

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E INFORMÁTICA

PERCOLAÇÃO POR INVASÃO MÚLTIPLA
Reginaldo Aparecido Zara

*Dissertação apresentada ao Instituto de Física
de São Carlos, Universidade de São Paulo,
para obtenção do Título de Mestre em Ciências
(Física Básica)*

ORIENTADOR: *Prof. Dr. Roberto Nicolau Onody*

OK

USP / IFSC / SBI
[REDACTED]
8-2-66579

SÃO CARLOS

1996

IFSC-USP SERVIÇO DE BIBLIOTECA E
INFORMAÇÃO

└

Zara, Reginaldo Aparecido
Percolação por Invasão Múltipla/Reginaldo Aparecido
Zara. - - São Carlos, 1996
78 p.

Dissertação (Mestrado) - - Instituto de Física de São Carlos, 1995.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Nicolau Onody

1. Mecânica Estatística. 2. Estruturas fractais.
I. Título.



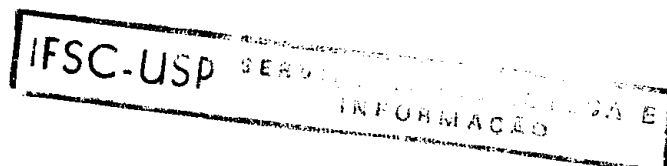
MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE
REGINALDO APARECIDO ZARA APRESENTADA AO INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO
CARLOS, DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, EM 19 DE ABRIL DE 1996.

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Roberto Nicolau Onody

Prof. Dr. Valter Luiz Líbero

Prof. Dr. Carlos Seihiti Orii Yokoi



Abstract

We generalize the standard site invasion percolation model to permit simultaneous invasion of several sites. We propose two kinds of generalizations: one in which the invasion flux is controlled by the perimeter size and another where the scaling properties command the growth process. The acceptance profile as well as the fractal dimension D_F are carefully studied. In the model based on scaling relations, D_F can be treated as a mere real parameter in the range $(0, \infty)$. In the intervals $(0, \frac{91}{48})$ and $(2, \infty)$ the system is frustrated. For $D_F > 2$ the model exhibits also an interesting *burst* phenomenon that is explained in the text. In the region $[\frac{91}{48}, 2]$, the clusters obey *exactly* and in *any* scale the relation $M \sim Rg^{D_F}$ between the mass M and gyration radius Rg . These stable random fractals may be very useful in the study of dilute systems.

IFSC-USP

Resumo

Generalizamos o modelo de percolação por invasão de maneira que vários sítios possam ser simultaneamente invadidos. Propomos dois tipos de generalização: na primeira, o fluxo de fluido invasor é controlado através do perímetro do aglomerado enquanto que na segunda modificação, o crescimento é governado pela relação de escala entre a massa e o raio de giração dos aglomerados. Estudamos cuidadosamente tanto o perfil de aceitação quanto as dimensões fractais (D_F) dos aglomerados assim crescidos. No modelo baseado nas relações de escala, D_F pode ser tratado como um mero parâmetro real que pode assumir qualquer valor no intervalo $(0, \infty)$. Nos intervalos $(0, \frac{91}{48})$ e $(2, \infty)$, o sistema é frustrado. Para $D_F > 2$, o modelo exhibe um fenômeno interessante: em algumas etapas ocorrem explosões no crescimento da massa dos aglomerados (*bursts*). Na região $[\frac{91}{48}, 2]$, os aglomerados obedecem exatamente e em qualquer escala a relação $M \sim Rg^{D_F}$ entre a massa M e o raio de giração Rg . Acreditamos que estes fractais cuja estrutura completamente é estabilizada possam ser muito úteis no tratamento de problemas de diluição da Mecânica Estatística.

ESTE TRABALHO FOI FINANCIADO PELA COORDENADORIA DE
APERFEIÇOAMENTO DE PESSOAL DE NÍVEL SUPERIOR (CAPES).

Aos meus pais, Gerson e Lucília, que entendem coisas
mais importantes do que percolação...

Agradecimentos

Escrevê-los é sempre uma tarefa ingrata...

Ao Prof. Dr. Roberto Nicolau Onody, pela orientação e constante incentivo à pesquisa,

A todos os colegas da pós-graduação, em especial à Cristina, Dione, Sílvia, João Vítor, Manzoli, Márcio e Salviano.

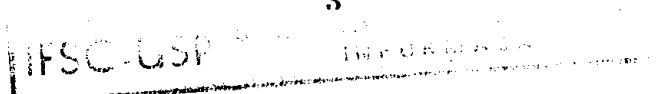
Índice

1	Introdução	7
2	Percolação: Conceitos Fundamentais	12
2.1	O que é Percolação ?	12
2.2	As Principais Quantidades Definidas em Percolação	15
2.2.1	Probabilidade de percolação	15
2.2.2	Tamanho médio dos aglomerados	15
2.2.3	Raio de giração	17
2.3	Hipótese de Escala	18
2.4	Dimensão Fractal	19
2.5	Universalidade	21
2.6	Percolação por Invasão	22
3	Percolação por Invasão Múltipla	32
3.1	Introdução	32
3.2	Invasão controlada pelo perímetro total	34
3.2.1	Apresentação do algoritmo	34
3.2.2	Resultados	35
3.3	Invasão controlada pelo perímetro do retângulo que contém o aglomerado	38
3.3.1	Apresentação do algoritmo	38
3.3.2	Resultados	39
	O perfil de aceitação	39
	O número de coordenação médio	41

Massa e raio de giração	43
Dimensão fractal	48
4 Modelo Otimizado de Percolação por Invasão	51
4.1 Introdução	51
4.2 Construção do algoritmo	52
4.3 Resultados	54
4.3.1 Região I: $0 \leq D_F \leq 1.89$	55
4.3.2 Região II: $1.89 \leq D_F \leq 2$	56
4.3.3 Região III: $D_F \geq 2$	58
5 Conclusões e perspectivas	73

Lista de Figuras

2.1	Comportamento qualitativo da probabilidade de percolação. $P(p) = 0$ para $p \leq p_c$ e $P(p) \neq 0$ para $p > p_c$	16
2.2	Esquema do processo de invasão: uma semente é colocada no centro da rede (preto); seus primeiros vizinhos são sítios de crescimento (vermelho). À medida em que o aglomerado cresce a vizinhança deve ser atualizada.	24
2.3	Perfil de aceitação para percolação por invasão sem aprisionamento para redes quadradas de tamanho $L = 101$ e $L = 1801$	28
2.4	Aglomerado típico da percolação por invasão para uma rede quadrada de tamanho $L = 901$. O aglomerado contém 46726 sítios. A moldura representa os limites da rede. Observe que o aglomerado toca a borda superior.	29
3.1	Densidade e número de coordenação médio para aglomerados construídos por invasão múltipla proporcional ao seu perímetro.	36
3.2	Aglomerado típico da invasão múltipla proporcional ao perímetro total. Sua massa é de 342221 sítios. A forma losangular é típica para $F > 0$	37
3.3	Perfil de aceitação para diferentes tamanhos de rede. F é fixo em 0.30.	40
3.4	Comportamento do valor crítico para percolação por invasão múltipla para diferentes valores de F	41
3.5	Comportamento do número de coordenação médio para diferentes valores de F	42
3.6	Fração dos tipos de vértices para diversos valores de F . $\% \equiv \frac{N_k}{\sum_k N_k}$	43



3.7	O raio de giração para diferentes valores de F . Rg atinge um máximo em $F \sim 0.35$	44
3.8	Aglomerado típico quando $F \sim 0.35$. A forma circular é mantida desde o início do crescimento. Este aglomerado possui 293606 sítios.	45
3.9	Massa do aglomerado e do perímetro total com função de F	46
3.10	Diagrama do crescimento compacto de um aglomerado.	48
3.11	Dimensões fractais calculadas a partir da massa e raio de giração dos aglomerados para diferentes valores de F	49
4.1	Diferença média entre as massas esperada e real de um aglomerado para $D_F = 0.25, 1.92$ e 5	55
4.2	Número de sítios invadidos em cada etapa de crescimento para $D_F = 0.25, 1.00, 1.70$ e 1.89	57
4.3	Comparação entre o crescimento de um aglomerado pela invasão ordinária (linha sinuosa) e pelo modelo otimizado com $D_F = 1.89$. A inclinação da reta (*) é 1.89	59
4.4	Fração do perímetro do aglomerado invadida em cada etapa de crescimento para diferentes valores de D_F . Note que esta quantidade tende assintoticamente a zero somente para $D_F < 2$. ($\% \equiv \frac{NSI(t)}{M_p(t)}$)	60
4.5	Crescimento explosivo do aglomerado para $L=201$ e $D_F = 5$. (a): Etapa anterior à explosão.(b): Etapa onde ocorre a explosão Nela,737 sítios são acrescentados ao aglomerado.	62
4.6	Comportamento da massa durante o crescimento do aglomerado. As descontinuidades representam as explosões no crescimento.	63
4.7	Raio de giração como função da massa dos sítios perimetrais. Nas explosões, o número de sítios do perímetro do aglomerado diminui.	64
4.8	Massa esperada e massa real na etapa da explosão. As curvas têm uma aproximação máxima em $k = 478$	65
4.9	Massa esperada e massa real de um aglomerado em uma etapa imediatamente posterior à explosão.	66

4.10	Raio de giração como função do número de sítios da lista de crescimento para uma etapa determinada. Neste caso $D_F = 1.92$	67
4.11	Evolução no número r_c para diversos valores de D_F em uma rede de tamanho $L = 201$	68
4.12	Perfil de aceitação para as duas regiões frustradas. O degrau menor em $D_F = 10$ reflete a existência das explosões.	69
4.13	Comportamento dos vértices em uma rede de tamanho $L = 201$ para diferentes valores do parâmetro D_F	70
4.14	Número de coodenação de em aglomerado para rede quadrada de tamanho $L = 201$ e $0 \leq D_F \leq 10$	71

Lista de Tabelas

2.1	Probabilidades críticas de ocupação para vários tipos de rede tanto na percolação por sítio quanto por ligação. Para a rede de Bethe, z é o número de ligações que emanam de um sítio. (*Resultados exatos.) . . .	14
2.2	Expoentes críticos e dimensões fractais para redes em $d = 2$, $d = 3$ e rede de <i>Bethe</i> . (*Resultados exatos)	21
2.3	Número de coordenação médio e classificação dos sítios do aglomerado de acordo com o número de vizinhos ocupados para rede quadrada. . . .	26
2.4	Probabilidade crítica e dimensão fractal para aglomerados construídos por percolação por invasão de sítios.	27
3.1	Tempo de CPU para invasão controlada pelo perímetro total do aglomerado. O número de ensaios realizados é suficiente para que o desvio estatístico seja de 1%. O tamanho da rede é $L = 801$	38
3.2	Tempo de CPU para invasão controlada pelo perímetro do retângulo que contém o aglomerado. O número de ensaios realizados é suficiente para que o desvio estatístico seja de 1%. O tamanho da rede é $L = 801$. . .	50
4.1	Tempo de CPU para crescimento de um aglomerado através do modelo otimizado rede quadrada de lado $L = 201$	72

Capítulo 1

Introdução

Desde sua proposição por Broadbent e Hammersley [1] e Domb [2], os modelos de percolação têm sido extensivamente estudados tanto na sua versão por ligações [1] quanto na versão por sítios [2]. Estes modelos utilizam argumentos probabilísticos clássicos e não possuem hamiltoniana de interação. Trabalham com aglomerados de partículas ou estados. Representam, hoje, um excelente laboratório para o estudo de fenômenos críticos e de transições de fase tanto pela sua simplicidade conceitual quanto pela facilidade de simulação nos computadores atuais. Podemos citar inúmeras aplicações, tais como: estudo de fenômenos de transporte em solos, condutividade elétrica, epidemias, evolução temporal das galáxias, etc.

No estudo dos modelos de percolação, diferentes técnicas têm sido adotadas: expansões em série [3], matriz de transferência [4], método de Monte Carlo [5, 6] e grupo de renormalização [5]. Nestes sistemas, os sítios ou ligações de uma rede são ocupados com uma probabilidade p , formando aglomerados. Quando um aglomerado forma um caminho que conecta os lados opostos desta rede, diz-se que o sistema percolou. Se o valor da probabilidade de ocupação for mudado continuamente, o sistema exibirá uma mudança qualitativa de comportamento com a formação, no limite termodinâmico, de um aglomerado infinito. O valor em que isto ocorre é muito bem definido e é denomi-

nada probabilidade de ocupação crítica p_c . Assim, a percolação é uma transição de fase geométrica. Numa analogia aos sistemas de spins, a probabilidade de percolação seria a magnetização e o tamanho médio dos aglomerados corresponderia à suscetibilidade.

Embora não exista nenhuma prova rigorosa, tem-se como certo que as versões de percolação por sítio e por ligação pertencem à mesma classe de universalidade, isto é, os expoentes críticos dependem basicamente da dimensão e da simetria do sistema não sendo relevantes os tipos de redes sobre os quais o modelo foi definido.

Nos anos que se seguiram, foram propostos novos modelos de percolação, o que ampliou sobremaneira a sua utilização como importante ferramenta teórica. A percolação no seu formato original passou a ser conhecida como percolação ordinária.

A percolação direcionada é uma variante anisotrópica da percolação ordinária. Nela, atribuímos uma direção às ligações entre os sítios, formando assim, uma rede orientada. Certamente existem muitas maneiras de direcionar esta rede, mas, fundamentalmente, estes modelos podem ser classificados em duas grandes categorias: os com direcionamento *cíclico* ou *acíclico*. Os modelos cíclicos, contrariamente ao que acontece com os acíclicos, estão na mesma classe de universalidade da percolação ordinária. [7, 8]. Estes modelos possuem várias aplicações entre as quais, por exemplo, o estudo da evolução de galáxias [9], epidemias [10], propagação de fissuras [11], redes tridimensionais de resistores-diodos[12] e transições de colapso em polímeros ramificados [13].

Uma outra forma de percolação é a chamada percolação *"bootstrap"*. Nela, o modelo original é acrescido de uma regra de seleção: só sobrevivem os sítios ocupados com um certo número fixo de vizinhos. A percolação *"bootstrap"* modela sistemas em que átomos magnéticos são coagidos pela vizinhança a não se manifestarem magneticamente. Em geral, pertence a uma classe de universalidade diferente da percolação ordinária [14, 15].

Um outro descendente da percolação ordinária é a percolação por invasão. Este modelo foi introduzido por Wilkinson e Willemsen em 1983 [16] para estudar o deslocamento de dois fluidos imiscíveis em um meio poroso. Trata-se de um processo dinâmico onde o crescimento do aglomerado se faz através da seleção de caminhos de

menor resistência ao deslocamento da interface entre os fluidos através do meio.

Usualmente, um fluido de baixa viscosidade (que chamamos de invasor) é injetado em um meio poroso ocupado anteriormente por um fluido de alta viscosidade (defensor). Dependendo da taxa de injeção, o sistema pode ser encontrado em dois regimes distintos nos quais as forças dominantes são de natureza viscosa ou capilar. A descrição teórica destes regimes se baseia em dois modelos: O *DLA (Diffusion-Limited Aggregation)* [17] que descreve o deslocamento rápido quando as forças viscosas são dominantes e a percolação por invasão, que se aplica quando o fluido escoia lentamente, com domínio das forças capilares. Originalmente, a percolação por invasão baseia-se na verificação experimental de que a água, ao expulsar o óleo das rochas, o faz primeiramente através dos poros de menor diâmetro. Associando-se o tamanho dos poros a números aleatórios distribuídos em uma rede, temos a dinâmica da invasão: ocupamos, um a um, os sítios (poros) com o menor número aleatório (tamanho) associado.

À medida em que o fluido invasor avança, é possível que regiões de fluido defensor sejam totalmente circundadas formando aglomerados desconectados das bordas do sistema. Quando este fluido é incompressível, estas áreas *aprisionadas* não podem ser invadidas e temos o assim chamado modelo de percolação por invasão com aprisionamento. Ele pertence a uma classe de universalidade diferente da percolação ordinária. Por outro lado, na situação em que o fluido defensor é compressível, temos o modelo de percolação por invasão sem aprisionamento, que se encontra na mesma classe de universalidade que a percolação ordinária.

Recentemente, muitas modificações do modelo de percolação por invasão (que passaremos a chamar de percolação por invasão ordinária) têm sido propostas. Estas modificações consideram, por exemplo, a ação de campos gravitacionais [18, 19, 20], o fluxo em alguma direção privilegiada [21] e fenômenos de *fingering* em solos [22].

No processo de percolação por invasão, os sítios são invadidos *um a um*. Entretanto, não é razoável pensar que na natureza isto realmente ocorra. Uma hipótese mais plausível é que vários sítios sejam invadidos simultaneamente. Isto torna o modelo mais realístico e mais próximo dos experimentos. Deste modo, propomos possíveis formas de invasão múltipla [23], lançando mão de alguns ingredientes físicos tais como

o fluxo do fluido através da interface e as relações de escala entre a massa (número de sítios) e o raio de giração dos aglomerados.

Em nossa primeira proposta, a invasão é controlada pelo tamanho da interface, isto é, pelo perímetro total (externo + interno) do aglomerado. Introduzimos um parâmetro F que corresponde à fração do perímetro a ser invadida em cada etapa do crescimento. Este modelo de invasão produz aglomerados cuja dimensão fractal [24, 25] coincide com a dimensão do espaço euclideo, ou seja, os objetos formados são compactos para qualquer valor de F , exceto $F = 0$, onde o algoritmo obriga que o crescimento ocorra como na invasão ordinária.

O segundo modelo é bastante parecido com o primeiro. O número de sítios a serem invadidos em cada etapa de crescimento é controlado pelo perímetro do retângulo no qual o aglomerado está inscrito. São invadidos um número de sítios que corresponde a uma fração F do perímetro deste retângulo. Para $0 \leq F \leq 0.5$, os aglomerados possuem dimensão fractal que varia continuamente na região $[\frac{91}{48}, 2]$. Quando $F \geq 0.5$, os aglomerados são objetos compactos.

Usando a relação de escala $M \sim (Rg)^{D_F}$ onde M é a massa e Rg o raio de giração e um aglomerado, propomos um terceiro modelo de invasão múltipla no qual a dimensão fractal do aglomerado permanece fixa durante todo o processo de crescimento. Aqui, D_F é um parâmetro real, escolhido no intervalo $(0, \infty)$. Na região $[\frac{91}{48}, 2]$, D_F coincide com a própria dimensão fractal do aglomerado. Porém, fora deste intervalo, o modelo é frustrado uma vez que as relações de escala (impostas pelo algoritmo) são impossíveis de serem obedecidas. Para $D_F > 2$, um fenômeno interessante acontece. O modelo apresenta um crescimento explosivo (*bursts*). Nestas explosões uma grande quantidade de massa é repentinamente acrescentada ao aglomerado depois de um longo período onde o crescimento ocorreu praticamente como na invasão ordinária.

Como as dimensões fractais podem ser finamente sintonizadas e mantêm-se fixas durante todo o processo de percolação, os aglomerados assim crescidos podem ser muito úteis no tratamento de problemas de diluição em Mecânica Estatística. Modelos definidos sobre fractais envolvem, em geral, duas médias: uma média térmica para a obtenção das funções termodinâmicas e uma outra média geométrica que é feita

sobre os próprios fractais. O nosso modelo propõe uma diminuição drástica (e quem sabe até a eliminação) da última média, uma vez que nossos aglomerados tem sua estrutura fractal completamente estabilizada e independente do tamanho do sistema utilizado. Em trabalhos futuros, pretendemos aproveitar estas boas características dos aglomerados para estudar sistemas de spins, caminhos aleatórios, caminhos auto-exclusivos, autômatas celulares, etc, definidos sobre eles.

Esta dissertação está dividida da seguinte forma:

No capítulo 2 expomos os fundamentos teóricos da teoria da percolação ordinária e da percolação por invasão ordinária.

No capítulo 3 apresentamos nossos modelos de invasão múltipla controlada pelo fluxo através da interface, discutindo várias características dos aglomerados quanto à dimensão fractal, densidade, número médio de coordenação, etc.

O capítulo 4 é dedicado à análise do modelo de percolação que obedece relação de escala entre a massa e o raio de giração. Apresentamos um estudo detalhado da dinâmica do crescimento e da estrutura dos aglomerados. Prestamos particular atenção à frustração deste modelo, o qual batizamos de modelo otimizado de percolação por invasão múltipla.

No capítulo 5 apresentamos nossas conclusões e perspectivas para futuras aplicações deste nosso trabalho.

Capítulo 2

Percolação: Conceitos

Fundamentais

2.1 O que é Percolação ?

Considere uma rede finita formada por sítios que podem assumir dois estados: vazio ou ocupado. Cada sítio pode estar ocupado aleatoriamente com probabilidade p ou vazio com probabilidade $(1 - p)$ independentemente do estado de seus vizinhos. Ao conjunto de sítios primeiros vizinhos ocupados chamamos de aglomerado. A teoria da percolação trabalha basicamente com o número e as propriedades destes aglomerados.

Se a probabilidade de ocupação p for mudada continuamente no intervalo $[0, 1]$, o sistema apresenta uma mudança qualitativa de comportamento, passando de um estado onde todos os aglomerados são finitos para outro, onde existe um aglomerado que conecta os lados opostos da rede. Quando isso acontece dizemos que o sistema percolou. O fato mais notável dos modelos de percolação é a existência desta concentração ou probabilidade de ocupação abaixo da qual a fração de sítios ocupados está confinada a uma região finita da rede.

Uma rede infinita apresenta um ponto crítico bem definido em uma concen-

tração $p = p_c$. Esta concentração, no limite termodinâmico, é conhecida como limiar de percolação ou probabilidade de ocupação crítica p_c . Os aspectos mais interessantes dos modelos de percolação estão nas vizinhanças desta probabilidade crítica, que corresponde ao surgimento de um aglomerado infinito. Isto indica a existência de uma transição de fase geométrica: acima de p_c existe um aglomerado infinito e abaixo de p_c todos os aglomerados são finitos. Em analogia às transições de fase de segunda ordem em sistemas de spins, a probabilidade de percolação seria a magnetização e o tamanho médio dos aglomerados corresponderia à suscetibilidade.

Além da percolação **por sítios** (*site percolation*) [2] descrita acima, existe também a **percolação por ligações** (*bond percolation*) [1]. Nela, cada ligação da rede pode ser ocupada com probabilidade p , ou permanecer vazia com probabilidade $(1 - p)$. Neste caso, um aglomerado é um conjunto de sítios conectados por ligações ocupadas.

Apesar da simplicidade da definição, um problema de percolação é muito difícil de ser resolvido analiticamente. Resultados exatos são disponíveis apenas para alguns casos particulares. Dessa maneira, temos que lançar mão de métodos aproximados e de simulações computacionais.

Como estaremos sempre envolvidos em simulações, apresentamos os passos essenciais para o cálculo do aglomerado de percolação [26].

Atribuímos a cada elemento de uma matriz (que representa a rede) um número aleatório r , distribuído uniformemente no intervalo $[0, 1]$.

Visitamos cada sítio da rede percorrendo linhas e colunas da matriz, ocupando aqueles que tem número aleatório associado menor que uma probabilidade p fixa. Desta forma, vários aglomerados se formam na rede. Finalmente, checamos se algum destes aglomerados conecta as extremidades opostas da rede [27].

Nestas simulações surgem muitas dificuldades [6], entre as quais destacamos as seguintes: intuitivamente, esperamos que seja mais fácil construir aglomerados que percolam a rede em sistemas pequenos. Durante as simulações isto realmente ocorre. O limiar de percolação p_L (onde L é o tamanho do sistema) se desloca para valores menores que p_c . Este é um problema muito importante pois uma rede infinita não pode ser simulada. Necessitamos, então, de uma cuidadosa extrapolação para o limite

<i>Rede</i>	$p_c(\text{sítios})$	$p_c(\text{ligação})$
<i>Hexagonal</i>	0.6922	$1 - 2 \sin \frac{\pi}{18}^*$
<i>Quadrada</i>	0.59275	$2 \sin \frac{\pi}{18}^*$
<i>Triangular</i>	$\frac{1}{2}^*$	$\frac{1}{2}^*$
<i>Diamante</i>	0.428	0.388
<i>Cúbica Simples</i>	0.3117	0.2492
<i>BCC</i>	0.245	0.1785
<i>FCC</i>	0.198	0.119
<i>Bethe</i>	$\frac{1}{z-1}^*$	$\frac{1}{z-1}^*$

Tabela 2.1: Probabilidades críticas de ocupação para vários tipos de rede tanto na percolação por sítio quanto por ligação. Para a rede de Bethe, z é o número de ligações que emanam de um sítio. (*Resultados exatos.)

termodinâmico.

Uma segunda dificuldade vem do fato de que os valores dos limiares de percolação em redes finitas, p_L , devem ser calculados como valores médios, obtidos a partir de um número muito grande de ensaios para que o erro estatístico seja diminuído a valores que não comprometam os cálculos.

Na Tab.2.1 [5] estão relacionadas algumas probabilidades críticas de ocupação para vários tipos de rede, tanto na percolação por sítio quanto por ligação.

2.2 As Principais Quantidades Definidas em Percolação

2.2.1 Probabilidade de percolação

Se um sítio qualquer (ocupado ou vazio) de uma rede for escolhido ao acaso, existe uma probabilidade $P(p)$, chamada **probabilidade de percolação**, deste sítio pertencer a um aglomerado infinito. Esta probabilidade é nula para $p < p_c$ e se aproxima da unidade, quando $p \rightarrow 1$. Assim, podemos definir a probabilidade de ocupação crítica (p_c) como o maior valor de p para o qual a probabilidade de percolação se anula. No limite termodinâmico, isto pode ser escrito formalmente como

$$p_c = \sup [p, \quad \text{tal que} \quad P(p) = 0].$$

A probabilidade de percolação é análoga ao parâmetro de ordem das transições de fase de segunda ordem. Podemos determinar $P(p)$ através do método de Monte Carlo. O comportamento da probabilidade de percolação é mostrado na Fig. 2.1.

2.2.2 Tamanho médio dos aglomerados

Em geral, cada aglomerado é caracterizado pelo seu tamanho, ou seja, pelo número s de sítios que o compõe. A razão entre o número de aglomerados de tamanho s e o número total de sítios da rede é usualmente chamada *cluster number* $n_s(p)$. Deste modo, a probabilidade de um sítio pertencer a um aglomerado de tamanho s é $sn_s(p)$.

A probabilidade de que um aglomerado finito contenha exatamente s sítios é dada por

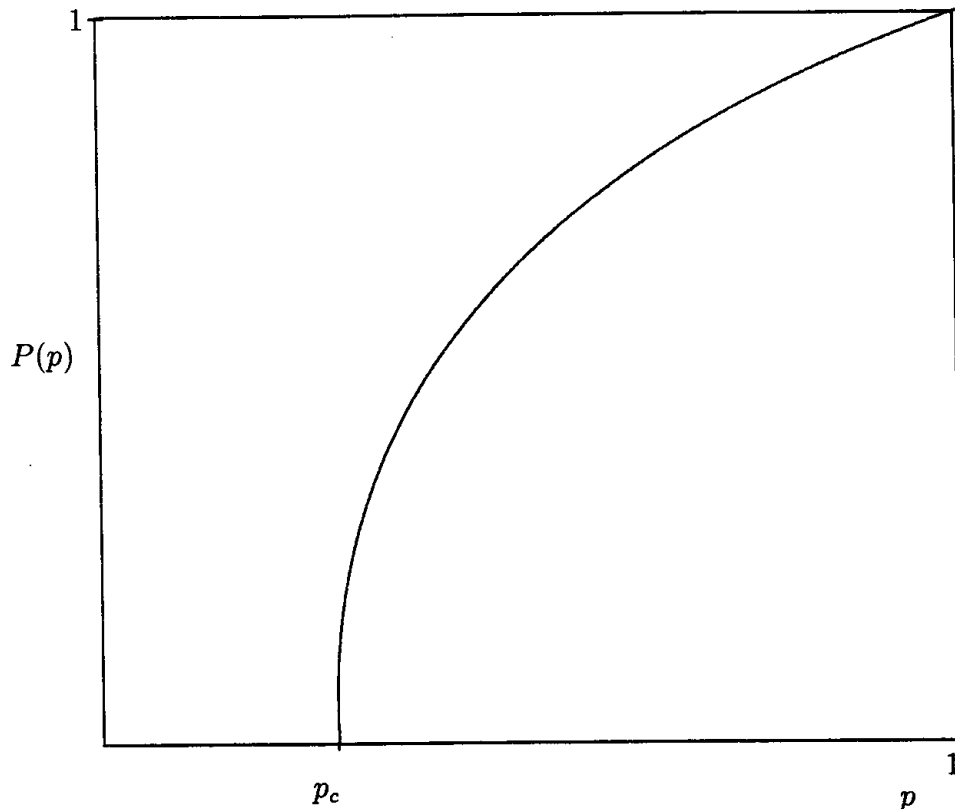


Figura 2.1: Comportamento qualitativo da probabilidade de percolação. $P(p) = 0$ para $p \leq p_c$ e $P(p) \neq 0$ para $p > p_c$.

$$w_s = \frac{sn_s}{\sum_s sn_s}. \quad (2.1)$$

Esta quantidade corresponde à fração de sítios presentes nos aglomerados finitos que estão em aglomerados de tamanho s . Isto permite definir o **tamanho médio dos aglomerados finitos** como

$$S = \sum_s w_s s = \frac{\sum'_s s^2 n_s}{\sum'_s sn_s}. \quad (2.2)$$

onde \sum' significa que o aglomerado infinito deve ser excluído da soma.

Para os modelos de percolação, podemos também definir uma **função de correlação** $g(x)$ a qual fornece a probabilidade de que dois sítios ocupados e separados por uma distância x pertençam ao mesmo aglomerado. Deste modo, o tamanho médio do aglomerado pode ser escrito como $S = \sum'_x g(x)$ [5].

2.2.3 Raio de giração

No limiar de percolação, existem aglomerados de todos os tamanhos distribuídos pela rede. Quando a probabilidade de ocupação é diminuída, estes aglomerados têm seu tamanho reduzido. Cada um deles possui uma *massa* M correspondente ao número de sítios que contém (cada sítio ocupado tem massa unitária). Podemos caracterizar tais objetos relacionando a massa do aglomerado com sua extensão linear. Para isso, utilizamos o conceito de **raio de giração**.

O raio de giração fornece uma medida do espalhamento do aglomerado em relação ao seu centro de massa e é dado por

$$(Rg)^2(s) = \frac{\sum_{i=1}^s |\vec{x}_i - \vec{x}_0|^2}{M}, \quad (2.3)$$

onde $\vec{x}_0 = \frac{\sum_{i=1}^s \vec{x}_i}{M}$ é a posição do centro de massa e \vec{x}_i é a posição do *i-ésimo* sítio ocupado, calculada a partir de \vec{x}_0 .

O raio de giração é intimamente ligado a outra importante característica de um aglomerado: o **comprimento de correlação** ξ , o qual, é a distância média entre dois sítios ocupados.

Como $2(Rg)^2(s)$ é a distância quadrática média entre dois sítios de um mesmo aglomerado, ξ pode ser escrito como

$$\xi^2 = \frac{2 \sum_s (Rg)^2(s) s^2 n_s(p)}{\sum_s s^2 n_s(p)}. \quad (2.4)$$

No ponto crítico, ξ diverge. Esta divergência ocorre através de uma lei de potência da forma

$$\xi \propto (p - p_c)^{-\nu}, \quad (2.5)$$

onde ν é um expoente crítico.

2.3 Hipótese de Escala

O comportamento assintótico dos *clusters numbers* $n_s(p)$, é regido pela lei de potência

$$n_s(p) \propto \begin{cases} s^{-\tau} & \text{para } p = p_c \\ s^{-\tau} f(s^\sigma(p - p_c)) & \text{para } p \neq p_c \end{cases} \quad (2.6)$$

que define os expoentes críticos σ e τ [28].

A partir desta hipótese de escala é que são calculados todos os momentos M_k

$$M_k = \sum_s s^k n_s(p). \quad (2.7)$$

Para $k = 0, 1, 2$, temos, respectivamente, o número de aglomerados da rede, a probabilidade de percolação e o tamanho médio dos aglomerados. Na região crítica, estas quantidades dependem da variável $(p - p_c)$, obedecendo as leis de potências

$$M_0 = \sum_s n_s(p) = |p - p_c|^{2-\alpha} \quad (2.8)$$

$$M_1 = \sum_s s n_s(p) = (p - p_c)^\beta \quad (2.9)$$

$$M_2 = \sum_s s^2 n_s(p) = |p - p_c|^{-\gamma} \quad (2.10)$$

Próximo à transição de fase, o comportamento dos sistemas pode ser descrito pelos expoentes críticos α, β, γ . Estes não são independentes entre si, já que estão relacionados com os expoentes σ e τ por [28]:

$$\beta = \frac{(\tau - 2)}{\sigma}, \quad 2 - \alpha = \frac{(\tau - 1)}{\sigma} \quad e \quad \gamma = \frac{-(\tau - 3)}{\sigma}. \quad (2.11)$$

Eliminando σ e τ nas equações acima, obtemos a relação de escala

$$2 - \alpha = \gamma + 2\beta. \quad (2.12)$$

2.4 Dimensão Fractal

O conceito de dimensão fractal está associado à forma da dependência da massa com o raio de giração. Para os aglomerados compostos por s sítios, podemos encontrar um comprimento característico fazendo uma média sobre seus respectivos raios de giração. A massa destes aglomerados escala como

$$M(s) \propto Rg^{\frac{1}{\rho}}, \quad (2.13)$$

onde Rg é a média sobre os raios de giração dos aglomerados de massa $M(s)$ e $\rho = \sigma\nu$.

Na região crítica, o aglomerado que atravessa toda a rede deve ter o raio de giração da ordem do tamanho do sistema, ou seja, $Rg \sim L$. Assim, a massa deste aglomerado pode ser escrita como

$$M(L) \sim L^{\frac{1}{\rho}}. \quad (2.14)$$

No limiar de percolação, onde $L \sim \xi$, podemos relacionar a massa do aglomerado $M(L)$ com a probabilidade de percolação $P(p)$

$$M(L) \sim P(p)L^d. \quad (2.15)$$

Como

$$\xi \sim (p - p_c)^{-\nu} \quad (2.16)$$

$$P(p) \sim (p - p_c)^\beta \quad (2.17)$$

e

$$M(L) \sim L^{\frac{1}{\rho}} \quad (2.18)$$

obtemos:

$$(p - p_c)^{\frac{-\nu}{\rho}} = (p - p_c)^{\beta - \nu d} \quad (2.19)$$

ou seja,

$$\frac{1}{\rho} = d - \frac{\beta}{\nu}. \quad (2.20)$$

A quantidade $\frac{1}{\rho}$ é menor do que a dimensão euclídeana do sistema, uma vez que β e ν são positivos (Tab.2.2) [29].

Genericamente, Mandelbrot [24] define um expoente D através da relação

$$massa \propto comprimento^D, \quad (2.21)$$

e denota como objetos fractais aqueles que obedecem à relação acima, com D diferente da dimensão euclídeana. Neste sentido, o aglomerado que percola a rede é um objeto fractal com dimensão $D = D_F = \frac{1}{\rho}$.

A percolação ordinária pode ser mapeada no modelo de Potts q – *estados*, no limite $q \rightarrow 1$. Usando a teoria da invariância conforme [30, 31], é possível resolver este modelo no ponto crítico. Deste modo, no caso bidimensional, os expoentes críticos são conhecidos exatamente (Tab.2.2), e a dimensão fractal resulta em $D_F = \frac{91}{48}$.

Em três dimensões, ainda não há solução exata para os expoentes críticos, sendo seus valores obtidos através de métodos numéricos. A dimensão fractal na criticidade foi estimada em $D_F \simeq 2.52$.

<i>Expoente</i>	$d = 2^*$	$d = 3$	<i>Bethe*</i>
α	$-\frac{2}{3}$	-0.6	-1
β	$\frac{5}{36}$	0.4	1
γ	$\frac{43}{18}$	1.8	1
ν	$\frac{4}{3}$	0.9	$\frac{1}{2}$
σ	$\frac{36}{91}$	0.45	$\frac{1}{2}$
τ	$\frac{187}{91}$	2.2	$\frac{5}{2}$
Dimensão fractal ($p < p_c$)	1.56	2	4
Dimensão fractal ($p = p_c$)	$\frac{91}{48}$	2.52	4
Dimensão fractal ($p > p_c$)	2	3	4

Tabela 2.2: Expoentes críticos e dimensões fractais para redes em $d = 2$, $d = 3$ e rede de *Bethe*. (*Resultados exatos)

Para probabilidades de ocupação p distantes às do valor crítico p_c , verificamos que os aglomerados têm o seguinte comportamento [25]: acima do limiar de percolação, eles não são fractais, mas objetos normais com dimensão fractal $D_F = d$. Abaixo de p_c , comportam-se como objetos fractais cuja dimensão é menor que a dimensão fractal crítica. A Tab.2.2 mostra os expoentes críticos e as dimensões fractais para redes em duas e três dimensões e para a rede de *Bethe*.

2.5 Universalidade

O conceito de “universalidade” para os fenômenos críticos consiste em uma classificação semi-empírica dos diferentes sistemas em algumas classes de universalidade. Ele assegura que, para cada classe, os expoentes críticos e outras propriedades qualitativas de um sistema, como por exemplo a forma das funções de escala, são independentes da intensidade das interações (isto é, dos acoplamentos) e da estrutura da rede. A dimensão, por outro lado, é bastante importante, mudando os expoentes críticos. Estes expoentes estão relacionados entre si, através das equações de escala,

dadas pelas Eq. 2.11, 2.12 e 2.20. Assim, conhecendo somente dois entre os seis expoentes críticos, σ , τ , β , γ , ν e D_F , podemos determinar os outros quatro.

2.6 Percolação por Invasão

A percolação por invasão é um processo dinâmico, introduzido por Wilkinson e Willenslem [16] motivado pelo estudo do escoamento de dois fluidos imiscíveis em um meio poroso. Muitos meios porosos são representados convenientemente como uma rede de poros unidos por gargalos estreitos. Este meio idealizado pode ser visto como uma rede regular, na qual sítios e ligações correspondem a poros e gargalos respectivamente. Neste modelo, um aglomerado cresce através da seleção de caminhos de menor resistência, ou seja, os fluidos deslocam-se devido à diferença de pressão capilar.

Considere o processo onde um fluido de baixa viscosidade, é injetado em um meio poroso ocupado anteriormente por um fluido de alta viscosidade. Dependendo da taxa de injeção, as forças predominantes podem ser de natureza viscosa ou capilar. O *DLA* (*Diffusion-Limited Aggregation*) [17] descreve o deslocamento rápido, quando as forças viscosas são dominantes. A percolação por invasão é indicada quando o fluido escoar lentamente, com domínio das forças de capilaridade. O movimento pode ser considerado com um conjunto de saltos discretos nos quais, a cada passo, o fluido injetado (invasor) expulsa o fluido mais viscoso (defensor) do menor poro disponível na interface. Associando-se o tamanho dos poros a números aleatórios distribuídos em uma rede temos a dinâmica da invasão: ocupamos, um a um, os sítios (poros) com o menor número aleatório (tamanho) associado. Uma realização experimental economicamente importante é a recuperação de petróleo de rochas através da injeção de água.

A simulação de um processo de percolação por invasão consiste em acompanhar o movimento da interface fluido invasor-defensor enquanto ela se desloca através do

meio, para uma distribuição de poros fixa.

Quando o fluido invasor avança, é possível que ele circunde completamente algumas regiões do fluido defensor formando regiões desconectadas das bordas do sistema. Se o fluido defensor for incompressível, esta região passa a ser proibida para o fluido invasor. Esta situação foi estudada por Wilkinson e Willensem, dando origem ao modelo de percolação **com aprisionamento**. No entanto, quando o fluido defensor é considerado completamente compressível, temos o modelo de percolação **sem aprisionamento**.

Descrevemos abaixo, os passos básicos de um algoritmo de percolação por invasão:

i - A cada sítio de uma rede, associamos um número aleatório r , distribuído uniformemente no intervalo $[0, 1]$. Esses números aleatórios são proporcionais ao diâmetro dos poros;

ii - Selecionamos sítios por onde o fluido invasor é injetado, ou seja, a semente do processo de invasão;

iii - Identificamos os sítios de crescimento (sítios que podem ser invadidos). Estes, estão ocupados por fluido defensor mas são primeiros vizinhos de sítios preenchidos com o fluido invasor, ou seja, pertencem ao perímetro do aglomerado invasor;

iv - A interface avança para o sítio de crescimento que possui o menor número aleatório associado;

v - Sítios de crescimento em regiões completamente circundadas por fluido invasor podem ou não ser eliminados da lista de crescimento, dependendo da compressibilidade do fluido defensor.

A Fig.2.2 é uma representação esquemática do processo de invasão. O aglomerado cresce a partir de uma semente no centro da rede. Durante o crescimento, todos os sítios do perímetro (assinalados em vermelho) estão disponíveis para a invasão. O fluido invasor avança através da rede sempre selecionando o sítio com o menor número aleatório associado, ou seja, o poro com menor raio. Porém, quando consideramos a possibilidade de aprisionamento, nem todos os sítios vizinhos à interface estão disponíveis para a invasão. Os sítios de crescimento pertencentes às regiões

aprisionadas não podem ser invadidos. A questão do aprisionamento de uma região envolve uma pesquisa global do sistema [25, 27] e requer, dessa forma, um programa que simule este aprisionamento. Este programa é, em geral, complexo e consumidor de tempo de computação.

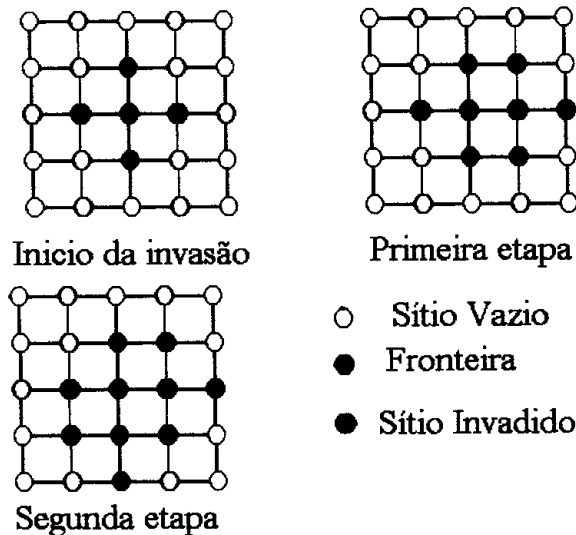


Figura 2.2: Esquema do processo de invasão: uma semente é colocada no centro da rede (preto); seus primeiros vizinhos são sítios de crescimento (vermelho). À medida em que o aglomerado cresce a vizinhança deve ser atualizada.

Quando o fluido invasor forma um caminho conectando os lados opostos do sistema, dizemos que ele percolou. Neste ponto, é interessante comparar o processo de percolação por invasão (sem a regra de aprisionamento) com a percolação ordinária.

Na percolação ordinária, um aglomerado pode ser formado pela ocupação aleatória de sítios com uma certa probabilidade p . Dependendo do valor desta probabilidade de ocupação, pode ou não haver a formação de um caminho que atravessa a rede. Por outro lado, na percolação por invasão, não existe o parâmetro p . O aglomerado cresce para o menor poro disponível no perímetro. Em geral, sítios com números aleatórios associados pequenos tornam-se disponíveis na interface. O processo de invasão é interrompido somente quando o invasor atinge a borda do sistema, encontrando automaticamente o seu ponto crítico [32, 33].

Simulações têm mostrado que o número de sítios invadidos, ou seja, a massa do

aglomerado da percolação por invasão, aumenta com o tamanho L da rede da seguinte forma:

$$M(L) \sim L^{D_F} \quad (2.22)$$

onde D_F é a dimensão fractal do agregado final.

Em nosso estudo, simulamos em redes quadradas de diversos tamanhos ($L = 101, 201, 401, 801, 1201, 1601$ e 1801), processos de percolação por invasão sem a regra de aprisionamento. Realizamos, para cada tamanho de rede, um número de ensaios suficiente para que o erro estatístico nos valores médios da massa seja reduzido a cerca de 1%. Estudamos as características dos aglomerados crescidos estimando sua dimensão fractal e seu número de coordenação médio. Fizemos também uma classificação dos sítios do aglomerado de acordo com o seu número de primeiros vizinhos ocupados. Os resultados obtidos são descritos abaixo.

Utilizando massas obtidas para diversos tamanhos de rede, estimamos a dimensão fractal D_F . Verificamos que este valor ($D_F \simeq 1.89$) coincide com a dimensão fractal crítica da percolação ordinária ($D_F = \frac{91}{48} \simeq 1.896$), como já havia sido apontado por Wilkinson e Willemsen [16].

Para estudar a estrutura dos aglomerados, utilizamos uma classificação topológica de seus sítios de acordo com o número de primeiros vizinhos invadidos. Nesta classificação, chamamos de sítio tipo k , aqueles que estão ocupados e circundados por k primeiros vizinhos ocupados. Seja N_k o número de sítios do tipo k . Calculamos os valores médios das frações $\frac{N_k}{\sum_k N_k}$, com $k = 1, \dots, 4$. Os resultados foram extrapolados utilizando o algoritmo *BST* [34, 35]. Este algoritmo é usado para extrapolar sequências logaritmicamente convergentes. Em mecânica estatística, tais sequências correspondem a sistemas críticos e, em particular são usadas em análises de *finite size scaling*. Os resultados são apresentados na Tab.2.3. Vemos nesta tabela, que a maioria dos sítios dos aglomerados são do tipo 2 e 3, ou seja, possuem 2 ou 3 primeiros vizinhos ocupados. Isto indica que os aglomerados são objetos com muitas e longas estruturas ramificadas.

O número de coordenação médio corresponde ao número médio de sítios primeiros

Z	$\frac{N_1}{N_1+N_2+N_3+N_4}$	$\frac{N_2}{N_1+N_2+N_3+N_4}$	$\frac{N_3}{N_1+N_2+N_3+N_4}$	$\frac{N_4}{N_1+N_2+N_3+N_4}$
2.51	0.13	0.36	0.38	0.13

Tabela 2.3: Número de coordenação médio e classificação dos sítios do aglomerado de acordo com o número de vizinhos ocupados para rede quadrada.

vizinhos ocupados de um sítio qualquer do aglomerado. Sabemos que esta quantidade foi investigada numericamente para as redes quadrada e cúbica simples para a percolação ordinária por ligações. Na criticalidade, o número de coordenação médio dos aglomerados foram estimados em $Z = 2.239 \pm 0.012$ em duas dimensões e $Z = 2.079 \pm 0.016$ para $d = 3$ [36]. No entanto, para a versão de percolação por sítios, nenhum cálculo desta quantidade foi realizado. Também não temos conhecimento de nenhuma estimativa do número de coordenação dos aglomerados da percolação por invasão. Assim, lançamos mão da classificação dos sítios do aglomerado para calcular esta quantidade no caso da percolação por invasão (sem aprisionamento), em rede quadrada. Para isso, identificamos o número de coordenação como a média ponderada do número de primeiros vizinhos ocupados de cada sítio do aglomerado, onde os pesos correspondem aos valores médios das frações $\frac{N_k}{\sum_k N_k}$, ou seja,

$$Z = \frac{\sum_{k=1}^4 k N_k}{\sum_{k=1}^4 N_k}. \quad (2.23)$$

O valor estimado, $Z = 2.51 \pm 0.01$, indica que os aglomerados são redes fractais situadas entre as redes unidimensional ($Z = 2$) e a hexagonal ($Z = 3$).

Os mecanismos de crescimento dos aglomerados na percolação por invasão, podem ser analisados através do **perfil de aceitação** $a_L(r)$ [16], definido como a razão entre o número de números aleatórios no intervalo $[r, r + dr]$ aceitos no aglomerado e o total de números aleatórios disponíveis neste intervalo.

Formalmente o perfil de aceitação é escrito como

<i>Rede</i>	p_c	D_F
<i>Quadrada</i>	0.5925	1.890
<i>Triangular</i>	0.5000	1.883
<i>Cúbica Simples</i>	0.3116	2.487

Tabela 2.4: Probabilidade crítica e dimensão fractal para aglomerados construídos por percolação por invasão de sítios.

$$a_L(r) = \frac{\langle n^{\circ} \text{ de } n^{\circ s} \text{ aleatórios em } [r, r + dr] \text{ aceitos no aglomerado} \rangle_L}{\langle n^{\circ} \text{ de } n^{\circ s} \text{ aleatórios em } [r, r + dr] \text{ total} \rangle_L} \quad (2.24)$$

onde o símbolo $\langle \dots \rangle_L$ denota média de ensaios realizados sobre aglomerados crescidos em redes de tamanho L .

O perfil de aceitação, Fig. 2.3, mostra que todos os números aleatórios pequenos que se tornam disponíveis para a invasão são aceitos no aglomerado, enquanto os números aleatórios altos são rejeitados. No caso da percolação ordinária todos os sítios com números aleatórios associados menores do que a probabilidade de ocupação p são ocupados. Na percolação por invasão isso não ocorre uma vez que o sítio deve estar disponível para a invasão. A Fig. 2.3 sugere que no limite de uma rede infinita o perfil de aceitação da invasão tende a uma função degrau cuja descontinuidade está em um número aleatório r_c . Isto significa que todos os sítios com $r \leq r_c$ são invadidos. Este valor de r_c coincide com o limiar da percolação ordinária, ou seja, $r_c = p_c$ ($p_c = 0.5928$) [16]. Este fato, juntamente com a coincidência das dimensões fractais dos aglomerados construídos na percolação ordinária e na percolação por invasão (sem aprisionamento), leva a comunidade científica a acreditar que esses aglomerados são equivalentes. Não existe, porém, nenhuma prova mais direta desta conjectura.

Na Tab.2.4 mostramos valores dos limiares de percolação e as dimensões fractais dos aglomerados da percolação por invasão, obtidos por Wilkinson e Barsony [37] para diferentes tipos de redes.

A Fig. 2.4 mostra um aglomerado típico da percolação por invasão sem aprisionamento, construído a partir do centro de uma rede quadrada de tamanho $L = 901$.

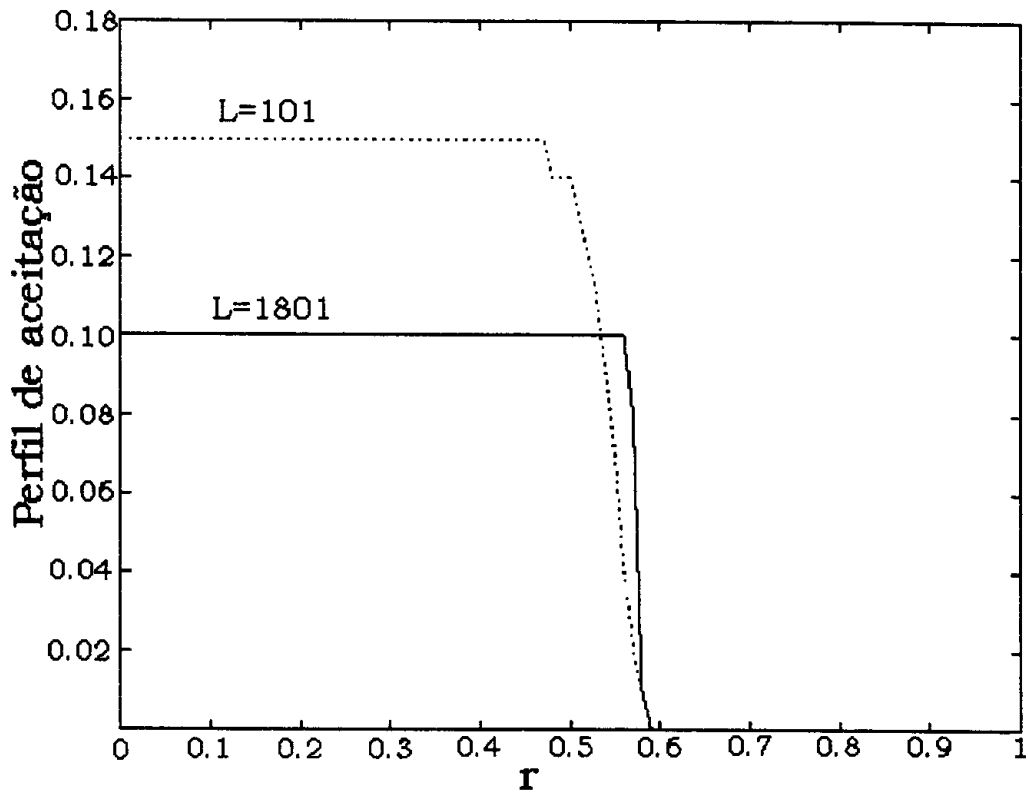


Figura 2.3: Perfil de aceitação para percolação por invasão sem aprisionamento para redes quadradas de tamanho $L = 101$ e $L = 1801$.

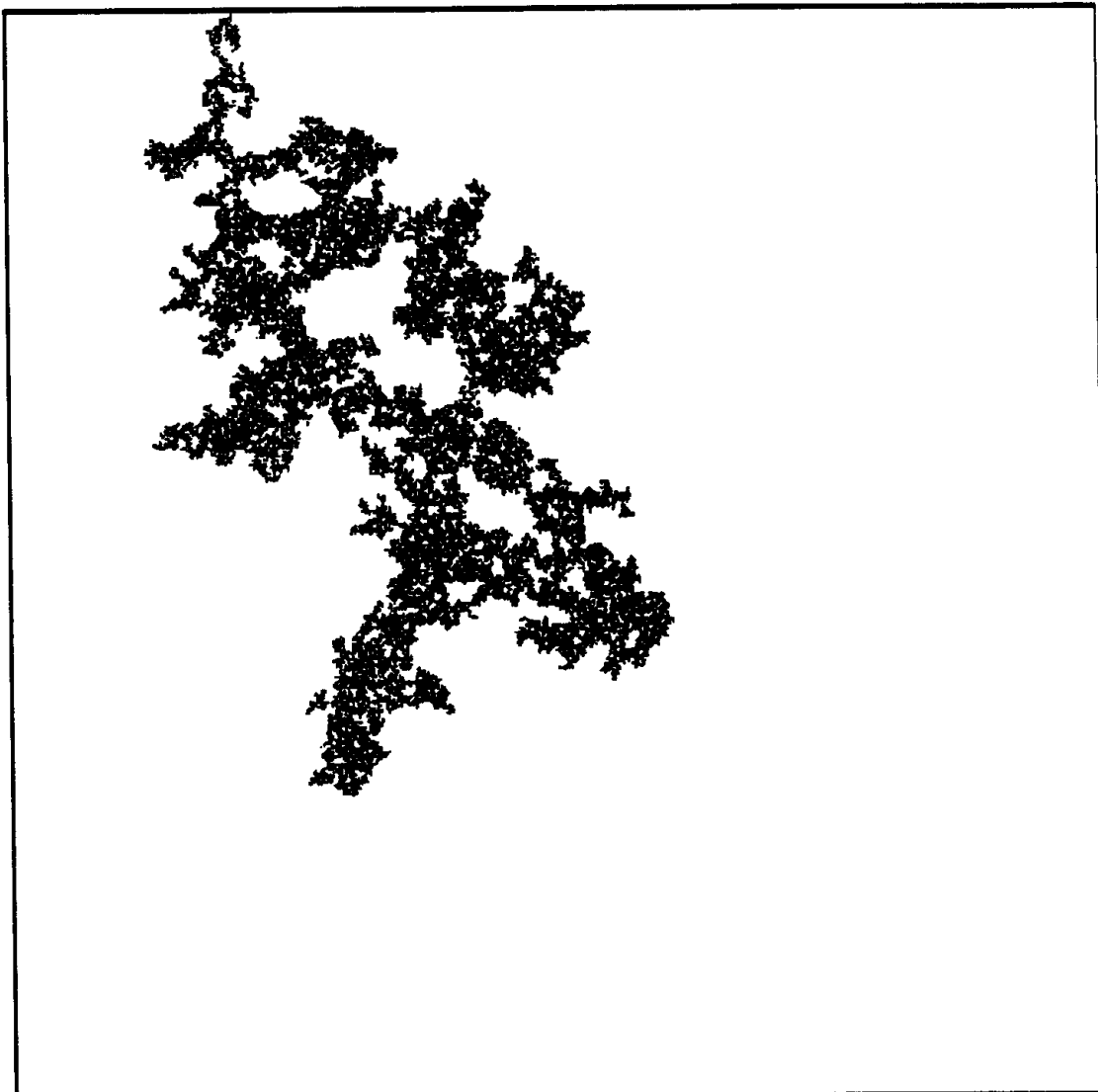


Figura 2.4: Aglomerado típico da percolação por invasão para uma rede quadrada de tamanho $L = 901$. O aglomerado contém 46726 sítios. A moldura representa os limites da rede. Observe que o aglomerado toca a borda superior.

Para o caso bidimensional, a introdução da regra de aprisionamento produz mudanças drásticas nas características dos aglomerados. O perfil de aceitação não se aproxima de uma função degrau, uma vez que muitos sítios que seriam invadidos ficaram aprisionados. Assim, o perfil de aceitação não exhibe descontinuidade, pelo contrário, passa continuamente de um valor finito para $a_\infty(r) = 0$, em algum ponto r_c . No entanto, o valor de r_c coincide com o limiar da percolação ordinária. Esta coincidência acontece pois a regra do aprisionamento eventualmente impede que alguns sítios com números aleatórios associados $r < r_c$ sejam invadidos, mas não obriga que sítios com $r > r_c$ sejam ocupados.

As regiões aprisionadas influem também na massa do aglomerado. Devido ao aprisionamento, o número de sítios invadidos quando o fluido invasor percola é menor do que no caso sem aprisionamento. Em geral, quando aumentamos o tamanho da rede, o número e o tamanho das regiões aprisionadas são maiores. Conceitualmente, isto diminui a dimensão fractal do agregado final, sendo seu valor estimado em $D_F = 1.82$ [16]. Em estudos experimentais da percolação por invasão com aprisionamento, Lenormand e Zircon [38] mediram as dimensões fractais dos aglomerados encontrando valores na região $1.80 \leq D_F \leq 1.83$. Esta diminuição da dimensão fractal indica que a percolação por invasão com aprisionamento, em duas dimensões, pertence a uma classe de universalidade diferente da percolação ordinária.

Em três dimensões, porém, a situação é diferente. A regra de aprisionamento tem efeito muito menor uma vez que para aprisionar regiões de fluido defensor, o invasor deve formar superfícies fechadas. Quando o fluido invasor percola, o número de sítios invadidos é praticamente indistinguível do caso sem aprisionamento uma vez que as regiões aprisionadas são pequenas [16, 25]. A dimensão fractal estimada para estes aglomerados coincide com a da percolação ordinária ($D_F \simeq 2.52$), muito embora o perfil de aceitação tenha um ligeiro afastamento de uma função degrau. Porém, neste caso, o desvio é pequeno comparado ao caso bidimensional. Este desvio do perfil de aceitação em relação à função degrau acontece pois, como as regiões aprisionadas são pequenas, restam dentro delas poucos sítios com números aleatórios pequenos que não foram invadidos. O ponto onde o perfil de aceitação se anula, a exemplo do caso

bidimensional, coincide com o limiar da percolação ordinária [16].

Capítulo 3

Percolação por Invasão Múltipla

3.1 Introdução

Durante o processo de percolação por invasão, apenas um sítio da rede é acrescentado ao aglomerado do fluido invasor em cada etapa de crescimento. No entanto, não é razoável achar que na natureza isto realmente ocorra, pelo contrário, uma hipótese mais plausível é que vários sítios sejam simultaneamente invadidos. Assim, propomos algumas modificações no algoritmo da percolação por invasão. Nelas, vários sítios do perímetro do aglomerado são simultaneamente ocupados. Isto torna o modelo mais realístico e mais próximo aos experimentos.

O perímetro de um aglomerado não é uma medida direta de sua superfície total como nos objetos regulares. De acordo com Kunz e Souillard [39], o número de sítios do perímetro de um aglomerado (M_p) construído através da percolação depende de sua massa. Em geral, quanto maior a massa do aglomerado, maior o seu perímetro. No interior destes aglomerados existem muitas regiões não ocupadas e os sítios nas fronteiras destas regiões também contribuem para o perímetro total. Assim, o perímetro

de um aglomerado é formado por uma parte interna (sítios não ocupados na fronteira de regiões no interiores), e por uma parte correspondente à sua superfície externa. No caso da percolação por invasão, os sítios de crescimento que estão em contato com o “mar” de fluido defensor pertencem ao perímetro externo, enquanto aqueles isolados em “lagos” no interior do aglomerado fazem parte do perímetro interno.

Em nossas generalizações do modelo de percolação por invasão (a qual passamos a chamar de invasão ordinária), as modificações introduzidas estão na quantidade de sítios invadidos a cada passo do algoritmo: ao invés de apenas um, vários sítios são ocupados em cada etapa do processo de invasão. A escolha dos sítios a serem invadidos obedece ao critério de menor resistência, ou seja, os sítios invadidos devem ser aqueles que têm o menor número aleatório associado. Para isso, a cada passo do algoritmo, construímos uma lista com todos os sítios de crescimento (M_p) e a organizamos em ordem crescente dos números aleatórios associados a cada sítio da rede. Cada um destes sítios situa-se numa posição k ($1 \leq k \leq M_p$) desta lista. Uma vez calculado o número de sítios a serem invadidos (NSI) varremos toda a lista e incorporamos ao aglomerado de fluido invasor os sítios até a posição $k = NSI$. A lista é então atualizada com a eliminação dos sítios invadidos e a inclusão dos novos sítios de crescimento.

Descrevemos abaixo o algoritmo que utilizamos para a simulação da percolação invasão múltipla:

- i - A cada sítio da rede, associamos um número aleatório r , uniformemente distribuído no intervalo $[0, 1]$;
- ii - Selecionamos o sítio do centro da rede para iniciar a invasão;
- iii - Construímos a lista de sítios de crescimento;
- iv - Em cada etapa de crescimento, calculamos o número de sítios a serem invadidos. As diferenças entre os diversos modelos de invasão que propomos neste capítulo residem na forma de como este cálculo é efetuado. As regras utilizadas são discutidas nas próximas seções.
- v - Acrescentamos ao aglomerado, os NSI menores sítios da lista de crescimento;
- vi - Atualizamos a lista de sítios de crescimento com a eliminação dos sítios

invadidos e a inclusão de novos sítios que se tornaram disponíveis para invasão;

vii - Interrompemos o processo quando o aglomerado toca a fronteira da rede.

Simulamos dois processos de percolação por invasão múltipla em redes quadradas de diversos tamanhos ($L = 51, 101, 201, 401$ e 801). Nestas simulações, não consideramos o aprisionamento de regiões de fluido defensor, isto é, a percolação analisada não envolve aprisionamento. As regras para o cálculo do número de sítios a serem invadidos em cada etapa de crescimento e os resultados provenientes são descritos nas próximas seções.

3.2 Invasão controlada pelo perímetro total

3.2.1 Apresentação do algoritmo

A idéia mais natural e mais simples a ser introduzida no modelo de percolação por invasão é considerar que o fluxo de fluido invasor seja proporcional ao perímetro total do aglomerado. Para isso, introduzimos um parâmetro F ($0 \leq F \leq 1$) que representa a fração de sítios do perímetro a serem invadidos em cada etapa de crescimento. Assim, se o perímetro total do aglomerado em alguma etapa j de crescimento for $M_p(j)$, o número de sítios a serem invadidos na etapa $(j + 1)$ será

$$NSI(j + 1) = F M_p(j). \quad (3.1)$$

Quando $F = 0$ (ou $NSI \sim 0$), o algoritmo obriga que pelo menos um sítio seja acrescentado ao aglomerado, para evitar a interrupção do processo de crescimento. Obviamente o caso $F = 0$ corresponde à percolação por invasão ordinária.

3.2.2 Resultados

Para investigar a estrutura dos aglomerados crescidos através da regra discutida acima, estudamos algumas de suas características básicas, como raio de giração (Rg), massa média ($\langle M \rangle$) e número de coordenação médio (Z).

A densidade de um aglomerado é definida como $\frac{\langle M \rangle}{Rg^2}$ [5, 26]. Para um objeto fractal típico[24], esta densidade se anula no limite termodinâmico. Entretanto, para os aglomerados crescidos através deste modelo de invasão múltipla isto não ocorre. Na Fig.3.1 mostramos a densidade dos aglomerados em diversos tamanhos de rede para um valor fixo de F ($F = 0.06$). Quando aumentamos o tamanho da rede, a densidade do aglomerado tende a um valor constante, característico de objetos homogêneos. A Fig.3.1 mostra também que o comportamento do número de coordenação médio do aglomerado. Para redes quadradas suficientemente grandes, $Z \rightarrow 4$. Isto indica que o objeto é compacto, com dimensão fractal $D_F = 2$. Um comportamento análogo acontece para todos os valores de $F > 0$, exceto $F = 0$. Através destas características, concluímos que os aglomerados resultantes deste modelo de invasão múltipla são objetos compactos.

A Fig.3.2 mostra um aglomerado construído para rede quadrada de tamanho $L = 801$ para $F = 0.04$. Esta figura é um gráfico de crescimento como função do tempo. Para construí-la, dividimos o número total de etapas de crescimento do aglomerado (neste caso, 584 etapas), em 8 intervalos igualmente espaçados (tempo). Cada intervalo é representado por uma cor e possui 73 etapas de crescimento. Com isso, percebemos a evolução do aglomerado em uma sequência de crescimento bem definida: no início do crescimento o aglomerado tem uma estrutura similar à percolação por invasão ordinária mas, à medida em que ele cresce, o número de sítios invadidos aumenta rapidamente. Quando aumentamos o tamanho do aglomerado, os lagos internos tendem a desaparecer. Note que a partir de um certo tamanho, o aglomerado cresce formando anéis em torno do centro da rede. Com o desaparecimento dos “lagos” de fluido defensor, restam, por fim, apenas o sítios do perímetro externo. O aglomerado

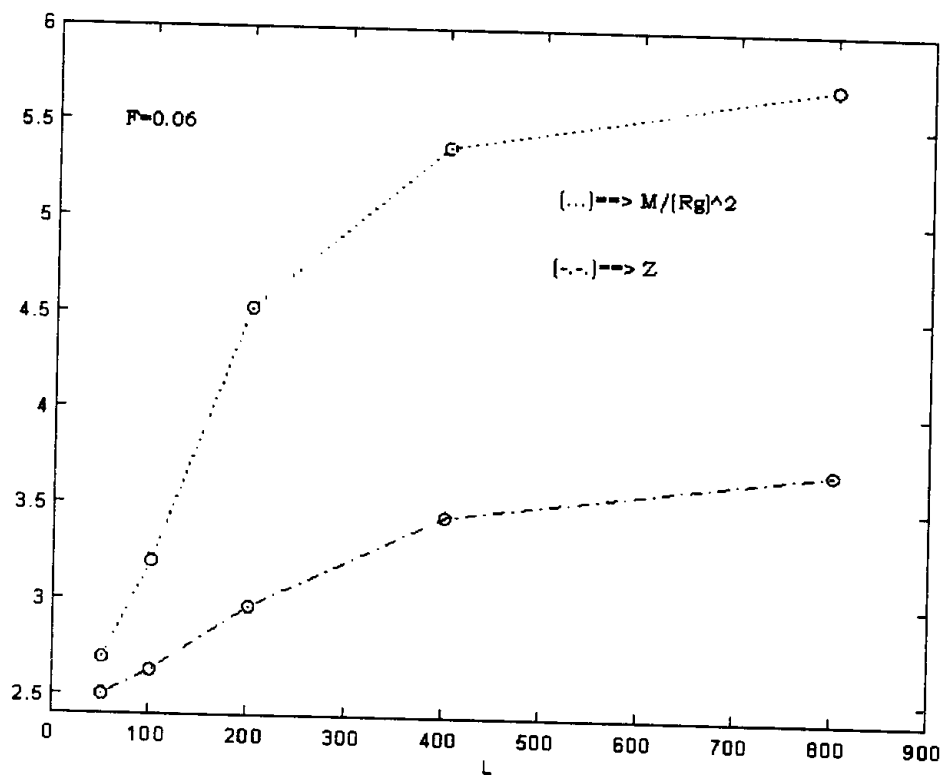


Figura 3.1: Densidade e número de coordenação médio para aglomerados construídos por invasão múltipla proporcional ao seu perímetro.

crescido torna-se compacto e adquire a forma de um losango inscrito na rede quadrada.

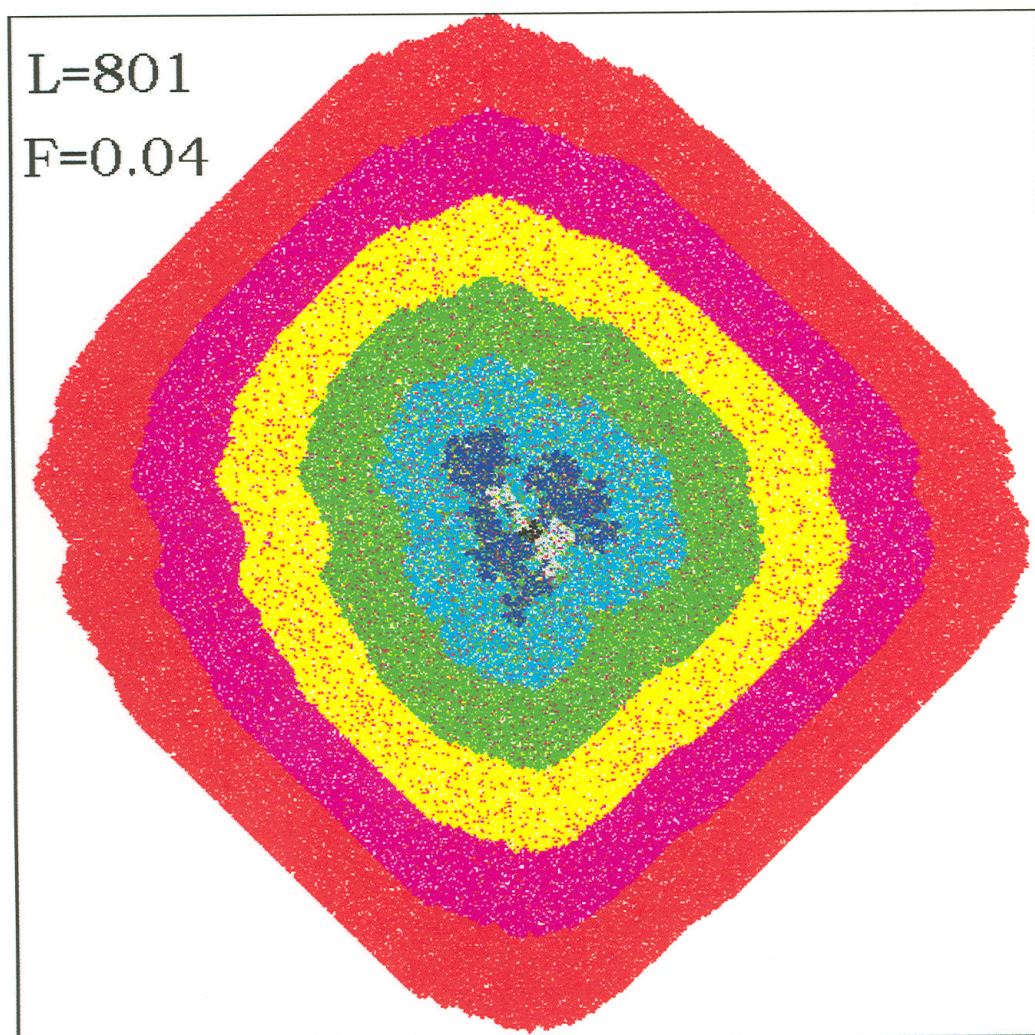


Figura 3.2: Aglomerado típico da invasão múltipla proporcional ao perímetro total. Sua massa é de 342221 sítios. A forma losangular é típica para $F > 0$.

Na Tab.3.1 mostramos alguns tempos de *CPU* típicos para a simulação destes processos de percolação por invasão múltipla.

F	CPU	<i>Máquina</i>
0.01	5.5h	<i>SUN – SPARC 2</i>
0.05	3.5h	<i>SUN – SPARC 2</i>
0.1	2.5h	<i>SUN – SPARC 2</i>
0.2	0.75h	<i>SUN – SPARC 2</i>
0.4	0.5h	<i>SUN – SPARC 2</i>
0.6	0.5h	<i>SUN – SPARC 2</i>
0.8	0.5h	<i>SUN – SPARC 2</i>

Tabela 3.1: Tempo de CPU para invasão controlada pelo perímetro total do aglomerado. O número de ensaios realizados é suficiente para que o desvio estatístico seja de 1%. O tamanho da rede é $L = 801$.

3.3 Invasão controlada pelo perímetro do retângulo que contém o aglomerado

3.3.1 Apresentação do algoritmo

Como vimos anteriormente, quando a invasão é proporcional ao perímetro total do aglomerado, o ritmo da invasão é tão grande que os objetos resultantes são compactos. Com o intuito de diminuir o ritmo da invasão, introduzimos o seguinte cálculo para o número de sítios a serem invadidos: seja $N_r(j)$ o número de sítios perimetrais do menor retângulo que contém o aglomerado na etapa j de crescimento. No passo $(j + 1)$, invadimos um número de sítios correspondente a uma certa fração F deste perímetro, ou seja,

$$NSI(j + 1) = F N_r(j). \quad (3.2)$$

Estudamos as características principais dos aglomerados construídos através

desta regra, como, por exemplo, o perfil de aceitação, a massa média ($\langle M \rangle$), o raio de giração (Rg), o número de coordenação médio (Z) e a dimensão fractal dos aglomerados para diversos valores de F .

3.3.2 Resultados

O perfil de aceitação

Aglomerados com diferentes valores de F podem ser estudados através do perfil de aceitação.

Para cada valor de F , o perfil de aceitação aproxima-se de uma função degrau cuja descontinuidade situa-se em algum ponto que depende de L e F . Este ponto torna-se melhor definido quanto maior o tamanho da rede, como pode ser visto na Fig 3.3 onde mostramos o perfil de aceitação para vários tamanhos de rede e $F = 0.30$.

Quando fazemos uma varredura de F no intervalo $[0, 1]$, o ponto onde ocorre a descontinuidade, r_c , varia na região $[p_c, 1]$, onde p_c é o limiar da percolação ordinária. Um exemplo deste comportamento pode ser visto na Fig. 3.4 onde mostramos r_c com uma função de F para uma rede quadrada de tamanho $L = 801$. O deslocamento de r_c no intervalo $[p_c, 1]$, pode ser entendido da seguinte forma: quando F é muito pequeno, a invasão ocorre praticamente como na invasão ordinária. Os sítios acrescentados ao aglomerado são aqueles que tem os menores números aleatórios associados e, portanto, r_c permanece próximo ao limiar da percolação ordinária. No entanto, com o aumento de F , o número de sítios invadidos em cada etapa é maior. Assim, sítios com grandes números aleatórios associados também são invadidos. Deste modo, r_c é deslocado para valores maiores do que p_c . Um fato que chama a atenção é que r_c atinge o valor máximo ($r_c = 1$) em $F = 0.5$ e não em $F = 1$. Isto indica que para $F \geq 0.5$ todos os sítios que se tornam disponíveis na interface são invadidos. Este fato será discutido em detalhes

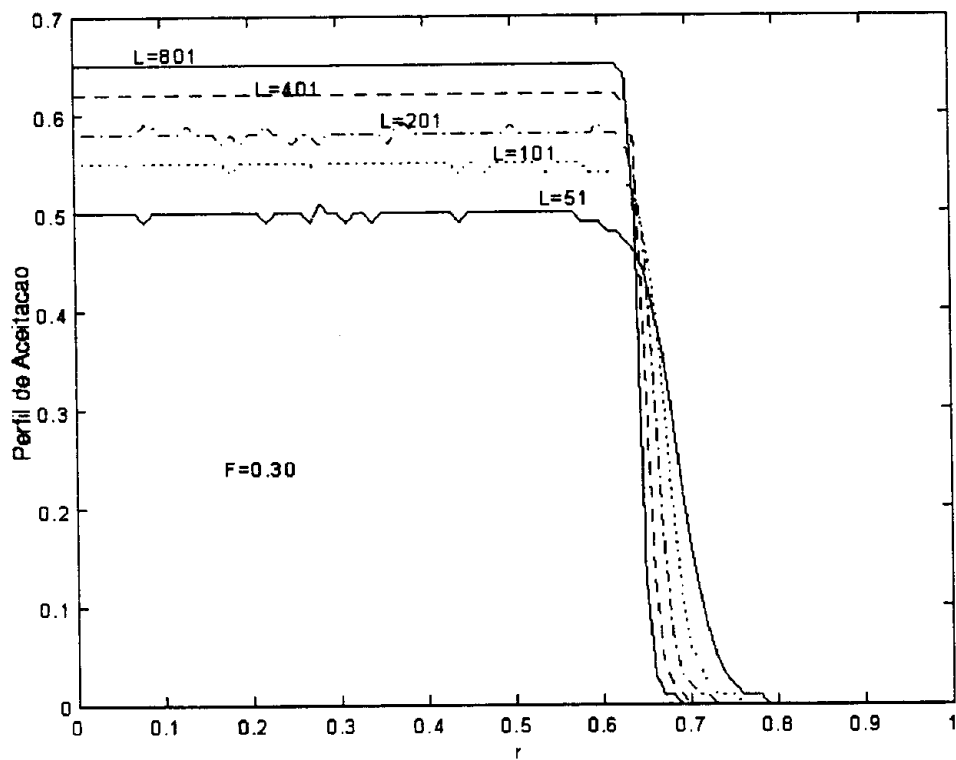


Figura 3.3: Perfil de aceitação para diferentes tamanhos de rede. F é fixo em 0.30.

mais adiante.

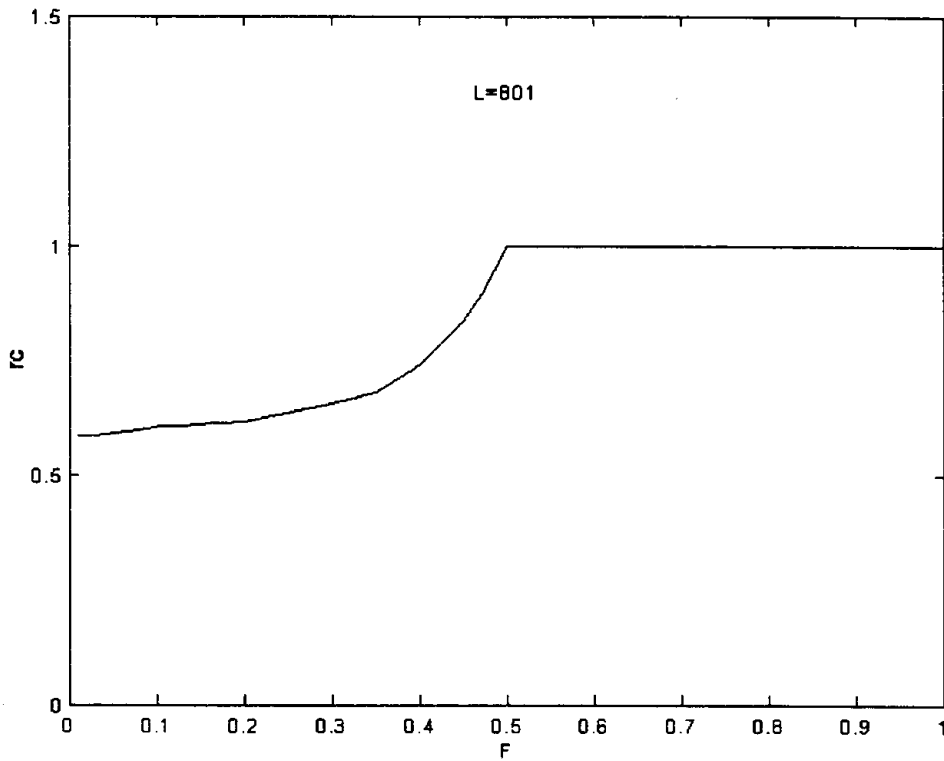


Figura 3.4: Comportamento do valor crítico para percolação por invasão múltipla para diferentes valores de F .

O número de coordenação médio

Para calcular o número de coordenação médio, utilizamos a classificação dos sítios do aglomerado descrita no capítulo anterior. Esta classificação consiste em uma análise dos sítios de acordo com o número de primeiros vizinhos invadidos que possui. Deste modo, um sítio do aglomerado circundado por k ($k = 1, \dots, 4$) primeiros vizinhos ocupados, chamamos de vértice tipo k . Denotamos o número destes vértices como N_k .

Calculamos o número de coordenação médio do aglomerado para diferentes valores de F através da Eq.2.23.

O comportamento do número de coordenação médio para vários valores de F é mostrado na Fig.3.5. Quando F é próximo de zero, Z mantém-se próximo ao valor calculado para os aglomerados da percolação por invasão ordinária ($Z = 2.51$). No entanto, à medida que o fluxo de fluido invasor é aumentado, o número de coordenação evolui de $Z = 2.51$ para $Z = 4$. Este comportamento pode ser entendido analisando o comportamento de N_k , mostrado na Fig. 3.6.

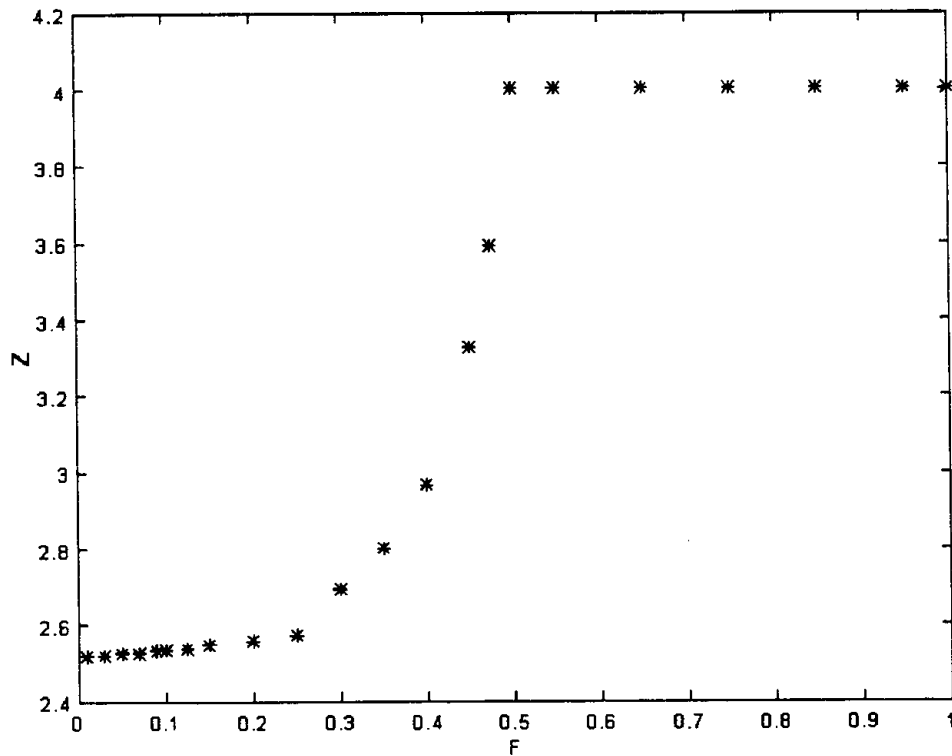


Figura 3.5: Comportamento do número de coordenação médio para diferentes valores de F .

Quando F é pequeno, o crescimento do aglomerado acontece praticamente como na invasão ordinária. Os vértices dominantes são do tipo 2 e 3. No entanto, para valores maiores do parâmetro F , em cada etapa do crescimento, um número maior de sítios passa a ser ocupado. Como os sítios invadidos obrigatoriamente pertencem ao perímetro do aglomerado, cada um deles tende a ter seu número de primeiros vizinhos invadidos aumentado. Isto pode ser visto na Fig. 3.6, onde percebemos que a fração

de sítios do tipo 1 e 2 decresce quando F aumenta. Este decréscimo é acompanhado pelo aumento dos vértices tipo 3 e 4. Para $F \geq 0.5$ praticamente todos os sítios do aglomerado são do tipo 4.

O comportamento do perfil de aceitação e do número de coordenação médio indica que estes aglomerados são objetos compactos para $F \geq 0.5$.

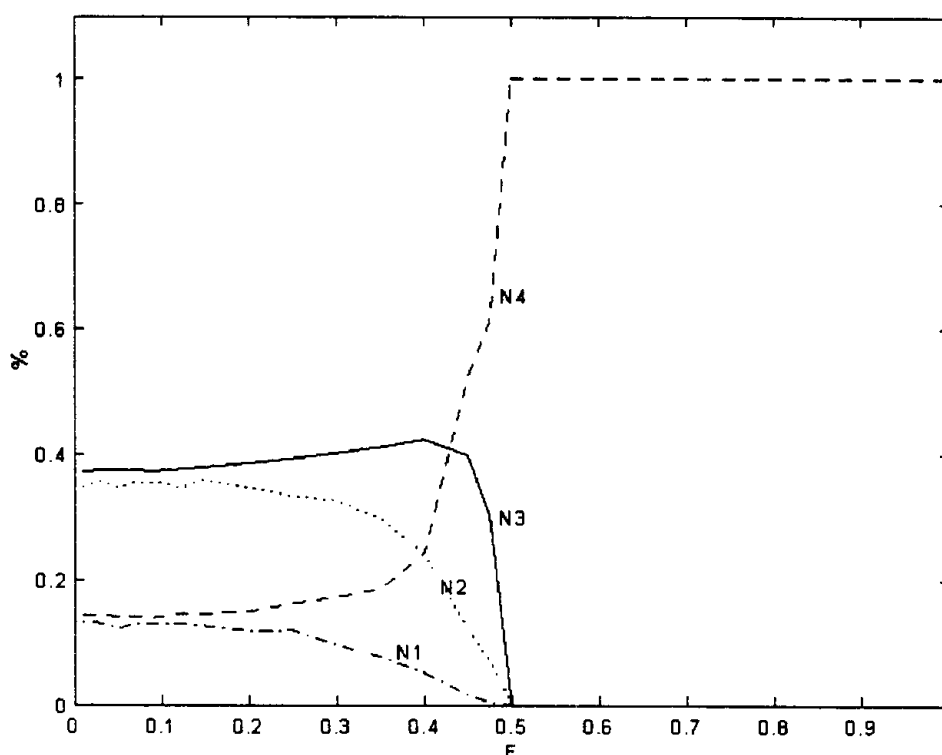


Figura 3.6: Fração dos tipos de vértices para diversos valores de F . $\% \equiv \frac{N_k}{\sum_k N_k}$.

Massa e raio de giração

Um fenômeno interessante neste modelo de invasão múltipla acontece com o raio de giração. Esperamos que, com o aumento de F , o raio de giração aumente até atingir um valor constante em $F = 1$. No entanto ele apresenta um comportamento um pouco diferente, como pode ser visto na Fig.3.7. Esta figura mostra o comportamento

do raio de giração para vários valores de F em uma rede de tamanho $L = 801$. O raio de giração passa por um máximo em $F \sim 0.35$. Este comportamento pode estar relacionado à forma assumida pelo aglomerado neste ponto. Como pode ser visto na Fig.3.8, para $F \sim 0.35$ o aglomerado possui a forma circular, a qual é a maior área associada a um dado perímetro. Nesta figura, as cores representam intervalos de crescimento igualmente espaçados, ou seja, cada cor corresponde a um certo número t de etapas de crescimento. Para este aglomerado, percebemos que o crescimento circular ocorre desde o início do processo de invasão, o que leva a crer que este seja o comportamento do sistema para qualquer tamanho de rede. Para $F \geq 0.35$, o raio de giração dos aglomerados diminui, atingindo um valor constante (do losango inscrito) para $F \geq 0.5$.

A massa dos aglomerados, por sua vez, sempre cresce quando o valor de F é aumentado, atingindo um valor constante para $F \geq 0.50$ (Fig.3.9).

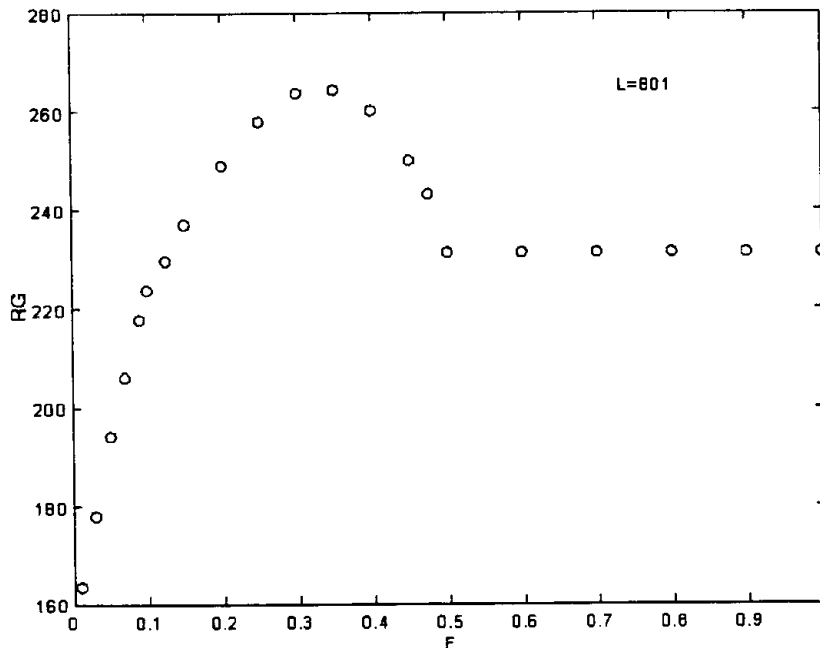


Figura 3.7: O raio de giração para diferentes valores de F . Rg atinge um máximo em $F \sim 0.35$.

Os valores constantes, atingidos pela massa do aglomerado e seu raio de giração

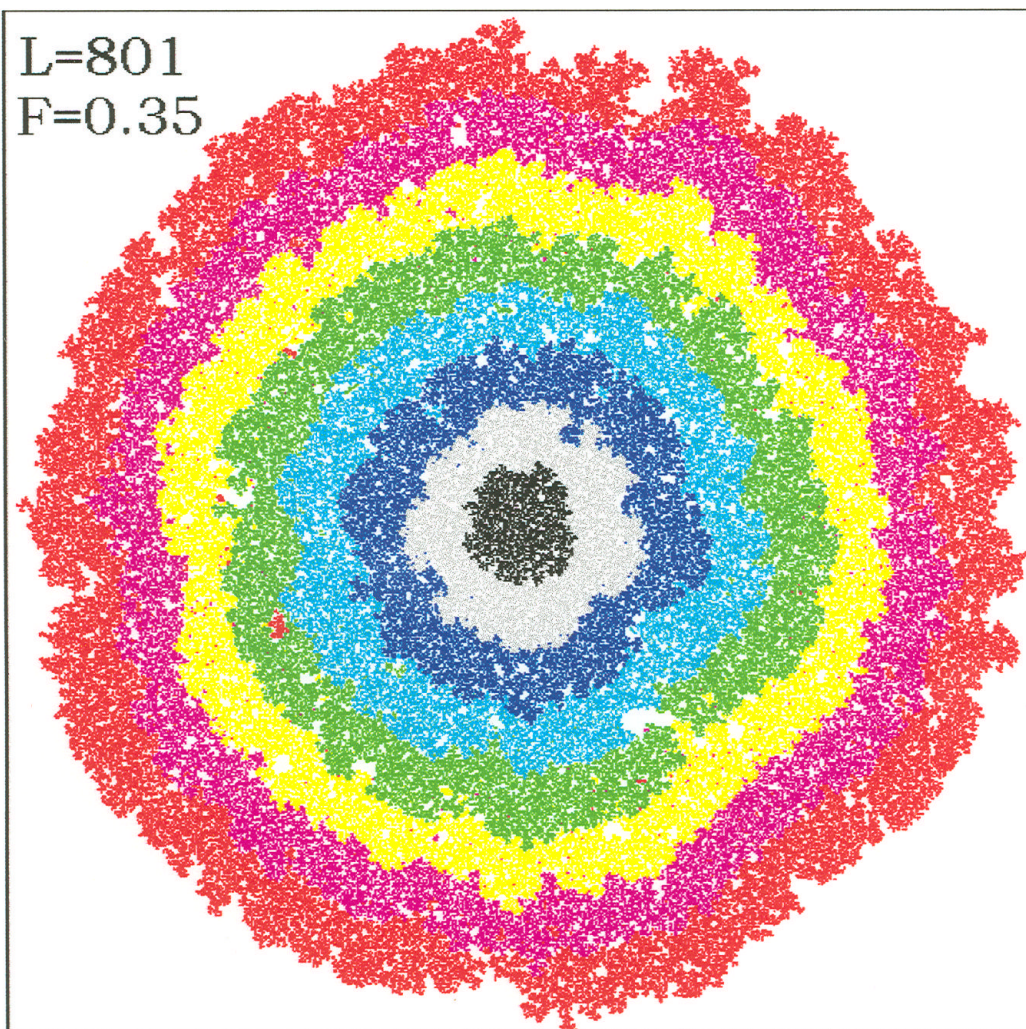


Figura 3.8: Aglomerado típico quando $F \sim 0.35$. A forma circular é mantida desde o início do crescimento. Este aglomerado possui 293606 sítios.

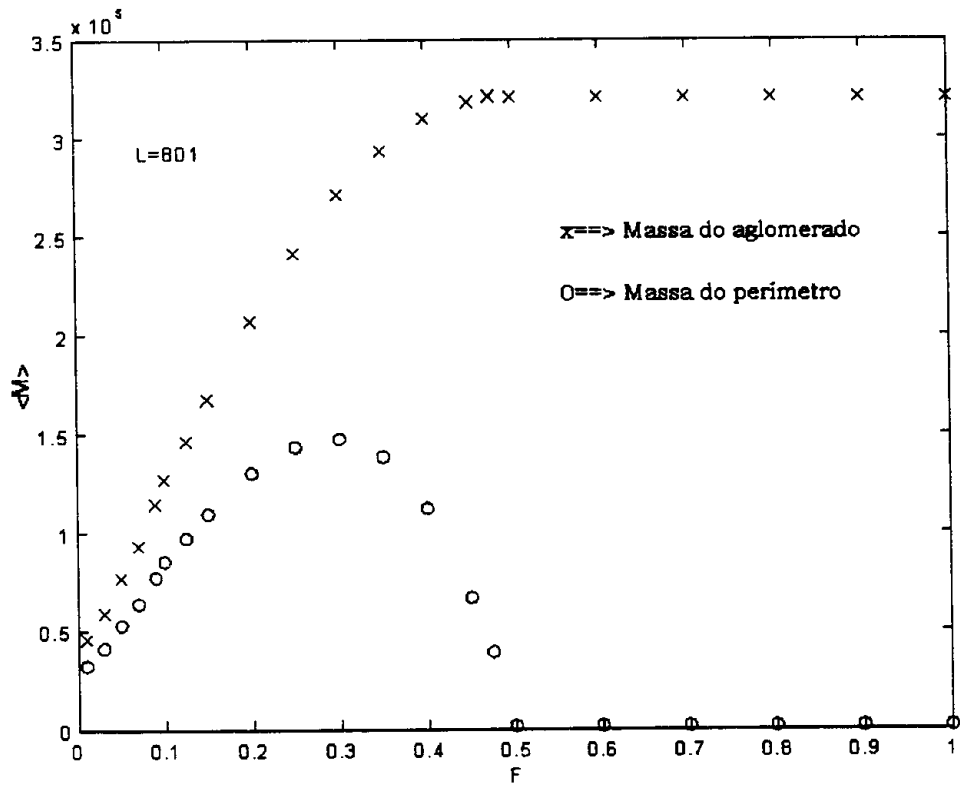


Figura 3.9: Massa do aglomerado e do perímetro total com função de F .

têm valores bem definidos na região $F \geq 0.50$. Os aglomerados compactos têm a forma de um losango inscrito na rede quadrada. Se a rede tem lado L , o lado do losango inscrito é $L' = \frac{L}{\sqrt{2}}$. A massa do aglomerado formado corresponde à área deste losango e é, portanto, $M = \frac{L^2}{2}$.

O raio de giração também pode ser calculado exatamente para o losango. Seu valor é $Rg = \frac{L}{\sqrt{12}}$.

Temos acentuado que os aglomerados construídos através deste modelo de percolação tornam-se objetos compactos para $F \geq 0.5$. Conhecendo os resultados da simulação, procuramos demonstrar analiticamente este fato da seguinte forma: considere o crescimento compacto de um aglomerado na forma de losango inscrito em um quadrado de lado l ($l < L$). Assim, o losango tem lado $\frac{l}{\sqrt{2}}$ em alguma etapa n do crescimento. Na etapa posterior, $(n+1)$, para que o aglomerado mantenha sua forma totalmente compacta, é necessário que ele cresça para um losango de lado $\frac{(l+2)}{\sqrt{2}}$ (Fig. 3.10). Sua massa, na etapa n é dada por

$$M_n = \frac{l^2}{2}$$

enquanto a massa da etapa M_{n+1} é

$$M_{n+1} = \frac{(l+2)^2}{2}.$$

O número de sítios a serem invadidos é dado pela Eq. 3.2. Então a massa na etapa $n+1$ deve ser

$$M_{n+1} = M_n + F N_r,$$

ou seja

$$\frac{(l+2)^2}{2} = \frac{l^2}{2} + F 4l$$

o que leva a

$$F = \frac{1}{2} + \frac{1}{2l}.$$

No limite termodinâmico,

$$F = \frac{1}{2}.$$

Este cálculo verifica o fato de que, para qualquer $F \geq 0.5$ os aglomerados resultantes do crescimento são objetos compactos.

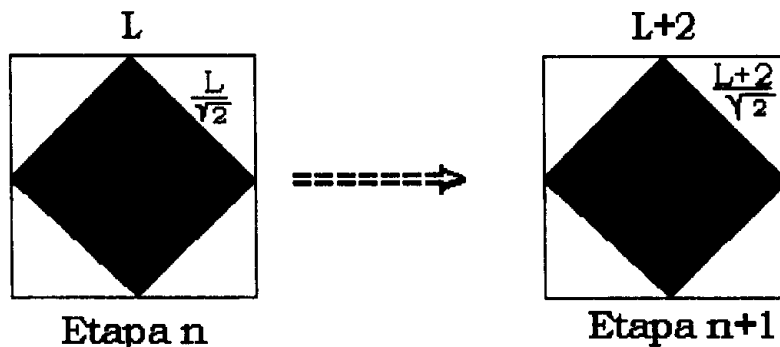


Figura 3.10: Diagrama do crescimento compacto de um aglomerado.

Dimensão fractal

As dimensões fractais podem ser calculadas conhecendo-se as massas médias e os raios de giração dos aglomerados para diferentes tamanhos de rede. Deste modo, estimamos as dimensões fractais dos aglomerados construídos através da invasão múltipla para diversos valores de F . Os resultados obtidos estão mostrados na Fig. 3.11. Nesta figura, percebemos que a dimensão fractal dos aglomerados coincide com a dimensão euclidiana para $F \sim 0.15$. No entanto, uma análise do número de coordenação médio destes aglomerados mostra que eles não são objetos compactos, uma vez que Z ainda está bastante distante do número de coordenação da rede regular ($Z = 4$). Existem muitas regiões não invadidas no interior destes aglomerados mas sua massa está homogeneamente distribuída e por isso sua dimensão fractal aproxima-se de 2.

Para F na região $0.15 \leq F \leq 0.5$ os aglomerados tendem a crescer mais compactos. Observa-se a presença de um mínimo para $F \sim 0.35$, posto que neste valor

o sistema tem um máximo no raio de giração (crescimento rápido e circular) que não é acompanhado pelo crescimento da massa, diminuindo, desta maneira, o valor da dimensão fractal.

Quando $F \geq 0.5$, a massa e o raio de giração atingem valores constantes. A dimensão fractal dos aglomerados se estabiliza em $D_F = 2$. Nesta região o número de coordenação médio é $Z = 4$, o que mostra que os aglomerados passam a ser objetos compactos.

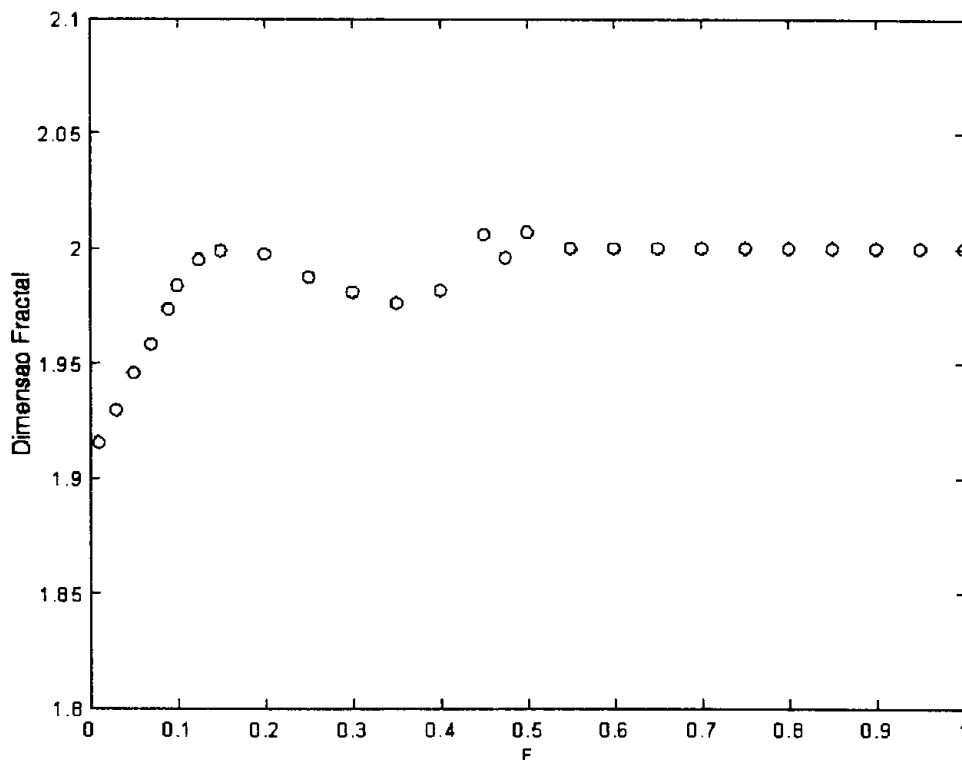


Figura 3.11: Dimensões fractais calculadas a partir da massa e raio de giração dos aglomerados para diferentes valores de F .

Deste modo, variando o parâmetro F , os aglomerados evoluem de uma forma ramificada semelhante à da percolação por invasão ordinária para uma estrutura compacta. Assim, dependendo do valor de F , este modelo de invasão múltipla garante uma mudança contínua da dimensão fractal no intervalo $[\frac{91}{48}, 2]$.

Na Tab. 3.2 fornecemos uma amostra de tempos de CPU típicos para a simulação deste modelo de percolação por invasão múltipla.

<i>F</i>	<i>CPU</i>	<i>Máquina</i>
0.01	29h	SUN – SPARC 2
0.05	27h	SUN – SPARC 2
0.07	27h	SUN – SPARC 2
0.10	26.5h	SUN – SPARC 2
0.20	2.0h	DEC – ALPHA 3000
0.30	19h	SUN – SPARC 2
0.40	1.5h	DEC – ALPHA 3000
0.50	1.5h	DEC – ALPHA 3000

Tabela 3.2: Tempo de CPU para invasão controlada pelo perímetro do retângulo que contém o aglomerado. O número de ensaios realizados é suficiente para que o desvio estatístico seja de 1%. O tamanho da rede é $L = 801$.

Capítulo 4

Modelo Otimizado de Percolação por Invasão

4.1 Introdução

Quando utilizamos simulações computacionais para estudar um sistema definido sobre uma rede regular, todas as propriedades termodinâmicas são calculadas como valores médios. Por outro lado, modelos definidos sobre fractais envolvem, em geral, duas médias: uma média térmica para a obtenção das funções termodinâmicas e uma outra média geométrica que é feita sobre os próprios fractais.

Os fractais obedecem à relação de escala $M \sim Rg^{D_F}$, onde M é a massa, Rg é o raio de giração e D_F a dimensão fractal. Entretanto, estas quantidades avaliadas para apenas um fractal, não podem ser consideradas representativas, já que há grandes flutuações de um fractal para outro e, mesmo para um único fractal, há uma forte dependência do exato momento em que o crescimento é interrompido. Como um exemplo, podemos citar o crescimento de um aglomerado através da percolação por invasão ordinária, mostrado na Fig. 4.3. Nela, plotamos $\log(M)$ x $\log(Rg)$ em cada instante do crescimento. Nesta figura, vemos que a estimativa da dimensão fractal (inclinação da curva $\log(M)$ x $\log(Rg)$) para apenas um aglomerado depende do instante

em que o crescimento é interrompido. Para diminuir o efeito das flutuações, a avaliação da dimensão fractal deve ser feita através dos valores médios da massa e do raio de giração.

Pensando nestes problemas, propomos o que chamamos de *modelo otimizado de percolação por invasão*. A idéia é criar um mecanismo de crescimento que, em qualquer instante, obedeça rigorosamente a relação de escala

$$M \sim (Rg)^{D_F} \quad (4.1)$$

ou que dela se aproxime da melhor maneira possível (forma otimizada).

Em nosso modelo, o número de sítios invadidos em cada etapa do crescimento possui dois limites: o limite inferior, onde um *único* sítio é invadido, garante que o crescimento do aglomerado não será interrompido antes que ele toque uma das fronteiras da rede. Por outro lado, o limite superior ocorre quando o *total* de sítios que compõem o perímetro são invadidos. Uma discussão detalhada deste processo de percolação é feita abaixo.

4.2 Construção do algoritmo

Para construir o algoritmo de otimização da percolação por invasão, precisamos que, em uma etapa (t) do crescimento, sejam conhecidas algumas características do aglomerado, como a sua massa $M(t)$, seu raio de giração $Rg(t)$ e a sua massa perimetral $M_p(t)$.

Organizamos os sítios de crescimento $M_p(t)$ em ordem crescente de seus números aleatórios associados. Assim, cada elemento situa-se em uma posição k ($1 \leq k \leq M_p(t)$) de uma lista que chamamos de lista de sítios de crescimento.

Para cada membro da lista, calculamos o raio de giração do passo posterior ($Rg(t+1)$) se k sítios forem invadidos. Conhecendo o raio de giração, podemos calcular também a massa que o aglomerado deveria ter no passo ($t+1$). Esta massa,

que chamamos de *massa esperada* do aglomerado e denotamos por M_e , é obtida da seguinte forma: em uma etapa t , a massa e o raio de giração do aglomerado estão relacionados através da Eq. 4.1, ou seja,

$$M(t) \sim (Rg(t))^{D_F}. \quad (4.2)$$

Na próxima etapa de crescimento,

$$M(t+1) \sim (Rg(t+1))^{D_F}. \quad (4.3)$$

Esta massa deve assumir um valor tal que D_F seja exatamente o mesmo que no passo anterior. Assim, a *massa esperada* deve ser

$$M_e(t+1) = M(t) \left(\frac{Rg(t+1)}{Rg(t)} \right)^{D_F}. \quad (4.4)$$

Em geral, esta quantidade é diferente da *massa realmente possível* ($M(t+1) = M(t) + k$) uma vez que o aglomerado sempre cresce por um número inteiro enquanto a massa esperada pode assumir qualquer valor real.

O cálculo do número de sítios a serem invadidos é feito com uma pesquisa através de *toda* a lista de crescimento, onde procuramos o valor de k para o qual a massa esperada esteja mais próxima possível da massa real, ou seja, encontramos quantos sítios da lista de crescimento devem ser acrescentados ao aglomerado para que

$$||M_e(t+1) - M(t+1)|| = \text{menor valor possível}. \quad (4.5)$$

Descrevemos abaixo o algoritmo completo para a simulação do modelo otimizado.

- i - A cada sítio da rede associamos um número aleatório r uniformemente distribuído no intervalo $[0, 1]$;
- ii - Selecionamos um sítio para iniciar o processo de invasão. Em nosso caso, escolhemos o sítio do centro da rede;

iii - Em cada etapa de crescimento, calculamos o número de sítios que devem ser invadidos (NSI), através do algoritmo de otimização descrito acima;

iv - Acrescentamos ao aglomerado, os NSI sítios de crescimento com os menores números aleatórios associados;

v - Atualizamos a lista de sítios de crescimento com a eliminação dos sítios invadidos e a inclusão dos sítios que se tornaram disponíveis para a invasão;

vi - Interrompemos o processo quando o aglomerado toca a fronteira da rede.

Neste modelo, D_F entra como um *mero parâmetro* que pode assumir qualquer valor real no intervalo $(0, \infty)$. Como veremos adiante, no intervalo $[1.89, 2]$ este parâmetro coincide com a dimensão fractal do aglomerado. Nós encontramos que o crescimento se faz em três diferentes regimes. Tais regimes são discutidos em detalhe nas próximas seções.

4.3 Resultados

Simulamos o crescimento de *um* aglomerado através do modelo otimizado para uma rede quadrada de tamanho $L = 201$ e diferentes valores de D_F ($0 \leq D_F \leq 10$). Para estudar a dinâmica do crescimento, definimos a diferença média entre as massas esperada e real como

$$\langle M_e - M \rangle (t) = \frac{\sum_{\tau=1}^t M_e(\tau) - M(\tau)}{t}. \quad (4.6)$$

Estas diferenças foram calculadas durante todo o crescimento do aglomerado e são mostradas na Fig. 4.1 para alguns valores de D_F . Nesta figura, exemplificamos os três regimes de crescimento citados acima:

i - $D_F = 0.25$ mostra o crescimento de um aglomerado quando $0 \leq D_F \leq 1.89$. A este intervalo chamamos de *região I*. Note que a massa esperada é sempre menor do que a massa real;

ii - $D_F = 1.92$ é um exemplo de como a diferença $\langle M_e - M \rangle (t)$ se comporta

quando D_F está no intervalo $1.89 \leq D_F \leq 2$ (*região II*). Aqui, a diferença entre as massas real e esperada é muito próxima de zero;

iii- Por fim, $D_F = 5$ é um exemplo típico do crescimento de aglomerados com $D_F > 2$ (*região III*). A massa esperada é sempre maior do que a realmente possível.

As principais características dos aglomerados crescidos nestas regiões são discutidas abaixo.

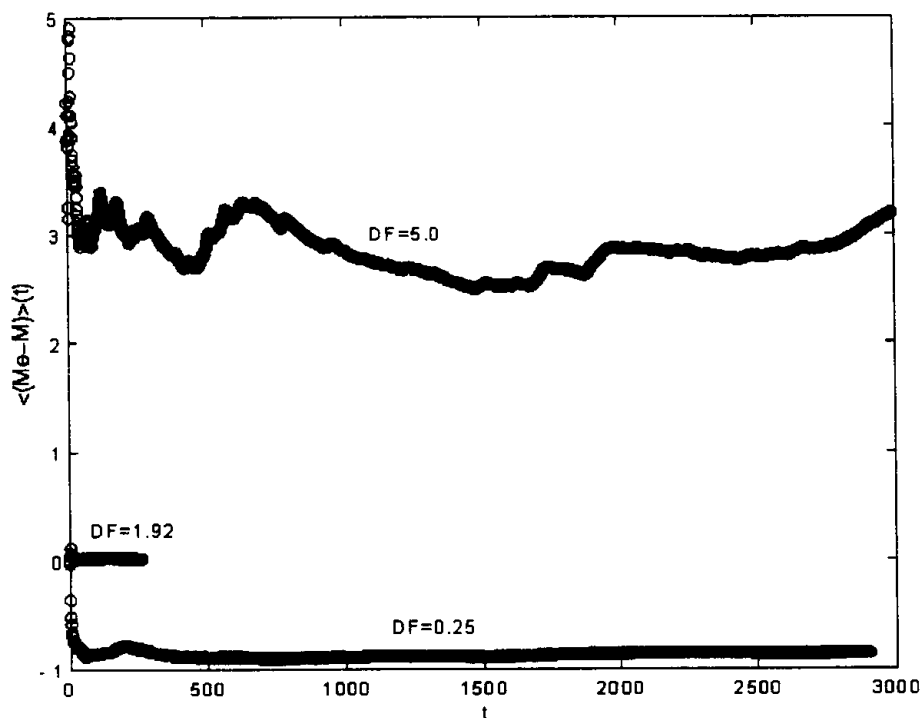


Figura 4.1: Diferença média entre as massas esperada e real de um aglomerado para $D_F = 0.25, 1.92$ e 5 .

4.3.1 Região I: $0 \leq D_F \leq 1.89$

Quando o parâmetro D_F é muito pequeno, a massa esperada em algum passo t é muito próxima da massa real da etapa $(t - 1)$. A situação ideal, neste caso, seria que o aglomerado não crescesse. Entretanto, o algoritmo proíbe que isto ocorra obrigando

que pelo menos um sítio seja invadido. Assim, a massa acrescentada ao aglomerado, em toda etapa de crescimento, é maior do que a esperada. Na Fig. 4.1 vemos que $\langle M_e - M \rangle(t)$ para $D_F = 0.25$ é menor que zero, o que mostra que o aglomerado é “forçado” a crescer. Note que se $D_F = 0$, a Eq. 4.4 fornece $M_e(t+1) = M(t)$. Como o aglomerado é obrigado a crescer de uma unidade de massa, $\langle M_e - M \rangle(t) = -1$. Assim, o aglomerado cresce como na invasão ordinária. Por outro lado, quando D_F é aumentado, o número de sítios invadidos em cada etapa de crescimento também tende a aumentar, como pode ser visto na Fig. 4.2. No entanto, este aumento ainda não é suficiente para que o algoritmo de otimização seja obedecido. Em todo o intervalo $0 \leq D_F \leq 1.89$ a massa acrescentada ao aglomerado é sempre maior do que a massa esperada e por isso, dizemos que o sistema é *frustrado* nesta região.

4.3.2 Região II: $1.89 \leq D_F \leq 2$

Para valores de D_F situados no intervalo $(1.89, 2)$, o algoritmo de otimização é extraordinariamente satisfeito. A Fig.4.1 mostra a diferença $\langle M_e - M \rangle(t)$ para $D_F = 1.92$. Na verdade, este é o comportamento dos sistemas em toda a região $1.89 \leq D_F \leq 2$. A diferença entre as massas esperada e real é muito próxima de zero e a relação de escala $M \sim Rg^{D_F}$ é satisfeita durante todo o processo crescimento. Nesta região, *o parâmetro D_F coincide com a própria dimensão fractal do aglomerado* em qualquer etapa do crescimento. Com isso, as médias sobre vários aglomerados são desnecessárias, ou seja, podemos construir aglomerados com dimensão fractal predefinida efetuando o crescimento de apenas um aglomerado.

Como podemos controlar a dimensão fractal, resolvemos comparar o crescimento de um aglomerado através do modelo otimizado com $D_F = 1.89$ com a percolação por invasão ordinária já que os dois modelos possuem a mesma dimensão fractal. Na invasão ordinária, o número de sítios invadidos em cada etapa de crescimento é sempre 1. Porém, no modelo otimizado este número varia muito de etapa a etapa, como pode ser visto na Fig. 4.2(d). O número médio de sítios invadidos em cada etapa de crescimento para o modelo otimizado é $\langle NSI \rangle \sim 38$. No entanto, o que mais impres-

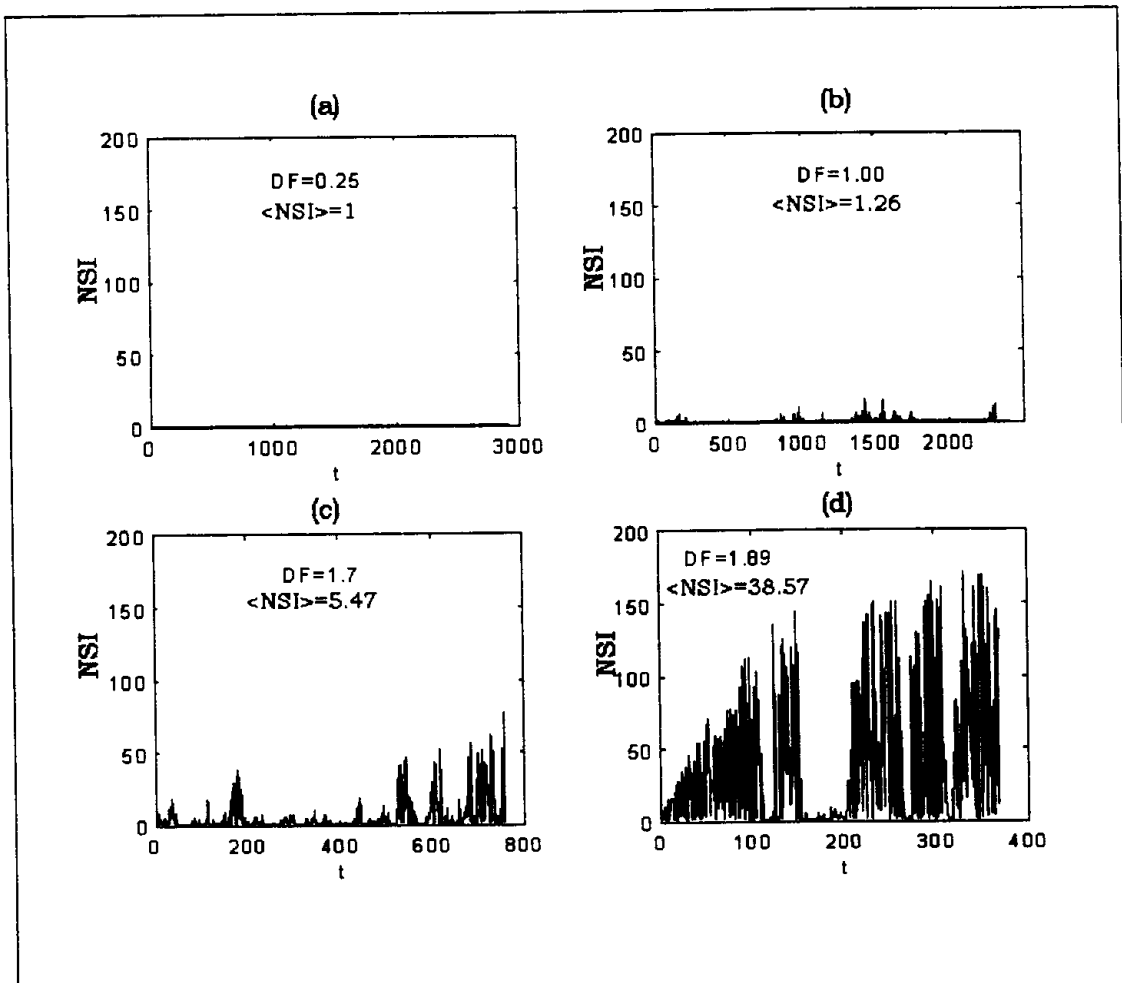


Figura 4.2: Número de sítios invadidos em cada etapa de crescimento para $D_F = 0.25, 1.00, 1.70$ e 1.89 .

siona nesta comparação entre os modelos não é a diferença entre o número médio de sítios invadidos em cada etapa, uma vez que quando tomamos o limite termodinâmico, tanto faz se invadimos 1 ou 38 sítios. A grande diferença está no desenvolvimento do aglomerado durante o seu crescimento. Na Fig. 4.3 mostramos o crescimento de um aglomerado para uma rede de tamanho $L = 201$. Na invasão ordinária, o crescimento é desordenado e gera uma linha sinuosa, mostrando as oscilações da massa como função do raio de giração. Para o modelo otimizado, estas oscilações não ocorrem, pelo contrário, obtemos uma reta perfeita. Note que no nosso modelo, em qualquer instante a dimensão do aglomerado está fixa no valor $D_F = 1.89$. Existem também grandes diferenças nas massas destes aglomerados: $M = 2906$ para a invasão ordinária e $M = 14233$ no modelo otimizado. Assim, embora a percolação por invasão ordinária e o modelo otimizado com $D_F = 1.89$ tenham a mesma dimensão fractal, os aglomerados não são essencialmente os mesmos.

Um parâmetro importante neste modelo é a razão entre o número de sítios invadidos e o número de sítios disponíveis para a invasão em cada etapa de crescimento $\frac{NSI(t)}{M_p(t)}$. Esta quantidade, mostrada na Fig. 4.4, tende assintoticamente a zero somente para $D_F < 2$. Quando D_F aumenta, o número de sítios invadidos em cada etapa tende a crescer pois aglomerado deve ser mais compacto, de maneira que sua dimensão fractal coincida com o valor de D_F . No entanto, para $D_F > 2$, o crescimento ocorre de maneira bastante diferente (Fig. 4.4(d)). As características de crescimento dos aglomerados no modelo otimizado para $D_F > 2$ será discutido na próxima seção.

4.3.3 Região III: $D_F \geq 2$

Neste modelo otimizado de percolação, quando o parâmetro $D_F > 2$, a diferença $\langle M_e - M \rangle (t)$ assume valores maiores do que zero, isto é, a massa esperada sempre supera a massa real. Isto pode ser visto na Fig. 4.1 que mostra $\langle M_e - M \rangle (t)$ para $D_F = 5$. Desta forma, nesta região o sistema também é frustrado, muito embora com

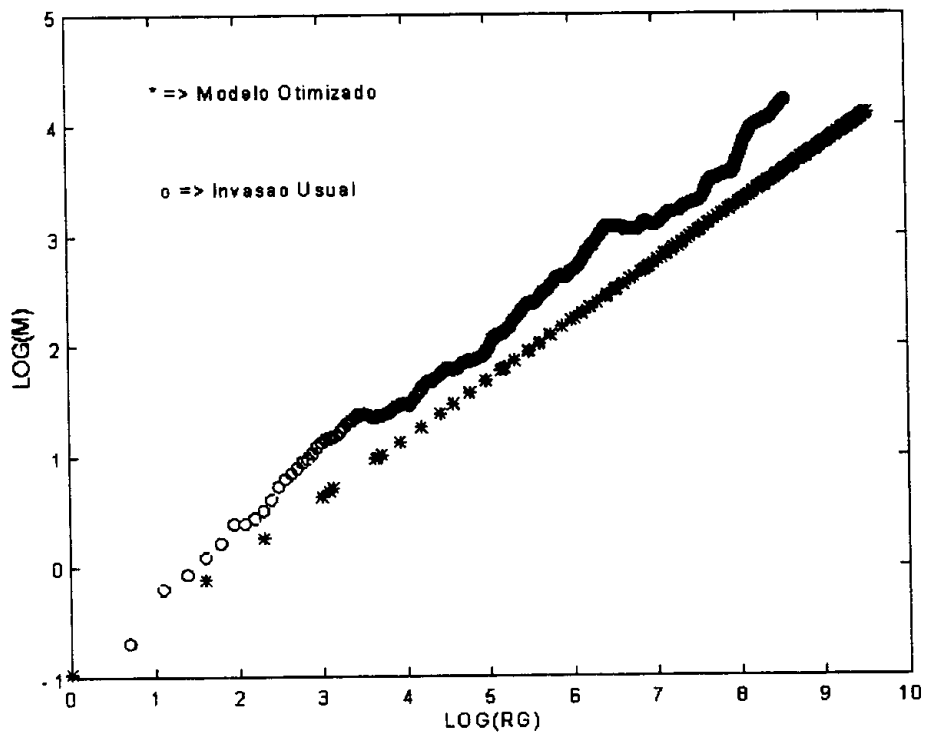


Figura 4.3: Comparação entre o crescimento de um aglomerado pela invasão ordinária (linha sinuosa) e pelo modelo otimizado com $D_F = 1.89$. A inclinação da reta (*) é 1.89.

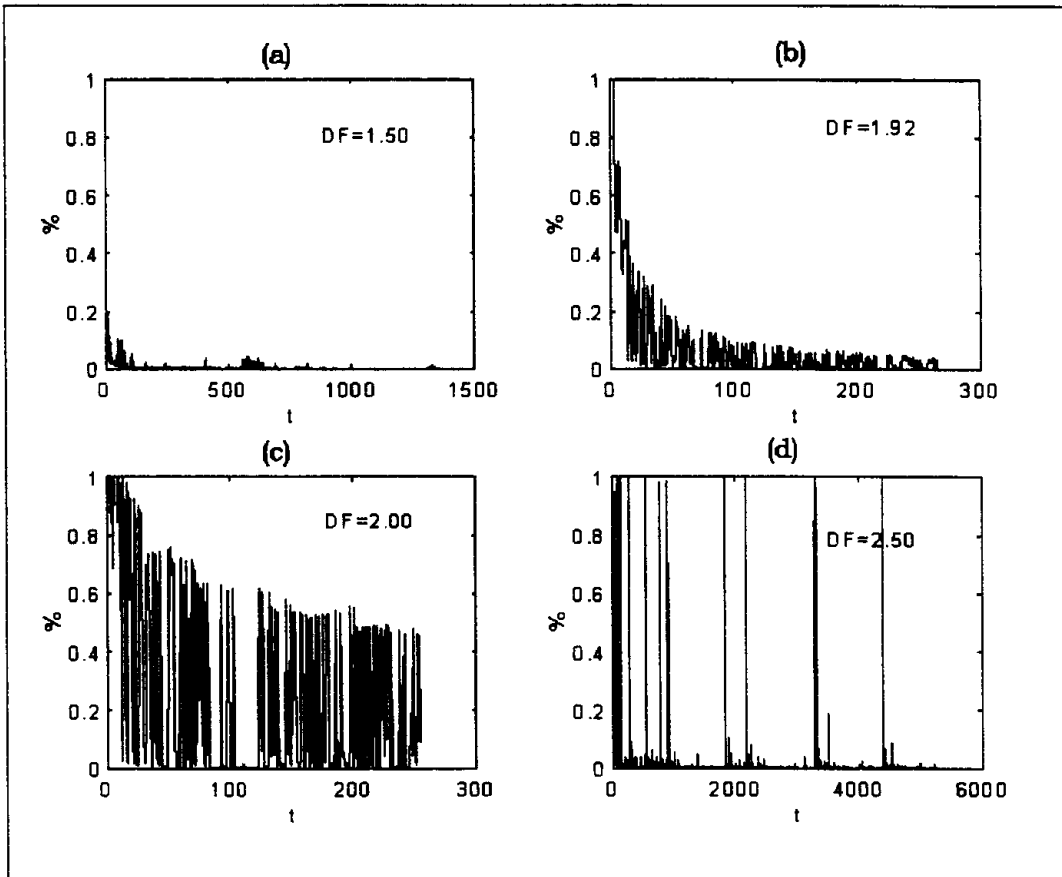


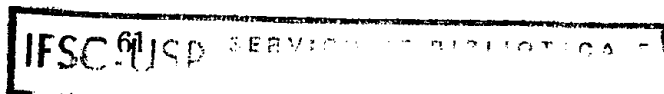
Figura 4.4: Fração do perímetro do aglomerado invadida em cada etapa de crescimento para diferentes valores de D_F . Note que esta quantidade tende assintoticamente a zero somente para $D_F < 2$. ($\% \equiv \frac{NSI(t)}{M_p(t)}$)

a origem e a natureza desta frustração bastante diferente daquela da região I.

Vemos na Fig. 4.4(d) que em algumas etapas do crescimento quase todos os sítios perimetrais são invadidos, enquanto na maioria das etapas o crescimento ocorre praticamente como na invasão ordinária. Isto indica que em certas etapas ocorrem explosões no crescimento da massa do aglomerado. A estas explosões chamamos *bursts*. Na Fig 4.6 mostramos a massa de um aglomerado contra o tempo de crescimento (número de etapas) para uma rede de tamanho $L = 201$ e $D_F = 5$. Nesta figura, as descontinuidades mostram um aumento repentino na massa do aglomerado (*burst*).

Em geral, um *burst* acontece depois de um longo período em que o crescimento do aglomerado ocorre praticamente como na invasão ordinária, isto é, apenas um sítio é invadido em cada etapa. Nas etapas em que o crescimento explosivo ocorre, praticamente todos os sítios da lista de crescimento são adicionados ao aglomerado. Em um *burst*, grande parte do perímetro é incorporado ao aglomerado e o número de sítios do perimetrais sofre uma queda brusca, como pode ser visto através da Fig. 4.7. Esta figura mostra o comportamento do raio de giração como função da massa dos sítios do perímetro do aglomerado para $L = 201$ e $D_F = 5$. Como uma amostra visual destes *bursts*, escolhemos uma grande explosão ocorrida na etapa $t = 965$ do crescimento de um aglomerado em uma rede de tamanho $L = 201$ com $D_F = 5$ e a mostramos na Fig. 4.5. Nela, estão representadas duas etapas de crescimento: na etapa $t = 964$ (antes da explosão de crescimento), o aglomerado é constituído por um núcleo compacto circundado por uma região ramificada. Na etapa $t = 965$ (onde ocorre a explosão), a região ramificada desaparece devido ao acréscimo de 737 sítios ao aglomerado.

Para analisar estas explosões de crescimento, estudamos o comportamento da massa esperada $M_e(t)$ e da massa realmente possível ($M(t) = M(t - 1) + k$) em duas etapas particulares: uma etapa onde a explosão ocorre e uma outra etapa imediatamente posterior à explosão. As Figs. 4.8 e 4.9 mostram a massa esperada, calculada a partir da Eq. 4.4 e a massa real do aglomerado como função do número de sítios disponíveis para a invasão. Na etapa em que a explosão ocorre, as curvas para $M_e(t)$ e $M(t)$ aproximam-se em dois pontos: no início e no fim da lista de sítios de crescimento. A máxima aproximação destas grandezas ocorre no final da lista ($k = 478$).



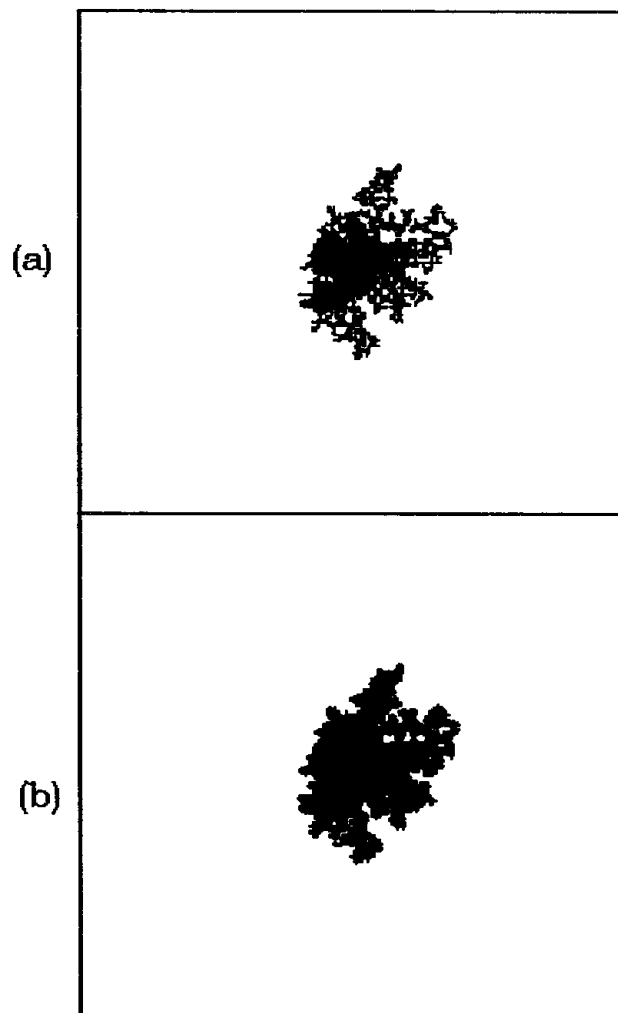


Figura 4.5: Crescimento explosivo do aglomerado para $L=201$ e $D_F = 5$. (a): Etapa anterior à explosão.(b): Etapa onde ocorre a explosão Nela,737 sítios são acrescentados ao aglomerado.

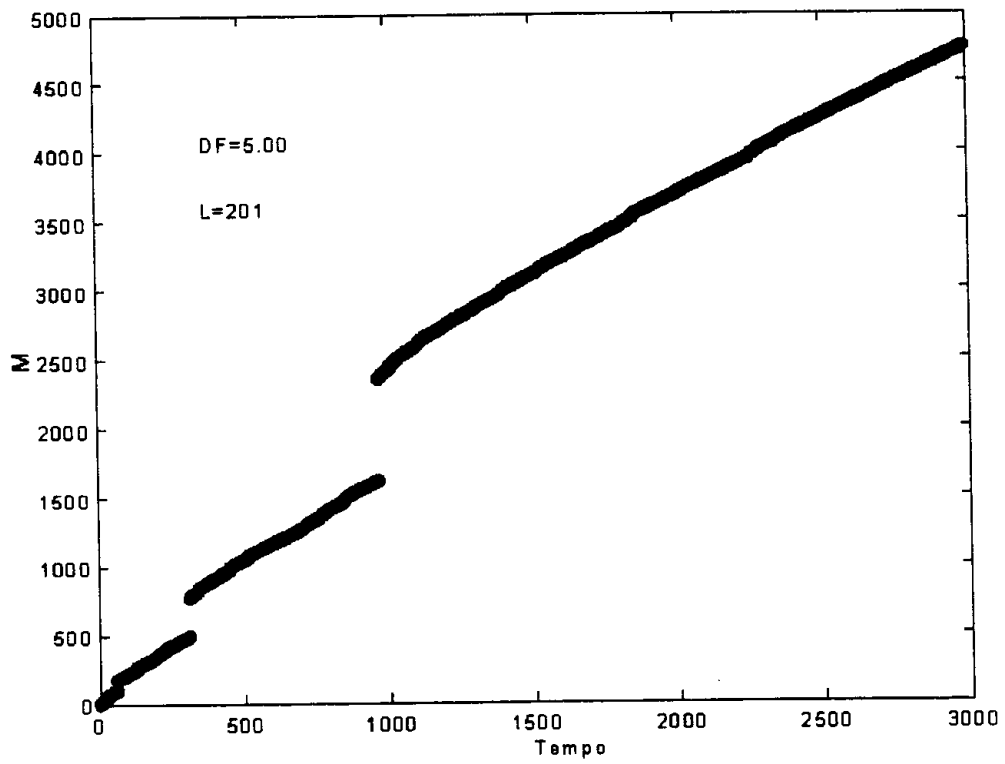


Figura 4.6: Comportamento da massa durante o crescimento do aglomerado. As descontinuidades representam as explosões no crescimento.

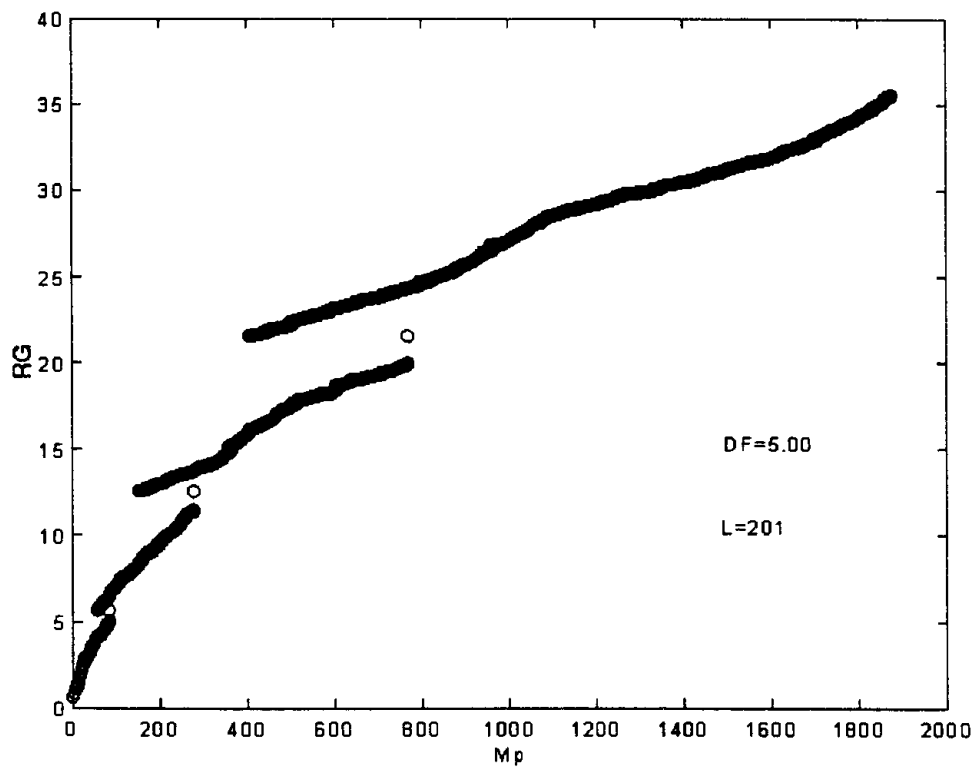


Figura 4.7: Raio de giração como função da massa dos sítios periferais. Nas explosões, o número de sítios do perímetro do aglomerado diminui.

Desta forma, um grande número de sítios deve ser incorporado ao aglomerado nesta etapa. A situação depois da explosão de crescimento é bastante diferente. O ponto de mínima diferença entre a massa esperada e a massa real ocorre no início da lista. Na verdade, nesta etapa, apenas 4 sítios são acrescentados ao aglomerado, ou seja, o sistema comporta-se praticamente como na invasão ordinária.

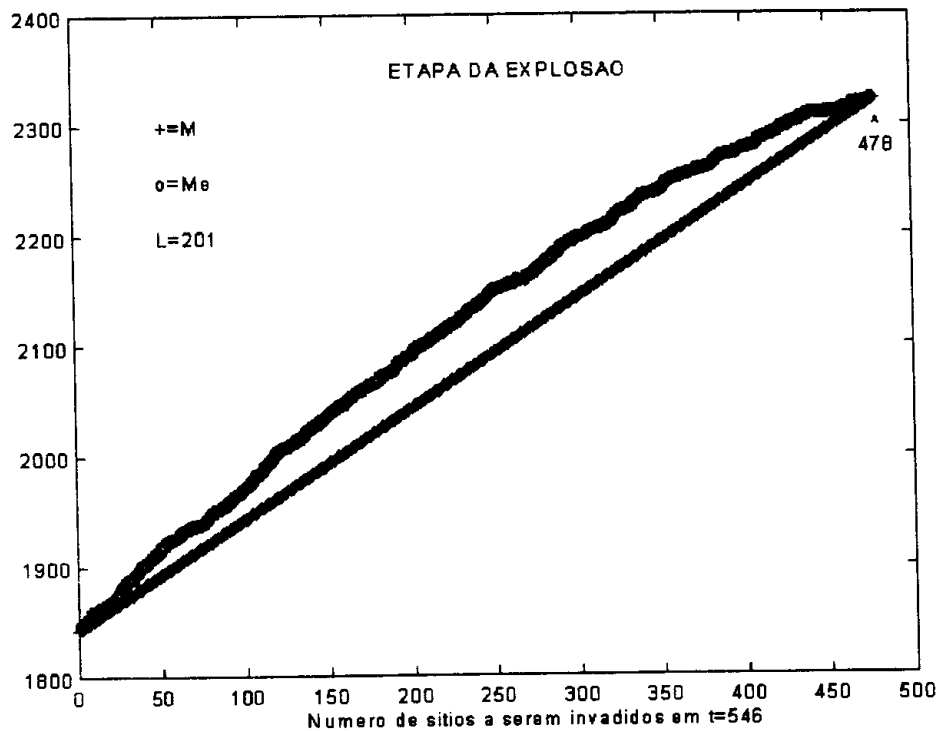


Figura 4.8: Massa esperada e massa real na etapa da explosão. As curvas têm uma aproximação máxima em $k = 478$.

Em geral, os primeiros sítios da lista de crescimento estão nas vizinhanças de regiões recentemente invadidas [40]. Isto favorece o crescimento ramificado do aglomerado. Assim, quando testamos os primeiros sítios da lista, o raio de giração e a massa esperada tendem a aumentar rapidamente. Porém, quando os sítios do final da lista de crescimento são testados, o raio de giração diminui seu ritmo de crescimento, uma vez que a invasão destes sítios deve compactar o aglomerado. Ilustramos este fato na Fig. 4.10 onde escolhemos $D_F = 1.92$ pois a lista de sítios de crescimento é bastante

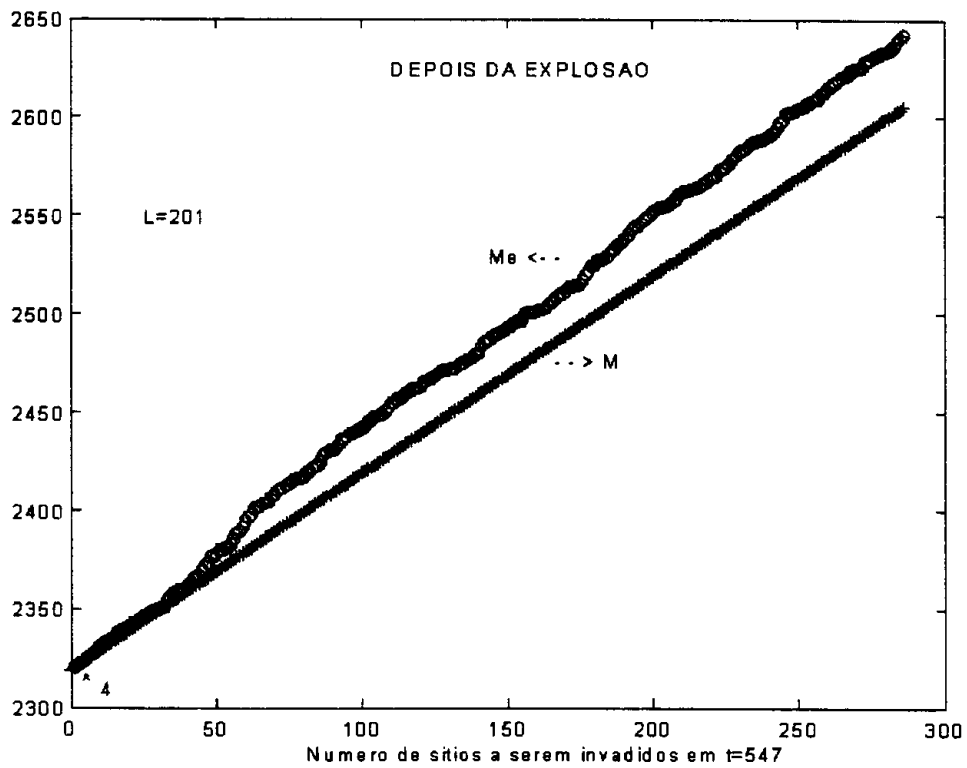


Figura 4.9: Massa esperada e massa real de um aglomerado em uma etapa imediatamente posterior à explosão.

longa e com isso o comportamento do raio de giração pode ser visto com clareza.

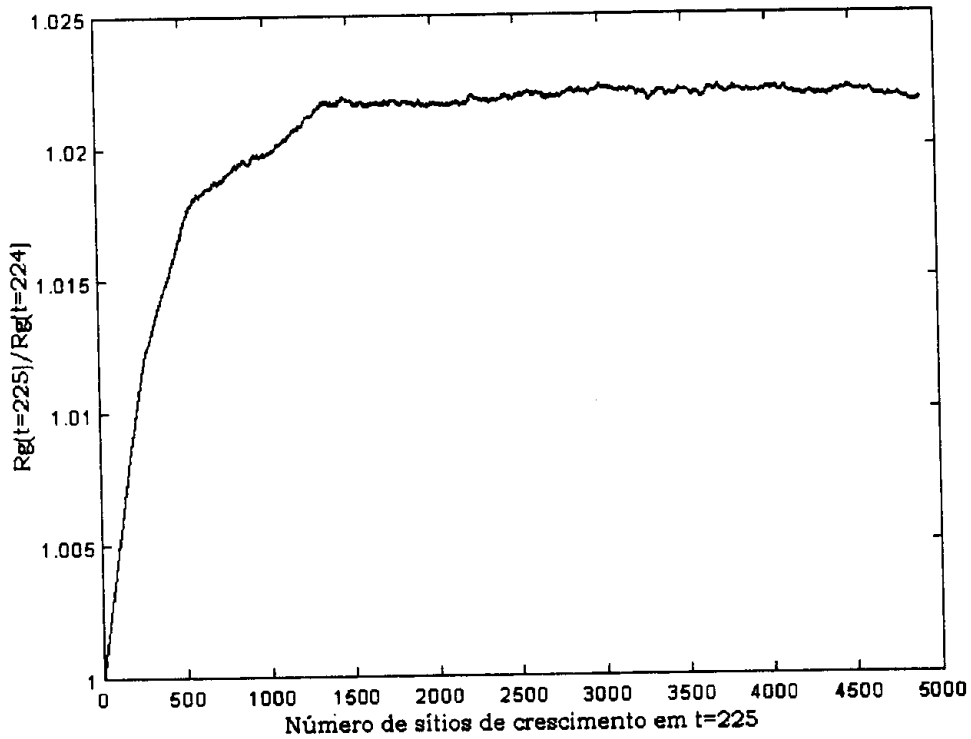


Figura 4.10: Raio de giração como função do número de sítios da lista de crescimento para uma etapa determinada. Neste caso $D_F = 1.92$.

Podemos compreender melhor o modelo otimizado de percolação através da análise do perfil de aceitação e da classificação dos vértices para aglomerados crescidos nas três diferentes regiões identificadas.

O perfil de aceitação comporta-se como uma função degrau cuja descontinuidade situa-se em algum ponto r_c o qual depende do tamanho da rede e do parâmetro D_F . O comportamento r_c para todo o intervalo $0 \leq D_F \leq 10$ é mostrado na Fig. 4.11.

Na região I ($0 \leq D_F \leq 1.89$), onde o modelo é frustrado, r_c mantém-se próximo ao valor do limiar de percolação da invasão ordinária, mas à medida em que D_F cresce, este valor aumenta, evoluindo de $r_c \sim p_c$ em $D_F = 0.25$ para $r_c = 1$ em $D_F = 2$. No entanto, para $D_F > 2$, r_c diminui, uma vez que durante grande parte do tempo total de crescimento, a invasão ocorre praticamente como na invasão ordinária. Nesta região,

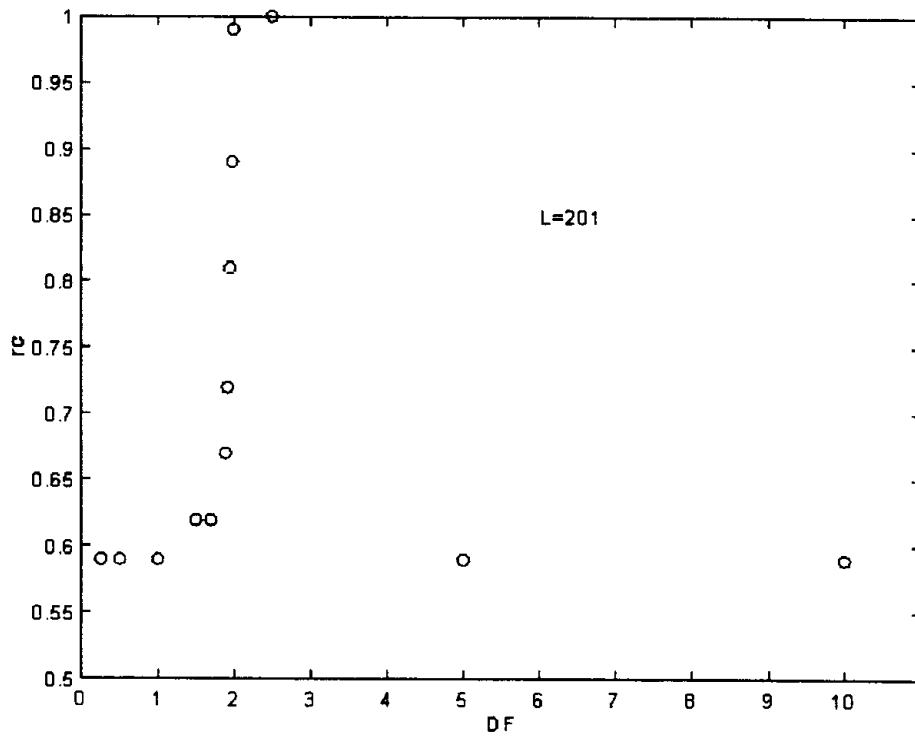


Figura 4.11: Evolução no número r_c para diversos valores de D_F em uma rede de tamanho $L = 201$.

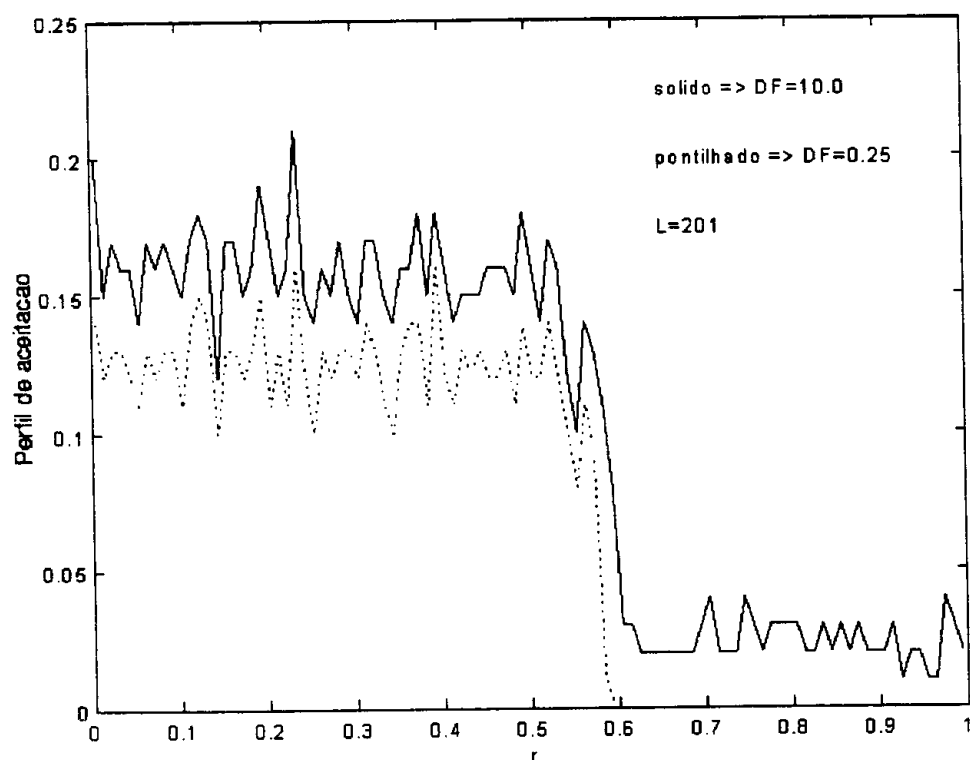


Figura 4.12: Perfil de aceitação para as duas regiões frustradas. O degrau menor em $D_F = 10$ reflete a existência das explosões.

o perfil de aceitação exhibe dois degraus como pode ser visto na Fig. 4.12. O primeiro degrau corresponde às etapas onde o crescimento ocorre como na invasão ordinária enquanto que o segundo degrau decorre dos *bursts*.

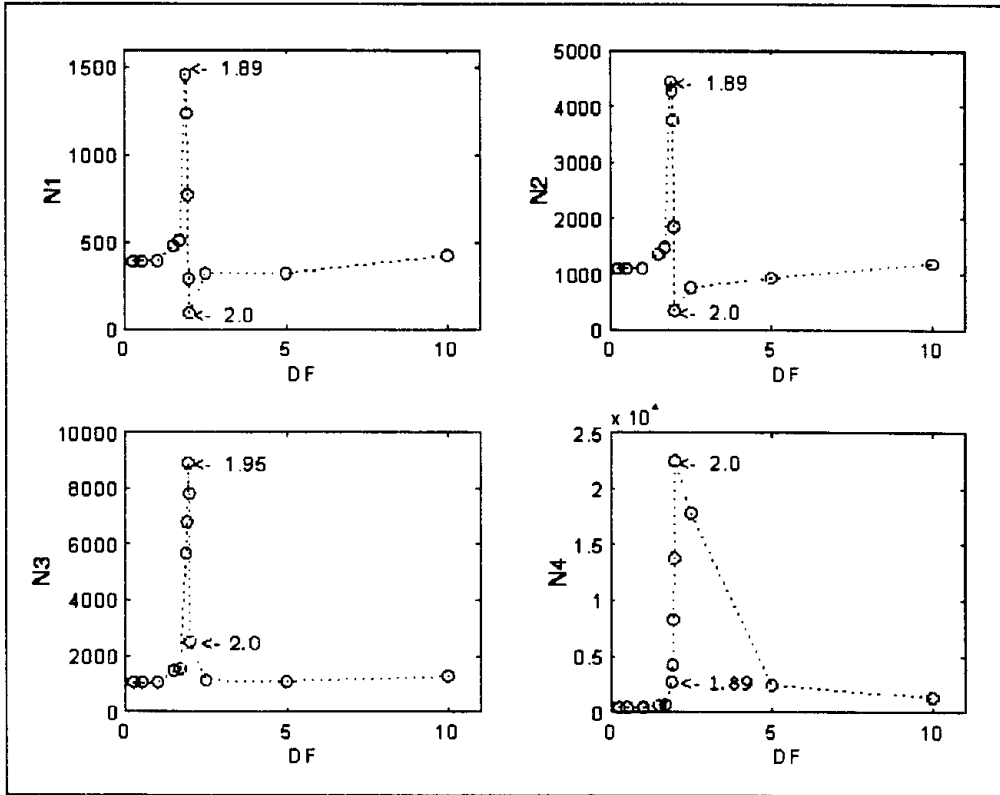


Figura 4.13: Comportamento dos vértices em uma rede de tamanho $L = 201$ para diferentes valores do parâmetro D_F .

A Fig. 4.13 mostra a evolução dos aglomerados de acordo com a classificação dos vértices para $0 \leq D_F \leq 10$. Na região $0 \leq D_F \leq 1.89$, os vértices dominantes são do tipo 2 e 3, de acordo com as simulações efetuadas para a invasão ordinária. No entanto, quando o parâmetro D_F é aumentado, o número de vértices tipo 3 e 4 aumenta rapidamente uma vez que o aglomerado deve crescer mais compacto. Isto deve ocorrer para que sua dimensão fractal coincida com o valor de D_F . Porém, na região $D_F > 2$, o aglomerado exhibe regiões compactadas e ramificadas. Devido à presença destas regiões ramificadas no aglomerado final, o número de vértices do tipo 4 tende a diminuir.

O número de coordenação foi calculado através da análise dos tipos de vértices (Eq. 2.23) e é mostrado na Fig. 4.14 para uma rede quadrada de tamanho $L = 201$

e $0 \leq D_F \leq 10$. Note que o número de coordenação evolui de $Z \simeq 2.5$ para $Z = 4$ quando D_F está no intervalo $(0, 2)$.

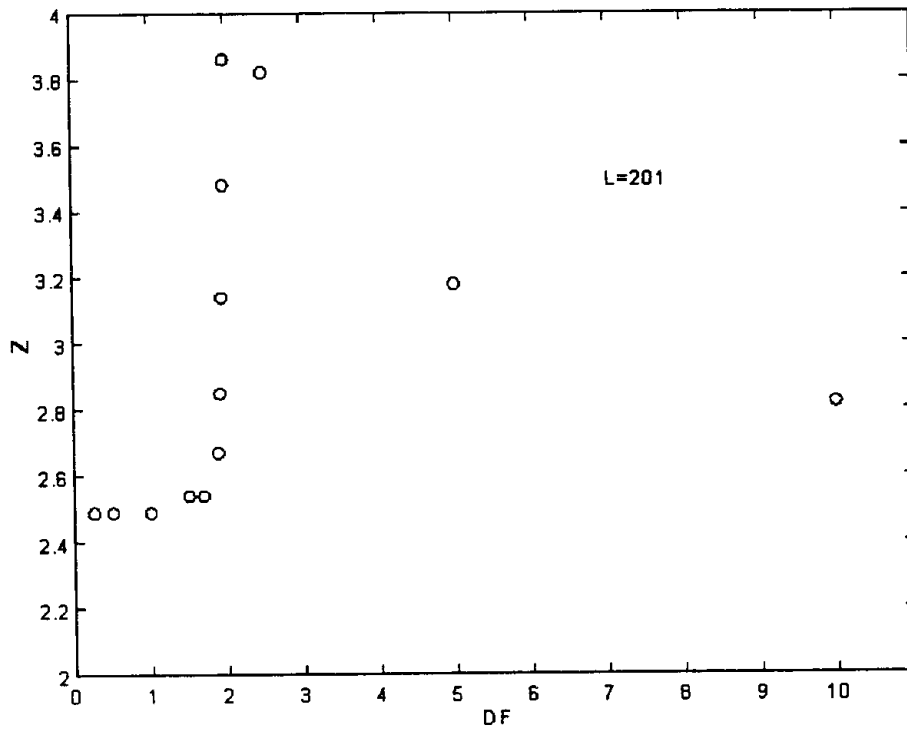


Figura 4.14: Número de coordenação de em aglomerado para rede quadrada de tamanho $L = 201$ e $0 \leq D_F \leq 10$.

Na Tab.4.1 fornecemos uma amostra de tempos de *CPU* típicos para o crescimento de um aglomerado através do modelo otimizado de percolação por invasão.

D_F	<i>CPU</i>	<i>Máquina</i>
0.01	12h	<i>SUN – SPARC 2</i>
0.50	12h	<i>SUN – SPARC 2</i>
1.50	10h	<i>SUN – SPARC 2</i>
1.89	5h	<i>DEC – ALPHA 3000</i>
1.92	4h	<i>DEC – ALPHA 3000</i>
1.95	4h	<i>DEC – ALPHA 3000</i>
1.98	2.5h	<i>DEC – ALPHA 3000</i>
2.00	0.75h	<i>DEC – ALPHA 3000</i>
10.0	8.75h	<i>SUN – SPARC 2</i>

Tabela 4.1: Tempo de CPU para crescimento de um aglomerado através do modelo otimizado rede quadrada de lado $L = 201$

Capítulo 5

Conclusões e perspectivas

Neste trabalho, introduzimos três modificações no modelo de percolação por invasão. Estas, permitem que vários sítios sejam simultaneamente invadidos em cada etapa do crescimento de um aglomerado. Em duas destas modificações, a invasão é controlada pelo fluxo de fluido invasor através da superfície do aglomerado. Em um terceiro modelo, o crescimento é controlado pela relação de escala entre a massa e o raio de giração.

Em nossa primeira proposta, a invasão é controlada pelo perímetro *total* (interno+externo) do aglomerado. Em cada etapa do crescimento uma certa fração F do perímetro do aglomerado é invadida.

Neste modelo, para qualquer valor de F (exceto $F = 0$), o ritmo da invasão é tão grande que os aglomerados são objetos compactos na forma de losangos.

No segundo modelo, o número de sítios invadidos em cada etapa é controlado pelo perímetro do retângulo no qual o aglomerado está inscrito: invadimos um número de sítios correspondente a uma fração F deste perímetro.

Variando o parâmetro F , os aglomerados evoluem de uma forma ramificada semelhante à da percolação ordinária para uma forma circular quando $F \sim 0.35$. Finalmente, tornam-se estruturas compactas para $F \geq 0.5$. Do ponto de vista da

dimensão fractal, este procedimento garante uma mudança contínua de D_F no intervalo $[\frac{91}{48}, 2]$. A análise do perfil de aceitação indica que este modelo pode corresponder a um modelo de percolação crítico onde p_c depende de F .

O terceiro modelo, que denominamos otimizado, consiste em um projeto ambicioso de construir aglomerados cujas dimensões fractais possam ser controladas. Neste esquema, o número de sítios a serem invadidos é escolhido de maneira que a massa e o raio de giração resultantes obedeçam à relação de escala $M \sim Rg^{D_F}$. Aqui, D_F é um mero parâmetro que pode assumir qualquer valor real no intervalo $(0, \infty)$.

No modelo otimizado, podemos identificar três regimes de crescimento distintos:

i - Na região $0 \leq D_F \leq 1.89$, para que a lei de escala seja satisfeita, o valor ideal do número de sítios a serem invadidos corresponde a menos de um sítio. Entretanto o algoritmo proíbe que isto ocorra e o crescimento se faz praticamente como na invasão ordinária. Neste sentido, dizemos que o sistema é frustrado e a dimensão fractal não pode ser controlada.

ii - Para D_F no intervalo $1.89 \leq D_F \leq 2$, o algoritmo de otimização é perfeitamente satisfeito. Nesta região as dimensões fractais dos aglomerados *coincidem* com o parâmetro D_F em toda etapa de crescimento e em qualquer escala, isto é, a dimensão fractal é um parâmetro estável durante todo o crescimento do aglomerado e não somente em um limite assintótico.

iii - Quando $D_F > 2$ o sistema é novamente frustrado. No entanto esta frustração ocorre de maneira bastante diferente daquela da região $0 \leq D_F \leq 1.89$. O crescimento dos aglomerados, na maioria das etapas, acontece como na invasão ordinária. Entretanto, em algumas etapas, uma grande quantidade de massa é repentinamente acrescentada ao aglomerado (*bursts*).

Como as dimensões fractais podem ser sintonizadas pelo valor do parâmetro D_F e mantêm-se fixas durante todo o processo de percolação, os aglomerados assim crescidos podem ser muito úteis no tratamento de problemas de diluição da Mecânica Estatística.

Utilizando estes aglomerados, pretendemos investigar modelos usuais da Mecânica

Estatística, como o modelo de Ising, só que neste caso, definido sobre aqueles aglomerados (com interações ferromagnéticas ou com interações antiferromagnéticas). Além do método de Monte Carlo [41], gostaríamos de aplicar a este problema, a técnica de matriz de transferência do grupo de renormalização fenomenológico [42] e expansões em séries [43].

Pretendemos ainda investigar a estatística de caminhos aleatórios, caminhos auto-exclusivos [44] e caminhos cinéticos [45] sobre nossos fractais. Estamos particularmente interessados na análise de leis de escala e estimativas de campo médio.

Desejamos também analisar alguns automatas celulares determinísticos como o $Q2R$ [46], que emula o método de Monte Carlo e o “Jogo da Vida” [47], originalmente introduzido com o intuito de estudar a evolução de colônias de bactérias. Estaremos atentos a aspectos como os de violação de ergodicidade e o surgimento de criticalidade auto-organizada [32].

No momento, estamos analisando os fractais gerados pelos nossos modelos determinando o seu esqueleto (*backbone*), os menores caminhos e os pontos de estrangulamento (*red sites*) [48].

Bibliografia

- [1] S. R. Broadbent e J.M. Hammersley. *Proc. Camb. Philos.Soc.* **53**, 629 (1957).
- [2] C. Domb. *Nature* **184** (1959).
- [3] A. Conway. *J. Phys.A:Math.Gen* **28**,335 (1995).
- [4] D. Ben-Avraham, B.Bideaux e L.S.Schulman. *Phys. Rev. A* **43**, 7093 (1991).
- [5] D. Stauffer. *Introduction to Percolation Theory*. Taylor and Francis, (1985).
- [6] D. W. Heermann. *Computer Simulation Methods in Theoretical Physics*. Springer-Verlag, (1986).
- [7] J. Blease. *J.Phys.C: Solid State Phys.* **10**, 917 (1977).
- [8] J. Blease. *J. Phys. C:Solid State Phys* **10**, 3461 (1977).
- [9] L.S. Schulman e P.E. Seiden. *J.Stat.Phys.* **27**, 83 (1982).
- [10] P. Grassberger. *J.Phys.A:Math.Gen.* **18**, L215 (1985).
- [11] J. Kertesz e T. Vicsek. *J.Phys.C:Solid State Phys.* **13**, L343 (1980).
- [12] S. Redner e A.C. Brown. *J. Phys.A:Math.Gen* **14**, L285 (1981).
- [13] B.M. Arora, M.Barma, D. Dhar e M.K.Phany. *J.Phys.C:Solid State Phys.* **16**, 2913 (1980).
- [14] N.S. Branco. *J. Stat. Phys.* **70**, 1035 (1993).
- [15] P.M. Kogut e P.L. Leath. *J. Phys.C:Solid State Phys.* **15**, 4225 (1982).

- [16] D.Wilkinson e J.F. Willensem. *J.Phys.A:Math.Gen* **16**, 3365 (1983).
- [17] T. Witten e L.M. Sander. *Phys. Rev. Lett.* **47**, 1400 (1981).
- [18] D.Wilkinson. *Phys. Rev. B* **30**, 520 (1984).
- [19] A. Birovljev, L. Furuberg, J. Feder, T. Jossang, K.J. Maloay e A. Aharony. *Phys. Rev. Lett.* **67**, 584 (1991).
- [20] P. Meakin, J. Feder, V. Frette e T. Jossang. *Phys. Rev. A* **78**, 2970 (1995).
- [21] R.N. Onody. *Int. J. Mod. Phys. C* **06**, 77 (1995).
- [22] R.N. Onody, A.N.D. Posadas, S. Crestana. *J. Appl. Phys.* **78**, 2970 (1995).
- [23] R.N. Onody e R.A. Zara. *Multiple invasion percolation. aceito no Physica A*.
- [24] B.B. Mandelbrot. *The Fractal Geometry of Nature*. Freeman New York, (1982).
- [25] J. Feder. *Fractals*. Plenum Press, (1988).
- [26] H. E. Stanley e N. Ostrowski, editor. *On Growth and Form - Fractal and non-Fractals Patterns in Physics*. Martinus and Nijhoff Publishers, (1986).
- [27] J. Hoshen e R. Kopelman. *Phys. Rev. B* **14**, 3923 (1976).
- [28] D. Stauffer. *Phys. Rep.* **54**, No. 01 (1979).
- [29] U.P.C. Neves. Percolação direcionada em redes regulares bidimensionais. Tese de Mestrado, Instituto de Física de São Carlos, (1992).
- [30] R.J. Baxter. *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*. Academic Press London, (1982).
- [31] A.A. Belavin, A.M. Polyakov e A.B. Zamolodchikov. *J. Stat. Phys.* **34**, 763 (1983).
- [32] P. Bak, C.Tang e K. Wiesenfeld. *Phys. Rev. A* **38**, 364 (1988).
- [33] P. Grassberger e S. S. Manna. *J. Phys.* **51**, 1077 (1990).

- [34] R. Bulirsch e J. Stoer. *Num. Math.* **06**, 413 (1964).
- [35] V. Privman, editor. *Finite Size Scaling and Numerical Statistical Systems*. World Scientific, (1990).
- [36] M. Z. Cieplak e M. Cieplak. *Phys. Lett.* **104a**, 290 (1984).
- [37] M. Barsony e D. Wilkinson. *J. Phys. A: Math. Gen.* **17**, L129 (1984).
- [38] R. Lenormand e D. Zarcone. *Phys. Rev. Lett.* **54**, 2226 (1985).
- [39] H. Kunz e B. Souillard. *J. Stat. Phys.* **19**, 77 (1978).
- [40] L. Furuberg, J. Feder, A. Aharony e T. Jossang. *Phys. Rev. Lett.* **61**, 2117 (1988).
- [41] K. Binder. *Monte Carlo Methods in Statistical Physics*. Springer, Berlin, (1979).
- [42] S. L. A. Queiroz e R. B. Stinchcombe. *Phys. Rev. B* **50**, 9976 (1994).
- [43] R. B. Stinchcombe. *Phase transitions 7*. Academic Press London, (1983).
- [44] K. Barat e B.K. Chakrabarti. *Phys. Rep.* **258**, 377 (1995).
- [45] U. P.C. Neves e R.N. Onody. *Physica A* **218**, 01 (1995).
- [46] Y. Pomeau. *J. Phys. A:Math. Gen.* **17**, L145 (1984).
- [47] J.B. Garcia, M.A.F. Gomes, T.I. Jyh, T.I. Ren e T.R.M. Sales. *Phys. Rev. E* **48**, 3345 (1993).
- [48] H. E. Stanley, H.J. Herrmann e D.C. Hong. *J. Phys. A. Math. Gen.* **17**, L261 (1984).

