\phi_i\}$ a partir das informações dadas.

Demonstração. Basta definir $X = \cup_i U_i \times F$ e quocientar pela relação de equivalência:

$$(p, f) \sim (q, f') \Leftrightarrow p = q \text{ e } f' = t_{ij}(p)f$$

Temos $E = X / \sim$, com projeção $\pi([p, f]) = p$ e $\phi_i(p, f) = [(p, f)]$

□

Observação. Atenção, estritamente falando, a definição de fibrado deveria independer da escolha da cobertura $\{U_i\}$. Na literatura matemática, isso é feito considerando fibrados coordenados $(E, M, \pi, F, \{U_i\}, \{\phi_i\})$, e definindo um fibrado como uma classe de equivalência de fibrados coordenados, sendo que $(E, M, \pi, F, \{U_i\}, \{\phi_i\})$ e $(E, M, \pi, F, \{V_j\}, \{\psi_j\})$ são equivalente se $(E, M, \pi, F, \{U_i\} \cup \{V_j\}, \{\phi_i\} \cup \{\psi_j\})$ é um fibrado coordenado. Na prática, porém, é comum utilizar uma cobertura fixada e não fazemos a distinção entre o fibrado coordenado e o fibrado que ele representa.

O grupo $Diff(F)$ é, em geral, um grupo bem grande, e é comum, no estudo de fibrados que o fibrado esteja acompanhado de informações adicionais sobre as simetrias relevantes da fibra:

A.2.2 Definição. Dizemos que um fibrado (E, M, π, F) é um G -fibrado, se G é um grupo de Lie agindo suavemente à esquerda em F ($G \subset Diff(F)$), e podemos escolher trivializações locais tais que $t_{ij}(p) \in G$ para todo i, j . Neste caso, dizemos que G é o grupo estrutural do fibrado.

Dado um fibrado (E, M, π, F) (denotado abreviadamente por $E \rightarrow M$), as possíveis funções de transição são claramente não únicas (dependem da escolha da trivialização local). Seja então $\{U_i\}$ uma cobertura e $\{\phi_i\}$ e $\{\tilde{\phi}_i\}$ trivializações que geram o mesmo fibrado, e sejam t_{ij} e \tilde{t}_{ij} suas respectivas funções de transição.

Definimos um mapa $g_i(p) : F \rightarrow F$ dado por

$$g_i(p) = \phi_{i,p}^{-1} \circ \tilde{\phi}_{i,p}$$

Como as trivializações geram o mesmo fibrado, temos

$$\tilde{t}_{ij} = g_i(p)^{-1} \circ t_{ij}(p) \circ g_j(p)$$

Além disso, se $E \rightarrow M$ é um G -fibrado, então $g_i(p) \in G$.

Na linguagem física, as transformações t_{ij} são as transformações de calibre (gauge) que permitem a colagem das trivializações locais enquanto g_i representa os graus de liberdade de calibre em uma determinada carta local U_i .

O objeto análogo aos campos vetoriais para fibrados em geral são chamados de seções do fibrado:

A.2.3 Definição. Uma seção (suave) do fibrado $E \rightarrow M$ é um mapa (suave) $s : M \rightarrow E$ tal que $\pi \circ s = Id_M$. Caso s esteja definida apenas em um aberto U , isto é, $s : U \subset M \rightarrow \pi^{-1}(U)$ (também satisfazendo $\pi \circ s = Id_U$), então dizemos que s é uma seção local do fibrado.

Uma classe importante de fibrados são os fibrados vetoriais, dentre os quais estão os fibrados tangentes.

A.2.4 Definição. Um fibrado (E, M, π, F) é dito um fibrado vetorial se F for um espaço vetorial de dimensão finita e o grupo estrutural é um subgrupo de $GL(F)$.

Muitas das construções usuais de espaços vetoriais podem ser transportadas para o contexto de fibrados vetoriais, por exemplo: Sejam (E_1, M, π_1, F_1) e (E_2, M, π_2, F_2) são fibrados vetoriais (note que o espaço base é o mesmo), então podemos construir o fibrado vetorial $(E_1 \oplus E_2, M, \pi, F_1 \oplus F_2)$ cujas fibras são precisamente $F_1 \oplus F_2$.

A.3 Mapas de fibrados

Sejam $\pi : E \rightarrow M$ e $\pi' : E' \rightarrow M'$ fibrados, então um mapa $\bar{f} : E \rightarrow E'$ é um mapa de fibrados se manda fibra para fibras. Em particular, \bar{f} induz um mapa suave entre as bases $f : M \rightarrow M'$ de modo que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\bar{f}} & E' \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi' \\ M & \xrightarrow{f} & M' \end{array}$$

Por vezes será conveniente descrever um mapa de fibrados como o par (\bar{f}, f) , ainda que o mapa f esteja inteiramente determinado pelo mapa \bar{f} .

Diremos então que dois fibrados $\pi : E \rightarrow M$ e $\pi' : E' \rightarrow M'$ são equivalentes ou isomorfos se $M = M'$ e existe mapa de fibrados $(\bar{f}, Id) : E \rightarrow E'$ tal que \bar{f} é difeomorfismo.

A.3.1 Definição. Sejam $V \rightarrow M$ e $E \rightarrow M$ fibrados vetoriais. Diremos que V é um subfibrado de E se existe imersão injetiva $i : V \rightarrow E$ tal que (i, Id_M) é mapa de fibrados.

Um subfibrado do fibrado tangente será chamado de Distribuição.

A.4 Fibrados principais

Considere um G -fibrado (E, M, π, F) . Por definição, sabemos que cada fibra $F_p = \pi^{-1}(p)$ é difeomorfa a F e sabemos que G age em F pela esquerda. Ou seja, G age em cada fibra. Note que, de modo geral, essa ação não é natural, pois é necessário identificar F_p com F e isso depende da escolha particular de trivialização local.

A.4.1 Definição. Dizemos que um fibrado (E, M, π, F) é um G -fibrado principal (e denotamos $G \rightarrow P \rightarrow M$) se

1. Existe uma ação livre à direita $P \times G \rightarrow P$
2. M é o espaço quociente P/G

3. Existir cobertura $\{U_i\}$ e trivializações locais $\phi_i : U_i \times G \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$ tais que $\phi_i^{-1}(u) = (\pi(u), \varphi_i(u))$ para algum mapa suave $\varphi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow G$ satisfazendo $\varphi_i(u \cdot g) = \varphi_i(u) \cdot g$.

Intuitivamente, pensamos em fibrados principais como fibrados onde a fibra é o próprio grupo estrutural, mas esquecemos qual é a identidade em cada fibra.

Observação. Segue da definição de G -fibrado principal tem fibra difeomorfa à G . Além disso a ação de G preserva as fibras e age livre e transitivamente nelas. Segue ainda da definição as funções de transição $t_{ij}(p) : G \rightarrow G$ é dada pela multiplicação à esquerda por um elemento de G , isto é, o grupo estrutural do fibrado é G e a ação das funções de transição comuta com a ação à direita de G .

Dada uma seção local $s_i : U_i \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$, então podemos definir uma trivialização canônica $\phi_i : U_i \times G \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$ da seguinte maneira: Dado $u \in \pi^{-1}(x)$, $x \in U_i$, existe único elemento $g_u \in G$ tal que $u = s_i(x) \cdot g_u$. Assim, definimos $\phi_i : U_i \times G \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$ por $\phi_i^{-1}(u) = (x, g_u)$. Com essa trivialização, temos $s_i(x) = \phi_i(x, e)$, onde e denota o elemento identidade de G . Segue então

A.4.1 Teorema. *Um fibrado principal é trivial se, e somente se, admite uma seção global.*

Sejam $x \in U_i \cap U_j$ e $s : U_i \cap U_j \rightarrow P$ uma seção local, então as representações s_i e s_j de s nas trivializações canônicas acima estão relacionada por:

$$\begin{aligned} s_i(x) &= \phi_i(x, e) = \phi_j(x, t_{ji}(x)e) = \phi_j(x, t_{ji}(x)) \\ &= \phi_j(x, e)t_{ji}(x) = s_j(x)t_{ij}(x) \end{aligned}$$

A.4.2 Definição. Sejam N uma variedade e $G \rightarrow P \rightarrow M$ um fibrado principal e suponha que G age em N à esquerda. O G -fibrado associado à essa ação é (E, M, π, N) , onde $E = P \times_G N$ é $P \times N$ quocientado pela ação diagonal de G .

Exemplos importantes de fibrados associados são dados quando N é um espaço vetorial e G age por transformações lineares. Neste caso, dizemos que é um fibrado vetorial associado.

A.5 Conexões em Fibrados Principais

Nesta sessão vamos considerar $G \rightarrow P \rightarrow M$ um fibrado principal. Vamos ainda denotar por \mathfrak{g} a álgebra de Lie do grupo G .

A.5.1 Definição. Sejam $u \in P$, $x = \pi(u)$. Definimos o espaço vertical (denotado por \mathcal{V}_u) de $G \rightarrow P \rightarrow M$ em u como o núcleo da aplicação $(d\pi)_u : T_u P \rightarrow T_{\pi(u)}$. Os elementos de

\mathcal{V}_u serão chamados de vetores tangentes verticais. A distribuição $\mathcal{V} \subset TM$ gerada pelos vetores verticais é chamada de distribuição vertical e as seções

$$P \rightarrow \mathcal{V} = \bigcup_{u \in P} \mathcal{V}_u \hookrightarrow TP$$

são chamadas de campos vetoriais verticais.

Observação. Note que o fibrado vertical $\mathcal{V} \subset TP$ é formado pelos vetores tangentes às fibras.

Seja $u \in P$ e seja $A \in \mathfrak{g}$. Então $\gamma^A(t) = u \cdot \exp(At)$ é uma curva em P passando por u . Além disso, como $\pi(u) = \pi(u \cdot G) := x$, esta curva está contida na fibra $G_x = \pi^{-1}(x)$. Definimos então o vetor $A^\#(u) \in T_u P$ por

$$A^\#(u)(f) = \left. \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \right|_{t=0} \quad \forall f \in C^\infty(P, \mathbb{R})$$

O campo vetorial $u \mapsto A^\#(u)$ é chamado de campo vetorial fundamental (ou campo de Killing) gerado por $A \in \mathfrak{g}$.

Observação. Para ilustrar esse conceito, imaginemos um fibrado principal, cujas fibras sejam toros ($\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$). Neste caso a álgebra de Lie é precisamente o espaço \mathbb{R}^2 . Fixado um elemento da álgebra, isto é um vetor em \mathbb{R}^2 , esse elemento define uma certa translação em cada toro (na direção desse vetor). Assim, definimos um campo vetorial em cada toro (e portanto no fibrado) tangente à essas translações.

A.5.1 Lema. *Os campos vetoriais fundamentais são verticais.*

A.5.2 Proposição. *O mapa $j_u : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{V}_u$, $A \mapsto A^\#(u) \in \mathcal{V}_u \subset T_u P$ é um isomorfismo para todo $u \in P$. Em particular o mapa*

$$P \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{V}, \quad (u, A) \mapsto A^\#(u)$$

é um isomorfismo de fibrados vetoriais.

A.5.2 Definição. Uma distribuição horizontal para $G \rightarrow P \rightarrow M$ é uma distribuição $\mathcal{H} \subset TP$ tal que TP é isomorfo à $\mathcal{H} \oplus \mathcal{V}$. Dizemos que uma distribuição horizontal \mathcal{H} é uma conexão do fibrado principal se

- \mathcal{H} é suave, isto é: se $Y : P \rightarrow TP$ é um campo suave e $Y = Y^v + Y^h$ com $Y^v(u) \in \mathcal{V}_u$ e $Y^h(u) \in \mathcal{H}_u$ então Y^v e Y^h são campos vetoriais suaves.
- \mathcal{H} é G invariante, isto é, $\mathcal{H}_{u \cdot g} = (R_g)_* \mathcal{H}_u$ onde R_g denota a ação à direita do elemento g .

Observação. Para entender o papel da conexão, considere por exemplo, $M \subset \mathbb{R}^2$ uma região no plano e $E := M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ um fibrado trivial. Note que podemos visualizar E como uma região em \mathbb{R}^3 e a projeção como "esquecer a coordenada z ". Considere um caminho suave na base do fibrado $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$. Um caminho no espaço total do fibrado $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow E$ que é projetado para γ é chamado de levantamento de γ . Existem inúmeros levantamentos possíveis, mesmo que seja fixado o ponto inicial do levantamento. Mas se exigimos que esse levantamento seja paralelo ao plano xy , então só existe um levantamento possível. Essa noção de paralelo ao plano xy , corresponde justamente à uma escolha de espaço Horizontal.

Seja \mathcal{H} uma conexão, $\rho : T_u P = \mathcal{V}_u \oplus \mathcal{H}_u \rightarrow \mathcal{V}_u$ a projeção na componente vertical e seja ω_u a composta dada por

$$T_u P \xrightarrow{\rho} \mathcal{V}_u \xrightarrow{J\tilde{u}^{-1}} \mathfrak{g}$$

ω_u

O mapa ω é chamado de 1-forma de conexão, e pode ser entendido como uma 1-forma com valores em \mathfrak{g} .

A.5.3 Teorema. *A 1-forma ω satisfaz:*

- Para todo $A \in \mathfrak{g}$ e $u \in P$ temos $\omega_u(A^\#(u)) = A$
- Para todo $g \in G$, temos $(R_g)^*\omega = (Adg^{-1})\omega$, onde $R_g : G \rightarrow G$ denota a multiplicação à direita por g . Isto é: para todo $g \in G$, $u \in P$ e $Y = Y_u \in T_u P$ temos

$$(R_g^*)(\omega_{u \cdot g}(Y)) = \omega_{u \cdot g}(d(R_g)Y) = g^{-1}(\omega_u(Y))g$$

- Para todo campo vetorial suave $Y : P \rightarrow TP$, o mapa $u \mapsto \omega_u(Y_u)$ é suave.

Alem disso, se ω é uma 1-forma com valores em \mathfrak{g} satisfazendo as propriedades acima, então $\mathcal{H}_u = \{Y \in T_u P ; \omega_u(Y) = 0\}$ define uma conexão para $G \rightarrow P \rightarrow M$ e essa correspondência é biunívoca.

A.6 Conexão local e potencial de calibre

Sejam $\sigma : U \rightarrow P$ uma seção local e ω uma 1-forma de conexão, podemos definir 1-formas em U com valores em \mathfrak{g} por

$$\mathcal{A} = \sigma^*\omega$$

e, reciprocamente, é possível mostrar que se \mathcal{A} é uma 1-forma em U com valores em \mathfrak{g} , então existe uma 1-forma de conexão ω tal que $\mathcal{A} = \sigma^*\omega$. Assim, se $\{U_i\}$ é uma cobertura

de M e $\sigma_i : U_i \rightarrow P$ são seções locais, então dada uma 1-forma de conexão ω , existem 1-formas $\mathcal{A}_i = \sigma_i^* \omega$ em U_i com valores em \mathfrak{g} e, reciprocamente, dadas 1-formas \mathcal{A}_i em U_i com valores em \mathfrak{g} , existem 1-formas de conexão ω_i tais que $\mathcal{A}_i = \sigma_i^* \omega_i$. O teorema abaixo nos diz sob quais condições, as 1-formas ω_i podem ser coladas para se obter uma única 1-forma ω .

A.6.1 Teorema. *Dada uma cobertura aberta $\{U_i\}$ de M e seções $\sigma_i : U_i \rightarrow P$. Sejam $t_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$ as funções de transição do fibrado principal $G \rightarrow P \rightarrow M$ e \mathcal{A}_i 1-formas em U_i com valores em \mathfrak{g} . Então, existe 1-forma de conexão ω tal que $\mathcal{A}_i = \sigma_i^* \omega$ se, e somente se, para todo $p \in U_i \cap U_j$ e $X_p \in T_p M$ temos*

$$(\mathcal{A}_j)_p(X_p) = t_{ij}(p)^{-1}(\mathcal{A}_i)_p(X_p)t_{ij}(p) + t_{ij}(p)^{-1}(dt_{ij})_p(X_p)$$

Compactamente, escrevemos

$$\mathcal{A}_j = t_{ij}^{-1} \mathcal{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1} dt_{ij}$$

Do ponto de vista físico, em teorias de calibre, \mathcal{A}_i são chamados os potenciais de calibre (potencial de Yang-Mills). Como vimos, raramente o potencial de calibre vai existir de maneira global, pois isso só ocorre quando existe uma seção global e portanto o fibrado é trivial.

A.7 Holonomia

Seja $G \rightarrow P \rightarrow M$ um fibrado principal e \mathcal{H} uma conexão. Seja também $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ uma curva suave. Então uma curva $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow P$ é dita um levantamento horizontal se $\gamma = \pi \circ \tilde{\gamma}$ e $\tilde{\gamma}'$ é sempre um vetor horizontal.

A.7.1 Proposição. *Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ uma curva suave e fixemos $u \in \pi^{-1}(\gamma(0))$. Então existe único levantamento horizontal $\tilde{\gamma}$ tal que $\tilde{\gamma}(0) = u$*

Corolário. *Sejam $\tilde{\gamma}_1$ e $\tilde{\gamma}_2$ levantamentos horizontais de γ , então existe $g \in G$ tal que $\tilde{\gamma}_1 = \tilde{\gamma}_2 \cdot g$.*

A.7.1 Definição. *Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ uma curva suave e $u_0 \in \pi^{-1}(\gamma(0))$. Seja $\tilde{\gamma}$ o único levantamento horizontal tal que $\tilde{\gamma}(0) = u_0$. Então o $u_1 = \tilde{\gamma}(1)$ é dito o transporte paralelo de u_0 ao longo de γ .*

O transporte paralelo define então, para cada curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ um mapa $\pi^{-1}(\gamma(0)) \rightarrow \pi^{-1}(\gamma(1))$. Este mapa é chamado de Mapa de Holonomia ao longo de γ .