UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

FFCLRP - DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO E MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Edmara Viana da Silva

Equações diferenciais funcionais com memória dependendo do estado

Fevereiro de 2024
Ribeirão Preto - SP

Blank page

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FFCLRP - DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO E MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Edmara Viana da Silva

Equações diferenciais funcionais com memória dependendo do estado

Dissertação apresentada à Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto da USP, como parte das exigências para a obtenção do título de Mestre em Ciências.
Área de concentração: Matemática.
Orientador: Eduardo Alex Hernández Morales.
VERSÃO CORRIGIDA

Fevereiro de 2024
Ribeirão Preto - SP

Blank page

Viana da Silva, Edmara
Equações diferenciais funcionais com memória dependendo do estado. Ribeirão Preto, 2024.
62p. : il. ; 30 cm

Dissertação de Mestrado, apresentada à Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto/USP. Área de concentratração: Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Eduardo Alex Hernández Morales.

1. Equações diferenciais com memória. 2. Existência e unicidade de solução. 3. Semigrupos de operadores lineares limitados.

Blank page

Resumo

VIANA, E. S. **Equações diferenciais funcionais com memória dependendo do estado**. 2024. 62p. Dissertação (Mestrado em Ciências - Matemática) Faculdade de Filosofia Ciências e Letras de Ribeirão Preto, Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto, 2024.

Esta dissertação apresenta estudos sobre a teoria de equações diferenciais com memória dependente do estado e a teoria de semigrupos lineares limitados. Simplifica os resultados de existência e unicidade para problemas de equações diferenciais com memória explícita. Além disso, usa o Teorema da Contração para estudar a existência e unicidade de soluções para equações neutras explícitas com memória dependente do estado.

Palavras-chave: Equações diferenciais com memória; Existência e unicidade de solução; Semigrupos de operadores lineares limitados.

Abstract

VIANA, E. S. **Functional differential equations with state-dependent delay**. 2024. 62p. Dissertação (Mestrado em Ciências - Matemática) Faculdade de Filosofia Ciências e Letras de Ribeirão Preto, Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto, 2024.

This dissertation presents studies on the theory of differential equations with state-dependent delay and the theory of bounded linear semigroups. It simplifies the existence and uniqueness results for differential equation problems with explicit delay. Additionally, it uses the Contraction Theorem to study the existence and uniqueness of solutions for explicit neutral equations with state-dependent delay.

Keywords: Delay differential equations; Existence and uniqueness of solution; Semigroups of bounded linear operators.

Agradecimentos

Gostaria de expressar minha gratidão a todos que estiveram ao meu lado e contribuíram para minha jornada:

À minha querida mãe, Maria Aparecida, e minha madrinha Viviane, cujo apoio incondicional e encorajamento constante foram fundamentais em cada decisão que tomei ao longo da vida.

Aos professores que moldaram meu caminho acadêmico e pessoal, em especial, tia Emília, Anderson José, Andréa Cardoso, José Paulo e Michelle Pierri, cuja orientação e dedicação foram essenciais para o meu crescimento.

Aos amigos que compartilharam comigo momentos inesquecíveis, especialmente Mesek, Matheus Felipe, Luana, Ronaldo, Clodoaldo, Bruninha, Markov, Rolê, Henrique, Mariana e Maria José, pela amizade sincera e apoio mútuo.

Aos funcionários do Departamento de Computação e Matemática, com destaque para Rosangela e Espin, cuja ajuda e suporte foram inestimáveis ao longo desta jornada.

Ao meu orientador, Eduardo Hernández, pelos conhecimentos compartilhados e pela paciência durante todo o processo.

Aos membros da comissão julgadora, Prof. Dr. Sergei Trofimchuk e Prof. Dr. Abraham Isaac Solar Pirquilaf, pelas sugestões que enriqueceram este trabalho.

E, por fim, expresso minha sincera gratidão à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), pelo apoio financeiro concedido por meio do processo nº 2022/04392-0, que viabilizou meus estudos e a realização deste trabalho de dissertação.

“A matemática é uma linguagem. É uma representação do mundo que passa por fórmulas. Uma linguagem particular, sintética, rigorosa, linda ...”
(Laure Saint-Raymond)

Sumário

Introdução

A teoria de equações diferenciais com memória dependendo do estado desempenha um papel crucial em diversos campos científicos e práticos, tais como biologia e eletrodinâmica. Esta teoria tem suas raízes no trabalho [2] de Driver sobre uma classe de equações diferenciais explícitas do tipo neutra com memória dependendo do estado (equações com termos da forma $u'(\sigma(t, u(t))), u'_{\sigma(t,u(t))}, \cdots$, etc), que surgem na teoria de eletrodinâmica.

O próprio início dessa teoria remonta a uma palestra proferida por Rodney Driver durante o Congresso "International Symposium on Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics" em 1963. Na palestra, Driver discutiu uma equação diferencial funcional do tipo neutra, deduzida a partir do estudo de um problema em eletrodinâmica. Esse problema estava relacionado com uma equação diferencial do tipo neutra da seguinte forma:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(\sigma_1(t, x(t))), x'(\sigma_2(t, x(t)))), \ \ t \in [0, a], \\ x(\theta) = \varphi(\theta), \ \ \theta \in [-p, 0] \end{cases}$$

onde $f \in C([0, a] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : \mathbb{R}^n)$, $\sigma_1, \sigma_2 \in C([0, a] \times \mathbb{R}^n : [-p, a])$ e $\varphi \in C([-p, 0] : \mathbb{R}^n)$.

A distinção fundamental entre a teoria de equações com memória dependendo do estado e outras teorias de equações com memória reside no termo $\sigma_i(t, x(t))$. No entanto, essa diferença não se limita apenas à forma das equações ou ao tipo de atraso considerado, ela tem implicações teóricas significativas que impulsionam o desenvolvimento desta teoria.

Apesar dos primeiros avanços nesta área (veja também [3], [4]) terem se concentrado principalmente em equações neutras com memória dependendo do estado, a literatura subsequente expandiu-se para incluir problemas não neutros, o que é especialmente evidente nos casos de equações diferenciais abstratas modeladas em espaços de dimensão não finita e de equações diferenciais parciais.

No que segue, apresentaremos um resumo dos capítulos presentes nesta dissertação. A estrutura deste trabalho é composta por cinco capítulos distintos, conforme detalhado a seguir:

No Capítulo 1, apresentamos alguns resultados básicos sobre a teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias sem memória em espaços de dimensão finita. Abrangemos elementos essenciais dessa teoria, focando nos resultados de existência e unicidade de soluções e continuação de solução para equações diferenciais ordinários da forma

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \ \ t \in [0, a], \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

No Capítulo 2, apresentaremos o conceito de equação diferencial com memória e um estudo sobre existência e unicidade de solução para equações funcionais com memória.

No Capítulo 3, apresentamos os estudos acerca do artigo [3] sobre existência e unicidade de soluções para uma classe de equações neutras com argumento dependendo do estado, representadas na forma:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), x(g(t, x(t))), x'(h(t, x(t)))), \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R} \\ x'(0) = z_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

No Capítulo 4, apresentamos os conceitos básicos da teoria de semigrupos lineares limitados.

No Capítulo 5, apresentamos os estudos acerca do artigo [6] sobre equações diferenciais funcionais neutras explícitas com memória dependendo do estado, representadas na forma:

$$\begin{aligned} u'(t) &= Au(t) + F\left(t, u(t), \int_0^t K(t,\tau)u'(\sigma(\tau, u(\tau)))d\tau\right), \ \ t \in [0, a], \\ u_{|_{[-p,0]}} &= \varphi \in C([-p, 0]; X). \end{aligned}$$

Para este problema propomos a utilização do Teorema de Contração para o estudo de existência e unicidade de solução.

Para finalizar está introdução, observamos que o objetivo deste trabalho visou explorar questões fundamentais da teoria de equações com memória dependendo do estado, com foco nos artigos

1. Grimm, L. J. Existence and contínuous dependence for a class of nonlinear neutral-differential equations. Proc. Amer. Math. Soc. 29 (1971), 467-473. ([3] na Bibliografia).

2. Hernandez, Eduardo. On explicit abstract neutral differential equations with state-dependent delay. Proceedings of the American Mathematical Society 151.03 (2023): 1119-1133. ([6] na Bibliografia).

1 Estudo da teoria qualitativa de equações diferenciais ordinárias

No presente capítulo apresentaremos o estudo de alguns tópicos básicos da teoria qualitativa de equações diferenciais ordinárias em espaços de dimensão finita.

1.1 Elementos básicos da teoria qualitativa de equações diferenciais ordinárias

Nesta seção, abordaremos o estudo de alguns resultados básicos sobre existência e unicidade de soluções e existência de soluções maximais em relação as condições inicias do problema

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \ \ t \in [0, a], \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Para tais estudos, utilizamos o livro do Hale [5].

1.1.1 Existência de soluções via Teoremas de Peano e Schauder

Seja t um escalar, D um conjunto aberto em $\mathbb{R}^{n+1}$, $f : D \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua e seja $x' = \frac{dx}{dt}$. Uma equação diferencial é uma relação da forma

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad \text{ou} \quad x' = f(t, x). \tag{1.1}$$

Dizemos que $x(\cdot)$ é uma solução de (1.1) em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ se $x(\cdot)$ é uma função continuamente diferenciável definida em I, $(t, x(t)) \in D$, para todo $t \in I$ e $x(\cdot)$ satisfaz (1.1) em I. Nos referimos a f como um campo vetorial em D.

Exemplo 1.1.1 *Seja $D = \mathbb{R}^2$, $f(t, x) = x^2$. A função $-\dfrac{1}{t+c}$, onde c é um número real arbitrário e $c \neq 0$, é uma solução de $x' = x^2$ para $t \in (-c, \infty)$ se $c > 0$, e para $t \in (-\infty, -c)$ se $c < 0$.*

Exemplo 1.1.2 *Seja $D = \mathbb{R}^2$, $f(t, x) = \sqrt{x}$ para $x \geq 0$ e $f(t, x) = 0$ para $x < 0$. A função $\phi(t) = \dfrac{(t-c)^2}{4}$, $t \geq c$, é a solução de $x' = \sqrt{x}$, $x \geq 0$. Note que, $x = 0$ é também uma solução.*

Seja $(t_0, x_0) \in D$. Um **problema de valor inicial (PVI)** para a equação (1.1) consiste em encontrar um intervalo I contendo t_0 e uma solução $x(\cdot)$ de (1.1) satisfazendo $x(t_0) = x_0$. Escrevemos este problema simbolicamente como

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \ \ t \in I \\ x(t_0) = x_0, . \end{cases} \tag{1.2}$$

Se existe um intervalo I contendo t_0 e um $x(\cdot)$ satisfazendo (1.2), nos referimos a ele como uma solução de (1.1) passando pelo (t_0, x_0).

Para o PVI, $x' = x^2, x(0) = -c$, com c sendo um número real, o exemplo 1.1.1 mostra que o intervalo I pode depender de c, mas pode não ser toda a reta.

O PVI $x' = \sqrt{x}, x \geq 0, x(0) = 0$, tem solução $x = 0$ em $\mathbb{R}$. A função

$$x(t) \ \ = \ \ \begin{cases} \dfrac{(t-c)^2}{4}, \ \ t \geq c \geq 0, \\ 0, \ \ t \leq c, \end{cases}$$

é também uma solução. Portanto, não precisa haver uma única solução de (1.2) para toda função f contínua.

Como o objetivo deste capítulo é discutir a existência, unicidade e continuidade de soluções em um dado momento inicial, primeiro notemos que, se considerarmos equações vetoriais, torna-se desnecessário considerar equações de ordem n.

De fato, se y é um escalar, $y^{(j)}$ denota $\frac{d^j y}{dt^j}$ e

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= F(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \\ y^{(j)}(t_0) &= x_{j+1,0}, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1, \end{aligned}$$

então, deixando $x = (y, y^{(1)}, \ldots, y^{(n-1)})$, $f = (x_2, \ldots, x_n, F)$, obtemos o problema equivalente

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0 = (x_{10}, \ldots, x_{n0}). \end{cases}$$

Além disso, equações diferenciais com valores complexos com a variável real t, estão incluídas na discussão de (1.1), pois podemos obter um sistema real tomando a parte real e imaginária.

Lema 1.1.1 *O problema $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$, $t \in I$ é equivalente a equação integral*

$$x(t) \ \ = \ \ x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau)) d\tau \tag{1.3}$$

desde que $f(\cdot)$ seja contínua.

Para provar o próximo teorema usamos o famoso resultado do Teorema do Ponto Fixo de Schauder.

Teorema 1.1.1 (Teorema do ponto fixo de Schauder) *Seja C um subconjunto fechado, limitado e convexo de um espaço de Banach X e seja $f : C \to C$ uma aplicação compacta e contínua, então f tem um ponto fixo em C.*

Teorema 1.1.2 (Teorema de Peano) *[Existência] Se f é contínua em D, então para cada $(t_0, x_0) \in D$, existe ao menos uma solução de (1.1) passando pelo ponto (t_0, x_0).*

Demonstração: Suponhamos que α, β sejam números positivos escolhidos de forma que o retângulo fechado $B(\alpha, \beta, t_0, x_0) = B(\alpha, \beta) = \{(t, x) : t \in I_\alpha, |x - x_0| \leq \beta\}$, $I_\alpha = I_\alpha(t_0) = \{t : |t - t_0| \leq \alpha\}$, pertence a D. Seja $M = \sup\{|f(t, x)|, (t, x) \in B(\alpha, \beta)\}$. Escolha $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ de forma que $0 < \bar{\alpha} \leq \alpha$, $0 < \bar{\beta} \leq \beta$, $M\bar{\alpha} \leq \bar{\beta}$ e definamos o conjunto $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ de funções ϕ em $C(I_{\bar{\alpha}}, \mathbb{R}^n)$ que satisfazem $\phi(t_0) = x_0$, $|\phi(t) - x_0| \leq \bar{\beta}$ para todos os t em $I_{\bar{\alpha}}$. É simples ver que o conjunto $\mathcal{A}$ é convexo, fechado e limitado.

Para $\phi \in \mathcal{A}$, definamos a função $\Gamma\phi$ por

$$\Gamma\phi(t) \quad = \quad x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))ds, \;\; t \in I_{\bar{\alpha}}.$$

Pelo Lema 1.1.1, encontrar pontos fixos de Γ é equivalente a resolver o PVI (1.1). No que segue, usamos o teorema do ponto fixo de Schauder para provar a existência de um ponto fixo de Γ em $\mathcal{A}$.

Obviamente, $\Gamma\phi \in C(I_{\bar{\alpha}}, \mathbb{R}^n)$ e $\Gamma\phi(t_0) = x_0$ se $\phi \in \mathcal{A}$. Além disso, para t em $I_{\bar{\alpha}}$,

$$|\Gamma\phi(t) - x_0| \quad \leq \quad \int_{t_0}^{t} |f(s, \phi(s))|ds \leq M|t - t_0| \leq M\bar{\alpha} \leq \bar{\beta},$$

pois, $B(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \subset B(\alpha, \beta)$. Portanto, $\Gamma : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$. Além disso,

$$|\Gamma\phi(t) - \Gamma\phi(\bar{t})| \quad \leq \quad \int_{\bar{t}}^{t} |f(s, \phi(s))|ds \leq M|t - \bar{t}|,$$

se $t, \bar{t} \in I_{\bar{\alpha}}$, o que implica que o conjunto $\Gamma(\mathcal{A})$ é um compacto equicontínuo de funções e, como $\Gamma(\mathcal{A})$ é limitado, do anterior segue que $\Gamma(\mathcal{A})$ é compacto em $C(I_{\bar{\alpha}}, \mathbb{R}^n)$.

Finalmente, para qualquer $\phi, \bar{\phi} \in \mathcal{A}$, segue da continuidade uniforme de $f(\cdot)$ em $B(\alpha, \beta)$ que para qualquer $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$|\Gamma\phi(t) - \Gamma\bar{\phi}(t)| \quad \leq \quad \int_{t_0}^{t} |f(s, \phi(s)) - f(s, \bar{\phi}(s))|ds \leq \varepsilon\bar{\alpha}, \;\; \forall t \in I_{\bar{\alpha}},$$

se $|\phi(s) - \bar{\phi}(s)| \leq \delta$ para todo $s \in I_{\bar{\alpha}}$. Isto prova que Γ é uma função contínua.

Do anterior, se verifica as condições do Teorema de Schauder o que permite afirmar que existe um ponto fixo de $\mathcal{A}$. Isso completa a prova do teorema. ∎

Do teorema anterior, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 1.1.1 *Se U é um conjunto compacto de D, $U \subset V$ e um conjunto aberto em D com o fecho $\overline{V}$ de V em D, então existe $\alpha > 0$ tal que, para algum valor inicial $(t_0, x_0) \in U$, existe uma solução de (1.1) através de (t_0, x_0) que existe ao menos no intervalo $t_0 - \alpha \leq t \leq t_0 + \alpha$.*

1.1.1.1 Continuação de soluções

Definição 1.1.1 *Se ϕ é uma solução da equação diferencial em um intervalo I, dizemos que $\hat{\phi}$ é uma* ***continuação*** *de ϕ, se $\hat{\phi}$ é definida em um intervalo $\hat{I}$ o qual contém I, $\hat{\phi}$ coincide com ϕ em I e $\hat{\phi}$ satisfaz a equação diferencial em $\hat{I}$. Uma solução ϕ é* ***maximal*** *se não existe continuação de ϕ.*

Lema 1.1.2 *Se D é um conjunto aberto em $\mathbb{R}^{n+1}$, $f : D \to \mathbb{R}^n$ é contínua e limitada em D, então alguma solução $\phi(\cdot)$ de (1.1) definida no intervalo (a,b) é tal que $\phi(a+0)$ e $\phi(b-0)$ existem. Se $f(b,\phi(b-0))$ é, ou pode ser definida de modo que $f(t,x)$ seja contínua em $(b,\phi(b-0))$, então $\phi(t)$ é uma solução de (1.1) em $(a,b]$. O procedimento se aplica ao ponto de extremidade esquerdo a.*

Demonstração: Primeiro mostraremos que os limites de $\phi(a+0)$ e $\phi(b-0)$ existem. Para $t_0 \in (a,b)$,

$$\phi(t) \;=\; \phi(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s,\phi(s))ds, \;\; a < t < b,$$

e para $a < t_1 \leq t_2 < 0$, vemos que

$$|\phi(t_2) - \phi(t_1)| \leq \int_{t_1}^{t_2} |f(s,\phi(s))|ds \leq M(t_2 - t_1),$$

onde M é um limitante de $f(\cdot)$ em D. Do anterior, segue que $(\phi(t_2) - \phi(t_1)) \to 0$, quando $t_1, t_2 \to a + 0$, o que implica que $\phi(a+0)$ existe. Analogamente, mostra-se que $\phi(b-0)$ existe.

A última conclusão do lema é óbvia a partir da equação integral para ϕ. ■

Teorema 1.1.3 *Se D é um conjunto aberto em $\mathbb{R}^{n+1}$, $f : D \to \mathbb{R}^n$ é contínua e limitada e $\phi(\cdot)$ é uma solução de (1.1) em algum intervalo, então há uma continuação de ϕ para um intervalo maximal de existência. Além disso, se (a,b) é um intervalo máximo de existência de uma solução $x(\cdot)$ de (1.1), então $(t,x(t))$ tende para a fronteira de D quando $t \to a$ e $t \to b$.*

Demonstração: Suponhamos que $x(\cdot)$ é uma solução de (1.1) em um intervalo I. Se I não é um intervalo máximo de existência, então $x(\cdot)$ pode ser estendido para um intervalo contendo I. Portanto, assumimos que I é fechado em uma extremidade, digamos à direita. Primeiro mostremos que $x(\cdot)$ pode ser estendido para o intervalo de existência maximal a direita e, portanto, $I = [a,b]$ e que x não tem extensão sobre $[a,\infty)$. A prova para a extensão a esquerda é muito semelhante.

Suponha que U é um conjunto compacto de D, $U \subset V$, um conjunto aberto em D com o fecho $\overline{V}$ de V em D. Pelo Corolário 1.1.1 para algum valor inicial em U há uma solução de (1.1) existente sobre o intervalo de comprimento α dependendo apenas de U, V e o limite de f em V. Assim, se $x(t), a \leq t \leq b$, pertencer a U, então há uma extensão de x no intervalo $[a, b+a]$. Como U é compacto, podemos continuar este processo um finito número de vezes para concluir que há uma extensão de $x(t)$ para um intervalo $[a, b_U]$ tal que $(b_U, x(b_U))$ não pertence a U.

Agora, escolha uma sequência V_n de conjuntos abertos em D tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n = D$, $\overline{V}_n$ fechado, limitado, $\overline{V}_n \subset V_{n+1}$ para $n = 1, 2, \cdots$. Para cada V_n, existe uma sequência monótona crescente $\{b_n\}$ construída como anteriormente para que a solução $x(t)$ de (1.1) em $[a, b]$ tenha uma extensão para o intervalo $[a, b_n]$ e $(b_n, x(b_n))$ não esteja em $\overline{V}_n$. Como os b_n são limitados, temos $\omega = \lim_{n\to\infty} b_n$. É claro que x foi estendido para o intervalo $[a, \omega)$ e não pode ser estendido mais, pois a sequência $(b_k, x(b_k))$ é ilimitada ou tem um ponto limite na fronteira do domínio de definição da f.

Se $\omega = \infty$, a última afirmação do teorema é trivial. Suponha que ω é finito, $U \subset D$ é compacto e existe uma sequência $(t_k, x(t_k))$, $y \in \mathbb{R}^n$, $(\omega, y) \in U$, tal que $t_k \to w$, $x(t_k) \to y$ quando $k \to \infty$. O fato de que f é limitada em uma vizinhança de (ω, y) implica que x é uniformemente contínuo em $[a, \omega)$ e $x(t) \to y$ quando $t \to \omega$. Assim, há uma extensão de x para o intervalo $[a, \omega + \alpha]$. Como $\omega + \alpha > \omega$, isto é uma contradição e mostra que há um t_U tal que $(t, x(t))$ não está em U para $t_U < t < \omega$. Como U é um conjunto compacto arbitrário, isso prova que $(t, x(t))$ tende para a fronteira de D. Deste modo a prova do teorema esta completa. ■

O teorema de continuação 1.1.3 pode ser usado em exemplos específicos para verificar se uma solução é definida em um intervalo de tempo grande.

Exemplo 1.1.3 *Queremos mostrar que uma solução está definida em um intervalo $[t_0, \infty)$. Para isso, é suficiente seguir o seguinte procedimento.*

Se a função $f(\cdot)$ é contínua para $t \in (t_1, \infty)$, $t_1 < t_0$, $|x| < \alpha$, e se por algum meio podemos constatar que uma certa solução $x(t)$ deve sempre satisfazer $|x(t)| \leq \beta < \alpha$ para todos os valores de $t \geq t_0$ para os quais $x(t)$ está definida, então necessariamente $x(t)$ está definida em $[t_0, \infty)$. De fato, escolha qualquer $\Gamma \geq t_0$ e γ tal que $\beta < \gamma < \alpha$ e defina o retângulo D_1 como $D_1 = \{(t, x) : t_0 \leq t \leq \Gamma, |x| \leq \gamma\}$. Então $x(t)$ é limitado em D_1 e o Teorema de Continuação implica que a solução $x(\cdot)$ pode ser continuada até a fronteira de D_1. Mas $\gamma > \beta$ implica que $x(t)$ deve alcançar essa fronteira ao alcançar a face do retângulo definida por $t = \Gamma$. Portanto, $x(t)$ existe para $t_0 \leq t \leq \Gamma$. Como Γ é arbitrário, isso prova a afirmação.

1.1.2 Existência e unicidade de soluções via Teorema de Contração de Banach

As definições e teoremas nesta seção são importantes na análise de equações diferenciais, pois estabelecem condições sob as quais é possível garantir a existência e unicidade de soluções para certos tipos de equações diferenciais.

Definição 1.1.2 *A função $f : \mathcal{D} \to X$ é chamada:*

1. ***localmente Lipschitz*** *em relação a sua última variável se para algum conjunto fechado $U \subset \mathcal{D}$ existe $k_U = L > 0$ tal que*

$$\| f(t,u) - f(t,v) \| \;\; \leq \;\; L \| u - v \|, \;\; \forall (t,u),(t,v) \in U;$$

2. ***localmente Lipschitz*** *com relação a ambas as variáveis se para algum conjunto fechado* $U \subset \mathcal{D}$ *existe* $k_U = L > 0$ *tal que*

$$\| f(t,u) - f(s,v) \| \quad \leq \quad L(|t-s| + \| u - v \|), \ \ \forall (t,u),(t,v) \in U;$$

3. ***Lipschitz*** *em relação a sua última variável se existe* $L > 0$ *tal que*

$$\| f(t,u) - f(t,v) \| \leq L \| u - v \|, \ \ \forall (t,u),(t,v) \in \mathcal{D};$$

4. ***Lipschitz*** *com relação a ambas as variáveis se existe* $L > 0$ *tal que*

$$\| f(t,u) - f(s,v) \| \leq L(|t-s| + \| u - v \|), \ \ \forall (t,u),(t,v) \in \mathcal{D}.$$

No que segue $(X, \| \cdot \|)$ é um espaço de Banach.

Definição 1.1.3 *Seja* $C \subseteq X$*. Um* ***ponto fixo*** *de uma fução* $F : C \subseteq X \to C$ *é um elemento* $x \in C$ *tal que* $F(x) = x$*. Além disso,* F *é uma* ***contração*** *em* C *se existe* $L_F \in [0,1)$ *tal que*

$$\| F(x) - F(y) \| \quad \leq \quad L_F \| x - y \|, \quad \forall x, y \in C.$$

Teorema 1.1.4 (Teorema da Contração) *Seja* C *um subconjunto fechado (não vazio) de um espaço de Banach* X *e seja* $F : C \to C$ *uma contração. Então* F *tem um único ponto fixo* $\bar{x} \in C$*.*

Demonstração: Suponha que $x = F(x)$ e que $\tilde{x} = F(\tilde{x})$. Então,

$$\| x - \tilde{x} \| \quad = \quad \| F(x) - F(\tilde{x}) \| \leq L_F \| x - \tilde{x} \|,$$

o que implica que $\| x - \tilde{x} \| \leq L_F \| x - \tilde{x} \|$, de onde segue que $\| x - \tilde{x} \| - L_F \| x - \tilde{x} \| = 0$. Como $L_F < 1$, obtemos que $x = \tilde{x}$. ∎

Corolário 1.1.2 *Suponha* $F : X \to X$ *é Lipschitz e que existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $F^n : X \to X$ *é contração. Então* $F^n(\cdot)$ *tem um ponto fixo* x_0 *e* x_0 *é ponto fixo de* F*.*

Demonstração: Se F^n é contração, então existe um único $x_0 \in X$ tal que $F^n(x_0) = x_0$. Mostremos que $F(x_0) = x_0$. Note que,

$$F^n(F(x_0)) = F^{n+1}(x_0) = F(F^n(x_0)) = F(x_0),$$

ou seja, $F(x_0)$ é ponto fixo de F^n. Mas como F^n tem um único ponto fixo x_0, segue que, $F(x_0) = x_0$. ∎

Usando o Teorema da Contração, podemos provar o seguinte resultado.

Teorema 1.1.5 *Se* f *é Lipschitz e* $L_f a < 1$*, então o problema*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \ \ \forall t \in [0,a] \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{1.4}$$

tem uma única solução em $[0,a]$*.*

Demonstração: Definamos $\Gamma : C([0,a];X) \to C([0,a];X)$ por

$$\Gamma x(t) \;=\; x_0 + \int_0^t f(s,x(s))ds,$$

temos que para $x, y \in C([0,a];X)$ e $t \in [0,a]$

$$\begin{aligned}
|\Gamma x(t) - \Gamma y(t)| &\leq \int_0^t |f(s,x(s)) - f(s,y(s))|ds \\
&\leq L_f \int_0^t \| x(s) - y(s) \| ds \\
&\leq L_f \| x - y \|_{C([0,a];X)} \int_0^t ds \\
&\leq L_f a \| x - y \|_{C([0,a];X)} \\
\Rightarrow \| \Gamma x - \Gamma y \|_{C([0,a];X)} &\leq L_f a \| x - y \|_{C([0,a];X)} . \qquad (1.5)
\end{aligned}$$

Como $L_f a < 1$, então Γ tem um único ponto fixo $x \in C([0,a] : \mathbb{R})$, ou seja, $\Gamma x = x$. Do, anterior e do Teorema 1.1.4 segue que o problema

$$\begin{cases} x'(t) = f(t,x(t)), \;\; \forall t \in [0,a] \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

possui uma única solução, que é dada por

$$x(t) \;=\; x_0 + \int_0^t f(s,x(s))ds,$$

em $[0,a]$. ■

Teorema 1.1.6 *Suponha que f é Lipschitz. Então existe uma solução em algum intervalo $[0,b]$ com $0 < b \leq a$.*

Demonstração: Seja $0 < b \leq a$, tal que $L_f b < 1$ e $\Gamma : C([0,b];X) \to C([0,b];X)$ a função definida por

$$\Gamma x(t) = x_0 + \int_0^t f(s,x(s))ds, \;\; t \in [0,a].$$

Como f é Lipschitz, segue que $\| \Gamma x - \Gamma y \| \leq L_f b \| x - y \|$. E como $L_f b < 1$, isto é, Γ é contração, argumentando como na prova do Teorema 1.1.5, podemos provar que Γ possui um único ponto fixo, deste modo, existe uma solução no intervalo $[0,b]$. ■

Para encontrarmos uma solução no intervalo $[0,a]$ podemos modificar um pouco a demonstração usando Γ^n, se f é Lipschitz, usando o seguinte resultado, podemos provar a existência de solução de $\Gamma^n(\cdot)$ em $[0,a]$.

Teorema 1.1.7 *Suponha que f é Lipschitz. Então existe uma única solução de (1.4) no intervalo $[0,a]$.*

Demonstração: Tomemos a aplicação $\Gamma : C([0,a]:\mathbb{R}) \to C([0,a]:\mathbb{R})$ que será dada por $\Gamma x(t) = x_0 + \int_0^t f(s,x(s))ds$, então provaremos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que Γ^n é contração. Da prova do Teorema 1.1.5 é simples ver (veja (1.5)), que

$$|\Gamma x(t) - \Gamma y(t)| \leq L_f t \parallel x - y \parallel_{C([0,a])}, \ \ \forall t \in [0,a]. \tag{1.6}$$

Usando (1.6), temos que

$$\begin{aligned} |\Gamma^2 x(t) - \Gamma^2 y(t)| &= \int_0^t |f(\tau, \Gamma x(\tau)) - f(\tau, \Gamma y(\tau))| d\tau \\ &\leq \int_0^t L_f |\Gamma x(\tau) - \Gamma y(\tau)| d\tau \\ &\leq \int_0^t L_f L_f \tau \parallel x - y \parallel d\tau \\ &= L_f^2 \parallel x - y \parallel \frac{t^2}{2}, \end{aligned}$$

o que implica que $|\Gamma^2 x(t) - \Gamma^2 y(t)| \leq L_f^2 \parallel x - y \parallel_{C([0,a])} \dfrac{t^2}{2}$, para todo $t \in [0,a]$.

Usando isto e procedendo como antes, vemos que

$$\begin{aligned} |\Gamma^3 x(t) - \Gamma^3 y(t)| &= \int_0^t |f(\tau, \Gamma^2 x(\tau)) - f(\tau, \Gamma^2 y(\tau))| d\tau \\ &\leq \int_0^t L_f |\Gamma^2 x(\tau) - \Gamma^2 y(\tau)| d\tau \\ &\leq L_f \int_0^t L_f^2 \frac{\tau^2}{2} \parallel x - y \parallel d\tau \\ &= L_f^3 \parallel x - y \parallel \int_0^t \frac{\tau^2}{2} d\tau, \end{aligned}$$

o que implica que $|\Gamma^3 x(t) - \Gamma^3 y(t)| \leq L_f^3 \parallel x - y \parallel_{C([0,a])} \dfrac{t^3}{3!}$, para todo $t \in [0,a]$.

Repetindo o processo n-vezes, temos que

$$|\Gamma^n x(t) - \Gamma^n y(t)| \leq L_f^n \parallel x - y \parallel \frac{t^n}{n!}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue que $\parallel \Gamma^n x - \Gamma^n y \parallel_{C([0,a])} \leq \dfrac{L_f^n a^n}{n!} \parallel x - y \parallel$.

Como, $\dfrac{L_f^n a^n}{n!} \to 0$ se $n \to \infty$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{L_f^N a^N}{N!} < 1$, o que implica que Γ^N é contração, que Γ^N tem um único ponto fixo x e que x é ponto fixo de Γ, pelo Corolário 1.1.2, logo x é solução. ■

Em geral, é mais comum que uma função f seja localmente Lipschitz. No que segue, queremos obter resultados como os anteriores mas supondo que f possui constante Lipschitz.

No próximo teorema, estudaremos a existência e unicidade de solução para o problema

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t \in [0, b] \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{1.7}$$

supondo que f é localmente Lipschitz.

Antes de provar o próximo resultado de existência de solução, vamos incluir uma versão mais fina do Teorema da Contração.

Proposição 1.1.1 (Versão fina do Teorema da Contração) *Suponha que X é um espaço de Banach e que $A \subset X$ é fechado. Se $F : A \to A$ é uma contração, então existe $a \in A$ tal que $F(a) = a$. Mais ainda, a é o único elemento de A com está propriedade.*

Teorema 1.1.8 *Suponha que f é localmente Lipschitz. Então existe $b \in [0, a]$ tal que no intervalo $[0, b]$ existe uma única solução $u \in C([0, b] : \mathbb{R})$ de (1.7).*

Demonstração: Seja $R > \sup_{\tau \in [0,a]} f(\tau, x_0)|$ e $L_R > 0$ tal que

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L_R|x - y|, \ \forall x, y \in B_R(x_0, \mathbb{R}), \ t \in [0, a].$$

Fixemos agora $0 < b \leq a$ de modo que $L_R b < 1$ e $L_R R b + b \sup_{\tau \in [0,a]} |f(\tau, x_0)| < R$.

Definamos agora o conjunto

$$\mathcal{S} = \{u : [0, b] \to \mathbb{R} : |u(s) - u_0| < R, \forall s \in [0, b]\}.$$

Note que, $\mathcal{S} \neq \emptyset$ pois a função $u : [0, b] \to X$ definida por $u(s) = u_0$ para todo $s \in [0, b]$ pertence a $\mathcal{S}$.

Definamos agora a função $\Gamma : \mathcal{S} \to C([0, b] : \mathbb{R})$, por

$$\Gamma x(t) = x_0 + \int_0^t f(\tau, x(\tau)) d\tau.$$

Afirmamos que Γ é uma contração definida de $\mathcal{S}$ em $\mathcal{S}$.

Seja $u \in \mathcal{S}$. Usando que $u \in \mathcal{S}$, para todo $t \in [0, b]$ vemos que

$$\begin{aligned}
|\Gamma u(t) - x_0| &\leq \int_0^t |f(\tau, u(\tau))| d\tau \\
&\leq \int_0^t |f(\tau, u(\tau)) - f(\tau, x_0)| d\tau + \int_0^t |f(\tau, x_0)| d\tau \\
&\leq \int_0^t L_R |u(\tau) - x_0)| d\tau + \int_0^t |f(\tau, x_0)| d\tau \\
&\leq \int_0^t L_R R d\tau + \sup_{\tau \in [0,a]} |f(\tau, x_0)| \int_0^t d\tau \\
&\leq L_R R b + \sup_{\tau \in [0,a]} |f(\tau, x_0)| b \leq R
\end{aligned}$$

o que prova que $\Gamma u \in \mathcal{S}$. Além do anterior, para $u, v \in \mathcal{S}$ e $t \in [0, b]$ vemos que

$$\begin{aligned} |\Gamma u(t) - \Gamma v(t)| &\leq \int_0^t |f(\tau, u(\tau)) - f(\tau, v(\tau))| d\tau \\ &\leq \int_0^t L_R |u(\tau) - v(\tau)| d\tau \\ &\leq \int_0^t L_R \parallel u - v \parallel d\tau \\ &\leq L_R b \parallel u - v \parallel, \end{aligned}$$

ou seja,

$$|\Gamma u(t) - \Gamma v(t)| \leq L_R b \parallel u - v \parallel, \ \ \forall t \in [0, b],$$

o que permite concluir que

$$\parallel \Gamma u - \Gamma v \parallel_{C([0,b];X)} \leq L_R b \parallel u - v \parallel_{C([0,b])}, \ \ \forall u, v \in \mathcal{S}.$$

Assim, segue que $\Gamma : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$, $\mathcal{S}$ é fechado e Γ é contração. Logo, existe $u \in \mathcal{S}$ tal que $\Gamma u = u$, o que implica que $\Gamma u(t) = u(t)$, para todo $t \in [0, b]$, de onde segue que $u(t) = x_0 + \int_0^t f(\tau, u(\tau)) d\tau$. Logo, $u(\cdot)$ é uma solução e do Teorema 1.1.1 podemos concluir que $u(\cdot)$ é a única solução em $[0, b]$. ■

2 Equações diferenciais funcionais

No presente capítulo apresentaremos alguns modelos básicos de equações diferenciais com memória e alguns resultados sobre existência e unicidade de soluções.

2.1 Equações diferenciais com memória

Vamos começar considerando o seguinte problema diferencial:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t-r)), & t \in [0, a], \\ x(\theta) = \varphi(\theta), & \theta \in [-p, 0], \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $a > 0, p \geq r, \varphi \in C([-p, 0]; X)$ é a "história inicial" e $f \in C([0, a] \times X; X)$. É importante notar que, neste cenário, quando $t = 0$, temos que $x(t-r) = x(-r)$ e quando $t = r$, temos que $x(t-r) = x(0)$. Em outras palavras, para obtermos informações sobre $x(\cdot)$ no intervalo $[0, r]$, precisamos de informações sobre $x(\cdot)$ em pontos anteriores a esse intervalo, mais especificamente, precisamos de informações de $x(\cdot)$ para $t \in [-r, 0]$.

Definição 2.1.1 *Equações diferenciais de evolução em que precisamos de informações anteriores para determinarmos o comportamento do estado em um determinado tempo t, são chamadas de **Equações Diferenciais com Memória**.*

O problema (2.1) é um dos modelos mais simples da teoria de equações com memória. Em particular, consideremos o caso como exemplo, onde $r = 1$, $f(t, x) = x$ e $\varphi(\theta) = 1$ em $[-1, 0]$, e estabelecemos as condições iniciais como $x(\theta) = 1$ para $\theta \in [-1, 0]$ e $t \geq 0$. Este caso, tem o problema

$$\begin{cases} x'(t) = x(t-1), & t \geq 0, \\ x(\theta) = 1, & \theta \in [-1, 0]. \end{cases} \tag{2.2}$$

Ao integrar ambos os lados da equação (2.2) de 0 até t (com $t > 0$), obtemos:

$$x(t) = x(0) + \int_0^t x(\tau - 1) d\tau. \tag{2.3}$$

É importante notar que se $t \in [0, 1]$, então $t - 1 \in [-1, 0]$. Portanto, podemos simplificar(2.3), e obter que

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + \int_0^t x(\tau - 1) d\tau \\ &= 1 + \int_0^t 1 d\tau \\ &= 1 + t. \end{aligned}$$

Assim, a solução para o problema (2.2) no intervalo $[0, 1]$ é dada por

$$x(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-1, 0], \\ t + 1, & t \in [0, 1]. \end{cases}$$

Dessa forma, a partir das condições iniciais, conseguimos determinar a solução do problema no intervalo $[0, 1]$. Procedendo como antes, para $t \in [1, 2]$ temos que $t-1 \in [0, 1]$ e assim

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + \int_0^t x(\tau - 1)d\tau \\ &= 1 + \int_0^1 x(\tau - 1)d\tau + \int_1^t x(\tau - 1)d\tau \\ &= x(1) + \int_1^t x(\tau - 1)d\tau \\ &= 2 + \int_1^t [1 + (\tau - 1)]d\tau \\ &= 2 + \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{2} + \frac{t^2}{2}. \end{aligned}$$

Deste modo, temos uma solução para o problema (2.2) definida no intervalo $[-1, 2]$, dada por

$$x(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-1, 0], \\ t + 1, & t \in [0, 1], \\ \frac{t^2}{2} + \frac{3}{2}, & t \in [1, 2]. \end{cases}$$

Seguindo com este processo é possível encontrar uma solução para o problema no intervalo $[0, \infty)$.

A seguir, apresentaremos um exemplos de equações com memória que podem ser formulados na forma (2.1).

Exemplo 2.1.1 *Considere a equação*

$$\begin{cases} x'(t) = te^{x(t-2)}, & t \in [0, a] \\ x(\theta) = \theta, & \theta \in [-p, 0], p \geq 1. \end{cases} \tag{2.4}$$

Neste caso, podemos representar (2.4) *na forma (2.1) definindo* $f(t, x) = te^x$, $r = 2$ *e* $\varphi(\theta) = \theta$, *para* $\theta \in [-1, 0]$.

Ao analisarmos o exemplo anterior, podemos notar que seguindo os procedimentos anteriores, é possível encontrar a solução em $[-2, \infty)$. No entanto, é importante destacar que a complexidade desse processo pode variar consideravelmente dependendo da função específica e da "história" inicial que estamos lidando. Nesse contexto, a abordagem abstrata do problema (2.1), investigando a existência de soluções e suas propriedades qualitativas, pode se revelar altamente vantajosa.

No que segue, apresentaremos uma solução no intervalo $[-p, n]$ para o modelo de equações com memória discreta, na forma

$$x'(t) = f(t, x(t-r)), \;\; t \in [0, a], \tag{2.5}$$
$$x(\theta) = \varphi(\theta), \;\; \theta \in [-p, 0], \tag{2.6}$$

onde $r > 0$. Como r é positivo, a existência de soluções para este problema é evidente e nos fornece uma fórmula para a solução do problema considerando propriedades mínimas para a função $f(\cdot)$ e a condição inicial $\varphi(\cdot)$.

Integrando a equação (2.5) no intervalo $[0, r]$, obtemos que

$$x(t) = \varphi(0) + \int_0^t f(\tau, x(\tau - r))d\tau = \varphi(0) + \int_0^t f(\tau, \varphi(\tau - r))d\tau, \tag{2.7}$$

o que nos dá uma fórmula explícita para a solução no intervalo $[0, r]$. Uma vez conhecida a solução em $[0, r]$, podemos usar a mesma ideia para obter uma fórmula para a solução no intervalo $[r, 2r]$. Especificamente, se $x_1(\cdot)$ é a solução do problema no intervalo $[0, r]$, para $t \in (r, 2r]$ temos que

$$\begin{aligned} x(t) &= \varphi(0) + \int_0^r f(\tau, x(\tau - r))d\tau + \int_r^t f(\tau, x(\tau - r))d\tau \\ &= \varphi(0) + \int_0^r f(\tau, \varphi(\tau - r))d\tau + \int_r^t f(\tau, x_1(\tau - r))d\tau. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Continuando dessa forma, obtemos a existência e unicidade de uma solução definida em todo o intervalo $[-p, n]$.

A seguir apresentaremos um caso mais geral para equações com memória discreta.

Exemplo 2.1.2 *Sejam $u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n$ as soluções definidas previamente. Se a função $u : [0, (n+1)r] \to X$ é solução do problema, então para $t \in [nr(n+1)r]$, temos que*

$$\begin{aligned} u(t) &= \varphi(0) + \int_0^t f(\tau, u(\tau - r))d\tau \\ &= \varphi(0) + \int_0^s f(\tau, u(\tau - r))d\tau + \int_s^{2s} f(\tau, u(\tau - r))d\tau \\ &\quad + \cdots + \int_{(n-1)s}^{ns} f(\tau, u(\tau - r))d\tau + \int_{ns}^t f(\tau, u(\tau - r))d\tau \\ &= \varphi(0) + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{is}^{(i+1)s} f(\tau, u(\tau - r))d\tau + \int_{ns}^t f(\tau, u(\tau - r))d\tau, \end{aligned}$$

o que implica na existência de solução global para o problema.

A equação (2.1), é conhecida como **Equação Diferencial com Memória Discreta**. Além desse tipo de equações, existe outro grupo de equações que também envolvem memória, denominadas **Equações Diferenciais com Memória Dependendo do Tempo**. Um modelo clássico deste tipo de equações podem ser expressas na maneira abstrata

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t - \gamma(t))), & t \in [0, a] \\ x(\theta) = \varphi(\theta), & \theta \in [-p, 0] \end{cases} \tag{2.9}$$

onde $a > 0, \varphi \in C([-p, 0]; X), f \in C([0, a] \times X; X)$ e $\gamma(t) > t$ para todo $t \in [0, a]$.

A seguir apresentamos um exemplos de equações com memória dependendo do tempo, que podem ser descritas na forma (2.9).

Exemplo 2.1.3 *Considere a equação*

$$\begin{cases} x'(t) = t \sin(x(2t - 3)), & t \in [0, a] \\ x(\theta) = \theta, & \theta \in [-3, 0]. \end{cases} \tag{2.10}$$

Neste caso, podemos representar (2.10) *na forma (2.9) definindo* $f(t, x) = t \sin x$, $p = 3$, $\varphi(\theta) = \theta$, $\gamma(t) = 3 - t$ *e* $t \leq 3$.

Como segundo modelo de equações com memória, considere o problema de Cauchy abstrato:

$$u'(t) = f(t, u(\gamma(t))), \qquad t \in [0, a] \tag{2.11}$$

$$u(\theta) = \varphi(\theta), \qquad \theta \in [-p, 0], \tag{2.12}$$

onde $\varphi \in C([-p, 0]; X)$, $f \in C([0, a] \times X; X)$ e $\gamma(\cdot)$ é uma função $C([0, a]; [-p, a])$ tal que $\gamma(t) \leq t$ para todo $t \in [0, a]$.

Em relação ao problema (2.11)-(2.12), podemos distinguir dois casos diferentes. Nos próximos resultados, estudaremos separadamente os casos $\gamma(0) < 0$ e $\gamma(0) = 0$.

Proposição 2.1.1 *Se* $f \in C([0, a] \times X; X)$, $\gamma \in C([0, a]; [0, p])$ *e* $\gamma(0) < 0$, *então existe uma única solução* $u \in C([-p, b]; X)$ *do problema (2.11)-(2.12) para algum* $b \in (0, a]$. *Mas ainda, se* $\gamma(t) < t$ *para todo* $t \in [0, a]$, *então existe uma única solução do problema (2.11)-(2.12) definida em todo o intervalo* $[-p, a]$.

Demonstração: Seja $\gamma(0) < 0$ e defina $b_1 = \sup\{s \in [0, a] : \gamma(\theta) \leq 0, \ \forall\, 0 \leq \theta \leq s\}$. É óbvio que $b_1 > 0$. Se $u(\cdot)$ é uma solução da equação, integrando a equação (2.11) em $[0, b_1]$, para $t \in [0, b_1]$ vemos que

$$u(t) = \varphi(0) + \int_0^t f(\tau, u(\gamma(\tau)))d\tau = \varphi(0) + \int_0^t f(\tau, \varphi(\gamma(\tau)))d\tau. \tag{2.13}$$

Dessa forma, obtemos a existência de uma única solução $u_1 \in C([-p, b_1]; X)$ do problema (2.11)-(2.12). Isso demonstra a primeira parte deste resultado.

Agora, vamos assumir que $\gamma(t) < t$ para todo $t \in [0, a]$. Se $b_1 = a$, a demonstração está concluída. Caso contrário, para obter uma solução do problema em algum intervalo da forma $[-p, b_1 + \delta]$, estudamos o problema diferencial:

$$\begin{aligned} u'(t) &= f(t, u(\gamma(t))), \qquad t \in [b_1, a] \qquad (2.14)\\ u(\theta) &= u_1(\theta), \qquad \theta \in [b_1 - p, b_1]. \qquad (2.15) \end{aligned}$$

Como $\gamma(b_1) < b_1$, vemos que $b_2 = \sup\{s \in [b_1, a] : \gamma(\theta) \leq b_1, \ \forall b_1 \leq \theta \leq s\}$ é maior que b_1. Procedendo de forma semelhante ao início da demonstração, integrando a equação (2.14) e usando que $\gamma(t) \leq b_1$ para todo $t \in [b_1, b_2]$, podemos deduzir facilmente que a função $u_2 \in C([b_1 - p, b_2]; X)$ definida por $u_2 = u_1$ em $[b_1 - p, b_1]$ e

$$u_2(t) = u_1(b_1) + \int_{b_1}^{t} f(\tau, u_1(\tau)) d\tau, \qquad (2.16)$$

para $t \in [b_1, b_2]$, é uma solução do problema (2.14)-(2.15) em $[b_1 - p, b_2]$. Além disso, se definimos $u : [-p, b_2] \to X$ por $u(t) = u_1(t)$ se $t \in [-p, b_1]$ e $u(t) = u_2(t)$ se $t \in [b_1, b_2]$, obtemos uma solução de (2.11)-(2.12) no intervalo $[-p, b_2]$. Como antes, se $b_2 = a$, a demonstração está concluída. Se $b_2 < 0$, podemos continuar usando a ideia anterior.

A partir do que foi mencionado anteriormente, deduzimos a existência de uma única solução maximal $u : I_{\max} \to X$ do problema diferencial (2.11)-(2.12). Seja $b_\varphi = \sup I_{\max}$. A seguir, provaremos que $b_\varphi = a$.

Como a solução maximal está definida em $[0, b_\varphi)$ e $\gamma(b_\varphi) < b_\varphi$, para $t \in [0, b_\varphi)$ vemos que

$$\begin{aligned} \| u(t) \| &\leq \| \varphi(0) \| + \int_0^t \| f(s, u(s)) \| ds \\ &\leq \| \varphi(0) \| + \int_0^t \| f(s, u(\gamma(s))) - f(0, \varphi(0)) \| ds + \int_0^t \| f(0, \varphi(0)) \| ds \\ &\leq \| \varphi(0) \| + \int_0^t [f]_{C_{Lip}} (s + \| u(\gamma(s)) \|) ds + \| f(0, \varphi(0)) \| t \\ &\leq \| \varphi(0) \| + \| f(0, \varphi(0)) \| a + \int_0^t [f]_{C_{Lip}} s ds + \int_0^t [f]_{C_{Lip}} \| u(\gamma(s)) \| ds \\ &\leq \| \varphi(0) \| + \| f(0, \varphi(0)) \| a + \frac{a^2}{2} [f]_{C_{Lip}} + \int_0^t [f]_{C_{Lip}} \| u \|_{C([-p,s];X)} ds \\ &= \alpha + \int_0^t [f]_{C_{Lip}} \| u \|_{C([-p,s];X)} ds, \end{aligned}$$

de onde concluímos que:

$$\| u \|_{C([-p,t];X)} \leq \alpha + \int_0^t [f]_{C_{Lip}} \| u \|_{C([-p,s];X)} ds, \quad \forall t \in [0, b_\varphi).$$

Além disso, da desigualdade de Gronwall, é possível notar que: $\| u \|_{C([-p,t];X)} \leq \alpha e^{[f]_{C_{Lip}} a}$ para todo $t \in [0, b_\varphi)$, o que implica que as funções $u(\cdot)$ e $f(\cdot, u(\cdot))$, e consequentemente a função $u'(\cdot)$, são limitadas em $[0, b_\varphi)$. Como

$$[u]_{C_{Lip}([0,b_\varphi))} \leq \| u' \|_{C([0,b_\varphi);X)} \quad e \quad \| u(t) - u(s) \| \leq \| u' \|_{C([0,b_\varphi);X)} | t - s |,$$

podemos concluir que $\lim_{t \to b_\varphi} u(t)$ existe.

Agora, definimos a função $\bar{u} : [-p, b_\varphi] \to X$ por $\bar{u}(t) = u(t)$ para $t \in [-p, b_\varphi)$ e $\bar{u}(b_\varphi) = \lim_{t \to b_\varphi} u(t)$. Como a função $f(\cdot, \bar{u})$ é contínua em $[-p, b_\varphi]$, usando o Teorema da Convergência Limitada, obtemos:

$$\bar{u}(b_\varphi) = \varphi(0) + \int_0^{b_\varphi} f(s, u(\gamma(s)))ds,$$

o que implica que $\bar{u}$ é uma solução do problema no intervalo $[-p, b_\varphi]$. Mais ainda, como $u(\cdot)$ é uma solução maximal, deduzimos do exposto anteriormente que $u = \bar{u}$ e que $I_{\max} = [-p, b_\varphi]$.

Para finalizar, destacando que $\gamma(b_\varphi) < b_\varphi$ e argumentando como no início da demonstração, podemos provar que existe uma solução para o problema (2.11)-(2.12) em algum intervalo da forma $[-p, b_{\varphi,1}]$ onde $b_{\varphi,1} = \sup\{s \in [b_\varphi, a] : \gamma(\theta) \leq b_\varphi, \ \forall b_\varphi \leq \theta \leq s\}$. Isso contradiz o fato de que $u(\cdot)$ é uma solução maximal do problema (2.11)-(2.12). O que conclui a demonstração. ∎

Os casos em que $\gamma(0) = 0$ e $\gamma(t) \leq t$ para todo $t \in [0, a]$ precisam ser tratados de maneira diferente. A diferença mais importante é o fato de que não podemos representar a solução em termos da condição inicial $\varphi(\cdot)$. No próximo resultado, estudamos a existência de soluções usando o Teorema da Contração de Banach.

Proposição 2.1.2 *Assuma $f \in C_{Lip}([0, a] \times X; X)$, $\gamma \in C([0, a]; [-p, a])$ e que $\gamma(t) \leq t$ para todo $t \in [0, a]$. Então existe uma única solução do problema (2.11)-(2.12) em $[-p, a]$.*

Demonstração: Seja $b \in [0, a]$ tal que $[f]_{C_{Lip}} b < 1$. Definamos agora o operador $\Gamma : C([-p, b]; X) \to S$ por $(\Gamma u)_{|[-p,0]} = \varphi$ e

$$\Gamma u(t) = \varphi(0) + \int_0^t f(s, u(\gamma(s))ds, \qquad t \in [0, b]. \tag{2.17}$$

Para $u, v \in C([-p, b]; X)$ e $t \in [0, b]$ é fácil ver que

$$\begin{aligned} \| \Gamma u(t) - \Gamma v(t) \| &\leq \int_0^t \| f(\tau, u(\gamma(\tau))) - f(\tau, v(\gamma(\tau))) \| d\tau \\ &\leq \int_0^t [f]_{C_{Lip}} \| u(\gamma(\tau))) - v(\gamma(\tau)) \| d\tau \\ &\leq [f]_{C_{Lip}} b \| u - v \|_{C([0,b];X)}, \end{aligned}$$

o que nos permite concluir que existe uma única solução $v \in C([-p, b]; X)$ do problema (2.11)-(2.12) no intervalo $[-p, b]$.

Considere agora o problema

$$\begin{aligned} u'(t) &= f(t, u(\gamma(t))), \qquad t \in [b, 2b] && (2.18)\\ u(\theta) &= v(\theta), \qquad \theta \in [-p, b]. && (2.19) \end{aligned}$$

Seguindo um raciocínio semelhante ao início da demonstração, podemos provar que existe uma única solução $w \in C([-p, 2b]; X)$ do problema (2.18)-(2.19). Além disso, é fácil ver que $w(\cdot)$ é uma solução de (2.11)-(2.12) em $[-p, 2b]$. Continuando dessa maneira, podemos estabelecer a existência de uma solução definida em $[-p, a]$. O que conclui a demonstração. ■

Também é relevante considerar as **Equações com Memória Distribuída**. Dentro desta classe de equações, um modelo bastante estudado é o problema

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x_t), \;\; t \in [0, a] \\ x(\theta) = \varphi(\theta), \;\; \theta \in [-p, 0], \end{cases} \tag{2.20}$$

onde, $\varphi \in C([-p, 0]; X)$, $x_t \in C([-p, 0]; X)$ é a função definida por $x_t(\theta) = x(t + \theta)$ e $f \in C([0, a] \times C([-p, 0]; X); X)$.

Na próxima seção apresentaremos resultados sobre o modelo (2.20).

2.2 Existência de soluções para equações diferenciais funcionais

Estudaremos agora algumas questões básicas sobre o problema de existência de soluções para uma classe de equações diferenciais funcionais com memória descrita na forma

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u_t), \;\; t \in [0, a], \\ u(\theta) = \varphi(\theta), \;\; \theta \in [-p, 0], \end{cases} \tag{2.21}$$

onde $f \in C([0, a] \times C([-p, 0]; X); X)$, $p > 0$ e $\varphi \in C([-p, 0]; X)$. Este é um modelo clássico e muito geral da teoria das equações com memória. Nessa equação, a memória é representada pelo símbolo "u_t", e "u_t" é a função definida em $C([-p, 0]; X)$ como $u_t(\theta) = u(t + \theta)$.

Usando o Teorema da Contração de Banach, podemos enunciar e provar o seguinte teorema.

Teorema 2.2.1 *Se $f \in C_{Lip}([0, a] \times C([-p, 0]; X); X)$, então existe uma única solução $u \in C([-p, a]; X)$ do problema (2.21).*

Demonstração: Existem diferentes provas para este resultado, todas deduzidas das provas da existência de soluções para o problema sem memória

$$\begin{aligned} u'(t) &= f(t, u(t)), \;\; t \in [0, a], \\ u(0) &= u_0 \in X. && (2.22) \end{aligned}$$

A seguir, usaremos $[f]_{C_{Lip}}$ ao invés de usar $[f]_{C_{Lip}([0,a]\times X;X)}$, para representar a constante de Lipschitz de $f(\cdot)$. Seja $0 < b \leq a$ tal que $[f]_{C_{Lip}} b < 1$ e definamos o espaço

$$S_1 = \left\{ u \in C([-p,b];X) : u_{|_{[-p,0]}} = \varphi \right\} \tag{2.23}$$

munido da métrica $d(u,v) = \| u - v \|_{C([0,b];X)}$. Definamos a função $\Gamma : S \to C([-p,b];X)$ por $u_{|_{[-p,0]}} = \varphi$ e

$$\Gamma_1 u(t) = \varphi(0) + \int_0^t f(s,u_s)ds, \;\; t \in [0,b]. \tag{2.24}$$

Seja $u, v \in S$. Como $u(\cdot)$ é uma função uniformemente contínua em $[-p,b]$, para $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\| u(s) - u(s') \| \leq \varepsilon$ para todo $s, s' \in [-p,b]$ tal que $|s - s'| \leq \delta$. Usando isso, para $t, s \in [0,b]$ tal que $|t - s| \leq \delta$ vemos que

$$\| u_t - u_s \|_{C([-p,0];X)} \;\; = \;\; \sup_{\theta \in [-p,0]} \| u(t+\theta) - u(s+\theta) \| \leq \varepsilon,$$

o que implica que a função "histórica" $t \to u_t$ é uma função contínua de $[0,b]$ em $C([-p,0];X)$. Este fato é importante, pois implica que a função $t \to f(t,u_t)$ é contínua, logo integrável e que $\Gamma u(\cdot)$ é uma função bem definida e contínua. Isto implica que $\Gamma(\cdot)$ é uma função bem definida. Além do anterior, para mostrar que $\Gamma(\cdot)$ é uma contração, para $t \in [0,b]$ e $u, v \in S$, observamos que

$$\begin{aligned} \| u_t - v_t \|_{C([-p,0];X)} &= \sup_{s \in [-p,0]} \| u(t+s) - v(t+s) \| \\ &\leq \sup_{s \in [-p,t]} \| u(s) - v(s) \| \\ &\leq \| u - v \|_{C([-p,b];X)} \; . \end{aligned} \tag{2.25}$$

Usando esta desigualdade, vemos que

$$\begin{aligned} \| \Gamma_1 u(t) - \Gamma_1 v(t) \| &\leq \int_0^t \| f(s,u_s) - f(s,v_s) \| \, ds \\ &\leq \int_0^t [f]_{C_{Lip}} \| u_s - v_s \| \, ds \\ &\leq \int_0^t [f]_{C_{Lip}} \| u - v \|_{C([-p,b];X)} \, ds \\ &\leq [f]_{C_{Lip}} b \| u - v \|_{C([-p,b];X)}, \end{aligned} \tag{2.26}$$

o que nos permite concluir que

$$\| \Gamma_1 u - \Gamma_1 v \|_{C([-p,b];X)} \leq [f]_{C_{Lip}} b \| u - v \|_{C([-p,b];X)}, \tag{2.27}$$

e que $\Gamma(\cdot)$ é uma contração. Usando agora o Teorema da Contração de Banach, podemos concluir que existe uma única solução $u^1 \in C([-p,b];X)$ do problema (2.21) no intervalo $[-p,b]$.

Usando as ideias anteriores, podemos estudar a existência e unicidade de solução para o problema com memória.

$$u'(t) = f(t, u_t), \quad t \in [b, a], \tag{2.28}$$
$$u_b = u_b^1, \tag{2.29}$$

onde $u_b^1 : [-p, 0] \to X$ é dada por $u^1(\theta) = u^1(b + \theta)$.

Para estudar este problema definimos o espaço

$$S_2 = \left\{ u \in C([b-p, 2b]; X) : u_{|_{[b-p,b]}} = u^1 \right\} \tag{2.30}$$

munido da métrica $d(u, v) = \| u - v \|_{C([p-b,2b];X)}$. Além disso, definimos o operador $\Gamma_2 : S_2 \to C([b-p, 2b]; X)$ por $u_{|_{[b-p,b]}} = u^1$ e

$$\Gamma_2 u(t) = u^1(b) + \int_b^t f(s, u_s) ds, \quad t \in [b, 2b]. \tag{2.31}$$

Argumentando da mesma forma que no início da prova, para $t \in [b, 2b]$ e $u, v \in S_2$ podemos mostrar que

$$\| \Gamma_2 u - \Gamma_2 v \|_{C([b,2b];X)} \leq [f]b \| u - v \|_{C([b,2b];X)}, \tag{2.32}$$

o que implica que Γ_2 é uma contração e que existe uma única solução $u^2 \in C([b-p, 2b]; X)$ do problema (2.28)-(2.29), que nos permite obter uma solução do problema (2.21) em $C([-p, 2b]; X)$ definindo $u \in C([-p, 2b]; X)$ por $u(t) = u^1(t)$ para $t \in [-p, b]$ e $u(t) = u^2(t)$ por $t \in [b-p, 2b]$.

Continuando como antes, podemos mostrar que existe uma única solução para o problema (2.21) definida no intervalo $[-p, a]$. Isto permite concluir a demonstração. ■

3 Equações neutras com argumento dependendo do estado

Nesta seção serão apresentadas provas mais simplificadas para os resultados do artigo [3], intitulado "Existência e dependência contínua para uma classe de equações diferenciais neutras não lineares".

Neste artigo são apresentados teoremas sobre existência e unicidade de soluções para equações diferenciais neutras da forma

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), x(g(t,x)), x'(h(t,x))), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $f(\cdot), g(\cdot)$ e $h(\cdot)$ são funções contínuas.

3.1 Existência e unicidade de solução

Nesta seção estudaremos a existência e unicidade de solução para o problema neutro (3.1). Para começar, usando o Teorema do Ponto Fixo de Schauder (veja o Teorema 1.1.1 no Capítulo 1) estabelecemos a existência de pelo menos uma solução.

Teorema 3.1.1 *Suponha que as seguintes condições são satisfeitas:*

a) $f \in C(D : \mathbb{R})$, *sendo* $D \subset \mathbb{R}^4$ *aberto tal que*

$$P = \{(t, x, y, z) : |t| \leq \alpha, |x - x_0| \leq \beta, |y - x_0| \leq \beta, |z| \leq M\} \subset D,$$

onde α, β *e* M *são constantes positivas tais que* $\alpha \leq \frac{\beta}{M}$, $max\{|z_0|, \sup_{(\mu)\in P} |f(\mu)|\} < M$ *e* $z_0 \in \mathbb{R}$ *é tal que* $z_0 = f(0, x_0, x_0, z_0)$.

b) Existe $0 < L_f < 1$ *tal que*

$$|f(t, x, y, z_1) - f(t, x, y, z_2)| \leq L_f |z_1 - z_2|,$$

para todo $(t, x, y, z_1), (t, x, y, z_2) \in P$.

c) $g, h \in C([-\alpha, \alpha] \times [x_0 - \beta, x_0 + \beta]); [-\alpha, \alpha])$, $g(0, x_0) = h(0, x_0) = 0$ *e existe constantes positivas* k_1, k_2 *tais que* $k_1 + k_2 M \leq 1$ *e*

$$|h(t_1, x_1) - h(t_2, x_2)| \leq k_1 |t_1 - t_2| + k_2 |x_1 - x_2|$$

para todo $(t_1, x_1), (t_2, x_2) \in [-\alpha, \alpha] \times [x_0 - \beta, x_0 + \beta]$.

Então, existe uma solução $u \in C([-\alpha, \alpha]; \mathbb{R})$ *do problema neutro (3.1).*

Demonstração: Seja S o conjunto definido por

$$S = \{u \in C([-\alpha, \alpha]; \mathbb{R}) : u(0) = z_0, \| u \|_{C([-\alpha,\alpha];\mathbb{R})} \leq M\},$$

munido da métrica $d(u, v) = \| u - v \|_{C([-\alpha,\alpha];\mathbb{R})}$. Por conveniência, no que segue usamos a notação $d(u, v) = \| u - v \|_{\alpha} = \| u - v \|_{C([-\alpha,\alpha];\mathbb{R})}$.

Como a função constante $z : [-\alpha, \alpha] \to \mathbb{R}$ dada por $z(t) = z_0$ é limitada, pois $|z(t)| = |z_0| \leq M$ para todo $t \in [-\alpha, \alpha]$, temos que $z \in S$, o que implica que $S \neq \emptyset$.

Definamos agora a função $T : S \to C([-\alpha, \alpha]; \mathbb{R})$ dada por

$$Tz(t) = f\big(t, x_0 + \int_0^t z(s)ds, x_0 + \int_0^{g(t,x_0+\int_0^t z(s)ds)} z(w)dw, z\big(h\big(t, x_0 + \int_0^t z(s)ds\big)\big)\big).$$

Note que se $z(\cdot)$ é um ponto fixo de T, então $z(t) = Tz(t)$ de onde vemos que

$$z(t) = f\big(t, x_0 + \int_0^t z(s)ds, x_0 + \int_0^{g(t,x_0+\int_0^t z(s)ds)} z(w)dw, z\big(h\big(t, x_0 + \int_0^t z(s)ds\big)\big)\big).$$

Definindo, $u : [-\alpha, \alpha] \to \mathbb{R}$ por $u(t) = x_0 + \int_0^t z(\tau)d\tau$, vemos que

$$\begin{aligned} u'(t) &= z(t) \\ u(g(t, u(t))) &= x_0 + \int_0^{g\left(t,x_0+\int_0^t z(s)ds\right)} z(\tau)d\tau \\ u'\big(h\big(t_0, u(t)\big)\big) &= z\big(h\big(t_0, x_0 + \int_0^t z(s)ds\big)\big) = z\big(h\big(t_0, u(t)\big)\big), \end{aligned}$$

o que nos permite concluir que $u(\cdot)$ é uma solução do problema (3.1).Antes de continuar, vamos introduzir algumas notações.

No que segue $T_i : S \to C([-\alpha, \alpha]; \mathbb{R})$, $i = 1, 2, 3$, são as funções definidas por meio da relação

$$T(z)(t) = f\big(t, T_1z(t), T_2z(t), T_3z(t)\big), \ \ t \in [-\alpha, \alpha],$$

ou seja,

$$\begin{aligned} T_1z(t) &= x_0 + \int_0^t z(\tau)d\tau, \\ T_2z(t) &= x_0 + \int_0^{g\left(t,x_0+\int_0^t z(s)ds\right)} z(\tau)d\tau, \\ T_3z(t) &= z\big(h\big(t, x_0 + \int_0^t z(\tau)d\tau\big)\big). \end{aligned}$$

Nosso próximo passo é mostrar que $T(\cdot)$ é contínua. Para isto estudaremos a continuidade das funções T_i. Seja $u \in S$. No que segue mostraremos a continuidade das funções T_i em u.

A continuidade de T_1 é óbvia, pois

$$|T_1u(t) - T_1v(t)| \quad \leq \quad \int_0^t |u(\tau) - v(\tau)|d\tau \leq \| u - v \|_\alpha \alpha,$$

de onde temos que

$$\| T_1u - T_1v \|_\alpha \quad \leq \quad \| u - v \|_\alpha \alpha.$$

Estudemos agora a função T_2. Seja $\varepsilon > 0$. Usando que g é uniformemente contínua em $[-\alpha, \alpha] \times [x_0 - \beta, x_0 + \beta]$, podemos fixar $0 < \delta < \varepsilon$ tal que

$$|g(t, x) - g(s, y)| < \varepsilon, \quad \forall t, s \in [-\alpha, \alpha], \quad \forall x, y \in [x_0 - \beta, x_0 + \beta],$$

tais que $|t - s| < \delta$ e $|x - y| < \delta$.

Note agora que para $v \in S$ e $t \in [-\alpha, \alpha]$ temos que

$$\begin{aligned} \Big| x_0 + \int_0^t v(\tau)d\tau - x_0 \Big| \quad &\leq \quad \int_0^t \| v \|_\alpha d\tau \\ &\leq \quad \| v \|_\alpha \alpha \\ &\leq \quad M\alpha \leq \beta, \end{aligned}$$

o que implica que

$$x_0 + \int_0^t v(\tau)d\tau \in [x_0 - \beta, x_0 + \beta], \;\; \forall t \in [-\alpha, \alpha], \;\; v \in S.$$

Mais ainda, se $\| u - v \|_\alpha < \frac{\delta}{\alpha}$, temos que

$$\begin{aligned} \Big| x_0 + \int_0^t v(\tau)d\tau - x_0 + \int_0^t u(\tau)d\tau \Big| \quad &\leq \quad \int_0^t |u(\tau) - v(\tau)|d\tau \\ &\leq \quad \alpha \| u - v \|_\alpha < \frac{\delta\alpha}{\alpha} \leq \delta, \end{aligned}$$

de onde obtemos que

$$\Big| g\big(t, x_0 + \int_0^t v(\tau)d\tau\big) - g\big(t, x_0 + \int_0^t u(\tau)d\tau\big) \Big| < \varepsilon. \tag{3.2}$$

Usando (3.2), se $\| u - v \|_\alpha < \frac{\delta}{\alpha}$, para $t \in [-\alpha, \alpha]$ temos que

$$\begin{aligned} |T_2u(t) - T_2v(t)| \quad &\leq \quad \Big| \int_0^{g(t,x_0+\int_0^t u(s)ds)} u(\tau)d\tau - \int_0^{g(t,x_0+\int_0^t v(s)ds)} v(\tau)d\tau \Big| \\ &\leq \quad \int_0^{g(t,x_0+\int_0^t u(s)ds)} |u(\tau) - v(\tau)|d\tau \\ &\quad + \Big| \int_0^{g(t,x_0+\int_0^t u(s)ds)} v(\tau)d\tau - \int_0^{g(t,x_0+\int_0^t v(s)ds)} v(\tau)d\tau \Big|. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Supondo agora que $g(t, x_0 + \int_0^t u(s)ds) \leq g(t, x_0 + \int_0^t v(s)ds)$, segue de (3.3) que

$$\begin{aligned}
|T_2u(t) - T_2v(t)| &\leq \| u - v \|_\alpha \left| g(t, x_0 + \int_0^t u(s)ds) \right| + \left| \int_{g\left(t, x_0 + \int_0^t u(s)ds\right)}^{g\left(t, x_0 + \int_0^t v(s)ds\right)} v(\tau)d\tau \right| \\
&\leq \| u - v \|_\alpha \alpha + \| v \|_\alpha \big(g(t, x_0 + \int_0^t v(s)ds) - g(t, x_0 + \int_0^t u(s)ds)\big) \\
&\leq \| u - v \|_\alpha \alpha + M\varepsilon. \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

Procedendo da mesma forma, se $g(t, x_0 + \int_0^t u(s)ds) \geq g(t, x_0 + \int_0^t v(s)ds)$, obtemos que (3.4) também é válida. Do anterior, segue que

$$\begin{aligned}
\| T_2u - T_2v \|_\alpha &= \sup_{t \in [-\alpha, \alpha]} |T_2u(t) - T_2v(t)| \leq \| u - v \|_\alpha \alpha + M\varepsilon \\
&\leq \frac{\delta}{\alpha}\alpha + M\varepsilon \leq \varepsilon + M\varepsilon,
\end{aligned}$$

o que prova que $T_2(\cdot)$ é contínua.

Estudemos agora a função $T_3(\cdot)$. Como $u(\cdot)$ é contínua em $[-\alpha, \alpha]$, podemos usar que $u(\cdot)$ é uniformemente contínua. Seja $\varepsilon > 0$. Pelo anterior existe $0 < \delta_1 < \varepsilon$ tal que $|u(t) - u(s)| < \varepsilon$ se $|t - s| < \delta_1$.

Por outro lado, usando que a função $h(\cdot)$ é Lipschitz, para $t \in [-\alpha, \alpha]$ e $v \in S$ tal que $\| u - v \|_\alpha \leq \frac{\delta_1}{k_2\alpha}$, vemos que

$$\begin{aligned}
&\left| h\big(t, x_0 + \int_0^t u(\tau)d\tau\big) - h\big(t, x_0 + \int_0^t v(\tau)d\tau\big) \right| \\
&\qquad \leq k_2 \left| \int_0^t u(\tau)d\tau - \int_0^t v(\tau)d\tau \right| \\
&\qquad \leq k_2 \int_0^t |u(\tau) - v(\tau)|d\tau \\
&\qquad \leq k_2\alpha \| u - v \|_\alpha \leq \delta_1,
\end{aligned}$$

o que implica que

$$\left| u\Big(h\big(t, x_0 + \int_0^t u(\tau)d\tau\big)\Big) - u\Big(h\big(t, x_0 + \int_0^t v(\tau)d\tau\big)\Big) \right| < \varepsilon,$$

para todo $t \in [-\alpha, \alpha]$ e todo $v \in S$ tal que $\| u - v \|_\alpha \leq \frac{\delta_1}{k_2\alpha}$.

Mais ainda, se $\| u - v \|_\alpha \leq \frac{\delta_1}{k_2\alpha}$ vemos que

$$\| u(h(t, x_0 + \int_0^t v(\tau)d\tau)) - v(h(t, x_0 + \int_0^t v(\tau)d\tau) \| \leq \| u - v \|_\alpha \leq \frac{\delta_1}{k_2\alpha} \leq \frac{\varepsilon}{k_2\alpha}.$$

Do anterior, para $t \in [-\alpha, \alpha]$ e $\| u - v \|_\alpha < \frac{\delta_1}{k_2 \alpha}$ temos que

$$\begin{aligned} \| T_3 u(t) - T_3 v(t) \| &\leq \Big| u\big(h(t, x_0 + \int_0^t u(\tau) d\tau)\big) - u\big(h(t, x_0 + \int_0^t v(\tau)) d\tau\big) \Big| \\ &\quad + \Big| u\big(h(t, x_0 + \int_0^t v(\tau) d\tau)\big) - v\big(h(t, x_0 + \int_0^t v(\tau) d\tau)\big) \Big| \\ &\leq \varepsilon + \| u - v \|_\alpha \leq \varepsilon + \frac{\delta_1}{k_2 \alpha} \leq \varepsilon + \frac{\varepsilon}{k_2 \alpha}, \end{aligned}$$

o que implica que

$$\| T_3 u - T_3 v \|_\alpha \leq \varepsilon \Big(1 + \frac{1}{k_2 \alpha} \Big),$$

e prova que $T_3(\cdot)$ é contínua.

Usando o anterior, mostramos que $T(\cdot)$ é contínua. Seja $\varepsilon > 0$. Como f é uniformemente contínua em P, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(t, x, y, z) - f(t, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})| < \varepsilon,$$

para todo $(t, x, y, z), (t, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in P$, tais que $|(t, x, y, z) - (t, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})| < \delta$. Usando agora a continuidade das funções T_i, $i = 1, 2, 3$, podemos escolher $\delta_1 > 0$ tal que

$$\| T_i u - T_i v \|_\alpha < \delta \text{ se } \| u - v \|_\alpha \leq \delta_1.$$

Do anterior, se $\| u - v \|_\alpha \leq \delta_1$ vemos que

$$|Tu(t) - Tv(t)| \leq |f(t, T_1 u(t), T_2 u(t), T_3 u(t)) - f(t, T_1 v(t), T_2 v(t), T_3 v(t))| \leq \varepsilon,$$

o que implica que $\| Tu - Tv \|_\alpha < \varepsilon$. Isto finaliza a prova que T é contínua.

No que segue, mostraremos que existe $S_0 \subset S$, convexo, fechado tal que $TS_0 \subset S_0$ e $TS_0 = \{Tz : z \in S_0\}$ é um conjunto equicontínuo de funções.

Seja $\varepsilon > 0$ se $z \in S$, usando que as funções $T_i z(\cdot)$ são contínuas em $[-\alpha, \alpha]$, segue que a função $(Tz) : [-\alpha, \alpha]^4 \to \mathbb{R}$, dada por

$$(Tz)(s, s_2, s_3, s_4) = f(s, T_1 z(s_2), T_2 z(s_3), T_3 z(s_4)), \tag{3.5}$$

é uniformemente contínua. Logo, existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que

$$|Tz(s_1, s_2, s_3, s_4) - Tz(\bar{s_1}, \bar{s_2}, \bar{s_3}, \bar{s_4})| < \varepsilon,$$

se $|s_i - \bar{s_i}| < \delta_\varepsilon$ para $i = 1, 2, 3$. Em particular, se $|t_1 - t_2| < \delta_\varepsilon$, obtemos que

$$|Tz(t_1, t_1, t_1, t) - Tz(t_2, t_2, t_2, t)| < \varepsilon,$$

se $|t_1 - t_2| < \delta_\varepsilon$. Equivalentemente,

$$|f(t_1, T_1 z(t_1), T_2 z(t_1), T_3 z(t)) - f(t_2, T_1 z(t_2), T_2 z(t_2), T_3 z(t))| < \varepsilon,$$

se $|t_1 - t_2| < \delta_\varepsilon$ e $t \in [-\alpha, \alpha]$.

Para cada $\varepsilon > 0$, definamos o conjunto $S_\varepsilon \subset S$ por

$$S_\varepsilon = \left\{ z \in S : |z(t_1) - z(t_2)| \leq \frac{\varepsilon}{(1 - L_f)}, \ \ \forall t_1, t_2 \in [-\alpha, \alpha], |t_1 - t_2| \leq \delta_\varepsilon \right\}.$$

No que segue, mostraremos que $S_0 = \bigcap_{\varepsilon > 0} S_\varepsilon$ é não vazio, convexo, limitado, que $TS_0 \subset S_0$ e que $\{Tz : z \in S_0\}$ é equicontínuo em cada $t \in [-\alpha, \alpha]$.

Para começar, note que a função $z(t) = z_0 \in S_\varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, de modo que $S_0 \neq \emptyset$. Por outro lado, é óbvio que S_0 é limitado, pois S é limitado. Mostraremos o resto das propriedades separadamente.

a) S_0 é fechado.

Para mostrar isto é suficiente mostrar que cada S_ε é fechado. Suponha que $(z_n)_n$ é uma sequência em S_ε que converge para $z \in C([-\alpha, \alpha]; \mathbb{R})$. Para $t, s \in [-\alpha, \alpha]$ vemos que

$$|z(t) - z(s)| = \lim_{n \to \infty} |z_n(t) - z_n(s)| \ \ \leq \ \ \lim_{n \to \infty} \frac{\varepsilon}{1 - L_f} = \frac{\varepsilon}{1 - L_f},$$

o que implica que $z \in S_\varepsilon$. Portanto, S_ε e S_0 são fechados.

b) S_0 é convexo.

Se $u, v \in S_0$, obviamente $u, v \in S_\varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Se $\lambda \in [0, 1]$, para $\varepsilon > 0$ e $t, s \in [-\alpha, \alpha]$ temos que

$$\begin{aligned} &|(\lambda u + (1 - \lambda)v)(t) - (\lambda u + (1 - \lambda)v)(s)| \\ &\quad = \ |\lambda(u(t) - u(s)) + (1 - \lambda)(v(t) - v(s))| \\ &\quad \leq \ \lambda \frac{\varepsilon}{1 - L_f} + (1 - \lambda) \frac{\varepsilon}{1 - L_f} \\ &\quad = \ \frac{\varepsilon}{1 - L_f}, \end{aligned}$$

o que implica que $\lambda u + (1 - \lambda)v \in S_\varepsilon$. Do anterior $\lambda u + (1 - \lambda)v \in S_\varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, o que mostra que $\lambda u + (1 - \lambda)v \in S_0$ e que S_0 é convexo.

c) O compacto $\{Tz : z \in S_0\}$ é um conjunto equicontínuo em $[-\alpha, \alpha]$.

Para provar esta propriedade, para $t \in [-\alpha, \alpha]$ temos que provar que para todo $\theta > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|Tz(t) - Tz(s)| < \theta$, para todo $z \in S_0$ e todo $s \in [-\alpha, \alpha]$ tal que $|t - s| < \delta$.

Pela definição de S_0, é claro que S_0 é um conjunto equicontínuo de funções. De fato, para $\theta > 0$ podemos fixar $\varepsilon > 0$ tal que $\frac{\varepsilon}{1 - L_f} < \theta$. Logo, se $z \in S_0$,

$$|z(t) - z(s)| \ \ < \ \ \frac{\varepsilon}{1 - L_f} < \theta, \ \ \text{se} \ \ |t - s| < \delta_\varepsilon.$$

Do anterior, se mostramos que $TS_0 \subset S_0$, teremos que $TS_0 = \{Tz : z \in S_0\}$ é equicontínuo. Para mostrar isto é suficiente provar que $TS_\varepsilon \subset S_\varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$ pois

$$TS_0 \;=\; T\big(\cap S_\varepsilon\big) \subseteq \cap TS_\varepsilon \subseteq \cap_{\varepsilon>0} S_\varepsilon = S_0.$$

Seja $\varepsilon > 0$. Se $z \in S_\varepsilon$ e $t, s \in [-\alpha, \alpha]$ são tais que $|t-s| < \delta_\varepsilon$, da definição de δ_ε e a propriedade Lipschitz de $f(\cdot)$ segue que

$$\begin{aligned}
|Tz(t) - Tz(s)| &= |f(t, T_1z(t), T_2z(t), T_3z(t)) - f(s, T_1z(s), T_2z(s), T_3z(s))| \\
&\leq |f(t, T_1z(t), T_2z(t), T_3z(t)) - f(s, T_1z(s), T_2z(s), T_3z(t))| \\
&\quad + |f(s, T_1z(s), T_2z(s), T_3z(t)) - f(s, T_1z(s), T_2z(s), T_3z(s))| \\
&\leq \varepsilon + L_f|T_3z(t) - T_3z(s)| \\
&\leq \varepsilon + L_f\Big|z\big(h(t, x_0 + \int_0^t z(\tau)d\tau)\big) - z\big(h(s, x_0 + \int_0^s z(\tau)d\tau)\big)\Big|. \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

Mais ainda, notando que

$$\begin{aligned}
&\Big| h\big(t, x_0 + \int_0^t z(\tau)d\tau\big) - h\big(s, x_0 + \int_0^s z(\tau)d\tau\big) \Big| \\
&\qquad \leq k_1|t-s| + k_2\Big| \int_0^t z(\tau)d\tau - \int_0^s z(\tau)d\tau \Big| \\
&\qquad \leq k_1|t-s| + k_2 \int_{min\{t,s\}}^{max\{t,s\}} |z(\tau)|d\tau \\
&\qquad \leq k_1|t-s| + k_2M|t-s| \\
&\qquad \leq (k_1 + k_2M)|t-s| \leq |t-s| < \delta_\varepsilon, \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

da definição de S_ε, de (3.6) e (3.7) segue que

$$|Tz(t) - Tz(s)| \;\leq\; \varepsilon + L_f\Big(\frac{\varepsilon}{1-L_f}\Big) = \frac{\varepsilon}{1-L_f},$$

o que implica que $Tz \in S_\varepsilon$, que $TS_\varepsilon \subset S_\varepsilon$ e que $TS_0 \subset S_0$. Portanto, TS_0 é equicontínuo.

Para finalizar, das propriedades anteriores temos que $T : S_0 \to S_0$ é um operador contínuo e que TS_0 é limitado e equicontínuo em $[-\alpha, \alpha]$, o que implica pelo Teorema de Schauder que $T(\cdot)$ tem um ponto fixo $z \in S_0$. Pelos comentários iniciais sabemos que z é uma solução de (3.1). Isto completa a prova. ■

Para finalizar esta seção, mostraremos o segundo resultado.

Teorema 3.1.2 *Além das condições no Teorema 3.1.1, suponha que a função $h(\cdot)$ é independente da segunda variável e que existem constantes $L > 0$ e $L_g > 0$ tais que $L_g(1+M) < 1$, onde M é a constante na prova do Teorema 3.1.1 e*

$$\begin{aligned}
|f(t, x_1, y_1, z_1) - f(t, x_2, y_2, z_2)| &\leq L\{|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|\} + L_f|z_1 - z_2|, \\
|g(t, x_1) - g(t, x_2)| &\leq L_g|x_1 - x_2|,
\end{aligned}$$

para todo $(t, x_i, y_i, z_i) \in P$. Então existe $0 < \gamma_0 \leq \alpha$, tal que no intervalo $[-\gamma_0, \gamma_0]$ existe uma única solução do problema (3.1) tal que $z(0) = x_0$ e $z'(0) = z_0$.

Demonstração: No que segue, escrevemos $h(t)$ no lugar de $h(t,x)$. Seja z_0 tal que $z_0 = f(0, x_0, x_0, z_0)$. Para $0 < \gamma < \alpha$, definamos o conjunto

$$S^\gamma = \{z \in C([-\gamma,\gamma];\mathbb{R}) : \| z \|_\gamma = \| z \|_{C([-\gamma,\gamma];\mathbb{R})} \leq M\}.$$

Para provar o resultado vamos ter de mostrar que existe $\gamma > 0$ tal que o operador $T_\gamma : S^\gamma \to C([-\gamma,\gamma];\mathbb{R})$ dado por $T_\gamma(z) = Tz(\cdot)$, onde $T(\cdot)$ é o operador na prova do Teorema 3.1.1, é uma contração.

Sejam $u, z \in S^\gamma$ e $t \in [-\gamma,\gamma]$. Para começar notamos que

$$\begin{aligned} \Big| g\big(t, x_0 + \int_0^t z(\tau)d\tau\big) \Big| &= \Big| g\big(t, x_0 + \int_0^t z(\tau)d\tau\big) - g(0,x_0) \Big| \\ &\leq L_g(t + Mt) \leq L_g(1+M)\gamma \leq \gamma, \end{aligned}$$

o que implica que a função $T_2 z(\cdot)$ na prova do Teorema 3.1.1 esta bem definida. Mais ainda, como

$$|h(t)| = |h(t) - h(0)| \;<\; k_1 t \leq t,$$

pois $k_1 \leq 1$, obtemos que a função $T_3(\cdot)$ também está bem definida.

Além do anterior, da prova do Teorema 3.1.1, segue que $\| T_\gamma u \|_\gamma \leq M$ para cada $u \in S^\gamma$.

Mais ainda, para $t \in [-\gamma,\gamma]$ vemos que,

$$\begin{aligned} |z(t) - u(t)| &= \Big| f\big(t, T_1 z(t), T_2 z(t), T_3 z(t)\big) - f\big(t, T_1 u(t), T_2 u(t), T_3 u(t)\big) \Big| \\ &\leq L\big(|T_1 z(t) - T_1 u(t)| + |T_2 z(t) - T_2 u(t)|\big) + L_f |T_3 z(t) - T_3 u(t)| \\ &\leq L \int_0^t |z(\tau) - u(\tau)| d\tau \\ &\quad + L \Big| \int_0^{g(t, x_0 + \int_0^t z(\tau)d\tau)} z(s)ds - \int_0^{g(t, x_0 + \int_0^t u(\tau)d\tau)} u(s)ds \Big| \\ &\quad + L_f \Big| z\big(h\big(t, x_0 + \int_0^t z(\tau)d\tau\big)\big) - u\big(h\big(t, x_0 + \int_0^t u(\tau)d\tau\big)\big) \Big| \\ &\leq L \int_0^t |z(\tau) - u(\tau)| d\tau \\ &\quad + L \Big| \int_0^{g(t, x_0 + \int_0^t z(\tau)d\tau)} z(s)ds - \int_0^{g(t, x_0 + \int_0^t z(\tau)d\tau)} u(s)ds \Big| \\ &\quad + L \Big| \int_0^{g(t, x_0 + \int_0^t z(\tau)d\tau)} u(s)ds - \int_0^{g(t, x_0 + \int_0^t u(\tau)d\tau)} u(s)ds \Big| \\ &\quad + L_f \Big| z(h(t)) - u(h(t)) \Big| \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}
|z(t)-u(t)| &\leq L\int_0^t |z(\tau)-u(\tau)|d\tau + L\Big|\int_0^{g(t,x_0+\int_0^t z(\tau)d\tau)} (z(s)-u(s))ds\Big| \\
&\quad + L\Big|\int_0^{g(t,x_0+\int_0^t z(\tau)d\tau)} u(s)ds - \int_0^{g(t,x_0+\int_0^t u(\tau)d\tau)} u(s)ds\Big| \\
&\quad + L_f\Big|z\big(h(t)\big)-u\big(h(t)\big)\Big|. \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

Se usamos a notação $\lambda_1(t) = g(t,x_0+\int_0^t z(\tau)d\tau)$ e $\lambda_2(t) = g(t,x_0+\int_0^t u(\tau)d\tau)$, lembrando que $\lambda_1(t)\leq\gamma$ e que $h(t)\leq t$, de (3.8) temos que

$$\begin{aligned}
|Tz(t)-Tu(t)| &\leq L\int_0^t |z(\tau)-u(\tau)|d\tau + L\,\big|\,g(t,x_0+\int_0^t z(\tau)d\tau)\,\big|\, \parallel z-u\parallel_\gamma \\
&\quad + L\int_{min\{\lambda_1(t),\lambda_2(t)\}}^{max\{\lambda_1(t),\lambda_2(t)\}} \parallel u\parallel_\gamma ds + L_f \parallel z-u\parallel_\gamma \\
&\leq L\gamma \parallel z-u\parallel_\gamma + LL_g(1+M)\gamma \parallel z-u\parallel_\gamma \\
&\quad + L|\lambda_1(t)-\lambda_2(t)| \parallel u\parallel_\gamma + L_f \parallel z-u\parallel_\gamma \\
&\leq (L\gamma + LL_g(1+M)\gamma + L_f) \parallel z-u\parallel_\gamma \\
&\quad + L|g(t,x_0+\int_0^t z(\tau)d\tau) - g(t,x_0+\int_0^t u(\tau)d\tau)| \parallel u\parallel_\gamma \\
&\leq (L\gamma + LL_g(1+M)\gamma + L_f) \parallel z-u\parallel_\gamma + LL_g\gamma \parallel z-u\parallel_\gamma M,
\end{aligned}$$

de onde obtemos que

$$\parallel T_\gamma z - T_\gamma u\parallel \;\leq\; (L\gamma + LL_g(1+M)\gamma + L_f + LL_g\gamma M) \parallel z-u\parallel_\gamma .$$

Finalmente, escolhendo γ pequeno de modo que

$$(L + LL_g(1+M) + LL_gM)\gamma + L_f < 1,$$

obtemos que $T_\gamma : S^\gamma \to S^\gamma$ é uma contração e que existe um único ponto fixo $z = T_\gamma z$ o que nos permite concluir que $u(t) = x_0 + \int_0^t z(s)ds$ é a única solução para o problema (3.1) e $u(0)=x_0$ e $u'(0)=z_0$. ■

4 Estudo da Teoria de Semigrupo

No presente capítulo apresentaremos tópicos básicos da teoria de semigrupos de operadores lineares limitados. No que segue, $(X, \| \cdot \|)$ é um espaço de Banach.

4.1 Semigrupos uniformemente contínuos de operadores lineares limitados

Definição 4.1.1 *Uma família de operadores lineares limitados $(T(t))_{t\geq 0}$ de X em X, é um semigrupo de operadores lineares limitados em X se*

(i) $T(0) = I$, (I é o operador identidade em X);

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$ para todo $t, s \geq 0$ (a propriedade do semigrupo).

Seja $(T(t))_{t\geq 0}$ um semigrupo de operadores lineares limitados. O semigrupo é chamado *uniformemente contínuo* se

$$\lim_{t\downarrow 0} \| T(t) - I \|_{\mathcal{L}(X)} = 0.$$

O operador linear $A : D(A) \subset X \to X$ definido por

$$Ax = \lim_{t\downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \frac{d^+}{dt} T(t)x\Big|_{t=0} \qquad \text{para} \quad x \in D(A), \tag{4.1}$$

sendo $D(A) = \{x \in X : \lim_{t\downarrow 0} \frac{T(t)x-x}{t} \text{ existe}\}$, é chamado de gerador infinitesimal de semigrupos $(T(t))_{t\geq 0}$ e $D(A)$ é o domínio de A.

Definição 4.1.2 *Seja $(T(t))_{t\geq 0}$ um semigrupo de operadores lineares limitados em X. Dizemos que $(T(t))_{t\geq 0}$ é uniformemente contínuo se $\lim_{t\to 0}(T(t) - I) = 0$*

A partir das definição 4.1.1 e 4.1.2 é simples provar que $\lim_{s\to t} \| T(s) - T(t) \| = 0$. Para provar isto, seja $a > 0$ e $t \in [0, a)$. Como o semigrupo é uniformemente contínuo, podemos fixar $\delta > 0$, tal que $\| T(s) - I \| < 1$, para todo $s \in [0, \delta]$, o que implica que $\| T(s) \| \leq 1 + \| I \| = 2$.

Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $n\delta > a$. Neste caso, se $s \in [0, a)$ existe $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$ tal que $s = \theta + k\delta$ para algum $\theta \in [0, \delta]$. Logo, usando as propriedades do semigrupo, temos que

$$\begin{aligned} \| T(s) \| &= \| T(\theta + k\delta) \| = \| T(\theta)T(k\delta) \| \\ &= \| T(\theta)T^k(\delta) \| \leq \| T(s) \| \| T(\delta) \|^k \\ &\leq 2 \times 2^k = 2^{k+1}, \quad \forall s \in [0, a]. \end{aligned}$$

Seja $t \in [0, a)$ e $\varepsilon > 0$. Usando que $\lim_{s\downarrow 0}(T(s) - I) = 0$ podemos fixar $0 < \delta_\varepsilon < t - a$ tal que $\| T(s) - I \| < \frac{\varepsilon}{1+2^{k+1}}$ se $s \in [0, \delta_\varepsilon]$.

Do anterior, para $s \in [t-\delta_\varepsilon, t+\delta_\varepsilon]$ vemos que como $0 < s < t$, temos que

$$\begin{aligned}
\| T(s) - T(t) \| &= \| T(s) - T(t-s)T(s) \| \\
&\leq \| T(s)(I - T(t-s)) \| \\
&\leq \| T(s) \| \| I - T(t-s) \| \\
&\leq 2^{k+1} \frac{\varepsilon}{1+2^{k+1}} \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Da mesma forma, podemos mostrar que

$$\| T(t) - T(s) \| \leq \varepsilon, \quad se \quad | t-s | < \delta_\varepsilon \quad e \quad s \in [t, t+\delta_\varepsilon].$$

Do anterior, obtemos que $\| T(t) - T(s) \| < \varepsilon$ se $0 < | t-s | < \delta_\varepsilon$, o que prova que a função $s \to T(s)$ é contínua em t. Portanto, $\lim_{s \to t} \| T(t) - T(s) \| = 0$.

Teorema 4.1.1 *Um operador linear A é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo se, e somente, se A é um operador linear limitado.*

Demonstração: ($\Leftarrow$) Suponha que $A : X \to X$ é um operador linear limitado em X. Para todo $t \geq 0$ definamos o operador $T(t)$ dado por

$$T(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}. \tag{4.2}$$

O lado direito de (4.2) converge em norma para todo $t \geq 0$ e define, para cada t, um operador linear limitado. É claro que $T(0) = I$ e um cálculo direto com a série de potência mostra que $T(t+s) = T(t)T(s)$.

Para $t > 0$ vemos que

$$\begin{aligned}
\| T(t) - I \| &= \| \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i t^i}{i!} - I \| \\
&= \| A \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^{i-1} t^i}{i!} \| \\
&\leq \| A \| \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\| A^{i-1} t^i \|}{i!} \\
&\leq \| A \| \, t \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\| A^{i-1} t^{i-1} \|}{(i-1)!} \\
&\leq \| A \| \, t \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} \| A \|^i \\
&\leq \| A \| \, t e^{t\|A\|}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

o que implica que $\lim_{t\downarrow 0} \| T(t) - I \| = 0$. Do anterior, para $t > 0$ temos que

$$\| \frac{T(t) - I}{t} - A \| \leq \| A \| \| T(t) - I \|, \tag{4.4}$$

o qual implica que $(T(t))_{t\geq 0}$ é um semigrupo uniformemente contínuo de operadores lineares limitados em X e que A é gerador infinitesimal.

($\Rightarrow$) Seja $(T(t))_{t\geq 0}$ um semigrupo uniformemente contínuo de operadores lineares limitados em X. Fixe $\rho > 0$, pequeno o suficiente, tal que $\| I - \frac{1}{\rho}\int_0^\rho T(s)ds \| < 1$. Isto implica que $\frac{1}{\rho}\int_0^\rho T(s)ds$ é invertível e, portanto, $\int_0^\rho T(s)ds$ é invertível. Agora,

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(T(h) - I)\int_0^\rho T(s)ds &= \frac{1}{h}\big(\int_0^\rho T(s+h)ds - \int_0^\rho T(s)ds\big) \\ &= \frac{1}{h}\big(\int_\rho^{\rho+h} T(s)ds - \int_0^h T(s)ds\big) \end{aligned}$$

e portanto,

$$\frac{1}{h}(T(h) - I) = \big(\frac{1}{h}\int_\rho^{\rho+h} T(s)ds - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)ds\big)\big(\int_0^\rho T(s)ds\big)^{-1}. \tag{4.5}$$

Deixando $h \downarrow 0$ em (4.5) mostra que $\dfrac{1}{h}(T(h) - I)$ converge em norma e, portanto, fortemente para o operador linear limitado $(T(\rho) - I)(\int_0^\rho T(s)ds)^{-1}$ que é o gerador infinitesimal de $(T(t))_{t\geq 0}$. ■

Da definição 4.1.1 fica claro que um semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ tem um único gerador infinitesimal. Se $(T(t))_{t\geq 0}$ for uniformemente contínuo, seu gerador infinitesimal é um operador linear limitado. Por outro lado, todo operador linear limitado A é um gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo $(T(t))_{t\geq 0}$. E este semigrupo é único.

Teorema 4.1.2 *Sejam $(T(t))_{t\geq 0}$ e $(S(t))_{t\geq 0}$ semigrupos uniformemente contínuos de operadores lineares limitados. Se*

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{T(t) - I}{t} = A = \lim_{t\downarrow 0} \frac{S(t) - I}{t} \tag{4.6}$$

então $T(t) = S(t)$ para todo $t \geq 0$.

Demonstração: Mostremos que para $T > 0$, $S(t) = T(t)$ para todo $0 \leq t \leq T$. Seja $T > 0$. Como as funções $t \rightarrow \| T(t) \|$ e $t \rightarrow \| S(t) \|$ são contínuas em $[0, T]$, temos que existe uma constante $C > 0$ tal que $\| T(t) \| \leq C$ e $\| S(s) \| \leq C$ para todo $s \in [0, T]$. Seja $\varepsilon > 0$. Usando (4.6) vemos que existe $\delta > 0$ tal que

$$\frac{1}{h} \| T(h) - S(h) \| < \frac{\varepsilon}{TC} \qquad \text{para todo} \quad 0 \leq h \leq \delta. \tag{4.7}$$

Seja $0 \leq t \leq T$ e fixemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 1$ tal que $\frac{t}{n} < \delta$. Da propriedade do semigrupo e (4.7) segue que

$$\begin{aligned}
&\| T(t) - S(t) \| \\
&= \left\| T\Big(n\frac{t}{n}\Big) - S\Big(n\frac{t}{n}\Big) \right\| \\
&= \left\| \sum_{k=0}^{n-1} T\Big((n-k)\frac{t}{n}\Big) S\Big(\frac{kt}{n}\Big) - \sum_{k=0}^{n-1} T\Big((n-k-1)\frac{t}{n}\Big) S\Big((k+1)\frac{t}{n}\Big) \right\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left\| T\Big((n-k)\frac{t}{n}\Big) S\Big(\frac{kt}{n}\Big) - T\Big((n-k-1)\frac{t}{n}\Big) S\Big((k+1)\frac{t}{n}\Big) \right\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left\| T\Big((n-k-1)\frac{t}{n}\Big) T\Big(\frac{t}{n}\Big) S\Big(\frac{kt}{n}\Big) - T\Big((n-k-1)\frac{t}{n}\Big) S\Big(\frac{t}{n}\Big) S\Big(\frac{kt}{n}\Big) \right\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left\| T\Big((n-k-1)\frac{t}{n}\Big) \right\| \left\| T\Big(\frac{t}{n}\Big) - S\Big(\frac{t}{n}\Big) \right\| \left\| S\Big(\frac{kt}{n}\Big) \right\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t}{n} \frac{\varepsilon}{TC} C = n\frac{t}{n}\frac{\varepsilon}{T} \leq \varepsilon,
\end{aligned}$$

o que prova que $T(t) = S(t)$ para todo $0 \leq t \leq T$. Isto completa a prova. ■

Corolário 4.1.1 *Seja $(T(t))_{t\geq 0}$ um semigrupo uniformemente contínuo de operadores lineares limitados em X. Então*

(a) Existe uma constante $\omega \geq 0$ tal que $\| T(t) \| \leq e^{\omega t}$ para todo $t \geq 0$.

(b) Existe um único operador linear limitado A tal que $T(t) = e^{tA}$.

(c) O operador A no item (b) é o gerador infinitesimal de $(T(t))_{t\geq 0}$.

(d) A função $t \to T(t)$ é diferenciável e

$$\frac{dT(t)}{dt} = AT(t) = T(t)A. \tag{4.8}$$

Demonstração: Todas as afirmações advêm do item (b).

(b) Como $(T(t))_{t\geq 0}$ é um semigrupo uniformemente contínuo, seu gerador infinitesimal A é um operador linear limitado (veja Teorema 4.1.1). Assim, definindo $S(t) = e^{tA}$, temos que $(S(t))_{t\geq 0}$ é uniformemente contínuo e A é seu gerador infinitesimal. Então, usando o Teorema 4.1.2, obtemos que $T(t) = S(t)$ para todo $t \geq 0$. Assim, $T(t) = e^{tA}$ e A é o gerador infinitesimal de $(T(t))_{t\geq 0}$.

(a) Note que,

$$\| T(t) \| = \left\| e^{tA} \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{t^n A^n}{n!} \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \| A \|^n = e^{\|A\| t}.$$

(c) Suponha que $T(t) = e^{At}$, para $t \geq 0$. Neste caso,

$$\begin{aligned} T(t) - I &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i t^i}{i!} - I = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i t^i}{i!} \\ &= At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!} + \cdots + \frac{A^n t^n}{n!} + \cdots , \end{aligned}$$

logo,

$$\frac{T(t) - I}{t} = A + t\Big(\frac{A^2 t}{2!} + \frac{A^3 t^2}{3!} + \cdots + \frac{A^n t^{t-1}}{n!} + \cdots\Big)$$

e

$$\begin{aligned} \left\| \frac{T(t) - I}{t} - A \right\| &= \left\| t\Big(\frac{A^2 t}{2!} + \frac{A^3 t^2}{3!} + \cdots + \frac{A^n t^{n-1}}{n!} + \cdots\Big) \right\| \\ &\leq t \parallel A \parallel \Big(\frac{\parallel A \parallel t}{2!} + \frac{\parallel A \parallel^2 t^2}{3!} + \cdots + \frac{\parallel A \parallel^{n-1} t^{n-1}}{n!} + \cdots\Big). \end{aligned}$$

Usando que $t^k \leq t^{k-1}$ se $t \in [0, 1]$, vemos que para $0 < t < 1$

$$\begin{aligned} \left\| \frac{T(t) - I}{t} - A \right\| &\leq t \parallel A \parallel \Big(\parallel A \parallel t + \frac{\parallel A \parallel^2 t^2}{2!} + \cdots + \frac{\parallel A \parallel^n t^n}{n!} + \cdots\Big) \\ &\leq t \parallel A \parallel e^{\parallel A \parallel t} \end{aligned}$$

o que implica que $\lim_{t\to\infty} \frac{T(t)-I}{t} = A$, o que permite inferir que $\left\| \frac{T(t)-I}{t} - A \right\| \to 0$ se $t \to 0$ e que A é o gerador de $(T(t))_{t\geq 0}$.

(d) Para $h > 0$, temos que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{T(t+h) - T(t)}{h} - T(t)A \right\| &\leq \parallel T(t) \parallel \left\| \frac{T(h) - I}{h} - A \right\| \\ &\leq e^{\parallel A \parallel t} \left\| \frac{T(h) - I}{h} - A \right\| . \end{aligned}$$

Como $\frac{d^+}{dt} T(t)\big|_{t<0} = A$, segue que $\lim_{h\to\infty} = \left\| \frac{T(h)-I}{h} - A \right\| = 0$, o que implica que $\frac{d^+}{dt} T(t) = T(t)A$.

Por outro lado, para $0 < h \leq t$ vemos que

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{T(t) - T(t-h)}{h} - T(t)A \right\| &= \left\| \frac{T(t-h+h) - T(t-h)}{h} - T(t)A \right\| \\
&\leq \left\| \frac{T(t-h)T(h) - T(t-h)}{h} - T(t-h+h)A \right\| \\
&\leq \| T(t-h) \| \left\| \frac{T(h) - I}{h} - T(h)A \right\| \\
&\leq e^{\|A\|(t-h)} \left\| \frac{T(h) - I}{h} - T(h)A \right\| \\
&\leq e^{\|A\|t} \left\| \frac{T(h) - I}{h} - T(h)A \right\| \\
&\leq e^{\|A\|t} \Big(\left\| \frac{T(h) - I}{h} - A \right\| + \| A - T(h)A \| \Big) \\
&\leq e^{\|A\|t} \left\| \frac{T(h) - I}{h} - A \right\| + e^{\|A\|t} \| I - T(h) \| \| A \|,
\end{aligned}$$

o que implica que $\dfrac{d^-}{dt}T(t) = T(t)A$ para $t > 0$. Do anterior, $\dfrac{d}{dt}T(t) = T(t)A$, para todo $t \geq 0$. Logo, vemos que $AT(t) = T(t)A$ e mudando os limites anteriores, temos que

$$T(h+t) - T(t) - hAT(t) = T(h)T(t) - T(t) - hAT(t) = (T(h) - I - hA)T(t).$$

Do anterior, vemos que

$$\lim_{h \to 0} \frac{T(t+h) - T(t)}{h} - AT(t) = \lim_{h \to 0} \Big(\frac{T(h) - I}{h} - A \Big) T(t) = 0,$$

o que implica que $\dfrac{d}{dt}T(t) = AT(t)$ para todo $t \geq 0$. ∎

4.2 Semigrupos fortemente contínuos de operadores lineares

Definição 4.2.1 *Um semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$, de operadores lineares limitados em X é um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares se*

$$\lim_{t \downarrow 0} T(t)x = x, \quad \forall x \in X. \tag{4.9}$$

Um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados em X será chamado de *semigrupo de classe C_0* ou simplesmente de C_0*-semigrupo*.

Teorema 4.2.1 *Seja $(T(t))_{t \geq 0}$ um C_0-semigrupo. Então existem constantes $\omega \geq 0$ e $M \geq 1$ tais que*

$$\| T(t) \| \leq Me^{\omega t} \qquad \text{para todo} \quad t \geq 0. \tag{4.10}$$

Demonstração: Mostremos primeiro que existe $\eta > 0$ tal que $\{T(t) : t \in [0, \eta]\}$ é limitado. Se isto é falso, então existe uma sequência $\{t_n\}_n$ tal que $t_n \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$ e $\| T(t_n) \| \geq n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Do Teorema da Limitação Uniforme (veja [1], Teorema 2.2) segue que para qualquer $x \in X$, o conjunto $\{T(t_n)x : n \in \mathbb{N}\}$ não é limitado, o que é um absurdo pois $\lim_{n\to\infty} T(t_n)x = x$. Do anterior, podemos fixar $M \geq 1$ tal que $\| T(t) \| \leq M$ para todo $t \in [0, \eta]$.

Seja $\omega = \frac{1}{\eta} \ln(M) \geq 0$. Se $t \in (0, \infty)$, existe $n \in \mathbb{N}$ e $\delta \in [0, \eta]$ tal que $t = n\eta + \delta$, de onde segue que

$$\| T(t) \| = \| T(\delta)T(\eta)^n \| \leq M^{n+1} \leq M M^{\frac{t}{\eta}} = Me^{\omega t},$$

o que completa a prova. ■

Corolário 4.2.1 *Se $(T(t))_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo, então para todo $x \in X$, $t \to T(t)x$ é uma função contínua de $\mathbb{R}_0^+$ em X.*

Demonstração: Seja $t > 0$. Para $0 < h < t$ vemos que

$$\begin{aligned} \| T(t+h)x - T(t)x \| &\leq \| T(t) \| \| T(h)x - x \| \\ &\leq Me^{\omega t} \| T(h)x - x \|, \end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned} \| T(t-h)x - T(t)x \| &\leq \| T(t-h) \| \| x - T(h)x \| \\ &\leq Me^{\omega t} \| x - T(h)x \|, \end{aligned}$$

o que implica que $\lim_{h\downarrow 0} T(t-h)x = T(t)x = \lim_{h\downarrow 0} T(t+h)x$, o que prova que $s \mapsto T(s)x$ é contínua em t e que $s \to T(s)x$ é contínua em $[0, \infty]$ pois t é arbitrário. ■

Teorema 4.2.2 *Seja $(T(t))t \geq 0$ um C_0-semigrupo e A seu gerador infinitesimal. Então*

(a) Para $x \in X$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds = T(t)x. \tag{4.11}$$

(b) Para $x \in X$, $\int_0^t T(s)x ds \in D(A)$ e

$$A\Big(\int_0^t T(s)x ds\Big) = T(t)x - x. \tag{4.12}$$

(c) Para $x \in D(A)$, $T(t)x \in D(A)$ e

$$\frac{d}{dt} T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax. \tag{4.13}$$

(d) Para $x \in D(A)$,

$$\int_s^t T(\tau)Axd\tau = \int_s^t AT(\tau)xd\tau. \tag{4.14}$$

Demonstração:

(a) A propriedade em (a) segue diretamente da continuidade de $t \to T(t)x$. De fato, para $\varepsilon > 0$, fixamos $\delta > 0$ tal que $\| T(s)x - T(t)x \| \leq \varepsilon$ se $0 <| t - s |< \delta$.

Do anterior, para $h \to 0$ e $0 < h < \delta$ vemos que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{h} \int_0^{t+h} T(s)xds - T(t)x \right\| &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \| T(s)x - T(t)x \| \, ds \\ &\leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \varepsilon ds \leq \frac{\varepsilon}{h}(t + h - t) = \varepsilon, \end{aligned}$$

portanto,

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)xds = T(t)x.$$

(b) Seja $x \in X$. Para $h > 0$ temos que

$$\begin{aligned} \frac{T(h) - I}{h} \int_0^t T(s)xds &= \frac{1}{h} \int_0^t (T(s+h)x - T(s)x)ds \\ &= \frac{1}{h} \Big[\int_0^t T(s+h)xds - \int_0^t T(s)xds \Big] \\ &= \frac{1}{h} \Big[\int_h^{t+h} T(s)xds - \int_0^t T(s)xds \Big] \\ &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)xds - \frac{1}{h} \int_0^h T(s)xds. \end{aligned}$$

Usando agora (a), vemos que

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{T(h) - I}{h} \int_0^t T(s)xds &= \lim_{h \to 0} \Big(\frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)xds - \frac{1}{h} \int_0^h T(s)xds \Big) \\ &= T(t)x - x \end{aligned}$$

o que implica que $\displaystyle\int_0^t T(s)xds \in D(A)$, o que prova (b).

(c) Seja $x \in D(A)$. Para $h > 0$, note que

$$\Big(\frac{T(h) - I}{h} \Big) T(t)x = T(t) \Big(\frac{T(h) - I}{h} \Big) x, \tag{4.15}$$

o que permite concluir que

$$\lim_{h\to 0}\Big(\frac{T(h)-I}{h}\Big)T(t)x = T(t)Ax, \tag{4.16}$$

pois $T(t)$ é contínuo. Isto prova que $T(t)x \in D(A)$ e que $AT(t)x = T(t)Ax$. Mais ainda, como

$$\Big(\frac{T(h)-I}{h}\Big)T(t)x = T(t+h)\Big(\frac{x-T(t)x}{h}\Big),$$

do anterior segue que $\dfrac{d^+}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax$. Além do anterior, é simples ver que

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\downarrow 0}\Big[\frac{T(t)x-T(t-h)x}{h} - T(t)Ax\Big] \\
&= \lim_{h\downarrow 0} T(t-h)\Big[\frac{T(h)x-x}{h} - Ax\Big] + \lim_{h\downarrow 0}(T(t-h)Ax - T(t)Ax). \qquad (4.17)
\end{aligned}$$

Pelo Corolário 4.2.1 segue que o segundo termo da direita de 4.17 converge para zero. Além disso, usando o Teorema 4.2.1 e que $x \in D(A)$, vemos que o primeiro termo da direita em 4.17 também converge para zero, o que permite concluir que $\dfrac{d}{dt}T(t)x = T(t)Ax$.

(d) É obtida pela integração de (4.13) de s à t. ■

Corolário 4.2.2 *Se A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$, então o domínio de A, é denso em X e A é um operador linear fechado.*

Demonstração: Para todo $x \in X$ e $x_t = \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t T(s)x ds$. Pelo item (b) do Teorema 4.2.2 sabemos que, $x_t \in D(A)$ para todo $t > 0$ e por (a) do mesmo teorema, temos que $x_t \to x$ quando $t \downarrow 0$. O que implica que o fecho de A é igual a X. A linearidade de A é evidente.

Para provar que A é fechado, suponha que $(x_n)_n$ é uma sequência em $D(A)$ e que $x_n \to x$ e $Ax_n \to y$, quando $n \to \infty$. Por (d) do Teorema 4.2.2 temos

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Ax_n ds. \tag{4.18}$$

Como $T(s)Ax_n \to T(s)y$ uniformemente para $s \in [0,t]$, logo $\displaystyle\int_0^t Ax_n ds \to \int_0^t T(s)Ax_n ds$ quando $n \to \infty$, o que implica que

$$T(t)x - x = \lim_{n\to\infty}[T(t)x_n - x_n] = \lim_{n\to\infty}\int_0^t T(s)Ax_n ds = \int_0^t T(s)y ds.$$

Do anterior, por (a) do Teorema 4.2.2 vemos que

$$\lim_{t\to 0}[T(t)x - x] = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t T(s)yds = y$$

o que implica, pela definição de A, que $x \in D(A)$ e que $Ax = y$. Isto prova que A é fechado.

Teorema 4.2.3 *Seja* $(T(t))_{t\geq 0}$ *e* $(S(t))_{t\geq 0}$, C_0*-semigrupos de operadores lineares limitados com gerador infinitesimal* A *e* B *respectivamente. Se* $A = B$ *então* $T(t) = S(t)$ *para* $t \geq 0$.

Demonstração: Seja $x \in D(A) = D(B)$. Do Teorema 4.2.2 item (c), segue que a função $s \mapsto T(t-s)S(s)x$ é diferenciável e que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}T(t-s)S(s)x &= -AT(t-s)S(s)x + T(t-s)BS(s)x \\
&= -T(t-s)AS(s)x + T(t-s)BS(s)x \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $s \mapsto T(t-s)S(s)x$ é constante e em particular os valores $s = 0$ e $s = t$ são os mesmos, ou seja, $T(t)x = S(t)x$. Isto é verdade para todo $x \in D(A)$ e como, pelo Corolário 4.2.2, $D(A)$ é denso em X e $T(t), S(t)$ são limitados, $T(t)x = S(t)x$ para todo $x \in X$. ■

5 Existência e unicidade de solução para equações neutras explícitas com memória dependendo do estado

Neste capítulo estudaremos a existência e unicidade de solução para uma classe de equações diferenciais do tipo neutra explicita da forma

$$
\begin{aligned}
u'(t) &= Au(t) + F\left(t, u(t), \int_0^t K(t,\tau)u'(\sigma(\tau,u(\tau)))d\tau\right), \quad t \in [0,a], && (5.1)\\
u_{|_{[-p,0]}} &= \varphi \in C([-p,0];X), && (5.2)
\end{aligned}
$$

onde temos que X é um espaço de Banach, $A : X \to X$ é um operador linear limitado e gerador de um C_0-semigrupo compacto de operadores lineares limitados $(e^{At})_{t\geq 0}$ em X, $\{K(t,s) : t,s \in [0,a]\}$ é uma família de operadores lineares limitados de X em X, $F \in C([0,a]\times X\times X;X)$ e $\sigma \in C_{Lip}([0,a]\times X);[-p,a])$.

Antes de apresentar as demonstrações de existência e unicidade de solução, vamos definir algumas propriedades que serão utilizadas nas provas.

Condição 1 $\mathcal{L}_\alpha$: *$\alpha \in (0,1]$, $K : \{(t,s) : t,s \in [0,a]\} \to \mathcal{L}(X)$ é uma função tal que*

(a) *$K(t,\cdot) \in L^{\frac{1}{(1-\alpha)}}([0,t],\mathcal{L}(X))$ para todo $t \in [0,a]$ e*

$$\Theta(0,b) = \sup_{s\in[0,b]} \Big(\int_0^s \| K(s,\tau) \|^{\frac{1}{1-\alpha}} d\tau\Big)^{(1-\alpha)} < \infty, \ \ \forall\, b \in [0,a].$$

Notação 1 Sejam $u, v \in C([-p,b];X)$ com $0 < b \le a$. Assuma que $u'(\sigma(\cdot,u(\cdot)))$ pertence a $C([0,b];X)$ e que $\varphi' \in C([-p,0];X)$. Usaremos os símbolos $v^\sigma, (u')^\sigma_{K,u}$ e $F^\sigma u$ para as funções $v^\sigma, (u')^\sigma_{K,u}$ e $F^\sigma u : [0,b] \to X$ dadas por $v^\sigma(t) = v(\sigma(t,v(t)))$,

$$(u')^\sigma_{K,u}(t) = \int_0^t K(t,s)u'(\sigma(s,u(s)))ds \ \text{ e } \ F^\sigma u(t) = F(t,u(t),(u')^\sigma_{K,u}(t)).$$

Se $\sigma(t,u(t)) < 0$ para todo $t \in [0,b]$ e $u_{|_{[-p,0]}} = \varphi$, usaremos a notação $(\varphi')^\sigma_{K,u}$ em lugar $(u')^\sigma_{K,u}$. Observamos que neste caso $(\varphi')^\sigma_{K,u}(t) = \int_0^t K(t,s)\varphi'(\sigma(s,u(s)))ds$, para todo $t \in [0,b]$

O próximo conceito foi introduzido em [7] e vamos utilizá-lo em nossas demonstrações.

Definição 5.0.1 *Uma função $F \in C([c,d]\times Y_1;Y_2)$ é L^q-Lipschitz ($F \in L^q_{Lip}([c,d]\times Y_1;Y_2)$), se existe $[F]_{(\cdot,\cdot)} \in L^q([c,d]^2;\mathbb{R}^+)$ e uma função não decrescente $\mathcal{K}_F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tal que $[F]_{(t,\cdot)} \in L^q([c,t];\mathbb{R}^+)$ para todo $t \ge c$ e*

$$\| F(t,x_1) - F(s,x_2) \|_{Y_2} \le \mathcal{K}_F(\max_{i=1,2}\{\| x_i \|_{Y_1}\})[F]_{(t,s)}(| t-s | + \| x_1 - x_2 \|_{Y_1}),$$

para $x_i \in Y_1$ e $c \le s \le t \le d$.

5.1 Existência e unicidade de solução

Nesta seção estudaremos a existência e unicidade de solução para o problema (5.1)-(5.2). Para iniciar, dos resultados das seções anteriores lembramos que uma função $u \in C([-p,b];X)$ é solução de (5.1)-(5.2) em $[-p,b]$ se $u_{|[-p,0]} = \varphi$, $u(\cdot)$ é diferenciável em $\{\sigma(s,u(s)) : s \in [0,b]\} \cup [0,b]$ e

$$u(t) = e^{At}\varphi(0) + \int_0^t e^{A(t-s)} F^\sigma u(s)ds, \quad \forall\ t \in [0,b]. \tag{5.3}$$

Para estabelecer os resultados desta seção, usaremos a seguinte condição.

Condição 2 $\mathcal{L}_{\mathbf{F},\sigma}$: *$F \in L^q_{Lip}([0,a] \times X \times X; X)$ para algum $q \geq 1$ e vamos ter que $\sigma \in C_{Lip}([0,a] \times X; [-p,a])$ e $\sigma(t,x) \leq t$ para todo $(t,x) \in [0,a] \times X$.*

Estamos agora em condições de estabelecer o primeiro resultado de existência de solução para (5.1)-(5.2).

Teorema 5.1.1 *Assuma que as condições $\mathcal{L}_{\mathbf{F},\sigma}$ e $\mathcal{L}_\alpha$ são satisfeitas, que $\sigma(0,\varphi(0)) < 0$ e que $\varphi \in C^1([-p,0];X)$. Então existe uma solução $u \in C([-p,b];X)$ de (5.1)-(5.2) em $[-p,b]$ para algum $b \in (0,a]$.*

Demonstração: Usando que $\sigma(\cdot)$ é uma função contínua e que $\sigma(0,\varphi(0)) < 0$, fixamos $r_1 > 0$ e $0 < b_1 \leq a$ tal que $| \ \sigma(s,x) - \sigma(0,\varphi(0)) \ | < \frac{|\sigma(0,\varphi(0))|}{2}$ para todo $s \in [0,b_1]$ e $x \in B_{r_1}(\varphi(0),X)$. Seja $\rho = r_1 + (1+\Theta(0,a)a^\alpha) \parallel \varphi \parallel_{C^1([-p,0];X)}$, onde $\Theta(0,a)$ é definido em Condição 1. Selecionamos agora $0 < b < b_1$ tal que

$$\begin{aligned} \parallel e^{A(\cdot)}\varphi(0) - \varphi(0) \parallel_{C([0,b];X)} &+ C_0 \parallel F(\cdot,\varphi(0),0) \parallel_{C([0,b];X)} b \\ &+ C_0 \mathcal{K}_F(\rho) \parallel [F]_{(\cdot,\cdot)} \parallel_{L^1([0,b])} \rho \ \leq \ r_1. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Seja $S(b) := \{u \in C([-p,b];X) : \parallel u(\cdot) - \varphi(0) \parallel_{C([0,b];X)} \leq r_1,\ u_{|[-p,0]} = \varphi\}$ munido com a métrica $d(u,v) = \parallel u - v \parallel_{C([0,b];X)}$ e $\Gamma : S(b) \to C([-p,b];X)$ o operador definido por $\Gamma u(\theta) = \varphi(\theta)$ para $-p \leq \theta \leq 0$ e

$$\Gamma u(t) = e^{At}\varphi(0) + \int_0^t e^{A(t-s)} F(s,u(s),(\varphi')^\sigma_{K,u}(s))ds, \ \text{ para } t \in [0,b], \tag{5.5}$$

onde $(\varphi')^\sigma_{K,u}(s))$ é a função definida em Notação 1. No que segue mostraremos que $\Gamma(\cdot)$ é completamente contínuo de $S(b)$ em $S(b)$.

Seja $u \in S(b)$. Pela definição de $S(b)$ e a escolha de r_1, temos que $\sigma(s,u(s)) < 0$ para todo $s \in [0,b]$, o que implica que $\varphi'(\sigma(s,u(s)))$ está bem definido. Usando este fato, a definição de $\Theta(0,b)$, e a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, para $s \in [0,b]$ vemos que

$$\begin{aligned}
\| u(s) \| + \| (\varphi')^{\sigma}_{K,u}(s)) \| &\leq \| u(s) \| + \| \int_0^s K(s,\tau)\varphi'(\sigma(\tau,u(\tau)))d\tau \| \\
&\leq \| u(s) \| + \| \varphi' \|_{C([-p,0]:X)} \int_0^s \| K(s,\tau) \| d\tau \\
&\leq \| u(s) \| \\
&\quad + \| \varphi' \|_{C([-p,0]:X)} \Big(\int_0^s \| K(s,\tau) \|^{\frac{1}{1-\alpha}} d\tau\Big)^{(1-\alpha)} \Big(\int_0^s 1^{\frac{1}{\alpha}} d\tau\Big)^{\alpha} \\
&\leq \| u(s) \| + \| \varphi' \|_{C([-p,0]:X)} \Theta(0,b)b^{\alpha} \\
&\leq \| u(s) \| + \| \varphi' \|_{C([-p,0]:X)} \Theta(0,b)b^{\alpha} \\
&\leq \| u(s) - \varphi(0) \| + \| \varphi(0) \| + \Theta(0,b)b^{\alpha} \| \varphi' \|_{C([-p,0])} \\
&\leq r_1 + \| \varphi \|_{C([-p,0])} + \Theta(0,b)b^{\alpha} \| \varphi' \|_{C([-p,0])} \leq \rho.
\end{aligned}$$

Usando esta estimativa e as propriedades da função $F(\cdot)$, para $t \in [0,b]$ temos que

$$\begin{aligned}
\| \Gamma u(t) - \varphi(0) \| &\leq \| e^{At}\varphi(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}(F(s,u(s),(\varphi')_{K,u}(s))ds - \varphi(0) \| \\
&\leq \| e^{At}\varphi(0) - \varphi(0) \| + \| \int_0^t e^{A(t-s)}(F(s,u(s),(\varphi')^{\sigma}_{K,u}(s))ds \| \\
&\leq \| e^{At}\varphi(0) - \varphi(0) \| + \int_0^t \| e^{A(t-s)}F(s,\varphi(0),0) \| ds \\
&\quad + \int_0^t \| e^{A(t-s)}(F(s,u(s),(\varphi')^{\sigma}_{K,u}(s)) - F(s,\varphi(0),0)) \| ds \\
&\leq \| e^{A(\cdot)}\varphi(0) - \varphi(0) \|_{C([0,b];X)} + C_0 F(\cdot,\varphi(0),0) \|_{C([0,b];X)} b \\
&\quad + C_0 \int_0^t \| F(s,u(s),(\varphi')^{\sigma}_{K,u}(s)) - F(s,\varphi(0),0)) \| ds \\
&\leq \| e^{A(\cdot)}\varphi(0) - \varphi(0) \|_{C([0,b];X)} + C_0 \| F(\cdot,\varphi(0),0) \|_{C([0,b];X)} b \\
&\quad + C_0 \int_0^t [F]_{(s,s)}\mathcal{K}_F(\rho)(\| u(s) - \varphi(0) \| + \| (\varphi')^{\sigma}_{K,u}(s) \|)ds \\
&\leq \| e^{A(\cdot)}\varphi(0) - \varphi(0) \|_{C([0,b];X)} + C_0 \| F(\cdot,\varphi(0),0) \|_{C([0,b];X)} b \\
&\quad + C_0\mathcal{K}_F(\rho) \| [F]_{(\cdot,\cdot)} \|_{L^1([0,b])} \rho \leq r_1,
\end{aligned}$$

o que mostra que $\Gamma u \in S(b)$ e que $\Gamma(S(b)) \subset S(b)$.

Da definição de $S(b)$ é claro que $S(b)$ é um subconjunto limitado de $C([0,b];X)$. De fato, para $u \in S(b)$ e $t \in [0,b]$ temos que

$$| u(t) | \leq | u(t) - \varphi(0) | + | \varphi(0) | \leq r_1 + \| \varphi(0) \|,$$

o que implica que $\| u \|_{C([0,b];X)} \leq r_1 + \| \varphi(0) \|$.

Mostraremos agora que o conjunto $\{\Gamma u : u \in S(b)\}$ é equicontínuo em $[0,b]$, ou seja, que para $t \geq 0$ e $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\| \Gamma u(t+h) - \Gamma u(t) \| < \varepsilon, \quad \forall u \in S(b) \quad se \quad 0 < | h | < \delta.$$

Seja $t \in [0, b)$ e $\varepsilon > 0$. Para $u \in S(b)$ e $0 < h < b$ tal que $t + h \in [0, b]$ temos que

$$
\begin{aligned}
&\| \Gamma u(t+h) - \Gamma u(t) \| \\
&\leq \ \| e^{A(t+h)}\varphi(0) - e^{At}\varphi(0) \| \\
&\quad + \| \int_0^{t+h} e^{A(t+h-s)} F(s, u(s), (\varphi')^{\sigma}_{K,u}(s))ds - \int_0^t e^{A(t-s)} F(s, u(s), (\varphi')^{\sigma}_{K,u}(s))ds \| \\
&\leq \ \| e^{A(t+h)}\varphi(0) - e^{At}\varphi(0) \| + \| \int_t^{t+h} e^{A(t+h-s)} F(s, u(s), (\varphi')^{\sigma}_{K,u}(s))ds \| \\
&\quad + \| \int_0^{t} e^{A(t+h-s)} F(s, u(s), (\varphi')^{\sigma}_{K,u}(s))ds - \int_0^t e^{A(t-s)} F(s, u(s), (\varphi')^{\sigma}_{K,u}(s))ds \| \\
&\leq \ \| e^{A(t+h)}\varphi(0) - e^{At}\varphi(0) \| + \| \int_t^{t+h} e^{A(t+h-s)} F(s, u(s), (\varphi')^{\sigma}_{K,u}(s))ds \| \\
&\quad + \| \int_0^{t} (e^{A(t+h-s)} - e^{A(t-s)}) F(s, u(s), (\varphi')^{\sigma}_{K,u}(s))ds \| \\
&\leq \ \| (e^{Ah} - I)e^{At}\varphi(0) \| + \int_t^{t+h} \| e^{A(t+h-s)} F(s, u(s), (\varphi')^{\sigma}_{K,u}(s)) \| ds \\
&\quad + \int_0^{t} \| (e^{A(t-s)}(e^{Ah} - I)) F(s, u(s), (\varphi')^{\sigma}_{K,u}(s)) \| ds \\
&\leq \ \| e^{Ah} - I \| \| e^{At}\varphi(0) \| + C_0 \| F(\cdot, \varphi(0), 0) \|_{C([0,b];X)} \ h \\
&\quad + C_0 \int_t^{t+h} [F]_{(s,s)} \mathcal{K}_F(\rho)(\| u(s) - \varphi(0) \| + \| (\varphi')^{\sigma}_{K,u}(s) \|)ds \\
&\quad + \| e^{Ah} - I \| \ C_0 \| F(\cdot, \varphi(0), 0) \|_{C([0,b];X)} \ t \\
&\quad + \| e^{Ah} - I \| \ C_0 \int_0^{t} [F]_{(s,s)} \mathcal{K}_F(\rho)(\| u(s) - \varphi(0) \| + \| (\varphi')^{\sigma}_{K,u}(s) \|)ds \\
&\leq \ \| e^{Ah} - I \| \ C_0 \| \varphi(0) \| + C_0 \| F(\cdot, \varphi(0), 0) \|_{C([0,b];X)} \ h \\
&\quad + C_0 \mathcal{K}_F(\rho) \| [F]_{(\cdot,\cdot)} \|_{L^1([t,t+h])} \ \rho \\
&\quad + \| e^{Ah} - I \| (C_0 \| F(\cdot, \varphi(0), 0) \|_{C([0,b];X)} \ t + C_0 \mathcal{K}_F(\rho) \| [F]_{(\cdot,\cdot)} \|_{L^1([t,t+h])} \ \rho) \\
&\leq \ \| e^{Ah} - I \| \ C_0 \Big(\| \varphi \|_{C([-p,0])} + \| F(\cdot, \varphi(0), 0) \|_{C([0,b];X)} \ h \Big) \\
&\quad + C_0 \mathcal{K}_F(\rho) \| [F]_{(\cdot,\cdot)} \|_{L^1([t,t+h])} \ \rho \\
&\quad \| e^{Ah} - I \| \Big(C_0 \| F(\cdot, \varphi(0), 0) \|_{C([0,b];X)} \ h + C_0 \mathcal{K}_F(\rho) \| [F]_{(\cdot,\cdot)} \|_{L^1([t,t+h])} \ \rho \Big).
\end{aligned} \tag{5.6}
$$

Como $\| e^{Ah} - I \| \to 0$ se $h \downarrow 0$ e $\| [F]_{(\cdot,\cdot)} \|_{L^1([t,t+h])} \to 0$ quando $h \downarrow 0$, existe $\delta > 0$, independente de $u \in S(b)$, tal que $\| \Gamma u(t+h) - \Gamma u(t) \| < \varepsilon$ se $0 < h < \delta$. Procedendo de maneira análoga, podemos provar que para $t \in (0, b]$, existe $0 < \delta < t$ tal que $\| \Gamma u(t-h) - \Gamma u(t) \| < \varepsilon$ se $0 < h < \delta$. Do anterior, segue que $\{\Gamma u : u \in S(b)\}$ é equicontínuo em cada $t \in [0, b]$.

No que segue, mostremos que $S(b)$ é convexo. Seja $u, v \in S(b)$ e $\lambda \in [0,1]$, note que

$$\begin{aligned}
\mid (\lambda u + (1-\lambda)v)(t) - \varphi(0) \mid &\leq \mid (\lambda u + (1-\lambda)v)(t) - \varphi(0) - \lambda\varphi(0) + \lambda\varphi(0) \mid \\
&\leq \mid \lambda(u(t) - \varphi(0)) + (1-\lambda)(v(t) - \varphi(0)) \mid \\
&\leq \lambda \parallel u(\cdot) - \varphi(0) \parallel + (1-\lambda) \parallel v(\cdot) - \varphi(0) \parallel \\
&\leq \lambda r_1 + (1-\lambda) r_1 \\
&\leq r_1,
\end{aligned}$$

donde segue que o conjunto $S(b)$ é convexo.

Proveremos agora que o operador Γ é contínuo. Seja $u \in S(b)$ e $\varepsilon > 0$. Como φ' é uniformemente contínua em $[-p, b]$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\mid \varphi'(t) - \varphi'(s) \mid < \varepsilon \quad se \quad 0 < \mid t - s \mid < \delta \quad e \quad t, s \in [-p, 0].$$

Usando agora que $\sigma(\cdot)$ é Lipschitz, podemos fixar $0 < \delta_1 < \min\{\delta, \varepsilon\}$ tal que

$$\parallel \sigma(\tau, u(\tau)) - \sigma(\tau, v(\tau)) \parallel < \delta, \quad se \quad \parallel u - v \parallel_{C([0,b];X)} \leq \delta_1.$$

Usando o anterior, para $v \in S(b)$ com $\parallel u - v \parallel_{C([0,b];X)} \leq \delta_1$ temos que,

$$\begin{aligned}
&\parallel \Gamma u(t) - \Gamma v(t) \parallel \\
&\leq \parallel \int_0^t e^{A(t-s)} (F(s, u(s), (\varphi')^{\sigma}_{K,u}(s)) - F(s, v(s), (\varphi')^{\sigma}_{K,v}(s))) ds \parallel \\
&\leq C_0 \Big(\int_0^t \parallel F(s, u(s), (\varphi')^{\sigma}_{K,u}(s)) - F(s, v(s), (\varphi')^{\sigma}_{K,v}(s)) \parallel ds \Big) \\
&\leq C_0 \Big(\int_0^t [F]_{(s,s)} \mathcal{K}_F(\rho) (\parallel u(s) - v(s) \parallel + \parallel (\varphi')^{\sigma}_{K,u}(s) - (\varphi')^{\sigma}_{K,v}(s) \parallel) ds \Big) \\
&\leq C_0 \int_0^t [F]_{(s,s)} \mathcal{K}_F(\rho) \parallel u(s) - v(s) \parallel ds \\
&\quad + C_0 \int_0^t [F]_{(s,s)} \mathcal{K}_F(\rho) \parallel (\varphi')^{\sigma}_{K,u}(s) - (\varphi')^{\sigma}_{K,v}(s) \parallel ds \\
&\leq C_0 \int_0^t [F]_{(s,s)} \mathcal{K}_F(\rho) \parallel u - v \parallel_{C([0,b];X)} ds \\
&\quad + C_0 \int_0^t [F]_{(s,s)} \mathcal{K}_F(\rho) \Big(\int_0^s \parallel K(s,\tau) \parallel \parallel \varphi'(\sigma(\tau, u(\tau))) - \varphi'(\sigma(\tau, v(\tau))) \parallel d\tau \Big) ds \\
&\leq C_0 \int_0^t [F]_{(s,s)} \mathcal{K}_F(\rho) \parallel u - v \parallel_{C([0,b];X)} ds + C_0 \mathcal{K}_F(\rho) \int_0^t [F]_{(s,s)} \Big(\int_0^s \parallel K(s,\tau) \parallel \varepsilon d\tau \Big) ds \\
&\leq C_0 \int_0^t [F]_{(s,s)} \mathcal{K}_F(\rho) \parallel u - v \parallel_{C([0,b];X)} ds + C_0 \mathcal{K}_F(\rho) \int_0^t [F]_{(s,s)} \varepsilon \Theta(0,b) b^{\alpha} ds \\
&\leq C_0 \mathcal{K}_F(\rho) \parallel [F]_{(\cdot,\cdot)} \parallel_{L^1([0,b])} \parallel u - v \parallel_{C([0,b];X)} + C_0 \mathcal{K}_F(\rho) \parallel [F]_{(\cdot,\cdot)} \parallel_{L^1([0,b])} \Theta(0,b) b^{\alpha} \varepsilon \\
&\leq C_0 \mathcal{K}_F(\rho) \parallel [F]_{(\cdot,\cdot)} \parallel_{L^1([0,b])} (\delta_1 + \Theta(0,b) b^{\alpha} \varepsilon) \\
&\leq C_0 \mathcal{K}_F(\rho) \parallel [F]_{(\cdot,\cdot)} \parallel_{L^1([0,b])} (1 + \Theta(0,b) b^{\alpha}) \varepsilon,
\end{aligned}$$

o que prova que $\Gamma : S(b) \to S(b)$ é uma função contínua em $u \in S(b)$. Como u é arbitrário segue que Γ é contínua em $S(b)$.

Para completar a prova que $\Gamma(\cdot)$ é completamente contínuo, no que segue vamos a provar que para cada $t \in [0, b]$, o conjunto $\{\Gamma u(t) : u \in S(b)\}$ é relativamente compacto em X.

Seja $t \in (0, a]$. Para $0 < \varepsilon < \min\{t, a - t\}$ e $u \in S(b)$ vemos que

$$\begin{aligned}
\Gamma u(t) &= e^{At}\varphi(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} F^\sigma u(\tau) d\tau \\
&= e^{At}\varphi(0) + \int_0^{t-\varepsilon} e^{A(t-\varepsilon-\tau)} e^{A\varepsilon} F^\sigma u(\tau) d\tau + \int_{t-\varepsilon}^t e^{A(t-\tau)} F^\sigma u(\tau) d\tau \\
&= e^{At}\varphi(0) + e^{A\varepsilon} \int_0^t e^{A(t-\varepsilon-\tau)} F^\sigma u(\tau) d\tau + \int_{t-\varepsilon}^t e^{A(t-\tau)} F^\sigma u(\tau) d\tau.
\end{aligned}$$

Da estimativa (5.4) é simples notar que

$$\begin{aligned}
\int_0^t \| e^{A(t-\varepsilon-\tau)} F^\sigma u(\tau) \| d\tau &\leq C_0 \mathcal{K}_F(\rho) \| [F]_{(\cdot,\cdot)} \|_{L^1([0,b])} \rho = \mu_1 \\
\int_{t-\varepsilon}^t \| e^{A(t-\tau)} F^\sigma u(\tau) \| d\tau &\leq C_0 \mathcal{K}_F(\rho) \| [F]_{(\cdot,\cdot)} \|_{L^1([t-\varepsilon,t])} \rho = \mu_2(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Usando o anterior, segue que

$$\Gamma u(t) \in \{e^{At}\varphi(0)\} + e^{A\varepsilon} B_{\mu_1}(0; X) + B_{\mu_2(\varepsilon)}(0; X),$$

de onde obtemos que

$$\Big\{\Gamma u(t) : u \in S(b)\Big\} \subset \{e^{At}\varphi(0)\} + e^{A\varepsilon} B_{\mu_1}(0; X) + B_{\mu_2(\varepsilon)}(0; X).$$

Como o semigrupo de operadores $(e^{At})_{t\geq 0}$ é compacto, logo $\{e^{At}\varphi(0)\} + \overline{e^{A\varepsilon} B_{\mu_1}(0; X)}$ é compacto em X. Como consequência das observações anteriores, temos que para cada $\varepsilon > 0$ existe um conjunto compacto K_ε e um conjunto C_ε com diâmetro menor ou igual a $\mu_2(\varepsilon)$ tal que

$$\{\Gamma u(t) : u \in S(b)\} \subset K_\varepsilon + C_\varepsilon. \tag{5.7}$$

Como o diametro dos conjuntos C_ε converge para zero quando $\varepsilon \to 0$, de (5.7) obtemos que $\overline{\{\Gamma u : u \in S(b)\}}$ é compacto em X, para todo $t \in (0, b]$. Além do anterior, é obvio que o conjunto $\{\Gamma u(0) : u \in S(b)\}$ compacto em X. Portanto, o conjunto $\{\Gamma u(t) : u \in S(b)\}$ relativamente compacto em X para cada $t \in [0, b]$.

Deste modo, como o operador $\Gamma(\cdot)$ é contínuo, o conjunto $S(b)$ é limitado, fechado, convexo, $\{\Gamma u(t) : u \in S(b)\}$ é equicontínuo e $\{\Gamma u(t) : u \in S(b)\}$ é relativamente compacto para todo $t \in [0, b]$, podemos aplicar o Teorema do Ponto Fixo de Schauder, o que implica que existe uma solução $u \in S(b)$ do problema (5.3). Para finalizar, do Corolário 4.1.1 obtemos que u é uma solução do problema diferencial (5.1)-(5.2).

Proposição 5.1.1 *Suponha que as condições do Teorema 5.1.1 são satisfeitas, que $u(\cdot)$ é a solução em Teorema 5.1.1 e que $\varphi' \in C_{Lip}([-p,0];X)$. Se $v \in C([0,c];X)$ é uma solução de (5.1)-(5.2) tal que $\sigma(s,v(s)) \leq 0$ para todo $s \in [0,c]$, então $u = v$ em $[-p, \min\{b,c\}]$.*

Demonstração: Seja $b_1 = \min\{b,c\}$. Da demonstração do Teorema 5.1.1 sabemos que $\sigma(s,u(s)) \leq 0$ para todo $s \in [0,b_1]$. Do anterior, vemos que para $s \in [0,b_1]$, $u'(\sigma(s,u(s))) = \varphi'(\sigma(s,u(s)))$ e que $v'(\sigma(s,v(s))) = \varphi'(\sigma(s,v(s)))$ para todo $s \in [0,b_1]$.

Seja ρ o número definido na prova do Teorema 5.1.1 e $\eta = \rho + \| v \|_{C([-p,c];X)}$. Então para $t \in [0,c]$, vemos que

$$
\begin{aligned}
&\| u(t) - v(t) \| \\
&= \ \| \int_0^t e^{A(t-s)}(F^\sigma u(s) - F^\sigma v(s))ds \| \\
&\leq \ C_0 \int_0^t \| F(s,u(s),(u')^\sigma_{K,u}(s)) - F(s,v(s),(u')^\sigma_{K,v}(s)) \| ds \\
&\leq \ C_0 \int_0^t \mathcal{K}_F(\eta)[F]_{(s,s)}(\| u(s) - v(s) \| + \| (u')^\sigma_{K,u}(s) - (v')^\sigma_{K,v}(s) \|)ds \\
&\leq \ C_0 \int_0^t \mathcal{K}_F(\eta)[F]_{(s,s)} \| u(s) - v(s) \| ds \\
&\quad +C_0 \int_0^t \mathcal{K}_F(\eta)[F]_{(s,s)}\big(\int_0^s \| K(s,\tau)[\varphi'(\sigma(\tau,u(\tau))) - \varphi'(\sigma(\tau,v(\tau)))] \| d\tau\big) \\
&\leq \ C_0 \int_0^t \mathcal{K}_F(\eta)[F]_{(s,s)} \| u(s) - v(s) \| ds \\
&\quad +C_0 \int_0^t \mathcal{K}_F(\eta)[F]_{(s,s)}\big(\int_0^s \| K(s,\tau) \| \| \varphi'(\sigma(\tau,u(\tau))) - \varphi'(\sigma(\tau,v(\tau))) \| d\tau\big) \\
&\leq \ C_0 \int_0^t \mathcal{K}_F(\eta)[F]_{(s,s)} \| u(s) - v(s) \| ds \\
&\quad +C_0 \int_0^t \mathcal{K}_F(\eta)[F]_{(s,s)}[\varphi']_{C_{Lip}([-p,0];X)}[\sigma]_{C_{Lip}} \| u - v \|_{C([0,s];X)} \big(\int_0^s \| K(s,\tau) \| d\tau\big) \\
&\leq \ C_0\mathcal{K}_F(\eta) \int_0^t [F]_{(s,s)} \| u - v \|_{C([0,b];X)} ds \\
&\quad +C_0\mathcal{K}_F(\eta) \int_0^t [F]_{(s,s)}[\varphi']_{C_{Lip}([-p,0];X)}[\sigma]_{C_{Lip}} \| u - v \|_{C([0,s];X)} \Upsilon(0,b)b^\alpha ds \\
&\leq \ C_0\mathcal{K}_F(\eta) \int_0^t [F]_{(s,s)}(1 + \Upsilon(0,b)b^\alpha[\varphi']_{C_{Lip}([-p,0];X)}[\sigma]_{C_{Lip}}) \| u - v \|_{C([0,s];X)} ds,
\end{aligned}
$$

o que implica que, pela desigualdade de Gronwall $u = v$ em $[0,b_1]$. ■

5.2 Existência de solução via Teorema da Contração

Nesta seção vamos provar que o problema (5.1)-(5.2) tem uma única solução usando o Teorema da Contração de Banach.

Teorema 5.2.1 *Suponha que as condições $\mathcal{L}_{\boldsymbol{F},\sigma}$ e $\mathcal{L}_\alpha$ são satisfeitas, que $\sigma(0,\varphi(0)) < 0$ e que $\varphi' \in C_{Lip}([-p,0];X)$. Então existe uma única solução $u \in C^1([-p,b];X)$ do problema (5.1)-(5.2) para algum $0 < b < a$.*

Demonstração: Sejam ρ, r_1 e $0 < b \leq a$ definidos como na prova do Teorema 5.1.1. Além da condição (5.4), vamos supor que "b" é tal que

$$C_0 \parallel [F]_{(\cdot,\cdot)} \parallel_{L^1(0,b)} \mathcal{K}_F(\rho)(1 + [\varphi']_{Lip}[\sigma]_{Lip}\Theta(0,b)b^\alpha) \parallel u - v \parallel_{C([0,b];X)} < 1.$$

Sejam $S(b)$ e $\Gamma : S(b) \to C([-p,b];X)$ definidos como na prova do Teorema 5.1.1. Procedendo como na prova mencionada, vemos que $\Gamma(S(b)) \subset S(b)$. Para provar que $\Gamma(\cdot)$ é uma contração, para $u, v \in S(b)$ e $t \in [0,b]$, note que

$$\begin{aligned}
&\parallel \Gamma u(t) - \Gamma v(t) \parallel \\
&\leq \parallel \int_0^t e^{A(t-s)}(F(s,u(s),(\varphi')^\sigma_{K,u}(s)) - F(s,v(s),(\varphi')^\sigma_{K,v}(s)))ds \parallel \\
&\leq C_0\Big(\int_0^t \parallel F(s,u(s),(\varphi')^\sigma_{K,u}(s)) - F(s,v(s),(\varphi')^\sigma_{K,v}(s))\Big) \parallel ds) \\
&\leq C_0 \int_0^t [F]_{(s,s)}\mathcal{K}_F(\rho) \parallel u - v \parallel_{C([0,b];X)} ds \\
&\quad + C_0 \int_0^t [F]_{(s,s)}\mathcal{K}_F(\rho)\Big(\int_0^s \parallel K(s,\tau) \parallel \parallel \varphi'(\sigma(\tau,u(\tau))) - \varphi'(\sigma(\tau,v(\tau))) \parallel d\tau\Big)ds \\
&\leq C_0 \int_0^t [F]_{(s,s)}\mathcal{K}_F(\rho) \parallel u - v \parallel_{C([0,b];X)} ds \\
&\quad + C_0\mathcal{K}_F(\rho) \int_0^t [F]_{(s,s)}\big([\varphi']_{Lip}[\sigma]_{Lip} \parallel u - v \parallel_{C([0,b];X)} \int_0^s \parallel K(s,\tau) \parallel d\tau\big)ds \\
&\leq C_0 \int_0^t [F]_{(s,s)}\mathcal{K}_F(\rho) \parallel u - v \parallel_{C([0,b];X)} ds \\
&\quad + C_0\mathcal{K}_F(\rho) \int_0^t [F]_{(s,s)}\big([\varphi']_{Lip}[\sigma]_{Lip} \parallel u - v \parallel_{C([0,b];X)} \Theta(0,b)b^\alpha\big)ds \\
&\leq C_0 \parallel [F]_{(\cdot,\cdot)} \parallel_{L^1(0,b)} \mathcal{K}_F(\rho) \parallel u - v \parallel_{C([0,b];X)} \\
&\quad + C_0\mathcal{K}_F(\rho)[\varphi']_{Lip}[\sigma]_{Lip} \parallel u - v \parallel_{C([0,b];X)} \Theta(0,b)b^\alpha \parallel [F]_{(\cdot,\cdot)} \parallel_{L^1(0,b)} \\
&\leq C_0 \parallel [F]_{(\cdot,\cdot)} \parallel_{L^1(0,b)} \mathcal{K}_F(\rho)\big(1 + [\varphi']_{Lip}[\sigma]_{Lip}\Theta(0,b)b^\alpha\big) \parallel u - v \parallel_{C([0,b];X)} \\
&\leq C_0 \parallel [F]_{(\cdot,\cdot)} \parallel_{L^1(0,b)} \mathcal{K}_F(\rho)\big(1 + [\varphi']_{Lip}[\sigma]_{Lip}\Theta(0,b)b^\alpha\big) \parallel u - v \parallel_{C([0,b];X)} .
\end{aligned}$$

Isto prova que $\Gamma(\cdot)$ é uma contração em $S(b)$ e que $\Gamma(\cdot)$ possui um único ponto fixo $u \in S(b)$. Como o operador A é limitado e $F(\cdot, u(\cdot), (\varphi')_{K,u}(\cdot))$ é contínua, segue do anterior que $u(\cdot)$ é a única solução de (5.1)-(5.2) em $[-p,b]$. ■

5.3 Exemplo

Nesta seção usaremos o Teorema 5.2.1 para estudar a existência de soluções para o problema diferencial

$$\begin{aligned} u'(t,\xi) &= \beta u(t,\xi) + u(t,\xi)[1 - \int_0^t \varrho(t,s)u'(\zeta(\tau,u(\tau)),\xi)d\tau], \quad t \in [0,a], && (5.8)\\ u(\tau,\xi) &= \varphi(\tau,\xi), \quad \tau \in [-p,0], && (5.9)\end{aligned}$$

para $\xi \in [c,d] \subset \mathbb{R}$ e $t \in [0,a]$, onde $\beta \in \mathbb{R}$, $\varrho \in C^\alpha([0,a]\times[0,a];\mathbb{R})$ para algum $\alpha \in (0,1)$ e que $\zeta \in C_{Lip}([0,a]\times X;[-p,a])$ é tal que $\zeta(t,x) \le t$ para todo $t \in [0,a]$ e $x \in X = C([c,d];\mathbb{R})$.

Para representar o problema (5.8)-(5.9) na forma abstrata (5.1)-(5.2), vamos definir $A : X \to X$, $F : [0,a]\times X\times X \to X$, $\sigma : [0,a]\times X \to [-p,a]$ e $K(t,s) : X \to X$ por $Ax(\xi) = \alpha x(\xi)$, $F(t,x,y)(\xi) = x(\xi)[1-y(\xi)]$, $\sigma(t,x) = \zeta(t,x)$ e $K(t,s)x(\xi) = \varrho(t,s)x(\xi)$.

Das definições anteriores é simples ver que A é um operador contínuo, que $\| A \| \le | \beta |$ e que (obviamente) $\sigma \in C_{Lip}([0,a]\times X;[-p,a])$. Além do anterior, para $t,s \in [0,a]$ e $x \in X$ tal que $\| x \| \le 1$, temos que

$$\begin{aligned}\| K(t,\tau)x - K(s,\tau)x \| &= \sup_{\xi\in[c,d]} | [K(t,\tau)x](\xi) - [K(s,\tau)x(\xi)] |\\ &= \sup_{\xi\in[c,d]} | [\varrho(t,\tau) - \varrho(s,\tau)]x(\xi) |\\ &= \sup_{\xi\in[c,d]} [\varrho]_{C^\alpha([0,a]\times[0,a];\mathbb{R})} | t-s |^\alpha | x(\xi) |\\ &= [\varrho]_{C^\alpha([0,a]\times[0,a];\mathbb{R})} | t-s |^\alpha \| x \|,\end{aligned}$$

o que implica que

$$\| K(t,\tau) - K(s,\tau) \|_{\mathcal{L}(X)} \le [\varrho]_{C^\alpha([0,a]\times[0,a];\mathbb{R})} | t-s |^\alpha, \quad \forall\, t,s \in [0,a].$$

Além do anterior, para $t,s \in [0,a]$ vemos que

$$\begin{aligned}\| K(s,\tau) \|_{\mathcal{L}(X)} &= \sup_{\|x\|\le 1} \| K(s,\tau)x \|\\ &= \sup_{\|x\|\le 1} \Big(\sup_{\xi\in[c,d]} | \varrho(s,\tau)x(\xi) | \Big)\\ &= | \varrho(s,\tau) | \sup_{\|x\|\le 1} \Big(\sup_{\xi\in[c,d]} | x(\xi) | \Big)\\ &= | \varrho(s,\tau) | \sup_{\|x\|\le 1} \| x \|,\end{aligned}$$

o que permite concluir que $\| K(s,\tau) \|_{\mathcal{L}(X)} \le | \varrho(s,\tau) |$ e que

$$\begin{aligned}\Big(\int_0^s \| K(s,\tau) \|_{\mathcal{L}(X)}^{\frac{1}{1-\alpha}} d\tau \Big)^{1-\alpha} &\le \Big(\int_0^s | \varrho(s,\tau) |^{\frac{1}{1-\alpha}} d\tau \Big)^{1-\alpha}\\ &\le \| \varrho \|_{C^\alpha([0,a]\times[0,a];\mathbb{R})} \Big(\int_0^s d\tau \Big)^{1-\alpha}\\ &\le \| \varrho \|_{C^\alpha([0,a]\times[0,a];\mathbb{R})}\, s^{1-\alpha}\\ &\le \| \varrho \|_{C^\alpha([0,a]\times[0,a];\mathbb{R})}\, a^{1-\alpha}.\end{aligned}$$

Das desigualdades anteriores é simples ver que a condição $\mathcal{L}_\alpha$ é satisfeita. Por outro lado, em relação a função $F(\cdot)$, para $t, s \in [0, a]$ e $u, v, w, z \in B_r(0, X)$ vemos que

$$
\begin{aligned}
\mid F(t,u,w)(\xi) - F(t,v,z)(\xi) \mid &\leq \mid u(\xi)[1 - w(\xi)] - v(\xi)[1 - z(\xi)] \mid \\
&\leq \mid u(\xi) - v(\xi) \mid + \mid v(\xi)z(\xi) - u(\xi)w(\xi) \mid \\
&\leq \mid u(\xi)v(\xi) \mid + \mid v(\xi)w(\xi) - u(\xi)w(\xi) \mid \\
&\quad + \mid v(\xi)z(\xi) - v(\xi)w(\xi) \mid \\
&\leq \| u - v \| + \| v - u \| \| w \| + \| z - w \| \| v \| \\
&\leq \| u - v \| (1 - \| w \|) + \| z - w \| \| v \| \\
&\leq (\| u - v \| + \| w - z \|)(1 + \| w \| + \| v \|).
\end{aligned}
$$

o que implica que

$$\| F(t,u,w) - F(s,v,z) \| \leq (\| u - v \| + \| w - z \|)(1 + 2r). \tag{5.10}$$

Das obervações anteriores, segue que as condições $\mathcal{L}_{\mathbf{F},\sigma}$ e $\mathcal{L}_\alpha$ são satisfeitas e que $(e^{At})_{t\geq 0}$ é um semigrupo uniformemente contínuo, isto nos permite estudar o problema (5.8)-(5.9) usando o Teorema 5.2.1. Do citado teorema, obtemos o seguinte resultado.

Proposição 5.3.1 *Assuma que $\varphi \in C^1([-p, 0]; X)$, que $\varphi' \in C_{Lip}([-p, 0]; X)$ e que $\zeta(0, \varphi(0)) < 0$. Então existe uma uma única solução $u \in C^1([-p, b]; X)$ do problema (5.8)-(5.9) em $[-p, b]$ para algum $0 < b \leq a$.*

Referências Bibliográficas

[1] BREZIS, H. **Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations,** volume 2. Springer, 2011.

[2] DRIVER, R. D. **A functional-differential system of neutral type arising in a two-body problem of classical electrodynamics.** In: International symposium on nonlinear differential equations and nonlinear mechanics. Academic Press, 1963. p. 474-484.

[3] GRIMM, L. J. **Existence and contínuous dependence for a class of nonlinear neutral-differential equations.** Proc. Amer. Math. Soc., v. 29, n. 3, 1971. p. 467-473.

[4] GRIMM, L. J. **Existence and uniqueness for nonlinear neutral-differential equations.** Bull. Amer. Math. Soc., v. 77, 1971. p. 374-376.

[5] HALE, J. K. **Ordinary differential equations.** 2. ed. Robert E. Krieger Publishing Co., Inc., Huntington, N.Y., 1980.

[6] HERNÁNDEZ, E. **On explicit abstract neutral differential equations with state-dependent delay.** Proc. Amer. Math. Soc., v. 151, n. 03, 2023. p. 1119-1133.

[7] HERNÁNDEZ, E., WU J., AND CHADHA, A. **Existence, uniqueness and approximate controllability of abstract differential equations with state-dependent delay.** Journal of Differential Equations Vol.269, Issue 10. 2020. p. 8701-8735.

[8] KUANG, Y. **Delay differential equations with applications in population dynamics.** Mathematics in Science and Engineering, v. 191. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1993.

[9] PAZY, A. **Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.** Applied Mathematical Sciences, v. 44. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1983.