

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS

PEDRO FALEIROS SILVA

Uma nova abordagem da técnica de contraste de fase de ordem zero:
geração e mapeamento direto de potenciais ópticos arbitrários

São Carlos
2022

PEDRO FALEIROS SILVA

Uma nova abordagem da técnica de contraste de fase de ordem zero:
geração e mapeamento direto de potenciais ópticos arbitrários

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de concentração: Física Básica
Orientador: Prof. Dr. Sérgio Ricardo Muniz

.Versão Original

São Carlos
2022

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Silva, Pedro Faleiros

Uma nova abordagem da técnica de contraste de fase de ordem zero: geração e mapeamento direto de potenciais ópticos arbitrários / Pedro Faleiros Silva; orientador Sergio Ricardo Muniz -- São Carlos, 2022.

78 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Física Básica) -- Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2022.

1. Potenciais ópticos. 2. Aprisionamento óptico. 3. Controle de frente de onda. I. Muniz, Sergio Ricardo, orient. II. Título.

FOLHA DE APROVAÇÃO

Pedro Faleiros Silva

Dissertação apresentada ao Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Ciências. Área de Concentração: Física Básica

Aprovado(a) em: 29/09/2022

Comissão Julgadora

Dr(a). Sérgio Ricardo Muniz

Instituição: (IFSC/USP)

Dr(a): Luis Eduardo Evangelista de Araujo

Instituição: (UNICAMP/Campinas)

Dr(a). Antonio Zelaquett Khoury

Instituição: (UFF/Niterói)

À minha mãe, que sempre foi meu maior exemplo de dedicação e esforço. Por todo seu carinho e apoio nessa jornada.

AGRADECIMENTOS

Ao meu Senhor e Salvador, Jesus Cristo, pela esperança da vida eterna e alegria para o hoje.

À minha noiva, Bê, e minha mãe, Silvana por todo apoio e encorajamento. A paciência e confiança de vocês foram essenciais.

Ao Prof. Sérgio Muniz, pela orientação e paciência com todas as curvas ao longo do caminho.

Obrigado, professor, pela confiança e inspiração em ensinar e se divertir com a Física.

Aos amigos de laboratório, Thalyta, Lucas e Charlie, por deixarem os dias mais alegres e leves.

Nunca esquecerei o café do laboratório.

Por fim, a todos os amigos de faculdade, ABU e IPSC que estiveram presentes marcando as cores do mestrado, na grande obra de arte da vida.

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) Código de financiamento 001.

"O último esforço da razão é reconhecer que existe uma infinidade de coisas que a
ultrapassam."

Blaise Pascal

RESUMO

SILVA, P.F. **Uma nova abordagem da técnica de contraste de fase de ordem zero**: geração e mapeamento direto de potenciais ópticos arbitrários. 2022. 78p. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2022.

A capacidade de modular e corrigir, em tempo real, o perfil de intensidade de um feixe de laser é importante para muitas áreas de pesquisa e da indústria, especialmente para importantes problemas contemporâneos da física moderna como simulação quântica com átomos frios e experimentos com pinças ópticas. Nesta dissertação, é apresentada uma nova abordagem baseada na Técnica de Contraste de Fase de Ordem Zero para gerar potenciais ópticos arbitrários e com alto nível de controle e precisão. As principais vantagens da metodologia desenvolvida são a implementação experimental simples e flexível e a facilidade de mapear diretamente e ter um controle fino dos potenciais finais, em comparação com técnicas conhecidas como a Holografia Digital e o método de Contraste de Fase Generalizado. Neste trabalho, apresentamos uma nova abordagem baseada numa interpretação física original, que é bastante intuitiva, e que tem como ideia central o controle fino da difração da luz em regiões micrométricas de um modulador espacial de luz de cristal líquido, devido ao contraste de fase entre uma grade de difração binária e as informações da imagem alvo do potencial. Nesta dissertação serão apresentadas as ideias principais e o procedimento para codificar as informações de fase, as imagens de alta definição obtidas e a aplicação da metodologia na correção de um potencial óptico quadrado, usado como exemplo ilustrativo do método, que é bastante geral e pode ser facilmente aplicado a outros tipos de potenciais ópticos de interesse.

Palavras-chave: Potenciais ópticos. Aprisionamento óptico. Controle de frente de onda.

ABSTRACT

SILVA, P.F. **A new approach for zeroth order phase contrast technique:** generating and mapping arbitrary optical potentials. 2022. 78p. Dissertation (Master in Science) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2022.

The ability to modulate and correct, in real time, the intensity profile of a laser beam is important for many areas of research and industry, especially for important contemporary problems in modern physics such as quantum simulation with cold atoms and experiments with optical tweezers. . In this dissertation, a new approach based on the Zero Order Phase Contrast Technique is presented to generate arbitrary optical potentials with a high level of control and precision. The main advantages of the developed methodology are its simple and flexible experimental implementation and the ease of directly mapping and having a smooth control of the final potentials and their phase masks, compared to known techniques such as Digital Holography and the Generalized Phase Contrast. In this work, we present a new approach based on an original physical interpretation, which is quite intuitive, and which has as its central idea the fine control of light diffraction in micrometer regions of a spatial liquid crystal light modulator, due to the phase contrast between a binary diffraction grating and the target potential image information. In this dissertation will be presented the main ideas and procedure to encode the phase information, the high definition images obtained and the application of the methodology in the correction of a square optical potential, used as an illustrative example of the method, which is quite general and can be easily applied to other types of optical potentials of interest.

Keywords: Optical potential. Optical trapping. Wave front control.

LISTA DE FIGURAS

- Figura 1 - Princípio de geração de hologramas digitais. A lente no centro do sistema $2f$ realiza a Transformada de Fourier do feixe com padrão de fase do *kinofom*. O resultado é o potencial óptico final. 32
- Figura 2 - Etapas de iteratividade do algoritmo GS para geração dos *kinofoms*. 33
- Figura 3 - Potenciais Ópticos gerados em laboratório a partir do algoritmo GS. Os potenciais foram gerados a partir de um LC-SLM, uma lente convergente e uma câmera CCD. 34
- Figura 4 - Sistema óptico necessário para a técnica GPC, conhecido como correlator $4f$, com adição de um PCF no foco da primeira lente. 35
- Figura 5 - Representação da ação dos micro espelhos em manter ou não a luz no eixo de formação da imagem. Fonte: Adaptada de PEREGO (18). 38
- Figura 6 - Esquema geral da ZOPCT, desde a codificação da máscara de fase, o sistema óptico para filtrar a ordem zero e a captura da imagem. 39
- Figura 7 - Representação geral da metodologia descrita nesse capítulo. A modulação da intensidade da luz é feita essencialmente pelo controle do gradiente de fase $\nabla\phi_{eff}$ no feixe incidente. 43
- Figura 8 - Simulação da Difração Fraunhofer para uma grade de Ronchi com fase relativa $\phi=\pi$. (a) Padrão de fase 2D no plano LC-SLM, onde $M \times N$ é a área em pixels do LC-SLM e P o período da grade. (b) Representa a Difração de Fraunhofer, com corte em 1D. 46
- Figura 9 - Cálculo numérico da eficiência de difração da luz em função do lado da região modulada (mantida como um quadrado). A simulação foi realizada para diferentes valores de fase relativa (ϕ). 47
- Figura 10 - Esquema simplificado para geração da máscara de fase de aplicação da metodologia descrita. 50
- Figura 11 - Simulação computacional da técnica. Além das imagens completas (2D), é demonstrado o perfil de intensidade de um corte do horizontal para cada potencial e valor de β 51
- Figura 12 - Simulação da técnica para um potencial arbitrário e complexo em escala de cinza. (a) Representa as ordens de difração na posição do filtro espacial. (b) Resultado da seleção da ordem zero. (c) Resultado da seleção da ordem $m = 1$ 52
- Figura 13 - Simulação computacional da eficiência energética de potenciais quadrados com lado l . O resultado é calculado em função do parâmetro β 53
- Figura 14 - Sistema experimental construído para aplicação da metodologia descrita nesse trabalho. 56

Figura 15 - (a) Feixe Original a ser modulado. (b) Imagem capturada do potencial Flat-Top obtido. (c) Comparação do perfil de intensidade do feixe original com o corte do potencial gerado.	57
Figura 16 - Potenciais Binários obtidos em laboratório.....	58
Figura 17 - Potencial Óptico obtido a partir de uma imagem em escala de cinza arbitrária. A imagem alvo e a geração da máscara de fase são descritos na Figura 10. ..	60
Figura 18 - Potencias arbitrários obtidos em laboratório. Para esses casos, a imagem alvo era menor que a região delimitada pelo feixe original. Logo, fica claro o feito de corte da técnica.	60
Figura 19 - Procedimento para calcular a eficiência energética em função de β . Para cada valor de β , foi capturado seu respectivo potencial flat-top.	62
Figura 20 - Calibração da eficiência energética em função de β	63
Figura 21 - Máscara de fase inicial para correção do perfil gaussiano do feixe original. Representa o estágio da máscara de fase antes da intercalação das linhas em π	66
Figura 22 - Demonstração experimental da correção do potencial flat-top. Parâmetros escolhidos: $\Delta = \pi/2$ e $w = 40$ pixels.....	67
Figura 23 - Representação da estrutura física de uma lente convergente e sua ação modulando a fase de um campo complexo incidente.....	75
Figura 24 - Representação do efeito de curvatura da frente de onda gerado por uma lente convergente.	76

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AOM	Modulador Acusto Óptico
DOE	Elemento Óptico Difractivo
DMD	Dispositivo de Micro Espelhos
GPC	Técnica de Contraste de Fase Generalizado
LC-SLM	Modulador Espacial de Cristal Líquido
PCF	Filtro de Contraste de Fase
ZOPCT	Técnica de Contraste de Fase de Ordem Zero

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	21
2	FORÇAS ÓPTICAS	25
3	ENGENHARIA DE POTENCIAIS ÓPTICOS.....	29
3.1	Estado da Arte.....	29
3.1.1	Técnicas de controle de fase	30
3.1.1.1	Holografia Digital.....	31
3.1.1.2	Técnica de Contraste de Fase Generalizado (GPC).....	34
3.1.2	Técnicas de controle de amplitude.....	36
3.1.2.3	Moduladores Acusto-Ópticos (AOMs).....	36
3.1.2.4	Dispositivos de Micro Espelhos (DMDs)	37
3.2	Técnica de Contraste de Fase de Ordem Zero	39
4	METODOLOGIA	43
4.1	Controle Ótimo da Difração da Luz.....	44
4.1.1	Grade de difração binária	44
4.1.2	Limite de Modulação	46
4.2	Codificando informação de amplitude via contraste de fase.....	48
5	SISTEMA EXPERIMENTAL.....	55
6	RESULTADOS.....	57
6.1	Potenciais Binários e Arbitrários.....	57
6.2	Calibração Fase-Intensidade	61
6.3	Correção de um Potencial Flat-Top	63
7	CONCLUSÃO	69
	REFERÊNCIAS.....	71
	APÊNDICE A – Lente como uma transformada de Fourier.....	75

1 INTRODUÇÃO

Ser capaz de reproduzir com precisão uma distribuição de intensidade arbitrária e controlável de luz laser é importante para muitas áreas de pesquisa e aplicações tecnológicas, especialmente áreas que lidam com a interação luz-matéria e tecnologias fotônicas de processamento de informação. Podemos citar aplicações em optogenética, micro fabricação, corte a laser, geração de feixes estruturados e sistemas de aprisionamento óptico.¹⁻⁵ Com a crescente importância e tangibilidade de tecnologias fotônicas, com certeza a habilidade de ter o maior controle de um feixe laser, em termos de intensidade e distribuição de fase, com fácil implementação e controle otimizado é de grande valia, e a bibliografia e método descritos nesse trabalho contribuem com a comunidade nesse sentido.

O foco inicial desse trabalho foram os sistemas de aprisionamento óptico, como experimentos com átomo frios e pinças ópticas para nano e micro partículas. Nesse contexto, a habilidade de controlar da forma mais precisa uma frente de onda, significa controlar as trocas de momentum entre a luz e esses sistemas físicos, ou seja, ter um controle sobre as forças ópticas que atuam no sistema, como será discutido em mais detalhes no próximo capítulo. Por isso, padrões arbitrários da luz são conhecidos como Potenciais Ópticos – o tipo de potencial que governa as forças ópticas que atuam no sistema físico.⁶⁻⁸ Atualmente, o controle fino de micro e nano partículas, até átomos ultrafrios, tem como um dos seus principais objetivos a simulação quântica de sistemas físicos complexos, tanto para verificação de resultados analíticos, como exploração de novos fenômenos físicos. No contexto das pinças ópticas, podemos citar a exploração de sistemas fora do equilíbrio, nano máquinas térmicas e controle ótimo de átomos artificiais em nano diamantes⁹⁻¹⁴, aplicações as quais tem sido objeto de interesse e pesquisa do nosso laboratório. Já no contexto de átomos frios, desde a proposta de Feynman em 1982¹⁵, a construção de um simulador quântico universal vem sendo idealizada para esses sistemas. A capacidade de aplicar um potencial óptico arbitrário sobre uma nuvem de átomos aprisionados é análogo a aplicar um hamiltoniano arbitrário sobre o sistema que é inerentemente quântico. Logo, desde física da matéria condensada até circuitos supercondutores podem ser simulados nesses experimentos idealizados¹⁶⁻¹⁹. Apesar de cada sistema físico ter seus desafios experimentais, os sistemas atômicos, em especial, exigem potenciais ópticos controlados com grande precisão. Pequenas variações de ruído já são suficientes para destruir o sistema físico em questão. Nessa perspectiva, no geral buscamos potenciais ópticos:

- Suaves – sem speckle* e ruído no perfil de intensidade.
- Sharp† – barreiras idealmente em delta na transição claro/escuro.
- Com boa eficiência energética.
- Com possibilidade de feedback em tempo real para correção ou modulação dinâmica do potencial.

Vale ressaltar a importância da última característica. Sendo qualquer sistema físico sujeito a ruídos e interferências que podem “danificar” o potencial final, a capacidade de correção em tempo real do potencial é de grande utilidade. Não apenas por isso, mas também para geração de potenciais dinâmicos no tempo – hamiltonianos que dependem das coordenadas espaciais e do tempo ($H \rightarrow H(x, y, t)$).

Nesse sentido, os últimos anos têm visto um número crescente de experimentos relatando a geração dinâmica e correção de distribuições de intensidade de luz para simulação quântica com átomos frios em redes ópticas e a emulação de física de não equilíbrio com pinças ópticas através de potenciais modulados. Muitos desses experimentos usam o controle direto da amplitude da luz por meio de dispositivos de micro espelhos digitais (DMDs) ou moduladores acústicos-ópticos (AOMs)^{9,18}.

Esses dispositivos têm a vantagem da modulação espacial da luz em alta velocidade e controle de feedback direto dos potenciais, mas têm limitações na suavidade das distribuições de intensidade de luz e não fornecem controle da fase final do potencial óptico. Portanto, técnicas baseadas no controle da fase do feixe incidentes, como a holografia e a técnica de contraste de fase generalizado ainda são uma boa alternativa. Tais técnicas geralmente se apoiam na utilização Moduladores Espaciais de Luz de Cristal Líquido (LC-SLMs). Embora os Moduladores Espaciais de Luz de Cristal Líquido (LC-SLMs) apresentem limitações de velocidade na taxa de modulação de fase de um campo incidente, eles fornecem a possibilidade de modulação completa da luz, ou seja, modular a intensidade e a fase do potencial óptico final, oferecendo mais flexibilidade e uma ampla gama de aplicações, permitindo explorar diferentes abordagens em laboratório. Muitos métodos para gerar distribuições de luz complexas (amplitude + fase) usando somente técnicas de controle de fase foram estudados ao longo dos anos, cada um com suas vantagens e limitações, como as técnicas tradicionais de holografia e, mais recentemente, as técnicas de Contraste de Fase Generalizado (GPC). Apesar de sua boa eficiência energética, a holografia demanda um alto custo computacional e pode sofrer speckle.

* A palavra *speckle* aqui é usada no mesmo contexto utilizado na óptica física (ondulatória).

† Sharp indica definição e precisão. Um potencial *sharp* pode apresentar transições abruptas entre regiões claras e escuras.

Além disso, não permite um mapeamento direto entre a imagem final e sua máscara de fase, impedindo o uso de realimentação ativa para corrigir imperfeições e ruídos. A GPC, por outro lado, requer um filtro de contraste de fase no caminho óptico, tornando-o mais desafiador para questões práticas tais como alinhamento óptico e mudança de comprimento de onda²⁰⁻²⁴.

Nesse trabalho descrevemos o que acreditamos ser uma nova abordagem da Técnica de Contraste de Fase de Ordem Zero descrita por Pizolato²⁵. Usando uma interpretação física simples e intuitiva, e diante da metodologia que introduzimos neste trabalho, nós demonstramos que ela apresenta características de técnicas de modulação de amplitude, mas sendo essencialmente uma técnica de controle de fase. Suas principais vantagens são: facilidade de entendimento e implementação, mapeamento direto entre o potencial óptico final e a máscara de fase que o gerou e resultados com alta definição e suavidade. O objetivo central deste trabalho é oferecer uma alternativa simples para geração de potenciais ópticos úteis em sistemas de aprisionamento óptico. Para isso, a dissertação está dividida do seguinte modo:

No capítulo 2, é feita uma breve introdução da origem e principais características das forças ópticas.

No capítulo 3, é feita uma discussão mais abrangente do estado da arte em modulação espacial da luz. Ou seja, as principais técnicas conhecidas e utilizadas no contexto de potenciais ópticos.

Nos capítulos 4 e 5 é apresentada a metodologia, junto com o procedimento pragmático simples de aplicação da técnica, e o sistema experimental montado, respectivamente.

E por fim, no capítulo 6, são demonstrados os resultados obtidos em laboratório, os quais ilustram todo o potencial da metodologia apresentada.

2 FORÇAS ÓPTICAS

Para melhor compreensão do conceito de Potencial Óptico e suas características ideais, é importante ter uma visão geral do que são forças ópticas e sua atuação nos sistemas físicos mencionados. O objetivo desse capítulo não é prover uma visão exaustiva do tema, que pode ser encontrado de modo vasto na literatura⁶⁻⁸, mas sim discutir em linhas gerais a origem das forças ópticas e sua dependência do perfil de intensidade do feixe de luz nos experimentos de aprisionamento óptico.

O primeiro experimento de aprisionamento óptico foi reportado por Arthur Ashkin em 1970²⁶. Naquele contexto, Ashkin demonstrou ser possível acelerar, frear e manter em equilíbrio estável micropartículas neutras por meio de um laser altamente focalizado, além de demonstrar em seu trabalho o resultado teórico que fomentava tal observação. Apesar do fato de que a luz carrega momentum ser bem conhecido desde a teoria corpuscular, e consolidado com o eletromagnetismo de Maxwell, o trabalho de Ashkin traz a seguinte novidade: o diferencial para o aprisionamento óptico de micropartículas neutras foi a focalização de um feixe de luz coerente, o laser. Isso porque a força sobre tais partículas é proporcional ao gradiente de intensidade (I) do feixe incidente:

$$\vec{F} \propto \vec{\nabla} I \quad (1)$$

O modo mais simples de verificar essa dependência é considerar o limite dipolar das forças ópticas. No limite dipolar, o ente físico sobre o qual a luz incide deve ter tamanho $a \ll \lambda$, sendo a o raio médio e λ o comprimento de onda incidente. Nessa condição, podemos considerá-lo um dipolo (\vec{p}) induzido na presença de um campo (\vec{E}) aproximadamente homogêneo no espaço, e que oscila sua amplitude no tempo, onde:

$$\vec{p}(\vec{r}, t) = \alpha \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (2)$$

Nesse caso, α representa a polarizabilidade elétrica do ente físico considerado. Sendo $U_d = -\vec{p} \cdot \vec{E}$ a energia potencial de interação do dipolo com o campo externo, a força média no tempo ($\vec{F} = \langle -\vec{\nabla} U_d \rangle$) sobre o mesmo será dada por,

$$\vec{F}_d = \langle \vec{\nabla} (\vec{p} \cdot \vec{E}) \rangle = \frac{1}{2} \langle (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} + \vec{p} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \rangle \quad (3)$$

Onde foi utilizada a seguinte relação vetorial: $\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}$. Aplicando-a novamente, assim como a média temporal do campo $\vec{E}(\vec{r}, t)$ de interação com o dipolo, chega-se na seguinte expressão para a força média[‡]:

$$\vec{F} = \frac{\text{Re}(\alpha)}{2c\epsilon_0} \vec{\nabla}(\vec{E} \cdot \vec{E}^*) + \frac{\sigma_{ext}}{2c} \text{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*) - \frac{1}{2} \sigma_{ext} \vec{\nabla} \times \left(\frac{i\epsilon_0}{2k} (\vec{E} \times \vec{E}^*) \right) \quad (4)$$

Reduzindo-a, para melhor compreensão do significado de cada termo temos:

$$\vec{F} = \frac{\text{Re}(\alpha)}{2c\epsilon_0} \vec{\nabla}I + \frac{\sigma_{ext}}{2c} \vec{S} - \frac{1}{2} \sigma_{ext} \vec{\nabla} \times \left(\frac{i\epsilon_0}{2k} (\vec{E} \times \vec{E}^*) \right) \quad (5)$$

Onde c representa a velocidade da luz, ϵ_0 a permissividade elétrica no vácuo, σ_{ext} a seção de choque de extinção do entre físico e k o vetor de onda incidente.

Apesar da expressão acima ser consequência do limite dipolar, de modo geral ela ilustra bem os principais efeitos da interação de um feixe de laser com partículas e átomos - pelo menos a nível qualitativo. O primeiro termo da força, proporcional a $\vec{\nabla}I$, é o responsável pelo aprisionamento em uma região do espaço. Sendo ele um termo conservativo, podemos associar ele a um potencial, que em última instância é o potencial óptico objeto de estudo desse trabalho. O Segundo termo da expressão (5), por ser proporcional ao vetor de Poyting, representa o termo de espalhamento da força, ou seja, uma contribuição não conservativa que direciona a partícula ou átomo na direção de propagação do feixe. O último termo é um termo que só não será nulo se o feixe tiver um gradiente de polarização, para que $(\vec{E} \times \vec{E}^*) \neq 0$. Em geral este último pode ser desprezado frente aos outros e o primeiro termo sobressai sobre o segundo, dependendo da presença de um alto gradiente de intensidade.

Diante disso, podemos associar o potencial óptico de aprisionamento (U_{dip}) à seguinte expressão:

$$U_{dip}(\vec{r}, t) = -\frac{\text{Re}(\alpha)}{2c\epsilon_0} I(\vec{r}, t) \quad (6)$$

[‡] JONES, P. H.; MARAGÒ, O. M.; VOLPE, G. **Optical tweezers: principles and applications**. Cambridge: Cambridge University Press, 2015

O fator α nas expressões (4), (5) e (6) carrega consigo as características intrínsecas de cada sistema físico, já que representa a resposta da partícula ou átomo ao campo eletromagnético do feixe incidente. Por exemplo, para partículas neutras e homogêneas:

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{\frac{4 - \varepsilon_p}{\varepsilon_p + 2} - \frac{\varepsilon_p - 1}{\varepsilon_p + 2} \cdot ((ka)^2 + \frac{2i}{3}(ka)^3)} \quad (7)$$

Sendo $\alpha_0 = 4\pi a^3 \varepsilon_0 \frac{\varepsilon_p - 1}{\varepsilon_p + 2}$ a relação de Clausius-Mossotti para a polarizabilidade de uma partícula neutra na presença de um campo não oscilante (7). Além dos termos já descritos anteriormente, ε_p representa a permissividade elétrica da partícula.

Considerando átomos neutros, as características quânticas da estrutura atômica são importantes para interação com o campo externo. Nesse caso, a polarizabilidade pode ser calculada desde um modelo semiclássico, considerando um átomo de dois níveis, à um modelo totalmente quântico, considerando casos vários níveis de energia, como demonstrado por Grimm (8). Tendo em vista o objetivo deste capítulo, podemos nos ater ao primeiro caso. Nessa condição, o potencial dipolar que age sobre o átomo neutro é dado por:

$$U_{dip}(\vec{r}, t) = \frac{3\pi c^2 \Gamma}{2\omega_0^3 \Delta} I(\vec{r}, t) \quad (8)$$

Onde $\Gamma = \frac{\omega_0^3}{3\pi\varepsilon_0\hbar c^3} |\langle e|\mu|g \rangle|^2$ é a frequência de Larmor do átomo e $\Delta = \omega - \omega_0$, e ω e ω_0 a frequências de incidente e de transição atômica, respectivamente.

Nosso destaque aqui é que os pontos de equilíbrio estável do potencial dependem dos vales do perfil de intensidade do feixe que incide sobre o sistema. Conforme mais *sharp* e contrastante for o potencial, maior será a contribuição de $\vec{\nabla}I$, e assim maior a magnitude da força óptica de aprisionamento em certa região do espaço. A possibilidade de controlar $I(\vec{r}, t)$ de maneira arbitrária, cria uma vasta gama de possibilidades. E não apenas da intensidade $I(\vec{r}, t)$, mas também a fase do potencial óptico final. Se a fase for controlada, feixes estruturados, com polarização e vetor de poyting variável no espaço e no tempo, podem ser criados, possibilitando mais uma gama de controle e simulação de física de sistemas complexos.

Como discutido anteriormente, o modelo dipolar foi escolhido para ilustrar as principais características das forças ópticas em sistemas de aprisionamento óptico. Ele oferece uma visão

qualitativa correta dos potenciais ópticos em qualquer limite e quantitativa respeitando $a \ll \lambda$. Mas, um tratamento quantitativo geral também pode ser encontrado nas referências (6-7, 27-28), e técnicas de simulação computacional em (29).

3 ENGENHARIA DE POTENCIAIS ÓPTICOS

Sendo nosso objetivo a geração de potenciais ópticos arbitrários com alto grau de definição e controle, é importante ter conhecimento das principais técnicas de modulação espacial da luz coerente, suas limitações e suas vantagens. Isso oferece o subsídio necessário para entender nos próximos capítulos a metodologia proposta nesse trabalho e o que ela pode oferecer no contexto já bem estabelecido de outros métodos.

Por isso, o propósito desse capítulo é discutir em linhas gerais o estado da arte de modulação espacial da luz, em especial, as técnicas de holografia, contraste de fase, modulação acusto-óptica e com DMDs (do inglês *Digital Micromirror Devices*), assim como a técnica que foi inspiração para os desenvolvimentos aqui descritos – a Técnica de Contraste de Fase de Ordem Zero.

3.1 Estado da Arte

Como discutido brevemente na introdução da dissertação, atualmente as técnicas de modulação espacial da luz podem se dividir em dois grandes grupos: 1. Técnicas de Controle de Fase e 2. Técnicas de Controle de Amplitude.

As Técnicas de Controle de Fase se caracterizam por gerarem a distribuição final de intensidade de luz através do controle da fase de uma frente de onda incidente. Tal controle permite a modulação da difração e interferência da luz e por consequência o controle da distribuição de intensidade da luz coerente no plano óptico final devido o comportamento interferométrico da luz. Já as técnicas de controle de amplitude se caracterizam pelo controle direto da posição do feixe por completo ou de regiões micrométricas de intensidade do mesmo. Nelas, o controle da fase da frente de onda não é o fator determinante para o potencial óptico final. Nas técnicas de modulação de fase, o foco está no controle da frente de onda do feixe incidente. Já nas técnicas de controle de amplitude o foco está no controle do desvio da luz.

Cada grupo ou técnica específica tem suas vantagens e desvantagens. No contexto de potenciais ópticos, o foco não é definir um ranking global de técnicas de modulação espacial de luz, mas saber reconhecer como cada uma pode atender aos requisitos dos experimentos, principalmente em termos de: facilidade de implementação, velocidade de modulação, eficiência energética, geração de potenciais suaves, arbitrários e alto grau de definição, e capacidade de modulação complexa (amplitude e fase) do potencial final.

3.1.1 Técnicas de controle de fase

Há duas principais técnicas de controle de fase que se destacam na literatura: Holografia e a Técnica de Contraste de Fase Generalizado (GPC). Ambas com aplicações já reportadas em experimentos de aprisionamento óptico.^{24,30-31,35}

Como indicado, tais técnicas se fundamentam em controlar o padrão de difração e interferência da luz através do controle da fase da frente de onda incidente. Para entender como isso é possível, é necessário entender um dos princípios básicos da Óptica de Fourier: em grande parte dos contextos experimentais de interesse da área de potenciais ópticos, a propagação da luz pode ser calculada através de transformadas de Fourier. De modo geral, a partir de um perfil inicial de amplitude e fase de uma onda eletromagnética é possível calcular seu estado final em um plano arbitrário em termos de duas principais aproximações: a difração de Fresnel e difração de Fraunhofer.

A difração de Fresnel se caracteriza por uma abordagem mais geral e situações onde o plano final do potencial óptico está relativamente perto do ponto de modulação da frente de onda. Já a difração de Fraunhofer se caracteriza por situações onde o plano do potencial óptico final está relativamente longe do ponto de modulação da frente de onda – nessa situação, devido à propagação da luz, a curvatura da frente de onda e de suas componentes pode ser desprezada com boa aproximação.³²

De modo geral, as duas técnicas aqui citadas, Holografia e GPC, podem ser bem descritas pela difração de Fraunhofer, direta ou indiretamente. Diretamente no sentido de que quando não há lentes no sistema experimental que alterem a propagação da luz, normalmente o caminho óptico é grande o suficiente para que a aproximação de Fraunhofer seja válida. Nesse caso o campo resultante depois da propagação pode ser calculado por meio da transformada de Fourier do campo complexo (amplitude + fase) inicial. Indiretamente, no sentido de que, na maioria dos casos, o sistema experimental possui lentes para captura da imagem final – e as lentes atuam de modo equivalente à difração de Fraunhofer sobre o campo que incide sobre elas. Na prática, como demonstrado no Apêndice B, se um campo incidente $\vec{E}_i(x, y, 0) = \vec{E}_0 e^{i\phi(x,y)}$, há uma distância d da de uma certa lente, o campo no foco da mesma é dado por:

$$\vec{E}_f(x, y, f) = \frac{1}{i\lambda f} e^{i(x^2+y^2)\frac{k}{2f}(1-\frac{d}{f})} \mathcal{F}\{\vec{E}_i(x, y, 0)\}, \quad (9)$$

onde λ e $k = 2\pi/\lambda$ são, respectivamente, o comprimento de onda e o vetor de onda do feixe incidente, f a distância focal da lente e $\mathcal{F}\{\vec{E}_i(x, y, 0)\}$, a transformada de Fourier do campo incidente sobre a lente. Sendo a intensidade $I(x, y, f) = \vec{E}_f \cdot \vec{E}_f^* = \frac{1}{(\lambda f)^2} |\mathcal{F}\{\vec{E}_i(x, y, 0)\}|^2$, nota-se que a intensidade de um campo na posição focal da lente pode ser obtida a partir da transformada de Fourier do campo incidente, a menos de uma normalização, que para efeitos experimentais pode ser desprezada. Tal fato é importante, pois, é a base das técnicas de controle de fase para modulação espacial da luz, como descrito a seguir.

3.1.1.1 Holografia Digital

A técnica de holografia foi descrita pela primeira vez em 1948 por Dennis Gabor⁴³ e hoje em dia encontramos diversas versões de sua aplicação. No contexto de potenciais ópticos, a técnica holográfica mais utilizada é a holografia digital, que se apropria de recursos computacionais para calcular os hologramas e dispositivos digitais para controlar a fase da frente de onda. Tal técnica se fundamenta no seguinte ponto: encontrar o perfil de fase ideal, que quando aplicado em um feixe gaussiano, tem transformada de Fourier equivalente ao potencial óptico requerido. Experimentalmente, o padrão de fase é calculado computacionalmente e depois imposto sobre um feixe de laser através de moduladores espaciais de luz ou elementos difrativos, e por fim uma lente convergente realiza a transformada de Fourier do campo, gerando o potencial óptico requerido. O padrão de fase calculado para holografia digital é conhecido como *Kinoform*. Diante disso, a holografia digital necessita apenas de um sistema óptico bifocal (2f) para sua implementação, como ilustrado a seguir:

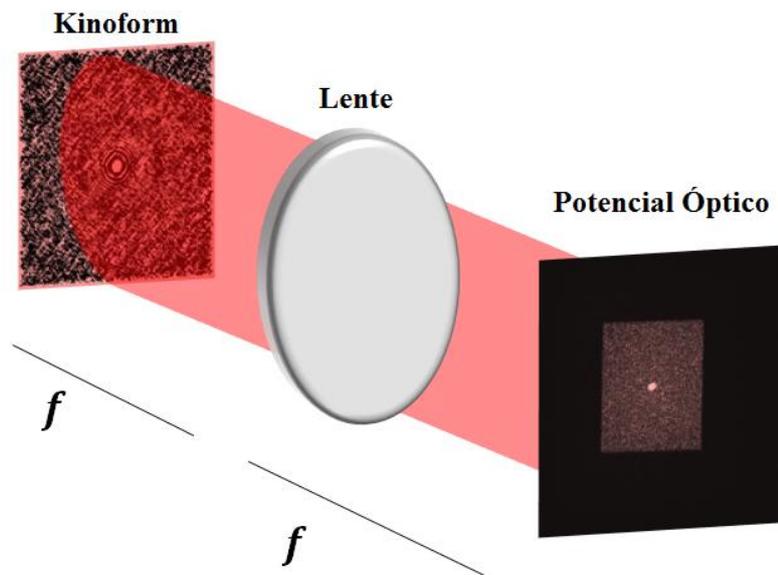


Figura 1- Princípio básico de geração de hologramas digitais. A lente no centro do sistema $2f$ realiza a Transformada de Fourier do feixe com padrão de fase do *Kinoform*, impresso através de um SLM ou DOE. O resultado é o potencial óptico final.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Um exemplo conhecido da técnica é o algoritmo desenvolvido por Gerchberg e Saxton em 1971 (algoritmo GS)³⁴, desenvolvido para cálculo otimizado do *Kinoform* de geração dos potenciais. Tal algoritmo é iterativo e segue a seguinte lógica:

1. Define-se uma fase inicial, arbitrária ($\phi_i(x, y)$);
2. A fase ϕ_i é imposta sobre um feixe de certo perfil de intensidade (I_0);
3. A transformada de Fourier do campo complexo é calculada e toma-se apenas a fase resultante (ϕ_{FFT});
4. ϕ_{FFT} é imposta sobre a imagem alvo (I_A), e a transformada de Fourier inversa é calculada;
5. A fase do resultado é novamente imposta sobre o feixe incidente e todo o processo é repetido quantas vezes se queira.

Com o tempo, outros algoritmos mais eficientes foram desenvolvidos^{24, 31}, mas com mesmo fundamento e procedimento iterativo. De modo geral, o algoritmo GS pode ser ilustrado da seguinte forma:

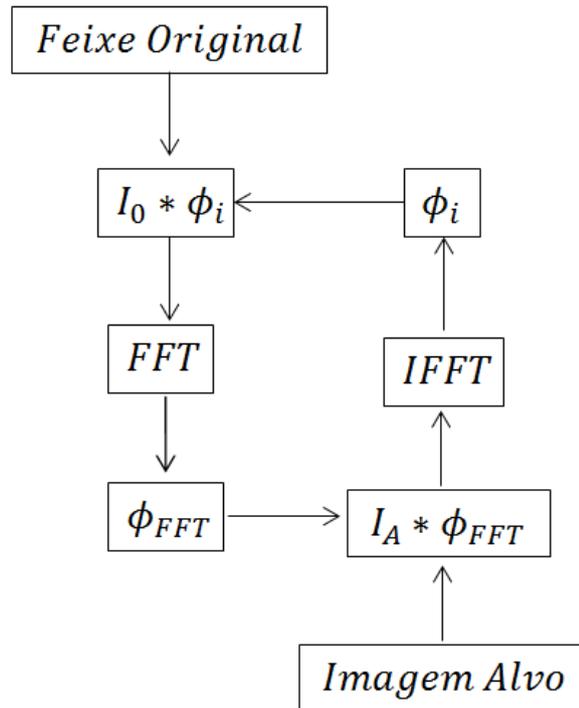


Figura 2 - Etapas de iteratividade do algoritmo GS para geração dos *Kinoforms*.
Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Figura 2, FFT e IFFT representam a transformada de Fourier e a transformada inversa de Fourier, calculadas computacionalmente, respectivamente. A iteratividade do algoritmo pode ser definida como se queira. Normalmente, conforme mais iterações, mais preciso é o potencial óptico final. Ao mesmo tempo, é necessário fazer o contrabalanço do custo computacional do processo.

A holografia apresenta a vantagem de ser uma técnica de fácil implementação, principalmente no contexto de sistema de aprisionamento óptico, onde a lente que realiza a transformada de Fourier pode ser a objetiva anterior ao foco de aprisionamento. Além disso, apresenta boa eficiência energética e a capacidade modular tanto amplitude, como fase do potencial óptico final.

Apesar das vantagens, a holografia apresenta um custo computacional relativamente alto de implementação, devido a iteratividade e dificuldade de cálculo de operações complexas como transformadas de Fourier. Isso dificulta a alteração dos potenciais ópticos com alta velocidade e correção dos mesmo em tempo real. Somado a isso, o procedimento da holografia não é um problema inversível, ou seja, diferentes perfis de fase podem gerar o mesmo padrão de intensidade – logo, não é possível, a priori, realizar um mapeamento direto entre potencial

óptico final e a máscara de fase que o gerou. Além disso, o potencial final geralmente sofre com *speckles*, como se fosse formado pela junção de vários pontos de luz, e a presença da ordem zero de difração no centro óptico da imagem. A imagem a seguir ilustra tais características a partir de hologramas gerados em laboratório pelo algoritmo GS:



Figura 3 - Potenciais Ópticos gerados em laboratório a partir do algoritmo GS. Os potenciais foram gerados a partir de um LC-SLM, uma lente convergente e uma câmera CCD.

Fonte: Elaborada pelo autor.

3.1.1.2 Técnica de Contraste de Fase Generalizado (GPC)

A GPC, diferentemente da Holografia não depende de algoritmos iterativos para geração da máscara de fase sobre o feixe incidente, mas de um correlator 4f (sistema com duas lentes e quatro planos focais) e um elemento de fase posicionado no centro do mesmo. O princípio básico de funcionamento da técnica é ilustrado abaixo:

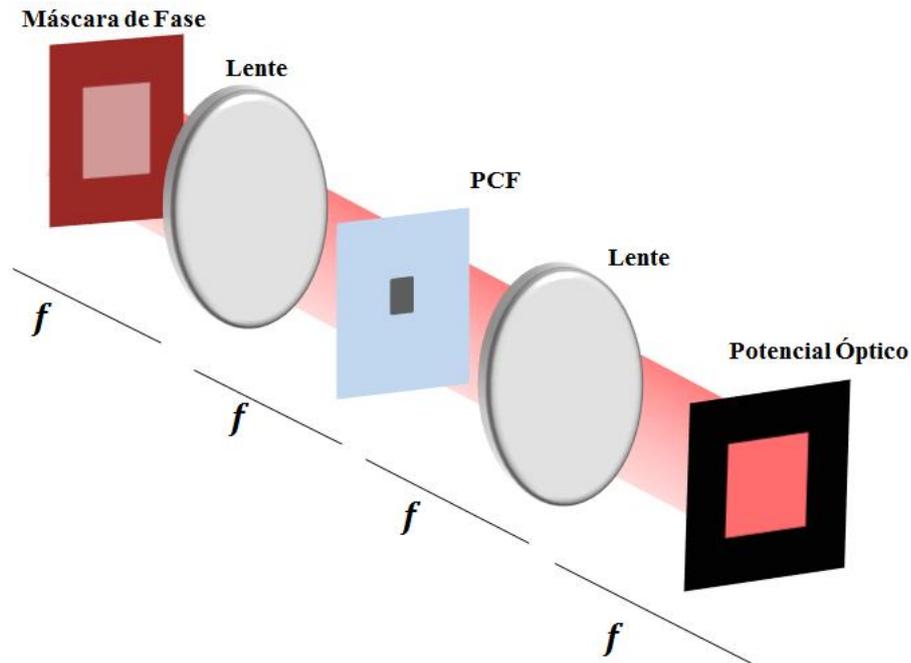


Figura 4 - Sistema óptico necessário para a técnica GPC, conhecido como correlador 4f, com adição de um PCF no foco da primeira lente.

Fonte: Elaborada pelo autor.

A técnica funciona como interferômetro de caminho único para o feixe incidente. Primeiramente, uma máscara de fase é gerada a partir a imagem alvo do potencial. A primeira lente do correlador 4f atua realizando a transformada de Fourier do campo com fase adicionada. Bem posicionado no foco, o PCF, do inglês “Phase Contrast Filter”, geralmente de dimensões da ordem de dezenas de micrometros e acréscimo de fase em π , atua sobre as baixas frequências espaciais da transformada de Fourier gerando um análogo a um feixe de referência do interferômetro. Após isso a segunda lente realiza novamente a transformada de Fourier do feixe como um todo, tanto da parte com modulação em π , como da parte sem modulação. A partir disto, no plano focal da segunda lente, há a superposição do feixe de referência com a parte não modulada. Tal interferência é que resulta no perfil de intensidade final.

Como não há algoritmo iterativo para geração da máscara de fase, o potencial final é uma descrição direta da máscara de fase inicial. Sendo assim, uma primeira vantagem da GPC é o mapeamento direto entre potencial final e máscara de fase, facilitando a correção em tempo real dos potenciais. Além disso, os potenciais são suaves e com alta eficiência energética em regiões delimitadas do potencial, própria de processos interferométricos.

A GPC vem sendo utilizada na geração de feixes múltiplos para pinças ópticas, principalmente por garantir alta eficiência em cada ponto de aprisionamento. Em 2014, LEE, J.G. et al³⁵, demonstrou a construção de capacitor com átomos frios com auxílio da GPC para geração do devido potencial óptico.

Como será discutido na seção 3.2, a GPC, juntamente com a técnica que a inspirou – a microscopia de contraste de Zernike³⁶, serviram de inspiração para o desenvolvimento da técnica de contraste de fase de ordem zero e, por consequência, para metodologia descrita nesse trabalho.

3.1.2 Técnicas de controle de amplitude

As técnicas de controle de amplitude visam o controle preciso do desvio do feixe, seja por reflexão ou difração, do feixe como um todo, ou de pequenas partes da frente de onda. Para essas técnicas sempre temos um controle direto do potencial óptico final, isto é, sempre sabemos exatamente como altera-lo ou corrigi-lo. Há duas principais técnicas nesse contexto: 1. A utilização de moduladores acusto-ópticos, que controlam o desvio global do feixe, e 2. Os Dispositivos de Micro Espelhos (DMDs), que controlam localmente o desvio de um feixe incidente.

A maior parte dos experimentos de aprisionamento óptico com modulação do potencial óptico utilizam essas duas técnicas. Isso ocorre porque, além da facilidade de implementação, tais técnicas apresentam alta velocidade de modulação da luz. Para experimentos que exigem o estudo de física fora do equilíbrio, seja com pinças ópticas ou átomos frios, a velocidade de modulação é muito importante. Sendo assim, abaixo é discutido brevemente os principais conceito envolvendo ambas as metodologias, suas vantagens e desvantagens.

3.1.1.3 Moduladores Acusto-Ópticos (AOMs)

Os Moduladores Acusto-Ópticos (AOMs) são equipamentos formados por um cristal e um transdutor piezoelétrico ativados por sinais de rádio frequência, que ao incidirem sobre o AOM promovem uma onda acústica no cristal, criando um caminho óptico para o feixe de laser que simula a ação de uma grade de difração. Controlando a amplitude e a frequência do sinal de RF, é possível controlar a amplitude e o desvio final do laser.

Pela relação de Bragg, o ângulo de desvio (θ) do feixe difratado pelo AOM é dado por:

$$2\Lambda \sin(\theta) = m\lambda, \quad (10)$$

Onde λ é o comprimento de onda do laser, Λ o comprimento da onda acústica e m a ordem de difração do feixe. Geralmente, a modulação do índice de refração do cristal é tal que a primeira ordem de difração é privilegiada, e está é usada para incidência no sistema físico em questão.

A principal vantagem do AOM é sua velocidade de modulação. Devida à velocidade dos circuitos de modulação de RF, o feixe pode ser modulado em intervalos de centenas de nano segundos. Nesse caso, não há um desenho final de intensidade estático e no formato arbitrário que se queira, e sim a possibilidade de gerar uma média temporal no perfil de intensidade que simule o potencial arbitrário requerido. Por exemplo, se for necessário construir um potencial óptico no formato de uma linha, seria necessário varrer o feixe rápido o suficiente ao longo da linha requerida, de forma que sua média temporal resultasse no potencial óptico desejado. Sendo assim, potenciais ópticos em duas dimensões necessitam de dois AOM's, e assim por diante.

Esses sistemas são recomendados quando é necessário modulação em alta velocidade, mas não definição e suavidade nos potenciais. Sistema de pinças ópticas tem se aproveitado bastante dessas características, principalmente para experimentos de simulação de física fora do equilíbrio⁹.

3.1.1.4 Dispositivos de Micro Espelhos (DMDs)

Os DMDs são dispositivos eletrônicos, controlados por circuitos FPGAs, que possuem uma matriz de micro espelhos controláveis computacionalmente. Tipicamente os micro espelhos fazem o papel dos pixels da imagem alvo. Apesar das características dos DMDs, variarem de modelo para modelo, os micro espelhos são da ordem de $10 \mu m$ à $20 \mu m$, e possuem duas opções de ângulo de inclinação com relação à normal do plano do dispositivo – um exemplo: $\pm 12^\circ$. Isso faz com a luz incidente sobre o DMD possa ser refletida ou não para o eixo óptico de formação da imagem. De maneira simples, o dispositivo funciona como um

atuador (chave), em nível micrométrico, da luz que é mantida ou não no eixo onde o potencial óptico é capturado, conforme ilustrado abaixo:

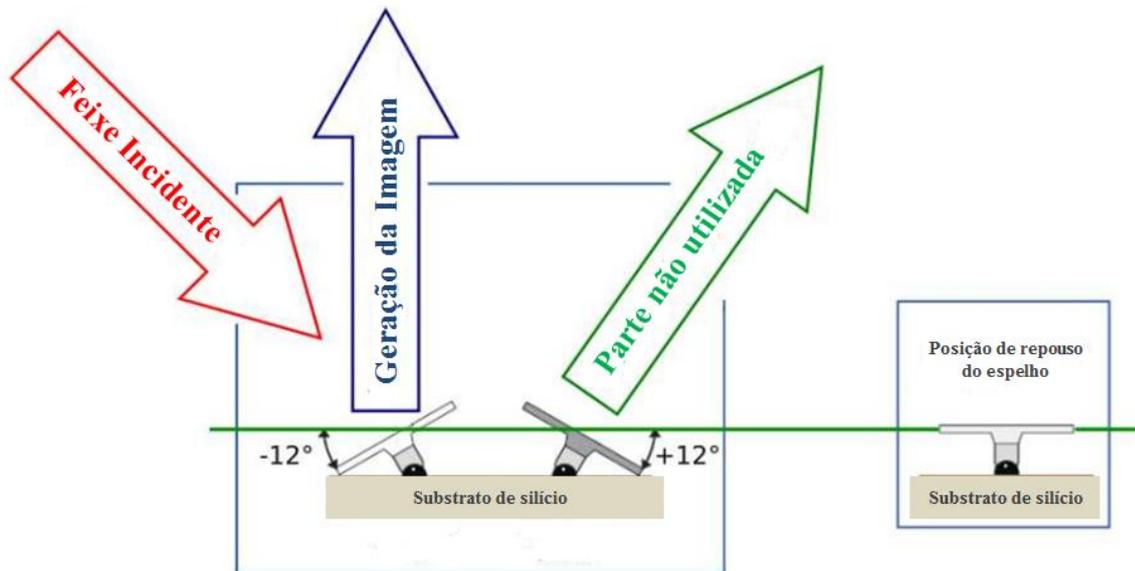


Figura 5 - Representação da ação dos micro espelhos em manter ou não a luz no eixo de formação da imagem.
Fonte: Adaptada de PEREGO¹⁸.

Assim como os AOMs, a grande vantagem no uso dos DMDs, é sua velocidade de modulação da luz. Sendo controláveis por circuitos FPGAs externos, a taxa com que os espelhos podem variar sua inclinação pode atingir valores maiores que 20 kHz [§] para imagens binárias, ou seja, simplesmente com regiões claras ou escuras. De modo análogo aos AOMs, potenciais mais complexos podem ser desenhados a partir da média temporal, mas isso faz com que o tempo efetivo de mudança do potencial caia drasticamente. Por exemplo, para potenciais em escala de cinza gerados a partir de imagens de 8 bits, a taxa de modulação do potencial gira em torno de 200 Hz ¹⁸ – ainda sendo um pouco maior que a taxa de modulação de dispositivos de cristal líquido para controle de fase.

Também importante notar que, sendo o DMD uma matriz de micro espelhos, sua área ativa é menor que a área sobre a qual o feixe de laser incide. Isso acontece devido aos pequenos espaços entre um espelho e outro. A consequência relevante desse fato é que o dispositivo também conta com efeitos de difração sobre o feixe incidente, que faz com que a eficiência

[§] Uma discussão em mais detalhes é realizada por PEREGO¹⁸.

energética do potencial final seja levemente afetada. A eficiência de reflexão dos DMDs varia entre 80% e 90%.

Devido à sua alta taxa de modulação e maior facilidade para gerar potenciais ópticos 2D ou até mesmo em escala de cinza, em relação aos AOMs, os DMDs tem sido bastante utilizados e estudos para sistemas de aprisionamento óptico, principalmente no contexto de átomos frios^{18,38,39}. Se comparado com as técnicas de modulação de fase, sua principal desvantagem é não permitir a modulação completa (amplitude + fase) do potencial óptico final, o que limita sua aplicação em certos tipos de feixes estruturados.

3.2 Técnica de Contraste de Fase de Ordem Zero

A Técnica de Contraste de Fase de Ordem Zero (ZOPCT) foi proposta por PIZOLATO²⁵ em 2007 como uma técnica análoga à técnica de contraste de fase de Zernike para microscopia e GPC, mas também sendo inspirada pelos trabalhos de DAVIS⁴⁰ na geração de padrões de intensidade através de perfis de fase análogos à grades de difração, modulando localmente a eficiência de difração do feixe incidente. A ZOPCT foi proposta como uma forma de ser obter padrões arbitrários de intensidade diretamente da fase imposta sobre o feixe, ou seja, sem necessidade de algoritmos iterativos que calculam uma relação de fase e intensidade não inversível. Além disso, a ZOPCT, diferentemente das técnicas de contraste de fase não tem necessidade de um elemento dielétrico micrométrico para adicionar um atraso de fase em certas componentes do feixe no espaço de Fourier. A figura abaixo ilustra, de modo geral, o princípio de funcionamento da ZOPCT:

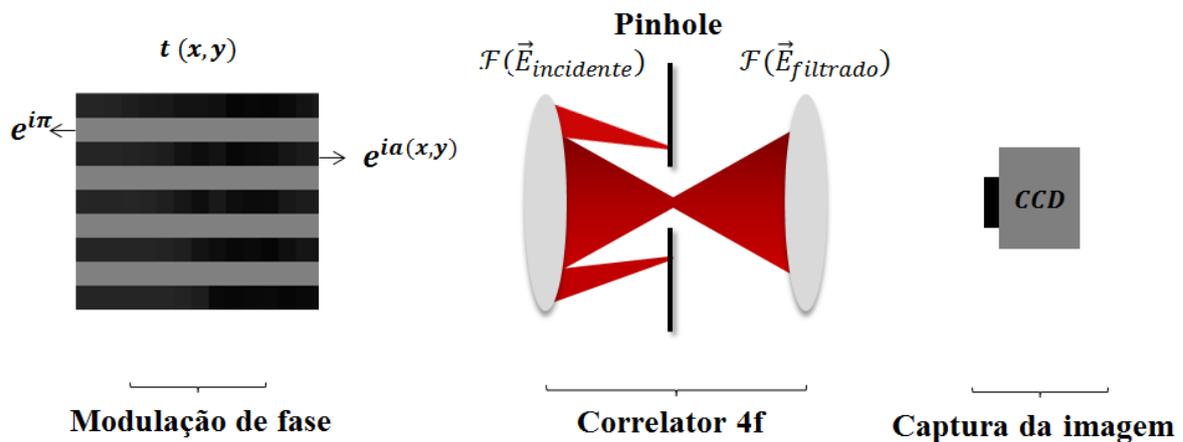


Figura 6 - Esquema geral da ZOPCT, desde a codificação da máscara de fase, o sistema óptico para filtrar a ordem zero e a captura da imagem.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tendo uma imagem alvo normalizada ($0 \leq a(x, y) \leq 1$), a máscara de fase aplicada sobre o laser é construída de forma a manter linhas com modulação em π e linhas com modulação gerada a partir da imagem alvo. Pizolato e Neto²⁵, em seu trabalho argumentam a importância de $a(x, y)$ corresponder a desvios de fase (ângulos) pequenos, muito menores que um radiano, para que a aproximação de Zernike do contraste de fase seja válida, e a transmitância seja $t(x, y) = e^{i\pi}$ para as linhas ímpares e $t(x, y) = 1 + ia(x, y)$ para as linhas pares, ou vice-versa. Como demonstrado em (41), se nenhum filtro for aplicado antes da formação da imagem, o resultado será o feixe original, ou seja, não haverá modulação de intensidade. Isso ocorre, pois, as ordens de difração estão em quadratura. Mas, se um filtro espacial é aplicado no centro do correlator óptico, de forma a separar apenas as baixas frequências no espaço de Fourier, a intensidade final é dada por:

$$I(x, y) = a(x, y)^2 \quad (11)$$

A filtragem espacial permite que haja modulação de intensidade. De modo análogo à GPC, há uma relação direta entre máscara de fase aplicada no feixe incidente e o padrão de intensidade final. Além disso, uma vantagem da ZOPCT é que sua montagem experimental se mostra mais simples e flexível. Importante comentar que no desenvolvimento da técnica, Pizolato e Neto dispunham de modulares espaciais de luz de cristal líquido de baixo custo. Por isso, a eficiência de difração dos equipamentos era baixa – assim, o filtro espacial no centro do correlator óptico deveria ser bastante reduzido para filtrar corretamente as baixas ordens no espaço de Fourier. Nesse sentido, o contraste de fase no nome da técnica se dá pela semelhança com as propostas de Zernike e da GPC: de alguma forma o feixe é filtrado a partir da diferença de fase entre diferentes regiões moduladas. Sem esse filtro não é possível gerar o potencial óptico final.

Devido a sua facilidade de implementação, a ZOPCT foi a escolha inicial de implementação no nosso Laboratório de Tecnologias Quânticas do IFSC-USP, como uma forma de transição para a GPC, propósito final dos estudos. Todavia, ao longo da pesquisa desenvolvemos uma nova interpretação da técnica, com resultados mais precisos, e uma metodologia clara sobre como controlar localmente o potencial óptico final. Nos próximos capítulos é descrito a nova abordagem da ZOPCT, cujas principais características são:

- A modulação de fase oriunda da imagem alvo não precisa se limitar a valores abaixo de um radiano ($a(x, y) \leq 1$), mas podemos introduzir um fator de normalização (β) que otimiza o controle do feixe óptico.
- A modulação da intensidade da luz se dá pelo contraste de fase entre pixels vizinhos no modulador espacial de luz.
- Se tivermos um caminho óptico grande o suficiente, o potencial óptico pode ser gerado mesmo sem a presença de um filtro espacial, pois a difração do feixe já realiza o filtro necessário.
- A técnica atua como uma máscara de amplitude de alta definição.

Diante disso e do contexto amplo das técnicas de modulação espacial de luz, a metodologia descrita a seguir oferece uma opção flexível e de fácil implementação, que une características das demais técnicas, tanto de modulação de fase, como modulação de amplitude.

4 METODOLOGIA

A nova abordagem descrita neste trabalho visa descrever a Técnica de Contraste de Fase de Ordem Zero (ZOPCT) a partir de uma perspectiva de controle espacial suave e micrométrico da difração da luz laser. Basicamente, mostramos que o processo de codificação da ZOPTC é semelhante à um problema de grades binárias de difração, onde é possível otimizar a situação de maior retirada da luz laser do eixo óptico e depois controlar suavemente e micro metricamente, através do contraste da fase entre a grade binária e a informação da imagem alvo, o quanto dessa luz permanecerá no eixo óptico. Essa abordagem oferece uma interpretação facilitada da técnica, e como será mostrado, permite a otimização da mesma na obtenção de imagens mais definidas, suaves, e no mapeamento direto entre a intensidade final do potencial e sua máscara de fase. A Figura 7 ilustra o princípio geral aqui descrito. Na região onde não há contraste de fase, ou seja $\nabla\phi_{eff} = 0$, a luz permanece no eixo óptico. Apesar da Figura 7 ilustrar um correlator 4f para formação da imagem, mostraremos pela abordagem aqui descrita, que o mesmo não é fundamentalmente necessário. O correlator ajuda a filtrar a ordem zero de difração e auxilia na captura de imagens, facilitando questões como escalonamento e alinhamento, mas apenas pela difração de Fraunhofer do feixe modulado a ordem zero pode ser selecionada e seu foco encontrado para a formação da imagem. Isso é mais um ponto que corrobora a abordagem aqui descrita.

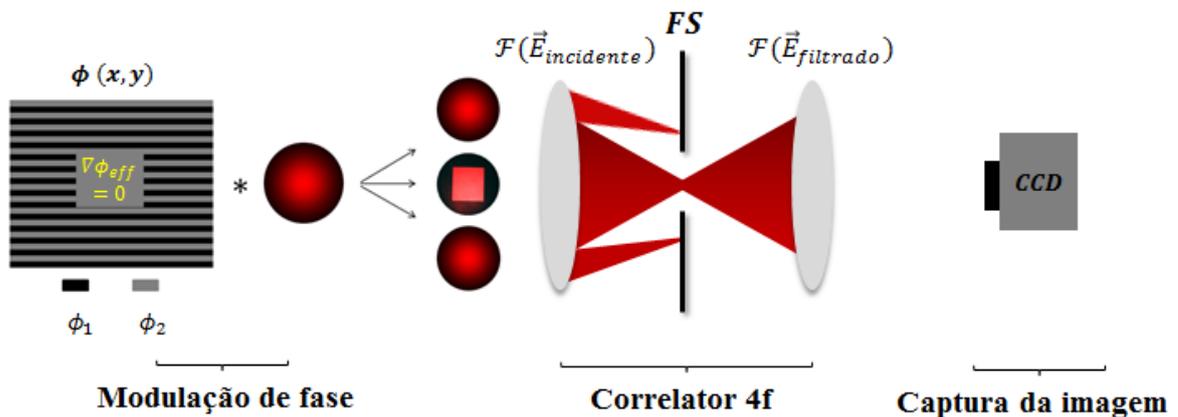


Figura 7 - Representação geral da metodologia descrita nesse capítulo. A modulação da intensidade da luz é feita essencialmente pelo controle do gradiente de fase $\nabla\phi_{eff}$ no feixe incidente.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Para a descrição didática dessa nova abordagem, primeiro será descrito a situação ótima de difração da luz laser para a geração de potenciais no eixo óptico, e depois o algoritmo para gerar máscaras de fase para potenciais ópticos arbitrários.

4.1 Controle Ótimo da Difração da Luz

A maneira simplificada de entender como a difração da luz pode ser modulada a partir do contraste de fase aplicado sobre a frente de onda, se dá pelo seguinte exemplo:

Suponhamos uma onda plana, $e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t)}$, com vetor de onda inicial \vec{k}_i , e fase total inicial $\varphi_i(\vec{r}, t) = \vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t$. É simples notar que $\vec{k}_i = \nabla \varphi_i(\vec{r}, t)$, sendo ω independente da propagação espacial. Se uma componente de fase $\phi(x, y)$ é adicionada à frente de onda, teremos um vetor de onda efetivo $\vec{k}_{eff} = \nabla \varphi_f(\vec{r}, t) = \nabla \varphi_i(\vec{r}, t) + \nabla \phi(x, y)$. Portanto, a variação do vetor de onda se dá por:

$$\Delta \vec{k} = \vec{k}_{eff} - \vec{k}_i = \nabla \phi(x, y) \quad (12)$$

Sendo assim, onde não há contraste de fase, não há variação nas direções x e y do vetor de onda. Pelo princípio de Huygens, esse controle pode ser local, já que cada ponto modulado da frente de onda pode ser entendido como uma fonte de onda radial e, por consequência, ter o vetor de onda local modulado.

Essa descrição apenas ilustra o princípio da metodologia descrita nesse trabalho para geração e mapeamento direto de potenciais ópticos arbitrários: o contraste de fase local da frente de onda possibilita controlar localmente se o feixe permanece ou não no eixo óptico, ou seja, na ordem zero de difração. E como veremos nas próximas seções, esse controle é suave, sendo possível controlar suavemente a eficiência de difração ao longo do potencial óptico. Mas, essa descrição é incompleta e apenas ajuda a ter intuição sobre o processo. Uma descrição completa exige aplicação de teorias de difração e, conseqüentemente, óptica de fourier, já que efeitos de interferência intrínsecos ao processo de difração da luz é que governam em última instância o padrão de intensidade final – o que é considerado em todas as simulações feitas nesse trabalho.

4.1.1 Grade de difração binária

Para se controlar de maneira suave e local o contraste de fase em determinada frente de onda, primeiro é necessário entender qual a condição de maior eficiência de difração da luz da ordem zero – idealmente, a máscara de fase que faz com que toda energia do feixe incidente seja lançada para diferentes ordens de difração. Tendo essa condição, o contraste de fase pode

ser controlado de forma a manter ou não a luz em regiões micrométricas da frente de onda inicial.

Para isso, é usada uma máscara de fase que simula uma grade de difração binária, também conhecida como Grade de Ronchi. Tal grade de difração é composta por linhas intercaladas de fase, tendo valores ϕ_1 e ϕ_2 , sendo a fase relativa entre elas $\phi = \phi_2 - \phi_1$. A fase relativa é que governará o padrão de difração imposto pela grade, afinal, é ela que qualifica o contraste de fase que há entre as linhas intercaladas. Sendo assim, ϕ_1 pode ser tomada como zero, por exemplo, e $\phi_2 = \phi$ controlada para otimizar a difração do feixe de laser, como desejado. A Figura 8 (a) ilustra uma grade de difração binária com $\phi = \pi$. Conforme mais finas foram as linhas de fase, mais o contraste estará presente na região da frente de onda, e mais eficiente será a difração da luz. Por isso, para a técnica apresentada nesse trabalho, é importante utilizar máscaras de fase ou equipamentos que garantam essa condição.

O fato de controlarmos o padrão de difração da luz laser apenas em termos de ϕ , justifica a utilização de uma grade de difração binária. Em uma grade de difração contínua, com vários valores de fase (conhecida em inglês como ‘*Blazed Grating*’), esse controle não é feito apenas por um valor, e posteriormente seria mais difícil controlar localmente o contraste entre a informação da imagem e a grade de difração, já que o padrão de fase da grade não seria necessariamente o mesmo ao longo do plano.

Conforme demonstrado por ZHANG *et al.*⁴¹, a grade de Ronchi com maior eficiência de difração da luz do eixo óptico possui fase relativa $\phi = \pi$. Essa grade e seu padrão de difração de Fraunhofer são ilustrados na Figura 8. Idealmente, toda a energia do feixe de laser é transmitida para as ordens de difração $|m| \geq 1$, estando majoritariamente nas ordens $m = \pm 1$. Em um sistema real, como a eficiência de difração dos moduladores de fase não é perfeita, ainda há um percentual de energia que permanece na ordem zeros de difração. Por exemplo, como será apresentado, nesse trabalho foi utilizado um modulador espacial de cristal líquido (LC-SLM), cuja eficiência de difração fez com que cerca de 80% da energia do feixe incidente fosse para as ordens $|m| \geq 1$, e 20% permanecesse na ordem $m = 0$, fazendo com que os potenciais finais sempre tenham background não nulo de luz.

Além disso, normalmente, as ordens mais altas de difração podem ser investigadas para modulação complexa da luz, isto é, amplitude e fase do potencial final, pois carregam a modulação de fase para a frente de onda (40). Ou seja, se o potencial óptico é codificado de forma a ser gerado nas ordens $m = \pm 1$, existe a possibilidade de que o mesmo seja um potencial

complexo, semelhante à holografia, onde há modulação de intensidade e fase da distribuição final. Apesar da investigação da modulação complexa não ser o escopo desse trabalho, os fundamentos de formação dos potenciais ópticos podem facilmente serem adaptados para gerar os potenciais fora nas ordens $m = \pm 1$ de difração. Sendo o conceito e a aplicação dessa técnica simples, a mesma apresenta grande flexibilidade de adaptação.

O ângulo (θ) entre ordens $m = \pm 1$ pode ser obtido através período da grade (P) e pela equação da grade de difração, ou seja, $\text{sen}(\theta) = \lambda/P$. Para este trabalho, usamos o menor valor para P , ou seja, 2 pixels do LC-SLM – os valores de fase são intercaladas entre as linhas de pixel e cobrem toda a máscara de fase.

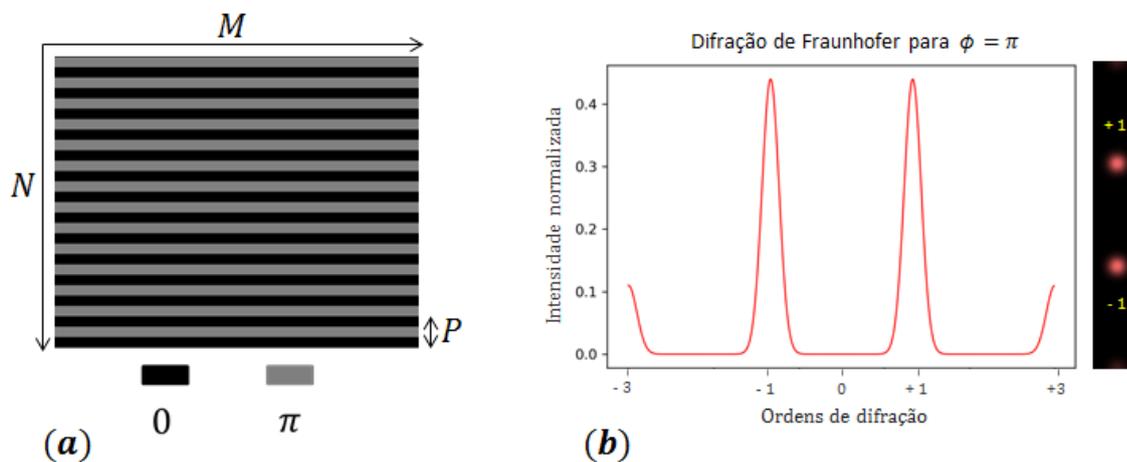


Figura 8 - Simulação da Difração Fraunhofer para uma grade de Ronchi com fase relativa $\phi = \pi$. (a) Padrão de fase 2D no plano LC-SLM, onde $M \times N$ é a área em pixels do LC-SLM e P o período da grade. (b) Representa a Difração de Fraunhofer, com corte em 1D.

Fonte: Elaborada pelo autor.

A Figura 8 permite ter uma ilustração clara da metodologia. O objetivo principal é evitar que a luz em regiões de micrômetros, na ordem do pixel do SLM, vá para ordens de difração $m = \pm 1$. É importante ressaltar que esse controle pode ser feito de modo suave, controlando o percentual de luz que permanece nas regiões micrométricas do eixo óptico. Não é apenas uma escolha se há luz ou não como acontece nos DMDs – o controle aqui pode ser feito suavemente, controlando a fase relativa entre diferentes pixels (ϕ).

4.1.2 Limite de Modulação

Um dos pilares da técnica, que permite a geração de potenciais ópticos com alta definição e suavidade, é a capacidade de controlar a luz em regiões micrométricas. Sendo assim, se faz necessária a investigação do limite de modulação de uma frente de onda gaussiana

incidente sobre a máscara de fase do potencial. Para essa análise, foi realizada a simulação da difração de Fraunhofer do feixe para diferentes tamanhos da grade binária de difração e diferentes fases relativas (ϕ) da mesma. Naturalmente, grades com dezenas de pixels de lado, irão ter boa eficiência de difração. Mas, o objetivo nessa investigação teórica é quantificar de alguma forma o quão bem podemos controlar a luz em regiões de poucos pixels. A Figura 9 mostra o cálculo computacional da eficiência de difração de um feixe gaussiano no qual é aplicado a máscara de fase de uma grade binária. Tal simulação foi feita através da transformada de Fourier do feixe com o padrão de fase descrito. A cintura de feixe é mantida fixa, e a máscara de fase sempre centralizada no feixe e de tamanho $L \times L$, onde L representa o lado em pixels da grade de difração. A eficiência de difração foi calculada com relação à área do feixe com a grade, para melhor entendimento de como a modulação pode ser alterada em função da região de modulação.

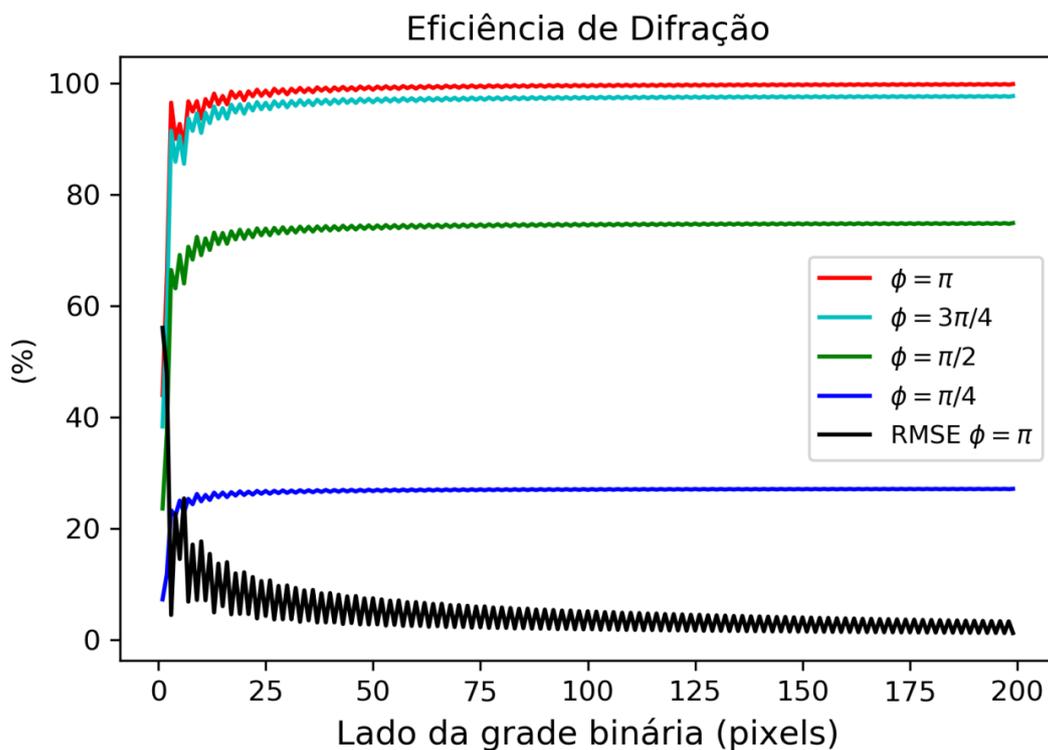


Figura 9 – Cálculo numérico da eficiência de difração da luz em função do lado da região modulada (mantida como um quadrado). A simulação foi realizada para diferentes valores de fase relativa (ϕ).

Fonte: Elaborada pelo autor.

Como podemos notar pela simulação, para todos valores de ϕ , a eficiência de difração atinge um platô na ordem de 20 pixels, e para 2 pixels de lado, a eficiência cai na ordem de 30%. Este tipo de análise mostra que é possível controlar a difração coerente da luz em regiões da ordem do tamanho do pixel utilizado. Mesmo com uma redução significativa da eficiência

para regiões da ordem de 10 pixels de lado para menos, a modulação ainda ocorre mediante o contraste entre os pixels vizinhos. Além de avaliarmos o limite de modulação de um feixe gaussiano, a Figura 9 também reforça o resultado demonstrando por ZHANG⁴¹: a fase relativa com maior eficiência de difração é $\phi = \pi$. Entre 0 e π , conforme ϕ aumenta, assim aumenta a eficiência de difração. Como demonstraremos nas próximas sessões, essa relação não é linear.

A Figura 9 também mostra a raiz do erro quadrático médio (RMSE) da grade mais eficiente ($\phi = \pi$) em comparação com a sombra perfeita esperada caso toda a luz fosse difratada da ordem zero. É possível notar que, quanto mais próximo das bordas da grade, isto é, conforme menos a grade de difração, mais ruído está presente na sombra final. Mesmo assim, a modulação suave em nível de pixel ainda é alcançada, e a codificação de imagens de alta definição é possível.

4.2 Codificando informação de amplitude via contraste de fase

A difração ótima do feixe do eixo óptico é alcançada quando a fase relativa entre os pixels vizinhos é π . Para codificar as informações de amplitude no eixo óptico, o contraste de fase entre esses pixels deve ser modulado. O exemplo mais simples desta abordagem é um quadrado binário de L pixels de lado. Suponha um quadrado de $L \times L$ pixels, centralizado, e com fase homogênea em seu interior, sobreposto sobre uma grade de Ronchi igual à Figura 8 (a). Nesse caso, a luz incidente que cobre este quadrado não é difratada, pois não há contraste de fase no interior do quadrado. Como a modulação acontece em regiões da ordem de poucos pixels, o potencial final gerado tem uma queda bastante acentuada (do inglês “sharp”). Se os pixels da região do quadrado forem definidos com fase $\phi < \pi$ e toda a região da máscara de fase for sobreposta pela grade de Ronchi, a imagem quadrada é gerada com menor intensidade, pois agora a área do quadrado possui $\nabla\phi \neq 0$ entre as linhas dos pixels. A calibração de como o contraste de fase impulsiona a eficiência energética em áreas de pixels micrométricos permite um mapeamento direto entre as distribuições de intensidade e a máscara de fase. A mesma abordagem para este exemplo quadrado pode ser aplicada a qualquer imagem binária normalizada. Supondo uma imagem de nível de cinza normalizada, $0 \leq a(x, y) \leq 1$, com $N \times M$ pixels, a codificação geral de transmitância de fase $t(x, y)$ é dada por:

$$t(x, y) = \sum_{n=0}^{M-1, N-1} \left\{ \text{rect}\left(\frac{y - nP - P/4}{P/2}\right) e^{ia(x, y)\pi} + \right.$$

$$\text{rect}\left(\frac{y - nP - 3P/4}{P/2}\right)e^{i\pi} \}. \text{rect}(x/s) \quad (13)$$

Onde P é o período de grade e s o tamanho do pixel LC-SLM – neste trabalho, $P = 2s$. A grade de fase é definida horizontalmente, o que gera uma divisão do feixe na direção vertical. Essa transmitância de fase é equivalente a gerar uma máscara de fase com transmitância de fase $e^{ia(x,y)\pi}$ sobre o tamanho da imagem e cobri-la com uma grade de Ronchi, que possui linhas horizontais intercaladas com transmitância de fase 1 e $e^{i\pi}$. Para não perder a informação da imagem devido à fase π , principalmente para imagens complexas de níveis de cinza, as informações originais de nível de cinza podem ser duplicadas e, logo em seguida, cobertas pela grade de Ronchi. Devido a transmitância relativa à informação da imagem, $e^{ia(x,y)\pi}$, tendo o módulo expoente normalizado para π , a parte brilhante da imagem permanece no eixo óptico, e quanto mais suave for a imagem, será o contraste de fase e a intensidade distribuição no plano alvo. No entanto, para adicionar um novo parâmetro de controle ao potencial óptico, esses expoentes podem ser ajustados para: $ia(x,y)\beta$. Este valor β é especialmente útil para imagens binárias, permitindo alterar o valor da intensidade apenas alterando este fator. Por exemplo, um quadrado binário com $\beta = \pi$ tem maior intensidade do que um com $\beta = \pi/2$.

A Figura 10 ilustra um algoritmo de codificação muito prático para criar essas máscaras de fase descritas acima para LC-SLMs, considerando a imagem não duplicada, e também o caso de maior eficiência energética, $\beta = \pi$.

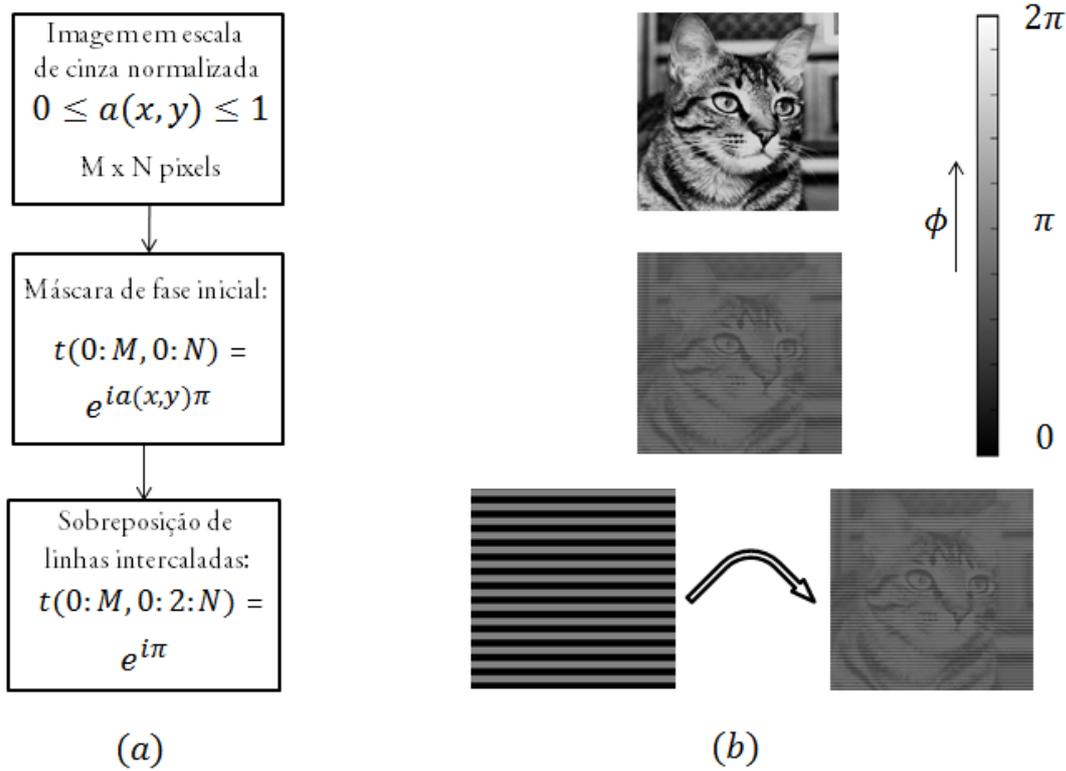


Figura 10 - Esquema simplificado para geração da máscara de fase de aplicação da metodologia descrita.
Fonte: Elaborada pelo autor.

Simulações computacionais desta abordagem são apresentadas nas Figuras 11 e 12. As simulações consideram um correlator $4f$ para formar a distribuição de intensidade e um feixe gaussiano incidente com perfil de intensidade I_g : **1.** Primeiramente, a matriz de fase é criada conforme a Figura 3; **2.** Este perfil de fase é aplicado no módulo de campo elétrico do feixe gaussiano ($E_{SLM} = \sqrt{I_g} |e^{it(x,y)}$); **3.** Calcula-se a sua Transformada de Fourier; **4.** Em seguida, a difração de ordem zero é filtrada no plano focal; **5.** Além disso, a transformada inversa de Fourier é calculada e o módulo quadrado obtido para obter a imagem final.

A Figura 11 ilustra como controlando o parâmetro β para uma imagem binária é possível controlar a eficiência energética na parte clara da imagem final. Essa técnica também pode gerar regiões escuras, sendo o corte das regiões claras e escuras muito nítido. O que é importante notar, é que essa técnica funciona como uma máscara de amplitude de alta definição, o que significa que as regiões claras ainda mantêm um perfil de intensidade gaussiana – para corrigir que uma função gaussiana inversa pode ser aplicada ao parâmetro β , sendo este o principal ideia para a correção da planicidade apresentada na seção 3.2.

A Figura 12 ilustra a distribuição de intensidade final para uma imagem complexa de nível de cinza e o princípio de divisão de feixe. Se uma das ordens de difração, $m = \pm 1$, for selecionada em vez da ordem zero, a imagem oposta é formada, ou seja, suas regiões escuras são as claras da imagem do eixo óptico.

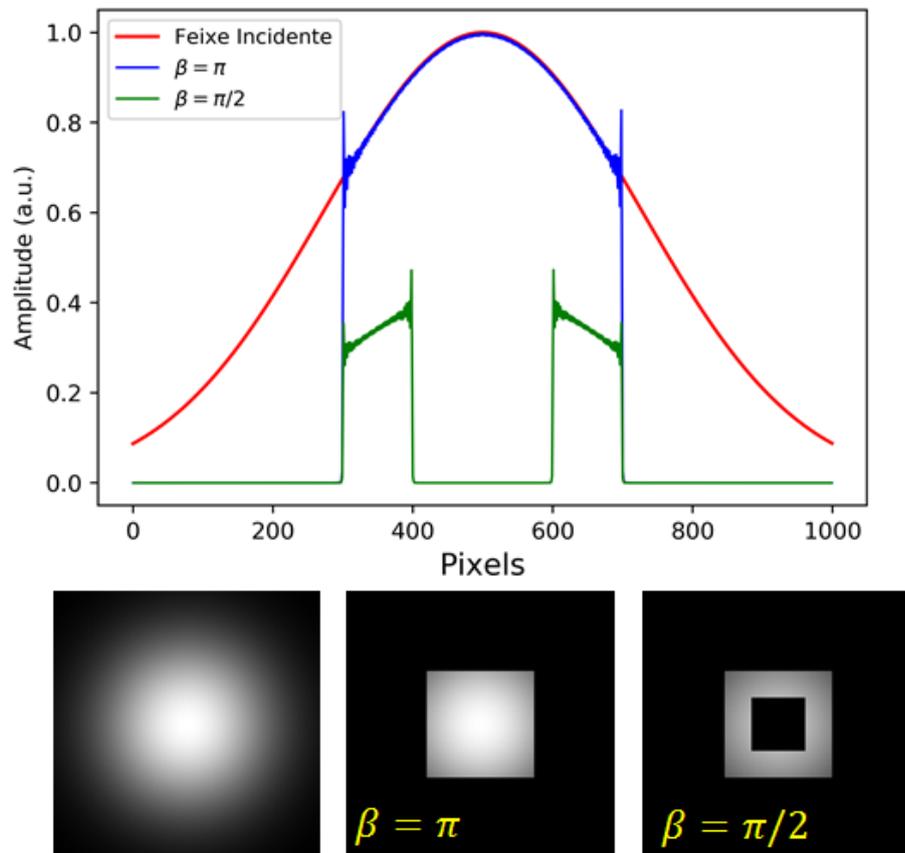


Figura 11-Simulação computacional da técnica. Além das imagens completas (2D), é demonstrado o perfil de intensidade de um corte do horizontal para cada potencial e valor de β .

Fonte: Elaborada pelo autor.

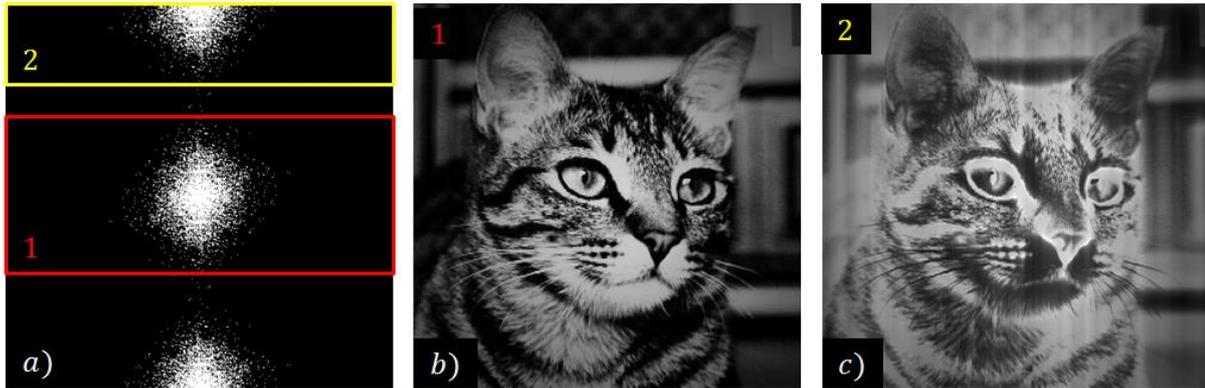


Figura 12-Simulação da técnica para um potencial arbitrário e complexo em escala de cinza. (a) Representa as ordens de difração na posição do filtro espacial. (b) Resultado da seleção da ordem zero. (c) Resultado da seleção da ordem $m = 1$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Além das simulações demonstradas acima, também foi realizada a simulação, aplicando o mesmo procedimento descrito, da eficiência energética de um potencial quadrado com lado l . O resultado é demonstrado na Figura 13, em função do parâmetro β . Tal resultado reforça que a modulação pode ser feita em nível de poucos pixels, com boa eficiência, além de demonstrar que o controle de β oferece um grau de liberdade a mais para controlar a eficiência energética local do potencial – facilitando o mapeamento direto potencial-máscara de fase e sua correção automatizada, para gerações de potenciais dinâmicos.

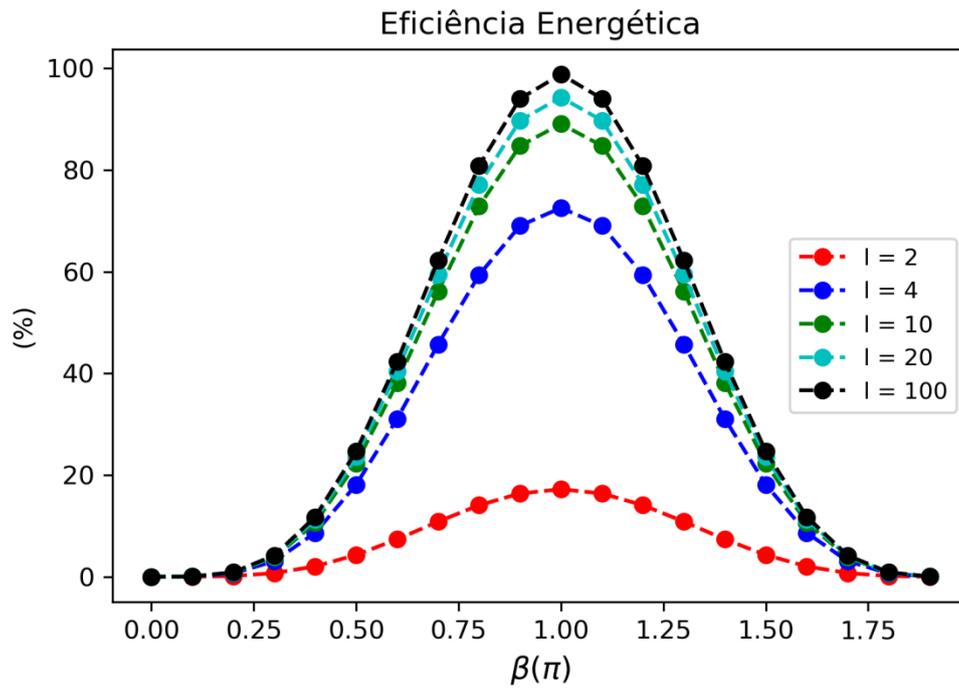


Figura 13-Simulação computacional da eficiência energética de potencias quadrados com lado l . O resultado é calculado em função do parâmetro β .

Fonte: Elaborada pelo autor.

5 SISTEMA EXPERIMENTAL

O sistema experimental construído nesse trabalho para geração e leitura dos potenciais ópticos é ilustrado na Figura 7. Para codificação de fase da frente de onda do laser foi utilizado um modulador espacial de luz de cristal líquido (LC-SLM), modelo LCOS-SLM Hamamatsu X13138, com 1272 x 1024 pixels de área, com pixel de largura 12 μ m e faixa de modulação de fase de 2π . O LC-SLM é um modelo que boa abrangência em comprimentos de onda, ou seja, é capaz de apresentar boa eficiência de difração desde a região do verde ao infravermelho. A máxima eficiência de difração desse equipamento é dada no infravermelho conforme a especificação técnica da Figura 8. Note que o modulador apresenta boa eficiência de difração e pixels consideravelmente pequenos – características, as quais, contribuem positivamente na aplicação da metodologia proposta nesse trabalho.

Antes do LC-SLM, um laser vermelho ($\lambda = 640nm$) de diodo**, foi polarizado horizontalmente para corresponder à orientação do cristal líquido no LC-SLM. A primeira lente ($f = 5\text{ cm}$) focaliza o laser em um pinhole de 20 μ m (SP1) para filtragem espacial do feixe. Sendo o perfil espacial no laser de diodo naturalmente mais achatado, no formato de uma elipse, o filtro espacial permite obter um perfil espacial mais suave e gaussiano – otimizando o controle e correção dos potenciais ópticos gerados pela configuração experimental.

A segunda lente ($f = 90\text{ cm}$) colima o laser e defini o tamanho da sua cintura que incidirá sobre o LC-SLM. É importante que o feixe esteja bem colimado, garantindo maior eficiência de difração sobre o LC-SLM e por consequência, as imagens finais com melhor definição.

Após o LC-SLM, um correlator $4f$ foi utilizado para controlar o tamanho da imagem e favorecer a filtragem da ordem zero. O Filtro Espacial (SP2) é uma íris simples e não há necessidade de pequenas aberturas para esta seleção da ordem zero. De fato, como já mencionado, a configuração óptica $4f$ é usada para questões práticas, mas não é fundamentalmente necessária - pela propagação natural do feixe, descrita pela difração de Fraunhofer, a ordem zero pode ser filtrada e a imagem gravada. Todas as imagens ópticas foram obtidas por uma câmera CCD simples colocada no foco da segunda lente do correlatos $4f$.

** Laser de diodo com seus respectivos circuitos para controle de corrente e temperaturas montados ao longo de desse trabalho.

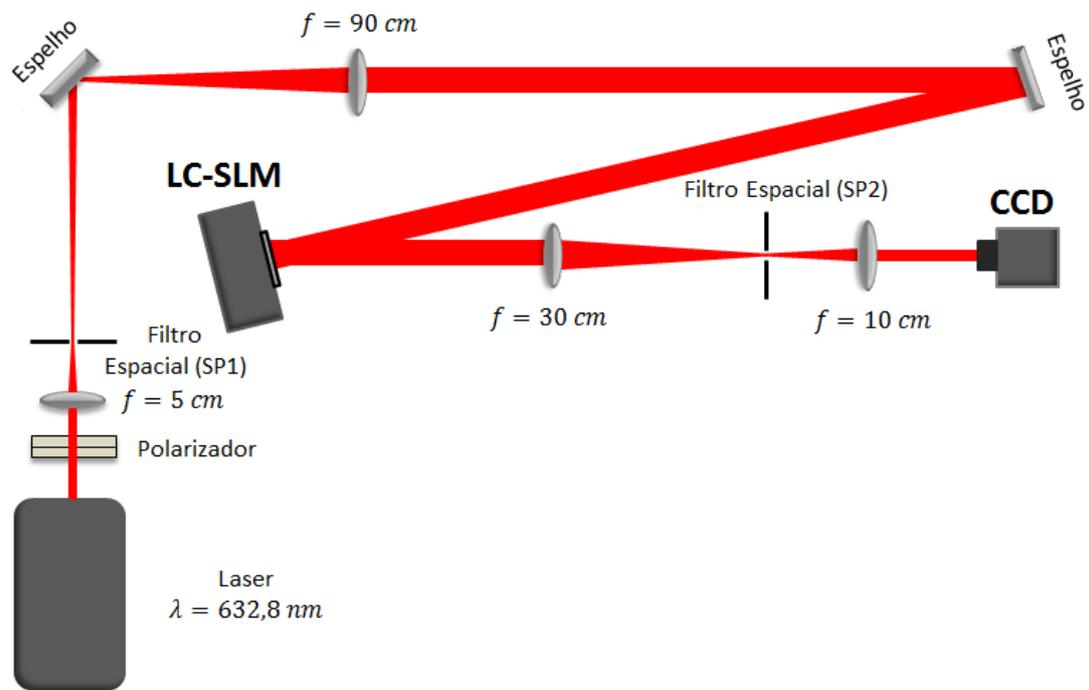


Figura 14 - Sistema experimental construído para aplicação da metodologia descrita nesse trabalho.
Fonte: Elaborada pelo autor.

6 RESULTADOS

Esse capítulo visa descrever os resultados obtidos a partir do procedimento descrito no capítulo 4 e do sistema experimental apresentado no capítulo 5. Primeiro apresentamos a aplicação da técnica em potenciais binários, em teoria mais simples, depois em potenciais arbitrários e mais detalhados em escala de cinza, para apresentar todo o potencial da técnica em gerar imagens arbitrárias como se queira.

Também discutimos a forma de calibração dos potenciais, para controle local da eficiência energética do potencial e possibilidade de correção direta dos mesmos – a qual é ilustrada a partir da correção do perfil gaussiano de um potencial quadrático (“flat-top”).

6.1 Potenciais Binários e Arbitrários

A Figura 15 ilustra demonstra o resultado da geração de um potencial flat-top. Como podemos notar, o efeito da técnica sobre o feixe gaussiano original é análogo à aplicação de uma máscara de amplitude de alta definição. O resultado é um perfil de intensidade com bordas limitadas pelo quadrado, mas que ainda mantém o perfil gaussiano em seu interior. Isso ilustra mais uma vez o princípio básico da técnica: o perfil final de intensidade é governado pelo contraste de fase na máscara de fase inicial, que difrata a luz do eixo óptico conforme escolha. Por termos uma mudança abrupta de fase nas bordas do quadrado, é possível notar também que o potencial final é bastante *sharp* em suas bordas, característica relevante em experimentos de aprisionamento óptico.

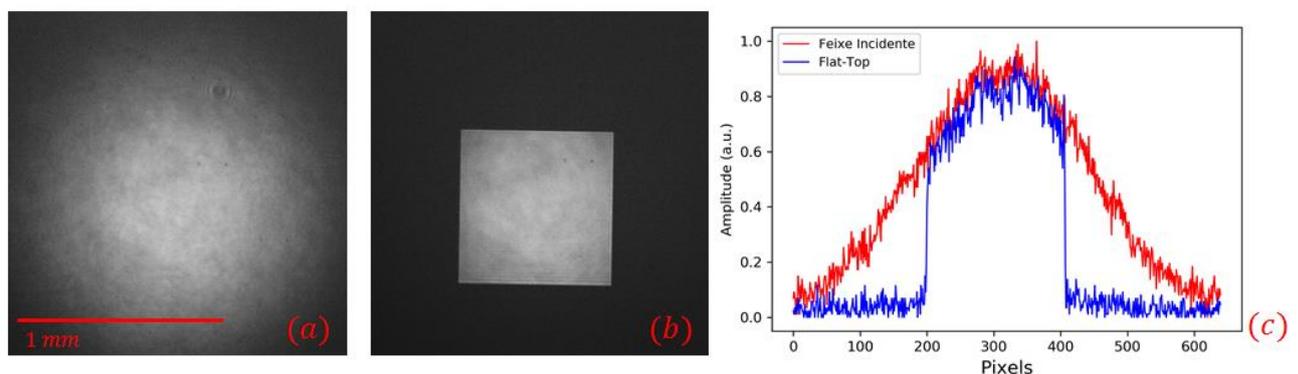


Figura 15-(a) Feixe Original a ser modulado. (b) Imagem capturada do potencial Flat-Top obtido. (c) Comparação do perfil de intensidade do feixe original com o corte do potencial gerado.

Fonte: Elaborada pelo autor.

A Figura 16 representa potenciais binários e arbitrários gerados a partir da técnica descrita. Novamente notamos as características do feixe original que permanecem nos potenciais finais. Aqui os potenciais podem ser gerados no formato que se queira e as possibilidades de teste para partículas e átomos crescem significativamente. Por exemplo, dispondo de feixes suficientemente intensos, potenciais como os itens (a) e (d), com regiões escuras, podem ser usados para limitar o trajeto de partículas em uma região do espaço, criando barreiras de luz que norteiam a trajetória de diferentes sistemas físicos. Apesar deste trabalho focar na discussão de sistemas de aprisionamento óptico, a praticidade do método também pode ser útil para experimentos de optogenética, corte a laser, biofotônica – basicamente qualquer aplicação que possa ser otimizada a partir de regiões muito bem definidas com luz ou não. Ou seja, com a possibilidade de se desenhar um feixe de laser conforme se queira.

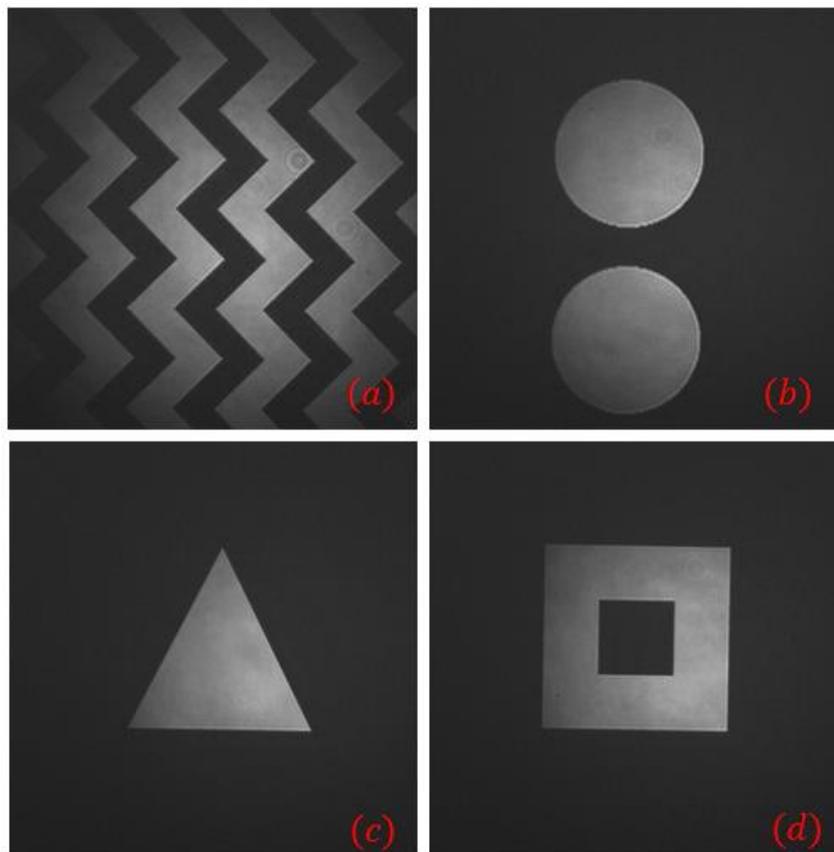


Figura 16 - Potenciais Binários obtidos em laboratório.
Fonte: Elaborada pelo autor.

Abaixo temos o potencial óptico gerado a partir da imagem suave e cheia de detalhes em escala de cinza de um gato – a mesma imagem usada para as simulações no capítulo 4. Como

podemos ver o potencial final se confunde com a própria foto do gato. Devido ao controle micrométrico e suave da luz, é possível gerar tal distribuição de intensidade, igualmente suave e com alto grau de definição. Esse resultado mostra todo o potencial da metodologia aqui descrita. Potenciais com alta definição, *sharp* e suaves podem ser gerados sem a necessidade de algoritmos iterativos ou elementos ópticos externos além do sistema de captura da imagem e LC-SLM. Em comparação com os DMDs e AOMs, apesar da técnica ser limitada em velocidade de modulação, usualmente a 60 Hz, que é a taxa de modulação do LC-SLM, a possibilidade de ter um controle suave a nível micrométrico da luz, a partir da calibração do fator β , é um fator de destaque. Além disso, estudos tem sido conduzidos no laboratório de Tecnologia Quânticas do IFSC-USP que visam entender como a técnica atua no controle da fase final do potencial óptico. Em caso positivo, aqui temos uma grande vantagem se comparada à técnica de controle de amplitude – além do controle da distribuição de intensidade final da luz, podemos gerar feixes estruturados, com feixe de Laguerre-Gauss ou Bessel, além de campos complexos que podem interagir de maneira mais abrangente com átomos e partículas. Além do gato, a Figura 18 também apresenta imagens arbitrárias em escala de cinza geradas pela técnica. Tanto na imagem da Gina, figura consagrada no ramo de modulação espacial da luz, como do Einstein, fica claro o efeito de corte da técnica, já que a máscara de fase nesses casos não cobriu todo feixe incidente. Logo, há uma região externa com a informação original, ou seja, a região onde não houve difração e abertura da luz.



Figura 17-Potencial Óptico obtido a partir de uma imagem em escala de cinza arbitrária. A imagem alvo e a geração da máscara de fase são descritos na Figura 10.

Fonte: Elaborada pelo autor.

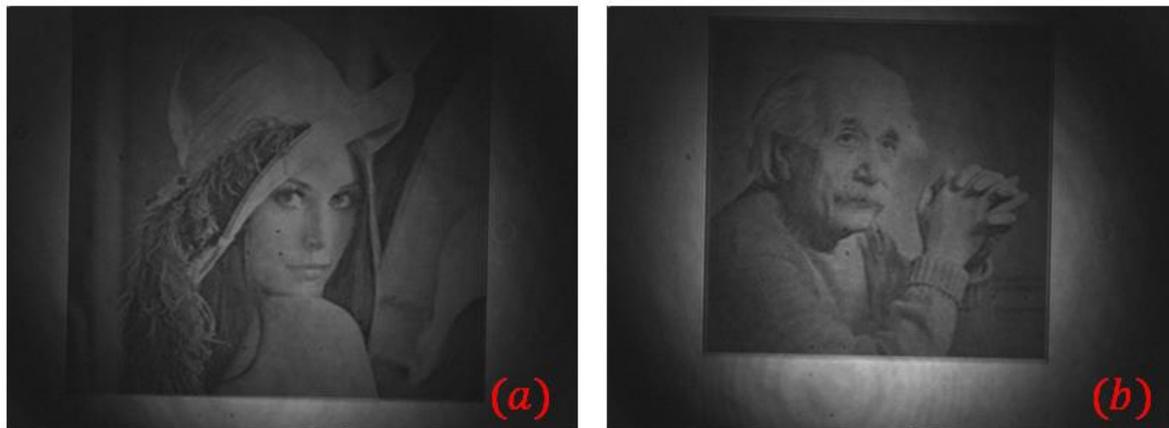


Figura 18-Potencias arbitrários obtidos em laboratório. Para esses casos, a imagem alvo era menor que a região delimitada pelo feixe original. Logo, fica claro o feito de corte da técnica.

Fonte: Elaborada pelo autor.

6.2 Calibração Fase-Intensidade

Como discutido na seção 4.2, podemos introduzir um fator β na equação 12 de forma a ter mais um controle sobre a porcentagem de luz que é difratada ou não de regiões micrométricas. De modo geral temos a seguinte codificação de fase:

$$t(x, y) = \sum_{n=0}^{M-1, N-1} \left\{ \text{rect}\left(\frac{y - nP - P/4}{P/2}\right) e^{ia(x,y)\beta} + \text{rect}\left(\frac{y - nP - 3P/4}{P/2}\right) e^{i\pi} \right\} \cdot \text{rect}(x/s) \quad (14)$$

O fator β oferece a comodidade de não ser necessário a priori mudar a imagem alvo para alterar a porcentagem de luz em determinadas regiões do potencial final. O fator β pode ser tanto uma constante, como no caso original, onde $\beta = \pi$, ou uma função $\beta(x, y)$, como se queira. Lembrando que de forma prática, a pequena alteração no processo de geração da máscara de fase descrito na figura 10, é apenas considerar a mudança $e^{ia(x,y)\pi} \rightarrow e^{ia(x,y)\beta}$ antes de fazer a intercalação das linhas em π .

Nesse sentido, o propósito dessa seção é oferecer uma primeira calibração do fator β . Para isso, foi utilizada a imagem alvo de um quadrado de 200 pixels de lado, conforme a figura 15, onde a região clara apresenta $a(x, y) = 1$, e a região escura $a(x, y) = 0$. Como demonstrado pelo cálculo numérico da seção 4.2, apesar do quadrado ser extenso se comparado ao tamanho do pixel do LC-SLM, a calibração obtida pode ser utilizada para regiões da ordem de 20 pixels de lado.

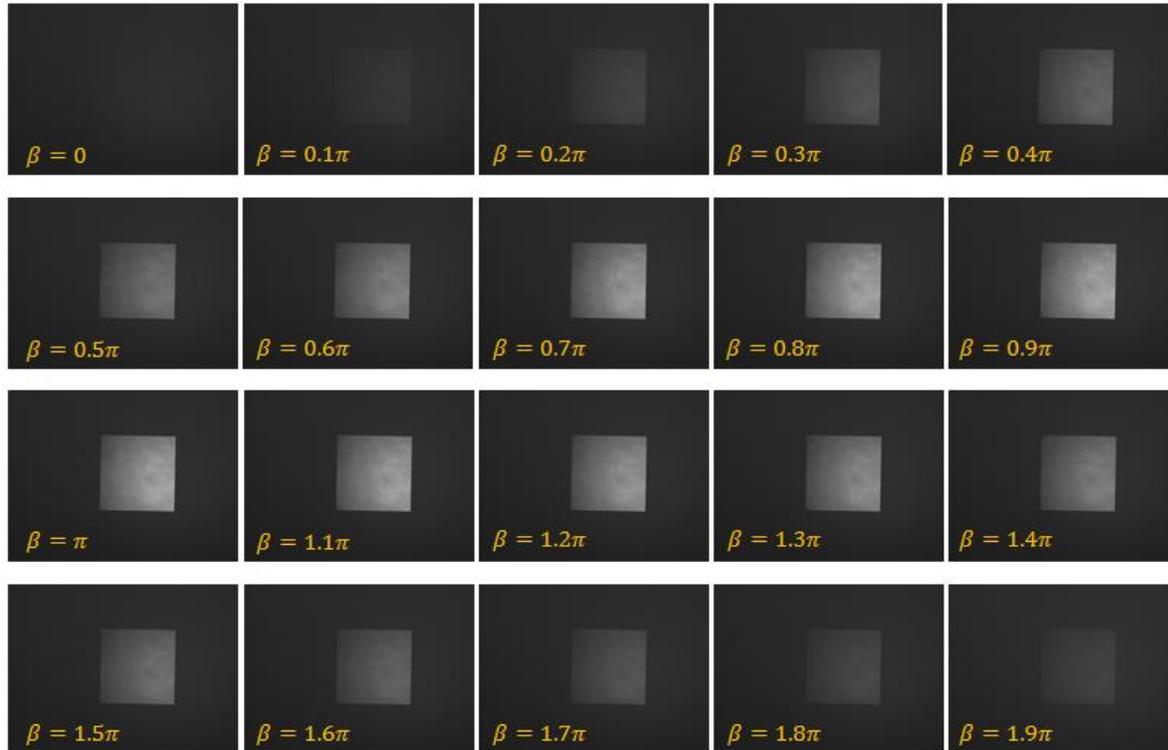


Figura 19- Procedimento para calcular a eficiência energética em função de β . Para cada valor de β , foi capturado seu respectivo potencial flat-top.

Fonte: Elaborada pelo autor.

A partir dessa imagem alvo, foram gerados potenciais ópticos para diferentes valores de beta, conforme demonstrado na figura 16. A eficiência energética (ε) foi calculada dentro da região limitada pelo quadrado, que é a região de modulação do fator β a partir da relação:

$$\varepsilon = 100. (I_{\text{feixe incidente}}/I_{\text{quadrado}}) \quad (15)$$

Onde $I_{\text{feixe incidente}}$ representa a soma das intensidades de todos os pixels na região delimitada pelo quadrado no feixe incidente, e I_{quadrado} a soma das intensidades de todos os pixels na região delimitada pelo quadrado no potencial óptico final, para cada valor de β .

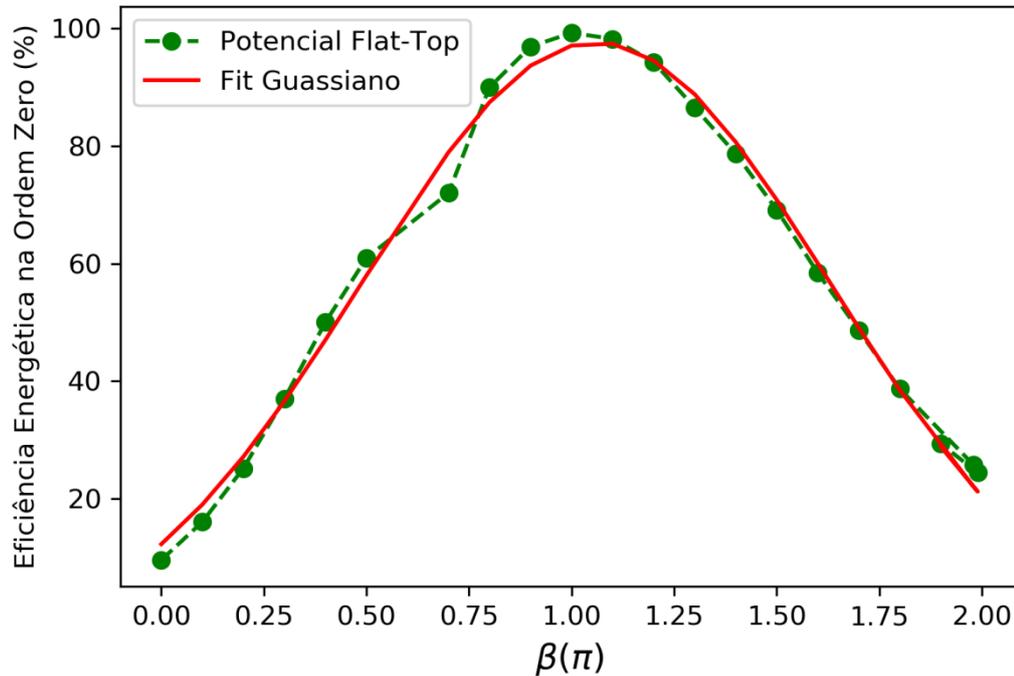


Figura 20 - Calibração da eficiência energética em função de β .
Fonte: Elaborada pelo autor.

A Figura 20 ilustra o resultado da calibração para diferentes valores de β em função de π . A curva que melhor representa os dados é uma curva gaussiana ($g(\beta)$) com parâmetros:

$$g = 103.94 \cdot e^{-1.54(\beta-1.05)^2} - 6.27 \quad (16)$$

Por exemplo, se localmente queremos reduzir uma região clara, com 100% da intensidade do feixe incidente para apenas 60 %, utilizamos $\beta = \pm\sqrt{0.65\ln(1.56)} + 1.05$, obtendo $\beta \sim 0.76\pi$ ou $\beta \sim 1.34\pi$.

Esse tipo de controle permite um mapeamento direto e quantitativo entre o potencial óptico final e o perfil de fase codificado no SLM, facilitando a implementação de controles em tempo real e automatizados dos potenciais ópticos – tanto para geração de potências que evoluem no tempo propositalmente, como correção de imperfeições devido ao processo experimental.

6.3 Correção de um Potencial Flat-Top

A correção do perfil de intensidade gaussiano no interior de um potencial óptico em forma de quadrado, conhecido como ‘flat-top’, é um bom exemplo de aplicação do controle do fator β para correção como se queira do potencial. Além disso, tal aplicação reforça técnica de mapeamento diretor entre potencial óptico final e máscara de fase, intrínseco à técnica.

Como comprovado nas seções anteriores, a metodologia descrita funciona como uma máscara de amplitude de alta definição para o feixe original. Se nenhuma correção é aplicada, além do desenho da imagem alvo, a distribuição final de intensidade conterà o envelope gaussiano original – o que fica mais evidente e com maior impacto para potenciais binários.

Tomando o potencial flat-top como exemplo mais simples, o objetivo da correção aqui descrita é distribuir a luz de forma inversamente gaussiana, ou seja, ajustando a máscara de fase de forma a difratar mais luz do centro, e manter mais intensidade nas bordas – ao mesmo tempo que isso é contrabalanceado com a informação da imagem alvo, $a(x, y)$. Para isso, o fator $\beta(x, y)$ é descrito como uma gaussiana inversa normalizada para π , com três parâmetros livres de controle para otimizar a correção (r_o , w e Δ), conforme definido na equação 12:

$$\beta(x, y) = \left(1 - e^{\frac{-2(r-r_o)^2}{w^2}} \right) (\pi - \Delta) + \Delta \quad (17)$$

O parâmetro r_o corrige qualquer deslocamento que possa ocorrer entre o centro da máscara de fase gaussiana inversa e o centro do feixe gaussiano incidente sobre o SLM. Idealmente, $r_o = 0$, mas devido a imperfeições de alinhamento, é necessário ter o controle desse parâmetro.

O parâmetro w controla a largura da gaussiana inversa em $\beta(x, y)$, a qual não pode ser configurada definida como a cintura do feixe gaussiano incidente, pois a largura de $\beta(x, y)$ deve variar de acordo com a largura do potencial flat-top. Dessa forma, garantimos a normalização da intensidade do potencial a partir dos valores de intensidade nas bordas, evitando maiores perdas.

Por fim, o parâmetro Δ controla a porcentagem de energia que deve ser difratada, ou seja, a amplitude do vale de $\beta(x, y)$. Por exemplo, considerando que o feixe incidente sobre o SLM não é alterado, tanto em tamanho, como em largura, potenciais flat-top maiores

necessitam Δ 's maiores e vice versa, já que para potenciais que cobrem uma região maior do feixe, os valores de intensidade das bordas serão menores, e para potenciais que cobrem regiões menores, suas bordas terão valores de intensidade maior, já que a região do potencial ainda se mantém próxima do centro do feixe incidente. Importante que isso ocorre considerando um feixe gaussiano incidente e potenciais centralizados com o feixe. Para diferentes casos, a ideia de correção pode ser adaptada.

Para o resultado apresentado nessa seção, r_0 , w e Δ , foram definidos manualmente, mas podem ser a base para um algoritmo de correção automatizado, como vem sendo desenvolvido no trabalho do estudante Airton Rampim, também do laboratório de Tecnologias Quânticas do IFSC-USP.

A Figura 21 (a) ilustra a máscara de fase gaussiana inversa sem sobreposição da grade intercalada em valores de π . Quando a máscara, definida por $\beta(x, y)$, é multiplicada pela informação da imagem, $a(x, y)$, a mesma fica restrita às bordas do potencial flat-top, como ilustra na Figura 21 (b). A fim de clarear o procedimento, a Figura 21 (c) também ilustra o corte unidimensional de β , definindo $\Delta = \pi/2$.

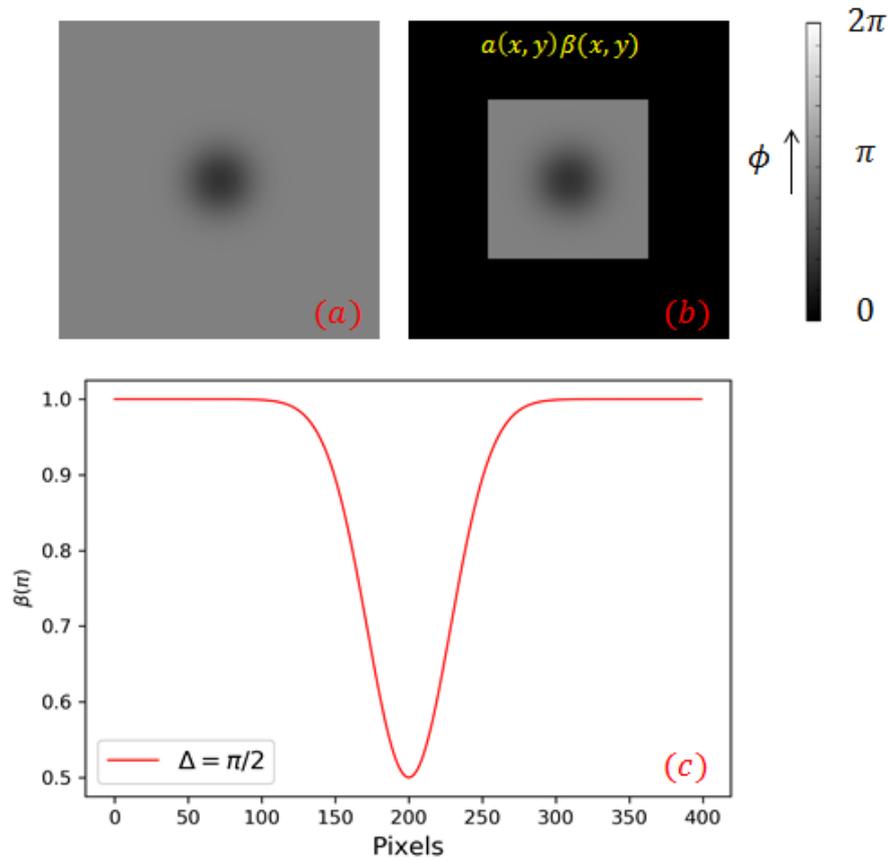


Figura 21-Máscara de fase inicial para correção do perfil gaussiano do feixe original. Representa o estágio da máscara de fase antes da intercalação das linhas em π .

Fonte: Elaborada pelo autor.

A Figura 22 apresenta a aplicação experimental da correção até aqui descrita. A curva azul, com $\Delta = \pi$, representa o potencial sem correção, e a curva vermelha o potencial corrigido para $\Delta = \pi/2$ e $w = 40 \text{ pixels}$. Ambas as imagens foram obtidas ajustando experimentalmente r_o para coincidir o centro do feixe incidente com o centro de $\beta(x,y)$.

É importante notar que a correção do potencial flat-top ilustra como esta técnica oferece um procedimento direto e simplificado para mapeamento direto entre valores de intensidade e a máscara de fase no SLM.

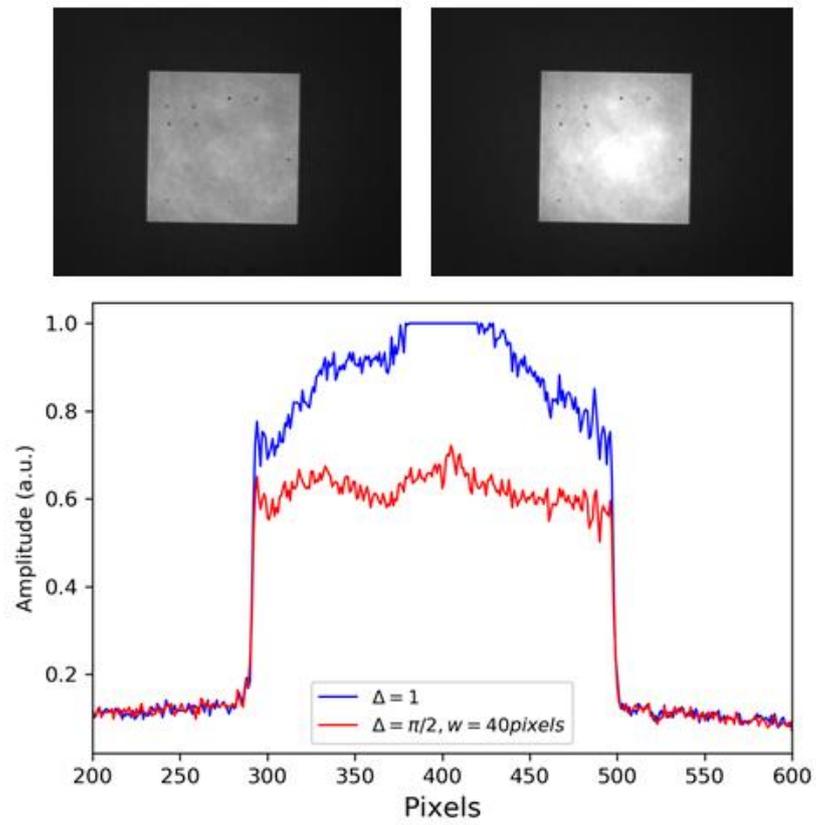


Figura 22- Demonstração experimental da correção do potencial flat-top. Parâmetros escolhidos: $\Delta = \pi/2$ e $w = 40$ pixels.

Fonte: Elaborada pelo autor.

7 CONCLUSÃO

Neste trabalho demonstramos o desenvolvimento de um framework de fácil implementação experimental e com capacidade de gerar potenciais ópticos de alta definição e mobilidade de controle em tempo real. Como mencionado ao longo da dissertação, o objetivo de se estudar diferentes técnicas de modulação espacial da luz não está em construir um ranking global de diferentes metodologias, mas saber identificar como cada técnica pode atender as demandas de cada situação experimental.

Em especial para a área de aprisionamento óptico, acreditamos contribuir com a comunidade, com uma abordagem capaz de gerar potenciais arbitrários, com alto grau de suavidade, definição e e uma metodologia simples para a calibração fase-intensidade que gera o potencial. Demonstramos ser possível controlar a difração de uma frente de onda gaussiana, com eficiência energética acima de 80%, em regiões da ordem de 10 pixels de um LC-SLM, cujos pixels possuem lado de $12 \mu m$. Tal controle ainda pode ser feito em áreas menores de pixel, apesar da queda na eficiência energética. De toda forma, o controle é suave e feito através do contraste de fase entre pixels vizinhos, mesclando uma grade binária de difração, com a informação da imagem alvo.

Assim, demonstramos a geração de potenciais arbitrários com qualidade comparável ou até melhor que técnicas bem estabelecidas. Apesar das semelhanças com a lógica das técnicas de controle de amplitude, a metodologia desta dissertação é essencialmente uma técnica de controle de fase. Isso oferece limitações na velocidade de modulação em tempo real, estando sujeita à taxa de atualização do LC-SLM utilizado – geralmente por volta de 60 Hz – mas, em princípio também oferece a possibilidade de um controle completo (amplitude + fase) do potencial final. Essa possibilidade ainda não foi testada em laboratório, mas como demonstrado por DAVIS⁴⁰, as ordens $m \geq 1$ de difração carregam consigo modulação de fase. Diante disso, a codificação da informação de amplitude pode ser adaptada para gerar os potenciais nas ordens maiores de difração. Isso abre um leque de possibilidades de geração de feixes estruturados, relevantes nos experimentos com átomos frios. Nesse sentido, a investigação da modulação completa do potencial óptico é umas das extensões prioritárias desse trabalho.

Além disso, devido à facilidade de mapeamento dos potenciais, o Laboratório de Tecnologias Quânticas do IFSC-USP vem desenvolvendo uma metodologia, baseada em aprendizado de máquina, para aperfeiçoar os potenciais em tempo real gerados pela técnica aqui descrita. Essa pesquisa é desenvolvida no trabalho de mestrado de Airton Rampim, cuja dissertação está em fase final de conclusão. Uma aplicação direta da correção e mapeamento

dos potenciais, é a possibilidade de criar filmes de máscaras de fase diferentes, com o objetivo de se ter potenciais dinâmicos no tempo – estando limitados apenas à largura e taxa de modulação do LC-SLM utilizado.

Para implementação da técnica em sistemas de aprisionamento óptico, propomos a utilização da objetiva de focalização do feixe no sistema físico, como a segunda lente do correlator 4f. Assim, *a priori*, é possível obter o potencial complexo no plano de aprisionamento. Outro desafio prioritário e consequente dos desenvolvimentos dessa dissertação é a aplicação desta técnica em experimentos com pinças ópticas e átomos frios. Além das aplicações diretas nesses sistemas, experimentos na área de optogenética, terapia fotodinâmica, projeção e cortes a laser podem se beneficiar com a flexibilidade e facilidade de implementação da técnica aqui descrita.

Alguns resultados deste trabalho estão no artigo publicado na conferência SBFoton de 2021⁴⁵ e na matéria de divulgação da revista americana New Scientist.⁴⁶

REFERÊNCIAS

- 1 DICKEY, F.M; LIZOTTE, T.E. **Laser beam shaping applications**. 2nd. ed. NewYork: CRC Press, 2016.
- 2 RUBINSZTEIN-DUNLOP, H. *et al.* Roadmap on structured light. **Journal of Optics**, v. 19, n. 1, 2016.
- 3 BAÑAS, A. *et al.* GPC: Recent developments. **Optical Data Processing and Storage**. v.1, p. 22-37, 2015.
- 4 DHOLAKIA, K.; ČIŽMÁR, T. Shaping the future of manipulation. **Nature Photonics**. v. 5, n. 6, p. 335–342, 2011.
- 5 MARAGÒ, O. M. *et al.* Optical trapping and manipulation of nanostructures. **Nature Nanotechnology**, v.8, n.11, p.807-819, 2013.
- 6 MAZOLLI, A; MAIA NETO, P. A; NUSSSENSVEIG, H. M. *et al.* Theory of trapping forces in optical tweezers. **Proceedings of Royal Society London A.**, v. 459, p.3021-3041, 2003.
- 7 JONES, P. H.; MARAGÒ, O. M.; VOLPE, G. **Optical tweezers: principles and applications**. Cambridge: Cambridge University Press, 2015.
- 8 GRIMM, R; WEIDEMULLER, M; OVCHINNIKOV, Y. B. Optical dipole traps for neutral atoms. **Advances In Atomic, Molecular, and Optical Physics**. v. 42, p. 95-170, 2000.
- 9 HOANG, T. M. *et al.* Experimental test of the differential fluctuation theorem and a generalized jarzynski equality for arbitrary initial states. **Physical Review Letters**, v.120, n.8, p.080602, 2018.
- 10 HOROWITZ, V. R. *et al.* Electron spin resonance of nitrogen-vacancy centers in optically trapped nanodiamonds. **Proceedings of the National Academy of Sciences**. v. 109, n. 34, p. 13493–13497, 2012.
- 11 BRADAC, C. Nanoscale optical trapping: a review. **Advanced Optical Materials**, v. 6, n. 12, p. 1800005, 2018.
- 12 ACOSTA, V. *et al.* Broadband magnetometry by infrared-absorption detection of nitrogen-vacancy ensembles in diamond. **Applied Physics Letters**, v. 97, n. 17, p. 174104, 2010.
- 13 TAYLOR, J. *et al.* High-sensitivity diamond magnetometer with nanoscale resolution. **Nature Physics**, v. 4, n. 10, p. 810, 2008.
- 14 SEGURA, C. O. O. **Diamond studies for applications in quantum technologies**. 2019. 115 p. Tese (Doutorado em Ciências) — Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.
- 15 FEYNMAN, R.P. Simulating physics with computers. **International Journal of Theoretical Physics**, v. 21, p. 467–488, 1982.

16 BERNIEN, H. *et al.* Probing many-body dynamics on a 51-atom quantum simulator. **Nature**, v. 551, n. 7682, 2017.

17 EIGEN, C. *et al.* Universal prethermal dynamics of Bose gases quenched to unitarity. **Nature**, v. 563, n. 7730, 2018.

18 PEREGO, E. **Generation of arbitrary optical potentials for atomic physics experiments using a digital micromirror device**. 2015. Thesis (Master Degree in Physics, School of Mathematical, Physical and Natural Sciences) - University of Florence, 2019.

19 RAMANATHAN, A. *et al.* Superflow in a toroidal bose-einstein condensate: an atom circuit with a tunable weak link. **Physical Review Letters**, v. 106, n. 13, p. 130401, 2011.

20 BAÑAS, A; GLÜCKSTAD, J. Light shaping with holography, GPC and Holo-GPC. **Optical Data Processing and Storage**, v. 3, p. 20-40, 2017.

21 GLÜCKSTAD, J; PALIMA, D. **Generalized phase contrast**: applications in optics and photonics. Dordrecht: Netherlands, 2009. (Springer Series in Optical Science.)

22 VILLANGCA, M. J.; BANÑAS, A. R.; PALIMA, D; GLÜCKSTAD, J. Dark GPC: extended nodal beam areas from binary-only phase. **Optical Engineering**, v. 55, n. 12, 2016.

23 BANÑAS, A. *et al.* GPC light shaper: static and dynamic experimental demonstrations. **Optics Express**, v. 22, n. 20, 2014.

24 GAUNT, A. L.; HADZIBABIC, Z. Robust digital holography for ultracold atom trapping. **Scientific Reports**, v. 2, n. 1, p. 1–5, 2012.

25 PIZOLATO., J. C. *et al.* Zeroth-order phase-contrast technique. **Applied Optics**, v. 46, n. 31, p. 7604-7613, 2007.

26 ASHKIN, A. Acceleration and trapping of particles by radiation pressure. **Physical Review Letters**, v. 24, n. 4, p. 156, 1970.

27 RICHARDS, B.; WOLF, E. Electromagnetic diffraction in optical systems II – structure of the image field in an aplanatic system. **Proceedings of Royal Society London A.**, v.253, p.358-379, 1959.

28 LOCK, J. A. Calculation of the radiation trapping force for laser tweezers by use of generalized lorenz-mie theory. i. localized model description of an on-axis tightly focused laser beam with spherical aberration. **Applied Optics**, v. 43, n. 12, p. 2532–2544, 2004.

29 NIEMINEN, T. A.; *et al.* Optical tweezers: theory and modeling. **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, v.146, p.59-80, 2014.

30 ERIKSEN, R. L; DARIA, V. R; GLÜCKSTAD, J. Fully dynamic multiple-beam optical tweezers. **Optics Express**, v. 10, n. 14, 2002.

31 PASIENSKI, M; DEMARCO, B. A high-accuracy algorithm for designing arbitrary holographic atom traps. **Optics Express**, v. 16, n. 3, 2008.

- 32 GOODMAN, J. W. **Introduction to fourier optics**. 2nd. ed. New York: McGraw-Hill Companies, 1988.
- 33 GABOR, D. *et al*, A new microscopic principle. **Nature**, v. 161, p. 777–778, 1948.
- 34 GERCHBERG, R. W; SAXTON, W. O. A practical algorithm for the determination of phase from image and diffraction plane pictures. **Optik**, v. 35, n. 2, p. 237–246, 1972.
- 35 LEE, J. G; HILL, W. T. Spatial shaping for generating arbitrary optical dipole traps for ultracold degenerate gases. **Review of Scientific Instruments**, v. 85, p. 103106, 2014.
- 36 ZERNIKE, F. Phase contrast. **Zeitschrift für Technische Physik.**, v. 16, p. 454, 1935.
- 37 MARTINS, T.T; MUNIZ, S. R.. Dynamically controlled double-well optical potential for colloidal particles. 2021, *In*: IEEE SBFOTON INTERNATIONAL OPTICS AND PHOTONICS CONFERENCE, 2021. **Proceedings[...]** Campinas: Sociedade Brasileira de Ótica e Fotônica -SBFoton, 2021. Disponível em: <https://www.sbfoton.org.br/program/index.html>. Acesso em: 08 set.2022.
- 38 LIANG, J. **High-precision laser beam shaping and image projection**. 2012. Thesis (Doctor of Philosophy) - University of Texas, Austin,2012.
- 39 GAUTHIER, G. *et al*. Direct imaging of a digital-micromirror device for configurable microscopic optical potentials. **Optica**, v. 3, n. 10, p. 1136, 2016.
- 40 DAVIS, J. A; *et al*. Encoding amplitude information onto phase-only filters. **Applied Optics**, v. 38, n. 23, 1999.
- 41 ZHANG, Z; LU, G; YU, F. T. S. Simple method for measuring phase modulation in liquid crystal televisions. **Optical Engineering**, v. 33, n. 9, p. 3018–3022, 1994.
- 42 ROMERO, L. A; DICKEY, F. M. Theory of optimal beam splitting by phase gratings I One-dimensional gratings. **Journal of the Optical Society of America A**, v. 24, n. 8, p. 2280, 2007.
- 43 FUENTES, J. L. M; FERNÁNDEZ, E. J; PRIETO, P. M; ARTAL, P. Interferometric method for phase calibration in liquid crystal spatial light modulators using a self-generated diffraction-grating. **Optics Express**, v. 24, p. 14159–14171, 2016.
- 44 LI, R; CAO, L. Progress in phase calibration for liquid crystal spatial light modulators. **Applied. Sciences**, v. 9, p. 2012, 2019.
- 45 SILVA, P. F.; MUNIZ, S. R. Generating arbitrary laser beam shapes through phase-mapped designed beam splitting, 2021. *In*: IEEE SBFOTON INTERNATIONAL OPTICS AND PHOTONICS CONFERENCE, 2021. **Proceedings[...]** Campinas: Sociedade Brasileira de Ótica e Fotônica - SBFoton, 2021. Disponível em: <https://www.sbfoton.org.br/program/index.html>. Acesso em: 14 set. 2022
- 46 CRANE, L. S. Scientists made a laser beam shaped like a photorealistic cat. **New Scientist**, 2022. Disponível em: <https://www.newscientist.com/article/2318568>. Acesso em: 05 set. 2022.

APÊNDICE A – Lente como uma transformada de Fourier

A proposta desse apêndice é demonstrar que a ação de uma lente convergente sobre um campo incidente é análoga à transformada de Fourier do campo no plano focal^{††}. Tal resultado é fundamental para entender as técnicas modernas de geração de potenciais ópticos arbitrários, assim como a metodologia descrita nessa dissertação.

Suponha um campo complexo ($E_l = Ae^{i\phi_0}$), com vetor de onda $k = 2\pi/\lambda$ incidente sobre uma lente convergente de índice de refração n e largura máxima Δ_0 . Além disso, podemos definir uma função $\Delta(x, y)$ que representa a variação da largura da lente no plano. Tal variação de largura gera, por consequência, uma variação no caminho óptico percorrido por cada ponto da frente de onda incidente. Assim, a fase adicionada ($\phi(x, y)$) ao campo complexo na saída da lente é dada por:

$$\phi(x, y) = kn\Delta(x, y) + k(\Delta_0 - \Delta(x, y)) = k\Delta_0 + k\Delta(n - 1) \quad (\text{A.1})$$

A figura abaixo ilustra o processo descrito acima:

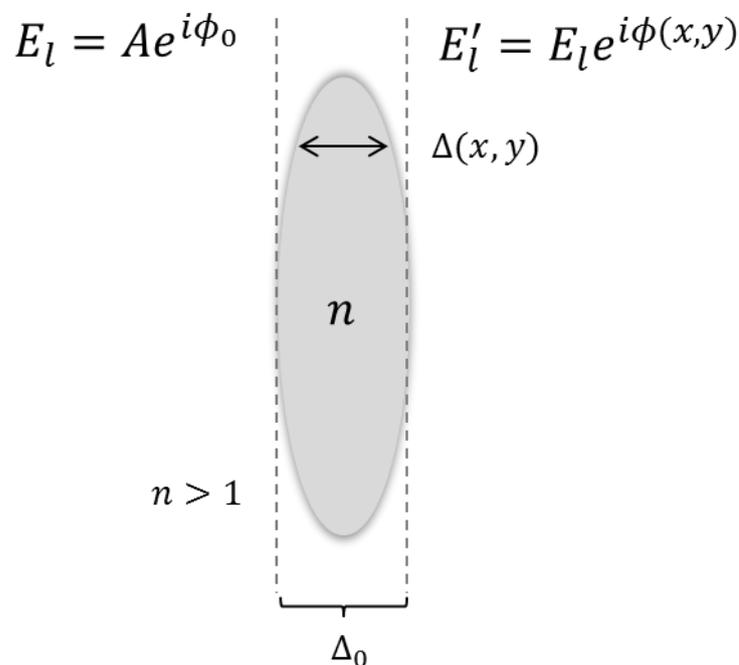


Figura 23-Representação da estrutura física de uma lente convergente e sua ação modulando a fase de um campo complexo incidente.

Fonte: Elaborada pelo autor.

^{††} Baseado em: GOODMAN, J. W. **Introduction to Fourier Optics**. 2 ed. McGraw-Hill Companies, 1988

Considerando a lente como uma lente esférica e homogênea, ou seja, desconsiderando efeitos de aberração e na aproximação paraxial, a largura Δ pode ser expressa como:

$$\Delta(x, y) = \Delta_0 - \frac{x^2 + y^2}{2f(n - 1)} \quad (\text{A.2})$$

Substituindo a expressão (A.2) em (A.1), temos:

$$\phi(x, y) = kn\Delta_0 - \frac{kn}{2f}(x^2 + y^2) \quad (\text{A.3})$$

Pela expressão (A.3) é possível notar que a lente adiciona um atraso homogêneo na frente de onda, correspondente à primeira expressão na equação. Mas também adiciona uma curvatura esférica na frente de onda incidente, devido ao termo dependente de x e y . Fisicamente, se uma onda plana incide sobre a lente, na saída será uma onda esférica que converge para o foco da lente, como ilustrado abaixo:

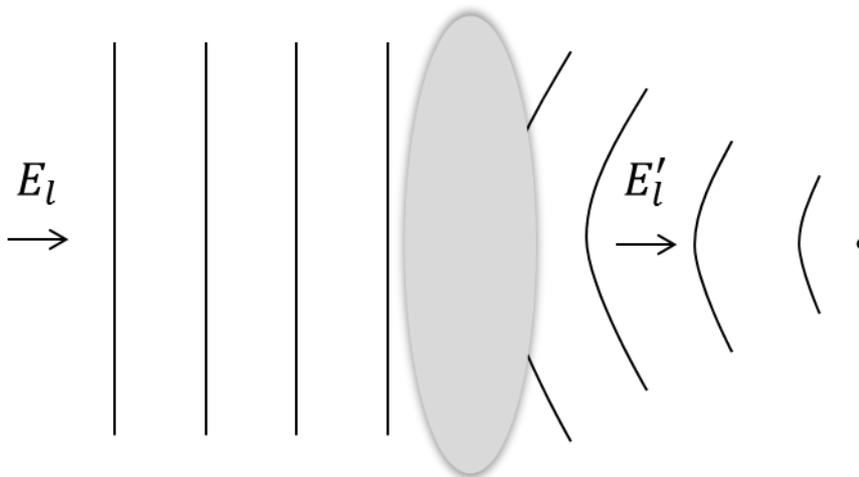


Figura 24 - Representação do efeito de curvatura da frente de onda gerado por uma lente convergente.
Fonte: Elaborada pelo autor.

Definido como a lente altera a fase de um feixe incidente arbitrário, é possível entender como o campo complexo do feixe é alterado ao longo de sua propagação. Isso é possível analisando a difração do feixe modulado.

Considerando os mesmos pressupostos dos parágrafos anteriores, o campo na saída da lente pode ser escrito como $E_l' = A e^{i\phi_0} e^{ikn\Delta_0} e^{-i\frac{kn}{2f}(x^2+y^2)}$. Podemos omitir o termo $e^{ikn\Delta_0}$ por simplicidade, por não afetar a curvatura da frente de onda. A propagação do campo desde a saída da lente até o foco é calculada através da fórmula da difração de Fresnel:

$$E_f(x_f, y_f) = \frac{e^{i\frac{k}{2f}(x_f^2+y_f^2)}}{i\lambda f} \iint_{-\infty}^{\infty} E_l' e^{i\frac{k}{2f}(x^2+y^2)} e^{-i\frac{2\pi}{f}(x.x_f+y.y_f)} dx dy \quad (\text{A.4})$$

Note que em (A.4) os termos x_f e y_f representam as variáveis do espaço real no plano focal, enquanto x e y as variáveis no plano da lente - x_f e y_f estão relacionadas com as frequências no espaço de Fourier da seguinte forma: $x_f = \lambda f f_x$ e $y_f = \lambda f f_y$. A difração de Fresnel é justificada, pois a curvatura da frente de onda não pode ser desprezada em comparação com a distância focal. Tanto que na fórmula de Fresnel, em (A.4), termos de curvatura são considerados, a nível do plano da lente, como no plano focal. Substituindo a expressão de E_l' em (A.4), temos:

$$E_f(x_f, y_f) = \frac{e^{i\frac{k}{2f}(x_f^2+y_f^2)}}{i\lambda f} \iint_{-\infty}^{\infty} A e^{i\phi_0(x,y)} e^{-i\frac{2\pi}{f}(x.x_f+y.y_f)} dx dy \quad (\text{A.5})$$

Reescrevendo a equação em função do campo incidente sobre a lente:

$$E_f(x_f, y_f) = \frac{e^{i\frac{k}{2f}(x_f^2+y_f^2)}}{i\lambda f} \iint_{-\infty}^{\infty} E_l e^{-i\frac{2\pi}{f}(x.x_f+y.y_f)} dx dy \quad (\text{A.6})$$

Ou seja,

$$E_f(x_f, y_f) = \frac{e^{i\frac{k}{2f}(x_f^2+y_f^2)}}{i\lambda f} \mathcal{F}(E_l) \quad (\text{A.7})$$

Se considerarmos que o campo incidente está há uma distância d da lente, ao invés de logo em sua entrada, o desenvolvimento se mantém o mesmo e o resultado final apenas adiciona o elemento de fase referente à propagação até a lente. Ficando, assim, o caso mais geral:

$$E_f(x_f, y_f) = \frac{1}{i\lambda f} e^{i(x^2+y^2)\frac{k}{2f}(1-\frac{d}{f})} \mathcal{F}\{E_l\} \quad (\text{A.8})$$

Sendo assim, a menos de um termo de fase o campo no foco de uma lente convergente pode ser calculado a partir da transformada de Fourier do campo incidente. O termo de fase não é um complicador nesse caso, pois via de regra em laboratório as medidas são feitas através da intensidade do feixe. Considerando a intensidade (I) nesse caso:

$$I = E_f \cdot E_f^* = \frac{1}{(\lambda f)^2} |\mathcal{F}\{E_l\}|^2 \quad (\text{A.8})$$