



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos
Departamento de Ciências Básicas



Juan López Linares

**Treinamento de Professores e Estudantes
do Ensino Fundamental e Médio com
Problemas de Olimpíadas de
Matemática**

**Pirassununga/SP
2022**

JUAN LÓPEZ LINARES

**Treinamento de Professores e Estudantes do Ensino Fundamental e
Médio com Problemas de Olimpíadas de Matemática**

Texto sistematizado apresentado à
Faculdade de Zootecnia e Engenharia de
Alimentos (FZEA) Universidade de São Paulo,
como parte dos requisitos para o concurso
de provas visando à obtenção do título de
Livre Docente na área de **TREINAMENTO
DE PROFESSORES E ESTUDANTES DO
ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO
COM PROBLEMAS DE OLIMPÍADAS
DE MATEMÁTICA**, junto ao departamento
de Ciências Básicas, em conformidade
com o edital ATAC/FZEA 18/2022.

Pirassununga - SP

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Serviço de Biblioteca e Informação da Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da
Universidade de São Paulo

L864t	<p>López Linares, Juan</p> <p>Treinamento de professores e estudantes do ensino fundamental e médio com problemas de olimpíadas de matemática. / Juan López Linares. -- Pirassununga, 2022. 155 p.</p> <p>Tese (Livre-Docência) -- Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos - Universidade de São Paulo. Departamento de Ciências Básicas.</p> <p>Área de concentração: Treinamento de professores e estudantes do ensino fundamental e médio com problemas de olimpíadas de matemática.</p> <p>1. Geometria. 2. Olimpíadas. 3. GeoGebra. 4. Ensino fundamental. 5. Ensino Médio. 6. Formação de professores. I. Título.</p>
-------	--

Dedico esta tese a minha família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos estudantes, estagiários e professores dos cursos de “Treinamento Olímpico em Matemática” pelos quais iniciou-se este trabalho. Em especial, agradeço aos professores Antonio Otavio Pellegrino, Anderson Aguiar, Ronaldo Barioni Eluf e Jorge Lizardo Diaz Calle que trabalharam de forma voluntária no projeto.

Agradeço aos professores-estudantes dos cursos de “Geometria Olímpica com GeoGebra” que motivaram este trabalho. Em especial, agradeço aos professores Alessandro Firmiano de Jesus e João Paulo Martins dos Santos que ministraram parte das aulas e colaboram em vários artigos.

Agradeço a professora Grazielle Feliciani Barbosa e ao professor Alexys Bruno Alfonso pela colaboração em vários artigos.

Agradeço a minha família pelo incentivo e compreensão.

Síntese da trajetória científica do autor

JUAN LÓPEZ LINARES: <https://orcid.org/0000-0002-8059-0631>.

Quando adolescente participava como estudante de um grupo de treinamento para olimpíadas de Física. Embora tivesse sucessos nas competições em Física, nas olimpíadas de Matemática não tinha resultados espetaculares. Sempre sentiu falta de um grupo de treinamento em Matemática. Essa experiência extracurricular determinou seu futuro profissional e motivou sua linha de trabalho hoje.

Atualmente Professor do Departamento de Ciências Básicas (ZAB) da Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos (FZEA) da Universidade de São Paulo (USP). Ministra as disciplinas de Cálculo II e IV para estudantes de engenharias e os cursos de “Treinamento Olímpico em Matemática para estudantes do Ensino Fundamental e Médio” e “Geometria olímpica com GeoGebra” para professores. Desenvolve projetos de pesquisa nas áreas de ensino de Cálculo e na resolução de problemas de Olimpíadas.

Graduação e Mestrado em Física na Universidade da Havana, Cuba, em 1994 e 1996, respectivamente. Curso de Diploma da Matéria Condensada no Centro Internacional de Física Teórica Abdus Salam, em Trieste, na Itália em 1997-1998. Estágio no Instituto de Espectroscopia Molecular (CNR), Bolonha, Itália em 1998-1999. Doutor em Física pela Universidade Federal de São Carlos (UFSCar) em 1999-2001. Pós-doutorado de 4 anos (2002-2005) na Universidade Estadual de Campinas (Unicamp). Mestre Profissional em Matemática em Rede Nacional (ProFMat) pela UFSCar em 2019.

Em 2017 fez a inscrição, como estudante, no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-ProfMat, no Departamento de Matemática, Universidade Federal de São Carlos (UFSCar). Obteve o certificado em 2019. Foi uma experiência de dois anos e meio muito gratificante do ponto de vista humano pelo convívio com outros professores do Ensino Fundamental e Médio. Também foi muito útil aprofundar na Matemática pré-universitária.

A partir do ano de 2020, com o início da pandemia de COVID19, passou a ministrar semestralmente cursos de Aperfeiçoamento EAD para professores de “Geometria Olímpica com GeoGebra”. Nestes participam professores de todas as regiões do Brasil e, inclusive, de alguns países estrangeiros como Peru, Equador e Angola. Esta atividade continua em andamento atualmente.

Até o momento que escreve estas linhas, na área de Matemática foram publicados 15 artigos, 9 livros eletrônicos (e-book), um capítulo de livro e uma dissertação de mestrado. Textos completos e gratuitos das publicações do autor podem ser encontrados [aqui](#). Também foram gravadas e disponibilizadas de forma pública 748 vídeo aulas e organizadas 12 olimpíadas regionais de Matemática. Adicionalmente, no site do [GeoGebra](#) foram publicados vários livros com mais de 500 construções geométricas interativas.

Título

Treinamento de Professores e Estudantes do Ensino Fundamental e Médio com Problemas de Olimpíadas de Matemática

Resumo

O presente trabalho foi elaborado como parte dos requisitos para obtenção do título de Livre Docente junto ao Departamento de Ciências Básicas da FZEA/USP. Para tanto, compilaram-se seis artigos com escopo ancorado na resolução detalhadas de problemas de olimpíadas internacionais de matemática na área de Geometria. O material didático também foi utilizado durante algumas das aulas dos cursos de Geometria Olímpica com GeoGebra para professores de Matemática do Ensino Fundamental e Médio de todo o Brasil. O texto conta com 87 figuras que facilitam acompanhar a resolução. Todas têm como complemento links para os gráficos interativos no site do GeoGebra e, vários, a resolução em vídeo do YouTube. A discussão é organizada em sete capítulos: Introdução; Desigualdade de Ptolomeu; Potência de um ponto; Baricentro ou Centroide; Incírculos e Ex-incírculos; Extremos com desigualdade na Geometria; Transformação de Inversão. Em cada um primeiro discute-se a teoria associada e depois resolvem-se problemas. O diferencial na utilização do GeoGebra está baseado na disponibilidade gratuita do software, tanto online como aplicativos para computadores e celulares. As construções geométricas podem ser feitas de forma dinâmica, onde exploram-se diversas configurações. O GeoGebra serve tanto como calculadora gráfica e numérica, utilizada para a verificação, como ferramenta para a apresentação, passo a passo, de uma demonstração rigorosa. O GeoGebra também convida o leitor a interagir, a pôr as mão na massa.

Palavras-chave: Geometria, Olimpíadas, GeoGebra, Ensino Fundamental, Ensino Médio, Formação de Professores.

Title

Training of Elementary and High School Teachers and Students with
Mathematical Olympiad Problems

Abstract

The present work was prepared as part of the requirements for obtaining the title of Associate Professor at the Department of Basic Sciences at FZEA/USP.

To this end, six articles were compiled with a scope anchored in the detailed resolution of problems of international mathematics olympiads in the area of Geometry. These didactic materials were also used during some of the classes of the Olympic Geometry courses with GeoGebra for Elementary and High School Mathematics teachers from all over Brazil. The text has 87 figures that make it easier to follow the resolution. All have as a complement links to the interactive graphics on the GeoGebra website and, in many cases, the video resolution from

YouTube. The discussion is organized into seven chapters: Introduction; Ptolemy's Inequality; Power of a point; Barycenter or Centroid; In-Circles and Ex-circles; Extremes with inequality in Geometry; Inversion Transformation. In each one, the associated theory is first discussed and then problems are solved.

The differential in the use of GeoGebra is based on the free availability of the software, both online and applications for computers and cell phones. Geometric constructions can be made dynamically, where different configurations are explored. GeoGebra serves both as a graphing and numerical calculator, used for verification, and as a tool for presenting, step by step, a rigorous demonstration. GeoGebra also invites the reader to interact.

Key words: Geometry, Olympics, GeoGebra, Elementary School, High School, Teacher Training.

Lista de Figuras

2.1	Enunciado do Teorema de Ptolomeu. Para um quadrilátero ser inscrito o produto dos comprimentos das diagonais deve ser igual à soma dos produtos dos comprimentos dos lados opostos e vice-versa. Versão interativa aqui	29
2.2	Demonstração da forma direta do Teorema de Ptolomeu. Versão interativa aqui	29
2.3	Demonstração da recíproca do Teorema de Ptolomeu. Versão interativa aqui	30
2.4	Teorema de Ptolomeu no retângulo $ABCD$. Versão interativa aqui	32
2.5	Construção geométrica para auxiliar na demonstração da Desigualdade de Ptolomeu. Versão interativa aqui	33
2.6	Uma construção geométrica para o Problema 1. Versão interativa aqui	35
2.7	Uma construção geométrica para o Problema 2. Versão interativa aqui	37
2.8	Uma construção geométrica inicial para o Problema 3. Versão interativa aqui	39
2.9	Uma construção geométrica para o Problema 3. Versão interativa aqui	41
2.10	Uma construção geométrica inicial para o Problema 5. Versão interativa aqui . Observe que ao mover o ponto P para diferentes posições somos levados a conjecturar que o mínimo ocorre quando $P = G$	44
2.11	Uma construção geométrica para o Problema 5. Versão interativa aqui	46
3.1	O produto $PE \cdot PF$ não é um invariante quando o ponto E movimenta-se pela elipse. Versão interativa aqui	48
3.2	O produto $PA \cdot PB$ é um invariante quando o ponto A movimenta-se pela circunferência. Versão interativa aqui	49
3.3	Verificação da igualdade $PA \cdot PB = PA' \cdot PB' = d^2 - r^2 $. Versão interativa aqui	49
3.4	O lado esquerdo ilustra o caso em que P é um ponto exterior a circunferência c , $r = OG$ e $d = PO$. O lado direito, quando o ponto J é interior a circunferência e , $r = HQ$ e $d = JH$. O ponto $F \in c$ é de tangência e ilustra o caso particular em que C e D aproximam-se a ele. Versão interativa aqui	50
3.5	Fórmula do T. de Pitágoras partindo do Teorema 4. Versão interativa aqui	52

3.6	O Eixo Radical f (verde) das circunferências c (vermelho) e d (azul) é uma reta perpendicular a O_1O_2 . Todo ponto P do Eixo Radical é centro de uma circunferência h que intersesta a c e d perpendicularmente. M é o ponto médio de O_1O_2 . Versão interativa aqui	53
3.7	Exemplos de Eixo Radical (linhas em verde). Parte superior esquerda, quando duas circunferências são tangentes o Eixo Radical das mesma passa pelo ponto de tangência. Parte superior direita, no caso em que as duas circunferências são secantes o Eixo Radical passa pelos pontos de intersecção. Parte inferior, para três circunferências com centros não colineares os Eixos Radicais dos pares concorrem em um ponto C denominado Centro Radical. A Potência de C é a mesma em relação as três circunferências. Versão interativa aqui	56
3.8	Uma solução do Problema 6. As circunferências Γ_1 e Γ_2 com centros em O_1 (azul) e O_2 (vermelha) têm raios r_1 e r_2 , respectivamente. A reta p intercepta as duas circunferências em quatro pontos determinando três segmentos de igual medida. Versão interativa aqui	57
3.9	Construção geométrica para auxiliar na interpretação do Problema 7. Versão interativa aqui	61
3.10	Construção adicional para auxiliar na interpretação do Problema 7. Versão interativa aqui	62
3.11	Uma solução do Problema 8. Versão interativa aqui	64
3.12	Construção geométrica inicial do Problema 9. Versão interativa aqui	66
3.13	Guia para a resolução do Problema 9. Versão interativa aqui	67
3.14	Guia para a resolução da primeira parte do Problema 10. Versão interativa aqui	68
3.15	Guia para a resolução da segunda parte do Problema 10. Versão interativa aqui	69
4.1	As medianas AD , BE e CF concorrem no ponto G , chamado Baricentro ou Centróide. A distância de um vértice ao Baricentro é duas vezes a distância do Baricentro ao pé da mediana correspondente. Guia para a demonstração da Proposição 8. Versão interativa aqui	72
4.2	Igualdade de áreas envolvendo o Baricentro. Guia para a demonstração da Proposição 9. Versão interativa aqui	73
4.3	Guia para a demonstração da Proposição 10. Os pontos H , G e O são colineares e determinam a Reta de Euler. Versão interativa aqui	74
4.4	Construção geométrica inicial para o Problema 11. Versão interativa aqui	76
4.5	Construção geométrica para o Problema 11. Versão interativa aqui	77
4.6	Construção geométrica para o Problema 12. Versão interativa aqui	78
4.7	Uma construção geométrica para o Problema 13. A circunferência C_3 é obtida variando somente o parâmetro θ . Versão interativa aqui	80

4.8	Construção geométrica no caso dos triângulos equiláteros serem construídos na direção interna do $\triangle ABC$. Versão interativa aqui	82
4.9	Construção geométrica no caso dos triângulos equiláteros serem construídos na direção interna do $\triangle ABC$. Versão interativa aqui	82
4.10	Primeira construção geométrica do Problema 14. Caso $\angle BA'C = 60^\circ$. Versão interativa aqui	84
4.11	Segunda construção geométrica do Problema 14. Caso $\angle BA'C = 120^\circ$. Versão interativa aqui	85
4.12	Construção geométrica para a Definição 4 e para a prova do Teorema 15. Versão interativa aqui	86
4.13	Construção geométrica inicial para o Problema 15. Versão interativa aqui	87
4.14	Construção geométrica para o Problema 15. Versão interativa aqui	88
5.1	Guia para a demonstração da Proposição 16. Versão interativa aqui	91
5.2	Guia para a demonstração da Proposição 17. Versão interativa aqui	92
5.3	Guia para a demonstração do Corolário 18. Versão interativa aqui	93
5.4	Guia para a demonstração da Proposição 19. Versão interativa aqui	93
5.5	Guia para a demonstração da Proposição 20. Versão interativa aqui	95
5.6	Guia para a demonstração do Teorema 21. Versão interativa aqui	97
5.7	Construção geométrica para o Problema 16. Versão interativa aqui	98
5.8	Construção geométrica inicial para o Problema 17. Versão interativa aqui	100
5.9	Construção geométrica para o Problema 17. Versão interativa aqui	101
5.10	Construção geométrica inicial para o Problema 18. Versão interativa aqui	102
5.11	Guia para a demonstração do Lema 22. Versão interativa aqui	103
5.12	Construção geométrica para o Problema 18. Versão interativa aqui	104
5.13	Construção geométrica inicial para o Problema 19. Versão interativa aqui	105
5.14	Construção geométrica para o Problema 19. Versão interativa aqui	106
5.15	Construção geométrica inicial para o Problema 20. Versão interativa aqui	107
5.16	Construção geométrica para o Problema 20. Versão interativa aqui	108
6.1	Guia para a demonstração da Proposição 23. Versão interativa aqui	110
6.2	Guia para a demonstração da Proposição 24. Versão interativa aqui	111
6.3	Desigualdades envolvendo os comprimentos dos segmentos AB e BC . Versão interativa aqui . Pode ser verificada a desigualdade movimentando o ponto B	113
6.4	Construção geométrica inicial para o Problema 21. Versão interativa aqui	115
6.5	Construção geométrica para o Problema 21. Versão interativa aqui . Pode ser movimentado o ponto B para encontrar o perímetro mínimo.	117

6.6	Construção geométrica para o Problema 22. Versão interativa aqui . Movimentando o ponto P pode-se verificar o mínimo.	118
6.7	Construção geométrica para o Problema 23. Versão interativa aqui . Movimentando o ponto A pode-se verificar o mínimo.	119
6.8	Construção geométrica para o Lema 27. Versão interativa aqui	121
6.9	Construção geométrica para o Problema 24. Versão interativa aqui	122
6.10	Construção geométrica para o Problema 25. Versão interativa aqui	123
7.1	Ilustração da Definição 5 e da construção dos pontos inversos P' e Q' . Quando $S \in i \Rightarrow S' = S$. Versão interativa aqui	127
7.2	Guia para a demonstração da Proposição 28. Versão interativa aqui	128
7.3	Guia para a demonstração das Proposições 29, 30 e 31. Versão interativa aqui . Podem movimentar-se os pontos A , B e C e mudar o raio da circunferência de inversão i	129
7.4	Guia para a demonstração da Proposição 32. Versão interativa aqui	131
7.5	Guia para a demonstração da Proposição 33. Versão interativa aqui	132
7.6	Construção geométrica inicial para o Exercício 1. Versão interativa aqui	133
7.7	Construção geométrica final para o Exercício 1. Versão interativa aqui	134
7.8	Construção geométrica inicial para o Problema 26. Elementos do espaço inverso em linhas tracejadas. Versão interativa aqui	135
7.9	Segunda construção geométrica para o Problema 26. Versão interativa aqui	135
7.10	Terceira construção geométrica para o Problema 26. Todos os elementos das duas construções anteriores. Versão interativa aqui	136
7.11	Construção geométrica para o Problema 27. Versão interativa aqui	137
7.12	Construção geométrica inicial para o Problema 28. Versão interativa aqui	138
7.13	Construção geométrica para o Problema 28. Versão interativa aqui	140
7.14	Construção geométrica utilizando inversão para o Problema 28. Versão interativa aqui	141
7.15	Construção geométrica inicial para o Problema 29. Versão interativa aqui	142
7.16	Construção geométrica para o Problema 29. O ponto $R_2 \in R_1R_3$, não aparece pela escala. Versão interativa aqui	143
7.17	Construção geométrica inicial utilizando inversão para o Problema 29. Versão interativa aqui	143
7.18	Construção geométrica somente dos elementos após inversão para o Problema 29. Versão interativa aqui	144
7.19	Construção geométrica utilizando inversão para o Problema 29. Versão interativa aqui	145

7.20	Construção geométrica do Problema 30. Caso i) M' é um quadrilátero e $\angle A' + \angle C' < 180^\circ$. Versão interativa aqui	146
7.21	Construção geométrica para o Problema 30. Caso ii) M' é o triângulo $A'B'C'$ com D' no interior. Versão interativa aqui	146

Siglas

AA Critério de Semelhança Ângulo-Ângulo. 50, 51, 75, 95, 105, 116

GeoGebra Programa de computador de matemática dinâmica. 23

GOG-I-2020 Geometria, com o uso do software gratuito GeoGebra, na solução de problemas de Olimpíadas e Vestibulares', de 21/09/2020 a 21/12/2020. 23

GOG-I-2021 Geometria Olímpica com GeoGebra, de 24/08/2021 a 21/12/2021. 23, 25

GOG-I-2022 Geometria Olímpica com GeoGebra, de 22/08/2022 até 28/11/2022. 22

GOG-II-2021 Geometria, com o uso do software gratuito GeoGebra, na solução de problemas de Olimpíadas e Vestibulares-Parte-II, de 16/03/2021 a 29/06/2021. 23

GOG-II-2022 Geometria Olímpica com Geogebra II, de 05/04/2022 até 12/07/2022. 22, 23

IGO Iranian Geometry Olympiad, Olimpíada Iraniana de Geometria. 47, 65–67

IMO International Mathematical Olympiad, Olimpíada Internacional de Matemática. 19, 28, 34, 36, 39, 41, 43, 47, 56, 61, 64, 75, 78, 79, 81, 86, 96, 100, 102, 104, 106–108, 114, 117, 118, 120, 122, 134, 136, 137, 141, 145

IMPA Instituto de Matemática Pura e Aplicada. 20

LAL Critério de Congruência ou Semelhança Lado-Ângulo-Lado. 63, 69, 82, 83, 101, 106

LL Long List, Lista Longa. 19, 75, 79

NA Nível Avançado. 65–67

POTI Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo. 20, 24

ProfMat Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. 24

SL Short List, Lista Curta. 19, 34, 36, 39, 41, 43, 56, 61, 71, 78, 81, 86, 90, 96, 100, 102, 104, 106, 107, 114, 117, 118, 120, 122, 134, 136, 141, 145

Sumário

Lista de Figuras

Siglas

1	Introdução	18
1.1	Sobre as Olimpíadas de Matemática	18
1.2	Sobre as Olimpíadas Internacionais de Matemática	19
1.3	Sobre o projeto de treinamento de professores e estudante com problemas de Olimpíadas de Matemáticas	20
1.3.1	Cursos de Matemática Olímpica para estudantes	20
1.3.2	Vídeo aulas de Matemática Olímpica para o Ensino Médio	21
1.3.3	Organização de Olimpíadas	21
1.3.4	Cursos de Geometria Olímpica com GeoGebra para professores	22
1.4	Sobre o GeoGebra	23
1.5	Recursos e organização do texto	24
1.6	Publicações do autor	24
2	Desigualdade de Ptolomeu	28
2.1	Introdução do Capítulo 2	28
2.2	Conceitos básicos do Capítulo 2	28
2.2.1	Teorema de Ptolomeu	28
2.2.2	Desigualdade de Ptolomeu	32
2.3	Problemas do Capítulo 2	34
2.3.1	Teorema de Ptolomeu. Arco Capaz. Triângulo Equilátero. P5 IMO 1995.	34
2.3.1.1	Resolução do Problema 1.	34
2.3.2	Desigualdade de Ptolomeu. Desigualdade das médias aritmética e harmônica. P7 SL IMO 1997.	36
2.3.2.1	Resolução do Problema 2.	36
2.3.3	Teorema de Ptolomeu. Conjugados Isogonais. Semelhança de triângulos. P4 SL IMO 1998.	39

2.3.3.1	Resolução do Problema 3.	39
2.3.4	Polígono inscritível. Teorema de Ptolomeu. P4 da SL da IMO 2000. . . .	41
2.3.4.1	Resolução do Problema 4.	41
2.3.5	Desigualdades de Ptolomeu e Triangular. Baricentro. Relação de Stewart. P17 SL IMO 2001.	43
2.3.5.1	Resolução do Problema 5.	43
3	Potência de um ponto	47
3.1	Introdução do Capítulo 3	47
3.2	Experimento com um Não invariante	48
3.3	Experimento com um invariante	48
3.4	Experimento com um invariante e dois pontos	49
3.5	Potência de um ponto relativo a uma circunferência	50
3.6	Eixo Radical	53
3.7	Centro Radical	55
3.8	Problemas resolvidos do Capítulo 3	56
3.8.1	Eixo Radical. Teorema de Tales. Equação quadrática. P4 SL IMO 1971.	56
3.8.1.1	Resolução	56
3.8.2	Eixo Radical. Teorema de Pitágoras. Semelhança de triângulos. P15 SL IMO 1994.	61
3.8.2.1	Resolução	61
3.8.3	Potência de um ponto. Eixo Radical. Quadrilátero Inscritível. Semelhança de triângulos. P5 IMO 2012.	64
3.8.3.1	Resolução	64
3.8.4	Tangência a uma circunferência. Ângulos inscritos e de segmento. Potência de um ponto e Eixo Radical. P8 NA IGO 2014-5.	65
3.8.4.1	Resolução	66
3.8.5	Quadriláteros cíclicos. Potência de um ponto relativo a uma circunferência. Semelhança de triângulos. P7 NA IGO 2014-5.	67
3.8.5.1	Resolução	67
3.9	Comentários finais do Capítulo 3	69
4	Baricentro ou centroide	71
4.1	Introdução do Capítulo 4	71
4.2	Conceitos básicos do Capítulo 4	72
4.3	Problemas resolvidos do Capítulo 4.	75
4.3.1	Baricentro. Homotetia. Quadriláteros cíclicos. P36-LL-IMO-1966.	75
4.3.1.1	Resolução do Problema 11.	75

4.3.2	Baricentro. Áreas. Desigualdade. P9 SL IMO 1968.	78
4.3.2.1	Resolução do Problema 12.	78
4.3.3	Baricentro. Lugar Geométrico. Circunferências. P27 LL IMO 1974. . . .	79
4.3.3.1	Resolução do Problema 13.	79
4.3.4	Baricentro. Lugar Geométrico. Teorema de Napoleão. SL P12 IMO 1987.	81
4.3.4.1	Considerações iniciais sobre o Problema 14.	81
4.3.4.2	Resolução do Problema 14.	83
4.3.5	Baricentro. Teorema de Simson-Wallace. Homotetia. P5 SL IMO 1998. .	86
4.3.5.1	Considerações iniciais para o Problema 15.	86
4.3.5.2	Resolução do Problema 15.	87
4.4	Comentários finais do Capítulo 4	88
5	Incírculos e Ex-incírculos	90
5.1	Introdução do Capítulo 5	90
5.2	Conceitos básicos do Capítulo 5	91
5.3	Problemas resolvidos do Capítulo 5	96
5.3.1	Ex-incírculos. Incentro. Relação de Stewart. P1 IMO 1970.	96
5.3.1.1	Considerações iniciais para o Problema 16.	96
5.3.1.2	Resolução do Problema 16.	98
5.3.2	Ex-incírculo. Incírculo. Semelhança de triângulos. P4 IMO 1992. . . .	100
5.3.2.1	Resolução do Problema 17.	100
5.3.3	Incírculo. Ex-incírculo. Potência de um ponto relativo a uma circunfe- rência. P5 IMO 1999.	102
5.3.3.1	Resolução do Problema 18.	102
5.3.4	Bissetrizes. Paralelogramo. Semelhança de triângulos. P16 SL IMO 2005.	104
5.3.4.1	Resolução do Problema 19.	104
5.3.5	Ex-incírculo. Potência de um ponto relativo a uma circunferência. Ân- gulos. P18 SL IMO 2006.	106
5.3.5.1	Resolução do Problema 20.	107
5.4	Comentários finais do Capítulo 5	108
6	Extremos com desigualdades na Geometria	109
6.1	Introdução do Capítulo 6	109
6.2	Conceitos básicos do Capítulo 6	109
6.3	Problemas resolvidos do Capítulo 6	114
6.3.1	Desigualdade Triangular. Desigualdade das Médias. Áreas. P1 IMO 1976.	114
6.3.1.1	Resolução do Problema 21.	114
6.3.2	Desigualdade de Cauchy-Schwarz. Incentro. Áreas. P1 IMO 1981. . . .	117

6.3.2.1	Resolução do Problema 22.	117
6.3.3	Desigualdade de Cauchy-Schwarz. Incírculo. Tangentes. P6 IMO 1983.	118
6.3.3.1	Resolução do Problema 23.	119
6.3.4	Desigualdade Triangular. Bases Médias. Paralelogramo. P7 SL IMO 1999.	120
6.3.4.1	Resolução do Problema 24.	120
6.3.5	Desigualdade Triangular. Lei dos Senos. Trigonometria. P1 IMO 2001.	122
6.3.5.1	Resolução do Problema 25.	123
6.4	Comentários finais do Capítulo 6	124
7	Transformação de Inversão	126
7.1	Introdução do Capítulo 7	126
7.2	Conceitos básicos do Capítulo 7	126
7.2.1	Transformação de reta e circunferência em circunferências concêntricas	132
7.2.1.1	Resolução do Exercício 1.	132
7.3	Problemas resolvidos do Capítulo 7.	134
7.3.1	Inversão. Circunferências concêntricas. Teorema de Pitágoras. P12 SL IMO 1982.	134
7.3.1.1	Resolução do Problema 26.	134
7.3.2	Inversão. Incírculo e circuncírculo. Colinearidade. P14 SL IMO 1986.	136
7.3.2.1	Resolução do Problema 27.	136
7.3.3	Teorema da Bissetriz. Triângulo Pedal. Lei dos Senos. Inversão. P2 IMO 1996.	137
7.3.3.1	Primeira resolução do Problema 28.	138
7.3.3.2	Construção e resolução do Problema 28 por inversão.	140
7.3.4	Teorema de Desargues. Incentro e Circuncentro. Inversão. P9 SL IMO 1997.	141
7.3.4.1	Resolução do Problema 29.	141
7.3.4.2	Resolução do Problema 29 por inversão.	143
7.3.5	Topologia. Inversão. P8 SL IMO 1999.	145
7.3.5.1	Resolução do Problema 30.	145
7.4	Comentários finais do Capítulo 7.	147
8	Referências Bibliográficas	148
	Índice Remissivo	154

Capítulo 1

Introdução

1.1 Sobre as Olimpíadas de Matemática

As Olimpíadas de Conhecimentos são uma política pública mundialmente reconhecida, que visa melhorar a motivação, o interesse e o desempenho dos alunos em diferentes níveis e áreas do saber. Questões olímpicas dão ‘tempero’ à matéria. Os problemas são contextualizados, criativos e provocadores. A matéria fica mais motivadora para os alunos.

Um estudo (Avaliação do impacto da Olimpíada Brasileira de Matemática nas escolas públicas, [2]) procurou responder a esta pergunta: O que leva a ser bem sucedido em Olimpíadas? Para isso, Gilberto Lacerda Santos, Pedro Henrique de Abreu e sua equipe entrevistaram gestores, professores e alunos de cinco escolas bem sucedidas em diferentes regiões do Brasil. Suas conclusões foram:

1. O “envolver as famílias dos alunos na vida escolar e nas ações da OBMEP” é uma prática de sucesso, porque leva as famílias a se mobilizarem em torno do sucesso de seus filhos.
2. O “assegurar a infraestrutura humana, logística e financeira de suporte” é uma prática igualmente presente na maioria das escolas de sucesso, que se concretiza em algumas por meio de estratégias de envolvimento de todo o corpo docente na preparação dos alunos, de forma multidisciplinar; em outras pela mobilização de toda a comunidade escolar na aplicação das provas; em outras pela designação de equipes de professores para se responsabilizar pela realização da olimpíada na escola.
3. O “promover o oferecimento de atividades extracurriculares preparatórias” é uma boa prática, mediante o emprego de estratégias tais como o oferecimento de aulas de reforço no turno contrário, a vinda de professores universitários para ajudar na preparação de alunos e a colaboração de medalhistas de anos anteriores.

4. O “integrar as Olimpíadas no projeto político-pedagógico da escola” é apontada como sendo crucial para que esta não seja um evento efêmero no calendário escolar.
5. “Promover o estabelecimento de um clima de competitividade positiva na escola” é outra boa prática.

Outro fato que pode motivar estudantes para participar de olimpíadas é que as universidades públicas do estado de São Paulo começaram a oferecer vagas para alunos com medalhas em competições científicas como as de Matemática, Física e Química. A nova modalidade de seleção faz parte de uma tendência de diversificar as formas de ingresso no ensino superior.

1.2 Sobre as Olimpíadas Internacionais de Matemática

Uma mostra da importância das Olimpíadas Internacionais de Matemática é que a participação de um programa de computador como concorrente virou um dos próximos desafios da inteligência artificial [8]. Isto acontece após diferentes softwares terem vencido aos grandes mestres dos jogos de Xadrez e Go.

O raciocínio matemático é o elemento desafiador na obtenção de tais softwares [39]. Não chega-se a entender e resolver problemas somente baseados na experiência, mas também pelo poder de inferir e explorar leis, axiomas e regras de manipulação de símbolos. As vezes, a ideia inicial ou ponto de partida, resulta ser a mais difícil de encontrar.

A Olimpíada Internacional de Matemática (**IMO**, International Mathematical Olympiad) é uma competição para estudantes do Ensino Médio. Na primeira **IMO** em 1959 somente sete países participaram, mas hoje em dia mais de 100 são representados. Os objetivos das **IMOs** são descobrir, estimular e desafiar estudantes talentosos em Matemática. Fortalecer relações de amizade internacional entre matemáticos, criar oportunidades para o intercâmbio de informação sobre programas e conteúdos de estudo e promover a Matemática em geral.

Na preparação para uma Olimpíada Internacional de Matemática cada delegação (menos o país sede) pode enviar problemas para formar a base de dados inicial, chamada lista longa (LongList, **LL**). Os mesmos não podem ter sido utilizados em competições anteriores, nem publicados e devem abranger vários tópicos de Matemática pré-universitária. O país sede da competição cria um Comitê de Seleção que escolhe os melhores problemas da **LL** para formar a lista curta (ShortList, **SL**). Os professores Líderes, um por equipe, recebem a **SL** no primeiro dia da reunião e escolhem, por maioria simples, os seis problemas da **SL** que serão usados na **IMO**. As duas listas são mantidas em segredo até a **IMO** do próximo ano.

Neste contexto, ao resolver problemas de olimpíadas internacionais de Matemática pretende-se incentivar estudantes e professores do Ensino Fundamental e Médio a aumentar seus conhecimentos, pois são desafios que requerem uma solução em múltiplos passos, onde se integram várias habilidades.

1.3 Sobre o projeto de treinamento de professores e estudante com problemas de Olimpíadas de Matemáticas

1.3.1 Cursos de Matemática Olímpica para estudantes

Esta tese faz parte de um projeto de longo prazo de treinamento de professores e estudante do Ensino Fundamental e Médio com problemas de Olimpíadas de Matemáticas. O mesmo teve início no mês de Agosto de 2014, até agora, oito anos consecutivos.

Entre 2014 e 2019 foi ministrado, em cada semestre (dois por ano), um curso de 60h para estudantes do Ensino Fundamental e Médio com bons resultados em Matemática. As aulas tiveram 4h de duração, uma vez por semana, e aconteceram de forma presencial no Departamento de Ciências Básicas (ZAB) da FZEA-USP.

O objetivo dos cursos foi aprofundar os conhecimentos e aumentar as chances de sucesso dos alunos em Olimpíadas de conhecimentos. O projeto esteve associado ao **POTI** (Polo Olímpico de Treinamento Intensivo) do **IMPA** (Instituto de Matemática Pura e Aplicada). As aulas foram divididas em quatro disciplinas: Teoria dos Números, Geometria, Álgebra e Combinatória.

Além do autor e do Prof. [Jorge Lizardo Diaz Calle](#), do ZAB, na FZEA-USP, também participaram, de forma voluntária, os professores do Ensino Fundamental e Médio listados a seguir:

- [Antonio Otavio Pellegrino](#)
- [Anderson Aguiar](#)
- [Ronaldo Barioni Eluf](#)

Menção especial merece o multi-medalhista [Atílio Leitão Pellegrino](#), que foi primeiro estudante do curso e depois monitor de uma das disciplinas. Atualmente é bolsista dos cursos de Graduação e Mestrado em Matemática da Fundação Getúlio Vargas. Outro escolar de destaque do projeto foi o também multi premiado [Álvaro Leitão Pellegrino](#), no momento graduando em Matemática no Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP-IGCE). Nos dois casos alunos da Escola Pública Estadual Nelson Fernandes.

Um [programa de TV nacional](#) (GloboNews), sobre índices de educação no Brasil, cita uma das escolas públicas que participaram do nosso projeto em 2018. A mesma é citada como o exemplo que as outras deviam imitar. A reportagem local começa em *15min23s* e a FZEA-USP é citada em *19min35s*.

O projeto também fez sua contribuição na formação de estagiários de iniciação científica dos cursos de Graduação em Engenharia de Alimentos e Biosistemas. Participaram **Debora**

Salamandac Moysés, Yara Viviane Aparecida Cassetari da Silva, Larissa Takigava Acrani, Raphaela Perna Fachini, Nathalia Squarça Dagola e Guilherme Garib.

A partir de 2020, devido a pandemia, o treinamento de estudantes continuo via WhatsApp e o grupo [Matemática para Olimpíadas e Vestibulares](#) no Facebook.

1.3.2 Vídeo aulas de Matemática Olímpica para o Ensino Médio

Partes das aulas dos cursos para estudantes foram gravadas e encontram-se organizadas nas playlist a seguir:

- [Geometria](#), Prof. Antonio Otavio Pellegrino.
- [Combinatória](#), do Prof. Anderson Aguiar.
- [Combinatória](#), do monitor Atílio Leitão Pellegrino.
- [Teoria dos Números](#), do autor.
- [Álgebra](#), do autor.

1.3.3 Organização de Olimpíadas

O autor foi organizador das olimpíadas de Matemática a seguir:

12. “XII Olimpíada de Matemática FZEA-USP (primeira virtual)” realizada por e-mail, das 8 a.m. do dia 8/6/2020 até às 8 a.m. do dia 9/6/2020. Teve 2398 inscrições, participaram 447 estudantes de escolas públicas e privadas de todos os estados do Brasil, do sexto ano do Ensino Fundamental até o Nível Universitário. Divulgada pelo [Jornal da USP](#).
11. “XI Olimpíada de Matemática FZEA-USP” nas salas ZAB2 e Azul, dia 18/11/2019, 14h. Participaram 80 estudantes de 9 escolas públicas e privadas de Pirassununga e região do sexto ano do Ensino Fundamental até o Nível Universitário.
10. “X Olimpíada de Matemática FZEA-USP” nas salas ZAB4 e Verde, dia 20/05/2019, 14h. Participaram 54 estudantes de 9 escolas públicas e privadas de Pirassununga e região do sexto ano do Ensino Fundamental até o Nível Universitário.
9. “IX Olimpíada de Matemática FZEA-USP” nas salas ZAB2 e ZAB3, dia 05/11/2018, 14h. Participaram 54 estudantes de 9 escolas públicas e privadas de Pirassununga e região do sexto ano do Ensino Fundamental até o Nível Universitário.
8. “VIII Olimpíada de Matemática FZEA-USP” nas salas ZAB2 e ZAB3, dia 04/06/2018, 14h. Participaram 53 estudantes de 9 escolas públicas e privadas de Pirassununga e região do sexto ano do Ensino Fundamental até o Nível Universitário.

7. “VII Olimpíada de Matemática FZEA-USP” nas salas ZAB2 e ZAB3, dia 06/11/2017, 14h. Participaram 40 estudantes de 5 escolas públicas e privadas de Pirassununga e região do sexto ano do Ensino Fundamental até o Nível Universitário.
6. “VI Olimpíada de Matemática FZEA-USP” nas salas ZAB2 e ZAB3, dia 12/06/2017, 14h. Participaram 62 estudantes de 5 escolas públicas e privadas de Pirassununga e região do sexto ano do Ensino Fundamental até o Nível Universitário.
5. “V Olimpíada de Matemática FZEA-USP” nas salas ZAB2 e ZAB3, dia 21/11/2016, 14h. Participaram 38 estudantes de 7 escolas públicas e privadas de Pirassununga e região do sexto ano do Ensino Fundamental até o 3 ano do Ensino Médio.
4. “IV Olimpíada de Matemática FZEA-USP” nas salas ZAB2, ZAB3 e ZEB4, dia 23/05/2016, 14h. Participaram 116 estudantes de 7 escolas públicas e privadas de Pirassununga e região do sexto ano do Ensino Fundamental até o 3 ano do Ensino Médio.
3. “III Olimpíada de Matemática FZEA-USP” na sala ZAB3, dia 23/11/2015, 14h. Participaram 25 estudantes do sétimo e oitavo ano de escolas públicas e privadas de Pirassununga e região.
2. “II Olimpíada de Matemática FZEA-USP” na sala ZAB3, dia 14/05/2015, 14h. Participaram 20 estudantes do sétimo ano de escolas públicas e privadas de Pirassununga e região.
1. “I Olimpíada de Matemática FZEA-USP” na sala cinza, dia 23/11/2014, 14h. Participaram 50 estudantes do sétimo ano de escolas públicas e privadas de Pirassununga e região.

Uma playlist com vídeos de algumas delas está disponível [aqui](#).

1.3.4 Cursos de Geometria Olímpica com GeoGebra para professores

Parte do material didático desta tese foi utilizado durante algumas das aulas dos cursos a seguir:

5. Curso à distância de Atualização, [Geometria Olímpica com GeoGebra](#), de 22/08/2022 até 28/11/2022. 30 horas. [GOG-I-2022](#).
4. Curso à distância de Aperfeiçoamento, [Geometria Olímpica com GeoGebra II](#), de 16/03/2021 até 29/06/2021. 28 inscritos. 180 horas. [GOG-II-2022](#).

3. Curso à distância de Aperfeiçoamento, [Geometria Olímpica com GeoGebra](#), de 05/04/2022 até 12/07/2022. 455 professores-estudantes solicitaram a inscrição. 180 horas. [GOG-I-2021](#).
2. Curso à distância de Aperfeiçoamento, [Geometria, com o uso do software gratuito GeoGebra, na solução de problemas de Olimpíadas e Vestibulares-Parte-II](#), de 16/03/2021 até 29/06/2021. 300 professores-estudantes solicitaram a inscrição. 180 horas. [GOG-II-2021](#).
1. Curso à distância de Aperfeiçoamento, [Geometria, com o uso do software gratuito GeoGebra, na solução de problemas de Olimpíadas e Vestibulares](#), de 21/09/2020 até 21/12/2020. 250 professores-estudantes solicitaram a inscrição. 180 horas. [GOG-I-2020](#).

Os professores [Alessandro Firmiano de Jesus](#) e [João Paulo Martins dos Santos](#) participaram como estudantes do curso [GOG-I-2020](#) e como docentes nos cursos [GOG-II-2021](#), [GOG-I-2021](#) e [GOG-II-2022](#).

A formação continuada e aprofundada dos professores do Ensino Fundamental e Médio, unida à melhora das condições de trabalho, salários e valorização do ensino, é o caminho para o país formar melhores estudantes e cidadãos. A aprendizagem de cada professor é multiplicada e compartilhada com seus estudantes.

1.4 Sobre o GeoGebra

O diferencial na utilização do [GeoGebra](#) está baseado na disponibilidade gratuita do software, tanto online como aplicativos para computadores e celulares. As construções geométricas podem ser feitas de forma dinâmica, onde exploram-se diversas configurações de um mesmo problema. O [GeoGebra](#) serve tanto como calculadora gráfica e numérica, utilizada para a verificação, como ferramenta para a apresentação, passo a passo, de uma demonstração rigorosa.

Com uma boa organização e programação adequada discutir problemas na tela do [GeoGebra](#) permite ao leitor visualizar simultaneamente gráficos e textos. Em contra partida, na versão impressa tradicional o aprendente precisa ficar alternando entre páginas para acompanhar uma resolução.

O [GeoGebra](#) também convida o leitor a interagir e aprender fazendo. Isto é, pode movimentar pontos da construção, colorir, modificar parâmetros de entrada, etc. Aos mais obstinados é permitido copiar e melhorar trabalhos já existentes.

Adicionalmente, a versão online do [GeoGebra](#) funciona como uma rede social de aprendizado e colaboração. Os profissionais e alunos podem disponibilizar e buscar construções, baixar e modificar ou alterar e salvar no próprio site. Em resumo, é um local que fornece materiais e meios alternativos para a troca de conhecimento relacionado ao ensino de Matemática.

1.5 Recursos e organização do texto

O texto conta com 87 figuras que facilitam o acompanhamento das resoluções. Como complemento, os links para os gráficos interativos são disponibilizados em páginas do [GeoGebra](#). Vários problemas contam com apresentação em vídeo disponíveis numa [playlist](#) do YouTube.

A discussão é organizada em seis capítulos: Desigualdade de Ptolomeu, Potência de um ponto; Baricentro ou centroide; Incírculos e Ex-incírculos; Extremos com desigualdades na Geometria; Transformação de Inversão. Inicia-se cada capítulo com uma discussão da teoria associada e depois são resolvidos cinco problemas propostos para olimpíadas internacionais de Matemática. Foi escolhido apresentar alguns desafios, mas sem a pretensão de esgotar o tema.

As soluções apresentadas complementam algumas poucas disponíveis nos fóruns em língua inglesa e nas publicações das competições. Utilizando argumentos menos rebuscados, foca-se na exposição mais detalhada das transições, possibilitando que professores e alunos em níveis menos avançados (porém interessados em olimpíadas) consigam acompanhar o desenvolvimento do problema.

Foram utilizadas as notas das aulas do Programa Olímpico de Treinamento (**POTI**), curso de Geometria, Nível 2, do Prof. Rodrigo Pinheiro [35] e do Prof. Cícero Thiago [40]. Também serviram como referência os livros de Geometria [34] e Geometria Analítica [6] adotados pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (**ProfMat**).

1.6 Publicações do autor

Cada capítulo desta tese corresponde-se com uma publicação:

- Cap. 2. LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F.; BRUNO-ALFONSO, A. Desigualdade de Ptolomeu: cinco problemas resolvidos que foram propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática. **Revista de Matemática de Ouro Preto**, v.2, pp:15-37, abr. 2022 [17].
- Cap. 3. LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A. Cinco problemas sobre Potência de um ponto em relação a uma circunferência e eixo radical em Olimpíadas Internacionais de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru**, v. 20, p. 22–40, jul. 2021 [18].
- Cap. 4. LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F. Baricentro ou centroide: cinco problemas resolvidos das listas da Olimpíada Internacional de Matemática. **Revista de Matemática de Ouro Preto**, v.2, pp:46-69, jul. 2021 [19].
- Cap. 5. LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F. Incírculos e ex-incírculos: cinco problemas resolvidos que foram propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática.

Revista de Matemática de Ouro Preto, v.2, pp:117-139, nov. 2021 [20].

- Cap. 6. LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A. Extremos com desigualdades na Geometria: resolução de cinco problemas propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru**, v. 21, p. 36–51, dez. 2021 [21].
- Cap. 7. LÓPEZ LINARES, J. Transformação de Inversão: resolução de cinco problemas propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática. Aceito para publicação em **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru**, aceito para publicação na edição de julho/2022.

O autor também publicou quatro livros eletrônicos gratuitos dedicados a resolução de 80 problemas de olimpíadas internacionais de Matemática para o Ensino Médio:

1. LÓPEZ LINARES, J. **Soluções detalhadas para 20 problemas da Olimpíada Internacional de Matemática**. Portal de Livros Abertos da USP, 2020 [13].
2. LÓPEZ LINARES, J. **Geometria: Soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática. v.1** Portal de Livros Abertos da USP, 2020 [14].
3. LÓPEZ LINARES, J. **Geometria: Soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática. v.2** Portal de Livros Abertos da USP, 2020 [15].
4. LÓPEZ LINARES, J. **Geometria: Soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática. v.3** Portal de Livros Abertos da USP, 2020 [16].

Os mesmos foram divulgados pelo [Jornal da USP](#).

Cinco livros eletrônicos gratuitos com as notas de aulas da primeira parte do curso **GOG-I-2021** também estão disponíveis:

- LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A. **Geometria Olímpica com GeoGebra v.1**. Portal de Livros Abertos da USP, 2022 [22].
- LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A. **Geometria Olímpica com GeoGebra v.2**. Portal de Livros Abertos da USP, 2022 [23].
- LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A. **Geometria Olímpica com GeoGebra v.3**. Portal de Livros Abertos da USP, 2022 [24].

- LÓPEZ LINARES, J. **Transformação de Inversão: Teoria, Exercícios de Construção Geométrica, Problemas Olímpicos e Aplicações**. Portal de Livros Abertos da USP, 2022 [12].
- LÓPEZ LINARES, J. **Teorema de Pitágoras: Demonstrações Interativas no GeoGebra**. Portal de Livros Abertos da USP, 2022 [11].

Outros trabalhos da área de Matemática do autor aparecem a seguir.

1. DAVID, S.A.; LÓPEZ LINARES, J; PALLONE, E.M.J.A. Fractional order calculus: historical apologia, basic concepts and some applications, **Revista Brasileira de Ensino de Física**, 2011 [4].
2. DAVID, S.; VALENTIM, C.; LÓPEZ LINARES, J. Calculus for Coloring, **Creative Education**, 2013 [5].
3. LÓPEZ LINARES, J. **Problemas resolvidos sobre sequências no treinamento de estudantes do ensino médio para Olimpíadas Internacionais de Matemática**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)-Departamento de Matemática, Universidade Federal de São Carlos, 2019 [25].
4. LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Bases numéricas na Olimpíada Internacional de Matemática. **Professor de Matemática Online (PMO)**, 2019 [26].
5. LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três problemas sobre série harmônica na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, 2020 [27].
6. LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três problemas sobre desigualdades na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, 2020 [28].
7. LÓPEZ LINARES, J. Três problemas sobre partições na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, 2020 [29].
8. LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três Problemas sobre Recorrências na Olimpíada Internacional de Matemática. **Revista MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA EM FOCO**, 2020 [30].
9. LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios de resolução de equações diferenciais com séries de potências**. Portal de Livros Abertos da USP, 2021 [31].

10. LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace**. Portal de Livros Abertos da USP, 2021 [32].
11. JESUS, A. F.; SANTOS, J. P. M.; LÓPEZ LINARES, J. **Capítulo 14: Investigando Fatores Primos com Trincas Pitagóricas**. 2021 [10].
12. SANTOS, J. P. M.; JESUS, A.; LÓPEZ LINARES, J. Retas de Euler e o esquema aditivo RGB: construções dinâmicas no GeoGebra, **Revista do Instituto GeoGebra internacional de São Paulo**, 2021 [37].
13. SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F.; LÓPEZ LINARES, J.; RAMALHO DE FREITAS, M.P.O. Diferentes perspectivas de um problema de otimização: Matemática Dinâmica com GeoGebra, **INTERMATHS**, 2022 [38].

Capítulo 2

Desigualdade de Ptolomeu

2.1 Introdução do Capítulo 2

Cláudio Ptolomeu (85-165 d.C., Alexandria, Egito) publicou o tratado “Almagesto” de treze livros defendendo a teoria geocêntrica do movimento dos planetas, a Lua e o Sol. Esta prevaleceu por mais de 1400 anos, até que Nicolau Copérnico revolucionou a Astronomia com o modelo heliocêntrico em 1543. No livro I do “Almagesto”, Ptolomeu enunciou o teorema que leva seu nome. A partir do mesmo ele conseguiu calcular a função comprimento de corda (análoga a função seno atual) com intervalo de meio grau e cinco casas decimais de precisão [1]. A fórmula do Teorema de Ptolomeu, quando aplicada a um retângulo, transforma-se na fórmula do Teorema de Pitágoras.

O Teorema e a Desigualdade de Ptolomeu raramente são sequer citados para os estudantes de Ensino Médio no Brasil. Porém, seu conhecimento é importante para o sucesso em Olimpíadas. Neste capítulo discutem-se detalhadamente cinco problemas propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO), mas sem a pretensão de esgotar o tema. Inicia-se com uma introdução dos conceitos básicos sobre a igualdade e desigualdade de Ptolomeu.

2.2 Conceitos básicos do Capítulo 2

2.2.1 Teorema de Ptolomeu

Definição 1. *Um quadrilátero é dito inscritível ou cíclico quando seus quatro vértices pertencem a uma mesma circunferência.*

Teorema 1 (Teorema de Ptolomeu). *Em um quadrilátero inscritível $ABCD$ o produto dos comprimentos das diagonais é igual a soma dos produtos dos comprimentos dos lados opostos (Figura 2.1). Isto é, vale*

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC. \quad (2.2.1)$$

A forma recíproca também é verdadeira. Se (2.2.1) for verdade para o quadrilátero convexo $ABCD$, então ele é inscrito.

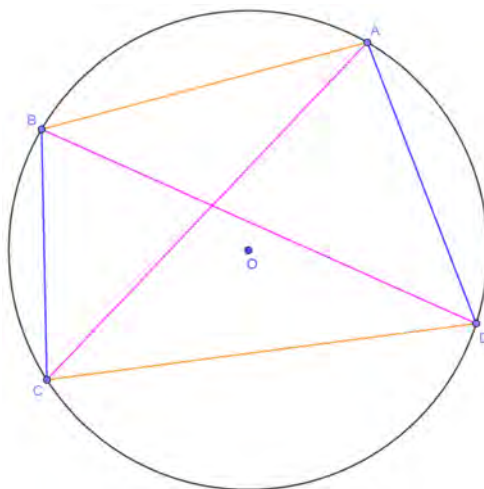


Figura 2.1: Enunciado do Teorema de Ptolomeu. Para um quadrilátero ser inscrito o produto dos comprimentos das diagonais deve ser igual à soma dos produtos dos comprimentos dos lados opostos e vice-versa. Versão interativa [aqui](#).

Demonstração. i) Forma direta do Teorema de Ptolomeu. Suponha-se que $ABCD$ seja um quadrilátero inscrito. Tem-se que $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$. Estende-se a reta CD e coloca-se o ponto $P \in CD$, tal que $\angle BAC = \angle PAD$ (Figura 2.2).

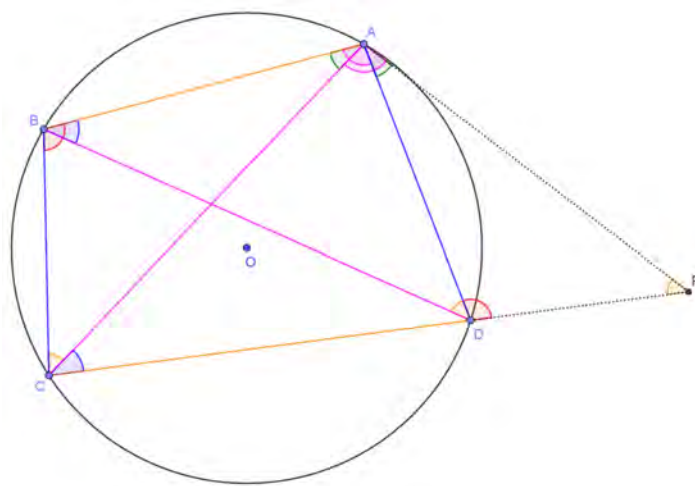


Figura 2.2: Demonstração da forma direta do Teorema de Ptolomeu. Versão interativa [aqui](#).

Como $\angle ADP + \angle ADC = 180^\circ$ segue que $\angle ABC = \angle ADP$. Logo,

$$\triangle ABC \sim \triangle ADP,$$

pelo critério de semelhança ângulo-ângulo. Consequentemente:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DP} = \frac{AC}{AP} \Rightarrow DP = \frac{AD \cdot BC}{AB}. \quad (2.2.2)$$

Adicionalmente, $\angle BAD = \angle PAC$, pois $\angle DAC$ é comum aos dois anteriores, e $\angle ABD = \angle ACD$, devido a "enxergarem", a mesma corda AD . Com isto

$$\triangle ABD \sim \triangle ACP,$$

pelo critério de semelhança ângulo-ângulo. Segue que:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AP} = \frac{BD}{CP} \Rightarrow CP = \frac{AC \cdot BD}{AB}. \quad (2.2.3)$$

De (2.2.2) e (2.2.3) tem-se

$$CP = CD + DP = CD + \frac{AD \cdot BC}{AB} = \frac{AC \cdot BD}{AB}.$$

Multiplicando a última igualdade por AB encontra-se (2.2.1).

ii) Recíproca do Teorema de Ptolomeu. A Figura 2.3 ilustra a construção. Suponha-se que $ABCD$ seja um quadrilátero convexo e vale (2.2.1). Esboça-se um ponto E , no interior de $ABCD$, tal que $\angle EDC = \angle ADB$ e

$$\frac{ED}{DC} = \frac{AD}{DB}. \quad (2.2.4)$$

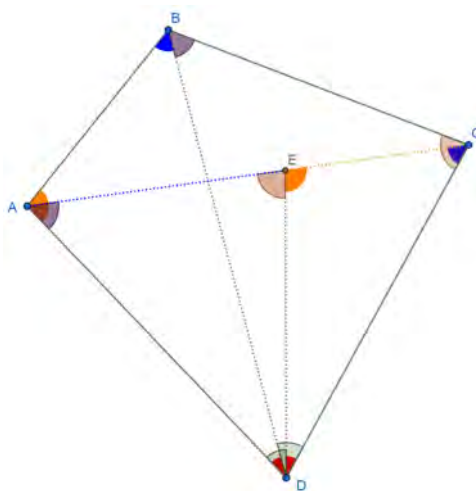


Figura 2.3: Demonstração da recíproca do Teorema de Ptolomeu. Versão interativa [aqui](#).

Como $\angle EDC = \angle ADB$ e, por (2.2.4), os lados correspondentes são proporcionais, pelo

critério de semelhança lado-ângulo-lado, tem-se:

$$\triangle EDC \sim \triangle ADB.$$

Logo, $\angle DAB = \angle DEC$, $\angle ABD = \angle ECD$ e

$$\frac{ED}{AD} = \frac{DC}{DB} = \frac{EC}{AB}. \quad (2.2.5)$$

Nota-se que $\angle BDC = \angle ADE$, pois $\angle EDB$ é comum. Logo, por um par de ângulos congruentes e lados correspondentes proporcionais, (2.2.5), tem-se:

$$\triangle BDC \sim \triangle ADE.$$

Segue que $\angle DAE = \angle DBC$, $\angle AED = \angle BCD$ e

$$\frac{BD}{AD} = \frac{DC}{DE} = \frac{BC}{AE}. \quad (2.2.6)$$

Partindo de (2.2.1) escreve-se:

$$AC = \frac{AD \cdot BC}{BD} + \frac{AB \cdot CD}{BD}.$$

Comparando o lado direito da equação anterior com (2.2.5) e (2.2.6) segue que:

$$AC = AE + EC.$$

Isto é, A, E e C são colineares. Como $\angle ABD = \angle ACD$, conclui-se que o quadrilátero $ABCD$ é cíclico. \square

Corolário 2. *O Teorema de Ptolomeu aplicado em um retângulo $ABCD$ equivale ao Teorema de Pitágoras aplicado nos triângulos retângulos ABC , BCD , CDA e DAB (Figura 2.4).*

Demonstração. Todo retângulo $ABCD$ é inscritível pois a soma dos ângulos opostos é 180° (Figura 2.4). Pelo Teorema de Ptolomeu vale:

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD.$$

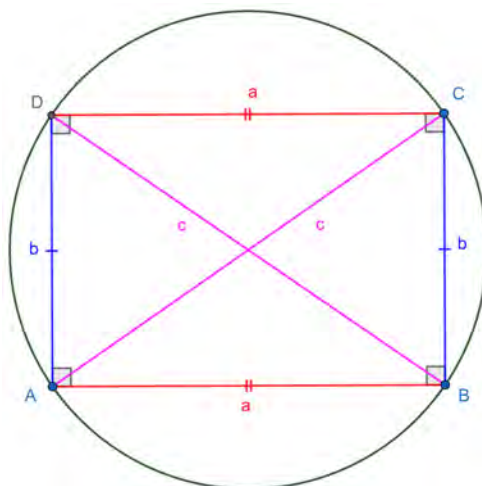


Figura 2.4: Teorema de Ptolomeu no retângulo $ABCD$. Versão interativa [aqui](#).

Mas num retângulo $ABCD$ os lados opostos e as diagonais são congruentes entre si. Isto é, $AB = CD = a$, $BC = DA = b$ e $AC = BD = c$. Segue a fórmula do Teorema de Pitágoras relativa aos triângulos retângulos ABC , BCD , CDA e DAB :

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

□

2.2.2 Desigualdade de Ptolomeu

A Desigualdade de Ptolomeu generaliza o resultado anterior.

Teorema 3 (Desigualdade de Ptolomeu). *Se $ABCD$ é um quadrilátero convexo (não necessariamente inscritível) o produto dos comprimentos das diagonais é menor ou igual a soma dos produtos dos comprimentos dos lados opostos. Isto é, vale:*

$$AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + BC \cdot AD. \quad (2.2.7)$$

Ocorre a igualdade se, e somente se, $ABCD$ é um quadrilátero inscritível, conforme o Teorema 1 (Ptolomeu).

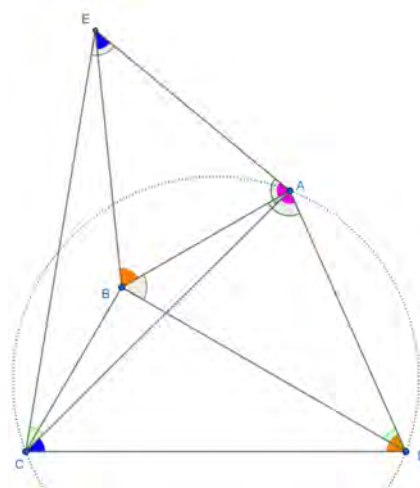


Figura 2.5: Construção geométrica para auxiliar na demonstração da Desigualdade de Ptolomeu. Versão interativa [aqui](#).

Demonstração. A Figura 2.5 permite acompanhar a explicação. Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo (não necessariamente inscrito), com diagonais AC e BD .

Inicia-se construindo um ponto E tal que $\angle ADC = \angle ABE$ e $\angle ACD = \angle AEB$. Pelo critério de semelhança ângulo-ângulo segue que $\triangle ACD \sim \triangle AEB$. Com o qual resulta na proporcionalidade dos lados:

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AB}{AD} = \frac{EB}{CD}. \quad (2.2.8)$$

Da segunda igualdade em (2.2.8) encontra-se:

$$EB = \frac{AB \cdot CD}{AD}. \quad (2.2.9)$$

Por outro lado, tem-se que $\angle BAD = \angle EAC$. Adicionalmente, da primeira igualdade em (2.2.8) segue que:

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AE}. \quad (2.2.10)$$

Pelo critério de semelhança lado-ângulo-lado pode-se afirmar que:

$$\triangle BAD \sim \triangle EAC.$$

Segue que $\angle AEC = \angle ABD$ e $\angle ACE = \angle ADB$. Adicionalmente, além de (2.2.10), ganha-se outra proporcionalidade de lados:

$$\frac{AD}{AC} = \frac{BD}{EC}. \quad (2.2.11)$$

De (2.2.11) segue que:

$$EC = \frac{AC \cdot BD}{AD}. \quad (2.2.12)$$

A seguir foca-se no triângulo EBC . Utilizando a Desigualdade Triangular tem-se:

$$EC \leq EB + BC. \quad (2.2.13)$$

Substituindo (2.2.12) e (2.2.9) em (2.2.13) encontra-se:

$$\frac{AC \cdot BD}{AD} \leq \frac{AB \cdot CD}{AD} + BC. \quad (2.2.14)$$

Multiplicando (2.2.14) por AD concluí-se a validade de (2.2.7).

A igualdade ocorre se, e somente se, $EC = EB + BC$. Ou seja, E , B e C são colineares. Isso equivale ao quadrilátero $ABCD$ ser inscritível. \square

A desigualdade também é válida se o quadrilátero não é convexo [1]. Uma verificação numérica no site do GeoGebra pode ser vista [aqui](#). Outra demonstração da Desigualdade de Ptolomeu encontra-se, por exemplo, em [34].

2.3 Problemas do Capítulo 2

2.3.1 Teorema de Ptolomeu. Arco Capaz. Triângulo Equilátero. P5 IMO 1995.

Problema 1. *Seja $ABCDEF$ um hexágono convexo com:*

$$AB = BC = CD,$$

$$DE = EF = FA,$$

$$\angle BCD = \angle EFA = \pi/3.$$

Sejam G e H dois pontos no interior do hexágono, tais que os ângulos AGB e DHE são ambos $2\pi/3$. Provar que:

$$AG + GB + GH + DH + HE \geq CF.$$

A IMO 1995 foi realizada na cidade de Toronto, Canada. O problema acima foi proposto por A. McNaughton da delegação da Nova Zelândia, P11 da lista curta (SL) e escolhido como o quinto da competição [7].

2.3.1.1 Resolução do Problema 1.

A Figura 2.6 mostra uma construção geométrica. Os triângulos BCD e EFA são equiláteros pelas hipóteses do problema. Para poder "encaixar" a parte superior ($ABCD$, em azul)

com a parte inferior ($DEFA$, em vermelho) a linha BE deve ser a mediatriz dos pontos A e D . Isto é, os triângulos ABD e AED são isósceles de base AD . Para localizar as posições dos pontos G e H deve ser feita a construção do **Arco Capaz** (parte das circunferências c e f no interior do hexágono) sobre os segmentos AB e DE , respectivamente.

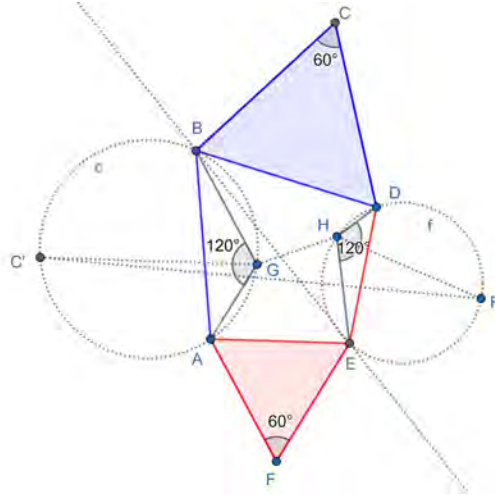


Figura 2.6: Uma construção geométrica para o Problema 1. Versão interativa [aqui](#).

Para resolver o problema são construídos os pontos C' e F' , simétricos de C e F em relação a reta BE , respectivamente. Nota-se que $CF = C'F'$.

Pela simetria em relação a linha BE os triângulos ABC' e DEF' são equiláteros. Segue que os ângulos $BC'A$ e $DF'E$ medem 60° , com o qual os quadriláteros $AGBC'$ e $DHEF'$ são inscritíveis ($\angle AGB + \angle BC'A = 180^\circ$ e $\angle DHE + \angle EF'D = 180^\circ$).

Utilizando o Teorema 1 (Ptolomeu) no quadrilátero inscritível $AGBC'$ tem-se:

$$AG \cdot BC' + BG \cdot AC' = GC' \cdot AB.$$

Como $BC' = AC' = AB$ segue:

$$AG + BG = GC'. \quad (2.3.1)$$

Analogamente, utilizando o Teorema 1 (Ptolomeu) no quadrilátero inscritível $DHEF'$ tem-se:

$$HE \cdot DF' + HD \cdot EF' = HF' \cdot DE.$$

Como $DF' = EF' = DE$ segue:

$$HE + HD = HF'. \quad (2.3.2)$$

Somando (2.3.1) e (2.3.2) encontra-se:

$$AG + BG + HE + HD = GC' + HF'.$$

Adicionando GH nos dois lados da equação anterior tem-se:

$$AG + BG + GH + HE + HD = GC' + GH + HF'. \quad (2.3.3)$$

Pela Desigualdade Triangular aplicada nos triângulos HGC' e $HC'F'$ segue que:

$$(GC' + GH) + HF' \geq HC' + HF' \geq C'F' = CF. \quad (2.3.4)$$

A igualdade acontece quando os pontos G e H pertencem ao segmento $C'F'$.

De (2.3.3) e (2.3.4) encontra-se o que queria-se demonstrar:

$$AG + BG + GH + HE + HD \geq CF. \quad (2.3.5)$$

Pela Desigualdade de Ptolomeu (Teorema 3) pode ser eliminada a restrição dos ângulos AGB e DHE serem 120° . Neste caso, os quadriláteros $AGBC'$ e $DHEF'$ não serão necessariamente inscritíveis nem convexos. As igualdades (2.3.1) e (2.3.2) devem ser substituídas por:

$$AG + BG \geq GC',$$

$$HE + HD \geq HF'.$$

Repetindo o raciocínio feito anteriormente a desigualdade (2.3.5) continuará sendo válida.

2.3.2 Desigualdade de Ptolomeu. Desigualdade das médias aritmética e harmônica. P7 SL IMO 1997.

Problema 2. *Seja $ABCDEF$ um hexágono convexo tal que $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$. Provar que:*

$$\frac{BC}{BE} + \frac{DE}{DA} + \frac{FA}{FC} \geq \frac{3}{2}.$$

Quando acontece a igualdade?

A IMO 1997 foi realizada na cidade de Mar del Plata, Argentina. O problema acima foi proposto por Valentina Kirichenko da delegação da Rússia, P7 da SL [7].

2.3.2.1 Resolução do Problema 2.

A Figura 2.7 mostra uma construção geométrica. Para facilitar a interpretação também foram construídos os segmentos $AC = a$, $CE = b$ e $AE = c$.

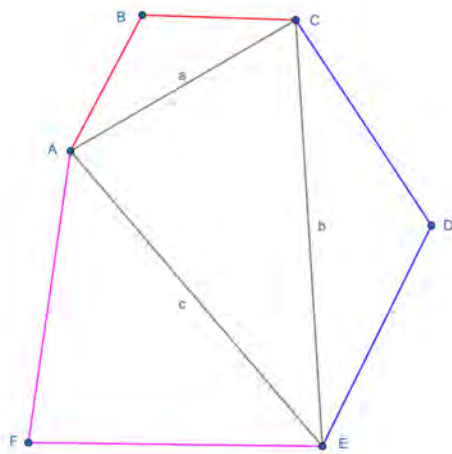


Figura 2.7: Uma construção geométrica para o Problema 2. Versão interativa [aqui](#).

Inicia-se aplicando a Desigualdade de Ptolomeu (Teorema 3) ao quadrilátero $ACEF$:

$$AC \cdot EF + FA \cdot CE \geq AE \cdot FC.$$

Como $FA = EF$ segue que:

$$\frac{FA}{FC} \geq \frac{c}{a+b}. \quad (2.3.6)$$

Analogamente, aplicando a Desigualdade de Ptolomeu (Teorema 3) no quadrilátero $AEDC$ tem-se:

$$AE \cdot CD + AC \cdot DE \geq DA \cdot CE.$$

Mas $CD = DE$, logo

$$\frac{DE}{DA} \geq \frac{b}{a+c}. \quad (2.3.7)$$

Mais uma vez, aplicando a Desigualdade de Ptolomeu (Teorema 3) no quadrilátero $ABCE$ segue:

$$AB \cdot CE + AE \cdot BC \geq AC \cdot BE.$$

Com $AB = BC$, encontra-se:

$$\frac{BC}{BE} \geq \frac{a}{b+c}. \quad (2.3.8)$$

Somando (2.3.6), (2.3.7) e (2.3.8) tem-se:

$$\frac{BC}{BE} + \frac{DE}{DA} + \frac{FA}{FC} \geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}.$$

Para resolver o problema basta provar a Desigualdade de Nesbitt:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}. \quad (2.3.9)$$

Sejam

$$x = b + c, \quad (2.3.10)$$

$$y = a + c, \quad (2.3.11)$$

$$z = a + b, \quad (2.3.12)$$

$$p = a + b + c. \quad (2.3.13)$$

Das quatro equações anteriores pode-se escrever a , b e c como função de x , y , z e p :

$$a = p - x, \quad (2.3.14)$$

$$b = p - y, \quad (2.3.15)$$

$$c = p - z. \quad (2.3.16)$$

Substituindo (2.3.10), (2.3.11), (2.3.12), (2.3.14), (2.3.15) e (2.3.16) em (2.3.9) encontra-se que (2.3.9) equivale a:

$$p \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - 3 \geq \frac{3}{2}.$$

E após algumas manipulações fica-se com a desigualdade:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{2p}. \quad (2.3.17)$$

Da soma de (2.3.10), (2.3.11), (2.3.12) e da definição de p em (2.3.13) tem-se que o valor $2p$ pode ser escrito como:

$$2p = x + y + z. \quad (2.3.18)$$

Substituindo (2.3.18) em (2.3.17) e reagrupando conclui-se que (2.3.17) é equivalente a:

$$M.A. \{x, y, z\} = \frac{x + y + z}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} = M.H. \{x, y, z\}. \quad (2.3.19)$$

Em (2.3.19) reconhece-se a desigualdade (verdadeira) entre as médias aritmética (M.A.) e harmônica (M.H.) do conjunto de valores positivos $\{x, y, z\}$.

A igualdade em (2.3.6), (2.3.7) e (2.3.8) acontece, pelo Teorema 1 (Ptolomeu), quando os quadriláteros $ACEF$, $AEDC$ e $ABCE$ são inscritíveis. Da igualdade em (2.3.9) segue que $a = b = c$, isto equivale a $x = y = z$ (igualdade na [Desigualdade das Médias](#)). Neste caso o

hexágono é regular.

2.3.3 Teorema de Ptolomeu. Conjugados Isogonais. Semelhança de triângulos. P4 SL IMO 1998.

Problema 3. *Sejam M e N pontos no interior do $\triangle ABC$, tais que $\angle MAB = \angle NAC$ e $\angle MBA = \angle NBC$. Provar que:*

$$\frac{AM \cdot AN}{AB \cdot AC} + \frac{BM \cdot BN}{BA \cdot BC} + \frac{CM \cdot CN}{CA \cdot CB} = 1.$$

A IMO 1998 foi realizada na cidade de Taipé, Taiwan. O problema acima foi proposto pela delegação da Armênia, P4 da lista curta [7].

2.3.3.1 Resolução do Problema 3.

A Figura 2.8 mostra uma construção geométrica inicial.

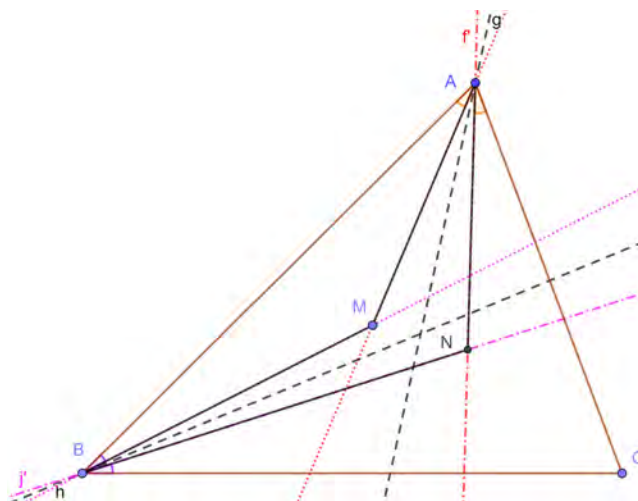


Figura 2.8: Uma construção geométrica inicial para o Problema 3. Versão interativa [aqui](#).

Devido as igualdades $\angle MAB = \angle NAC$ e $\angle MBA = \angle NBC$, os pontos M e N são **conjugados isogonais**. Pelo Teorema Fundamental dos Conjugados Isogonais também é válido que $\angle MCB = \angle NCA$.

Para a construção posiciona-se um ponto M no interior do $\triangle ABC$. Traçam-se as retas AM , BM e as bissetrizes g e h dos ângulos CAB e ABC , respectivamente. A seguir encontra-se a reflexão f' da reta AM relativo a g e a reflexão j' da reta BM relativo a h . Marca-se o ponto $N = f' \cap j'$.

Seja um ponto $K \in BN$ tal que $\angle BCK = \angle BMA$ (Figura 2.9). Como $\angle KBC = \angle ABM$, tem-se $\triangle BCK \sim \triangle BMA$. Segue que $\angle BKC = \angle BAM$ e

$$\frac{BC}{BM} = \frac{BK}{BA} = \frac{CK}{MA}. \quad (2.3.20)$$

Da primeira igualdade em (2.3.20) e $\angle MBC = \angle ABK$, pelo critério de semelhança lado-ângulo-lado, segue que $\triangle MBC \sim \triangle ABK$. Logo, $\angle MCB = \angle AKB$, $\angle BMC = \angle BAK$ e

$$\frac{MB}{AB} = \frac{MC}{AK} = \frac{BC}{BK}. \quad (2.3.21)$$

Como $\angle NKC = \angle BKC = \angle BAM = \angle NAC$, então o quadrilátero $ANCK$ é inscritível. Aplicando o Teorema 1 (Ptolomeu) tem-se:

$$AC \cdot NK = AC \cdot (BK - BN) = AN \cdot CK + CN \cdot AK,$$

$$AC \cdot BK = AC \cdot BN + AN \cdot CK + CN \cdot AK. \quad (2.3.22)$$

De (2.3.20) e (2.3.21) encontra-se:

$$\begin{cases} AK = \frac{AB \cdot CM}{BM} \\ BK = \frac{AB \cdot BC}{BM} \\ CK = \frac{AM \cdot BC}{BM} \end{cases}.$$

Substituindo os resultados anteriores para AK , BK e CK em (2.3.22) tem-se:

$$\frac{AC \cdot AB \cdot BC}{BM} = AC \cdot BN + \frac{AN \cdot AM \cdot BC}{BM} + \frac{CN \cdot AB \cdot CM}{BM}. \quad (2.3.23)$$

Multiplicando (2.3.23) por $\frac{BM}{AB \cdot BC \cdot CA}$ chega-se a:

$$1 = \frac{BM \cdot BN}{BA \cdot BC} + \frac{AM \cdot AN}{AB \cdot AC} + \frac{CM \cdot CN}{CA \cdot CB}.$$

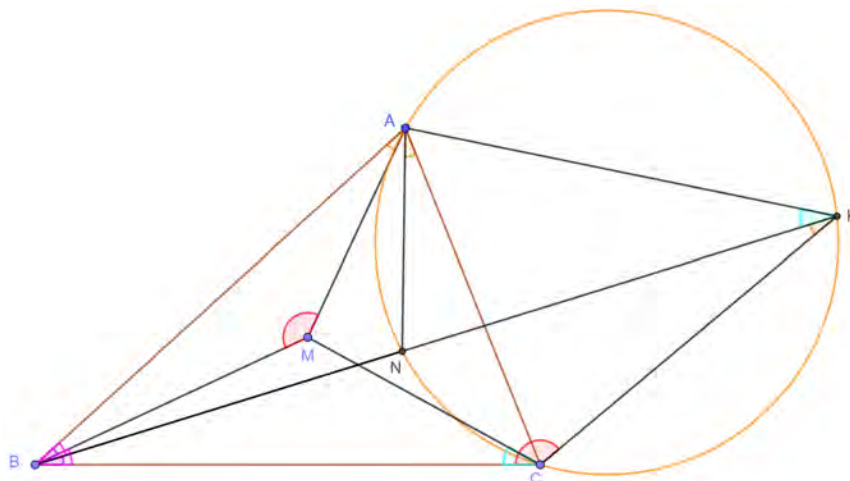


Figura 2.9: Uma construção geométrica para o Problema 3. Versão interativa [aqui](#).

2.3.4 Polígono inscritível. Teorema de Ptolomeu. P4 da SL da IMO 2000.

Problema 4. *Seja $A_1A_2\dots A_n$ um polígono convexo com $n \geq 4$. Provar que $A_1A_2\dots A_n$ é inscritível por uma circunferência se, e somente se, a cada vértice A_j pode ser associado um par de números reais (b_j, c_j) , $j = 1, 2, \dots, n$, tais que*

$$A_iA_j = b_jc_i - b_ic_j, \tag{2.3.24}$$

para todo i, j com $1 \leq i < j \leq n$. A_iA_j é a distância entre os pontos A_i e A_j .

A IMO 2000 foi realizada na cidade Daejeon, Coreia do Sul. Problema proposto pela delegação da Rússia, P4 da lista curta [7].

2.3.4.1 Resolução do Problema 4.

Primeiro, suponha-se que a cada vértice A_j pode ser associado um par de números reais (b_j, c_j) , $j = 1, 2, \dots, n$, tal que $A_iA_j = b_jc_i - b_ic_j$ para todo i, j , com $1 \leq i < j \leq n$.

Para provar que o polígono $A_1A_2\dots A_n$ é inscritível basta provar que os quadriláteros $A_1A_2A_3A_i$, com $4 \leq i \leq n$, são inscritíveis. Ou, pela forma recíproca do Teorema 1 (Ptolomeu), que:

$$A_1A_3 \cdot A_2A_i = A_1A_i \cdot A_2A_3 + A_1A_2 \cdot A_3A_i. \tag{2.3.25}$$

Nota-se, de (2.3.24), que:

$$A_1A_3 = b_3c_1 - b_1c_3,$$

$$A_2A_i = b_ic_2 - b_2c_i,$$

$$A_1A_i = b_i c_1 - b_1 c_i,$$

$$A_2A_3 = b_3 c_2 - b_2 c_3,$$

$$A_1A_2 = b_2 c_1 - b_1 c_2,$$

$$A_3A_i = b_i c_3 - b_3 c_i.$$

Substituindo-se as seis equações anteriores em (2.3.25)

$$(b_3 c_1 - b_1 c_3) \cdot (b_i c_2 - b_2 c_i) = (b_i c_1 - b_1 c_i) \cdot (b_3 c_2 - b_2 c_3) + (b_2 c_1 - b_1 c_2) \cdot (b_i c_3 - b_3 c_i),$$

$$b_3 c_1 b_i c_2 - b_3 c_1 b_2 c_i - b_1 c_3 b_i c_2 + b_1 c_3 b_2 c_i = b_i c_1 b_3 c_2 - b_i c_1 b_2 c_3 - b_1 c_i b_3 c_2 + b_1 c_i b_2 c_3 + \\ + b_2 c_1 b_i c_3 - b_2 c_1 b_3 c_i - b_1 c_2 b_i c_3 + b_1 c_2 b_3 c_i,$$

$$b_3 b_i c_1 c_2 - b_2 b_3 c_1 c_i - b_1 b_i c_2 c_3 + b_1 b_2 c_3 c_i = b_3 b_i c_1 c_2 - \cancel{b_2 b_i c_1 c_3} - \cancel{b_1 b_3 c_2 c_i} + b_1 b_2 c_3 c_i + \\ + \cancel{b_2 b_i c_1 c_3} - b_2 b_3 c_1 c_i - b_1 b_i c_2 c_3 + \cancel{b_1 b_3 c_2 c_i},$$

verifica-se a igualdade.

Segundo, suponha-se que $A_1A_2\dots A_n$ seja inscrito. Logo, os quadriláteros $A_1A_2A_iA_j$ com $3 \leq i < j \leq n$ são inscritíveis. Pela forma direta do Teorema 1 (Ptolomeu) vale que:

$$A_1A_i \cdot A_2A_j = A_1A_j \cdot A_2A_i + A_1A_2 \cdot A_iA_j.$$

Segue que:

$$A_iA_j = A_2A_j \cdot \frac{A_1A_i}{A_1A_2} - A_2A_i \cdot \frac{A_1A_j}{A_1A_2}.$$

A equação anterior sugere que basta utilizar:

$$b_i = \begin{cases} -A_1A_2, & \text{se } i = 1 \\ A_2A_i, & \text{se } 2 \leq i \leq n \end{cases},$$

$$c_i = \frac{A_1A_i}{A_1A_2}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Fazendo isto, segue que para todo i, j , com $1 \leq i < j \leq n$,

$$A_iA_j = b_j c_i - b_i c_j.$$

Isso conclui a prova do problema.

Como exemplo da segunda parte nota-se que a associação de pares para os quatro primeiros pontos de um Polígono inscrito seria da forma:

$$A_1 \rightarrow (-A_1A_2, 0),$$

$$\begin{aligned} A_2 &\rightarrow (0, 1), \\ A_3 &\rightarrow \left(A_2 A_3, \frac{A_1 A_3}{A_1 A_2}\right), \\ A_4 &\rightarrow \left(A_2 A_4, \frac{A_1 A_4}{A_1 A_2}\right). \end{aligned}$$

Este problema faz lembrar a definição do operador Rotacional do Cálculo Vetorial. Seja o campo vetorial $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que:

$$\vec{F}(x, y, z) = (F_x(x, y, z), F_y(x, y, z), F_z(x, y, z)).$$

Seja ainda o operador $\vec{\nabla}$ formalmente representado como um vetor de derivadas parciais:

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right).$$

O Rotacional $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ é um campo vetorial calculado como:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial y} F_z - \frac{\partial}{\partial z} F_y, \frac{\partial}{\partial z} F_x - \frac{\partial}{\partial x} F_z, \frac{\partial}{\partial x} F_y - \frac{\partial}{\partial y} F_x\right).$$

Isto é, cada uma das componentes do Rotacional é da forma:

$$\frac{\partial}{\partial j} F_i - \frac{\partial}{\partial i} F_j,$$

com $i, j \in \{x, y, z\}$ e $i \neq j$. Ou seja, uma fórmula que lembra a (2.3.24).

2.3.5 Desigualdades de Ptolomeu e Triangular. Baricentro. Relação de Stewart. P17 SL IMO 2001.

Problema 5. Denotar o ponto G , centroide do $\triangle ABC$. Determinar a posição de um ponto P tal que

$$AP \cdot AG + BP \cdot BG + CP \cdot CG \tag{2.3.26}$$

seja mínimo. Expressar este mínimo em função dos comprimentos dos lados do triângulo ABC .

A IMO 2001 foi realizada na cidade de Washington, EUA. O problema acima foi proposto pela delegação do Reino Unido, P17 da lista curta [7].

2.3.5.1 Resolução do Problema 5.

A Figura 2.10 mostra uma construção geométrica inicial.

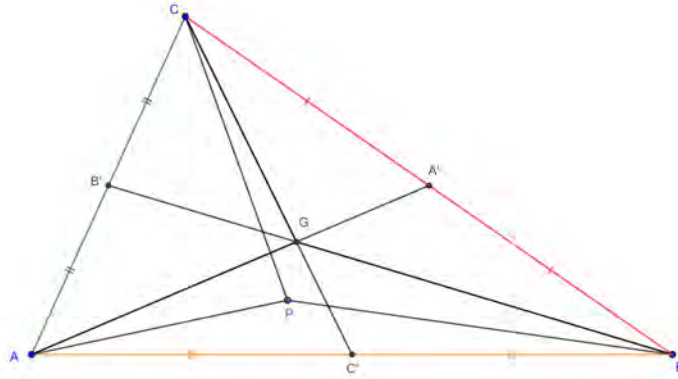


Figura 2.10: Uma construção geométrica inicial para o Problema 5. Versão interativa [aqui](#). Observe que ao mover o ponto P para diferentes posições somos levados a conjecturar que o mínimo ocorre quando $P = G$.

Sejam C' , B' e A' os pontos médios dos segmentos $AB = c$, $BC = a$ e $CA = b$, respectivamente. Considera-se a circunferência k circunscrita ao $\triangle BCG$ e o ponto F a segunda interseção da reta AG com k (Figura 2.11). Como o quadrilátero $BFCG$ é inscritível têm-se:

$$\angle BFC = \angle BGC' = \alpha,$$

$$\angle FBC = \angle FGC = \angle C'GA = \beta.$$

Pela Lei dos Senos aplicada no $\triangle BCF$ segue:

$$\frac{BC}{CF} = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\text{sen}(\beta)}. \tag{2.3.27}$$

Seja $\angle GC'B = \gamma$. Pela Lei dos Senos aplicada nos $\triangle GC'B$ e $\triangle GC'A$ encontram-se:

$$\frac{BC'}{BG} = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\text{sen}(\gamma)}, \tag{2.3.28}$$

$$\frac{AC'}{AG} = \frac{\text{sen}(\beta)}{\text{sen}(180^\circ - \gamma)} = \frac{\text{sen}(\beta)}{\text{sen}(\gamma)}. \tag{2.3.29}$$

Como $AC' = BC'$, dividindo (2.3.28) por (2.3.29) resulta em:

$$\frac{AG}{BG} = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\text{sen}(\beta)}. \tag{2.3.30}$$

Logo, da comparação de (2.3.27) e (2.3.30) chega-se a:

$$\frac{BC}{CF} = \frac{AG}{BG}. \tag{2.3.31}$$

Analogamente, mostra-se que:

$$\frac{BC}{BF} = \frac{AG}{CG}. \quad (2.3.32)$$

Reescrevem-se os dois últimos somandos de (2.3.26) utilizando (2.3.31) e (2.3.32):

$$\begin{aligned} BP \cdot BG + CP \cdot CG &= BP \cdot \frac{CF \cdot AG}{BC} + CP \cdot \frac{BF \cdot AG}{BC}, \\ BP \cdot BG + CP \cdot CG &= \frac{AG}{BC}(BP \cdot CF + CP \cdot BF). \end{aligned} \quad (2.3.33)$$

Aplica-se a Desigualdade de Ptolomeu (Teorema 3) ao quadrilátero $PBFC$:

$$BP \cdot CF + CP \cdot BF \geq PF \cdot BC. \quad (2.3.34)$$

Vale a igualdade quando $PBFC$ é inscritível.

De (2.3.33) e (2.3.34) segue:

$$BP \cdot BG + CP \cdot CG \geq \frac{AG}{BC}(PF \cdot BC) = AG \cdot PF. \quad (2.3.35)$$

Para recuperar (2.3.26) adiciona-se $AP \cdot AG$ nos dois lados de (2.3.35):

$$AP \cdot AG + BP \cdot BG + CP \cdot CG \geq AP \cdot AG + AG \cdot PF = AG(AP + PF). \quad (2.3.36)$$

Pela Desigualdade Triangular aplicada no $\triangle APF$ tem-se:

$$AP + PF \geq AF. \quad (2.3.37)$$

Vale a igualdade quando $P \in AF$.

De (2.3.36) e (2.3.37) segue:

$$AP \cdot AG + BP \cdot BG + CP \cdot CG \geq AG \cdot AF. \quad (2.3.38)$$

A utilização das duas desigualdades (Ptolomeu e Triangular) leva a concluir que o mínimo de (2.3.26) acontece quando $P = G$. Isto é, (2.3.38) pode ser escrito como:

$$AP \cdot AG + BP \cdot BG + CP \cdot CG \geq AG^2 + BG^2 + CG^2.$$

O anterior implica que

$$(AP - AG)^2 + (BP - BG)^2 + (CP - CG)^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AP^2 + BP^2 + CP^2 \geq 2(AP \cdot AG + BP \cdot BG + CP \cdot CG) - (AG^2 + BG^2 + CG^2) \geq AG^2 + BG^2 + CG^2,$$

de onde segue que o Baricentro é o ponto que minimiza a soma dos quadrados das distâncias aos vértices.

Com o auxílio da [Relação de Stewart](#) calcula-se o quadrado da mediana AA' :

$$AA'^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}. \quad (2.3.39)$$

De (2.3.39) e $AG = \frac{2}{3}AA'$, então:

$$AG^2 = \frac{2}{9}(b^2 + c^2) - \frac{a^2}{9}. \quad (2.3.40)$$

Analogamente, vale que:

$$BG^2 = \frac{2}{9}(a^2 + c^2) - \frac{b^2}{9}, \quad (2.3.41)$$

$$CG^2 = \frac{2}{9}(a^2 + b^2) - \frac{c^2}{9}. \quad (2.3.42)$$

Somando (2.3.40), (2.3.41) e (2.3.42) encontra-se:

$$AG^2 + BG^2 + CG^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}.$$

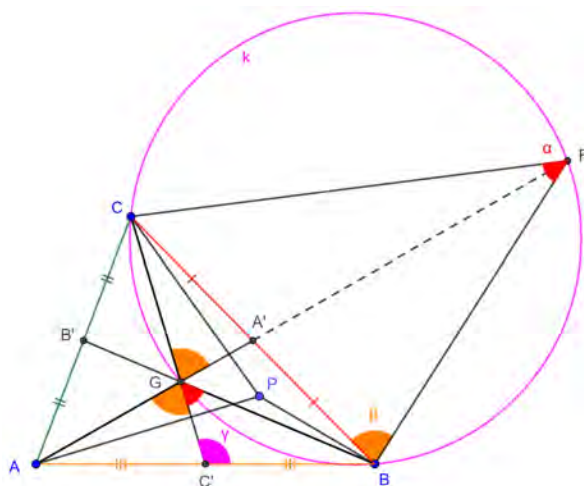


Figura 2.11: Uma construção geométrica para o Problema 5. Versão interativa [aqui](#).

Capítulo 3

Potência de um ponto

3.1 Introdução do Capítulo 3

No Problema 6 (P4-SL-IMO-1971) são dadas duas circunferências tangentes externamente e uma reta que intercepta cada uma delas em dois pontos formando três segmentos de igual medida. É pedido encontrar o comprimento comum dos segmentos e sob quais restrições essa construção é possível.

O Problema 7 (P15-SL-IMO-1994) apresenta três circunferências tangentes externamente entre si e a duas linhas paralelas. É pedido mostrar que o Circuncentro do triângulo formado pelos pontos de tangências das circunferências entre si coincide com a interseção de dois segmentos da construção.

No Problema 8 (P5-IMO-2012) é dado um triângulo retângulo e um ponto X na altura correspondente ao ângulo reto. Várias construções são feitas a partir de X . Pede-se demonstrar que dois segmentos tem igual medida. Uma das chaves para a solução é perceber que X é o Centro Radical de três circunferências.

O Problema 9 (P4-NA-IGO-2014-5) utiliza a igualdade de um ângulo inscrito com um de segmento para provar que determinada reta é tangente a uma circunferência. A solução envolve descobrir duas circunferências e dois Centros Radicais.

No Problema 10 (P7-NA-IGO-2014-5) um triângulo acutângulo e uma circunferência são dados. Um conjunto adicional de construções são feitas e pede-se mostrar a congruência de dois ângulos. Durante a solução outras duas circunferências são encontradas e o Centro Radical das mesmas.

Inicia-se com uma introdução dos conceitos básicos sobre a Potência de um ponto relativo a uma circunferência, o Teorema das Cordas e a teoria de Eixo e Centro Radical.

3.2 Experimento com um Não invariante

Considera-se uma elipse k (diferente de circunferência), um ponto $E \in k$ e um ponto $P \notin k$. Seja o ponto F a segunda interseção da reta PE com k . A versão interativa da Figura 3.1 mostra que o produto $PE \cdot PF$ não é um invariante quando o ponto E movimenta-se pela elipse.

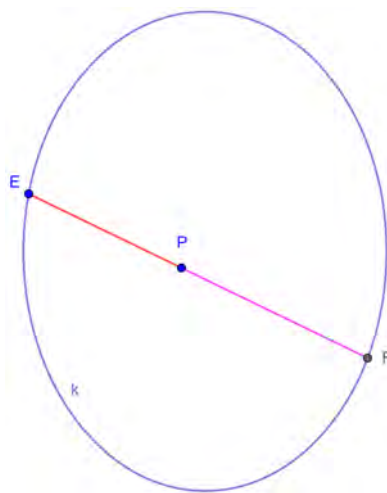


Figura 3.1: O produto $PE \cdot PF$ não é um invariante quando o ponto E movimenta-se pela elipse. Versão interativa [aqui](#).

3.3 Experimento com um invariante

Considera-se uma circunferência c , um ponto $A \in c$ e um ponto P . Seja o ponto B a segunda interseção da reta PA com c . A versão interativa da Figura 3.2 mostra que o produto $PA \cdot PB$ é um invariante quando o ponto A movimenta-se pela circunferência.

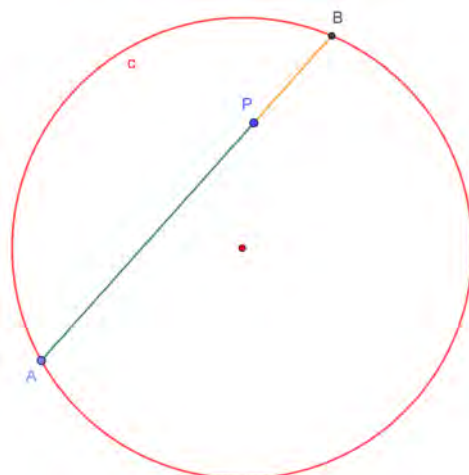


Figura 3.2: O produto $PA \cdot PB$ é um invariante quando o ponto A movimenta-se pela circunferência. Versão interativa [aqui](#).

3.4 Experimento com um invariante e dois pontos

Considera-se uma circunferência c de raio r e centro O , dois pontos $A, A' \in c$ e um ponto P a uma distância d de O . Sejam os pontos B, B' as segundas interseções das retas PA e PA' com c . A versão interativa da Figura 3.3 mostra que:

$$PA \cdot PB = PA' \cdot PB' = |d^2 - r^2|.$$

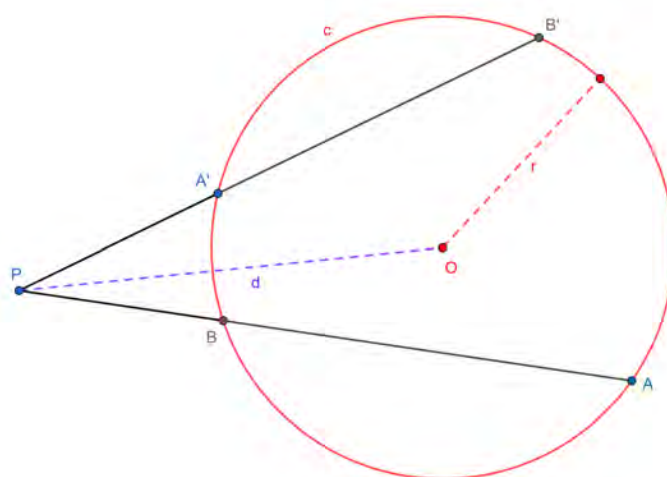


Figura 3.3: Verificação da igualdade $PA \cdot PB = PA' \cdot PB' = |d^2 - r^2|$. Versão interativa [aqui](#).

3.5 Potência de um ponto relativo a uma circunferência

Dado um ponto P , uma circunferência c e uma reta que passa por P e intersecta c nos pontos A e B (corda AB) o produto $PA \cdot PB$ é invariante quando A e B variam. Esse resultado é conhecido como Teorema das Cordas e será apresentado formalmente nas próximas linhas. Mas antes define-se a Potência de um ponto relativo a uma circunferência.

Definição 2 (Potência de um ponto relativo a uma circunferência). *Seja c uma circunferência de raio r e um ponto P no mesmo plano a uma distância d do centro de c . A Potência do ponto P , relativo a c , será denotada como $Pot_c(P)$ e calculada por $Pot_c(P) = d^2 - r^2$.*

Segue da Definição 2 que, se P é um ponto no exterior de c , então $Pot_c(P) > 0$. No caso em que $P \in c$, tem-se $Pot_c(P) = 0$ e quando P é um ponto interior a c vale $-r^2 \leq Pot_c(P) < 0$.

Teorema 4 (Teorema das Cordas). *Sejam A, B, C, D e P (K, L, M, N e J) pontos do plano tais que $AB \cap CD = \{P\}$ ($KM \cap LN = \{J\}$). O quadrilátero $ABCD$ ($KLMN$) é inscrito se, e somente se, $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ ($JK \cdot JM = JL \cdot JN$).*

A Figura 3.4 ilustra duas construções geométricas possíveis relativas ao Teorema 4. No lado esquerdo, quando o ponto P é exterior a circunferência c e o direito, quando o ponto J é interior a circunferência e .

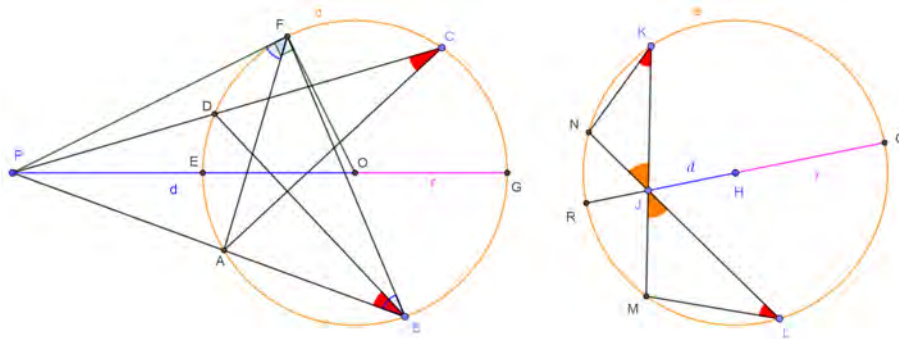


Figura 3.4: O lado esquerdo ilustra o caso em que P é um ponto exterior a circunferência c , $r = OG$ e $d = PO$. O lado direito, quando o ponto J é interior a circunferência e , $r = HQ$ e $d = JH$. O ponto $F \in c$ é de tangência e ilustra o caso particular em que C e D aproximam-se a ele. Versão interativa [aqui](#).

Demonstração. Suponha-se, inicialmente, que o quadrilátero $ABCD$ ($KLMN$) é inscrito. Os ângulos ACD e ABD (MKN e MLN) são congruentes, pois enxergam o mesmo arco menor AD (MN). No lado esquerdo, tem-se $\angle CPA = \angle BPD$ (comum) e no lado direito $\angle KJN = \angle LJM$ (opostos pelo vértice). Conseqüentemente, por AA, segue $\triangle PAC \sim \triangle PDB$ ($\triangle KJN \sim \triangle LJM$).

Os lados correspondentes em triângulo semelhantes são proporcionais:

$$\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB} = \frac{AC}{DB},$$

$$\frac{JK}{JL} = \frac{JN}{JM} = \frac{KN}{LM}.$$

Das equações anteriores encontra-se:

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD, \quad (3.5.1)$$

$$JK \cdot JM = JL \cdot JN. \quad (3.5.2)$$

Reciprocamente, suponha-se que valem (3.5.1) e (3.5.2). Segue que:

$$\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB},$$

$$\frac{JK}{JL} = \frac{JN}{JM}.$$

Adicionalmente, no lado esquerdo da Figura 3.4 tem-se $\angle CPA = \angle BPD$ (comum) e no lado direito $\angle KJN = \angle LJM$ (opostos pelo vértice). Pelo critério de semelhança lado-ângulo-lado segue que $\triangle PAC \sim \triangle PDB$ e $\triangle KJN \sim \triangle LJM$. Como consequência, $\angle ACD = \angle ABD$ e $\angle MKN = \angle MLN$. Isto é, os quadriláteros $ABCD$ e $KLMN$ são inscritíveis. \square

Observação 1. *Estuda-se agora um caso particular no lado esquerdo da Figura 3.4. O segmento PF é tangente a circunferência c . Os ângulos PFA e PBF são congruentes, pois um é de segmento e o segundo inscrito em relação a corda AF . Consequentemente, por AA, tem-se $\triangle PFA \sim \triangle PBF$.*

Da proporcionalidade dos lados encontra-se:

$$\frac{PF}{PB} = \frac{PA}{PF},$$

$$PF^2 = PA \cdot PB. \quad (3.5.3)$$

A equação (3.5.3) pode ser obtida de (3.5.1) simplesmente notando que quando o ponto C aproxima-se de F o ponto D também o faz.

Observação 2. *Ainda usando como referência a Figura 3.4 considera-se a reta PO (JH) que determina o diâmetro EG (RQ). Chamando $PO = d$ e $EO = GO = r$ ($JH = d$ e $RH = QH = r$) e utilizando as equações (3.5.1), (3.5.2) e (3.5.3) pode-se escrever:*

$$PF^2 = PA \cdot PB = PE \cdot PG = (d - r)(d + r) = d^2 - r^2 = Pot_c(P),$$

$$JK \cdot JM = JR \cdot JQ = (r - d)(r + d) = r^2 - d^2 = -Pot_e(J).$$

Resumem-se os resultados anteriores no Corolário a seguir.

Corolário 5. *Seja c uma circunferência, P um ponto no mesmo plano e a reta que passa por P intersecta c nos pontos A e B . Vale que:*

$$PA \cdot PB = |Pot_c(P)|.$$

Corolário 6 (Fórmula do T. de Pitágoras). *Considera-se uma circunferência c de centro A e raio AC . Traça-se a corda CD . A mediatriz de CD determina a corda EF . Seja o ponto $B = CD \cap EF$ (Figura 3.5). Então no $\triangle ABC$ vale que:*

$$AC^2 = AB^2 + BC^2.$$

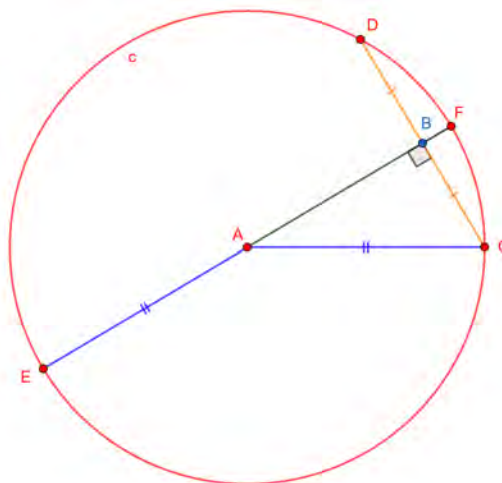


Figura 3.5: Fórmula do T. de Pitágoras partindo do Teorema 4. Versão interativa [aqui](#).

Demonstração. A potência do ponto B relativo a circunferência c pode ser calculada de duas formas:

$$DB \cdot BC = EB \cdot BF.$$

Mas $DB = BC$ e $EA = AC$. Segue que:

$$BC \cdot BC = (AC + AB) \cdot (AC - AB),$$

$$BC^2 = AC^2 - AB^2.$$

□

3.6 Eixo Radical

Definição 3 (Eixo Radical). *Eixo Radical é o nome dado ao Lugar Geométrico dos pontos que possuem a mesma Potência com relação a duas circunferências c e d . Isto é, o ponto P pertence ao eixo radical se, e somente se, $Pot_c(P) = Pot_d(P)$.*

Proposição 7. *O Eixo Radical de duas circunferências é uma reta perpendicular ao segmento que contém os centros das mesmas.*

A Figura 3.6 ilustra uma construção geométrica possível relativa a Proposição 7.

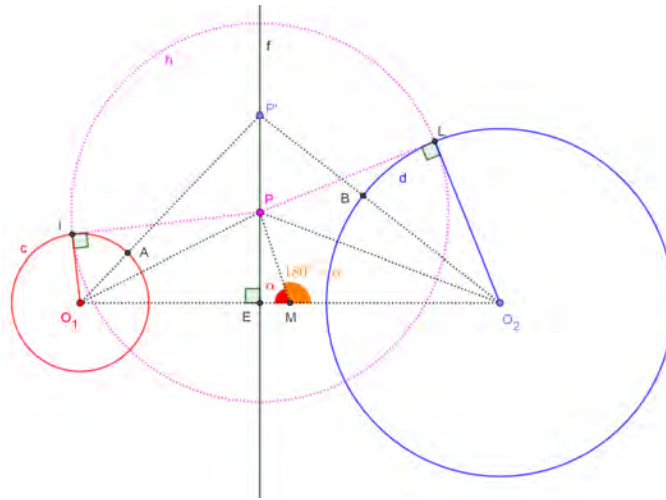


Figura 3.6: O Eixo Radical f (verde) das circunferências c (vermelho) e d (azul) é uma reta perpendicular a O_1O_2 . Todo ponto P do Eixo Radical é centro de uma circunferência h que intersesta a c e d perpendicularmente. M é o ponto médio de O_1O_2 . Versão interativa [aqui](#).

Demonstração. Utiliza-se a Figura 3.6 como referência. Suponha-se, inicialmente, que:

$$Pot_c(P) = Pot_d(P).$$

Mostrar-se-á que o ponto P pertence a uma reta perpendicular à O_1O_2 .

Sejam $I \in c$ e $L \in d$ tal que $PI \perp O_1I$ e $PL \perp O_2L$. Utilizando a Definição 2 tem-se:

$$Pot_c(P) = PO_1^2 - O_1I^2 = PO_2^2 - O_2L^2 = Pot_d(P), \quad (3.6.1)$$

$$PO_2^2 - PO_1^2 = O_2L^2 - O_1I^2. \quad (3.6.2)$$

Sejam E e M a projeção do ponto P sobre O_1O_2 e o ponto médio de O_1O_2 , respetivamente. Seja $\angle PMO_1 = \alpha$, segue que $\angle PMO_2 = 180^\circ - \alpha$. Escreve-se agora a Lei dos Cossenos no $\triangle PMO_2$ e no $\triangle PMO_1$:

$$PO_2^2 = PM^2 + MO_2^2 - 2 \cdot PM \cdot MO_2 \cdot \cos(180^\circ - \alpha),$$

$$PO_2^2 = PM^2 + MO_2^2 + 2 \cdot PM \cdot MO_2 \cdot \cos(\alpha), \quad (3.6.3)$$

$$PO_1^2 = PM^2 + MO_1^2 - 2 \cdot PM \cdot MO_1 \cdot \cos(\alpha). \quad (3.6.4)$$

Como $MO_2 = MO_1$, então $MO_1 + MO_2 = O_1O_2$. Subtraindo (3.6.4) de (3.6.3) encontra-se:

$$PO_2^2 - PO_1^2 = 2 \cdot PM \cdot O_1O_2 \cdot \cos(\alpha). \quad (3.6.5)$$

Adicionalmente,

$$PM \cdot \cos(\alpha) = EM. \quad (3.6.6)$$

Substituindo (3.6.2) e (3.6.6) em (3.6.5) encontra-se:

$$O_2L^2 - O_1I^2 = 2 \cdot O_1O_2 \cdot EM,$$

$$EM = \frac{O_2L^2 - O_1I^2}{2 \cdot O_1O_2}.$$

Este último resultado indica que EM depende somente dos raios das duas circunferências e da distância entre elas, mas não de P . Isto é, os pontos do Eixo Radical pertencem a reta $f \perp O_1O_2$ e $E \in f$.

Reciprocamente, provar-se-á que todo ponto $P' \in f$ pertence ao conjunto de pontos chamado Eixo Radical. Pelo Teorema de Pitágoras tem-se:

$$P'O_2^2 = P'E^2 + EO_2^2,$$

$$P'O_1^2 = P'E^2 + EO_1^2,$$

$$PO_2^2 = PE^2 + EO_2^2,$$

$$PO_1^2 = PE^2 + EO_1^2.$$

Das equações anteriores subtraem-se as duas primeira e as duas últimas:

$$P'O_2^2 - P'O_1^2 = EO_2^2 - EO_1^2,$$

$$PO_2^2 - PO_1^2 = EO_2^2 - EO_1^2,$$

$$P'O_2^2 - P'O_1^2 = PO_2^2 - PO_1^2. \quad (3.6.7)$$

Sejam A e B as interseções dos segmentos PO_1 e PO_2 com c e d , respectivamente. De (3.6.2) tem-se:

$$PO_2^2 - PO_1^2 = O_2L^2 - O_1I^2 = O_2B^2 - O_1A^2. \quad (3.6.8)$$

Utilizando (3.6.7) e (3.6.8) encontra-se:

$$P'O_2^2 - P'O_1^2 = O_2B^2 - O_1A^2,$$

$$P'O_2^2 - O_2B^2 = P'O_1^2 - O_1A^2,$$

$$Pot_d(P') = Pot_c(P').$$

Isto é, todo ponto $P' \in f$ pertence ao Eixo Radical. Logo, a reta f , perpendicular a O_1O_2 , é o Lugar Geométrico dos pontos que possuem a mesma Potência com relação as circunferências c e d . \square

A Figura 3.6 e a equação (3.6.1) também mostram que todo ponto P do Eixo Radical é centro de uma circunferência h que intersesta a c e d perpendicularmente.

Quando duas circunferências são tangentes o Eixo Radical das mesma passa pelo ponto de tangência, uma vez que a Potência deste ponto é zero respeito as duas (Figura 3.7, parte superior esquerda).

No caso em que as duas circunferências são secantes o Eixo Radical passa pelos pontos de intersecção, pois a Potência destes é zero respeito as duas (Figura 3.7, parte superior direita).

3.7 Centro Radical

Pode ser mostrado que para três circunferências com centros não colineares os Eixos Radicais dos pares concorrem em um ponto C , denominado Centro Radical (Figura 3.7, parte inferior). A Potência de C é a mesma em relação as três circunferências e C é o único ponto com esta propriedade. Outros exemplos podem ser encontrados em [34].

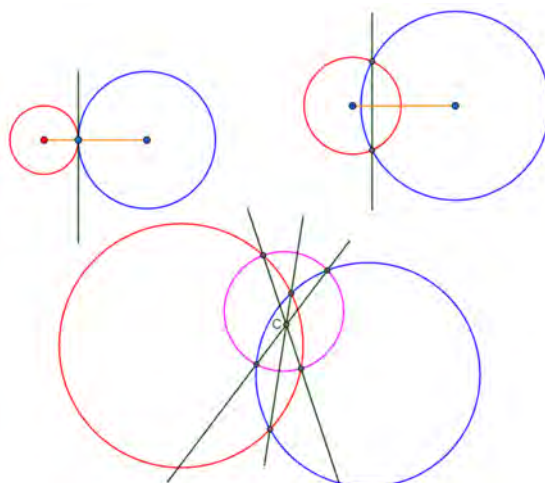


Figura 3.7: Exemplos de Eixo Radical (linhas em verde). Parte superior esquerda, quando duas circunferências são tangentes o Eixo Radical das mesma passa pelo ponto de tangência. Parte superior direita, no caso em que as duas circunferências são secantes o Eixo Radical passa pelos pontos de intersecção. Parte inferior, para três circunferências com centros não colineares os Eixos Radicais dos pares concorrem em um ponto C denominado Centro Radical. A Potência de C é a mesma em relação as três circunferências. Versão interativa [aqui](#).

3.8 Problemas resolvidos do Capítulo 3

3.8.1 Eixo Radical. Teorema de Tales. Equação quadrática. P4 SL IMO 1971.

Problema 6. *Duas circunferências tangentes em um plano, com raios r_1 e r_2 , são dadas. Uma reta intercepta as duas circunferências em quatro pontos determinando três segmentos de igual medida. Encontrar o comprimento dos segmentos em função de r_1 e r_2 e as condições sobre as quais o problema tem solução.*

A IMO 1971 foi realizada nas cidade de Bratislava e Zilina, na Eslováquia. Problema 4 da SL, proposto pela delegação do Reino Unido [7].

3.8.1.1 Resolução

A Figura 3.8 ajuda entender a descrição que segue. Resolve-se o problema em um sistema cartesiano de coordenadas. Para tal coloca-se o eixo x passando pelo centro das duas circunferências e o eixo y pelo ponto de tangencia O . Considera-se que as circunferências Γ_1 (azul) e Γ_2 (vermelha), com centros em O_1 e O_2 , têm raios r_1 e r_2 , respectivamente.

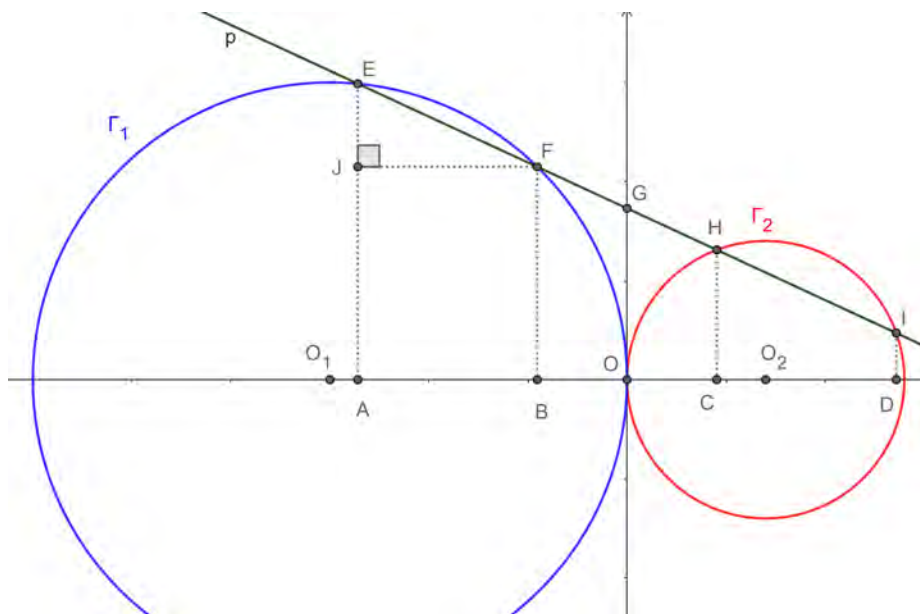


Figura 3.8: Uma solução do Problema 6. As circunferências Γ_1 e Γ_2 com centros em O_1 (azul) e O_2 (vermelha) têm raios r_1 e r_2 , respectivamente. A reta p intercepta as duas circunferências em quatro pontos determinando três segmentos de igual medida. Versão interativa [aqui](#).

Seja p a reta (em verde) de equação

$$y = ax + b, \tag{3.8.1}$$

com a e b números reais a serem determinados, que intercepta a Γ_1 em E e F e a Γ_2 em H e I , respectivamente. G é o ponto de interseção de p com o eixo y .

Por hipótese tem-se $EF = FH = HI = d$. Os pontos $A = (x_A, 0)$, $B = (x_B, 0)$, $C = (x_C, 0)$ e $D = (x_D, 0)$ são as projeções ortogonais dos pontos E , F , H e I sobre o eixo x , respectivamente. Segue pelo Teorema de Tales que:

$$AB = BC = CD = x_B - x_A = x_C - x_B = x_D - x_C = d_x.$$

Como viu-se anteriormente, o Eixo Radical de duas circunferências tangentes passa pelo ponto de tangência e é perpendicular a linha que une os centros das mesmas. Isto é, o eixo y na figura acima é o conjunto de pontos com a mesma Potência em relação a Γ_1 e Γ_2 . Em particular, para o ponto G pode-se escrever:

$$GE \cdot GF = GI \cdot GH.$$

Sejam $u = GF$ e $v = GH$, segue que:

$$(d + u) \cdot u = (d + v) \cdot v,$$

$$u + v = d.$$

Resolvendo o sistema formado pelas duas equações anteriores encontra-se que:

$$u = v = \frac{d}{2}.$$

O resultado anterior implica que $GE = 3GF$ e $GI = 3GH$. Utilizando novamente o Teorema de Tales obtêm-se que $OA = 3OB$ e $OD = 3OC$ ou

$$x_A = 3x_B, \quad (3.8.2)$$

$$x_D = 3x_C. \quad (3.8.3)$$

Por outro lado, a equação em cartesianas da circunferência Γ_1 é:

$$(x + r_1)^2 + y^2 = r_1^2,$$

$$x^2 + y^2 + 2xr_1 = 0. \quad (3.8.4)$$

A equação em cartesianas da circunferência Γ_2 é:

$$(x - r_2)^2 + y^2 = r_2^2,$$

$$x^2 + y^2 - 2xr_2 = 0. \quad (3.8.5)$$

Substituindo (3.8.1) em (3.8.4) encontra-se que x_A e x_B satisfazem:

$$x^2 + (ax + b)^2 + 2xr_1 = 0,$$

$$(1 + a^2)x^2 + 2(ab + r_1)x + b^2 = 0.$$

Resolvendo a equação quadrática anterior encontra-se:

$$x_A = \frac{-(ab + r_1) - \sqrt{(ab + r_1)^2 - (1 + a^2)b^2}}{1 + a^2}, \quad (3.8.6)$$

$$x_B = \frac{-(ab + r_1) + \sqrt{(ab + r_1)^2 - (1 + a^2)b^2}}{1 + a^2}. \quad (3.8.7)$$

Segue que:

$$d_x = x_B - x_A = \frac{2\sqrt{(ab + r_1)^2 - (1 + a^2)b^2}}{1 + a^2}. \quad (3.8.8)$$

Utilizando as equações (3.8.2), (3.8.6) e (3.8.7) encontra-se:

$$ab + r_1 = 2\sqrt{(ab + r_1)^2 - (1 + a^2)b^2}. \quad (3.8.9)$$

Logo, substituindo (3.8.9) em (3.8.8) tem-se:

$$d_x = x_B - x_A = \frac{ab + r_1}{1 + a^2}. \quad (3.8.10)$$

De forma análoga, substituindo (3.8.1) em (3.8.5) encontra-se que x_C e x_D satisfazem:

$$x^2 + (ax + b)^2 - 2xr_2 = 0,$$

$$(1 + a^2)x^2 + 2(ab - r_2)x + b^2 = 0.$$

Resolvendo a equação quadrática anterior encontra-se:

$$x_C = \frac{r_2 - ab - \sqrt{(ab - r_2)^2 - (1 + a^2)b^2}}{1 + a^2}, \quad (3.8.11)$$

$$x_D = \frac{r_2 - ab + \sqrt{(ab - r_2)^2 - (1 + a^2)b^2}}{1 + a^2}. \quad (3.8.12)$$

Segue que:

$$d_x = x_D - x_C = \frac{2\sqrt{(ab - r_2)^2 - (1 + a^2)b^2}}{1 + a^2}. \quad (3.8.13)$$

Utilizando as equações (3.8.3), (3.8.11) e (3.8.12) encontra-se:

$$r_2 - ab = 2\sqrt{(ab - r_2)^2 - (1 + a^2)b^2}. \quad (3.8.14)$$

Logo, substituindo (3.8.14) em (3.8.13) tem-se:

$$d_x = x_D - x_C = \frac{r_2 - ab}{1 + a^2}. \quad (3.8.15)$$

De (3.8.10) e (3.8.15) segue que:

$$ab = \frac{r_2 - r_1}{2}. \quad (3.8.16)$$

Como também vale que $d_x = x_C - x_B$ e de (3.8.11) e (3.8.7), então:

$$d_x = \frac{r_2 + r_1 - \sqrt{(ab - r_2)^2 - (1 + a^2)b^2} - \sqrt{(ab + r_1)^2 - (1 + a^2)b^2}}{1 + a^2}. \quad (3.8.17)$$

Da igualdade de (3.8.15) e (3.8.17) e substituindo (3.8.16) encontra-se:

$$\begin{aligned} \frac{r_1 - r_2}{2} &= r_1 - 2\sqrt{\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)^2 - b^2} - \left(\frac{r_2 - r_1}{2}\right)^2, \\ b^2 &= \frac{14r_1r_2 - r_1^2 - r_2^2}{16}. \end{aligned} \quad (3.8.18)$$

Elevando ao quadrado (3.8.16) e utilizando (3.8.18) encontra-se:

$$a^2 = \frac{4(r_2 - r_1)^2}{14r_1r_2 - r_1^2 - r_2^2}. \quad (3.8.19)$$

De (3.8.15), (3.8.16) e (3.8.19) segue que:

$$d_x = \frac{14r_1r_2 - r_1^2 - r_2^2}{6(r_1 + r_2)}.$$

Adicionalmente, aplicando o Teorema de Pitágoras, por exemplo, no triângulo EFJ , tem-se:

$$d = \sqrt{1 + a^2}d_x.$$

Segue que:

$$d = \sqrt{\frac{14r_1r_2 - r_1^2 - r_2^2}{12}}.$$

Como r_1 e r_2 são números positivos deve-se ter:

$$14r_1r_2 - r_1^2 - r_2^2 > 0.$$

Isto é,

$$r_1^2 - 2r_1r_2 + r_2^2 < 12r_1r_2.$$

Logo, somente existe solução quando:

$$\frac{(r_1 - r_2)^2}{r_1r_2} < 12.$$

Chamando $\lambda = \frac{r_1}{r_2}$ a desigualdade anterior pode ser reescrita como:

$$\lambda^2 - 14\lambda + 1 < 0.$$

A mesma se verifica quando:

$$7 - 4\sqrt{3} < \lambda < 7 + 4\sqrt{3},$$

$$7 - 4\sqrt{3} < \frac{r_1}{r_2} < 7 + 4\sqrt{3}.$$

3.8.2 Eixo Radical. Teorema de Pitágoras. Semelhança de triângulos. P15 SL IMO 1994.

Problema 7. *Uma circunferência w é tangente a duas linhas paralelas l_1 e l_2 . Uma segunda circunferência w_1 é tangente a l_1 em A e a w externamente em C . Uma terceira circunferência w_2 é tangente a l_2 em B , externamente a w em D e a w_1 externamente em E . Os segmentos AD e BC interceptam-se no ponto Q . Provar que Q é o Circuncentro do triângulo CDE .*

A IMO 1994 foi realizada em Hong Kong, região administrativa especial chinesa. Problema 15 da SL, proposto pela delegação da Rússia [7].

3.8.2.1 Resolução

A Figura 3.9 será utilizada como referência para auxiliar na interpretação.

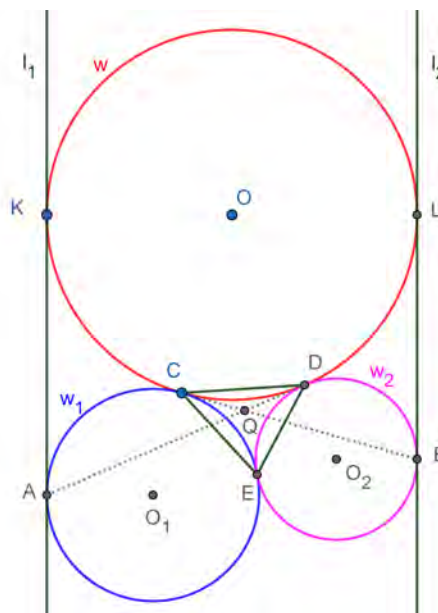


Figura 3.9: Construção geométrica para auxiliar na interpretação do Problema 7. Versão interativa [aqui](#).

Sejam as circunferências w , w_1 e w_2 de centros O , O_1 e O_2 e raios r , r_1 e r_2 , respectivamente. Sejam os pontos K e L de tangência de w com l_1 e l_2 , respectivamente.

A ideia da prova será mostrar que a reta AD é uma tangente comum as circunferências w e w_2 . Com isto, a reta AD é o eixo radical de w e w_2 . Analogamente, mostrando que a reta BC é uma tangente comum as circunferências w e w_1 , segue que a reta BC é o Eixo Radical de w e w_1 . Consequentemente, Q é o Centro Radical das três circunferências: w , w_1 e w_2 . O Centro Radical tem a mesma Potência em relação as três circunferências, logo equidista dos pontos de tangência C , D e E .

Inicia-se conectando os centros das circunferências e traçando o diâmetro KL . Como K e L são pontos de tangência o diâmetro KL é perpendicular a l_1 e l_2 . Determinam-se os pontos H e J como os pés das perpendiculares a KL que passam por O_1 e O_2 , respectivamente. O ponto I é encontrado na interseção da reta JO_2 com uma reta paralela a KL passando por O_1 (Figura 3.10).

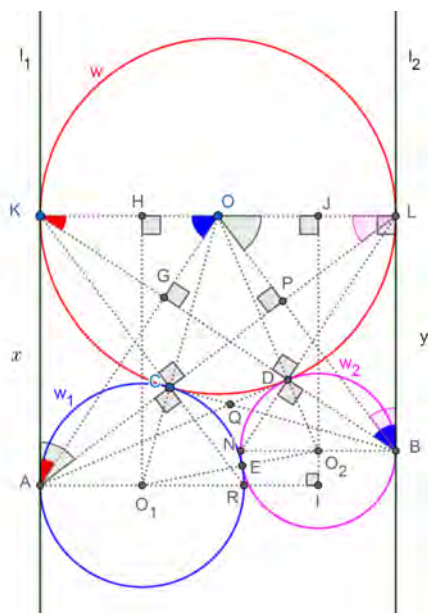


Figura 3.10: Construção adicional para auxiliar na interpretação do Problema 7. Versão interativa [aqui](#).

Sejam $KA = HO_1 = x$ e $LB = JO_2 = y$. Tem-se que $OO_1 = r + r_1$, $OO_2 = r + r_2$, $O_1O_2 = r_1 + r_2$, $HO = r - r_1$, $OJ = r - r_2$, $O_1I = 2r - r_1 - r_2$ e $O_2I = x - y$.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo O_1HO , retângulo em H , tem-se:

$$x^2 = (r + r_1)^2 - (r - r_1)^2,$$

$$x^2 = 4rr_1. \tag{3.8.20}$$

Analogamente, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo O_2JO , retângulo em J ,

obtêm-se:

$$\begin{aligned} y^2 &= (r + r_2)^2 - (r - r_2)^2, \\ y^2 &= 4rr_2. \end{aligned} \tag{3.8.21}$$

E aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo O_1IO_2 , retângulo em I , obtêm-se:

$$\begin{aligned} (x - y)^2 &= (r_1 + r_2)^2 - (2r - r_1 - r_2)^2, \\ x^2 + y^2 - 2xy &= 4rr_1 + 4rr_2 - 4r^2. \end{aligned} \tag{3.8.22}$$

Substituindo (3.8.20) e (3.8.21) em (3.8.22) encontra-se:

$$\begin{aligned} xy &= 2r^2, \\ \frac{x}{r} &= \frac{2r}{y}. \end{aligned} \tag{3.8.23}$$

A equação (3.8.23) implica que os triângulos AKO e KLB são semelhantes pelo critério **LAL**, um par de lados proporcionais e o ângulo compreendido entre os mesmos congruente ($\angle AKO = \angle BLK = 90^\circ$). Segue que KB é perpendicular a AO , pois $AK \parallel BL$ e $KO \parallel KL$. Seja $G = KB \cap AO$, tem-se $\angle OGD = 90^\circ$.

Seja $N \in w_2$ tal que NB é diâmetro. Tem-se que $\angle NDB = \angle KDL = 90^\circ$, logo $D = BK \cap NL$. Como o triângulo OKD é isósceles de base KD ($OK = OD$) e OG é altura segue que OG também é bissetriz do ângulo KOD e $\angle KOG = \angle DOG$. Os triângulos AKO e ADO são congruentes por **LAL** (AO é comum e KO e DO são raios de w). Portanto, $\angle AKO = \angle ADO = 90^\circ$ e a reta AD é tangente a w e w_2 .

Analogamente, a equação (3.8.23) também implica que os triângulos AKL e BLO são semelhantes pelo critério **LAL**, um par de lados proporcionais e o ângulo compreendido entre os mesmos congruente ($\angle AKL = \angle BLO = 90^\circ$). Segue AL é perpendicular a BO , pois $AK \parallel BL$ e $LK \parallel LO$. Seja $P = AL \cap BO$, tem-se $\angle OPC = 90^\circ$.

Seja $R \in w_1$ tal que AR é diâmetro. Tem-se que $\angle ACR = \angle KCL = 90^\circ$, logo $C = AL \cap KR$. Como o triângulo OCL é isósceles de base CL ($OL = OC$) e OP é altura segue que OP também é bissetriz do ângulo COL e $\angle COP = \angle LOP$.

Os triângulos COB e LOB são congruentes por **LAL** (OB é comum e CO e LO são raios de w). Conclui-se que $\angle OLB = \angle OCB = 90^\circ$ e a reta BC é tangente a w e w_1 .

3.8.3 Potência de um ponto. Eixo Radical. Quadrilátero Inscritível. Semelhança de triângulos. P5 IMO 2012.

Problema 8. *Seja ABC um triângulo tal que $\angle BCA = 90^\circ$, e seja C_0 o pé da altura relativa a C . Seja X um ponto no interior do segmento CC_0 . Seja K o ponto do segmento AX tal que $BK = BC$. Analogamente, seja L o ponto do segmento BX tal que $AL = AC$. Seja M o ponto de interseção de AL com BK . Provar que $MK = ML$.*

A IMO 2012 foi realizada na cidade de Mar del Plata, Argentina. Problema 5 da competição [7].

3.8.3.1 Resolução

A Figura 3.11 ajuda entender a descrição que segue.

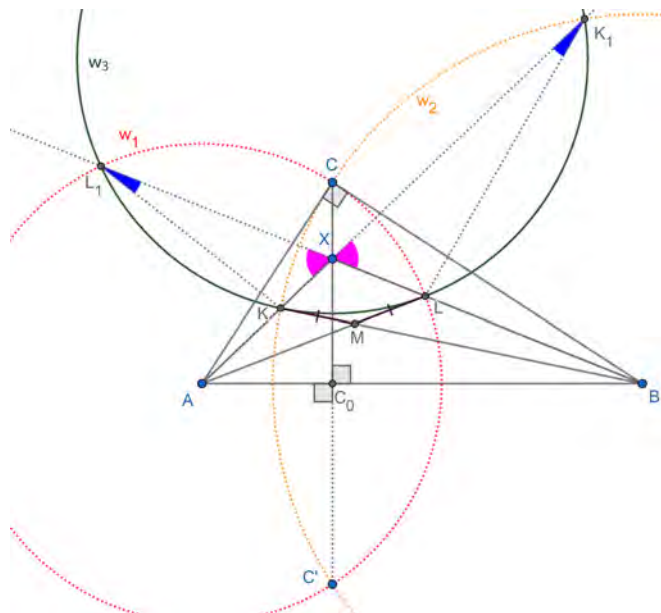


Figura 3.11: Uma solução do Problema 8. Versão interativa [aqui](#).

Seja C' a reflexão do ponto C na linha AB , e w_1 e w_2 circunferências com centros A e B , que passam por L e K , respectivamente. Devido a $AC' = AC = AL$ e $BC' = BC = BK$, tanto w_1 como w_2 passam por C e C' . De $\angle BCA = 90^\circ$ tem-se que AC é tangente a w_2 em C , e BC é tangente a w_1 em C . Seja $K_1 \neq K$ a segunda interseção de AX e w_2 , e $L_1 \neq L$ a segunda interseção de BX e w_1 .

Nota-se que X é um ponto do Eixo Radical das circunferências w_1 e w_2 , pois $X \in CC'$. Pelo Teorema das Cordas, a Potência do ponto X com relação a w_2 e w_1 pode ser escrita como:

$$Pot_{w_2}(X) = XK \cdot XK_1 = XC \cdot XC' = XL \cdot XL_1 = Pot_{w_1}(X). \tag{3.8.24}$$

Da equação (3.8.24) segue que:

$$\frac{XK}{XL} = \frac{XL_1}{XK_1}.$$

O resultado anterior e o fato que $\angle L_1XK = \angle K_1XL$ (opostos pelo vértice) indicam que $\triangle L_1XK \sim \triangle K_1XL$. Como consequência tem-se que $\angle KL_1X = \angle LK_1X$, o qual leva a que o quadrilátero K_1LKL_1 é inscritível (circunferência w_3).

Nota-se que X também é um ponto do Eixo Radical das circunferências w_1 e w_3 , pois $X \in LL_1$ e das circunferências w_2 e w_3 , pois $X \in KK_1$. Isto é, X é o Centro Radical de w_1 , w_2 e w_3 .

A Potência de A com relação a w_2 pode ser calculada de duas formas:

$$AC^2 = Pot_{w_2}(A) = AK \cdot AK_1.$$

Como, por hipótese, $AC = AL$ tem-se:

$$AL^2 = AK \cdot AK_1 = Pot_{w_3}(A).$$

Isto é, AL é tangente a w_3 .

Analogamente, a Potência de B com relação a w_1 pode ser calculada de duas formas:

$$BC^2 = Pot_{w_1}(B) = BL \cdot BL_1.$$

Por hipótese $BC = BK$, logo:

$$BK^2 = BL \cdot BL_1 = Pot_{w_3}(B).$$

Isto é, BK é tangente a w_3 . Segue que MK e ML são duas tangentes de M a w_3 e $MK = ML$.

3.8.4 Tangência a uma circunferência. Ângulos inscritos e de segmento. Potência de um ponto e Eixo Radical. P8 NA IGO 2014-5.

Problema 9. *O triângulo ABC é acutângulo com $AC > AB$, de circunferência circunscrita c e Circuncentro O . A linha tangente a c em A intersecta a continuação de BC em P . X é o ponto de OP tal que $\angle AXP = 90^\circ$. Os pontos $E \in AB$ e $F \in AC$ são escolhidos no mesmo lado de OP e satisfazem que $\angle EXP = \angle ACX$ e $\angle FXO = \angle ABX$. Se K, L são os pontos de interseção de EF com c , mostrar que OP é tangente ao circuncirculo d do $\triangle K LX$.*

Problema 8 **NA** (Nível Avançado) da 1 Olimpíada Iraniana de Geometria (**IGO**, Iranian Geometry Olympiad) de 2014-2015, proposto por Mahdi Etesami Fard [9].

3.8.4.1 Resolução

A Figura 3.12 mostra uma construção geométrica inicial para o Problema 9.

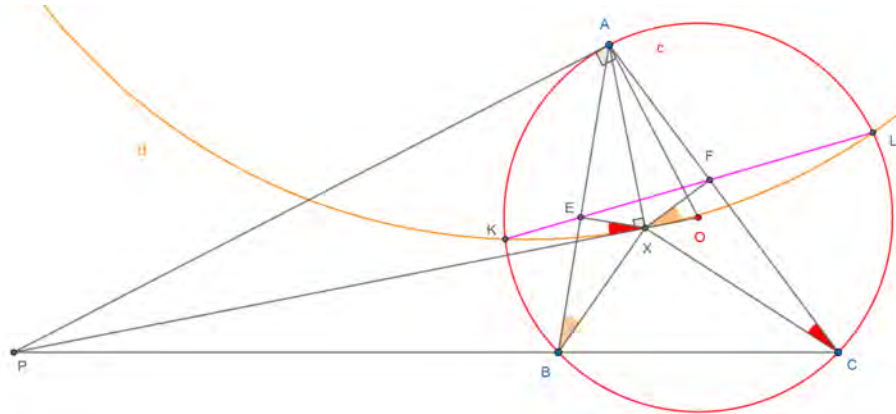


Figura 3.12: Construção geométrica inicial do Problema 9. Versão interativa [aqui](#).

Sejam os pontos M e N na continuação de XF e XE tal que M, L, X e K e N estejam na mesma circunferência d (Figura 3.13).

A seguir provar-se-á que $\angle AMX = \angle ACX = \angle NXP$. Depois, que N, A e M são colineares, logo $\angle AMX = \angle NMX$. Em referência a corda NX de d o $\angle NMX$ é inscrito. No caso de tangência de PX com d o $\angle NXP$ é de segmento. Sendo válido que $\angle NMX = \angle NXP$ estará demonstrada a tangência de PO com d .

O ponto F está sobre o Eixo Radical das circunferências c e d . Logo, pode-se calcular a Potência de F como:

$$XF \cdot FM = FL \cdot FK = AF \cdot FC.$$

Segue que o quadrilátero $AMCX$ é cíclico (circunferência e) e $\angle AMX = \angle ACX$. Portanto, F é Centro Radical de c, d e e .

Analogamente, o ponto E está sobre o Eixo Radical das circunferências c e d . Logo, pode-se calcular a Potência de E como:

$$XE \cdot EN = EL \cdot EK = AE \cdot EB.$$

Segue que o quadrilátero $ANBX$ é cíclico (circunferência f) e $\angle ANX = \angle ABX$. Ou seja, E é Centro Radical de c, d e f .

Agora provar-se-á que N, A e M são colineares. Como $ANBX$ e $AMCX$ são cíclico

segue:

$$\angle NAM = \angle NAE + \angle A + \angle FAM = \angle EXB + \angle A + \angle CXF.$$

Na equação anterior utiliza-se que a soma dos ângulo numa volta completa ao redor do ponto X é 360° , $\angle AXE = 90^\circ - \angle EXP = 90^\circ - \angle ACX$ e $\angle AXF = 90^\circ - \angle FXO = 90^\circ - \angle ABX$:

$$\begin{aligned} \angle NAM &= \angle A + 180^\circ - \angle BXC + \angle ABX + \angle ACX = \\ &= \angle A + 180^\circ - \angle BXC + \angle BXC - \angle A = 180^\circ. \end{aligned}$$

Conclui-se que $\angle AMX = \angle NMX$. Sendo válido que $\angle NMX = \angle NXP$ está demonstrada a tangência de PO com d . Em referência a corda NX de d o $\angle NMX$ é inscrito e o $\angle NXP$ é de segmento. A Figura 3.13 permite acompanhar a resolução do Problema 9.

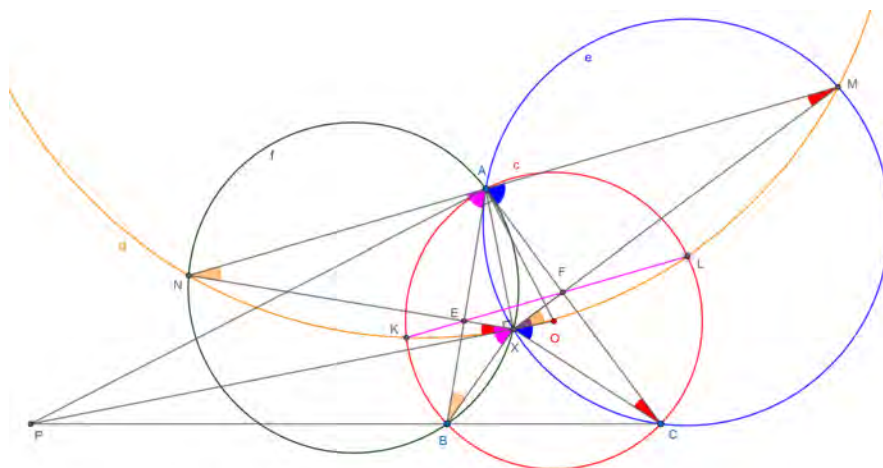


Figura 3.13: Guia para a resolução do Problema 9. Versão interativa [aqui](#).

3.8.5 Quadriláteros cíclicos. Potência de um ponto relativo a uma circunferência. Semelhança de triângulos. P7 NA IGO 2014-5.

Problema 10. *Um triângulo acutângulo ABC é dado. Uma circunferência de diâmetro BC intersecta AB, AC em E, F , respectivamente. Seja M o ponto médio de BC e P o ponto de interseção de AM e EF . X é um ponto no arco menor de EF e Y o segundo ponto de interseção de XP com a circunferência mencionada anteriormente. Mostrar que $\angle XAY = \angle XYM$.*

Problema 7 NA (Nível Avançado) da 1 Olimpíada Iraniana de Geometria (IGO, Iranian Geometry Olympiad) de 2014-2015, proposto por Ali Zooelm [9].

3.8.5.1 Resolução

A Figura 3.14 permite acompanhar a resolução da primeira parte do Problema 10.

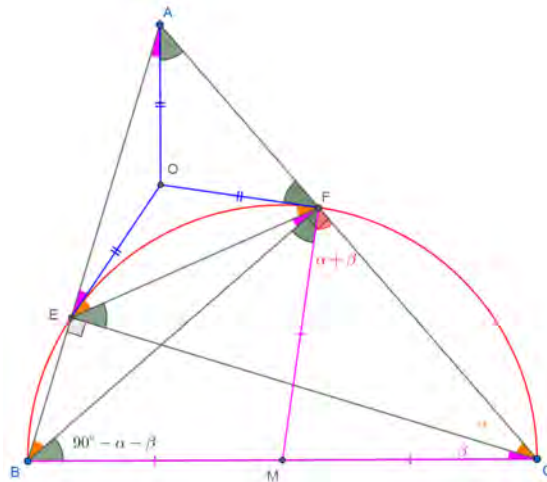


Figura 3.14: Guia para a resolução da primeira parte do Problema 10. Versão interativa [aqui](#).

Tem-se $\angle BFC = \angle BEC = 90^\circ$. Sejam $\angle FCE = \alpha$ e $\angle ECB = \beta$. Como $BEFC$ é um quadrilátero inscritível segue que $\angle FBE = \angle FCE = \alpha$ e $\angle EFB = \angle ECB = \beta$.

Como $MF = MB = MC$ obtêm-se:

$$\angle MFC = \angle MCF = \alpha + \beta,$$

$$\angle FBC = \angle CEF = \angle MFB = 90^\circ - \alpha - \beta.$$

Também encontram-se os ângulos suplementares em E e F . Isto é, $\angle AEF = \alpha + \beta$ e $\angle AFE = 90^\circ - \beta$. Pela soma dos ângulos internos no $\triangle AEF$ segue que $\angle EAF = 90^\circ - \beta$.

Chama-se com a letra O ao Circuncentro do $\triangle AEF$. Isto define os triângulos isósceles OEF , OFA e OAE de bases EF , FA e AE , respetivamente.

Sejam $\angle OEF = \angle OFE = x$, $\angle OEA = \angle OAE = y$ e $\angle OAF = \angle OFA = z$. Como $x + y = \alpha + \beta$, $x + z = 90^\circ - \beta$ e $y + z = 90^\circ - \alpha$, resolvendo o sistema encontra-se:

$$\angle OEF = \angle OFE = x = \alpha,$$

$$\angle OEA = \angle OAE = y = \beta,$$

$$\angle OAF = \angle OFA = z = 90^\circ - \alpha - \beta.$$

Logo, $\angle MFO = 90^\circ$.

A Figura 3.15 permite acompanhar a resolução da segunda parte do Problema 10.

O segundo problema apresentou três circunferências tangentes externamente entre si e a duas linhas paralelas. Foi pedido mostrar que o Circuncentro do triângulo formado pelos pontos de tangências das circunferências entre si coincide com a interseção de dois segmentos da construção.

No terceiro problema foi dado um triângulo retângulo e um ponto X na altura correspondente ao ângulo reto. Várias construções foram feitas a partir de X . Uma das chaves para a solução foi perceber que X é o Centro Radical de três circunferências.

O quarto problema usou a igualdade de um ângulo inscrito com um de segmento para provar que determinada reta é tangente a uma circunferência. A solução envolveu descobrir duas de quatro circunferências utilizadas e dois centros radicais.

No problema cinco um triângulo acutângulo e uma circunferência foram dados. Um conjunto adicional de construções feitas e se pediu mostrar a congruência de dois ângulos. Durante a solução outras duas circunferências e o Centro Radical das mesmas foram encontradas.

Capítulo 4

Baricentro ou centroide

4.1 Introdução do Capítulo 4

No Problema 11 (P36-LL-IMO-1966) é dado um quadrilátero cíclico $ABCD$ e é pedido para mostrar que os Baricentros dos triângulos ABC , BCD , CDA e DAB pertencem a uma mesma circunferência. Primeiro, prova-se que o centroide do quadrilátero coincide com o centroide dos Baricentros dos triângulos citados. A seguir, uma Homotetia com centro no Centroide comum resolve o problema.

O Problema 12 (P9-SL-IMO-1968) apresenta um triângulo arbitrário ABC e um ponto M no interior deste. É pedido para provar a validade de certa desigualdade e mostrar quando acontece a igualdade. O desafio é interpretado como uma soma de áreas. Várias transformações de equivalência levam a desigualdade dada a uma soma de quadrados.

O Problema 13 (P27-LL-IMO-1974) apresenta dois pontos P_1 e P_2 que são colocados arbitrariamente sobre duas circunferências (um em cada uma). É pedido encontrar o Lugar Geométrico do ponto médio de P_1 e P_2 , quando estes passam por todas as posições possíveis. Uma construção geométrica dinâmica no GeoGebra sugere a resposta e uma justificativa algébrica é dada.

No Problema 14 (P12-SL-IMO-1987) explora-se a geometria do triângulo Napoleônico interno de um $\triangle ABC$ arbitrário. Solicita-se determinar o Lugar Geométrico dos centroides dos triângulos equiláteros $A'B'C'$ para os quais as triplas de pontos A', C, B' ; B', A, C' e C', B, A' são colineares.

O Problema 15 (P5-SL-IMO-1998) combina Transformações de Reflexão e Homotetia e as propriedades do Ortocentro, Circuncentro e Baricentro. Utiliza-se o Teorema de Simson-Wallace para demonstrar uma condição necessária e suficiente para três pontos serem colineares.

Inicia-se com uma introdução dos conceitos básicos sobre o Baricentro.

4.2 Conceitos básicos do Capítulo 4

A Figura 4.1 mostra um triângulo ABC . Sejam D , E e F pontos médios dos lados BC , CA e AB , respectivamente. As medianas AD , BE e CF concorrem no ponto G , chamado Baricentro ou Centroide [34].

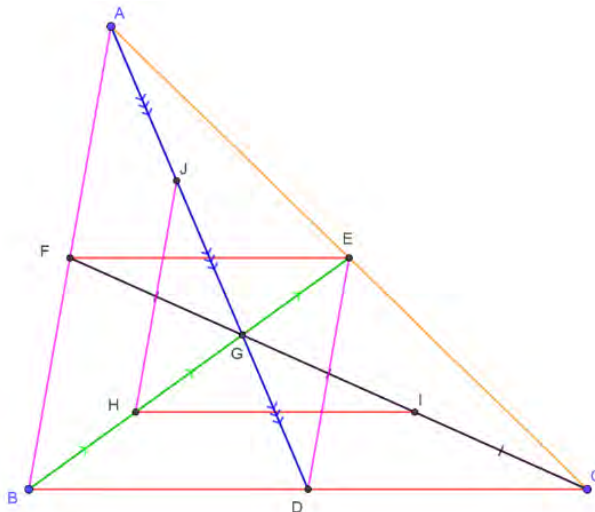


Figura 4.1: As medianas AD , BE e CF concorrem no ponto G , chamado Baricentro ou Centroide. A distância de um vértice ao Baricentro é duas vezes a distância do Baricentro ao pé da mediana correspondente. Guia para a demonstração da Proposição 8. Versão interativa [aqui](#).

Proposição 8. *A distância de um vértice ao Baricentro é duas vezes a distância do Baricentro ao pé da mediana correspondente (Figura 4.1).*

Demonstração. EF é Base Média do $\triangle ABC$ logo $EF \parallel BC$ e $EF = \frac{BC}{2}$. Sejam H e I pontos médios dos lados BG e CG , respectivamente. Tem-se que o segmento HI é Base Média do $\triangle GBC$. Segue que $HI \parallel BC$ e $HI = \frac{BC}{2}$.

Como $EF \parallel HI$ e $EF = HI$ o quadrilátero $EFHI$ é um paralelogramo e suas diagonais HE e FI encontram-se nos seus pontos médios: $HG = GE$ e $FG = GI$. Conclui-se que $BG = 2GE$ e $CG = 2GF$. Analogamente demonstra-se que $AG = 2GD$. \square

Utiliza-se a notação $S(P)$ para referir-se a área do polígono P . A Figura 4.2 permite acompanhar os detalhes da Proposição 9.

Proposição 9. *O Baricentro G do $\triangle ABC$ determina com os vértices e pontos médios M_{AB} , M_{BC} e M_{CA} dos lados AB , BC e CA , respectivamente, seis triângulos de igual área. Isto é,*

$$\begin{aligned} S(AGM_{AB}) &= S(BGM_{AB}) = S(BGM_{BC}) = S(CGM_{BC}) \\ &= S(CGM_{CA}) = S(AGM_{CA}) = \frac{S(ABC)}{6}. \end{aligned}$$

Os triângulos AGB , BGC e CGA têm a mesma área. Ou seja,

$$S(AGB) = S(BGC) = S(CGA) = \frac{S(ABC)}{3}.$$

Os triângulos ACM_{AB} , BCM_{AB} , BAM_{BC} , CAM_{BC} , CBM_{CA} e ABM_{CA} têm a mesma área. Isto é,

$$\begin{aligned} S(ACM_{AB}) &= S(BCM_{AB}) = S(BAM_{BC}) = S(CAM_{BC}) \\ &= S(CBM_{CA}) = S(ABM_{CA}) = \frac{S(ABC)}{2}. \end{aligned}$$

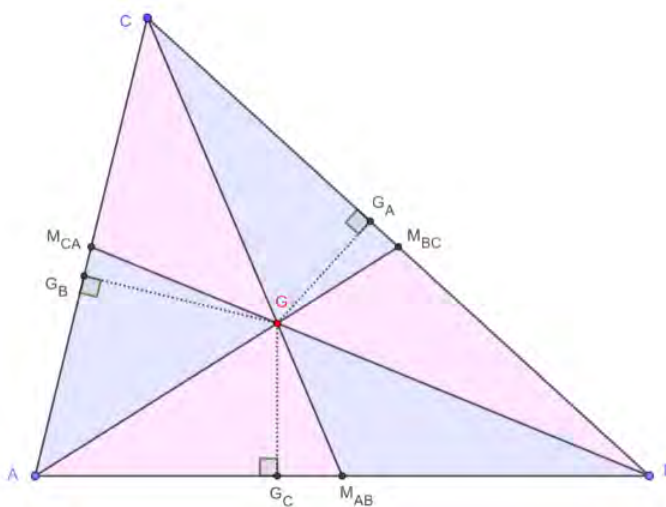


Figura 4.2: Igualdade de áreas envolvendo o Baricentro. Guia para a demonstração da Proposição 9. Versão interativa [aqui](#).

Demonstração. Sejam G_C , G_A e G_B os pés das alturas do ponto G sobre os lados AB , BC e CA , respectivamente. Como GG_C é altura comum aos triângulos AGM_{AB} e BGM_{AB} e $AM_{AB} = M_{AB}B$ tem-se:

$$S(AGM_{AB}) = S(BGM_{AB}).$$

Adicionalmente, os triângulos ACM_{AB} e BCM_{AB} têm a mesma altura e base de igual medida. Logo,

$$S(ACM_{AB}) = S(BCM_{AB}).$$

Os dois resultados anteriores permitem afirmar que:

$$S(ACG) = S(BCG).$$

O resto das igualdades é provada do mesmo modo. □

Será seguida a estratégia de [3] para definir o Baricentro de um polígono utilizando o conceito de centro de massa para um conjunto finito de massas pontuais e unitárias. Isto é, para os pontos com coordenadas cartesianas $A_i = (A_{ix}, A_{iy})$, com $1 \leq i \leq n$ e $i, n \in \mathbb{N}$, define-se o Baricentro G como:

$$G = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n A_{ix}, \sum_{i=1}^n A_{iy} \right).$$

Ou seja, as coordenadas cartesianas de G são as médias aritméticas das coordenadas dos A_i , com $i = 1, 2, \dots, n$.

Uma vantagem do método de E. Carneiro e F. Girão em [3] é permitir mostrar de forma simples a colinearidade do ponto de Nagel, o Baricentro e o Incentro (encontro das bissetrizes internas). Essa abordagem também faz uma introdução implícita do conceito de Coordenada Baricêntrica.

O ponto de Nagel é definido pela concorrência das cevianas do mesmo nome. Estas são os segmentos de um vértice do triângulo ao ponto da interseção do Ex-incírculo com o lado correspondente.

Outros dois centros de triângulos são o Circuncentro (encontro das mediatrizes) e o Ortocentro (encontro das alturas). A seguir mostra-se que os dois pontos anteriores ficam alinhados com o Baricentro. A reta que passa por eles é chamada de Reta de Euler.

Proposição 10 (Reta de Euler). *Para todo triângulo ABC , o Circuncentro O , o Baricentro G e o Ortocentro H são colineares e $HG = 2GO$. Adicionalmente, sendo D o pé da mediana relativa ao vértice A , vale que $AH = 2OD$ (Figura 4.3).*

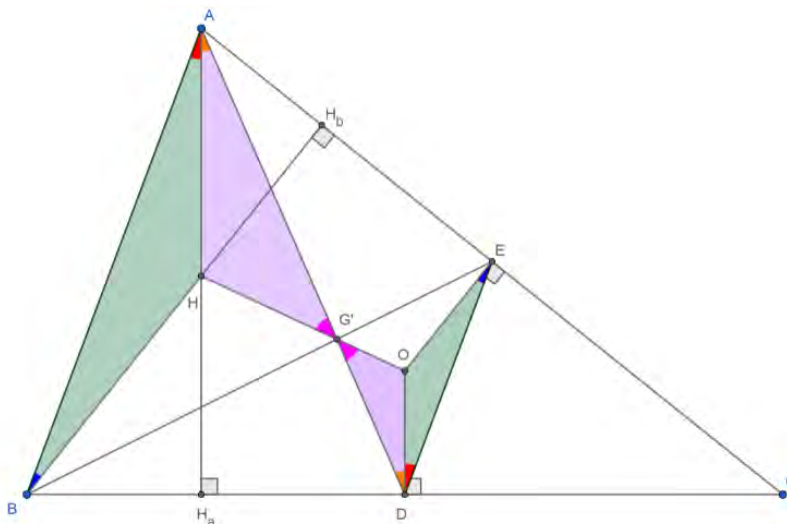


Figura 4.3: Guia para a demonstração da Proposição 10. Os pontos H , G e O são colineares e determinam a Reta de Euler. Versão interativa [aqui](#).

Demonstração. A Figura 4.3 ilustra um triângulo ABC . Sejam D e E pontos médios dos lados BC e CA , respectivamente. Sejam H_a e H_b os pés das alturas relativas aos vértices A e B . Constroem-se o Circuncentro O e o Ortocentro H do triângulo ABC . Denota-se por G' a interseção das retas AD e HO .

Mostrar-se-á que o ponto $G' = G$ é o Baricentro. Isto é, H , G e O são colineares. Tem-se que DE é Base Média relativa ao lado AB . Logo, $DE \parallel AB$ e

$$\frac{AB}{DE} = 2.$$

Como $AH_a \parallel OD$ e $BH_b \parallel OE$ segue que $\angle BAH = \angle EDO$ e $\angle ABH = \angle DEO$. Por AA tem-se $\triangle ABH \sim \triangle DEO$. Portanto,

$$\frac{BH}{EO} = \frac{AH}{DO} = \frac{AB}{DE} = 2.$$

Adicionalmente, por ângulos alternos entre paralelas, $\angle HAG' = \angle ODG'$ e, por opostos pelo vértice, $\angle AG'H = \angle DG'O$. Consequentemente, pelo critério de semelhança AA, tem-se $\triangle AHG' \sim \triangle DOG'$. Logo,

$$\frac{AH}{DO} = \frac{HG'}{OG'} = \frac{AG'}{DG'} = 2.$$

Como $AG' = 2DG'$ e $AG = 2DG$ conclui-se que $G' = G$ e os pontos H , G e O são colineares (pertencem à Reta de Euler). \square

4.3 Problemas resolvidos do Capítulo 4.

4.3.1 Baricentro. Homotetia. Quadriláteros cíclicos. P36-LL-IMO-1966.

Problema 11. *Seja $ABCD$ um quadrilátero inscritível. Mostrar que os Baricentros dos triângulos ABC , BCD , CDA e DAB pertencem a um mesma circunferência.*

A IMO 1966 foi realizada na cidade de Sófia, Bulgária. Esse é o Problema 36 da lista longa (LL), proposto pela delegação da Polônia [7].

4.3.1.1 Resolução do Problema 11.

A Figura 4.4 mostra uma construção geométrica inicial.

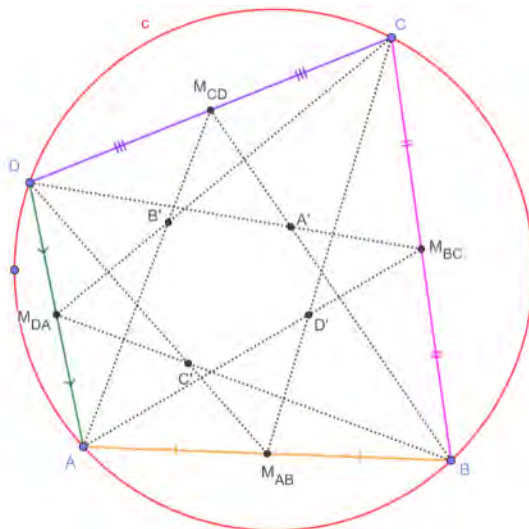


Figura 4.4: Construção geométrica inicial para o Problema 11. Versão interativa [aqui](#).

Considera-se que c é a circunferência circunscrita ao quadrilátero $ABCD$. Sejam D' , A' , B' e C' os Baricentros dos triângulos ABC , BCD , CDA e DAB , respectivamente.

Proposição 11. *O ponto G , Baricentro do quadrilátero $ABCD$, coincide com o ponto G' , Baricentro do quadrilátero $D'A'B'C'$, isto é, $G = G'$.*

Demonstração. Tem-se:

$$D' = \frac{1}{3} \cdot (A_x + B_x + C_x, A_y + B_y + C_y),$$

$$A' = \frac{1}{3} \cdot (B_x + C_x + D_x, B_y + C_y + D_y),$$

$$B' = \frac{1}{3} \cdot (C_x + D_x + A_x, C_y + D_y + A_y),$$

$$C' = \frac{1}{3} \cdot (D_x + A_x + B_x, D_y + A_y + B_y),$$

onde $J = (J_x, J_y)$, com $J \in \{A, B, C, D\}$.

Somando, por coordenadas, as quatro equações anteriores segue:

$$\begin{aligned} G' &= \frac{1}{4} \cdot (D'_x + A'_x + B'_x + C'_x, D'_y + A'_y + B'_y + C'_y) \\ &= \frac{1}{12} \cdot (3A_x + 3B_x + 3C_x + 3D_x, 3A_y + 3B_y + 3C_y + 3D_y) \\ &= \frac{1}{4} \cdot (A_x + B_x + C_x + D_x, A_y + B_y + C_y + D_y) = G. \end{aligned}$$

□

Proposição 12. Com relação aos pontos $A, B, C, D, A', B', C', D'$ e G (Figura 4.5) vale que:

$$\frac{AG}{GA'} = \frac{BG}{GB'} = \frac{CG}{GC'} = \frac{DG}{GD'} = 3.$$

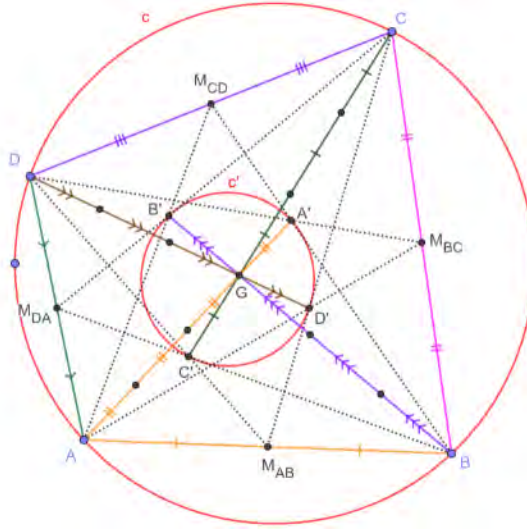


Figura 4.5: Construção geométrica para o Problema 11. Versão interativa [aqui](#).

Demonstração. Tem-se:

$$\begin{aligned} G_x - A_x &= \frac{1}{4} \cdot (B_x + C_x + D_x - 3A_x), \\ G_y - A_y &= \frac{1}{4} \cdot (B_y + C_y + D_y - 3A_y), \\ AG &= \frac{1}{4} \cdot \sqrt{(B_x + C_x + D_x - 3A_x)^2 + (B_y + C_y + D_y - 3A_y)^2}. \end{aligned}$$

Também tem-se:

$$\begin{aligned} A'_x - G_x &= \frac{1}{3} \cdot (B_x + C_x + D_x) - \frac{1}{4} \cdot (A_x + B_x + C_x + D_x) \\ &= \frac{1}{12} \cdot (B_x + C_x + D_x - 3A_x), \\ A'_y - G_y &= \frac{1}{3} \cdot (B_y + C_y + D_y) - \frac{1}{4} \cdot (A_y + B_y + C_y + D_y) \\ &= \frac{1}{12} \cdot (B_y + C_y + D_y - 3A_y), \\ GA' &= \frac{1}{12} \cdot \sqrt{(B_x + C_x + D_x - 3A_x)^2 + (B_y + C_y + D_y - 3A_y)^2}. \end{aligned}$$

Com isto foi provado que:

$$\frac{AG}{GA'} = 3.$$

O resto da demonstração é feita de forma análoga. \square

As duas proposições anteriores permitem afirmar que uma Homotetia, com centro no ponto G , e fator de proporcionalidade $-\frac{1}{3}$ transforma A, B, C, D e c em A', B', C', D' e c' , respectivamente, sendo c' a circunferência circunscrita ao quadrilátero $A'B'C'D'$. A Figura 4.5 mostra uma construção geométrica.

4.3.2 Baricentro. Áreas. Desigualdade. P9 SL IMO 1968.

Problema 12. *Seja ABC um triângulo arbitrário e M um ponto no interior deste. Sejam $d_a, d_b,$ e d_c as distâncias de M aos lados $BC, CA,$ e AB ; e a, b, c a medida dos lados, respectivamente. Seja S a área do $\triangle ABC$. Provar que:*

$$abd_a d_b + bcd_b d_c + cad_c d_a \leq \frac{4S^2}{3}. \tag{4.3.1}$$

Provar que a igualdade acontece quando M é o Baricentro.

A IMO 1968 foi realizada na cidade de Moscou, Rússia. Esse é o Problema 9 da SL e foi proposto pela delegação da Romênia [7].

4.3.2.1 Resolução do Problema 12.

A Figura 4.6 mostra uma construção geométrica.

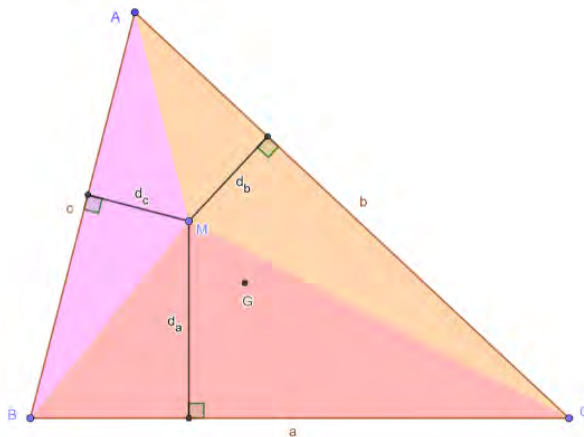


Figura 4.6: Construção geométrica para o Problema 12. Versão interativa [aqui](#).

Inicia-se notando que a desigualdade (4.3.1) é equivalente a:

$$\frac{ad_a}{2} \cdot \frac{bd_b}{2} + \frac{bd_b}{2} \cdot \frac{cd_c}{2} + \frac{cd_c}{2} \cdot \frac{ad_a}{2} \leq \frac{S^2}{3}.$$

Sejam $S_a = S(BCM) = \frac{ad_a}{2}$, $S_b = S(CAM) = \frac{bd_b}{2}$ e $S_c = S(ABM) = \frac{cd_c}{2}$. Segue que:

$$S_a \cdot S_b + S_b \cdot S_c + S_c \cdot S_a \leq \frac{S^2}{3}.$$

Como $S = S_a + S_b + S_c$, a desigualdade anterior equivale a:

$$3(S_a \cdot S_b + S_b \cdot S_c + S_c \cdot S_a) \leq (S_a + S_b + S_c)^2.$$

Desenvolvendo o quadrado e simplificando encontra-se:

$$S_a \cdot S_b + S_b \cdot S_c + S_c \cdot S_a \leq S_a^2 + S_b^2 + S_c^2.$$

Multiplica-se toda a desigualdade por 2 e colocam-se os termos do lado esquerdo no direito:

$$0 \leq 2(S_a^2 + S_b^2 + S_c^2) - 2(S_a \cdot S_b + S_b \cdot S_c + S_c \cdot S_a).$$

A linha anterior pode ser reescrita como:

$$0 \leq (S_a - S_b)^2 + (S_b - S_c)^2 + (S_c - S_a)^2.$$

Como o quadrado de um número é sempre maior o igual a zero a última desigualdade é verdadeira. Todas as transformações utilizadas foram de equivalência, logo fica provado (4.3.1). A igualdade acontece quando $S_a = S_b = S_c$. Pela Proposição 9, o anterior significa que $M = G$.

4.3.3 Baricentro. Lugar Geométrico. Circunferências. P27 LL IMO 1974.

Problema 13. *Sejam C_1 e C_2 circunferências no mesmo plano, P_1 e P_2 pontos arbitrários sobre C_1 e C_2 , respectivamente, e M_{12} o ponto médio do segmento P_1P_2 . Encontrar o Lugar Geométrico dos pontos M_{12} quando P_1 e P_2 passam por todas as posições possíveis.*

A IMO 1974 foi realizada na cidade de Erfurt, Alemanha. Esse é o Problema 27 da lista longa (LL) e foi proposto pela delegação da Romênia [7].

4.3.3.1 Resolução do Problema 13.

A Figura 4.7 mostra uma construção geométrica.

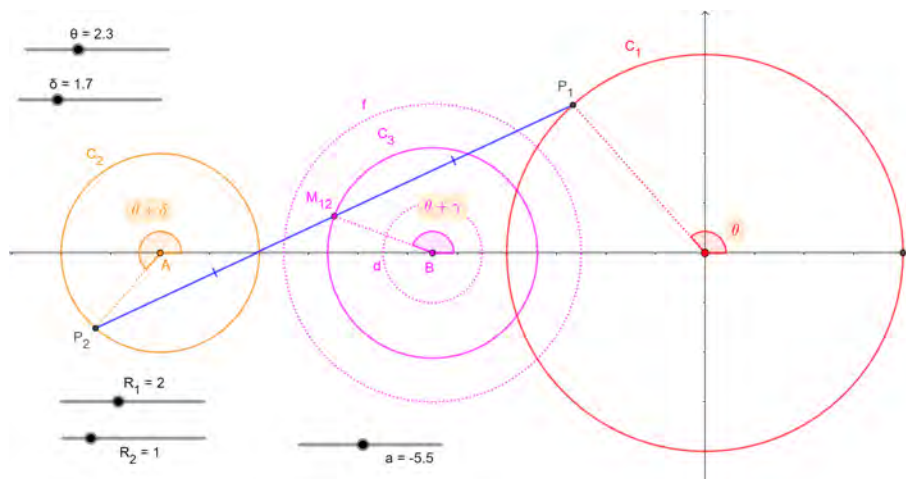


Figura 4.7: Uma construção geométrica para o Problema 13. A circunferência C_3 é obtida variando somente o parâmetro θ . Versão interativa [aqui](#).

Coloca-se a origem de um sistema cartesiano coincidindo com o centro da circunferência C_1 e o centro de C_2 sobre o eixo x . Isto é, C_1 tem centro em $(0,0)$ e raio R_1 e C_2 centro em $A = (a,0)$ e raio R_2 . Também será suposto, sem perda de generalidade, que $R_1 > R_2$.

As coordenadas dos pontos P_1 e P_2 podem ser escritas como:

$$P_1 = (R_1 \cdot \cos(\theta), R_1 \cdot \sin(\theta)),$$

$$P_2 = (a + R_2 \cdot \cos(\theta + \delta), R_2 \cdot \sin(\theta + \delta)),$$

onde θ é um ângulo que serve de parâmetro para percorrer todos os pontos das circunferência e δ é um valor fixo que descreve a defasagem inicial entre $P_1 \in C_1$ e $P_2 \in C_2$.

As coordenadas do ponto médio entre P_1 e P_2 serão:

$$M_{12} = \frac{1}{2} \cdot (a + R_1 \cdot \cos(\theta) + R_2 \cdot \cos(\theta + \delta), R_1 \cdot \sin(\theta) + R_2 \cdot \sin(\theta + \delta)).$$

Após a utilização de identidades trigonométrica pode-se reescrever as coordenadas do ponto M_{12} como:

$$M_{12} = (b + R_3 \cos(\theta + \gamma), R_3 \sin(\theta + \gamma)),$$

onde

$$b = \frac{1}{2}a,$$

$$R_3 = \frac{1}{2}\sqrt{R_1^2 + R_2^2 + 2R_1R_2 \cos(\delta)},$$

$$\tan(\gamma) = \frac{R_2 \sin(\delta)}{R_1 + R_2 \cos(\delta)}.$$

Fixado δ , quando θ varia o ponto M_{12} descreve uma circunferência C_3 com centro em $B = (b, 0)$, defasagem γ e raio R_3 . Porém, como $-1 \leq \cos(\delta) \leq 1$ tem-se que:

$$\frac{1}{2}(R_1 - R_2) \leq R_3 \leq \frac{1}{2}(R_1 + R_2).$$

Ou seja, o Lugar Geométrico dos pontos M_{12} é o anel entre as circunferências d e f na Figura 4.7.

4.3.4 Baricentro. Lugar Geométrico. Teorema de Napoleão. **SL P12** **IMO 1987.**

Problema 14. *Dado um triângulo não equilátero ABC , com os vértices listados em sentido anti-horário, encontrar o Lugar Geométrico dos centroides dos triângulos equiláteros $A'B'C'$ (vértices listados em sentido anti-horário) para os quais as triplas de pontos A', C, B' ; B', A, C' e C', B, A' são colineares.*

A **IMO 1987** foi realizada na cidade de Havana, Cuba. Esse é o Problema 12 da **SL** e foi proposto pela delegação da Polônia [7].

4.3.4.1 Considerações iniciais sobre o Problema 14.

Para poder resolver o problema será estudado primeiro uma versão do Teorema de Napoleão e um Lema deste último.

Lema 13 (Para o Teorema de Napoleão). *Se sobre os lados de um triângulo qualquer ABC (Figura 4.8) forem construídos triângulos equiláteros ABC' , BCA' e CAB' , então:*

$$AA' = BB' = CC'.$$

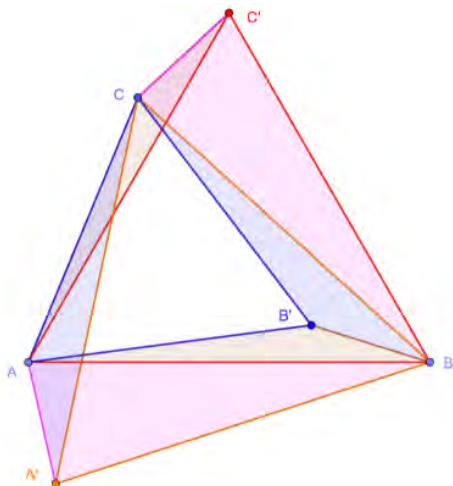


Figura 4.8: Construção geométrica no caso dos triângulos equiláteros serem construídos na direção interna do $\triangle ABC$. Versão interativa [aqui](#).

Demonstração. A Figura 4.8 mostra uma construção geométrica no caso dos triângulos equiláteros serem construídos na direção interna do $\triangle ABC$. O caso contrário pode ser encontrado em [36].

Por construção tem-se $AC = AB'$ e $AC' = AB$. De $\angle CAB' = \angle C'AB = 60^\circ$, segue que $\angle CAC' = \angle B'AB$. Por LAL, encontra-se $\triangle ACC' \equiv \triangle AB'B$. Logo, $CC' = B'B$. Analogamente, $A'A = CC'$. Conclui-se que $AA' = BB' = CC'$. \square

Teorema 14 (Teorema de Napoleão). *Se sobre os lados de um triângulo qualquer ABC forem construídos triângulos equiláteros, os Ortocentros desses triângulos equiláteros formam igualmente um triângulo equilátero (Figura 4.9).*

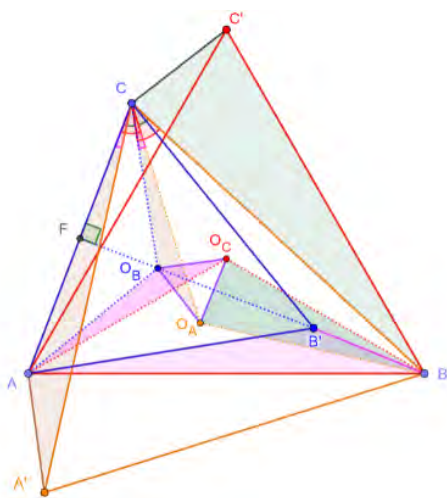


Figura 4.9: Construção geométrica no caso dos triângulos equiláteros serem construídos na direção interna do $\triangle ABC$. Versão interativa [aqui](#).

Demonstração. A Figura 4.9 mostra uma construção geométrica no caso dos triângulos equiláteros serem construídos na direção interna do $\triangle ABC$. O caso contrário pode ser encontrado em [36].

Sejam O_A , O_B e O_C os Ortocentros dos triângulos equiláteros BCA' , CAB' e ABC' , respectivamente. Girando o $\triangle O_BCO_A$ em 30° em sentido horário em torno do vértice C mostra-se que é semelhante com o $\triangle ACA'$.

De fato, como $\angle ACO_B = \angle BCO_A = 30^\circ$ e $\angle ACO_A = \angle BCO_B$, então:

$$\angle ACA' = \angle O_BCO_A.$$

Seja F o ponto médio do lado AC . Em triângulos equiláteros o Ortocentro, o Incentro e o Baricentro coincidem. Logo,

$$FO_B = \frac{1}{3}FB'.$$

Segue que:

$$CO_B \cdot \text{sen}(30^\circ) = \frac{1}{3}CB' \cdot \text{sen}(60^\circ),$$

$$CA = CB' = \sqrt{3} \cdot CO_B.$$

Analogamente, $CA' = CB = \sqrt{3} \cdot CO_A$. Com isto,

$$\frac{CA'}{CA} = \frac{CO_A}{CO_B}.$$

Pelo caso de semelhança LAL tem-se $\triangle ACA' \sim \triangle O_BCO_A$. Segue que:

$$AA' = \sqrt{3} \cdot O_BO_A.$$

Similarmente, mostra-se que:

$$BB' = \sqrt{3} \cdot O_CO_B,$$

$$CC' = \sqrt{3} \cdot O_AO_C.$$

Como, provado no Lema 13, vale $AA' = BB' = CC'$, então o $\triangle O_AO_BO_C$ é equilátero. \square

4.3.4.2 Resolução do Problema 14.

A Figura 4.10 mostra uma construção geométrica para o Problema 14.

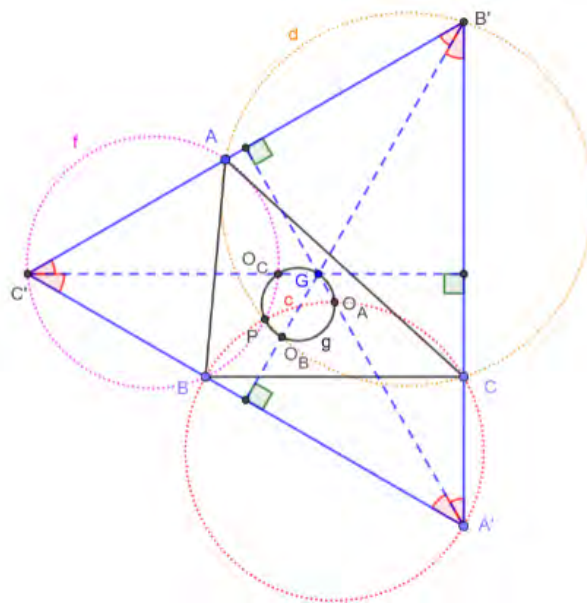


Figura 4.10: Primeira construção geométrica do Problema 14. Caso $\angle BA'C = 60^\circ$. Versão interativa [aqui](#).

Coloca-se o ponto O_A no interior do $\triangle ABC$ de tal forma que:

$$\angle O_A BC = \angle O_A CB = 30^\circ.$$

Ter-se-á que $\angle BO_A C = 120^\circ$. A seguir esboça-se a circunferência circunscrita c ao $\triangle BO_A C$. Posiciona-se o ponto A' sobre c . Constroem-se as retas $A'B$ e $A'C$. Podem-se ter os Quadriláteros cíclicos $BA'CO_A$, $BCA'O_A$ e BCO_AA' . No primeiro caso $\angle BA'C = 60^\circ$ e nos dois últimos $\angle BA'C = 120^\circ$. A Figura 4.10 mostra o primeiro caso, o segundo pode ser visto na Figura 4.11.

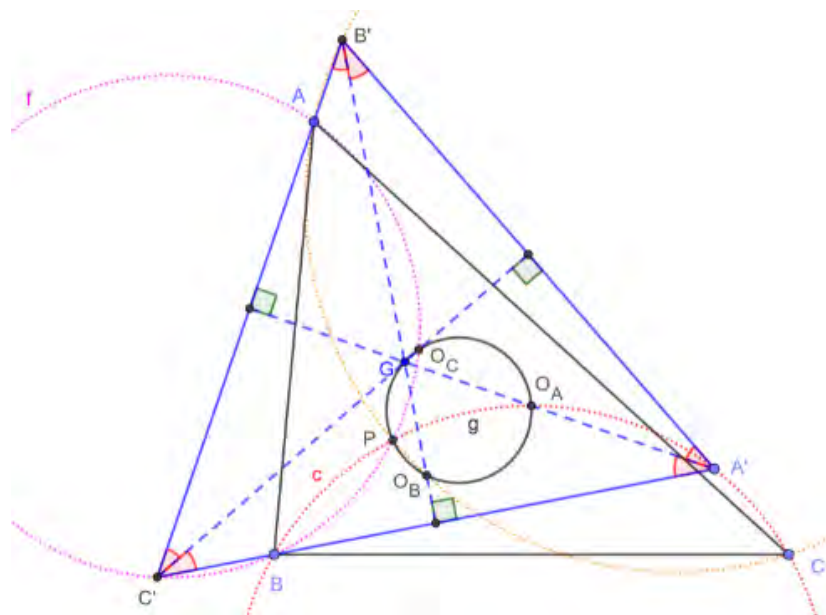


Figura 4.11: Segunda construção geométrica do Problema 14. Caso $\angle BA'C = 120^\circ$. Versão interativa [aqui](#).

Analogamente, constrói-se o ponto O_B no interior do $\triangle ABC$ de tal forma que:

$$\angle O_B CA = \angle O_B AC = 30^\circ.$$

Ter-se-á que $\angle CO_B A = 120^\circ$. A seguir esboça-se a circunferência circunscrita d ao $\triangle CO_B A$. Marca-se $B' \neq C$ como a interseção de $A'C$ e d .

Similarmente, é construído o ponto O_C no interior do $\triangle ABC$ de tal forma que:

$$\angle O_C AB = \angle O_C BA = 30^\circ.$$

Ter-se-á que $\angle AO_C B = 120^\circ$. A seguir esboça-se a circunferência circunscrita f ao $\triangle AO_C B$. Marca-se $C' \neq B$ como a interseção de $A'B$ e f .

Constroem-se as medianas do $\triangle A'B'C'$ e marca-se o ponto em que concorrem: G . Em todo triângulo equilátero o Baricentro coincide com o Ortocentro, o Circuncentro e o Incentro. Segue que $\angle A'GB' = \angle B'GC' = \angle C'GA' = 120^\circ$. Adicionalmente os pontos O_A, O_B e O_C pertencem as bissetrizes dos ângulos em A', B' e C' , respectivamente. O $\triangle O_A O_B O_C$ é o triângulo napoleônico interno do $\triangle ABC$, Teorema 14 (Napoleão). Isto é, o $\triangle O_A O_B O_C$ é equilátero e $\angle O_A O_B O_C = 60^\circ$. Com isto, tem-se $\angle O_A O_B O_C + \angle O_A G O_C = 180^\circ$, ou seja, o quadrilátero $O_A G O_C O_B$ é cíclico.

Constrói-se a circunferência g circunscrita ao $\triangle O_A O_B O_C$. O Lugar Geométrico dos centroides dos triângulos equiláteros $A'B'C'$ é g . Marca-se o ponto P , de Fermat ou Torricelli, na

interseção de c , d e f . Quando $A' = P$ o $\triangle A'B'C'$ é reduzido ao ponto P . O ponto de Fermat de um triângulo é aquele que minimiza a soma das distâncias aos vértices.

4.3.5 Baricentro. Teorema de Simson-Wallace. Homotetia. P5 SL IMO 1998.

Problema 15. *Seja ABC um triângulo, H seu Ortocentro, O seu Circuncentro, e R seu circunraio. Seja D a reflexão de A em BC , E de B em CA , e F de C em AB . Provar que D , E , e F são colineares se, e somente se, $OH = 2R$.*

A IMO 1998 foi realizada na cidade de Taipé, Taiwan. Esse é o Problema 5 da SL e foi proposto pela delegação da França [7].

4.3.5.1 Considerações iniciais para o Problema 15.

Definição 4 (Triângulo Pedal). *Sejam P um ponto do plano, ABC um triângulo e D , E e F as projeções de P sobre os lados BC , CA e AB , respectivamente. Então DEF é chamado de Triângulo Pedal de P em relação ao $\triangle ABC$ (Figura 4.12).*

Teorema 15 (Teorema de Simson-Wallace). *Dados um $\triangle ABC$, c sua circunferência circunscrita e um ponto P no mesmo plano de ABC , o Triângulo Pedal de P em relação a ABC é degenerado (D , E e F são colineares) se, e somente se, $P \in c$ (Figura 4.12).*

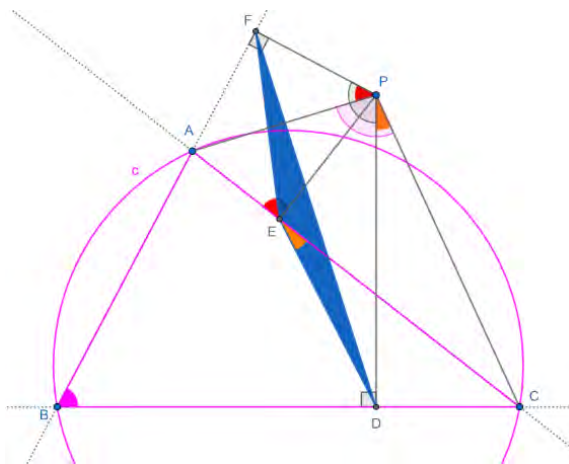


Figura 4.12: Construção geométrica para a Definição 4 e para a prova do Teorema 15. Versão interativa [aqui](#).

Demonstração. Como $\angle PFA = \angle PEA = 90^\circ$, então $PFAE$ é um quadrilátero inscritível. Segue que $\angle FPA = \angle FEA$. De $\angle PEC = \angle PDC = 90^\circ$ tem-se que $PEDC$ é um quadrilátero

cíclico. Logo, $\angle DPC = \angle DEC$. Adicionalmente, $\angle PDB = \angle PFB = 90^\circ$ implica que $PDBF$ é um quadrilátero cíclico. Consequentemente $\angle DPF = 180^\circ - \angle ABC$.

Nota-se que:

$$\angle APC - \angle DPF = \angle DPC - \angle FPA = \angle DEC - \angle FEA.$$

Ou seja, $\angle APC = \angle DPF$ se, e somente se, $\angle DEC = \angle FEA$. Adicionalmente, $\angle DEC = \angle FEA$ se, e somente se, D, E e F são colineares. Mas neste caso, $\angle APC = \angle DPF$ se, e somente se, $\angle APC + \angle ABC = 180^\circ$. Finalmente, $\angle APC + \angle ABC = 180^\circ$ se, e somente se, $ABCP$ é cíclico. \square

4.3.5.2 Resolução do Problema 15.

A Figura 4.13 mostra uma construção geométrica inicial para o Problema 15.

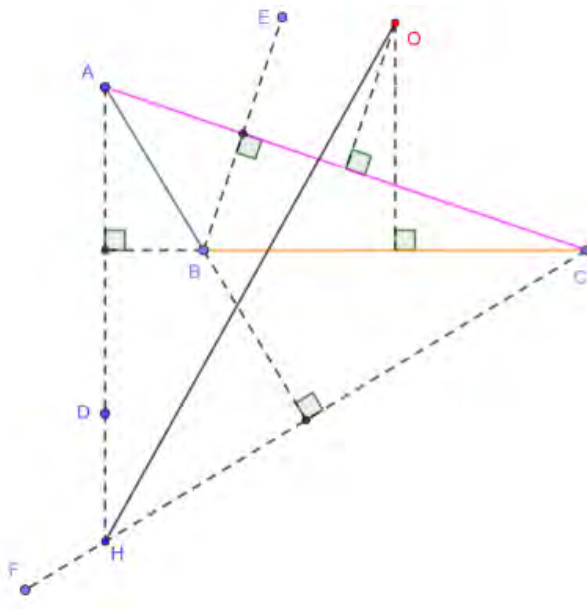


Figura 4.13: Construção geométrica inicial para o Problema 15. Versão interativa [aqui](#).

Seja G o Baricentro do $\triangle ABC$ e \mathbb{H} uma Homotetia com centro em G e razão $-\frac{1}{2}$. Sejam $A' = \mathbb{H}(A)$, $B' = \mathbb{H}(B)$ e $C' = \mathbb{H}(C)$.

Pela Proposição 8 sabe-se que a distância de um vértice ao Baricentro é duas vezes a distância do Baricentro ao pé da mediana correspondente. Logo A', B' e C' são os pontos médios de BC, CA e AB , respectivamente. Adicionalmente, de $HG = 2GO$ (Proposição 10) tem-se $O = \mathbb{H}(H)$.

Constrói-se o $\triangle A_2B_2C_2$ tal que A, B e C sejam os pontos médios de B_2C_2, C_2A_2 e A_2B_2 , respectivamente. Isto é, $AB \parallel B_2A_2, BC \parallel C_2B_2$ e $CA \parallel A_2C_2$ e $B_2A_2 = 2AB, C_2B_2 = 2BC,$

e $A_2C_2 = 2CA$. Com isto, $A = \mathbb{H}(A_2)$, $B = \mathbb{H}(B_2)$ e $C = \mathbb{H}(C_2)$.

Como D é a reflexão de A em BC , então $D' = \mathbb{H}(D)$ é a reflexão de A' em $B'C'$. Segue que $D' \in B_2C_2$ e $A'D' \perp B_2C_2$. Por outro lado, da definição de Circuncentro e $BC \parallel C_2B_2$ tem-se que OA' e B_2C_2 são ortogonais. Os dois resultados anteriores permitem afirmar que O , D' e A' são colineares e D' é a projeção de O em B_2C_2 . Analogamente, $E' = \mathbb{H}(E)$ e $F' = \mathbb{H}(F)$ são as projeções de O em C_2A_2 e A_2B_2 .

Pelo Teorema 15 (Simson-Wallace), D' , E' e F' são colineares (o qual equivale por \mathbb{H} a D , E e F serem colineares) se, e somente se, o ponto O está sobre a circunferência d circunscrita ao $\triangle A_2B_2C_2$. Como $c = \mathbb{H}(d)$ e $O = \mathbb{H}(H)$, d tem centro em H e raio $2R$. Esta última condição é equivalente a $HO = 2R$. A Figura 4.14 mostra uma construção geométrica.

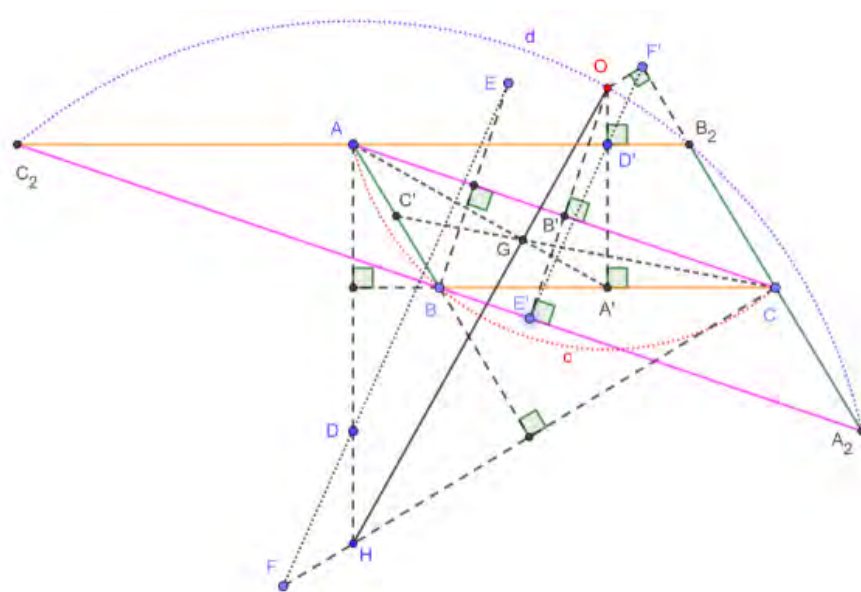


Figura 4.14: Construção geométrica para o Problema 15. Versão interativa [aqui](#).

4.4 Comentários finais do Capítulo 4

Problemas de olimpíadas são classificados como de elevado nível de dificuldade. Isto é traduzido em uma solução em múltiplos passos que combinam análise e planejamento. Foi feita uma introdução dos conceitos básicos sobre Baricentro, Reta de Euler e os teoremas de Napoleão e de Simson-Wallace.

No primeiro problema foi dado um quadrilátero cíclico $ABCD$ e pedido para mostrar que os Baricentros dos triângulos ABC , BCD , CDA e DAB pertencem a uma mesma circunferência. Primeiro se provou que o centroide do quadrilátero coincide com o centroide dos Baricentros dos triângulos citados. A seguir, uma Homotetia com centro no centroide comum resolveu o problema.

O segundo problema apresentou um triângulo arbitrário ABC e um ponto M no interior deste. Foi pedido para provar a validade de certa desigualdade e mostrar quando acontece a igualdade. O desafio foi interpretado como uma soma de áreas. Várias transformações de equivalência levaram a desigualdade dada a uma soma de quadrados.

O terceiro problema apresentou dois pontos P_1 e P_2 que foram colocados arbitrariamente sobre duas circunferências (um em cada uma). Foi pedido encontrar o Lugar Geométrico dos pontos médios de P_1 e P_2 , quando estes passam por todas as posições possíveis. Uma construção geométrica dinâmica no GeoGebra sugeriu a resposta e uma justificativa algébrica foi dada.

No quarto problema se explorou a geometria do triângulo Napoleônico interno de um $\triangle ABC$ arbitrário. Se solicitava determinar o Lugar Geométrico dos centroides dos triângulos equiláteros $A'B'C'$ para os quais as triplas de pontos A', C, B' ; B', A, C' e C', B, A' eram colineares.

O problema cinco combinou transformações de reflexão e homotetia e as propriedades do Ortocentro, Circuncentro e Baricentro. Utilizou-se o Teorema de Simson-Wallace para demonstrar uma condição necessária e suficiente para três pontos serem colineares.

Capítulo 5

Incírculos e Ex-incírculos

5.1 Introdução do Capítulo 5

No Problema 16 (P1-IMO-1970) são construídos três Incírculos e três Ex-incírculos. Solicita-se demonstrar determinada igualdade envolvendo os seis raios. Com a utilização das relações métricas, associadas aos segmentos determinados pelos vértices e pelos pés das bissetrizes, e a Relação de Stewart resolve-se o desafio.

No Problema 17 (P4-IMO-1992) é requerido encontrar o Lugar Geométrico dos pontos P partindo de uma circunferência c , uma reta l tangente a c , e um ponto M sobre l . P deve satisfazer determinada propriedade. A solução está ligada à construção das circunferências inscrita e ex-inscrita de um triângulo.

O Problema 18 (P5-IMO-1999) apresenta duas circunferências tangentes internamente a uma terceira. Solicita-se mostrar que determinada reta é tangente a uma das circunferências. Utilizando os conceitos de Potência de um ponto e as propriedades dos círculos inscritos e ex-inscritos resolve-se o desafio.

O Problema 19 (P16-SL-IMO-2005) explora as propriedades de um paralelogramo $ABCD$ e das bissetrizes utilizadas na construção de dois Ex-incírculos. Um ponto X variável pertence ao segmento BC . Pede-se provar que a medida de determinado ângulo não depende da posição de X .

O Problema 20 (P18-SL-IMO-2006) pede para construir o centro do Ex-incírculo tangente ao lado BC num triângulo ABC . Após algumas outras construções, deseja-se determinar dois ângulos. Resolve-se o desafio mediante o esboço de três circunferências com um ponto em comum, o Centro Radical das mesmas.

Inicia-se com uma introdução dos conceitos básicos sobre Incírculos e Ex-incírculos.

5.2 Conceitos básicos do Capítulo 5

Proposição 16 (Relações métricas devidas ao Incírculo). *A Figura 5.1 mostra um triângulo ABC . Sejam $AB = c$, $BC = a$ e $CA = b$. Sejam D , E e F os pontos de interseção da circunferência inscrita k com os lados AB , BC e CA , respectivamente. E seja o semiperímetro $p = \frac{a+b+c}{2}$. Então vale que:*

$$AD = AF = p - a, \quad BD = BE = p - b, \quad CF = CE = p - c.$$

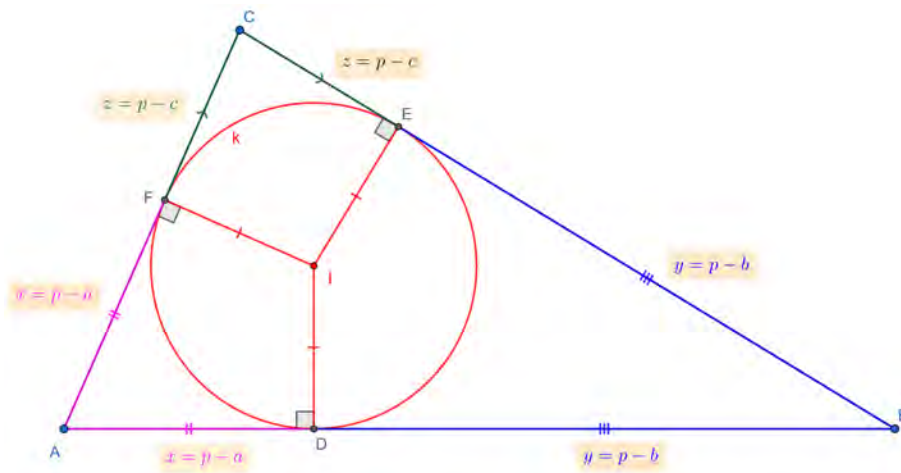


Figura 5.1: Guia para a demonstração da Proposição 16. Versão interativa [aqui](#).

Demonstração. Como os lados do $\triangle ABC$ são tangentes à circunferência k vale que:

$$AF = AD = x, \quad BD = BE = y, \quad CF = CE = z.$$

Isto permite escrever o sistema de equações:

$$x + y = c,$$

$$y + z = a,$$

$$z + x = b,$$

$$p = x + y + z.$$

Colocando em evidência x , y e z encontram-se as soluções citadas. □

Proposição 17 (Relações métricas devidas ao Ex-incírculo). *A Figura 5.2 mostra um triângulo*

ABC . Sejam $AB = c$, $BC = a$ e $CA = b$. Sejam J , L e E os pontos de interseção da circunferência ex-inscrita k' com os prolongamentos dos lados AB e BC e com o lado CA , respectivamente. E seja o semiperímetro $p = \frac{a+b+c}{2}$. Então vale que $BL = BJ = p$, $CL = CE = p - a$ e $AJ = AE = p - c$.

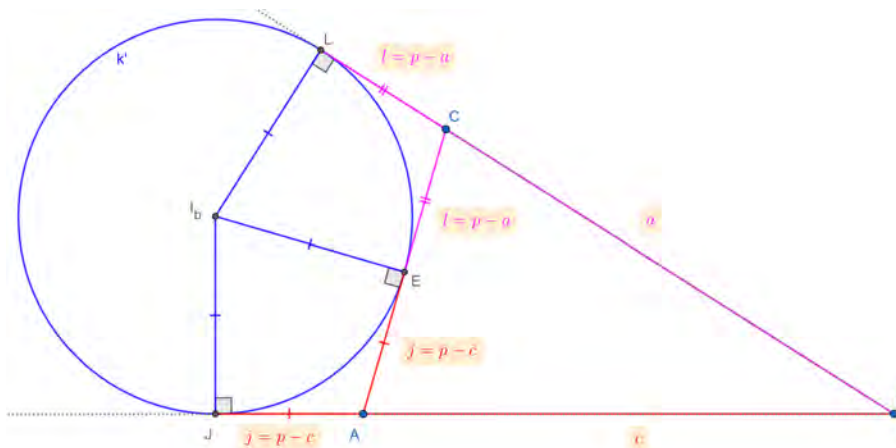


Figura 5.2: Guia para a demonstração da Proposição 17. Versão interativa [aqui](#).

Demonstração. Como os lados do $\triangle ABC$ são tangentes à circunferência k vale que $BL = BJ$, $CL = CE = l$ e $AJ = AE = j$. Considera-se a soma:

$$BL + BJ = a + l + j + c = a + b + c = 2p.$$

Do resultado anterior segue que $BL = BJ = p$. Como $AB = c$ e $BC = a$ obtêm-se:

$$AJ = AE = j = p - c,$$

$$CL = CE = l = p - a.$$

□

Corolário 18. A Figura 5.3 mostra um triângulo ABC . Sejam $AB = c$, $BC = a$ e $CA = b$. Sejam D , E e F os pontos de interseção da circunferência inscrita k com os lados AB , BC e CA , respectivamente. Sejam J , L e N_b os pontos de interseção da circunferência ex-inscrita k' com os prolongamentos dos lados AB e BC e com o lado CA , respectivamente. E seja o semiperímetro $p = \frac{a+b+c}{2}$. Então vale que o ponto M , médio de A e C , também é ponto médio de F e N_b . Adicionalmente,

$$FM = MN_b = \frac{|a - c|}{2}.$$

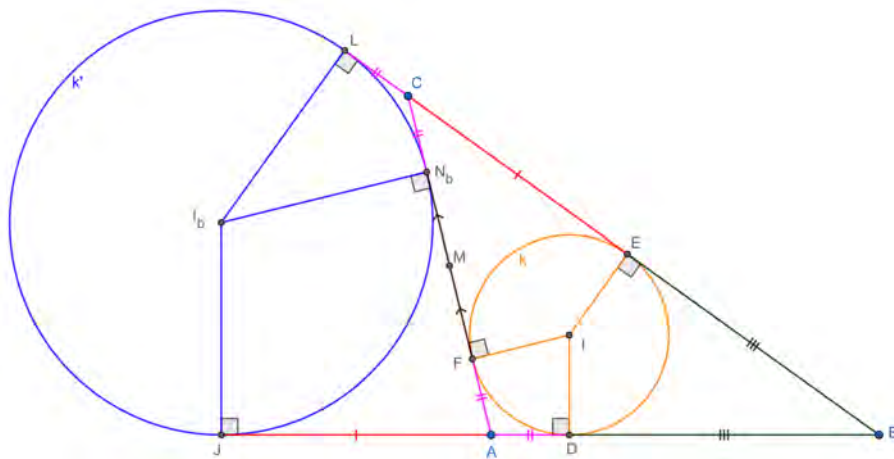


Figura 5.3: Guia para a demonstração do Corolário 18. Versão interativa [aqui](#).

Demonstração. Isto é consequência de $AF = CN_b = p - a$, resultados provados nas Proposições 16 e 17. □

Proposição 19. A Figura 5.4 mostra um triângulo ABC . Seja I seu Incentro e I_a o centro da ex-circunferência correspondente ao lado BC . Seja E o ponto de interseção de AI com a circunferência circunscrita ao $\triangle ABC$. Então

$$EB = EC = EI = EI_a.$$

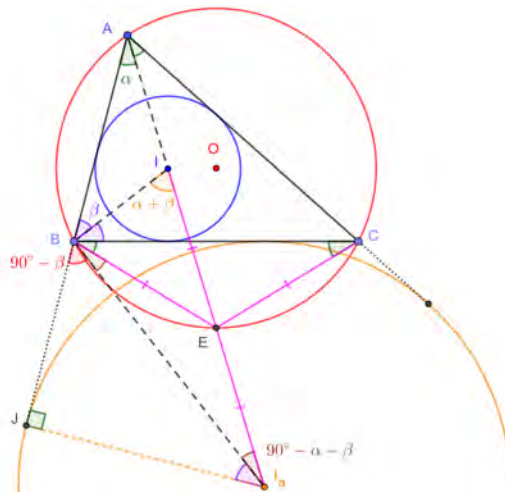


Figura 5.4: Guia para a demonstração da Proposição 19. Versão interativa [aqui](#).

Demonstração. Pela bissetriz em A e o quadrilátero inscritível $ACEB$ tem-se:

$$\angle BAE = \angle CAE = \angle CBE = \angle BCE = \alpha.$$

Portanto, o $\triangle EBC$ é isósceles de base BC e $EB = EC$.

Além disso, da bissetriz em B , sejam $\angle IBA = \angle IBC = \beta$. Pela propriedade do ângulo externo, $\angle BIE = \alpha + \beta$. Segue que, $\angle BIE = \angle IBE$, o $\triangle EBI$ é isósceles de base BI e $EB = EI$.

Pela bissetriz externa em B , sejam $\angle JBI_a = \angle CBI_a = \gamma$. Como o $\angle JBA = 180^\circ$ tem-se que $\gamma = 90^\circ - \beta$. Do $\triangle BJI_a$, retângulo em J , tem-se $\angle JI_aB = \beta$. Pela soma dos ângulos internos no $\triangle AJI_a$ e o ângulo raso em B encontra-se:

$$\angle EBI_a = \angle EI_aB = 90^\circ - \alpha - \beta.$$

Isto é, o $\triangle EBI_a$ é isósceles, de base BI_a , e $EB = EI_a$. Conclui-se que:

$$EB = EC = EI = EI_a.$$

□

Proposição 20 (Distância Incentro-Ortocentro ou Fórmula de Euler). *A Figura 5.5 mostra um triângulo ABC . Seja I seu Incentro, k sua circunferência inscrita de raio r . Adicionalmente, seja m a circunferência circunscrita ao $\triangle ABC$, de centro O e raio R . Então:*

$$OI^2 = R(R - 2r).$$

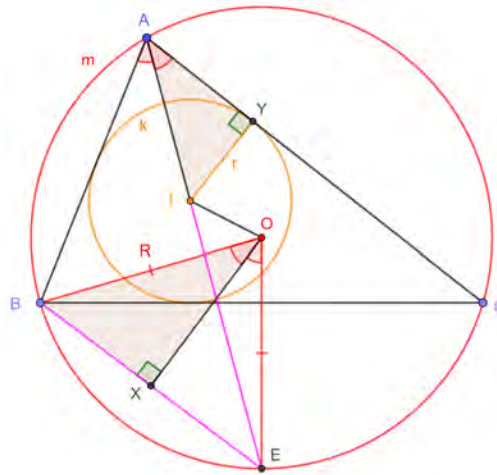


Figura 5.5: Guia para a demonstração da Proposição 20. Versão interativa [aqui](#).

Demonstração. Seja E o ponto de interseção da bissetriz AI com m . Pela Potência do ponto I em relação a m tem-se:

$$R^2 - OI^2 = AI \cdot EI. \tag{5.2.1}$$

Sejam X e Y os pés das perpendiculares de O e I até BE e AC , respectivamente. Como o $\triangle OBE$ é isósceles de base BE , e devido a relação entre ângulo central e inscrito, relativo a corda BE , segue que $\angle YAI = \angle XOB$.

Logo, pelo caso de semelhança **AA**, tem-se $\triangle AIY \sim \triangle OBX$. Portanto,

$$\frac{BX}{IY} = \frac{OB}{AI} \text{ ou } AI = \frac{OB \cdot IY}{BX} = \frac{Rr}{\frac{EB}{2}} = \frac{2Rr}{EB}.$$

Viu-se na Proposição 19 que $EB = EI$, segue que:

$$AI = \frac{2Rr}{EI}. \tag{5.2.2}$$

Substituindo (5.2.2) em (5.2.1) encontra-se $R^2 - OI^2 = 2Rr$. Logo,

$$OI^2 = R^2 - 2Rr.$$

□

5.3 Problemas resolvidos do Capítulo 5

5.3.1 Ex-incírculos. Incentro. Relação de Stewart. P1 IMO 1970.

Problema 16. *Dado um ponto M no lado AB do triângulo ABC , sejam r_1 e r_2 raios das círculos inscritos nos triângulos ACM e BCM , respectivamente e sejam ρ_1 e ρ_2 os raios dos Ex-incírculos dos triângulos ACM e BCM nos lados AM e BM , respectivamente. Sejam r e ρ os raios do círculo inscrito e do Ex-incírculo no lado AB do $\triangle ABC$, respectivamente. Provar que:*

$$\frac{r_1}{\rho_1} \cdot \frac{r_2}{\rho_2} = \frac{r}{\rho}.$$

A IMO 1970 foi realizada na cidade de Keszthely, Hungria. Problema 8 da SL, proposto pela delegação da Polônia e escolhido como primeiro da competição [7].

5.3.1.1 Considerações iniciais para o Problema 16.

Teorema 21 (Relação de Stewart). *Seja D um ponto no lado BC do $\triangle ABC$. Sejam $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $BD = x$, $CD = y$ e $AD = z$. Vale que:*

$$\frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{x} = a + z^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right).$$

Ou equivalentemente:

$$z^2 = \frac{b^2}{a}x + \frac{c^2}{a}y - xy. \quad (5.3.1)$$

Esta relação permite encontrar o comprimento de uma ceviana AD sem precisar conhecer os ângulos por ela determinados. A Figura 5.6 permite acompanhar a prova.

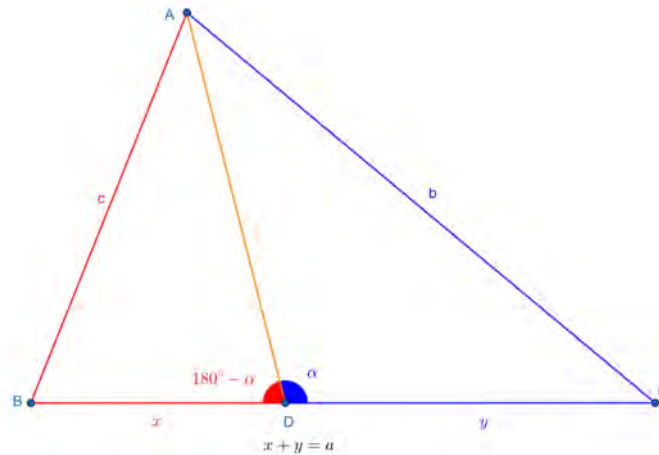


Figura 5.6: Guia para a demonstração do Teorema 21. Versão interativa [aqui](#).

Demonstração. Sejam $\angle ADC = \alpha$ e $\angle ADB = 180^\circ - \alpha$. Pela Lei dos Cossenos aplicada no $\triangle ABD$ tem-se:

$$c^2 = x^2 + z^2 - 2xz \cos(180^\circ - \alpha).$$

Mas $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos(\alpha)$. Logo,

$$c^2 = x^2 + z^2 + 2xz \cos(\alpha),$$

$$\frac{c^2}{x} = x + \frac{z^2}{x} + 2z \cos(\alpha). \quad (5.3.2)$$

Pela Lei dos Cossenos aplicada no $\triangle ACD$ obtêm-se:

$$b^2 = y^2 + z^2 - 2yz \cos(\alpha),$$

$$\frac{b^2}{y} = y + \frac{z^2}{y} - 2z \cos(\alpha). \quad (5.3.3)$$

Somando (5.3.2) e (5.3.3) segue:

$$\frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{x} = x + y + z^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = a + z^2 \frac{a}{xy},$$

$$\frac{b^2x + c^2y}{axy} = 1 + \frac{z^2}{xy},$$

$$z^2 = \frac{b^2x + c^2y}{a} - xy.$$

□

Observação 3. Ainda com referência a Figura 5.6, no caso em que D é o ponto médio de BC vale $x = y = \frac{a}{2}$ e $z = m_a$ (mediana relativa ao vértice A). Utilizando (5.3.1) encontra-se:

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}.$$

5.3.1.2 Resolução do Problema 16.

A Figura 5.7 mostra uma construção geométrica para o Problema 16.

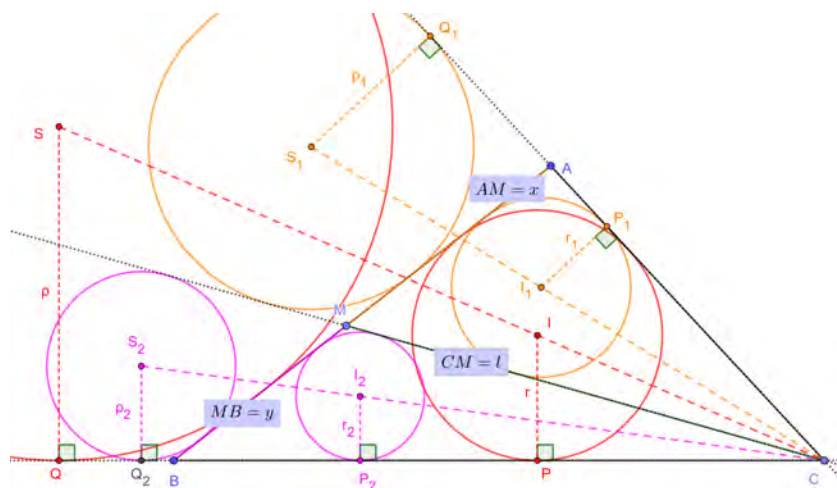


Figura 5.7: Construção geométrica para o Problema 16. Versão interativa [aqui](#).

Sejam $BC = a$, $CA = b$, $AM = x$, $MB = y$ e $CM = l$. Denota-se com I_1 o Incentro e com S_1 o Ex-incentro do Ex-incírculo do $\triangle AMC$. Sejam P_1 e Q_1 os pés das perpendiculares de I_1 e S_1 , respectivamente, à reta AC . Então,

$$\triangle I_1CP_1 \sim \triangle S_1CQ_1,$$

$$\frac{r_1}{\rho_1} = \frac{CP_1}{CQ_1}.$$

Seja p_1 o semiperímetro do $\triangle ACM$. Sabe-se das Proposições 16 e 17 que:

$$CP_1 = p_1 - x = \frac{b + l - x}{2},$$

$$CQ_1 = p_1 = \frac{b + l + x}{2}.$$

Logo,

$$\frac{r_1}{\rho_1} = \frac{b + l - x}{b + l + x}. \tag{5.3.4}$$

Analogamente, denota-se com I_2 o Incentro e com S_2 o centro do Ex-incírculo do $\triangle BMC$. Sejam P_2 e Q_2 os pés das perpendiculares de I_2 e S_2 , respectivamente, à reta BC . Então:

$$\triangle I_2CP_2 \sim \triangle S_2CQ_2,$$

$$\frac{r_2}{\rho_2} = \frac{CP_2}{CQ_2}.$$

Seja p_2 o semiperímetro do $\triangle BCM$. Sabe-se das Proposições 16 e 17 que:

$$CP_2 = p_2 - y = \frac{a + l - y}{2},$$

$$CQ_2 = p_2 = \frac{a + l + y}{2}.$$

Logo,

$$\frac{r_2}{\rho_2} = \frac{a + l - y}{a + l + y}. \quad (5.3.5)$$

Do mesmo modo, denota-se com I o Incentro e com S o centro do Ex-incírculo do $\triangle ABC$. Sejam P e Q os pés das perpendiculares de I e S , respectivamente, à reta BC . Então:

$$\triangle ICP \sim \triangle SCQ,$$

$$\frac{r}{\rho} = \frac{CP}{CQ}.$$

Seja p o semiperímetro do $\triangle ABC$. Sabe-se das Proposições 16 e 17 que:

$$CP = p - c = \frac{a + b - c}{2},$$

$$CQ = p = \frac{a + b + c}{2}.$$

Logo,

$$\frac{r}{\rho} = \frac{a + b - c}{a + b + c}. \quad (5.3.6)$$

Do enunciado do Problema 16 e as equações (5.3.4), (5.3.5) e (5.3.6) resta provar que:

$$\left(\frac{b + l - x}{b + l + x}\right) \cdot \left(\frac{a + l - y}{a + l + y}\right) = \frac{a + b - c}{a + b + c}.$$

Após multiplicar pelos denominadores na equação anterior, lembrando que $c = x + y$ e várias simplificações, encontra-se a Relação de Stewart 21 para a ceviana $CM = l$ do $\triangle ABC$:

$$\frac{b^2}{x} + \frac{a^2}{y} = c + l^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right).$$

5.3.2 Ex-incírculo. Incírculo. Semelhança de triângulos. P4 IMO 1992.

Problema 17. *No plano, sejam dadas uma circunferência k , uma reta l tangente a k , e um ponto M sobre l . Encontrar o Lugar Geométrico dos pontos P que têm a seguinte propriedade: Existem dois pontos Q e R sobre l tais que M é o ponto médio de QR e k é o Incírculo de PQR .*

A IMO 1992 foi realizada na cidade de Moscou, Rússia. Problema 20 da SL, proposto pela delegação da França e escolhido como o P4 da competição [7].

5.3.2.1 Resolução do Problema 17.

A Figura 5.8 mostra uma construção geométrica inicial.

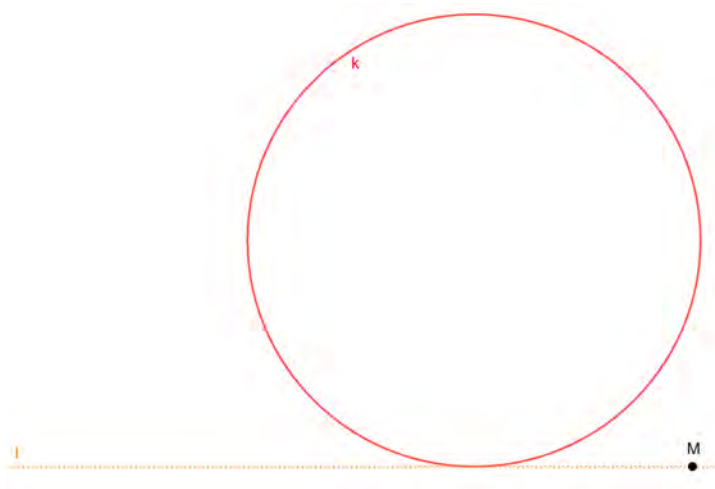


Figura 5.8: Construção geométrica inicial para o Problema 17. Versão interativa [aqui](#).

Denota-se por U o ponto de tangência da circunferência k , de centro S , e a reta l . Sejam X e U' os pontos simétricos de U com relação a S e M , respectivamente. X e U' não dependem da escolha de P . Será provado que o Lugar Geométrico dos pontos P é a parte da semi-reta orientada $U'X$ além do ponto X .

Coloca-se um ponto variável $Q \in l$. A posição do ponto $R \in l$ fica determinada pela equação $QM = MR$. Constroem-se as retas tangentes a k , diferentes de l , partindo de Q e R . Marca-se P na interseção destas tangentes. Adicionalmente, seja k' o Ex-incírculo do $\triangle PQR$, S' o centro de k' , e W e W' os pontos de tangência de k e k' com a reta PQ , respectivamente. A reta PS' é a bissetriz do $\angle QPR$. Nota-se que, pelo Corolário 18, o ponto U' é o ponto de tangência de k' com a reta QR .

Como $WS \parallel W'S'$ e $\angle WPS = \angle W'PS'$ tem-se que $\triangle WSP \sim \triangle W'S'P$. Logo,

$$\frac{WS}{W'S'} = \frac{SP}{S'P} = \frac{WP}{W'P}.$$

Mas $WS = SX$ e $W'S' = S'U'$. Segue que:

$$\frac{SX}{S'U'} = \frac{SP}{S'P}.$$

Adicionalmente, de $SX \parallel S'U'$, então $\angle PSX = \angle PS'U'$. Pelo critério de semelhança **LAL** tem-se que $\triangle PSX \sim \triangle PS'U'$ e o ponto X é colinear com P e U' . Isto é, P é o centro de Homotetia externo das circunferências k e k' , e o ponto X é levado em U' por esta Homotetia.

Dada a configuração inicial do problema basta construir os pontos X e U' para localizar o ponto P na semirreta $U'X$, além de X . A Figura 5.9 mostra uma construção geométrica. No link interativo indicado é possível deslocar o ponto Q para observar o rastro deixado pelo ponto P .

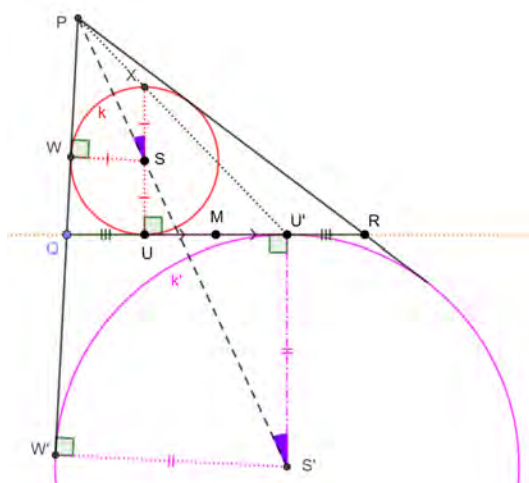


Figura 5.9: Construção geométrica para o Problema 17. Versão interativa [aqui](#).

Reciprocamente, dado um ponto P na semirreta $U'X$, além de X , é possível construir as tangentes a k partindo de P e marcar suas interseções com l . Isto é, encontrar os pontos Q e R . A Homotetia que leva o Incírculo de PQR em seu Ex-incírculo leva o ponto X em U' , pois eles são colineares por hipótese e este é o ponto de tangência do Ex-incírculo com a reta QR . A simetria de Q e R em relação à M segue do Corolário 18 novamente.

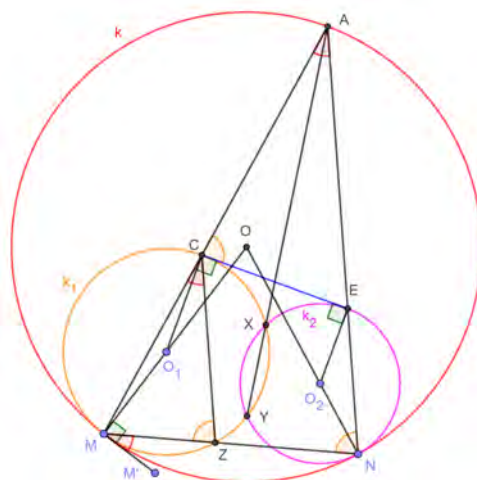


Figura 5.11: Guia para a demonstração do Lema 22. Versão interativa [aqui](#).

Para a construção da Figura 5.11 primeiro esboça-se a circunferência k , de centro O . Segundo, colocam-se os pontos $M \in k$ e $N \in k$ e traçam-se os segmentos OM e ON . Os centros das circunferências k_1 e k_2 são $O_1 \in OM$ e $O_2 \in ON$. Para o Lema 22 N é um ponto semi-livre. Isto é, pode variar sobre a circunferência k . No problema principal $N \in k$, mas sua posição é fixa pela construção.

Demonstração. O ponto A está no Eixo Radical das circunferências k_1 e k_2 . Logo,

$$AC \cdot AM = AX \cdot AY = AE \cdot AN.$$

A equação anterior significa que o quadrilátero $MNEC$ é inscritível.

Seja Z a segunda interseção de MN com k_1 . E seja M' um ponto na tangente comum a k e k_1 em M . Então, pela igualdade entre ângulo inscrito e de segmento, tem-se (como ângulos orientados):

$$\angle MCZ = \angle M'MZ = \angle M'MN = \angle MAN.$$

Isto significa que $CZ \parallel AN$.

Por correspondentes entre paralelas $\angle ANM = \angle CZM$. Como $MNEC$ é cíclico também tem-se que $\angle ACE = \angle ANM$. Como $\angle MO_1C = 2\angle CZM$, e o $\triangle CO_1M$ é isósceles, a igualdade $\angle CZM = \angle ACE$ significa que CE é tangente a k_1 . Analogamente prova-se que k_2 é tangente a CD . \square

Retomando o problema principal, a Figura 5.12 mostra uma construção geométrica. Sejam E e F , respectivamente, as interseções de NA e NB com k_2 . Aplicando o Lema 22, CE e DF são as tangentes externas comuns a k_1 e k_2 .

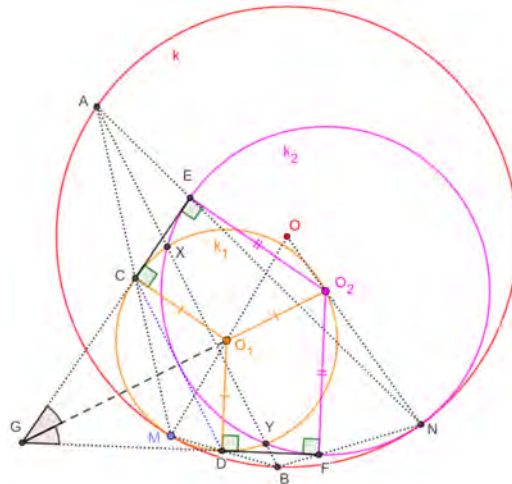


Figura 5.12: Construção geométrica para o Problema 18. Versão interativa [aqui](#).

Quando k_1 e k_2 têm o mesmo raio a reta CD passa pelo ponto O_1 , ponto de tangência com k_2 , o quadrilátero $DFEC$ é um retângulo e o resultado procurado fica provado. Para os outros casos, seja $G = CE \cap DF$.

Os centros O_1 e O_2 estão sobre a bissetriz do $\angle CGD$, devido a k_1 e k_2 serem tangentes a GC e GD . Como $O_1D = O_1C$ e $\angle O_1DG = \angle O_1CG = 90^\circ$, segue que O_1 é o ponto médio do menor arco CD da circunferência circunscrita do $\triangle CDG$.

Pela Proposição 19 encontra-se que O_2 é o Ex-incentro do $\triangle CDG$ oposto a G ou o Incentro. Isto é, k_2 é um Ex-incírculo ou o Incírculo do $\triangle CDG$. Nos dois casos conclui-se que CD é tangente a k_2 .

5.3.4 Bissetrizes. Paralelogramo. Semelhança de triângulos. P16 SL IMO 2005.

Problema 19. *Seja $ABCD$ um paralelogramo e X um ponto do segmento BC , com $X \neq B$. A semi-reta orientada \overrightarrow{AX} intersecta a semi-reta orientada \overrightarrow{DC} no ponto Y . Sejam K e L os centros dos Ex-incírculos dos triângulos ABX e ADY , que tocam os lados BX e DY , respectivamente. Provar que a medida do ângulo KCL não depende da posição do ponto X .*

A IMO 2005 foi realizada na cidade de Mérida, México. Problema 16 da SL, proposto pela delegação da Ucrânia [7]. Adaptado pelo autor.

5.3.4.1 Resolução do Problema 19.

A Figura 5.13 mostra uma construção geométrica inicial para o Problema 19.

De $CB = DA$ e $DC = AB$ e da primeira parte da igualdade de frações anterior segue:

$$\frac{DC}{LD} = \frac{BK}{CB}.$$

Adicionalmente, $\angle LDC = \angle CBK$. Pelo caso de semelhança **LAL**,

$$\triangle LDC \sim \triangle CBK.$$

Logo, $\angle DCL = \angle BKC$ e $\angle CLD = \angle KCB$. Portanto,

$$\begin{aligned} \angle KCL &= 360^\circ - \angle BCD - (\angle DCL + \angle KCB) = \\ &= 360^\circ - \angle BCD - (\angle BKC + \angle KCB) = \\ &= 360^\circ - \angle BCD - (180^\circ - \angle CBK) = \\ &= 180^\circ - \angle BCD + \angle CBK = \angle CBA + \angle CBK, \end{aligned}$$

que é constante. Isto é, o $\angle KCL$ somente depende da construção do paralelogramo $ABCD$ e não da posição do ponto X . A Figura 5.14 mostra uma construção geométrica.

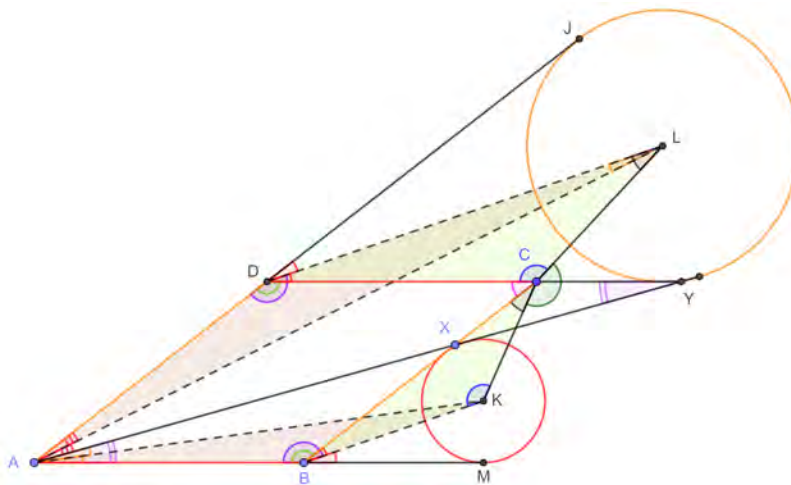


Figura 5.14: Construção geométrica para o Problema 19. Versão interativa [aqui](#).

5.3.5 Ex-incírculo. Potência de um ponto relativo a uma circunferência. Ângulos. P18 **SL IMO** 2006.

Problema 20. Num triângulo ABC , seja J o centro do Ex-incírculo tangente ao lado BC em A_1 e as extensões dos lados AC e AB em B_1 e C_1 , respectivamente. Supor que as retas A_1B_1 e AB são perpendiculares e intersectam-se em D . Seja E o pé da perpendicular de C_1 até o

segmento DJ . Determinar os ângulos BEA_1 e AEB_1 .

A IMO 2006 foi realizada na cidade de Liubliana, Eslovênia. Problema 18 da SL, proposto pela delegação da Grécia [7].

5.3.5.1 Resolução do Problema 20.

A Figura 5.15 mostra uma construção geométrica inicial para o Problema 20.

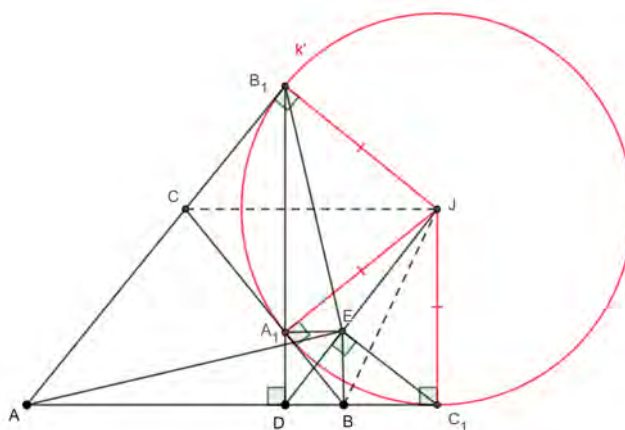


Figura 5.15: Construção geométrica inicial para o Problema 20. Versão interativa [aqui](#).

Consideram-se as circunferências ω_1 , ω_2 e ω_3 de diâmetros C_1D , A_1B e AB_1 , respectivamente. Por construção, os segmentos JC_1 , JA_1 e JB_1 são tangentes a ω_1 , ω_2 e ω_3 , respectivamente. Devido ao ângulo reto em D , ω_2 e ω_3 passam por D .

Como $\angle C_1ED = 90^\circ$ tem-se $E \in \omega_1$. Pela Potência do ponto J em relação a ω_1 [18] pode-se escrever:

$$JC_1^2 = JD \cdot JE.$$

Adicionalmente, de $JA_1 = JB_1 = JC_1$, raios do Ex-incírculo k' , também vale que:

$$JA_1^2 = JD \cdot JE,$$

$$JB_1^2 = JD \cdot JE.$$

Mas pela inversa do Teorema das Cordas [18] as igualdades anteriores significam que $E \in \omega_2$ e $E \in \omega_3$ e $\angle BEA_1 = \angle AEB_1 = 90^\circ$. O ponto E é Centro Radical de ω_1 , ω_2 e ω_3 . A Figura 5.16 mostra uma construção geométrica.

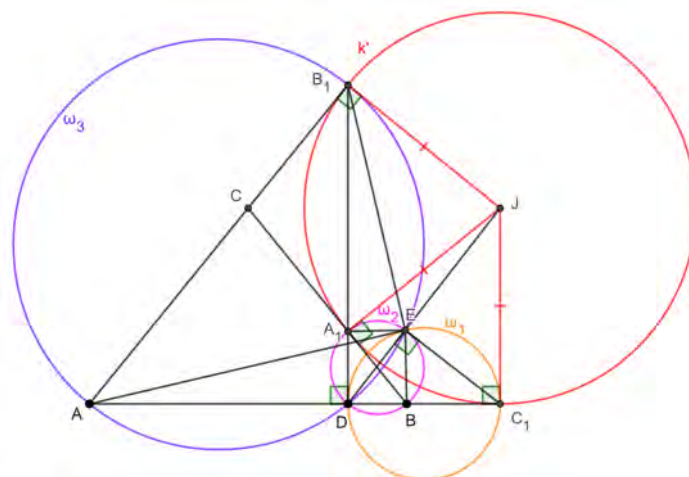


Figura 5.16: Construção geométrica para o Problema 20. Versão interativa [aqui](#).

5.4 Comentários finais do Capítulo 5

Discutiram-se em detalhe cinco problemas propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO). Espera-se que os mesmos sirvam de apoio para estudantes e professores do Ensino Médio e Universitário. As demonstrações envolvidas nas soluções foram complementadas pela disponibilização dos respectivos links das figuras interativas utilizando o GeoGebra. O computador é uma ferramenta poderosa pois permite explorar diversas configurações de uma construção geométrica. Apresentaram-se os conceitos básicos relativo ao Incentro e ao Ex-incentro e as métricas do triângulo associadas com as bissetrizes internas e externas. Uma combinação de outros conteúdos também foram estudados: Relação de Stewart, distância entre Incentro e Ortocentro, Potência de um ponto relativo a uma circunferência e Eixo Radical.

Capítulo 6

Extremos com desigualdades na Geometria

6.1 Introdução do Capítulo 6

Nos Problemas 21 (P1-IMO-1976), 24 (P7-SL-IMO-1999) e 25 (P1-IMO-2001) explora-se a Desigualdade Triangular e das Médias. Os Problemas 22 (P1-IMO-1981) e 23 (P6-IMO-1983) usam fundamentalmente a Desigualdade de Cauchy-Schwarz. Inicia-se com uma introdução dos conceitos básicos que serão utilizados.

6.2 Conceitos básicos do Capítulo 6

Proposição 23 (Ao maior lado corresponde o maior ângulo). *Se dois lados de um triângulo não são congruentes, então os ângulos opostos a estes lados não são congruentes, e o maior ângulo é oposto ao maior lado.*

Demonstração. A Figura 6.1 mostra um triângulo ABC . Pode-se supor, sem perda de generalidade, que $BC > AC$. Marca-se sobre BC o ponto D tal que $AC = CD$. Logo, o $\triangle CAD$ é isósceles de base AD e $\angle CAD = \angle CDA = \theta$. Sejam $\angle CBA = \beta$ e $\angle BAD = \gamma$. Pelo Teorema do Ângulo Externo, aplicado no vértice D do $\triangle BDA$, tem-se $\theta = \beta + \gamma$. Portanto, $\theta > \beta$. Além disso, como $\angle BAC = \alpha = \theta + \gamma$, então $\alpha > \beta$. Isto é, oposto ao maior lado corresponde o maior ângulo. \square

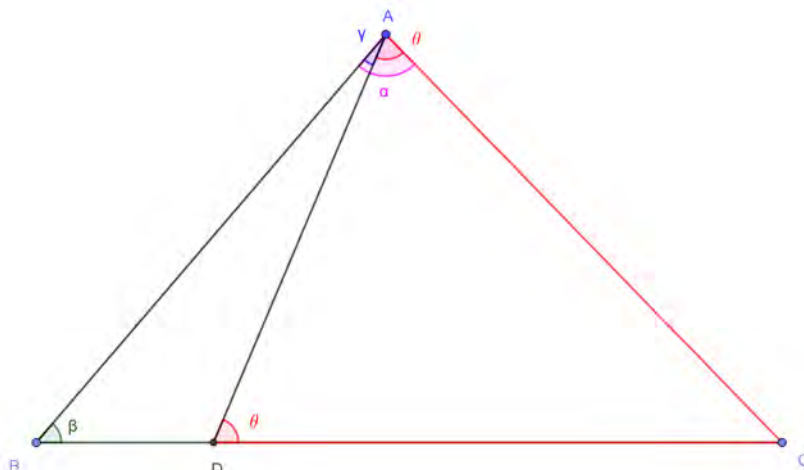


Figura 6.1: Guia para a demonstração da Proposição 23. Versão interativa [aqui](#).

Ainda na Figura 6.1, por redução ao absurdo e a Proposição 23 prova-se a recíproca. Isto é, se $\alpha > \beta$, então $BC > AC$.

Proposição 24 (Desigualdade Triangular). *A soma dos comprimentos de dois lados quaisquer de um triângulo é maior que o comprimento do terceiro lado.*

Demonstração. Basta mostrar que o maior lado é menor que a soma dos outros dois. A Figura 6.2 mostra um triângulo ABC com $\angle ABC = \beta$. Pode-se supor, sem perda de generalidade, que $BC > CA > AB$. Estende-se a semirreta CA e marca-se o ponto $D \in CA$ de tal forma que $AD = AB$. Seja $\angle DBC = \gamma$. Como o $\triangle ABD$ é isósceles de base BD tem-se $\angle ABD = \angle ADB = \theta$. Adicionalmente, de

$$\angle DBC = \gamma = \theta + \beta > \theta = \angle BDA$$

e da Proposição 23, segue que:

$$CD = CA + AD = CA + AB > BC.$$

□

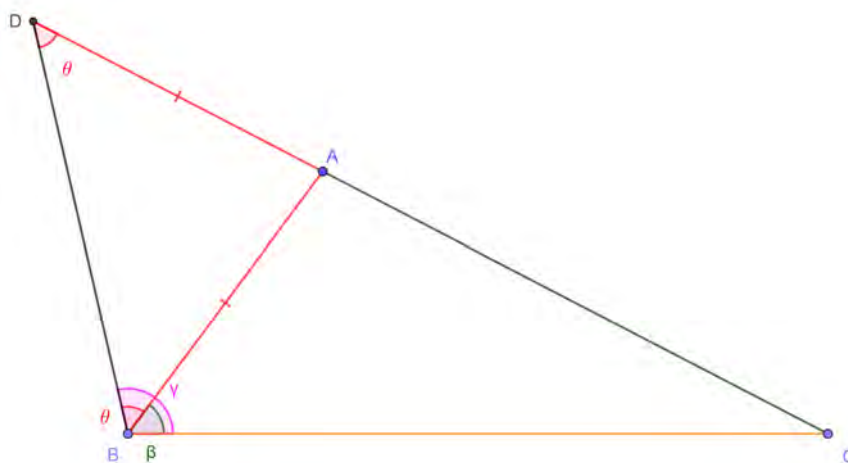


Figura 6.2: Guia para a demonstração da Proposição 24. Versão interativa [aqui](#).

Proposição 25 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). *Dadas duas sequências de números reais (a_1, a_2, \dots, a_n) e (b_1, b_2, \dots, b_n) então:*

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \quad (6.2.1)$$

e vale a igualdade quando $b_i = \lambda a_i$ para todo $1 \leq i \leq n$, com λ real.

Demonstração. Considera-se a função real de variável real:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n (a_i x - b_i)^2.$$

Desenvolvendo o quadrado e colocando x em evidência pode-se escrever:

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) x^2 - 2 \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right) x + \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right).$$

Isto é, f é um polinômio de segundo grau na variável x . Como f é uma soma de quadrados, então $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por consequência, o discriminante é negativo ou igual a zero:

$$\Delta = 4 \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 - 4 \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) \leq 0.$$

Dividindo por 4 chega-se a desigualdade de Cauchy-Schwarz reescrita com os símbolos de somatórios:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2.$$

A igualdade acontece quando o discriminante é zero. Nesse caso f tem uma raiz dupla $x = \lambda$. Mas isto corresponde a escrever:

$$f(\lambda) = \sum_{i=1}^n (a_i \lambda - b_i)^2 = 0.$$

Como as sequências (a_n) e (b_n) são de números reais, os quadrados são não negativos. A única possibilidade é que $a_i \lambda - b_i = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$. Isto é, acontece a igualdade na desigualdade de Cauchy-Schwarz quando as sequências (a_n) e (b_n) são proporcionais. \square

Uma verificação interativa da Desigualdade de Cauchy-Schwarz, com sequências bidimensionais, pode ser feita [aqui](#).

Proposição 26 (Desigualdade das Médias Aritmética e Geométrica). *Seja $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ uma lista de números reais positivos com $n \geq 2$, então:*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i},$$

em que

$$\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_n,$$

$$\prod_{i=1}^n x_i = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n.$$

A igualdade ocorre quando $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Demonstração. Caso $n = 2$: Quer-se provar que:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 \cdot x_2}.$$

Multiplicando os dois lados por 2 e elevando ao quadrado tem-se:

$$(x_1 + x_2)^2 \geq 4x_1 \cdot x_2.$$

Desenvolvendo o quadrado e simplificando obtêm-se outras sentenças equivalentes:

$$x_1^2 + 2x_1 \cdot x_2 + x_2^2 \geq 4x_1 \cdot x_2,$$

$$x_1^2 - 2x_1 \cdot x_2 + x_2^2 \geq 0,$$

$$(x_1 - x_2)^2 \geq 0.$$

Mas o quadrado de um número real é sempre não negativo. A igualdade acontece quando $x_1 = x_2$. \square

A demonstração para $n > 2$ pode ser encontrada, por exemplo, em [33]. A Figura 6.3 ilustra as desigualdades envolvendo os comprimentos dos segmentos AB e BC :

$$\max\{AB, BC\} \geq M_Q \geq M_A \geq M_G \geq M_H \geq \min\{AB, BC\},$$

onde

$$M_Q(AB, BC) = BD = \sqrt{\frac{AB^2 + BC^2}{2}},$$

$$M_A(AB, BC) = MA = MC = MD = ME = \frac{AB + BC}{2},$$

$$M_G(AB, BC) = BE = \sqrt{AB \cdot BC},$$

$$M_H(AB, BC) = FE = \frac{2}{\frac{1}{AB} + \frac{1}{BC}},$$

são as Médias Quadráticas M_Q , Aritmética M_A , Geométrica M_G e Harmônica M_H . Em todos os casos, a igualdade somente acontece quando $AB = BC$.

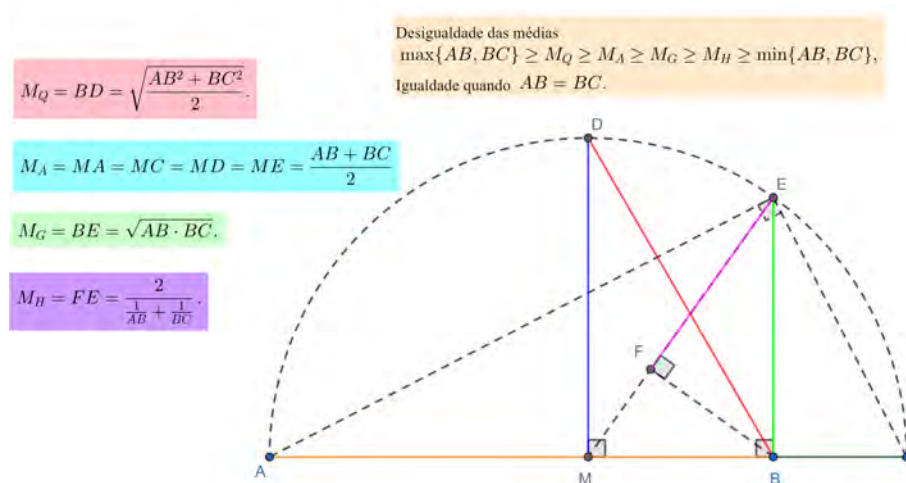


Figura 6.3: Desigualdades envolvendo os comprimentos dos segmentos AB e BC . Versão interativa [aqui](#). Pode ser verificada a desigualdade movimentando o ponto B .

Para o cálculo da Média Quadrática M_Q primeiro nota-se que:

$$MB = \frac{AB - BC}{2}.$$

Segundo, utiliza-se o Teorema de Pitágoras no $\triangle MBD$, retângulo em M :

$$BD^2 = \left(\frac{AB + BC}{2}\right)^2 + \left(\frac{AB - BC}{2}\right)^2$$

e o resultado segue.

Para o cálculo da Média Geométrica M_G utiliza-se uma das relações métricas no $\triangle AEC$, retângulo em E : “Altura ao quadrado é igual ao produto das projeções”. Ou seja:

$$BE^2 = AB \cdot BC.$$

E para o cálculo da Média Harmônica M_H foca-se no $\triangle MBE$, retângulo em B : “Cateto ao quadrado é o produto da hipotenusa com a sua projeção”. Ou seja:

$$BE^2 = ME \cdot FE.$$

Como $ME = M_A$ e $BE = M_G$ segue que:

$$\frac{2}{M_H} = \frac{2}{FE} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{BC}.$$

6.3 Problemas resolvidos do Capítulo 6

6.3.1 Desigualdade Triangular. Desigualdade das Médias. Áreas. P1 IMO 1976.

Problema 21. *Num quadrângulo convexo com área 32 cm^2 , a soma dos comprimentos de dois lados não adjacentes e uma diagonal é igual a 16 cm . a) Qual é o comprimento da outra diagonal? b) Quais são os comprimentos dos lados do quadrângulo se o perímetro é um mínimo? c) Será possível escolher os lados para que o perímetro seja um máximo?*

A IMO 1976 foi realizada na cidade de Lienz, Áustria. Problema 3 da SL, proposto pela delegação da antiga Checoslováquia e escolhido como P1 da competição [7].

6.3.1.1 Resolução do Problema 21.

A Figura 6.4 mostra uma construção geométrica inicial do Problema 21.

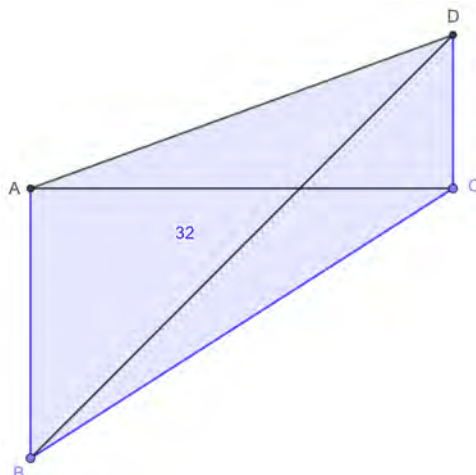


Figura 6.4: Construção geométrica inicial para o Problema 21. Versão interativa [aqui](#).

Um quadrângulo é uma figura plana que consiste em quatro pontos, cada um unido a outros dois por segmentos (que se intersectam ou não). Quando o quadrângulo é convexo, equivale a um quadrilátero convexo.

Todas as unidades de comprimento são dadas em cm e as de área em cm^2 . As mesmas serão omitidas no que segue. Seja $S = 32$ e

$$d = 16 = AB + CD + AC. \quad (6.3.1)$$

a) A área do quadrângulo $ABCD$ pode ser calculada pela soma das áreas dos $\triangle ABC$ e $\triangle ACD$, onde AC é o lado comum. Adicionalmente, para medidas fixas de dois lados, o ângulo, determinado por estes, que maximiza a área de um triângulo é 90° . Ou seja, acontece o máximo quando os dois triângulos são retângulos:

$$S \leq \frac{1}{2}AC(AB + CD).$$

Utilizando (6.3.1) reescreve-se a desigualdade anterior como:

$$S \leq \frac{1}{2}AC(d - AC). \quad (6.3.2)$$

Por outro lado, considerando AC como variável e utilizando a Desigualdade das Médias Geométrica e Aritmética (Proposição 26) no conjunto de números positivos $\{AC, d - AC\}$ tem-se:

$$\begin{aligned} \sqrt{AC(d - AC)} &\leq \frac{AC + (d - AC)}{2}, \\ AC(d - AC) &\leq \frac{d^2}{4}. \end{aligned} \quad (6.3.3)$$

A igualdade acontece quando $AC = d - AC$ ou $AC = \frac{d}{2}$. Considerando (6.3.2) e (6.3.3) encontra-se:

$$S \leq \frac{d^2}{8}.$$

Utilizando os números dados para d e S conclui-se que somente é possível a igualdade. Isto é, $AC = AB + CD = 8$, $AB \perp AC$ e $CD \perp AC$. Seja $CD = x$ e $AB = 8 - x$.

Constrói-se a reta AB e traça-se por D uma reta l paralela com AC (Figura 6.5). Marque-se o ponto $E = AB \cap l$. O triângulo BED , retângulo em E , é isósceles de base BD . Logo, o comprimento é:

$$BD = 8\sqrt{2}.$$

b) Para encontrar o valor mínimo do perímetro do quadrilátero $ABCD$ basta minimizar a soma $BC + AD$, pois $AB + CD = 8$. Para isso, posiciona-se um ponto F de tal forma que o quadrilátero $ACFD$ seja um paralelogramo. Isto é, $DF = 8$ e $AD = CF$. Constrói-se também o segmento BF .

Aplicando a Desigualdade Triangular (Proposição 24) no $\triangle BCF$ tem-se:

$$BC + CF = BC + AD \geq BF.$$

Isto é, o valor mínimo de $BC + AD$ é BF e, nesse caso, $C \in BF$. Utilizando o Teorema de Pitágoras no $\triangle BEF$ encontra-se $BF = 8\sqrt{5}$.

Por outro lado, quando $C \in BF$, pelo critério de semelhança **AA**, tem-se $\triangle FDC \sim \triangle FEB$. Da proporcionalidade dos lados segue que:

$$CF = AD = \frac{BF}{2}, \quad DC = \frac{EB}{2} = 4.$$

Logo, $AD = BC = 4\sqrt{5}$ e $AB = CD = 4$.

c) Assuma-se, sem perda de generalidade, que $CD < AB$. Neste caso, o ponto C está no interior do $\triangle BDF$ e vale que:

$$BC + AD = BC + CF \leq BD + DF.$$

Isto é, o valor máximo da soma $BC + AD$ é atingido quando os pontos C e D coincidem e o quadrângulo $ABCD$ é degenerado. A Figura 6.5 mostra os detalhes das construções geométricas dos itens a), b) e c).

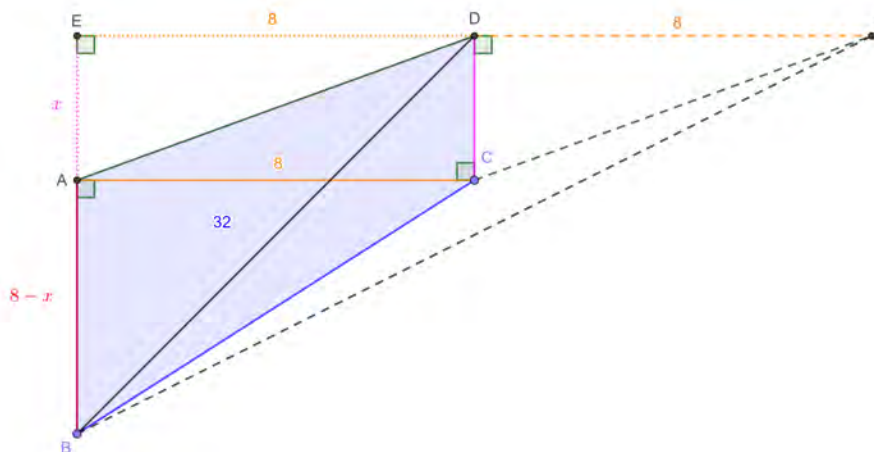


Figura 6.5: Construção geométrica para o Problema 21. Versão interativa [aqui](#). Pode ser movimentado o ponto B para encontrar o perímetro mínimo.

6.3.2 Desigualdade de Cauchy-Schwarz. Incentro. Áreas. P1 IMO 1981.

Problema 22. Encontrar o ponto P no interior de um $\triangle ABC$ para o qual a soma:

$$\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF} \quad (6.3.4)$$

é mínima, em que PD , PE e PF são as perpendiculares de P a BC , CA e AB , respectivamente.

A IMO 1981 foi realizada na cidade de Washington, EUA. Problema 15 da SL, proposto pela delegação do Reino Unido e escolhido como P1 da competição [7].

6.3.2.1 Resolução do Problema 22.

Nota-se que para qualquer ponto P no interior do $\triangle ABC$ a soma:

$$BC \cdot PD + CA \cdot PE + AB \cdot PF \quad (6.3.5)$$

é duas vezes a área do mesmo. Isto é, o resultado é constante (não depende de P).

Da Desigualdade de Cauchy-Schwarz (Proposição 25) escreve-se:

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2.$$

Identificando em (6.3.5) que $a_1^2 = BC \cdot PD$, $a_2^2 = CA \cdot PE$, $a_3^2 = AB \cdot PF$ e em (6.3.4)

que $b_1^2 = \frac{BC}{PD}$, $b_2^2 = \frac{CA}{PE}$ e $b_3^2 = \frac{AB}{PF}$ tem-se:

$$(BC \cdot PD + CA \cdot PE + AB \cdot PF) \left(\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF} \right) \geq (BC + CA + AB)^2.$$

A igualdade, que representa o valor mínimo de (6.3.4), acontece quando as sequências (a_n) e (b_n) são proporcionais. Isto é, quando existe um número λ tal que:

$$(a_1, a_2, a_3) = (\lambda b_1, \lambda b_2, \lambda b_3).$$

Logo, $\lambda = PD = PE = PF$. Portanto, o ponto P que minimiza (6.3.4) é o Incentro do $\triangle ABC$. A Figura 6.6 mostra uma construção geométrica.

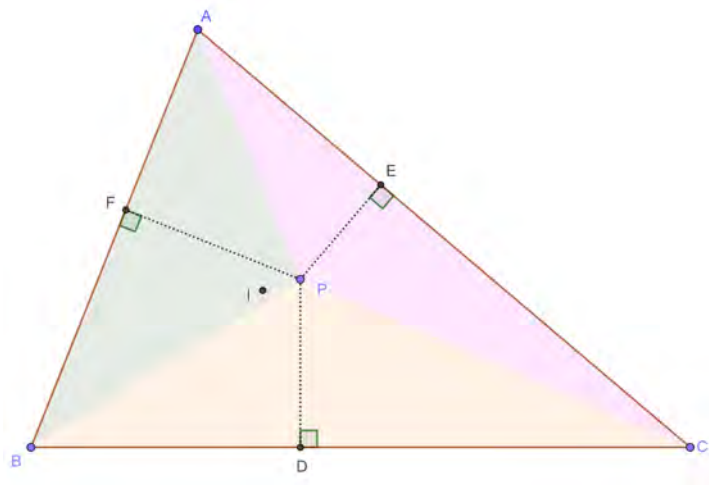


Figura 6.6: Construção geométrica para o Problema 22. Versão interativa [aqui](#). Movimentando o ponto P pode-se verificar o mínimo.

6.3.3 Desigualdade de Cauchy-Schwarz. Incírculo. Tangentes. P6 IMO 1983.

Problema 23. Se a, b e c são lados de um triângulo, provar que:

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0. \quad (6.3.6)$$

Determinar quando vale a igualdade.

A IMO 1983 foi realizada na cidade de Paris, França. Problema 9 da SL, proposto pela delegação dos Estados Unidos e escolhido como P6 da competição [7].

6.3.3.1 Resolução do Problema 23.

Constrói-se a circunferência inscrita d no $\triangle ABC$ e marcam-se os pontos de interseção A' , B' e C' de d com os lados BC , CA e AB , respectivamente, conforme apresentado na Figura 6.7.

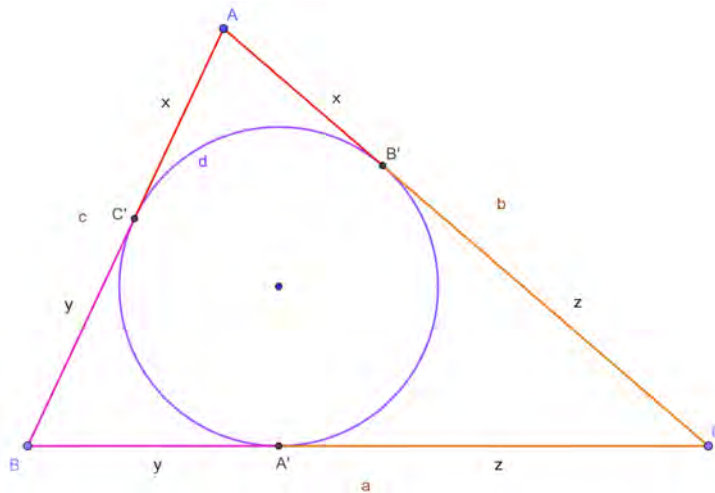


Figura 6.7: Construção geométrica para o Problema 23. Versão interativa [aqui](#). Movimentando o ponto A pode-se verificar o mínimo.

Devido a tangência têm-se $AB' = AC' = x$, $BA' = BC' = y$ e $CA' = CB' = z$. Logo,

$$\begin{aligned} a &= y + z, \\ b &= z + x, \\ c &= x + y. \end{aligned} \tag{6.3.7}$$

Substituindo (6.3.7) em (6.3.6), segue:

$$(y + z)^2(z + x)(y - x) + (z + x)^2(x + y)(z - y) + (x + y)^2(y + z)(x - z) \geq 0.$$

Expandindo e simplificando tem-se:

$$xy^3 + yz^3 + zx^3 \geq xyz(y + z + x).$$

Multiplicando os dois lados pelo número positivo $z + x + y$ encontra-se uma Desigualdade de Cauchy-Schwarz (Proposição 25):

$$(xy^3 + yz^3 + zx^3)(z + x + y) \geq [\sqrt{xyz}(y + z + x)]^2.$$

As duas seqüências que dão origem a desigualdade anterior são:

$$(y\sqrt{xy}, z\sqrt{yz}, x\sqrt{zx}),$$

$$(\sqrt{z}, \sqrt{x}, \sqrt{y}).$$

A igualdade acontece quando as seqüências são proporcionais. Isto é,

$$\frac{xy^3}{z} = \frac{yz^3}{x} = \frac{zx^3}{y}.$$

Como x , y e z são números reais positivos existe uma única solução para a igualdade anterior: $x = y = z$. Logo, $a = b = c$. A Figura 6.7 mostra uma construção geométrica.

6.3.4 Desigualdade Triangular. Bases Médias. Paralelogramo. P7 SL IMO 1999.

Problema 24. *Seja ABC um triângulo e M um ponto em seu interior. Provar que:*

$$\min\{MA, MB, MC\} + MA + MB + MC < AB + BC + CA.$$

A IMO 1999 foi realizada na cidade de Bucareste, Romênia. Problema 7 da SL, proposto pela delegação da Armênia [7].

6.3.4.1 Resolução do Problema 24.

Lema 27. *Seja M um ponto no interior de uma quadrilátero convexo $ABCD$. Então vale que:*

$$AM + MB < BC + CD + DA.$$

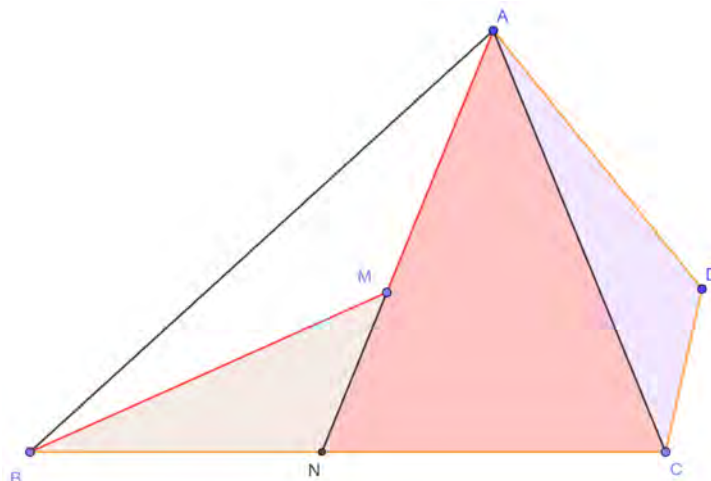


Figura 6.8: Construção geométrica para o Lema 27. Versão interativa [aqui](#).

Demonstração. A Figura 6.8 mostra uma construção geométrica. Seja $N = AM \cap BC$. Aplica-se a Desigualdade Triangular (Proposição 24) aos triângulos $\triangle MNB$, $\triangle ANC$ e $\triangle CDA$.

No $\triangle MNB$ vale que $MB < MN + NB$, logo:

$$AM + MB < AM + MN + NB = AN + NB. \quad (6.3.8)$$

No $\triangle ANC$ tem-se $AN < NC + CA$. Com isto segue:

$$AN + NB < NC + CA + NB = CA + BC. \quad (6.3.9)$$

E no $\triangle CDA$ vale que $CA < CD + DA$. Portanto,

$$CA + BC < CD + DA + BC. \quad (6.3.10)$$

Concatenando (6.3.8), (6.3.9) e (6.3.10) fica provado o lema. \square

Sejam E , F e J os pontos médios de BC , AC e AB , respectivamente, como mostrado na Figura 6.9. Qualquer ponto M no interior do $\triangle ABC$ está no interior de, pelo menos, dois dos quadriláteros $ABEF$, $BCFJ$ e $CAJE$. Pode-se supor, sem perda de generalidade, que:

$$MB = \min\{MA + MB + MC\}.$$

Isto é, M está no interior de $ABEF$ e $BCFJ$.

Aplicando o Lema 27 ao quadrilátero $ABEF$ tem-se:

$$AM + MB < BE + EF + FA. \quad (6.3.11)$$

6.3.5.1 Resolução do Problema 25.

A Figura 6.10 mostra uma construção geométrica para o Problema 25.

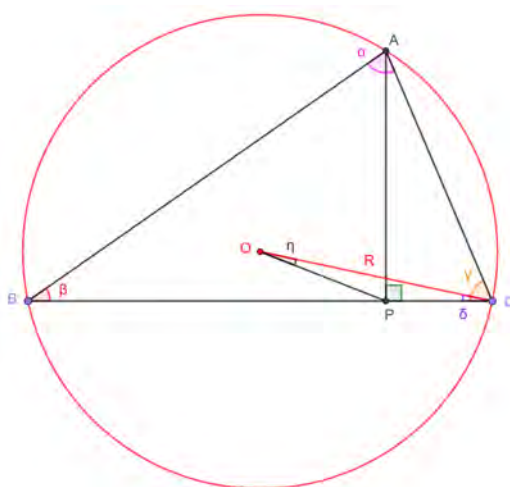


Figura 6.10: Construção geométrica para o Problema 25. Versão interativa [aqui](#).

Sejam $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$, $\angle OCP = \delta$ e $\angle COP = \eta$. Tem-se $\gamma \geq \beta + 30^\circ$. Como um ângulo central $\angle BOC = 2\alpha$ é duas vezes o inscrito $\angle BAC = \alpha$ e o $\triangle OBC$ é isósceles. Segue que:

$$\angle OCB = \delta = 90^\circ - \alpha.$$

Do enunciado do Problema 25 quer-se provar que $\eta < \delta$. Pela Proposição 6.1, aplicada no $\triangle COP$, o anterior equivale a demonstrar que $PC < OP$.

Por sua vez, para verificar que $PC < OP$ bastará mostrar que:

$$2 \cdot PC < OC = R. \quad (6.3.13)$$

De fato, aplicando a Desigualdade Triangular (Proposição 24) no $\triangle OCP$ e multiplicando por 2 pode-se escrever:

$$2R < 2 \cdot OP + 2 \cdot PC.$$

Utilizando (6.3.13) tem-se:

$$2R < 2 \cdot OP + R,$$

$$R < 2 \cdot OP. \quad (6.3.14)$$

Logo, de (6.3.13) e (6.3.14) segue:

$$2 \cdot PC < R < 2 \cdot OP \Rightarrow PC < OP.$$

Devido ao $\angle CPA = 90^\circ$ segue:

$$PC = AC \cos(\gamma).$$

Mas pela Lei dos Senos no $\triangle ABC$ tem-se:

$$2R = \frac{AC}{\operatorname{sen}(\beta)}.$$

Logo,

$$PC = 2R \operatorname{sen}(\beta) \cos(\gamma).$$

Utilizando a hipótese $\gamma \geq \beta + 30^\circ$ e o fato da função cosseno ser decrescente no intervalo entre 0° e 90° encontra-se:

$$PC < 2R \operatorname{sen}(\beta) \cos(\beta + 30^\circ).$$

Resta mostrar que:

$$2 \operatorname{sen}(\beta) \cos(\beta + 30^\circ) < \frac{1}{2}.$$

De fato, utilizando as identidades do cosseno e seno da soma de dois ângulos tem-se:

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{sen}(\beta) \cos(\beta + 30^\circ) &= 2 \operatorname{sen}(\beta) [\cos(\beta) \cos(30^\circ) - \operatorname{sen}(\beta) \operatorname{sen}(30^\circ)] \\ &= \operatorname{sen}(2\beta) \cos(30^\circ) - 2 \operatorname{sen}^2(\beta) \operatorname{sen}(30^\circ). \end{aligned}$$

Somando e subtraindo $\operatorname{sen}(30^\circ)$ do lado direito encontra-se:

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{sen}(\beta) \cos(\beta + 30^\circ) &= \operatorname{sen}(2\beta) \cos(30^\circ) + [1 - 2 \operatorname{sen}^2(\beta)] \operatorname{sen}(30^\circ) - \operatorname{sen}(30^\circ) \\ &= \operatorname{sen}(2\beta) \cos(30^\circ) + \cos(2\beta) \operatorname{sen}(30^\circ) - \operatorname{sen}(30^\circ) \\ &= \operatorname{sen}(2\beta + 30^\circ) - \operatorname{sen}(30^\circ) \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Como a função seno é sempre menor ou igual a um e $\operatorname{sen}(30^\circ) = \frac{1}{2}$ a última desigualdade é verdadeira. Isto conclui a demonstração.

6.4 Comentários finais do Capítulo 6

Foram discutidos em detalhe cinco problemas propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática. Nos Problemas 21, 24 e 25 exploram-se a Desigualdade Triangular e das Médias. Os Problemas 22 e 23 utilizaram fundamentalmente a Desigualdade de Cauchy-Schwarz. As demonstrações envolvidas nas soluções foram complementadas pela disponibilização dos res-

pectivos links das figuras interativas no GeoGebra. Adicionalmente, foram apresentados os conceitos básicos relativos as desigualdades envolvidas. Uma combinação de outros conteúdos também foram abordados: Lei dos Senos e Trigonometria, Bases Médias e Paralelogramo, Incírculo, tangentes e áreas.

Capítulo 7

Transformação de Inversão

7.1 Introdução do Capítulo 7

Inicia-se na seção 7.2 com uma introdução dos conceitos básicos sobre a Transformação de Inversão. Na seção 7.3 são resolvidos cinco desafios propostos para as IMOs. Nos Problemas 28 e 29 apresentam-se duas soluções para cada um, sem utilizar a inversão e usando a Transformação de Inversão.

7.2 Conceitos básicos do Capítulo 7

Definição 5. *Dados um plano l , uma circunferência $i \in l$, com centro O e raio r , e um ponto $P \in l$, o ponto P' que pertence a semirreta OP e satisfaz*

$$OP' \cdot OP = r^2$$

é chamado inverso de P em relação a i (Figura 7.1). O ponto O é chamado “centro de inversão” e i é chamada de “circunferência de inversão”. Também utiliza-se a notação

$$P' = \text{Inv}(P, i).$$

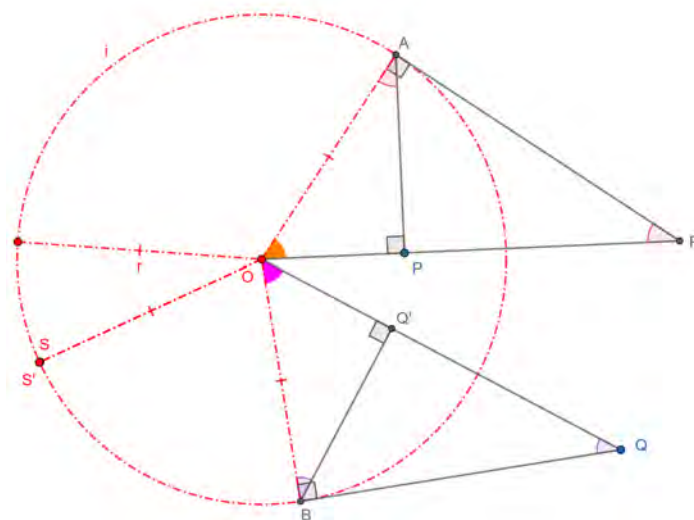


Figura 7.1: Ilustração da Definição 5 e da construção dos pontos inversos P' e Q' . Quando $S \in i \Rightarrow S' = S$. Versão interativa [aqui](#).

Os pontos no interior de i são transformados em pontos no exterior de i e vice-versa. Também convencionou-se que “o infinito”, denotado pelo símbolo ∞ , e o centro de inversão O formam um par inversivo.

Segue diretamente da Definição 5 que os pontos sobre a circunferência de inversão são invariantes. Isto é, quando o ponto $S \in i \Rightarrow S' = S$. Adicionalmente, $P = Inv(Inv(P, i), i)$. Ou seja, $P' = Inv(P, i)$ se, e somente se, $P = Inv(P', i)$.

A seguir descreve-se um procedimento de construção do inverso P' , com régua e compasso, quando o ponto P está no **interior** da circunferência de inversão (Figura 7.1):

1. Traçar a semirreta OP .
2. Traçar uma perpendicular a OP passando por P e marcar o ponto A na interseção desta com i .
3. Construir o segmento OA . Traçar uma tangente a i passando por A e marcar o ponto P' na interseção desta com a reta OP .

Como $\angle AOP = \angle AOP'$ (comum) e $\angle OPA = \angle OAP' = 90^\circ$ tem-se $\triangle OPA \sim \triangle OAP'$. Segue que

$$\frac{AP}{P'A} = \frac{AO}{P'O} = \frac{PO}{AO} \Rightarrow OP \cdot OP' = OA^2 = r^2.$$

Segue o procedimento de construção do inverso Q' , quando o ponto Q está no **exterior** da circunferência de inversão (Figura 7.1):

1. Traçar a semirreta OQ .

2. Traçar uma tangente a i partindo de Q e marcar o ponto de tangência B . Construir o segmento OB .
3. Marcar Q' como a projeção ortogonal de B sobre OQ .

Analogamente ao caso anterior vale $\triangle OQB \sim \triangle OBQ'$ e

$$OQ \cdot OQ' = OB^2 = r^2.$$

Proposição 28 (Propriedade dos inversos de dois pontos). *Considera-se uma circunferência de inversão i de centro O e raio r (Figura 7.2). Sejam os pontos P, Q , (não colineares com O e diferentes deste) e $P' = \text{Inv}(P, i)$ e $Q' = \text{Inv}(Q, i)$. Então $\triangle OPQ \sim \triangle OQ'P'$ e*

$$Q'P' = \frac{r^2}{OP \cdot OQ} PQ.$$

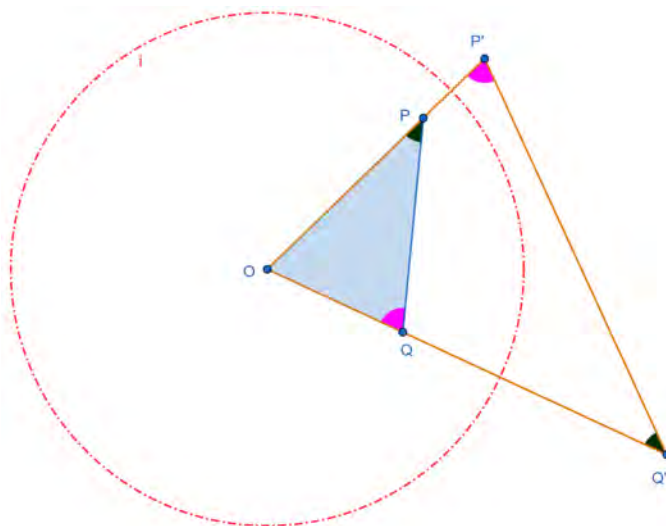


Figura 7.2: Guia para a demonstração da Proposição 28. Versão interativa [aqui](#).

Demonstração. Tem-se,

$$OP \cdot OP' = OQ \cdot OQ' = r^2. \quad (7.2.1)$$

Isto é,

$$\frac{OP}{OQ} = \frac{OQ'}{OP'}.$$

Como $\angle POQ = \angle Q'OP'$ (comum), pelo critério de semelhança lado-ângulo-lado, segue que: $\triangle OPQ \sim \triangle OQ'P'$. Com isto:

$$\angle OPQ = \angle OQ'P',$$

$$\angle OQP = \angle OP'Q'.$$

Também vale que:

$$\frac{OQ}{OP'} = \frac{PQ}{Q'P'}.$$

Na equação anterior coloca-se em evidência $Q'P'$ e de (7.2.1) utiliza-se $OP' = \frac{r^2}{OP}$ para concluir que:

$$Q'P' = \frac{r^2}{OP \cdot OQ} PQ.$$

□

Até aqui apresentou-se a inversão de pontos isoladamente. A seguir estudam-se os inversos dos lugares geométricos (LG) reta e circunferência. Isto é, conjuntos de pontos.

Definição 6. *Dados um plano l e um lugar geométrico $f \in l$, o LG $f' \in l$, é chamado inverso de f quando o ponto $P \in f$ se, e somente se, o ponto $P' \in f'$.*

Embora $P' \neq P$ em geral, existem casos em que o LG não muda após a inversão.

Proposição 29 (Inversão de reta que passa por O). *A inversa h' de uma reta h que passa por O é ela mesma. Ou seja, $h' = Inv(h, i) = h$ (Figura 7.3).*

Demonstração. Segue diretamente da Definição 5. Os pontos no interior de i e sobre a semirreta OC transformam-se nos pontos no exterior de i e vice-versa. Convencionou-se que “o infinito”, denotado pelo símbolo ∞ , pertence a toda reta h . Logo, $O = Inv(\infty, i)$ e $\infty = Inv(O, i)$ pertencem tanto a h quanto a h' . □

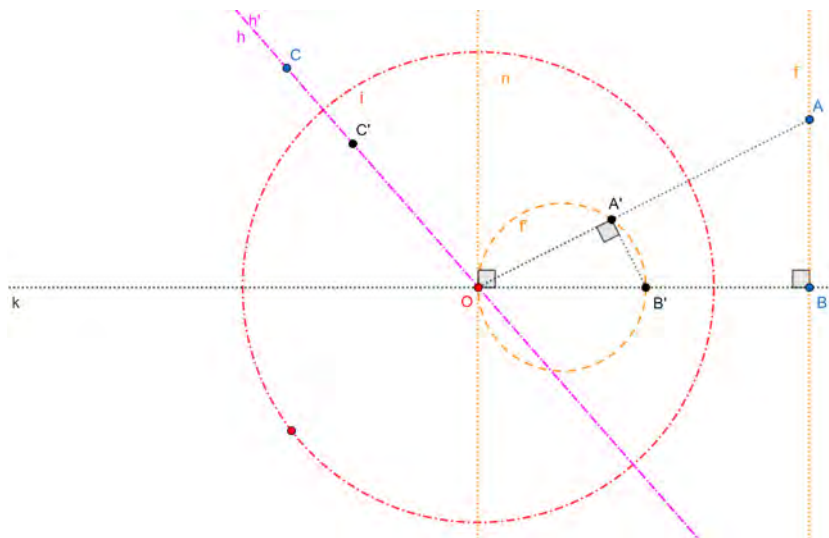


Figura 7.3: Guia para a demonstração das Proposições 29, 30 e 31. Versão interativa [aqui](#). Podem movimentar-se os pontos A , B e C e mudar o raio da circunferência de inversão i .

Proposição 30 (Inversão de reta que **não** passa por O). *A inversa f' de uma reta f que não passa por O é uma circunferência que passa por O (Figura 7.3). Adicionalmente, a reta n , tangente a f' em O , é paralela com f .*

Demonstração. Construir uma reta k perpendicular a f passando pelo centro de inversão O . Marcar o ponto $B = k \cap f$ e escolher um ponto arbitrário $A \in f$ ($A \neq B$). Sejam $A' = Inv(A, i)$ e $B' = Inv(B, i)$.

Como viu-se na Proposição 7.2 tem-se $\triangle OAB \sim \triangle OB'A'$. Segue que $\angle OA'B' = \angle OBA = 90^\circ$. Do fato de $\angle OA'B' = 90^\circ$, para todo $A \in f$ ($A \neq B$), o ponto A' pertence a circunferência f' de diâmetro OB' . Convencionou-se que “o infinito” pertence a reta f e $O = Inv(\infty, i) \in f'$.

Reciprocamente, dado um ponto $A' \in f'$ ($A' \neq B'$ e $A' \neq O$) tem-se $\angle OA'B' = 90^\circ$ (pois OB' é diâmetro de f'). Pela Proposição 7.2 segue que $\triangle OB'A' \sim \triangle OAB$. Portanto, $\angle OBA = \angle OA'B' = 90^\circ$. Como $\angle OBA = 90^\circ$, para todo $A' \in f'$ ($A' \neq B'$ e $A' \neq O$), todo ponto A está contido numa reta perpendicular ao segmento OB . Como $O \in f'$, por convenção, $\infty = Inv(O, i)$ e “o infinito” pertence a reta f .

Para a segunda parte, suponha-se, por absurdo, que as retas f e n não sejam paralelas. Logo, existe o ponto $P = (f \cap n) \neq \infty$. Então, $P' \in f' \cap n'$. Como a reta n passa por O , pela Proposição 29, segue que $n = n'$ e $P' \in f' \cap n$ ($P' \neq O$, pois $P \neq \infty$). Ou seja, tanto P' quanto O são pontos diferentes que pertencem a interseção de f' e n . Contradição, n não seria tangente a f' . \square

Proposição 31 (Inversão de circunferência que passa por O). *A inversa de uma circunferência f' que passa pelo centro de inversão O é uma reta $f = Inv(f', i)$ (Figura 7.3). Adicionalmente, a reta n , tangente a f' em O , é paralela com f .*

Demonstração. Segue diretamente da Proposição 30 e da propriedade:

$$Inv(Inv(P, i), i) = Inv(P', i) = P.$$

\square

Proposição 32 (Inversão de circunferência que **não** passa por O). *A inversa de uma circunferência d que não passa pelo centro de inversão O é outra circunferência d' (Figura 7.4). Adicionalmente, as retas tangentes externas comuns de d e d' passam por O . Isto é, o ponto O é o centro de homotetia externo de d e d' .*

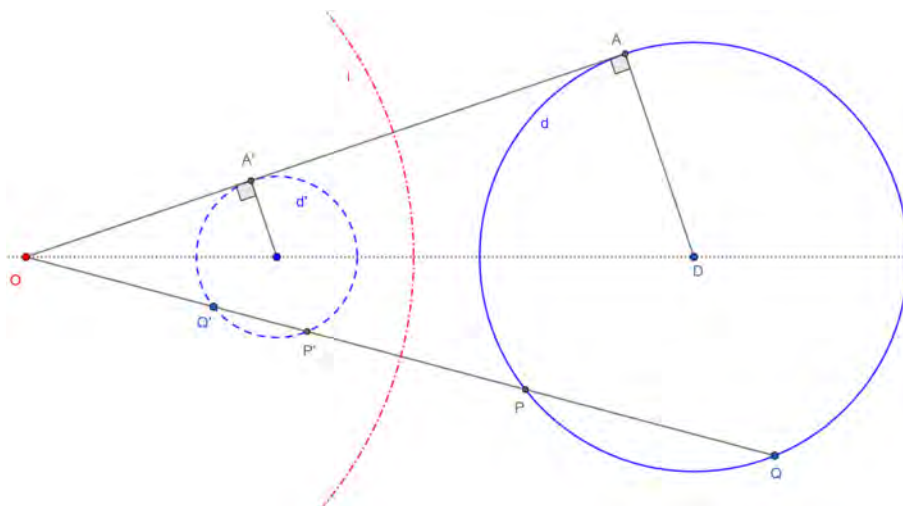


Figura 7.4: Guia para a demonstração da Proposição 32. Versão interativa [aqui](#).

Demonstração. Seja uma circunferência de inversão i de centro O e raio r . Seja um ponto $Q \in d$, P a segunda interseção da reta OQ com d , $P' = Inv(P, i)$, $Q' = Inv(Q, i)$ e OA um segmento tangente a d . A potência do ponto O relativa a d não depende da posição específica de Q e pode ser escrita como:

$$OQ \cdot OP = Pot_d(O) = OA^2.$$

Por outro lado, como P e P' são um par de inversão vale:

$$OP' \cdot OP = r^2.$$

Dividindo as duas últimas equações encontra-se:

$$\frac{OQ}{OP'} = \frac{Pot_d(O)}{r^2} = \frac{OA^2}{r^2} = cte.$$

Em palavras, independentemente da posição do ponto Q sobre a circunferência d a razão $\frac{OQ}{OP'}$ não muda. Ou seja, os pontos Q e P' são homólogos. Com isto, d' é outra circunferência e uma tangente a d também o será a d' . O resultado continua sendo válido quando $P = Q$, pois neste caso $OP = OQ = OA$. □

Definição 7 (Ângulo entre duas circunferências que intersectam-se). *O ângulo entre duas circunferências que intersectam-se num ponto é definido como sendo igual ao ângulo formado pelas suas retas tangentes no mesmo ponto. Duas circunferências são chamadas ortogonais quando este ângulo é 90° .*

Proposição 33 (Inversão preserva o ângulo entre retas). *Sejam f e g duas retas que não passam por O e intersectam-se no ponto P formando um ângulo α . Considera-se uma inversão relativa*

a uma circunferência i centrada em O . Sejam f' e g' as inversas de f e g , respectivamente. Então o ângulo formado entre f' e g' em $P' = Inv(P, i)$ é α (Figura 7.5).

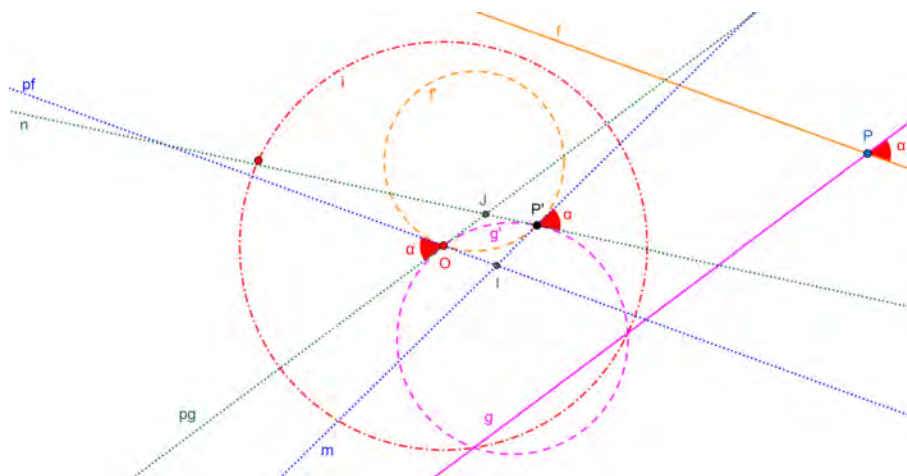


Figura 7.5: Guia para a demonstração da Proposição 33. Versão interativa [aqui](#).

Demonstração. Como as retas f e g não passam por O transformam-se, pela inversão, nas circunferências f' e g' passando por O . Sejam pf e pg as retas tangentes a f' e g' em O . Viu-se na Proposição 30 que $pg \parallel g$ e $pf \parallel f$. Logo, o ângulo entre pf e pg em O é α . Consideram-se as retas m e n , tangentes em $P' = Inv(P, i)$ a f' e g' , respectivamente. Sejam $I = pf \cap m$ e $J = pg \cap n$. Como os triângulos IOP' e JOP' são isósceles de base OP' o ângulo entre m e n também é α . \square

Os ângulos entre duas retas quando alguma delas (ou as duas) passa(m) pelo centro de inversão também são preservados.

7.2.1 Transformação de reta e circunferência em circunferências concêntricas

Exercício 1. Transformar por inversão a reta g e a circunferência c em circunferências concêntricas. Construir dinamicamente as circunferências tangentes simultaneamente a g e c .

7.2.1.1 Resolução do Exercício 1.

A Figura 7.6 mostra uma construção geométrica inicial.

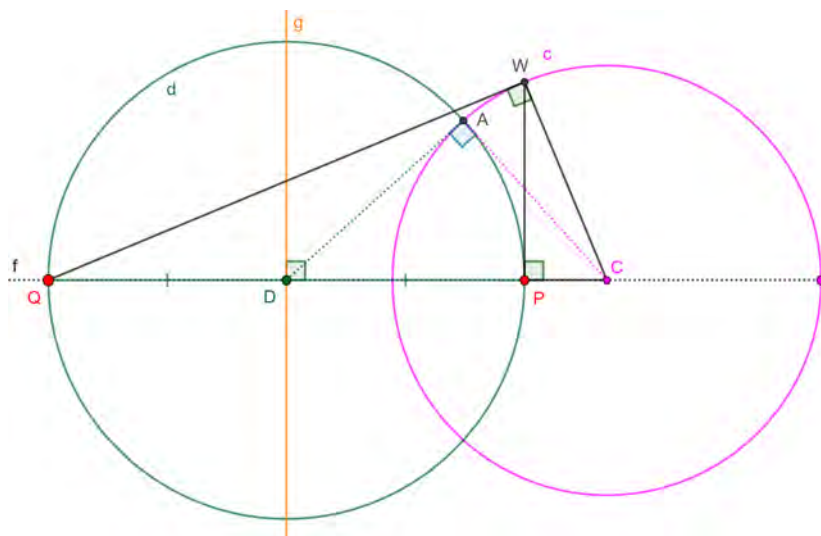


Figura 7.6: Construção geométrica inicial para o Exercício 1. Versão interativa [aqui](#).

1. Traçar a reta f perpendicular a g e passando pelo centro C de c . Marcar o ponto $D = g \cap f$.
2. Esboçar um ponto $A \in c$ tal que $\angle DAC = 90^\circ$. Construir com centro em D a circunferência d de raio DA e marcar os pontos mágicos P e Q na interseção de d com f . d é perpendicular com c e g simultaneamente.
3. Os pontos P e Q são chamados mágicos porque são os únicos onde pode ser colocado o centro de uma circunferência de inversão que transforma c e g em circunferências concêntricas. Vale que: $P = Inv(Q, c)$ e $Q = Inv(P, c)$. Entendendo a reflexão relativa a reta g como uma operação de inversão relativa a uma circunferência de raio infinito pode-se escrever também: $P = Inv(Q, g)$ e $Q = Inv(P, g)$.
4. A circunferência i , com centro em Q , transforma por inversão c e g nas circunferências concêntricas c' e g' , respectivamente (Figura 7.7). O centro comum destas últimas é o ponto $P' = Inv(P, i)$.
5. Uma circunferência r que tangencie simultaneamente c' e g' (relativamente fácil de construir) é transformada pela inversão relativa a i na circunferência r' que tangencia tanto c como g (difícil de construir por outro caminho).

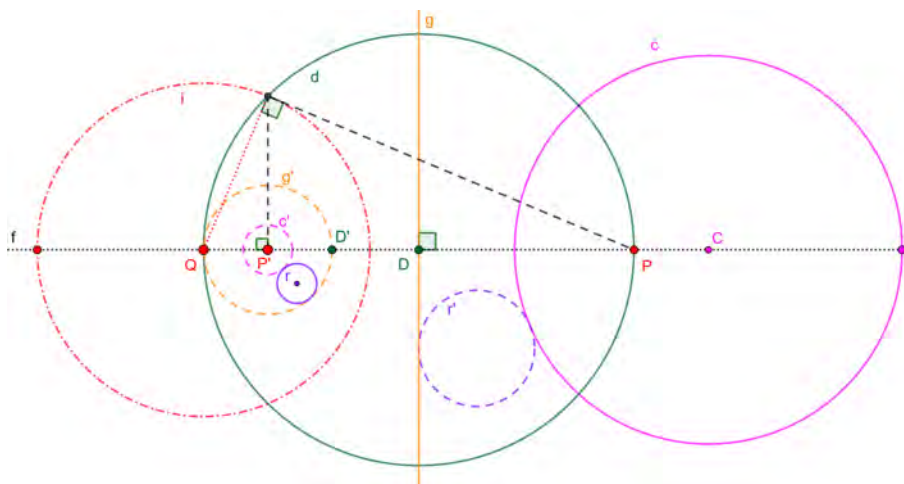


Figura 7.7: Construção geométrica final para o Exercício 1. Versão interativa [aqui](#).

7.3 Problemas resolvidos do Capítulo 7.

7.3.1 Inversão. Circunferências concêntricas. Teorema de Pitágoras. P12 SL IMO 1982.

Problema 26. *Quatro circunferências diferentes c , c_1 , c_2 e c_3 e uma reta l são dadas em um plano. A circunferência c e a reta l são disjuntas. As circunferências c_1 , c_2 e c_3 são tangentes entre si e com c e l . Assumir que o raio de c seja R , determinar a distância do centro de c à l .*

A IMO 1982 foi realizada na cidade de Budapeste, Hungria. Problema 12 da lista curta, proposto pela delegação da Finlândia [7].

7.3.1.1 Resolução do Problema 26.

A chave para resolver o problema está em pensar na possibilidade de uma das circunferências c_i , por exemplo c_3 , ser uma reta paralela com l . A tangência entre c_3 e l acontece no infinito. A construção inicial é feita no espaço inverso e com uma simetria que a circunferência c'_3 transforma-se na reta c_3 . Isto facilita as contas.

Seja f uma reta perpendicular a l que passa pelo centro de c , marcar o ponto $K = f \cap l$. Existe um ponto mágico $Y \in f$ tal que uma circunferência de inversão i , centrada em Y , mapeia c e l em duas circunferências concêntricas c' e l' , de centro comum Z e com c' no interior de l' (Exercício 1). A Figura 7.8 mostra uma construção geométrica inicial.

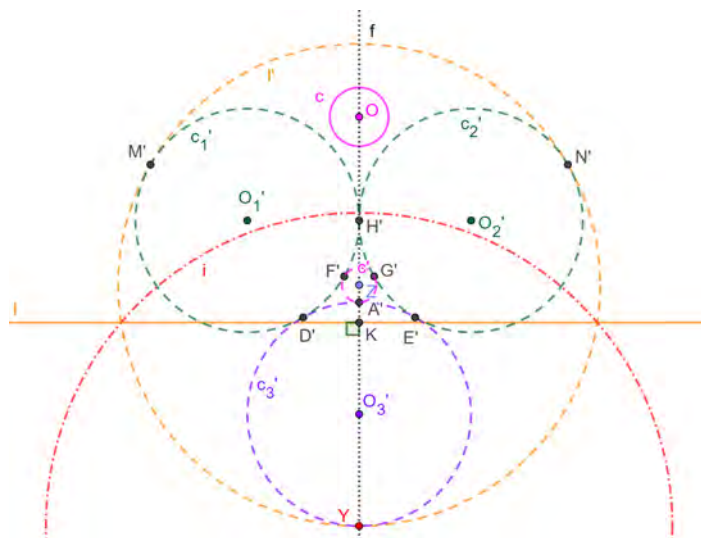


Figura 7.8: Construção geométrica inicial para o Problema 26. Elementos do espaço inverso em linhas tracejadas. Versão interativa [aqui](#).

Construir as circunferências c'_i tangentes externamente com c' e internamente com l' , todas com o mesmo raio. Construir c'_3 de tal forma que $c'_3 \cap l' = Y$. Com isso $Inv(c'_3, i) = c_3$ é uma reta paralela com l . Aplicando a inversão aos outros elementos obtêm-se a imagem da Figura 7.9.

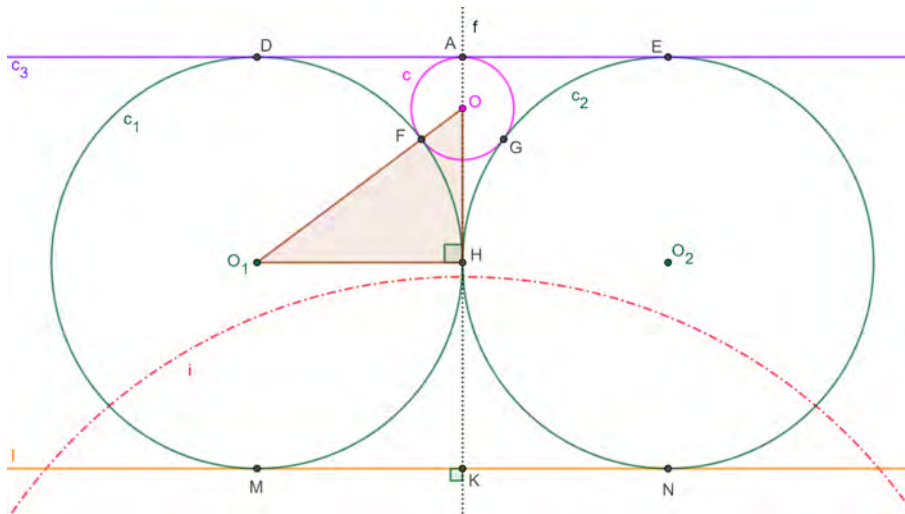


Figura 7.9: Segunda construção geométrica para o Problema 26. Versão interativa [aqui](#).

Sejam O_1 , H e $x = O_1H$ o centro da circunferência c_1 , a interseção das circunferências c_1 e c_2 e a distância entre os dois pontos anteriores, respectivamente. Como o raio de c é R , no triângulo retângulo O_1HO , pelo Teorema de Pitágoras, vale:

$$x^2 + (x - R)^2 = (x + R)^2.$$

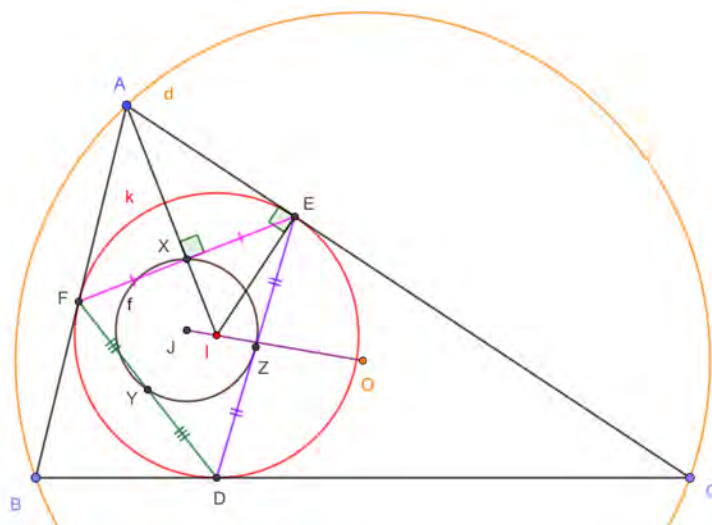


Figura 7.11: Construção geométrica para o Problema 27. Versão interativa [aqui](#).

Seja I o centro do incírculo k do triângulo ABC . Como $AF = AE$ e $FX = XE$ tem-se que XE é altura no $\triangle AEI$, retângulo em E . Utilizando uma das relações métricas segue:

$$IX \cdot IA = IE^2.$$

Da equação anterior uma inversão em relação à k leva o ponto A para a posição do ponto X . Analogamente, B para Y e C para Z . Isto é, sendo d e f os circuncírculos dos triângulos ABC e XYZ , chega-se a:

$$f = Inv(d, k).$$

Como o centro de uma circunferência é colinear com o centro da sua inversa e o centro de inversão conclui-se que O (centro de d), J (centro de f) e I são colineares.

7.3.3 Teorema da Bissetriz. Triângulo Pedal. Lei dos Senos. Inversão. P2 IMO 1996.

Problema 28. *Seja P um ponto no interior do $\triangle ABC$ tal que:*

$$\angle APB - \angle C = \angle APC - \angle B. \tag{7.3.1}$$

Sejam D e E os incentros dos $\triangle APB$ e $\triangle APC$, respectivamente. Mostrar que AP , BD e CE são concorrentes.

A IMO 1996 foi realizada na cidade de Mumbai, Índia. Problema 11 da lista curta e escolhido como P2 da competição, proposto pela delegação do Canadá [7].

7.3.3.1 Primeira resolução do Problema 28.

A Figura 7.12 mostra uma construção geométrica inicial.

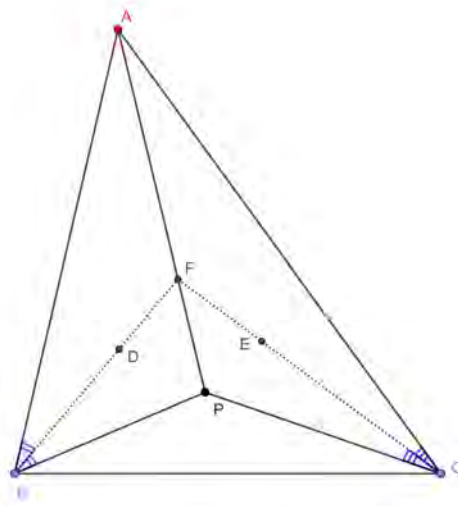


Figura 7.12: Construção geométrica inicial para o Problema 28. Versão interativa [aqui](#).

Seja $F = BD \cap CE$. Quer-se mostrar que $F \in AP$. Como BD e CE são bissetrizes, pois D e E são incentros, pela forma recíproca do Teorema da Bissetriz, bastará provar que:

$$\frac{AB}{BP} = \frac{AF}{FP} = \frac{AC}{CP}. \quad (7.3.2)$$

Sejam X , Y e Z os pés das projeções ortogonais do ponto P nos lados BC , CA e AB , respectivamente (Figura 7.13). Os quadriláteros $AZPY$, $BZPX$ e $CXPY$ são cíclicos, pois a soma de um par de ângulos opostos é 180° .

No quadrilátero $CXPY$ tem-se que:

$$\angle XPY = 180^\circ - \angle C. \quad (7.3.3)$$

Pelo ângulo raso em Z vale que:

$$\angle XZY = 180^\circ - \angle XZB - \angle YZA. \quad (7.3.4)$$

Utilizando agora que $BZPX$ e $AZPY$ são inscritíveis e (7.3.4) segue:

$$\angle XZY = 180^\circ - \angle XPB - \angle YPA. \quad (7.3.5)$$

De (7.3.3) e considerando a soma dos ângulos em torno ao ponto P tem-se:

$$\angle APB = 180^\circ - \angle XPB - \angle YPA + \angle C. \quad (7.3.6)$$

Da comparação entre (7.3.5) e (7.3.6) chega-se a:

$$\angle XZY = \angle APB - \angle C. \quad (7.3.7)$$

Analogamente demonstra-se que:

$$\angle XYZ = \angle APC - \angle B. \quad (7.3.8)$$

De (7.3.1), (7.3.7) e (7.3.8) obtêm-se $\angle XZY = \angle XYZ$, o $\triangle XYZ$ é isósceles e

$$XY = XZ. \quad (7.3.9)$$

Adicionalmente, BP e CP são diâmetros das circunferências circunscritas a $BZPX$ e $CXPY$, respectivamente. Pela Lei dos Senos aplicada aos $\triangle XBZ$ e $\triangle XCY$ obtêm-se:

$$XZ = BP \operatorname{sen}(\angle B),$$

$$XY = CP \operatorname{sen}(\angle C).$$

De (7.3.9) e as duas equações anteriores segue:

$$\frac{BP}{CP} = \frac{\operatorname{sen}(\angle C)}{\operatorname{sen}(\angle B)}. \quad (7.3.10)$$

Utilizando mais uma vez a Lei dos Senos, agora no $\triangle ABC$, encontra-se:

$$\frac{\operatorname{sen}(\angle C)}{\operatorname{sen}(\angle B)} = \frac{AB}{AC}. \quad (7.3.11)$$

Logo, juntando (7.3.10) e (7.3.11) conclui-se:

$$\frac{BP}{CP} = \frac{AB}{AC}.$$

A equação anterior é a parte de (7.3.2) que queria-se demonstrar. A Figura 7.13 mostra uma construção geométrica.

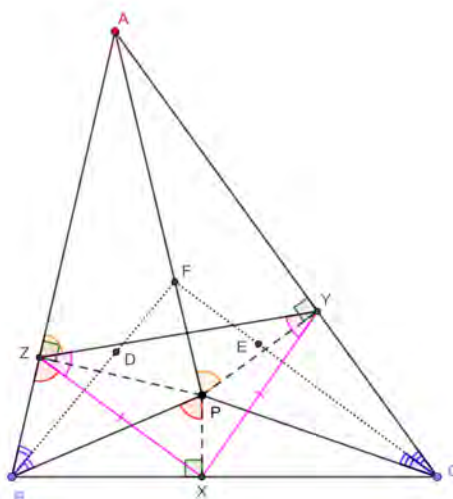


Figura 7.13: Construção geométrica para o Problema 28. Versão interativa [aqui](#).

7.3.3.2 Construção e resolução do Problema 28 por inversão.

A localização do ponto P foi feita partindo de uma construção mais simples no espaço inverso. Seja i uma circunferência de inversão de centro em A e raio arbitrário r . Sejam $B' = Inv(B, i)$, $C' = Inv(C, i)$ e $P = Inv(P', i)$.

Constrói-se a reta mediatriz m dos pontos B' e C' e posiciona-se $P' \in m$, de tal forma que P esteja no interior do $\triangle ABC$. Ter-se-á que $B'P' = C'P'$.

Na inversão de dois pontos, Proposição 28, obtêm-se que:

$$B'P' = \frac{r^2}{AB \cdot AP} PB,$$

$$C'P' = \frac{r^2}{AC \cdot AP} PC.$$

Logo, dividindo as duas equações anteriores, encontra-se:

$$\frac{BP}{AB} = \frac{CP}{AC}.$$

Pela forma recíproca do Teorema da Bissetriz o resultado segue. A Figura 7.14 mostra uma construção geométrica utilizando inversão.

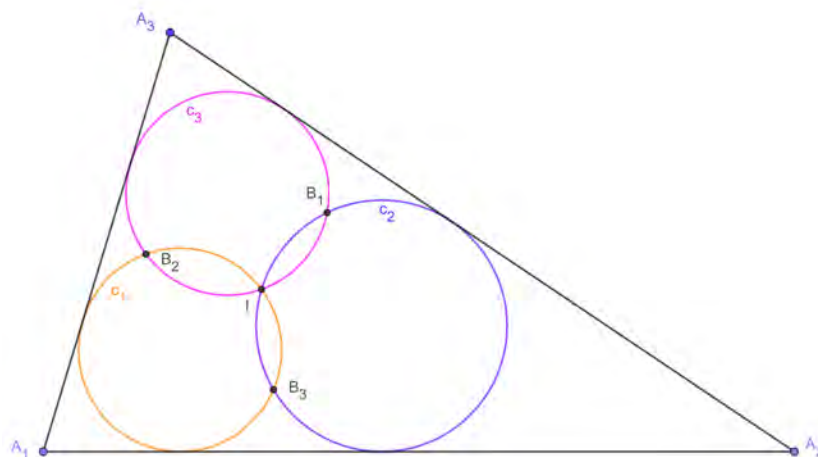


Figura 7.15: Construção geométrica inicial para o Problema 29. Versão interativa [aqui](#).

Nesta resolução, considera-se $i = 1, 2, 3$ e a soma de todos os índices módulo 3. Para construir c_i , primeiro esboça-se uma perpendicular, passando por I , à bissetriz interna b_i (no vértice A_i). A interseção dessa perpendicular com os dois lados mais próximos determina um triângulo, do qual c_i é o incírculo.

Seja c a circunferência circunscrita ao $\triangle A_1A_2A_3$ (Figura 7.16). Denotam-se por O_i os centros das circunferências c_i e por M_i o ponto médio do arco $A_{i+1}A_{i+2}$ de c que não contém A_i .

Primeiro, nota-se que a reta $O_{i+1}O_{i+2}$ é a mediatriz o_i do segmento IB_i , e consequentemente o circuncentro R_i do $\triangle A_iB_iI$ está contido em o_i . Segundo, sejam $M_{i+1}M_{i+2}$ as retas m_i . Da igualdade das medidas dos segmentos $M_{i+1}A_i = M_{i+1}I$, pela Proposição 2.3 em [20], tem-se que m_i é mediatriz dos pontos A_i e I . Isto implica que R_i está contido na reta m_i . Ou seja, $R_i = O_{i+1}O_{i+2} \cap M_{i+1}M_{i+2}$.

No que segue consideram-se os $\triangle M_1M_2M_3$ e $\triangle O_1O_2O_3$. Como as retas M_1O_1 , M_2O_2 e M_3O_3 são concorrentes em I , pelo Teorema de Desargues, as interseções dos prolongamentos dos lados correspondentes R_i , com $i = 1, 2, 3$, são colineares. A Figura 7.16 mostra uma construção geométrica.

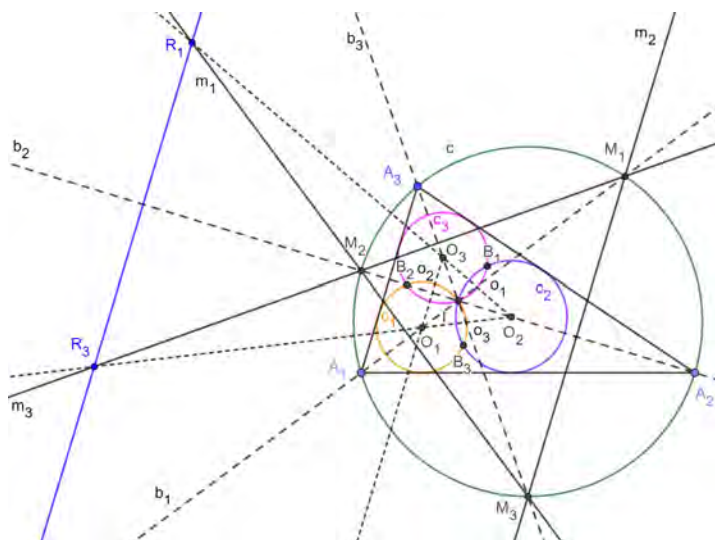


Figura 7.16: Construção geométrica para o Problema 29. O ponto $R_2 \in R_1R_3$, não aparece pela escala. Versão interativa [aqui](#).

7.3.4.2 Resolução do Problema 29 por inversão.

As circunferências circunscritas aos $\triangle A_i B_i I$, com $i = 1, 2, 3$, serão denotadas por d_i . Sabe-se que, se R_1, R_2 e R_3 são os circuncentros dos triângulos $A_1 B_1 I, A_2 B_2 I$ e $A_3 B_3 I$, respectivamente, então eles são os centros de d_1, d_2 e d_3 , que tem o ponto I em comum. Para mostrar que os R_i são colineares bastará provar que as circunferências d_i tem um segundo ponto $J \neq I$ em comum. A Figura 7.17 mostra uma construção geométrica inicial utilizando inversão.

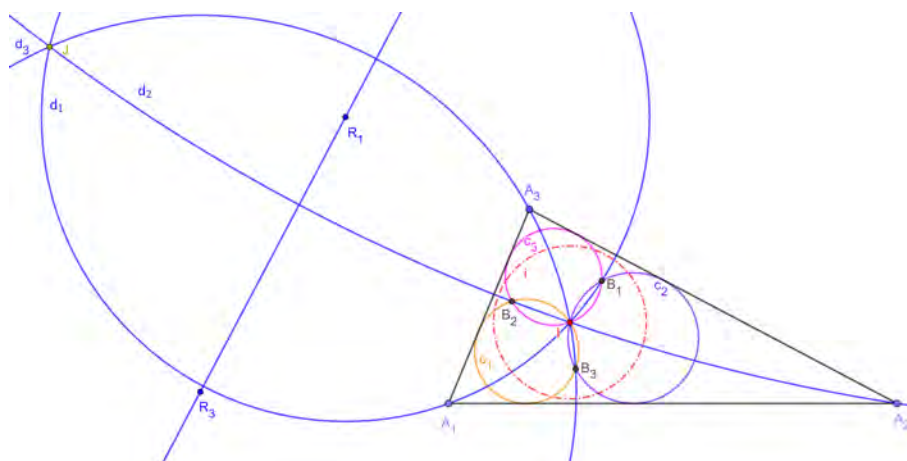


Figura 7.17: Construção geométrica inicial utilizando inversão para o Problema 29. Versão interativa [aqui](#).

Constrói-se uma circunferência de inversão i de raio arbitrário, diferente de zero, e centro em I . Denota-se por X' o inverso de X . Como as circunferências c_i passam pelo centro de

inversão I , suas inversas são as retas c'_i . Tem-se que $B'_i = c'_{i+1} \cap c'_{i+2}$ ou $c'_i = B'_{i+1}B'_{i+2}$. As inversas das retas A_iA_{i+1} , são as circunferências $A'_iA'_{i+1}I$, de mesmo raio, pois equidistam de I . A relação de tangência entre retas e circunferências é preservada após a inversão.

Seja P_i o centro da circunferência $A'_{i+1}A'_{i+2}I$. Devido a igualdade dos raios, nota-se que $P_iP_{i+1} \parallel B'_iB'_{i+1}$. Logo, o $\triangle P_1P_2P_3$ é homotético com o $\triangle B'_1B'_2B'_3$. A Figura 7.18 mostra uma construção geométrica somente dos elementos após inversão.

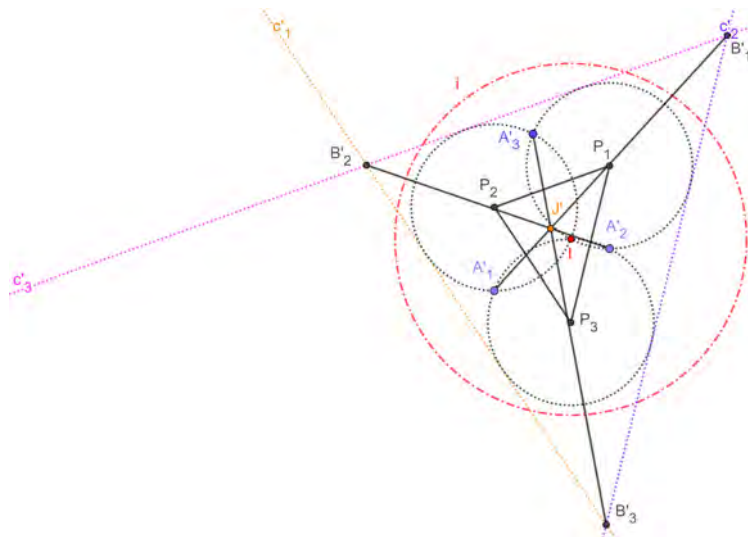


Figura 7.18: Construção geométrica somente dos elementos após inversão para o Problema 29. Versão interativa [aqui](#).

Como A'_i e I são as interseções das circunferências $A'_iA'_{i+1}I$ e $A'_iA'_{i+2}I$, tem-se que A'_i e I são simétricos em relação ao segmento $P_{i+1}P_{i+2}$. Com isto, o $\triangle A'_1A'_2A'_3$ também é homotético com o $\triangle B'_1B'_2B'_3$. Consequentemente, $A'_1B'_1$, $A'_2B'_2$ e $A'_3B'_3$ são concorrentes no centro de homotetia J' . Ou seja, as circunferências A_iB_iI , com $i = 1, 2, 3$, passam pelo ponto $J = Inv(J', i) \neq I$. A Figura 7.19 mostra uma construção geométrica com todos os elementos apresentados.

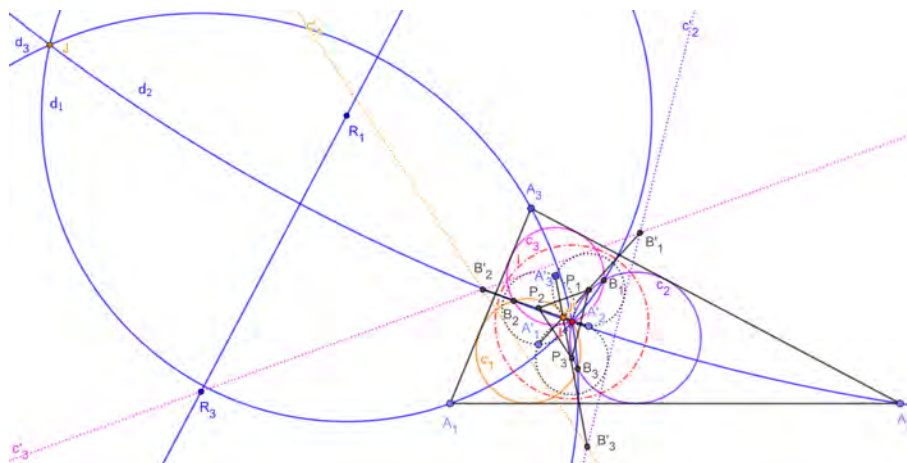


Figura 7.19: Construção geométrica utilizando inversão para o Problema 29. Versão interativa [aqui](#).

7.3.5 Topologia. Inversão. P8 SL IMO 1999.

Problema 30. *Uma circunferência é chamada “Separadora” para um conjunto de cinco pontos num plano se passa por três deles, um quarto ponto está no seu interior e o quinto no exterior. Provar que todo conjunto de cinco pontos, que não tenha três colineares nem quatro concíclicos, tem exatamente quatro Separadoras.*

A IMO 1999 foi realizada na cidade de Bucareste, Romênia. Problema 8 da lista curta, proposto pela delegação do Japão [7].

7.3.5.1 Resolução do Problema 30.

Sejam A, B, C, D e E os pontos e uma circunferência de inversão i com centro em E . Sejam A', B', C' e D' os inversos respeito a i . Uma circunferência Separadora que passa por E transforma-se numa reta, passando por dois pontos dentre A', B', C' e D' , e de forma que separa os outros dois inversos, um em cada lado da reta. Uma Separadora que não passa por E transforma-se em outra circunferência, passando por três pontos inversos e com o quarto ponto inverso no seu interior.

Seja M' a envoltória convexa de A', B', C' e D' . Há dois casos: i) M' é um quadrilátero ou ii) M' é um triângulo com o quarto ponto no interior.

i) M' é um quadrilátero, por exemplo $A'B'C'D'$. Neste caso duas das circunferências Separadoras (p e q) são inversas das diagonais $A'C'$ e $B'D'$. Se $\angle A' + \angle C' < 180^\circ$ as outras duas Separadoras (k e r) são as inversas das circunferências $A'B'C'$ e $A'D'C'$. Caso contrário, de $B'A'D'$ e $B'C'D'$. As inversas das outras 6 circunferências e retas utilizando A', B', C', D' e E não são Separadoras. A Figura 7.20 mostra uma construção geométrica neste caso.

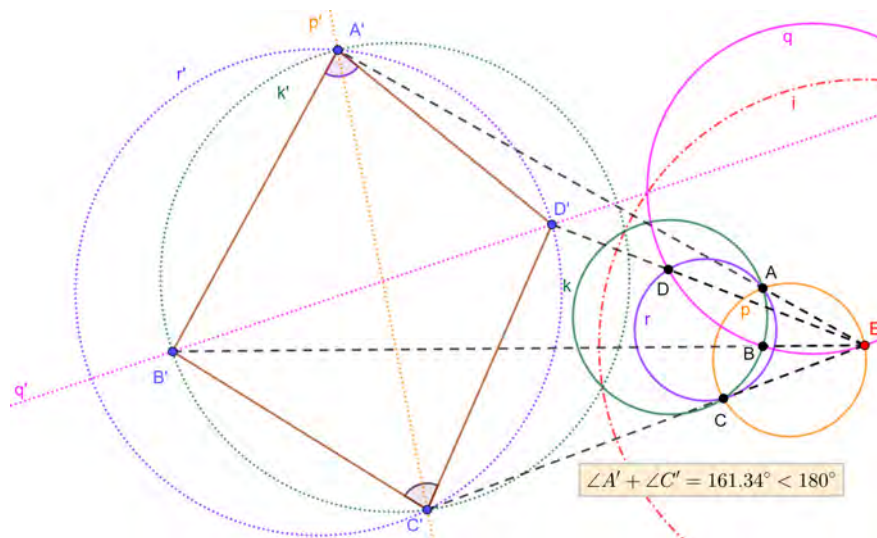


Figura 7.20: Construção geométrica do Problema 30. Caso i) M' é um quadrilátero e $\angle A' + \angle C' < 180^\circ$. Versão interativa [aqui](#).

ii) M' é um triângulo, por exemplo, $A'B'C'$ com D' no interior. Neste caso as circunferências Separadoras são as inversas α, β, γ e δ das retas $D'A', D'B', D'C'$ e da circunferência $A'B'C'$. Nenhuma outra reta ou circunferência satisfaz as condições do problema. A Figura 7.21 mostra uma construção geométrica neste caso.

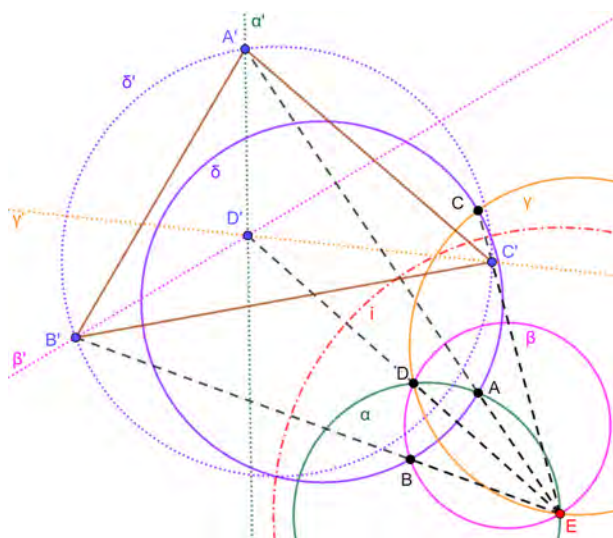


Figura 7.21: Construção geométrica para o Problema 30. Caso ii) M' é o triângulo $A'B'C'$ com D' no interior. Versão interativa [aqui](#).

7.4 Comentários finais do Capítulo 7.

Foram discutidos em detalhe cinco problemas propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática. As demonstrações envolvidas nas soluções foram complementadas pela disponibilização dos respectivos links das figuras interativas no GeoGebra. Adicionalmente, foram utilizados os conceitos básicos relativos aos Teoremas de Desargues, da Bissetriz e Pitágoras, Incentro e Circuncentro, Colinearidade, Triângulo Pedal, Lei dos Senos e elementos de Topologia.

Capítulo 8

Referências Bibliográficas

- [1] APOSTOL, TOM M. Ptolemy's Inequality and the Chordal Metric. **Mathematics Magazine**, v. 40, p. 233–235, 1967. Disponível em: <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/0025570X.1967.11975804>. Acesso em: 23 nov. 2022. (Página(s) 28, 34)
- [2] ASSUNÇÃO, F.C.R. *et al.* **Avaliação do impacto da Olimpíada Brasileira de Matemática nas escolas públicas**. CENTRO DE GESTÃO E ESTUDOS ESTRATÉGICOS – CGEE, 2011. Disponível em: <http://server22.obmep.org.br:8080/media/servicos/recursos/251395.o>. Acesso em: 23 nov. 2022. (Página(s) 18)
- [3] CARNEIRO, E. GIRÃO, F. Centro de massa e aplicações à geometria. **Revista Eureka!**, 1(21):29–37, 2005. (Página(s) 74)
- [4] DAVID, S.A.; LINARES, J.L.; PALLONE, E.M.J.A. Fractional order calculus: historical apologia, basic concepts and some applications, **Revista Brasileira de Ensino de Física**, 33 (4) 4302, 2011. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1590/51806-11172011000400002>. Acesso em: 23 nov. 2022. (Página(s) 26)
- [5] DAVID, S.; VALENTIM, C.; LINARES, J. Calculus for Coloring, **Creative Education**, Vol.4, No. 4, 254-258, April 2013. Disponível em: <https://file.scirp.org/Html/29726.html>. Acesso em: 23 nov. 2022. (Página(s) 26)
- [6] DELGADO, J. *et al.* **Geometria Analítica**, Coleção ProfMat, SBM, Segunda Edição, ISBN: 9788583371212, 2017. (Página(s) 24)
- [7] DJUKIC, D. *et al.* **The IMO compendium**: a collection of problems suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959–2009. New York: Springer, 2011.

(Página(s) 34, 36, 39, 41, 43, 56, 61, 64, 75, 78, 79, 81, 86, 96, 100, 102, 104, 107, 114, 117, 118, 120, 122, 134, 136, 137, 141, 145)

- [8] HARTNETT, K. At the Math Olympiad, Computers Prepare to Go for the Gold. **Quanta Magazine**. 21 set. 2020. Disponível em: <https://www.quantamagazine.org/at-the-international-mathematical-olympiad-artificial-intelligence-prepares-to-go-for-the-gold-20200921>. Acesso em: 23 nov. 2022. (Página(s) 19)
- [9] IGO. **Problems and Solutions of 1st IGO**. 2014. Disponível em: <https://igo-official.ir/events/1/>. Acesso em: 23 nov. 2022. (Página(s) 66, 67)
- [10] JESUS, A. F.; SANTOS, J. P. M.; LÓPEZ LINARES, J. **Capítulo 14: Investigando Fatores Primos com Trincas Pitagóricas**. Livro: Conhecimentos pedagógicos e conteúdos disciplinares das ciências exatas e da terra, DOI do Livro: 10.22533/at.ed.242213108, ISBN: 978-65-5983-424-2, 2021. Páginas: 161-175. Disponível em DOI do Capítulo: 10.22533/at.ed.24221310814. Acesso em: 23 nov. 2022. (Página(s) 27)
- [11] LÓPEZ LINARES, J. **Teorema de Pitágoras: Demonstrações Interativas no GeoGebra**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 57 p. ISBN 978-65-87023-26-7 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023267>. Acesso em: 23 nov. 2022. (Página(s) 26)
- [12] LÓPEZ LINARES, J. **Transformação de Inversão: Teoria, Exercícios de Construção Geométrica, Problemas Olímpicos e Aplicações**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 105 p. ISBN 978-65-87023-25-0 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023250>. Acesso em: 23 nov. 2022. (Página(s) 26)
- [13] LÓPEZ LINARES, J. **Soluções detalhadas para 20 problemas da Olimpíada Internacional de Matemática**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2020. 81 p. ISBN 978-65-87023-04-5 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023045>. Acesso em: 23 nov. 2022. (Página(s) 25)
- [14] LÓPEZ LINARES, J. **Geometria: Soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2020. 82 p. ISBN 978-65-87023-10-6 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023106>. Acesso em: 23 nov. 2022. (Página(s) 25)

LÓPEZ LINARES, J. **Treinamento de Professores e Estudantes do Ensino Fundamental e Médio com Problemas de Olimpíadas de Matemática**. 155 f. Tese (Livre-docência) Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, Universidade de São Paulo, 2022.

- [15] LÓPEZ LINARES, J. **Geometria: Soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática. v.2.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2020. 82 p. ISBN 978-65-87023-11-3 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023113>. Acesso em: 23 nov. 2022. (Página(s) 25)
- [16] LÓPEZ LINARES, J. **Geometria: Soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática v.3.** Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 82 p. ISBN 978-65-87023-14-4 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023144>. Acesso em: 23 nov. 2022. (Página(s) 25)
- [17] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F.; BRUNO-ALFONSO, A. Desigualdade de Ptolomeu: cinco problemas resolvidos que foram propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática. **Revista de Matemática de Ouro Preto**, v.2, pp:15-37, abr. 2022. ISSN: 2237-8103. Disponível em: <https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/5396/4012>. Acesso em: 8 jan. 2022. (Página(s) 24)
- [18] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A. Cinco problemas sobre Potência de um ponto em relação a uma circunferência e eixo radical em Olimpíadas Internacionais de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru**, v. 20, p. 22–40, jul. 2021. DOI: 10.21167/cqdv20202123169664jlljpm safj2240. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 23 nov. 2022. (Página(s) 24, 107)
- [19] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F. Baricentro ou centroide: cinco problemas resolvidos das listas da Olimpíada Internacional de Matemática. **Revista de Matemática de Ouro Preto**, v.2, pp:46-69, jul. 2021. ISSN: 2237-8103. Disponível em: <https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/5074/3825>. Acesso em: 23 nov. 2022. (Página(s) 24)
- [20] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F. Incírculos e ex-incírculos: cinco problemas resolvidos que foram propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática. **Revista de Matemática de Ouro Preto**, v.2, pp:117-139, nov. 2021. ISSN: 2237-8103. Disponível em: <https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/5189/3868>. Acesso em: 23 nov. 2022. (Página(s) 25, 142)
- [21] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A. Extremos com desigualdades na Geometria: resolução de cinco problemas propostos para a Olimpíada Internacional de

- Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru**, ISSN 2316-9664, v. 21, p. 36–51, dez. 2021. ISSN 2316-9664. DOI: 10.21167/cqdv21202123169664jlljpmsafj3651. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 23 nov. 2022. (Página(s) 25)
- [22] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A. **Geometria Olímpica com GeoGebra v.1**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 86 p. ISBN 978-65-87023-21-2 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023212>. Acesso em: 23 nov. 2022. (Página(s) 25)
- [23] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A. **Geometria Olímpica com GeoGebra v.2**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 115 p. ISBN 978-65-87023-23-6 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023236>. Acesso em: 23 nov. 2022. (Página(s) 25)
- [24] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A. **Geometria Olímpica com GeoGebra - v. 3**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2022. 91 p. ISBN 978-65-87023-24-3 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023236>. Acesso em: 23 nov. 2022. (Página(s) 25)
- [25] LÓPEZ LINARES, J. **Problemas resolvidos sobre sequências no treinamento de estudantes do ensino médio para Olimpíadas Internacionais de Matemática**. 2019. 123 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)-Departamento de Matemática, Universidade Federal de São Carlos, [São Carlos], 2019. Disponível em: <https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/11881>. Acesso em: 23 nov. 2022. (Página(s) 26)
- [26] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Bases numéricas na Olimpíada Internacional de Matemática. **Professor de Matemática Online (PMO)**, v. 7, n. 2, p. 195-204, 2019. ISSN: 2319-023X. Disponível em: <https://doi.org/10.21711/2319023x2019/pmo715>. Acesso em: 23 nov. 2022. (Página(s) 26)
- [27] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três problemas sobre série harmônica na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 17, p. 127-138, fev. 2020. Edição Ermac. DOI:

- 10.21167/cqdvoll7ermac202023169664jllabagfb127138. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 23 nov. 2022. (Página(s) 26)
- [28] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três problemas sobre desigualdades na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 18, p. 78-88, jul. 2020. DOI: 10.21167/cqdvoll8202023169664jllabagfb7888. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 23 nov. 2022. (Página(s) 26)
- [29] LÓPEZ LINARES, J. Três problemas sobre partições na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 19, p. 118-127, dez. 2020. DOI: 10.21167/cqdvoll9202023169664jll118127. ISSN 2316-9664. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 23 nov. 2022. (Página(s) 26)
- [30] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três Problemas sobre Recorrências na Olimpíada Internacional de Matemática. **Revista MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA EM FOCO**, v. 8 n. 1 (2020), p. 1-11. Publicado em 2021-12-21, ISSN: 2318-0552. Disponível em: <https://seer.ufu.br/index.php/matematicaeestatisticaemfoco/article/view/58967>. Acesso em: 23 nov. 2022. (Página(s) 26)
- [31] LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios de resolução de equações diferenciais com séries de potências**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 101 p. ISBN 978-65-87023-17-5 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023175>. Acesso em: 23 nov. 2022. (Página(s) 26)
- [32] LÓPEZ LINARES, J. **Exercícios com a Transformada de Laplace**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2021. 115 p. ISBN 978-65-87023-20-5 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023205>. Acesso em: 23 nov. 2022. (Página(s) 27)
- [33] MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. **Matemática discreta**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015. (Coleção ProfMat). (Página(s) 113)
- [34] NETO, A. C. M. **Geometria**, Coleção ProfMat, SBM, Primeira Edição, ISBN: 9788585818937, 2013. (Página(s) 24, 34, 55, 72)
- [35] PINHEIRO, R. **Notas das aulas do Programa Olímpico de Treinamento**, Curso de Geometria - Nível 2, 2006. (Página(s) 24)

- [36] RODRIGUES, A.R. Napoleão e as “revoluções” no plano euclidiano. **É Matemática, Oxente!**, 2019. (Página(s) 82, 83)
- [37] SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A; LÓPEZ LINARES, J. Retas de Euler e o esquema aditivo RGB: construções dinâmicas no GeoGebra, **Revista do Instituto GeoGebra internacional de São Paulo**, v. 10 n. 2 (2021), p. 026–039. Publicado em 2021-12-27, ISSN: 2237-9657, DOI: 10.23925/2237-9657.2021.v10i2p026-039. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/52286/38626>. Acesso em: 23 nov. 2022. (Página(s) 27)
- [38] SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F.; LÓPEZ LINARES, J.; RAMALHO DE FREITAS, M.P.O. Diferentes perspectivas de um problema de otimização: Matemática Dinâmica com GeoGebra, **INTERMATHS**. ISSN 2675-8318, Vol.3, N.1, Jan-Jun 2022, pp. 70-87. Disponível em: <https://doi.org/10.22481/intermaths.v3i1.10227>. Acesso em: 23 nov. 2022. (Página(s) 27)
- [39] SAXTON, D.; GREFENSTETTE, E.; HILL, F.; KOHLI, P. **Analysing mathematical reasoning abilities of neural models**. 2019. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1904.01557>. Acesso em: 23 nov. 2022. (Página(s) 19)
- [40] THIAGO, C. **Notas das aulas do Programa Olímpico de Treinamento**, Curso de Geometria - Nível 2, 2006. (Página(s) 24)

Índice Remissivo

- Arco Capaz, 34
- Baricentro, 43, 46, 72–76, 78, 79, 81, 83, 85–87
- Base Média, 72, 75, 120, 122
- Bissetrizes, 104
- Circuncentro, 61, 65, 68, 74, 85, 88, 122, 141
- circuncírculo, 136, 137
- Circunferências, 79
- Circunferências concêntricas, 134
- Colinearidade, 136
- Conjugados Isogonais, 39
- Coordenada Baricêntrica, 74
- Desigualdade, 78
- Desigualdade das Médias, 114, 115
- Desigualdade das médias, 36
- Desigualdade das Médias Aritmética e Geométrica, 112
- Desigualdade de Cauchy-Schwarz, 111, 112, 117–119
- Desigualdade de Nesbitt, 38
- Desigualdade de Ptolomeu, 28, 32, 34, 36, 37, 45
- Desigualdade Triangular, 34, 36, 45, 110, 114, 116, 120–123
- Distância Incentro-Ortocentro (Fórmula de Euler), 94
- Eixo e Centro Radical, 47, 53–57, 61, 62, 64–66, 69, 90, 103, 107
- Equação quadrática, 56
- equação quadrática, 59
- Ex-incírculos, 74, 96, 98–102, 104, 106, 107
- Homotetia, 75, 78, 86–88, 101
- Incentro, 74, 83, 85, 93, 96, 98, 99, 104, 117, 118, 141
- Incírculo, 90, 100, 102, 118, 136
- Lei dos Cossenos, 53, 97
- Lei dos Senos, 44, 122, 124, 137, 139
- Lugar Geométrico, 53, 55, 79, 81, 85, 100
- Paralelogramo, 104, 120
- Polígono inscritível, 41, 42
- ponto de Fermat ou Torricelli, 86
- ponto de Nagel, 74
- pontos mágicos, 133, 134
- Potência de um ponto, 50, 64, 65, 67, 90, 102, 106
- Quadrilátero inscritível ou cíclico, 64, 67, 68, 75, 84, 86, 94
- Relação de Stewart, 43, 96, 99
- Relações métricas devidas ao Ex-incírculo, 91
- Relações métricas devidas ao Incírculo, 91
- Reta de Euler, 74, 75

- Semelhança de triângulos, 39, 61, 64, 67,
100, 104
- Tangência a uma circunferência, 65
- Teorema da Bissetriz, 137, 138, 140
- Teorema das Cordas, 50, 64, 107
- Teorema de Desargues, 141, 142
- Teorema de Napoleão, 81, 82
- Teorema de Pitágoras, 31, 54, 60–63, 114,
116, 134, 135
- Teorema de Ptolomeu, 28–31, 34, 39, 41
- Teorema de Simson-Wallace, 86, 88
- Teorema de Tales, 56–58
- Teorema do Ângulo Externo, 109
- Topologia, 145
- Transformação de Inversão, 126, 129–131,
134, 136, 137, 141, 145
- Trigonometria, 122
- Triângulo Pedal, 86, 137
- Áreas, 78, 114, 117
- Ângulos, 106
- Ângulos inscritos e de segmento, 65