

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E INFORMÁTICA

Espectro de Excitação Para Modelos Quânticos na Rede

Petrus Henrique Ribeiro dos Anjos

Dissertação apresentada ao Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, para obtenção do Título de Mestre em Ciências: Física Básica

ORIENTADOR: *Prof. Dr. Paulo Afonso Faria da Veiga*

SÃO CARLOS

2004

dos Anjos, Petrus Henrique Ribeiro
Espectro de excitação para modelos quânticos na rede /Petrus Henrique Ribeiro dos Anjos.
- - São Carlos, 2004
59 p.

Tese (Mestrado) - - Instituto de Física de São Carlos, 2001.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Afonso Faria da Veiga

1. Espectro de excitação 2. Modelo de Spin $O(N)$. 3. Equação de Bethe-Salpeter
I. Título.

Aos meus pais

Agradecimentos

Este trabalho foi financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo

Essa é certamente a parte menos precisa desta dissertação. É muito provável que algumas pessoas da maior importância para esse trabalho não sejam citadas aqui. No entanto, talvez apenas para manter a tradição eu citarei algumas.

Meus sinceros agradecimentos aos meus pais, “o rochedo em que me refugio”. Não acredito poder descrever a importância do apoio familiar para a conclusão desse trabalho.

É claro, agradeço ao Prof. Paulo da Veiga que, durante mais de dois anos, excedeu em muito seu papel de orientador. Longas conversas sobre vários aspectos da teoria, apego aos detalhes, o cuidado com a precisão... Tudo isso gerou um excelente ambiente de trabalho e me faz apontá-lo como um dos melhores modelos profissionais a ser seguido.

O Prof. Michael O’Carroll não poderia deixar de ser citado. Poucas pessoas tem a sorte de ter um bom orientador, enquanto eu na prática tive dois. Grande parte do sucesso desse trabalho se deve a contribuição do Prof. O’Carroll que partilhou comigo experiência e idéias brilhantes.

E finalmente, aos alunos do Grupo de Física Teórica, que foram fundamentais em um aspecto mais “técnico”. Sem eles todos aqueles “probleminhas do dia a dia” (“ Que droga, acabou a tinta!”, “Você sabe como fazer isso no latex?”...) teriam sido muito mais dolorosos. Agradeço a eles e a todos os funcionários do IFSC (o pessoal da biblioteca, o pessoal da informática...).

Resumo

Consideramos nesse trabalho questões relativas a parte inferior do espectro de energia-momento para o modelo de teoria campos na rede com tempo imaginário, associado ao sistema ferromagnético de spins clássicos de N -componentes definido na rede d dimensional: O Modelo de Spin $O(N)$. Esses sistemas são caracterizados por uma distribuição de probabilidade de spin por sítio. Tratamos apenas da região de altas temperaturas. O espectro de energia e momento deste modelo apresenta curvas de dispersão isoladas, que podem ser interpretadas como quasi-partículas. Em particular, estudaremos os estados de uma e duas quasi-partículas.

Para o espectro de uma partícula, obteremos a curva de dispersão e a massa de uma partícula. Esse resultado mostra a existência da chamada “lacuna espectral”. Ainda trabalhando no espectro de uma partícula, demonstraremos a existência de uma banda de espectro contínuo, associada a estados de duas partículas livres, e determinaremos a largura desta banda.

Nossa análise de duas partículas é restrita a uma aproximação em escada da equação Bethe-Salpeter. Usando essa aproximação mostraremos que a existência e a localização de estados ligados depende da verificação da dominação gaussiana para a função de correlação de quatro pontos. É sabido que estados ligados de duas partículas aparecem abaixo da banda de duas partículas se não vale a dominação gaussiana. Mostraremos que estados ligados de duas partículas aparecem acima da banda de duas partículas, caso a dominação gaussiana seja verificada.

Além disso, mostramos como o padrão espectral de duas partículas para desses modelos podem ser compreendido através da correspondência entre a equação Bethe-Salpeter e um operador hamiltoniano de Schrödinger de duas partículas na rede com potenciais atrativos ou repulsivos do tipo delta e dependentes dos índices de spin. Uma transformação de staggering é utilizada para relacionar os casos de potenciais atrativos e repulsivos e o espectro dos hamiltonianos e suas autofunções.

Abstract

In this work, we consider the low-lying energy-momentum spectrum for the imaginary-time lattice quantum field model associated with d -dimensional lattice ferromagnetic classical N -component vector spin systems: The $O(N)$ Spin Model. Each system is characterized by a single site “a priori” spin probability distribution. We work only at high temperature region ($0 < \beta \ll 1$). The energy-momentum spectrum exhibits isolated dispersion curves which are identified as single particles and multi-particle bands. In particular, we study states of one and two-particles.

For the single particle spectrum, we obtain the dispersion curve and the particle mass. This result show the existence of the so called “ low spectral gap”. Still working with the single particle spectrum, we show the existence of a continuum spectra band, associated to states of two free particles, and we obtain the band width.

Our two-particle bound state analysis is restricted to a ladder approximation of the Bethe-Salpeter equation, and the existence of bound states depend on whether or not Gaussian domination for the four-point function is verified. It is known that two-particle bound states appear below the two-particle band if Gaussian domination does not hold. Here, we show that two two-particle bound states appear above the two-particle band if Gaussian domination is verified.

We also show how the complete two-particle spectral pattern for these models can be understood by making a correspondence between the Bethe-Salpeter equation and a two-particle lattice Schrödinger Hamiltonian operator with attractive or repulsive spin-dependent delta potentials at the origin. A staggering transformation is used to relate the attractive and repulsive potential cases, as well as their associated Hamiltonians spectrum and eigenfunctions.

Sumário

1	Preliminares	1
1.1	O Modelo $O(N)$ e uma estratégia para a determinação do espectro.	1
1.2	Fórmula de Feynman-Kac e funções de correlação	8
2	Análise do Espectro do Modelo $O(N)$	12
2.1	O espectro de uma partícula	12
2.2	A equação de Bethe-Salpeter	22
2.3	A aproximação em escada	26
2.4	Estados ligados de duas partículas	31
2.5	Transformações de “staggering”	37
3	Conclusão	42
A		45
A.1	A Formula de Feynman-Kac	45
A.2	Expansão em Polímeros	50
A.3	Coordenadas Relativas Na Rede	56
	Bibliografia	59

Capítulo 1

Preliminares

“Lasciate ogne speranza, voi ch'intrate.”

Dante Alighieri.

1.1 O Modelo $O(N)$ e uma estratégia para a determinação do espectro.

A determinação das propriedades espectrais de sistemas físicos é fundamental nos vários campos da física contemporânea. Na teoria quântica de campos, o espectro do hamiltoniano determina a evolução temporal do sistema, a natureza e as massas das partículas envolvidas [1]. Na mecânica estatística clássica de sistemas no equilíbrio, considerando-se modelos de spins, o espectro associado ao logaritmo da matriz de transferência, fornece informações sobre as taxas de decaimento das funções de correlação. Já na mecânica estatística de sistemas fora do equilíbrio que admitem uma dinâmica markoviana [2], o espectro do gerador da dinâmica, corresponde ao gerador do semi-grupo contínuo de evolução no tempo para o problema e determina a taxa com a qual o sistema relaxa para o equilíbrio. O tema central deste texto é a determinação de propriedades espectrais em modelos na rede, onde trataremos um dos mais conhecidos

modelos: O Modelo de Spins $O(N)$.

O modelo $O(N)$ considerados aqui, trata-se de um modelo ferromagnético vetorial de spins clássicos tomados na região de altas temperaturas ($\beta \ll 1$), na rede \mathbb{Z}^d e com ação invariante por transformações globais do grupo $O(N)$ ($N, d \in \mathbb{N}, N > 1$). A função de partição deste modelo é dada pela expressão formal:

$$Z_\beta = \int e^{\beta \sum \vec{s}(x) \cdot \vec{s}(y)} \prod_z e^{-V(|\vec{s}(z)|)} d\vec{s}(z), \quad (1.1)$$

sendo $x = (x_0, \vec{x}) \in \mathbb{Z}^d$, onde x_0 é a “direção temporal”, $\vec{x} \in \mathbb{Z}^{d-1}$ é a posição espacial, $\vec{s}(x) = (s_1(x), s_2(x), \dots, s_N(x)) \in \mathbb{R}^N$, a variável de spin no sítio x da rede e o somatório é tomado sobre os pares não-ordenados de sítios primeiros vizinhos. O fator $e^{-V(|\vec{s}(z)|)} d\vec{s}(z)$ é a distribuição *a priori* de probabilidade de spin por sítio (*ssd* do inglês “single spin distribution”). Consideraremos somente o caso em que $V(s)$ cresce para o infinito ao menos quadraticamente. Vamos analisar a região de altas temperaturas $0 < \beta \ll 1$ e somente o caso de uma distribuição de spins invariante pelo grupo $O(N)$.

Dada uma função $F(\vec{s}_1 \dots \vec{s}_j)$ dos campos, a média ou valor médio normalizado dessa função é definida por:

$$\langle F(\vec{s}_1 \dots \vec{s}_j) \rangle_\beta = \frac{1}{Z_\beta} \int F(\vec{s}_1 \dots \vec{s}_j) e^{\beta \sum \vec{s}(x) \cdot \vec{s}(y)} \prod_z e^{-V(|\vec{s}|)} d\vec{s}(z). \quad (1.2)$$

Dessa forma, para $F(\vec{s}_1 \dots \vec{s}_j)$ invariante por transformações do grupo $O(N)$, $\langle F(\vec{s}) \rangle_\beta$ também é invariante, uma vez que $\sum \vec{s}(x) \cdot \vec{s}(y)$ é invariante pela ação dos elementos de $O(N)$. Se $F(\vec{s}_1 \dots \vec{s}_j) = \vec{s}_1 \cdot \dots \cdot \vec{s}_j$ então $\langle F(\vec{s}_1 \dots \vec{s}_j) \rangle_\beta$ é chamada de função de correlação de j -pontos.

Como destacado a equação (1.1) é uma expressão formal. Rigorosamente, partimos do modelo definido em uma caixa finita $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ e utilizando, por exemplo, a expansão em polímeros (veja a referência [3] e o apêndice A.2), mostramos que as

funções de correlação existem no limite termodinâmico (*i.e.* limite de volume infinito, $\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d$). Trabalhando no limite termodinâmico, denotaremos por $\langle s_{i_1}(x_1) \dots s_{i_n}(x_n) \rangle_\beta$, as médias normalizadas das funções de correlação, reservando $\langle \cdot \rangle$ para médias com $\beta = 0$ e todas as variáveis de spin na origem. É importante salientar que modelos de spin como este possuem infinitos graus de liberdade. E também que o caso $\beta \ll 1$, não corresponde ao caso de perturbação de uma medida gaussiana.

Os modelos $O(N)$ tratados aqui tem sido objeto de intensos estudos. Esses modelos possuem um grande interesse experimental, tendo sido empregados na descrição da transição de fase de cristais líquidos na fase nemática (veja Ref. [4]), e de outras propriedades cristalinas como expansividade térmica (veja Ref. [5]). Em física da matéria condensada, há uma vastidão de outras aplicações, a transição líquido-vapor (modelada pelo caso $N = 1$), várias propriedades estatísticas de longas cadeias poliméricas também são obtidas pelo uso do modelo (que corresponde ao limite $N \rightarrow 0$) (ver [6, 7]). A aplicabilidade do modelo de spins $O(N)$ a uma variedade tão grande de modelos nas proximidades de um ponto crítico é a manifestação da universalidade em fenômenos críticos (ver [7, 8]). Algumas dessas propriedades, do modelo $O(N)$, são análogas as propriedades de teorias de calibre em quatro dimensões, como por exemplo ao conhecido modelo ϕ^4 . Em particular, o caso $O(3)$ em duas dimensões fornece informações sobre a liberdade assintótica da QCD ($SU(3)$) em quatro dimensões.

Modelos de spin como este foram estudados em outros casos, utilizando técnicas desenvolvidas em [2] para o estudo da equação de Bethe-Salpeter na rede, no caso do gerador do semi-grupo contínuo de Markov associado a equações estocásticas do tipo Langevin, com classes de perturbações do tipo Ginzburg-Landau. Em particular para o caso do modelo de spin escalares, modelo de spin $O(1)$, em [9, 10, 11, 12] foram obtidas propriedades análogas as demonstradas aqui. O trabalho feito aqui, está sintetizado na referência [13].

Antes de iniciarmos o estudo do espectro do modelo de spins $O(N)$, é im-

portante salientar que o método utilizado para a obtenção do espectro já foi empregado com sucesso em diversos outros sistemas, a saber no caso de campos escalares euclidianos, sistemas de spins ferromagnéticos e modelos estocásticos de Ginzburg-Landau com dinâmica de Langevin.

A análise do espectro destes modelos, começa por associar ao sistema uma teoria quântica de campos (*qft* abreviatura do inglês “*quantum field theory*”) com tempo imaginário (que pode ser contínuo ou discreto, dependendo do modelo tratado). A *qft* associada a este modelo é construída de maneira usual como em [1], [14], tomando-se a direção x_0 como a direção temporal, e definindo-se operadores de translação temporal \hat{T}_0 e espacial \hat{T} . Essa construção fornece um espaço de Hilbert \mathcal{H} com produto interno denotado por $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}$, operadores auto-adjuntos de energia $H \geq 0$ e momento \vec{P} , que são definidos como os geradores dos operadores de translação no tempo e no espaço por $\hat{T}_0 = e^{-H} > 0$ e $\hat{T}^{\vec{x}} = e^{-i\vec{P}\cdot\vec{x}}$, o operador de campo em tempo-zero $\hat{s}(\vec{x})$, $x = (0, \vec{x})$ e vetor de vácuo Ω . Dessa forma a *qft* associada ao modelo $O(N)$ é dada por uma medida de probabilidade do tipo Gibbs e associa operadores auto-adjuntos correspondentes ao hamiltoniano (limitado inferiormente) e ao momento, que comutam entre si, de forma que podemos determinar seu espectro conjunto. A relação entre as médias estatísticas e os objetos no espaço de Hilbert são estabelecidas através da fórmula de Feynman-Kac (F-K) (veja apêndice A.1 e a referência [1]). Sendo $\hat{s}(0) = e^{-i\vec{P}\vec{x}}\hat{s}(\vec{x})e^{i\vec{P}\vec{x}}$, $x_k = (t_k, \vec{x}_k)$ com o ordenamento temporal $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$, temos

$$(\Omega, \hat{s}_{i_1} e^{-H(x_{0,2}-x_{0,1})} e^{-i\vec{P}(\vec{x}_2-\vec{x}_1)} \hat{s}_{i_2} \dots e^{-H(x_{0,n}-x_{0,n-1})} e^{-i\vec{P}(\vec{x}_n-\vec{x}_{n-1})} \hat{s}_{i_n} \Omega)_{\mathcal{H}} = \langle s_{i_1}(x_1) \dots s_{i_n}(x_n) \rangle_{\beta}. \quad (1.3)$$

A fórmula de F-K permite relacionar valores esperados no vácuo (objetos no espaço de Hilbert) a funções de correlação (*cf's* - do inglês “*correlation functions*”), objetos probabilísticos. Dessa propriedade podemos obter, em alguns casos, representações espectrais para as *cf's*. Com efeito, no lado direito da equação (1.3) denotamos \hat{s}_i , que

são operadores de campo, ao passo que no lado esquerdo temos s_i , que são variáveis aleatórias. Com o formalismo introduzido pela fórmula de F-K (1.3), o problema da obtenção do espectro de H e \vec{P} pode ser resolvido considerando-se propriedades analíticas da representação espectral da transformada de Fourier das cf 's. A análise das funções de correlação via a fórmula de Feynman-Kac será discutida na seção 1.2.

A presença de curvas isoladas no padrão espectral do modelo $O(N)$ permite a interpretação de estados de quasi-partículas. Na região inferior do espectro, encontra-se uma curva de dispersão isolada $w(\vec{p})$, onde $\vec{p} = (p_1, \dots, p_d)$ é o momento do sistema e $p_i \in (-\pi, \pi]$ é autovetor de P_i , o operador de momento na direção i . A curva $w(\vec{p})$ está associada a estados com uma única quasi-partícula, gerada por vetores da forma $\hat{s}_i(\vec{x})\Omega$. A restrição de $w(\vec{p})$ ao momento $\vec{p} = \vec{0}$ define a massa da partícula. O uso da rede, ao invés do continuum, limita a variação do momento do sistema de forma que, acima da curva de uma partícula, existem bandas de largura finita associadas a estados de duas, três ou mais partículas livres. Essas bandas eventualmente se interceptarão para um número de partículas suficientemente grande. O espectro de uma partícula e a banda de duas partículas para o modelo de spins $O(N)$ serão discutidos na seção 2.1.

Próximo a essas bandas, podem existir outras curvas isoladas, que no modelo $O(N)$ estão associadas a existência de estados ligados entre as partículas. Os estados de duas partículas são gerados por vetores da forma $[\hat{s}_i(\vec{x})\hat{s}_j(\vec{y})]\Omega$. Estes estados podem ser decompostos, usando a simetria $O(N)$ do modelo, em estados rotacionalmente invariantes $[\hat{s}(\vec{x}) \cdot \hat{s}(\vec{y})]\Omega$ e de traço nulo $[(\hat{s}_k(\vec{x})\hat{s}_\ell(\vec{y}) - \frac{\delta_{k\ell}}{N}\hat{s}(\vec{x})\hat{s}(\vec{y}))]\Omega$ ¹. No cenário geral, um estado ligado de duas partículas, caso exista, se encontra abaixo da banda de duas partículas para uma interação atrativa e acima desta banda caso a interação seja

¹O estado de traço nulo pode em seguida ser decomposto em estados simétricos $[(\hat{s}_k(\vec{x})\hat{s}_\ell(\vec{y}) + \hat{s}_\ell(\vec{x})\hat{s}_k(\vec{y}) - \frac{2\delta_{k\ell}}{N}\hat{s}(\vec{x})\hat{s}(\vec{y}))]\Omega$ e anti-simétricos $[(\hat{s}_k(\vec{x})\hat{s}_\ell(\vec{y}) - \hat{s}_\ell(\vec{x})\hat{s}_k(\vec{y}))]\Omega$.

repulsiva^{2,3}. Em [15] foram estabelecidas condições para a existência do estado ligado de duas partículas no caso de uma interação atrativa para o modelo $O(N)$. Nas seções 2.2, 2.3 e 2.4, nós estabelecemos as condições para a existência o estado ligado de duas partículas no caso de uma interação repulsiva, estendendo e completando os resultados obtidos em [15]. As figuras (1.1) e (1.1) mostram esboços do padrão espectral inferior do modelo de spin $O(1)$ no caso atrativo e repulsivo respectivamente.

Ainda em [15] mostrou-se que a energia de ligação de duas partículas (*i.e.* a diferença entre a energia de duas partículas livres e de duas partículas ligadas) no caso atrativo, se anula quando a intensidade da interação tende a zero. Para os vários modelos discutidos na literatura anterior (veja a referência [2, 9]), observou-se que os estados ligados acima e abaixo da banda de duas partículas possuem, aproximadamente, a mesma energia de ligação. Na seção 2.2 e 2.3, procederemos a análise do equação de Bethe-Salpeter, que é a ferramenta chave para a obtenção dos estados ligados. A seguir na seção 2.4, usaremos essa análise para obter os estados ligados de duas partículas, mostrando que a energia de ligação para os casos atrativos e repulsivos são as mesmas.

As semelhanças no espectro de partículas de modelos tão diversos, conduziram a investigações mais profundas sobre a origem deste padrão espectral. Em particular, foi mostrado em [9] e [16], que espectro do operador de Schrödinger não relativístico com um potencial delta na origem

$$H_1 = H_0 + V \equiv -\Delta + \lambda\delta(\vec{x}), \quad (1.4)$$

onde Δ é o laplaciano na rede \mathbb{Z}^d , possui um padrão análogo ao desses modelos. E

²Um estado ligado abaixo da banda, está associado a um decréscimo na energia do par de partículas não interagentes, assim costuma se chamar este caso de atrativo. Evidentemente, o caso com um estado ligado acima da banda, caracteriza um aumento na energia do par, e portanto recebe o nome de caso repulsivo.

³No entanto no modelo do campo escalar na rede com interações não-locais, podem existir ambos os estados simultaneamente.

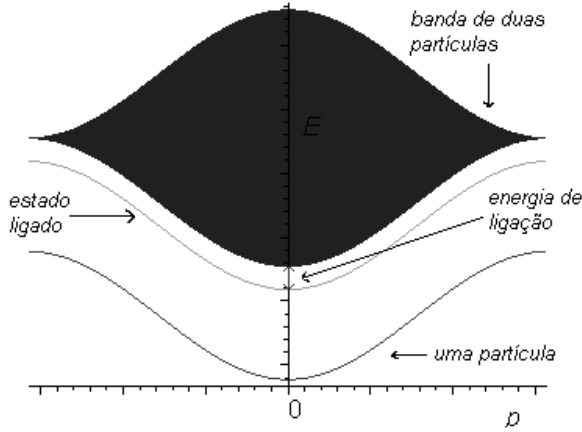


Figura 1.1: Esboço do padrão espectral do modelo de spin escalar no caso atrativo.

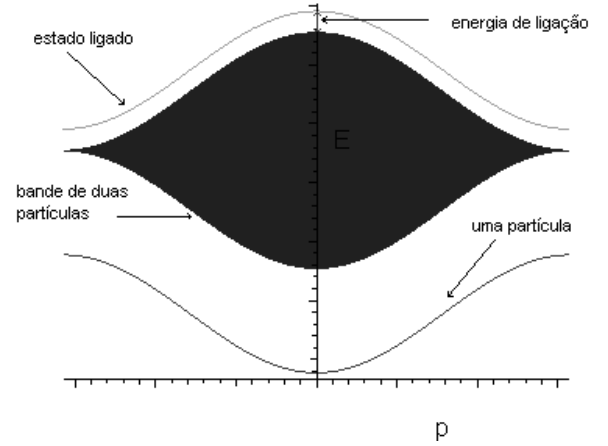


Figura 1.2: Esboço do padrão espectral do modelo de spin escalar no caso repulsivo.

embora existam problemas em se definir potenciais do tipo delta no continuum, na rede \mathbb{Z}^d eles estão bem definidos matematicamente.

Tomando-se a energia do estado fundamental de H_1 como 0, é sabido, que este hamiltoniano possui um espectro contínuo no intervalo $[0, 4d]$. Abaixo do espectro contínuo existe, para o caso atrativo $\lambda < 0$, um estado ligado de energia negativa $-E_b$, $E_b > 0$, para $d = 1, 2$ e qualquer valor da constante de acoplamento λ . Para $d \geq 3$, o estado ligado aparece apenas para λ inferior a um valor crítico (como mostrado em [9]), o que está associado a existência de limites de Birman-Schwinger. O espectro para o caso repulsivo $\lambda > 0$, também possui a parte contínua do espectro, mas o estado ligado, quando existe, se encontra acima da banda em $4d + E_b$. É fácil mostrar que a bem conhecida transformação de *staggering*, é capaz de mapear o padrão espectral do caso atrativo no repulsivo e vice-versa. Esta transformação converte grandes momentos em pequenos momentos (e portanto pequenas oscilações das funções de onda em grandes oscilações). O uso da transformação de *staggering* e seu papel numa análise do comportamento aproximado do padrão espectral do modelo de spins $O(N)$ será discutida na seção 2.5.

1.2 Fórmula de Feynman-Kac e funções de correlação

Apesar dos subespaços vetoriais (e portanto, pela fórmula de F-K, das *cf*s) apropriados para o tratamento de teorias de campo bosônicas, como os modelos de spin, serem bem conhecidos a escolha de subespaços convenientes em modelos mais complexos está longe de ser uma questão trivial (veja exemplos das dificuldades em [17],[18]). A formulação apresentada aqui, pretende servir como um guia geral para a escolha desses subespaços.

Como usual, afim de determinar o espectro de um operador, basta considerar os elementos de matriz

$$(\hat{\Phi}, \hat{T}_0^{|x_0|} \hat{T}^{\vec{x}} \hat{\Psi})_{\mathcal{H}},$$

sendo $x = (x_0, \vec{x}) \in \mathbb{Z}^d$, $\hat{T}_0 = e^{-H}$ e $\hat{T}^{\vec{x}} = e^{i\vec{P}\cdot\vec{x}}$, com os vetores $\hat{\Phi}, \hat{\Psi}$ pertencentes a um subconjunto denso do espaço de Hilbert \mathcal{H} . Para $\hat{\Phi}$ e $\hat{\Psi}$ com suporte finito em $x_0 \geq 0$, nos temos a fórmula da Feynman-Kac (1.3),

$$(\hat{\Phi}, \hat{T}_0^{x_0} \hat{T}^{\vec{x}} \hat{\Psi})_{\mathcal{H}} = \langle (T_0^{x_0} T^{\vec{x}} \Psi) \Theta \Phi \rangle_{\beta},$$

onde aparecem objetos de \mathcal{H} (vetores e operadores) no lado esquerdo da equação e variáveis aleatórias no direito. Salientamos que T_0 é a um translação temporal unitária e $T^{\vec{x}}$ é uma translação espacial por \vec{x} . Θ é o operador de reflexão temporal usual, definido por

$$\Theta s_i(\{x_0, \vec{x}\}) = s_i(\{-x_0, \vec{x}\})$$

Tomando $\chi(w)$ como a translação de χ por w , e pondo $x_0 = v_0 - u_0$, a

fórmula F-K, para Φ e Ψ com suporte em $x_0 = 0$, toma a forma

$$\mathcal{G}_{\Phi, \Psi}(x) = (\hat{\Phi}, \hat{T}_0^{|x_0|} \hat{T}^{\vec{x}} \hat{\Psi})_{\mathcal{H}} = \begin{cases} \langle [\Theta \Phi(u_0, 0)] \Psi(v_0, \vec{x}) \rangle_{\beta}, & \text{se } u_0 < v_0, \\ \langle \Phi(u_0, 0) \Theta \Psi(v_0, \vec{x}) \rangle_{\beta}^*, & \text{se } u_0 > v_0; \end{cases}$$

onde $*$ indica a conjugação complexa.

Definimos a transformada de Fourier discreta d -dimensional de uma função $h(x)$ por

$$\tilde{h}(p) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} e^{-i p \cdot x} h(x)$$

e a transformada inversa

$$h(x) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^d \int_{p \in T_d} e^{i p \cdot x} \tilde{h}(p) d^d p.$$

onde $T_d = \{p | p_i \in (-\pi, \pi]\}$.

As representações espectrais de $\mathcal{G}_{\Phi, \Psi}(x)$ e de sua transformada de Fourier $\tilde{\mathcal{G}}_{\Phi, \Psi}(p)$ são obtidas da representação espectral do produto de operadores de translação

$$\hat{T}_0^{|x_0|} \hat{T}^{\vec{x}} = \int_0^1 \int_{T_{d-1}} \lambda_0^{|x_0|} e^{i \vec{\lambda} \cdot \vec{x}} d\mathcal{E}(\lambda_0, \vec{\lambda}),$$

onde $\mathcal{E}(\lambda_0, \vec{\lambda})$ é a família espectral conjunta de \hat{T}_0 e \vec{P} . Usando essa representação, obtemos

$$\tilde{\mathcal{G}}_{\Phi, \Psi}(p) = (2\pi)^{d-1} \int_0^1 \int_{T_{d-1}} \left[\frac{1}{e^{i p_0} - \lambda_0} + \frac{1}{e^{-i p_0} - \lambda_0} \right] \delta(\vec{p} - \vec{\lambda}) d(\hat{\Phi}, \mathcal{E}(\lambda_0, \vec{\lambda}) \hat{\Psi})_{\mathcal{H}}.$$

Analisando esta representação espectral com \vec{p} fixo, vemos que as singularidades complexas de $\tilde{\mathcal{G}}$ em p_0 determinam pontos no espectro de energia-momento correspondente ao subespaço associado aos vetores Φ e Ψ .

Em seguida, analisaremos os casos especiais dos vetores $\hat{\Phi}$ e $\hat{\Psi}$, que definem

as funções de dois e quatro pontos, que serão utilizadas posteriormente na determinação do espectro de e-m para uma e duas partículas.

Para analisar o caso de uma partícula, tomemos $\Phi = s_{i_1}(0, \vec{x}_1)$ e $\Psi = s_{i_2}(0, \vec{x}_2)$. Da fórmula de F-K, a função \mathcal{G} correspondente é, tomando-se $x = (v_0 - u_0, \vec{x})$,

$$\mathcal{G}_{\vec{x}_1, i_1, \vec{x}_2, i_2}(x) = \langle s_{i_1}(u_0, \vec{x}_1) s_{i_2}(v_0, \vec{x}_2 + \vec{x}) \rangle_\beta.$$

Definimos a função de dois pontos por

$$G_{i_1, i_2}(x) = \mathcal{G}_{\vec{x}_1, i_1, \vec{x}_2, i_2}(v_0 - u_0, \vec{0}),$$

onde $\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$. As transformadas de Fourier de G_{i_1, i_2} e $\mathcal{G}_{\vec{x}_1, i_1, \vec{x}_2, i_2}$ são relacionadas pela fórmula

$$\tilde{G}_{i_1 i_2}(p) = e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)} \tilde{\mathcal{G}}_{\vec{x}_1, i_1, \vec{x}_2, i_2}(p),$$

de forma que as singularidades em p_0 complexo de $\tilde{G}_{i_1 i_2}(p)$ e $\tilde{\mathcal{G}}_{\vec{x}_1, i_1, \vec{x}_2, i_2}(p)$ são as mesmas.

Analogamente, para a análise de duas partículas, tomemos $\Phi = s_{i_1}(0, \vec{x}_1) s_{i_2}(0, \vec{x}_2)$ e $\Psi = s_{i_3}(0, \vec{x}_3) s_{i_4}(0, \vec{x}_4)$. A função de correlação de quatro pontos correspondente é dada por

$$\mathcal{G}_{\vec{x}_1, i_1, \vec{x}_2, i_2, \vec{x}_3, i_3, \vec{x}_4, i_4}(x) = \langle s_{i_1}(v_0, \vec{x}_1) s_{i_2}(v_0, \vec{x}_2) s_{i_3}(u_0, \vec{x}_3 + \vec{x}) s_{i_4}(u_0, \vec{x}_4 + \vec{x}) \rangle_\beta.$$

A função de quatro pontos usual é dada por

$$S_{i_1 i_2 i_3 i_4}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \langle s_{i_1}(x_1) s_{i_2}(x_2) s_{i_3}(x_3) s_{i_4}(x_4) \rangle_\beta.$$

Da invariância translacional das cf 's, podemos escrever

$$S_{i_1 i_2 i_3 i_4}(x_1, x_2, x_3, x_4) = S_{i_1 i_2 i_3 i_4}(0, x_2 - x_1, x_3 - x_1, x_4 - x_1).$$

No que se segue utilizaremos a representação com tempos iguais, onde $x_1^0 = x_2^0 = x_3^0 = x_4^0$.

Para o tratamento da função de quatro pontos, introduziremos as coordenadas relativas. A idéia de se usar coordenadas relativas é baseada na invariância translacional do sistema e consiste em escrever

$$\vec{\xi} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1, \quad \vec{\eta} = \vec{x}_4 - \vec{x}_3 \quad \text{e} \quad \tau = x_3 - x_2.$$

É importante notar que as coordenadas relativas exercem na rede um papel similar ao desempenhado no contínuo pelas coordenadas do centro de massa e da massa reduzida. Essas coordenadas são introduzidas, uma vez que uso das coordenadas de centro de massa e de massa reduzida é inadequado na rede, pois, como é fácil ver, as coordenadas do centro de massa e a da massa reduzida podem assumir valores que não pertencem a rede.

Em coordenadas relativas, a função de quatro pontos usual fica dada por

$$S'_{i_1 i_2 i_3 i_4}(\vec{\xi}, \vec{\eta}, \tau) = S_{i_1 i_2 i_3 i_4}(0, \vec{x}_2 - \vec{x}_1 = \vec{\xi}, x_3 - x_2 = \tau, x_4 - x_1 = \vec{\xi} + \vec{\eta} + \tau),$$

por abuso de notação, escreveremos $S' \equiv S$. A transformada de Fourier de $S_{i_1 i_2 i_3 i_4}(\vec{\xi}, \vec{\eta}, \tau)$ tomada apenas na variável τ é dada por

$$\tilde{S}_{i_1 i_2 i_3 i_4}(\vec{\xi}, \vec{\eta}, k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} e^{-ik_0 x_0} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} S_{i_1 i_2 i_3 i_4}(\vec{\xi}, \vec{\eta}, \tau),$$

onde $k = (k_0, \vec{k})$. De onde, obtemos a propriedade

$$\tilde{\mathcal{G}}_{\vec{x}_1, i_1, \vec{x}_2, i_2, \vec{x}_3, i_3, \vec{x}_4, i_4}(k) = e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x}_3 - \vec{x}_2)} \tilde{S}_{i_1 i_2 i_3 i_4}(\vec{\xi}, \vec{\eta}, k).$$

Assim as singularidades complexas em k_0 de $\tilde{\mathcal{G}}_{\vec{x}_1, i_1, \vec{x}_2, i_2, \vec{x}_3, i_3, \vec{x}_4, i_4}(k)$ e $\hat{S}_{i_1 i_2 i_3 i_4}(\vec{\xi}, \vec{\eta}, k^0)$ são as mesmas.

Capítulo 2

Análise do Espectro do Modelo $O(N)$

“The mathematics is not there till we put it there.”

Sir Arthur Eddington.

2.1 O espectro de uma partícula

As propriedades discutidas anteriormente permitem relacionar as singularidades das transformadas de Fourier das cf 's e o espectro conjunto dos operadores T_0 e \vec{T} , respectivamente os operadores de translação no tempo e no espaço, que tem como geradores os operadores de energia e de momento. A determinação das singularidades pode ser feita utilizando-se uma generalização do

Proposição 1 [Teorema de Paley-Wiener] *Se a função $\tilde{f}(p)$ é analítica na faixa $|\text{Im}(p)| < a$ se e somente se, para todo $\varepsilon > 0$*

$$|f(x)| \leq C(\varepsilon)e^{-(a-\varepsilon)|x|}.$$

Em palavras, o teorema de Paley-Wiener evidencia as relações entre as propriedades de analiticidade em p complexo, da transformada de Fourier $\tilde{f}(p)$ e propriedades de suporte no espaço direto de $f(x)$. Nessa seção, aplicaremos essa idéia para determinar

o espectro associado a estados de uma partícula, obtendo a chamada “lacuna espectral” (“mass gap” ou “lower spectral gap”). É importante notar que a simetria presente no modelo de spin $O(N)$, nos permite obter as propriedades espectrais de uma partícula, diretamente das propriedades análogas do modelo de spin $O(1)$, pelo uso da relação $\langle \vec{s}^2 \rangle = N \langle s_1^2 \rangle$.

Com a aplicação do teorema de Paley-Wiener, o nosso problema passa a ser a determinação das taxas de decaimento das funções de correlação. A ferramenta utilizada para tanto é o método de desacoplamento de hiperplanos, seguindo as idéias introduzidas para o estudo de *qft*’s bidimensionais (veja mais detalhes em [19] e [20]).

Neste método, introduzimos uma variável $z_{a_i} \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{Z}$ e $i = 1, \dots, d$, que substitui a constante de acoplamento β na interação $\sum_{|x-y|=1} \beta s(x) \cdot s(y)$ (veja a figura 2.1) entre todos pares de sítios primeiros vizinhos da forma $(\alpha, \alpha + e_i)$ tais que $\alpha_i = a$. Pictoricamente, a constante de acoplamento é modificada em todo o hiperplano que separa os sítios α e $\alpha + \delta_i$, a esse hiperplano chamamos de hiperplano a_i .

A idéia chave é o fato que expansão em polímeros para as funções de correlação pode ser controlada com um número finito de constantes de acoplamento distintas z_{a_i} (veja o apêndice A.2 e a referência [3]). Isso garante a existência do limite termodinâmico e propriedades de analiticidade no plano complexo das *cf*’s modificadas pela introdução das variáveis z_{a_i} , para $|z_{a_i}| < \beta < \beta_c$, onde β_c é um valor crítico determinado nesta expansão de polímeros. Seja $G(x, y, z_{a_i}, \beta)$ a função de dois pontos modificada segundo a regra acima. Assim, fazer $z_{a_i} = 0$ tem como efeito desacoplar o sistema ao longo de todo o hiperplano a_i . O efeito é que se os sítios x e y são separados pelo hiperplano a_i então temos $G(x, y, z_{a_i}, \beta) = 0$ quando $z_{a_i} = 0$.

Seja $F(z_1, \dots, z_n)$ uma função analítica na região $|z_i| \leq \zeta_0$, que satisfaz, para algum $k_j \in \mathbb{N}$ e para todos os valores de $z \in \mathcal{R} = \{(z_1, \dots, z_j, \dots, z_n) \mid |z_i| \leq \zeta_0\}$, a

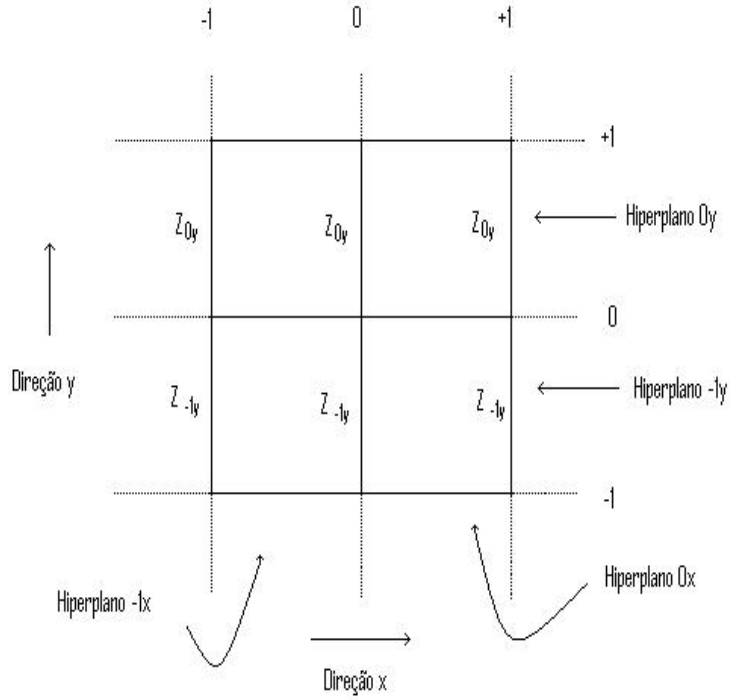


Figura 2.1: Desacoplamento de Hiperplanos

condição:

$$F(z_1, \dots, z_{j-1}, z_j = 0, z_{j+1}, \dots, z_n) = \dots = \frac{\partial^{k_j-1} F}{\partial z_j^{k_j-1}}(z_1, \dots, z_{j-1}, z_j = 0, z_{j+1}, \dots, z_n) = 0,$$

Através da expansão de Taylor em z_j em torno de $z_j = 0$ e da estimativa de Cauchy, podemos mostrar que em \mathcal{R} , vale a desigualdade

$$|F(z)| \leq \left(\sup_{z \in \mathcal{R}} |F(z)| \right) \prod_{j=1}^n \left(\frac{|z_j|}{\zeta_0} \right)^{k_j}. \quad (2.1)$$

Aplicaremos agora essa idéia a função de dois pontos. Da expansão de polímeros temos que a função de dois pontos modificada $G(x, y, z_{a_i}, \beta)$ é analítica para todos os valores de z_{a_i} no plano complexo em que $|z_{a_i}| \leq B_{a_i}$ para algum $B_{a_i} > 0$. Seja \mathcal{S} o conjunto dos hiperplanos que separam os pontos x e y , e seja $z = \{z_{a_i}\}_{a_i \in \mathcal{S}}$. Seja $G(x, y, z, \beta)$ a função de dois pontos onde todas as constantes de acoplamento

dos hiperplanos em \mathcal{S} foram modificadas, portanto $G(x, y, z, \beta)$ é analítica em $\mathcal{R} = \{z \mid |z_{a_i}| \leq B_0 = \min_{a_i \in \mathcal{S}} B_{a_i}\}$. Temos, assim

$$|G(x, y, z, \beta)| \leq \left(\sup_{|z_{a_i}| \leq B_0} |G(z)| \right) \prod_{i=1}^d \prod_{a=x_i}^{y_i-1} \left(\frac{|z_{a_i}|}{B_0} \right).$$

Assim, refazendo as variáveis de desacoplamento iguais a β , temos

$$|G(x, y, \beta)| \leq \left(\sup_{|z_{a_i}| \leq B_0} |G(z)| \right) \left(\frac{|\beta|}{B_0} \right)^{|x-y|}, \quad (2.2)$$

onde $|x - y| = \sum_{i=0}^{d-1} |x_i - y_i|$.

Com isto, a taxa de decaimento de G é determinada pela singularidade, no plano complexo mais próxima do eixo real, de sua transformada de Fourier. No entanto, para analisarmos essa singularidade precisamos de uma faixa de analiticidade maior. Em outras palavras, nos serviremos de uma extensão meromorfa de G para uma região além do limiar de uma partícula.

A estratégia é estudar a função $\Gamma(x)$, definida como $\tilde{\Gamma}(p) = \tilde{G}(p)^{-1}$, e mostrar que esta decai mais rapidamente que G , por embutir cancelamentos de contribuições, como discutiremos adiante. Para tanto utilizaremos novamente o método do desacoplamento de hiperplanos. É importante destacar que se $\tilde{\Gamma}$ for analítica em uma região, então \tilde{G} será meromorfa nessa região, com pólos localizados nos zeros de $\tilde{\Gamma}$.

A função de correlação de dois pontos G , no limite termodinâmico, é invariante por translações na rede. Com a introdução das variáveis de desacoplamento, a simetria translacional de G é quebrada, e portanto precisaremos de uma definição para a função Γ na ausência de invariância translacional. Visto que $\tilde{\Gamma}$ e \tilde{G} são inversas ponto a ponto no espaço dos momentos, vemos que Γ e G são inversas por convolução. Afim de nos aproveitarmos desse fato, definiremos Γ e G como operadores limitados em

$\ell^2(\mathbb{Z}^d)^1$. Formalmente temos

Proposição 2 *Existem constantes B_1 e \tilde{C} , tais que para qualquer número finito de pares (a, i) , o operador associado ao núcleo $G(x, y; z_{a_i}, \beta)$ define um operador invertível e limitado em $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ na região $|z_{a_i}| \leq |\beta| \leq B_1$, e a matriz inversa $\Gamma(x, y; z_{a_i}, \beta)$ é analítica em z e β , e satisfaz*

$$\sup_{|z_{a_i}| \leq |\beta| \leq B_1} |\Gamma(x, y; z_{a_i}, \beta)| \leq \tilde{C}.$$

Dessa forma, fazendo todos $z_{a_i} = \beta$, Γ é invariante por translação e $\tilde{\Gamma}(p; \beta)$, a transformada de Fourier de $\Gamma(x, 0, \beta)$, e $\tilde{G}(p, \beta)$, a transformada de Fourier de $G(x, 0, \beta)$, são tais que

$$\tilde{\Gamma}(p; \beta)\tilde{G}(p; \beta) = 1.$$

Assim, Γ é a matriz inversa de G , definida pela série de Neumann

$$\begin{aligned} \Gamma(x, y, \beta, z_{a_i}) &= \frac{1}{\langle s_i^2 \rangle} \delta_{xy} + \delta\Gamma(x, y) = \frac{1}{\langle s_i^2 \rangle} \delta_{xy} + \delta G(x, y) - \sum_{y_1} \delta G(x, y_1) \delta(y_1, y) + \dots \\ &\quad + (-1)^p \sum_{y_1, \dots, y_p} \delta G(x, y_1) \delta G(y_1, y_2) \dots \delta G(y_p, y) + \dots, \end{aligned}$$

onde temos $G(x, y, \beta, z_{a_i}) = \langle s_i^2 \rangle \delta_{xy} + \delta G(x, y)$, com δG de ordem β . Por (2.2), $\delta G(x, y)$ é limitado, e portanto pelo *lema de Holmgren*² δG define um operador limitado em $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$. Desta forma, para $\|\delta G\|$ suficientemente pequeno (i.e. $\beta \ll 1$), temos que $\Gamma = G^{-1}$ existe e é dado por 2.3.

¹Para tanto, utiliza-se o lema de Holmgren (veja nota abaixo) e as cotas já mostradas para G em (2.2). Para os detalhes veja [3].

²**Lema de Holmgren** Seja a_{ij} um operador matricial, tal que

$$\max_i \left(\sum_j |a_{ij}| \right) = A, \quad \max_j \left(\sum_i |a_{ij}| \right) = B,$$

onde A, B são finitos. Então a é um operador limitado em $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$, tal que

$$\|a\| \leq A^{\frac{1}{2}} B^{\frac{1}{2}}.$$

Relembramos que nosso objetivo nesse ponto é demonstrar que Γ decai mais rapidamente que G , podendo ser usado para definir uma extensão analítica de G . Para tanto, aplicando o método desacoplamento de hiperplanos, afim de mostrarmos

Proposição 3 *Sejam $|\beta|$ e todos os $|z_{a_i}|$ menores que B_1 (dado na proposição anterior).*

Se $x_i \leq a < y_i$, então ³

$$\Gamma(x, y, z_{a_i} = 0, z_{b_j}, \beta) = 0, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial z_{a_i}}(x, y, z_{a_i} = 0, z_{b_j}, \beta) = -\delta_{x_i, y_{i-1}} \prod_{j \neq i} \delta_{x_j, y_j}, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial z_{a_i}^2}(x, y, z_{a_i} = 0, z_{b_j}, \beta) = 0. \quad (2.5)$$

Demonstração: (2.3) Se $z_{a_i} = 0$, então $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ se decompõe na soma direta $\ell^2(A) \oplus \ell^2(B)$, onde $A = \{\lambda \in \mathbb{Z}^d | \lambda_i \leq a\}$ e $B = \{\lambda \in \mathbb{Z}^d | \lambda_i > a\}$, de forma que $G = G_A \oplus G_B$. Logo, pela proposição (2), $\Gamma = \Gamma_A \oplus \Gamma_B$.

(2.4) Sem perda de generalidade, tomamos $i = 1$. Pela proposição (2), temos $G\Gamma = 1$ e portanto $G \frac{\partial \Gamma}{\partial z_{a_1}} + \frac{\partial G}{\partial z_{a_1}} \Gamma$. Uma vez que, pela proposição (2), $\Gamma G = 1$, da decomposição $\Gamma = \Gamma_A \oplus \Gamma_B$, obtemos

$$\left. \frac{\partial \Gamma}{\partial z_{a_1}}(x, y) \right|_{z_{a_1}=0} = - \sum_{x' \in A, y' \in B} \Gamma(x, x') \left. \frac{\partial G}{\partial z_{a_1}} \right|_{z_{a_1}=0}(x', y') \Gamma(y', y). \quad (2.6)$$

Por outro lado, pela decomposição $G = G_A \oplus G_B$, para $\lambda_1 \leq a < \gamma_1$ temos

$$\left. \frac{\partial G}{\partial z_{a_1}} \right|_{z_{a_1}=0}(\lambda, \gamma) = \sum_{k_{\perp} \in \mathbb{Z}^{d-1}} G(\lambda, (a, k_{\perp})) G((a+1, k_{\perp}), \gamma). \quad (2.7)$$

Substituindo a equação (2.7) em (2.6), obtemos

$$\left. \frac{\partial \Gamma}{\partial z_{a_1}}(x, y) \right|_{z_{a_1}=0} = - \sum_{x' \in A, y' \in B, k_{\perp} \in \mathbb{Z}^{d-1}} \Gamma(x, x') G(x', (a, k_{\perp})) G((a+1, k_{\perp}), y') \Gamma(y', y).$$

³As equações (2.3) e (2.4) permanecem válidas no caso de uma perturbação linear, como por exemplo a de um campo magnético externo.

E uma vez que $\Gamma_A G_A = G_B \Gamma_B = 1$ temos

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial z_{a_1}}(x, y) \Big|_{z_{a_1}=0} = - \sum_{k_{\perp} \in \mathbb{Z}^{d-1}} \delta_{x,(a,k_{\perp})} \delta_{y,(a+1,k_{\perp})}.$$

(2.5) Seja

$$U(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A, \\ -1 & \text{se } x \in B. \end{cases}$$

Então, uma vez que medidas de volume finito são deixadas invariantes pela transformação $s(x) \rightarrow U(x)s(x)$ e $z_{a_i} \rightarrow -z_{a_i}$, temos

$$G(x, y, z_{a_i}, z_{b_j}, \beta) = U(x)U(y)G(x, y, -z_{a_i}, z_{b_j}, \beta).$$

O operador U é diagonal com $U^2 = 1$, o que implica $G(z_{a_i}) = U G(z_{a_i}) U^{-1}$. Portanto, temos $\Gamma(z_{a_i}) = U \Gamma(z_{a_i}) U^{-1}$. Ou seja

$$G(x, y, z_{a_i}, z_{b_j}, \beta) = U(x)U(y)\Gamma(x, y, -z_{a_i}, z_{b_j}, \beta).$$

Assim se $x \in A$ e $y \in B$, então $\Gamma(x, y)$ é uma função ímpar de z_{a_i} e portanto as derivadas de ordem par em zero se anulam. ⁴ \square

Com essas propriedades, para $|x - y| \geq 2$, temos

$$|\Gamma(x, y, \beta)| \leq \left(\sup_{|z_i| \leq B_1} |\Gamma(z)| \right) \left(\frac{|\beta|}{B_1} \right)^{3|x-y|},$$

sendo $|\beta| < B_0 < B_1$ a região de analiticidade de Γ . Como se observa, Γ admite uma extensão analítica até o limiar de três partículas.

⁴Na demonstração original feita na referência [21], esse fato é demonstrado a partir do cálculo direto de $\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial^2 z_{a_i}}$.

Assim, temos a seguinte expansão para G :

$$G(x, 0, \beta) = \frac{\langle \vec{s}^2 \rangle}{N} \delta_{0x} + \beta \frac{\langle \vec{s}^2 \rangle}{N} + \sum_{|y|=1} \delta_{xy} + O(\beta^2).$$

E, em particular, temos

$$\Gamma(x, \beta) = \frac{N}{\langle \vec{s}^2 \rangle} \delta_{0x} - \beta \frac{N}{\langle \vec{s}^2 \rangle} + \sum_{|y|=1} \delta_{xy} + \Gamma_s(x, \beta), \quad (2.8)$$

onde

$$|\Gamma_s| \leq K \left(\frac{|\beta|}{B_1} \right)^{3|x|} (1 - \delta_{0x}),$$

onde K é uma constante.

Definimos $C(e^{ip_0}, \vec{p}, \beta) \equiv \tilde{\Gamma}(p_0, \vec{p}, \beta)$. Então, utilizando a equação (2.8),

temos

$$C(z, \vec{p}, \beta) = 1 - \beta(z + z^{-1}) - 2\beta \sum_{j=1}^{(d-1)} \cos p_j + C_s(z, \vec{p}, \beta),$$

onde C_s é analítica para todo \vec{p} real, e analítica em z na região

$$A_0 = \{z | B_1^{-3} |\beta|^3 < |z| < B_1^3 |\beta|^{-3}\},$$

nessa região temos

$$|C_s(z, p_\perp, \beta)| \leq K \left[\frac{|z| |\beta|^3}{1 - |z| |\beta| B_1^{-3}} + \frac{|z|^{-1} |\beta|^3}{1 - |z|^{-1} |\beta| B_1^{-3}} \right]. \quad (2.9)$$

Seja $C_0 = C - C_s$. Do teorema de Rouché⁵ e da estimativa (2.9), C e C_0 possuem o mesmo número de zeros em na região

$$A_1 = \{z \mid |\beta|^2 < |z| < |\beta|^{-2}\}.$$

Via um cálculo imediato, temos que nessa região C_0 possui dois zeros simples, z_0 e z_0^{-1} , onde

$$z_0(\beta, \vec{p}) = \beta^{-1} - 2 \sum_{j=1}^{(d-1)} \cos p_j. \quad (2.10)$$

Pelo teorema da função analítica implícita⁶, z_0 é analítica em $0 < \beta < B_2$, para alguma constante B_2 .

Uma vez que (2.9) é verificada para \vec{p} com uma parte imaginária suficientemente pequena, via uma estimativa de Cauchy temos

$$\frac{\partial^2 z_0}{\partial p_i \partial p_j} = 2\delta_{ij} + O(\beta).$$

Mas a simetria $p_i \rightarrow -p_i$, implica $\left. \frac{\partial z_0}{\partial p_i} \right|_{p_i=0} = 0$, portanto z_0 possui um mínimo local em $p_i = 0 = 0$ e, por (2.10), esse mínimo é global⁷.

⁵**Teorema de Rouché:** Sejam f e g funções complexas, analíticas em uma região simplesmente conexa A . Se para todo $z \in A$ temos $|f(z)| \leq |g(z)|$, então f e g possuem o mesmo número de zeros em A . O teorema de Rouché é utilizado para garantir que após uma pequena perturbação da função f , a função resultante g tenha o mesmo número de zeros de f .

⁶**Teorema da função analítica implícita:** Seja A um conjunto aberto em \mathbb{R}^{n+k} e seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ uma função de classe C^r . Escrevemos f na forma $f(x, y)$, sendo x e y elementos de \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^k . Se existe $(a, b) \in A$ tal que $f(a, b) = 0$ e que o determinante da matriz $n \times n$, cujos elementos são da forma $\frac{\partial^i f}{\partial x_j}$ (a, b), é não nulo. Então existe uma vizinhança B de a em \mathbb{R}^n e uma única função $g : B \rightarrow \mathbb{R}^k$ de classe C^r tal que $g(a) = b$ e $f(x, g(x)) = 0$ para todo $x \in B$.

⁷É fácil ver que se $f(p_\perp)$ é o valor de $\text{Im } p$ para a singularidade mais próxima de $\tilde{G}(p, p_\perp)$, então $f(p_\perp)$ é minimizado em $p_\perp = 0$. As desigualdades de correlação tem como consequência a positividade da função de dois pontos $G(x)$. Por sua vez a positividade implica que se $\hat{G}(x_0, p_\perp)$ é a transformada de Fourier de $G(x)$ em todas as variáveis exceto x_0 , então $|\hat{G}(x_0, p_\perp)| \leq \hat{G}(x_0, 0)$, de forma que a menor taxa de decaimento ocorre em $p_\perp = 0$. pelo teorema de Paley-Wiener, esse decaimento é determinado por $f(p_\perp)$, portanto temos $f(p_\perp) \geq f(0)$. Uma vez que $z_0 = e^f$, nós vemos que o mínimo é global.

Com isso podemos obter os zeros de $\tilde{\Gamma}$, de onde temos que a curva de dispersão (e-m) de uma partícula é dada por

$$w(\vec{p}) = -\ln \frac{\beta \langle \vec{s}^2 \rangle}{N} - \frac{2 \langle \vec{s}^2 \rangle (d-1)}{N} \beta + \frac{2 \langle \vec{s}^2 \rangle}{N} \beta \sum_{j=1}^{d-1} (1 - \cos p_j) + O(\beta^2), \quad (2.11)$$

com a propriedade fisicamente desejável $w(\vec{p}) \geq w(\vec{0}) \equiv m > 0$, onde m é a massa de uma partícula dada explicitamente por

$$m \equiv m(\beta, N) \equiv w(\vec{0}) = -\ln \frac{\beta \langle \vec{s}^2 \rangle}{N} - \frac{2 \langle \vec{s}^2 \rangle (d-1)}{N} \beta + O(\beta^2). \quad (2.12)$$

Salientamos, que $m(\beta)$ é uma função analítica a menos do termo com $-\ln \frac{\beta \langle \vec{s}^2 \rangle}{N}$ como mostrado em [22].

O espectro e-m também engloba estados com duas partículas não-ligadas. Associado a estes estados existe uma banda finita de duas partículas ⁸. Para um momento total fixo \vec{p} , a banda é determinada pela equação $w(\vec{p}_1) + w(\vec{p}_2)$, com a restrição $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}$. Para $\vec{p} = 0$, a banda possui a largura

$$W = 2[w(\vec{\pi}) - w(\vec{0})] = 8\beta \frac{\langle \vec{s}^2 \rangle}{N} (d-1) + O(\beta^2), \quad (2.13)$$

sendo $\vec{\pi} = (\pi, \dots, \pi)$, ela começa no “limiar de duas partículas” $2m$ e termina em $2m+W$.

⁸O mesmo argumento permite mostrar a existência de bandas com mais que duas partículas, bem como determinar a largura dessa banda largura.

2.2 A equação de Bethe-Salpeter

Introduziremos agora a equação de Bethe-Salpeter (B-S), que é a ferramenta chave para a obtenção dos estados ligados de duas partículas. A equação de Bethe-Salpeter é introduzida por ser uma ferramenta adequada para o estudo da função de quatro-pontos. Na forma de operadores a equação de B-S é

$$D = D^0 + D^0 K D,$$

onde D , D^0 e K são tomados como operadores matriciais agindo em $sl_2(A)$, o subespaço simétrico de $\ell_2(A)$, sendo $A = \{(x_1, i_1, x_2, i_2) \in (\mathbb{Z}^d \times S) \times (\mathbb{Z}^d \times S) | x_1^0 = x_2^0\}$ e $S = \{1, 2, \dots, N\}$, onde usamos a restrição de tempos iguais (veja [10] e [11] para maiores detalhes).

De maneira geral, a ação de um operador M sobre $sl_2(A)$ em termos de seus núcleos, é dada por

$$[Mf]_{i_1 i_2}(x_1 x_2) = \sum_{x_3, x_4, i_3, i_4} M_{i_1 i_2 i_3 i_4}(x_1 x_2 x_3 x_4) f_{i_3 i_4}(x_3 x_4),$$

e destacamos que no espaço $sl_2(A)$, para qualquer $0 \leq \eta \leq 1$, o núcleo

$$B_{i_1 i_2 i_3 i_4}(x_1 x_2 x_3 x_4) = \eta \delta_{i_1 i_3} \delta_{i_2 i_4} \delta(x_1 - x_3) \delta(x_2 - x_4) + (1 - \eta) \delta_{i_1 i_4} \delta_{i_2 i_3} \delta(x_1 - x_4) \delta(x_2 - x_3),$$

é uma representação da identidade.

O operador D denota a função de correlação de 4-pontos parcialmente truncada, cujo núcleo é dado por

$$D_{i_1 i_2 i_3 i_4}(x_1 x_2 x_3 x_4) \equiv \langle s_{i_1}(x_1) s_{i_2}(x_2) s_{i_3}(x_3) s_{i_4}(x_4) \rangle_\beta - \langle s_{i_1}(x_1) s_{i_2}(x_2) \rangle_\beta \langle s_{i_3}(x_3) s_{i_4}(x_4) \rangle_\beta.$$

Da fórmula de Feynman-Kac, observa-se que a subtração remove contribuições espec-

trais associadas ao vácuo. O núcleo do operador D_0 é

$$D_{i_1 i_2 i_3 i_4}^0(x_1 x_2 x_3 x_4) \equiv \langle s_{i_1}(x_1) s_{i_3}(x_3) \rangle_\beta \langle s_{i_2}(x_2) s_{i_4}(x_4) \rangle_\beta + \langle s_{i_1}(x_1) s_{i_4}(x_4) \rangle_\beta \langle s_{i_2}(x_2) s_{i_3}(x_3) \rangle_\beta,$$

e corresponde a uma função de quatro pontos satisfazendo propriedades gaussianas (i.e. o teorema de Wick é satisfeito) para a função de dois pontos completa (massa renormalizada). Dessa forma, a equação de B-S define uma nova quantidade K , denominada núcleo de Bethe-Salpeter. Formalmente

$$K = D_0^{-1} - D^{-1}. \quad (2.14)$$

Assim, o operador K está associado ao espectro de duas partículas. De fato, por exemplo, em *qft* uma expansão perturbativa para K só contém gráficos de Feynman irreduzíveis por duas partículas.

É importante observar que, como apontado em [9], existe uma correspondência entre a equação de B-S e a equação resolvente para um hamiltoniano de Schrodinger de duas partículas não relativísticas na rede $H = H_0 + V$, dada por

$$(H - z)^{-1} = (H_0 - z)^{-1} + (H_0 - z)^{-1} V (H - z)^{-1},$$

onde $z \in \sigma(H) \cap \sigma(H_0)$ é o parâmetro espectral ($\sigma(A)$ é o espectro do operador A). Nessa correspondência, D está associado ao resolvente com interação $(H - z)^{-1}$, D_0 corresponde ao resolvente livre $(H_0 - z)^{-1}$ e K está relacionado com menos o potencial de interação V .

Usando coordenadas relativas, a equação B-S assume a forma (veja apêndice

A.3)

$$D_{i_1 i_2 i_3 i_4}(\vec{\xi}, \vec{\eta}, \tau) = D_{i_1 i_2 i_3 i_4}^0(\vec{\xi}, \vec{\eta}, \tau) + \int D_{i_1 i_2 j_1 j_2}^0(\vec{\xi}, \vec{\xi}', \tau') \times K_{j_1 j_2 j_3 j_4}(\vec{\xi}', \vec{\eta}', \tau - \tau' - \tau'' - \vec{\xi}' - \vec{\eta}') \\ \times D_{j_3 j_4 i_3 i_4}(\vec{\eta}', \vec{\eta}, \tau'') d\tau' d\tau'' d\vec{\xi}' d\vec{\eta}',$$

onde sob o sinal \int incluímos também a somatória sobre os índices j .

Analisando as propriedades de simetria associadas à permutação dos índices, $x_1 i_1 \leftrightarrow x_2 i_2$ e $x_3 i_3 \leftrightarrow x_4 i_4$, obtemos imediatamente as relações

$$D_{i_1 i_2 i_3 i_4}(\vec{\xi}, \vec{\eta}, \tau) = D_{i_2 i_1 i_3 i_4}(-\vec{\xi}, \vec{\eta}, \tau + \vec{\xi}), \\ D_{i_1 i_2 i_3 i_4}(\vec{\xi}, \vec{\eta}, \tau) = D_{i_1 i_2 i_4 i_3}(\vec{\xi}, -\vec{\eta}, \tau + \vec{\eta}).$$

Seja $\hat{F}(k)$ a transformada de Fourier na variável τ , e denotando $k_0 \equiv (k_0, \vec{k} = \vec{0})$. Temos que $\hat{D}_{i_1 i_2 i_3 i_4}(\vec{\xi}, \vec{\eta}, k_0) = \hat{D}_{i_2 i_1 i_3 i_4}(-\vec{\xi}, \vec{\eta}, k_0)$ e $\hat{D}_{i_1 i_2 i_3 i_4}(\vec{\xi}, \vec{\eta}, k_0) = \hat{D}_{i_1 i_2 i_4 i_3}(\vec{\xi}, -\vec{\eta}, k_0)$. Propriedades análogas podem ser mostradas para D_0 , K , e conseqüentemente para \hat{D}_0 , \hat{K} . Visto como operadores, $\hat{D}(k_0)$, etc, agem sobre funções $f_{i_1 i_2}(\vec{\xi})$, satisfazendo à propriedade $f_{i_1 i_2}(\vec{\xi}) = f_{i_2 i_1}(-\vec{\xi})$. Assim, para $k = (k_0, \vec{0})$, a equação de B-S se torna

$$\hat{D}_{i_1 i_2 i_3 i_4}(\vec{\xi}, \vec{\eta}, k_0) = \hat{D}_{i_1 i_2 i_3 i_4}^0(\vec{\xi}, \vec{\eta}, k_0) + \int \hat{D}_{i_1 i_2 j_1 j_2}^0(\vec{\xi}, \vec{\xi}', k_0) \\ \times \hat{K}_{j_1 j_2 j_3 j_4}(\vec{\xi}', \vec{\eta}', k_0) \hat{D}_{j_3 j_4 i_3 i_4}(\vec{\eta}', \vec{\eta}, k_0) d\vec{\xi}' d\vec{\eta}'. \quad (2.15)$$

Notamos que a equação de B-S original, nas coordenadas x_i , corresponde a uma equação resolvente para um hamiltoniano de duas partículas, enquanto que na forma apresentada acima corresponde ela a uma equação resolvente de Schrodinger para um hamiltoniano de uma única partícula, com momento do sistema zero e potencial externo $-\hat{K}$, uma vez que $(k_0, \vec{k}) = (k_0, \vec{0})$ é fixado. Deste ponto de vista, k_0 desempenha o papel de parâmetro espectral.

Enfrentaremos agora o problema da determinação do espectro de duas partículas. O primeiro passo para tanto, é obter uma aproximação para o núcleo de Bethe-

Salpeter K , utilizaremos para tanto uma aproximação em escada, que corresponde a obter K na ordem dominante em β e, uma vez substituído na equação B-S, obter \hat{D} nessa aproximação e suas propriedades analíticas. A definição mais precisa dessa aproximação se encontra na seção 2.3.

2.3 A aproximação em escada

Nosso próximo passo será derivar uma aproximação para o núcleo de K . Inicialmente, consideraremos somente os termos de mais baixa ordem em β . Como veremos a seguir, nossa aproximação em escada (*ladder*) fornece em nosso modelo uma aproximação de K local e independente de β . A idéia central é usar a decomposição $D = D_0 + D^T$, onde D^T é a função de quatro-pontos *completamente* truncada, dada por

$$\begin{aligned} D_{i_1 i_2 i_3 i_4}^T(x_1 x_2 x_3 x_4) \equiv & \langle s_{i_1}(x_1) s_{i_2}(x_2) s_{i_3}(x_3) s_{i_4}(x_4) \rangle_\beta - \langle s_{i_1}(x_1) s_{i_2}(x_2) \rangle_\beta \langle s_{i_3}(x_3) s_{i_4}(x_4) \rangle_\beta \\ & - \langle s_{i_1}(x_1) s_{i_3}(x_3) \rangle_\beta \langle s_{i_2}(x_2) s_{i_4}(x_4) \rangle_\beta - \langle s_{i_1}(x_1) s_{i_4}(x_4) \rangle_\beta \langle s_{i_2}(x_2) s_{i_3}(x_3) \rangle_\beta \end{aligned}$$

afim de nos valermos do fato que para $\beta = 0$, D^T se anula para pontos não coincidentes. A apresentação que daremos aqui difere da existente na literatura anterior. O nosso objetivo é esclarecer o papel desempenhado pela *dominação gaussiana* em um nível mais profundo, realçando sua relação com D^T . Para tanto, a aproximação em escada é obtida aqui de forma mais objetiva e mostra como a dominação ou a subjulgação gaussiana é determinante para existência de estados ligados de duas partículas nos modelos de spin.

A análise das contribuições independentes de β , revela , com $j = 1, \dots, N$,

$$\begin{aligned} [D_{\beta=0}^0 f]_{i_1 i_2}(x_1, x_2) &= 2\langle s_j^2 \rangle^2 f_{i_1 i_2}(x_1, x_2), \\ [D_{\beta=0} f]_{i_1 i_2}(x_1, x_2) &= [D_{\beta=0}^0 f]_{i_1 i_2}(x_1, x_2) + [D_{\beta=0}^T f]_{i_1 i_2}(x_1, x_2) \\ &= 2\langle s_j^2 \rangle^2 f_{i_1 i_2}(x_1, x_2) + T_{i_1 i_2 i_3 i_4} \delta(x_1 - x_2) f_{i_3 i_4}(x_1, x_2), \end{aligned} \tag{2.16}$$

sendo $T_{i_1 i_2 i_3 i_4} = \langle s_{i_1} s_{i_2} s_{i_3} s_{i_4} \rangle - \langle s_{i_1} s_{i_2} \rangle \langle s_{i_3} s_{i_4} \rangle - \langle s_{i_1} s_{i_3} \rangle \langle s_{i_2} s_{i_4} \rangle - \langle s_{i_1} s_{i_4} \rangle \langle s_{i_2} s_{i_3} \rangle$. Assim, o operador $D_{\beta=0}^0$ é um múltiplo da identidade, enquanto $D_{\beta=0}$ é um operador de multiplicação nas variáveis espaço-temporais, mas não nos índices de spin.

Para analisarmos $T_{i_1 i_2 i_3 i_4}$, introduzimos as projeções ortogonais de spin (veja [15]), \mathcal{P}^0 e \mathcal{P}^2 que fornecem uma decomposição da identidade nos subespaços

(dos tensores simétricos de posto dois) das representações irredutíveis de $O(N)$. Os núcleos de \mathcal{P}^0 e \mathcal{P}^2 são explicitamente

$$\mathcal{P}_{i_1 i_2 i_3 i_4}^0 = \frac{\delta_{i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4}}{N}, \quad (2.17)$$

$$\mathcal{P}_{i_1 i_2 i_3 i_4}^2 = \frac{1}{2} \left[\delta_{i_1 i_3} \delta_{i_2 i_4} + \delta_{i_1 i_4} \delta_{i_2 i_3} - \frac{2}{N} \delta_{i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4} \right], \quad (2.18)$$

Como projetores, possuem autovalores 1 e seus autovetores são dados por $w_{i_1 i_2}^{(0)} = \delta_{i_1 i_2}$, para \mathcal{P}^0 , e $w_{i_1 i_2}^{(r)} = \delta_{i_1 1} \delta_{i_2 r} - \delta_{i_1 r} \delta_{i_2 1}$, $r = 2, \dots, N$, e $w_{i_1 i_2}^{(ij)} = \delta_{i_1 i} \delta_{i_2 j} + \delta_{i_1 j} \delta_{i_2 i}$, $1 \leq i < j \leq N$, para \mathcal{P}^2 . É fácil ver que $\mathcal{P}^2 \mathcal{P}^0 = \mathcal{P}^0 \mathcal{P}^2 = 0$, e que T comuta com \mathcal{P}^0 e \mathcal{P}^2 . As seguintes propriedades são imediatas

$$\mathcal{P}^0 T = T \mathcal{P}^0 = \mu_0 \mathcal{P}^0$$

e

$$\mathcal{P}^2 T = T \mathcal{P}^2 = \mu_2 \mathcal{P}^2.$$

Assim, temos

$$T = \mu_0 \mathcal{P}^0 + \mu_2 \mathcal{P}^2, \quad (2.19)$$

e verificamos

$$I = \mathcal{P}^0 + \mathcal{P}^2, \quad (2.20)$$

onde

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \sum_k [\langle s_k^2 s_3^2 \rangle - \langle s_k^2 \rangle \langle s_3^2 \rangle - 2 \langle s_k s_3 \rangle^2] \\ &= \frac{1}{N} [\langle (\vec{s} \cdot \vec{s})^2 \rangle - \frac{N+2}{N} \langle \vec{s} \cdot \vec{s} \rangle^2] = \frac{\alpha_N}{N}, \\ \mu_2 &= 2[\langle s_1^2 s_2^2 \rangle - \langle s_1^2 \rangle \langle s_2^2 \rangle] = \frac{2}{N(N+2)} \langle (\vec{s} \cdot \vec{s})^2 \rangle - \frac{N+2}{N} \langle \vec{s} \cdot \vec{s} \rangle^2 \\ &= 2 \frac{\alpha_N}{N(N+2)}, \end{aligned}$$

sendo

$$\alpha_N \equiv \langle (\vec{s} \cdot \vec{s})^2 \rangle - \frac{N+2}{N} \langle \vec{s} \cdot \vec{s} \rangle^2. \quad (2.21)$$

Para estabelecer as duas igualdades acima utilizamos as relações

$$\langle s_1^2 \rangle = \langle \vec{s}^2 \rangle / N \quad e \quad \langle s_1^2 s_2^2 \rangle = \langle \vec{s}^4 \rangle / [N(N+2)] = \langle s_1^4 \rangle / 3,$$

que são obtidas da invariância pela ação global do grupo $O(N)$.

O parâmetro α_N é essencial em nossa análise. O caso $\alpha_N = 0$ é o caso gaussiano, onde o teorema de Wick se aplica (i.e. $\langle (\vec{s}\vec{s})^2 \rangle$ se fatora no produto $\langle \vec{s}\vec{s} \rangle^2$). O caso $\alpha_N > 0$ define um regime de *ssd* que apresenta subjugação gaussiana, enquanto $\alpha_N < 0$ indica um regime de dominação gaussiana.

Usando as propriedades (2.16) e (2.19), e substituindo em (2.14), temos

$$Kf = \frac{1}{2\langle s_j^2 \rangle^2} [\mathcal{P}^0 + \mathcal{P}^2] f - \frac{1}{2\langle s_j^2 \rangle^2 + \mu_0 \delta} \mathcal{P}^0 f - \frac{1}{2\langle s_j^2 \rangle^2 + \mu_2 \delta} \mathcal{P}^2 f + O(\beta),$$

com $[\delta f]_{s_1 s_2}(x_1, x_2) = \delta(x_1 - x_2) f_{s_1 s_2}(x_1, x_2)$. Essa expressão nos permite escrever,

$$\begin{aligned} [K\mathcal{P}^0 f]_{ij}(x_1, x_2) &= \lambda_0 \delta(x_1 - x_2) [\mathcal{P}^0 f]_{ij}(x_1, x_1) + O(\beta), \\ [K\mathcal{P}^2 f]_{ij}(x_1, x_2) &= \lambda_2 \delta(x_1 - x_2) [\mathcal{P}^2 f]_{ij}(x_1, x_1) + O(\beta), \end{aligned} \quad (2.22)$$

sendo

$$\lambda_0 = \frac{\alpha_N N^2}{2\langle \vec{s}^2 \rangle^2} \frac{1}{\langle \vec{s}^4 \rangle - \langle \vec{s}^2 \rangle^2} \quad e \quad \lambda_2 = \frac{\alpha_N N^2}{2\langle \vec{s}^2 \rangle^2} \frac{1}{\langle \vec{s}^4 \rangle}. \quad (2.23)$$

É importante notar que a desigualdade de Cauchy-Schwarz aplicada às *cf*'s assegura que $\langle \vec{s}^4 \rangle - \langle \vec{s}^2 \rangle^2$ é positivo. Logo $\lambda_{0,2}$ e α_N possuem o mesmo sinal.

Para $\beta \neq 0$, a análise pode ser feita através de perturbações de K em torno do caso $\beta = 0$. Escrevendo $K = K_{\beta=0} - \delta K$, temos

$$\delta K = K - K_{\beta=0} = \left[(D^0)^{-1} - D^{-1} \right] - \left[(D_{\beta=0}^0)^{-1} - (D_{\beta=0})^{-1} \right]$$

e, escrevendo,

$$D^0 = D_{\beta=0}^0 + \delta D^0,$$

$$D = D_{\beta=0} + \delta D.$$

Como visto na seção anterior, δD^0 e δD são de ordem β ou superior. Portanto, existe um disco no plano complexo, tal que para todo β nesse disco estão definidas as séries de Neumann

$$(D^0)^{-1} - (D_{\beta=0}^0)^{-1} = (D_{\beta=0}^0 + \delta D^0)^{-1} - (D_{\beta=0}^0)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (D_{\beta=0}^0)^{-1} \left[\delta D^0 (D_{\beta=0}^0)^{-1} \right]^n$$

e

$$D^{-1} - (D_{\beta=0})^{-1} = (D_{\beta=0} + \delta D)^{-1} - (D_{\beta=0})^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (D_{\beta=0})^{-1} \left[\delta D (D_{\beta=0})^{-1} \right]^n.$$

Dessa maneira,

$$\delta K = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ (D_{\beta=0}^0)^{-1} \left[\delta D^0 (D_{\beta=0}^0)^{-1} \right]^n - (D_{\beta=0})^{-1} \left[\delta D (D_{\beta=0})^{-1} \right]^n \right\},$$

onde δD^0 e δD são funções analíticas em β .

Escrevendo $\delta D^0 = \sum_{m=1}^{\infty} (\delta D^0)^{(m)} \beta^m$ e $\delta D = \sum_{r=1}^{\infty} (\delta D)^{(r)} \beta^r$, o conjunto de coeficientes de β^j , $j = 1, 2, \dots$, nos fornecem uma expansão do tipo $\delta K = \sum_{j=1}^{\infty} (\delta K)^{(j)} \beta^j$, i.e. um expansão em potências de β . É importante salientar que todas as expansões anteriores podem ser eventualmente representadas em uma linguagem diagramática.

Prosseguiremos considerando apenas o caso $\beta = 0$. A equação (2.22) mostra que λ_0 e λ_2 são autovalores de K até ordem β , com multiplicidades 1 e $[N(N+1)/2] - 1$, respectivamente (veja [15] para uma derivação alternativa). Explicitamente, na aproximação escada, o núcleo de B-S fica

$$K(x_1, x_2) \approx \lambda_0 \delta(x_1 - x_2) \mathcal{P}^0 + \lambda_2 \delta(x_1 - x_2) \mathcal{P}^2 + O(\beta). \quad (2.24)$$

Esse resultado será empregado na próxima seção para determinar os estados ligados de duas partículas.

2.4 Estados ligados de duas partículas

Afim de analisar a existência dos estados de duas partículas ligadas, nosso próximo passo é determinar as soluções da Eq. B-S (2.15) na aproximação escada. Seja L a aproximação escada, independente de β para K . Da equação (2.24) temos o núcleo $L(\vec{\xi}, \vec{\eta}, \tau) = \delta(\vec{\xi})\delta(\vec{\eta})\delta(\tau)\ell$, sendo

$$\ell = \lambda_0 \mathcal{P}^0 + \lambda_2 \mathcal{P}^2, \quad (2.25)$$

com \mathcal{P}^0 e \mathcal{P}^2 definidos na Eqs. (2.17) e (2.18). Nessa aproximação, omitindo a dependência em $k_0 = (k_0, \vec{0})$, a equação B-S (2.15) é dada por

$$\hat{D}(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \hat{D}^0(\vec{\xi}, \vec{\eta}) + \hat{D}^0(\vec{\xi}, \vec{0}) \ell \hat{D}(\vec{0}, \vec{\eta}),$$

cujas solução é

$$\hat{D}(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \hat{D}^0(\vec{\xi}, \vec{\eta}) + \hat{D}^0(\vec{\xi}, \vec{0}) [1 - \ell \hat{D}^0(\vec{0}, \vec{0})]^{-1} \hat{D}^0(\vec{0}, \vec{\eta}), \quad (2.26)$$

onde

$$\begin{aligned} \hat{D}_{i_1 i_2 i_3 i_4}^0(\vec{0}, \vec{0}) &= \int [\langle s_{i_1}(0) s_{i_3}(\tau) \rangle_\beta \langle s_{i_2}(0) s_{i_4}(\tau) \rangle_\beta \\ &\quad + \langle s_{i_1}(0) s_{i_4}(\tau) \rangle_\beta \langle s_{i_2}(0) s_{i_3}(\tau) \rangle_\beta] e^{-ik_0 \tau_0} d\tau_0 d\vec{\tau} \\ &= (\delta_{i_1 i_3} \delta_{i_2 i_4} + \delta_{i_1 i_4} \delta_{i_2 i_3}) \int \langle s_1(0) s_1(\tau) \rangle_\beta^2 e^{-ik_0 \tau_0} d\tau_0 d\vec{\tau} \\ &\equiv Q_{i_1 i_2 i_3 i_4} R(k_0), \end{aligned} \quad (2.27)$$

sendo

$$R(k_0) = \int \langle s_1(0) s_1(\tau) \rangle_\beta^2 e^{-ik_0 \tau_0} d\tau_0 d\vec{\tau}.$$

O operador Q comuta com \mathcal{P}^0 e \mathcal{P}^2 , e portanto $\ell D_0(\vec{0}, \vec{0})$ possui autovalores

$$\rho_1 = 2\lambda_0 R(k_0) \quad e \quad \rho_2 = 2\lambda_2 R(k_0), \quad (2.28)$$

com multiplicidades 1 e $-1 + N(N+1)/2$, respectivamente.

Da análise da função de dois pontos, D_0 é regular em $[m, 3m]$. Portanto, pela equação (2.26), as singularidades de D só podem se originar dos zeros de

$$\mathcal{D} = \det[1 - \ell \hat{D}^0(\vec{0}, \vec{0})]. \quad (2.29)$$

Como mostram as equações (2.28), os zeros de (2.29) ocorrem se e somente se os sinais de λ_j e de $R(k_0)$ forem os mesmos. Por outro lado, como visto nas equações (2.23), o sinal de λ_j coincide com o sinal de α_N . Dessa maneira, o sinal de $R(k_0)$ na vizinhanças da banda de duas partículas, é determinado pelo regime de *ssd* (i.e. pelo sinal de α_N) fixado. Além disso, é fácil ver que não existe estado ligado nessa região para $\alpha_N = 0$. O comportamento de $R(k_0)$ pode ser determinado a partir da representação espectral da função de correlação de 2-pontos para o caso escalar ($N = 1$) (veja as referências [3] e [14] para mais detalhes). Temos

$$\langle s_1(0) s_1(x) \rangle_\beta = \int_0^\infty \int_{T_{d-1}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x} - E|x_0|} d\sigma_{\vec{p}}(E) d\vec{p} \equiv G_{11}(x). \quad (2.30)$$

A medida espectral $d\sigma_{\vec{p}}$ admite a decomposição

$$d\sigma_{\vec{p}}(E) = Z(\vec{p}, \beta) \delta(E - \omega(\vec{p})) dE + d\hat{\sigma}_{\vec{p}}(E), \quad (2.31)$$

onde $\omega(\vec{p})$ é a curva de dispersão e-m de uma partícula e

$$Z(\vec{p}, \beta) = \frac{\partial \tilde{\Gamma}}{\partial \chi} (p_0 = i\chi, \vec{p})|_{\chi=\omega(\vec{p})},$$

sendo $\tilde{\Gamma}(\vec{p}) = [\tilde{G}_{11}(\vec{p})]^{-1}$. As medidas $d\sigma_{\vec{p}}(E)$ e $d\hat{\sigma}_{\vec{p}}(E)$ são ambas positivas. O primeiro termo no lado direito de (2.31) corresponde à contribuição de uma partícula isolada e $d\hat{\sigma}_{\vec{p}}(E)$ tem suporte em (\bar{m}, ∞) , onde $\bar{m} \approx -3 \ln \beta$ é um limite inferior para o início do espectro de três partículas livres. Um cálculo direto, mostra que $Z(\vec{p}, \beta)$ é positivo para todo \vec{p} e $\beta > 0$.

Utilizando a representação (2.30), e considerando apenas as contribuições espectrais de uma partícula, podemos escrever (veja [11] e [12])

$$R(k_0) = 2(2\pi)^{d-1} \int_{T_{d-1}} \frac{\sinh(2\omega(\vec{p})) [Z(\vec{p}, \beta)]^2}{\cosh(2\omega(\vec{p})) - \cos(k_0)} d\vec{p} + O(\beta),$$

sendo $Z(\vec{p}, \beta) = (2\pi)^{1-d} \langle \vec{s}^2 \rangle / N + O(\beta)$.

Essa representação permite mostrar que $R(k_0)$ é analítica fora da banda de duas partículas. Uma representação mais geral para $\hat{D}^0(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ (veja [11]) permite mostrar que esta é analítica no eixo imaginário k_0 fora da banda e para $|\text{Im } k_0| < 3m$. Tomando $k_0 = i(2m + \frac{W}{2} + \chi)$, onde W é a largura da banda de duas partículas dada na Eq. (2.13), por inspeção da representação espectral para $R(k_0)$ mostramos que $R(k_0)$ é assume valores positivos, abaixo da banda, *i.e.* para $\chi < -\frac{W}{2}$, e negativos para k_0 acima da banda, *i.e.* para $\chi > \frac{W}{2}$.

Assim, por (2.27), o aparecimento de um estado ligado de duas partículas abaixo da banda, só ocorre para uma *ssd* associada aos parâmetros λ_1 e λ_2 positivos, ao passo que um estado ligado acima da banda está só ocorre para uma *ssd*, que forneça $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 < 0$. Como condição para a existência de estados ligados acima ou abaixo da banda de duas partículas, isso "filtra", em cada caso, um sinal para α_N e, conseqüentemente, nos limita à escolha de uma *ssd* satisfazendo ou não a dominação gaussiana.

As singularidades em k_0 de $\hat{D}(\vec{\xi}, \vec{\eta}, k_0)$ na Eq. (2.26), para $\text{Im}(k_0) \in$

$(0, 2m) \cup (2m + W, 3m)$, são obtidas como soluções de

$$2\lambda_i \sum_{\tau} \langle s_1(0)s_1(\tau) \rangle^2 e^{2m\tau_0} e^{(\frac{W}{2} + \chi)\tau_0} = 1,$$

que fixa uma condição em χ para a existência de estados ligados.

Daremos um argumento intuitivo, baseado no comportamento de $\langle s_1(0)s_1(\tau) \rangle_{\beta}$, para a fórmula para estados ligados. Um argumento rigoroso usa a forma de convolução no espaço de momentos da condição acima e a representação espectral da função de dois pontos, pode ser encontrada em [15]. Para controlar rigorosamente todas as contribuições, uma expansão em polímeros pode ser utilizada. Expandindo $\langle s_1(0)s_1(\tau) \rangle_{\beta}$ até a ordem dominante em β , obtemos $\langle s_1(0)s_1(\tau) \rangle_{\beta} \approx \beta^{|\tau_0| + |\vec{\tau}|} \langle s_1^2 \rangle^{|\tau_0| + |\vec{\tau}| + 1}$. Usando a expressão para $m \equiv m(\beta)$ da Eq. (2.12), encontramos a condição satisfeita para os estados ligados em ordem β , $j = 0, 2$,

$$2\langle s_1^2 \rangle \lambda_j (1 - e^{\frac{W}{2} + \chi}) = 1. \quad (2.32)$$

Da condição (2.32), vemos que existe um estado ligado acima (abaixo) da banda de duas partículas para λ_j negativo (respectivamente, positivo), e relembramos que, da Eq. (2.23), o sinal de λ_j coincide com o sinal de α_N .

Seja $\varepsilon_j^- = -\chi - W/2$ (respectivamente, $\varepsilon_j^+ = \chi - W/2$) a energia de ligação para o caso atrativo (respectivamente, repulsivo). Da Eq. (2.32), obtemos

$$e^{-\varepsilon_j^-} = \left(\delta_{2j} \frac{\langle \vec{s} \cdot \vec{s} \rangle_-^2}{\langle (\vec{s} \cdot \vec{s})^2 \rangle_-} + \frac{2}{N} \frac{\langle \vec{s} \cdot \vec{s} \rangle_-^2}{\langle (\vec{s} \cdot \vec{s})^2 \rangle_- - \delta_{0j} \langle \vec{s} \cdot \vec{s} \rangle_-} \right),$$

$$e^{+\varepsilon_j^+} = \left(\delta_{2j} \frac{\langle \vec{s} \cdot \vec{s} \rangle_+^2}{\langle (\vec{s} \cdot \vec{s})^2 \rangle_+} + \frac{2}{N} \frac{\langle \vec{s} \cdot \vec{s} \rangle_+^2}{\langle (\vec{s} \cdot \vec{s})^2 \rangle_+ - \delta_{0j} \langle \vec{s} \cdot \vec{s} \rangle_+} \right) e^{-W},$$

onde $\langle \cdot \rangle_-$ (respectivamente, $\langle \cdot \rangle_+$) indica a média usando uma *ssd* para o caso atrativo (respectivamente repulsivo).

Para encerrar essa seção, analisaremos as relações entre as energias de ligação estados ligados nos dois casos acima. Especificamente, exibiremos condições nas quais as energias de ligação são as mesmas, *i.e.* $\varepsilon_j^- = \varepsilon_j^+$.

Se as bandas são as mesmas para os casos repulsivo e atrativo⁹, em vista da Eq. (2.13), é necessário que $\langle \vec{s} \cdot \vec{s} \rangle_- = \langle \vec{s} \cdot \vec{s} \rangle_+$, de forma que podemos suprimir os índices \pm . Essa última restrição tomada em conjunto com a desigualdade de Cauchy-Schwarz, impõe as desigualdades

$$\langle \vec{s} \cdot \vec{s} \rangle^2 < \langle (\vec{s} \cdot \vec{s})^2 \rangle_+ < \left(\frac{N+2}{N} \right) \langle \vec{s} \cdot \vec{s} \rangle^2 < \langle (\vec{s} \cdot \vec{s})^2 \rangle_-.$$

Tomando os λ_j correspondentes para o caso atrativo, e sendo $-\lambda_j$ corresponde ao caso repulsivo, nos temos

$$\langle \vec{s}^4 \rangle_- - \langle \vec{s}^4 \rangle_+ = \left[\frac{N+2}{N} \right]^2 \langle \vec{s} \cdot \vec{s} \rangle^4. \quad (2.33)$$

As equações para a energia de ligação podem ser reescritas em uma forma mais simétrica, onde ambos os casos são descritos por energias referentes à metade da banda de duas partículas. Essa descrição permite descontar diretamente os efeitos da banda, de forma a aplicar a restrição (2.33) diretamente. Com isso, um cálculo direto mostra que $\varepsilon_j^- = \varepsilon_j^+$.

Com isso, mostramos que para temperaturas suficientemente elevadas ($\beta \ll 1$) e na aproximação em escada, caso $\alpha_N \neq 0$ existem exatamente dois estados ligados de duas partículas situados próximos a banda de duas partículas. O aparecimento e a posição destes estados ligados é vinculada ao sinal do parâmetro α_N , que mede a presença da dominação gaussiana. Este parâmetro caracteriza a *ssd*, e pode ser utilizado para indexar os casos atrativos ($\alpha_N > 0$, subjulgação gaussiana e estados ligados abaixo da banda) e repulsivos ($\alpha_N < 0$, dominação gaussiana e estados ligados acima da banda). Antes de encerrarmos essa sessão, destacamos que é possível estender

⁹Essa exigência garante também que a massa de uma partícula seja a mesma

esses resultados além da aproximação escada, como foi mostrado para o caso do modelo de spin escalar nas referencias [11] e [12].

2.5 Transformações de “staggering”

Como destacamos anteriormente, existe uma correspondência entre a equação B-S nas coordenadas de espaço-tempo e a equação resolvente de Schrödinger para um sistema hamiltoniano quântico com duas partículas. Nosso objetivo nessa seção é aprofundar essa analogia, no intuito de obter uma intuição sobre algumas propriedades espectrais do modelo de spin $O(N)$. Os resultados analisados permitem compreender o espectro de duas partículas do modelo de spin $O(N)$ e suas relações de simetria. Efetuaremos uma análise do espectro do operador hamiltoniano de duas partículas idênticas (com mesma massa), com potencial local e dependente dos índices de spin, análogo ao núcleo de Bethe-Salpeter na aproximação em escada (veja equação (2.24)).

Considere o espaço de Hilbert \mathcal{H} dado pelo subespaço simétrico de $\ell^2(A)$, sendo $A = \{(\vec{x}_1 i_1, \vec{x}_2 i_2) \in (\mathbb{Z}^{d-1} \times S) \otimes (\mathbb{Z}^{d-1} \otimes S)\}$ e $S = \{1, 2, \dots, N\}$. Nessa seção, escreveremos um elemento f pertencente a esse subespaço como funções tais que $f_{i_1 i_2}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = f_{i_2 i_1}(\vec{x}_2, \vec{x}_1)$. Tomemos o hamiltoniano quântico não relativístico de duas partículas H agindo sobre \mathcal{H} dado por (ver equação (2.25))

$$H = \left[\frac{-\Delta_1}{2m} + \frac{-\Delta_2}{2m} \right] + (\nu_0 \mathcal{P}^0 + \nu_2 \mathcal{P}^2) \delta(x_1 - x_2) \equiv H_0 + \ell V, \quad (2.34)$$

sendo $\nu_0, \nu_2 \in \mathbb{R}$ e $-\Delta_1 = -\Delta \otimes I$ e $-\Delta_2 = I \otimes -\Delta$, Δ é o laplaciano na rede \mathbb{Z}^{d-1} . Para uma função $g_{i_1 i_2}(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$, $\vec{x}_i \in \mathbb{Z}^{d-1}$, temos

$$-\Delta_1 g_{i_1 i_2}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = 2(d-1)g_{i_1 i_2}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) - \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_{j=1}^{d-1} g_{i_1 i_2}(\vec{x}_1 + \epsilon e_j, \vec{x}_2),$$

e

$$-\Delta_2 g_{i_1 i_2}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = 2(d-1)g_{i_1 i_2}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) - \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_{j=1}^{d-1} g_{i_1 i_2}(\vec{x}_1, \vec{x}_2 + \epsilon e_j),$$

onde e_j denota o j -ésimo vetor unitário da rede. Os operadores \mathcal{P}^0 e \mathcal{P}^2 agem exclusivamente sobre os índices de spin, e são, respectivamente, os tensores de projeção de spin zero e spin 2 definidos previamente nas Eqs. (2.17) e (2.18).

A fim de manter uma conexão com o modelo de spins $O(N)$, salientamos que após passarmos para coordenadas relativas, tomarmos a transformada de Fourier e para momento total do sistema nulo, o operador D_0 na equação B-S corresponde ao resolvente associado a $-c\beta\Delta$, o operador hamiltoniano quântico para partículas livres na rede, onde $c > 0$ é uma constante. Portanto, tomar β pequeno é análogo a considerar a massa m suficientemente grande no hamiltoniano de Schrödinger H da Eq. (2.34). Destacamos ainda que só estamos considerando o caso de massas iguais, pois em nosso modelo bosônico as partículas são idênticas. Uma análise para hamiltonianos quânticos mais gerais com potencial δ é feita em [16].

A fim de determinar o espectro do hamiltoniano H da Eq. (2.34), consideremos o operador auto-adjunto \vec{P} , associado ao momento da sistema. Seja $T(\vec{a})$ o operador de translação do sistema por $\vec{a} \in \mathbb{Z}^{d-1}$, definido como $(T(\vec{a})f)_{ij}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = f_{ij}(\vec{x}_1 + \vec{a}, \vec{x}_2 + \vec{a})$. Notemos que $T(\vec{a})$ é um operador unitário, de forma que podemos escrever $T(\vec{a}) = e^{i\vec{P}\cdot\vec{a}}$, que define univocamente o operador auto-adjunto \vec{P} que gera o grupo das translações discretas. O espectro de \vec{P} está contido em $\mathbf{T}_{d-1} = (-\pi, \pi]^{d-1}$ e \vec{P} comuta com H e H_0 .

Munidos dos autovalores (de valor 1) e dos autovetores das projeções ortogonais \mathcal{P}^0 e \mathcal{P}^2 introduzidos nas Eqs. (2.17) e (2.18), as autofunções de H podem ser reescritas como uma superposição de produtos de ondas planas da forma

$$\psi_{i_1 i_2}^{(n)}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{p}, \vec{k} = 2\vec{q}) = v_{i_1 i_2}^{(n)} e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)} e^{i\vec{q}\cdot(\vec{x}_1 + \vec{x}_2)},$$

sendo $v_{i_1 i_2}^{(n)} \equiv v^{(n)}$, $n = 0, 2$ um auto vetor de \mathcal{P}^n , e \vec{k} o momento total do sistema. Por outro lado, $\psi_{ij}^{(n)}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{p}, \vec{k})$ é uma autofunção do hamiltoniano livre H_0 , com autova-

lores

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\vec{p}, \vec{q}) &= \frac{-\tilde{\Delta}(\vec{p} + \vec{q})}{2m} + \frac{-\tilde{\Delta}(\vec{p} - \vec{q})}{2m} \\ &= \frac{2}{m} \sum_{j=1}^{d-1} [1 - \cos(p_j) \cos(k_j)]. \end{aligned}$$

Notamos que a equação dos autovalores não se decompõe em uma soma das energias cinéticas associadas ao centro de massa e da massa reduzida como ocorre no caso do continuum, quando se introduz as coordenadas relativas. Contudo, observamos que H_0 continua sendo um operador de multiplicação, e possui espectro contínuo para qualquer dimensão d do sistema. A banda espectral associada a H_0 possui largura finita, que pode se anular, caso o momento do sistema \vec{k} seja igual a $\vec{\pi} \equiv (\pi, \dots, \pi)$.

Consideremos agora o caso em que o momento do sistema \vec{k} é nulo. Verificamos a existência de uma banda de espectro contínuo no intervalo $[0, \frac{4(d-1)}{m}]$. Vamos escrever as autofunções de H como uma superposição

$$\phi^{(n)}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \int_{T_{d-1}} v^{(n)} \tilde{b}^{(n)}(\vec{p}) e^{i\vec{p}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)} d\vec{p}, \quad (2.35)$$

onde $\tilde{b}^{(n)}(\vec{p}) = \tilde{b}^{(n)}(-\vec{p})$. Com essa consideração, a equação de autovalores se torna, sendo $t(\vec{p}) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{d-1} 2(1 - \cos p_j)$,

$$(H - E_n)\phi^{(n)}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = v^{(n)} \int_{T_{d-1}} [t(\vec{p}) + \nu_n \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) - E_n] \tilde{b}^{(n)}(\vec{p}) e^{i\vec{p}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)} d\vec{p}.$$

Tomando a transformada de Fourier na variável $(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)$ temos

$$[t(\vec{p}) - E_n] \tilde{b}^{(n)}(\vec{p}) + \nu_n \int_{T_{d-1}} \tilde{b}^{(n)}(\vec{p}) d\vec{p} = 0. \quad (2.36)$$

Tomemos $E_n < 0$, o que corresponde a valores de energia inferiores ao início da banda. Dividindo a Eq. (2.36) por $[t(\vec{p}) - E_n]$ e integrando em \vec{p} temos, a equação para um

estado ligado

$$1 + \nu_n \int_{T_{d-1}} \frac{1}{t(\vec{p}) - E_n} d\vec{p} = 0. \quad (2.37)$$

Para que uma solução para Eq. (2.37) exista, é necessário que $\tilde{b}^{(n)}(\vec{p})$ seja da forma

$$\tilde{b}^{(n)}(\vec{p}) = \frac{-\nu_n}{t(\vec{p}) - E_n} \int_{T_{d-1}} \tilde{b}^{(n)}(\vec{p}') d\vec{p}' = \frac{c'}{t(\vec{p}) - E_n}, \quad (2.38)$$

onde c' é uma constante, de forma que $\tilde{b}^{(n)}(\vec{p}) = \tilde{b}^{(n)}(-\vec{p})$, uma vez que $t(\vec{p})$ é simultaneamente par em cada componente de \vec{p} .

Visto que $-\tilde{\Delta}(\vec{p}) \approx |\vec{p}|^2$, para $|\vec{p}|$ suficientemente pequeno, existem estados ligados E_n , $n = 0, 2$ com multiplicidades respectivas 1 e $\frac{N(N+1)}{2} - 1$, para $d - 1 = 1, 2$ e $\nu_n < 0$. Para $d > 3$, a integral na Eq. (2.37) converge para $E_n = 0$. Portanto, existem valores críticos $\nu_n^c \equiv \nu_n^c(d) < 0$ para a existência dos estados ligados (o que está associado com a existência de limites de Birman-Schwinger, detalhes podem ser encontrados em [23]). Pelo teorema de Perron-Frobenius, aplicado ao operador e^{-H} ([3] e [23]), o estado fundamental $\phi^{(n)}(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ é positivo, i.e $\phi^{(n)}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) > 0$ qualquer que sejam n , \vec{x}_1 e \vec{x}_2 . Por último, pelo teorema de Paley-Wiener [24], a faixa de analiticidade de $\tilde{b}^{(n)}(\vec{p})$ na Eq. (2.38) implica num decaimento exponencial para as funções de onda dos estados ligados. Com isso, completamos a descrição das propriedades espectrais de H , para $\nu_n < 0$.

Nosso próximo passo é descrever o espectro de H , para $\nu_n > 0$. Para tanto, lançaremos mão da transformação de *staggering*.

Definimos a transformação de *staggering* por

$$U f_{ij}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (-1)^{\sum_{i=1}^{d-1} (x_1^i + x_2^i)} f_{ij}(\vec{x}_1, \vec{x}_2), \quad f \in \mathcal{H}, \quad (2.39)$$

que leva funções suaves em funções de oscilação máxima. É fácil mostrar que a trans-

formação U possui as seguintes propriedades

$$\begin{aligned} U^2 &= I \quad , \quad UH = \left[\frac{4(d-1)}{m} - (H_0 + \ell\delta) \right] U \quad , \\ [\tilde{U}f]_{ij}(\vec{p}_1, \vec{p}_2) &= \tilde{f}_{ij}(\vec{\pi} - \vec{p}_1, \vec{\pi} - \vec{p}_2) \quad , \end{aligned} \quad (2.40)$$

onde $\ell = \nu_0\mathcal{P}^0 + \nu_2\mathcal{P}^2$. A equação (2.40) mostra que conhecendo o espectro e as autofunções, para o caso atrativo, i.e. abaixo da banda, pela aplicação da transformação de *staggering*, obtemos diretamente o espectro e as autofunções para o caso repulsivo, e vice-versa.

Então, pela aplicação da propriedade de entrelaçamento dada na Eq. (2.40), o padrão espectral de H , para $\nu_n > 0$, consiste de $\bigcup_n (\frac{4(d-1)}{m} + E_n) \cup [0, \frac{4(d-1)}{m}]$. A propriedade relevante é existência do mesmo padrão espectral para o caso repulsivo, acima da banda de espectro contínuo. E, por outro lado, o valor da energia de ligação nos casos atrativo e repulsivo depende do valor absoluto de $|\nu_n|$. Como no caso atrativo, a autofunção é positiva; a função do onda do estado ligado no caso repulsivo apresenta oscilação máxima conforme a Eq. (2.39).

É importante salientar que a relação acima entre o espectro do casos atrativo e repulsivo obtida com o auxílio da transformação de *staggering*, é exata para os sistemas de spin $O(N)$, na aproximação em escada, sendo apenas aproximada para o modelo completo. A condição restritiva imposta pela Eq. (2.33) e o requerimento da unicidade na definição da banda, são naturalmente incorporados na contexto das transformação de *staggering*.

Capítulo 3

Conclusão

“People do not like to think.

If one thinks, one must reach conclusions.

Conclusions are not always pleasant.”

Helen Keller (1880 - 1968)

Nesse trabalho obtivemos o espectro de energia-momento para a teoria de campos quântica associada ao modelo ferromagnético vetorial clássico de spins com ação invariante pelo grupo $O(N)$ e na região de altas temperaturas. Foram tratados explicitamente os estados de uma e duas quasi-partículas.

Para o espectro de uma partícula, seguindo a estrada pavimentada nos trabalhos [3], [14], [21] e [22], derivamos a curva de dispersão de energia-momento e da restrição dessa curva ao momento zero, obtemos uma expressão para a massa da partícula. Ainda com os resultados do espectro de uma partícula, mostramos a existência de uma banda de duas partículas livres e determinamos a largura dessa banda.

Em seguida nos analisamos os estados de duas partículas ligadas. Para tanto utilizamos as ferramentas desenvolvidas em [2] para a análise da equação de

Bethe-Salpeter na rede. Nossa análise é similar a feita nas referências [10], [11] e [12] para o modelo de spins escalar ($O(1)$). Como em [15], nós estabelecemos condições para a existência de estados de duas partículas ligadas e estabelecemos a energia de ligação. No entanto, a análise feita aqui estende os resultados anteriores por tratar o caso de dominação gaussiana ($\alpha_N < 0$) e analisar propriedades de simetria entre os casos de dominação e subjulgação gaussiana. É importante destacar que em [11, 12] as propriedades espectrais para o sistema de spins escalares ($N = 1$) foram obtidos para o "modelo completo", fornecendo uma extensão que vai além da aproximação em escada. O mesmo procedimento pode ser aplicado ao modelo $O(N)$, afim de completar os resultados de [15] e os nossos. A preservação das degenerescências, quando o modelo completo for considerado, é um importante ponto em aberto. Também é possível que existam estados ligados correspondentes a estados de spin anti simétricos em ordens maiores que β .

É importante destacar que apesar do uso do decaimento das funções de correlação na determinação do padrão espectral de modelos de teoria de campos quânticos ser canônico, o tratamento empregado aqui toca pontos usualmente deixados em segundo plano pelo tratamento perturbativo usual da física teórica. Questões como a construção do espaço de Hilbert, representações espectrais e a existência das funções de correlação no limite termodinâmico são tratadas aqui (ainda que várias vezes de maneira sucinta), bem como estabelecemos de forma clara a relação entre os decaimentos das funções e o espectro do modelo.

A eficácia do método utilizado aqui depende sobretudo das taxas de decaimento apropriadas das funções de correlação consideradas. O argumento apresentado neste texto para a escolha dessas funções de correlação, com decaimento adequado para a determinação das propriedades espectrais desejadas, é aplicável em modelos mais complexos. Nesse sentido, o esquema para o estudo do padrão espectral é bastante geral, e assim o tratamento dado para o modelo de spins nesse texto, pode ser tomado como

um guia para o tratamento de outras teorias de campo.

Por fim, é preciso destacar que até o momento consideramos somente ssd invariantes por ações do grupo $O(N)$. O caso de uma ssd não-par, e portanto sem simetria do tipo $O(N)$, foi desenvolvido em [28] para o modelo de spin escalar. Um procedimento análogo poderia ser aplicado ao modelo de spins $O(N)$.

Apêndice A

“How many roads must a man walk down

Before you call him a man?”

Bob Dylan.

A.1 A Formula de Feynman-Kac

Em apenas uns poucos de casos bem estabelecidos, as equações da mecânica quântica possuem soluções representadas por funções bem estabelecidas, ou o espectro pode ser escrito de uma forma fechada. Assim a maior parte dos cálculos em na teoria quântica, são feitos apartir de aproximações nas quais se computam apenas uns poucos termos de uma série de Taylor usual. Por exemplo, esse procedimento executado com séries nas constantes de acoplamento é conhecido como teoria da perturbação, as séries na constante de Plank é conhecida como aproximação clássica.

Afim de se ter uma visão qualitativa da solução, ou obter-se estimativas para os erros da aproximação, é de grande utilidade se ter uma representação integral para a solução. É isso que a formula de Feynman-Kac fornece. Para um potencial geral, essa formula fornece o núcleo $\mathcal{K}_t(q, q')$ do operador e^{-tH} , *i.e.*,

$$(e^{-tH}\theta)(q) = \int \mathcal{K}_t(q, q')\theta(q')dq',$$

mesmo nos casos onde esse núcleo não pode ser expresso em termos de funções elementares. A essência desta fórmula é a idéia de Feynman para se obter uma representação para o núcleo do grupo unitário e^{-itH} . Para tanto, considere a ação

$$\mathcal{A}(-t, t) = \int_{-t}^t \mathcal{L}(q(s), \dot{q}(s)) ds$$

definida para um caminho clássico, dependentes de um parâmetro temporal s . Sendo \mathcal{L} a Lagrangeana, obtida apartir da Hamiltoniana

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2} + V(q)$$

através da transformação de Legendre

$$\mathcal{L}(q(s), \dot{q}(s)) = \sup_p [\dot{q}p - H(p, q)] = \frac{p^2}{2} - V(q).$$

Seja $\mathcal{W}(q, q', t)$ o conjunto das trajetórias contínuas $q(s)$ que tem como extremidades os pontos $q(-t) = q$ e $q(t) = q'$. A fórmula de "integral de trajetória" de Feynman é

$$\mathcal{N}(e^{-itH})(q, q') = (const.) \int_{\mathcal{W}(q, q', t)} e^{i\mathcal{A}(-\frac{t}{2}, \frac{t}{2})} \prod_{-\frac{t}{2} < s < \frac{t}{2}} dq(s), \quad (\text{A.1})$$

onde $\mathcal{N}(A)$ denota o núcleo do operador A .

Essa fórmula tem sido arduamente utilizada pelos físicos, devido as agradáveis propriedades de transformação que a tornam adequada para manipulações formais. Contudo, a fórmula de Feynman não é adequada para um tratamento matematicamente rigoroso da teoria quântica, uma vez que a medida complexa $e^{i\mathcal{A}(-t, t)} \prod_{-t < s < t} dq(s)$ matematicamente mal definida.

A fórmula de Feynman-Kac é uma representação integral no espaço de trajetórias similar para o núcleo de e^{-tH} , mas nesse caso a medida no espaço de trajetórias é

positiva e possui fundamentação rigorosa. Uma vez que e^{-tH} é obtido a partir de e^{-itH} , pela continuação analítica que leva $t \mapsto -it$, nos guiaremos nossa discussão pelo mesmo caminho, procedendo a mesma continuação na expressão da fórmula de Feynman A.1. Com as substituições:

$$ds \mapsto -ids \quad \dot{q}^2 \mapsto -\dot{q}^2,$$

temos a expressão formal

$$\mathcal{N}(e^{-tH})(q, q') = \int_{\mathcal{W}(q, q', t)} e^{(-\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} [\frac{\dot{q}^2}{2} + V(q(s)) ds])} \prod_{-\frac{t}{2} < s < \frac{t}{2}} dq(s).$$

Consideremos o caso $V = 0$, o núcleo do operador $e^{-t\frac{p^2}{2}}$ é a solução fundamental da equação do calor

$$\frac{\partial}{\partial t} u(q, t) = \frac{1}{2} \Delta u(q, t),$$

que é a distribuição Gaussiana

$$\frac{1}{2\pi t} e^{-\frac{(q-q')^2}{2t}} = \mathcal{K}_t^0(q, q').$$

O núcleo $\mathcal{K}_t^0(q, q')$ possui as propriedades evidentes

- A. $\mathcal{K}_t^0(q, q') > 0$,
- B. $\int \mathcal{K}_t^0(q, q') dq' = 1$,
- C. $\mathcal{K}_{t+s}^0(q, q') = \int \mathcal{K}_t^0(q, x) \mathcal{K}_s^0(x, q') dq'$.

As propriedades *A* e *B* permitem a interpretação de $\mathcal{K}_t^0(q, q')$ como uma densidade de probabilidade. A propriedade *C* é a propriedade de semi-grupo $e^{-(t+s)H} = e^{-tH} e^{-sH}$ ($V = 0$). Tomadas em conjunto essas propriedades permitem definir uma

medida no espaço das trajetórias, medida está chamada de "medida de Wiener condicional"¹.

A medida (condicional de Wiener) do conjunto

$$\{q(s) \in \mathcal{W}(q, q', t) | q(t_1) \in I_1, \}$$

que é o conjunto das trajetórias que passam por um subconjunto $I_1 \subset \mathbb{R}^3$ no instante t_1 , é definida como sendo

$$\int_{I_1} \mathcal{K}_{\frac{t}{2}+t_1}^0(q, x) \mathcal{K}_{\frac{t}{2}-t_1}^0(x, q') dq'.$$

É possível definir medidas para qualquer subconjunto de $\mathcal{W}(q, q', t)$.

Usaremos $dW_{q,q'}^t$ para denotar a integração no espaço das trajetórias com respeito a medida condicional de Wiener. Com isso é possível mostrar que se A_i , $i = 1, 2, \dots, n$ é um operador de $L_2(q, dq)$, que age no espaço através da multiplicação por uma função limitada $A_i(q)$, então

$$\int \prod_{i=1}^n A_i(q(t_i)) dW_{q,q'}^t = \mathcal{N}(e^{-(\frac{t}{2}-t_1)H} A_1 e^{-(t_2-t_1)H} A_2 \dots A_n e^{-(\frac{t}{2}-t_n)H}). \quad (\text{A.2})$$

Onde $-\frac{t}{2} \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq \frac{t}{2}$.

Um resultado fundamental é

Proposição 4 *Sejam A e B operadores limitados inferiormente e essencialmente auto-adjuntos*². *Se $C = A + B$ é essencialmente auto-adjunto então*³

$$e^{-C} = \mathcal{S} - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{-\frac{A}{n}} e^{-\frac{B}{n}} \right)^n \quad (\text{A.3})$$

¹Usa-se o termo "condicional" pois ambas as extremidades estão fixas, na medida de Wiener usual apenas o ponto de início é ficado.

²um operador é chamado essencialmente auto-adjunto se e $(A^*)^* = A^*$, onde A^* é o operador adjunto associado a A .

³ $\mathcal{S} - \lim$ denota o limite forte de um operador, uma seqüência de operadores limitados em \mathcal{H} , $A_n \rightarrow A$ na convergência forte se $\|(A_n - A)\psi\| \rightarrow 0$ para todo $\psi \in \mathcal{H}$

E finalmente, podemos estabelecer a formula de Feynman-Kac.

Proposição 5 *Seja $V(q)$ uma função continua de \mathbb{R}^d em R , limitada inferiormente e seja $H = -\frac{\Delta}{2} + V$ um operador essencialmente auto-adjunto. Então o núcleo $\mathcal{K}_t(q, q')$ de e^{-tH} é dado por*

$$\int e^{(-\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} [V(q(s))ds])} dW_{q,q'}^t. \quad (\text{A.4})$$

Agora, consideremos algumas modificações a Formula de Feynman-Kac A.4. A primeira modificação consiste em tomar $H = H_0 + U'$, onde $H_0 = -\frac{\Delta}{2} + U$ é um operador elíptico de segunda ordem ⁴. Tomando esse H_0 podemos definir uma outra medida para o espaço de trajetórias que não a medida de Wiener. Nosso objetivo em fazer essa modificação é obter uma medida Gaussiana mais adequada para o tratamento do problema. Usemos $dU_{q,q'}^t$ para denotar a medida em $\mathcal{W}(q, q', t)$ construída dessa forma. A fórmula de Feynman-Kac correspondente fica na forma

$$\mathcal{K}_t(q, q') = \int e^{(-\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} [V(q(s))ds])} dU_{q,q'}^t.$$

Seja $\Omega_0(q)$ o estado fundamental de H_0 , chamemos $d\phi_0 = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \Omega_0(q)\Omega_0(q')dU_{q,q'}^t$. Assim dados $-\frac{t}{2} \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq \frac{t}{2}$ e $A_i(q)$ funções limitadas de q , temos

$$\int \prod_{i=1}^n A_i(q(t_i))d\phi_0 = (\phi_0, A_1 e^{-(t_2-t_1)H_0} A_2 \dots A_n \phi_0)_{\mathcal{H}}.$$

É desse resultado que decorre a "Fórmula de Feynman-Kac"1.3 usada durante o texto, que permite estabelecermos a equivalência formal entre o modelo de teoria de campos quânticos e o sistema de Mecânica estatística.

⁴Esse requerimento garante a positividade de e^{-tH_0} .

A.2 Expansão em Polímeros

Os métodos de expansões em cluster para altas e baixas temperaturas estão entre as técnicas mais bem conhecidas de mecânica estatística, em vista disso nos concentraremos em uma exposição objetiva e volta da para as aplicações diretas para nosso modelo. O método discutido aqui usa o sistema de polímeros de Gruber-Kunz (veja [3]), que mostraram que uma classe bastante geral de sistemas definidos na rede podem ser mapeados em um sistema de polímeros como o que é aqui utilizado. Não é nosso objetivo apresentar uma exposição rigorosa sobre o tema (para isso veja [1] e [3]), mas sim fazer uma abordagem introdutória, que apresente os principais resultados utilizados no texto. A idéia chave dessa expansão, é não buscar uma expansão em β para os objetos do tipo $e^{\beta\Phi(s(x)\dots s(y))}$, mas reescrever $e^{\beta\Phi(s(x)\dots s(y))} = 1 + z(s(x)\dots s(y))$, onde $z(s(x)\dots s(y))$ é pequeno para β suficientemente pequeno. E com isso obter expansões para médias de funções $A(s(x_1), \dots, s(x_n))$ em termos de $z(s(x)\dots s(y))$ pequeno.

Dada a rede finita $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, seja Φ uma interação, μ_0 uma medida a priori. Com isso podemos definir um sistema associado que possui função de partição

$$Z = \int \exp[\beta \sum_{Y \in \mathcal{P}(\Lambda)} \Phi(Y)] \prod_{x \in \Lambda} d\mu_0(x),$$

onde $\mathcal{P}(\Lambda)$ é o conjunto das partes de Λ . Chamamos de conjunto do links de Λ o conjunto

$$\mathcal{B}_\Lambda \{X \in \mathcal{P}(\Lambda) | \Phi(X) \neq 0\}.$$

Usaremos os γ, γ', \dots para denotar subconjuntos finitos de \mathcal{B}_Λ .

Definição 1 *Sejam $\gamma, \gamma' \subset \mathcal{B}_\Lambda$, diz-se que γ e γ' são compatíveis se e somente se seus suportes em Λ são disjuntos (i.e. $\text{supp } \gamma = \bigcup_{X \in \gamma} X$ e $\text{supp } \gamma \cap \text{supp } \gamma' = \emptyset$). Caso contrário γ e γ' são chamados de incompatíveis.*

Um elemento $\gamma \subset \mathcal{B}_\Lambda$ é chamado de um polímero se e somente se γ não

pode ser decomposto na forma $\gamma = \gamma' \cup \gamma''$, com γ' e γ'' não vazios e compatíveis. O conjunto de todos os polímeros será denotado por Γ_0 .

Dessa forma os polímeros são conjuntos de links que são conexos. É preciso deixar claro onde cada objeto “vive”, especialmente que $\gamma \in \mathcal{P}(\mathcal{B}_\Lambda)$, enquanto $\text{supp } \gamma \in \mathcal{P}(\Lambda)$ (ou ainda $\gamma \subset \mathcal{B}_\Lambda$ e $\text{supp } \gamma \subset \Lambda$.)

Sejam

$$\tilde{z}(X) = e^{\beta\Phi(X)} - 1, \quad \tilde{z}(\gamma) = \prod_{X \in \gamma} \tilde{z}(X), \quad z(\gamma) = \langle \tilde{z}(\gamma) \rangle_0,$$

onde $\langle f \rangle_0 = \int f(\omega_\alpha) \prod_{\alpha \in \lambda} \dots$. Nossa escolha dos polímeros pode ser facilmente compreendida neste ponto. Ela é baseada no fato de que em geral, $\langle \tilde{z}(\gamma) \rangle_0 \neq \langle \prod_{X \in \gamma} \tilde{z}(X) \rangle_0$ mas para dois polímeros compatíveis temos $\langle \tilde{z}(\gamma) \tilde{z}(\gamma') \rangle_0 = z(\gamma) z(\gamma')$.

Definição 2 Para todo $\Gamma \subset \Gamma_0$, seja:

$$a(\Gamma) = \begin{cases} 1 & \text{Todos os polímeros de } \Gamma \text{ são compatíveis,} \\ 0 & \text{Se existem } \gamma, \gamma' \in \Gamma \text{ incompatíveis.} \end{cases}$$

E com essa bagagem notacional podemos mostrar que

$$Z_\Lambda = \sum_{\Gamma \subset \Gamma_0} a(\Gamma) \prod_{\gamma \in \Gamma} z(\gamma). \quad (\text{A.5})$$

A expressão acima fornece uma expressão em termos de uma série de potências na variável $z(\gamma)$ para Z_Λ . Com isso podemos buscar uma série de potências para $\ln Z_\Lambda$ ⁵. Afim de se parametrizar essa série utiliza-se uma notação de multi-índices. Um

⁵Isso pode ser visto notando-se que se $z(\gamma)$ é suficientemente pequena, a série (A.5) é da forma $1 + O(z)$ e então utilizamos a série do logaritmo: $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$.

multi-índice é uma aplicação $A : \Gamma_0 \rightarrow \{0, 1, \dots\}$, através da qual podemos definir

$$z^A = \prod_{\gamma \in \Gamma_0} z(\gamma)^{A(\gamma)}, \quad n(A) = \sum_{\gamma \in \Gamma_0} A(\gamma), \quad A! = \prod_{\gamma \in \Gamma_0} A(\gamma)!.$$

Com isso podemos reescrever a função de partição (A.5) na forma

$$Z_\Lambda = \sum_A a(A) z^A,$$

onde a soma é executada sobre todos os multi-índices A e

$$a(A) = \begin{cases} 0 & \text{se } A! > 1, \\ a(\Gamma) & \text{Se } A! = 1. \end{cases}$$

Dessa maneira usando a série logarítmica, obtemos

$$\ln Z_\Lambda = \sum_A a^T(A) z^A. \quad (\text{A.6})$$

Onde as funções $a^T(A)$ são funções do multi-índice A , as quais para descreve-las precisamos de uma nova notação. Dado um multi-índice A , nos construímos o grafo $G(A)$ ⁶ com $n(A)$ vértices, sendo que existem $A(\gamma_i)$ vértices distintos associados ao polímero γ_i e assim sucessivamente. Existirá uma linha entre dois pontos X e Y do grafo se e somente se os polímeros associados a X e Y forem incompatíveis (em particular se X e Y estiverem associados ao mesmo polímero existirá uma linha entre eles).

Seja C um subgrafo⁷, o número de linha de C é denotado pelo número $\ell(C)$, se C possui todos os vértices de G , dizemos que C é um *subgrafo total* de G e denotamos $C \triangleleft G$. Diremos que um grafo é *conexo* se este não pode ser decomposto

⁶Aqui o grafo deve ser compreendido como um conjunto de vértices e as linhas que os conectam.

⁷Um subgrafo de G é um conjunto de linhas do grafo G juntamente com os vértices nas extremidades dessas linhas.

em dois subgrafos, que possuam os conjuntos de vértices disjuntos.

Essa estrutura faz com que muitos dos resultados relacionados à expansão em polímeros possuam aspectos inteiramente combinatoriais. O resultado seguinte é um deles (para uma demonstração veja [1, 3])

Proposição 6 *Se $G(A)$ é desconexo então $a^T(A) = 0$. Se $G(A)$ é conexo⁸ então*

$$a^T(A) = (A!)^{-1} \sum_{C \triangleleft G(A) \text{ } C \text{ conexo}} (-1)^{\ell(C)}.$$

Nosso próximo passo é obter cotas para Z_Λ e $\ln Z_\Lambda$. Afim de descrever essas cotas de uma maneira mais compacta introduziremos um pouco mais de notação.

Dado um grafo G , uma *árvore maximal* é um subgrafo total de G que é uma árvore⁹. É evidente que todo grafo conexo possui árvores maximais e se o grafo G possui n vértices, então toda árvore maximal de G possui $n - 1$ linhas. O conjunto das árvores maximais de um grafo G é denota por $\mathcal{T}(G)$ e o número de árvores maximais em G é denotado por $|\mathcal{T}(G)|$. O próximo resultado apresentado é conhecido como *estimativa de Rota*, esse resultado é uma decorrência da proposição 6 e também um resultado puramente combinatorial que fornece estimativas sobre as funções $a^T(A)$.

Proposição 7 / Estimativa de Rota/

$$|a^T(A)| = (A!)^{-1} |\mathcal{T}(G)|$$

Até o momento consideramos apenas os aspectos combinatoriais da expansão em polímeros. Os resultados que apresentaremos a seguir são baseados em restrições na forma da interação Φ ou e na medida $d\mu_0$ escolhida e nas estimativas de objetos da

forma $L_\Lambda = \sum_{A|0 \in \{\text{supp } \gamma \mid A(\gamma) \geq 1\}} |a^T(A)| |z^A|$, de forma que podemos estudar a convergência

⁸Se $G(A)$ possui um único ponto, então a soma possui um único grafo com $\ell(C) = 0$.

⁹Uma árvore é um grafo conexo que possui um único caminho entre dois vértices quaisquer.

de $\ln Z_\lambda$. Afim de estudarmos as funções de correlação e seus decaimentos faremos uma pequena modificação nos resultados anteriores. Seja $f(X)$ uma função dos campos em $X \subset \lambda$, a média de f é dada por

$$\langle f(X) \rangle_\Lambda = \frac{d}{d\alpha} \ln [\langle (1 + \alpha f(X)) e^{-H} \rangle_{0,\Lambda}] |_{\alpha=0}. \quad (\text{A.7})$$

Com isso definimos

$$Z_\Lambda(f) = \langle (1 + \alpha f(X)) e^{-H} \rangle_{0,\Lambda}.$$

Nós manteremos nossa definição de polímeros (exceto pela inclusão de uma linha associada ao suporte de f), de forma que encontramos

$$Z_\Lambda(f) = \sum a(A) z_f^A,$$

onde

$$Z(\gamma) = \begin{cases} \langle \prod_{Y \in \gamma} \tilde{z}(Y) \rangle_0 & \text{se } \text{supp } f \notin \gamma, \\ \alpha \langle f(X) \prod_{Y \in \gamma} \tilde{z}(Y) \rangle_0 & \text{se } \text{supp } f \in \gamma. \end{cases}$$

E como anteriormente obtemos

$$\langle f(X) \rangle_\Lambda = \sum_{A(f)=1} a^T(A) z_f^A,$$

onde $A(f) = \sum_{\text{supp } f \in \gamma} z_f^A$.

E com isso temos o resultado principal utilizado no texto.

Proposição 8 *A expansão de polímeros a altas temperaturas das funções de correlação converge uniformemente e é analítica em β na região onde*

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_0: 0 \in \text{supp } \gamma, \|\text{supp } \gamma\|=k} |z(\gamma)| \leq \varepsilon(\beta)^k,$$

para todo $\epsilon < \frac{1}{6}$.

A.3 Coordenadas Relativas Na Rede

Deduziremos aqui a forma para o núcleo de Bethe-Salpeter e sua transformada de Fourier em coordenadas relativas e em suas variáveis conjugadas

$$\xi = x_2 - x_1, p; \quad \eta = x_4 - x_3, q; \quad \tau = x_3 - x_2, k;$$

sendo $\xi_0 = 0$ e $\eta_0 = 0$. Durante toda essa secção usaremos notação de integral para denotar somas na rede. A equação de Bethe-Salpeter em tempos iguais (*i.e.* $x_{10} = x_{20}$ e $x_{30} = x_{40}$) fica

$$\begin{aligned} D(x_1, x_2, x_3, x_4) = & D_0((x_1, x_2, x_3, x_4) + \int dy_1 dy_2 dy_3 dy_4 \delta(y_{20} - y_{10}) \delta(y_{40} - y_{30}) \\ & \times D(x_1, x_2, y_3, y_4) K(y_1, y_2, y_3, y_4) D_0(y_1, y_2, x_3, x_4). \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Todos os núcleos na equação acima são invariantes por translação, o que permite reescreve-los em termos das coordenadas relativas. Nós denotaremos

$$\bar{D}(\xi, \eta, \tau) = D(0, x_2 - x_1 = \xi, x_3 - x_1 = \xi + \tau, x_4 - x_1 = \xi + \eta + \tau),$$

$$\bar{D}_0(\xi, \eta, \tau) = D_0(0, x_2 - x_1 = \xi, x_3 - x_1 = \xi + \tau, x_4 - x_1 = \xi + \eta + \tau),$$

$$\bar{K}(\xi, \eta, \tau) = K(0, x_2 - x_1 = \xi, x_3 - x_1 = \xi + \tau, x_4 - x_1 = \xi + \eta + \tau).$$

Os núcleos D , D_0 e portanto K são invariantes pelas transformações

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_2, x_1, x_3, x_4),$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1, x_2, x_4, x_3),$$

que implica as invariâncias

$$\bar{D}(\xi, \eta, \tau) = \bar{D}(-\xi, \eta, \tau + \xi) \quad \bar{D}_0(\xi, \eta, \tau) = \bar{D}_0(-\xi, \eta, \tau + \xi); \quad \bar{K}(\xi, \eta, \tau) = \bar{K}(-\xi, \eta, \tau + \xi).$$

$$\bar{D}(\xi, \eta, \tau) = \bar{D}(\xi, -\eta, \tau + \eta) \quad \bar{D}_0(\xi, \eta, \tau) = \bar{D}_0(\xi, -\eta, \tau + \eta); \quad \bar{K}(\xi, \eta, \tau) = \bar{K}(\xi, -\eta, \tau + \eta). \quad (\text{A.9})$$

Introduzimos agora as variáveis $\xi', \eta', \tau', \tau''$, sendo

$$\xi' = y_2 - y_1, \quad \eta' = y_4 - y_3,$$

$$\tau' = y_1 - x_2, \quad \tau'' = x_3 - y_4.$$

De forma que temos

$$\begin{aligned} y_1 &= \tau' + x_2, \\ y_2 &= \xi' + y_1 = \xi' + \tau' + x_2, \\ y_4 &= x_3 - \tau'', \\ y_3 &= y_4 - \eta' = x_3 - \tau'' - \eta'. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

E assim nós temos

$$\begin{aligned} D(x_1, x_2, y_3, y_4) &= \bar{D}(\xi, \xi', \tau'), \\ D_0(y_1, y_2, x_3, x_4) &= \bar{D}_0(\eta', \eta, \tau''), \\ K(y_1, y_2, y_3, y_4) &= \bar{K}(\xi', \eta', \tau - \tau' - \tau'' - \xi' - \eta') \\ &= \bar{K}(-\xi', -\eta', \tau - \tau' - \tau''). \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Onde na primeira identidade para K em (A.11) nós utilizamos (A.10), *i.e.*

$$y_3 - y_2 = (x_3 - \tau'' - \eta') - (\xi' + \tau' + x_2) = \tau - \tau' - \tau'' - \xi' - \eta'$$

e para a segunda identidade de K , utilizamos (A.9). Assim a equação de Bethe-Salpeter toma a forma

$$\begin{aligned} \bar{D}(\xi, \eta, \tau) = & \bar{D}_0(\xi, \eta, \tau) + \int d\xi' d\eta' d\tau' d\tau'' \delta(\xi'_0) \delta(\eta'_0) \\ & \times \bar{D}(\xi, \xi', \tau') \bar{K}(-\xi', -\eta', \tau - \tau' - \tau'') \bar{D}_0(\eta', \eta, \tau''). \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Integrando em ξ'_0 e η'_0 e utilizando as condições de tempos iguais, temos

$$\begin{aligned} \bar{D}(\vec{\xi}, \vec{\eta}, \tau) = & \bar{D}_0(\vec{\xi}, \vec{\eta}, \tau) + \int d\vec{\xi}' d\vec{\eta}' d\tau' d\tau'' \\ & \times \bar{D}(\vec{\xi}, \vec{\xi}', \tau') \bar{K}(-\vec{\xi}', -\vec{\eta}', \tau - \tau' - \tau'') \bar{D}_0(\vec{\eta}', \vec{\eta}, \tau''). \end{aligned}$$

Seja \hat{F} a transformada de Fourier de F na variável τ . Então temos

$$\begin{aligned} \hat{\bar{D}}(\vec{\xi}, \vec{\eta}, k) = & \hat{\bar{D}}_0(\vec{\xi}, \vec{\eta}, k) + \int d\vec{\xi}' d\vec{\eta}' d\tau' d\tau'' d\tau e^{i\tau k} \\ & \times \bar{D}(\vec{\xi}, \vec{\xi}', \tau') \bar{K}(-\vec{\xi}', -\vec{\eta}', \tau - \tau' - \tau'') \bar{D}_0(\vec{\eta}', \vec{\eta}, \tau''). \end{aligned}$$

de onde temos a expressão utilizada, após eliminarmos por economia de notação as barras,

$$\hat{D}(\vec{\xi}, \vec{\eta}, k) = \hat{D}_0(\vec{\xi}, \vec{\eta}, k) + \int d\vec{\xi}' d\vec{\eta}' \hat{D}(\vec{\xi}, \vec{\xi}', k) \hat{K}(-\vec{\xi}', -\vec{\eta}', k) \hat{D}_0(\vec{\eta}', \vec{\eta}, k).$$

Referências Bibliográficas

- [1] J. Glimm and A. Jaffe, *Quantum Physics: A Functional Integral Point of View*, Spriger Verlag, New York, 1986.
- [2] R. Schor, J. C. A. Barata, P.A. Faria da Veiga and E. Pereira: *Physical Review E*, **59**, Issue 3, 2689-2694, 1999.
- [3] B. Simon: *Statistical Mechanics of Lattice Gases*, Princeton University Press, Princeton, 1994.
- [4] N. Manson, A.N. Pargelis and B. Yurke, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 190-194 (1993).
- [5] V. Pasler *et al*, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1094-1097 (1998).
- [6] S.Y. Wu and E. Feenberg, *Phys. Rev.* **122**, 739-742 (1961); M.T. Bachelor and C.M. Yung, *Physical Review Letter* **74**, 2026-2029 (1995).
- [7] J. Berges, N. Tetradis and C. Wetterich, *Physical Review Letters* **77**, 873 (1996).
- [8] J. Berges, N. Tetradis and C. Wetterich, *Phys. Rep.* **363**, 223-386 (2002).
- [9] P.A. Faria da Veiga, M. O'Carroll, R. Schor *Physical Review E*, **66**, 027108, 1-4, 2002.
- [10] R. Schor and Michael O'Carroll *Physical Review E*, **62**, 1-5, 2000.
- [11] R. Schor and Michael O'Carroll *Journal of Statistical Physics*, **99**, Nos 5/6, 1207-1235, 2000.
- [12] R. Schor and Michael O'Carroll *Journal of Statistical Physics*, **99**, Nos 5/6, 1265-1279, 2000.
- [13] P. H. R. dos Anjos, P.A. Faria da Veiga and M. O'Carroll, *Transfer Matrix Spectrum for $O(N)$ High Temperature Lattice Classical Ferromagnetic Spin Systems and Staggering Transformations*, submetido para *Physica Scripta*, 2004.

- [14] R. Schor *Communications on Mathematical Physics*, **59**, 213-233, 1978.
- [15] R. Schor and Michael O'Carroll *Journal of Statistical Physics*, **109**, Nos 1/2, 279-288, 2002.
- [16] P.A. Faria da Veiga, L. Ioriatti and M. O'Carroll *Physical Review E*, **66**, 016130, 1-9, 2002.
- [17] P.A. Faria da Veiga, M. O'Carroll, and R. Schor, *Phys. Rev.* **D67**, 017501 (2003).
- [18] P.A. Faria da Veiga, M. O'Carroll, and R. Schor, *Phys. Rev.* **D68**, 03750 (2003).
- [19] T. Spencer, *Communications on Mathematical Physics*, **44**, 143-164, 1975.
- [20] T. Spencer and Zirilli, *Communications on Mathematical Physics*, **49**, 1-16, 1976.
- [21] P. Paes-Leme, *Annals of Physics*, **115**, 367-387, 1978.
- [22] M. O'Carroll *Journal of Statistical Physics*, **34**, Nos 3/4, 597-608, 1984.
- [23] M. Reed, B. Simon: *Methods of Modern Mathematical Physics*, Vol. I, Academic Press, New York, 1973.
- [24] M. Reed, B. Simon: *Methods of Modern Mathematical Physics*, Vol. II, Academic Press, New York, 1973.
- [25] G.F. Koster: *Physical Review*, **95**, 1436, 1973.
- [26] R. Schor, Michael O'Carroll and P.A. Faria da Veiga : *Physical Review E*, **65**, 037102, 2002.
- [27] Michael O'Carroll and P.A. Faria da Veiga : *Journal of Physics A*, **35**, 4541-4552, 2002.
- [28] R. Schor and Michael O'Carroll: *Physical Review E*, **61**, 6156 - 6164, 2000.
- [29] J. Dimock and J. P. Eckmann, *Communications on Mathematical Physics*, **51**, 41-54, 1976.
- [30] J. Dimock and J. P. Eckmann, *Annals of Physics*, **103**, 289-314, 1977.