

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS**

**Leandro Roza Livramento**

**Análise do modelo de Skyrme BPS, suas extensões e  
aplicação para a física nuclear**

**São Carlos**

**2021**



**Leandro Roza Livramento**

**Análise do modelo de Skyrme BPS, suas extensões e  
aplicação para a física nuclear**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Doutor em Ciências.

Área de concentração: Física Básica

Orientador: Prof. Dr. Luiz Agostinho Ferreira

**Versão Corrigida**

**(versão original disponível na Unidade que aloja o Programa)**

**São Carlos**

**2021**

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Livramento, Leandro Roza

Análise do modelo de Skyrme BPS, suas extensões e aplicação para a física nuclear / Leandro Roza Livramento; orientador Luiz Agostinho Ferreira - versão corrigida -- São Carlos, 2021.

142 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em Física Básica) -- Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2021.

1. Autodualidade. 2. Modelo de Skyrme. 3. Modelo de Skyrme BPS. 4. Sólitons. 5. Não linearidade. I. Ferreira, Luiz Agostinho, orient. II. Título.

*Este trabalho é dedicado a todos os cientistas e divulgadores científicos  
brasileiros que trabalham arduamente para a construção de um futuro  
mais humano e fascinante para a nação.  
Dedico esse trabalho também à memória de meu querido galinho Preto.*



## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço ao apoio de meu grupo familiar que, apesar de não ser um grupo de Lie, também foi fundamental para a formação deste cientista. Em especial, agradeço meu irmão e minhas irmãs que sempre me deram muito apoio.

Agradeço meus amigos pelas discussões gerais e científicas que ajudaram a me edificar pessoal e profissionalmente, em especial ao meu amigo Wagner que muito me auxiliou na implementação de programas em C e nunca deixou de compartilhar comigo oportunidades profissionais.

Ao meu orientador de mestrado Pawel Klimas, a quem tenho o mais profundo respeito, agradeço por ter me preparado muito bem para o doutorado e ter me ajudado a visitar o IFSC ainda durante o mestrado. Sem dúvidas, a colaboração que resultou em meu primeiro artigo científico foi essencial para minha carreira acadêmica, assim como sua recomendação de orientador de doutorado.

Ao meu orientador atual Luiz A. Ferreira, agradeço fortemente pela oportunidade de desenvolver um trabalho tão satisfatório, graças ao qual pude solidificar minha carreira acadêmica. No doutorado, este me auxiliou a obter uma formação completa, seja sob os aspectos teóricos ou do dia a dia da vida acadêmica. Um fato notável foi sempre se fazer presente para desenvolver trabalhos em conjunto e me indicar boas oportunidades de trabalho.



*“Toda a nossa ciência comparada com a realidade, é primitiva e infantil - e, no entanto, é a coisa mais preciosa que temos.”*

*Albert Einstein*

*“We do what we must because we can.”*

*Glados*



## RESUMO

LIVRAMENTO, L. R. **Análise do modelo de Skyrme BPS, suas extensões e aplicação para a física nuclear.** 2021. 142p. Tese (Doutorado em Ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2021.

Neste projeto se estuda o modelo de Skyrme BPS,<sup>1</sup> o qual é uma modificação do modelo de Skyrme padrão<sup>2-6</sup> que introduz um setor auto dual para a teoria, baseando-se em ideias de autodualidade.<sup>7</sup> O foco serão os três tópicos desenvolvidos pelo presente autor. O primeiro é a análise do setor auto dual do modelo de Skyrme BPS, o qual introduz seis campos escalares reais não propagantes ao modelo de Skyrme padrão, contidos nas componentes de uma matriz simétrica, positiva e invertível  $h$ . Demonstrar-se-á que o setor estático de tal teoria é equivalente ao setor auto dual, e que tais campos adicionais podem ser determinados algebricamente em termos dos campos de Skyrme  $SU(2)$  usuais, os quais permanecem totalmente livres.<sup>8</sup> Resulta que há um número infinito de soluções exatas auto duais para cada valor da carga de Skyrme. O segundo tópico trata da extensão do modelo de Skyrme BPS, a qual será chamada de modelo de Skyrme Falso Vácuo, através da introdução de termos dependentes de uma fração de potência  $\psi$  da densidade bariônica, bem como a adição de um termo topológico que reproduz a interação Coulombiana. Pode-se demonstrar que os campos  $h$  permanecem determinados em termos dos campos de Skyrme, os quais por sua vez são determinados através de uma única equação diferencial para  $\psi$ , a qual recai no problema do falso vácuo de S. Coleman.<sup>9-11</sup> Tal modelo reproduz robustamente algumas propriedades da matéria nuclear, prevendo acuradamente os valores da energia de ligação e do raio RMS para um amplo número de núcleons. O terceiro tópico aborda a extensão do modelo de Skyrme BPS através da introdução de termos cinéticos e potenciais para os campos  $h$ , além do termo de massa usual dos píons. Através de um ansatz que preserva parcialmente as equações de autodualidade do modelo de Skyrme BPS, se reduzirá as nove equações de Euler-Lagrange associadas aos campos da teoria estendida à três equações radiais acopladas. Estas serão resolvidas numericamente para a carga topológica unitária levando à soluções estáveis segundo o argumento de escala de Derrick.<sup>12</sup>

**Palavras-chave:** Autodualidade. Modelo de Skyrme. Modelo de Skyrme BPS. Sólitons. Não linearidade.



## ABSTRACT

LIVRAMENTO, L. R. **Analysis of the Skyrme BPS model, its extensions and application to nuclear physics.** 2021. 142p. Tese (Doutorado em Ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2021.

We study in this project the BPS Skyrme model,<sup>1</sup> which is a modification of the standard Skyrme model<sup>2-6</sup> that introduces a self-dual sector for the theory, based on ideas of self-duality.<sup>7</sup> The focus will be on the three topics developed by the present author. The first is the self-dual sector analysis of the BPS Skyrme model, which introduces six non-propagating real scalar fields to the standard Skyrme model, contained in the components of a symmetric, positive, and invertible  $h$  matrix. It will be shown that the static sector of such a theory is equivalent to the self-dual sector, and the additional fields can be determined algebraically in terms of the usual  $SU(2)$ -Skyrme fields, which remains totally free.<sup>8</sup> It turns out that there is an infinite number of self-dual exact solutions for each value of the Skyrme charge. The second topic addresses the extension of the BPS Skyrme model, which will be called the False Vacuum Skyrme model, through the introduction of terms dependent on a fractional power  $\psi$  of the baryonic density, and the addition of a topological term that reproduces the Coulombian interaction. It can be shown that the  $h$ -fields remains determined in terms of the Skyrme fields, which in turn is determined by a single differential equation for the  $\psi$ -field, which corresponds to the S. Coleman's false vacuum problem.<sup>9-11</sup> Such a model robustly reproduces some properties of nuclear matter, accurately predicting binding energy and RMS radius values for a large number of nucleons. The third topic addresses the extension of the BPS Skyrme model by introducing kinetic and potential terms for the  $h$  fields, in addition to the usual pion mass term. Through an ansatz that partially preserves the self-duality equations of the BPS Skyrme model, the nine static Euler-Lagrange equations associated with the fields of the extended theory are reduced to three coupled radial equations. These will be solved numerically for the unitary topological charge leading to stable solutions according to the Derrick scaling argument.<sup>12</sup>

**Keywords:** Self-duality. Skyrme model. BPS Skyrme model. Solitons. Nonlinearity.



## LISTA DE FIGURAS

- Figura 1 – Energia de ligação por núcleon  $E_B$  pelo número de núcleons  $A$ . Os pontos representam os dados experimentais e a curva é obtida através da fórmula semi-empírica de Weizsaecker. . . . . 37
- Figura 2 – As isosuperfícies de densidade bariônica dos Skyrmions para  $1 \leq Q \leq 8$  catalogadas com seu correspondente número bariônico ( $Q$ ) e sua simetria espacial. . . . . 38
- Figura 3 – A função perfil  $f(r)$  obtida numericamente a partir de 2.23, com as condições de borda  $f(0) = \pi$  e  $f(\infty) = 0$ , através do “shooting method” para a carga de Skyrme (2.16)  $Q = 1$ . . . . . 39
- Figura 4 – Isosuperfícies da densidade de carga bariônica em uma colisão frontal entre dois Skyrmions de carga de Skyrme  $Q = 1$  nos instantes 1, ..., 6 orientados do passado para o futuro. . . . . 40
- Figura 5 – As isosuperfícies de carga topológica (3.59) normalizadas com seu valor máximo  $Q_M$  nas coordenadas Cartesianas adimensionais (3.63) para as configurações de campo  $f(\zeta) = 4 \arctan(1/\zeta)$  e, respectivamente da esquerda para a direita, para os mapas racionais  $u = w$  ( $Q = 1$ ),  $u = w^2$  ( $Q = 2$ ) e  $u = \frac{w^3 - i\sqrt{3}w}{i\sqrt{3}w^2 - 1}$  ( $Q = 3$ ). . . . . 61
- Figura 6 – As isosuperfícies da densidade de carga topológica (3.92) normalizada com seu máximo valor  $Q_M$  nas coordenadas Cartesianas adimensionais (3.63) para, da esquerda para a direita,  $(m, n) = (1, 1), (1, 2), (2, 1)$ . 65
- Figura 7 – O potencial efetivo com sinal invertido  $-\widehat{V}_{\text{ef}}$  dado por (4.21) vs.  $\widehat{\psi}$  para  $\gamma = 2, 2$ ,  $s = 3$  e  $\kappa = 4$ . Em adição, são mostrados os valores de  $\widehat{\psi}_n = 0,641742$  e  $\widehat{\psi}_M = 1,25$  para tal potencial efetivo bem como o ponto de partida do ‘corpo’, i.e. o valor do ponto  $(\widehat{\psi}(0), -\widehat{V}_{\text{ef}}) = (1, 21326, 0, 2902)$  correspondente à solução de (4.21) em  $\zeta = 0$ . . . . . 77
- Figura 8 – A densidade de carga topológica  $Q = \frac{\vartheta}{4\pi^2} \widehat{\psi}^s$  ( $\zeta = r / (s \sqrt{2} 0,524 fm)$ ) para  $\kappa = 8$  e  $s = 3$  usando  $a = 0,524 fm$  em (4.36) e o  $^{56}\text{Fe}$  como núcleo de referência. O valor de  $Q(r = 0)$  é crescente até  $Q = 17$  e então decresce vagarosamente até o valor de  $0,1645 fm^{-3}$  para  $Q = 240$ . 80
- Figura 9 – O raio RMS  $\sqrt{\langle r^2 \rangle}$  como função de  $Q^{1/3}$ , para  $\kappa = 8$  e  $s = 5/2, 3, 5$ . . . 81

Figura 10 – A energia de ligação por núcleon $E_B$ experimental, como função de $Q$ , e o melhor ajuste de $E_B$ teórico para $\kappa = 8$ e $s = 3$ . Para tal ajuste se obtém $\sigma_2 = 2,16499 \text{ MeV}$ , $\sigma_G = 0,00989002$ onde $\Delta E_B = 0,216247 \text{ MeV}$ . Portanto, as constantes de acoplamento originais da teoria (4.4), dadas por (4.32), tornam-se $m_0^2/\alpha = 4,40047 \text{ MeV/fm}$ , $e_0^2/\alpha = 1,15727 \text{ MeV}^{-1} \text{ fm}^{-1}$ , $\mu_0^2/\alpha^2 = 3,11483 \text{ MeV/fm}$ , $\beta_2^2/\alpha^2 = 0,63023 \text{ MeV/fm}^3$ , e $\beta_G^2/\alpha^3 = 0,00623 \text{ MeV/fm}^3$ , com $\alpha = (\beta_\kappa/\beta_2)^{\frac{1}{3}}$ sendo livre. . . . .	83
Figura 11 – O raio RMS (4.23) em unidades de $b \equiv (\mu_0/\beta_2) / (\sqrt{2} s 0,524)$ vs. $I^{1/3}$ para $s = 2, 5$ e $\kappa = 3, 0, 3, 5, 8, 20$ . . . . .	86
Figura 12 – O raio RMS (4.23) em unidades de $b \equiv (\mu_0/\beta_2) / (\sqrt{2} s 0,524)$ vs. $I^{1/3}$ para $s = 3$ e $\kappa = 3, 5, 4, 8, 20$ . . . . .	86
Figura 13 – O raio RMS (4.23) em unidades de $b \equiv (\mu_0/\beta_2) / (\sqrt{2} s 0,524)$ vs. $I^{1/3}$ para $s = 5$ e $\kappa = 5, 5, 6, 8, 20$ . . . . .	87
Figura 14 – O valor das soluções de (4.21) na origem $\hat{\psi}(0)$ vs. $I^{1/3}$ para $s = 3$ e $\kappa = 3, 5, 4, 8$ . O rótulo $Q = 1, 56, 240$ no gráfico ampliado representa os correspondentes valores de carga topológica para a escolha particular de $^{56}\text{Fe}$ como o núcleo de referência e a fixação da razão $\mu_0/\beta_2$ através da relação (4.36), em concordância com o exemplo mostrada na seção 4.3. O valor de $\gamma$ decresce da esquerda para a direita e seu maior valor para todo valor de $\kappa$ corresponde à 100 e para $\kappa = 3, 5, 4, 8$ os menores valores de $\gamma$ correspondem respectivamente à 1,905, 2,025, 1,660. . . . .	87
Figura 15 – O valor da quantidade $I_{\text{ref.}}(\gamma_{\text{ref.}}, s, \kappa) / Q_{\text{ref.}}$ correspondente a se considerar cada elemento da lista de núcleos definida na seção 4.3 como núcleo de referência vs. $Q$ para $s = 3$ e $\kappa = 8$ , mas sem se distinguir os isótopos. . . . .	90
Figura 16 – Os menores valores de $\Delta R$ e $\Delta R^{A \geq 12}$ para $s = 3$ dentre todos os valores inteiros $\kappa = 4, \dots, 14$ para cada escolha de núcleo de referência na lista definida na seção 4.3, excluindo $^1\text{H}$ e $^4\text{He}$ . . . . .	91
Figura 17 – Os valores numéricos do raio RMS (4.50) em unidades $b$ vs. $I^{1/3}$ e seu ajuste não linear obtido através de (4.51). Em adição, são mostrados também os pontos correspondentes com $Q = 1, 56, 240$ obtidos minimizando-se $\Delta R$ , dado em (4.40), usando as abordagens 2 e 3, o que leva respectivamente à $(I_{Q=1}, b) = (0,0078490, 1 \text{ fm})$ e $(I_{Q=1}, b) = (0,0091793, 0,95337 \text{ fm})$ . . . . .	93
Figura 18 – O campo $f(r)$ para as soluções de (5.46)-(5.48) correspondentes à $Q = 1$ para $\sigma_1 = \sigma_2 = 0, 25, 1, 00, 4, 00$ . . . . .	106
Figura 19 – O campo $\varphi_1(r) = \varphi_2(r)$ para as soluções de (5.46)-(5.48) correspondentes à $Q = 1$ para $\sigma_1 = \sigma_2 = 0, 25, 1, 00, 4, 00$ . . . . .	107

Figura 20 – O campo  $\varphi_3(r)$  para as soluções de (5.46)-(5.48) correspondentes à  $Q = 1$  para  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,25, 1,00, 4,00$ . . . . . 107



## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – As simetrias de alguns Skyrmons leves e a relação $E/Q$ e $E_B$ em função de $Q$ . . . . .	38
Tabela 2 – O RMSD do raio RMS $\Delta R$ ( $fm$ ) e $\Delta R^{A \geq 12}$ ( $fm$ ) para todos os valores inteiros $\kappa = s + 1, s + 2, \dots, 20$ e cada um dos valores $s = 5/2, 3, 5$ obtidos pelo procedimento descrito nesta seção. Em adição, para $s = 3$ apresenta-se também os RMSD's das energias de ligação por núcleon $\Delta E_B$ ( $MeV$ ) e $\Delta E_B^{A \geq 12}$ ( $MeV$ ). . . . .	84
Tabela 3 – O valor das quantidades $\Delta R, I_{Q=1}, \mu_0/\beta_2, a$ e $b$ para $s = 3$ e $\kappa = 7$ obtidos através das abodagens 1 à 3 acima. . . . .	93
Tabela 4 – As quantidades (5.50), (5.51) e (5.52) associadas com as soluções das equações (5.46)-(5.48) com $Q = 1$ para alguns valores de $\sigma_1$ e $\sigma_2$ . . . . .	105
Tabela 5 – As espessuras das soluções com $Q = 1$ das equações (5.46)-(5.48), o tamanho da rede $r_{\max}$ . e as quantidades $(E_1 - 1)$ e $\mathcal{E}_4/\mathcal{E}_2$ para os valores de $\sigma_1$ e $\sigma_2$ da Tabela 4. . . . .	106
Tabela 6 – Os valores experimentais de $R^{\text{exp.}}$ ( $fm$ ) e $E_B^{\text{exp.}}$ ( $MeV$ ) e os valores numéricos $R^{\text{num.}}$ ( $fm$ ), $E_B^{\text{num.}}$ ( $MeV$ ) e $\gamma$ (adimensional) obtidos na seção 4.3 para o caso $s = 3$ e $\kappa = 8$ . . . . .	129



## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

QCD	Cromodinâmica quântica
RMS	Raíz quadrada do valor quadrático médio
RMSD	Raíz quadrada do desvio quadrático médio
BPS	Bogomol'nyi–Prasad–Sommerfield



## LISTA DE SÍMBOLOS

$SU(N)$	Grupo especial unitário de grau $N$
$\mathbb{Z}_N$	Grupo cíclico de ordem $N$
$S^N$	$N$ -esfera
$\mathbb{R}^N$	Espaço coordenado real $N$ -dimensional
$\alpha$	Letra grega minúscula alfa
$\gamma$	Letra grega minúscula gama
$\Gamma$	Letra grega maiúscula gama
$\delta$	Letra grega minúscula delta
$\varepsilon$	Letra grega minúscula épsilon
$\zeta$	Letra grega minúscula zeta
$\eta$	Letra grega minúscula eta
$\kappa$	Letra grega minúscula capa
$\theta$	Letra grega minúscula theta
$\lambda$	Letra grega minúscula lambda
$\Lambda$	Letra grega maiúscula lambda
$\mu$	Letra grega minúscula mi
$\nu$	Letra grega minúscula nu
$\Sigma$	Letra grega maiúscula sigma
$\tau$	Letra grega minúscula tau
$\varphi$	Letra grega minúscula phi
$\psi$	Letra grega minúscula psi
$\Omega$	Letra grega maiúscula omega
$\in$	Pertence
$\forall$	Para todo
$fm$	Fermi



## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	25
2	REVISÃO CONCEITUAL . . . . .	33
2.1	Autodualidade . . . . .	33
2.2	O modelo de Skyrme . . . . .	34
2.3	O modelo de Skyrme BPS . . . . .	42
3	SKYRMIONS AUTO DUAIS EM MODELO DE SKYRME MODIFICADO . . . . .	47
3.1	As equações de movimento do modelo de Skyrme BPS . . . . .	47
3.1.1	O setor estático . . . . .	48
3.2	O setor auto dual . . . . .	52
3.3	O ansatz holomórfico . . . . .	54
3.4	O ansatz toroidal . . . . .	61
4	O MODELO DE SKYRME FALSO VÁCUO E SUA APLICAÇÃO PARA A FÍSICA NUCLEAR . . . . .	67
4.1	O modelo de Skyrme Falso Vácuo . . . . .	68
4.2	Análise da equação (4.21) . . . . .	76
4.3	Análise dos resultados numéricos para a escolha do $^{56}\text{Fe}$ como núcleo de referência . . . . .	79
4.4	O comportamento geral do raio RMS da teoria (4.4) . . . . .	85
4.5	A escolha do núcleo de referência . . . . .	88
5	MODELO DE SKYRME BPS ESTENDIDO COM CAMPOS $\hbar$ PROPAGANTES E MASSIVOS . . . . .	95
5.1	O modelo de Skyrme BPS estendido . . . . .	95
5.2	Um ansatz inspirado na autodualidade . . . . .	97
5.3	Soluções numéricas do modelo de Skyrme estendido sem potencial $V(\varphi_a)$ . . . . .	103
6	CONCLUSÃO . . . . .	109
	REFERÊNCIAS . . . . .	115
	APÊNDICE A – RESULTADOS AUXILIARES DO CAPÍTULO 3 . . . . .	121

<b>A.1</b>	<b>Invariância conforme das equações de Euler-Lagrange (3.1) e (3.2) e das equações de autodualidade (3.31) . . . . .</b>	<b>121</b>
<b>A.2</b>	<b>Prova das relações (3.14), (3.15) e (3.16) . . . . .</b>	<b>122</b>
A.2.1	A análise usando as equações de autodualidade . . . . .	123
	<b>APÊNDICE B – RESULTADOS AUXILIARES DO CAPÍTULO 4 .</b>	<b>127</b>
<b>B.1</b>	<b>O comportamento da energia de ligação por núcleon do modelo de Skyrme Falso Vácuo para potenciais efetivos admissíveis . . . . .</b>	<b>127</b>
<b>B.2</b>	<b>A lista de núcleos definida na seção 4.3 e alguns resultados importantes obtidos em tal seção . . . . .</b>	<b>129</b>
	<b>APÊNDICE C – RESULTADOS AUXILIARES DO CAPÍTULO 5 .</b>	<b>137</b>
<b>C.1</b>	<b>Os mapas racionais para os quais o funcional <math>\Lambda(w, \bar{w})</math> é constante .</b>	<b>137</b>
<b>C.2</b>	<b>As equações estáticas de Euler-Lagrange (5.30) e (5.22) para respectivamente os campos <math>\varphi_a</math>'s e os campos <math>M</math>. . . . .</b>	<b>138</b>
<b>C.3</b>	<b>O método do gradiente descendente aplicado para minimizar a energia estática (5.44) e a espessura dos campos <math>f</math> e <math>\varphi_a</math>'s . . . . .</b>	<b>140</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A cromodinâmica quântica (QCD) é uma teoria de Yang Mills não abeliana com simetria  $SU(3)$  que desempenha um papel fundamental na descrição da interação entre quarks e glúons.<sup>13-15</sup> Os quarks são as partículas que formam os hádrons, como os núcleons (prótons e nêutros) de spin  $1/2$  e tripleto de píons ( $\pi^0$ ,  $\pi^+$ ,  $\pi^-$ ) de spin  $0$ , os quais possuem as respectivas cargas elétricas  $(0, +1, -1)$  e massas de  $134,977 MeV/c^2$  para  $\pi^0$  e  $139,570 MeV/c^2$  para ambos  $\pi^+$  e  $\pi^-$ .<sup>16</sup> O tripleto de píons são as partículas virtuais mesônicas que intermediam a força residual forte, sendo responsáveis por contrabalancear a repulsão eletromagnética dentro do núcleo e o manter coeso. Uma característica bem conhecida da QCD é que a constante de acoplamento forte decresce com a energia, fazendo com que as partículas sejam fracamente acopladas no regime de altas energias, o que é conhecido como liberdade assintótica.<sup>17-19</sup> Por outro lado, no regime de baixas energias o acoplamento é forte levando ao confinamento de quarks e glúons.<sup>20-22</sup> O tratamento perturbativo da QCD pode levar a excelentes resultados à altas energias, da ordem de  $10 GeV$  ou superior, devido a liberdade assintótica. Contudo, este se torna problemático conforme a constante de acoplamento forte cresce se tornando praticamente infrutífero para baixas energias de cerca de  $250 MeV$  ou inferior.<sup>23</sup>

No regime de baixas energias há algumas abordagens notáveis para se tratar a QCD, sendo talvez a  $QCD$  na rede, a qual necessita de poderosos métodos numéricos e computação de alta performance, uma das técnicas não perturbativas mais fundamentais.<sup>20,24</sup> Apesar do número de cores do modelo padrão ser  $N = 3$ , um tratamento que pode levar a resultados interessantes, ao menos qualitativamente, e que pode ser construído para a QCD com grupo de simetria  $SU(N)$ , é a expansão para valores de  $N$  grandes (ou expansão  $1/N$ ). Este é baseado na expansão em potências do parâmetro  $1/N$ , considerado pequeno.<sup>25-27</sup> Contudo, a abordagem mais importante para este trabalho é a construção de teorias efetivas, as quais podem tentar capturar fenomenologicamente algumas características da física nuclear ou em certos casos podem ser construídas a partir de certos limites da QCD.

Alguns importantes exemplos de teorias efetivas à baixas energias são o modelo "high-low momentum decoupling",<sup>28</sup> os modelos tipo "ab-initio" como o modelo "no core shell",<sup>29</sup> truncamentos destes<sup>30</sup> e o modelo de Skyrme-Faddeev<sup>31</sup> para a teoria de Yang-Mills  $SU(2)$  pura, cujas soluções de tipo sólitons podem vir a descrever os glueballs. Por outro lado, já foi demonstrado que para o limite de grandes valores de  $N$  a QCD pode ser equivalente a uma teoria de mésons.<sup>6,22,25,32</sup> Tal resultado talvez possa fundamentar as tentativas de se construir modelos efetivos para os mésons para descrever a QCD no regime de acoplamento forte, como os modelos baseados na teoria de perturbação quiral proposta por S. Weinberg.<sup>33-35</sup> Outro importante exemplo é o modelo de Skyrme,<sup>2-6</sup> uma

teoria efetiva para tripleto de pions em  $3 + 1$  dimensões do espaço-tempo de Minkowski definida em termos do assim chamado campo de Skyrme  $U$ , o qual pertence ao grupo  $SU(2)$ , através da ação

$$S_{\text{Skyrme}} = \int d^4x \left[ \frac{m_0^2}{2} R_\mu^a R^{a,\mu} - \frac{1}{4e_0^2} H_{\mu\nu}^a H^{a,\mu\nu} \right], \quad (1.1)$$

onde a constante de acoplamento  $m_0$  tem dimensão de massa e  $e_0$  é adimensional em unidades naturais. Em adição,  $R_\mu^a = i \widehat{\text{Tr}} (\partial_\mu U U^\dagger T_a)$  e  $H_{\mu\nu}^a = \varepsilon_{abc} R_\mu^b R_\nu^c$ , com os geradores da álgebra de Lie  $T_a$ , com  $a = 1, 2, 3$ , satisfazendo  $[T_a, T_b] = i \varepsilon_{abc} T_c$  e o traço normalizado sendo definido através de  $\widehat{\text{Tr}} (T_a T_b) = \delta_{ab}$ .

O modelo (1.1) possui simetria quirial  $(SU(2) \times SU(2)) / \mathbb{Z}_2 \cong SO(4)$ , sobre a transformação global  $U \rightarrow \mathcal{O}_1 U \mathcal{O}_2$ , para todo elemento  $\mathcal{O}_1$  e  $\mathcal{O}_2$  pertencente ao grupo  $SU(2) \cong S^3$ . Para que a sua energia associada a ação (1.1) seja finita o campo de Skyrme deve ir ao mesmo valor constante em todo o infinito espacial, permitindo a identificação do infinito espacial com um ponto  $\{\infty\}$  que é mapeado em um único ponto do espaço alvo de  $U$ . Logo, pode-se compactificar o espaço tridimensional  $\mathbb{R}^3$  do domínio do campo de Skyrme em uma 3-esfera ( $S^3 \cong \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ ). Segue-se que em cada instante de tempo o campo de Skyrme atua como um mapa entre 3-esferas, ao qual tem associado uma quantidade invariante homotópica, i.e. invariante por transformações suaves nos campos que não alterem as condições de borda, chamada de carga de Skyrme.<sup>4</sup> Esta quantidade corresponde ao “winding number” do mapeamento  $U$ , i.e. o número (inteiro) de vezes que o mapeamento  $U$  cobre seu espaço alvo  $S^3$  quando se varre uma vez seu domínio  $S^3$ , e pode ser escrita na representação integral como<sup>8</sup>

$$Q = \frac{i}{48 \pi^2} \int d^3x \varepsilon_{ijk} \widehat{\text{Tr}} (R_i R_j R_k). \quad (1.2)$$

Portanto, as soluções de menor energia estática de (1.1) para cada valor de  $Q$ , chamadas de  $Q$ -Skyrmions, não podem evoluir com energia finita para configurações de campo que não preservem o valor de  $Q$ . A carga de Skyrme é a propriedade mais fundamental dos Skyrmons e esta é interpretada como sendo o número de núcleons. Em adição, a densidade de carga topológica é interpretada como a densidade bariônica.

O modelo de Skyrme padrão não faz distinção entre prótons e nêutrons, o que encontra justificativa no fato das massas de tais partículas diferirem apenas em cerca de 0,1%. Consequentemente, sua energia de ligação é dada por  $(|Q| E(|Q|=1) - E(Q))$ , onde  $E(|Q|=1)$  e  $E(Q)$  correspondem respectivamente as energias estáticas associadas à ação (1.1) do 1-Skyrmion e  $Q$ -Skyrmion. Em adição, note que a energia de um único núcleon  $E(Q=1)$  deveria corresponder com o valor experimental da energia do núcleo do  $^1\text{H}$  (massa do próton em unidades naturais), e  $|Q| E(Q=1)$  deveria corresponder com o somatório das massas individuais do núcleons. Por outro lado, os pions têm massas de cerca de um sétimo da massa do próton e pode ser relevante se adicionar um termo de massa

para tais partículas à ação do modelo, o que pode ser realizado pela introdução do termo de massa usual dos píons cuja densidade de Lagrangiana é proporcional à  $\text{Tr}(U - \mathbb{1})$ .<sup>4</sup>

Algumas propriedades experimentais bem conhecidas dos núcleos pesados são: a incompressibilidade aproximada da matéria; a simetria radial da densidade de matéria ( $\rho^M$ ), a qual permanece aproximadamente constante desde o centro de massa do núcleo até uma certa distância a partir da qual o decaimento é exponencial; o crescimento da raiz do valor quadrático médio do raio (raio RMS) com aproximadamente um terço do número de núcleons.<sup>36</sup> Uma discrepância entre o modelo de Skyrme padrão e os dados experimentais é justamente o fato de que somente o 1-Skyrmion tem simetria radial, enquanto as isosuperfícies de carga bariônica dos  $Q$ -Skyrmions com  $|Q| \geq 2$  têm buracos onde a densidade bariônica se anula. No entanto, talvez a divergência mais crítica entre o modelo Skyrme padrão e os dados experimentais seja a superestimação, em cerca de uma ordem de magnitude, da energia de ligação para um amplo espectro de núcleos, onde os valores teóricos e experimentais correspondem respectivamente à cerca de 10% e 1% da massa nuclear.

Os Skyrmions são sólitons topológicos, os quais por sua vez são soluções de equações diferenciais não lineares que possuem energia finita e se comportam como partículas, com o número de ‘partículas’ sendo dado por alguma quantidade topológica, tal como a carga de Skyrme (1.2).<sup>4</sup> Tais soluções são estáveis já que deformações de suas condições de borda, onde os campos devem tomar seus valores de vácuo para que a energia seja finita, custam uma quantidade infinita de energia.<sup>7</sup> Uma vez que o número de ‘partículas’ deve ser fixo em virtude da conservação da carga topológica, decorre que os sólitons topológicos não podem simplesmente decair em partículas elementares sem estrutura topológica.

Um relação conveniente para se procurar por soluções do tipo sóliton topológico é a *cota de Bogomolny* (cota BPS), a qual pode estabelecer um valor mínimo para a energia de soluções do tipo sóliton em termos de alguma quantidade homotópica, a qual classifica tais soluções.<sup>7</sup> Para muitas teorias as configurações estáticas de campo que saturam a cota BPS são as soluções das equações diferenciais de primeira ordem de Bogomol’nyi–Prasad–Sommerfield (equações BPS), também conhecidas como equações de autodualidade, as quais implicam nas equações de segunda ordem de Euler-Lagrange. A necessidade de uma integração à menos é consequência da invariância homotópica da quantidade topológica que caracteriza o sóliton topológico, e não de cargas conservadas dinamicamente, como as construídas a partir de simetrias contínuas internas do sistema via teorema de Noether. A saturação da cota BPS pelas soluções das equações de autodualidade, chamadas de soluções auto duais, facilita em muito a tarefa de se encontrar soluções de mínimo global de energia estática dentro de um setor topológico, i.e. para condições de borda fixas, sejam elas exatas ou numéricas.

Para o modelo de Skyrme tradicional (1.1) a *cota de Faddeeb-Bogomolny* implica

que as soluções topológicas de carga de Skyrme  $Q$  e energia estática  $E$  devem satisfazer  $E \geq 48 \pi^2 \frac{m_0}{e_0} |Q|$ .<sup>4</sup> Contudo, os Skyrmons não saturam a cota inferior desta desigualdade para nenhum valor de  $Q$  (não nulo), i.e. a cota BPS não é atingível para nenhum valor de  $Q$ .<sup>5,37</sup> Neste caso, diz-se que a teoria não possui setor BPS, o qual por sua vez é formado pelo conjunto de todas as configurações de campo estáticas que saturam a cota BPS com  $Q \neq 0$ .<sup>5,7,37</sup> Caso o modelo de Skyrme possuísse soluções que saturassem a cota BPS para todo valor de  $Q$ , então sua energia estática seria diretamente proporcional à  $|Q|$  e portanto sua energia de ligação seria nula para qualquer núcleo.

Uma possibilidade interessante para derrubar drasticamente os valores preditos da energia de ligação, em relação ao modelo de Skyrme tradicional, seria usar o fato de que seus valores experimentais são cerca de duas ordens de magnitude inferiores a massa do núcleo como um insight para se propor uma modificação do modelo de Skyrme. Como se almeja obter soluções estáticas, considere que tal modelo seja definido em termos do funcional energia estática  $E$ , o qual seja a soma de dois termos  $E_1$  e  $E_2$  que tenham escalas de energia distintas. A primeira parte  $E_1$  seria o termo dominante e corresponderia a uma modificação da versão estática modelo de Skyrme tal que sua cota BPS seja atingível para todo valor de  $Q$ . A segunda parte  $E_2$  seria um termo perturbativo escolhido de tal modo que a energia estática total  $E(Q)$  dos sólitons topológicos de menor energia desta teoria, para cada valor de  $Q$ , difira pouco da massa total dos núcleons ( $E(1) |Q|$ ). Neste caso, o termo  $E_2$  quebra perturbativamente a proporcionalidade entre a energia estática e a carga bariônica e então a energia de ligação pode ser pequena em relação à massa do núcleo.

Há um vasto número de modificações do modelo de Skyrme padrão as quais tornam a cota BPS da teoria atingível, ao menos para  $|Q|=1$ . Por conveniência, irá se dividi-las nas quatro seguintes classes: (i) modelos com número finito de campos cuja cota BPS seja atingível para cada valor de  $Q$ ; (ii) modelos cuja cota BPS seja atingível somente para  $|Q|=1$ ; (iii) extensões que tornam a cota BPS atingível, hipoteticamente, através da adição de um número infinito de campos; (iv) modelos que sejam extensões das teorias da classe (i) através da adição de uma segunda ação ou de termos a sua energia estática que não alterem as equações de Euler-Lagrange.

Um exemplo de modelo da classe (i) acima pode ser construído pela substituição radical de toda densidade de Lagrangiana do modelo de Skyrme padrão por um termo de sexta ordem nas derivadas do campo  $U$ , o qual é diretamente proporcional ao quadrado da densidade de carga topológica, e um termo potencial.<sup>38</sup> Tal teoria é chamada de modelo de Skyrme BPS, mas será denotada como modelo de Skyrme BPS\* para evitar confusão com a teoria proposta por Ferreira,<sup>1,8</sup> a qual é fundamental para este trabalho e também é um exemplo da classe (i). O modelo de Skyrme BPS<sup>1,8</sup> proposto por Ferreira, ou modelo de Skyrme auto dual, é construído utilizando-se ideias de autodualidade<sup>7</sup> e é definido pela

ação

$$S_{BPS} = \int d^4x \left[ \frac{m_0^2}{2} h_{ab} R_\mu^a R^{b,\mu} - \frac{1}{4 e_0^2} h_{ab}^{-1} H_{\mu\nu}^a H^{b,\mu\nu} \right], \quad (1.3)$$

onde se introduziu à teoria (1.1) seis campos escalares adimensionais correspondentes entradas da matriz  $3 \times 3$  real, simétrica, invertível e positiva  $h$ . A adição dos campos  $h$  torna a teoria (1.3) invariante conforme em três dimensões espaciais dentro do setor BPS, além de introduzir uma cota BPS atingível para cada valor de  $Q$ , tal como será demonstrado explicitamente nesta tese através da construções de soluções auto duais exatas.<sup>8</sup> Os campos  $h$  não são propagantes, pois não há termo cinético para os campos  $h$  em (1.3), e para o caso particular  $h = \alpha \mathbb{1}$ , com  $\alpha > 0$  constante, tal modelo se torna equivalente ao modelo de Skyrme padrão (1.1). O papel físico dos campos  $h$ , os quais introduzem em particular a invariância de escala ao modelo, se assemelha à dos campos dos dilatons que são adicionados ao modelo de Skyrme padrão para o fazer invariante de escala de modo a este se tornar compatível com a anomalia de traço da QCD.<sup>39–41</sup>

Alguns exemplos da classe (ii) definida acima podem ser construídos através da introdução de termo de massa para os píons de quarta ordem nos campos  $U^{42}$  ou quadrático<sup>43–46</sup> ao modelo de Skyrme padrão (1.1). Outro exemplo é o modelo de Skyrme Dielétrico,<sup>23,47</sup> o qual é um caso particular do modelo de Skyrme BPS (1.3), com a matriz  $h = f \mathbb{1}$ , com  $f$  sendo um único campo escalar real. Um representante da classe (iii) é o modelo de Sutcliffe que reduz a teoria de Yang-Mills (4 + 1) dimensional à uma teoria de Skyrme (3 + 1) dimensional acoplada com uma torre infinita de vetores mesônicos.<sup>48</sup> Truncando esta torre infinita, se reduz o modelo à uma teoria de píons acoplada com mésons com energia de ligação significativamente inferior a do modelo de Skyrme padrão.<sup>49</sup>

Um representante da classe (iv) é uma extensão do modelo de Skyrme BPS\* mencionado acima.<sup>38</sup> Esta teoria estendida serve como uma realização de teoria de campo para o modelo da gota líquida, a partir da qual se obtém resultados razoavelmente acurados para a energia de ligação para núcleos pesados.<sup>50</sup> O aspecto da incompressibilidade da matéria é reproduzido qualitativamente, no sentido em que deformações das soluções de campo de menor energia do modelo, para cada valor de  $Q$ , que preservem localmente o volume são energeticamente favoráveis às que não o preservem.<sup>51</sup> Outro exemplo da classe (iv), com aspectos similares à extensão do modelo de Skyrme BPS\*, é o modelo de Skyrme Falso Vácuo, o qual estende a versão estática modelo de Skyrme BPS (1.3), através da adição um funcional dos campos de Skyrme e suas derivadas, o qual será construído abaixo. Tal modelo reproduz acuradamente algumas propriedades do núcleo como o raio RMS e a energia de ligação para um amplo número de núcleos, em especial aqueles com o número bariônico  $A \geq 12$ . Em adição, também reproduz qualitativamente o comportamento esperado da energia de ligação para núcleos leves ( $A < 12$ ) onde esta cresce rapidamente com  $A$  e é nula para  $A = 1$ . Um último exemplo desta categoria é a extensão do modelo de Skyrme BPS (1.1) através da adição de um termo de massa para os

píons e termos cinéticos e potenciais para os campos  $h$ , tal como será construído abaixo.

Esta tese tem a finalidade de abordar três tópicos desenvolvidos, em colaboração, por seu autor. O primeiro tópico é a análise do setor estático modelo de Skyrme BPS (1.3).<sup>8</sup> É possível se demonstrar que a versão estática das equações de Euler-Lagrange associadas aos seis campos  $h$  implicam nas nove equações de autodualidade, as quais por sua vez implicam, devido a autodualidade, nas nove equações de Euler-Lagrange associadas aos campos  $h$  e  $U$ . Seguem-se então dois resultados fundamentais, sendo o primeiro o fato que o setor estático e o setor auto dual desta teoria são equivalentes, e portanto todas as soluções estáticas são também auto duais. O segundo é que há somente seis equações independentes e pode-se usá-las para determinar algebricamente toda matriz  $h$  em termos dos três campos que compõem  $U$  e suas primeiras derivadas, os quais permanecem totalmente livres, através da relação

$$h = m_0^2 e_0^2 (\det h) \tau^{-1} = \frac{\sqrt{\det \tau}}{|m_0 e_0|} \tau^{-1}, \quad \text{com} \quad \tau_{ab} \equiv R_i^a R_i^b. \quad (1.4)$$

Portanto, os campos  $h$  atuam como espectadores dos campos  $U$ , e então qualquer mapeamento  $U$  entre 3-esferas junto aos campos  $h$  determinados através de (1.4) correspondem a uma solução auto dual do modelo (1.3). Resulta que o modelo possui um número infinito de soluções exatas para cada valor de  $Q$ , chamadas de Skyrmons BPS, as quais não têm tamanho fixo devido à invariância de escala do modelo.

A segunda parte desta tese aborda a construção do modelo de Skyrme Falso Vácuo, mencionando acima, definido como a soma de dois funcionais  $E = E_1 + E_2$ , com a primeira parte  $E_1$  correspondendo com a energia estática associada ao modelo de Skyrme BPS (1.3) dada por

$$E_1 = \int d^3x \left[ \frac{m_0^2}{2} h_{ab} R_i^a R_i^b + \frac{1}{4 e_0^2} h_{ab}^{-1} H_{ij}^a H_{ij}^b \right]. \quad (1.5)$$

A segunda parte  $E_2$  corresponde à

$$E_2 = \int d^3x \left[ \frac{\mu_0^2}{2} (\partial_i \psi)^2 + V(\psi) \right] + Q_G, \quad \text{com} \quad Q_G = \int d^3x G(U) \psi^s, \quad (1.6)$$

onde a constante de acoplamento  $\mu_0$  tem dimensão de massa em unidades naturais. Em adição,  $Q_G$  é um termo topológico e o campo adimensional  $\psi$  é uma fração  $1/s$  de potência da densidade da carga topológica  $\mathcal{Q}$ , associada ao funcional (1.2), i.e.

$$\psi^s \equiv -\frac{4\pi^2}{\lambda^3} \mathcal{Q} = -\frac{i}{12\lambda^3} \varepsilon_{ijk} \widehat{\text{Tr}}(R_i R_j R_k), \quad (1.7)$$

com  $\lambda \equiv \pm m_0 e_0$ ,  $\text{sign}(\lambda Q) = -1$  e  $s > 2$  sendo um parâmetro positivo. O termo potencial é escolhido como  $V(\psi) = \beta_2^2 \psi^2 + \beta_\kappa^2 \psi^\kappa$ , com  $\kappa > s$  e as constantes de acoplamento  $\beta_2$  e  $\beta_\kappa$  têm dimensão de massa quadrada em unidades naturais. O termo topológico  $Q_G$  não contribui para as equações de Euler-Lagrange e a função  $G(U)$  é escolhida de tal forma que  $Q_G \propto Q^2$ . Tal termo reproduz aproximadamente à interação Coulombiana a qual tem

forte impacto para que a energia de ligação por núcleon decresça para núcleos pesados, como pode ser visto claramente no modelo da gota líquida.<sup>36</sup>

O modelo de Skyrme Falso Vácuo preserva as equações estáticas de Euler-Lagrange associadas aos seis campos  $h$  do modelo de Skyrme BPS (1.3). Portanto, estes continuam atuando como espectadores dos campos  $U$ , i.e.  $h$  continua sendo determinada através da expressão exata (1.4). Segue-se que a densidade de energia estática  $\mathcal{E}_1$  do termo  $E_1$ , dado por (1.5), é dada por  $\mathcal{E}_1 = 48 \pi^2 \frac{m_0}{e_0} |\mathcal{Q}|$ . Então, toda densidade de energia do modelo de Skyrme Falso Vácuo é determinada em termos da densidade bariônica, a menos do termo topológico, a qual poderia ser interpretada como uma densidade de um fluido. Devido à (1.4), somente o termo não topológico de  $E_2$  contribuí para as equações de Euler-Lagrange para os campos  $U$ , as quais por sua vez determinam os campos de Skyrme e  $\mathcal{Q}$ , determinando a dinâmica de tal fluido.

Um fato notável é que as três equações estáticas de Euler-Lagrange do modelo de Skyrme Falso Vácuo associadas aos campos  $U$  se reduzem a uma única equação diferencial de segunda ordem para o campo  $\psi$ , a qual é compatível com o problema do falso vácuo de S. Coleman.<sup>9–11</sup> Decorre que as soluções de menor energia, para cada valor de  $Q$ , são justamente as soluções de campo  $\psi$ , ou equivalentemente de densidade bariônica, com simetria radial, assim como se espera de uma aplicação para a física nuclear para núcleos pesados. Uma característica fundamental de tal modelo é que este pode reproduzir robustamente o comportamento esperado do raio RMS e da energia de ligação em relação aos dados experimentais, sem depender muito da forma do potencial  $V(\psi)$ . Segue-se que a forma do potencial, o termo  $G(U)$  e os parâmetros da teoria podem ser usados para se obter um ajuste mais fino do raio RMS e da energia de ligação com os dados experimentais.

A terceira parte desta tese corresponde na extensão do modelo de Skyrme BPS (1.3) através da adição de uma ação  $S_2$ , i.e. no modelo definido pela ação  $S$  dada por

$$S = S_{\text{BPS}} + S_2, \quad S_2 = \int d^4x \left[ \frac{\mu_0^2}{2} \text{Tr} (\partial_\mu h)^2 - \frac{\beta_1^2}{2} \text{Tr} h^2 - \frac{\beta_2^2}{2} V(h) - \frac{\beta_3^2}{2} \text{Tr} (\mathbb{1} - U) \right], \quad (1.8)$$

onde a ação  $S_{\text{BPS}}$  é dada em (1.3), a constante de acoplamento  $\mu_0$  tem dimensão de massa e  $\beta_a$ , com  $a = 1, 2, 3$ , tem dimensão de massa quadrada em unidades naturais. Em adição, o potencial  $V$  é um funcional dos três autovalores  $\varphi_a$ 's da matriz  $h$ , com  $a = 1, 2, 3$ , e é simétrico por troca entre quaisquer dois autovalores. Apesar da adição da ação  $S_2$  poder tirar as configurações de campo  $h$  da configuração BPS dada por (1.4), além de determinar os campos  $U$ , pode-se usar as soluções auto duais (1.4) como um insight para se construir um ansatz para tal teoria.

A matriz simétrica e real  $h$  sempre pode ser diagonalizada por uma matriz  $3 \times 3$  ortogonal  $M$ , i.e. pode-se escrever  $h = M h_D M^T$ , onde  $h_D = \text{diag.} (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$  é a matriz diagonal composta pelos autovalores de  $h$ . Portanto, os seis campos escalares de  $h$  podem ser escritos em termos dos três campos independentes que compõe a matriz  $M$  e os três

autovalores  $\varphi_a$ 's que compõe  $h_D$ . Baseando-se nas equações de autodualidade pode-se construir um ansatz para a teoria (1.8) composto de três partes. A primeira parte é o ansatz para os campos  $SU(2)$  dado por

$$U = W^\dagger e^{if(r)T_3} W, \quad W = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & -e^{i(\varphi+\alpha)} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ e^{-i(\varphi+\alpha)} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}, \quad (1.9)$$

onde  $(r, \theta, \varphi)$ , são as coordenadas esféricas usuais,  $\alpha$  é uma constante real e  $f(r)$  é uma função perfil cujas condições de borda fixam a carga de Skyrme (1.2). A segunda parte corresponde ao ansatz para os campos  $M$  que preserva três das seis equações auto duais (1.4), i.e.  $M = N$ , onde  $N$  é a matriz que diagonaliza a matriz real e simétrica  $\tau$  definida em (1.4). Portanto,  $M$  fica inteiramente determinada em termos dos campos  $U$  e suas primeiras derivadas. Usando o ansatz (1.9) nas configurações auto duais (1.4) segue-se que todos os autovalores de  $h$  se tornam radiais e  $\varphi_1 = \varphi_2$ , além de todos os campos  $\varphi_a$ 's ficarem determinados em termos da função perfil  $f(r)$ . Tal estrutura sugere a terceira parte do ansatz, agora para os autovalores de  $h$ , dada por  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_1(r)$  e  $\varphi_3 = \varphi_3(r)$ . O ansatz composto destas três partes reduz as nove equações de Euler-Lagrange associadas aos campos  $h$  e  $U$  à três equações radiais acopladas para os campos  $\varphi_1(r)$ ,  $\varphi_3(r)$  e  $f(r)$ . Para a carga de Skyrme  $Q = 1$  e  $V = 0$  é possível se obter soluções destas equações, através do método do gradiente descendente, que sejam estáveis sob o argumento de escala de Derrick e extremizem a energia estática associada à teoria (1.8) dentro do ansatz mencionado acima.

Este trabalho é organizado do seguinte modo. O capítulo 2 aborda a revisão de temas relevantes para o trabalho, sendo eles: a autodualidade; modelo de Skyrme; Modelo de Skyrme BPS. O capítulo 3 aborda a análise do modelo de Skyrme BPS e a construção explícita dos Skyrmons BPS através dos ansatz holomórfico e toroidal para os campos  $U$ , sendo o ansatz toroidal construído a partir da simetria conforme em  $\mathbb{R}^3$  do modelo. O capítulo 4 aborda a construção do modelo de Skyrme Falso Vácuo e sua aplicação para a física nuclear. No capítulo 5 se aborda a construção da extensão do modelo de Skyrme BPS dada por (1.8). Também será construído um ansatz baseado na autodualidade e se resolverá as equações de Euler-Lagrange remanescentes, dentro do ansatz, obtendo-se soluções numéricas com  $Q = 1$  que sejam estáveis sob o argumento de escala de Derrick.

## 2 REVISÃO CONCEITUAL

### 2.1 Autodualidade

Considere uma teoria de campo descrita por  $N$  campos  $\varphi_a$ , com  $a = 1, \dots, N$ , os quais podem vir a ser campos escalares, vetoriais, espinoriais, etc. a qual tenha associada uma carga topológica escrita na representação integral como

$$Q \equiv \int d^d x A_\alpha \tilde{A}_\alpha, \quad (2.1)$$

onde as quantidades  $A_\alpha = A_\alpha(\varphi_a, \partial_\mu \varphi_b)$  e  $\tilde{A}_\alpha = \tilde{A}_\alpha(\varphi_a, \partial_\mu \varphi_b)$  são funções definidas inteiramente em termos dos campos e suas primeiras derivadas espaciais, mas não de derivadas de mais alta ordem. Em adição, a integração em (2.1) se dá sobre uma variedade de dimensão espacial  $d$  e em seu integrando  $A_\alpha \tilde{A}_\alpha$  há uma contração implícita no índice  $\alpha$  cujo significado depende da teoria considerada. A carga topológica  $Q$  é homotopicamente invariante,<sup>7</sup> i.e. a variação de  $Q$  por transformações suaves nos campos é dada por

$$\delta Q = 0 \quad (2.2)$$

sem que se use as equações de movimento. Por outro lado, a variação infinitesimal da carga topológica (2.1) em relação aos campos  $\varphi_a$  leva à

$$\begin{aligned} \delta Q = 0 &= \int d^d x \left( \tilde{A}_\alpha \frac{\delta A_\alpha}{\delta \varphi_a} \delta \varphi_a + \tilde{A}_\alpha \frac{\delta A_\alpha}{\delta \partial_\mu \varphi_a} \delta \partial_\mu \varphi_a + A_\alpha \frac{\delta \tilde{A}_\alpha}{\delta \varphi_a} \delta \varphi_a + A_\alpha \frac{\delta \tilde{A}_\alpha}{\delta \partial_\mu \varphi_a} \delta \partial_\mu \varphi_a \right) \\ &= \int d^d x \left[ \tilde{A}_\alpha \frac{\delta A_\alpha}{\delta \varphi_a} - \partial_\mu \left( \tilde{A}_\alpha \frac{\delta A_\alpha}{\delta \partial_\mu \varphi_a} \right) + A_\alpha \frac{\delta \tilde{A}_\alpha}{\delta \varphi_a} - \partial_\mu \left( A_\alpha \frac{\delta \tilde{A}_\alpha}{\delta \partial_\mu \varphi_a} \right) \right] \delta \varphi_a + \\ &\quad + \int d^d x \partial_\mu \left[ \left( \tilde{A}_\alpha \frac{\delta A_\alpha}{\delta \partial_\mu \varphi_a} + A_\alpha \frac{\delta \tilde{A}_\alpha}{\delta \partial_\mu \varphi_a} \right) \delta \varphi_a \right]. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Impondo que a variação dos campos seja nula nas bordas se segue que o termo de superfície de (2.3), i.e. a última linha da equação, se anula. Portanto, usando (2.2) e (2.3) a invariância homotópica de  $Q$  implica

$$\delta Q = 0 \Rightarrow \partial_j \left( A_\alpha \frac{\delta \tilde{A}_\alpha}{\delta \partial_j \varphi_a} \right) - A_\alpha \frac{\delta \tilde{A}_\alpha}{\delta \varphi_a} + \partial_j \left( \tilde{A}_\alpha \frac{\delta A_\alpha}{\delta \partial_j \varphi_a} \right) - \tilde{A}_\alpha \frac{\delta A_\alpha}{\delta \varphi_a} = 0. \quad (2.4)$$

Se a energia estacionária do modelo considerado for definida por

$$E = \frac{1}{2} \int d^n x (A_\alpha^2 + \tilde{A}_\alpha^2) = \frac{1}{2} \int d^n x (A_\alpha \mp \tilde{A}_\alpha)^2 \pm Q \geq \pm Q \quad (2.5)$$

ou equivalentemente por uma ação estacionária  $S = -E$ , então as equações de Euler-Lagrange que extremizam o funcional (2.5) são dadas por

$$\delta S = 0 \Rightarrow \partial_j \left( A_\alpha \frac{\delta A_\alpha}{\delta \partial_j \varphi_a} \right) - A_\alpha \frac{\delta A_\alpha}{\delta \varphi_a} + \partial_j \left( \tilde{A}_\alpha \frac{\delta \tilde{A}_\alpha}{\delta \partial_j \varphi_a} \right) - \tilde{A}_\alpha \frac{\delta \tilde{A}_\alpha}{\delta \varphi_a} = 0. \quad (2.6)$$

Segue-se que as equações de auto-dualidade definidas por

$$A_\alpha = \pm \tilde{A}_\alpha \quad (2.7)$$

juntamente com a identidade (2.4) provinda da invariância da carga topológica, implicam nas equações de Euler-Lagrange (2.6) e saturam a quota dada em (2.5). Isto é, as soluções das equações de autodualidade (2.7) são as soluções das equações de movimento (2.6) que correspondem ao mínimo global de energia  $E = |Q|$ . Diz-se que um modelo tem um setor auto dual se ele tem associado uma carga topológica (2.1) e sua energia estática pode ser escrita como (2.5) e, por consequência, se pode procurar por soluções estáticas do modelo através das equações de auto dualidade (2.7). Note que como a carga topológica é homotopicamente invariante por construção, então a equação (2.4) é uma identidade matemática. Portanto, já que as equações físicas são comumente derivadas do princípio da ação estacionária e são justamente as equações de autodualidade (2.7) que são responsáveis por extremizar a energia estática (2.5), pode-se dizer que  $A_\alpha = \tilde{A}_\alpha$  são equações físicas.

Um exemplo de teoria auto-dual é o modelo de Yang-Mills Euclideano em quatro dimensões espaciais definido pela ação

$$S_{YM} = \frac{1}{4} \int d^4x \text{Tr} (F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}) = \frac{1}{8} \int d^4x \left[ \text{Tr} (F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}) + \text{Tr} (\tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}) \right], \quad (2.8)$$

onde  $\tilde{F}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}$  é o dual do campo tensorial  $F_{\mu\nu}$ . Neste caso, a carga topológica é dada pelo número de Pontryagin

$$Q_{YM} = \int d^4x \text{Tr} (F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}). \quad (2.9)$$

Comparando (2.8) e (2.9) respectivamente com (2.5) e (2.1) pode-se identificar  $A_\alpha = F_{\mu\nu}$  e  $\tilde{A}_\alpha = \tilde{F}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}$ . Portanto, as equações de autodualidade  $A_\alpha = \tilde{A}_\alpha$  são satisfeitas por construção.

## 2.2 O modelo de Skyrme

O modelo de Skyrme é uma teoria 3+1 dimensional não linear para a teoria de pions, definido em termos do campo de Skyrme  $U(t, \mathbf{x}) \in SU(2)$  pela Lagrangiana

$$L = \int d^3x \left[ \frac{F_\pi^2}{16} \text{Tr} (R_\mu R^\mu) + \frac{1}{32 e^2} \text{Tr} ([R_\mu, R_\nu][R^\mu, R^\nu]) \right], \quad (2.10)$$

onde  $F_\pi$  e  $e$  são constantes de acoplamento e  $R_\mu \equiv i \partial_\mu U U^\dagger$ . Por definição,  $R_\mu$  pertence à álgebra  $su(2)$  e em sua forma explícita a matrix hermitiana

$$U(t, \mathbf{x}) = \sigma + i\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (2.11)$$

depende do tripleto formado pelos três pions  $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$  e de um campo  $\sigma$  adicional determinado pelos campos dos pions através da restrição  $\sigma^2 + \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\pi} = 1$ .

O modelo (2.10) tem simetria quiral  $(SU(2) \times SU(2)) / \mathbb{Z}_2 \cong SO(4)$ , sobre a transformação global  $U \rightarrow \mathcal{O}_1 U \mathcal{O}_2$ , para todo elemento  $\mathcal{O}_1$  e  $\mathcal{O}_2$  pertencente ao grupo  $SU(2)$ . Contudo, se impusermos a condição de borda  $U(\infty) = \mathbb{1}_2$  esta simetria é quebrada espontaneamente para uma simetria de isospin  $SO(3) \cong SU(2)$  dada por

$$U \rightarrow O U O^\dagger, \quad \forall O \in SU(2). \quad (2.12)$$

Esta condição de borda também determina o sinal e a magnitude de  $\sigma$  e impõe as condições de borda  $\sigma(\infty) = 1$  e  $\boldsymbol{\pi}(\infty) = 0$ .

Substituindo a forma explícita de  $U(t, \mathbf{x})$  dada por (2.11), onde os campos  $SU(2)$  são escritos em termos dos campos dos píons, na Lagrangiana (2.10) obtém-se que os píons do modelo de Skyrme padrão não tem massa, ou seja, são bósons de Goldstone que quebram espontaneamente a simetria quiral do modelo. Em ordem de obter uma teoria de píons massivos se poderia introduzir um termo potencial

$$L_{\text{massa}} = \frac{m_\pi^2}{2} \int d^3x \text{Tr} (U - \mathbb{1}_2) \quad (2.13)$$

no modelo de Skyrme padrão (2.10). Todavia, os valores experimentais das massa de tais partículas são muito pequenos em comparação com a massa dos núcleons ( $m_{\pi^0} \sim 0,14\% m_{\text{próton}}$ ,  $m_{\pi^\pm} \sim 0,15\% m_{\text{próton}}$ ). Em adição, o termo de massa não é necessário para se obter soluções topológicas estáveis e portanto se desconsiderará (2.13) no tratamento a seguir.

A partir do reescalonamento das coordenadas espaciais  $x \rightarrow \frac{eF_\pi}{2} x$ , pode-se absorver as constantes de acoplamento de (2.10) nas unidades de comprimento e energia dadas respectivamente por  $2/(eF_\pi)$  e  $12\pi^2 F_\pi/(4e)$ . Nestas unidades, onde o fator  $12\pi^2$  foi escolhido por conveniência, a Lagrangiana (2.10) torna-se

$$L = \frac{1}{12\pi^2} \int d^3x \left[ \frac{1}{2} \text{Tr} (R_\mu R^\mu) + \frac{1}{16} \text{Tr} ([R_\mu, R_\nu][R^\mu, R^\nu]) \right] \quad (2.14)$$

e as equações de Euler-Lagrange associadas com (2.14) são reduzidas à

$$\partial_\mu \left( R^\mu + \frac{1}{4} [R^\nu, [R_\nu, R^\mu]] \right) = 0. \quad (2.15)$$

A partir de (2.15) se pode construir a quadricorrente  $\tilde{R}^\mu := R^\mu + \frac{1}{4} [R^\nu, [R_\nu, R^\mu]]$  que satisfaz automaticamente a equação da continuidade  $\partial_\mu \tilde{R}^\mu = 0$ .

Já que o campo de Skyrme deve ser constante no infinito espacial para que a energia de 2.14 seja finita, pode-se identificar o infinito espacial como sendo um ponto  $\{\infty\}$ , com  $U(\infty) = \text{const.}$ , e então compactificar o espaço tridimensional  $\mathbb{R}^3$  do domínio do campo de Skyrme em uma 3-esfera ( $S^3 \cong \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ ). Segue-se que os campos de Skyrme a tempo fixo  $U(t_{\text{fixo}}, \mathbf{x}) : S^3 \rightarrow S^3$  se tornam mapas entre 3-esferas e o grupo de homotopia associado a tais mapas é dado por  $\pi_3(S^3) = \mathbb{Z}$ . Portanto, em cada

instante, cada família de configurações de campo  $U(t_{\text{fixo}}, \mathbf{x})$  homotopicamente equivalentes podem ser classificadas por um número inteiro  $Q$  chamado de grau topológico ou “winding number”. Quando tal sistema evoluir no tempo com energia finita seus campos devem ser deformados continuamente. Contudo, como as transformações contínuas nos campos não mudam o grau topológico, então  $Q$  é uma quantidade conservada no tempo devido a invariância homotópica, o que justifica ser também chamada de carga topológica. No modelo de Skyrme a carga topológica  $Q$  representa o número de núcleons\* e pode ser escrita na representação integral como

$$Q = \frac{i}{48 \pi^2 \kappa} \int d^3x \varepsilon_{ijk} \text{Tr} (R_i R_j R_k), \quad (2.16)$$

onde o fator  $\kappa$  foi introduzido na expressão da carga topológica para estendê-la para outras representações do grupo  $SU(2)$ .<sup>8</sup> O valor de  $\kappa$  depende da representação da álgebra, sendo  $\kappa = 1/2$  para a representação espinorial e  $\kappa = 2$  para a representação triplete. Em adição, note que usando  $\partial_i U U^\dagger = -U \partial_i U^\dagger$ , a propriedade cíclica do traço e (2.16), então se o mapa  $U$  tem carga topológica  $Q$ , segue-se que o mapeamento inverso  $U^\dagger$  tem carga topológica  $-Q$ .

A energia estática associada ao modelo (2.14) é dada por  $E \equiv E_2 + E_4 = -L$  onde

$$E_2 \equiv \frac{1}{24 \pi^2} \int d^3x \text{Tr} (R_i R_i), \quad E_4 \equiv -\frac{1}{192 \pi^2} \int d^3x \text{Tr} ([R_i, R_j] [R_i, R_j]). \quad (2.17)$$

Uma importante propriedade das configurações de campo com carga topológica (2.16) é a existência de um limite inferior para sua energia total dado por

$$E \geq |Q| \quad (2.18)$$

o qual é chamado de cota inferior de Faddeev-Bogomolny.<sup>4</sup> Em adição, sobre o reescalamento  $x \rightarrow \lambda x$  a energia estática torna-se  $E(\lambda) = \lambda E_2 + \lambda^{-1} E_4$  e expandindo  $E(\lambda)$  em série de Taylor em torno de  $\lambda = 1$  obtém-se

$$E(\lambda) = E_2 + E_4 + (E_2 - E_4)(\lambda - 1) + E_4(\lambda - 1)^2 + \mathcal{O}((\lambda - 1)^3). \quad (2.19)$$

Como  $E''(1) = E_4 > 0$ , o ponto crítico  $E_2 = E_4$  é um mínimo local e portanto o modelo (2.14) admite soluções estáticas estáveis, desde que satisfaçam a igualdade entre os termos quadrático e quártico nas derivadas espaciais da energia, de acordo com o argumento de Derrick. A partir do mesmo argumento também fica claro que o *modelo sigma*, definido como o termo quadrático nas derivadas espaciais do modelo de Skyrme padrão, não suporta soluções topológicas estáveis.

As soluções das equações de Euler-Lagrange (2.15) que extremizam a Lagrangiana (2.14) são as mesmas que extremizam a energia estática  $E = -L$ . Portanto, se tal extremo

\* Note que esse modelo não faz distinção entre prótons e nêutrons, pois desconsidera o campo eletromagnético e as massas de um próton e de um nêutron diferem em apenas  $(m_{\text{nêutron}} - m_{\text{próton}})/m_{\text{próton}} \sim 0,1\%$ .

corresponder a um mínimo da energia estática, então pode-se buscar as soluções da versão estática de (2.15) achando-se numericamente as configurações de de campo que minimizam a energia estática, chamadas de Skyrmions, para cada valor de  $Q$ . Tais Skyrmions são catalogados na Figura 2 para  $Q = 1, \dots, 8$ . Dois métodos numéricos usuais que podem ser aplicados são o método do gradiente descendente e o ‘simulated annealing’ que iniciam com uma dada configuração de campo de carga  $Q$  e a modificam sucessivamente, mas sem alterar o valor de  $Q$ , até se achar o mínimo da energia estática.<sup>†</sup>

A energia de ligação nuclear é definida por

$$E_{\text{ligação}} = [Zm_{\text{próton}} + (A - Z)m_{\text{neutrôn}} - m_{\text{ligado}}] c^2, \quad (2.20)$$

onde  $Z$  é o número atômico,  $A$  o número de massa e  $m_{\text{ligado}}$  a massa total do núcleo em seu estado ligado, a qual é inferior a soma total da massas dos núcleons. Na Figura 1 apresenta-se valores experimentais da energia de ligação (2.20) por núcleon para um amplo número de núcleons bem como o valor predito pela fórmula semi-empírica de Weizsaecker. Como o modelo de Skyrme padrão não distingue prótons e nêutrons, então pode-se escrever sua energia de ligação por núcleon em função apenas do número núcleons ( $A = Q$ ) como

$$E_B(Q) = E(1) - \frac{E(Q)}{Q}. \quad (2.21)$$

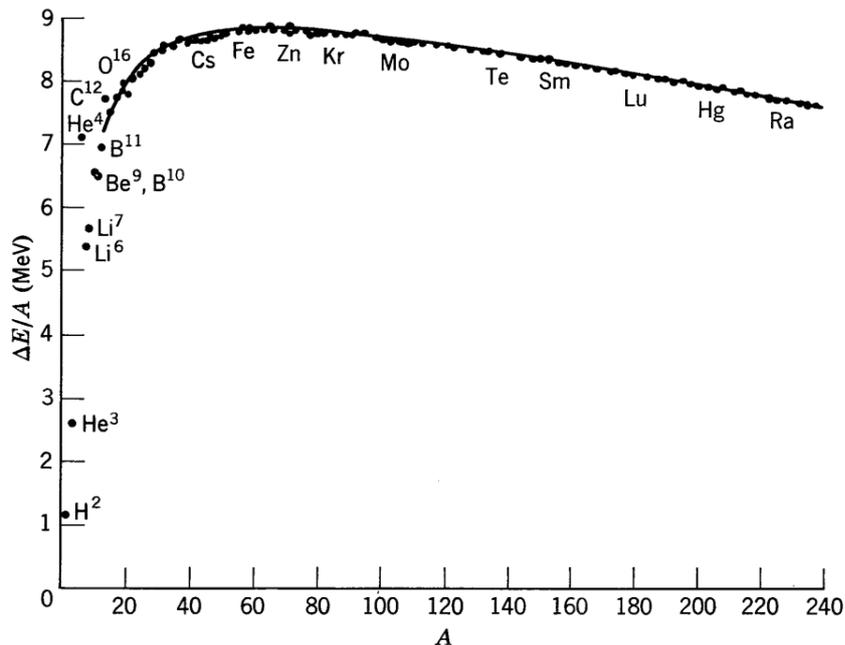


Figura 1 - Energia de ligação por núcleon  $E_B$  pelo número de núcleons  $A$ . Os pontos representam os dados experimentais e a curva é obtida através da fórmula semi-empírica de Weizsaecker.

Fonte: EISBERG.; RESNICK.<sup>36</sup>

<sup>†</sup> Para obter-se Skyrmions de carga não unitária ( $Q \neq 1$ ) tais simulações podem ter um alto custo computacional e vir a demandar computação de alto desempenho.

Um problema na aplicação do modelo de Skyrme padrão para à física nuclear é que a energia de ligação por núcleon prevista é em torno de 10% da energia de um núcleon, sendo portanto aproximadamente uma ordem de grandeza acima do esperado segundo os dados experimentais. Por exemplo, a energia de ligação por núcleon do Skyrmion de  $Q = 8$  dada na Tabela 1 corresponde a 9.25% da energia estática do Skyrmion de carga topológica unitária ( $Q = 1$ ), a qual deveria corresponder com a energia do núcleo  ${}^1\text{H}$  (energia de repouso do próton).

Na Tabela 1 são dados os valores da energia total (2.17), a energia de ligação por núcleon (2.21) e a simetria das isosuperfícies de densidade da carga topológica (2.16), ou isosuperfícies de densidade bariônica, vistas na Figura 2, para cada um dos Skyrmons com  $Q = 1, \dots, 8$ . Em adição, tais simetrias dos Skyrmons de  $Q = 1, \dots, 4$  são respectivamente simetria radial ( $O(3)$ ), axial ( $D_{\infty h}$ ), tetraédrica ( $T_d$ ) e cúbica ( $O_d$ ). Sendo  $D_n$  o grupo diedral, o qual é o grupo de simetrias de um polígono regular de  $n$  lados, a simetria dos Skyrmons de  $Q = 5, \dots, 8$  são respectivamente  $D_{2d}$ ,  $D_{4d}$ , simetria icosaedral ( $Y_h$ ) e  $D_{6d}$ .

Tabela 1 - As simetrias de alguns Skyrmons leves e a relação  $E/Q$  e  $E_B$  em função de  $Q$ .

$Q$	Simetria	$E/Q$	$E_B$
1	$O(3)$	1.232	0
2	$D_{\infty h}$	1.208	0.024
3	$T_d$	1.184	0.048
4	$O_h$	1.137	0.095
5	$D_{2d}$	1.147	0.085
6	$D_{4d}$	1.137	0.095
7	$Y_h$	1.107	0.125
8	$D_{6d}$	1.118	0.114

Fonte: MANTON.; SUTCLIFFE.<sup>4</sup>

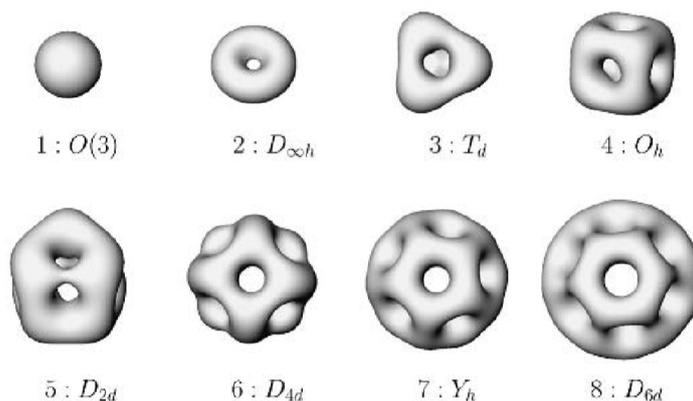


Figura 2 - As isosuperfícies de densidade bariônica dos Skyrmons para  $1 \leq Q \leq 8$  catalogadas com seu correspondente número bariônico ( $Q$ ) e sua simetria espacial.

Fonte: MANTON.; SUTCLIFFE.<sup>4</sup>

A solução numérica da versão estática de (2.15) para  $Q = 1$  pode ser obtida através do ansatz onde os campos de Skyrme  $U$  tomam a forma de “hedgehog”, i.e.

$$U(x) = \exp\{if(r) \hat{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\tau}\}, \quad (2.22)$$

onde  $\boldsymbol{\pi} = \cos f(r) \hat{\mathbf{x}}$ ,  $\boldsymbol{\sigma} = \sin f(r)$  e  $f(r)$  é uma função perfil radial com as condições de borda  $f(0) = \pi$  e  $f(\infty) = 0$ . Usando (2.22) na versão estática de (2.15) se obtém uma equação diferencial ordinária e não linear para  $f$  dada por

$$\left(r^2 + 2 \sin^2 f\right) f + 2 r f + \sin (2 f) \left(f^2 - 1 - \frac{\sin^2 f}{r^2}\right) = 0. \quad (2.23)$$

A solução de (2.23) obtida numericamente pelo “shooting method” é apresentada na Figura 3, onde  $f(r)$  é monotonicamente decrescente e possui energia estática  $E = 1.232$ , excedendo aproximadamente em 23% da cota inferior de Faddeev-Bogomolny (2.18).

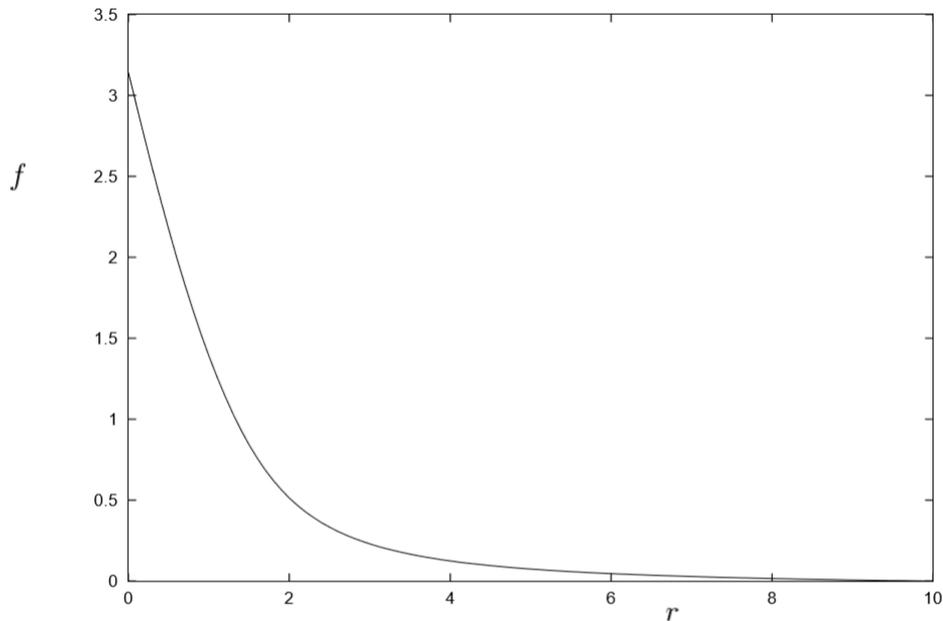


Figura 3 - A função perfil  $f(r)$  obtida numericamente a partir de 2.23, com as condições de borda  $f(0) = \pi$  e  $f(\infty) = 0$ , através do “shooting method” para a carga de Skyrme (2.16)  $Q = 1$ .

Fonte: MANTON.; SUTCLIFFE.<sup>4</sup>

A dinâmica da colisão de dois Skyrmons de carga topológica  $Q = 1$  pode ser vista na Figura 4. Inicialmente os Skyrmons idênticos são posicionados bem separadamente de forma a interação entre eles ser desprezível. Ao se colidir os Skyrmons se deformam e no instante 4 da Figura 4 as isosuperfícies de carga topológica tornam-se toroidais, aproximando-se muito de um Skyrmon de carga  $Q = 2$ . Após a colisão os Skyrmons voltam a se dividir em dois recobrando eventualmente sua forma original, mas são espalhados perpendicularmente à direção da colisão. Nesse processo a colisão é praticamente elástica e a energia perdida por radiação é pequena, assemelhando-se a uma colisão entre partículas.

Apesar dos Skyrmons de carga  $Q \geq 2$  serem obtidas numericamente sem o uso de nenhum ansatz, o assim chamado ansatz mapa racional pode capturar aproximadamente a estrutura destas soluções e ajudar a compreender certas propriedades dos Skyrmons. Tal ansatz é definido em termos de uma função perfil  $f(r)$ , análoga à introduzida no ansatz “hedgehog” (2.22), e dois campos complexos  $u$  e seu complexo conjugado  $\bar{u}$  que são mapas entre 2-esferas. Via projeção estereográfica pode-se mapear a 2-esfera ( $S^2$ ) do domínio do campo  $u$ , definida pelo vetor unitário  $\hat{n}_w$ , em um plano complexo parametrizado pelas variáveis complexas  $w$  e seu complexo conjugado  $\bar{w}$ , i.e.

$$\hat{n}_w \equiv \frac{1}{1 + |w|^2} \left( w + \bar{w}, i(\bar{w} - w), 1 - |w|^2 \right). \quad (2.24)$$

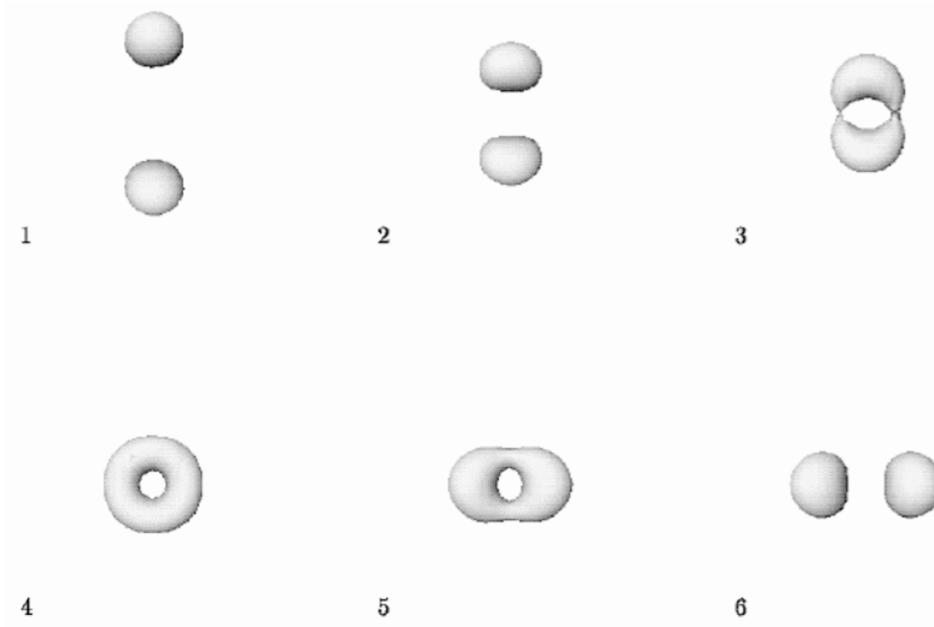


Figura 4 - Isosuperfícies da densidade de carga bariônica em uma colisão frontal entre dois Skyrmions de carga de Skyrme  $Q = 1$  nos instantes 1, ..., 6 orientados do passado para o futuro.

Fonte: MANTON.; SUTCLIFFE.<sup>4</sup>

De modo análogo à (2.24), sendo  $\hat{\mathbf{n}}_{u(w)}$  o vetor unitário que define o espaço alvo de  $u$ , pode-se finalmente introduzir o ansatz mapa racional como

$$U(r, w, \bar{w}) = \exp \left[ i f(r) \hat{\mathbf{n}}_{u(w)} \cdot \boldsymbol{\tau} \right], \quad \hat{\mathbf{n}}_{u(w)} \equiv \frac{1}{1 + |u|^2} \left( u + \bar{u}, i(\bar{u} - u), 1 - |u|^2 \right) \quad (2.25)$$

onde  $\tau_i$ , com  $i = 1, 2, 3$ , são as matrizes de Pauli. Para que o mapeamento  $u : S^2 \rightarrow S^2$  seja bem definido, o campo  $u(w)$  deve ser uma razão entre dois polinômios  $p(w)$  e  $q(w)$  sem raízes em comum e de respectivos graus polinomiais  $m_p$  e  $m_q$ . Diz-se que o grau algébrico de  $u(w) = p(w)/q(w)$  é o maior grau polinomial entre  $p(w)$  e  $q(w)$  e este número corresponde exatamente ao grau topológico  $n$  do mapa  $u$ , o qual pode ser escrito na representação integral<sup>4</sup> como

$$n = \frac{1}{4\pi} \int \left( \frac{1 + |w|^2}{1 + |u|^2} \left| \frac{du}{dw} \right| \right)^2 \frac{2i dw d\bar{w}}{(1 + |w|^2)^2} = \max \{m_p, m_q\}. \quad (2.26)$$

Em ordem a se deduzir a primeira igualdade de (2.26), note que  $2i dw d\bar{w}/(1 + |w|^2)^2$  é equivalente ao elemento de área da esfera de raio unitário  $S^2$  dado por  $\sin \theta d\theta d\varphi$ , o qual foi escrito nas coordenadas esféricas  $(r, \varphi, \theta)$  definidas através de

$$x_1 = r \sin \theta \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \theta \sin \varphi, \quad x_3 = r \cos \theta, \quad (2.27)$$

onde  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$  e as coordenadas Cartesianas  $x_i$ , com  $i = 1, 2, 3$ , são as componentes de  $\hat{\mathbf{n}}_w$  definido em (2.24). Portanto, a seguinte parte do integrando de (2.26)

$$\left( \frac{1 + |w|^2}{1 + |u|^2} \left| \frac{du}{dw} \right| \right)^2 \frac{2i dw \wedge d\bar{w}}{(1 + |w|^2)^2} \quad (2.28)$$

é exatamente o “pull-back” da forma de área  $2i du \wedge d\bar{u}/(1 + |u|^2)^2$  no espaço alvo  $S^2$  do mapa racional  $u$ . Logo, a integral de (2.28) deve ser igual à  $4\pi n$ , pois é o produto da área total da esfera de raio unitário  $S^2$  com o número de vezes que o mapa  $u$  recobre seu espaço alvo  $S^2$  ao varrer uma vez o seu domínio, o qual corresponde com o próprio grau topológico  $n$  do mapa  $u$ .

Note que o mapa  $u(w)$  tem associado o grupo de homotopia  $\pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$  que é isomorfo ao grupo  $\pi_3(S^3) = \mathbb{Z}$ . Se escolhermos as condições de borda  $f(0) = \pi$  e  $f(\infty) = 0$  e usando (2.16), (2.25) e (2.26) se obtém que o grau topológico do mapeamento  $U$  entre 3-esferas é igual ao grau topológico do mapeamento  $u$  entre 2-esferas, ou seja  $Q = n = \max\{m_p, m_q\}$ . Por exemplo, os mapas

$$u = w^2, \quad u = \frac{w^3 - i\sqrt{3}w}{i\sqrt{3}w^2 - 1}, \quad u = \frac{w^4 + 2\sqrt{3}iw^2 + 1}{w^4 - 2\sqrt{3}iw^2 + 1}, \quad u = \frac{w^7 - 7w^5 - 7w^2 - 1}{w^7 + 7w^5 - 7w^2 + 1} \quad (2.29)$$

têm cargas topológicas respectivas  $Q = 2, 3, 4, 7$  e são os únicos mapas racionais com as simetrias  $D_{\infty h}, T_d, O_h, Y_h$ , respectivamente.<sup>4</sup> Tais simetrias são as mesmas das isosuperfícies de carga bariônica dos Skyrmons vistas na Figura 3 para estes valores de  $Q$ . Em adição, usando  $u(w) = p(w)/q(w)$  e (2.26) se obtém

$$n = \frac{i}{2\pi} \int dw \wedge d\bar{w} \frac{|W(w)|^2}{(|p|^2 + |q|^2)^2}, \quad W(w) \equiv q \frac{dp}{dw} - p \frac{dq}{dw}. \quad (2.30)$$

Restringindo  $u(w)$  como sendo cada um dos mapas (2.29) e usando (2.25) pode-se facilmente encontrar a função perfil  $f(r)$ , com as condições de borda  $f(0) = \pi$  e  $f(\infty) = 0$ , que minimiza a energia estática (2.17) através de algum método de otimização. Através desse procedimento se obtém os valores da energia estática por unidade de carga topológica para  $Q = 2, 3, 4, 7$ , os quais são respectivamente 1.208, 1.184, 1.137, 1.107, sendo ligeiramente superiores as energias dos Skyrmons de mesmo valor de carga topológica (ver Tabela 1). Contudo, as isosuperfícies de carga bariônica correspondentes a estas configurações de campo são praticamente indistinguíveis as dos Skyrmons de mesma carga vistos na Figura 3 e isso se estende para outros mapas racionais.

Escrevendo a carga topológica (2.63) dentro do ansatz (2.25) obtém-se que sua densidade se anula para todo valor de  $w$  no qual o Wronskiano  $W(w) \equiv p'(w)q(w) - p(w)q'(w)$  seja nulo, com o apóstrofe significando a derivada com relação à  $w$  (ver equação (2.30)). Os polinômios  $p'(w)q(w)$  e  $p(w)q'(w)$  possuem um grau igual ou inferior à  $2n - 1$ , onde a igualdade ocorre se ambos  $p(w)$  e  $q(w)$  tiverem grau  $n$ , i.e. se ambos tiverem o grau polinomial igual ao grau topológico  $n$  do mapa  $u(w)$ . Contudo, como neste último caso tal potência de ordem  $2n - 1$  sempre se cancela em  $p'(w)q(w) - p(w)q'(w)$ , então o Wronskiano é um polinômio de grau igual ou inferior à  $2n - 2$ , já contando a multiplicidade das raízes. Em particular, para  $n = 1$  o Wronskiano é uma constante e densidade de carga topológica pode ser radial para, por exemplo,  $u = w$ . Em adição, em termos das

coordenadas esféricas usuais (2.27) pode-se escrever  $w = \tan(\theta/2) e^{i\varphi}$ . Consequentemente, para  $Q = n \geq 2$  as raízes de  $W$  correspondem a pares de valores angulares  $(\theta, \varphi)$  nos quais a densidade de carga topológica se anula para todo valor do raio. Tal comportamento contrasta com o Skyrmion de  $Q = 1$ , para o qual a densidade de carga topológica pode ter simetria radial, tomando-se por exemplo  $u = w$ . Portanto, o Wronskiano fornece uma informação interessante sobre a forma dos Skyrmons explicando os ‘buracos’ nas isosuperfícies de carga topológica (ver Figura 3) como sendo os zeros de  $W(w)$ . Todavia, tais ‘buracos’ que aparecem tanto nos Skyrmons quanto na aproximação obtida através do ansatz mapa racional (2.25) carecem de sentido físico no que se refere a aplicação do modelo para a física nuclear, pois não estão de acordo com os dados experimentais ou com o esperado segundo o modelo da gota líquida.<sup>36</sup>

### 2.3 O modelo de Skyrme BPS

Uma interessante extensão do modelo de Skyrme padrão no espaço de Minkowski quadridimensional, baseada em ideias de autodualidade,<sup>7</sup> é o assim chamado modelo de Skyrme BPS,<sup>1</sup> ou modelo de Skyrme auto dual, definido através da ação

$$S = \int d^4x \left[ \frac{m_0^2}{2} h_{ab} R_\mu^a R^{b,\mu} - \frac{1}{4e_0^2} h_{ab}^{-1} H_{\mu\nu}^a H^{b,\mu\nu} \right], \quad (2.31)$$

onde  $m_0$  e  $e_0$  são constantes de acoplamento com respectivas dimensões de

$$[m_0] = \sqrt{[\text{energia}]/[\text{comprimento}]}, \quad [e_0] = 1/\sqrt{[\text{energia}][\text{comprimento}]}. \quad (2.32)$$

As quantidades  $R_\mu^a$ , com  $\mu = 0, 1, 2, 3$  e  $a = 1, 2, 3$ , são as componentes da forma de Maurer-Cartan  $SU(2)$  dada pelo tensor de rank 1

$$R_\mu \equiv i\partial_\mu U U^\dagger \equiv R_\mu^a T_a \in su(2), \quad \forall U \in SU(2), \quad (2.33)$$

com  $T_a$  sendo os geradores da álgebra de Lie  $su(2)$  fixada por

$$[T_a, T_b] = i \varepsilon_{abc} T_c. \quad (2.34)$$

As quantidades  $H_{\mu\nu}^a$  são as componentes do tensor antisimétrico de rank 2 definido por  $H_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu R_\nu^a - \partial_\nu R_\mu^a \equiv H_{\mu\nu}^a T_a$ . Em adição,  $h_{ab}$  são as componentes de uma matriz  $3 \times 3$  simétrica e inversível que realiza a extensão do modelo de Skyrme, os quais podem ser interpretados como seis campos independentes adicionais ou funcionais dos campos  $U \in SU(2)$ . Para que a energia estática associada à ação (2.31) seja positiva definida, ou por argumentos de autodualidade vistos abaixo, se requer adicionalmente que a matrix  $h$  seja positiva. O modelo de Skyrme BPS (2.31) é reduzido ao modelo de Skyrme padrão (2.10) para a configuração particular de campo constante  $h = \alpha \mathbb{1}$ , com  $\alpha > 0$  sendo constante.

A forma traço da álgebra de Lie  $su(2)$  considerada é  $\text{Tr} (T_a T_b) = \kappa \delta_{ab}$ , sendo conveniente introduzir a forma traço normalizada independente da representação por

$$\widehat{\text{Tr}} (T_a T_b) = \frac{1}{\kappa} \text{Tr} (T_a T_b) = \delta_{ab}. \quad (2.35)$$

O valor de  $\kappa$  depende da representação da álgebra, sendo  $\kappa = 1/2$  para a representação espinorial e  $\kappa = 2$  para a representação triplete. Pela definição (2.33), a forma  $R_\mu$  satisfaz a equação de Maurer-Cartan

$$\partial_\mu R_\nu - \partial_\nu R_\mu + i [R_\mu, R_\nu] = 0. \quad (2.36)$$

A partir de (2.33) e (2.35) pode-se escrever as componentes de  $R_\mu$  e de  $H_{\mu\nu}$  como

$$R_\mu^a = i \widehat{\text{Tr}} \left( \partial_\mu U U^{-1} T_a \right), \quad H_{\mu\nu}^a = -i \widehat{\text{Tr}} \left( [R_\mu, R_\nu] T_a \right). \quad (2.37)$$

As componentes  $R_\mu^a$  são invariantes sobre transformações globais pela direita  $U \rightarrow U g_R$  e se transformam pela adjunta por transformações globais pela esquerda  $U \rightarrow g_L U$ , i.e.

$$U \rightarrow U g_R \quad \Rightarrow \quad R_\mu^a \rightarrow R_\mu^a, \quad \forall g_R \in SU(2), \quad (2.38)$$

$$U \rightarrow g_L U \quad \Rightarrow \quad R_\mu^a \rightarrow R_\mu^b d_{ba}(g_L), \quad \forall g_L \in SU(2). \quad (2.39)$$

Em adição,  $d(g)$  é a matriz  $3 \times 3$  associada ao elemento  $g$  do grupo  $SU(2)$  na representação adjunta, sendo  $d(g)$  definido por

$$g T_a g^{-1} = T_b d_{ba}(g), \quad d(g_1) d(g_2) = d(g_1 g_2), \quad \forall g, g_1, g_2 \in SU(2). \quad (2.40)$$

Como a representação adjunta é real e unitária, segue-se que  $d$  é uma matriz ortogonal ( $d^T = d^{-1}$ ). Se a matriz  $h$  se transformar pela adjunta como  $h \rightarrow d h d^T$ , então as transformações (2.38) e (2.39) deixam a ação (2.31) invariante sobre o grupo  $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ .

Em ordem a se construir as equações de autodualidade para a teoria (2.31), usando (2.35) e (2.37) pode-se reescrever a densidade da carga topológica (2.16) como

$$Q = \frac{i}{48 \pi^2} \int d^3 x \varepsilon_{ijk} \widehat{\text{Tr}} (R_i R_j R_k) = -\frac{1}{48 \pi^2} \int d^3 x R_i^a \varepsilon_{ijk} \partial_j R_k^a \equiv -\frac{1}{48 \pi^2} \int d^3 x A_i^a \tilde{A}_i^a, \quad (2.41)$$

onde a densidade de carga topológica foi escrita em termos da contração das quantidades

$$A_i^a \equiv R_i^b k_{ba}, \quad \tilde{A}_i^a \equiv k_{ab}^{-1} \varepsilon_{ijk} \partial_j R_k^b = \frac{1}{2} k_{ab}^{-1} \varepsilon_{ijk} H_{jk}^b \quad (2.42)$$

e  $k_{ab}$  é uma matriz real e inversível. Usando (2.41), (2.42) e definindo

$$\lambda = \pm |m_0 e_0| \quad (2.43)$$

segue-se que a energia estática associada à ação (2.31) se torna

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \int d^3x \left[ m_0^2 h_{ab} R_i^a R_i^b + \frac{1}{2e_0^2} h_{ab}^{-1} H_{ij}^a H_{ij}^b \right] = \frac{1}{2e_0^2} \int d^3x \left[ \lambda^2 (A_i^a)^2 + (\tilde{A}_i^a)^2 \right] \quad (2.44) \\ &= \frac{1}{2e_0^2} \int d^3x \left[ \lambda A_i^a - \tilde{A}_i^a \right]^2 - \text{sign}(\lambda) 48 \pi^2 \frac{|m_0|}{|e_0|} Q \geq -\text{sign}(\lambda) 48 \pi^2 \frac{|m_0|}{|e_0|} Q, \end{aligned}$$

onde a matriz  $h$  foi reescrita em termos de  $k$  como

$$h = k k^T. \quad (2.45)$$

Note que se  $O$  é uma matriz  $3 \times 3$  ortogonal ( $O O^T = \mathbb{1}$ ), então  $k$  e  $k O$  constroem o mesmo  $h$ . Tal liberdade de escolha da matriz  $k$  vem do fato de que ela tem três graus de liberdade a mais do que  $h$ , que só possui seis, os quais correspondem aos três graus de liberdade de  $O$ . Em adição, supondo que  $k$  seja não singular a relação (2.45) implica que  $h$  deve ser uma matriz simétrica e positiva. De fato, tais propriedades de  $h$  já foram assumidas na definição do modelo (2.31),<sup>1</sup> pois a versão estática da teoria (2.31) foi construída em termos de soma de quadrados das duas quantidades (2.7) obtidas a partir da quebra da densidade de carga topológica (2.41) nos dois objetos  $A_i^a$  e  $\tilde{A}_i^a$ , assim como argumentado na seção 2.1.

As configurações de campo que minimizam a energia estática associada a teoria (2.31), para cada valor de  $Q$ , são as equações de autodualidade que saturam a cota de Bogomolny (2.44) dadas por

$$\tilde{A}_i^a = \lambda A_i^a \quad \Rightarrow \quad \lambda R_i^b h_{ba} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} H_{jk}^a. \quad (2.46)$$

As equações de autodualidade (2.46) reduzem a energia estática à

$$E_{\text{BPS}} = m_0^2 \int d^3x h_{ab} R_i^a R_i^b = \frac{1}{2e_0^2} \int d^3x h_{ab}^{-1} H_{ij}^a H_{ij}^b = -\text{sign}(\lambda) 48 \pi^2 \frac{|m_0|}{|e_0|} Q, \quad (2.47)$$

onde o termo quadrático e quártico nas derivadas espaciais da ação (2.31) dão a mesma contribuição para a energia estática. As soluções não triviais de (2.46) possuem energia positiva e portanto o sinal de  $Q$  deve ser oposto ao sinal de  $\lambda$ , i.e.

$$\text{sign}(\lambda Q) = -1. \quad (2.48)$$

Em ordem a se construir soluções particulares auto duais para a teoria (2.31), considere o seguinte ansatz para a matriz  $h$

$$h = g^2 \mathbb{1}, \quad (2.49)$$

onde  $g^2$  é uma função real a ser determinada por (2.46). Note que este é o caso mais simples possível, pois se  $h = \mathbb{1}$ , então o modelo (2.31) se reduz ao modelo de Skyrme

padrão cujo setor auto dual só possui soluções triviais (campo  $U$  constante com  $Q = 0$ ). A ação (2.31) e as equações de autodualidade (2.46) se reduzem respectivamente à

$$S_g = \frac{1}{\kappa} \int d^4x \left[ \frac{m_0^2}{2} g^2 \text{Tr} (R_\mu)^2 + \frac{1}{4e_0^2 g^2} \text{Tr} ([R_\mu, R_\nu])^2 \right], \quad (2.50)$$

$$\varepsilon_{ijk} \partial_j R_k = \lambda g^2 R_i = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} [R_j, R_k]. \quad (2.51)$$

Os elementos do grupo  $SU(2)$  podem ser escritos na representação espinorial<sup>1,52</sup> como

$$U = W^\dagger e^{ifT_3} W, \quad \text{com} \quad W \equiv \frac{1}{\sqrt{1+|u|^2}} \begin{pmatrix} 1 & iu \\ i\bar{u} & 1 \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

o que implica

$$R_i = i \partial_i U U^{-1} = -X \Sigma_i X^\dagger, \quad \Sigma_i \equiv \partial_i f T_3 + i \frac{2 \sin \frac{f}{2}}{1+|u|^2} (\partial_i u T_+ - \partial_i \bar{u} T_-), \quad (2.53)$$

com  $X \equiv W^\dagger e^{ifT_3/2}$  e  $T_\pm \equiv T_1 \pm iT_2$ . Substituindo (2.53) nas equações auto dualidade (2.51) elas são reduzidas à

$$\lambda g^2 \partial_i f = \frac{i 8 \sin^2 \frac{f}{2}}{(1+|u|^2)^2} \varepsilon_{ijk} \partial_j u \partial_k \bar{u}, \quad (2.54)$$

$$\lambda g^2 \partial_i u = i \varepsilon_{ijk} \partial_j f \partial_k u, \quad (2.55)$$

$$\lambda g^2 \partial_i \bar{u} = -i \varepsilon_{ijk} \partial_j f \partial_k \bar{u}. \quad (2.56)$$

Dado o sistema de coordenadas  $(r, w, \bar{w})$  definido como

$$x_1 = \eta r \frac{-i(w - \bar{w})}{1 + |w|^2}, \quad x_2 = r \frac{(w + \bar{w})}{1 + |w|^2}, \quad x_3 = r \frac{|w|^2 - 1}{1 + |w|^2}, \quad \text{com} \quad \eta \equiv \pm 1, \quad (2.57)$$

onde a coordenada radial  $r$  tem dimensão de comprimento e as coordenadas complexas  $w$  e  $\bar{w}$  são adimensionais. A métrica Euclideana correspondente à (2.57) é dada por

$$ds^2 = dr^2 + \frac{4r^2}{(1+|w|^2)^2} dw d\bar{w}. \quad (2.58)$$

Introduzidas as coordenadas (2.57) pode-se utilizar o ansatz holomórfico definido por

$$f \equiv f(r), \quad u \equiv u(w), \quad \bar{u} \equiv \bar{u}(\bar{w}). \quad (2.59)$$

No trabalho original<sup>1</sup> se justificou que a única solução das equações de autodualidade (2.54)-(2.56) dentro do ansatz (2.59) é a solução de carga topológica de módulo unitário  $|Q| = 1$  como pode ser obtida por

$$u = w, \quad \bar{u} = \bar{w}, \quad f = 4 \arctan \left( \frac{r}{a} \right), \quad g^2 = \frac{4}{|m_0 e_0|} \frac{a}{r^2 + a^2}, \quad (2.60)$$

onde  $a$  é um parâmetro arbitrário e positivo com dimensão de comprimento. Em coordenadas esféricas  $(r, \theta, \varphi)$ , onde as coordenadas Cartesianas (2.57) são dadas por (2.27), os campos  $SU(2)$  obtidos a partir de (2.52) se tornam

$$U = \mathbb{1} \frac{a^2 - r^2}{a^2 + r^2} - i \frac{2ar}{a^2 + r^2} \begin{pmatrix} \cos \theta & \eta \sin \theta e^{-i\eta\varphi} \\ \eta \sin \theta e^{i\eta\varphi} & -\cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.61)$$

o que implica respectivamente na energia e na carga topológica dadas por

$$E = \int d^3x m_0^2 f^2 (R_i^a)^2 = 192 \frac{m_0}{e_0} \int \frac{d^3x}{a^3} \frac{1}{(1 + r^2/a^2)^3} = 48 \pi^2 \frac{m_0}{e_0}, \quad (2.62)$$

$$Q = -\eta 4 \frac{m_0}{e_0} \int \frac{d^3x}{a^3} \frac{1}{(1 + r^2/a^2)^3} = -\eta. \quad (2.63)$$

Note que usando (2.48) e (2.63) o sinal de  $\lambda$ , o qual dá o sinal relativo entre os objetos auto duais  $A_i^a$  e  $\tilde{A}_i^a$  nas equações de autodualidade (2.46), e os sinais de  $\eta$  e  $Q$  são relacionados via  $\eta = \text{sign } \lambda = -\text{sign } Q$ . Note também que o sinal de  $\eta$  dá o sentido do eixo  $x_1$  nas coordenadas (2.57) e a transformação  $\eta \rightarrow -\eta$  é equivalente à troca  $w \leftrightarrow \bar{w}$ , a qual devido à (2.63) implica na inversão no sinal de  $Q$  associada as configurações de campo (2.60). As densidades da energia estática (2.62) e da carga topológica (2.63) são esfericamente simétricas e caem com  $1/r^6$  para  $r \rightarrow \infty$ , sendo bem localizadas no espaço. Portanto, apesar da escolha  $h = g^2 \mathbb{1}$  não quebrar a simetria global original do modelo  $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ , esta restringe as soluções auto duais da teoria (2.31) aos Skyrmons auto duais de carga topológica de módulo unitário ( $|Q| = 1$ ).

### 3 SKYRMIONS AUTO DUAIS EM MODELO DE SKYRME MODIFICADO

Na seção (2.3) viu-se que o modelo de Skyrme BPS (2.31) introduz uma matriz  $3 \times 3$  simétrica e positiva  $h$  a qual permite que a teoria tenha setor auto dual. Em adição, construiu-se soluções auto duais para a configuração particular (2.49) dos campos  $h$ , para a qual a carga de Skyrme (2.41) é  $|Q| = 1$ . Contudo, no trabalho original<sup>1</sup> não se identificou a estrutura geral dos campos  $h$  dentro do setor auto dual nem se construiu soluções de carga Skyrme com  $|Q| \geq 2$ . Neste capítulo será demonstrado que dentro do setor BPS a matriz  $h$  pode ser determinada inteiramente em termos do campo de Skyrme  $SU(2)$ , o qual por sua vez é totalmente livre. Nas seções 3.3 e 3.4 serão construídos explicitamente soluções topológicas exatas, para cada valor da carga topológica, respectivamente através dos ansätze holomórfico e toroidal. Em ambos os casos, se demonstrará que é possível se construir Skyrmion BPS puramente radiais para qualquer valor de  $Q$ .

#### 3.1 As equações de movimento do modelo de Skyrme BPS

Considere a ação (2.31) definida em termos das componentes da forma de Maurer-Cartan  $SU(2)$  e seu rotacional dadas em (2.37), onde se utilizou a forma traço normalizada independente da representação (2.35). As equações de Euler-Lagrange do modelo de Skyrme auto dual (2.31) associadas aos campos  $U$  e associadas aos campos  $h_{ab}$  são respectivamente

$$\partial_\mu \left[ m_0^2 e_0^2 h_{ab} R^{b,\mu} - \varepsilon_{abc} R_\nu^b h_{cd}^{-1} H^{d,\mu\nu} \right] = \varepsilon_{abc} \left[ m_0^2 e_0^2 R_\mu^b h_{cd} R^{d,\mu} + \frac{1}{2} H_{\mu\nu}^c h_{bd}^{-1} H^{d,\mu\nu} \right], \quad (3.1)$$

$$m_0^2 e_0^2 R_\mu^a R^{b,\mu} + \frac{1}{2} h_{ac}^{-1} H_{\mu\nu}^c h_{bd}^{-1} H^{d,\mu\nu} = 0. \quad (3.2)$$

As soluções das equações de Euler-Lagrange (3.1) e (3.2) que minimizam a energia estática (2.44) são chamadas de Skyrmions auto duais ou Skyrmions BPS.

Contraindo (3.2) com  $h_{ab}$  obtêm-se exatamente o termo entre parênteses do lado direito da equação (3.1), o qual é portanto nulo. Sendo assim, podemos definir três quadricorrentes conservadas ( $a = 1, 2, 3$ )

$$\partial_\mu J_a^\mu = 0, \quad \text{com} \quad J_a^\mu = m_0^2 e_0^2 h_{ab} R^{b,\mu} - \varepsilon_{abc} R_\nu^b h_{cd}^{-1} H^{d,\mu\nu}. \quad (3.3)$$

As correntes de Noether associadas a simetria à esquerda (2.39) são as definidas em (3.3), enquanto as correntes de Noether associadas a simetria à direita (2.38) são dadas por

$$\tilde{J}_\mu^a = J_\mu^b d_{ba}(U), \quad \text{com} \quad \partial^\mu \tilde{J}_\mu^a = 0. \quad (3.4)$$

A conservação das correntes associadas a simetria à esquerda (3.3) e à direita (3.4) implicam

$$J_b^\mu \partial_\mu d_{ba}(U) = 0 \quad (3.5)$$

que é consequência das equações de Euler-Lagrange (3.2) para os campos  $h_{ab}$ . De fato, como a representação adjunta é ortogonal, i.e.  $d^T(U) = d(U^\dagger)$ , se pode demonstrar que

$$\begin{aligned} J_b^\mu \partial_\mu d_{ba}(U) T_a &= -i U^\dagger [J_a^\mu T_a, R_\mu] U \\ &= \varepsilon_{abc} U^\dagger T_c U \left[ m_0^2 e_0^2 h_{ad} R^{d,\mu} R_\mu^b + \frac{1}{2} h_{bd}^{-1} H^{d,\mu\nu} H_{\mu\nu}^a \right], \end{aligned} \quad (3.6)$$

cujos lados se anulam como consequência de (3.2).

É notável que a introdução dos campos  $h_{ab}$  na ação (2.31) não quebra as simetrias  $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$  do espaço alvo do modelo de Skyrme padrão (2.14). Assim como no modelo de Skyrme original, há também seis quadricorrentes conservadas cujas equações de continuidade são equivalentes às equações de movimento. A introdução dos campos  $h$  dá duas novas estruturas à teoria que passa a ser invariante conforme em três dimensões espaciais (veja o apêndice A.1) e possui um setor auto dual (setor BPS). Utilizando a identidade de Jacobi e o fato de que  $R_i$  satisfaz a equação de Maurer-Cartan (2.36) é possível escrever a energia estática associada ao modelo (2.31) como

$$E = \int d^3x \left[ \frac{m_0^2}{2} h_{ab} R_i^a R_i^b + \frac{1}{4e_0^2} h_{ab}^{-1} H_{ij}^a H_{ij}^b \right], \quad (3.7)$$

a qual é invariante conforme em três dimensões espaciais. Em adição, as versões estáticas das equações de Euler-Lagrange (3.1) e (3.2) também são invariantes conforme. Note que contraindo as equações de Euler-Lagrange (3.2) com  $h_{ab}$ , se obtém que os dois primeiros termos da densidade de Lagrangiana associada à (2.31) devem ser “on-shell”, i.e.

$$\frac{m_0^2}{2} h_{ab} R_\mu^a R^{b,\mu} = -\frac{1}{4e_0^2} h_{ab}^{-1} H_{\mu\nu}^a H^{b,\mu\nu} \quad (3.8)$$

o que implica que os dois termos da densidade de energia estática associada à (3.7) devem ser iguais

$$\frac{m_0^2}{2} h_{ab} R_i^a R_i^b = \frac{1}{4e_0^2} h_{ab}^{-1} H_{ij}^a H_{ij}^b. \quad (3.9)$$

No modelo de Skyrme padrão (2.10) uma relação equivalente à (3.9), mas restrita à  $h = \mathbb{1}$ , é obtida através do argumento de escala de Derrick.<sup>12</sup> Como a energia estática (3.7) é invariante conforme, em particular ela é invariante por transformações de escala nas coordenadas espaciais  $x_i \rightarrow \alpha x_i$ . Portanto, apesar dos Skyrmions originais do modelo de Skyrme padrão terem tamanho fixo, as soluções estáticas da teoria (2.31) não o têm, podendo ser reescaladas livremente. As equações (3.9) derivadas das equações de Euler-Lagrange para os campos  $h_{ab}$  evidenciam que são estes campos adicionais responsáveis pelo balanceamento entre o termo quadrático e o termo quártico nas derivadas espaciais (ou equivalentemente, nas potências de  $R_i$ ) da densidade da energia estática (3.7).

### 3.1.1 O setor estático

Uma consequência importante das equações de Euler-Lagrange (3.2) é que elas determinam os seis campos de  $h$  em termos de uma matriz real e simétrica definida apenas

em termos dos campos  $SU(2)$  através de

$$\tau_{ab} \equiv (R^T R)_{ab} = R_i^a R_i^b. \quad (3.10)$$

A matrix (3.10) é similar ao tensor de tensão do modelo de Skyrme padrão<sup>4,53</sup> definido como

$$D_{ij} = (R R^T)_{ij} = R_i^a R_j^a, \quad (3.11)$$

onde a contração se dá sobre o índice da álgebra ao invés do índice espacial  $i = 1, 2, 3$ , como em (3.10). Em adição, usando (3.10) e (3.11) obtêm-se

$$\det \tau = \det D = (\det R)^2, \quad \text{Tr}(\tau^n) = \text{Tr}(D^n) \quad (3.12)$$

e portanto  $\tau$  e  $D$  possuem os mesmos autovalores.

Seja  $v_a$  um vetor real arbitrário, a partir da equação (3.10) obtém-se

$$v^T \tau v = \sum_{i=1}^3 (v_a R_i^a)^2 \geq 0, \quad (3.13)$$

i.e.  $\tau$  é uma matriz positiva semi-definida e portanto seus autovalores são todos não negativos. Tal estrutura é semelhante da estrutura da matriz  $h$ , pois os autovalores da matriz  $h$  devem ser positivos para que a energia estática associada a teoria (2.31) seja positiva definida e nenhum pode se anular já que  $h$  deve ser inversível.

Objetivando explorar as consequências das equações estáticas de Euler-Lagrange para os campos  $h$  (3.2), considere um domínio  $\mathcal{D}$  no espaço tridimensional  $\mathbb{R}^3$ . Se a matriz  $\tau$  é singular em  $\mathcal{D}$ , então os campos  $U$  devem ser constantes em  $\mathcal{D}$ , i.e.

$$\det \tau = 0 \quad \Rightarrow \quad U = \text{constante}, \quad \text{para} \quad x^i \in \mathcal{D} \quad (3.14)$$

e portanto toda a matriz  $\tau$  se anula (ver (2.37) e (3.10)). Por outro lado, se nenhum dos autovalores de  $\tau$  se anula em  $\mathcal{D}$ , ou seja  $\det \tau \neq 0$ , então segue-se que as matrizes  $h$  e  $\tau$  podem ser diagonalizadas neste domínio pela mesma matriz  $3 \times 3$  ortogonal  $M$ , i.e.

$$(M^T h M)_{ab} = \varphi_a \delta_{ab}, \quad (M^T \tau M)_{ab} = \omega_a \delta_{ab} \quad (3.15)$$

e portanto  $h$  e  $\tau$  comutam em  $\mathcal{D}$ . Em adição, seus autovalores se relacionam por

$$\omega_1 = m_0^2 e_0^2 \varphi_2 \varphi_3, \quad \omega_2 = m_0^2 e_0^2 \varphi_1 \varphi_3, \quad \omega_3 = m_0^2 e_0^2 \varphi_1 \varphi_2. \quad (3.16)$$

As relações (3.14), (3.15) e (3.16) são demonstradas no Apêndice A.2.

A matriz  $\tau$ , definida em (3.10), se transforma sobre a ação do grupo  $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ , dada em (2.39) e (2.38), do mesmo modo que a matriz  $h$ . Logo, os autovalores de  $h$  e  $\tau$  são invariantes sobre a ação do grupo  $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ . De fato, se  $|v\rangle$  é um autovetor de  $h$  com autovalor  $\varphi$ , i.e.  $h|v\rangle = \varphi|v\rangle$ , então  $d(g_L)|v\rangle$  é um autovetor da

matriz transformada  $d(g_L) h d(g_L)^T$  com mesmo autovalor  $\varphi$ . O mesmo se aplica para a matriz  $\tau$ .

As relações (3.15) e (3.16) têm importantes consequências para as soluções estáticas do modelo (2.31). Usando (3.15) e (3.16) pode-se escrever

$$\left(M^T \tau^{-1} M\right)_{ab} = \frac{1}{m_0^2 e_0^2 \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3} \varphi_a \delta_{ab}. \quad (3.17)$$

Então, as matrizes  $h$  e  $\sqrt{\det \tau} \tau^{-1}$  são proporcionais em  $\mathcal{D}$ , i.e.

$$h = m_0^2 e_0^2 (\det h) \tau^{-1} = \frac{\sqrt{\det \tau}}{|m_0 e_0|} \tau^{-1}. \quad (3.18)$$

Note que (3.18) implica que  $h$  é determinado algebricamente em termos da matriz  $\tau$ , sem que seja necessário nenhuma integração. Logo, as relações (3.18) e (3.10) mostram que no setor estático da teoria (2.31), restrito à região onde a matriz  $\tau$  é não singular, os seis campos  $h_{ab}$  são explicitamente escritos em termos dos três campos  $U$  e suas primeiras derivadas. Note que isto é consequência somente das equações estáticas de Euler-Lagrange para os campos  $h$  (3.2) e da positividade dos autovalores de  $h$  e  $\tau$ . Nos casos onde a matriz  $\tau$  é singular é também possível encontrar a matriz  $h$  que resolve as equações (3.2) (veja o Apêndice A.2.1).

Usando as equações estáticas de Euler-Lagrange para os campos  $h$  (3.2), segue-se que as Euler-Lagrange para os campos  $U$  (3.1) foram reduzidas à (3.3). Na região onde  $\tau$  é não singular pode-se usar (3.18) para expressar a versão estática de (3.3) somente em termos dos campos  $U$  como

$$\partial_i J_i^a = 0, \quad \text{com} \quad J_i^a = \sqrt{\det \tau} \tau_{ab}^{-1} R_i^b + \frac{m_0^2 e_0^2}{\sqrt{\det \tau}} \varepsilon_{abc} R_j^b \tau_{cd} H_{ij}^d. \quad (3.19)$$

Decorre de (3.18) que o determinante da matriz  $h$  é proporcional a densidade de carga topológica. Em ordem a se deduzir esse resultado, considere as quantidades  $R_i^a$ , introduzidas em (2.37), como uma matriz  $3 \times 3$  onde as linhas e colunas da matriz são dadas respectivamente pelo índice espacial e o índice da álgebra, i.e.  $R_i^a \equiv (R)_{ia}$  com  $i = 1, 2, 3$  e  $a = 1, 2, 3$ . Munidos desta definição conveniente pode-se escrever

$$\varepsilon_{ijk} R_i^a R_j^b R_k^c = \varepsilon_{abc} \varepsilon_{ijk} R_{i1} R_{j2} R_{k3} = \varepsilon_{abc} \det R. \quad (3.20)$$

Usando (2.34), (2.35) e (3.20) se obtém

$$\varepsilon_{ijk} \widehat{\text{Tr}}(R_i R_j R_k) = i 3 \det R. \quad (3.21)$$

A partir de (2.41) e (3.21) vê-se que a densidade de carga topológica é proporcional à  $\det R$ , ou seja

$$Q = -\frac{1}{16 \pi^2} \int d^3 x \det R. \quad (3.22)$$

Na região onde  $\tau$  é não singular as relações (3.18) e (3.10) implicam respectivamente em  $\det \tau = (m_0^2 e_0^2)^3 (\det h)^2$  e  $\det \tau = (\det R)^2$ . Portanto, segue-se que

$$\det h = \frac{\det R}{\lambda^3}, \quad \text{com} \quad \lambda = \pm |m_0 e_0|. \quad (3.23)$$

Pelos motivos mencionados acima, os autovalores de  $h$  são todos positivos e portanto  $\det h > 0$ . Este resultado juntamente com (3.23) mostram que o sinal de  $\det R$  é fixo em todos os pontos de  $\mathbb{R}^3$ , sendo dado por

$$\text{sign}(\lambda \det R) = +1. \quad (3.24)$$

Logo, na região onde  $\tau$  é não singular, a relação (3.21) implica que a densidade de carga topológica  $\mathcal{Q}$  associada à (2.41) é proporcional ao determinante da matriz  $h$ , i.e.

$$\det h = -\frac{i}{3\lambda^3} \varepsilon_{ijk} \widehat{\text{Tr}}(R_i R_j R_k) = -\frac{16\pi^2}{\lambda^3} \mathcal{Q}. \quad (3.25)$$

Se  $\tau$  é singular somente em domínios de volume zero, segue-se que a carga topológica (2.41) pode ser escrita como

$$Q = -\frac{\lambda^3}{16\pi^2} \int d^3x \det h. \quad (3.26)$$

Note que como  $\det h > 0$ , então podemos reobter (2.48) a partir de (3.26). A relação (3.18) entre as matrizes  $h$  e  $\tau$ , válida na região onde  $\tau$  é não singular, mostra que a matriz  $h$  dá uma medida da tensão do mapeamento entre 3-esferas realizado pelo campo  $SU(2)$ . Em adição, usando (3.18) e (3.16) se pode escrever o termo quadrático e quártico nas derivadas espaciais da energia estática (3.7) como funções dos autovalores de  $h$  através de

$$h_{ab} R_i^a R_i^b = \frac{1}{2\lambda^2} h_{ab}^{-1} H_{ij}^a H_{ij}^b = \text{Tr}(h\tau) = 3\lambda^2 \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \quad (3.27)$$

o que está de acordo com (3.9).

A densidade de energia estática  $\mathcal{E}$  do modelo (2.31) pode ser escrita em termos dos autovalores de  $h$  ou  $\tau$  como

$$\mathcal{E} \equiv \frac{m_0^2}{2} h_{ab} R_i^a R_i^b + \frac{1}{4e_0^2} h_{ab}^{-1} H_{ij}^a H_{ij}^b = m_0^2 \lambda^2 3\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 = \frac{3m_0^2}{|\lambda|} \sqrt{\omega_1 \omega_2 \omega_3}, \quad (3.28)$$

onde se usou (3.16) e (3.27). Por outro lado, usando (2.37), (3.11), (3.15) e (3.16), pode-se escrever a densidade de energia estática associada ao modelo de Skyrme padrão, o qual corresponde à (2.31) com  $h = \mathbb{1}$ , restrita as soluções estáticas da teoria (2.31) como

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{Skyrme}} &\equiv \frac{m_0^2}{2} R_i^a R_i^a + \frac{1}{4e_0^2} H_{ij}^a H_{ij}^a = \frac{m_0^2}{2} \left[ \text{Tr} D + \frac{1}{2\lambda^2} \left( (\text{Tr} D)^2 - \text{Tr} D^2 \right) \right] \\ &= \frac{m_0^2}{2} \left[ \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \frac{1}{\lambda^2} (\omega_1 \omega_2 + \omega_2 \omega_3 + \omega_1 \omega_3) \right] \\ &= \frac{m_0^2 \lambda^2}{2} [\varphi_1 \varphi_2 + \varphi_2 \varphi_3 + \varphi_1 \varphi_3 + \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)], \end{aligned} \quad (3.29)$$

onde a última igualdade foi obtida assumindo a relação (3.16), i.e. que a configuração de campo satisfaz as equações estáticas de Euler-Lagrange associada aos campos  $h$  (3.2). Subtraindo (3.28) de (3.29) pode-se definir

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{E} &\equiv \mathcal{E}_{\text{Skyrme}} - \mathcal{E} \\ &= \frac{m_0^2}{2} \left[ \left( \sqrt{\omega_1} - \frac{\sqrt{\omega_2 \omega_3}}{|\lambda|} \right)^2 + \left( \sqrt{\omega_2} - \frac{\sqrt{\omega_1 \omega_3}}{|\lambda|} \right)^2 + \left( \sqrt{\omega_3} - \frac{\sqrt{\omega_1 \omega_2}}{|\lambda|} \right)^2 \right] \\ &= \frac{m_0^2 \lambda^2}{2} \left[ (1 - \varphi_1)^2 \varphi_2 \varphi_3 + (1 - \varphi_2)^2 \varphi_1 \varphi_3 + (1 - \varphi_3)^2 \varphi_1 \varphi_2 \right],\end{aligned}\quad (3.30)$$

onde na última igualdade se assumiu a relação (3.16). Consequentemente,  $\Delta\mathcal{E}$  é positivo se os autovalores da matriz  $h$  são positivos, ou equivalentemente se a energia estática da teoria (2.31) é positiva definida. No domínio onde todos os três autovalores  $\varphi_a$ 's são positivos, a diferença  $\Delta\mathcal{E}$  entre as densidades de energia estática entre o modelo de Skyrme padrão e o modelo de Skyrme BPS tem três extremos. Estes correspondem a dois mínimos em  $\varphi_a = 0$  e  $\varphi_a = 1$ , para  $a = 1, 2, 3$ , ou seja em  $h = 0$  e  $h = \mathbb{1}$ , e um ponto de sela em  $\varphi_a = 1/2$  ou equivalentemente em  $h = (1/2) \mathbb{1}$ .

### 3.2 O setor auto dual

Na seção 2.3 demonstrou-se que as equações de autodualidade (2.46), junto da definição (2.43), as quais são dadas por

$$\lambda h_{ab} R_i^b = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} H_{jk}^a, \quad \lambda = \pm |m_0 e_0| \quad (3.31)$$

saturam a cota inferior da energia estática (2.44), a qual é dado pela energia BPS (2.47). As equações de autodualidade (3.31) também podem ser escritas em termos dos vetores tridimensionais  $\vec{R}_a$  como

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{R}_a = \lambda h_{ab} \vec{R}_b. \quad (3.32)$$

A equação (3.32) é uma generalização, para vários vetores, da bem conhecida equação de força livre para campos magnéticos em física solar e de plasma.<sup>54-57</sup>

As soluções das equações de primeira ordem (3.31) não resolvem somente as equações estáticas de Euler-Lagrange associadas aos campos  $U$  (3.1), como também resolvem as equações de Euler-Lagrange associadas aos seis campos  $h_{ab}$  (3.2). Note que a versão estática de (3.2) pode ser escrita como

$$\left[ |\lambda| R_i^a - \frac{1}{2} h_{ac}^{-1} \varepsilon_{ijk} H_{jk}^c \right] \left[ |\lambda| R_i^b + \frac{1}{2} h_{bd}^{-1} \varepsilon_{ilm} H_{lm}^d \right] = 0, \quad (3.33)$$

já que os termos cruzados se cancelam. Para explicitar tal cancelamento, basta usar (2.37) e (3.20) para escrever  $h_{ac}^{-1} \varepsilon_{ijk} H_{jk}^c R_i^b = h_{ac}^{-1} \varepsilon_{cde} \varepsilon_{ijk} R_i^b R_j^d R_k^e = 2 h_{ab}^{-1} \det R$  e usar adicionalmente  $h_{bd}^{-1} \varepsilon_{ilm} H_{lm}^d R_i^a = 2 h_{ab}^{-1} \det R$ . Portanto, (3.33) é equivalente a versão estática de (3.2) e as equações de autodualidade (3.31) implicam em (3.33).

Usando (3.31) duas vezes se obtém

$$\varepsilon_{abc} \lambda^2 R_i^b h_{cd} R_i^d = \frac{1}{4} \varepsilon_{abc} \varepsilon_{ijk} h_{bd}^{-1} H_{jk}^d \varepsilon_{ilm} H_{lm}^c = \frac{1}{2} \varepsilon_{abc} h_{bd}^{-1} H_{jk}^d H_{jk}^c \quad (3.34)$$

que implica que a versão estática do lado direito da equação (3.1) se anula. Contraindo a versão estática do lado esquerdo de (3.1) com  $T_a$ , usando (3.31) e o fato de que  $R_i$  satisfaz a equação de Maurer-Cartan (2.36) se obtém

$$\begin{aligned} \partial_i \left[ \lambda^2 h_{ab} R_i^b + \varepsilon_{abc} R_j^b h_{cd}^{-1} H_{ij}^d \right] T_a &= \frac{\lambda}{2} \varepsilon_{ijk} \partial_i \left[ H_{jk}^a + 2 \varepsilon_{abc} R_j^b R_k^c \right] T_a \\ &= -i \frac{3\lambda}{2} \varepsilon_{ijk} \partial_i [R_j, R_k] = \frac{3\lambda}{2} \varepsilon_{ijk} [[R_i, R_j], R_k] = 0, \end{aligned} \quad (3.35)$$

onde na última igualdade se usou a identidade de Jacobi. Então, (3.31) implica na versão estática de (3.1) e (3.2).

Uma interessante consequência das equações estáticas de Euler-Lagrange associadas aos campos  $h_{ab}$  (3.2) é que elas implicam nas equações de autodualidade (3.31). Para demonstrar tal relação, escreva

$$S_i^{(\pm),a} \equiv |\lambda| R_i^a \pm \frac{1}{2} h_{ac}^{-1} \varepsilon_{ijk} H_{jk}^c. \quad (3.36)$$

Usando (3.36) pode-se reescrever as equações estáticas de Euler-Lagrange associadas aos campos  $h_{ab}$  (3.33) como

$$S_i^{(+),a} S_i^{(-),b} = 0. \quad (3.37)$$

Por outro lado a equação (3.36) implica

$$S_i^{(+),a} + S_i^{(-),a} = 2 |\lambda| R_i^a. \quad (3.38)$$

Contraindo (3.38) com  $S_i^{(\pm),b}$  e usando (3.37) se obtém

$$\begin{aligned} S_i^{(\pm),a} S_i^{(\pm),b} &= 2 |\lambda| R_i^a S_i^{(\pm),b} = 2 |\lambda| \left[ |\lambda| \tau_{ab} \pm (\det R) h_{ab}^{-1} \right] \\ &= 2 |\lambda|^2 \left[ \tau_{ab} \pm (\text{sign } \lambda) |\lambda|^2 (\det h) h_{ab}^{-1} \right] \\ &= 2 |\lambda|^2 \tau_{ab} [1 \pm (\text{sign } \lambda)], \end{aligned} \quad (3.39)$$

onde usou-se (3.10), (3.20), (3.23) e (3.18). Consequentemente

$$\text{sign } \lambda = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad S_i^{(\mp),a} = 0. \quad (3.40)$$

A equação (3.40), onde  $S_i^{(\pm),a}$  definido em (3.36) se anula para todos os valores dos índices espaciais  $i$  e da álgebra  $a$ , é equivalente as equações de autodualidade (3.31). Logo, obtém-se um resultado fundamental: as seis equações estáticas de Euler-Lagrange associadas aos campos  $h_{ab}$  (3.2) implicam nas nove equações de autodualidade (3.31), e estas por sua vez implicam nas três equações estáticas de Euler-Lagrange associadas aos campos  $U$  (3.1). Ou seja, apesar de toda solução auto dual do modelo (2.31) ser sempre

uma solução estática, tal argumento implica que as soluções estáticas de (3.2) são soluções das equações de autodualidade e portanto são soluções de (3.1). Portanto, o setor estático e o setor auto dual da teoria (2.31) coincidem. Conseqüentemente, as únicas soluções não auto duais da teoria (2.31) devem ser necessariamente dependentes do tempo. Em adição, como em (3.18) os seis campos de  $h$  ficam determinados em termos dos campos  $SU(2)$ . Então, somente seis das nove equações de autodualidade (3.31) são independentes e o mesmo vale para as equações estáticas (3.1) e (3.2), onde as equações independentes correspondem as seis equações de Euler-Lagrange associadas aos campos  $h$  (3.2).

Através das relações (3.18), as quais são consequência direta das equações estáticas de Euler-Lagrange associadas aos campos  $h_{ab}$  (3.2), a matriz  $h$  fica determinada inteiramente em termos dos campos  $U$  e suas primeiras derivadas. Logo, escolhendo os campos  $U$  como sendo qualquer configuração de campo estática que seja um mapa entre 3-esferas, obtém-se a partir de (3.18) a matriz  $h$  que satisfaz as equações estáticas de Euler-Lagrange associadas aos campos  $h_{ab}$  (3.2). Tal configuração dos campos  $U$  e  $h$  formam então uma solução estática da teoria (2.31). Note que nos casos em que a matriz  $\tau$  é singular, a relação (3.18) não é válida. Contudo, como demonstra-se no Apêndice A.2.1, é possível se achar a matriz  $h$  que satisfaz as equações de autodualidade (3.31) apesar de  $\tau$  ser singular. Conseqüentemente, (2.31) tem um número infinito de soluções estáticas. Nas próximas seções serão analisadas alguns tipos especiais destas soluções estáticas construídas a partir de ansätze para os campos  $SU(2)$ .

### 3.3 O ansatz holomórfico

Nesta seção se construirá soluções exatas do tipo Skyrmons auto duais a partir das equações de auto dualidade (3.31) através do ansatz mapa racional (2.59) introduzido na seção 2.3.<sup>4,58-60</sup> Considere os elementos  $U$  do grupo  $SU(2)$  sendo parametrizados por um campo escalar real  $f$  e um campo escalar complexo  $u$ , junto a seu complexo conjugado  $\bar{u}$ , através da relação (2.52). A partir da expressão de  $\Sigma_i$  definido em (2.53), pode-se reescrever as equações de auto dualidade (3.31) como

$$\lambda \text{Tr} (\Sigma_i T_b) \tilde{h}_{ba} = \frac{i}{2} \varepsilon_{ijk} \text{Tr} ([\Sigma_j, \Sigma_k] T_a), \quad (3.41)$$

sendo a matriz  $\tilde{h}$  definida por

$$h_{ab} \equiv d_{ac}(X) \tilde{h}_{cd} d_{db}^T(X), \quad (3.42)$$

onde  $d(X)$  é a representação matricial adjunta dos elementos do grupo  $X = W^\dagger e^{ifT_3/2}$  (ver (2.40)). Como a representação adjunta (tripleto) é ortogonal (veja a seção 3.1) então  $d$  é uma matriz  $3 \times 3$  ortogonal. Portanto, como a matriz  $h$  é simétrica, então pela definição (3.42) a matriz  $\tilde{h}$  também é simétrica e possui os mesmos autovalores de  $h$ . De fato, se  $|v\rangle$  é autovetor de  $h$  com autovalor  $\varphi_a$ , então  $d^T(X) |v\rangle$  é autovetor de  $\tilde{h}$  com mesmo autovalor.

Ao invés de se utilizar as coordenadas esféricas usando os tradicionais ângulos polar e azimutal é conveniente manter a coordenada radial e fazer uma projeção estereográfica da 2-esfera no plano complexo, o qual pode ser parametrizado por duas coordenadas complexas  $w$  e seu complexo conjugado  $\bar{w}$ . Considere as coordenadas definidas em (2.57) com o valor da constante real de módulo unitário  $\eta$  sendo restrito à  $\eta = 1$ , i.e.

$$x_1 = r \frac{-i(w - \bar{w})}{1 + |w|^2}, \quad x_2 = r \frac{(w + \bar{w})}{1 + |w|^2}, \quad x_3 = r \frac{|w|^2 - 1}{1 + |w|^2}, \quad (3.43)$$

cuja métrica é dada por (2.58). Note que se poderia deixar o sinal de  $\eta$  livre, assim como em (2.57), e tentar se construir soluções auto duais com  $Q$  positivo a partir de soluções auto duais com  $Q$  negativo, ou vice versa, através da inversão do sinal de  $\eta$  (ver seção 2.3). Contudo, o sinal  $\eta$  foi fixado por conveniência e se construirá abaixo soluções de carga topológica com ambos os sinais através da escolha apropriada das condições de borda do campo  $f$ , i.e. de seus valores na origem do sistema Cartesiano e no infinito espacial.

Seja  $g$  o tensor métrico associado à métrica (2.58), suas componentes  $g_{\alpha\beta}$ , com  $\alpha, \beta = r, w, \bar{w}$ , podem ser facilmente obtidas através da identificação de  $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$  com a expressão (2.58). Considere adicionalmente  $\hat{e}_\alpha$  como sendo a base de módulo unitário do sistema de coordenadas  $(r, w, \bar{w})$  e  $g^{\alpha\beta}$  como sendo as componentes da inversa do tensor métrico  $g$ . Pela definição (2.53), assim como  $R_i$ , a quantidade  $\Sigma_i$  também é um tensor de rank 1. Consequentemente, pode-se escrever o vetor  $\vec{\Sigma} \equiv \Sigma_i \hat{x}_i$ , onde  $\hat{x}_i$  é a base ortonormal do sistema de coordenadas Cartesianas (2.27), em termos das componentes  $\Sigma_\alpha$  através da relação  $\vec{\Sigma} = \hat{e}_\alpha g^{\alpha\beta} \Sigma_\beta$ . As equações de auto dualidade (3.41) escritas nas coordenadas (3.43) se tornam portanto

$$\begin{aligned} \lambda \text{Tr} (\Sigma_r T_b) \tilde{h}_{ba} &= \frac{(1 + |w|^2)^2}{2r^2} \text{Tr} ([\Sigma_w, \Sigma_{\bar{w}}] T_a), \\ \lambda \text{Tr} (\Sigma_{\bar{w}} T_b) \tilde{h}_{ba} &= \text{Tr} ([\Sigma_{\bar{w}}, \Sigma_r] T_a), \\ \lambda \text{Tr} (\Sigma_w T_b) \tilde{h}_{ba} &= \text{Tr} ([\Sigma_r, \Sigma_w] T_a). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Utilizando o ansatz holomórfico

$$f \equiv f(r), \quad u \equiv u(w), \quad \bar{u} \equiv \bar{u}(\bar{w}), \quad (3.45)$$

segue-se que as componentes  $\Sigma_\alpha$  são reduzidas à

$$\Sigma_r = \partial_r f T_3, \quad \Sigma_w = \frac{i 2 \sin(f/2)}{1 + |u|^2} \partial_w u T_+, \quad \Sigma_{\bar{w}} = -\frac{i 2 \sin(f/2)}{1 + |u|^2} \partial_{\bar{w}} \bar{u} T_-. \quad (3.46)$$

Resulta de (3.44) e (3.46) que a matriz  $\tilde{h}$  se torna diagonal

$$\tilde{h}_{11} = \tilde{h}_{22} = \frac{\partial_r f}{\lambda}, \quad \tilde{h}_{33} = \frac{4 \sin^2(f/2)}{\lambda r^2 \partial_r f} \frac{(1 + |w|^2)^2}{(1 + |u|^2)^2} \partial_w u \partial_{\bar{w}} \bar{u}, \quad \tilde{h}_{ab} = 0, \quad a \neq b. \quad (3.47)$$

Note que como  $\partial_w u \partial_{\bar{w}} \bar{u} = |\partial_w u|^2 \geq 0$ , para que cada um dos autovalores de  $h$  (ou equivalentemente de  $\tilde{h}$ ) seja positivo, então  $\text{sign}(\lambda \partial_r f) = 1$ , onde  $\text{sign}(\lambda)$  dá o sinal

relativo entre  $A_\alpha$  e  $\tilde{A}_\alpha$  na equação de autodualidade (2.46). Contudo, isso já era esperado devido à (2.48) e (3.26), pois

$$1 \stackrel{(2.48)}{=} -\text{sign}(\lambda Q) \stackrel{(3.26)}{=} \text{sign}(\det h) \stackrel{(3.42)}{=} \text{sign}(\det \tilde{h}) \stackrel{(3.47)}{=} \text{sign}(\lambda \partial_r f). \quad (3.48)$$

A matriz  $h$  pode ser obtida a partir de (3.42) e  $d(X) = d(W^\dagger) d(e^{ifT_3/2})$ , onde

$$d(e^{ifT_3/2}) = \begin{pmatrix} \cos \frac{f}{2} & \sin \frac{f}{2} & 0 \\ -\sin \frac{f}{2} & \cos \frac{f}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

e

$$d(W^\dagger) = \frac{1}{1+|u|^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(2+u^2+\bar{u}^2) & \frac{1}{2}i(u^2-\bar{u}^2) & i(u-\bar{u}) \\ \frac{1}{2}i(u^2-\bar{u}^2) & \frac{1}{2}(2-u^2-\bar{u}^2) & -(u+\bar{u}) \\ -i(u-\bar{u}) & u+\bar{u} & 1-|u|^2 \end{pmatrix}. \quad (3.50)$$

Em adição, a partir de (3.47) obtém-se

$$\det h = \det \tilde{h} = \frac{4}{\lambda^3} \frac{\partial_r f \sin^2(f/2)}{r^2} \frac{(1+|w|^2)^2}{(1+|u|^2)^2} \partial_w u \partial_{\bar{w}} \bar{u}. \quad (3.51)$$

Sendo assim, a partir (3.51) a carga topológica (3.26) destas configurações auto duais é

$$Q = -\frac{i}{4\pi^2} \int dw \wedge d\bar{w} \frac{\partial_w u \partial_{\bar{w}} \bar{u}}{(1+|u|^2)^2} [f - \sin f]_{r=0}^{r=\infty}, \quad (3.52)$$

onde foi utilizado a expressão para o elemento de volume  $d^3x = \frac{i2r^2}{(1+|w|^2)^2} dr \wedge dw \wedge d\bar{w}$ .

Na seção 3.2 demonstrou-se que as equações de autodualidade determinam a matriz  $h$  inteiramente em termos dos campos  $SU(2)$ , mas estes permanecem livres. Portanto, as equações de autodualidade (3.31) são automaticamente satisfeitas para qualquer matriz  $h$  construída pelas relações (3.42), (3.47), (3.49), (3.50) e para quaisquer campos escalares  $f(r)$ ,  $u(w)$  e  $\bar{u}(\bar{w})$  que parametrizem o mapeamento entre 3-esferas  $U(r, w, \bar{w})$ . Logo, qualquer configuração de ansatz holomórfico (3.45) para os campos  $SU(2)$  levam a uma solução das equações de autodualidade (3.31).

Para que a função  $u(w)$  seja um mapa bem definido entre 2-esferas é necessário que  $u$  seja a razão entre dois polinômios  $p(w)$  e  $q(w)$  sem raízes em comum, i.e. que  $u(w)$  seja o assim chamado um mapa racional

$$u(w) = \frac{p(w)}{q(w)} \quad (3.53)$$

tal como definido na seção 2.2. Em adição, viu-se nesta seção que o grau algébrico do mapa de  $u(w)$ , definido como sendo o maior grau polinomial entre  $p(w)$  e  $q(w)$ , é igual ao grau topológico de  $u$ . Apesar da diferença de definição das projeções estereográficas (2.24) e

(3.43), a representação integral do grau topológico de  $u$  continua sendo é dada por (2.26) ou (2.30), i.e.

$$n = \frac{i}{2\pi} \int dw \wedge d\bar{w} \frac{\partial_w u \partial_{\bar{w}} \bar{u}}{(1 + |u|^2)^2} = \frac{i}{2\pi} \int dw \wedge d\bar{w} \frac{|q \partial_w p - p \partial_w q|^2}{(|p|^2 + |q|^2)^2}. \quad (3.54)$$

Usando (3.54) a expressão da carga topológica (3.52) se reduz à

$$Q = -n \frac{[f - \sin f] \Big|_{r=0}^{r=\infty}}{2\pi}. \quad (3.55)$$

Para que a carga topológica (3.55) seja não trivial a função perfil  $f(r)$  tem que ser tal que a quantidade  $[f - \sin f] \Big|_{r=0}^{r=\infty}$  não se anule. Para dado inteiro  $m$  se tem que  $e^{i2\pi m T_3} = \pm \mathbb{1}$ , dependendo se a representação espinorial usada para  $U$  é inteira (+) ou semi inteira (-). Logo, a relação (2.52) implica que se  $f = 2\pi m$ , então  $U = \pm \mathbb{1}$ . Consequentemente, deve-se considerar as condições de borda tais que  $f(0) = 2\pi m$ , e  $f(\infty) = 0$ , e então  $U(\infty) = \mathbb{1}$  e  $U(0) = \pm \mathbb{1}$ , dependendo se a representação espinorial usada para  $U$  é inteira (+) ou semi-inteira (-). Segue-se que a carga topológica (3.55) torna-se  $Q = mn$ . Claramente, para se obter soluções de carga topológica com sinal oposto à (3.56) basta se inverter as condições de borda da função perfil  $f(r)$  na origem e no infinito espacial. Portanto, pode-se gerar todos os valores de  $Q$  inteiro mesmo que  $m$  seja considerado como um número natural, o que se considerará de agora em diante. A carga topológica (3.55) se torna

$$Q = smn, \quad \text{com} \quad s = \begin{cases} +1, & f(0) = 2\pi m, \quad f(\infty) = 0 \\ -1, & f(0) = 0, \quad f(\infty) = 2\pi m \end{cases}. \quad (3.56)$$

Note que a partir de (3.56) se conclui que  $\text{sign}(Q) = s$ , já que por definição o grau algébrico  $n$  do mapa racional  $u(w)$  é um número não negativo.

Uma simples abordagem alternativa para se construir Skyrmons BPS, para cada valor de  $Q$  inteiro, para a mesma função perfil  $f(r)$  e mapa racional  $u(w)$  pode ser construída através do assim chamado ansatz produto.<sup>4</sup> De fato, considere dado mapa racional  $u(w)$  de grau topológico  $n$ , tal como feito acima, e escolha uma função perfil monotônica  $f_1(r)$  com as seguintes condições de borda  $f_1(0) = 2\pi$  e  $f_1(\infty) = 0$  ( $s = 1$ ) ou  $f_1(0) = 0$  e  $f_1(\infty) = 2\pi$  ( $s = -1$ ). Tais campos escalares constroem, através da parametrização (2.52) e de (3.55), Skyrmons auto duais de carga topológica ( $sn$ ) e cujos campos  $SU(2)$  serão denotados por  $U_{(n)}$ . Então, poder-se-ia usar o ansatz produto<sup>4</sup> para construir Skyrmons auto duais de carga ( $smn$ ) elevando os campos  $SU(2)$  a  $m$ -ésima potência, i.e. tomando tais campos como  $U_{(mn)} = U_{(n)}^m = W^\dagger e^{im f_1 T_3} W$ , onde na última igualdade se usou (2.52). Note que isso é equivalente a escolher  $U_{(n)}$  e se transformar  $f_1 \rightarrow m f_1$ . Consequentemente, dada uma função perfil  $f_1$ , o número de possibilidades de se construir soluções auto duais de carga de Skyme  $Q = smn$  através do ansatz produto, variando apenas o grau topológico de  $u$  ou o valor de  $m$ , corresponde ao número de possibilidades ( $mn$ ) de se escrever  $|Q|$  como um produto de dois números naturais.

Como dito anteriormente, qualquer mapa entre 3-esferas  $U$  leva a soluções auto duais de (3.31), já que os campos  $h$  atuam como espectres se ajustando para qualquer configuração dos campos  $SU(2)$  através da relação (3.18). Portanto, o setor auto dual da teoria (2.31) é infinitamente degenerado para cada valor de  $Q$ . De fato, mesmo dentro do ansatz holomórfico construído nesta seção as soluções auto duais são infinitamente degeneradas, já que deformações suaves na função perfil que não alterem suas condições de borda preservam a carga topológica e, por consequência, a energia estática (2.47). Em adição, já que se pode escolher livremente os polinômios  $p(w)$ ,  $q(w)$  e a função perfil  $f(r)$  monotônica com condições de borda apropriadas, então todas as configurações obtidas através do ansatz mapa racional vistas na seção 2.2 são soluções exatas particulares do modelo de Skyrme BPS (2.31). Isto inclui as configurações de campo apresentadas com  $Q \geq 2$  que podem se aproximar bastante dos Skyrmons tradicionais, apesar de não serem soluções do modelo de Skyrme padrão.

Em ordem a se construir exemplos explícitos de Skyrmons BPS de carga topológica arbitrária dentro do ansatz holomórfico, note primeiro que usando as coordenadas (3.43) a variável complexa  $w$  pode ser escrita como

$$w = \frac{x_2 + i x_1}{r - x_3} = i \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\varphi}. \quad (3.57)$$

Note também que como a matriz  $\tilde{h}$  dada em (3.47) é diagonal, ela é então formada somente pelos autovalores da matriz  $h$  que pode ser obtida a partir de (3.42), (3.49) e (3.50). Usando (3.26), (3.47), (3.42), (3.53) e introduzindo o Wronskiano como

$$W(q(w), p(w)) \equiv \det \begin{pmatrix} q & p \\ d_w q & d_w p \end{pmatrix} = q d_w p - p d_w q, \quad (3.58)$$

onde  $d_w = \frac{d}{dw}$ , segue-se que a densidade de carga topológica  $\mathcal{Q}$  e a matriz  $\tilde{h}$  se tornam respectivamente

$$\mathcal{Q} = -\frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial_r f \sin^2(f/2)}{r^2} \frac{(1 + |w|^2)^2}{(|p|^2 + |q|^2)^2} |W(w)|^2, \quad (3.59)$$

$$\tilde{h} = \frac{\partial_r f}{\lambda} \text{diag.} \left( 1, 1, \frac{4 \sin^2(f/2)}{r^2 (\partial_r f)^2} \frac{(1 + |w|^2)^2}{(|p|^2 + |q|^2)^2} |W(w)|^2 \right). \quad (3.60)$$

Note que se o Wronskiano (3.58) se anula para algum valor de  $w$ , o que devido à (3.57) corresponde a uma direção angular  $(\theta, \varphi)$ , para qual a densidade de carga topológica (3.59) e o autovalor  $\tilde{h}_{33}$  de (3.60) se anulam para todo valor de  $r$ . O mesmo vale para a densidade de energia dentro do setor auto dual, pois esta é diretamente proporcional à  $|Q|$ . Como o Wronskiano tem grau polinomial igual ou inferior à  $(2n - 2)$  (ver seção (2.2)), então para  $n \geq 2$ , o que por consequência de (3.56) implica em  $|Q| \geq 2|m|$ , segue-se que caso o Wronskiano possua raízes então os Skyrmons auto duais não devem ter simetria

radial. Em adição, usando (3.54), (3.56), e (3.59) a raiz do raio quadrático médio (raio RMS) dos Skyrmion BPS dentro do ansatz holomórfico (3.45) pode ser introduzida como

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} \equiv \sqrt{\frac{\int d^3x r^2 \mathcal{Q}}{Q}} = \sqrt{\frac{-s \int_0^\infty dr r^2 \partial_r f \sin^2(f/2)}{\pi m}}. \quad (3.61)$$

Resulta de (3.61) que o raio RMS dentro do ansatz holomórfico (3.45) independe completamente da escolha do mapa racional  $u(w)$ , o qual é função somente dos ângulos  $\varphi$  e  $\theta$  (ver (3.57)), sendo inclusive independente de seu grau topológico  $n$ .

Usando (3.57), considere agora uma função perfil com as condições de borda definidas acima e a escolha particular  $p(w) = w^n$  e  $q(w) = 1$ . Segue-se que ambas as expressões (3.59) e (3.60) passam a depender apenas de  $r$  e  $|w|^2 = \cot^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$  e portanto têm simetria axial. Em adição, para  $n > 1$  o Wroskiano (3.58)  nulo somente para  $|w| = 0$ , i.e. no eixo  $x_3$  das coordenadas (3.43). Em particular, para  $n = 1$  ( $u = w$ ) os Skyrmons BPS têm simetria radial para todos os valores de  $Q$ , i.e. (3.59) e (3.60) são reduzidas a funções radiais dadas respectivamente por

$$\mathcal{Q}_{u=w} = -\frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial_r f \sin^2(f/2)}{r^2}, \quad \tilde{h}_{u=w} = \frac{\partial_r f}{\lambda} \text{diag.} \left( 1, 1, \frac{4 \sin^2(f/2)}{r^2 (\partial_r f)^2} \right). \quad (3.62)$$

Os Skyrmons BPS radiais são especialmente interessantes para futuras extensões da teoria (2.31), pois são condizentes com as tentativas de se interpretar a densidade de carga topológica como sendo, a menos de uma constante de proporcionalidade, a densidade de matéria para núcleos pesados. Para explorar melhor as consequências da escolha  $u = w$ , note primeiro que devido  (3.26) e (3.25) o sinal da densidade de carga topológica, em todas as regiões espaciais onde  $\mathcal{Q} \neq 0$ , é fixo e corresponde à  $\text{sign}(\mathcal{Q}) = -\text{sign}(\lambda) = \text{sign}(Q)$ . Em adição, a partir de (3.62) se obtm que  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{Q}(\epsilon) = -[\partial_r f(0)]^3 / (16\pi^2)$ , e portanto  $\mathcal{Q}$  tende a se anular na origem se, e somente se  $\partial_r f(0) = 0$ . Claramente,  $\mathcal{Q}$  deve se anular no infinito espacial para que a carga topológica convirja. Como  $f(r)$   monotônica e tem contradomínio  $[0, 2\pi m]$ , então a densidade de carga topológica (3.62) irá se anular, para  $r > 0$  finito, nos  $(m - 1)$  raios  $r_k$  definidos através de  $f(r_k) = 2\pi k, \forall k \in \{1, \dots, m - 1\}$ , se  $\partial_r f(r_k)$  não divergir. Portanto, se  $\partial_r f$  for finito em todo espaço, então há  $m$  valores de  $r$ , ou equivalentemente  $m$  cascas esféricas, onde a densidade de carga topológica (3.62) se anula, incluso o infinito espacial. Contudo, pode ser possível que exista uma função perfil na qual  $\partial_r f(r_k)$  divirja para todos os  $(m - 1)$  raios  $r_k$  de modo a densidade de carga topológica (3.62) não se anular para  $r$  finito.

Introduza a coordenada radial adimensional  $\zeta$  (ver (2.32)) e o sistema de coordenadas adimensionais definido em termos da coordenadas Cartesianas (3.43) como

$$\zeta \equiv |m_0 e_0| r, \quad y_i \equiv |m_0 e_0| x_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.63)$$

Para se construir explicitamente Skyrmons auto duais exatos com simetria axial para todos os valores possíveis de  $Q = s m n$ , considere a configuração particular

$$f = 4 m \arctan \left[ \left( \frac{a}{\zeta} \right)^s \right], \quad p(w) = w^n, \quad q(w) = 1, \quad s = \pm 1, \quad (3.64)$$

onde  $u(w) = w^n$  e  $a$  é uma constante positiva adimensional e não depende das constantes de acoplamento de teoria (2.31). Note que a partir de (2.48), (3.31) e (3.56) se obtém  $s = -\text{sign}(\lambda)$  e portanto  $\lambda = -s |m_0 e_0|$ . Para a configuração de campo (3.64) a densidade de carga topológica (3.59) e  $\tilde{h}$  dada por (3.60) se tornam respectivamente

$$Q = \frac{s 4 m n^2 |m_0 e_0|^3}{a \pi^2} \frac{\sin^2 \left( 2 m \arctan \left[ \left( \frac{a}{\zeta} \right)^s \right] \right)}{\zeta^2 \left( 1 + \frac{\zeta^2}{a^2} \right)} \left[ \frac{\cot^n \left( \frac{\theta}{2} \right)}{\sin \theta \left( 1 + \cot^{2n} \left( \frac{\theta}{2} \right) \right)} \right]^2, \quad (3.65)$$

$$\tilde{h} = \frac{4 m}{a \left( 1 + \frac{\zeta^2}{a^2} \right)} \text{diag.} \left( 1, 1, \frac{n^2 \sin^2 \left( 2 m \arctan \left[ \left( \frac{a}{\zeta} \right)^s \right] \right)}{m^2 \zeta^2} \left[ \frac{a \left( 1 + \frac{\zeta^2}{a^2} \right) \cot^n \left( \frac{\theta}{2} \right)}{\sin \theta \left( 1 + \cot^{2n} \left( \frac{\theta}{2} \right) \right)} \right]^2 \right).$$

Como  $Q$  é adimensional, a densidade de carga topológica (3.59) tem dimensão de [comprimento]<sup>-3</sup>. Contudo, como a teoria (2.31) é invariante conforme em 3 dimensões espaciais, sendo em particular invariante por dilatações, então os Skyrmons BPS não possuem tamanho fixo. A título de exemplo, considere a configuração de campo particular (3.64) com  $m = 1$  e  $u(w) = w$  ( $n = 1$ ). Conseqüentemente, a densidade de carga topológica (3.65) se torna puramente radial e é dada por

$$Q = s \frac{4 |m_0 e_0|^3}{a^3 \pi^2} \frac{1}{\left( 1 + \frac{\zeta^2}{a^2} \right)^3}. \quad (3.66)$$

Usando (3.66) o raio RMS (3.61) dos Skyrmon BPS radiais se torna

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} = \frac{\sqrt{3} a}{|m_0 e_0|}. \quad (3.67)$$

Note que o parâmetro  $a$  é totalmente arbitrário devido a invariância por dilatações espaciais da teoria (2.31), o que também se estende para o raio RMS (3.67). Portanto, assim como se esperava, os Skyrmons BPS dentro do ansatz holomórfico associados à configuração (3.64) podem ser tão grandes ou pequenos quanto se queria. Em adição, note que o módulo da densidade de carga topológica (3.66) é monotonicamente decrescente com  $\zeta$  e seu valor máximo é dado por  $|Q|_M = |Q(\zeta = 0)| = 4 |m_0 e_0|^3 / (a^3 \pi^2)$ , o qual cresce inversamente ao raio RMS (3.67) já que  $|Q(\zeta = 0)| \propto \left( \sqrt{\langle r^2 \rangle} \right)^{-3}$ . Portanto, quanto mais localizada espacialmente for a função perfil (3.64) com  $m = 1$ , ou equivalentemente quando menor for valor o raio RMS (3.67) ou o valor de  $a$ , maior será o valor máximo da densidade de carga topológica (3.66).

Três simples exemplos de isosuperfície de carga topológica para Skyrmons BPS dentro do ansatz holomórfico podem ser vista na Figura 5. Nesta se utilizou as coordenadas Cartesianas adimensionais (3.63), a função perfil  $f(\zeta)$  dada em (3.64) com  $a = 1$  e  $m = 1$  e os seguintes mapas racionais  $u = w, w^2, \frac{w^3 - i\sqrt{3}w}{i\sqrt{3}w^2 - 1}$ , onde os dois últimos correspondem aos dois mapas de menor grau topológico de (2.29). As figuras não estão em escala e os eixos  $(y_1, y_2, y_3)$  foram omitidos por simplicidade. Em adição, para cada configuração de campo considerada com  $Q = 1, 2, 3$  se normalizou a densidade de carga topológica (3.59) com seu valor máximo  $\mathcal{Q}_M$ , os quais correspondem respectivamente à  $\mathcal{Q}_M / (4 |m_0 e_0|^3 / \pi^2) = 1, 4, 9$ . Tais mapas racionais escolhidos são justamente os que formam uma densidade de carga topológica (3.59) com a mesma simetria dos Skyrmons do modelo de Skyrme padrão para o mesmo valor de  $Q$ . Isto explica a semelhança entre a Figura 5 e os três Skyrmons de menor carga topológica vistos na Figura 2. Note também que a forma das isosuperfícies de carga topológica pode depender significativamente do valor de  $\mathcal{Q}$ , como pode ser visto no Skyrmon BPS com  $Q = 2$  e, mais claramente, na configuração de campo com  $Q = 3$  na Figura 5.

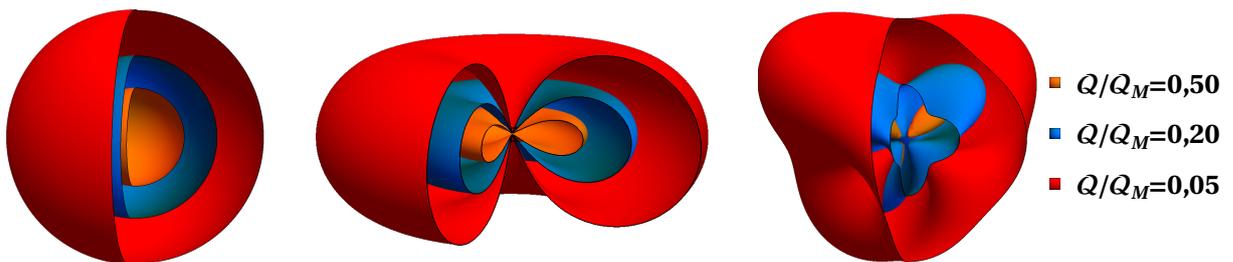


Figura 5 - As isosuperfícies de carga topológica (3.59) normalizadas com seu valor máximo  $\mathcal{Q}_M$  nas coordenadas Cartesianas adimensionais (3.63) para as configurações de campo  $f(\zeta) = 4 \arctan(1/\zeta)$  e, respectivamente da esquerda para a direita, para os mapas racionais  $u = w$  ( $Q = 1$ ),  $u = w^2$  ( $Q = 2$ ) e  $u = \frac{w^3 - i\sqrt{3}w}{i\sqrt{3}w^2 - 1}$  ( $Q = 3$ ).

Fonte: Elaborada pelo autor.

### 3.4 O ansatz toroidal

No Apêndice A.1 se demonstra, assim como feito no trabalho original,<sup>1</sup> que as equações de auto dualidade (3.31) são invariantes sobre transformações conformes na subvariedade de três dimensões espaciais do espaço de Minkowski  $3 + 1$  dimensional. Pode-se utilizar a combinações dessas simetrias externas com as simetrias internas do espaço alvo, por transformações nos campos dadas em (2.38) e (2.39), para construir um ansatz definido em termos de coordenadas toroidais.<sup>57,61</sup> Em ordem a implementar esse ansatz é conveniente utilizar a parametrização dos elementos do grupo  $SU(2)$  como

$$U = \begin{pmatrix} Z_2 & i Z_1 \\ i \bar{Z}_1 & \bar{Z}_2 \end{pmatrix}, \quad |Z_1|^2 + |Z_2|^2 = 1. \quad (3.68)$$

Seleciona-se dois subgrupos  $U(1)$  que comutam entre si do grupo de simetria  $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$  do espaço alvo, dadas em (2.38) e (2.39), como

$$U \rightarrow e^{i\alpha T_3} U e^{-i\alpha T_3}, \quad \text{ou} \quad Z_1 \rightarrow e^{i\alpha} Z_1, \quad Z_2 \rightarrow Z_2, \quad (3.69)$$

$$U \rightarrow e^{i\beta T_3} U e^{i\beta T_3}, \quad \text{ou} \quad Z_1 \rightarrow Z_1, \quad Z_2 \rightarrow e^{i\beta} Z_2. \quad (3.70)$$

Seleciona-se também dois subgrupos  $U(1)$  do grupo conforme em três dimensões espaciais que comutam entre si e que são definidos pelos campos vetoriais<sup>57,61</sup>

$$\partial_\varphi \equiv x^2 \partial_1 - x^1 \partial_2, \quad (3.71)$$

$$\partial_\xi \equiv \frac{x^3}{a} (x^1 \partial_1 + x^2 \partial_2) + \frac{1}{2a} (a^2 + x_3^2 - x_1^2 - x_2^2) \partial_3, \quad (3.72)$$

onde  $a$  é um parâmetro livre com dimensão de comprimento, e onde foram introduzidos os ângulos  $\varphi$  e  $\xi$  tais que os campos vetoriais acima geram rotações sobre estas direções angulares. As transformações (3.71) correspondem com as rotações no plano  $x_1 x_2$ , e (3.72) com a combinação linear de uma transformação conforme especial e uma translação ao longo da direção de  $x_3$ . Acontece que  $\varphi$  e  $\xi$  correspondem de fato aos dois ângulos das coordenadas toroidais em três dimensões definidas por

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{a}{p} \sqrt{z} \cos \varphi, & p &= 1 - \sqrt{1-z} \cos \xi, \\ x_2 &= \frac{a}{p} \sqrt{z} \sin \varphi, & 0 &\leq z \leq 1, \\ x_3 &= \frac{a}{p} \sqrt{1-z} \sin \xi, & 0 &\leq \varphi, \xi \leq 2\pi, \end{aligned} \quad (3.73)$$

onde a métrica Euclideana se torna

$$ds^2 = \frac{a^2}{p^2} \left[ \frac{dz^2}{4z(1-z)} + (1-z) d\xi^2 + z d\varphi^2 \right]. \quad (3.74)$$

Em ordem a construir um ansatz para  $U$  invariante sobre a ação conjunta dos subgrupos  $U(1)$  (3.69) e (3.71), e também invariante sobre a ação conjunta dos subgrupos (3.70) e (3.72), se pode tomar

$$Z_1 = \sqrt{F(z)} e^{in\varphi}, \quad Z_2 = \sqrt{1-F(z)} e^{im\xi}, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}^*, \quad (3.75)$$

com  $0 \leq F \leq 1$ . Isto é, neste ansatz a transformação (3.69) pode ser desfeita por uma translação em  $\varphi$ . Combinando estas duas transformações  $Z_1$  e  $Z_2$  não mudam e então o campo  $U$  permanece invariante. O mesmo pode ser realizado combinando a transformação (3.70) e uma translação em  $\xi$ . A partir de (3.68) e (3.75) se obtém

$$R_z = i \partial_z U U^\dagger = \frac{F'}{\sqrt{F(1-F)}} [-\cos(m\xi + n\varphi) T_1 + \sin(m\xi + n\varphi) T_2], \quad (3.76)$$

$$R_\xi = i \partial_\xi U U^\dagger = -2m \left[ \sqrt{F(1-F)} [\sin(m\xi + n\varphi) T_1 + \cos(m\xi + n\varphi) T_2] + (1-F) T_3 \right],$$

$$R_\varphi = i \partial_\varphi U U^\dagger = 2n \left[ \sqrt{F(1-F)} [\sin(m\xi + n\varphi) T_1 + \cos(m\xi + n\varphi) T_2] - F T_3 \right],$$

onde  $F'(z) = \frac{dF}{dz}$ . Tais quantidades satisfazem as seguintes relações de comutação

$$\begin{aligned} [R_z, R_\xi] &= -i \frac{m}{n} \frac{F'}{F} R_\varphi, \\ [R_\varphi, R_z] &= -i \frac{n}{m} \frac{F'}{(1-F)} R_\xi, \\ [R_\xi, R_\varphi] &= -i 4 m n \frac{F(1-F)}{F'} R_z. \end{aligned} \quad (3.77)$$

As equações de auto dualidade (3.31) se tornam

$$\begin{aligned} \lambda \frac{a}{p} R_z^b h_{ba} &= -2 m n \frac{1}{F'} \frac{F(1-F)}{z(1-z)} R_z^a, \\ \lambda \frac{a}{p} R_\xi^b h_{ba} &= -2 \frac{n}{m} F' \frac{(1-z)}{(1-F)} R_\xi^a, \\ \lambda \frac{a}{p} R_\varphi^b h_{ba} &= -2 \frac{m}{n} F' \frac{z}{F} R_\varphi^a. \end{aligned} \quad (3.78)$$

As equações de auto dualidade (3.78) implicam que as três quantidades  $R_z^a$ ,  $R_\xi^a$  e  $R_\varphi^a$ , são os autovetores da matriz  $h$ . Como os autovetores e autovalores são conhecidos, pode-se reconstruir a matriz  $h$  a partir de

$$h = M h^{(\text{diag.})} M^T, \quad M M^T = \mathbb{1}, \quad (3.79)$$

com

$$h^{(\text{diag.})} = -\frac{2}{\lambda} \frac{p}{a} \text{diag.} \left( m n \frac{1}{F'} \frac{F(1-F)}{z(1-z)}, \frac{n}{m} F' \frac{(1-z)}{(1-F)}, \frac{m}{n} F' \frac{z}{F} \right) \quad (3.80)$$

e

$$M = \begin{pmatrix} \cos(m\xi + n\varphi) & \sqrt{F} \sin(m\xi + n\varphi) & \sqrt{1-F} \sin(m\xi + n\varphi) \\ -\sin(m\xi + n\varphi) & \sqrt{F} \cos(m\xi + n\varphi) & \sqrt{1-F} \cos(m\xi + n\varphi) \\ 0 & \sqrt{1-F} & -\sqrt{F} \end{pmatrix}. \quad (3.81)$$

Sendo assim

$$\det h = \det h^{(\text{diag.})} = -m n \left[ \frac{2}{\lambda} \frac{p}{a} \right]^3 F'. \quad (3.82)$$

Em consequência de (3.26) e (3.82) a carga topológica associada a estas configurações auto duais é

$$Q = m n [F(1) - F(0)], \quad (3.83)$$

onde foi utilizado o fato de que o elemento de volume é  $d^3x = \frac{1}{2} \frac{a^3}{p^3} dz d\xi d\varphi$  (veja (3.74)). Escolhendo as condições de borda como  $F(0) = 0$  e  $F(1) = 1$  ou escolhendo  $F(0) = 1$  e  $F(1) = 0$ , obtêm-se respectivamente de (3.83) que  $Q = m n$  ou  $Q = -m n$ . Ambas as expressões de  $Q$  e as condições de borda da função perfil podem ser escritas respectivamente como

$$Q = s m n, \quad F(0) = \frac{1-s}{2}, \quad F(1) = \frac{1+s}{2}, \quad s \equiv \pm 1. \quad (3.84)$$

A expressão (3.84) é similar à expressão (3.56), apesar de em (3.84)  $m$  e  $n$  serem números inteiros e não números naturais como em (3.56). Portanto, de modo similar ao resultado que se seguiu da expressão (3.56), conclui-se de (3.84) que o número de possibilidades de se gerar Skyrmons auto duais dentro do ansatz toroidal (3.75), para cada função perfil e cada valor de  $Q$ , é igual ao número de possibilidades distintas de um de se escrever  $Q$  como o produto de dois números inteiros.

Note que as equações de autodualidade não determinam a função perfil  $F(z)$ . Contudo, para que a matriz  $h$  seja inversível é necessário que ambos  $m, n \neq 0$  e  $F' \neq 0$ . Em adição, como os autovalores  $\varphi_a$  devem ser positivos a relação (3.82) implica que

$$\text{sign}(\lambda m n F') = -1. \quad (3.85)$$

Consequentemente,  $F$  deve ser uma função monotônica em  $z$ , sendo crescente para  $\lambda m n < 0$  e decrescente para  $\lambda m n > 0$ . Tal relação é semelhante a equação (3.48) obtida para o ansatz holomórfico construído na seção 3.3.

A matriz  $\tau$  definida em (3.10) escrita em termos da parametrização (3.68), dentro do ansatz toroidal (3.75), é dada por

$$\tau_{ab} = \frac{p^2}{a^2} \left[ 4z(1-z) R_z^a R_z^b + \frac{1}{1-z} R_\xi^a R_\xi^b + \frac{1}{z} R_\phi^a R_\phi^b \right], \quad (3.86)$$

onde se usou (3.76). Portanto, pode-se escrever  $\tau$  como

$$\tau = M \tau_D M^T, \quad (3.87)$$

onde  $M$  é dada por (3.81) e

$$\tau_D = 4 \frac{p^2}{a^2} \text{diag.} \left( F'^2 \frac{z(1-z)}{F(1-F)}, m^2 \frac{(1-F)}{(1-z)}, n^2 \frac{F}{z} \right) \equiv \text{diag.} (\omega_1, \omega_2, \omega_3). \quad (3.88)$$

A partir de (3.79) e (3.87) pode-se ver que as matrizes  $h$  e  $\tau$  são de fato diagonalizadas pela mesma matriz ortogonal  $M$ , dada em (3.81), o que é compatível com (3.15). Em adição, comparando (3.80) e (3.88) se observa que os autovalores de  $h$  e  $\tau$  satisfazem as relações (3.16).

Em ordem a se construir explicitamente Skyrmons auto duais dentro do ansatz toroidal, primeiro note que a partir de (3.73), para  $p \neq 0$ , ou equivalentemente  $(z, \xi) \neq (0, 0), (0, 2\pi)$ , pode se reescrever  $r^2$  como

$$r^2 \equiv \sum_{i=1}^3 (x^i)^2 = \frac{a^2}{p^2} [z + (1-z) \sin^2 \xi] = \frac{a^2}{p} [1 + \sqrt{1-z} \cos \xi] = a^2 \frac{2-p}{p}. \quad (3.89)$$

Portanto, pode-se reescrever  $p$  como uma função radial dada por

$$p = \frac{2a^2}{r^2 + a^2} = \frac{2}{1 + \frac{r^2}{a^2}}. \quad (3.90)$$

Usando (3.26), (3.82) e (3.90) a densidade de carga topológica  $\mathcal{Q}$  se torna

$$\mathcal{Q} = \frac{m n}{2 \pi^2} \left( \frac{p}{a} \right)^3 F' = \frac{m n}{\pi^2 a^3} \frac{4 F'(z)}{\left( 1 + \frac{r^2}{a^2} \right)^3}. \quad (3.91)$$

Como consequência de (3.90) e já que coordenada  $z = \frac{4a^2(x_1^2+x_2^2)}{(a^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2)^2}$  é invariante sobre rotação no plano  $x_1 x_2$ , segue-se que para qualquer  $F(z)$  monotônico com as condições de borda discutidas acima, ambos  $h^{(\text{diag.})}$  e  $\mathcal{Q}$ , dados respectivamente em (3.82) e (3.80), têm simetria axial. Tal simetria pode ser vista nos três exemplos de Skyrmons auto duais toroidais vistos na Figura 6, na qual a densidade de carga topológica (3.91) foi escrita em termos das coordenadas Cartesianas adimensionais (3.63), e se escolheu a função perfil  $F(z) = m^2 z / (m^2 z + n^2(1 - z))$  e  $a \equiv |m_0 e_0|^{-1}$ , i.e.

$$\mathcal{Q} = \frac{4 m^3 n^3 |m_0 e_0|^3 (1 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)}{\pi^2 \left[ 4 m^2 (y_1^2 + y_2^2) + n^2 \left( (-1 + y_1^2 + y_2^2)^2 + 2 (1 + y_1^2 + y_2^2) y_3^2 + y_3^4 \right) \right]^2}. \quad (3.92)$$

Em adição, para cada par  $(m, n) = (1, 1), (1, 2), (2, 1)$ , com as cargas topológicas respectivas  $Q = 1, 2, 2$ , se normalizou a densidade de carga topológica (3.92) com seu valor máximo  $\mathcal{Q}_M$ , os quais correspondem respectivamente à  $\mathcal{Q}_M / (4 |m_0 e_0|^3 / \pi^2) = 1, 1, 38627, 8$ . Como pode ser visto claramente a partir do Skyrmion BPS toroidal correspondente à  $(m, n) = (1, 2)$  na Figura 6, assim como os Skyrmons BPS holomórficos vistos na seção seção 3.3, a forma das isosuperfícies de carga topológica toroidais (3.92) podem depender significativamente do valor de  $\mathcal{Q}$ .

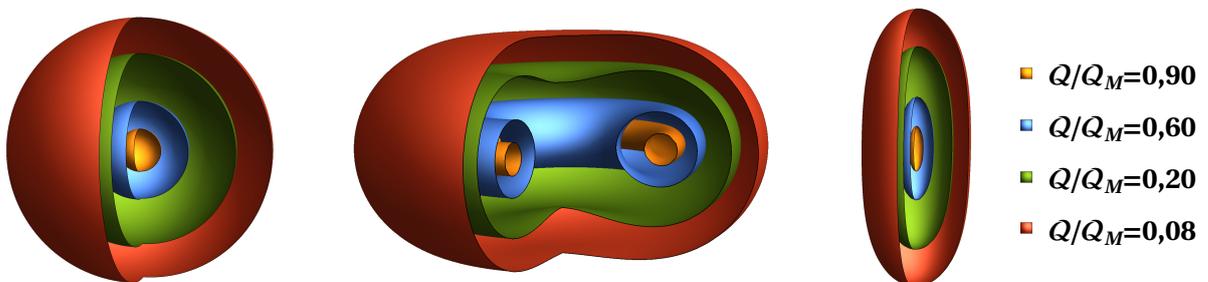


Figura 6 - As isosuperfícies da densidade de carga topológica (3.92) normalizada com seu máximo valor  $\mathcal{Q}_M$  nas coordenadas Cartesianas adimensionais (3.63) para, da esquerda para a direita,  $(m, n) = (1, 1), (1, 2), (2, 1)$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Como a coordenadas  $z$  definida em (3.73) não tem simetria radial, então a densidade de carga topológica (3.91), a qual é o produto de uma função radial com uma função de  $z$ , possui simetria radial se, e somente se,  $F'(z) = \alpha$ , com  $\alpha$  sendo uma constante real. Escrevendo tal relação como  $dF = \alpha dz$  e integrando de  $z = 0$  até  $z = 1$  se obtém que  $\alpha = F(1) - F(0)$ . Segue-se que a integral indefinida leva à  $F(z) = (F(1) - F(0)) z + c$ , com  $c$  sendo uma constante real e, tomando  $z = 0$ , segue-se também que  $c = F(0)$ . Por

outro lado, as condições de borda da função perfil já foram fixas por (3.84) e conclui-se que (3.91) é radial se, e somente se,  $F(z) = s z + (1 - s)/2$ , i.e.  $F = z$  ou  $F = 1 - z$  com a carga topológica sendo dada por (3.84). Para tais configurações de campo a densidade de carga topológica, obtida a partir de (3.26) e (3.82), se reduz à

$$\mathcal{Q} = s \frac{m n}{\pi^2 a^3} \frac{4}{\left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right)^3}. \quad (3.93)$$

Note que (3.93) é equivalente à expressão (3.66) para  $m = n = 1$ . Em adição, para (3.93) a quantidade  $|\mathcal{Q}|$  é monotonicamente decrescente em  $r$  e se anula somente no infinito espacial. Portanto, tais Skyrmons BPS obtidos dentro do ansatz toroidal, com densidade de carga topológica dada por (3.93), são exemplos exatos de soluções estáticas bem comportadas e puramente radiais que podem ser construídas para todo valor de  $Q$  inteiro.

## 4 O MODELO DE SKYRME FALSO VÁCUO E SUA APLICAÇÃO PARA A FÍSICA NUCLEAR

A contribuição dominante para a energia de um núcleo provém da massa dos núcleons. Por outro lado, para um vasto número de núcleos a energia de ligação é apenas cerca de 1% da massa do núcleo. Uma abordagem interessante para a construção de teorias semelhantes ao modelo de Skyrme que possam vir a capturar essas propriedades é a extensão de teorias cuja cota BPS seja atingível para todo valor da carga de Skyrme ( $Q$ ). Neste capítulo se construirá o modelo de Skyrme Falso Vácuo definido como a soma de duas energias estáticas  $E_1$  e  $E_2$ , com  $E_1$  correspondendo à energia estática (3.7) do modelo de Skyrme BPS (2.31). O termo  $E_2$  introduz um termo cinético e potencial para a densidade bariônica, identificada com a densidade da carga de Skyrme  $\mathcal{Q}$ , além de um termo topológico para os campos  $U$  o qual reproduz aproximadamente a interação Coulombiana. Portanto,  $E_2$  é inteiramente definido em termos do campo de Skyrme ( $U$ ).

O modelo de Skyrme BPS (2.31) é particularmente interessante para ser estendido, pois como se demonstrou no Capítulo 3 as equações de Euler-Lagrange para os campo  $h$  são equivalentes as equações de autodualidade (3.31). Resulta que o setor estático é equivalente ao setor auto dual, onde as três componentes dos campos  $U \in SU(2)$  são totalmente livres, enquanto as seis componentes de  $h$  são totalmente determinadas em termos dos campos  $U$  através de (3.18). Isto significa que a introdução do termo  $E_2$  preserva as equações de Euler-Lagrange associadas aos campos  $h$ , e portanto pode vir a determinar o campo de Skyrme sem violar as equações de autodualidade (3.31), i.e. sem tirar os campos  $h$  de sua configuração auto dual (3.18). Consequentemente, as equações de Euler-Lagrange para os campos  $U$  associadas ao termo  $E_1$  são automaticamente satisfeitas e somente o termo  $E_2$  é capaz de determinar os campos de Skyrme.

Usando (3.18) a densidade de energia do termo  $E_1$  se torna  $\mathcal{E}_1 = 48 \pi^2 \frac{m_0}{\epsilon_0} | \mathcal{Q} |$ , e portanto toda densidade de energia do modelo fica definida em termos da densidade bariônica, a menos do termo topológico. Fazendo uma analogia entre a densidade bariônica e a densidade de um fluido, similar ao feito no modelo da gota líquida,<sup>36</sup> pode-se dizer que dentro do setor estático o modelo de Skyrme Falso Vácuo se comporta como um fluido autointeragente com interação Coulombiana. A dinâmica de tal fluido fica determinada apenas pelo termo  $E_2$  responsável por fixar os campos de Skyrme, o que também fixa  $\mathcal{Q}$ . Será demonstrado que estas três equações estáticas de Euler-Lagrange associadas aos campos  $U$  podem ser reduzidas a uma única equação diferencial de segunda ordem para uma fração de potência  $\psi$  da a densidade bariônica, a qual recai no problema do falso vácuo de S. Coleman.<sup>9-11</sup> Consequentemente, as soluções topológicas de menor energia estática, para cada valor de  $Q$ , possuem uma densidade bariônica com simetria radial. Esta estrutura do modelo de Skyrme Falso Vácuo pode descrever acuradamente algumas

propriedades da matéria nuclear, como a energia de ligação e o raio RMS para um vasta quantidade de núcleos.

#### 4.1 O modelo de Skyrme Falso Vácuo

O modelo de Skyrme Falso Vácuo é definido em termos de duas energias estáticas. A primeira parte  $E_1$  corresponde à energia estática do modelo de Skyrme BPS (2.31), introduzido propriamente na seção 2.3, a qual além dos campos quirais usuais  $U \in SU(2)$ , possui também seis campos escalares contidos nas entradas da matriz real, simétrica, positiva e invertível  $h$ , i.e.

$$E_1 \equiv \int d^3x \left[ \frac{m_0^2}{2} h_{ab} R_i^a R_i^b + \frac{1}{4 e_0^2} h_{ab}^{-1} H_{ij}^a H_{ij}^b \right], \quad (4.1)$$

com  $m_0$  e  $e_0$  sendo constantes de acoplamento com as respectivas dimensões  $[m_0] = \sqrt{[\text{energia}]/[\text{comprimento}]}$  e  $[e_0] = 1/\sqrt{[\text{energia}][\text{comprimento}]}$ . Em adição, definiu-se em (2.37) as quantidades  $R_\mu^a = i \widehat{\text{Tr}}(\partial_\mu U U^\dagger T_a)$  e  $H_{\mu\nu}^a = \varepsilon_{abc} R_\mu^b R_\nu^c$ , onde  $T_a$ , com  $a = 1, 2, 3$ , são os geradores da álgebra de Lie do grupo  $SU(2)$  satisfazendo  $[T_a, T_b] = i \varepsilon_{abc} T_c$ , e  $\widehat{\text{Tr}}(T_a T_b) = \delta_{ab}$ . Neste capítulo, se assumirá que ambas  $m_0$  e  $e_0$  são positivas e portanto as equações de autodualidade (3.31) são dadas por

$$\lambda h_{ab} R_i^b = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} H_{jk}^a, \quad \text{com} \quad \lambda = \pm m_0 e_0. \quad (4.2)$$

O sinal de  $\lambda$  caracteriza o setor dual ( $\lambda < 0$  e  $Q > 0$ ) e o setor anti-auto dual ( $\lambda > 0$  e  $Q < 0$ ) da teoria (4.1). Além disso, as soluções de (4.2) saturam a cota de Faddeev-Bogomolny (2.44) para sua energia estática a qual, usando (2.41), se torna

$$E_1 = 48 \pi^2 \frac{m_0}{e_0} |Q|, \quad \text{com} \quad Q = \frac{i}{48 \pi^2} \int d^3x \varepsilon_{ijk} \widehat{\text{Tr}}(R_i R_j R_k), \quad (4.3)$$

onde  $R_i = R_i^a T_a$ .

Uma maneira de se estender a teoria (4.1) é adicionar a energia estática  $E_2$  que dependa somente dos campos  $U$ , e portanto as equações de Euler-Lagrange estáticas associadas aos campos  $h$  permanecem as mesmas do modelo de Skyrme BPS (2.31). Conseqüentemente, tais equações são automaticamente satisfeitas pelas soluções (3.18) das equações de autodualidade (4.2), onde os campos  $h$  são inteiramente determinados em termos dos campos  $SU(2)$  pela relação  $h = \frac{\sqrt{\det \tau}}{m_0 e_0} \tau^{-1}$ , com  $\tau_{ab} = R_i^a R_i^b$ . Note a partir desta última equação que só há seis equações de autodualidade independentes as quais são de fato equivalente as seis equações de Euler-Lagrange estáticas para os campos  $h$  associadas à  $E_1$  (ver seção 3.2). Considere então o modelo de Skyrme BPS estendido definido pela energia estática total

$$E = E_1 + E_2, \quad (4.4)$$

com  $E_1$  sendo dado por (4.1) e  $E_2$  sendo um funcional dos campos  $U$  e suas derivadas. A parte das equações de Euler-Lagrange associadas aos campos  $U$  que provém do termo  $E_1$  também são automaticamente satisfeitas pelas soluções auto duais (3.18). Portanto, o termo  $E_1$  não influencia na determinação dos campos  $SU(2)$  nem contribuirá para a energia de ligação por núcleon associada à energia (4.4) e definida por

$$E_B = E(Q=1) - \frac{E(Q)}{|Q|} = E_2(Q=1) - \frac{E_2(Q)}{|Q|}, \quad (4.5)$$

onde se usou (4.3). É notável que a extensão feita por  $E_2$  pode quebrar a simetria conforme em três dimensões espaciais da teoria (4.1), mas preserva as equações de Euler-Lagrange associadas aos campos  $h$ .

Para que a teoria (4.4) seja análoga a uma teoria de fluído, i.e. para que suas soluções estáticas sejam definidas somente em termos da densidade bariônica, assim como o termo  $E_1$  dado (4.3), pode-se considerar  $E_2$  como uma função da densidade de carga topológica  $\mathcal{Q}$  e suas derivadas espaciais, a menos de um termo topológico. Para tal, considere  $E_2$  como função da quantidade  $\psi$ , a qual por sua vez é diretamente proporcional a uma fração de potência de  $\mathcal{Q}$ , i.e.

$$\psi^s \equiv -\frac{4\pi^2}{\lambda^3} \mathcal{Q} = -\frac{i}{12\lambda^3} \varepsilon_{ijk} \widehat{\text{Tr}}(R_i R_j R_k), \quad (4.6)$$

com  $s$  sendo um parâmetro real e positivo e onde se usou (4.3). Devido a (2.48) e (4.2) o parâmetro  $\lambda$  satisfaz  $\text{sign}(\lambda Q) = -1$  e tem dimensão de  $[\lambda] = [m_0 e_0] = [\text{comprimento}]^{-1}$ . Portanto, a introdução de  $\lambda$  em (4.6) faz com que  $\psi$  seja adimensional e positivo. Usando (3.25), (4.2) e (4.6) se obtêm que as equações de autodualidade implicam que  $\det h = 4\psi^s$ , e então a positividade de  $\psi$  se segue do fato que os autovalores de  $h$  são positivos.

Considere o termo  $E_2$  da energia estática (4.4) definido como

$$E_2 = \int d^3x \left[ \frac{\mu_0^2}{2} (\partial_i \psi)^2 + V(\psi) + G(U) \psi^s \right], \quad (4.7)$$

onde  $G(U)$  é um funcional dos campos  $U$ , mas não de suas derivadas, e  $\mu_0$  é uma constante de acoplamento positiva de dimensão  $[\mu_0] = \sqrt{[\text{energia}] / [\text{comprimento}]}$ . Note que o termo em (4.7) cujo integrando é  $G(U)$  é topológico, i.e. é invariante sobre transformações suaves nos campos  $U$ . Este termo difere da carga topológica  $\mathcal{Q}$  dada em (4.3), pois  $G$  atua como uma deformação no espaço alvo e pode quebrar a simetria  $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$  da teoria (4.1). Já que  $\psi$  depende apenas das primeiras derivadas dos campos  $U$ , segue-se o termo de mais alta ordem nas derivadas espaciais de  $U$  contido por  $E_2$  é de segunda ordem. Introduzindo as coordenadas Darboux do grupo  $SU(2)$  onde tais elementos são escritos em termos de três campos escalares reais  $F$ ,  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , definidos sobre  $\mathbb{R}^3$ , como

$$U = \begin{pmatrix} \sqrt{1-F} e^{i\theta_2} & i\sqrt{F} e^{i\theta_1} \\ -i\sqrt{F} e^{i\theta_1} & \sqrt{1-F} e^{-i\theta_2} \end{pmatrix}, \quad 0 \leq F \leq 1, \quad 0 \leq \theta_a \leq 2\pi, \quad a = 1, 2 \quad (4.8)$$

e usando também (2.37) e (4.6) se obtêm

$$\psi^s = \frac{1}{\lambda^3} \varepsilon_{ijk} \partial_i F \partial_j \theta_1 \partial_k \theta_2. \quad (4.9)$$

Variando (4.7) com respeito à  $\psi$  obtém-se

$$\delta_\psi E_2 = \int d^3x \left[ -\mu_0^2 \partial^2 \psi + \frac{\delta V(\psi)}{\delta \psi} \right] \delta \psi, \quad (4.10)$$

onde o termo de superfície foi desprezado. Portanto, usando  $\delta \psi = \frac{\delta \psi^s}{s \psi^{s-1}}$ , (4.9) e (4.10) a variação de (4.7) com respeito ao campo  $F$  é dada por

$$\delta_F E_2 = \frac{1}{\lambda^3} \int d^3x \delta F \varepsilon_{ijk} \partial_j \theta_1 \partial_k \theta_2 \partial_i \left[ \frac{1}{s \psi^{s-1}} \left( \mu_0^2 \partial^2 \psi - \frac{\delta V(\psi)}{\delta \psi} \right) \right], \quad (4.11)$$

onde se usou também  $\varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j \theta_a = 0$  e o termo de superfície foi desprezado. As variações de (4.7) com respeito aos campos  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são similares à (4.11) e então estas se anulam para

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} \partial_j \theta_1 \partial_k \theta_2 \partial_i \left[ \frac{1}{s \psi^{s-1}} \left( \mu_0^2 \partial^2 \psi - \frac{\delta V(\psi)}{\delta \psi} \right) \right] &= 0, \\ \varepsilon_{ijk} \partial_i F \partial_k \theta_2 \partial_j \left[ \frac{1}{s \psi^{s-1}} \left( \mu_0^2 \partial^2 \psi - \frac{\delta V(\psi)}{\delta \psi} \right) \right] &= 0, \\ \varepsilon_{ijk} \partial_i F \partial_j \theta_1 \partial_k \left[ \frac{1}{s \psi^{s-1}} \left( \mu_0^2 \partial^2 \psi - \frac{\delta V(\psi)}{\delta \psi} \right) \right] &= 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Segue-se de (4.12) que as três equações de Euler-Lagrange associadas aos campos  $U$  são equivalentes à uma única equação diferencial de segunda ordem em  $\psi$  dada por

$$\mu_0^2 \partial^2 \psi - \frac{\delta V_{\text{ef}}}{\delta \psi} = 0, \quad V_{\text{ef}} \equiv V - c \psi^s, \quad (4.13)$$

onde  $c$  é uma constante de integração que aparece da integração de qualquer uma das equações (4.12) que levam à (4.13). Claramente, se  $\psi$  for tomado como um grau de liberdade fundamental, ao invés de (4.13) provir das equações de Euler-Lagrange de (4.7) associadas aos campos  $U$ , a equação (4.13) corresponde com a equação de Euler-Lagrange associada ao campo  $\psi$  que extremiza o funcional

$$E_{\text{ef}} = \int d^3x \left[ \frac{\mu_0^2}{2} (\partial_i \psi)^2 + V(\psi) - c \psi^s \right]. \quad (4.14)$$

A equação (4.13) é a única que precisa ser resolvida para se construir os Skyrmions da teoria (4.4), e para cada escolha de  $c$  tal que  $V_{\text{ef}}$  seja um potencial admissível<sup>9-11</sup> esta possui ao menos uma solução. Por outro lado, usando (4.6) as soluções de (4.13) aceitáveis são aquelas onde a carga topológica

$$Q = -\frac{\lambda^3}{4\pi^2} \int d^3x \psi^s \quad (4.15)$$

é um número inteiro. Caso contrário, não seria possível de se integrar (4.6) para a partir da expressão de  $\psi$  se obter os campos de Skyrme  $U$  com as condições de borda apropriadas. Em adição, o parâmetro  $c$  atua como uma constante de acoplamento que pode correr com outros parâmetros do modelo, como a energia total ou, como será assumido neste capítulo, a carga topológica. Note que variando  $c$  se muda a solução de (4.13) e conseqüentemente o valor da carga topológica (4.15). Contudo, já que  $Q$  é um conjunto discreto de números inteiros, então os valores  $c$  associados a tal conjunto através das equações (4.6) e (4.15) formam uma seqüência discreta de números reais.

A densidade de carga bariônica deve ir a zero no infinito espacial para que (4.15) seja finito, i.e.  $\mathcal{Q} \rightarrow 0$  e  $\psi \rightarrow 0$  quando  $r \rightarrow \infty$ . Logo,  $\psi = 0$  deve ser um extremo de  $V_{\text{ef.}}$ . Em ordem a se obter  $E_{\text{ef.}}$  finito é necessário também que o potencial  $V$  seja construído de tal forma que  $V_{\text{ef.}}(0) = 0$ . Então,  $\psi = 0$  deve ser um mínimo local de  $V_{\text{ef.}}$ .

As soluções de (4.13) devem ser estáveis sobre o argumento de escala de Derrick.<sup>10,12</sup> De fato, escreva (4.14) como  $E_{\text{ef.}} = T + U_{\text{ef.}}$ , com  $T \equiv \int d^3x \frac{\mu_0^2}{2} (\partial_i \psi)^2$  e  $U_{\text{ef.}} \equiv \int d^3x V_{\text{ef.}}$  sendo respectivamente a energia cinética e energia potencial efetiva de (4.14). Definindo a transformação de escala  $\psi_\alpha(x) = \psi(x/\alpha)$ , com  $\alpha > 0$ , tais energias se transformam como  $T \rightarrow \alpha T$  e  $U_{\text{ef.}} \rightarrow \alpha^3 U_{\text{ef.}}$ . Qualquer solução de (4.13) torna  $E_{\text{ef.}}$  estacionária, e então (4.14) deve ser estacionária sob transformações de escala quando se impõe (4.13). Logo, segue-se do argumento de Derrick que

$$T + 3U_{\text{ef.}} = 0, \quad \text{e então} \quad E_{\text{ef.}} = \frac{2}{3} T. \quad (4.16)$$

Portanto,  $E_{\text{ef.}}$  é positivo e  $U_{\text{ef.}}$  é negativo quando tais funcionais são calculados para as soluções topológicas não triviais ( $\psi$  não identicamente nulo em todo espaço) de (4.13). Conclui-se que  $V_{\text{ef.}}$  deve ser negativo em alguma região do espaço alvo de  $\psi$  e conseqüentemente se é levado espontaneamente ao problema do falso vácuo de S. Coleman.<sup>9-11</sup>

Para um dado potencial  $V$  as soluções de (4.13) são funções da constante de integração  $c$ , e então da carga topológica  $Q$ . Usando (4.16) se pode demonstrar que a energia de ligação por núcleon (4.5) satisfaz  $\partial_{|Q|} E_B = (2/3) T/Q^2 - [ |Q| \partial_{|Q|} Q_G - Q_G ] / Q^2$ , onde  $Q_G \equiv \int d^3x G(U) \psi^s$ , e em adição  $T/Q^2 < (12\pi^2/m_0^3 e_0^3) c / |Q|$  (ver Apêndice B.1). Portanto, se  $c$  é uma função monotonicamente decrescente em  $|Q|$ , o que pode ser averiguado para muitos potenciais  $V$ , então a quantidade positiva  $T/Q^2$  tende a zero quando  $|Q|$  tende a infinito. Logo, para  $Q_G = 0$  a energia de ligação por núcleon é monotonicamente crescente e satura quando  $|Q|$  tende ao infinito. Para os núcleos pesados o número de prótons e nêutrons não diferem drasticamente, e portanto a carga elétrica deve ser aproximadamente proporcional à  $|Q|$ . É esperado que a energia de ligação por núcleon decresça para núcleos pesados devido a energia de interação Coulombiana e, para reproduzir tal comportamento aproximadamente, seria conveniente escolher o funcional  $G(U)$  tal que  $Q_G$  seja positivo e proporcional à  $Q^2$ . Conseqüentemente,  $\partial_Q E_B = (2/3) T/Q^2 - \text{const.}$ , e então a partir de algum valor de  $|Q|$  a constante se torna maior do que a quantidade  $T/Q^2$ ,

i.e.  $E_B$  se tornará decrescente com  $|Q|$ . Em especial, tal decrescimento é aproximadamente linear para  $|Q| \rightarrow \infty$ . Logo, se  $c$  é uma função monotonicamente decrescente com  $|Q|$ , a dinâmica da teoria (4.4) reproduz de maneira robusta o comportamento principal da energia de ligação por núcleon experimental.

A equação (4.13) possui ao menos uma solução monotônica e esfericamente simétrica  $\psi_s$  a qual se anula no infinito espacial, além da solução trivial  $\psi = 0$ .<sup>10</sup> Em adição, tal solução tem energia efetiva  $E_{\text{ef.}}(\psi_c)$  menor ou igual a qualquer outra solução que também se anule no infino espacial. Devido à (4.6), tais soluções  $\psi_s$  têm associada uma densidade de carga topológica que também se anula somente no infinito espacial, possuem simetria radial e seu módulo é monotonicamente decrescente. Em adição, o potencial efetivo  $V_{\text{ef.}}$  deve ser um potencial *admissível*,<sup>10</sup> i.e. deve satisfazer as seguintes propriedades: i)  $V_{\text{ef.}}(\psi)$  é continuamente diferenciável para todo  $\psi$ ; ii)  $V_{\text{ef.}}(0) = \partial_\psi V_{\text{ef.}}(0) = 0$ ; iii)  $V_{\text{ef.}}(\psi)$  é negativo em alguma região de seu domínio; iv) Existe números positivos  $a, b, \alpha, \beta$  tais que  $\alpha < \beta < N/(N-2)$  e  $V_{\text{ef.}} \geq a\psi^\alpha - b\psi^\beta$  para todo  $\psi \geq 0$ , com  $N$  sendo o número de dimensões espaciais, e portanto  $N = 3$ .

Note que  $E_2$  e  $E_{\text{ef.}}$  diferem por um termo topológico  $\int d^3x (G - c) \psi^s$ , o qual é constante dentro de uma classe de homotopia. Logo, o mínimo de  $E_2$  para dado valor de carga de Skyrme  $Q$  corresponde com o mínimo de  $E_{\text{ef.}}$  para o mesmo valor de  $Q$ . Consequentemente, os mínimos de  $E_2$  correspondem também à soluções monotônicas esfericamente simétricas. Considere a parametrização dos campos  $U$  em termos da função perfil  $f$  e um campo escalar complexo  $u$ , junto de seu complexo conjugado  $\bar{u}$ , dada por (2.52) e o sistema de coordenadas (3.43). Para obter tais soluções onde a quantidade  $\psi$ , ou equivalentemente a densidade de carga topológica, tem simetria radial pode-se utilizar o ansatz holomórfico (2.59) para os campos  $U$  com  $u(w) = w$ . De fato, o ansatz (2.59) junto as equações de autodualidade (4.2) implicam que  $Q$  e os autovalores de  $h$ , dados em (3.62), têm simetria radial (ver seção 3.3). Em adição, a matriz que diagonaliza  $h$  é dada pela representação adjunta (tripleto) do grupo  $V = W^\dagger e^{ifT_3/2}$ , ou seja  $d(V) = d(W^\dagger) d(e^{ifT_3/2})$ , onde utilizou-se (2.40), (2.52), (3.10) e (3.18) e as matrizes  $d(W^\dagger)$  e  $d(e^{ifT_3/2})$  são dadas respectivamente pelas equações (3.49) e (3.50) restritas à  $u = w$ .

Como o mapa entre 2-esferas  $u$  tem grau topológico  $n = 1$ , segue-se que a carga topológica (3.56) é reduzida à  $Q = \bar{s}m$ , onde  $m$  é um número natural e  $\bar{s} = 1$  para as condições de borda  $f(0) = 2m\pi$  e  $f(\infty) = 0$  e  $\bar{s} = -1$  para  $f(0) = 0$  e  $f(\infty) = 2m\pi$ . Note que usando adicionalmente (3.48) e  $f' = \frac{df}{dr}$  se obtêm  $\bar{s} = \text{sign}(Q) = -\text{sign}(\lambda) = -\text{sign}(f')$  e o sinal de  $f'$  é fixo em todo espaço. Usando (3.62), (3.42) e a positividade dos autovalores de  $h$ , segue-se que a função perfil  $f(r)$  deve ser monotonicamente decrescente no setor autodual ( $\lambda < 0$  e  $Q > 0$ ) e monotonicamente crescente no setor anti-auto dual ( $\lambda > 0$  e  $Q < 0$ ). Para se interpretar  $Q$  como sendo exatamente o número de núcleons irá

se considerar neste capítulo o setor dual, i.e.

$$\lambda = -m_0 e_0 < 0 \quad \Rightarrow \quad Q > 0 \quad \text{e} \quad f(0) = 2\pi Q, \quad f(\infty) = 0. \quad (4.17)$$

Como se verá posteriormente, pode-se encontrar as soluções  $\psi_{\text{sol.}}$  de (4.13) numericamente e então se obter as cargas topológicas sem a necessidade de integrar (4.6) para se obter a função perfil. Em adição, a partir de (4.6), ou equivalentemente de  $\det h = 4\psi^s$ , e (3.62) se obtêm

$$\psi^s = -(m_0 e_0)^{-3} \frac{1}{2r^2} \frac{d}{dr} [f - \sin f]. \quad (4.18)$$

Como afirmado acima, as soluções  $\psi$  da equação (4.13) são, além de não negativas e radiais, monotonicamente decrescentes e se anulam somente no infinito espacial, o que também se estende para  $Q$  devido à (4.6) e em adição se tem  $\text{sign}(Q) = -\text{sign}(\lambda) > 0$ . Apesar de  $Q$  ser indefinido na origem devido ao fator  $r^{-2}$  em (3.62), seu limite  $\lim_{r \rightarrow 0^+} Q(r) \propto (f'(0))^3$  não pode se anular para soluções topológicas de (4.13) não triviais e consequentemente  $f'(0) \neq 0$ . Contudo, decorre do ansatz holomórfico para os campos  $U$  e da escolha  $u = w$  que se  $f'(r)$  for finito para todo valor de  $r$ , então segue-se que  $Q$  se anula para  $m$  valores distintos do raio  $r > 0$  (ver seção 3.3). Um destes raios corresponde ao infinito espacial e os demais correspondem aos valores  $r_k$  do raio tais que  $f(r_k) = 2\pi k$ ,  $\forall k \in \{1, \dots, m-1\}$ . Portanto, as soluções de (4.13) que se anulam somente no infinito espacial devem ter associadas uma função perfil  $f$  tal que sua derivada primeira divirja negativamente para tais  $(m-1)$  valores de  $r$ .

Considere o seguinte potencial admissível

$$V_{\text{ef.}} = V - c\psi^s = \beta_2^2 \psi^2 - c\psi^s + \beta_\kappa^2 \psi^\kappa, \quad 6 > s > 2, \quad \kappa > 2, \quad (4.19)$$

o qual define também o potencial físico original da teoria (4.4) como  $V = \beta_2^2 \psi^2 + \beta_\kappa^2 \psi^\kappa$ , onde as constantes de acoplamento  $\beta_2$  e  $\beta_\kappa$  têm dimensão de  $[\beta_2] = [\beta_\kappa] = \sqrt{[\text{energia}] / [\text{comprimento}]^3}$ . Note que para qualquer configuração de  $\psi$  constante  $\psi = \alpha > 0$ , com  $\alpha$  sendo qualquer valor de  $\psi$  na região em que  $V_{\text{ef.}}$  é negativo, a energia efetiva (4.14) diverge negativamente já que  $U_{\text{ef.}} \equiv \int d^3x V_{\text{ef.}} \rightarrow -\infty$ . Contudo, para tais soluções a energia física (4.4) diverge positivamente, pois  $U \equiv \int d^3x V \rightarrow +\infty$ . Em adição, se  $G(U)$  é não negativo em todo seu domínio, então a densidade de energia do modelo original (4.4) é não negativa para todos os campos  $U$  e  $h$ , apesar da densidade de energia efetiva de (4.14) não o ser.

Para analisar melhor o papel dos parâmetros do modelo, defina as quantidades adimensionais

$$\zeta = \left( \frac{\beta_2}{\mu_0} \right) r, \quad \hat{\psi} = \left( \frac{\beta_\kappa^2}{\beta_2^2} \right)^{\frac{1}{(\kappa-2)}} \psi, \quad \gamma = \left( \frac{c}{\beta_2^2} \right) \left( \frac{\beta_2^2}{\beta_\kappa^2} \right)^{\frac{s-2}{\kappa-2}}. \quad (4.20)$$

Usando (4.20) segue-se que (4.13) e (4.15) são reduzidos respectivamente à

$$\frac{d^2 \hat{\psi}}{d\zeta^2} + \frac{2}{\zeta} \frac{d\hat{\psi}}{d\zeta} - \frac{\delta \hat{V}_{\text{ef.}}}{\delta \hat{\psi}} = 0, \quad \hat{V}_{\text{ef.}} = \hat{V} - \gamma \hat{\psi}^s = \hat{\psi}^2 - \gamma \hat{\psi}^s + \hat{\psi}^\kappa, \quad (4.21)$$

$$Q = \left( \frac{\mu_0}{\beta_2} \right)^3 \vartheta I(\gamma, s, \kappa), \quad (4.22)$$

com  $\vartheta = (m_0 e_0)^3 (\beta_2^2 / \beta_\kappa^2)^{\frac{s}{\kappa-2}}$  e  $I = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\zeta \zeta^2 \hat{\psi}^s$ . Portanto, o raio RMS da carga bariônica é dado, assim como definido em (3.61), por

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} \equiv \sqrt{\frac{\int d^3x r^2 \psi^s}{\int d^3x \psi^s}} = \frac{\mu_0}{\beta_2} \Lambda(\gamma, s, \kappa), \quad \Lambda(\gamma, s, \kappa) \equiv \sqrt{\frac{J(\gamma, s, \kappa)}{I(\gamma, s, \kappa)}}, \quad (4.23)$$

com  $J = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\zeta \zeta^4 \hat{\psi}^s$ . As soluções consideradas de (4.21), chamadas de soluções de *salto*,<sup>9</sup> satisfazem  $\hat{\psi}'(0) = 0$  e  $\hat{\psi}(\infty) = \hat{\psi}'(\infty) = 0$ , onde  $\hat{\psi}'(\zeta) \equiv \frac{d\hat{\psi}(\zeta)}{d\zeta}$ . A princípio, dados os valores de  $\kappa$  e  $s$ , pode-se variar o parâmetro  $\gamma \propto c$ , o qual tem sido tratado como uma constante de integração arbitrária, até se obter uma solução para qualquer valor de carga bariônica. Note que a razão  $\mu_0/\beta_2$  dá somente a escala do raio RMS (4.23) enquanto seu formato é dado somente por  $\Lambda(s, \kappa, \gamma)$ .

O potencial  $\hat{V}_{\text{ef.}}$  definido em (4.19) se torna degenerado, e portanto não negativo, para um único valor da constante de integração  $\gamma_c$  para cada valor de  $s$  e  $\kappa$ . Para tal potencial efetivo degenerado os vácuos correspondem à  $\hat{\psi} = 0$  e  $\hat{\psi} = \hat{\psi}_c(s, \kappa)$ , onde o valor de  $\gamma_c$  e  $\hat{\psi}_c$ , obtidos resolvendo-se  $\hat{V}_{\text{ef.}} = \frac{\delta \hat{V}_{\text{ef.}}}{\delta \hat{\psi}} = 0$ , são dados por

$$\gamma_c(s, \kappa) = \left( \frac{\kappa - 2}{\kappa - s} \right) \left( \frac{\kappa - s}{s - 2} \right)^{\frac{s-2}{\kappa-2}}, \quad \hat{\psi}_c(s, \kappa) = \left( \frac{s - 2}{\kappa - s} \right)^{\frac{1}{\kappa-2}}. \quad (4.24)$$

Resulta que  $\hat{V}_{\text{ef.}}$  é um potencial admissível se, e somente se  $\gamma > \gamma_c(s, \kappa)$ .

Pode-se fixar relações entre as constantes de acoplamento e toda sequência discreta de valores de  $\gamma$  correspondentes a cada valor inteiro de  $Q$  a partir da física nuclear. Uma possibilidade é escolher algum núcleo de referência que identificará dado valor referência de raio RMS  $\sqrt{\langle r^2 \rangle}_{\text{ref.}}$  com certo valor referencial de carga bariônica  $Q_{\text{ref.}}$ . Por exemplo, poderia se escolher o núcleo estável  $^{56}\text{Fe}$  (o qual possui a maior energia de ligação por núcleon) como núcleo de referência, onde  $Q_{\text{ref.}} = 56$  e  $\sqrt{\langle r^2 \rangle}_{\text{ref.}} = 3,7377$  fm corresponde ao seu valor experimental do raio RMS.<sup>62</sup> O valor de  $\mu_0/\beta_2$  pode ser determinado de certa propriedade de decaimento da densidade de matéria para núcleos pesados, mas por hora considere somente que esta escala do raio é conhecida. Então, para cada par de valores de  $s$  e  $\kappa$  fixos se pode obter o valor de  $\gamma$  correspondente com  $\sqrt{\langle r^2 \rangle}_{\text{ref.}}$ , o qual será denotado por  $\gamma_{\text{ref.}}$ , resolvendo sucessivamente (4.21) até que (4.23) seja satisfeita. Contudo, uma vez determinado o valor de  $\gamma_{\text{ref.}}$  a relação (4.22) fixa o valor de  $\vartheta$  por

$$\vartheta = \left( \frac{\mu_0}{\beta_2} \right)^{-3} \frac{Q_{\text{ref.}}}{I_{\text{ref.}}}, \quad (4.25)$$

com  $I_{\text{ref.}} \equiv I(\gamma_{\text{ref.}}, s, \kappa)$ . Segue-se que todos os outros valores de  $\gamma$  são fixos através da relação (4.22), a qual pode ser reescrita como

$$Q = \frac{Q_{\text{ref.}}}{I_{\text{ref.}}(\gamma_{\text{ref.}}, s, \kappa)} I(\gamma, s, \kappa). \quad (4.26)$$

Em adição, a densidade de carga topológica dada em (4.6) se torna totalmente determinada para todos os valores de  $Q$  por

$$\mathcal{Q} = \frac{\vartheta}{4\pi^2} \widehat{\psi}^s \left( \zeta = \left( \frac{\beta_2}{\mu_0} \right) r \right). \quad (4.27)$$

Seria notável que a teoria (4.4) reproduzisse os valores dos raios RMS experimentais bem como o comportamento aproximado da densidade bariônica, ao menos para núcleos pesados, somente através da utilização de dois parâmetros vindos diretamente da física nuclear para se determinar a escala espacial do modelo ( $\beta_2/\mu_0$ ) e o valor de  $\gamma_{\text{ref.}}$ . De fato, se demonstrará abaixo que isso é possível, mas ainda será necessário se determinar mais três relações entre as constantes de acoplamento para poder se calcular a energia de ligação por núcleon.

Em ordem a se analisar a energia de ligação, introduza a função  $g \equiv (f - \sin f)$  definida apenas em termos da função perfil, a qual é por construção um funcional de  $\text{Tr } U$ . Tomando  $G(U)$ , introduzido em (4.7), como um funcional de  $g$  segue-se que a simetria  $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$  de (4.1) é quebrada em seu subgrupo diagonal  $SU(2)$ . Em, adição, usando (4.18) se obtém  $Q_G = \int d^3x G \psi^s = -2\pi [F(g(\infty)) - F(g(0))] / (m_0 e_0)^3$ , com  $\frac{dF}{dg} = G$ . A partir das condições de borda de  $f$  dadas em (4.17) se observa que  $Q_G$  é uma função de  $Q$ . Apesar de outras escolhas de  $G(g)$  poderem vir a ter interessantes aplicações físicas, considere a partir de agora  $G$  sendo dado por qualquer uma entre as seguintes expressões, que dão exatamente a mesma contribuição para  $Q_G$ , dadas por

$$G = \frac{\beta_G^2}{2\pi} g = \frac{\beta_G^2}{2\pi} (f - \sin f), \quad \text{ou} \quad G = \frac{\beta_G^2}{2\pi} f, \quad (4.28)$$

as quais são não negativas por definição. Conseqüentemente, a densidade da energia total de (4.4) também é não negativa para toda função perfil e todo valor de  $r$ . Logo, a partir de (4.7) se obtém

$$E_2 = \sigma_2 \left[ \vartheta \left( \frac{\mu_0}{\beta_2} \right)^3 \mathcal{E} + \frac{\sigma_G}{2} |Q|^2 \right], \quad (4.29)$$

onde  $\sigma_2 = \frac{4\pi^2 \beta_2^2}{m_0^3 e_0^3} \left( \frac{\beta_2^2}{\beta_2^2} \right)^{\frac{s-2}{\kappa-2}}$ ,  $\sigma_G = \frac{\beta_G^2}{\beta_2^2} \left( \frac{\beta_2^2}{\beta_2^2} \right)^{\frac{s-2}{\kappa-2}}$  e  $\mathcal{E} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\zeta \zeta^2 \left[ \frac{(\widehat{\psi}')^2}{2} + \widehat{\psi}^2 + \widehat{\psi}^\kappa \right]$ . Portanto, a energia de ligação por núcleon (4.5) se torna

$$E_B = \sigma_2 \left[ \vartheta \left( \frac{\mu_0}{\beta_2} \right)^3 \left( \mathcal{E}_{Q=1} - \frac{\mathcal{E}}{|Q|} \right) + \frac{\sigma_G}{2} (1 - |Q|) \right]. \quad (4.30)$$

Como  $\vartheta$ ,  $\mu_0/\beta_2$  e  $\mathcal{E}_{Q=1}$  já são fixos a partir da determinação do raio RMS, pode-se obter  $\sigma_2$  e  $\sigma_G$  de (4.30) através do ajuste de  $E_B$  em relação aos dados experimentais. Por consequência, as constantes de acoplamento de  $E_2$  dado por (4.7) ficam totalmente determinadas em termos das constantes de acoplamento do modelo de Skyrme BPS  $m_0$  e  $e_0$ . Contudo, como a energia estática BPS (4.3) depende apenas da razão  $m_0/e_0$ , mesmo que esta seja conhecida, e portanto a densidade de energia total do sistema seja inteiramente determinada, ainda restará um grau de liberdade remanescente. A energia total (4.4) das soluções estáticas de (4.21) com carga topológica unitária ( $Q = 1$ ) deve corresponder a massa de núcleo  ${}^1\text{H}$ , a qual corresponde com a massa do próton, i.e.  $E(Q = 1) = m_p c^2 = 938,272081 \text{ MeV}$ . Usando adicionalmente (4.3) e (4.4) se fixa a razão  $m_0/e_0$  através da relação

$$\frac{m_0}{e_0} = \frac{938.272081 \text{ MeV} - E_2(Q = 1)}{48 \pi^2}. \quad (4.31)$$

Definindo  $\alpha \equiv (\beta_\kappa/\beta_2)^{2/(\kappa-2)}$ , a qual corresponde o inverso da escala adimensional do campo  $\psi$  dada em (4.20), pode-se escrever as constantes de acoplamento como

$$\begin{aligned} \frac{m_0^2}{\alpha^{\frac{s}{3}}} &= \left(\frac{m_0}{e_0}\right) \vartheta^{\frac{1}{3}}, & \frac{e_0^2}{\alpha^{\frac{s}{3}}} &= \left(\frac{m_0}{e_0}\right)^{-1} \vartheta^{\frac{1}{3}}, & \frac{\mu_0^2}{\alpha^2} &= \frac{\vartheta \sigma_2}{4 \pi^2} \left(\frac{\mu_0}{\beta_2}\right)^2, \\ \frac{\beta_2^2}{\alpha^2} &= \frac{\vartheta \sigma_2}{4 \pi^2}, & \frac{\beta_\kappa^2}{\alpha^\kappa} &= \frac{\vartheta \sigma_2}{4 \pi^2}, & \frac{\beta_G^2}{\alpha^s} &= \frac{\vartheta \sigma_2 \sigma_G}{4 \pi^2}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Para cada par de valores de  $s$  e  $\kappa$  a determinação da escala do raio RMS  $\mu_0/\beta_2$ , a escolha do núcleo de referência que fixa  $\vartheta$  através de (4.25), os dois parâmetros  $\sigma_2$  e  $\sigma_G$  obtidos a partir do ajuste de (4.30) em relação aos dados experimentais e razão  $m_0/e_0$  dada por (4.31) fixam cinco das seis constantes de acoplamento. Conseqüentemente, determina-se o lado direito de cada uma das equações (4.32) e cada constante de acoplamento da teoria (4.4) fica determinada em termos de  $\alpha$  que é livre.

## 4.2 Análise da equação (4.21)

Uma analogia com a mecânica clássica simples, mas fundamental na compreensão do problema do falso vácuo, pode lançar luz sobre o entendimento das soluções de salto da equação (4.21). A equação radial diferencial de segunda ordem (4.21) tem a mesma estrutura da dinâmica de um corpo físico vivendo em um espaço unidimensional, com a ‘coordenada espacial’  $\hat{\psi}$  e ‘tempo’  $\zeta$ , sujeito a um potencial de sinal invertido  $V_{\text{inv.}} = -\hat{V}_{\text{ef.}}$ , com um termo dissipativo dependente do ‘tempo’  $-2 d_\zeta \hat{\psi}/\zeta$ . Segue-se que  $d_\zeta \hat{\psi}$  e  $d_\zeta^2 \hat{\psi}$  são interpretados respectivamente como a ‘velocidade’ e a ‘aceleração’ do corpo. Nesta analogia a energia mecânica clássica fica definida como  $E_{\text{classical}} = K + V_{\text{inv.}} = (d_\zeta \hat{\psi})^2/2 - \hat{V}_{\text{ef.}}$ , com  $K$  sendo a energia cinética do corpo. Explicitamente, multiplicando a equação (4.21) por  $d_\zeta \hat{\psi}$  e a reescrevendo pode-se obter

$$\frac{dE_{\text{clássica}}}{d\zeta} = F_{\text{dis.}} \frac{d\hat{\psi}}{d\zeta} = -\frac{2}{\zeta} \left(\frac{d\hat{\psi}}{d\zeta}\right)^2 \leq 0, \quad (4.33)$$

onde  $F_{\text{dis.}} \equiv -2 d_\zeta \hat{\psi} / \zeta$  desempenha um papel de uma força dissipativa. As condições de borda da solução de salto de (4.21), as quais satisfazem  $\hat{\psi}'(0) = 0$  e  $\hat{\psi}(\infty) = \hat{\psi}'(\infty) = 0$ , implicam que o potencial efetivo deve se anular no ‘tempo’  $\zeta \rightarrow \infty$  e a energia cinética  $K$  se anula no ‘tempo’  $\zeta = 0$  e em  $\zeta \rightarrow \infty$ . Portanto, o potencial efetivo no ‘tempo’  $\zeta = 0$  deve ser não-positivo ( $-\hat{V}_{\text{ef.}}(\zeta = 0) \geq 0$ ) para compensar a dissipação de energia que pode ser não nula. Por outro lado, para o corpo cair de  $\zeta = 0$  rumo ao falso vácuo a ‘aceleração’ do corpo deve ser não-positiva ( $d_\zeta \hat{\psi}(0) \leq 0$ ). Logo, a ‘posição’ inicial do corpo  $\hat{\psi}(0)$  precisa estar contida no intervalo  $[\hat{\psi}_n, \hat{\psi}_M]$ , onde  $\hat{\psi}_M = \hat{\psi}_M(\gamma, s, \kappa)$  é o verdadeiro vácuo de  $\hat{V}_{\text{ef.}}$  e  $\hat{\psi}_n = \hat{\psi}_n(\gamma, s, \kappa)$  é o valor de  $\hat{\psi}$  mais próximo à  $\hat{\psi}_M$  pela esquerda satisfazendo  $\hat{V}_{\text{ef.}} = 0$  (veja a Figura 7).

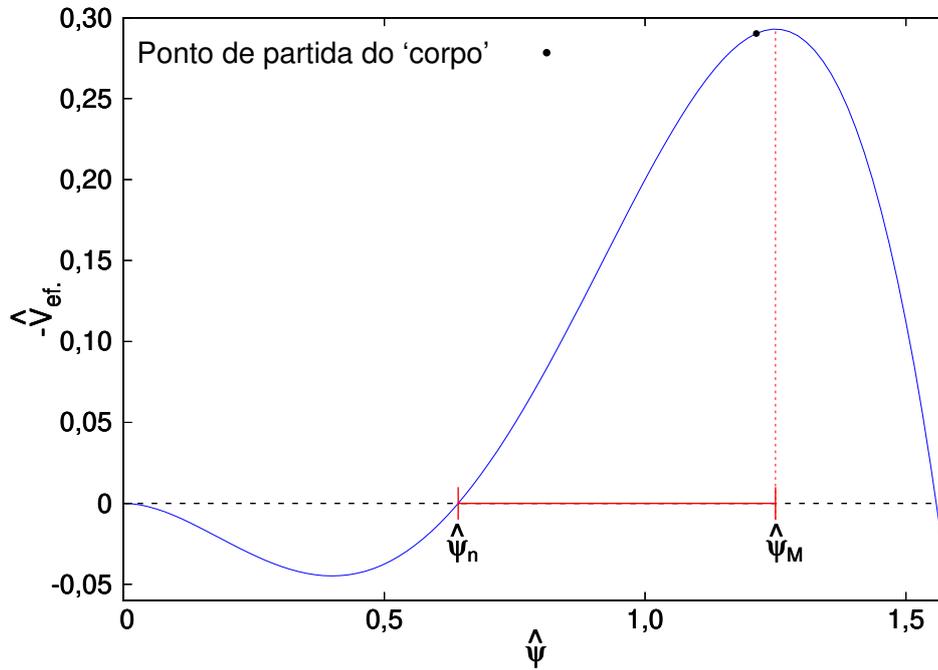


Figura 7 - O potencial efetivo com sinal invertido  $-\hat{V}_{\text{ef.}}$  dado por (4.21) vs.  $\hat{\psi}$  para  $\gamma = 2,2$ ,  $s = 3$  e  $\kappa = 4$ . Em adição, são mostrados os valores de  $\hat{\psi}_n = 0,641742$  e  $\hat{\psi}_M = 1,25$  para tal potencial efetivo bem como o ponto de partida do ‘corpo’, i.e. o valor do ponto  $(\hat{\psi}(0), -\hat{V}_{\text{ef.}}) = (1,21326, 0,2902)$  correspondente à solução de (4.21) em  $\zeta = 0$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Já que o potencial efetivo degenerado  $\hat{V}_{\text{ef.}}(\gamma_c, \hat{\psi}_c, s, \kappa)$  é não-negativo, com  $\gamma_c$  e  $\hat{\psi}_c$  sendo dados em (4.24), então o tamanho do intervalo  $[\hat{\psi}_{\text{num.}}, \hat{\psi}_M] \ni \hat{\psi}(0)$  tende à zero quando  $\gamma \rightarrow \gamma_c^+$ , e portanto  $\hat{\psi}(0) \rightarrow \hat{\psi}_c$ . Considerando  $\hat{V}_{\text{ef.}}(\hat{\psi}(0), \gamma, s, \kappa) = -\varepsilon$ , com  $\varepsilon \geq 0$ , como sendo o valor do potencial efetivo para  $\zeta = 0$ , então já que  $\hat{V}_{\text{ef.}}(\hat{\psi}_c, \gamma_c, s, \kappa) = 0$ , segue-se que o limite  $\gamma \rightarrow \gamma_c^+$  implica em  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . Usando também  $K|_{\zeta=0} = K|_{\zeta=\infty} = \hat{V}_{\text{ef.}}|_{\zeta=\infty} = 0$ , segue-se que  $[E_{\text{clássica}}]_0^\infty = -\varepsilon$  e então integrando (4.33) se obtém

$$E_{\text{dissipada}} \equiv - \int_0^\infty d\zeta \frac{2}{\zeta} \left( \frac{d\hat{\psi}}{d\zeta} \right)^2 = -\varepsilon. \quad (4.34)$$

Portanto, a energia dissipada tende à se anular para  $\epsilon \rightarrow 0^+$ . Isto significa que a ‘velocidade’  $\left(\frac{d\hat{\psi}}{d\zeta}\right)$  pode ser não trivial somente no infinito espacial, e então  $\hat{\psi}$  tende a permanecer infinitesimalmente próximo do vácuo  $\hat{\psi}_c$  do potencial efetivo degenerado  $\hat{V}_{\text{ef.}}(\gamma_c, \hat{\psi}_c, s, \kappa)$  por um tempo ‘ $\zeta$ ’ que tende ao infinito. Conseqüentemente, a quantidade  $I$ , a qual é proporcional à  $Q$  devido à (4.26), diverge quando  $\gamma \rightarrow \gamma_c^+$ . Em adição, como  $\hat{\psi}_c$  é um mínimo local de  $\hat{V}_{\text{ef.}}(\gamma_c, \hat{\psi}, s, \kappa)$  e a ‘velocidade’  $\hat{\psi}'(0) = 0$ , se obtém de (4.21) que a ‘aceleração’ clássica no ‘tempo’  $\zeta = 0$  tende à  $\lim_{\gamma \rightarrow \gamma_c^+} d_\zeta^2 \hat{\psi}(0) = 0$ .

Aproximando  $\gamma$  o suficiente de  $\gamma_c$  pela direita, as soluções de salto deslizam muito lentamente de sua ‘posição’ inicial  $\hat{\psi}(0) \approx \hat{\psi}_c$  em alguma região ‘temporal’  $[0, R_\zeta]$ , com  $R_\zeta > 0$ , antes de decair exponencialmente rumo ao falso vácuo de  $\hat{V}_{\text{ef.}}$ . Defini-se a região crítica de  $\gamma$  como a vizinhança à direita de  $\gamma_c$ , onde segue-se pelos argumentos acima que em ordem mais baixa de  $R_\zeta$  se tem  $\int_0^\infty d\zeta \zeta^n \hat{\psi}^s \approx \hat{\psi}_c^s R_\zeta^{n+1}/(n+1)$ , com  $n \geq 1$ . Então, as expressões (4.22) e (4.23) nesta região crítica são dadas respectivamente por  $Q_c \approx \vartheta \frac{\hat{\psi}_c^s}{3\pi} \frac{\mu_0^3}{\beta_2^3} R_\zeta^3$  e  $\sqrt{\langle r^2 \rangle}_c \approx \sqrt{\frac{3}{5}} \frac{\mu_0}{\beta_2} R_\zeta$ .<sup>\*</sup> Logo, o raio RMS (4.23) e a densidade de carga topológica (4.27) em  $\zeta = 0$  na região crítica de  $\gamma$  se tornam respectivamente

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle}_c \approx \left[ \sqrt{\frac{3}{5}} \left( \frac{3\pi}{\vartheta \hat{\psi}_c^s(s, \kappa)} \right)^{\frac{1}{3}} \right] Q_c^{\frac{1}{3}}, \quad \mathcal{Q}_c(\zeta = 0) \approx \frac{\vartheta}{4\pi^2} \hat{\psi}_c^s(s, \kappa), \quad (4.35)$$

com  $\hat{\psi}_c^s(s, \kappa)$  sendo dado em (4.24). Resulta, que o raio RMS (4.23) é aproximadamente proporcional à  $Q_c^{\frac{1}{3}}$  na região crítica de  $\gamma$  para qualquer potencial  $V$ , definido em (4.19), entrando em acordo com seu comportamento esperado para núcleos pesados segundos os dados experimentais.

Agora se analisará qual o comportamento do ‘corpo’ sujeito à equação (4.21) quando este não é solto da ‘posição’ inicial  $\hat{\psi}_s(0)$  associada a uma solução de salto, mas de uma pequena variação desta, i.e. qual é a trajetória do ‘corpo’ ao ser solto de  $\hat{\psi}(0) = \hat{\psi}_s(0) + \epsilon$ , com  $|\epsilon| \ll 1$  e com ‘velocidade’  $\frac{d\hat{\psi}}{d\zeta}(0) = 0$ . Primeiro, note que o falso vácuo  $\hat{\psi} = 0$  do potencial efetivo de (4.21) é um mínimo local, ou máximo local de  $V_{\text{inv.}} = -\hat{V}_{\text{ef.}}$ , sendo portanto um ponto de equilíbrio instável na analogia clássica. Para as soluções de salto de (4.21) com valor na origem  $\hat{\psi}_s(0)$ , qualquer pequeno incremento em  $\hat{\psi}_s(0)$  fará com que o ‘corpo’ chegue na ‘posição’  $\hat{\psi} = 0$  com uma energia cinética clássica positiva e sem mudar o sentido de sua ‘velocidade’. Portanto, este continuará seu movimento vagando no semi-eixo de  $\hat{\psi}$  negativo, sem possivelmente retornar à  $\hat{\psi} = 0$ . Tal solução, onde  $\hat{\psi}$  toma valores negativos para valores de  $\zeta$  suficientemente grandes, é chamada de “overshoot”.<sup>9</sup> De modo similar, qualquer pequeno decremento em  $\hat{\psi}_s(0)$  irá levar a outro tipo de solução na qual  $\hat{\psi}$  não atinge  $\hat{\psi} = 0$ , pois não parte de  $\zeta = 0$  com energia cinética clássica suficiente. Esta solução, chamada de “undershoot”, então oscila em torno do verdadeiro vácuo do potencial efetivo de (4.21), com amplitude de oscilação decrescente devido a dissipação de energia

<sup>\*</sup> Tais relações são preservadas caso  $R_\zeta$  seja definido alternativamente como a espessura do campo  $\hat{\psi}$ , i.e. o valor de  $\zeta$  tal que  $\hat{\psi}(\zeta) = \hat{\psi}(0)/2$ .

clássica. Tais características são excepcionalmente distintas e em geral é fácil de saber se uma solução de (4.21) com condição inicial  $\widehat{\psi}(0)$  é do tipo “undershoot” ou “overshoot”, podendo inclusive se usar estas para se determinar com ótima precisão o valor de  $\widehat{\psi}_s(0)$  de uma solução de salto.

### 4.3 Análise dos resultados numéricos para a escolha do $^{56}\text{Fe}$ como núcleo de referência

Agora se demonstrará explicitamente como pode-se fixar a razão  $\mu_0/\beta_2$ . Em adição, se utilizará o  $^{56}\text{Fe}$  como núcleo de referência para se determinar o raio RMS para cada valor de  $Q$  e se comparará tal resultado teórico com os dados experimentais. Uma robusta propriedade dos núcleos é que sua densidade de matéria  $\rho^M$  decai exponencialmente longe do centro de massa, i.e.  $\rho^M(r) \sim \rho_0^M e^{-r/a}$ , com  $a = 0,524 \text{ fm}$  sendo aproximadamente independente do número de massa e  $\rho_0^M$  sendo a constante de proporcionalidade. Identificando  $\rho^M$  como sendo diretamente proporcional à  $Q$  e usando (4.6) ou (4.27) se obtêm que  $\rho^M \propto \psi^s$ . Portanto, para (4.21) possuir soluções com tal decaimento assintótico exponencial é necessário que

$$\left. \frac{\delta^2 V_{\text{ef.}}}{\delta \psi^2} \right|_{\psi=0} = \left( \frac{\mu_0^2}{s^2} \right) a^{-2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mu_0}{\beta_2} = s \sqrt{2} a, \quad (4.36)$$

onde se usou (4.19). De fato, o termo de menor ordem do potencial efetivo (4.19) foi escolhido como sendo quadrático em  $\psi$  para obedecer a lei de decaimento exponencial que impõe a primeira equação de (4.36).

As soluções da equação diferencial ordinária de segunda ordem (4.21), satisfazendo  $\widehat{\psi}'(0) = 0$  e  $\widehat{\psi}(\infty) = \widehat{\psi}'(\infty) = 0$ , são obtidas através do bem conhecido método explícito Runge-Kutta de quarta ordem com passo de  $\Delta\zeta = 10^{-4}$ , e todo  $\zeta$  perence ao intervalo finito  $[0, \zeta_{\text{max.}}]$ . O valor de  $\zeta_{\text{max.}}$ , e então o tamanho da rede adaptativa, é o valor máximo de  $\zeta$  tal que  $0 < \widehat{\psi}(\zeta_{\text{max.}}) < 1, 2 \times 10^{-5}$ ,  $\widehat{\psi}'(\zeta_{\text{max.}}) < 0$  e  $|\widehat{\psi}''(\zeta_{\text{max.}})| < 10^{-8}$ . Usa-se o método de “shooting” para variar o valor de  $\widehat{\psi}(0)$ , e a solução numérica final é uma configuração do tipo “undershoot” que aproxima a solução de salto no intervalo finito definido acima, tal que um incremento de  $10^{-14}$  em  $\widehat{\psi}(0)$  dá uma configuração de tipo “overshoot”. Tipicamente o tamanho da rede é de  $\zeta_{\text{max.}} \sim 10 - 20$ .

A sequência discreta de valores de  $\gamma$  correspondentes aos valores inteiros da carga bariônica  $Q$ , para cada potencial  $\widehat{V}$  de (4.7), i.e. para cada par de valores  $s$  e  $\kappa$ , são encontrados em duas etapas. Primeiro, se obtêm o valor de  $\gamma(^{56}\text{Fe})$  resolvendo sucessivamente a equação (4.21) para cada valor de  $\gamma$ , o qual é variado usando busca binária sem condição de borda fixa, até que  $\Lambda$  difira de seu valor dado pela relação<sup>†</sup>

$$3,7377 \text{ fm} = s \sqrt{2} 0,524 \text{ fm} \Lambda \left( \gamma(^{56}\text{Fe}), s, \kappa \right) \quad (4.37)$$

<sup>†</sup> Tal método funciona muito bem pois há fortes indícios de que as funções  $\Lambda(\gamma)$  e  $I(\gamma)$  são monotônicas para um amplo número de valores de  $\kappa$  e  $s$ .

por menos do que  $10^{-10}$ , onde  $3,7377 fm$  é o valor experimental do raio RMS<sup>62</sup> do núcleo do  $^{56}\text{Fe}$ .<sup>‡</sup> Então, o valor de  $\vartheta$  é fixado através da equação (4.25) por

$$\vartheta = \frac{56}{s^3 \left(\sqrt{2}0,524 fm\right)^3 I(\gamma(^{56}\text{Fe}), s, \kappa)}. \quad (4.38)$$

Segundo, aplica-se o mesmo procedimento acima para determinar a sequência de valores de  $\gamma$  correspondentes aos valores inteiros das cargas de Skyrme  $Q$  dadas por (4.26) como

$$Q = \frac{I(\gamma, s, \kappa)}{I(\gamma(^{56}\text{Fe}), s, \kappa)/56}. \quad (4.39)$$

Neste caso, a busca binária para quando o valor numérico  $Q_{\text{num.}}$  difere do valor inteiro mais próximo  $Q$  por  $|(Q - Q_{\text{num.}})/Q| < 2 \times 10^{-8}$ .

Feito o procedimento acima, a razão  $\mu_0/\beta_2$  e a sequência discreta de valores das quantidades  $\gamma$ ,  $\Lambda(\gamma, s, \kappa)$  e  $I(\gamma, s, \kappa)$  correspondentes com os valores inteiros das cargas de Skyrme  $Q$ , dada por (4.22), fica determinada. Conseqüentemente, a sequência discreta dos raios RMS  $\sqrt{\langle r^2 \rangle}$  e a densidade bariônica correspondentes com tais valores de  $Q$  podem ser obtidas respectivamente através de (4.23) e (4.27). Apresenta-se na Figura 8 a densidade bariônica (4.27) como função de  $r$ , para alguns valores de  $Q$ , associada as soluções de (4.21) para o modelo com  $\kappa = 8$  e  $s = 3$ .

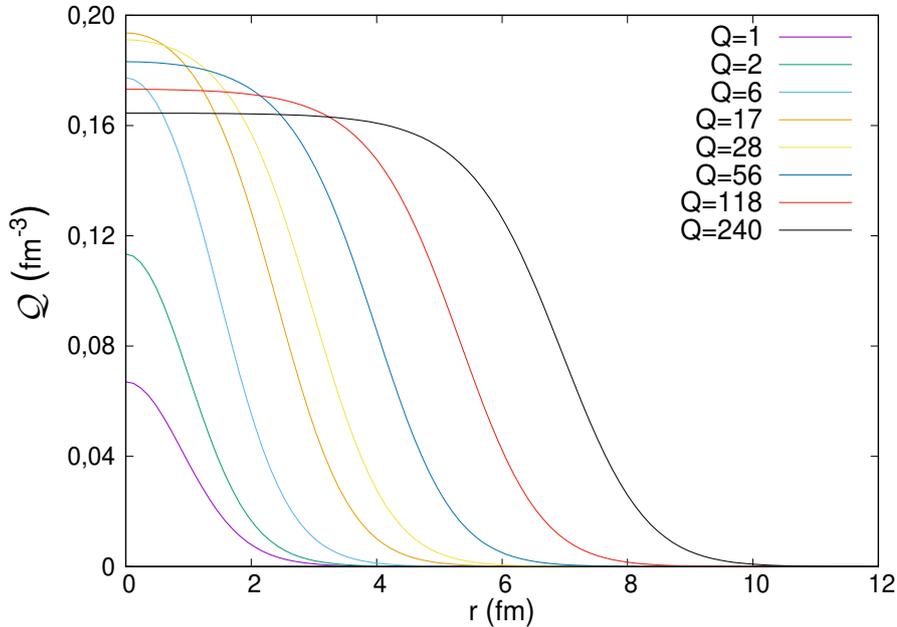


Figura 8 - A densidade de carga topológica  $Q = \frac{\vartheta}{4\pi^2} \hat{\psi}^s (\zeta = r / (s\sqrt{2}0,524 fm))$  para  $\kappa = 8$  e  $s = 3$  usando  $a = 0,524 fm$  em (4.36) e o  $^{56}\text{Fe}$  como núcleo de referência. O valor de  $Q(r=0)$  é crescente até  $Q = 17$  e então decresce vagarosamente até o valor de  $0,1645 fm^{-3}$  para  $Q = 240$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

<sup>‡</sup> Nesta etapa se obtém  $\gamma_{\text{ref.}} = 2,0415$  e conseqüentemente  $I(\gamma(^{56}\text{Fe}), \kappa = 8, s = 3) / 56 = 0.0079194$ , mas numericamente são usados mais algarismos significativos.

Para os núcleos pesados ( $Q > 56$ ), a teoria construída neste capítulo é compatível com o fato da densidade de matéria se comportar aproximadamente como um fluido incompressível, além do valor de  $Q(r=0)$  se aproximar do valor experimental da densidade bariônica<sup>63</sup> de cerca de  $0.16 \text{ fm}^{-3}$ . De fato, tomando  $\kappa = 8$  e  $s = 3$  como exemplo, para tais núcleos a densidade bariônica teórica se torna aproximadamente constante deste  $r = 0$  até certo valor de  $r$ , a partir do qual esta decai rapidamente (ver Figura 8). Em adição, o número bariônico  $Q$  cresce quase que volumetricamente, i.e. cresce aproximadamente com o cúbico do raio RMS (ver Figura 9).

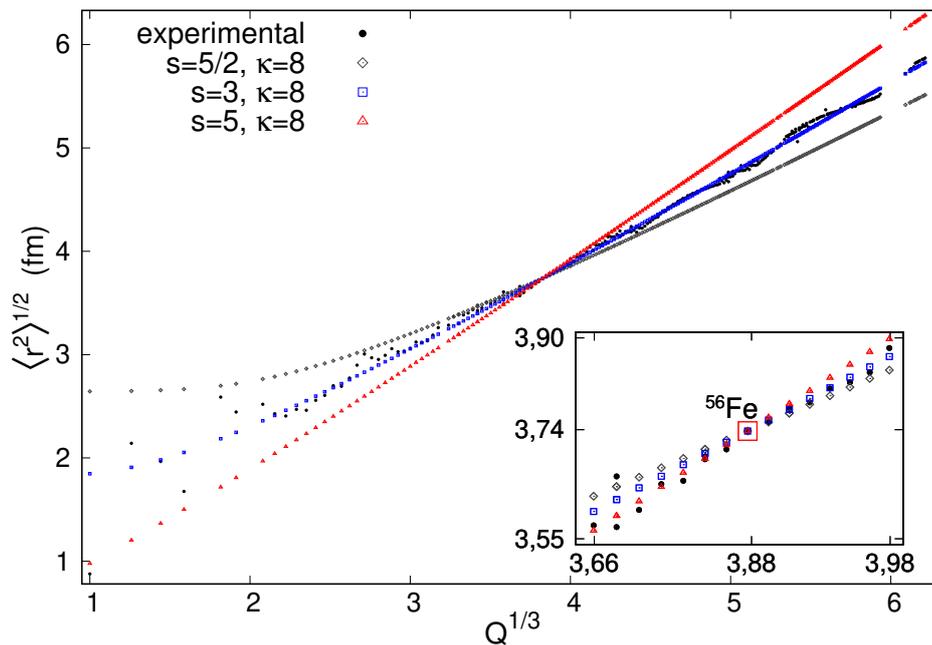


Figura 9 - O raio RMS  $\sqrt{\langle r^2 \rangle}$  como função de  $Q^{1/3}$ , para  $\kappa = 8$  e  $s = 5/2, 3, 5$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Observa-se que a inclinação da curva  $\sqrt{\langle r^2 \rangle} \times Q^{1/3}$  depende mais fortemente de  $s$  do que  $\kappa$ , e o melhor ajuste dos valores experimentais do raio RMS<sup>62</sup> corresponde com  $s = 3$  (veja a Figura 9). Foi considerado a lista de  $N_c = 265$  núcleos contendo todos os núcleos estáveis (incluindo isótopos), os quais existem na faixa do número de massa  $A$  de  $A = 1$  ( $^1\text{H}$ ) até  $A = 208$  ( $^{208}\text{Pb}$ ), e em adição todos os núcleos de  $A = 209$  ( $^{209}\text{Bi}$ ) até  $A = 240$  ( $^{240}\text{Pu}$ ) com meia vida<sup>64</sup> maior do que  $10^3$  anos. Há um salto de  $A = 209$  para  $A = 226$  nesta lista, pois de  $A = 210$  até  $A = 225$  não há nenhum núcleo que satisfaça os critérios acima de estabilidade ou meia vida.

Os dados experimentais e os numéricos são comparados usando o a raiz quadrada do desvio quadrático médio (RMSD) do raio RMS  $R \equiv \sqrt{\langle r^2 \rangle}$  e da energia de ligação por

núcleon  $E_B$ , definidos respectivamente como

$$\Delta R = \sum_{\text{lista}} \sqrt{\frac{(R^{\text{num.}} - R^{\text{exp.}})^2}{N_c}}, \quad \Delta E_B = \sum_{\text{lista}} \sqrt{\frac{(E_B^{\text{num.}} - E_B^{\text{exp.}})^2}{N_c}}, \quad (4.40)$$

onde a soma em (4.40) se dá sobre toda a lista de  $N_c = 265$  núcleos definida acima. Os valores numéricos de  $R^{\text{num.}}$  e  $E^{\text{num.}}$  são obtidos respectivamente a partir de (4.23) e (4.30), enquanto os valores experimentais do raio RMS<sup>62</sup> e da energia de ligação por núcleon<sup>65</sup> são representados respectivamente por  $R^{\text{exp.}}$  e  $E_B^{\text{exp.}}$ . Em adição, também se define  $\Delta R^{A \geq 12}$  e  $\Delta E_B^{A \geq 12}$  como as quantidades (4.40), mas com a soma restrita aos núcleos da lista definida acima com  $A \geq 12$ , contendo então apenas  $N_c^{A \geq 12} = 256$  núcleos, sendo  $^{12}\text{C}$  o mais leve. Para  $s = 3$  observa-se que  $\Delta R$  varia de  $0,1287 \text{ fm}$  para  $\kappa = 4$ , até  $0,0837 \text{ fm}$  para  $\kappa = 20$ , com um mínimo bem suave de  $0,0820 \text{ fm}$  para  $\kappa = 8$ . Portanto, os valores dos raios RMS previstos pelo modelo estão, para um grande número de núcleons, em boa concordância com os dados experimentais para  $s = 3$  e qualquer potencial com  $\kappa \geq 6$ . Em adição, note que para se fixar o raio RMS só se determinou dois dos seis graus de liberdade da teoria (4.4) a partir de duas quantidades experimentais.

Em ordem a se obter a energia de ligação considere a teoria (4.4) restrita à  $s = 3$  e  $\kappa = 8$ , para a qual os valores dos raios rms estão, ao menos para  $A \geq 12$ , em excelente concordância com os dados experimentais. Como o procedimento acima fixou os valores de  $\vartheta$  e  $\mu_0/\beta_2$ , além da sequência discreta de valores de  $\gamma$  com  $Q$  inteiro, então o valor de  $\mathcal{E}_{Q=1}$  em (4.30) fica também determinado. Logo, pode-se obter, tal como mencionado acima, os valores de  $\sigma_2$  e  $\sigma_G$  que dão o melhor ajuste dos valores experimentais da energia de ligação por núcleon,<sup>65</sup> dentro da lista de núcleons definida acima. Os resultados teóricos e os valores experimentais são mostrados na Figura 10, e estes têm ótima concordância, diferindo de 1% ou menos para  $Q > 20$ . Na Tabela 6 do Apêndice B.2 são dados, para cada um dos núcleos da lista definida acima, os valores experimentais e teóricos para  $\kappa = 8$  e  $s = 3$  do raio RMS apresentados na Figura 9 e da energia de ligação por núcleon apresentada na Figura 10. Em adição, também se apresenta o valor correspondente da constante de integração  $\gamma$ , para cada valor de  $Q$ , obtido pelo procedimento acima através das equações (4.37) e (4.38).

Apesar de não reproduzir-se os valores experimentais de  $E_B$  para núcleos leves Na Figura 10, a curva teórica exibe um comportamento semelhante no qual  $E_B$  cresce rapidamente a partir de  $E_B(Q = 1) = 0$  até seu máximo e depois decresce lentamente com  $Q$ . Uma vez que a energia de ligação se tornou totalmente determinada, o valor da razão  $m_0/e_0$  é fixada a partir da massa do próton, i.e. usando (4.31) se obtém  $m_0/e_0 = 1,94999 \text{ MeV}$ . Resulta que todos os parâmetros da teoria (4.4) são fixados, os quais são dados na legenda da Figura 10, exceto a quantidade  $\alpha = (\beta_\kappa/\beta_2)^{\frac{1}{3}}$  que é livre.

A Tabela 2 mostra que para  $s = 3$  e para todos os valores de  $\kappa = 6, \dots, 20$  da teoria proposta há excelente concordância entre os valores previstos e os dados experimentais

para ambos  $\sqrt{\langle r^2 \rangle}$  e  $E_B$ , especialmente para  $A \geq 12$  onde os RMSD de  $\sqrt{\langle r^2 \rangle}$  cai para cerca de metade e o RMSD de  $E_B$  cai para cerca de um quarto. Para núcleos pesados sabe-se que os valores do raio RMS vão aproximadamente com  $Q^{1/3}$ . De fato, o melhor ajuste linear em  $Q^{1/3}$  dos valores do experimentais do raio RMS<sup>62</sup> para, respectivamente, a lista de 265 núcleos definida acima e a mesma restrita aos núcleons com  $A \geq 12$  são dados por

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle}_{exp.} = (0,56386 + 0,839967 Q^{1/3}) fm \quad (4.41)$$

e

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle}_{exp.}^{A \geq 12} = (0,50530 + 0,85156 Q^{1/3}) fm, \quad (4.42)$$

onde os RMSD's entre os valores experimentais e os valores previstos por tais ajustes correspondem respectivamente à  $0,07555 fm$  e  $0,03789 fm$ . Tais valores de RMSD são muito próximos de  $\Delta R$  e  $\Delta R^{A \geq 12}$  para  $s = 3$  e  $\kappa \geq 6$  apresentados na Tabela 2.

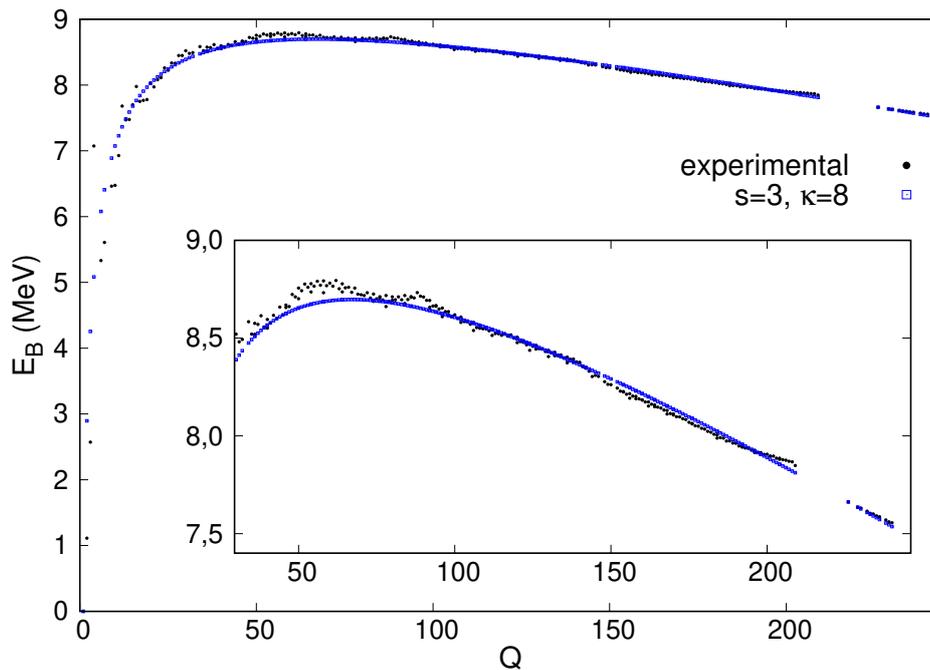


Figura 10 - A energia de ligação por núcleon  $E_B$  experimental, como função de  $Q$ , e o melhor ajuste de  $E_B$  teórico para  $\kappa = 8$  e  $s = 3$ . Para tal ajuste se obtém  $\sigma_2 = 2,16499 MeV$ ,  $\sigma_G = 0,00989002$  onde  $\Delta E_B = 0,216247 MeV$ . Portanto, as constantes de acoplamento originais da teoria (4.4), dadas por (4.32), tornam-se  $m_0^2/\alpha = 4,40047 MeV/fm$ ,  $e_0^2/\alpha = 1,15727 MeV^{-1} fm^{-1}$ ,  $\mu_0^2/\alpha^2 = 3,11483 MeV/fm$ ,  $\beta_2^2/\alpha^2 = 0,63023 MeV/fm^3$ , e  $\beta_G^2/\alpha^3 = 0,00623 MeV/fm^3$ , com  $\alpha = (\beta_\kappa/\beta_2)^{1/3}$  sendo livre.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Note que os valores de  $\Delta R_{s=3}$  e  $\Delta R_{s=3}^{A \geq 12}$  dados na Tabela 2 variam suavemente para  $\kappa \geq 6$  e ambos os valores máximos ocorrem para  $\kappa = 6$ . A variação máxima de tais

quantidades, i.e. o valor máximo menos o valor mínimo, corresponde respectivamente à 3,0% e 7,5% de seus valores máximos. Note também que  $\Delta E_{B,s=3}$  é monotonicamente decrescente desde seu valor máximo em  $\kappa = 7$  até seu valor mínimo em  $\kappa = 20$ . A situação se reverte no caso de  $\Delta E_{B,s=3}^{A \geq 12}$ , o qual é monotonicamente crescente para todos os valores de  $\kappa$ . Para  $s = 3$  a variação máxima de  $\Delta R$ ,  $\Delta R^{A \geq 12}$ ,  $\Delta E_B$  e  $\Delta E_B^{A \geq 12}$  em relação à seus valores máximos para todos os valores de  $\kappa$  correspondem respectivamente à 36,3%, 60,0%, 0,5%, 1,3%.

Tabela 2 - O RMSD do raio RMS  $\Delta R$  ( $fm$ ) e  $\Delta R^{A \geq 12}$  ( $fm$ ) para todos os valores inteiros  $\kappa = s + 1, s + 2, \dots, 20$  e cada um dos valores  $s = 5/2, 3, 5$  obtidos pelo procedimento descrito nesta seção. Em adição, para  $s = 3$  apresenta-se também os RMSD's das energias de ligação por núcleon  $\Delta E_B$  ( $MeV$ ) e  $\Delta E_B^{A \geq 12}$  ( $MeV$ ).

$\kappa$	$\Delta R_{s=5}$	$\Delta R_{s=5}^{A \geq 12}$	$\Delta R_{s=5/2}$	$\Delta R_{s=5/2}^{A \geq 12}$	$\Delta R_{s=3}$	$\Delta R_{s=3}^{A \geq 12}$	$\Delta E_{B,s=3}$	$\Delta E_{B,s=3}^{A \geq 12}$
3	*	*	0,63344	0,61523	*	*	*	*
4	*	*	0,41324	0,38721	0,12874	0,10108	0,215518	0,047759
5	*	*	0,31961	0,28696	0,09332	0,05644	0,216087	0,047923
6	0,33417	0,31942	0,27335	0,23556	0,08454	0,04373	0,216271	0,048066
7	0,29802	0,28192	0,24750	0,20578	0,08241	0,04077	0,216295	0,048156
8	0,27233	0,25519	0,23165	0,18693	0,08204	0,04047	0,216247	0,048213
9	0,25317	0,23518	0,22123	0,17421	0,08216	0,04079	0,216166	0,048250
10	0,23834	0,21964	0,21401	0,16519	0,08239	0,04118	0,216071	0,048275
11	0,22654	0,20723	0,20878	0,15853	0,08263	0,04151	0,215972	0,048292
12	0,21693	0,19709	0,20487	0,15347	0,08284	0,04177	0,215873	0,048306
13	0,20896	0,18864	0,20185	0,14952	0,08302	0,04196	0,215777	0,048317
14	0,20225	0,18150	0,19948	0,14638	0,08317	0,04211	0,215686	0,048326
15	0,19652	0,17538	0,19757	0,14383	0,08330	0,04221	0,215600	0,048334
16	0,19157	0,17009	0,19601	0,14173	0,08341	0,04229	0,215520	0,048342
17	0,18726	0,16546	0,19472	0,13998	0,08350	0,04234	0,215445	0,048349
18	0,18346	0,16137	0,19364	0,13850	0,08357	0,04238	0,215375	0,048355
19	0,18010	0,15774	0,19272	0,13724	0,08364	0,04241	0,215310	0,048362
20	0,17711	0,15450	0,19193	0,13616	0,08369	0,04243	0,215249	0,048368

Fonte: Elaborada pelo autor.

#### 4.4 O comportamento geral do raio RMS da teoria (4.4)

Nesta seção será explorado a forma geral do raio RMS (4.23) e o funcional  $I$  associado com as soluções de (4.21), mas sem se fixar nenhuma das constantes de acoplamento da teoria (4.4) ou o valor de referência da constante de integração  $\gamma_{\text{ref}}$ . Nesta abordagem se escolhe alguns valores de  $s$  e  $\kappa$ , definidos em (4.19) e (4.6), e então a equação (4.21) é resolvida numericamente para valores de  $\gamma$  desde 100 até algum valor próximo à  $\gamma_c(s, \kappa)$  dado por (4.24). Nas Figuras 11-13 são apresentados o raio RMS (4.23) em unidades de

$$b \equiv \left( \frac{\mu_0}{\beta_2} \right) \frac{1}{(\sqrt{2} s 0,524)} \quad (4.43)$$

contra  $I^{1/3}$ , o qual satisfaz  $I^{1/3} \propto Q^{1/3}$  devido à (4.22).<sup>§</sup>

O funcional  $I(\gamma, s, \kappa)$  é monotonicamente decrescente com  $\gamma$  para os valores de  $s$  e  $\kappa$  nas Figuras 11-13, e portanto  $\gamma$  decresce da esquerda para a direita nestas figuras. Como esperado devido aos argumentos apresentados na 4.2, para valores grandes de  $I$ , onde  $\gamma$  é próximo de  $\gamma_c(s, \kappa)$  dado em (4.24), o raio RMS (4.23) é aproximadamente linear em  $I^{1/3}$  (veja a equação (4.35)). Por outro lado, para  $\gamma \gg \gamma_c$  os valores de  $I$  se tornam muito pequenos, aproximando-se de zero conforme  $\gamma$  aumenta, e há um limite inferior para  $\sqrt{\langle r^2 \rangle}$  em unidades  $b$  que depende apenas do valor de  $s$ . Este resultado está relacionado ao fato que  $\hat{\psi}(\zeta)$  é monotonicamente decrescente e  $\hat{\psi}(0)$  é muito pequeno para  $\gamma \gg \gamma_c$ . Segue-se que  $\gamma \hat{\psi}^s \gg \hat{\psi}^\kappa$  e então o potencial efetivo de (4.21) tende a se comportar do mesmo modo que o potencial  $\hat{V}_{\text{reduzido}} = \hat{\psi}^2 - \gamma \hat{\psi}^s$ , o qual não depende de  $\kappa$ . Neste sentido, pode-se dizer que para  $\gamma \gg \gamma_c$  as soluções de salto de (4.21) tendem a desacoplar espontaneamente o termo de ordem  $\kappa$  do potencial efetivo. Na Figura 14 são apresentados os valores dos campos na origem  $\hat{\psi}(0)$  das soluções de (4.21) para  $s = 3$  e  $\kappa = 3, 5, 4, 8$ . Observa-se que dependência do valor de  $\hat{\psi}(0)$  do parâmetro  $\kappa$  enfraquece rapidamente, tendendo a desaparecer, a medida em que o valor de  $\gamma$  cresce no regime  $\gamma \gg \gamma_c$ .

Como o termo de ordem  $\kappa$  do potencial efetivo de (4.21) desacopla espontaneamente no regime de  $\gamma$  grande, e o raio RMS (4.23) é monotonicamente crescente com  $I$  (sendo decrescente com  $\gamma$ ), segue-se que o limite inferior para o raio RMS  $\sqrt{\langle r^2 \rangle}_{\text{mínimo}}$  pode ser obtido resolvendo (4.13) para o potencial efetivo (4.19) com  $\beta_\kappa = 0$ . Para tal, ao invés de se usar a definição (4.20) é conveniente absorver a constante de integração  $c$  na definição do campo adimensional  $\bar{\psi}$  através de

$$\zeta \equiv \left( \frac{\beta_2}{\mu_0} \right) r, \quad \bar{\psi} \equiv \left( \frac{c}{\beta_2^2} \right)^{\frac{1}{s-2}} \psi. \quad (4.44)$$

<sup>§</sup> Note que se for usado (4.36) para fixar a razão  $\mu_0/\beta_2$ , então  $b = 1 \text{ fm}$  e se pode comparar facilmente o eixo das ordenadas das Figuras 11-13 com os valores experimentais dos raios RMS.<sup>62</sup>

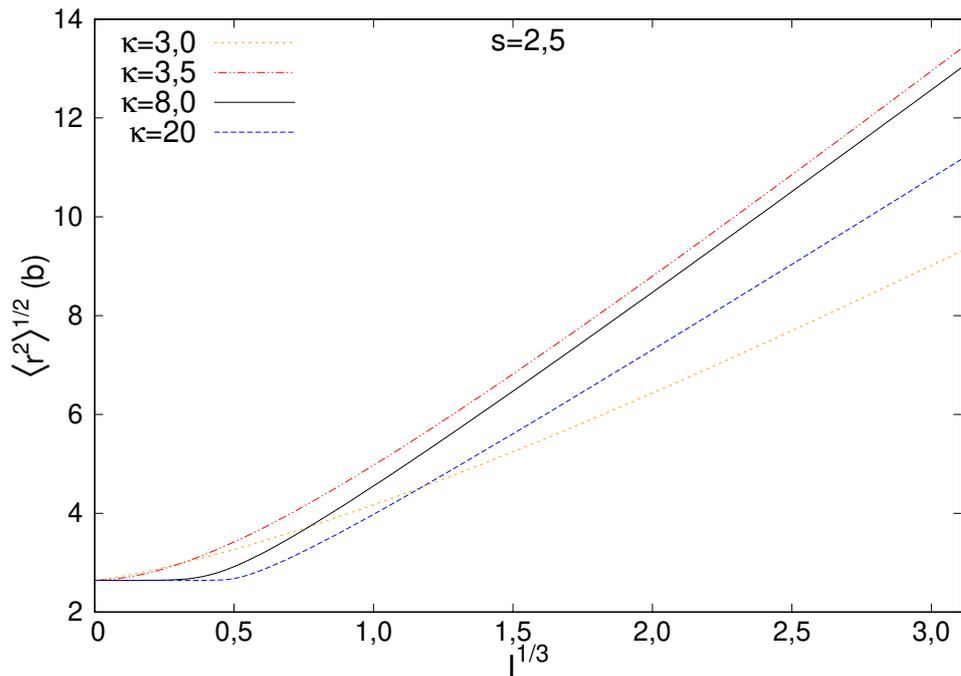


Figura 11 - O raio RMS (4.23) em unidades de  $b \equiv (\mu_0/\beta_2) / (\sqrt{2} s 0,524)$  vs.  $I^{1/3}$  para  $s = 2,5$  e  $\kappa = 3,0, 3,5, 8, 20$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

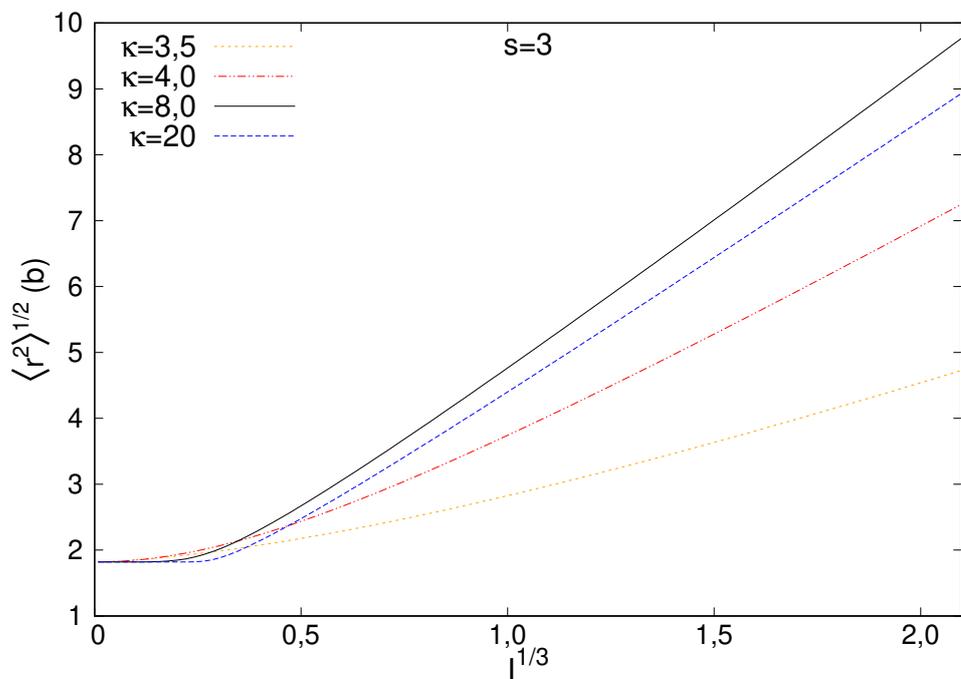


Figura 12 - O raio RMS (4.23) em unidades de  $b \equiv (\mu_0/\beta_2) / (\sqrt{2} s 0,524)$  vs.  $I^{1/3}$  para  $s = 3$  e  $\kappa = 3,5, 4, 8, 20$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

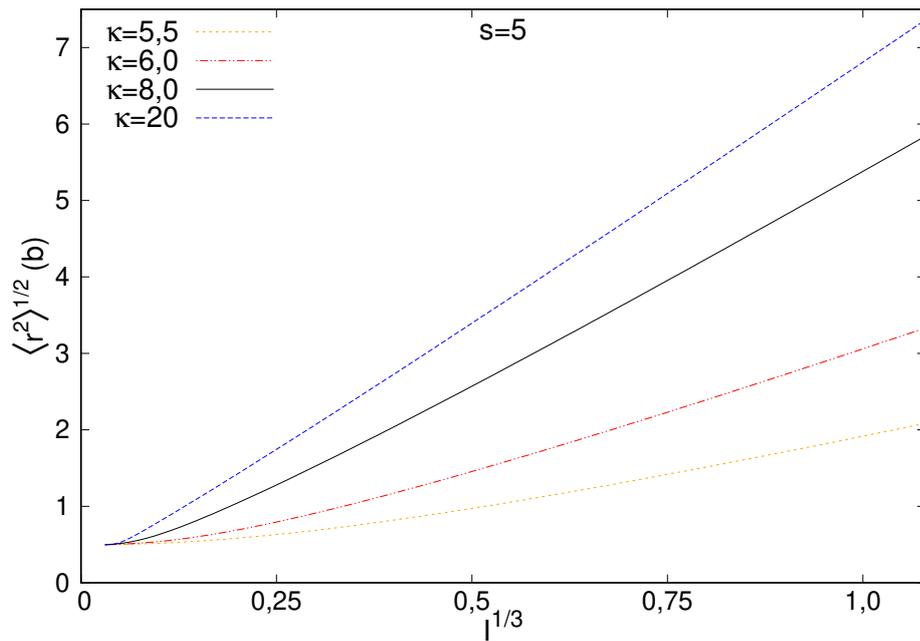


Figura 13 - O raio RMS (4.23) em unidades de  $b \equiv (\mu_0/\beta_2) / (\sqrt{2} s 0,524)$  vs.  $I^{1/3}$  para  $s = 5$  e  $\kappa = 5, 5, 6, 8, 20$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

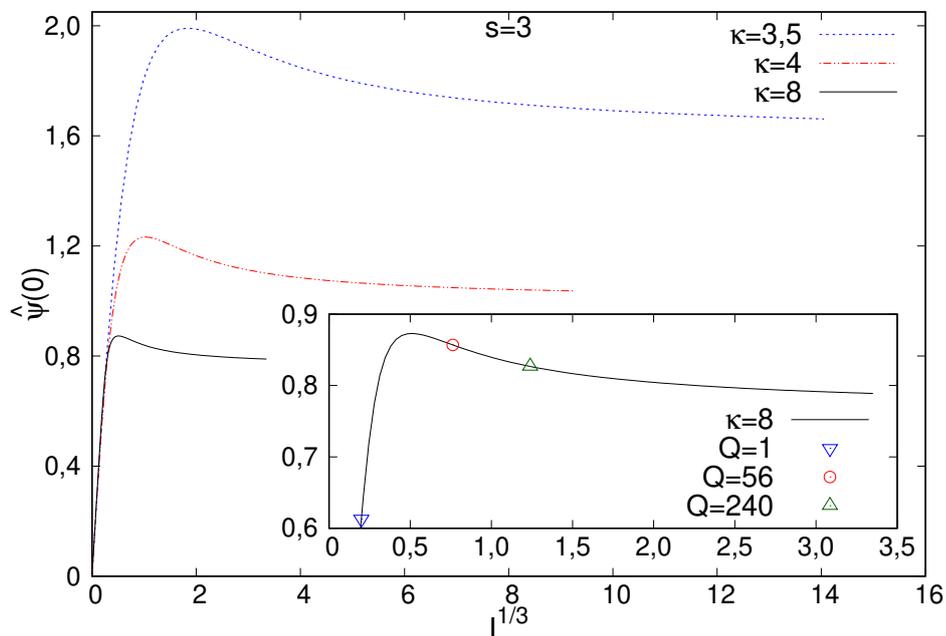


Figura 14 - O valor das soluções de (4.21) na origem  $\hat{\psi}(0)$  vs.  $I^{1/3}$  para  $s = 3$  e  $\kappa = 3, 5, 4, 8$ . O rótulo  $Q = 1, 56, 240$  no gráfico ampliado representa os correspondentes valores de carga topológica para a escolha particular de  $^{56}\text{Fe}$  como o núcleo de referência e a fixação da razão  $\mu_0/\beta_2$  através da relação (4.36), em concordância com o exemplo mostrada na seção 4.3. O valor de  $\gamma$  decresce da esquerda para a direita e seu maior valor para todo valor de  $\kappa$  corresponde à 100 e para  $\kappa = 3, 5, 4, 8$  os menores valores de  $\gamma$  correspondem respectivamente à 1,905, 2,025, 1,660.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Usando (4.44) a equação (4.13) se torna

$$\frac{d^2 \bar{\psi}}{d\zeta^2} + \frac{2}{\zeta} \frac{d\bar{\psi}}{d\zeta} = 2\bar{\psi} - s\bar{\psi}^{s-1}. \quad (4.45)$$

A equação (4.45) tem uma única solução de salto  $\bar{\psi}$  para cada valor de  $s$ . Usando (4.44) o raio RMS associado com tais soluções de (4.45), e então o limite inferior para o raio RMS (4.23) para cada valor de  $s$ , se torna

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle}_{\text{mínimo}} \equiv \sqrt{\frac{\int d^3x r^2 \psi^s}{\int d^3x \psi^s}} = \frac{\mu_0}{\beta_2} \sqrt{\frac{\bar{J}(s)}{\bar{I}(s)}}, \quad (4.46)$$

onde  $\bar{J}(s) = \pi^{-1} \int_0^\infty d\zeta \zeta^4 \bar{\psi}^s$  e  $\bar{I}(s) = \pi^{-1} \int_0^\infty d\zeta \zeta^2 \bar{\psi}^s$ . Já que (4.46) não depende do valor da constante de integração  $c$ , então o raio RMS é constante para todos os valores de carga topológica. Resulta, que o termo de ordem  $\kappa$  no potencial (4.19) é crucial para se obter  $\sqrt{\langle r^2 \rangle} \propto Q^{1/3}$ , tal ocorre no regime de  $\gamma$  crítico discutido na seção 4.2 e como visto aproximadamente nas soluções numéricas apresentadas na seção 4.3. Por exemplo, as cotas inferiores para o raio RMS (4.46) em unidades de  $b$ , dadas em (4.43), para  $s = 2, 5, 3, 5$  são respectivamente 2, 6437, 1, 8195, 0, 4949, as quais correspondem aos valores de  $\sqrt{\langle r^2 \rangle}$  no regime de  $I \ll 1$  visto nas Figuras 11-13.

Usando (4.15), (4.44) e a escolha do setor auto dual  $\lambda = -m_0 e_0$  se obtêm  $Q = (m_0 e_0)^3 \left(\frac{\mu_0}{\beta_2}\right)^3 \left(\frac{\beta_2^2}{c}\right)^{\frac{s}{s-2}} \bar{I}(s)$ , e então a constante de integração fica determinada pela relação

$$c = \beta_2^2 Q^{-1+\frac{2}{s}} \left[ (m_0 e_0)^3 \left(\frac{\mu_0}{\beta_2}\right)^3 \bar{I}(s) \right]^{1-\frac{2}{s}}. \quad (4.47)$$

Usando (4.6), (4.44) e (4.47) o campo original  $\psi$  e a densidade de carga topológica  $\mathcal{Q} = \frac{m_0^3 e_0^3}{4\pi^2} \psi^s$  se tornam respectivamente

$$\psi = Q^{\frac{1}{s}} \left[ (m_0 e_0)^3 \left(\frac{\mu_0}{\beta_2}\right)^3 \bar{I}(s) \right]^{-\frac{1}{s}} \bar{\psi} = Q^{\frac{1}{s}} \psi_{Q=1}, \quad (4.48)$$

$$\mathcal{Q} = \frac{Q}{4\pi^2} \left(\frac{\beta_2}{\mu_0}\right)^3 \bar{\psi}^s(\zeta) = Q \mathcal{Q}_{Q=1}, \quad (4.49)$$

onde  $\psi_{Q=1}$  e  $\mathcal{Q}_{Q=1}$  são respectivamente as soluções de salto  $\psi$  de (4.45) e a densidade de carga topológica restritas à  $Q = 1$ . De acordo com (4.48) e (4.49), o campo  $\psi$  e a densidade  $\mathcal{Q}$  escalam em cada ponto do espaço respectivamente com  $Q^{1/s}$  e  $Q$ . Em adição, já que  $\hat{\psi}(0) \propto \psi$  e  $I \propto Q$ , a relação (4.48) também implica que  $\hat{\psi}(0) \propto I^{1/3}$ , tal qual pode ser visto para  $s = 3$  e  $\kappa = 3, 5, 4, 8$  na Figura 14 no regime de  $\gamma$  grande.

## 4.5 A escolha do núcleo de referência

Na seção 4.1 se mostrou que a escolha do núcleo de referência, para cada valor da razão  $\mu_0/\beta_2$ , fixa a o valor de referência da constante de integração  $\gamma_{\text{ref}}$ , o qual fixa o razão

$I_{\text{ref.}}(\gamma_{\text{ref.}}, s, \kappa)/Q_{\text{ref.}}$ . Devido à (4.26), tal razão corresponde com o valor do funcional  $I$  associado com  $Q = 1$ , i.e.  $I_{Q=1} = I_{\text{ref.}}(\gamma_{\text{ref.}}, s, \kappa)/Q_{\text{ref.}}$ . Por outro lado, os resultados numéricos da seção 4.5 suportam que o raio RMS (4.23) é monotônico em  $I$ , ao menos para os valores de  $s$  e  $\kappa$  tratados nas Figuras 11-13, e portanto se pode escrever

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} = (\mu_0/\beta_2) \Lambda(I). \quad (4.50)$$

Note que se for modificada a escolha do núcleo de referência de tal forma que a razão  $I_{Q=1} = I_{\text{ref.}}/Q_{\text{ref.}}$  seja preservada, então devido à (4.26) toda a sequência de valores de  $I = I_{Q=1} Q$  associados a cada valor inteiro de  $Q$  também será preservada. Conseqüentemente, toda sequência de valores do raio RMS (4.50) e seu valor correspondente de RMSD (3.61) são invariantes por tal modificação, o que leva potencialmente a muitas escolhas de núcleo de referência em grande acordo com os dados experimentais, assim como a escolha feita na seção 4.3.

Tal como visto na seção 4.3, fixando  $\mu_0/\beta_2$  através de (4.36) e escolhendo o  $^{56}\text{Fe}$  como sendo o núcleo de referência se obtêm  $I(\gamma(^{56}\text{Fe}), \kappa = 8, s = 3)/56 = 0,0079194$  e  $\Delta R = 0,00820 \text{ fm}$ . Agora, escolhendo o núcleo de referência como sendo o  $^{108}\text{Pd}$  e repetindo o mesmo procedimento descrito na seção 3.1, com a escala espacial  $\mu_0/\beta_2$  fixa por (4.36), obtêm-se uma razão bem similar  $I(\gamma(^{108}\text{Pd}), \kappa = 8, s = 3)/108 = 0,0080002$  e, como esperado, também se obtêm um valor similar do RMSD do raio RMS de  $0,08225 \text{ fm}$ . De fato, usando (4.36) e considerando cada um dos núcleos com  $Q > 50$  da lista de núcleos definida na seção 4.3 como sendo o núcleo de referência, segue-se que a razão  $I(\gamma_{\text{ref.}}, \kappa = 8, s = 3)/Q_{\text{ref.}}$  oscila entre um mínimo de  $0,0075710$  para o  $^{86}\text{Kr}$  e um máximo de  $0,0084839$  para o  $^{78}\text{Kr}$  (veja a Figura 15). Logo, a quantidade  $I_{Q=1}$  varia pouco e, conforme a Figura 12, não se espera que a troca do  $^{56}\text{Fe}$  por qualquer outro núcleo pesado, pertencente a tal lista, mude drasticamente os valores teóricos dos raios RMS para tais núcleos, bem como seus valores associados de  $\Delta R$  e  $\Delta R^{A \geq 12}$ .

A escolha do núcleo de referência deve corresponder à um raio RMS experimental  $R^{\text{exp}}$  maior do que sua cota inferior dada por (4.50), mas uma vez que tal condição é satisfeita, já que o funcional  $I$  pode ser muito pequeno e não tem cota superior (ver seção 4.2), pode-se a princípio gerar todos os valores de  $Q$  através de (4.26). Usando (4.36) com  $s = 3$  se obtêm a partir de (4.46) que  $\sqrt{\langle r^2 \rangle}_{\text{mínimo}} = 1,8195 \text{ fm}$ , e portanto apenas o  $^1\text{H}$  e  $^3\text{H}$  não podem ser tomados como núcleos de referência entre todos os  $N_c = 265$  núcleos da lista definida acima. Para  $s = 3$ , que forneceu na seção 4.3 os melhores ajustes do raio RMS (ver Tabela 4 e Figura 9), também se repete o mesmo procedimento de tal seção trocando a escolha de  $^{56}\text{Fe}$  como o núcleo de referência por cada outro núcleo da lista considerada, para cada valor inteiro  $\kappa = 4, \dots, 14$ .<sup>¶</sup> Obtêm-se então os valores de  $\kappa$  que dão os menores valores de  $\Delta R$  e  $\Delta R^{A \geq 12}$ , definidos em (4.40), para cada escolha de núcleo de referência. Tais quantidades são mostradas na Figura 16, sem se distinguir

<sup>¶</sup> Agora, o passo do Runge-Kutta foi reduzido para  $\Delta\zeta = 0,005$  (ver seção 4.3).

os isótopos e omitindo-se o valor de  $\kappa$ , e estas variam pouco entre os núcleos não leves ( $Q \geq 12$ ). Logo, o procedimento descrito na seção 4.1 para a teoria (4.4), com potencial (4.19), possui um vasto número de possibilidades de escolha de núcleo de referência com excelente concordância com os dados experimentais no que diz respeito ao raio RMS. Em particular, se obtém que:

1. O menor valor de  $\Delta R$  na Figura 16 ocorre para a escolha do núcleo de referência  $^{18}\text{O}$  com  $\kappa = 7$ , onde  $\Delta R = 0,0818 \text{ fm}$  e  $\Delta R^{A \geq 12} = 0,0395 \text{ fm}$ .
2. O menor valor de  $\Delta R^{A \geq 12}$  na Figura 16 ocorre para a escolha do núcleo de referência  $^{68}\text{Zn}$  com  $\kappa = 6$ , onde  $\Delta R = 0,0825 \text{ fm}$  e  $\Delta R^{A \geq 12} = 0,0394 \text{ fm}$ . Note que o termo de ordem  $\kappa$  de (4.19) é então quadrático na densidade de carga topológica (4.6).

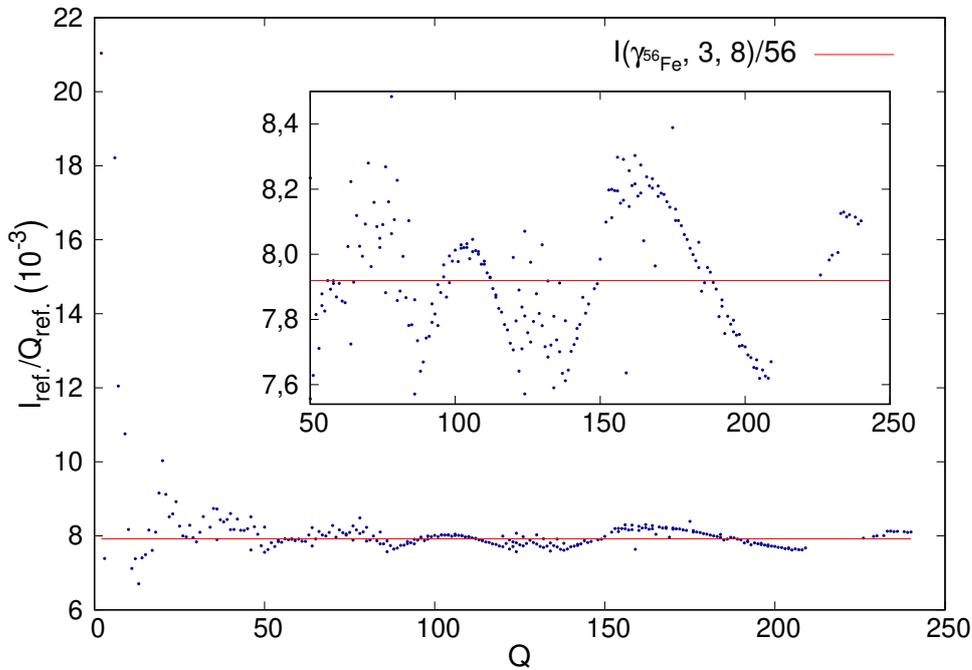


Figura 15 - O valor da quantidade  $I_{\text{ref.}}(\gamma_{\text{ref.}}, s, \kappa)/Q_{\text{ref.}}$  correspondente a se considerar cada elemento da lista de núcleos definida na seção 4.3 como núcleo de referência vs.  $Q$  para  $s = 3$  e  $\kappa = 8$ , mas sem se distinguir os isótopos.

Fonte: Elaborada pelo autor.

As relações (4.23), (4.36) e (4.43) mostram, para  $s$  fixo, a equivalência entre fixar o valor teórico da razão  $\mu_0/\beta_2$ , as unidades  $b$  do raio RMS ou o parâmetro de decaimento  $a$ . Logo, fixar ambos a razão  $\mu_0/\beta_2$  e o núcleo de referência é equivalente a se escolher as unidades  $b$  e o valor de  $I_{Q=1} = I_{\text{ref.}}/Q_{\text{ref.}}$ .<sup>||</sup> Talvez a abordagem mais simples para se encontrar estes dois parâmetros que minimizem  $\Delta R$  ou  $\Delta R^{A \geq 12}$ , para cada par de valores

<sup>||</sup> Note que fixar  $I_{Q=1}$  é equivalente a se escolher o valor de referência da constante de integração  $\gamma_{Q=1}$  correspondente com a configuração de carga topológica unitária.

de  $s$  e  $\kappa$ , seja através de um ajuste do raio RMS em unidades  $b$  como função de  $I^{1/3}$ . Considere que se encontre uma expressão exata que ajuste bem os valores numéricos dos raios RMS associados as soluções de (4.21) para um amplo intervalo de  $\gamma$ , como por exemplo que se conheça uma função que ajuste bem as curvas das Figuras 11-13. Segue-se que para cada par de valores de  $I_{Q=1}$  e  $b$  pode-se usar (4.26) e (4.50) para se determinar toda a sequência de valores de  $\sqrt{\langle r^2 \rangle}$ , correspondentes com cada valor inteiro de  $Q$ , e então obter os RMSD's do raio RMS através de (4.40). Utilizando algum método de minimização pode-se então encontrar os parâmetros  $b$  e  $I_{Q=1}$  que minimizem  $\Delta R$  ou  $\Delta R^{A \geq 12}$ .

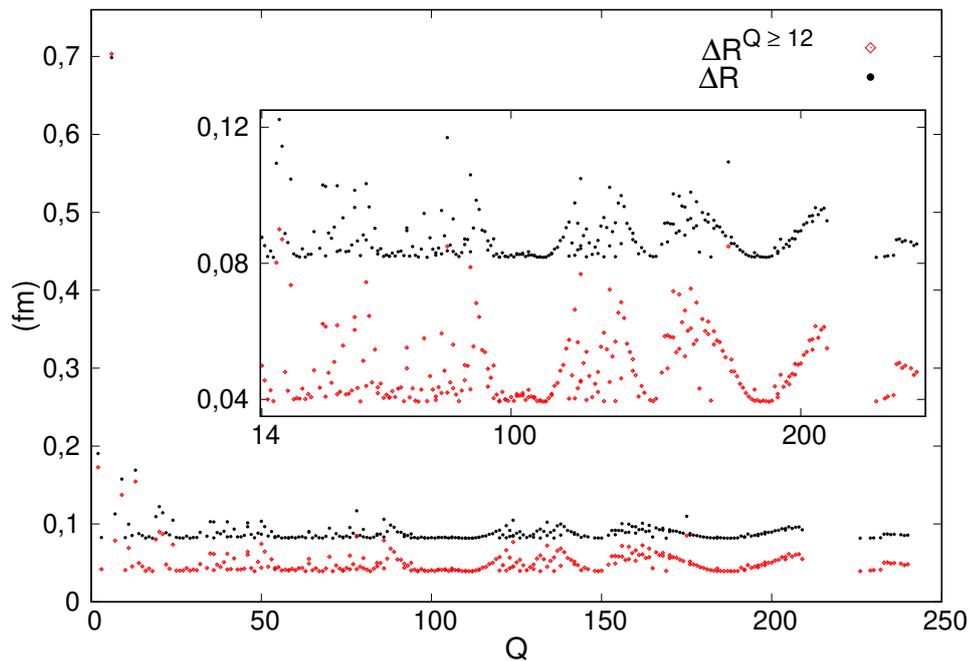


Figura 16 - Os menores valores de  $\Delta R$  e  $\Delta R^{A \geq 12}$  para  $s = 3$  dentre todos os valores inteiros  $\kappa = 4, \dots, 14$  para cada escolha de núcleo de referência na lista definida na seção 4.3, excluindo  ${}^1\text{H}$  e  ${}^4\text{He}$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Considere os métodos para minimizar o RMSD do raio RMS, para cada par de valores de  $s$  e  $\kappa$ , divididos nas três seguintes abordagens distintas:

1. Fixar  $b = 1 \text{ fm}$  (ou equivalentemente  $\mu_0/\beta_2 = s \sqrt{2} 0,524 \text{ fm}$  ou  $a = 0,524 \text{ fm}$ , de acordo com (4.43) e (4.36)), tal como feito na seção 4.3, e em seguida encontrar o núcleo de referência dentre todos da lista definida acima que minimizam  $\Delta R$  seguindo o procedimento descrito na seção 4.1.
2. Encontrar um bom ajuste do raio RMS  $\sqrt{\langle r^2 \rangle}_{\text{ajuste}} \left( I^{1/3} \right)$  em unidades  $b$ , fixar  $b = 1 \text{ fm}$  e então determinar  $I_{Q=1}$  que minimiza  $\Delta R$ . Note que se o RMSD entre o ajuste do raio RMS e os dados numéricos obtidos resolvendo (4.21) for desprezível, tal

abordagem deve fornecer um valor de  $\Delta R$  inferior ao obtido através da abordagem 1.

3. Encontrar um bom ajuste do raio RMS  $\sqrt{\langle r^2 \rangle}_{\text{ajuste}} \left( I^{\frac{1}{3}} \right)$  em unidades  $b$ , e então determinar ambos os parâmetros  $b$  e  $I_{Q=1}$  que minimizem  $\Delta R$ . Note que esta é uma generalização da abordagem 2.

Para exemplificar tais abordagens, considere  $s = 3$  e  $\kappa = 7$ , para os quais se obteve o menor valor de  $\Delta R$  seguindo o procedimento descrito na seção 4.1 com  $b = 1 \text{ fm}$ , como já discutido acima. Portanto, a abordagem 1 resulta na escolha de  $^{18}\text{O}$  como o núcleo de referência e  $I_{Q=1}(\gamma^{18}\text{O}, 3, 7) = 0,0097787$ .

Para ajustar (4.50) considere

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle}_{\text{ajuste}} = b \left( a_0 + a_1 q + \frac{a_2 + a_3 q^{a_7} + a_4 q^{a_8}}{1 + a_5 q^{a_9} + a_6 q^{a_{10}}} \right), \quad \text{com} \quad q \equiv I^{1/3} \quad (4.51)$$

e então deve-se encontrar os coeficientes  $a_i$ ,  $i = 0, \dots, 10$  que minimizam o RMSD entre os valores teóricos do raio RMS, obtidos a partir das soluções de (4.21), e dos valores do ajuste  $\sqrt{\langle r^2 \rangle}_{\text{ajuste}}$  obtidos através de (4.51), ambos em unidades  $b$  (veja a Figura 17).\*\*

Conhecidos todos os coeficientes  $a_i$ , então basta se usar  $q = (I_{Q=1} Q)^{\frac{1}{3}}$  em (4.51), para se escrever o raio RMS como função dos parâmetros  $b$ ,  $I_{Q=1}$  e  $Q$ . Consequentemente, o RMSD do raio RMS, dado por (3.61), se torna um funcional apenas de  $b$  e  $I_{Q=1}$ . O valor de  $I_{Q=1}$  obtido através da abordagem 2, na qual minimiza-se  $\Delta R$  com  $b = 1 \text{ fm}$  fixo, é praticamente o mesmo que foi obtido através da abordagem 1 (veja a Tabela 3). Assim como esperado, tal pequena variação de  $I_{Q=1}$  leva à uma pequena diferença entre os valores de  $\Delta R$ . A abordagem 3 reduz mais consideravelmente o valor de  $\Delta R$  em certa de 1,4% em relação a abordagem 1, enquanto o valor de  $I_{Q=1}$  aumenta em cerca 17% e  $b$  decresce cerca de 4,7%. Consequentemente, o parâmetro de decaimento exponencial  $a = 0,524 b$  teórico obtido através da abordagem 3 cai apenas cerca de 4,7% em relação ao valor experimental esperado de  $0,524 \text{ fm}$ , o qual é usado nas abordagens 1 e 2. Portanto, a teoria (5.15) não só reproduz acuradamente o comportamento do raio RMS, ao menos para núcleos não leves ( $Q \geq 12$ ), como se pode obter por meio desta o valor da constante de decaimento exponencial  $a$  em boa concordância com os dados experimentais.

\*\* Os dados ajustados foram obtidos resolvendo a equação (4.21) para cada  $\gamma = 5 - 0,005 j$ , com  $j = 1, \dots, 654$ , totalizando  $N_p = 654$  pontos. Obtêm-se  $a_0 = 1,37906$ ,  $a_1 = 4,72852$ ,  $a_2 = 0,44397$ ,  $a_3 = -4,11716$ ,  $a_4 = -70,83076$ ,  $a_5 = 22,51739$ ,  $a_6 = 32,73058$ ,  $a_7 = 0,443968$ ,  $a_8 = 0,95565$ ,  $a_9 = 2,51970$ ,  $a_{10} = 3,69725$ . O valor de RMSD entre os dados numéricos e a curva ajustada (4.51) é  $\Delta R_{\text{ajuste}} = 0,0007 b$ , o qual é diretamente proporcional à  $b$ . Note que para  $b = 1 \text{ fm}$ , tal como fixado nas abordagens 1 e 2, o RMSD do ajuste é de  $\Delta R_{\text{ajuste}}^{\text{abordagem 1,2}} = 0,0007 \text{ fm}$ . Portanto, para valores de  $b$  próximos à  $1 \text{ fm}$  há no máximo três casas de precisão em unidades  $\text{fm}$  nos valores dos raios RMS e de  $\Delta R$ .

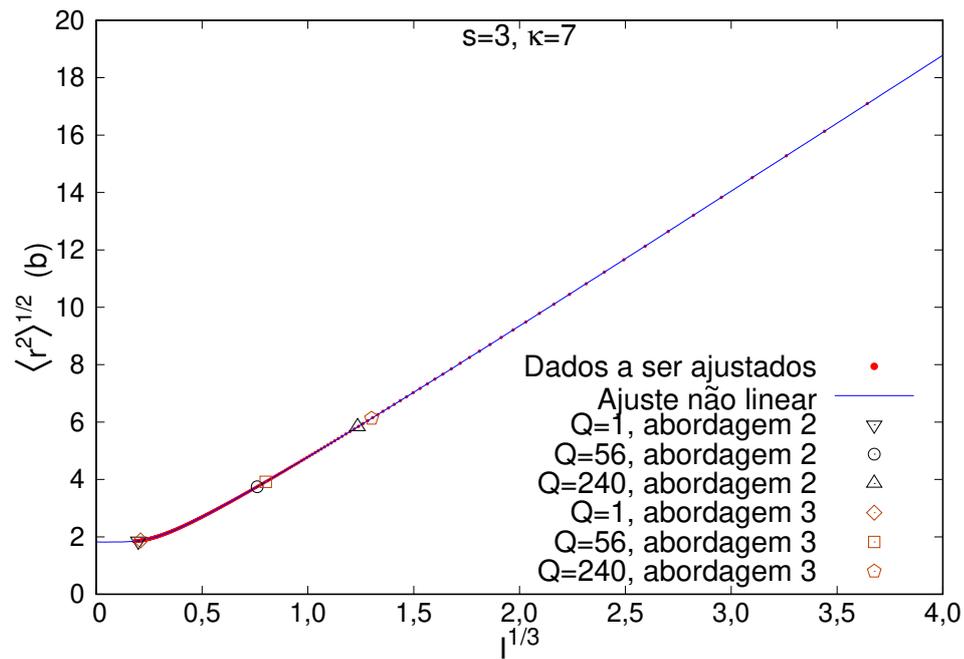


Figura 17 - Os valores numéricos do raio RMS (4.50) em unidades  $b$  vs.  $I^{1/3}$  e seu ajuste não linear obtido através de (4.51). Em adição, são mostrados também os pontos correspondentes com  $Q = 1, 56, 240$  obtidos minimizando-se  $\Delta R$ , dado em (4.40), usando as abordagens 2 e 3, o que leva respectivamente à  $(I_{Q=1}, b) = (0,0078490, 1 \text{ fm})$  e  $(I_{Q=1}, b) = (0,0091793, 0,95337 \text{ fm})$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 3 - O valor das quantidades  $\Delta R$ ,  $I_{Q=1}$ ,  $\mu_0/\beta_2$ ,  $a$  e  $b$  para  $s = 3$  e  $\kappa = 7$  obtidos através das abordagens 1 à 3 acima.

	$\Delta R (fm)$	$I_{Q=1}$	$\mu_0/\beta_2 (fm)$	$a (fm)$	$b (fm)$
Abordagem 1	0,08176	0,0078488	2,2231	0,524	1
Abordagem 2	0,08173	0,0078490	2,2231	0,524	1
Abordagem 3	0,08061	0,0091793	2,1195	0,49957	0,95337

Fonte: Elaborada pelo autor.



## 5 MODELO DE SKYRME BPS ESTENDIDO COM CAMPOS $h$ PROPAGANTES E MASSIVOS

O modelo de Skyrme BPS (2.31) definido na seção 2.3 introduz seis campos escalares adicionais, escritos como entradas de uma matriz  $3 \times 3$  real, simétrica, positiva e inversível  $h$ . Contudo, somente os campos de Skyrme  $U \in SU(2)$  se propagam no espaço, no sentido que não há termo cinético para os campos  $h$ . Em adicional, a teoria auto dual (2.31) é invariante conforme em três dimensões espaciais, e portanto é invariante por transformações de escala e suas soluções topológicas não têm tamanho fixo. Apesar de tal propriedade ser útil em muitas aplicações físicas, em muitas outras a escala de massa desempenha um papel fundamental. Nesta seção se estenderá o modelo de Skyrme BPS adicionando um termo cinético para os seis campos  $h$ , o qual quebra a invariância de escala, com o intuito de se estender as possíveis aplicações físicas desta teoria. Para que as soluções de tal modelo estendido sejam estáveis segundo o argumento de escala de Derrick também se adicionará um termo potencial para  $h$ , que inclui um termo massivo, além do termo de massa usual dos campos de Skyrme  $SU(2)$ .

### 5.1 O modelo de Skyrme BPS estendido

Considere a extensão do modelo de Skyrme BPS (2.31) definida em quatro dimensões do espaço tempo de Minkowski, com a assinatura de métrica  $ds^2 = dx_0^2 - dx_i^2$ ,  $i = 1, 2, 3$ , como

$$S = S_1 + S_2, \quad \begin{aligned} S_1 &= \int d^4x \left[ \frac{m_0^2}{2} h_{ab} R_\mu^a R^{b,\mu} - \frac{1}{4e_0^2} h_{ab}^{-1} H_{\mu\nu}^a H^{b,\mu\nu} \right], \\ S_2 &= \int d^4x \left[ \frac{\mu_0^2}{2} \text{Tr} (\partial_\mu h)^2 - \frac{\beta_1^2}{2} \text{Tr} h^2 - \frac{\beta_2^2}{2} V(h) - \frac{\beta_3^2}{2} \text{Tr} (\mathbb{1} - U) \right], \end{aligned} \quad (5.1)$$

onde  $S_1$  corresponde com o modelo de Skyrme BPS (2.31), definido propriamente na seção 2.3, e onde se usou (2.33), (2.34), (2.35), (2.36) e (2.37). Os campos da teoria (5.1) são os três campos escalares  $U \in SU(2)$  e os seis campos escalares contidos nas entradas da matriz  $h$ , sendo todos estes adimensionais. Portanto, as constantes de acoplamento de (5.1) têm as seguintes dimensões

$$[m_0] = [\mu_0] = \sqrt{\frac{[E]}{[L]}}, \quad [e_0] = \frac{1}{\sqrt{[E][L]}}, \quad [\beta_1] = [\beta_2] = [\beta_3] = \sqrt{\frac{[E]}{[L]^3}}. \quad (5.2)$$

com as unidades  $[E] \equiv [\text{energia}]$  e  $[L] \equiv [\text{comprimento}]$ .

Os campos  $U$  são considerados escalares sob transformações conformes e a matriz  $h$  tem peso conforme  $-1$ , i.e. pelas transformações conformes infinitesimais  $\delta x_i = \epsilon_i$ , que satisfazem  $\partial_i \epsilon_j + \partial_j \epsilon_i = 2D \delta_{ij}$  com  $x_i$  sendo as coordenadas Cartesianas e  $i, j = 1, 2, 3$ ,

se têm  $\delta U = 0$  e  $\delta h = -D h$ .<sup>1,8</sup> A função  $D$  é nula para translações e rotações, constante para dilatações e linear nas coordenadas  $x_i$ 's para as transformações conformes especiais. Portanto, pelas transformações de escala  $x \rightarrow \alpha x$  os campos  $h$  se transformam como  $h \rightarrow \alpha^{-1} h$ . Defina então

$$\begin{aligned} T &\equiv \frac{\mu_0^2}{2} \int d^3x \operatorname{Tr} (\partial_\mu h)^2, & P_h &\equiv \frac{\beta_1^2}{2} \int d^3x \operatorname{Tr} h^2, \\ P_U &\equiv \frac{\beta_1^2}{2} \int d^3x \operatorname{Tr} (\mathbf{1} - U), & P_V &\equiv \frac{\beta_2^2}{2} \int d^3x V(\varphi). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Por tal transformação de escala os funcionais (5.3) se transformam como

$$T \rightarrow \alpha^{-1} T, \quad P_h \rightarrow \alpha P_h, \quad P_U \rightarrow \alpha^3 P_U, \quad P_V \rightarrow P'_V(\alpha), \quad (5.4)$$

onde a função  $P'_V(\alpha)$  é desconhecida já que o potencial  $V$  ainda não foi fixado. Resulta que as soluções da versão estática do modelo (5.1) que são estáveis sob o argumento de escala de Derrick devem satisfazer

$$-T + P_h + 3P_U + (\partial_\alpha P'_V)_{\alpha=1} = 0, \quad (5.5)$$

$$2T + 6P_U + (\partial_\alpha^2 P'_V)_{\alpha=1} > 0. \quad (5.6)$$

Consequentemente, cada um dos termos  $T$ ,  $P_U$  e  $P_h$  quebra a simetria conforme em três dimensões do modelo de Skyrme BPS. O único termo que pode preservar tal simetria é  $P_V$ , se o potencial  $V$  for cúbico nos autovalores de  $h$ . Note que a condição (5.6) é automaticamente satisfeita para  $V = 0$  ou  $V$  sendo uma soma positiva de potências dos autovalores de  $h$ .

Assim como o modelo de Skyrme BPS, o termo cinético  $T$  e o termo de massa  $P_h$  para os campos  $h$ , dados em (5.3), são invariantes sob as transformações globais  $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$  definidas em (2.38), (2.39) e (2.40). Para que o termo de interação  $P_V$  para os campos  $h$  preserve tal simetria, considere apenas potenciais  $V(h)$  que sejam funções apenas dos três autovalores de  $h$ , dados por  $\varphi_a$ 's, com  $a = 1, 2, 3$ . Em adição, denote tal potencial como  $V(\varphi_a)$  e considere por conveniência que este seja invariante pela troca entre quaisquer dois destes autovalores. Por exemplo, pode-se considerar  $V$  como função de potências do traço ou do determinante da matriz  $h$ . Por fim, o termo de massa usual do pión  $P_U$  quebra a simetria quiral  $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$  em seu subgrupo diagonal  $U \rightarrow g U g^{-1}$ ,  $\forall g \in SU(2)$ .

Devido ao termo de massa do pión  $P_U$  da teoria (5.1), a variação da segunda parte da ação  $S_2$  em relação aos campos  $U$  não se anula para as configurações auto duais (3.18), i.e.  $\delta_U S_2 = \delta_U P_U \neq 0$ . Por outro lado, já que tais soluções satisfazem  $\delta_U S_1 = 0$ , então as equações estáticas de Euler-Lagrange para a teoria estendida (5.1) não podem ser resolvidas por nenhuma solução auto dual (3.18) não trivial ( $Q = 0$ ).

Já que a matriz  $h$  é real e simétrica, pode-se decompor seus seis campos em uma matriz diagonal composta pelos autovalores de  $h$  e os três campos remanescentes ficam

contidos na matriz  $3 \times 3$  ortogonal  $M$  que diagonaliza  $h$ . O mesmo se segue para a matriz real e simétrica  $\tau_{ab} = R_i^a R_i^b$ , definida através de (2.33) e (3.10), a qual é diagonalizada por uma matriz  $3 \times 3$  ortogonal  $N$ . As seis equações de autodualidade (3.31) vinculam os autovalores de  $h$  e  $\tau$  através da relação (3.16) e implicam que tais matrizes são diagonalizadas pela mesma matriz ortogonal, e então se pode escrever  $M = N$ . Apesar da teoria (5.1) conter um termo cinético para  $M$  e não preservar todas as seis equações de autodualidade, o ansatz  $M = N$  baseado na autodualidade pode ajudar a se construir soluções estáticas para a teoria estendida (5.1).

## 5.2 Um ansatz inspirado na autodualidade

A matriz  $\tau$  introduzida em (3.10) desempenha um papel importante na construção de um ansatz inspirado na autodualidade e é conveniente escrever alguns dos termos envolvendo os campos de  $U$  em termos de tal matriz. A partir de (2.34), (2.35) e (2.37) se obtêm

$$H_{ij}^a H_{ij}^b = \varepsilon_{acd} \varepsilon_{bef} \tau_{ce} \tau_{df}. \quad (5.7)$$

Como as matrizes  $h$  e  $\tau$  são ambas reais e simétricas, então elas podem ser diagonalizadas pelas transformações ortogonais

$$h = M h_D M^T, \quad M M^T = \mathbb{1}, \quad (h_D)_{ab} = \varphi_a \delta_{ab}, \quad (5.8)$$

e

$$\tau = N \tau_D N^T, \quad N N^T = \mathbb{1}, \quad (\tau_D)_{ab} = \omega_a \delta_{ab}, \quad (5.9)$$

com  $a, b = 1, 2, 3$ . Os autovalores  $\varphi_a$ 's da matriz  $h$  e as entradas da matriz  $M$  são funcionais das entradas da matriz  $h$ . Logo, a matriz  $M$  e a matriz  $h_D$  formada pelos autovalores de  $h$  contêm cada uma três dos seis graus de liberdade da matriz  $h$ , os quais são todos tratados como campos escalares independentes. Note que a matriz  $M$  é ortogonal e só têm três graus de liberdade por definição, pois pertence ao grupo  $O(3)$ . Os três autovalores  $\omega_a$ 's da matriz  $\tau$  e as entradas da matriz  $N$  não podem ser tratados como campos escalares independentes, pois são ambas calculadas em termos dos campos  $U \in SU(2)$ , os quais possuem apenas três graus de liberdade, e suas primeiras derivadas espaciais.

Diferenciando ambos os lados de (5.8) com respeito as coordenadas Cartesianas  $x^\mu$  se obtêm

$$\partial_\mu h = M \left( \partial_\mu h_D + \left[ M^T \partial_\mu M, h_D \right] \right) M^T \quad (5.10)$$

e então

$$\text{Tr} (\partial_\mu h)^2 = (\partial_\mu \varphi_a)^2 + \text{Tr} \left( \left[ M^T \partial_\mu M, h_D \right] \right)^2. \quad (5.11)$$

Conjugando ambos os lados das relações de comutação (2.34) com um elemento  $g$  do grupo  $SU(2)$  e usando (2.40) se segue que

$$\varepsilon_{abc} d_{dc} (g) = \varepsilon_{efd} d_{ea} (g) d_{fb} (g). \quad (5.12)$$

As matrizes  $3 \times 3$  ortogonais  $M$  satisfazem uma identidade similar à (5.12) (ver a equação (A.10) do Apêndice A.2) dada por

$$\varepsilon_{abc} M_{dc} = (\det M) \varepsilon_{efd} M_{ea} M_{fb}, \quad (5.13)$$

onde  $\det M = \pm 1$ , e o mesmo vale para as matrizes  $M^T$ ,  $N$  e  $N^T$ . Usando tal fato junto com as relações (5.9) e (5.7) se obtêm

$$H_{ij}^a H_{ij}^b = \sum_{c,d,e,f=1}^3 \varepsilon_{cde} \varepsilon_{cdf} \omega_c \omega_d N_{ae} N_{fb}^T. \quad (5.14)$$

Consequentemente se pode escrever a energia estática da teoria (5.1) como

$$E = E_1 + E_2, \quad (5.15)$$

com

$$E_1 = \int d^3x \left[ \frac{m_0^2}{2} \sum_{a,b=1}^3 [(N^T M)_{ab}]^2 \omega_a \varphi_b + \frac{1}{4e_0^2} \sum_{b,c,d,e,f=1}^3 (N^T M)_{eb} (N^T M)_{fb} \varepsilon_{cde} \varepsilon_{cdf} \frac{\omega_c \omega_d}{\varphi_b} \right] \quad (5.16)$$

e

$$E_2 = \int d^3x \left[ \frac{\mu_0^2}{2} [(\partial_i \varphi_a)^2 + \text{Tr}([M^T \partial_i M, h_D])]^2 + \frac{\beta_1^2}{2} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2) + \frac{\beta_2^2}{2} V(\varphi_a) + \frac{\beta_3^2}{2} \text{Tr}(\mathbb{1} - U) \right]. \quad (5.17)$$

A energia estática  $E$  é portanto extremizada por nove equações de Euler-Lagrange: três associadas com os campos  $\varphi_a$ 's, três associadas com os campos  $M$  e três associadas com os campos  $U \in SU(2)$ .

A variação do funcional  $E_1$  com respeito aos campos  $M$  leva à

$$\delta_M E_1 = \int d^3x \left[ m_0^2 \sum_{a,b=1}^3 (N^T M)_{ab} (N^T \delta M)_{ab} \omega_a \varphi_b + \frac{1}{2e_0^2} \sum_{b,c,d,e,f=1}^3 (N^T M)_{eb} (N^T \delta M)_{fb} \varepsilon_{cde} \varepsilon_{cdf} \frac{\omega_c \omega_d}{\varphi_b} \right]. \quad (5.18)$$

Como mencionado acima, a equação (3.18) implica que para as soluções estáticas do modelo de Skyrme BPS, cuja ação  $S_1$  é dada em (5.1), a matriz  $h$  é diagonalizada pela mesma matriz ortogonal que diagonaliza  $\tau$ , i.e. para tais configurações auto duais  $M = N$ . Uma possibilidade interessante seria justamente considerar um ansatz no qual estas três equações independentes são preservadas e apenas a relação auto dual entre os autovalores de  $\tau$  e  $h$ , dada por (3.16), possa ser violada. Portanto, em ordem a se preservar a metade

das seis equações de autodualidade não equivalentes que levam à (3.18), considere o ansatz para os campos  $M$  dado por

$$M = N. \quad (5.19)$$

Tal relação implica que os três campos escalares em  $M$  são funcionais dos campos  $U$  e suas primeiras derivadas espaciais, os quais determinam as entradas da matriz  $N$ . Logo, (5.19) implica que dentro do ansatz se têm  $(N^T M)_{ab} = \delta_{ab}$  e  $N^T \delta M = N^T \delta N$ , as quais por sua vez levam à

$$(N^T M)_{ab} (N^T \delta M)_{ab} = \delta_{ab} (N^T \delta N)_{ab}, \quad (5.20)$$

$$\sum_{b=1}^3 (N^T M)_{eb} (N^T \delta M)_{fb} \varphi_b^{-1} = (N^T \delta N)_{fe} \varphi_e^{-1}, \quad (5.21)$$

onde não há soma implícita. Contudo, já que  $N$  é uma matriz ortogonal segue-se que  $N^T \delta N$  é uma matriz anti-simétrica. Logo, ambos os termos de (5.18) se anulam independentemente, já que (5.20) se anula e (5.21) pode ser não nulo somente para  $e \neq f$ , enquanto  $\varepsilon_{cde} \varepsilon_{cdf} \omega_c \omega_d$  pode ser não nulo apenas para  $e = f$ . Note que usou-se somente três das seis equações de autodualidade de (3.18) para se satisfazer automaticamente  $\delta_M E_1 = 0$ . Conseqüentemente, as equações de Euler-Lagrange remanescentes para os campos  $M$  provém da variação da segunda parte da energia estática  $E_2$  e, usando (5.19), estas são reduzidas à

$$\partial_i \left[ h_D, \left[ h_D, N^T \partial_i N \right] \right] + \left[ N^T \partial_i N, \left[ h_D, \left[ h_D, N^T \partial_i N \right] \right] \right] = 0. \quad (5.22)$$

Obtendo-se as equações de Euler-Lagrange para a teoria (5.1) associadas com os campos  $\varphi_a$ 's e em seguida usando o ansatz (5.19) se é levado à

$$\begin{aligned} & \mu_0^2 \partial^2 \varphi_a - \beta_1^2 \varphi_a - \frac{\beta_2^2}{2} \frac{\delta V(\varphi)}{\delta \varphi_a} - \mu_0^2 \text{Tr} \left( \left[ N^T \partial_i N, h_D \right] \left[ N^T \partial_i N, \frac{\delta h_D}{\delta \varphi_a} \right] \right) \\ & - \frac{m_0^2}{2} \omega_a + \frac{1}{4 e_0^2} \sum_{c,d=1}^3 (\varepsilon_{acd})^2 \frac{\omega_c \omega_d}{\varphi_a^2} = 0. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Denote  $\chi_\alpha$ , com  $\alpha = 1, 2, 3$ , como sendo os três campos independentes contidos na matriz  $U \in SU(2)$ . As equações estáticas de Euler-Lagrange da teoria (5.1) associada a tais campos  $\chi_\alpha$ 's se tornam

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{\beta_3^2}{2} \frac{\text{Tr} U}{\delta \chi_\alpha} + \frac{m_0^2}{2} \sum_{a=1}^3 \left[ \partial_i \left( \varphi_a \frac{\delta \omega_a}{\delta \partial_i \chi_\alpha} \right) - \varphi_a \frac{\delta \omega_a}{\delta \chi_\alpha} \right] \\ & + \frac{1}{4 e_0^2} \sum_{b,c,d=1}^3 (\varepsilon_{cdb})^2 \left[ \partial_i \left( \frac{1}{\varphi_b} \frac{\delta (\omega_c \omega_d)}{\delta \partial_i \chi_\alpha} \right) - \frac{1}{\varphi_b} \frac{\delta (\omega_c \omega_d)}{\delta \chi_\alpha} \right]. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Note que a variação de  $N$  com respeito aos campos  $\chi_\alpha$ 's não contribuem devido ao ansatz (5.19). De fato, a matriz  $\delta N^T N$  é anti-simétrica e já que o ansatz (5.19) implica que  $(N^T M)_{ab} = \delta_{ab}$  e  $\delta N^T M = \delta N^T N$ , então dependência vinda da variação de  $N$  com respeito aos campos  $\chi_\alpha$ 's se anula do mesmo modo que (5.18) se anulou.

Considere a decomposição dos campos  $SU(2)$  em termos de um campo escalar real  $f$  e um campo escalar complexo  $u$ , junto a seu complexo conjugado  $\bar{u}$ , tal como definidos em (2.52) e (2.53), e as coordenadas (3.43), cuja métrica é dada em (2.58). Usando tal decomposição a matriz  $\tau$ , definida em (3.10), se torna

$$\tau_{ab} = \widehat{\text{Tr}} \left( \Sigma_i X^\dagger T_a X \right) \widehat{\text{Tr}} \left( \Sigma_i X^\dagger T_b X \right) = d_{ac}^T \left( X^\dagger \right) \widehat{\text{Tr}} \left( \Sigma_i T_c \right) \widehat{\text{Tr}} \left( \Sigma_i T_d \right) d_{db} \left( X^\dagger \right), \quad (5.25)$$

onde  $d^T \left( X^\dagger \right) = d \left( X \right) = d \left( W^\dagger \right) d \left( e^{ifT_3/2} \right)$  é a representação adjunta de  $X^\dagger$  e as matrizes  $d \left( e^{ifT_3/2} \right)$  e  $d \left( W^\dagger \right)$  são dadas respectivamente em (3.49) e (3.50).

Considere o ansatz holomófico para os campos  $SU(2)$ , tal como definido em (3.45), dado por

$$f \equiv f(r), \quad u \equiv u(w), \quad \bar{u} \equiv \bar{u}(\bar{w}), \quad (5.26)$$

onde  $u(w)$  é um mapa racional (ver equação (3.53)) entre 2-esferas e possui grau topológico  $n$ , dado por (3.54). Nas coordenadas esféricas tradicionais (2.27),  $r$  corresponde justamente a coordenada radial usual e a coordenada complexa  $w = i \cot \left( \frac{\theta}{2} \right) e^{i\varphi}$ , tal como dado em (3.57), é função apenas dos ângulos  $\theta$  e  $\varphi$ . Segue-se então que a matriz  $\widehat{\text{Tr}} \left( \Sigma_i T_a \right) \widehat{\text{Tr}} \left( \Sigma_i T_b \right)$  se torna diagonal. De fato, a partir de (2.52), (2.52), (3.43) e (5.26) se obtêm

$$(\tau_D)_{ab} \equiv \widehat{\text{Tr}} \left( \Sigma_i T_a \right) \widehat{\text{Tr}} \left( \Sigma_i T_b \right) = \omega_a \delta_{ab}, \quad (5.27)$$

com

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{4 \sin^2(f/2)}{r^2} \Lambda, \quad \omega_3 = (f')^2, \quad (5.28)$$

onde se usou  $f' \equiv \frac{df}{dr}$  e foi definido

$$\Lambda(w, \bar{w}) \equiv \frac{(1 + |w|^2)^2}{(1 + |u|^2)^2} \partial_w u \partial_{\bar{w}} \bar{u}. \quad (5.29)$$

Comparando (5.9) e (5.25) se conclui que

$$N = d^T \left( X^\dagger \right) = d \left( X \right) = d \left( W^\dagger \right) d \left( e^{ifT_3/2} \right). \quad (5.30)$$

Identificando a decomposição (2.52) dos campos  $U$  com os campos  $\chi_a$ 's através de  $(\chi_1, \chi_2, \chi_3) = (f, u, \bar{u})$ , se obtêm de (5.24) as equações estáticas de Euler-Lagrange para os campos  $f$ ,  $u$  e  $\bar{u}$ . Usando o ansatz holomófico (3.45) e a relação (5.28), então as equações de Euler-Lagrange para os campos  $f$  e  $u$  são reduzidas respectivamente à

$$\begin{aligned} & -\frac{\beta_3^2}{2} \sin(f/2) + \Lambda \left\{ m_0^2 \left[ \frac{1}{r^2} \partial_r \left( r^2 \frac{\varphi_3}{\Lambda} f' \right) - (\varphi_1 + \varphi_2) \frac{\sin f}{r^2} \right] \right. \\ & + \frac{1}{e_0^2} \left[ \frac{1}{r^2} \partial_r \left( r^2 \left( \frac{1}{\varphi_1} + \frac{1}{\varphi_2} \right) f' \frac{4 \sin^2(f/2)}{r^2} \right) \right. \\ & \left. \left. - \left( \frac{1}{\varphi_1} + \frac{1}{\varphi_2} \right) (f')^2 \frac{\sin f}{r^2} - \frac{\Lambda}{\varphi_3} \frac{16 \sin^3(f/2) \cos(f/2)}{r^4} \right] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (5.31)$$

e

$$\begin{aligned}
& m_0^2 e_0^2 \left[ (1 + |w|^2)^2 \partial_w \left( \frac{(\varphi_1 + \varphi_2)}{(1 + |w|^2)^2} \frac{\delta \Lambda}{\delta \partial_w u} \right) - (\varphi_1 + \varphi_2) \frac{\delta \Lambda}{\delta u} \right] \\
& + (f')^2 \left[ (1 + |w|^2)^2 \partial_w \left( \frac{1}{(1 + |w|^2)^2} \left( \frac{1}{\varphi_1} + \frac{1}{\varphi_2} \right) \frac{\delta \Lambda}{\delta \partial_w u} \right) - \left( \frac{1}{\varphi_1} + \frac{1}{\varphi_2} \right) \frac{\delta \Lambda}{\delta u} \right] \\
& + \frac{4 \sin^2(f/2)}{r^2} \left[ (1 + |w|^2)^2 \partial_w \left( \frac{1}{(1 + |w|^2)^2} \frac{1}{\varphi_3} \frac{\delta \Lambda^2}{\delta \partial_w u} \right) - \frac{1}{\varphi_3} \frac{\delta \Lambda^2}{\delta u} \right] = 0. \quad (5.32)
\end{aligned}$$

A equação de Euler-Lagrange associada ao campo  $\bar{u}$  corresponde ao complexo conjugado de (5.32). Note que a partir de (5.29) se obtém

$$(1 + |w|^2)^2 \partial_w \left( \frac{1}{(1 + |w|^2)^2} \frac{\delta \Lambda}{\delta \partial_w u} \right) - \frac{\delta \Lambda}{\delta u} = 0 \quad (5.33)$$

e então (5.32) se reduz à

$$\left[ m_0^2 e_0^2 \partial_w (\varphi_1 + \varphi_2) + (f')^2 \partial_w \left( \frac{1}{\varphi_1} + \frac{1}{\varphi_2} \right) + \frac{8 \sin^2(f/2)}{r^2} \partial_w \left( \frac{\Lambda}{\varphi_3} \right) \right] \frac{\delta \Lambda}{\delta \partial_w u} = 0. \quad (5.34)$$

Uma simples maneira de satisfazer (5.34) é assumir o ansatz para os autovalores de  $h$ , inspirado nas configurações auto duais (3.47), dado por

$$\varphi_a \equiv \varphi_a(r), \quad \text{para } a = 1, 2, \quad \text{e} \quad \varphi_3 \equiv \widehat{\varphi}_3(r) \Lambda(w, \bar{w}). \quad (5.35)$$

Tal ansatz também resolve a equação de Euler-Lagrange associada ao campo  $\bar{u}$ . A equação (5.31) para o campo  $f$  é radial com exceção de um termo linear em  $\Lambda$ . Se o primeiro termo de (5.31) se anula, então esta equação se torna puramente radial para qualquer mapa racional. Contudo, isso ocorre somente para dois casos distintos: ou  $f$  é um campo constante com valor múltiplo inteiro de  $2\pi$ , e portanto a carga topológica dada por (3.55) é nula; ou se o termo de massa do pión for removido da ação (5.1) o que é equivalente a se tomar  $\beta_3 = 0$ . Considerando apenas as soluções topológicas não triviais de (5.34), devido ao termo de massa do pión ( $\beta_3 \neq 0$ ) é possível se reescrever a função angular  $\Lambda(w, \bar{w})$  em (5.31) como uma função puramente radial, e então esta deve ser contante. Contudo, no Apêndice C.1 se demonstra que  $\Lambda$  pode ser constante se, e somente se o mapa racional  $u$  for dado por

$$u = e^{i\alpha} w, \quad \bar{u} = e^{-i\alpha} \bar{w}, \quad (5.36)$$

$\forall \alpha \in [0, 2\pi)$ , com  $\alpha$  sendo uma constante no espaço físico, e então

$$\Lambda = 1. \quad (5.37)$$

Resulta de (5.36) ou (5.37) que todos os autovalores de  $h$  dados em (5.35) se tornam puramente radiais, onde  $\varphi_3(r) = \widehat{\varphi}_3(r)$ . O grau topológico do mapa  $u = e^{i\alpha} w$ , escrito na

representação integral em (5.36), é  $n = 1$  e então a carga topológica, tal como dada em (3.56), se torna

$$Q = sm, \quad \text{com} \quad s \equiv \begin{cases} +1, & f(0) = 2\pi m, & f(\infty) = 0 \\ -1, & f(0) = 0, & f(\infty) = 2\pi m \end{cases}, \quad (5.38)$$

com  $m$  sendo um número natural.

É possível se demonstrar que a densidade de energia estática total da teoria (5.1) dentro do ansatz composto pelos ansätze acima, i.e. por (5.19), (5.26), (5.35) e (5.36) é invariante por troca entre os autovalores  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ . Em adição, no Apêndice C.2 se demonstra que, uma vez assumidos tais ansätze, as equações de Euler-Lagrange para os campos  $M$ , dadas por (5.22), são automaticamente satisfeitas se

$$\varphi_1 = \varphi_2. \quad (5.39)$$

Usando apenas o ansatz holomórfico (5.26) para os campos que compõe  $U$  e (5.39), segue-se que as equações de Euler-Lagrange (5.23) para os campos  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ , dadas respectivamente em (C.9) e (C.10), se tornam equivalentes (veja o Apêndice C.2). Tal equivalência também é consequência do fato de se ter considerado o potencial  $V(\varphi_a)$  como sendo simétrico por troca entre quaisquer dois autovalores  $\varphi_a$ 's. Impondo adicionalmente (5.35) e (5.39), mas sem fixar o mapa racional  $u$ , as três equações para os autovalores  $\varphi_a$ 's são reduzidas à duas equações independentes (C.12)-(C.13), as quais são radiais exceto pela dependência em  $\Lambda(w, \bar{w})$  e suas derivadas. A escolha do mapa racional para o qual  $\Lambda$  é constante, que foi feita devido o termo de massa do pión, torna tais equações puramente radiais e pode desempenhar um papel fundamental para que o sistema de equações (C.12)-(C.13) seja solúvel mesmo que  $\beta_3 = 0$ , tal como argumentado no Apêndice C.2.

Resulta dos argumentos acima que o ansatz holomórfico (5.26) para os campos  $U$ , o ansatz (5.19) para os campos  $M$ , junto com (5.30), os ansätze (5.35) e (5.39) para os autovalores de  $h$ , e a escolha do mapa racional (5.36) que implica (5.37), i.e. o seguinte ansatz para os campos da teoria (5.1)

$$\text{Ansatz para } U: \quad U = W^\dagger e^{if(r)T_3} W, \quad W = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & -e^{i(\varphi+\alpha)} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ e^{-i(\varphi+\alpha)} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}; \quad (5.40)$$

$$\text{Ansatz para } h: \quad M = N = d(W^\dagger) d\left(e^{if(r)T_3/2}\right), \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_1(r), \quad \varphi_3 = \varphi_3(r),$$

onde se usou (3.57), reduz as nove equações estáticas de Euler Lagrange da teoria (5.1) à três equações radiais acopladas associadas aos campos  $f$ ,  $\varphi_1$  e  $\varphi_3$ .<sup>\*</sup> Usando o ansatz (5.40)

<sup>\*</sup> Note que usar (3.57) é equivalente a se reescrever os campos em termos das coordenadas esféricas usuais definidas através da identificação das coordenadas Cartesianas (3.43) com as coordenadas complexas (2.27).

a equação (5.31) associada ao campo  $f$  se reduz à

$$m_0^2 \left[ \frac{1}{r^2} \partial_r \left( r^2 \varphi_3 f' \right) - \varphi_1 \frac{2 \sin f}{r^2} \right] - \frac{\beta_3^2}{2} \sin(f/2) \quad (5.41)$$

$$+ \frac{1}{e_0^2} \left[ \frac{1}{r^2} \partial_r \left( r^2 \frac{f'}{\varphi_1} \frac{8 \sin^2(f/2)}{r^2} \right) - \frac{(f')^2}{\varphi_1} \frac{2 \sin f}{r^2} - \frac{16 \sin^3(f/2) \cos(f/2)}{\varphi_3 r^4} \right] = 0.$$

Usando o ansatz (5.40) as equações (5.23) se reduzem à duas equações para os campos  $\varphi_1$  e  $\varphi_3$ , que podem ser também obtidas usando  $\Lambda = 1$  e  $\varphi_3 = \hat{\varphi}_3$  em (C.12) e (C.13), dadas respectivamente por

$$0 = \frac{\mu_0^2}{r^2} \left[ \partial_r \left( r^2 \partial_r \varphi_1 \right) - 2(\varphi_1 - \varphi_3) \right] - \beta_1^2 \varphi_1 - \frac{\beta_2^2}{2} \frac{\delta V(\varphi)}{\delta \varphi_1} \quad (5.42)$$

$$+ m_0^2 \frac{2 \sin^2(f/2)}{r^2} \left[ \frac{1}{m_0^2 e_0^2} \frac{(f')^2}{\varphi_1^2} - 1 \right],$$

$$0 = \frac{\mu_0^2}{r^2} \left[ \partial_r \left( r^2 \partial_r \varphi_3 \right) + 4(\varphi_1 - \varphi_3) \right] - \beta_1^2 \varphi_3 - \frac{\beta_2^2}{2} \frac{\delta V(\varphi)}{\delta \varphi_3} \quad (5.43)$$

$$+ \frac{m_0^2}{2} \left[ \frac{16 \sin^4(f/2)}{r^4 m_0^2 e_0^2 \varphi_3^2} - (f')^2 \right].$$

É possível demonstrar que as equações que extremizam a energia estática (5.15) dentro do ansatz (5.40), i.e. substituindo primeiro o ansatz (5.40) em (5.15) e então variando tal energia estática em relação aos campos radiais  $f$ ,  $\varphi_1$  e  $\varphi_3$ , são equivalentes as equações de Euler-Lagrange (5.41), (5.42) e (5.43), as quais são obtidas primeiro variando a ação estática (5.1) em relação aos nove campos originais e depois usando o ansatz (5.40). Logo, é esperado que as configurações de campo que minimizam a energia estática (5.15) dentro do ansatz (5.40) também extremizam a versão estática da ação (5.1). Apesar da densidade de carga topológica, dada em (3.62), e os autovalores de  $h$  serem radiais dentro do ansatz (5.40), fora do ansatz a teoria (5.1) pode possuir soluções topológicas com menor energia estática, para o mesmo valor de  $Q$ , onde tais quantidades não sejam radiais. Por fim, é conveniente checar se as soluções de (5.41)-(5.43) são estáveis sob o argumento de escala de Derrick.<sup>12</sup>

### 5.3 Soluções numéricas do modelo de Skyrme estendido sem potencial $V(\varphi_a)$

Considere o setor estático da teoria (5.1) sem o termo potencial  $V$ . Por conveniência, escolha primeiro a energia estática em unidades de carga topológica  $48 \pi^2 (m_0/e_0) |Q|$ , o que significa que a energia estática  $E_1$  do modelo de Skyrme BPS, dada por (2.47), é igual a um para as configurações auto duais (3.18). Segundo, escolha a unidade de comprimento e a unidade adimensional dos campos  $h$  como sendo dadas respectivamente por  $\mu_0^2/(m_0^3 e_0)$  e  $m_0^2/\mu_0^2$ . Logo, a energia estática total (5.15) com  $V = 0$  reescrita em termos destas novas

unidades é dada por

$$E = \frac{1}{96 \pi^2} \int d^3 x \left[ h_{ab} R_i^a R_i^b + \frac{1}{2} h_{ab}^{-1} H_{ij}^a H_{ij}^b + \text{Tr} (\partial_i h)^2 + \sigma_1 \text{Tr} (h^2) + \sigma_2 \text{Tr} (\mathbb{1} - U) \right], \quad (5.44)$$

com

$$\sigma_1 = \frac{\mu_0^2 \beta_1^2}{m_0^6 e_0^2}, \quad \sigma_2 = \frac{\mu_0^2 \beta_3^2}{m_0^6 e_0^2} \quad (5.45)$$

e as equações de Euler-Lagrange (5.41), (5.42) e (5.43) se tornam

$$\Delta E_f \equiv \frac{1}{r^2} \left[ \partial_r (r^2 A) + 2 B \sin(f) \right] + \frac{\sigma_2}{2} \sin(f/2) = 0, \quad (5.46)$$

$$\Delta E_{\varphi_1} \equiv \varphi_1'' + \frac{2}{r} \varphi_1' - \frac{2}{r^2} (\varphi_1 - \varphi_3) - \sigma_1 \varphi_1 - \frac{2}{r^2} \sin^2(f/2) \left[ 1 - \frac{(\partial_r f)^2}{\varphi_1^2} \right] = 0, \quad (5.47)$$

$$\Delta E_{\varphi_3} \equiv \varphi_3'' + \frac{2}{r} \varphi_3' + \frac{4}{r^2} (\varphi_1 - \varphi_3) - \sigma_1 \varphi_3 - \frac{1}{2} (f')^2 \left[ 1 - \frac{16 \sin^4(f/2)}{r^4 \varphi_3^2 (\partial_r f)^2} \right] = 0, \quad (5.48)$$

onde

$$A \equiv -\partial_r f \left[ \varphi_3 + \frac{8 \sin^2(f/2)}{r^2 \varphi_1} \right], \quad B \equiv \varphi_1 \left[ 1 + \frac{(\partial_r f)^2}{\varphi_1^2} + \frac{4 \sin^2(f/2)}{r^2 \varphi_1 \varphi_3} \right]. \quad (5.49)$$

Dentro do ansatz (5.40) a energia estática (5.44) se torna

$$E = \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_4 + \mathcal{E}_h + \mathcal{E}_{\sigma_1} + \mathcal{E}_{\sigma_2}, \quad (5.50)$$

com

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_2 &\equiv \frac{1}{96 \pi^2} \int d^3 x h_{ab} R_i^a R_i^b = \frac{1}{12 \pi} \int dr r^2 \left( \frac{\varphi_3 (\partial_r f)^2}{2} + \varphi_1 \frac{4 \sin^2 \frac{f}{2}}{r^2} \right), \\ \mathcal{E}_4 &\equiv \frac{1}{192 \pi^2} \int d^3 x h_{ab}^{-1} H_{ij}^a H_{ij}^b = \frac{1}{12 \pi} \int dr r^2 \left[ \frac{4 \sin^2 \frac{f}{2}}{r^2} \left( \frac{(\partial_r f)^2}{\varphi_1} + \frac{2 \sin^2 \frac{f}{2}}{r^2 \varphi_3} \right) \right], \\ \mathcal{E}_h &\equiv \frac{1}{96 \pi^2} \int d^3 x \text{Tr} (\partial_i h)^2 = \frac{1}{12 \pi} \int dr r^2 \left[ (\partial_r \varphi_1)^2 + \frac{(\partial_r \varphi_3)^2}{2} + \frac{2 (\varphi_1 - \varphi_3)^2}{r^2} \right], \\ \mathcal{E}_{\sigma_1} &\equiv \frac{\sigma_1}{96 \pi^2} \int d^3 x \text{Tr} (h^2) = \frac{\sigma_1}{12 \pi} \int dr r^2 \left( \varphi_1^2 + \frac{\varphi_3^2}{2} \right), \\ \mathcal{E}_{\sigma_2} &\equiv \frac{\sigma_2}{96 \pi^2} \int d^3 x \text{Tr} (\mathbb{1} - U) = \frac{\sigma_2}{12 \pi} \int dr r^2 \left( 1 - \cos \frac{f}{2} \right). \end{aligned} \quad (5.51)$$

Já que o termo  $E_1$  dado em (5.17) é invariante conforme em três dimensões espaciais, então o argumento de escala de Derrick para as soluções estáticas que extremizam a ação (5.1) depende somente dos termos de  $E_2$  dado por (5.17). Nas unidades definidas acima se têm  $E_1 = \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_4$  e  $E_2 = \mathcal{E}_h + \mathcal{E}_{\sigma_1} + \mathcal{E}_{\sigma_2}$ , e então a quantidade adimensional

$$\text{Derrick} \equiv \frac{|-\mathcal{E}_h + \mathcal{E}_{\sigma_1} + 3 \mathcal{E}_{\sigma_2}|}{\mathcal{E}_h + \mathcal{E}_{\sigma_1} + \mathcal{E}_{\sigma_2}} \quad (5.52)$$

deve ser zero para soluções estáveis segundo o argumento de escala de Derrick devido à (5.5).<sup>†</sup>

Considere a condição de borda  $f(0) = 2\pi$  e  $f(\infty) = 0$  correspondente com as soluções topológicas de carga de Skyrme  $Q = 1$ , dada por (5.38). A partir da expansão em série das equações (5.46), (5.47) e (5.48) em torno de  $r = 0$  se obtêm

$$\partial_r^2 f(0) = \partial_r^4 f(0) = 0, \quad \partial_r \varphi_a(0) = \partial_r^3 \varphi_a(0) = 0, \quad \varphi_1(0) = \varphi_3(0), \quad (5.53)$$

com  $a = 1, 3$ . Já que as equações (5.46)-(5.48) são de terceira ordem nas derivadas espaciais de  $f$  e de segunda ordem nas derivadas dos campos  $\varphi_a$ , então devido à (5.53) apenas  $\partial_r f(0)$  e  $\varphi_1(0) = \varphi_3(0)$  são parâmetros livres a ser determinados.

Utiliza-se o método do gradiente descendente com passo adaptativo para minimizar a energia estática (5.50) e obter as soluções de (5.46)-(5.48) com  $Q = 1$ , tal como descrito no Apêndice C.3. A coordenada  $r$  fica contida no intervalo  $[0, r_{\max}]$ , onde  $r_{\max}$  é o tamanho da rede. Na Tabela 4 são mostrados as energias (5.51) correspondentes as soluções de (5.46)-(5.48) para alguns pares de valores de  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  rotulados por um índice  $N_c$ . O maior valor de (5.52) é  $3.11 \times 10^{-3}$  (ver Tabela 5), o que significa que para todas as soluções numéricas apresentadas nas Tabelas 4 e 5 o termo  $|-T + P_h + 3P_U|$  de (5.5) é igual ou inferior à 0.311% de  $E_2$ . Portanto, a condição (5.5) imposta pelo argumento de escala de Derrick é satisfeita com boa precisão, enquanto (5.6) com  $V = 0$  é automaticamente satisfeita.

Tabela 4 - As quantidades (5.50), (5.51) e (5.52) associadas com as soluções das equações (5.46)-(5.48) com  $Q = 1$  para alguns valores de  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ .

$N_c$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$E$	$\mathcal{E}_2$	$\mathcal{E}_4$	$\mathcal{E}_h$	$\mathcal{E}_{\sigma_1}$	$\mathcal{E}_{\sigma_2}$
<i>i</i>	0,25	0,25	1,26924	0,35860	0,70973	0,12606	0,04950	0,02535
<i>ii</i>	0,50	0,50	1,32700	0,33712	0,75577	0,14222	0,06711	0,02479
<i>iii</i>	1,00	1,00	1,39771	0,31419	0,81127	0,15982	0,08873	0,02370
<i>iv</i>	2,00	2,00	1,48360	0,29045	0,87773	0,17945	0,11419	0,02179
<i>v</i>	4,00	4,00	1,58693	0,26657	0,95620	0,20139	0,14342	0,01934
<i>vi</i>	0,25	4,00	1,37545	0,34137	0,76872	0,18433	0,02934	0,05167
<i>vii</i>	4,00	0,25	1,56171	0,26615	0,95056	0,17531	0,16689	0,00280

Fonte: Elaborada pelo autor.

As soluções numéricas dos campos  $f(r)$  e  $\varphi_a(r)$  obtidas para todos os parâmetros  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  da Tabela 4 são monotonicamente decrescentes (veja exemplos nas Figuras 18-20).

<sup>†</sup> O modelo de Skyrme BPS pode vir a ser fracamente acoplado com a ação  $S_2$  em (5.15) de modo que  $E_2 \ll E_1$  e  $E_1$  não seja muito distante da energia auto dual  $|Q|$ . Neste caso, cada um dos termos  $\mathcal{E}_h$ ,  $\mathcal{E}_{\sigma_1}$  e  $\mathcal{E}_{\sigma_2}$  que compõe  $E_2$ , os quais são não negativos por definição, são muito pequenos. De fato, a divisão por  $E_2$  no lado direito de (5.5) é feita para se prevenir que soluções instáveis com pequena energia  $E_2$  tenham associadas pequenos valores da quantidade Derrick.

A amplitude  $\varphi_a(0)$  dos autovalores de  $h$  e a espessura  $t$ , i.e. o valor de  $r$  para o qual o campo atinge a metade de seu valor na origem, são dados na Tabela 5. Em particular, para se obter o valor espessura se utilizou o método descrito no Apêndice C.3. Na Tabela 5 e na Figura 18 se pode ver que a espessura  $t_f$  do campo  $f$  decresce conforme  $\sigma_2$  cresce, ou equivalentemente conforme os campos  $U$  se tornam mais massivos. O mesmo se segue para as espessuras  $t_{\varphi_a}$  dos campos  $\varphi_a$  que decrescem quando  $\sigma_1$  cresce e então os autovalores de  $h$  se tornam mais massivos, mas em contraste os valores das amplitudes  $\varphi_a(0)$  crescem (veja as Figuras 19 e 20).

Tabela 5 - As espessuras das soluções com  $Q = 1$  das equações (5.46)-(5.48), o tamanho da rede  $r_{\max}$  e as quantidades  $(E_1 - 1)$  e  $\mathcal{E}_4/\mathcal{E}_2$  para os valores de  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  da Tabela 4.

$N_c$	$i$	$ii$	$iii$	$iv$	$v$	$vi$	$vii$
$t_f$	0,99040	0,77787	0,60444	0,46323	0,35029	0,53182	0,41235
$t_{\varphi_1}$	1,23552	0,96684	0,74737	0,56949	0,42818	0,71016	0,48892
$t_{\varphi_3}$	1,13680	0,89573	0,69698	0,53423	0,40373	0,64507	0,46551
$r_{\max}$	25	25	14	14	14	25	14
$E_1 - 1$	0,06832	0,09289	0,12547	0,16817	0,22277	0,11010	0,21671
$\mathcal{E}_4/\mathcal{E}_2$	1,9792	2,2418	2,5821	3,0220	3,5870	2,25188	3,5716
Derrick ( $10^{-5}$ )	248	311	8	33	13	11	7

Fonte: Elaborada pelo autor.

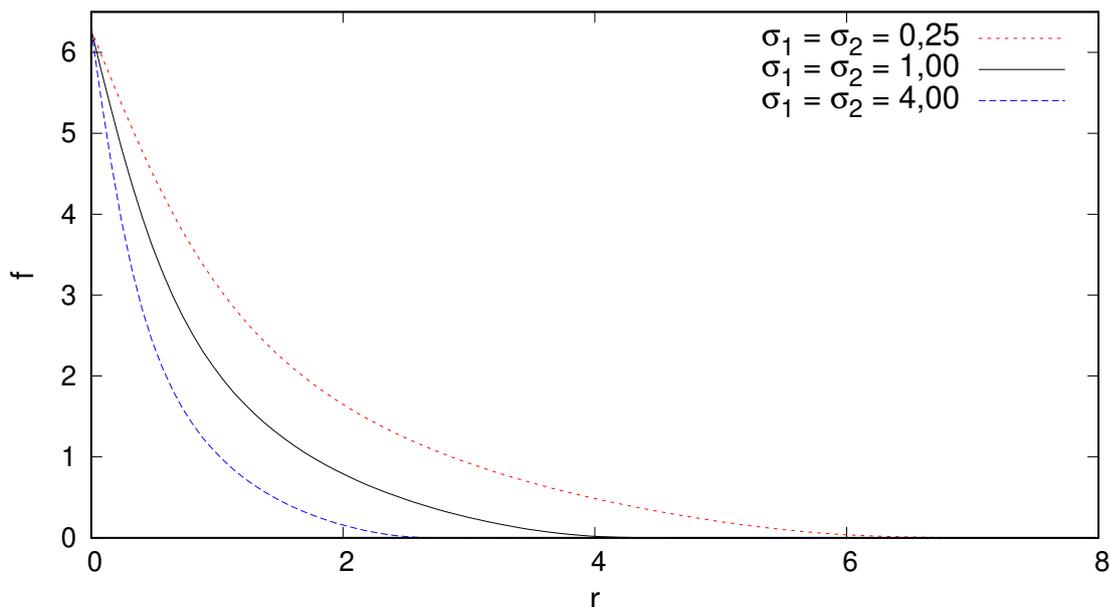


Figura 18 - O campo  $f(r)$  para as soluções de (5.46)-(5.48) correspondentes à  $Q = 1$  para  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,25, 1,00, 4,00$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

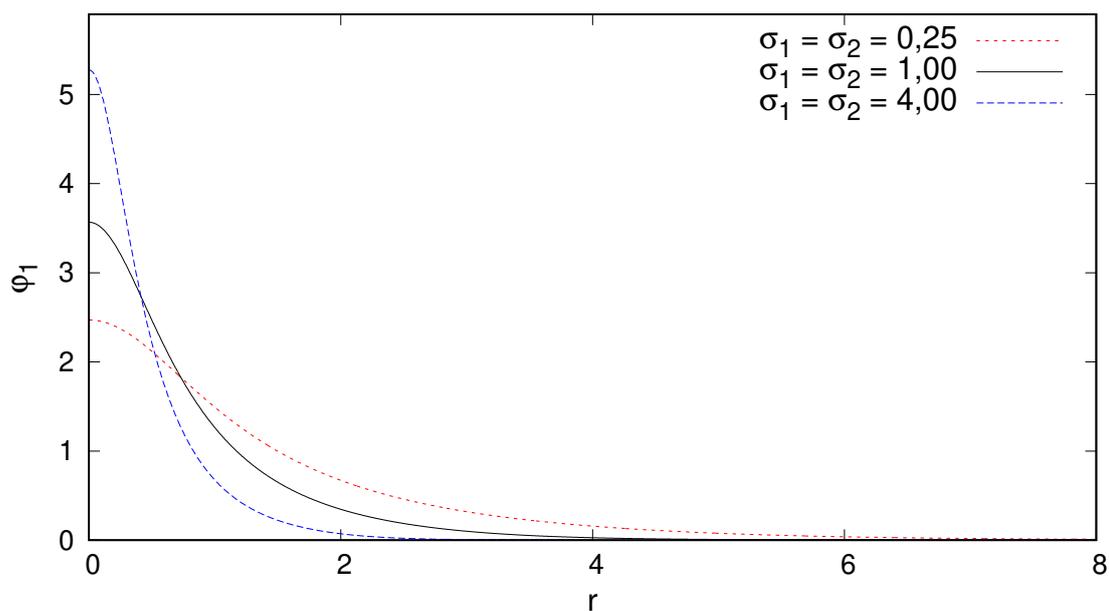


Figura 19 - O campo  $\varphi_1(r) = \varphi_2(r)$  para as soluções de (5.46)-(5.48) correspondentes à  $Q = 1$  para  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,25, 1,00, 4,00$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

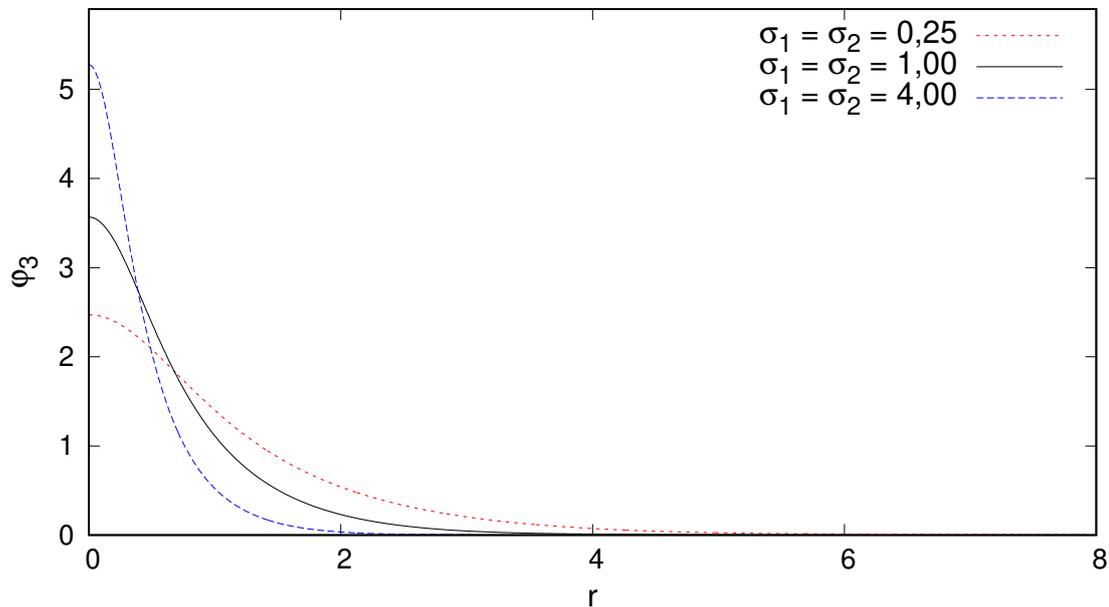


Figura 20 - O campo  $\varphi_3(r)$  para as soluções de (5.46)-(5.48) correspondentes à  $Q = 1$  para  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,25, 1,00, 4,00$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Devido à (2.47) e (2.48), para as as configurações auto duais (3.18) o termo quadrático dá a mesma contribuição para a energia  $E_1$  do que o termo quártico nas derivadas espaciais dos campos  $U$ , e então nas unidades definidas acima se têm  $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_4 = |Q|/2$ .

Portanto, para as soluções de (5.46)-(5.48) com  $Q = 1$  deve-se ter  $E_1 = \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_4 \geq 1$  (veja Tabela 5). Apesar do modelo de Skyrme BPS (2.31) ser invariante conforme em  $\mathbb{R}^3$  e possuir um número infinito de soluções auto duais exatas sem tamanho fixo, dadas por (3.18), pode-se mensurar o quão distantes as soluções da teoria (5.1) estão do setor auto dual de  $E_1$  por quanto a quantidade  $(E_1 - 1)$  e a razão  $\mathcal{E}_4/\mathcal{E}_2$  diferem de 1. De fato, na Tabela 5 se mostra que estas duas quantidades aumentam, ficando cada vez mais longe da unidade, quando qualquer uma das constantes de acoplamento  $\sigma_1$  ou  $\sigma_2$  aumentam, sendo mais sensíveis à  $\sigma_1$  do que  $\sigma_2$ .

## 6 CONCLUSÃO

O modelo de Skyrme BPS (2.31) é uma promissora teoria com cota BPS atingível para todo valor da carga de Skyrme (2.41) que pode servir de ponto de partida para a construção de modelos com aplicação para a física nuclear, tal como o modelo de Skyrme Falso Vácuo (4.4). As entradas da matriz simétrica  $h$ , responsável pela extensão do modelo de Skyrme padrão (2.10), são interpretadas como seis campos reais independentes e introduzem à teoria um setor BPS e a invariância conforme em três dimensões espaciais. Apesar de no trabalho original<sup>1</sup> terem sido construídos Skyrmons BPS de densidade de carga topológica esféricamente simétrica para carga de Skyrme  $Q = 1$ , a estrutura geral dos campos  $h$  dentro do setor BPS permanecia desconhecida.

A primeira contribuição desta tese consiste em se demonstrar que o setor estático do modelo de Skyrme BPS é equivalente ao setor BPS. De fato, as seis equações de Euler-Lagrange para os campos  $h$  (3.2) são equivalentes as nove equações de autodualidade (3.31), as quais por sua vez implicam nas três equações de Euler-Lagrange associados aos campos  $U$  (3.1). Resulta que há somente seis equações estáticas independentes para determinar os nove campos da teoria, as quais permitem escrever os campos  $h$  como espectadores dos campos de Skyrme e suas primeiras derivadas através da expressão (3.18). Segue-se que qualquer configuração de campo composta por um mapeamento entre 3-esferas  $U$  e a configuração auto dual (3.18) para os campos  $h$  corresponde a uma solução topológica exata da teoria (2.31). Portanto, há número infinito de Skyrmons BPS, para cada valor da carga de Skyrme (2.41), os quais não possuem tamanho fixo devido a invariância de escala da ação (2.31). Uma vez entendido a estrutura geral dos Skyrmons BPS dentro do setor estático, sem ter sido necessário se usar anstaz algum, fica muito mais fácil de estudar possíveis extensões do modelo de Skyrme BPS.

A liberdade dos campos  $U$  dentro do setor BPS do modelo de Skyrme auto dual permite a construção explícita de Skyrmons BPS através de algum ansatz para os campos de Skyrme. Tal abordagem permite se compreender melhor as possíveis simetrias dos Skyrmons BPS para cada valor da carga  $Q$ , as quais podem vir a ser preservadas em futuras extensões da teoria (2.31). No ansatz holomórfico para o campo de Skyrme (ver seção 3.3) usa-se o sistema de coordenadas  $(r, w, \bar{w})$ , definido em (3.43), e os campos  $U$  são decompostos em uma função perfil radial  $f(r)$  e um mapa racional entre 2-esferas  $u(w) = p(w)/q(w)$ , junto ao seu complexo conjugado. Segue-se que a carga topológica pode ser escrita como o produto de dois números naturais  $m$  e  $n$  com um sinal  $s = \pm 1$ , i.e.  $Q = s m n$ , onde as condições de borda de  $f(r)$  fixam  $m$  e  $s$  através de (3.56) e  $n$  corresponde ao grau topológico do mapa racional  $u(w)$  dado por (3.54).

Dentro do ansatz holomórfico pode-se construir Skyrmons BPS para todos os valores

de  $Q$  fixando  $m = 1$  e escolhendo os mapas racionais com  $n = |Q|$ . Esta possibilidade inclui as configurações holomórficas dos campos  $U$  que aproximam os Skyrmions tradicionais, tal como visto na seção 2.2, as quais são soluções exatas particulares do modelo de Skyrme BPS. Em adição, em termos das coordenadas esféricas usuais (2.27) pode-se escrever  $w = \cot(\theta/2) e^{i\varphi}$  (ver equação (3.57)). Consequentemente, as raízes do Wronskiano (3.58), associado aos polinômios  $p(w)$  e  $q(w)$ , correspondem à pares de valores angulares  $(\theta, \varphi)$  nos quais a densidade de carga topológica (3.59) se anula para todo valor da coordenada radial  $r$ . Outra possibilidade é se escolher o mapa racional  $u = w$  ( $n = 1$ ) para o qual o Wronskiano não possui raízes, e portando pode se construir Skyrmions BPS radiais para todo valor de  $Q$ . Contudo, neste caso se a derivada da função perfil  $f'(r)$  não divergir em nenhum ponto do espaço se terá  $Q$  cascas esféricas onde a densidade de carga topológica (3.62) se anula, incluso o infinito espacial.

Um interessante ansatz para os campos de Skyrme do modelo de Skyrme auto dual que pode ser construído a partir de sua simetria conforme em  $\mathbb{R}^3$  é o ansatz toroidal (ver seção 3.4). Neste, usa-se o sistema de coordenadas ortogonais toroidais  $(z, \varphi, \xi)$ , dado em (3.73). As coordenadas  $\varphi$  e  $\xi$  são construídas respectivamente a partir das simetria por rotação no  $x_1 x_2$  (ver o campo vetorial (3.71)) e por combinação linear de uma transformação conforme especial e uma translação ao longo da direção de  $x_3$  (ver o campo vetorial (3.72)), com  $(x_1, x_2, x_3)$  sendo as coordenadas Cartesianas do  $\mathbb{R}^3$ . A coordenada  $z$  tem simetria axial e é construída como sendo ortogonal à  $\varphi$  e  $\xi$ . No ansatz toroidal os campos  $U$  são escritos em termos de um único campo  $F(z)$  e dependem de dois números inteiros  $n$  e  $m$  associados respectivamente às coordenadas  $\varphi$  e  $\xi$  (ver equações (3.68) e (3.75)). Assim como no ansatz holomórfico a carga topológica continua sendo escrita como  $Q = smn$ , onde o sinal  $s$  depende das condições de borda do campo  $F(z)$ , dadas em (3.84), e os autovalores de  $h$  e a densidade de carga topológica ( $\mathcal{Q}$ ), dados respectivamente em (3.82) e (3.80), têm simetria axial. Tal simetria de ambas as quantidades se torna radial, para todo o valor de  $Q$ , somente para as configurações de campo particulares  $F(z) = z$  ou  $F(z) = 1 - z$ .

O modelo de Skyrme Falso Vácuo (4.4), construído como uma extensão da versão estática do modelo de Skyrme BPS (2.31), é uma simples teoria de campo que reproduz robustamente algumas propriedades do núcleo atômico. Esta pode vir a servir como uma realização de teoria de campo no regime de baixas energias do modelo da gota líquida.<sup>36</sup> Contudo, introduz-se dinâmica para a densidade bariônica ( $\mathcal{Q}$ ) definida em termos do campo do Skyrme (ver equação (4.6)). Tal dinâmica de  $\mathcal{Q}$  provém dos termos cinéticos e potenciais para tal quantidade contidos no termo  $E_2$ , dado por (4.7), o qual é um funcional dos campos de Skyrme e suas derivadas. A adição do funcional  $E_2$  à energia estática  $E_1$  do modelo de Skyrme BPS, dada por (4.1), é fundamental para a determinação dos campos de Skyrme, pois quebra a equivalência entre o setor BPS e do setor estático do modelo de Skyrme BPS onde os campos  $U$  permanecem livres. Os campos  $h$  são determinados

somente a partir do termo  $E_1$ , assim como no caso do modelo de Skyrme BPS, e então continuam atuando como espectadores dos campos  $U$  sendo determinados inteiramente através da expressão algébrica (3.18). Tal configuração auto dual dos campos  $h$  satisfaz automaticamente as equações de Euler-Lagrange associadas aos campos  $U$  que provém do termo  $E_1$ , o qual conseqüentemente não contribui para a determinação dos campos de Skyrme. Em adição, a relação (3.18) satura cota BPS (2.44) do modelo de Skyrme BPS, e portanto para as soluções estáticas de (4.4) se obtém que  $E_1 = 48 \pi^2 \frac{m_0}{e_0} |Q|$ .

As equações de Euler-Lagrange associadas aos campos  $U$  se reduzem, usando (3.18), a uma única de equação diferencial de segunda ordem (4.13) para a fração de potência  $\psi$  da densidade de carga topológica ( $\psi \propto Q^{1/s}$ ), definida em (4.6). Tal equação envolve uma constante de integração que desempenha um papel fundamental, pois permite escrever um potencial efetivo (4.19) que tenha contradomínio negativo para alguma região de seu domínio  $\psi$ , podendo ser um potencial admissível, tal como definido na seção 4.1. Segue-se que a tarefa de se construir soluções topológicas de (4.6) com energia (4.4) finita recai no bem conhecido problema do falso vácuo de S. Coleman.<sup>9-11</sup> Resulta que as soluções de campo  $\psi$  de menor energia estática  $E_2$  (dada em (4.7)), a qual difere da energia efetiva  $E_{\text{ef}}$ . (dada em (4.14)) por um termo topológico, são radiais. Em adição, a constante de integração  $\gamma$  (em unidades adimensionais (4.20)) pode depender de  $Q$ , e variando-se o valor de  $\gamma$  se pode construir soluções topológicas a partir de (4.21) para múltiplos valores de  $Q$ . Contudo, uma vez que se associa um valor referência  $\gamma_{\text{ref}}$ . da constante de integração com um valor de referência  $Q_{\text{ref}}$ . da carga topológica, então toda sequência discreta de  $\gamma$  associada com os demais valores de  $Q$  inteiros fica fixada por (4.26).

Usando um procedimento simples para estabelecer relações das constantes de acoplamento do modelo de Skyrme Falso Vácuo com as constantes da física nuclear, construído nas seções 4.1 e 4.3, reproduziu-se acuradamente os valores das energia de ligação e do raio RMS para um amplo número de núcleos não leves (de número bariônico  $A \geq 12$ ). Em adição, tais resultados são pouco sensíveis a escolha do termo de ordem  $\kappa$  do potencial  $V$ , dado em (4.19), ao menos para  $s = 3$  e  $\kappa \geq 6$ , tal como visto na seção 4.3. Na Tabela 2 pode-se ver que para estes valores de  $s$  e  $\kappa$  os valores do RMSD do raio RMS ( $\Delta R$ ) e da energia de ligação por núcleon ( $\Delta E_B$ ), definidos em (4.40), são respectivamente cerca de  $0,08 fm$  e  $0,2 MeV$ . Estes valores caem respectivamente para apenas cerca da metade e um quarto ao se considerar apenas os núcleos com  $A \geq 12$ . Apesar de se ter apresentado alternativas para tal procedimento na seção 4.5 e modificações do potencial  $V$  ou do termo  $G(U)$  da parte topológica de  $E_2$ , dados respectivamente por (4.19) e (4.28), possam vir a refinar tais resultados, estes já são tão acurados que não se espera drástica melhora para núcleos não leves. Por outro lado, os resultados obtidos são muito melhores para núcleos não leves do que núcleos leves. Isto já era esperado uma vez que os argumentos provenientes do problema do falso vácuo de S. Coleman (ver seção 4.1) implicaram na simetria radial da densidade bariônica (4.6) para todo o valor da carga de Skyrme (2.41),

incluindo os núcleos leves que não deveriam possuir tal simetria.

As soluções topológicas podem ser obtidas a partir da equação (4.21) desde que o potencial efetivo adimensional  $\widehat{V}_{\text{ef.}} = \widehat{\psi}^2 - \gamma \widehat{\psi}^s + \widehat{\psi}^\kappa$  seja admissível, i.e. desde que o valor da constante de integração  $\gamma$  seja superior a um valor crítico  $\gamma_c(s, \kappa)$ , dado em (4.24). Para cada par de valores  $s$  e  $\kappa$ , ao se tomar  $\gamma$  suficientemente próximo de  $\gamma_c(s, \kappa)$  pela direita, segue-se que o raio RMS das soluções topológicas cresce com  $Q^{\frac{1}{3}}$  (ver equação (4.35)), assim como se espera de uma descrição de núcleos pesados. Por outro lado, o procedimento das seções 4.1 e 4.3 fixa toda sequência discreta de valores de  $\gamma$ , mas desde que esses se aproximem o suficiente de  $\gamma_c(s, \kappa)$  se espera que o raio RMS cresça aproximadamente com  $Q^{\frac{1}{3}}$  para qualquer valor de  $s$  e  $\kappa$ .

O procedimento que impõe relações entre as seis constantes de acoplamento da teoria (4.4) e a constante de integração, a qual aparece em (4.13), propostos nas seções 4.1 e 4.3, ou os procedimentos alternativos abordados na seção 4.5, podem vir a levar a uma densidade bariônica teórica (4.27) que se comporte de modo semelhante ao esperado segundo os dados experimentais. Isto é verdadeiro ao menos para núcleos pesados ( $Q > 56$ ), com  $Q$  sendo aproximadamente constante em alguma região esférica espacial fora da qual decai rapidamente à zero, tal como pode ser visto na Figura 8 da seção 4.3 para  $s = 3$  e  $\kappa = 8$ . Contudo, neste exemplo o valor de  $Q(r = 0)$  tende à diminuir suavemente para núcleos pesados, chegando à  $0,1645 \text{ fm}^{-3}$  para  $Q = 240$  o que é ligeiramente superior ao valor da densidade bariônica<sup>63</sup> esperada de cerca de  $0.16 \text{ fm}^{-3}$ . Em adição, o decaimento exponencial da densidade matéria ( $\rho^M$ ) longe do centro de massa do núcleo, onde  $\rho^M \sim \rho_0^M e^{-r/a}$  e  $a = 0,524 \text{ fm}$  é um parâmetro experimental que depende pouco do número de bariônico, é garantido devido a relação (4.36) que faz parte do procedimento visto nas seções 4.1 e 4.3. Um caminho em aberto para ser explorado é justamente tentar modificar-se o modelo de Skyrme Falso Vácuo ou o procedimento para se construir as soluções topológicas de modo que, sem perder a acurácia dos resultados acima, se aprimore a correspondência entre a densidade bariônica teórica e experimental.

Há muitas modificações do modelo de Skyrme Falso vácuo que podem vir a primorar seus resultados, em especial na descrição do raio RMS e na energia de ligação para núcleos leves. Uma possibilidade é se adicionar termos cinéticos e potenciais para os campos  $h$  ao termo  $E_2$ , violando a equivalência entre as equações de Euler-Lagrange para os campos  $h$  com as equações de autodualidade (4.2) do modelo de Skyrme BPS, i.e. tirando os campos  $h$  de sua configuração auto dual dada por (3.18). Se tal modificação for pequena, talvez possa ser tratada perturbativamente e leve a soluções não esféricamente simétricas que melhor descrevam os núcleos leves. Contudo, já que o modelo descreve tão bem algumas propriedades da física nuclear, talvez o problema em aberto mais fundamental seja a natureza de tal modelo, tal como a interpretação física dos campos  $h$ . Talvez essa linha de pesquisa possa vir a fornecer insights sobre o regime de acoplamento forte das interações

fortes ou se conecte com algum limite da QCD a baixas energias.

O modelo (5.1) foi construído através da introdução de termos cinéticos e potenciais para os campos  $h$  ao modelo de Skyrme BPS, além do termo usual de massa dos píons. Desta forma, quebrou-se a equivalência entre o setor estático e o setor auto dual do modelo de Skyrme BPS. Os nove campos da matriz  $h$  podem ser decompostos em seus três autovalores  $\varphi_a$ , com  $a = 1, 2, 3$  e nos três campos da matriz  $M$  que diagonaliza  $h$ , tal como definido em (5.8). Em adição, os campos de Skyrme  $SU(2)$  são parametrizados na representação espinorial (2.52) por um campo real  $f$  e um campo complexo  $u$ , junto a seu complexo conjugado  $\bar{u}$ . Pode-se construir um ansatz para tal modelo composto de três partes. O primeiro ingrediente é o ansatz holomórfico para os campos de Skyrme, definido nas coordenadas (3.43), no qual  $f(r)$  é uma função perfil radial e  $u(w)$  é o mapa racional entre 2-esferas (3.53), tal como mencionado acima. Este ansatz tem uma profunda correlação com os Skyrmons do modelo de Skyrme Padrão, tal como visto na seção 2.2.

O segundo ingrediente do ansatz para a teoria (5.1) é a preservação de três das seis equações auto duais (3.18), as quais determinam inteiramente os campos  $h$  em termos da matriz real e simétrica  $\tau$ , a qual por sua vez é definida em (3.10) em termos das componentes da forma de Maurer-Cartan  $SU(2)$  (2.37). Este ansatz corresponde à  $M = N$ , onde  $N$  é a matriz que diagonaliza  $\tau$ , e portanto  $N$  fica inteiramente determinada em termos dos campos de Skyrme e suas primeiras derivadas. Contudo, uma vez que impomos estes dois ansätze pode-se demonstrar que as equações associadas aos campos  $u$  e  $\bar{u}$  são automaticamente satisfeitas através do ansatz (5.35) para os autovalores de  $h$ , o qual é inspirado nas configurações auto duais (3.18) dos campos  $\varphi_a$ 's. Uma vez assumido este ansatz adicional, segue-se que as equações de Euler-Lagrange para os campos  $f$  determinam o mapa racional como  $u(w) = e^{i\alpha} w$ , cujo grau topológico (3.54) corresponde à  $n = 1$ . Este resultado é importante pois restringe a construção de soluções topológicas para múltiplos valores da carga de Skyrme (3.56) unicamente através das condições de borda da função perfil  $f(r)$ , as quais fixam o número natural  $m$  e o sinal  $s$  através de (5.38) e implicam que  $Q = sm$ . Segue-se por fim que todos os autovalores de  $h$  são radiais, e impondo adicionalmente o ansatz  $\varphi_1 = \varphi_2$  pode-se resolver automaticamente as equações de Euler-Lagrange (5.22) associadas aos campos  $M$ , e em adição as equações de Euler-Lagrange (5.23) associadas aos campos  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  se tornam equivalentes. Resulta que tal ansatz reduz as nove equações de Euler-Lagrange associada aos campos  $h$  e  $U$  à três equações radiais acopladas associadas aos campos  $f(r)$ ,  $\varphi_1(r)$  e  $\varphi_3(r)$  dadas em (5.46)-(5.48).

As soluções das três equações de Euler-Lagrange remanescentes (5.46)-(5.48) associadas com os campos  $f(r)$ ,  $\varphi_1(r)$  e  $\varphi_3(r)$  foram obtidas através do método do gradiente descendente para a condição de borda  $f(0) = 2\pi$  e  $f(\infty) = 0$ , correspondente à  $Q = 1$  ( $m = s = 1$ ). As soluções numéricas são estáveis segundo o argumento de escala de Derrick, mas a tarefa de se obter soluções estáveis para  $Q \geq 2$  é um problema que permanece em

aberto. Em adição, estes três campos são monotonicamente decrescentes e a espessura  $t_f$  do campo  $f(r)$  decresce conforme  $\sigma_2$  (definido em (5.45)) cresce, ou equivalentemente conforme os campos  $U$  se tornam mais massivos (veja a Tabela 5). O mesmo se segue para as espessuras  $t_{\varphi_a}$  dos campos  $\varphi_a(r)$  que decrescem conforme  $\sigma_1$  cresce, ou equivalentemente conforme os autovalores de  $h$  se tornam mais massivos. Por outro lado, ao contrário da função perfil que tem as condições de bordas fixas para cada valor da carga de Skyrme, conforme  $\sigma_1$  cresce a amplitude  $\varphi_a(r=0)$  dos campos  $\varphi_a$ 's aumenta.

## REFERÊNCIAS

- 1 FERREIRA, L. Exact self-duality in a modified Skyrme model. **Journal of High Energy Physics**, v. 2017, n. 7, p. 39, 2017. DOI: 10.1007/JHEP07(2017)039. Disponível em: [https://doi.org/10.1007/JHEP07\(2017\)039](https://doi.org/10.1007/JHEP07(2017)039). Acesso em: 13 ago. 2021.
- 2 SKYRME, T. H. R. A nonlinear field theory. **Proceedings of the Royal Society of London A**, v. 260, n. 1300, p. 127–138, 1961. DOI: 10.1098/rspa.1961.0018.
- 3 SKYRME, T. H. R. A unified field theory of mesons and baryons. **Nuclear Physics**, v. 31, p. 556–569, 1962. DOI: 10.1016/0029-5582(62)90775-7.
- 4 MANTON, N.; SUTCLIFFE, P. **Topological solitons**. New York: Cambridge University Press, 2004. ISBN 978-0-511-21678-7.
- 5 MANTON, N. S.; RUBACK, P. J. Skyrmions in flat space and curved space. **Physics Letters B**, v. 181, n. 1, p. 137–140, 1986. DOI: 10.1016/0370-2693(86)91271-2.
- 6 ADKINS, G. S.; NAPPI, C. R.; WITTEN, E. Static properties of nucleons in the Skyrme model. **Nuclear Physics B**, v. 228, n. 3, p. 552, 1983. DOI: 10.1016/0550-3213(83)90559-X.
- 7 ADAM, C. *et al.* Some aspects of self-duality and generalised BPS theories. **Journal of High Energy Physics**, v. 2013, n. 8, p. 62, 2013. DOI: 10.1007/JHEP08(2013)062.
- 8 FERREIRA, L.; LIVRAMENTO, L. Self-duality in the context of the Skyrme model. **Journal of High Energy Physics**, v. 2020, n. 9, p. 31, 2020. DOI: 10.1007/JHEP09(2020)031.
- 9 COLEMAN, S. R. The fate of the false vacuum: semiclassical theory. **Physical Review D**, v. 15, n. 10, p. 2929–2936, 1977. DOI: 10.1103/PhysRevD.15.2929.
- 10 COLEMAN, S. R.; GLASER, V.; MARTIN, A. Action minima among solutions to a class of euclidean scalar field equations. **Communications in Mathematical Physics**, v. 58, n. 2, p. 211–221, 1978. DOI: 10.1007/BF01609421.
- 11 CALLAN, C. G.; COLEMAN, S. Fate of the false vacuum. II. First quantum corrections. **Physical Review D**, v. 16, n. 6, p. 1762–1768, 1977. DOI: 10.1103/PhysRevD.16.1762.
- 12 DERRICK, G. H. Comments on nonlinear wave equations as models for elementary particles. **Journal of Mathematical Physics**, v. 5, n. 9, p. 1252–1254, 1964. DOI: 10.1063/1.1704233.
- 13 SCHWARTZ, M. D. **Quantum field theory and the Standard model**. New York: Cambridge University Press, 2014. ISBN 978-1-107-03473-0.
- 14 PESKIN, M. E.; SCHROEDER, D. V. **An introduction to quantum field theory**. Reading: Addison-Wesley, 1995. ISBN 978-0-201-50397-5.
- 15 GREINER, W.; SCHRAMM, S.; STEIN, E. **Quantum chromodynamics**. 3rd ed. New York: Springer, 2007. ISBN 978-3-540-48534-6.

- 16 ZYLA, P. A. *et al.* Review of particle physics. **Progress of Theoretical and Experimental Physics**, v. 2020, n. 8, p. 083C01, 2020. DOI: 10.1093/ptep/ptaa104. Disponível em: <https://doi.org/10.1093/ptep/ptaa104>. Acesso em: 13 ago. 2021.
- 17 GROSS, D. J.; WILCZEK, F. Ultraviolet behavior of non-abelian gauge theories. **Physical Review Letters**, v. 30, n. 26, p. 1343–1346, 1973. DOI: 10.1103/PhysRevLett.30.1343.
- 18 POLITZER, H. D. Reliable perturbative results for strong interactions? **Physical Review Letters**, v. 30, n. 26, p. 1346–1349, 1973. DOI: 10.1103/PhysRevLett.30.1346.
- 19 GROSS, D. J. Twenty five years of asymptotic freedom. **Nuclear Physics B: proceedings supplements**, v. 74, n. 1, p. 426–446, 1999. DOI: 10.1016/S0920-5632(99)00208-X.
- 20 WILSON, K. G. Confinement of quarks. **Physical Review D**, v. 10, n. 8, p. 2445–2459, 1974. DOI: 10.1103/PhysRevD.10.2445. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.10.2445>. Acesso em: 13 ago. 2021.
- 21 GREENSITE, J. **An introduction to the confinement problem**. New York: Springer, 2020. ISBN 978-3-030-51562-1.
- 22 WITTEN, E. Current algebra, baryons, and quark confinement. **Nuclear Physics B**, v. 223, n. 2, p. 433–444, 1983. DOI: 10.1016/0550-3213(83)90064-0.
- 23 GUDNASON, S. Dielectric skyrmions. **Physical Review D**, v. 102, n. 11, p. 116013, 2020. DOI: 10.1103/PhysRevD.102.116013.
- 24 BERINGER, J. *et al.* Review of particle physics. **Physical Review D**, v. 86, n. 1, p. 010001, 2012. DOI: 10.1103/PhysRevD.86.010001.
- 25 HOOFT, G. A planar diagram theory for strong interactions. **Nuclear Physics B**, v. 72, n. 3, p. 461, 1974. DOI: 10.1016/0550-3213(74)90154-0.
- 26 DASHEN, R.; JENKINS, E.; MANOHAR, A. V.  $\frac{1}{N_c}$  expansion for baryons. **Physical Review D**, v. 49, n. 9, p. 4713–4738, 1994. DOI: 10.1103/PhysRevD.49.4713. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.49.4713>. Acesso em: 13 ago. 2021.
- 27 LUCINI, B.; PANERO, M. Introductory lectures to large- $N$  QCD phenomenology and lattice results. **Progress in Particle and Nuclear Physics**, v. 75, p. 1–40, 2014. DOI: 10.1016/j.pnnp.2014.01.001.
- 28 BOGNER, S. K.; FURNSTAHL, R. J.; SCHWENK, A. From low-momentum interactions to nuclear structure. **Progress in Particle and Nuclear Physics**, v. 65, n. 1, p. 94–147, 2010. DOI: 10.1016/j.pnnp.2010.03.001.
- 29 BARRETT, B. R.; NAVRATIL, P.; VARY, J. P. Ab initio no core shell model. **Progress in Particle and Nuclear Physics**, v. 69, p. 131–181, 2013. DOI: 10.1016/j.pnnp.2012.10.003.
- 30 STETCU, I.; ROTUREAU, J. Effective interactions and operators in no-core shell model. **Progress in Particle and Nuclear Physics**, v. 69, p. 182–224, 2013. DOI: 10.1016/j.pnnp.2012.10.001.

- 
- 31 FADDEEV, L.; NIEMI, A. Stable knot-like structures in classical field theory. **Nature**, v. 387, n. 6628, p. 58–61, 1997. DOI: 10.1038/387058a0.
- 32 WITTEN, E. Global aspects of current algebra. **Nuclear Physics B**, v. 223, n. 2, p. 422–432, 1983. DOI: 10.1016/0550-3213(83)90063-9.
- 33 WEINBERG, S. Phenomenological Lagrangians. **Physica A: statistical mechanics and its applications**, v. 96, n. 1, p. 327–340, 1979. DOI: 10.1016/0378-4371(79)90223-1.
- 34 ORDONEZ, C.; KOLCK, U. van. Chiral lagrangians and nuclear forces. **Physics Letters B**, v. 291, n. 4, p. 459–464, 1992. DOI: 10.1016/0370-2693(92)91404-W.
- 35 HAMMER, H. W.; KÖNIG, S.; KOLCK, U. van. Nuclear effective field theory: status and perspectives. **Reviews of Modern Physics**, v. 92, n. 2, p. 025004, 2020. DOI: 10.1103/RevModPhys.92.025004.
- 36 EISBERG, R. M.; RESNICK, R. **Quantum physics of atoms, molecules, solids, nuclei and particles**. 2nd ed. New York: Wiley, 1985.
- 37 HARLAND, D. Topological energy bounds for the Skyrme and Faddeev models with massive pions. **Physics Letters B**, v. 728, p. 518–523, 2014. DOI: 10.1016/j.physletb.2013.11.062.
- 38 ADAM, C.; SANCHEZ-GUILLEN, J.; WERESZCZYNSKI, A. A Skyrme-type proposal for baryonic matter. **Physical Letters B**, v. 691, n. 2, p. 105–110, 2010. DOI: 10.1016/j.physletb.2010.06.025. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269310007707>. Acesso em: 13 ago. 2021.
- 39 GOMM, H. *et al.* Bag formation in a chiral model. **Physical Review D**, v. 33, n. 11, p. 3476, 1986. DOI: 10.1103/PhysRevD.33.3476.
- 40 REINHARDT, H.; DANG, B. V. Modified Skyrme model with correct QCD scaling behavior on  $S^3$ . **Physical Review D**, v. 38, n. 9, p. 2881–2887, 1988. DOI: 10.1103/PhysRevD.38.2881.
- 41 BROWN, G. E.; RHO, M. Scaling effective Lagrangians in a dense medium. **Physical Review Letters**, v. 66, n. 21, p. 2720–2723, 1991. DOI: 10.1103/PhysRevLett.66.2720.
- 42 GILLARD, M.; HARLAND, D.; SPEIGHT, M. Skyrmions with low binding energies. **Nuclear Physics B**, v. 895, 2015. DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2015.04.005.
- 43 GUDNASON, S. Loosening up the Skyrme model. **Physical Review D**, v. 93, n. 6, p. 065048, 2016. DOI: 10.1103/PhysRevD.93.065048.
- 44 GUDNASON, S.; NITTA, M. Modifying the pion mass in the loosely bound Skyrme model. **Physical Review D**, v. 94, n. 6, p. 065018, 2016. DOI: 10.1103/PhysRevD.94.065018.
- 45 GUDNASON, S.; ZHANG, B.; MA, N. N. Generalized Skyrme model with the loosely bound potential. **Physical Review D**, v. 94, n. 12, p. 125004, 2016. DOI: 10.1103/PhysRevD.94.125004.

46 GUDNASON, S. Exploring the generalized loosely bound Skyrme model. **Physical Review D**, v. 98, n. 9, p. 096018, 2018. DOI: 10.1103/PhysRevD.98.096018.

47 ADAM, C.; OLES, K.; WERESZCZYNSKI, A. The dielectric Skyrme model. **Physics Letters B**, v. 807, n. 13, p. 135560, 2020. DOI: 10.1016/j.physletb.2020.135560.

48 SUTCLIFFE, P. Skyrmions, instantons and holography. **Journal of High Energy Physics**, v. 2010, n. 8, p. 19, 2010. DOI: 10.1007/JHEP08(2010)019.

49 SUTCLIFFE, P. Skyrmions in a truncated BPS theory. **Journal of High Energy Physics**, v. 2011, n. 4, p. 45, 2011. DOI: 10.1007/JHEP04(2011)045.

50 ADAM, C. *et al.* Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield Skyrme model and nuclear binding energies. **Physical Review Letters**, v. 111, n. 23, p. 232501, 2013. DOI: 10.1103/PhysRevLett.111.232501.

51 ADAM, C.; SANCHEZ-GUILLEN, J.; WERESZCZYNSKI, A. A BPS Skyrme model and baryons at large  $N_c$ . **Physical Review D**, v. 82, n. 8, p. 085015, 2010. DOI: 10.1103/PhysRevD.82.085015.

52 FERREIRA, L.; GUILLÉN, J. Infinite symmetries in the Skyrme model. **Physics Letters B**, v. 504, n. 1, p. 195–200, 2001. DOI: 10.1016/S0370-2693(01)00280-5. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269301002805>. Acesso em: 13 ago. 2021.

53 MANTON, N. S. Geometry of skyrmions. **Communications in Mathematical Physics**, v. 111, n. 3, p. 469–478, 1987. DOI: 10.1007/BF01238909. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF01238909>. Acesso em: 13 ago. 2021.

54 MANGALAM, A.; PRASAD, A. Topological and statistical properties of nonlinear force-free fields. **Advances in Space Research**, v. 61, n. 2, p. 738–748, 2018. DOI: 10.1016/j.asr.2017.11.007. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0273117717308025>. Acesso em: 13 ago. 2021.

55 CHANDRASEKHAR, S. **Hydrodynamic and hydromagnetic stability**. New York: Dover Publications, 1981. ISBN 978-0-486-64071-6.

56 FERREIRA, L. A.; ZAKRZEWSKI, W. J. A Skyrme-like model with an exact BPS bound. **Journal of High Energy Physics**, v. 2013, n. 9, p. 97, 2013. DOI: 10.1007/JHEP09(2013)097. Disponível em: [https://doi.org/10.1007/JHEP09\(2013\)097](https://doi.org/10.1007/JHEP09(2013)097). Acesso em: 13 ago. 2021.

57 FERREIRA, L.; SHNIR, Y. Exact self-dual skyrmions. **Physics Letters B**, v. 772, p. 621–627, 2017. DOI: 10.1016/j.physletb.2017.07.040. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269317305968>. Acesso em: 13 ago. 2021.

58 DONALDSON, S. K. Nahm's equations and the classification of monopoles. **Communications in Mathematical Physics**, v. 96, n. 3, p. 387–407, 1984. DOI: 10.1007/BF01214583.

- 
- 59 HOUGHTON, C. J.; MANTON, N. S.; SUTCLIFFE, P. M. Rational maps, monopoles and skyrmions. **Nuclear Physics B**, v. 510, n. 3, p. 507–537, 1998. DOI: 10.1016/S0550-3213(97)00619-6. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0550321397006196>. Acesso em: 13 ago. 2021.
- 60 BATTYE, R. A.; SUTCLIFFE, P. M. Skyrmions, fullerenes and rational maps. **Reviews in Mathematical Physics**, v. 14, n. 1, p. 29–86, 2002. DOI: 10.1142/S0129055X02001065.
- 61 BABELON, O.; FERREIRA, L. A. Integrability and conformal symmetry in higher dimensions: a model with exact Hopfion solutions. **Journal of High Energy Physics**, v. 6, n. 11, p. 403–428, 2002. DOI: 10.1088/1126-6708/2002/11/020.
- 62 ANGELI, I.; MARINOVA, K. P. Table of experimental nuclear ground state charge radii: an update. **Atomic Data and Nuclear Data Tables**, v. 99, n. 1, p. 69–95, 2013. DOI: 10.1016/j.adt.2011.12.006.
- 63 USMANI, Q. *et al.* Nuclear matter properties, phenomenological theory of clustering at the nuclear surface, and symmetry energy. **Physical Review C**, v. 84, n. 6, p. 064313, 2011. DOI: 10.1103/PhysRevC.84.064313.
- 64 AUDI, G. *et al.* The NUBASE2016 evaluation of nuclear properties. **Chinese Physics C**, v. 41, n. 3, p. 030001, 2017. DOI: 10.1088/1674-1137/41/3/030001.
- 65 WANG, M. *et al.* The AME2016 atomic mass evaluation (II). Tables, graphs and references. **Chinese Physics C**, v. 41, n. 3, p. 030003, 2017. DOI: 10.1088/1674-1137/41/3/030003.



## APÊNDICE A – RESULTADOS AUXILIARES DO CAPÍTULO 3

### A.1 Invariância conforme das equações de Euler-Lagrange (3.1) e (3.2) e das equações de autodualidade (3.31)

As transformações conformes no espaço Euclideano tridimensional ( $i, j, k = 1, 2, 3$ ) podem ser introduzidas como<sup>1,61</sup>

$$\delta x_i = \zeta_i, \quad \partial_i \zeta_j + \partial_j \zeta_i = 2D \delta_{ij}, \quad (\text{A.1})$$

onde a função  $D$  é nula para translações e rotações, constante para dilatações e linear em  $x_i$ 's para as transformações especiais conformes.<sup>61</sup> Dada as transformações dos campos definidas por

$$\delta U = 0, \quad \delta h_{ab} = -D h_{ab}, \quad \delta h_{ab}^{-1} = D h_{ab}^{-1}. \quad (\text{A.2})$$

segue-se que

$$\delta R_i^a = -\partial_i \zeta_j R_j^a, \quad \delta H_{ij}^a = -\partial_i \zeta_k H_{kj}^a - \partial_j \zeta_k H_{ik}^a \quad (\text{A.3})$$

e

$$\begin{aligned} \delta(\partial_i h_{ab}) &= -\partial_i \zeta_j \partial_j h_{ab} - D \partial_i h_{ab} - h_{ab} \partial_i D, \\ \delta(\partial_i h_{ab}^{-1}) &= -\partial_i \zeta_j \partial_j h_{ab}^{-1} + D \partial_i h_{ab}^{-1} + h_{ab}^{-1} \partial_i D, \\ \delta(\partial_i R_j^a) &= -\partial_i \zeta_k \partial_k R_j^a - R_{jk}^a \partial_i \partial_j \zeta_k - \partial_j \zeta_k \partial_i R_k^a, \\ \delta(\partial_k H_{ij}^a) &= -\partial_k \zeta_l \partial_l H_{ij}^a - \partial_i \zeta_l \partial_k H_{lj}^a - \partial_j \zeta_l \partial_k H_{il}^a - \partial_k \partial_i \zeta_l H_{ij}^a - \partial_k \partial_j \zeta_l H_{il}^a. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Usando (A.1), (A.2), (A.3) e (A.5) se obtêm

$$\begin{aligned} \delta(h_{ab} R_i^a R_i^b) &= -3D h_{ab} R_i^a R_i^b, \\ \delta(h_{ab}^{-1} H_{ij}^a H_{ij}^b) &= -3D h_{ab}^{-1} H_{ij}^a H_{ij}^b, \\ \delta(\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{abc} R_i^a R_j^b R_k^c) &= -3D \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{abc} R_i^a R_j^b R_k^c. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Já que o elemento de volume se transforma, sob as transformações (A.1), como  $\delta(d^3x) = 3D d^3x$ , a energia estática (3.7) e a carga topológica (2.41) são invariantes conformes. Denote

$$\begin{aligned} \Lambda_a^{(1)} &\equiv \partial_i \left[ m_0^2 e_0^2 h_{ab} R_i^b + \varepsilon_{abc} R_j^b h_{cd}^{-1} H_{ij}^d \right], \\ \Lambda_{ab}^{(2)} &\equiv m_0^2 e_0^2 R_i^a R_i^b - \frac{1}{2} h_{ac}^{-1} H_{ij}^c h_{bd}^{-1} H_{ij}^d, \\ \Lambda_{ai}^{(3)} &\equiv \lambda h_{ab} R_i^b - \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} H_{ij}^a. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Utilizando (A.1)-(A.5) e o fato que (A.1) implica em  $\partial_j^2 \zeta_i = -\partial_i D$ , então a variação de cada uma das equações de (A.6) leva à

$$\delta \Lambda_a^{(1)} = -3 D \Lambda_a^{(1)}, \quad \delta \Lambda_{ab}^{(2)} = -2 D \Lambda_{ab}^{(2)}, \quad \delta \Lambda_{ai}^{(3)} = -2 D \Lambda_{ai}^{(3)} - \sum_{j \neq i} \partial_i \zeta_j \Lambda_{aj}^{(3)}. \quad (\text{A.7})$$

Conclui-se que a versão estática das equações de Euler-Lagrange (3.1) e (3.2), e as equações de autodualidade (BPS) (3.31) são invariantes conforme em  $\mathbb{R}^3$ .

## A.2 Prova das relações (3.14), (3.15) e (3.16)

Usando (2.37) e (3.10) pode-se escrever a versão estática das equações de Euler-Lagrange associada aos campos  $h$  (3.2) como

$$m_0^2 e_0^2 \tau_{ab} = \frac{1}{2} h_{ac}^{-1} h_{bd}^{-1} \varepsilon_{cef} \varepsilon_{d\bar{e}\bar{f}} \tau_{e\bar{e}} \tau_{f\bar{f}}. \quad (\text{A.8})$$

Assuma que todos os três autovalores da matriz  $h$  sejam positivos. Já que  $h$  é uma matriz real e simétrica ela pode ser diagonalizada por uma matriz ortogonal  $M$ , i.e.

$$h = M h^D M^T, \quad \text{com} \quad h_{ab}^D = \varphi_a \delta_{ab}, \quad M M^T = \mathbb{1}. \quad (\text{A.9})$$

Conjugando ambos os lado das relações de comutação para os geradores da álgebra do grupo  $SU(2)$  (2.34) com um elemento  $g$  do grupo  $SU(2)$ , e usando a definição de representação adjunta (2.40), se obtêm que  $\varepsilon_{abc} d_{dc}(g) = \varepsilon_{efd} d_{ea}(g) d_{fb}(g)$ . As matrizes  $d(g)$  da representação adjunta são reais e unitárias e portanto também são ortogonais. De modo similar, já que  $M$  é uma matriz  $3 \times 3$  ortogonal, esta satisfaz a identidade  $M \vec{x} \times M \vec{y} = (\det M) M (\vec{\alpha} \times \vec{\beta})$ ,  $\forall \vec{\alpha}, \vec{\beta} \in \mathbb{R}^3$ , e então

$$\varepsilon_{abc} M_{dc} = (\det M) \varepsilon_{efd} M_{ea} M_{fb}, \quad (\text{A.10})$$

onde  $\det M = \pm 1$ . Usando (A.9) e (A.10) em (A.8) se obtêm

$$m_0^2 e_0^2 \left( M^T \tau M \right)_{ab} = \frac{1}{2} \frac{1}{\varphi_a \varphi_b} \varepsilon_{acd} \varepsilon_{bef} \left( M^T \tau M \right)_{ce} \left( M^T \tau M \right)_{df}. \quad (\text{A.11})$$

Introduzindo a matriz real e diagonal  $B$  como

$$B = | m_0 e_0 | \text{diag.} (\sqrt{\varphi_2 \varphi_3}, \sqrt{\varphi_1 \varphi_3}, \sqrt{\varphi_1 \varphi_2}) \quad (\text{A.12})$$

e definindo a matriz real e simétrica  $A$  por

$$B A B = M^T \tau M, \quad (\text{A.13})$$

então as seis equações (A.11) podem ser reescritas como

$$A = A_C, \quad (\text{A.14})$$

onde  $A_C$  é a matriz dos cofatores de  $A$ . Note que devido a simetria de  $A$  a matriz  $A_C$  também é simétrica e portanto só há seis equações em (A.14). Em adição, como a matriz  $A$  é também real ela pode ser diagonalizada por um matriz ortogonal  $3 \times 3$ . Precisa-se considerar dois casos distintos:

1. *O caso onde  $\det A \neq 0$ , no domínio  $\mathcal{D}$  de  $\mathbb{R}^3$ .* Então, (A.14) pode ser reescrita como

$$A = (\det A) A^{-1} \quad (\text{A.15})$$

o que implica em

$$\det A = 1 \quad \Rightarrow \quad A = A^{-1}. \quad (\text{A.16})$$

Como consequência de  $A$  ser igual a sua inversa, segue-se que seus autovalores podem assumir os valores  $\pm 1$ . Contudo, a condição de determinante unitário em (A.16) implica que todos os autovalores devem ser 1, ou somente dois deles devem ser  $-1$ . Mas foi demonstrado em (3.13) que  $\tau$ , e conseqüentemente  $M^T \tau M$ , é uma matriz positiva. Portanto, (A.13) implica que  $B A B$  é uma matriz positiva e então  $A$  também deve ser positiva. Conseqüentemente, todos os valores de  $A$  são iguais a 1 e então  $A = \mathbb{1}$ . Em adição, a partir de (A.13) se obtém que  $M^T \tau M$  é diagonal. Isso prova a segunda relação em (3.15), uma vez que se assumi a primeira. Segue-se que (A.12) e (A.13) implicam que os autovalores de  $\tau$  são de fato dados por (3.16).

2. *O caso onde  $\det A = 0$ , no domínio  $\mathcal{D}$  de  $\mathbb{R}^3$ .* Portanto, (A.13) implica que  $\det \tau = \det A (\det B)^2 = 0$ , e então a matriz  $\tau$  é singular. A partir de (A.14) se obtém

$$A^2 = A A_C = (\det A) \mathbb{1} = 0. \quad (\text{A.17})$$

Mas para uma matriz simétrica  $A$ , os elementos diagonais de  $A^2$  são somas de quadrados, i.e.  $(A^2)_{11} = A_{11}^2 + A_{12}^2 + A_{13}^2$ , e assim por diante. Logo, já que  $A$  é real a equação (A.17) implica que  $A = 0$ . Usando (A.13) se obtém  $\tau = 0$ , ou seja todas as entradas da matriz  $\tau$  se anulam em  $\mathcal{D}$ . Conseqüentemente, a relação (3.10) resulta em  $R_i^a = 0$  para todos os valores de  $a$  e  $i$ , e então a partir de (2.37) o elemento  $U$  do grupo  $SU(2)$  tem que ser constante em  $\mathcal{D}$ .

### A.2.1 A análise usando as equações de autodualidade

Na análise da subseção anterior se usou a versão estática das equações Euler-Lagrange (3.2) associadas aos campos  $h$ , que levam as equações (A.8) e (A.11). Em tal análise foi necessário se assumir que a matriz  $h$  seja inversível e seus autovalores sejam estritamente positivos. Contudo, pode-se fazer uma análise similar do setor auto dual usando as equações de autodualidade (3.31). Contraindo (3.31) com  $R_i^c$  e usando (3.10) e (3.20) se têm

$$\lambda h_{ab} \tau_{bc} = \delta_{ac} \det R. \quad (\text{A.18})$$

Usando (3.24) e o fato que  $\det \tau = (\det R)^2$ , obtêm-se

$$|\lambda| h \cdot \tau = \sqrt{\det \tau} \mathbb{1}. \quad (\text{A.19})$$

Há duas possibilidades distintas para o determinante de  $\tau$ :

1. Se  $\det \tau \neq 0$  em alguns pontos ou em uma região  $\mathcal{D}$  do espaço físico, então a relação (A.19) resulta em (3.18). Portanto, a matriz  $h$  é inteiramente determinada em termos da matriz  $\tau$  e conseqüentemente em termos dos campos  $SU(2)$ . Logo, as equações de autodualidade têm solução em  $\mathcal{D}$  para qualquer configuração dos campos  $U$  tais que  $\tau$  seja inversível.
2. Se  $\det \tau = 0$  em alguns pontos ou em uma região  $\mathcal{D}$  do espaço físico, então (A.19) se torna

$$h \cdot \tau = 0. \quad (\text{A.20})$$

Dados os campos  $U$  que fixam  $\tau$  através de (3.10), considere a diagonalização construída com a transformação ortogonal como  $\tau = N \cdot \tau_D \cdot N^T$ , com  $N \cdot N^T = \mathbb{1}$ . Então, (A.20) se torna

$$\left(N^T \cdot h \cdot N\right)_{ab} \omega_b = 0, \quad \text{sem soma sobre o índice } b, \quad (\text{A.21})$$

onde  $\omega_b$  são os autovalores de  $\tau$ , e  $\left(N^T \cdot h \cdot N\right)$  é uma matriz simétrica que possui os mesmos autovalores de  $h$ . Há algumas possibilidades com  $\det \tau = 0$ :

- a) Se  $\tau$  tem apenas um autovalor nulo, sem perda de generalidade considere  $\omega_c = 0$ , então (A.21) implica que as linhas e colunas de  $\left(N^T \cdot h \cdot N\right)$  não correspondentes com  $c$  devem se anular, i.e.

$$\left(N^T \cdot h \cdot N\right)_{ab} = 0, \quad b \neq c, \quad \forall a = 1, 2, 3. \quad (\text{A.22})$$

Pela simetria de  $\left(N^T \cdot h \cdot N\right)$ , segue-se que equação (A.22) continua válida para  $a \neq c, \forall b = 1, 2, 3$ . Portanto, seu o único elemento não nulo é  $\left(N^T \cdot h \cdot N\right)_{cc}$ , o qual não é determinado pelas equações de autodualidade. Logo,  $h$  deve ter dois autovalores nulos e o terceiro é indeterminado.

- b) Se  $\tau$  tem somente dois autovalores nulos, sem perda de generalidade considere o único autovalor não nulo  $\omega_c \neq 0$ , então (A.21) implica que as linhas e colunas de  $\left(N^T \cdot h \cdot N\right)$  de índice  $c$  devem se anular, e o bloco  $2 \times 2$  remanecente é indeterminado. Logo,  $h$  deve ter um autovalor nulo e os outros dois são indeterminados.
- c) Se  $\tau$  tem três autovalores nulos, então  $\tau = 0$  em  $\mathcal{D}$ . Neste caso  $h$  é completamente indeterminado. De fato, a partir de (3.10) se segue que  $\tau_{aa} = (R_1^a)^2 + (R_2^a)^2 + (R_3^a)^2 = 0$ , para  $a = 1, 2, 3$ , e se conclui que a matriz  $R$ , ou seja as componentes  $R_i^a$ , se anulam em  $\mathcal{D}$  e portanto os campos  $U$  devem ser constantes nesta região. Logo, as equações de autodualidade (3.31) são satisfeitas em  $\mathcal{D}$  para qualquer matriz  $h$ .

Conclui-se que quanto mais singular é a matriz  $\tau$ , menos restrições as equações de autodualidade (3.31) impõe sobre a matriz  $h$ . Consequentemente, para qualquer configuração dos campos  $U$  (com  $\tau$  sendo singular ou não) pode-se obter uma matriz  $h$  que é solução das equações de autodualidade. Para os casos onde  $\det \tau = 0$ , a matriz  $h$  pode não ser unicamente determinada.



## APÊNDICE B – RESULTADOS AUXILIARES DO CAPÍTULO 4

### B.1 O comportamento da energia de ligação por núcleon do modelo de Skyrme Falso Vácuo para potenciais efetivos admissíveis

Como argumentado na seção 4.1, o argumento de escala de Derrick para a teoria (4.4) implica que

$$\int d^3x \left[ \frac{\mu_0^2}{2} (\partial_i \psi)^2 + 3 V_{\text{ef.}} \right] \equiv T + 3 U_{\text{ef.}} = 0. \quad (\text{B.1})$$

Usando (B.1) e (4.19) se pode escrever  $U = \int d^3x V = \int d^3x (V_{\text{ef.}} + c \psi^s) = -\frac{T}{3} + c \int d^3x \psi^s$ , e então

$$E_2 = \frac{2}{3} T + \frac{4 \pi^2}{|\lambda|^3} c |Q| + Q_G, \quad (\text{B.2})$$

onde foi usado  $\text{sign}(\lambda Q) = -1$ , dado em (2.48), e

$$Q = -\frac{\lambda^3}{4 \pi^2} \int d^3x \psi^s, \quad Q_G = \int d^3x G(U) \psi^s. \quad (\text{B.3})$$

Fixando o potencial  $V$ , o que fixa o valor de  $\kappa$  da escolha particular de potencial (4.19), o valor de  $s$  em (4.6) e das constantes de acoplamento da teoria (4.4), segue-se que as soluções de (4.13) se tornam funções somente da constante de integração  $c$ . Logo, diferenciando  $E_2$ , dado em (4.7), com respeito à  $c$  e integrando por partes se obtêm

$$\frac{d E_2}{d c} = \int d^3x \left[ \mu_0^2 \partial_i \left( \partial_i \psi \frac{d \psi}{d c} \right) - \mu_0^2 \partial^2 \psi \frac{d \psi}{d c} + \frac{\delta V}{\delta \psi} \frac{d \psi}{d c} \right] + \frac{d Q_G}{d c}. \quad (\text{B.4})$$

Já que  $\psi \rightarrow 0$  quando  $r \rightarrow \infty$ , então a densidade de carga bariônica se anula no infinito espacial (4.6). Consequentemente, o termo de superfície do lado direito da equação (B.4) também se anula. Usando a equação (4.13) para reescrever o segundo termo de (B.4) se obtém

$$\frac{d E_2}{d c} = \frac{4 \pi^2}{|\lambda|^3} c \frac{d |Q|}{d c} + \frac{d Q_G}{d c}. \quad (\text{B.5})$$

A energia de ligação por núcleon associada a teoria (4.4), sem fixar-se o potencial  $V$ , é dada por

$$E_B = \frac{|Q| E(Q=1) - E(|Q|)}{|Q|} = \frac{|Q| E_2(Q=1) - E_2(|Q|)}{|Q|}, \quad (\text{B.6})$$

com

$$E = 48 \pi^2 \frac{m_0}{e_0} |Q| + E_2. \quad (\text{B.7})$$

Logo, resulta de (B.2) e (B.5) que

$$\frac{d E_B}{d c} = \frac{2}{3} \frac{T}{|Q|^2} \frac{d |Q|}{d c} - \frac{1}{|Q|^2} \left[ |Q| \frac{d Q_G}{d c} - Q_G \frac{d |Q|}{d c} \right]. \quad (\text{B.8})$$

Se a relação entre  $Q$  e  $c$  for invertível, i.e. se  $Q$  for monotônico com  $c$  e vice-versa, pode-se escrever (B.8) como

$$\frac{dE_B}{d|Q|} = \frac{2}{3} \frac{T}{|Q|^2} - \frac{1}{|Q|^2} \left[ |Q| \frac{dQ_G}{d|Q|} - Q_G \right]. \quad (\text{B.9})$$

Em ordem a  $E_2$  ser não negativo para qualquer configuração de campo, deve-se considerar o potencial  $V$  como sendo não-negativo. Contudo, o argumento de escala de Derrick implica na condição (B.1) e, já que  $T$  deve ser positivo para soluções topológicas de (4.13) não triviais, então  $U_{\text{ef}}$  deve ser negativo. Portanto,  $V_{\text{ef}}$  deve ser negativo em alguma região do eixo  $\psi$ , o que requer por sua vez que o valor da constante de integração  $c$  deve ser positivo, pois  $\psi$  é também não negativo. A partir de (B.1) se têm

$$\frac{T}{3} = \frac{4\pi^2}{|\lambda|^3} c |Q| - \int d^3x V > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{4\pi^2}{|\lambda|^3} c |Q| > \int d^3x V. \quad (\text{B.10})$$

Logo

$$T = \frac{12\pi^2}{|\lambda|^3} c |Q| \Omega, \quad \text{com} \quad \Omega = 1 - \frac{|\lambda|^3}{4\pi^2} \frac{1}{c |Q|} \int d^3x V < 1 \quad (\text{B.11})$$

e então se conclui que

$$0 < \frac{T}{|Q|^2} < \frac{12\pi^2}{|\lambda|^3} \frac{c}{|Q|}. \quad (\text{B.12})$$

Para os tipos de núcleons considerados o número de prótons e nêutrons não diferem drasticamente, e então a carga elétrica de tais núcleos é aproximadamente proporcional à  $|Q|$ . Logo, deve-se considerar o funcional  $G(U)$  tal que  $Q_G$  seja positivo para  $|Q| \geq 1$  e seja proporcional à  $|Q|^2$ , i.e.  $Q_G = \chi |Q|^2$ , com  $\chi > 0$ , e então  $Q_G$  se aproxima da energia de interação Coulombiana para tal núcleo. Portanto, (B.9) se torna

$$\frac{dE_B}{d|Q|} = \frac{2}{3} \frac{T}{|Q|^2} - \chi. \quad (\text{B.13})$$

Em ordem a se obter (B.9) se deve assumir  $c$  como uma função monotônica de  $|Q|$ . De modo mais restritivo, supondo que  $c$  é uma função monotonicamente decrescente de  $|Q|$ , se obtêm o comportamento principal da energia de ligação por núcleon como função de  $|Q|$  a partir de (B.12) e (B.13). De fato, escolhendo um valor apropriado de  $\chi$  suficientemente pequeno, se obtêm para valores de  $|Q|$  pequenos que  $\frac{2}{3} \frac{T}{|Q|^2} > \chi$ , e então  $E_B$  é crescente com  $|Q|$ . Para valores de  $|Q|$  suficientemente grandes se obtêm  $\frac{2}{3} \frac{T}{|Q|^2} < \chi$ , e então  $E_B$  se torna decrescente com  $|Q|$ .

Os resultados deste apêndice são válidos para uma vasta classe de potenciais  $V$  da teoria (4.4) para os quais  $c$  é função monotonicamente decrescente de  $|Q|$  e  $V_{\text{ef}}$  é um potencial admissível. Logo, a dinâmica da teoria (4.4) leva com robustez ao comportamento esperado da energia de ligação segundo os dados experimentais, independentemente em certo sentido da forma particular do potencial  $V$ . A escolha de  $V$  e  $G(U)$  podem ser então utilizadas para se obter um ajuste mais fino dos dados experimentais.

## B.2 A lista de núcleos definida na seção 4.3 e alguns resultados importantes obtidos em tal seção

Na Tabela 6 a quantidade  $A$  é o número de massa do núcleo e  $Z$  é o número de prótons.  $R^{\text{exp.}}$  corresponde aos valores experimentais do raio RMS<sup>62</sup> para a lista de núcleos definida na seção 4.3, enquanto  $E_B^{\text{exp.}}$  corresponde com os valores da energia de ligação por núcleon,<sup>65</sup> tal como usado nas Figuras 9 e 10. Em adição, apresenta-se os resultados numéricos (com o mesmo número de dígitos do que os dados experimentais) obtidos na seção 4.3 para o caso  $s = 3$  e  $\kappa = 8$ .  $R^{\text{num.}}$  e  $E_B^{\text{num.}}$  correspondem respectivamente aos valores teóricos do raio RMS e da energia de ligação por núcleon. Também são apresentados os valores correspondentes de  $\gamma$  para cada valor de  $A$ , i.e. para cada valor inteiro da carga topológica. Já que há mais de um núcleo estável para o mesmo valor de  $A$ , mas só há uma solução numérica pra cada valor da carga de Skyrme  $Q$ , repete-se o valor numérico das grandezas teóricas para facilitar a comparação.

Tabela 6 - Os valores experimentais de  $R^{\text{exp.}}$  ( $fm$ ) e  $E_B^{\text{exp.}}$  ( $MeV$ ) e os valores numéricos  $R^{\text{num.}}$  ( $fm$ ),  $E_B^{\text{num.}}$  ( $MeV$ ) e  $\gamma$  (adimensional) obtidos na seção 4.3 para o caso  $s = 3$  e  $\kappa = 8$ .

Name	$A$	$Z$	$R^{\text{exp.}}$	$R^{\text{num.}}$	$E_B^{\text{exp.}}$	$E_B^{\text{num.}}$	$\gamma$
H	1	1	0,8783	1,8467	0,000000	0,000000	4,491068461142762
H	2	1	2,1421	1,9087	1,112283	2,895106	3,649869712047377
He	3	2	1,9661	1,9808	2,572680	4,254723	3,275512965240602
He	4	2	1,6755	2,0527	7,073915	5,084109	3,055186690308611
Li	6	3	2,5890	2,1862	5,332331	6,078895	2,797917904594600
Li	7	3	2,4440	2,2473	5,606439	6,407667	2,714002952968850
Be	9	4	2,5190	2,3598	6,462668	6,889732	2,591114911251203
B	10	5	2,4277	2,4117	6,475083	7,072907	2,544219486469452
B	11	5	2,4060	2,4613	6,927732	7,229382	2,503942224117655
C	12	6	2,4702	2,5086	7,680144	7,364775	2,468850343952055
C	13	6	2,4614	2,5540	7,469849	7,483176	2,437910925143941
N	14	7	2,5582	2,5976	7,475614	7,587648	2,410358116708282
N	15	7	2,6058	2,6397	7,699460	7,680532	2,385610494137132
O	16	8	2,6991	2,6802	7,976206	7,763651	2,363217640071331
O	17	8	2,6932	2,7194	7,750728	7,838453	2,342824482983545
O	18	8	2,7726	2,7574	7,767097	7,906102	2,324146819327975
F	19	9	2,8976	2,7942	7,779018	7,967544	2,306954100038247
Ne	20	10	3,0055	2,8300	8,032240	8,023561	2,291057065022768
Ne	21	10	2,9695	2,8648	7,971713	8,074802	2,276298691132936

(continua)

(continuação)

Name	$A$	$Z$	$R^{\text{exp.}}$	$R^{\text{num.}}$	$E_B^{\text{exp.}}$	$E_B^{\text{num.}}$	$\gamma$
Ne	22	10	2,9525	2,8986	8,080465	8,121814	2,262547453280112
Na	23	11	2,9936	2,9316	8,111493	8,165058	2,249692231249988
Mg	24	12	3,0570	2,9638	8,260709	8,204929	2,237638407479905
Mg	25	12	3,0284	2,9952	8,223502	8,241766	2,226304840103443
Mg	26	12	3,0337	3,0259	8,333870	8,275862	2,215621488325438
Al	27	13	3,0610	3,0560	8,331553	8,307472	2,205527530232682
Si	28	14	3,1224	3,0854	8,447744	8,336819	2,195969856721151
Si	29	14	3,1176	3,1141	8,448635	8,364099	2,186901855810426
Si	30	14	3,1336	3,1424	8,520654	8,389484	2,178282423400496
P	31	15	3,1889	3,1700	8,481167	8,413128	2,170075152240669
S	32	16	3,2611	3,1972	8,493129	8,435168	2,162247662359158
S	34	16	3,2847	3,2500	8,583498	8,474908	2,147619395869828
Cl	35	17	3,3654	3,2758	8,520278	8,492817	2,140769427267332
S	36	16	3,2985	3,3011	8,575389	8,509539	2,134200134292854
Ar	36	18	3,3905	3,3011	8,519909	8,509539	2,134200134292854
Cl	37	17	3,3840	3,3260	8,570281	8,525155	2,127892515622490
Ar	38	18	3,4028	3,3505	8,614280	8,539738	2,121829333480677
K	39	19	3,4349	3,3746	8,557025	8,553355	2,115994908123602
Ca	40	20	3,4776	3,3983	8,551303	8,566065	2,110374940891559
Ar	40	18	3,4274	3,3983	8,595259	8,566065	2,110374940891559
K	41	19	3,4518	3,4217	8,576072	8,577924	2,104956361248827
Ca	42	20	3,5081	3,4448	8,616563	8,588984	2,099727194058634
Ca	43	20	3,4954	3,4675	8,600663	8,599289	2,0946764444000906
Ca	44	20	3,5179	3,4899	8,658175	8,608884	2,089793994574852
Sc	45	21	3,5459	3,5120	8,618931	8,617808	2,085070519558121
Ca	46	20	3,4953	3,5338	8,66898	8,62610	2,080497405145488
Ti	46	22	3,6070	3,5338	8,656451	8,626097	2,080497405145488
Ti	47	22	3,5962	3,5554	8,661227	8,633785	2,076066681276107
Ti	48	22	3,5921	3,5766	8,723006	8,640903	2,071770960893693
Ti	49	22	3,5733	3,5976	8,711157	8,647481	2,067603386077977
Ti	50	22	3,5704	3,6183	8,755718	8,653545	2,063557580146583
Cr	50	24	3,6588	3,6183	8,701032	8,653545	2,063557580146583
V	51	23	3,6002	3,6388	8,742099	8,659121	2,059627604959952
Cr	52	24	3,6452	3,6590	8,775989	8,664232	2,055807922773732
Cr	53	24	3,6511	3,6790	8,760198	8,668900	2,052093362076591
Cr	54	24	3,6885	3,6988	8,777955	8,673146	2,048479086930095

(continua)

(continuação)

Name	$A$	$Z$	$R^{\text{exp.}}$	$R^{\text{num.}}$	$E_B^{\text{exp.}}$	$E_B^{\text{num.}}$	$\gamma$
Fe	54	26	3,6933	3,6988	8,736382	8,673146	2,048479086930095
Mn	55	25	3,7057	3,7184	8,765022	8,676988	2,044960569393613
Fe	56	26	3,7377	3,7377	8,790354	8,680445	2,041533564673800
Fe	57	26	3,7532	3,7568	8,770279	8,683533	2,038194088685605
Fe	58	26	3,7745	3,7758	8,792250	8,686269	2,034938397753139
Ni	58	28	3,7757	3,7758	8,732059	8,686269	2,034938397753139
Co	59	27	3,7875	3,7945	8,768035	8,688667	2,031762970212437
Ni	60	28	3,8118	3,8130	8,780774	8,690741	2,028664489709483
Ni	61	28	3,8225	3,8314	8,765025	8,692506	2,025639830011463
Ni	62	28	3,8399	3,8495	8,794553	8,693972	2,022686041171518
Cu	63	29	3,8823	3,8675	8,752138	8,695152	2,019800336906873
Ni	64	28	3,8572	3,8853	8,777461	8,696057	2,016980083066171
Zn	64	30	3,9283	3,8853	8,735905	8,696057	2,016980083066171
Cu	65	29	3,9022	3,9029	8,757096	8,696698	2,014222787076635
Zn	66	30	3,9491	3,9204	8,759632	8,697084	2,011526088274126
Zn	67	30	3,9530	3,9377	8,734152	8,697226	2,008887749029717
Zn	68	30	3,9658	3,9549	8,755680	8,697131	2,006305646596767
Ga	69	31	3,9973	3,9719	8,724579	8,696810	2,003777765609718
Ge	70	32	4,0414	3,9887	8,721700	8,696268	2,001302191174485
Ga	71	31	4,0118	4,0054	8,717604	8,695516	1,998877102495371
Ge	72	32	4,0576	4,0220	8,731745	8,694559	1,996500766990397
Ge	73	32	4,0632	4,0384	8,705049	8,693404	1,994171534851110
Ge	74	32	4,0742	4,0547	8,725200	8,692059	1,991887834007733
Se	74	34	4,0700	4,0547	8,687715	8,692059	1,991887834007733
As	75	33	4,0968	4,0708	8,700874	8,690530	1,989648165464452
Se	76	34	4,1395	4,0868	8,711477	8,688822	1,987451098972989
Ge	76	32	4,0811	4,0868	8,705236	8,688822	1,987451098972989
Se	77	34	4,1395	4,1027	8,694690	8,686942	1,985295269015788
Se	78	34	4,1406	4,1184	8,717806	8,684895	1,983179371073147
Kr	78	36	4,2038	4,1184	8,661238	8,684895	1,983179371073147
Br	79	35	4,1629	4,1341	8,687594	8,682686	1,981102158150497
Kr	80	36	4,1970	4,1496	8,692928	8,680320	1,979062437544858
Se	80	34	4,1400	4,1496	8,710813	8,680320	1,979062437544858
Br	81	35	4,1599	4,1650	8,695946	8,677802	1,977059067831450
Kr	82	36	4,1919	4,1802	8,710675	8,675137	1,975090956052185
Kr	83	36	4,1871	4,1954	8,695729	8,672330	1,973157055091182

(continua)

(continuação)

Name	$A$	$Z$	$R^{\text{exp.}}$	$R^{\text{num.}}$	$E_B^{\text{exp.}}$	$E_B^{\text{num.}}$	$\gamma$
Kr	84	36	4, 1884	4, 2104	8, 717446	8, 669383	1, 971256361222048
Sr	84	38	4, 2394	4, 2104	8, 677512	8, 669383	1, 971256361222048
Rb	85	37	4, 2036	4, 2253	8, 697441	8, 666302	1, 969387911814059
Kr	86	36	4, 1835	4, 2402	8, 712029	8, 663091	1, 967550783185259
Sr	86	38	4, 2307	4, 2402	8, 708456	8, 663091	1, 967550783185259
Sr	87	38	4, 2249	4, 2549	8, 705236	8, 659752	1, 965744088591193
Sr	88	38	4, 2240	4, 2695	8, 732595	8, 656290	1, 963966976339631
Y	89	39	4, 2430	4, 2840	8, 713978	8, 652708	1, 962218628021685
Zr	90	40	4, 2694	4, 2984	8, 709969	8, 649010	1, 960498256851153
Zr	91	40	4, 2845	4, 3127	8, 693314	8, 645198	1, 958805106104303
Zr	92	40	4, 3057	4, 3269	8, 692678	8, 641275	1, 957138447652745
Mo	92	42	4, 3151	4, 3269	8, 657730	8, 641275	1, 957138447652745
Nb	93	41	4, 3240	4, 3410	8, 664184	8, 637246	1, 955497580583371
Zr	94	40	4, 3320	4, 3550	8, 666801	8, 633112	1, 953881829898621
Mo	94	42	4, 3529	4, 3550	8, 662333	8, 633112	1, 953881829898621
Mo	95	42	4, 3628	4, 3690	8, 648720	8, 628876	1, 952290545292565
Mo	96	42	4, 3847	4, 3828	8, 653987	8, 624541	1, 950723099996405
Ru	96	44	4, 3908	4, 3828	8, 609412	8, 624541	1, 950723099996405
Mo	97	42	4, 3880	4, 3966	8, 635092	8, 620109	1, 949178889690030
Mo	98	42	4, 4091	4, 4102	8, 635168	8, 615583	1, 947657331474187
Ru	98	44	4, 4229	4, 4102	8, 62031	8, 61558	1, 947657331474187
Ru	99	44	4, 4338	4, 4238	8, 608712	8, 610965	1, 946157862899922
Ru	100	44	4, 4531	4, 4373	8, 619359	8, 606258	1, 944679941051426
Ru	101	44	4, 4606	4, 4507	8, 601365	8, 601463	1, 943223041678503
Ru	102	44	4, 4809	4, 4640	8, 607427	8, 596583	1, 941786658376123
Pd	102	46	4, 4827	4, 4640	8, 580290	8, 596583	1, 941786658376123
Rh	103	45	4, 4945	4, 4772	8, 584192	8, 591620	1, 940370301807507
Pd	104	46	4, 5078	4, 4904	8, 584848	8, 586576	1, 938973498968275
Ru	104	44	4, 5098	4, 4904	8, 587399	8, 586576	1, 938973498968275
Pd	105	46	4, 5150	4, 5035	8, 570650	8, 581453	1, 937595792489287
Pd	106	46	4, 5318	4, 5165	8, 579992	8, 576252	1, 936236739975294
Cd	106	48	4, 5383	4, 5165	8, 539048	8, 576252	1, 936236739975294
Ag	107	47	4, 5454	4, 5294	8, 553900	8, 570976	1, 934895913377873
Cd	108	48	4, 5577	4, 5422	8, 550019	8, 565626	1, 933572898399922
Pd	108	46	4, 5563	4, 5422	8, 567023	8, 565626	1, 933572898399922
Ag	109	47	4, 5638	4, 5550	8, 547915	8, 560203	1, 932267293930503

(continua)

(continuação)

Name	$A$	$Z$	$R^{\text{exp.}}$	$R^{\text{num.}}$	$E_B^{\text{exp.}}$	$E_B^{\text{num.}}$	$\gamma$
Pd	110	46	4,5782	4,5677	8,547162	8,554710	1,930978711507522
Cd	110	48	4,5765	4,5677	8,551275	8,554710	1,930978711507522
Cd	111	48	4,5845	4,5804	8,537079	8,549149	1,929706774807386
Cd	112	48	4,5944	4,5929	8,544730	8,543519	1,928451119159275
Sn	112	50	4,5948	4,5929	8,513618	8,543519	1,928451119159275
In	113	49	4,6010	4,6054	8,522929	8,537824	1,927211391083395
Sn	114	50	4,6099	4,6178	8,522566	8,532064	1,925987247851143
Cd	114	48	4,6087	4,6178	8,531513	8,532064	1,925987247851143
Sn	115	50	4,6148	4,6302	8,514069	8,526241	1,924778357066431
Sn	116	50	4,6250	4,6425	8,523116	8,520357	1,923584396266858
Sn	117	50	4,6302	4,6547	8,509611	8,514412	1,922405052543427
Sn	118	50	4,6393	4,6668	8,516533	8,508407	1,921240022178119
Sn	119	50	4,6438	4,6789	8,499449	8,502345	1,920089010298075
Sn	120	50	4,6519	4,6909	8,504492	8,496226	1,918951730545584
Te	120	52	4,7038	4,6909	8,477034	8,496226	1,918951730545584
Sb	121	51	4,6802	4,7029	8,482066	8,490052	1,917827904763047
Te	122	52	4,7095	4,7148	8,478140	8,483823	1,916717262692254
Sn	122	50	4,6634	4,7148	8,487907	8,483823	1,916717262692254
Sb	123	51	4,6879	4,7266	8,472328	8,477540	1,915619541686807
Te	123	52	4,7117	4,7266	8,465546	8,477540	1,915619541686807
Te	124	52	4,7183	4,7384	8,473279	8,471206	1,914534486437504
Xe	124	54	4,7661	4,7384	8,437565	8,471206	1,914534486437504
Sn	124	50	4,6735	4,7384	8,467421	8,471206	1,914534486437504
Te	125	52	4,7204	4,7501	8,458045	8,464820	1,913461848709503
Te	126	52	4,7266	4,7618	8,463248	8,458383	1,912401387091375
Xe	126	54	4,7722	4,7618	8,443541	8,458383	1,912401387091375
I	127	53	4,7500	4,7734	8,445487	8,451898	1,911352866754402
Xe	128	54	4,7774	4,7850	8,443298	8,445364	1,910316059222751
Xe	129	54	4,7775	4,7964	8,431390	8,438783	1,909290742152922
Ba	130	56	4,8283	4,8079	8,405549	8,432156	1,908276699122978
Xe	130	54	4,7818	4,8079	8,437731	8,432156	1,908276699122978
Xe	131	54	4,7808	4,8193	8,423736	8,425482	1,907273719430179
Xe	132	54	4,7859	4,8306	8,427622	8,418764	1,906281597897336
Ba	132	56	4,8303	4,8306	8,409375	8,418764	1,906281597897336
Cs	133	55	4,8041	4,8418	8,409978	8,412003	1,905300134686859
Xe	134	54	4,7899	4,8531	8,413699	8,405198	1,904329135122647

(continua)

(continuação)

Name	$A$	$Z$	$R^{\text{exp.}}$	$R^{\text{num.}}$	$E_B^{\text{exp.}}$	$E_B^{\text{num.}}$	$\gamma$
Ba	134	56	4,8322	4,8531	8,408171	8,405198	1,904329135122647
Ba	135	56	4,8294	4,8642	8,397533	8,398350	1,903368409519181
Ce	136	58	4,8739	4,8753	8,373760	8,391462	1,902417773017244
Ba	136	56	4,8334	4,8753	8,402755	8,391462	1,902417773017244
Ba	137	56	4,8314	4,8864	8,391827	8,384532	1,901477045426730
Ba	138	56	4,8378	4,8974	8,393420	8,377562	1,900546051075015
Ce	138	58	4,8737	4,8974	8,37708	8,37756	1,900546051075015
La	139	57	4,8550	4,9084	8,378025	8,370554	1,899624618661961
Ce	140	58	4,8771	4,9193	8,376317	8,363506	1,898712581120185
Pr	141	59	4,8919	4,9301	8,353992	8,356420	1,897809775480838
Ce	142	58	4,9063	4,9410	8,347071	8,349298	1,896916042744723
Nd	142	60	4,9123	4,9410	8,346030	8,349298	1,896916042744723
Nd	143	60	4,9254	4,9517	8,330488	8,342138	1,896031227758121
Sm	144	62	4,9524	4,9624	8,303679	8,334943	1,895155179093460
Nd	145	60	4,9535	4,9731	8,309187	8,327712	1,894287748934647
Nd	146	60	4,9696	4,9837	8,304092	8,320446	1,893428792966205
Nd	148	60	4,9999	5,0048	8,277177	8,305813	1,891735743208532
Sm	149	62	5,0134	5,0153	8,263466	8,298446	1,890901377354422
Sm	150	62	5,0387	5,0258	8,261621	8,291047	1,890074941367280
Sm	152	62	5,0819	5,0465	8,244061	8,276153	1,888445348587004
Eu	153	63	5,1115	5,0568	8,228699	8,268659	1,887641943800672
Sm	154	62	5,1053	5,0671	8,226835	8,261135	1,886845972727570
Gb	154	64	5,1223	5,0671	8,224796	8,261135	1,886845972727570
Gb	155	64	5,1319	5,0773	8,213251	8,253581	1,886057318209837
Dy	156	66	5,1622	5,0875	8,192433	8,245997	1,885275865684704
Gb	156	64	5,1420	5,0875	8,215322	8,245997	1,885275865684704
Gb	157	64	5,1449	5,0977	8,203504	8,238385	1,884501503110640
Gb	158	64	5,1569	5,1078	8,201819	8,230743	1,883734120896110
Dy	158	66	5,1815	5,1078	8,190130	8,230743	1,883734120896110
Tb	159	65	5,0600	5,1178	8,188800	8,223074	1,882973611830810
Dy	160	66	5,1951	5,1279	8,184054	8,215377	1,882219871019077
Gd	160	64	5,1734	5,1279	8,183014	8,215377	1,882219871019077
Dy	161	66	5,1962	5,1379	8,173310	8,207652	1,881472795815909
Er	162	68	5,2246	5,1478	8,152397	8,199901	1,880732285764774
Dy	162	66	5,2074	5,1478	8,173457	8,199901	1,880732285764774
Dy	163	66	5,2099	5,1577	8,161785	8,192123	1,879998242537775

(continua)

(continuação)

Name	$A$	$Z$	$R^{\text{exp.}}$	$R^{\text{num.}}$	$E_B^{\text{exp.}}$	$E_B^{\text{num.}}$	$\gamma$
Dy	164	66	5, 2218	5, 1676	8, 158714	8, 184320	1, 879270569877631
Er	164	68	5, 2389	5, 1676	8, 149020	8, 184320	1, 879270569877631
Ho	165	67	5, 2022	5, 1774	8, 146964	8, 176490	1, 878549173541836
Er	166	68	5, 2516	5, 1872	8, 141959	8, 168635	1, 877833961248146
Er	167	68	5, 2560	5, 1970	8, 131746	8, 160756	1, 877124842622655
Er	168	68	5, 2644	5, 2067	8, 129601	8, 152852	1, 876421729148642
Yb	168	70	5, 2702	5, 2067	8, 111898	8, 152852	1, 876421729148642
Tm	169	69	5, 2256	5, 2164	8, 114473	8, 144923	1, 875724534117927
Er	170	68	5, 2789	5, 2260	8, 111959	8, 136971	1, 875033172583114
Yb	170	70	5, 2853	5, 2260	8, 106609	8, 136971	1, 875033172583114
Yb	171	70	5, 2906	5, 2356	8, 097882	8, 128995	1, 874347561311723
Yb	172	70	5, 2995	5, 2452	8, 097429	8, 120996	1, 873667618741784
Yb	173	70	5, 3046	5, 2547	8, 087427	8, 112975	1, 872993264938715
Yb	174	70	5, 3108	5, 2642	8, 083847	8, 104930	1, 872324421553529
Lu	175	71	5, 3700	5, 2737	8, 069140	8, 096864	1, 871661011782399
Hf	176	72	5, 3286	5, 2831	8, 061359	8, 088776	1, 871002960327636
Yb	176	70	5, 3215	5, 2831	8, 064085	8, 088776	1, 871002960327636
Hf	177	72	5, 3309	5, 2925	8, 051835	8, 080666	1, 870350193359751
Hf	178	72	5, 3371	5, 3019	8, 049442	8, 072535	1, 869702638480259
Hf	179	72	5, 3408	5, 3113	8, 038546	8, 064383	1, 869060224686682
Hf	180	72	5, 3470	5, 3206	8, 034930	8, 056210	1, 868422882337254
Ta	181	73	5, 3507	5, 3298	8, 023400	8, 048017	1, 867790543118027
W	182	74	5, 3559	5, 3391	8, 018308	8, 039804	1, 867163140009889
W	183	74	5, 3611	5, 3483	8, 008322	8, 031571	1, 866540607257118
W	184	74	5, 3658	5, 3574	8, 005077	8, 023318	1, 865922880336927
Os	184	76	5, 3823	5, 3574	7, 988677	8, 023318	1, 865922880336927
Re	185	75	5, 3596	5, 3666	7, 991009	8, 015046	1, 865309895929486
W	186	74	5, 3743	5, 3757	7, 988601	8, 006755	1, 864701591889463
Os	187	76	5, 3933	5, 3848	7, 973780	7, 998445	1, 864097907217535
Os	188	76	5, 3993	5, 3938	7, 973864	7, 990117	1, 863498782033505
Os	189	76	5, 4016	5, 4028	7, 963002	7, 981770	1, 862904157549983
Os	190	76	5, 4062	5, 4118	7, 962104	7, 973405	1, 862313976046459
Ir	191	77	5, 3968	5, 4208	7, 948113	7, 965023	1, 861728180844594
Os	192	76	5, 4126	5, 4297	7, 948525	7, 956622	1, 861146716284074
Pt	192	78	5, 4169	5, 4297	7, 942491	7, 956622	1, 861146716284074
Ir	193	77	5, 4032	5, 4386	7, 938133	7, 948205	1, 860569527698860

(continua)

(continuação)

Name	$A$	$Z$	$R^{\text{exp.}}$	$R^{\text{num.}}$	$E_B^{\text{exp.}}$	$E_B^{\text{num.}}$	$\gamma$
Pt	194	78	5,4236	5,4475	7,935941	7,939770	1,859996561394610
Pt	195	78	5,4270	5,4563	7,926552	7,931318	1,859427764626352
Pt	196	78	5,4307	5,4651	7,926529	7,922849	1,858863085576737
Hg	196	80	5,4385	5,4651	7,914369	7,922849	1,858863085576737
Au	197	79	5,4371	5,4739	7,915654	7,914364	1,858302473335395
Pt	198	78	5,4383	5,4827	7,914150	7,905863	1,857745877878276
Hg	198	80	5,4463	5,4827	7,911552	7,905863	1,857745877878276
Hg	199	80	5,4474	5,4914	7,905279	7,897345	1,857193250047730
Hg	200	80	5,4551	5,5001	7,905895	7,888812	1,856644541533518
Hg	201	80	5,4581	5,5088	7,897560	7,880263	1,856099704853727
Hg	202	80	5,4648	5,5174	7,896850	7,871698	1,855558693336665
Tl	203	81	5,4666	5,5260	7,886053	7,863118	1,855021461102933
Hg	204	80	5,4744	5,5346	7,885545	7,854523	1,854487963048309
Pb	204	82	5,4803	5,5346	7,879932	7,854523	1,854487963048309
Tl	205	81	5,4759	5,5432	7,878394	7,845912	1,853958154826700
Pb	206	82	5,4902	5,5517	7,875362	7,837287	1,853431992833947
Pb	207	82	5,4943	5,5602	7,869866	7,828648	1,852909434191629
Pb	208	82	5,5012	5,5687	7,867453	7,819994	1,852390436731829
Bi	209	83	5,5211	5,5772	7,847987	7,811325	1,851874958981518
Ra	226	88	5,7211	5,7172	7,661962	7,661932	1,843613253087140
Th	229	90	5,7557	5,7412	7,634650	7,635200	1,842246251422184
Th	230	90	5,7670	5,7491	7,630996	7,626267	1,841796196593272
Th	232	90	5,7848	5,7650	7,615033	7,608367	1,840904328898081
U	233	92	5,8203	5,7729	7,603956	7,599401	1,840462458679807
U	234	92	5,8291	5,7807	7,600715	7,590424	1,840023260016007
U	235	92	5,8337	5,7886	7,590914	7,581436	1,839586705273448
U	236	92	5,8431	5,7964	7,586484	7,572438	1,839152767221810
U	238	92	5,8571	5,120	7,570125	7,554410	1,838292634239833
Pu	239	94	5,8601	5,8198	7,560318	7,545380	1,837866386796573
Pu	240	94	5,8701	5,8275	7,556042	7,536341	1,837442651004169

Fonte: Elaborada pelo autor.

## APÊNDICE C – RESULTADOS AUXILIARES DO CAPÍTULO 5

### C.1 Os mapas racionais para os quais o funcional $\Lambda(w, \bar{w})$ é constante

Nesta seção se analisará quais são os possíveis mapas racionais para os quais o funcional  $\Lambda(w, \bar{w})$ , definido em (5.29), é constante. Usando o mapa racional  $u(w) = p(w)/q(w)$ , tal como definido em (3.53), onde  $p(w)$  e  $q(w)$  são polinômios sem raízes em comum, pode-se reescrever (5.29) como

$$\Lambda(w, \bar{w}) = A(w, \bar{w})^2 |W(w)|^2 \geq 0, \quad \text{com} \quad A(w, \bar{w}) \equiv \frac{1 + |w|^2}{|p|^2 + |q|^2}, \quad (\text{C.1})$$

onde  $W = q d_w p - p d_w q$  é o Wronskiano, definido em (3.58). Em adição, o maior grau polinomial entre  $p$  e  $q$  corresponde com o grau topológico  $n$  do campo  $u$  (ver seção 3.3), e então  $n \geq 1$  para os mapas racionais  $u$  de grau topológico não nulo.\* Como discutido na seção 2.2,  $W$  é um polinômio de grau igual ou inferior à  $2(n-1)$ . Já que  $|p|^2 + |q|^2 > 0$  para todo valor de  $w$  e  $\bar{w}$ , pois  $p$  e  $q$  não têm raízes em comum, segue-se da definição (C.1) que o funcional  $\Lambda(w, \bar{w})$  se anula somente para os valores de  $w$  correspondentes as raízes do Wronskiano. Portanto, se  $W$  possuir raízes, então  $\Lambda$  não pode ser constante. Por outro lado, se o polinômio  $W$  não possuir nenhuma raiz, então este deve ser constante, i.e. o mapa racional deve satisfazer a condição

$$W(w, \bar{w}) = \text{const.} \quad (\text{C.2})$$

Contudo, a constante de (C.2) não pode ser nula, caso contrário  $\Lambda$  seria nulo e por consequência o grau topológico do mapa  $u$ , escrito na representação integral em (3.54), seria zero. Portanto, segue-se de (C.2) e (C.1) que para se obter  $\Lambda = \text{const.}$  então  $A$  também deve ser constante.

Suponha que  $m_1$  e  $m_2$  sejam respectivamente os graus de  $p(w)$  e  $q(w)$  e que  $m \equiv \max(m_1, m_2)$ . Como o grau algébrico de  $u$  é igual à  $m$ , i.e.  $m = n$ , se obtém de (C.1) que

$$A \sim |w|^{-2(n-1)} \quad \text{para} \quad |w| \gg 1. \quad (\text{C.3})$$

Portanto,  $A$  não pode ser constante para todo  $n \geq 2$ . Como  $\Lambda$  é simétrico por troca  $p \leftrightarrow q$ , o mapa racional  $u$  mais geral que pode-se considerar com  $n = 1$  é dado por

$$p = \beta(w - a) \quad \text{e} \quad q = (w - b)^l, \quad (\text{C.4})$$

onde  $l = 0, 1$  e os parâmetros  $a$  e  $b$  são números complexos. Em adição, já que  $p$  e  $q$  não têm raízes em comum, então  $a \neq b$  para  $l = 1$ . A quantidade  $A(w, \bar{w})$  de (C.1) é a razão entre dois polinômios em  $w$  e  $\bar{w}$ , com termos cruzados, e então pode-se considerar dois casos distintos:

---

\* Note que devido a equação (3.55) da seção 3.3, a qual continua válida,  $n = 0 \Rightarrow Q = 0$ .

1. O mapa racional  $u(w) = p(w)/q(w)$  construído pela relação (C.4) com  $l = 1$ . Segue-se então de (C.1) e (C.4) que  $A$  será constante se, e somente se a seguinte equação polinômial for satisfeita

$$1 + w \bar{w} = A \left[ (|b| + |\alpha|^2 |a|^2) + (1 + |\alpha|^2) w \bar{w} \right] \quad (\text{C.5})$$

$$- (b + a |\alpha|^2) \bar{w} - (\bar{b} + \bar{a} |\alpha|^2) w, \quad (\text{C.6})$$

onde  $a \neq b$ . A partir do termo de ordem  $w \bar{w}$  de (C.6) se obtém que  $\alpha = 0$ , o que é absurdo, pois  $u$  se tornaria um mapa trivial ( $n = 0$ ). Portanto, a escolha (C.4) com  $l = 1$  não é compatível com  $\Lambda$  constante.

2. O mapa racional  $u(w) = p(w)/q(w)$  construído pela relação (C.4) com  $l = 0$ , onde  $q(w) = 1$ . Segue-se então de (C.1) e (C.4) que  $A$  será constante se, e somente se a seguinte equação polinômial for satisfeita

$$1 + w \bar{w} = A \left( 1 + |\beta|^2 |a|^2 + |\beta|^2 (w \bar{w} - a \bar{w} - \bar{a} w) \right) \quad (\text{C.7})$$

Resulta de (C.7) que  $a = 0$ ,  $|\beta| = 1$  e  $A = 1$  e portanto

$$u = e^{i\alpha} w, \quad \forall \alpha \in [0, 2\pi), \quad (\text{C.8})$$

com a fase  $\alpha$  sendo constante no espaço físico. Note que para o mapa racional (C.8) o Wronskiano é a própria fase, i.e.  $W = e^{i\alpha}$ , e portanto satisfaz a condição (C.2). Em adição, devido à definição (C.1), o mapa racional (C.8) implica em  $\Lambda = 1$ .

Conclui-se que somente os mapa racionais (C.8), obtidos no item 2 acima, satisfazem  $\Lambda = \text{constante}$  e para tais esta constante corresponde à  $\Lambda = 1$ .

## C.2 As equações estáticas de Euler-Lagrange (5.30) e (5.22) para respectivamente os campo $\varphi_a$ 's e os campos $M$ .

Neste Apêndice será demonstrado primeiro que os ansätze (5.19), (5.26) e (5.39) juntos reduzem as três equações (5.23) para os campos  $\varphi_a$ 's a duas equações distintas, as quais podem ser insolúveis caso  $\Lambda$  não seja constante e se tornam puramente radiais quando imposto adicionalmente o ansatz (5.36), onde  $\Lambda = 1$ . Segundo, será demonstrado que usando todos estes ansätze as equações de Euler-Lagrange (5.22) associadas aos campos  $M$  são automaticamente satisfeitas.

Usando (5.28) as equações estáticas de Euler-Lagrange (5.23) associadas aos campos

$\varphi_a$ 's se tornam

$$0 = \frac{\mu_0^2}{\sqrt{-g}} \partial_i (\sqrt{-g} \partial_i \varphi_1) - \beta_1^2 \varphi_1 - \frac{\beta_2^2}{2} \frac{\delta V(\varphi)}{\delta \varphi_1} + m_0^2 \frac{2 \sin^2(f/2)}{r^2} \Lambda \left[ \frac{1}{m_0^2 e_0^2} \frac{(f')^2}{\varphi_1^2} - 1 \right] - \mu_0^2 \left[ \frac{2(\varphi_1 - \varphi_3)}{r^2} \Lambda + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \left( f'^2 + \frac{2|u|^2}{r^2} \Lambda \right) \right], \quad (\text{C.9})$$

$$0 = \frac{\mu_0^2}{\sqrt{-g}} \partial_i (\sqrt{-g} \partial_i \varphi_2) - \beta_1^2 \varphi_2 - \frac{\beta_2^2}{2} \frac{\delta V(\varphi)}{\delta \varphi_2} + m_0^2 \frac{2 \sin^2(f/2)}{r^2} \Lambda \left[ \frac{1}{m_0^2 e_0^2} \frac{(f')^2}{\varphi_2^2} - 1 \right] - \mu_0^2 \left[ \frac{2(\varphi_2 - \varphi_3)}{r^2} \Lambda + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \left( f'^2 + \frac{2|u|^2}{r^2} \Lambda \right) \right], \quad (\text{C.10})$$

$$0 = \frac{\mu_0^2}{\sqrt{-g}} \partial_i (\sqrt{-g} \partial_i \varphi_3) - \beta_1^2 \varphi_3 - \frac{\beta_2^2}{2} \frac{\delta V(\varphi)}{\delta \varphi_3} + \frac{m_0^2}{2} \left[ \frac{16 \sin^4(f/2)}{r^4 m_0^2 e_0^2 \varphi_3^2} \Lambda^2 - (f')^2 \right] + 2 \mu_0^2 \frac{\varphi_1 + \varphi_2 - 2\varphi_3}{r^2}, \quad (\text{C.11})$$

as quais são simétricas por troca dos autovalores  $\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$  desde que o potencial  $V$  tenha a mesma simetria. De fato, tal simetria do potencial  $V$  é importante para que o ansatz (5.39) seja compatível com as equações (C.9)-(C.11), já que subtraindo (C.9) de (C.11) e usando  $\varphi_1 = \varphi_2$  em seguida se obtêm que  $\delta_{\varphi_1} V|_{\varphi_1=\varphi_2} = \delta_{\varphi_2} V|_{\varphi_1=\varphi_2}$ . Consequentemente, se  $\varphi_1 = \varphi_2$  a equação (C.9) é equivalente à (C.10) e portanto há uma equação a menos para se resolver. Assumindo tal simetria e usando os ansätze (5.35) e (5.39), então (C.9) e (C.11) são reduzidas respectivamente à

$$0 = \frac{\mu_0^2}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \varphi_1') - \beta_1^2 \varphi_1 - \frac{\beta_2^2}{2} \frac{\delta V(\varphi)}{\delta \varphi_1} + m_0^2 \frac{2 \sin^2(f/2)}{r^2} \Lambda \left[ \frac{1}{m_0^2 e_0^2} \frac{(f')^2}{\varphi_1^2} - 1 \right] - \mu_0^2 \frac{2(\varphi_1 - \widehat{\varphi}_3 \Lambda)}{r^2} \Lambda, \quad (\text{C.12})$$

$$0 = \frac{\mu_0^2}{\sqrt{-g}} \partial_i (\sqrt{-g} \partial_i (\widehat{\varphi}_3 \Lambda)) - \beta_1^2 \widehat{\varphi}_3 \Lambda - \frac{\beta_2^2}{2} \frac{\delta V(\varphi)}{\delta \varphi_3} + \frac{m_0^2}{2} \left[ \frac{16 \sin^4(f/2)}{r^4 m_0^2 e_0^2 \widehat{\varphi}_3^2} - (f')^2 \right] + 4 \mu_0^2 \frac{\varphi_1 - \widehat{\varphi}_3 \Lambda}{r^2}, \quad (\text{C.13})$$

onde  $f$ ,  $\varphi_1$  e  $\widehat{\varphi}_3$  são campos radiais. Usando adicionalmente o ansatz (5.36), então  $\Lambda = 1$  e equações (C.12) e (C.13) se tornam puramente radiais. Note que a parte angular desacopla das equações (C.12) e (C.13) para  $\Lambda$  constante, mas caso contrário tais equações podem não ser solúveis. De fato, considere por exemplo  $V = 0$  e  $h$  sendo inversível na origem, e portanto  $\varphi_a(0) \neq 0$ . Segue-se que para o lado direito das equações (C.12) e (C.13) não divergir quando  $r \rightarrow 0$  é necessário que o numerador do termo que vai com  $r^{-2}$ , ou seja a última linha de ambas as equações, deve ir à zero. Logo,  $\varphi_1(0) - \widehat{\varphi}_3(0) \Lambda(w, \bar{w}) = 0$  e então  $\Lambda$  deve ser constante.

Agora se analisará as equações de Euler-Lagrange (5.30) associadas aos campos  $M$ . A representação adjunta dos geradores  $T_a$  da álgebra do grupo  $SU(2)$  satisfazem  $d_{ab}(T_c) = i \varepsilon_{acb}$  para  $a, b, c = 1, 2, 3$ . A partir de (3.49), (3.50), (5.30) e do ansatz

holomórfico (5.26) para os campos  $U$  se obtêm

$$\begin{aligned} N^T \partial_r N &= \frac{i}{2} f' d(T_3), \\ N^T \partial_w N &= \frac{1}{1+|u|^2} \left[ -\bar{u} \partial_w u d(T_3) - i e^{-if/2} \partial_w u (d(T_1) + i d(T_2)) \right], \\ N^T \partial_{\bar{w}} N &= \frac{1}{1+|u|^2} \left[ u \partial_{\bar{w}} \bar{u} d(T_3) - i e^{if/2} \partial_{\bar{w}} \bar{u} (d(T_1) - i d(T_2)) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

Usando também o fato que  $[h_D, [h_D, d(T_a)]] = (\varphi_b - \varphi_c)^2 d(T_a)$ , para quaisquer dois valores distintos  $a, b = 1, 2, 3$  tais que  $b \neq a \neq c$ , então

$$\begin{aligned} [h_D, [h_D, N^T \partial_r N]] &= \frac{i}{2} f' (\varphi_1 - \varphi_2)^2 d(T_3), \\ [h_D, [h_D, N^T \partial_w N]] &= \frac{1}{1+|u|^2} \left[ -\bar{u} \partial_w u (\varphi_1 - \varphi_2)^2 d(T_3) \right. \\ &\quad \left. - i e^{-if/2} \partial_w u [(\varphi_2 - \varphi_3)^2 d(T_1) + i (\varphi_1 - \varphi_3)^2 d(T_2)] \right], \\ [h_D, [h_D, N^T \partial_{\bar{w}} N]] &= \frac{1}{1+|u|^2} \left[ u \partial_{\bar{w}} \bar{u} (\varphi_1 - \varphi_2)^2 d(T_3) \right. \\ &\quad \left. - i e^{if/2} \partial_{\bar{w}} \bar{u} [(\varphi_2 - \varphi_3)^2 d(T_1) - i (\varphi_1 - \varphi_3)^2 d(T_2)] \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

Tomando (C.14) e (C.15) dentro do ansatz para os autovalores de  $h$  dado por (5.35) e a escolha do mapa racional (5.36), o que implica em (5.37), então as equações (5.22) associadas aos campos  $M$  se tornam

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2r^2} \left[ i (e^{-if/2} u + e^{if/2} \bar{u}) [(\varphi_1 - \varphi_2)^2 + (\varphi_2 - \varphi_3)^2 - (\varphi_1 - \varphi_3)^2] d(T_1) \right. \\ &\quad \left. - (e^{-if/2} u - e^{if/2} \bar{u}) [(\varphi_1 - \varphi_2)^2 - (\varphi_2 - \varphi_3)^2 + (\varphi_1 - \varphi_3)^2] d(T_2) \right. \\ &\quad \left. + i \partial_r (r^2 f' (\varphi_1 - \varphi_2)^2) d(T_3) \right] = 0. \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

Logo, se for assumido adicionalmente que  $\varphi_1 = \varphi_2$ , então a equação matricial (C.16), e consequentemente as equações (5.22), são automaticamente satisfeitas.

### C.3 O método do gradiente descendente aplicado para minimizar a energia estática (5.44) e a espessura dos campos $f$ e $\varphi_a$ 's

Neste Apêndice será discutido o método numérico usado na seção 5.3. Usou-se o método do gradiente descendente com passo adaptativo para minimizar a energia estática (5.50) e se obter as soluções das equações de Euler-Lagrange (5.46), (5.47) e (5.48) com  $Q = 1$ . O intervalo de  $r$  considerado é  $[0, r_{\max}]$ , onde o valor de  $r_{\max}$ , e então o tamanho da rede, pode depender dos valores de  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  e é escolhido para se assegurar que  $0 < \varphi_a(r_{\max}) < 8 \times 10^{-7}$  e  $f(r_{\max}) < 4 \times 10^{-8}$ . O intervalo entre pontos vizinhos é  $\Delta r = 0.005$  e a rede tem  $p = r_{\max}/\Delta r$  pontos parametrizados por um inteiro  $k$ , onde se troca  $r \rightarrow \Delta r k$ .

Usou-se a versão discreta das equações de Euler-Lagrange (5.46), (5.47) e (5.48) e das energias (5.51), onde a primeira e a segunda derivada são dadas pela fórmula central

de quarta ordem e as integrais são calculadas com a regra do trapézio. Em particular, em  $k = 1$  e  $k = p - 2$  as derivadas são calculadas com a fórmula central de segunda ordem e em  $k = p - 1$  se usa a fórmula da diferença finita regressiva de primeira ordem.<sup>†</sup>

O método do gradiente descendente inicia com a configuração de campo com energia finita, chamada de configuração semente, escolhida como a versão discreta da configuração auto dual do modelo de Skyrme BPS dada por

$$f(\zeta) = 8 \arctan(e^{-\zeta}); \quad \varphi_1(\zeta) = -f'; \quad \varphi_3(\zeta) = \widehat{\varphi}_3(\zeta) = -\frac{4 \sin^2(f/2)}{\zeta^2 f'} \quad (\text{C.17})$$

que satisfaz (5.53), a qual terá seus campos sucessivamente modificados em cada um dos pontos da rede  $j = 2, \dots, p - 1$  e  $k = 1, \dots, p - 1$  através das relações

$$f_j \rightarrow f_j - \Delta\alpha_f \Delta E_{f,j}, \quad \varphi_{b,k} \rightarrow \varphi_{b,k} - \Delta\alpha_{\varphi_b} \Delta E_{\varphi_b,k}, \quad b = 1, 3, \quad (\text{C.18})$$

onde  $\Delta\alpha_a$  representa o tamanho do passo. Os valores dos campos  $f_1$ ,  $\varphi_{1,0}$  e  $\varphi_{3,0}$  podem ser estimados a partir dos pontos vizinhos, a cada vez que a modificação (C.18) é feita, usando

$$f_1 = \frac{f_0 + f_2}{2}, \quad \varphi_{a,0} = \varphi_{a,4} - 2(\varphi_{a,3} - \varphi_{a,1}). \quad (\text{C.19})$$

A primeira igualdade de (C.19) é obtida usando  $f''(0) = 0$  onde a derivada segunda é dada pela fórmula da diferença finita progressiva de segunda ordem. A segunda igualdade de (C.19) é obtida tomando a igualdade entre a fórmula central de segunda e quarta ordem para a primeira derivada.<sup>‡</sup> O método termina quando o valor máximo de cada um dos gradientes  $|\Delta E_f|$ ,  $|\Delta E_{\varphi_1}|$  e  $|\Delta E_{\varphi_3}|$  na rede, restrita aos pontos considerados em (C.18), são inferiores à  $10^{-4}$  e (5.52) é inferior à  $4 \times 10^{-3}$ .

Uma vez que as soluções de (5.46)-(5.48) com  $Q = 1$  são obtidas pelo procedimento acima, para as quais os campos  $f(r)$  e  $\varphi_a(r)$  são monotonicamente decrescentes, pode-se calcular a espessura  $t_f$ , definido como o valor de  $r$  tal que  $f(r) = f(0)/2$ . Primeiro, obtém-se o valor de  $r_p$  que é o valor numérico de  $r$  na rede que minimiza a função  $|f(0)/2 - f(r)|$ ,

<sup>†</sup> Devido ao termo do Jacobiano  $r^2$  somente o termo cinético para os campos  $h$  dão uma contruição não trivial para a energia em  $k = 0$ , dada por  $2 \frac{r_{\max}}{p} (\varphi_{1,0} - \varphi_{3,0})^2$ , a qual por consequência de (5.53) pode ser não nula somente para uma configuração de campo que não é solução do sistema de equações (5.46)-(5.48). Logo, não é necessário se calcular nenhuma derivada em  $k = 0$ .

<sup>‡</sup> A equação (5.46) é muito sensível em  $k = 1$ , onde as derivadas são calculadas com a fórmula central de segunda ordem, no sentido em que pequenas variações de  $f$  podem levar a grandes variações de  $\Delta E_f$ , a qual pode entrar em desacordo com seus valores dos pontos vizinhos. Por exemplo, considere o caso particular  $\sigma_2 = 0$  e tome uma configuração de campo auto dual que satisfaça (5.46) como configuração semente, como por exemplo (C.17), i.e. para a qual se tem exatamente  $\Delta E_f = 0$ . O valor numérico de  $\Delta E_{f,1}$ , obtido sem substituir (C.17) em (5.46), pode ser não desprezível e diferir significativamente de  $\Delta E_{f,2}$ , podendo ser preferível se utilizar a expressão (C.19) para calcular  $f_1$ . Em adição, já que  $\Delta E_f$  é muito sensível à pequenas variações de  $f$ , usa-se um passo  $\Delta\alpha_f$  muito pequeno. Por fim, o passo adaptativo  $\Delta\alpha_f$  decresce e a atualização na configuração de campo não é aceita quando ou a energia (5.50) cresce ou  $\Delta_f E$  se deforma drasticamente, o que pode evitar problemas de discontinuidade em  $\Delta E_f$ .

e então por definição  $|t_f - r_p| \leq \Delta r$ . Portanto, a expansão de Taylor de  $f(r)$  em torno de  $r_p$  calculada para  $r = t_f$  se torna  $f(t_f) = f(r_p) + f'(r_p) (t_f - r_p) + \mathcal{O}((\Delta r)^2)$  e então

$$t_f = r_p + \frac{f(0)/2 - f(r_p)}{f'(r_p)} + \mathcal{O}((\Delta r)^2). \quad (\text{C.20})$$

Usando (C.20) calcula-se  $t_f$  em primeira ordem de  $\Delta r$ , e o mesmo se segue para as espessuras  $t_{\varphi_a}$  dos campos  $\varphi_a$ 's. Na seção C.3 são apresentados na Tabela 5 os valores das espessuras de cada um dos campos para cada um dos valores de  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  dados na Tabela 4.