

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FFCLRP - DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO E MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Análise de Fourier e suas aplicações em equações diferenciais parciais de
evolução**

Vítor Faleiros Viana

Dissertação apresentada à Faculdade de Filosofia,
Ciências e Letras de Ribeirão Preto da USP, como parte
das exigências para a obtenção do título de Mestre em
Ciências, Área: Matemática.

Ribeirão Preto-SP
2023

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FFCLRP - DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO E MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Análise de Fourier e suas aplicações em equações diferenciais parciais de
evolução**

Vítor Faleiros Viana

Dissertação apresentada à Faculdade de Filosofia,
Ciências e Letras de Ribeirão Preto da USP, como parte
das exigências para a obtenção do título de Mestre em
Ciências, Área de concentração: Matemática.
Orientador: Marcelo Rempel Ebert.

Ribeirão Preto-SP
2023

VERSÃO CORRIGIDA

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Viana, Vítor Faleiros

Análise de Fourier e suas aplicações em equações diferenciais parciais de evolução. Ribeirão Preto, 2023.

87 p. : il. ; 30 cm

Dissertação de Mestrado, apresentada à Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto/USP. Área de concentração: Matemática.

Orientador: Ebert, Marcelo Rempel.

1. Estimativas $L^p - L^q$. 2. Equações diferenciais parciais de evolução. 3. Análise de Fourier.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a minha companheira e esposa, Ana Victória, sem a qual a conclusão deste trabalho não teria sido possível. Atribuo também a minha filha a responsabilidade por ter-me motivado nos difíceis anos de mestrado. Às minhas irmãs, Larissa e Laura, mãe, Malu, e avó, Ivanir, dedico os mais sinceros agradecimentos.

Neste momento de encerramento de um ciclo, faz-se necessário e importante reconhecer o essencial papel de amigos que me apoiaram direta ou indiretamente ao longo dos anos. Em especial, agradeço aos amigos Marcos e Eric, de infância, Pedro e Bruno, da graduação, e Lucas, do mestrado.

Não poderia esquecer-me, é claro, de meu orientador, Marcelo Ebert, e de outros professores, cuja participação na minha formação matemática, de ser humano e de caráter foi determinante e fundamental. Entre eles, cito Irene Onnis, Carlos Grossi, Adalberto Bergamasco, Éder Ritis e Tiago Picon. Para não ser injusto, deixo aqui o meu reconhecimento da importância de todos os docentes do ICMC, de São Carlos, e do DCM, de Ribeirão Preto, que desempenham a nobre função de formar novos matemáticos, pesquisadores e professores.

Finalmente, agradeço à CAPES, responsável pelo imprescindível aporte financeiro que a mim foi dado e por fomentar as ciências no país, sobretudo em momentos sombrios e de incertezas.

Dedico este trabalho a minha filha Alice e, também, a minha esposa e dedicada
companheira Ana Victória.

“It’s to that being inside of you who knows how to be alone, it is to this infant that I wish to speak, and no-one else. I’m well aware that this infant has been considerably estranged. It’s been through some hard times, and more than once over a long period. It’s been dropped off Lord knows where, and it can be very difficult to reach. One swears that it died ages ago, or that it never existed - and yet I am certain it’s always there, and very much alive.”

(Alexander Grothendieck)

Resumo

VIANA, V.F. **Análise de Fourier e aplicações em equações diferenciais parciais de evolução.** 2023. 87 p. Dissertação (Mestrado em Ciências Matemáticas) Faculdade de Filosofia Ciências e Letras de Ribeirão Preto, Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto, 2023.

Sejam $\sigma > 0$ e $u_1 \in L^p$, $p \geq 1$. Considere o seguinte problema de Cauchy, que envolve uma equação de evolução

$$\begin{cases} u_{tt} + (-\Delta)^\sigma u = 0, & x \in \mathbb{R}^n \quad t > 0 \\ u(0, x) = 0 \\ u_t(0, x) = u_1(x). \end{cases}$$

O objetivo deste trabalho é estudar estimativas $L^p - L^q$ para as soluções do problema de Cauchy acima, tanto para frequências baixas quanto altas. No caso em que $0 < \sigma < 1$ ou $\sigma > 1$, seguiremos [5], no qual os autores mostram que a solução u para o problema de Cauchy satisfaz as seguintes estimativas

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^q} \lesssim t^{1-\frac{n}{\sigma}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|u_1\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall t > 0,$$

para todo $1 \leq p \leq q \leq \infty$ satisfazendo

$$\frac{n}{\sigma} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) + n \max \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right), \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2} \right) \right\} < 1.$$

Para $\sigma = 1$, seguindo ideias contidas em [5] e em [16], faremos uma demonstração alternativa para estimativas feitas em [12], isto é, se $1 \leq p \leq q \leq \infty$ e

$$n \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) + (n-1) \max \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right), \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2} \right) \right\} < 1$$

então

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \lesssim t^{1-n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|u_1\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

uniformemente para $t > 0$.

As provas desses resultados utilizam algumas ferramentas de Análise de Fourier, as quais serão abordadas nos primeiros dois capítulos.

Palavras chave: Estimativas $L^p - L^q$, Equações diferenciais parciais de evolução, Análise de Fourier.

Abstract

VIANA, V.F. **Fourier Analysis and its applications in evolution partial differential equations.** 2023. 87 p. Dissertação (Mestrado em Ciências Matemáticas) Faculdade de Filosofia Ciências e Letras de Ribeirão Preto, Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto, 2023.

Let $\sigma > 0$ and $u_1 \in L^p$, $p \geq 1$. Consider the following Cauchy problem, which contains an evolution equation

$$\begin{cases} u_{tt} + (-\Delta)^\sigma u = 0, & x \in \mathbb{R}^n \quad t > 0 \\ u(0, x) = 0 \\ u_t(0, x) = u_1(x). \end{cases}$$

The goal of this work is to study $L^p - L^q$ estimates for the solutions of the Cauchy problem above, for low and high frequencies. In the case where $0 < \sigma < 1$ or $\sigma > 1$, we will follow [5], where the authors show that the solution u for the Cauchy problem satisfies the following estimates

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^q} \lesssim t^{1-\frac{n}{\sigma}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|u_1\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall t > 0,$$

for every $1 \leq p \leq q \leq \infty$ satisfying

$$\frac{n}{\sigma} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) + n \max \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right), \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2} \right) \right\} < 1.$$

For $\sigma = 1$, following ideas in [5] and [16], we will do an alternative demonstration for estimates in [12], that is, if $1 \leq p \leq q \leq \infty$ and

$$n \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) + (n-1) \max \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right), \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2} \right) \right\} < 1$$

then

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \lesssim t^{1-n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|u_1\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

uniformly for $t > 0$.

The proofs of these results use some tools of Fourier Analysis, which will be approached in the first two chapters.

Keywords: $L^p - L^q$ Estimates, Evolution partial differential equations, Fourier Analysis.

Conteúdo

1	Preliminares	14
1.1	Espaços L^p	14
1.2	Convolução	19
1.2.1	Grupos topológicos	19
1.3	Interpolação de Riesz-Thorin	22
2	A Transformada de Fourier	29
2.1	O Espaço de Schwartz	29
2.2	A Transformada de Fourier de funções em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	35
2.3	O espaço das distribuições temperadas	43
2.4	Multiplicadores de Fourier	50
2.5	Integrais Oscilatórias	58
3	Problema de Cauchy para uma equação de evolução e estimativas	
	$L^p - L^q$	66
3.1	Frequências pequenas	70
3.2	Frequências grandes	76
4	Equação da onda	79
A	Integral de Superfície	84

Lista de Figuras

4.1	Estimativas $L^p - L^q$ em [12] e no Teorema 95, para $n = 1$	81
4.2	Estimativas em [12], $n = 2$	81
4.3	Teorema 95, para $n = 2$	81
4.4	Estimativas em [12], $n = 3$	81
4.5	Teorema 95, para $n = 3$	81

Introdução

Considere a equação diferencial parcial linear

$$D_t^m u + \sum_{j=1}^m A_j(t, x, D_x) D_t^{m-j} u = f(t, x),$$

em que os $A_j = A_j(t, x, D_x) = \sum_{k=0}^{jp} A_{j,k}(t, x, D_x)$ são operadores diferenciais parciais lineares de ordem jp , para um inteiro fixo $p \geq 1$, e os $A_{j,k} = A_{j,k}(t, x, D_x)$ são operadores de ordem k . A parte principal desse operador diferencial, no sentido de Petrovsky, é definido por

$$D_t^m + \sum_{j=1}^m A_{j,jp}(t, x, D_x) D_t^{m-j}.$$

O operador diferencial parcial linear

$$D_t^m + \sum_{j=1}^m A_j(t, x, D_x) D_t^{m-j}$$

é chamado de operador de p -evolução se o símbolo principal no sentido de Petrovsky, isto é

$$\tau^m + \sum_{j=1}^m A_{j,jp}(t, x, \xi) \tau^{m-j},$$

(o símbolo principal é obtido a partir da parte principal trocando-se D_t por τ e D_{x_k} por ξ_k) tem apenas raízes reais distintas $\tau_1 = \tau_1(t, x, \xi), \dots, \tau_m = \tau_m(t, x, \xi)$.

A teoria de equações de evolução tem se desenvolvido bastante nos últimos anos devido a sua relação com Análise Harmônica e problemas de Física Matemática. Na literatura, podem-se encontrar vários resultados sobre o comportamento assintótico para soluções do seguinte problema de Cauchy:

$$\begin{cases} u_{tt} + (-\Delta)^\sigma u + bu_t + m^2 u = f(t, x), & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = u_0(x), u_t(0, x) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (1)$$

em que $\sigma > 0$, $b \geq 0$ e $m \geq 0$ são constantes. No livro texto [4], dentre outras coisas, os autores discutem resultados obtidos desde o final do século passado para o modelo (1), apresentando as diferentes técnicas para determinar o comportamento de soluções dependendo da escolha dos coeficientes b, m e do parâmetro $\sigma > 0$.

Em particular, este modelo inclui a equação de onda livre ([14] e [17]),

$$u_{tt} - \Delta u = 0,$$

a equação de onda com dissipação ([11]),

$$u_{tt} - \Delta u + bu_t = 0, \quad b > 0$$

a equação de Klein-Gordon ([10]),

$$u_{tt} - \Delta u + m^2 u = 0, \quad m > 0$$

e a equação de placas com ou sem dissipação ([4] e [2]),

$$u_{tt} + \Delta^2 u + bu_t = 0, \quad b \geq 0.$$

Vários autores estudaram estimativas de energia para soluções do problema de Cauchy para (1) (veja [4] e as referências citadas para os principais resultados), porém a obtenção de estimativas dispersivas do tipo $L^1 - L^\infty$ para o modelo (1) depende da escolha do parâmetro σ e dos coeficientes b, m e pode trazer grandes dificuldades.

Neste trabalho, vamos, num primeiro momento, estudar o método da fase estacionária para obter estimativas $L^p - L^q$ para o seguinte problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt} + (-\Delta)^\sigma u = 0, \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = 0, u_t(0, x) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

para $\sigma > 0$ e $\sigma \neq 1$. O lema de Littman será central nessa demonstração.

Posteriormente, analisaremos a equação da onda livre, isto é, $\sigma = 1$ no problema de Cauchy acima. Nesse sentido, o objetivo é obter, usando técnicas de [16], uma demonstração alternativa para as estimativas feitas em [14] e [17].

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Espaços L^p

Um espaço de medida é um conjunto X munido de uma σ -álgebra \mathfrak{M} , formada por subconjuntos de X , e de uma função μ , definida em \mathfrak{M} e tomando valores em $[0, \infty]$, que satisfaz $\mu(\emptyset) = 0$ e

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j),$$

para qualquer sequência $\{B_j\}$ de elementos disjuntos de \mathfrak{M} . A função μ é chamada medida em X , e os elementos da σ -álgebra \mathfrak{M} são chamados conjuntos mensuráveis. Os espaços de medida deste trabalho serão sempre completos, isto é, se $A \subseteq B$, $B \in \mathfrak{M}$, e $\mu(B) = 0$, então $A \in \mathfrak{M}$.

Um espaço de medida X é chamado σ -finito se existe uma sequência de subconjuntos mensuráveis de X , $\{X_n\}$, de forma que

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n,$$

e $\mu(X_n) < \infty$, para qualquer n .

Uma função a valores reais f , definida num espaço de medida X , é chamada mensurável se o conjunto $\{x \in X : f(x) > \lambda\}$ é mensurável para qualquer número real λ . Uma função a valores complexos é mensurável se, e somente se, suas partes real e imaginária são mensuráveis.

Uma função simples é uma combinação linear finita de funções características de subconjuntos mensuráveis de X (esses subconjuntos podem ter medida infinita). Uma função é finitamente simples se se escreve da forma

$$\sum_{j=1}^N c_j \chi_{B_j},$$

em que $N < \infty$, $c_j \in \mathbb{C}$ e a sequência $\{B_j\}$ é formada por conjuntos mensuráveis e disjuntos tais que $\mu(B_j) < \infty$, para todo j . Se $N = \infty$, essa função é chamada contavelmente simples.

A importância das funções simples centra-se no fato de que toda função mensurável

não negativa é o limite pontual de uma sequência crescente de funções simples. Se o espaço é σ -finito, essas funções simples podem ser escolhidas de forma a serem finitamente simples.

Para $1 \leq p < \infty$, $L^p(X, \mu)$ representa o conjunto de todas as funções a valores complexos μ -mensuráveis em X cujo módulo elevado a potência p é integrável. Já $L^\infty(X, \mu)$ é o conjunto das funções complexas μ -mensuráveis f definidas em X tais que, para algum $B > 0$, $\mu(\{x : |f(x)| > B\}) = 0$. Duas funções em $L^p(X, \mu)$, $1 \leq p < \infty$, são consideradas iguais se elas são iguais *q.t.p.*

Vale observar que, se $1 \leq p < \infty$, o espaço das funções finitamente simples é denso em $L^p(X, \mu)$. Quando não houver chance de ambiguidade, escreveremos simplesmente L^p , em vez de $L^p(X, \mu)$. A notação $L^p(\mathbb{R}^n)$ refere-se ao espaço de medida $L^p(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$, em que $|\cdot|$ denota a medida de Lebesgue n -dimensional. Também representamos a medida de Lebesgue por dx .

Se X é um espaço topológico, um conjunto de Borel é um conjunto que pode ser formado a partir de abertos (ou de fechados) por meio de uniões enumeráveis, interseções enumeráveis e complementos relativos. Os conjuntos de Borel formam uma σ -álgebra, chamada σ -álgebra de Borel de X , que é a menor σ -álgebra que contém todos os abertos (ou, equivalentemente, todos os fechados) de X . As medidas definidas na σ -álgebra de Borel são chamadas medidas de Borel.

Para $1 \leq p < \infty$, definimos a norma L^p de uma função da seguinte maneira

$$\|f\|_{L^p(X, \mu)} = \left(\int_X |f|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

E, para $p = \infty$,

$$\|f\|_{L^\infty(X, \mu)} = \text{ess sup } |f| = \inf\{B > 0 : \mu(\{x : |f(x)| > B\}) = 0\}.$$

Equivalentemente, podemos definir

$$\|f\|_{L^\infty(X, \mu)} = \inf\{c > 0 : |f(x)| \leq c \text{ q.t.p.}\}.$$

Em alguns momentos, por conveniência, escreveremos $\|\cdot\|_p$ para representar a norma $\|\cdot\|_{L^p}$, $1 \leq p \leq \infty$.

Observação 1. Se $f \in L^\infty$, então $|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty}$ q.t.p. De fato, pela definição da norma $\|\cdot\|_{L^\infty}$, existe uma sequência $\{C_n\}$ tal que $C_n \rightarrow \|f\|_{L^\infty}$ e, para cada n , $|f(x)| \leq C_n$ q.t.p. Assim, para cada n , $|f(x)| \leq C_n$, para $x \in X - E_n$, em que $E_n \subset X$ e $\mu(E_n) = 0$. Definamos $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Logo, $\mu(E) = 0$ e $|f(x)| \leq C_n$, para qualquer n e $x \in X - E$. Dessa forma, segue que

$$|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty}, \quad x \in X - E.$$

Isto é,

$$|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty} \text{ q.t.p.}$$

Para $1 \leq p \leq \infty$ a desigualdade triangular é também chamada desigualdade de Minkowski, isto é, dados $f, g \in L^p$, temos

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

Além disso, como $\|f\|_{L^p} = 0$ implica que $f = 0$ *q.t.p.*, segue que os espaços L^p são vetoriais e normados. Na verdade, para $1 \leq p \leq \infty$, L^p é espaço de Banach.

Para $1 \leq p \leq \infty$, o expoente conjugado p' é definido por

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Agora enunciaremos alguns resultados sobre teoria da medida e integração que serão utilizados ao longo do texto. Maiores detalhes e as demonstrações dos três primeiros resultados podem ser encontrados no capítulo 2 de [6].

Teorema 2. (da Convergência Monótona) *Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções em L^1 que satisfaz:*

- i) $f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_n \leq f_{n+1} \leq \dots$ *q.t.p em X ;*
- ii) $\sup_n \int f_n < \infty$.

Então $f_n(x)$ converge q.t.p em X para um valor finito, que representaremos por $f(x)$. A função f pertence a L^1 e $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$

Teorema 3. (da Convergência Dominada) *Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções em L^1 que satisfaz:*

- i) $f_n(x) \rightarrow f(x)$ *q.t.p em X ;*
- ii) *existe uma função $g \in L^1$ tal que, para todo n , $|f_n(x)| \leq g(x)$ q.t.p em X .*

Então $f \in L^1$ e $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$.

Lema 4. (de Fatou) *Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções em L^1 que satisfaz:*

- i) *para todo n , $f_n \geq 0$ q.t.p;*
- ii) $\sup_n \int f_n < \infty$.

E, para quase todo ponto $x \in X$, definamos $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \leq +\infty$. Então $f \in L^1$ e $\int f \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n$.

Teorema 5. (Desigualdade de Hölder) *Suponha que $f \in L^p$ e $g \in L^{p'}$, $1 \leq p \leq \infty$. Então $f \cdot g \in L^1$ e*

$$\int |f \cdot g| \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_{p'}.$$

Demonstração. Capítulo 4 de [1]. □

Teorema 6. (Desigualdade de Hölder generalizada) *Sejam f_1, \dots, f_k funções tais que $f_i \in L^{p_i}$, $1 \leq i \leq k$, e*

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_k} \leq 1.$$

Então o produto $f \doteq f_1 \dots f_k \in L^p$ e

$$\|f\|_{L^p} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}} \dots \|f_k\|_{L^{p_k}}.$$

Demonstração. Consideremos, inicialmente, o caso $p = \infty$, isto é, $p_1 = \dots = p_k = \infty$. Faremos a demonstração por indução sobre k . Para $k = 2$, pela Observação 1,

$$|f(x)| = |f_1(x)||f_2(x)| \leq \|f_1\|_{L^\infty} \|f_2\|_{L^\infty} \text{ q.t.p.}$$

Isso implica que

$$\|f\|_{L^\infty} \leq \|f_1\|_{L^\infty} \|f_2\|_{L^\infty}.$$

Suponha que o resultado seja válido para k funções nas hipóteses acima. Sejam f_1, \dots, f_{k+1} funções tais que $f_i \in L^{p_i}$, $1 \leq i \leq k+1$, e

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_{k+1}} \leq 1.$$

Assim,

$$|f_1(x) \dots f_k(x) f_{k+1}(x)| = |f_1(x) \dots f_k(x)| |f_{k+1}(x)| \leq \|f_1 \dots f_k\|_{L^\infty} \|f_{k+1}\|_{L^\infty},$$

pela Observação 1. Logo, pela hipótese de indução,

$$\|f_1 \dots f_{k+1}\|_{L^\infty} \leq \|f_1 \dots f_k\|_{L^\infty} \|f_{k+1}\|_{L^\infty} \leq \|f_1\|_{L^\infty} \dots \|f_{k+1}\|_{L^\infty}.$$

Agora, demonstremos o caso $p < \infty$. Observe que

$$f_i \in L^{p_i} \iff |f_i|^p \in L^{\frac{p_i}{p}}. \quad (1.1)$$

e que, para $1 \leq j \leq k$,

$$0 \leq \frac{1}{p_j} \leq \sum_{i=1}^k \frac{1}{p_i} = \frac{1}{p} \implies p_j \geq p. \quad (1.2)$$

Seja $k = 2$. Temos

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p}.$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade anterior por p , segue que

$$\frac{1}{\frac{p_1}{p}} + \frac{1}{\frac{p_2}{p}} = 1.$$

Por (1.2), $\frac{p_1}{p}, \frac{p_2}{p} \geq 1$. Por (1.1) e pela desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} \int |f_1|^p |f_2|^p &\leq \| |f_1|^p \|_{\frac{p_1}{p}} \| |f_2|^p \|_{\frac{p_2}{p}} \\ &= \left(\int |f_1|^{p_1} \right)^{\frac{p}{p_1}} \left(\int |f_2|^{p_2} \right)^{\frac{p}{p_2}}. \end{aligned}$$

Como a função $t \mapsto t^{\frac{1}{p}}$ é crescente em $[0, +\infty)$, temos

$$\|f_1 f_2\|_p \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2}.$$

Isso termina a demonstração para $k = 2$. Suponha que o resultado seja válido para $k > 2$. Sejam $p_i, p \in (0, +\infty]$ tais que

$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{p_i} = \frac{1}{p}.$$

Seja

$$\frac{1}{p^*} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{p_i}.$$

Dessa forma,

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p^*} + \frac{1}{p_{k+1}}.$$

Multiplicando por p a igualdade anterior, segue que

$$\frac{1}{\frac{p^*}{p}} + \frac{1}{\frac{p_{k+1}}{p}}.$$

Por (1.2), $\frac{p^*}{p}, \frac{p_{k+1}}{p} \geq 1$. Por (1.1), Hölder e pela hipótese de indução,

$$\begin{aligned} \int |f_1 \cdots f_k|^p |f_{k+1}|^p &\leq \| |f_1 \cdots f_k|^p \|_{\frac{p^*}{p}} \| |f_{k+1}|^p \|_{\frac{p_{k+1}}{p}} \\ &= \left(\int |f_1 \cdots f_k|^{p^*} \right)^{\frac{p}{p^*}} \left(\int |f_{k+1}|^{p_{k+1}} \right)^{\frac{p}{p_{k+1}}} \\ &= \|f_1 \cdots f_k\|_{\frac{p^*}{p}}^p \|f_{k+1}\|_{\frac{p_{k+1}}{p}}^p. \end{aligned}$$

Isso implica que

$$\int |f_1 \cdots f_{k+1}|^p \leq (\|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_k\|_{p_k})^p \|f_{k+1}\|_{\frac{p_{k+1}}{p}}^p$$

Portanto

$$\|f_1 \cdots f_{k+1}\|_p \leq \|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_{k+1}\|_{p_k}.$$

□

Corolário 7. Se $f \in L^p \cap L^q$, com $1 \leq p \leq q \leq \infty$, então $f \in L^r$ para todo r tal que $p \leq r \leq q$, e

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^\alpha \|f\|_q^{1-\alpha}, \quad \alpha \in [0, 1].$$

Teorema 8. (Fubini) Sejam (X, \mathfrak{A}, μ) e $(Y, \mathfrak{M}, \lambda)$ espaços de medida σ -finitos. Seja f uma função $\mu \times \lambda$ -mensurável definida em $X \times Y$. Se $0 \leq f \leq \infty$ e se

$$\phi(x) = \int_Y f_x d\lambda, \quad x \in X,$$

$$\psi(y) = \int_X f^y d\mu, \quad y \in Y,$$

então ϕ é μ -mensurável, ψ é λ -mensurável e

$$\int_X \phi d\mu = \int_{X \times Y} f d(\mu \times \lambda) = \int_Y \psi d\lambda,$$

em que, para cada $x \in X$ fixado, f_x é uma função definida em Y dada por $f_x(y) = f(x, y)$. Analogamente, para cada $y \in Y$ fixado, f^y é uma função definida em X dada por $f^y(x) = f(x, y)$.

Demonstração. Capítulo 8 de [15].

□

Teorema 9. *Sejam (X, τ) um espaço topológico e (X, \mathfrak{M}, μ) um espaço de medida em que μ é positiva em abertos de τ . Se f e g são funções contínuas definidas em X tais que $f = g$ q.t.p., então $f = g$.*

Demonstração. Seja $E = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$. Suponha que $E \neq \emptyset$. Assim, existe $x_0 \in E$. Como

$$\begin{aligned} E &= X - \{x \in X : f(x) = g(x)\} \\ &= X - \{x \in X : (f - g)(x) = 0\} \\ &= X - (f - g)^{-1}\{0\} \end{aligned}$$

e $(f - g)^{-1}\{0\}$ é fechado, segue que E é aberto. Dessa forma, existe uma vizinhança aberta U de x_0 tal que $U \subset E$. Além disso,

$$0 < \mu(U) \leq \mu(E),$$

o que contradiz $\mu(E) = 0$. □

1.2 Convolução

Embora as definições deste trabalho sejam feitas, em quase sua totalidade, em espaços euclidianos e espaços de funções, a noção de convolução pode ser definida em espaços de medida com estrutura de grupo. Na verdade, os grupos topológicos são o ambiente mais natural para se desenvolver a teoria de convolução. Nesse sentido, faremos uma breve apresentação dessas estruturas e, em seguida, enunciaremos alguns resultados de convolução que serão utilizados futuramente.

1.2.1 Grupos topológicos

Um grupo topológico G é um espaço topológico Hausdorff que também é um grupo, de forma que as operações $(x, y) \mapsto x.y$ e $x \mapsto x^{-1}$ são contínuas. Dados A e B subconjuntos de G , definimos $AB = \{a.b : a \in A, b \in B\}$ e $A^{-1} = \{a^{-1} : a \in A\}$.

Observação 10. *Note que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Com efeito,*

$$\begin{aligned} x \in (AB)^{-1} &\iff \\ x = (a.b)^{-1}, \quad a \in A, b \in B &\iff \\ x = b^{-1}.a^{-1}, \quad a \in A, b \in B &\iff \\ x \in B^{-1}A^{-1}. & \end{aligned}$$

Todo grupo topológico G possui uma base aberta em torno da identidade e , que é formada por vizinhanças isométricas, isto é, conjuntos abertos U que satisfazem $U = U^{-1}$.

Um grupo topológico é localmente compacto se existe um aberto U contendo a identidade e tal que \overline{U} é compacto. Logo, qualquer ponto do grupo tem uma vizinhança aberta cujo fecho é compacto pois, se U é uma vizinhança aberta de e com fecho compacto, então $aU = \{a.u : u \in U\}$ é uma vizinhança aberta de $a \in G$ com fecho

compacto.

Seja G um grupo localmente compacto. Sabe-se que G possui uma medida λ , definida nos conjuntos de Borel, que é diferente de zero nos abertos não vazios, finita nos compactos e invariante à esquerda, ou seja, $\lambda(tA) = \lambda(A)$, para todo conjunto mensurável $A \subseteq G$ e $t \in G$. Veja [9], capítulo 16, para a existência da medida de Haar. Uma medida como essa é chamada medida de Haar (invariante à esquerda) em G . Vale observar que a medida de Haar é única a menos de multiplicação por constantes. Se G é abeliano, então, a menos de multiplicação por constante, as medidas de Haar invariantes à esquerda são iguais às medidas de Haar invariantes à direita de G .

Um grupo localmente compacto e dado pela união enumerável de compactos é um espaço de medida σ -finito.

Exemplo 11. *O espaço \mathbb{R}^n , com a topologia usual e a adição usual de n -uplas, é um espaço de medida de Haar.*

Exemplo 12. *Seja $G = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$, em que a operação de grupo é a multiplicação usual. A medida $\lambda = \frac{dx}{|x|}$ é uma medida de Haar. De fato, claramente λ é uma medida, a qual é positiva nos abertos não vazios e finita nos compactos. Resta mostrar que λ é invariante por translação. Para isso, observe que*

$$\int_{\mathbb{R}} f(tx) \frac{dx}{|x|} = \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{dx}{|x|},$$

para qualquer $f \in L^1(G, \mu)$ e $t \in G$ (basta realizar a mudança de variável $w = tx$ e analisar os casos $t < 0$ e $t > 0$). Assim, dado $A \subseteq G$ mensurável, temos

$$\lambda(tA) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{tA}(x) \frac{dx}{|x|} = \int_{\mathbb{R}} \chi_A(tx) \frac{dx}{|x|} = \int_{\mathbb{R}} \chi_A(x) \frac{dx}{|x|} = \lambda(A),$$

para qualquer $t \in G$.

No resto desta seção, G será um grupo localmente compacto com uma medida de Haar invariante à esquerda λ . Assumiremos também que G é união enumerável de compactos e, portanto, o par (G, λ) constitui um espaço de medida σ -finito.

Observação 13. *A invariância à esquerda de λ é equivalente ao fato de que, para todo $t \in G$ e para toda função mensurável e não negativa f em G , temos*

$$\int_G f(tx) d\lambda(x) = \int_G f(x) d\lambda(x) \tag{1.3}$$

Note que a equação (1.3) é uma generalização do Exemplo (12).

Além disso (1.3) vale também para $f \in L^1(G)$. De fato, basta tomar uma sequência $\{f_n\}$ de funções mensuráveis e não negativas (por exemplo, as funções finitamente simples, que constituem um espaço denso em L^p , para $p < \infty$) de forma que $\|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0$. Isso implica que, para qualquer $t \in G$,

$$\begin{aligned} \int_G f(tx) d\lambda(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_G f_n(tx) d\lambda(x) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_G f_n(x) d\lambda(x) \\ &= \int_G f(x) d\lambda(x). \end{aligned}$$

Definição 14. Sejam $f, g \in L^1(G)$. Definimos a convolução $f * g$ por

$$(f * g)(x) = \int_G f(y)g(y^{-1}x)d\lambda(y) \quad (1.4)$$

Se $G = \mathbb{R}^n$ com a adição usual, então $y^{-1} = -y$, e a integral acima é escrita da seguinte forma:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y)dy.$$

Mostraremos agora que a convolução está bem definida. Pelo Teorema 8,

$$\begin{aligned} \int_G \int_G |f(y)||g(y^{-1}x)|d\lambda(y)d\lambda(x) &= \\ \int_G \int_G |f(y)||g(y^{-1}x)|d\lambda(x)d\lambda(y) &= \\ \int_G |f(y)| \int_G |g(y^{-1}x)|d\lambda(x)d\lambda(y) &= \\ \int_G |f(y)| \int_G |g(x)|d\lambda(x)d\lambda(y) &= \\ \|f\|_{L^1(G)}\|g\|_{L^1(G)} &< \infty, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_G (f * g)(x)d\lambda(x) < \infty.$$

Logo, $(f * g)$ está definido *q.t.p.*

Observação 15. Se fizermos a mudança de variáveis $z = x^{-1}y$, teremos $xz = y$ e $z^{-1} = (x^{-1}y)^{-1} = y^{-1}x$. Assim,

$$(f * g)(x) = \int_G f(y)g(y^{-1}x)d\lambda(y) = \int_G f(xz)g(z^{-1})d\lambda(z),$$

pois λ é invariante à esquerda.

Exemplo 16. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } |x| \leq 1 \\ 0, & \text{se } |x| > 1. \end{cases}$$

Dessa forma, temos

$$(f * f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)f(x - y)dy = \int_{[-1,1] \cap [x-1,x+1]} 1dy,$$

pois

$$f(x - y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x - 1 \leq y \leq x + 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Portanto

$$(f * f)(x) = \begin{cases} 2 + x, & \text{se } -2 < x < 0 \\ 2 - x, & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ 0, & \text{se } |x| \geq 2. \end{cases} = \begin{cases} 2 - |x|, & \text{se } |x| < 2 \\ 0, & \text{se } |x| \geq 2. \end{cases}$$

Observe que $f * f$ é uma função mais suave que f . De forma similar, podemos mostrar que $f * f * f$ é mais suave que $f * f$.

Sejam $f, g \in L^1(G)$. Por um cálculo semelhante àquele que mostra que a convolução está bem definida, mostramos que

$$\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1(G)} \|g\|_{L^1(G)}.$$

Isto é, a convolução de duas funções integráveis é também uma função integrável, com norma L^1 menor ou igual ao produto das normas L^1 de f e de g .

Duas desigualdades com convolução

A seguir, enunciaremos as desigualdades de Minkowski e de Young, que serão amplamente utilizadas ao longo do texto e que podem ser encontradas em [7].

Teorema 17. (Desigualdade de Minkowski) Seja $1 \leq p \leq \infty$. Para $f \in L^p(G)$ e $g \in L^1(G)$, $f * g$ existe λ -q.t.p e satisfaz

$$\|g * f\|_{L^p(G)} \leq \|g\|_{L^1(G)} \|f\|_{L^p(G)}.$$

Teorema 18. (Desigualdade de Young) Sejam p, q, r tais que $1 \leq p, q, r \leq \infty$ e

$$\frac{1}{q} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}.$$

Então para qualquer $f \in L^p(G)$ e qualquer $g \in L^r(G)$ que satisfaz $\|g\|_{L^r(G)} = \|\tilde{g}\|_{L^r(G)}$ ($\tilde{g}(x) = g(-x)$), $f * g$ existe λ -q.t.p e satisfaz

$$\|f * g\|_{L^q(G)} \leq \|g\|_{L^r(G)} \|f\|_{L^p(G)}.$$

1.3 Interpolação de Riesz-Thorin

O resultado que será estudado nesta seção é uma das principais ferramentas utilizadas para obter estimativas de operadores. Ele será exaustivamente usado nas seções seguintes. Sua importância se deve ao fato de que as estimativas de operadores em dois pontos do plano $\frac{1}{p} \times \frac{1}{q}$ garantem, na verdade, estimativas para o todo o segmento de reta que os une.

Teorema 19. (Interpolação de Riesz-Thorin) Sejam (X, μ) e (Y, ν) dois espaços de medida σ -finita. Seja T um operador linear definido no conjunto das funções finitamente simples em X e tomando valores no conjunto de funções mensuráveis definidas em Y . Sejam p_0, p_1, q_0 e q_1 tais que $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$ e suponha que

$$\|T(f)\|_{L^{q_0}} \leq M_0 \|f\|_{L^{p_0}},$$

$$\|T(f)\|_{L^{q_1}} \leq M_1 \|f\|_{L^{p_1}},$$

para todas as funções finitamente simples definidas em X . Então, para $0 < \theta < 1$, temos

$$\|T(f)\|_{L^q} \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|f\|_{L^p},$$

para todas as funções finitamente simples em X , em que

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \quad e \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Consequentemente, quando $p < \infty$, por densidade, T possui uma única extensão limitada de $L^p(X, \mu)$ para $L^q(Y, \nu)$.

Antes de demonstrarmos o teorema, precisaremos de alguns resultados.

Teorema 20. (Princípio do Módulo Máximo) *Sejam U aberto e conexo de \mathbb{C} e f holomorfa em U . Se existir um disco $D(a, r) \subset U$ tal que*

$$|f(z)| \leq |f(a)|,$$

para qualquer $z \in D(a, r)$, então f é constante em U .

Corolário 21. *Seja U aberto e limitado de \mathbb{C} . Seja $f : \bar{U} \rightarrow \mathbb{C}$ contínua em \bar{U} e holomorfa em U . Então*

$$\max\{|f(z)| : z \in \bar{U}\} = \max\{|f(z)| : z \in \partial U\}.$$

Lema 22. (Das Três Retas de Hadamard) *Seja F uma função complexa analítica na faixa aberta $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re}(z) < 1\}$ e contínua e limitada no fecho de S tal que $|F(z)| \leq B_0$, quando $\operatorname{Re}(z) = 0$, e $|F(z)| \leq B_1$, quando $\operatorname{Re}(z) = 1$. Então*

$$|F(z)| \leq B_0^{1-\theta} B_1^\theta,$$

para $\operatorname{Re}(z) = \theta$, $0 \leq \theta \leq 1$.

Demonstração. Considere as funções analíticas em S

$$G(z) = \frac{F(z)}{B_0^{1-z} B_1^z}$$

$$G_n(z) = G(z) e^{\frac{z^2-1}{n}},$$

em que $z \in S$ e $n \in \mathbb{N}$. Mostraremos que G é limitada em \bar{S} . Analisaremos, separadamente, os casos $\operatorname{Re}(z) = 0$, $0 < \operatorname{Re}(z) < 1$ e $\operatorname{Re}(z) = 1$.

(i) $\operatorname{Re}(z) = 0$ e $z = iy$

Temos

$$\begin{aligned} |B_0^{1-z} B_1^z| &= |B_0^{1-iy} B_1^{iy}| \\ &= B_0 |B_0^{-iy}| |B_1^{iy}| \\ &= B_0 |e^{-i \ln B_0^y}| |e^{i \ln B_1^y}| \\ &= B_0. \end{aligned}$$

$$\text{Assim, } |G(z)| = \left| \frac{F(z)}{B_0^{1-z} B_1^z} \right| \leq \frac{B_0}{B_0} = 1.$$

(ii) $0 < \operatorname{Re}(z) < 1$ e $z = x + iy$

Como F é limitada em \overline{S} , existe $m > 0$ tal que $|F(z)| \leq m$, para qualquer z satisfazendo $0 < \operatorname{Re}(z) < 1$. Note que

$$|B_0^{1-z} B_1^z| = B_0^{1-x} B_1^x |B_0^{-iy}| |B_1^{iy}| = B_0^{1-x} B_1^x = B_0 \left(\frac{B_1}{B_0} \right)^x$$

Se $\frac{B_1}{B_0} = 1$, então $|B_0^{1-z} B_1^z| = B_0$. Se $\frac{B_1}{B_0} > 1$, $\left(\frac{B_1}{B_0} \right)^x > 1$. Logo, $|B_0^{1-z} B_1^z| > B_0$.

Finalmente, se $0 < \frac{B_1}{B_0} < 1$, $\left(\frac{B_1}{B_0} \right)^x > \left(\frac{B_1}{B_0} \right)^1$. Isso implica que $|B_0^{1-z} B_1^z| = B_0 \left(\frac{B_1}{B_0} \right)^x > B_0 \frac{B_1}{B_0} = B_1$.

Logo, se $0 < \operatorname{Re}(z) < 1$, temos

$$|B_0^{1-z} B_1^z| \geq \min\{B_0, B_1\}.$$

E, portanto,

$$|G(z)| \leq \frac{|F(z)|}{|B_0^{1-z} B_1^z|} \leq \frac{m}{\min\{B_0, B_1\}}.$$

(iii) $\operatorname{Re}(z) = 1$ e $z = 1 + iy$

Temos

$$|B_0^{1-z} B_1^z| = |B_0^{-iy}| |B_1| |B_1^{iy}| = B_1$$

Dessa forma, $|G(z)| \leq \frac{B_1}{B_1} = 1$.

Isso mostra que G é limitada em \overline{S} por uma constante M . Logo, como $0 \leq x \leq 1$,

$$|G_n(x + iy)| \leq M |e^{\frac{(x^2 - 2ixy - y^2)}{n}}| = M e^{\frac{-y^2}{n}} e^{\frac{x^2 - 1}{n}} \leq M e^{\frac{-y^2}{n}},$$

o que implica que $G_n(x + iy) \rightarrow 0$ quando $|y| \rightarrow \infty$.

Assim, existe $y(n) > 0$ tal que $|G_n(x + iy)| \leq 1$ sempre que $|y| \geq y(n)$, para qualquer $x \in [0, 1]$. Além disso, observe que G é limitada por 1 nas duas retas que formam a fronteira de \overline{S} . Pelo Princípio do Módulo Máximo, concluímos que $|G_n(z)| \leq 1$ para todo z no retângulo $[0, 1] \times [-y(n), y(n)]$. Logo, $|G_n(z)| \leq 1$, para qualquer $z \in \overline{S}$. Fazendo $n \rightarrow \infty$, chegamos a conclusão de que $|G(z)| \leq 1$ para qualquer $z \in \overline{S}$. Seja $z = \theta + it$. Temos

$$|F(\theta + it)| \leq B_0^{1-\theta} B_1^\theta,$$

para $0 \leq \theta \leq 1$ e $t \in \mathbb{R}$. □

Dados $p, q \in]1, +\infty[$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então o Teorema de Representação de Riesz afirma que o mapa

$$L^q(X, \mathfrak{M}, \mu) \ni g \longmapsto \alpha_g \in L^p(X, \mathfrak{M}, \mu)^*, \quad (1.5)$$

em que

$$\alpha_g(f) = \int_X f g d\mu, \quad f \in L^p(X, \mathfrak{M}, \mu),$$

é uma isometria linear. Se $q = 1$ e $p = +\infty$, o mapa (1.5) é uma imersão isométrica, mas não é sobrejetor. Se, por outro lado, $q = +\infty$ e $p = 1$, o mapa (1.5) é uma isometria

linear no caso em que (X, \mathfrak{M}, μ) é σ -finito.

Nas hipóteses do Teorema 19, seja

$$\alpha : L^q(Y, \nu) \longrightarrow L^{q'}(Y, \nu)^*; f \longmapsto \alpha_f$$

tal que $\alpha_f(g) = \int_Y gf d\nu$. Pelo Teorema da Representação de Riesz, α é uma isometria linear e, portanto,

$$\|\alpha_f\|_{L^{q'}*} = \|f\|_{L^q}.$$

Assim, $\alpha_{Tf}(g) = \int_Y T(f)(y)g(y)d\nu(y)$, em que $g \in L^{q'}(Y, \nu)$. Como α é isometria, temos

$$\begin{aligned} \|Tf\|_{L^q} &= \|\alpha_{Tf}\|_{L^{q'}*} \\ &= \sup\{|\alpha_{Tf}(g)| : g \in L^{q'}, \|g\| \leq 1\} \\ &= \sup\left\{\left|\int_Y T(f)(y)g(y)d\nu(y)\right| : g \in L^{q'}, \|g\| \leq 1\right\}. \end{aligned}$$

Demonstração. (Teorema 19) Seja

$$f = \sum_{k=1}^m a_k e^{i\alpha_k} \chi_{A_k}$$

uma função finitamente simples em X , em que $a_k \in \mathbb{R}$, $a_k > 0$ e os conjuntos A_k são subconjuntos de X dois a dois disjuntos com μ -medida finita. Pelo Teorema de Representação de Riesz, temos

$$\|Tf\|_{L^q} = \sup\left\{\left|\int_Y T(f)(y)g(y)d\nu(y)\right| : g \text{ finitamente simples, } \|g\|_{L^{q'}} \leq 1\right\}$$

Seja

$$g = \sum_{j=1}^n b_j e^{i\beta_j} \chi_{B_j}$$

função finitamente simples, em que $b_j \in \mathbb{R}$, $b_j > 0$ e os conjuntos B_j são subconjuntos dois a dois disjuntos de Y com ν -medida finita.

Sejam $P(z) = \frac{p}{p_0}(1-z) + \frac{p}{p_1}z$ e $Q(z) = \frac{q'}{q'_0}(1-z) + \frac{q'}{q'_1}z$. Para z na faixa fechada $\bar{S} = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1\}$, defina

$$f_z = \sum_{k=1}^m a_k^{P(z)} e^{i\alpha_k} \chi_{A_k}; \quad g_z = \sum_{j=1}^n b_j^{Q(z)} e^{i\beta_j} \chi_{B_j}$$

$$F(z) = \int_Y T(f_z)(y)g_z(y)d\nu(y).$$

Observe que

$$P(\theta) = \frac{p}{p_0}(1-\theta) + \frac{p\theta}{p_1} = p\left(\frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}\right) = p \cdot \frac{1}{p} = 1 \quad e$$

$$\begin{aligned}
Q(\theta) &= \frac{q'}{q'_0}(1 - \theta) + \frac{q'\theta}{q'_1} \\
&= q' \left(\frac{1 - \theta}{q'_0} + \frac{\theta}{q'_1} \right) \\
&= q' \left[(1 - \theta) \left(1 - \frac{1}{q_0} \right) + \theta \left(1 - \frac{1}{q_1} \right) \right] \\
&= q' \left[1 - \left(\frac{1 - \theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1} \right) \right] \\
&= q' \left(1 - \frac{1}{q} \right) = q' \frac{1}{q} = 1.
\end{aligned}$$

Assim, $f_\theta = f$ e $g_\theta = g$. Por linearidade, temos

$$\begin{aligned}
F(z) &= \int_Y T(f_z)(y) g_z(y) d\nu(y) \\
&= \int_Y T \left(\sum_{k=1}^m a_k^{P(z)} e^{i\alpha_k} \chi_{A_k} \right) (y) \left(\sum_{j=1}^n b_j^{Q(z)} e^{i\beta_j} \chi_{B_j} \right) (y) d\nu(y) \\
&= \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n a_k^{P(z)} b_j^{Q(z)} e^{i\alpha_k} e^{i\beta_j} \int_Y T(\chi_{A_k})(y) \chi_{B_j}(y) d\nu(y).
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}
\int_Y |T(\chi_{A_k})(y) \chi_{B_j}(y) d\nu(y)| &= \|T(\chi_{A_k}) \chi_{B_j}\|_{L^1} \\
&\leq \|T(\chi_{A_k})\|_{L^{q_0}} \|\chi_{B_j}\|_{L^{q'_0}} \\
&\leq M_0 \|\chi_{A_k}\|_{L^{p_0}} \|\chi_{B_j}\|_{L^{q'_0}} \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

pois $\mu(A_k), \nu(B_j) < \infty$.

Isso implica que $\int_Y T(\chi_{A_k})(y) \chi_{B_j}(y) d\nu(y)$ é absolutamente convergente e, portanto, convergente. Como $a_k, b_j > 0$, F é analítica em S .

Agora, mostraremos que

$$\|f_{it}\|_{L^{p_0}} = \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{p_0}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

De fato, consideremos dois casos.

(i) $p_0 < \infty$

Note que $P(it) = \frac{p}{p_0}(1 - it) + \frac{p}{p_1}it = \frac{p}{p_0} - itp \left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1} \right)$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
|f_{it}(x)| &= \left| \sum_{k=1}^m a_k^{P(it)} e^{i\alpha_k} \chi_{A_k}(x) \right| \\
&= \left| \sum_{k=1}^m a_k^{\frac{p}{p_0} - itp \left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1} \right)} e^{i\alpha_k} \chi_{A_k}(x) \right| \\
&= \left| a_l^{\frac{p}{p_0} - itp \left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1} \right)} \right| \\
&= a_l^{\frac{p}{p_0}},
\end{aligned}$$

se $x \in A_l$ (se $\notin A_k$, para nenhum k , então $f_{it}(x) = 0$), pois os conjuntos A_k são disjuntos.

Por outro lado $|f(x)| = |a_l| = a_l$. Logo, $|f_{it}(x)| = |f(x)|^{\frac{p}{p_0}}$, para qualquer x . Assim,

$$\begin{aligned}\|f_{it}\|_{L^{p_0}} &= \left(\int_X |f_{it}(x)|^{p_0} d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p_0}} \\ &= \left[\left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \right]^{\frac{p}{p_0}} \\ &= \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{p_0}}.\end{aligned}$$

(ii) $p_0 = \infty$

Neste caso $P(it) = \frac{p}{p_1} it$. Logo, obtemos, para qualquer x ,

$$|f_{it}(x)| = \left| \sum_{k=1}^m a_k^{\frac{p}{p_1} it} e^{i\alpha_k} \chi_{A_k}(x) \right| \leq 1.$$

Portanto $\|f_{it}\|_{L^\infty} = 1$, o que implica que $\|f_{it}\|_{L^\infty} = \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{p_0}}$. Analogamente, como os conjuntos B_j são disjuntos,

$$\|g_{it}\|_{L^{q'_0}} = \|g\|_{L^{q'_1}}^{\frac{q'_1}{q'_0}},$$

inclusive quando $q_0 = 1$.

Pela desigualdade de Hölder e pelas hipóteses do teorema, temos

$$\begin{aligned}|F(it)| &= \left| \int_Y T(f_{it})(y) g_{it}(y) d\nu(y) \right| \\ &\leq \int_Y |T(f_{it})(y) g_{it}(y)| d\nu(y) \\ &\leq \|T f_{it}\|_{L^{q_0}} \|g_{it}\|_{L^{q'_0}} \\ &\leq M_0 \|f_{it}\|_{L^{p_0}} \|g_{it}\|_{L^{q'_0}} \\ &\leq M_0 \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{p_0}} \|g\|_{L^{q'_1}}^{\frac{q'_1}{q'_0}}.\end{aligned}\tag{1.6}$$

De forma análoga, concluimos que

$$\begin{aligned}\|f_{1+it}\|_{L^{p_1}} &= \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{p_1}} e \\ \|g_{1+it}\|_{L^{q'_1}} &= \|g\|_{L^{q'_1}}^{\frac{q'_1}{q'_1}}.\end{aligned}$$

Essas igualdades também são válidas nos casos $p_1 = \infty$ e $q_1 = 1$.

Dessa forma,

$$\begin{aligned}|F(1+it)| &\leq \int_Y |T(f_{1+it})(y) g_{1+it}(y)| d\nu(y) \\ &\leq \|T f_{1+it}\|_{L^{q_1}} \|g_{1+it}\|_{L^{q'_1}} \\ &\leq M_1 \|f_{1+it}\|_{L^{p_1}} \|g_{1+it}\|_{L^{q'_1}} \\ &\leq M_1 \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{p_1}} \|g\|_{L^{q'_1}}^{\frac{q'_1}{q'_1}}.\end{aligned}$$

Agora, observamos que F é analítica na faixa aberta S e contínua no seu fecho. Além disso F é limitada em \overline{S} (por uma constante que depende de f e g). Logo, pelo Lema 22,

$$\begin{aligned} |F(z)| &\leq \left(M_0 \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{p_0}} \|g\|_{L^{q'}}^{\frac{q'}{q_0}} \right)^{1-\theta} \cdot \left(M_1 \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{p_1}} \|g\|_{L^{q'}}^{\frac{q'}{q_1}} \right)^\theta \\ &= M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{q'}}, \end{aligned}$$

em que $Re(z) = \theta$. Como $P(\theta) = Q(\theta) = 1$, $F(\theta) = \int_Y T(f)g d\nu$. Isso implica que

$$\sup_g \left\{ \left| \int_Y T(f)(y)g(y) d\nu \right| : g \text{ finitamente simples, } \|g\|_{L^{q'}} \leq 1 \right\} \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|f\|_{L^p}.$$

Logo

$$\|Tf\|_{L^q} \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|f\|_{L^p}.$$

□

Capítulo 2

A Transformada de Fourier

2.1 O Espaço de Schwartz

A derivada parcial de uma função f em \mathbb{R}^n em relação à j -ésima variável será denotada por $\partial_j f$, e a derivada parcial de ordem m em relação à j -ésima variável será denotada por $\partial_j^m f$. Um multi-índice α é um vetor de \mathbb{R}^n cujas coordenadas são inteiros não negativos. Se $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ é um multi-índice, então $\partial^\alpha f$ representa a derivada $\partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n} f$. Além disso, o tamanho de α é definido por $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ e indica a ordem total de derivação de $\partial^\alpha f$. O espaço de funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em \mathbb{R}^n será representado por C_0^∞ . Para $x \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ multi-índice, definimos $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$.

Proposição 23. *Dados $x \in \mathbb{R}^n$ e α multi-índice,*

$$|x^\alpha| \leq C_{n,\alpha} |x|^{|\alpha|},$$

para alguma constante $C_{n,\alpha}$ que depende de n e de α .

Demonstração. Considere a função $\varphi : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = |x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}|.$$

Note que φ é contínua. Como \mathbb{S}^{n-1} é um compacto de \mathbb{R}^n , φ possui um valor máximo, que será denotado por $C_{n,\alpha}$. Assim,

$$|x^\alpha| \leq C_{n,\alpha}, \quad \forall x \in \mathbb{S}^{n-1}.$$

Agora seja $x \in \mathbb{R}^n - \mathbb{S}^{n-1}$, $x \neq 0$. Dessa forma, $\frac{x}{|x|} \in \mathbb{S}^{n-1}$ e, portanto,

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{x}{|x|} \right)^\alpha \right| &\leq C_{n,\alpha} \Leftrightarrow \\ \left| \left(\frac{x_1}{|x_1|} \right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{x_n}{|x_n|} \right)^{\alpha_n} \right| &\leq C_{n,\alpha} \Leftrightarrow \\ |x^\alpha| &\leq C_{n,\alpha} |x|^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} \Leftrightarrow \\ |x^\alpha| &\leq C_{n,\alpha} |x|^{|\alpha|}. \end{aligned}$$

□

Na proposição acima, a desigualdade contrária não é válida em geral. No entanto, temos a seguinte proposição.

Proposição 24. Para $k \in \mathbb{Z}^+$ e $x \in \mathbb{R}^n$, existe $C_{n,k}$ tal que

$$|x|^k \leq C_{n,k} \sum_{|\beta|=k} |x^\beta|.$$

Demonstração. Defina a função contínua $\psi : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\psi(x) = \sum_{|\beta|=k} |x^\beta|$. Ela possui um mínimo, que é diferente de zero pois a função não se anula. Seja $\frac{1}{C_{n,k}}$ tal mínimo. Assim, para qualquer $x \in \mathbb{S}^{n-1}$,

$$\sum_{|\beta|=k} |x^\beta| \geq \frac{1}{C_{n,k}}.$$

Para $x \in \mathbb{R}^n - [\mathbb{S}^{n-1} \cup \{0\}]$, $\frac{x}{|x|} \in \mathbb{S}^{n-1}$. Logo,

$$\begin{aligned} \sum_{|\beta|=k} \left| \left(\frac{x}{|x|} \right)^\beta \right| &\geq \frac{1}{C_{n,k}} \Leftrightarrow \\ \sum_{|\beta|=k} \frac{|x^\beta|}{|x|^{|\beta|}} &\geq \frac{1}{C_{n,k}} \Leftrightarrow \\ \frac{1}{|x|^k} \sum_{|\beta|=k} |x^\beta| &\geq \frac{1}{C_{n,k}} \Leftrightarrow \\ |x|^k &\leq C_{n,k} \sum_{|\beta|=k} |x^\beta|. \end{aligned}$$

□

Uma desigualdade relacionada é a seguinte

$$(1 + |x|)^k \leq 2^k (1 + C_{n,k}) \sum_{|\beta| \leq k} |x^\beta|. \quad (2.1)$$

De fato, como $\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} = 2^n$, segue da Proposição 24 que

$$\begin{aligned} (1 + |x|)^k &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} |x|^j \\ &\leq 2^k \sum_{j=0}^k |x|^j \\ &= 2^k + 2^k \sum_{j=1}^k |x|^j \\ &\leq 2^k + 2^k \sum_{j=1}^k C_{n,j} \sum_{|\beta|=j} |x^\beta| \\ &= 2^k + 2^k \sum_{|\beta| \leq k} C_{n,|\beta|} |x^\beta| \\ &\leq 2^k (1 + C_{n,k}) \sum_{|\beta| \leq k} |x^\beta|. \end{aligned}$$

Definição 25. Uma função f a valores complexos, definida em \mathbb{R}^n e de classe C^∞ , é chamada de função de Schwartz se, para quaisquer multi-índices α e β ,

$$\rho_{\alpha,\beta}(f) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < \infty.$$

O espaço formado por essas funções, chamado espaço de Schwartz, será denotado por $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Observação 26. De forma alternativa, podemos caracterizar o espaço de Schwartz da seguinte maneira. Uma função $f \in C^\infty$ pertence a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se, para todo inteiro positivo N e para todo multi-índice α , existe uma constante $C_{\alpha,N} > 0$ tal que

$$|(\partial^\alpha f)(x)| \leq C_{\alpha,N} (1 + |x|)^{-N}.$$

Com efeito, se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $C_{\alpha,\beta} \doteq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < \infty$, para quaisquer multi-índices α, β . Dessa forma, dado $x \in \mathbb{R}^n$, $|x^\alpha \partial^\beta f(x)| \leq C_{\alpha,\beta}$. Portanto, para todo inteiro positivo N ,

$$\begin{aligned} (1 + |x|)^N |\partial^\beta f(x)| &\leq 2^N (1 + C_{n,N}) \sum_{|\gamma| \leq N} |x^\gamma| |\partial^\beta f(x)| \\ &\leq 2^N (1 + C_{n,N}) \sum_{|\gamma| \leq N} C_{\gamma,\beta} \doteq C_{\beta,N}. \end{aligned}$$

Logo,

$$|\partial^\beta f(x)| \leq C_{\beta,N} (1 + |x|)^{-N}.$$

Agora, mostraremos a recíproca. Sejam α e β multi-índices e $x \in \mathbb{R}^n$. Pela Proposição 23, temos

$$\begin{aligned} |x^\beta \partial^\alpha f(x)| &= |x^\beta| |\partial^\alpha f(x)| \\ &\leq C_{n,\beta} |x|^{|\beta|} |\partial^\alpha f(x)| \\ &\leq C_{n,\beta} (1 + |x|)^{|\beta|} |\partial^\alpha f(x)| \\ &\leq C_{n,\beta} (1 + |x|)^{|\beta|} C_{\alpha,|\beta|} (1 + |x|)^{-|\beta|} \\ &= C_{n,\beta} C_{\alpha,|\beta|}. \end{aligned}$$

Isso mostra que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Exemplo 27. Um exemplo simples de uma função em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ é a Gaussiana definida por $f(x) = e^{-x^2}$. É fácil verificar que as derivadas de f são da forma $P(x)e^{-x^2}$, em que P é um polinômio. Isso mostra que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Na verdade, se a é um número positivo, $e^{-ax^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Por outro lado, a função $e^{-|x|}$ não pertence a $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, pois não é diferenciável na origem, embora decresça rapidamente no infinito.

Proposição 28. Sejam $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Então $f \cdot g, f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Além disso, para qualquer multi-índice α ,

$$\partial^\alpha (f * g) = (\partial^\alpha f) * g = f * (\partial^\alpha g).$$

Definição 29. Seja $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e considere a sequência $\{f_k\}_k \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dizemos que a sequência converge para f em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se, para quaisquer multi-índices α e β ,

$$\rho_{\alpha,\beta}(f_k - f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha (\partial^\beta (f_k - f))(x)| \longrightarrow 0, \text{ quando } k \longrightarrow \infty.$$

Definição 30. Seja X um espaço vetorial sobre \mathbb{K} (\mathbb{R} ou \mathbb{C}). Uma função $\rho : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é chamada seminorma em X se satisfaz as seguintes propriedades:

1. ρ é não negativa;
2. Se $\lambda \in \mathbb{K}$ e $x \in X$, $\rho(\lambda x) = |\lambda| \rho(x)$ (em particular $\rho(0) = 0$);
3. Se $x, y \in X$, $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$.

Proposição 31. Dados multi-índices α e β a função $\rho_{\alpha,\beta} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma seminorma.

Observação 32. Se uma seminorma ρ , definida no espaço X , é positiva definida, isto é,

$$\rho(x) = 0 \implies x = 0, \forall x \in X,$$

então ρ é uma norma.

Definição 33. Um espaço localmente convexo é um espaço vetorial X munido de uma família de seminormas definidas em X .

Agora, construiremos, a partir das seminormas $\rho_{\alpha,\beta}$, a topologia do espaço $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ que é compatível com a noção de convergência da Definição 29.

Uma subbase A em torno da origem é dada pelos conjuntos

$$\{f \in \mathcal{S} : \rho_{\alpha,\beta}(f) < r\},$$

em que α, β são multi-índices e $r \in \mathbb{Q}^+$. Usando as propriedades de seminormas, podemos mostrar que os conjuntos de A são convexos. Essa subbase gera uma base em torno da origem, que é a coleção de interseções finitas de elementos de A . Como a interseção de conjuntos convexos é um conjunto convexo, a topologia que definimos ao redor da origem é localmente convexa. Observe que, pelo fato de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ser um espaço vetorial, é suficiente definir a topologia ao redor da origem. De fato, dado $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, B é uma vizinhança da origem se, e somente se, $f + B$ é uma vizinhança de f .

Nessa topologia, as operações

$$(f, g) \longmapsto f + g; (a, f) \longmapsto af; f \longmapsto \partial^\alpha f$$

são contínuas, para quaisquer $a \in \mathbb{C}$, α e β multi-índices e $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dessa forma, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é um espaço vetorial topológico localmente convexo. Além disso, a função

$$d(f, g) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \frac{\rho_j(f - g)}{1 + \rho_j(f - g)},$$

em que ρ_j é uma enumeração de todas as seminormas $\rho_{\alpha,\beta}$, é uma métrica que gera a topologia definida anteriormente. Logo, o espaço $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é metrizável. Como $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), d)$ é completo, dizemos que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é um *Espaço de Fréchet*, isto é, metrizável, completo e localmente convexo.

Proposição 34. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Demonstração. Se $p = \infty$, seja $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Para quaisquer multi-índices α, β e para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$, existe uma constante $C > 0$ tal que $|x^\alpha \partial^\beta f(x)| \leq C$. Escolha $\alpha = \beta = (0, \dots, 0)$. Assim $|f(x)| \leq C$ e, portanto, $f \in L^\infty$.

Se $p < \infty$, pela Observação 26, temos

$$|f(x)| \leq C \left(\frac{1}{1 + |x|} \right)^N,$$

em que $N > \frac{n}{p}$. Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + |x|)^{Np}} dx < \infty$$

Isso mostra que $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. □

Proposição 35. Sejam $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $\{f_k\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Se $f_k \rightarrow f$ em \mathcal{S} , então $f_k \rightarrow f$ em L^p , para todo $p \in [1, \infty]$. Além disso, existe uma constante $C_{p,n} > 0$ tal que

$$\|\partial^\beta f\|_{L^p} \leq C_{p,n} \sum_{|\alpha| \leq [\frac{n+1}{p}] + 1} \rho_{\alpha,\beta}(f).$$

Demonstração. Para $p < \infty$, temos

$$\begin{aligned} \|\partial^\beta f\|_{L^p} &= \left(\int |\partial^\beta f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left[\int_{|x| \leq 1} |\partial^\beta f(x)|^p dx + \int_{|x| \geq 1} |x|^{n+1} |\partial^\beta f(x)|^p |x|^{-(n+1)} dx \right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left[v_n \rho_{0,\beta}(f)^p + \sup_{|x| \geq 1} |x|^{n+1} |\partial^\beta f(x)|^p \int_{|x| \geq 1} |x|^{-(n+1)} dx \right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C_{p,n} \left(\rho_{0,\beta}(f) + \sup_{|x| \geq 1} |x|^{[\frac{n+1}{p}] + 1} |\partial^\beta f(x)| \right). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Defina $m = [\frac{n+1}{p}] + 1$. Sabemos que

$$|x|^k \leq C_{n,k} \sum_{|\beta|=k} |x^\beta|.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \sup_{|x| \geq 1} |x|^m |\partial^\beta f(x)| &\leq \sup_{|x| \geq 1} C_{n,m} \sum_{|\alpha|=m} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| \\ &\leq C_{n,m} \sum_{|\alpha| \leq m} \rho_{\alpha,\beta}(f). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Das equações (2.2) e (2.3), conclui-se que

$$\|\partial^\beta f\|_{L^p} \leq \sum_{|\alpha| \leq [\frac{n+1}{p}] + 1} \rho_{\alpha,\beta}(f).$$

Agora, se $p = \infty$, temos $|\partial^\beta f(x)| \leq \rho_{0,\beta}(f)$, para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$. Logo, $\|\partial^\beta f\|_{L^\infty} \leq \rho_{0,\beta}(f)$. □

Proposição 36. $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Sejam $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\psi(x) = 1$, se $|x| \leq 1$ e $0 \leq \psi \leq 1$. Para $n \in \mathbb{N}$, defina

$$\psi_n(x) = \psi\left(\frac{x}{n}\right) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Fixados α e β multi-índices, temos

$$C(\psi, \beta) \doteq \max_{\gamma \leq \beta} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\partial^\gamma \psi(x)| < \infty.$$

Para $\gamma \leq \beta$,

$$\partial^\gamma \psi_n(x) = \frac{1}{n^{|\gamma|}} (\partial^\gamma \psi)\left(\frac{x}{n}\right).$$

Então

$$\sup_{\mathbb{R}^n} |\partial^\gamma \psi_n(x)| \leq \frac{1}{n^{|\gamma|}} C(\psi, \beta).$$

Pela regra de Leibniz, temos

$$\partial^\beta (f\psi_n)(x) = \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} (\partial^{\beta-\gamma} f)(x) (\partial^\gamma \psi_n)(x),$$

em que $\binom{\beta}{\gamma} = \binom{\beta_1}{\gamma_1} \dots \binom{\beta_n}{\gamma_n}$. Assim

$$\partial^\beta (f\psi_n) = \sum_{\gamma \leq \beta; \gamma \neq 0} \binom{\beta}{\gamma} (\partial^{\beta-\gamma} f)(x) (\partial^\gamma \psi_n)(x) + (\partial^\beta f)(x) \psi_n(x).$$

Isso implica que

$$\begin{aligned} & |\partial^\beta (f\psi_n)(x) - (\partial^\beta f)(x)| = \\ & \left| \left(\sum_{\gamma \leq \beta; \gamma \neq 0} \binom{\beta}{\gamma} (\partial^{\beta-\gamma} f)(x) (\partial^\gamma \psi_n)(x) + (\partial^\beta f)(x) (\psi_n(x) - 1) \right) \right| \leq \\ & \left| \sum_{\gamma \leq \beta; \gamma \neq 0} \binom{\beta}{\gamma} C(\psi, \beta) \frac{1}{n^{|\gamma|}} (\partial^{\beta-\gamma} f)(x) \right| + |(\partial^\beta f)(x) (\psi_n(x) - 1)| \leq \\ & \frac{1}{n} C(\psi, \beta) \sum_{\gamma \leq \beta; \gamma \neq 0} \binom{\beta}{\gamma} |(\partial^{\beta-\gamma} f)(x)| + |(\partial^\beta f)(x) (\psi_n(x) - 1)|. \end{aligned}$$

Se $|x| \leq n$, $\psi_n(x) = 1$. Para $|x| > n$,

$$\begin{aligned} |(\partial^\beta f)(x) (\psi_n(x) - 1)| & \leq (1 + \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\psi(x)|) \frac{1 + |x|}{n} |(\partial^\beta f)(x)| \\ & \leq \frac{2}{n} (1 + |x|) |(\partial^\beta f)(x)|. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} & \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta (f\psi_n - f)(x)| \leq \\ & \frac{2}{n} (1 + |x|) |x^\alpha (\partial^\beta f)(x)| + \frac{1}{n} C(\psi, \beta) \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} |x^\alpha (\partial^{\beta-\gamma} f)(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

pois

$$x^\alpha(1 + |x|)(\partial^\beta f)(x) \in S \text{ e}$$

$$\sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} x^\alpha (\partial^{\beta-\gamma} f)(x) \in S.$$

□

2.2 A Transformada de Fourier de funções em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

As funções de Schwartz, em razão de seu rápido decaimento no infinito, são apropriadas para as definições que envolvem integrais. Nesse sentido, definiremos, inicialmente, a transformada de Fourier como um operador $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e, dessa maneira, poderemos derivar uma série de propriedades úteis sem nos preocupar com problemas de convergência. É importante dizer, entretanto, que poderíamos definir a transformada de Fourier em outros espaços, como L^1 e L^2 .

Definição 37. Dada $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, definimos

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix \cdot \xi} dx.$$

Chamamos \hat{f} de transformada de Fourier de f .

É também usual denotar a transformada de Fourier de uma função $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ por $\mathfrak{F}(f)$, em que $\mathfrak{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é definida por

$$\mathfrak{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix \cdot \xi} dx.$$

Exemplo 38. Se $f(t) = e^{-at^2}$, definida em \mathbb{R} e para $a > 0$, então $\hat{f}(\tau) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\tau^2}{4a}}$. Portanto, a transformada de Fourier de uma Gaussiana é também uma Gaussiana. Com efeito, observe inicialmente que a função definida na reta

$$g(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sqrt{at}+is)^2} dt$$

é constante. De fato, dado $s \in \mathbb{R}$, temos

$$g'(s) = \int_{-\infty}^{\infty} -2i(\sqrt{at} + is)e^{-(\sqrt{at}+is)^2} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{\sqrt{a}} \frac{d}{dt} (e^{-(\sqrt{at}+is)^2}) dt = 0.$$

Logo,

$$g(s) = g(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

pois $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} = \sqrt{\pi}$.

Agora, calcularemos a transformada de Fourier de $t \mapsto e^{-at^2}$ em \mathbb{R} .

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{-at^2} \cdot e^{-it\tau} dt &= \int_{\mathbb{R}} e^{-(at^2 + it\tau)} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-(\sqrt{a}t + \frac{i\tau}{2\sqrt{a}})^2} \cdot e^{(\frac{i\tau}{2\sqrt{a}})^2} dt \\ &= e^{-\frac{\tau^2}{4a}} \int_{\mathbb{R}} e^{-at^2} dt \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\tau^2}{4a}}, \end{aligned}$$

Observação 39. Da definição de transformada de Fourier e do Teorema de Fubini (veja o Teorema 8), segue que, se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, então a função $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$, definida por

$$h(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) = f(x_1, \dots, x_n)g(x_{n+1}, \dots, x_{n+m}),$$

é tal que $\widehat{h} = \widehat{f}\widehat{g}$.

Exemplo 40. É fácil mostrar, utilizando o Exemplo 38 e a Observação 39, que, se $f(x) = e^{-a|x|^2}$, para $x \in \mathbb{R}^n$, então $\widehat{f}(\xi) = \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^n} e^{-\frac{|\xi|^2}{4a}}$.

Vamos agora demonstrar algumas propriedades da transformada de Fourier. Sejam f uma função mensurável definida em \mathbb{R}^n , $x \in \mathbb{R}^n$ e $a > 0$. Definamos a translação (por um vetor $y \in \mathbb{R}^n$), a dilatação e a reflexão de f , respectivamente, por:

$$(\tau^y f)(x) = f(x - y);$$

$$(\delta^a f) = f(ax);$$

$$\widetilde{f}(x) = f(-x).$$

Definição 41. Dados $\epsilon > 0$ e uma função g , definida em \mathbb{R}^n , denotamos por g_ϵ a seguinte função

$$g_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} g(\epsilon^{-1}x).$$

Proposição 42. Dadas $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $y \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{C}$, α multi-índice e $t > 0$, temos

$$(1) \|\widehat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1};$$

$$(2) \widehat{f+g} = \widehat{f} + \widehat{g};$$

$$(3) \widehat{bf} = b\widehat{f};$$

$$(4) \widehat{\widetilde{f}} = \widetilde{\widehat{f}};$$

$$(5) \widehat{\tau^y f}(\xi) = e^{-i\xi \cdot y} \widehat{f}(\xi);$$

$$(6) (e^{ix \cdot y} f(x))^\widehat{(\xi)} = \tau^y(\widehat{f})(\xi);$$

$$(7) (\delta^t f)\widehat{=} = t^{-n} \delta^{t-1} \widehat{f} = (\widehat{f})_t;$$

$$(8) (\partial^\alpha f)\widehat{=}(\xi) = (i\xi)^\alpha \widehat{f}(\xi);$$

$$(9) (\partial^\alpha \widehat{f})(\xi) = ((-ix)^\alpha f(x))\widehat{=}(\xi);$$

$$(10) \widehat{f} \in \mathcal{S};$$

$$(11) \widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}.$$

Demonstração. (1) Dado $\xi \in \mathbb{R}^n$, temos que

$$|\widehat{f}(\xi)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx = \|f\|_{L^1}.$$

Logo,

$$\|\widehat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}.$$

As propriedades (2) – (4) seguem diretamente das definições.

(5) Fazendo a mudança de variáveis $w = x - y$, temos

$$\begin{aligned} \widehat{\tau^y f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} (\tau^y f)(x) e^{-ix \cdot \xi} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) e^{-ix \cdot \xi} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(w) e^{-i(w+y) \cdot \xi} dw \\ &= e^{-i\xi \cdot y} \int_{\mathbb{R}^n} f(w) e^{-iw \cdot \xi} dw \\ &= e^{-i\xi \cdot y} \widehat{f}(\xi). \end{aligned}$$

(6) Temos

$$\begin{aligned} (e^{ix \cdot y} f(x))\widehat{=}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot y} f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix \cdot (\xi - y)} dx \\ &= \widehat{f}(\xi - y) \\ &= (\tau^y \widehat{f})(\xi). \end{aligned}$$

(7) Fazendo a mudança de variáveis $tx = w$, obtemos

$$\begin{aligned} (\delta^t f)\widehat{=}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(tx) e^{-ix \cdot \xi} dx \\ &= t^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f(w) e^{-iw \cdot \frac{\xi}{t}} dw \\ &= t^{-n} \widehat{f}\left(\frac{\xi}{t}\right) \\ &= t^{-n} \delta^{t-1} \widehat{f}(\xi) \\ &= (\widehat{f})_t(\xi). \end{aligned}$$

(8) Integrando por partes, chega-se a

$$\begin{aligned}
(\partial^\alpha f)^\wedge(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} (\partial^\alpha f)(x) e^{-ix \cdot \xi} dx \\
&= (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \partial^\alpha (e^{-ix \cdot \xi}) dx \\
&= (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix \cdot \xi} \partial^\alpha (-ix \cdot \xi) dx \\
&= (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} (-i\xi)^\alpha f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx \\
&= (i\xi)^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx \\
&= (i\xi)^\alpha \widehat{f}(\xi).
\end{aligned}$$

(9) Seja $\alpha = e_j$. Como

$$\partial_\xi^\alpha (e^{-ix \cdot \xi}) = \frac{\partial}{\partial \xi_j} (e^{-ix \cdot \xi}) = -ix_j e^{-ix \cdot \xi},$$

segue que, quando $h \rightarrow 0$,

$$\frac{e^{-ix \cdot (\xi + he_j)} - e^{-ix \cdot \xi}}{h} - (-ix_j) e^{-ix \cdot \xi} \rightarrow 0. \quad (2.4)$$

Além disso, a função em (2.4) é limitada por $C|x|$, para quaisquer h, ξ , $h \neq 0$. De fato, para todo ξ , existe $\delta > 0$ de forma que, se $0 < |h| < \delta$, então

$$\left| \frac{e^{-ix \cdot (\xi + he_j)} - e^{-ix \cdot \xi}}{h} - (-ix_j) e^{-ix \cdot \xi} \right| < |x|.$$

Agora, se $|h| \geq \delta$ e x é diferente de zero, existe $C > 0$ tal que

$$\frac{1}{|h|} \leq \frac{1}{\delta} \leq C|x|.$$

Logo,

$$\left| \frac{e^{-ix \cdot (\xi + he_j)} - e^{-ix \cdot \xi}}{h} - (-ix_j) e^{-ix \cdot \xi} \right| \leq \frac{2}{|h|} + |x| \leq 2C|x| + |x| \leq \tilde{C}|x|. \quad (2.5)$$

Observe ainda que, como $f \in \mathcal{S}$, a função $x \rightarrow xf(x)$ pertence a \mathcal{S} e, portanto, a $L^1(\mathbb{R}^n)$. Dessa forma $\tilde{C}|x|$ é integrável na medida $f(x)dx$. Pelo teorema da convergência dominada, quando $h \rightarrow 0$,

$$\left| \frac{\int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix \cdot (\xi + he_j)} dx - \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx}{h} - \int_{\mathbb{R}^n} (-ix_j) f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx \right| \rightarrow 0. \quad (2.6)$$

Isso mostra o que queríamos, no caso em que $\alpha = e_j$. Por indução, mostra-se o resultado para os outros multi-índices α .

(10) Dado um multi-índice β , usando (1), (8) e (9), temos

$$\begin{aligned}
\|\xi^\alpha(\partial^\beta \widehat{f})(\xi)\|_{L^\infty} &= \|\xi^\alpha((-ix)^\beta f(x))\widehat{(\cdot)}(\xi)\|_{L^\infty} \\
&= \|(i\xi)^\alpha((-ix)^\beta f(x))\widehat{(\cdot)}(\xi)\|_{L^\infty} \\
&= \|(\partial^\alpha((-ix)^\beta f(x)))\widehat{(\cdot)}\|_{L^\infty} \\
&\leq \|\partial^\alpha(x^\beta f(x))\|_{L^1} \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

pois $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

(11) Pelo teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}
\widehat{f * g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} f * g(x)e^{-ix \cdot \xi} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)e^{-ix \cdot \xi} dy dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)e^{-i(x-y) \cdot \xi} e^{-iy \cdot \xi} dy dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)e^{-i(x-y) \cdot \xi} dx e^{-iy \cdot \xi} dy \\
&= \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi).
\end{aligned}$$

□

Proposição 43. *O operador $\mathfrak{F} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ é contínuo.*

Demonstração. Sejam $\{f_k\}_k \subset \mathcal{S}$ e $f \in \mathcal{S}$ de forma que $f_k \longrightarrow f$ em \mathcal{S} , ou seja, $x^\alpha \partial^\beta (f_k(x) - f(x)) \longrightarrow 0$ uniformemente, para quaisquer α e β multi-índices. Logo, de forma análoga ao que foi feito (10), temos

$$\begin{aligned}
\|\xi^\alpha \partial^\beta (\widehat{f_k}(\xi) - \widehat{f}(\xi))\|_{L^\infty} &\leq \|\partial_x^\alpha (x^\beta (f_k(x) - f(x)))\|_{L^1} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\partial_x^\alpha (x^\beta (f_k(x) - f(x)))| dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{(1+|x|)^{n+1}}{(1+|x|)^{n+1}} \partial_x^\alpha (x^\beta (f_k(x) - f(x))) \right| dx \\
&\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |(1+|x|)^{n+1} \partial_x^\alpha (x^\beta (f_k(x) - f(x)))| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|)^{n+1}} dx \\
&\longrightarrow 0, \quad k \longrightarrow +\infty.
\end{aligned}$$

Isso implica que $\xi^\alpha \partial^\beta (\widehat{f_k}(\xi) - \widehat{f}(\xi)) \longrightarrow 0$ uniformemente. Portanto, $\widehat{f_k} \longrightarrow \widehat{f}$ em \mathcal{S} . □

Agora, definiremos a transformada de Fourier inversa.

Proposição 44. *A transformada de Fourier \mathfrak{F} é continuamente inversível e*

$$\mathfrak{F}^{-1}(\phi)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \phi(\xi) d\xi, \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração. Sejam $0 < \epsilon < 1$ e

$$\phi_\epsilon(x) = \phi_1(\epsilon x),$$

em que $\phi_1(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}}$. Pelo Exemplo 40, $\widehat{\phi}_1(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\phi_1(\xi)$ e então, fazendo $\epsilon x = y$

$$\begin{aligned}\widehat{\phi}_\epsilon(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} \phi_\epsilon(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} \phi_1(\epsilon x) dx \\ &= \frac{1}{\epsilon^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy \cdot \frac{\xi}{\epsilon}} \phi_1(y) dy \\ &= \frac{1}{\epsilon^n} \widehat{\phi}_1\left(\frac{\xi}{\epsilon}\right) \\ &= \frac{1}{\epsilon^n} (2\pi)^{\frac{n}{2}} \phi_1\left(\frac{\xi}{\epsilon}\right).\end{aligned}$$

Assim, dada $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, segue, por Fubini, que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \phi_\epsilon(\xi) e^{ix \cdot \xi} \widehat{\psi}(\xi) d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\epsilon(\xi) e^{ix \cdot \xi} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy \cdot \xi} \psi(y) dy d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y) \cdot \xi} \phi_\epsilon(\xi) \psi(y) d\xi dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\phi}_\epsilon(y-x) \psi(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x+z) \widehat{\phi}_\epsilon(z) dz \\ &= \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\epsilon^n} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x+z) \phi_1\left(\frac{z}{\epsilon}\right) dz \\ &= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x+\epsilon y) \phi_1(y) dy.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Observe que

$$|\phi_\epsilon(\xi) e^{ix \cdot \xi} \widehat{\psi}(\xi)| \leq |\widehat{\psi}(\xi)| \in L^1_\xi(\mathbb{R}^n)$$

e

$$|\psi(x+\epsilon y) \phi_1(y)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\psi(x)| |\phi_1(y)| \in L^1_y.$$

Além disso, quando $\epsilon \rightarrow 0$, temos $\phi_\epsilon(\xi) \rightarrow 1$ e $\psi(x+\epsilon y) \rightarrow \psi(x)$. Logo, aplicando o teorema da convergência dominada ao lado esquerdo de (2.7), tem-se

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\epsilon(\xi) e^{ix \cdot \xi} \widehat{\psi}(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \widehat{\psi}(\xi) d\xi.\tag{2.8}$$

Aplicando novamente o teorema da convergência dominada ao lado direito de (2.7), chega-se a

$$(2\pi)^{\frac{n}{2}} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x+\epsilon y) \phi_1(y) dy = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \psi(x) \int_{\mathbb{R}^n} \phi_1(y) dy = (2\pi)^n \psi(x),\tag{2.9}$$

pois

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi_1(y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{2}} = (2\pi)^{\frac{n}{2}}.$$

Logo, comparando (2.8) e (2.9), temos

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \widehat{\psi}(\xi) d\xi.$$

A demonstração de que \mathfrak{F}^{-1} é contínua é análoga à demonstração da continuidade de \mathfrak{F} . \square

Corolário 45. *A transformada de Fourier $\mathfrak{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é um homeomorfismo.*

Também é usual representar a transformada de Fourier inversa de uma função $f \in \mathcal{S}$ por \check{f} ou \widetilde{f} .

Teorema 46. *Sejam f, g e h funções de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Valem:*

$$(1) \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \widehat{g}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x) g(x) dx;$$

$$(2) \text{ (Identidade de Parseval) } \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{\widehat{h}(x)} dx = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{h}(\xi)} d\xi;$$

$$(3) \text{ (Identidade de Plancherel) } \|f\|_{L^2} = \frac{1}{(2\pi)^n} \|\widehat{f}\|_{L^2} = \|\check{f}\|_{L^2};$$

$$(4) \int_{\mathbb{R}^n} f(x) h(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x) \check{h}(x) dx.$$

Demonstração. (1) Pela definição de transformada de Fourier e por Fubini, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \widehat{g}(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \int_{\mathbb{R}^n} g(y) e^{-ix \cdot y} dy dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(y) e^{-ix \cdot y} dy dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix \cdot y} dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \widehat{f}(y) dy. \end{aligned}$$

(2) Observe que

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx = \check{f}(-\xi).$$

Assim

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \widehat{f} = \check{\check{f}}.$$

Além disso, é fácil ver que, se $f \in \mathcal{S}$, $\widehat{\widehat{f}} = \check{\check{f}}$. Agora, seja $g = \widehat{h}$. Então

$$\widehat{g} = \widehat{\widehat{h}} = \check{\check{\widehat{h}}} = (2\pi)^n \check{\check{\check{h}}} = (2\pi)^n \overline{h}.$$

Logo, por (1), temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{h(x)} &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{g}(x) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)g(x)dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)\overline{\widehat{h}(x)}dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{h}(\xi)}d\xi.
\end{aligned}$$

(3) A identidade de Plancherel é uma aplicação da Identidade de Parseval. Com efeito

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^2} &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{f(x)} dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{f}(\xi)} d\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \|\widehat{f}\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Analogamente, mostra-se que $\|\check{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$.

(4) Seja $h = \widehat{g}$. Usando (1), temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f(x)h(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{g}(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)g(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)\check{h}(x)dx.
\end{aligned}$$

□

Na observação a seguir, como feito em [7], na seção 2.2.4, definiremos a transformada de Fourier de funções em $L^1(\mathbb{R}^n)$ e em $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Observação 47. Podemos definir a transformada de Fourier de funções em $L^1(\mathbb{R}^n)$ como na Definição 37, isto é,

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix \cdot \xi} dx,$$

que é convergente. Se f e g são integráveis, as propriedades (1) – (8) e (11), da Proposição 42, são satisfeitas. Definimos também, se $f \in L^1$,

$$\check{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)e^{ix \cdot \xi} d\xi,$$

e as propriedades análogas são válidas. O problema com essa definição é que se $f \in L^1$, não podemos garantir que $\hat{f} \in L^1$. Com efeito, qualquer função cuja transformada de Fourier está em L^1 deve ser igual a uma função contínua q.t.p., pois $\mathfrak{F}^{-1}(\mathfrak{F}(f)) = f$ q.t.p.. Dessa forma, a função $f(x) = \chi_{[-1,1]}(x)$ pertence a L^1 , mas sua transformada de Fourier não pertence a L^1 .

Se $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, a integral na definição da transformada de Fourier não converge absolutamente. No entanto, pela identidade de Parseval, a transformada de Fourier é uma isometria de L^2 em $L^1 \cap L^2$, que é um subespaço denso de L^2 . Dessa forma, existe uma única extensão da transformada de Fourier em L^2 . Dada uma sequência $f_N \in L^1 \cap L^2$ que converge para $f \in L^2$, temos

$$\|\hat{f}_N - \mathfrak{F}(f)\|_{L^2} \longrightarrow 0, \text{ quando } N \rightarrow \infty.$$

Em particular, a sequência de funções $f_N(x) = f(x)\chi_{|x| \leq N}$ é tal que

$$\hat{f}_N(\xi) = \int_{|x| \leq N} f(x)e^{-ix \cdot \xi} dx \quad (2.10)$$

converge para $\mathfrak{F}(f)(\xi)$ em L^2 para $N \rightarrow \infty$, pois $f_N \in L^2$ e, por Hölder, $f_N \in L^1$. Se $f \in L^1 \cap L^2$, a integral 2.10 converge pontualmente para $\hat{f}(\xi)$. Além disso, existe uma subsequência de f_N que converge pontualmente q.t.p. para $\mathfrak{F}(f)$. Consequentemente, para $f \in L^1 \cap L^2$, \hat{f} e $\mathfrak{F}(f)$ coincidem q.t.p. De forma análoga, existe a transformada de Fourier inversa $\mathfrak{F}^{-1} : L^2 \rightarrow L^2$ e vale $\mathfrak{F}^{-1} \circ \mathfrak{F}(f) = \mathfrak{F} \circ \mathfrak{F}^{-1}(f) = f$.

Agora, estenderemos a definição da transformada de Fourier para $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < 2$. Dada uma função $f \in L^p$, $1 < p < 2$, sejam $f_1 \in L^1$ e $f_2 \in L^2$ tais que $f = f_1 + f_2$ (podemos tomar, por exemplo, $f_1 = f\chi_{|f| > 1}$ e $f_2 = f\chi_{|f| \leq 1}$). Assim, $\hat{f} = \hat{f}_1 + \hat{f}_2$. É claro que a definição de \hat{f} não depende da escolha de f_1 e de f_2 .

Proposição 48. (Desigualdade de Hausdorff-Young). Seja $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq 2$. Então

$$\|\hat{f}\|_{L^{p'}} \lesssim \|f\|_{L^p}.$$

Demonstração. Pelo item (1) da Proposição 42 e pela identidade de Parseval, respectivamente, temos

$$\|\hat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1} \text{ e } \|\hat{f}\|_{L^2} = (2\pi)^n \|f\|_{L^2}.$$

Pelo Teorema 19 (Interpolação de Riesz-Thorin)

$$\|\hat{f}\|_{L^{p'}} \leq (2\pi)^n \|f\|_{L^p}.$$

□

Definição 49. Se $b \geq 0$, o operador Laplaciano fracionário é definido por

$$(-\Delta)^b f = \mathfrak{F}^{-1}(|\xi|^{2b} \hat{f}).$$

2.3 O espaço das distribuições temperadas

Definição 50. O espaço dual (ou seja, de funcionais lineares e contínuos) de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é denotado por $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, e seus elementos são chamados distribuições temperadas.

A ação de uma distribuição temperada u em uma função $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ pode ser representada das seguintes maneiras:

$$u(f) = \langle u, f \rangle.$$

A seguir, demonstraremos uma caracterização útil do espaço de distribuições temperadas.

Proposição 51. *Um funcional linear u , definido em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, é uma distribuição temperada se, e somente se, existem $C > 0$ e inteiros não negativos k e m tais que*

$$|\langle u, f \rangle| \leq C \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\beta| \leq k}} \rho_{\alpha, \beta}(f),$$

para qualquer $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Suponha que u seja contínuo e que a desigualdade seja falsa. Portanto, para quaisquer $j \in \mathbb{N}$ e γ_0, ω_0 multi-índices, existe $\phi_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$|\langle u, \phi_j \rangle| > j \sum_{\substack{|\alpha| \leq |\gamma_0| \\ |\beta| \leq |\omega_0|}} \rho_{\alpha, \beta}(\phi_j) = j \sum_{\substack{|\alpha| \leq |\gamma_0| \\ |\beta| \leq |\omega_0|}} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \phi_j(x)|.$$

Seja $\psi_j = \frac{\phi_j}{|\langle u, \phi_j \rangle|}$. Assim,

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^{\gamma_0} \partial^{\omega_0} \psi_j(x)| &\leq \sum_{\substack{|\alpha| \leq |\gamma_0| \\ |\beta| \leq |\omega_0|}} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \psi_j(x)| \\ &\leq \frac{1}{|\langle u, \phi_j \rangle|} \sum_{\substack{|\alpha| \leq |\gamma_0| \\ |\beta| \leq |\omega_0|}} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \phi_j(x)| \\ &< \frac{1}{j}. \end{aligned}$$

Isso mostra que $x^{\gamma_0} \partial^{\omega_0} \psi_j \rightarrow 0$ uniformemente. Portanto $\psi_j \rightarrow 0$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Entretanto, $|\langle u, \psi_j \rangle| = 1$, o que implica que $\langle u, \psi_j \rangle$ não converge para 0. Isso contradiz a continuidade de u .

A outra implicação é trivial. □

Exemplo 52. *Muitas funções podem ser vistas como distribuições temperadas por meio da identificação $f \mapsto L_f$, em que*

$$L_f(\phi) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) f(x) dx,$$

para $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Nesse sentido, as funções em L^p , $1 \leq p \leq \infty$, são distribuições temperadas. De fato, seja $\{\phi_j\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\phi_j \rightarrow \phi$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Mostraremos que $L_f(\phi_j) \rightarrow L_f(\phi)$. Com efeito, temos

$$\begin{aligned} |L_f(\phi_j) - L_f(\phi)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) (\phi_j(x) - \phi(x)) dx \right| \leq \\ &\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| |\phi_j(x) - \phi(x)| dx \rightarrow 0, \quad \text{se } j \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Exemplo 53. Toda função g que satisfaz $|g(x)| \leq C(1 + |x|)^k$, para algum número k , é uma distribuição temperada. De fato, observe que, para $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $m > n + k$,

$$\begin{aligned} |L_g(\phi)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\phi(x)dx \right| \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|)^k |\phi(x)| dx \\ &= C \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|)^{k-m} (1 + |x|)^m |\phi(x)| dx \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^m |\phi(x)| \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|)^{k-m} dx \\ &< \infty, \end{aligned}$$

pois

$$m > n + k \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|)^{k-m} dx < \infty$$

e

$$\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \sup_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|)^m |\phi(x)| < \infty.$$

Agora, mostraremos que L_g é contínuo. Seja $\{\phi_j\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\phi_j \rightarrow \phi$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Usando a desigualdade (2.1), temos

$$\begin{aligned} |L_g(\phi_j) - L_g(\phi)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)| |\phi_j(x) - \phi(x)| dx \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|)^k |\phi_j(x) - \phi(x)| dx \\ &= C \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|)^{k-m} |(1 + |x|)^m (\phi_j(x) - \phi(x))| dx \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|)^{k-m} 2^m (1 + C_{n,m}) \sum_{|\beta| \leq m} |x^\beta| |(\phi_j(x) - \phi(x))| dx \rightarrow 0, \end{aligned}$$

se $j \rightarrow \infty$.

Agora, definiremos algumas ferramentas da análise harmônica no contexto do espaço de distribuições temperadas. A importância dessas distribuições está relacionada ao fato de que todo operador limitado e invariante por translação, de $L_p(\mathbb{R}^n)$ para $L_q(\mathbb{R}^n)$, é dado por convolução com uma distribuição temperada. Isso será demonstrado posteriormente.

Definição 54. Sejam $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e α um multi-índice. Definimos, para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\langle \partial^\alpha u, f \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha f \rangle. \quad (2.11)$$

Se u é uma função, as derivadas de u , de acordo com (2.11), são chamadas de derivadas distribucionais.

A motivação para a definição acima é estender a definição de derivadas de funções, de forma a manter válida a derivação por partes, isto é, dadas $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\partial^\alpha f)(x)g(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(\partial^\alpha g)(x)dx.$$

Com efeito, suponha que $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ seja uma função. Ou seja, existe uma função g tal que $u = L_g$. Queremos, portanto, que

$$\langle \partial^\alpha u, f \rangle = \langle \partial^\alpha L_g, f \rangle = \langle L_{\partial^\alpha g}, f \rangle.$$

Assim

$$\begin{aligned} \langle \partial^\alpha u, f \rangle &= \langle L_{\partial^\alpha g}, f \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \partial^\alpha g(x) f(x) dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \partial^\alpha f(x) dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \langle L_g, \partial^\alpha f \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha f \rangle. \end{aligned}$$

Definição 55. Seja $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Definimos a transformada de Fourier, \hat{u} , e a inversa, \check{u} , por

$$\begin{aligned} \langle \hat{u}, f \rangle &= \langle u, \hat{f} \rangle \text{ e} \\ \langle \check{u}, f \rangle &= \langle u, \check{f} \rangle, \end{aligned}$$

$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Exemplo 56. Defina $\delta_0 : C^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\langle \delta_0, \phi \rangle = \phi(0).$$

É fácil ver que $\delta_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Além disso, dada $f \in \mathcal{S}$, temos

$$\begin{aligned} \langle \hat{\delta}_0, f \rangle &= \langle \delta_0, \hat{f} \rangle \\ &= \hat{f}(0) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} 1 \cdot f(x) dx = \langle 1, f \rangle. \end{aligned}$$

Portanto, $\hat{\delta}_0 = 1$.

Mais geralmente,

$$(\partial^\alpha \delta_0)^\wedge(x) = (ix)^\alpha.$$

Com efeito, para $f \in \mathcal{S}$, temos

$$\begin{aligned} \langle (\partial^\alpha \delta_0)^\wedge, f \rangle &= \langle \partial^\alpha \delta_0, \hat{f} \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|} \langle \delta_0, \partial^\alpha \hat{f} \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|} \langle \delta_0, ((-ix)^\alpha f(x))^\wedge \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|} ((-ix)^\alpha f(x))^\wedge(0) \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} (-ix)^\alpha f(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (ix)^\alpha f(x) dx = \langle (ix)^\alpha, f \rangle. \end{aligned}$$

Isso mostra que $(\partial^\alpha \delta_0)^\wedge$ pode ser identificado com $(ix)^\alpha$.

Definição 57. *Sejam $t \in \mathbb{R}^n$, $a > 0$ e $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. A translação $\tau^t u$, a dilatação $\delta^a u$ e a reflexão \tilde{u} de uma distribuição temperada são definidas por*

$$\begin{aligned}\langle \tau^t u, f \rangle &= \langle u, \tau^{-t} f \rangle; \\ \langle \delta^a u, f \rangle &= \langle u, a^{-n} \delta_a^{\frac{1}{a}} f \rangle; \\ \langle \tilde{u}, f \rangle &= \langle u, \tilde{f} \rangle.\end{aligned}$$

Observação 58. *As definições acima são motivadas pela ideia de que uma distribuição temperada generaliza o conceito de função e pelas seguintes identidades, em que f e g são funções em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} g(x) f(x-t) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} g(x+t) f(x) dx; \\ \int_{\mathbb{R}^n} g(ax) f(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} g(x) a^{-n} f(a^{-1}x) dx; \\ \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{g}(x) f(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \tilde{f}(x) dx.\end{aligned}$$

Proposição 59. *As operações de transformada de Fourier, transformada inversa de Fourier, derivação, translação, dilatação e reflexão são aplicações contínuas de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ para $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.*

Observação 60. *Sejam f, g e h em \mathcal{S} . Note que*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} (h * g)(x) f(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} h(y) g(x-y) dy \right) f(x) dx \\ &= (-1)^n \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} h(x-z) g(z) dz \right) f(x) dx \\ &= (-1)^n \int_{\mathbb{R}^n} g(z) \left(\int_{\mathbb{R}^n} h(x-z) f(x) dx \right) dz \\ &= (-1)^n \int_{\mathbb{R}^n} g(z) \left(\int_{\mathbb{R}^n} h(-w) f(z-w) (-1)^n dw \right) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(z) \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{h}(w) f(z-w) dw dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(z) (\tilde{h} * f)(z) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(x) (\tilde{h} * f)(x) dx.\end{aligned}$$

Isso motiva a definição a seguir.

Definição 61. *Sejam $u \in \mathcal{S}'$ e $h \in \mathcal{S}$. Definimos a convolução $h * u$ por*

$$\langle h * u, f \rangle = \langle u, \tilde{h} * f \rangle,$$

em que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Exemplo 62. Sejam $u = \delta_{x_0}$ e $f \in \mathcal{S}$. Temos

$$\begin{aligned}\langle f * \delta_{x_0}, h \rangle &= \langle \delta_{x_0}, \tilde{f} * h \rangle \\ &= (\tilde{f} * h)(x_0) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x - x_0)h(x)dx,\end{aligned}$$

para todo $h \in \mathcal{S}$. Isso mostra que $f * \delta_{x_0}$ pode ser identificado com a função $x \mapsto f(x - x_0)$.

Definição 63. Os elementos do espaço dual $(\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n))'$ são chamados distribuições. Para facilitar a notação, representaremos esse espaço por $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Observe que $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ implica que $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Definição 64. Dizemos que uma distribuição u em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ coincide com a função h no aberto Ω se

$$\langle u, f \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)h(x)dx,$$

para toda $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$.

Teorema 65. Se $u \in \mathcal{S}'$ e $\phi \in \mathcal{S}$, então $\phi * u$ é uma função \mathcal{C}^∞ e

$$(\phi * u)(x) = \langle u, \tau^x \tilde{\phi} \rangle,$$

$x \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração. Seja $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Temos

$$\begin{aligned}\langle \phi * u, \psi \rangle &= \langle u, \tilde{\phi} * \psi \rangle \\ &= u\left(\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\phi}(\cdot - y)\psi(y)dy\right) \\ &= u\left(\int_{\mathbb{R}^n} (\tau^y \tilde{\phi})(\cdot)\psi(y)dy\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \langle u, \tau^y \tilde{\phi} \rangle \psi(y)dy.\end{aligned}\tag{2.12}$$

A última igualdade será justificada posteriormente. Esse cálculo mostra que $\phi * u$ pode ser identificada com $\langle u, \tau^{(\cdot)} \tilde{\phi} \rangle$, isto é

$$(\phi * u)(x) = \langle u, \tau^x \tilde{\phi} \rangle.$$

Mostraremos agora que $\phi * u$ pertence a \mathcal{C}^∞ . Como u é contínua e

$$\frac{\tau^{-he_j}(\tau^x \tilde{\phi}) - \tau^x \tilde{\phi}}{h} \longrightarrow \partial_j \tau^x \tilde{\phi} = \tau^x \partial_j \tilde{\phi} \text{ em } \mathcal{S},$$

quando $h \longrightarrow 0$, segue que

$$\frac{\tau^{-he_j}(\phi * u)(x) - (\phi * u)(x)}{h} = u\left(\frac{\tau^{-he_j}(\tau^x \tilde{\phi}) - \tau^x \tilde{\phi}}{h}\right) \longrightarrow \langle u, \tau^x(\partial_j \tilde{\phi}) \rangle.$$

Isso mostra que

$$\partial_j(\phi * u)(x) = \langle u, \tau^x(\partial_j \tilde{\phi}) \rangle,$$

que é contínuo. Por indução, podemos mostrar que $\phi * u \in \mathcal{C}^{|\gamma|}$, para qualquer multi-índice γ .

Agora, justifiquemos a última igualdade de (2.12). Essa identidade entre integrais se deve à continuidade de u e ao fato (veja [7], seção 2.3.3) de que as somas de Riemann da integral

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\tau^y \tilde{\phi})(\cdot) \psi(y) dy$$

de fato convergem para ela na topologia de \mathcal{S} . Isto é, para $N = 1, 2, \dots$, considere a partição de $[-N, N]^n$ em $(2N^2)^n$ cubos Q_m de lado $\frac{1}{N}$, e seja y_m o centro de cada Q_m . Para quaisquer multi-índices α e β ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D_N(x)| = 0,$$

em que

$$D_N(x) = \sum_{m=1}^{(2N^2)^n} x^\alpha \partial_x^\beta \tilde{\phi}(x - y_m) \psi(y_m) |Q_m| - \int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha \partial_x^\beta \tilde{\phi}(x - y) \psi(y) dy.$$

Da continuidade de u ,

$$\sum_{m=1}^{(2N^2)^n} \langle u, \tilde{\phi}(\cdot - y_m) \rangle \psi(y_m) |Q_m| \longrightarrow u \left(\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\phi}(\cdot - y) \psi(y) dy \right).$$

Mas

$$\sum_{m=1}^{(2N^2)^n} \langle u, \tilde{\phi}(\cdot - y_m) \rangle \psi(y_m) |Q_m|$$

são as somas parciais de

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle u, \tau^y \tilde{\phi} \rangle \psi(y) dy.$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle u, \tau^y \tilde{\phi} \rangle \psi(y) dy = u \left(\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\phi}(\cdot - y) \psi(y) dy \right).$$

□

Proposição 66. *Sejam u, v e u_j distribuições temperadas, f_j e f funções de Schwartz, $y \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{C}$, α multi-índice e $a > 0$. Temos:*

$$(1) \widehat{u + v} = \widehat{u} + \widehat{v};$$

$$(2) \widehat{bu} = b\widehat{u};$$

(3) *Se $f_j \rightarrow f$ em \mathcal{S} , então $\widehat{f}_j \rightarrow \widehat{f}$ em \mathcal{S} . Se $u_j \rightarrow u$ em \mathcal{S}' , então $\widehat{u}_j \rightarrow \widehat{u}$ em \mathcal{S}' ;*

$$(4) (\tau^y u)^\widehat{ } = e^{-i\xi \cdot y} \widehat{u};$$

$$(5) \quad (e^{ix \cdot y} u)^\wedge = \tau^y \hat{u};$$

$$(6) \quad (\delta^a u)^\wedge = (\hat{u})_a = a^{-n} \delta^{a-1} \hat{u};$$

$$(7) \quad (\partial^\alpha u)^\wedge = (i\xi)^\alpha \hat{u};$$

$$(8) \quad \partial^\alpha \hat{u} = ((-ix)^\alpha u)^\wedge;$$

$$(9) \quad (\hat{u})^\check{=} = u;$$

$$(10) \quad \widehat{f * u} = \hat{f} \hat{u};$$

$$(11) \quad (\text{Leibniz}) \quad \partial_j^m (fu) = \sum_{k=0}^m (\partial_j^k f) (\partial_j^{m-k} u);$$

$$(12) \quad (\text{Leibniz}) \quad \partial^\alpha (fu) = \sum_{\gamma_1=0}^{\alpha_1} \cdots \sum_{\gamma_n=0}^{\alpha_n} \binom{\alpha_1}{\gamma_1} \cdots \binom{\alpha_n}{\gamma_n} (\partial^\gamma f) (\partial^{\alpha-\gamma} u);$$

(13) Se u_k e u pertencem a $L^p(\mathbb{R}^n)$ e $u_k \rightarrow u$ em L^p , $1 \leq p \leq \infty$, então $u_k \rightarrow u$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Logo, convergência em \mathcal{S} implica convergência em L^p , que, por sua vez, implica convergência em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

A demonstração dos itens anteriores é análoga à da Proposição 42.

Definição 67. (Espaços de Sobolev) Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e $m \in \mathbb{N}$. Os espaços de Sobolev $H^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ são definidos por

$$H^{m,p}(\mathbb{R}^n) \doteq \{f \in L^p(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{H^{m,p}} \doteq \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial_x^\alpha f\|_{L^p} < \infty\}.$$

Se $p = 2$, também usamos a notação $H^m(\mathbb{R}^n)$.

Definição 68. (Espaços de Sobolev Fracionários) Seja $s \in \mathbb{R}$. Os espaços de Sobolev fracionários $H^s(\mathbb{R}^n)$ são definidos por

$$H^s(\mathbb{R}^n) \doteq \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \hat{f} \text{ é função e } \|f\|_{H^s} < \infty\},$$

em que

$$\|f\|_{H^s} \doteq \|\langle \xi \rangle^s \hat{f}\|_{L^2}$$

e $\langle \xi \rangle$ denota os colchetes japoneses, ou seja, $\langle \xi \rangle^2 \doteq 1 + |\xi|^2$.

2.4 Multiplicadores de Fourier

Antes de obtermos estimativas para soluções de problemas de Cauchy envolvendo equações de evolução, faz-se necessário conhecermos os *multiplicadores de Fourier*. Esses espaços são essenciais na obtenção de estimativas $L^p - L^q$.

Definição 69. Um espaço vetorial X de funções mensuráveis definidas em \mathbb{R}^n é dito fechado por translações se, dada $f \in X$, $\tau^z(f) \in X$, para qualquer $z \in \mathbb{R}^n$. Sejam X e Y espaços vetoriais de funções mensuráveis definidas em \mathbb{R}^n fechado por translações. Se T é um operador de X para Y , dizemos que T comuta com translações ou é invariante por translações se

$$T(\tau^z(f)) = \tau^z(T(f)),$$

para toda $f \in X$ e todo $z \in \mathbb{R}^n$.

Exemplo 70. *Seja X um espaço de funções fechado por translações. Seja T um operador convolução definido em X , isto é, dada $f \in X$,*

$$T(f) = f * g,$$

para alguma função g , desde que a convolução esteja bem definida. Observe que

$$\tau^y(f * g) = \tau^y(f) * g, \quad \forall y.$$

De fato, fazendo a mudança de variáveis $w = y + z$ na integral abaixo, temos

$$\begin{aligned} \tau^y(f * g)(x) &= (f * g)(x - y) \\ &= \int f(z)g(x - y - z)dz \\ &= \int f(w - y)g(x - w)dw \\ &= \int (\tau^y f)g(x - w)dw \\ &= (\tau^y(f) * g)(x). \end{aligned}$$

Portanto

$$\tau^y(T(f)) = T(\tau^y(f)),$$

ou seja, T é invariante por translações. O próximo teorema enuncia a recíproca desse resultado para uma classe importante de operadores, que será usada frequentemente ao longo do texto.

Teorema 71. *Sejam $1 \leq p, q \leq \infty$ e T um operador linear e limitado de $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $L^q(\mathbb{R}^n)$ que comuta com translações. Então existe uma única distribuição temperada w tal que*

$$T(f) = f * w \quad \text{qtp,}$$

para toda $f \in \mathcal{S}$.

Para prova o teorema acima, precisaremos dos seguintes resultados

Lema 72. *Nas hipóteses do Teorema 71 e para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, as derivadas distribucionais de $T(f)$ são funções de L^q que satisfazem*

$$\partial^\alpha(T(f)) = (-1)^{|\alpha|}T(\partial^\alpha f), \quad (2.13)$$

para todo multi-índice α .

Lema 73. *Sejam $1 \leq q \leq \infty$ e $h \in L^q(\mathbb{R}^n)$. Se todas as derivadas distribucionais $\partial^\alpha h$ estão em L^q , então h é igual a uma função contínua em quase toda parte, que representaremos por H , e*

$$|H(0)| \leq C_{n,q} \sum_{|\alpha| \leq n+1} \|\partial^\alpha h\|_{L^q}. \quad (2.14)$$

Agora, demonstraremos o teorema.

Demonstração. (Teorema 71) Seja $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Pelos Lemas 72 e 73, existe uma função contínua H tal que $T(f) = H$ *q.t.p.* e

$$|H(0)| \leq C_{n,q} \sum_{|\alpha| \leq n+1} \|\partial^\alpha T(f)\|_{L^q}. \quad (2.15)$$

Seja u funcional definido em \mathcal{S} tal que

$$\langle u, f \rangle = H(0) = T(f)(0).$$

Observe que, se a e b são números complexos,

$$\begin{aligned} \langle u, af + bg \rangle &= T(af + bg)(0) \\ &= T(af)(0) + T(bg)(0) \\ &= aT(f)(0) + bT(g)(0) \\ &= aH(0) + S(0) \\ &= a\langle u, f \rangle + b\langle u, g \rangle, \end{aligned}$$

em que $T(f) = H$ e $T(g) = S$ *q.t.p.* Isso mostra que u é linear. Outrossim, u está bem definido. Com efeito, suponha que exista outra função contínua G de forma que $G = T(f)$ *q.t.p.*. Assim, $G = H$ *q.t.p.* Como H e G são contínuas, segue do Teorema 9 que $H = G$ e, portanto, $H(0) = G(0)$.

Por (2.13), (2.14) e pelo fato de T ser limitado, temos

$$\begin{aligned} |\langle u, f \rangle| &= |H(0)| \\ &\leq C_{n,q} \sum_{|\alpha| \leq n+1} \|\partial^\alpha T(f)\|_{L^q} \\ &\leq C_{n,q} \sum_{|\alpha| \leq n+1} \|T(\partial^\alpha f)\|_{L^q} \\ &\leq C_{n,q} \|T\|_{L^p \rightarrow L^q} \sum_{|\alpha| \leq n+1} \|\partial^\alpha f\|_{L^p} \\ &\leq C_{n,q} \|T\|_{L^p \rightarrow L^q} \sum_{|\alpha| \leq n+1} C_{p,n} \sum_{|\gamma| \leq [\frac{n+1}{p}] + 1} \rho_{\gamma,\alpha}(f) \\ &\leq C'_{n,q} \|T\|_{L^p \rightarrow L^q} \sum_{\substack{|\gamma| \leq [\frac{n+1}{p}] + 1 \\ |\alpha| \leq n+1}} \rho_{\gamma,\alpha}(f), \end{aligned}$$

em que a penúltima desigualdade é consequência da Proposição 35. Logo, pela Proposição 51, segue que $u \in \mathcal{S}'$. Definimos $w = \tilde{u}$ e afirmamos que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle u, \tau^{-x} f \rangle = H(x). \quad (2.16)$$

Inicialmente, assumiremos a validade de (2.16) para provar que $T(f) = f * w$, $f \in \mathcal{S}$.

Pelo Teorema 65 e como T é invariante por translações, dada $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\begin{aligned}
 (f * w)(x) &= \langle w, \tau^x \tilde{f} \rangle \\
 &= \langle \tilde{u}, \tau^x \tilde{f} \rangle \\
 &= \langle u, \widetilde{\tau^x f} \rangle \\
 &= \langle u, \tau^{-x} f \rangle \\
 &= H(x) \\
 &= T(f)(x) \text{ q.t.p.}
 \end{aligned}$$

Isso mostra que $f * w = T(f)$, como queríamos. Agora, mostraremos a unicidade de w . Suponha que exista w' tal que $f * w = f * w'$, $f \in \mathcal{S}$. Assim

$$(f * w)(x) = (f * w')(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Em particular,

$$(f * w)(0) = (f * w')(0).$$

Dessa forma, se $w' = \tilde{v}$ e $f \in \mathcal{S}$,

$$\begin{aligned}
 \langle u, \tau^{-0} f \rangle &= \langle v, \tau^{-0} f \rangle \Leftrightarrow \\
 \langle u, f \rangle &= \langle v, f \rangle \Leftrightarrow \\
 u &= v \Leftrightarrow \\
 w &= w'.
 \end{aligned}$$

Voltemos para a igualdade (2.16). Sejam $f \in (\mathbb{R}^n)$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Seja H_x a função contínua do Lema 73 tal que $H_x = T(\tau^{-x} f)$. Provaremos que $H_x(0) = H(x)$. De fato,

$$\begin{aligned}
 H_x(y) &= T(\tau^{-x} f)(y) \\
 &= \tau^{-x} T(f)(y) \\
 &= T(f)(x + y) \\
 &= H(x + y) \\
 &= \tau^{-x} H(y),
 \end{aligned}$$

em que $T(f)(x + y) = H(x + y)$ q.t.p. em y . Portanto, as funções contínuas H_x e $\tau^{-x} H$ são iguais q.t.p.. Logo, $H_x(y) = \tau^{-x} H(y)$, para qualquer $y \in \mathbb{R}^n$. Em particular

$$H_x(0) = \tau^{-x} H(0) = H(x).$$

Assim,

$$H(x) = H_x(0) = T(\tau^{-x} f)(0) = \langle u, \tau^{-x} f \rangle,$$

o que prova (2.16). □

A seguir, demonstraremos os Lemas 72 e 73.

Demonstração. (Lema 72) Sejam $\alpha = e_j$ e $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Observe que, pela Definição 57 e pelo fato de T comutar com translação, temos

$$\begin{aligned}
\int T(f)(y) \frac{\phi(y + he_j) - \phi(y)}{h} dy &= \frac{1}{h} \langle T(f), \tau^{-he_j} \phi - \phi \rangle \\
&= \frac{1}{h} \langle T(f), \tau^{-he_j} \phi \rangle - \frac{1}{h} \langle T(f), \phi \rangle \\
&= \frac{1}{h} \langle \tau^{he_j} T(f), \phi \rangle - \frac{1}{h} \langle T(f), \phi \rangle \\
&= \frac{1}{h} \langle T(\tau^{he_j} f), \phi \rangle - \frac{1}{h} \langle T(f), \phi \rangle \\
&= \langle T \left[\frac{(\tau^{he_j} f) - f}{h} \right], \phi \rangle \\
&= \int \phi(y) T \left(\frac{\tau^{he_j}(f) - f}{h} \right) (y) dy.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^n} T(f)(y) \frac{\phi(y + he_j) - \phi(y)}{h} = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) T \left(\frac{\tau^{he_j}(f) - f}{h} \right) (y) dy \quad (2.17)$$

O que queremos é fazer $h \rightarrow 0$ em ambos os lados de (2.17).

Pela regra da cadeia, chegamos a

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \partial_j \phi(y + hte_j) dt &= \int_0^1 \frac{d}{dt} \left[\frac{\phi(y + the_j)}{h} \right] dt \\
&= \frac{\phi(y + he_j) - \phi(y)}{h}.
\end{aligned}$$

Usando agora a Observação 26 com $q'M > n$, temos, para $|h| < \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\phi(y + he_j) - \phi(y)}{h} \right| &\leq \int_0^1 |\partial_j \phi(y + hte_j)| dt \\
&\leq \int_0^1 \frac{C_M dt}{(1 + |y + hte_j|)^M} \\
&\leq \int_0^1 \frac{C_M dt}{(1 + |y| - \frac{1}{2})^M} \\
&= \frac{C_M}{(|y| + \frac{1}{2})^M} \\
&\leq \frac{C'_M}{(|y| + 1)^M}.
\end{aligned} \quad (2.18)$$

Como

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{(C'_M)^{q'}}{(|y| + 1)^{Mq'}} dy < \infty \Leftrightarrow Mq' > n$$

e $T(f) \in L^q$, segue, pela desigualdade de Hölder, que

$$|T(f)(y)| C'_M (|y| + 1)^{-M}$$

é integrável. Dessa forma, o integrando no lado esquerdo da igualdade (2.17) é limitado por $|T(f)(y)|C'_M(|y| + 1)^{-M}$ e converge para $T(f)(y)\partial_j\phi(y)$. O teorema da convergência dominada implica que a integral no lado esquerdo de (2.17) converge para

$$\int_{\mathbb{R}^n} T(f)(y)\partial_j\phi(y)dy,$$

quando $h \rightarrow 0$.

Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\frac{(\tau^{he_j} f)(y) - f(y)}{h} = \int_0^1 \partial_j f(y + hte_j) dt,$$

que converge pontualmente para $\partial_j f(y)$, se $h \rightarrow 0$. Temos também que $\frac{(\tau^{he_j} f)(y) - f(y)}{h}$ é limitado por $C'_M(1 + |y|)^{-M}$ para $|h| < \frac{1}{2}$, como foi feito em (2.18). Logo, pelo teorema da convergência dominada,

$$\frac{\tau^{he_j} f - f}{h} \rightarrow \partial_j f \text{ em } L^p,$$

quando $h \rightarrow 0$. Observe que, por hipótese, T é limitado e, portanto, contínuo de L^p para L^q . Assim,

$$T\left(\frac{\tau^{he_j} f - f}{h}\right) \rightarrow T(\partial_j f) \text{ em } L^q,$$

quando $h \rightarrow 0$. Observe também que $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^{q'}$. Usando Hölder, temos

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) T\left(\frac{\tau^{he_j} f - f}{h}\right)(y) dy - \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) T(\partial_j f)(y) dy \right| = \\ & \left| \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) \left[T\left(\frac{\tau^{he_j} f - f}{h}\right)(y) - T(\partial_j f)(y) \right] dy \right| \leq \\ & \int_{\mathbb{R}^n} \left| \phi(y) \left[T\left(\frac{\tau^{he_j} f - f}{h}\right)(y) - T(\partial_j f)(y) \right] \right| dy \leq \\ & \|\phi\|_{L^{q'}} \left\| T\left(\frac{\tau^{he_j} f - f}{h}\right) - T(\partial_j f) \right\|_{L^q} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $h \rightarrow 0$.

Isso mostra que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) T\left(\frac{\tau^{he_j} f - f}{h}\right)(y) dy \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) T(\partial_j f)(y) dy,$$

quando $h \rightarrow 0$. Dessa forma, por (2.17), fazendo $h \rightarrow 0$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} T(f)(y)(\partial_j\phi)(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y)T(\partial_j f)(y)dy.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \langle T(f), \partial_j \phi \rangle &= \langle T(\partial_j f), \phi \rangle \Leftrightarrow \\ -\langle \partial_j(T(f)), \phi \rangle &= \langle T(\partial_j f), \phi \rangle, \end{aligned}$$

para qualquer $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Logo,

$$\partial_j(T(f)) = -T(\partial_j f).$$

Isso prova o resultado para $\alpha = e_j$. O caso geral segue por indução sobre $|\alpha|$. \square

Demonstração. (Lema 73) Seja $R \geq 1$. Fixe uma função $\phi_R \in C_0^\infty$ que é igual a 1 na bola de centro na origem e raio R , e zero se $|x| \geq 2R$. Como $\phi_R \in C_0^\infty \subset \mathcal{S} \subset L^p$, para qualquer $p \geq 1$ e $h \in L^q$, concluímos, por Hölder, que $\phi_R \cdot h \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Mostraremos que $\widehat{\phi_R \cdot h} \in L^1$.

Por (2.1), para $k = n + 1$, temos

$$1 \leq C_n(1 + |\xi|)^{-(n+1)} \sum_{|\alpha| \leq n+1} |(i\xi)^\alpha|. \quad (2.19)$$

Multiplicando (2.19) por $|\widehat{\phi_R \cdot h}(\xi)|$ e usando as propriedades (1) e (8) da Proposição 42, temos

$$\begin{aligned} |\widehat{\phi_R \cdot h}(\xi)| &\leq C_n(1 + |\xi|)^{-(n+1)} \sum_{|\alpha| \leq n+1} |(i\xi)^\alpha \widehat{\phi_R \cdot h}(\xi)| \\ &\leq C_n(1 + |\xi|)^{-(n+1)} \sum_{|\alpha| \leq n+1} |\mathfrak{F}(\partial^\alpha(\phi_R \cdot h))(\xi)| \\ &\leq C_n(1 + |\xi|)^{-(n+1)} \sum_{|\alpha| \leq n+1} \|\mathfrak{F}(\partial^\alpha(\phi_R \cdot h))\|_{L^\infty} \quad q.t.p. \\ &\leq C_n(1 + |\xi|)^{-(n+1)} \sum_{|\alpha| \leq n+1} \|\partial^\alpha(\phi_R \cdot h)\|_{L^1} \\ &\leq C_n(2^n R^n v_n)^{\frac{1}{q}} (1 + |\xi|)^{-(n+1)} \sum_{|\alpha| \leq n+1} \|\partial^\alpha(\phi_R \cdot h)\|_{L^q} \\ &\leq C_{n,R}(1 + |\xi|)^{-(n+1)} \sum_{|\alpha| \leq n+1} \|\partial^\alpha h\|_{L^q}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

A última desigualdade acima decorre do fato de que todas as derivadas de ϕ_R são limitadas por constantes que dependem de R e pela regra de Leibniz (Proposição 66 (12)).

Integrando

$$|\widehat{\phi_R \cdot h}(\xi)| \leq C_{n,R}(1 + |\xi|)^{-(n+1)} \sum_{|\alpha| \leq n+1} \|\partial^\alpha h\|_{L^q}$$

com relação a ξ , temos

$$\|\widehat{\phi_R \cdot h}\|_{L^1} \leq \tilde{C}_{n,R} \sum_{|\alpha| \leq n+1} \|\partial^\alpha h\|_{L^q} < \infty, \quad (2.21)$$

o que mostra que $\widehat{\phi_R \cdot h} \in L^1$. Como $\phi_R \cdot h$ e $\widehat{\phi_R \cdot h}$ estão em L^1 , vale a inversão da transformada de Fourier, isto é,

$$\phi_R \cdot h = (\widehat{\phi_R \cdot h})^\vee \quad q.t.p.$$

Isso mostra que $\phi_R \cdot h$ é igual *q.t.p.* a uma função contínua. Além disso, do fato de que $\phi_R = 1$ na bola aberta $B(0, R)$, concluímos que h é igual *q.t.p.* a uma função contínua nessa bola. Da arbitrariedade de $R > 0$, segue que h é igual *q.t.p.* a uma função contínua em \mathbb{R}^n , que denotaremos por H . Finalmente, a desigualdade (2.14) é uma consequência de (2.21) com $R = 1$. \square

Definição 74. O espaço de distribuições temperadas T tais que

$$\|T * u\|_{L^q} \leq C \|u\|_{L^p}, \quad u \in \mathcal{S},$$

em que C é uma constante, será denotado por L_p^q .

Pelo Teorema 71, o estudo dos operadores de L^p para L^q limitados e invariantes por translação é essencialmente equivalente ao estudo do espaço L_p^q .

Definição 75. O espaço das transformadas de Fourier dos elementos de L_p^q será denotado por M_p^q . Os elementos de M_p^q são chamados de multiplicadores de Fourier de tipo (p, q) .

Observe que $m \in M_p^q \Leftrightarrow m = \widehat{T}$, para algum $T \in L_p^q$. $\Leftrightarrow T = \check{m}$, para algum $T \in L_p^q$. Assim $m \in M_p^q \Leftrightarrow \|\mathfrak{F}^{-1}(m) * u\|_{L^q} \leq C \|u\|_{L^p}$, $u \in \mathcal{S}$, para algum $C > 0$. Além disso, como \mathfrak{F} e \mathfrak{F}^{-1} são homeomorfismos e $\mathfrak{F}(\mathfrak{F}^{-1}(m) * u) = m\mathfrak{F}(u)$, segue que

$$\mathfrak{F}^{-1}(m) * u = \mathfrak{F}^{-1}(m\mathfrak{F}(u)).$$

Nesse sentido, podemos definir em M_p^q a seguinte norma

$$\|m\|_{M_p^q} \doteq \sup\{\|\mathfrak{F}^{-1}(m\mathfrak{F}(u))\|_{L^q} : u \in \mathcal{S}, \|u\|_{L^p} = 1\}.$$

Se $p = q$, denotaremos $M_p^q = M_p^p$ por M_p .

Os fatos abaixo a respeito do espaço M_p^q , cujas demonstrações podem ser vistas em [8], serão frequentemente utilizados ao longo do texto.

- (1) $M_p^q = \{0\}$, se $1 \leq q < p < \infty$;
- (2) $M_q^{p'} = M_p^q$, para $1 < p \leq q < \infty$;
- (3) $M_p = M_{p'}$;
- (4) $M_2 = L^\infty$;
- (5) $\|m_1 m_2\|_{M_p} \leq \|m_1\|_{M_p} \|m_2\|_{M_p}$, para quaisquer $m_1, m_2 \in M_p$;
- (6) Se $m \in M_p$ é uma função e $t \in \mathbb{R}$, $\|m(t\xi)\|_{M_p} = \|m(\xi)\|_{M_p}$.

Para a demonstração do resultado abaixo, veja o Teorema 1.2 de [16].

Lema 76. (Desigualdade de Bernstein) Se $a \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $N > \frac{n}{2}$, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|\widehat{a}\|_{M_1} \leq C \|\widehat{a}\|_{L^2}^{1-\frac{n}{2N}} \|D^N \widehat{a}\|_{L^2}^{\frac{n}{2N}}.$$

2.5 Integrais Oscilatórias

As integrais oscilatórias desempenham um papel de grande importância na Análise Harmônica e na Teoria de Equações Diferenciais Parciais. Um exemplo de integral oscilatória já definido é a transformada de Fourier. O objetivo desta seção é introduzir a nova ferramenta e mostrar sua utilidade na obtenção de estimativas. Ao final, provaremos um resultado, conhecido como lema de Littman, que nos fornece estimativas $L^\infty - L^\infty$ para soluções de problemas de Cauchy que envolvem equações de evolução. Considere a integral abaixo

$$I(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\phi(x)}\psi(x)dx, \quad (2.22)$$

em que ϕ é uma função real C^∞ , ψ é uma função complexa C^∞ com suporte compacto e λ é um número real. A função ϕ é chamada fase, e ψ , amplitude. Estamos interessados em estudar o comportamento de (2.22) para λ grande.

Proposição 77. *Suponha que $|\nabla\phi(x)| \geq c > 0$, para todo $x \in \text{supp}(\psi)$. Então, para todo inteiro $N \geq 0$, existe $c_N > 0$ tal que*

$$|I(\lambda)| \leq c_N \lambda^{-N},$$

quando $\lambda > 0$.

Demonstração. Consideremos os seguintes campos de vetores

$$L(f) = \frac{1}{i\lambda} \sum_{k=1}^n a_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{1}{i\lambda} a \cdot \nabla f$$

e

$$W(f) = -\frac{1}{i\lambda} \sum_{k=1}^n \frac{\partial(a_k f)}{\partial x_k} = -\frac{1}{i\lambda} \nabla \cdot (af),$$

em que $a = (a_1, \dots, a_n) = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|^2}$ e f é uma função C^∞ . Observe que

$$\langle L(f), g \rangle = \langle f, W(g) \rangle,$$

para $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. De fato,

$$\begin{aligned} \langle f, W(g) \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)W(g)(x)dx \\ &= -\frac{1}{i\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \sum_{k=1}^n \frac{\partial(a_k g)}{\partial x_k}(x)dx \\ &= -\frac{1}{i\lambda} \sum_{k=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{\partial(a_k g)}{\partial x_k}(x)dx \\ &= \frac{1}{i\lambda} \sum_{k=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} a_k(x)g(x) \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \frac{1}{i\lambda} \sum_{k=1}^n a_k(x) \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(x)L(f)(x)dx \\ &= \langle L(f), g \rangle. \end{aligned}$$

Pelas hipóteses, a_j e suas derivadas parciais são limitadas no suporte de ψ . Além disso, temos

$$L(e^{i\lambda\phi}) = \frac{1}{i\lambda} \sum_{k=1}^n a_k \frac{\partial(e^{i\lambda\phi})}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{|\nabla\phi|^2} \frac{\partial\phi}{\partial x_k} \frac{\partial\phi}{\partial x_k} e^{i\lambda\phi} = e^{i\lambda\phi}.$$

Portanto $L^N(e^{i\lambda\phi})(\lambda) = e^{i\lambda\phi}$, para qualquer inteiro não negativo N . Assim,

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \int_{\mathbb{R}^n} L(e^{i\lambda\phi})\psi dx \\ &= \langle L^N(e^{i\lambda\phi}), \psi \rangle \\ &= \langle e^{i\lambda\phi}, W^N(\psi) \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\phi} W^N(\psi) dx. \end{aligned}$$

Logo,

$$|I(\lambda)| \leq c_N \lambda^{-N}, \quad (2.23)$$

para qualquer $\lambda > 0$. \square

Agora, provaremos dois resultados para dimensão $n = 1$, em que podemos simplificar as hipóteses. Nesse contexto, considere a integral

$$I_1(\lambda) = \int_a^b e^{i\lambda\phi(x)} dx, \quad (2.24)$$

em que a e b são reais positivos. Em (2.24), a função amplitude é $\psi(x) = \chi_{(a,b)}(x)$. Assumiremos que ψ é de classe C^2 e que ϕ' é monótona (crescente ou decrescente) em $[a, b]$, com $|\phi'(x)| \geq 1$ no intervalo $[a, b]$.

Proposição 78. *No contexto acima, $|I_1(\lambda)| \leq c\lambda^{-1}$, $\lambda > 0$, com $c = 3$.*

Demonstração. Suponha que $\phi' > 0$ em $[a, b]$. O caso $\phi' < 0$ segue de forma análoga por meio de conjugação complexa. Temos

$$L(f) = \frac{1}{i\lambda\phi'} \frac{df}{dx} \quad e \quad W(f) = -\frac{1}{i\lambda} \frac{d}{dx} \left(\frac{f}{\phi'} \right)$$

Logo,

$$I_1(\lambda) = \int_a^b L(e^{i\lambda\phi}) dx = \int_a^b e^{i\lambda\phi} W(1) dx + \left[e^{i\lambda\phi} \frac{1}{i\lambda\phi'} \right]_a^b. \quad (2.25)$$

Agora apareceram os termos de fronteira, uma vez que não existe uma função ψ que se anula nos extremos.

Analisaremos separadamente cada um dos termos do lado direito da última igualdade de (2.25).

$$\left| \left[e^{i\lambda\phi} \frac{1}{i\lambda\phi'} \right]_a^b \right| \leq \left| \frac{1}{i\lambda\phi'(b)} \right| + \left| \frac{1}{i\lambda\phi'(a)} \right| \leq \frac{2}{\lambda} \quad (2.26)$$

e

$$\int_a^b |W(1)| dx = \frac{1}{\lambda} \int_a^b \left| \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\phi'} \right) \right| dx. \quad (2.27)$$

Note que, como ϕ' é monótona em $[a, b]$, $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\phi'}\right)$ não muda de sinal em $[a, b]$. Assim, por (2.26) e (2.27), segue que

$$\int_a^b \left| \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\phi'} \right) dx \right| = \left| \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\phi'} \right) dx \right| = \left| \frac{1}{\phi'(b)} - \frac{1}{\phi'(a)} \right| \leq 1,$$

pois $|\phi'(x)| \geq 1$ e $\phi' > 0$.

Dessa forma,

$$|I_1(\lambda)| \leq \frac{3}{\lambda}.$$

□

Observação 79. Se, na proposição anterior, tivéssemos assumido como hipótese que $|\phi'(x)| \geq \mu$ (em vez de $|\phi'(x)| \geq 1$), teríamos chegado a $|I_1(\lambda)| \leq c(\lambda\mu)^{-1}$. Basta substituir ϕ por $\frac{\phi}{\mu}$ e λ por $\lambda\mu$.

Corolário 80. Sejam ϕ como na Proposição 78 e ψ de classe C^1 . Considere também que a integral oscilatória $I(\lambda)$ é dada por 2.22. Nessas condições,

$$|I(\lambda)| \leq 3\lambda^{-1} \left(|\psi(b)| + \int_a^b |\psi'(x)| dx \right).$$

Demonstração. Seja $J(x) = \int_a^x e^{i\lambda\phi(u)} du$. Integrando por partes, temos

$$\int_a^b e^{i\lambda\phi(x)} \psi(x) dx = J(b)\psi(b) - \int_a^b J(x) \frac{d\psi}{dx} dx.$$

Pela Proposição 79, $|J(x)| \leq 3\lambda^{-1}$, para qualquer x . Assim

$$|I(\lambda)| \leq 3\lambda^{-1} \left(|\psi(b)| + \int_a^b |\psi'(x)| dx \right)$$

□

Proposição 81. Seja ϕ de classe C^2 no intervalo $[a, b]$ e assuma que $|\phi''(x)| \geq 1$ nesse intervalo. Seja I_1 dada por (2.24). Temos

$$|I_1(\lambda)| \leq c'\lambda^{-\frac{1}{2}}, \quad \lambda > 0 \text{ e } c' = 8. \quad (2.28)$$

Demonstração. Suponha que $\phi''(x) \geq 1$ em $[a, b]$. Novamente, o caso $\phi''(x) \leq -1$ segue por conjugação complexa. Como $\phi'' \geq 1$, ϕ' é estritamente crescente e, portanto, injetora. Assim, ϕ tem, no máximo, um ponto crítico em $[a, b]$. Seja x_0 um ponto crítico de ϕ e divida o intervalo $[a, b]$ em três subintervalos: $[a, x_0 - \delta]$, $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ e $[x_0 + \delta, b]$ em que δ é um número positivo apropriado. Observe que, trivialmente, a contribuição do intervalo $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ para a integral I_1 é 2δ . Agora, afirmamos que $\phi'(x) \geq \delta$ para $x \in [x_0 + \delta, b]$. Com efeito, pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in (x_0, x_0 + \delta)$ tal que

$$\phi''(c) = \frac{\phi'(x_0 + \delta) - \phi'(x_0)}{\delta} \Leftrightarrow \phi'(x_0 + \delta) = \delta\phi''(c),$$

pois $\phi(x_0) = 0$ e $\delta > 0$. Como $\phi''(c) \geq 1$, segue que $\phi'(x_0 + \delta) \geq \delta$. Do fato de que ϕ' é estritamente crescente, concluímos que $\phi'(x) \geq \delta$ para $x \in [x_0 + \delta, b]$. Pela Observação 79, a integral I_1 contribui, no máximo, com $\frac{3}{\delta\lambda}$ em $[x_0 + \delta, b]$. De maneira análoga, podemos mostrar que $\phi'(x) \leq -\delta$ para $x \in [a, x_0 - \delta]$. Novamente usando a Observação 79, a integral I_1 contribui com, no máximo, $\frac{3}{\delta\lambda}$ em $[a, x_0 - \delta]$. Dessa forma, I_1 é majorado por $2\delta + \frac{6}{\delta\lambda}$. Escolhendo $\delta = 1$, chegamos a (2.28). \square

O corolário abaixo leva em consideração a amplitude ψ . Suporemos que ψ é de classe C^1 no intervalo $[a, b]$.

Corolário 82. *Suponha que ϕ satisfaça as hipóteses da proposição anterior. Então*

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda\phi(x)} \psi(x) dx \right| \leq c_\psi \lambda^{-\frac{1}{2}},$$

em que $c_\psi = 8 \left(\int_a^b |\psi'(x)| dx + |\psi(b)| \right)$.

Demonstração. Seja $J(x) = \int_a^x e^{i\lambda\phi(u)} du$. Integrando por partes, temos

$$\int_a^b e^{i\lambda\phi(x)} \psi(x) dx = [J(x) \cdot \psi(x)]_a^b - \int_a^b J(x) \frac{d\psi}{dx} dx = J(b)\psi(b) - \int_a^b J(x) \frac{d\psi}{dx} dx.$$

Pela Proposição 81, para qualquer $x \in [a, b]$, $|J(x)| \leq 8\lambda^{-\frac{1}{2}}$. Assim

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda\phi(x)} \psi(x) dx \right| \leq c_\psi \lambda^{-\frac{1}{2}}.$$

\square

Exemplo 83. *Considere a função de Bessel*

$$J_m(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ir \sin(x)} e^{-imx} dx.$$

Mostraremos que $J_m(r) = O(r^{-\frac{1}{2}})$.

Observe que, nesse caso, $\lambda = r$, $\phi(x) = \sin(x)$ e $\psi(x) = \frac{1}{2\pi} e^{-imx}$. Como $\phi''(x) = -\sin(x)$, temos

$$|\phi''(x)| = |\sin(x)| \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right].$$

Pelo Corolário 82,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} e^{ir \sin(x)} e^{-imx} dx + \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} e^{ir \sin(x)} e^{-imx} dx = O(r^{-\frac{1}{2}}).$$

Agora, como $\phi'(x) = \cos(x)$ e

$$|\cos(x)| \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{\pi}{4} \right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi \right],$$

segue, pelo Corolário 80, que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{ir \sin(x)} e^{-imx} dx + \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} e^{ir \sin(x)} e^{-imx} dx + \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{7\pi}{4}}^{2\pi} e^{ir \sin(x)} e^{-imx} dx = O(r^{-1}),$$

se $r \rightarrow \infty$. Do fato de que $O(r^{-1}) \subset O(r^{-\frac{1}{2}})$, para $r \rightarrow \infty$, segue o resultado, isto é

$$J_m(r) = O(r^{-\frac{1}{2}}), \quad r \rightarrow \infty.$$

Voltemos às condições do início desta seção, ou seja, ϕ e ψ são de classe C^∞ e ψ possui suporte compacto. A matriz Hessiana de ϕ , dada por $\left\{ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_k} \right\}_{1 \leq j, k \leq n}$, será representada por $\nabla^2 \phi$. No próximo resultado, a principal hipótese será

$$\det\{\nabla^2 \phi\} \neq 0 \text{ no suporte de } \psi. \quad (2.29)$$

Proposição 84. *Suponha (2.29). Então*

$$I(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\phi(x)} \psi(x) dx = O(\lambda^{-\frac{n}{2}}), \quad \text{para } \lambda \rightarrow \infty. \quad (2.30)$$

Demonstração. Assumiremos que o suporte de ψ é suficientemente pequeno. Em particular, está contido na bola de raio ϵ e centrada na origem, a qual depende de ϕ . Uma vez provada a estimativa (2.30) para essa função ψ , podemos obter (2.30) no caso em que ψ é mais geral por meio de uma soma finita das primeiras estimativas. Temos

$$\overline{I(\lambda)} I(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda[\phi(y)-\phi(x)]} \psi(y) \overline{\psi(x)} dx dy.$$

Faremos a seguinte mudança de variáveis $y = x + u$. Dessa forma, a integral dupla acima se torna

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda[\phi(x+u)-\phi(x)]} \psi(x, u) dx du, \quad (2.31)$$

em que $\psi(x, u) = \psi(x + u) \overline{\psi(x)}$ é uma função C^∞ com suporte compacto. Afirmamos que o suporte de ψ está contido na bola de raio 2ϵ centrada na origem. De fato,

$$\begin{aligned} \text{supp } \psi(x, u) &= \overline{\{u : \psi(x + u) \overline{\psi(x)} \neq 0\}} \\ &= \overline{\{u : \psi(x + u) \neq 0\}} \\ &= \overline{\{y - x : \psi(y) \neq 0\}}. \end{aligned}$$

Assim,

$$u_0 \in \text{supp } \psi(x, u) \Leftrightarrow B_\delta(u_0) \cap \{y - x : \psi(y) \neq 0\} \neq \emptyset, \text{ para qualquer } \delta > 0.$$

Seja $y_0 - x$ pertencente à interseção anterior. Temos

$$|u| \leq |u - (y_0 - x)| + |y_0 - x| < \delta + 2\epsilon.$$

Da arbitrariedade de δ , segue a afirmação.

Portanto, $|I(\lambda)|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} J_\lambda(u) du$, em que

$$J_\lambda(u) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda[\phi(x+u)-\phi(x)]} \psi(x, u) dx.$$

Afirmamos que

$$|J_\lambda(u)| \leq c_N(\lambda|u|)^{-N}, \quad (2.32)$$

para qualquer N inteiro não negativo. A demonstração desse fato é semelhante ao que foi feito na prova da Proposição 77. Lembremos que

$$L(f) = \frac{1}{i\lambda} a \cdot \nabla f \text{ e } W(g) = -\frac{1}{i\lambda} \nabla \cdot (ag).$$

Neste caso,

$$a = \frac{\nabla_x(\phi(x+u) - \phi(x))}{|\nabla_x(\phi(x+u) - \phi(x))|^2} = \frac{b}{|b|^2},$$

em que $b = \nabla_x(\phi(x+u) - \phi(x))$. Note que

$$|b| = |\nabla_x(\phi(x+u) - \phi(x))| \approx |u|, \quad (2.33)$$

se $|u| \leq 2\epsilon^3$. Com efeito, observe que a estimativa $|b| \lesssim |u|$ segue da suavidade de ϕ . Para a estimativa por baixo, usaremos o Teorema de Taylor, segundo o qual

$$\nabla_x(\phi(x+u) - \phi(x)) = \nabla^2\phi(x).u + O(|u|^2).$$

A hipótese (2.29) implica que a transformação linear $\nabla^2\phi$ é invertível. Dessa forma, defina a função $h : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $h(u) = |\nabla^2\phi(x).u|$. Como h é contínua e \mathbb{S}^{n-1} é compacto, existe $c > 0$ tal que $|h(u)| \geq c$, para qualquer $x \in \mathbb{S}^{n-1}$. Assim, dado $u \neq 0$, de forma que $|u| \leq 2\epsilon^3$, segue-se que $\nabla^2\phi(x) \neq 0$, pois $\nabla^2\phi(x)$ é invertível. Concluímos que

$$\left| \nabla^2\phi(x) \left(\frac{u}{|u|} \right) \right| \geq c \Leftrightarrow |\nabla^2\phi(x).u| \geq c|u|.$$

Portanto, se ϵ é suficientemente pequeno,

$$\begin{aligned} |b| &= |\nabla_x(\phi(x+u) - \phi(x))| \\ &= |\nabla_x\phi(x).u + O(|u|^2)| \\ &\geq |\nabla^2\phi(x).u| - O(|u|^2) \\ &\geq c|u| - O(|u|). \end{aligned}$$

Isso implica que $|b| \gtrsim |u|$.

Podemos também provar que $|\partial_x^\alpha b| \leq c_\alpha|u|$, para qualquer multi-índice α . Logo, usando (2.33), chega-se a

$$|\partial_x^\alpha a| \leq c_\alpha|u|^{-1}. \quad (2.34)$$

Dessa forma, temos

$$|W^N(\psi(x, u))| \leq c_N(\lambda|u|)^{-N}, \quad (2.35)$$

para qualquer inteiro não negativo N . Logo

$$J_\lambda(u) = \int_{\mathbb{R}^n} L^N(e^{i\lambda[\phi(x+u)-\phi(x)]})\psi(x, u)dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda[\phi(x+u)-\phi(x)]}W^N(\psi(x, u))dx,$$

e, portanto, por (2.35)

$$|J_\lambda(u)| \leq c_N(\lambda|u|)^{-N},$$

o que prova (2.32).

Finalmente, fazendo $N = 0$ e $N = n + 1$ em (2.32), temos

$$\begin{aligned}
|I(\lambda)|^2 &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |J_\lambda(u)| du \leq \int_{|u| \leq \frac{1}{\lambda}} |J_\lambda(u)| du + \int_{|u| \geq \frac{1}{\lambda}} |J_\lambda(u)| du \\
&\leq c_0 \int_{|u| \leq \frac{1}{\lambda}} 1 du + \frac{c_{n+1}}{\lambda^{n+1}} \int_{|u| \geq \frac{1}{\lambda}} \frac{1}{|u|^{n+1}} du \\
&\leq \frac{c'_0}{\lambda^n} + \frac{c'_N}{\lambda^{n+1}} \int_{\frac{1}{\lambda}}^\infty \frac{1}{\rho^{n+1}} \rho^{n-1} \\
&\leq c\lambda^{-n}.
\end{aligned}$$

□

Observação 85. *i) A conclusão da proposição acima exige apenas que as funções a e ψ sejam de classe C^{n+1} . Além disso, na estimativa $|I(\lambda)| \leq A\lambda^{-\frac{n}{2}}$, a constante A depende apenas das normas C^{n+1} de a e de ψ , do limitante inferior de $|\det\{\nabla^2\phi\}|$ e do diâmetro do suporte de ψ .*

ii) Existe uma versão da Proposição 84 em que assumimos que o posto da Hessiana de ϕ é maior ou igual a m , com $0 < m \leq n$ no suporte de ψ . Nesse caso, a conclusão é

$$I(\lambda) = O(\lambda^{-\frac{m}{2}}), \text{ quando } \lambda \rightarrow \infty.$$

Agora, utilizaremos a Proposição 84 para demonstrar o Lema de Littman, o qual será fundamental nas estimativas para frequências grandes.

Lema 86 (Littman I). *Consideremos a integral oscilatória abaixo, para $\tau \geq \tau_0$, em que τ_0 é um número positivo grande.*

$$\mathfrak{F}^{-1}(e^{-i\tau\phi(\xi)}\psi(\xi))(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x \cdot \xi - \tau\phi(\xi))} \psi(\xi) d\xi.$$

A função amplitude $\psi = \psi(\xi)$ pertence a $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ com suporte em $\{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \in [\frac{1}{2}, 2]\}$. A função $\phi = \phi(\xi)$ é C^∞ em uma vizinhança do suporte de ψ . Além disso, o posto da Hessiana $\nabla^2\phi(\xi)$ satisfaz a hipótese $\text{rank}\nabla^2\phi(\xi) = n$ no suporte de ψ . Então

$$\mathfrak{F}^{-1}(e^{-i\tau\phi(\xi)}\psi(\xi)) = O(\tau^{-\frac{n}{2}}), \text{ quando } \tau \rightarrow \infty.$$

Demonstração. Para cada $x \in \mathbb{R}^n$ fixado, considere

$$I(\tau, x) = I_x(\tau) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\tau\left(\frac{1}{\tau}x \cdot \xi - \phi(\xi)\right)} \psi(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\tau\Phi_x(\xi)} \psi(\xi) d\xi,$$

em que $\Phi(x, \xi) = \Phi_x(\xi) = \frac{1}{\tau}x \cdot \xi - \phi(\xi)$.

Observe que $\nabla^2\Phi_x(\xi) = -\nabla^2\phi(\xi)$ e, portanto, por hipótese,

$$\det \nabla^2\Phi_x(\xi) \neq 0.$$

Além disso, como, para $1 \leq j \leq n$ e u suficientemente pequeno,

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} (\Phi_x(\xi + u) - \Phi_x(\xi)) = \frac{\partial \phi}{\partial \xi_j}(\xi) - \frac{\partial \phi}{\partial \xi_j}(\xi + u),$$

podemos concluir que a norma C^{m+1} de

$$a = \frac{\nabla_{\xi}(\Phi_x(\xi + u) - \Phi_x(\xi))}{|\nabla_{\xi}(\Phi_x(\xi + u) - \Phi_x(\xi))|^2}$$

não depende de x . Dessa forma, pela Proposição 84,

$$I_x(\tau) = O(\tau^{-\frac{n}{2}}), \text{ para } \tau \longrightarrow \infty.$$

Portanto

$$\left| \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x \cdot \xi - \tau \phi(\xi))} \psi(\xi) d\xi \right| \leq C \tau^{-\frac{n}{2}}, \text{ para } \tau \geq \tau_0,$$

em que τ_0 é suficientemente grande. □

Usando o segundo item da Observação 85, podemos obter uma segunda versão do lema de Littman, que pode ser encontrada em [13], Lema 2.1:

Lema 87 (Littman II). *Consideremos a integral oscilatória abaixo, para $\tau \geq \tau_0$, em que τ_0 é um número positivo grande.*

$$\mathfrak{F}^{-1}(e^{-i\tau\phi(\xi)}\psi(\xi))(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x \cdot \xi - \tau \phi(\xi))} \psi(\xi) d\xi.$$

A função amplitude $\psi = \psi(\xi)$ pertence a $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ com suporte em $\{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \in [\frac{1}{2}, 2]\}$. A função $\phi = \phi(\xi)$ é C^∞ em uma vizinhança do suporte de ψ . Além disso, o posto da Hessiana $\nabla^2\phi(\xi)$ satisfaz a hipótese $\text{rank } \nabla^2\phi(\xi) \geq \kappa$ no suporte de ψ , em que $0 < \kappa \leq n$. Então

$$\mathfrak{F}^{-1}(e^{-i\tau\phi(\xi)}\psi(\xi)) = O(\tau^{-\frac{\kappa}{2}}), \text{ quando } \tau \longrightarrow \infty.$$

Capítulo 3

Problema de Cauchy para uma equação de evolução e estimativas $L^p - L^q$

Considere o problema de Cauchy abaixo

$$\begin{cases} u_{tt} + (-\Delta)^\sigma u = 0, & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = 0, u_t(0, x) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (3.1)$$

e suponha que exista uma solução u com a regularidade necessária. Aplicando a transformada de Fourier a $u_{tt} + (-\Delta)^\sigma u = 0$ e usando a Definição 49, temos

$$\mathfrak{F}(u_{tt} + (-\Delta)^\sigma u) = 0.$$

Isso implica que

$$\hat{u}_{tt} + |\xi|^{2\sigma} \hat{u} = 0.$$

Aplicando também a transformada às condições iniciais de (3.1), temos, para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$ fixo, a seguinte equação diferencial ordinária na variável t

$$\begin{cases} \hat{u}_{tt} + |\xi|^{2\sigma} \hat{u} = 0 \\ \hat{u}(0, \xi) = 0 \\ \hat{u}_t(0, \xi) = \hat{u}_1(\xi). \end{cases} \quad (3.2)$$

A solução geral de (3.2) é dada por

$$v(t, \xi) \doteq \hat{u}(t, \xi) = C_1(\xi)e^{i|\xi|^\sigma t} + C_2(\xi)e^{-i|\xi|^\sigma t},$$

em que $C_1(\xi)$ e $C_2(\xi)$ são constantes que dependem de ξ .

Usando as condições iniciais, temos

$$v(t, \xi) = \frac{\hat{u}_1(\xi)}{2i|\xi|^\sigma} (e^{i|\xi|^\sigma t} - e^{-i|\xi|^\sigma t}).$$

Portanto a solução u pode ser escrita como

$$u(t, x) = \mathfrak{F}^{-1} \left(\frac{\hat{u}_1(\xi)}{2i|\xi|^\sigma} (e^{i|\xi|^\sigma t} - e^{-i|\xi|^\sigma t}) \right) (x).$$

Ou ainda

$$u(t, x) = \mathfrak{F}^{-1} \left(\sin(t|\xi|^\sigma) \frac{1}{|\xi|^\sigma} \hat{u}_1(\xi) \right) (x).$$

Teorema 88. *Seja $\psi \in H^{s-\sigma}(\mathbb{R}^n)$, com $s \geq \sigma$ e $n \geq 1$. Então o problema de Cauchy*

$$u_{tt} + (-\Delta)^\sigma u = 0, \quad u(0, x) = 0, \quad u_t(0, x) = \psi(x)$$

possui uma única solução

$$u \in C([0, T], H^s(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0, T], H^{s-\sigma}(\mathbb{R}^n)).$$

Demonstração. Como $\psi \in H^{s-\sigma}$, segue que $\mathfrak{F}(\psi) \in L^{2, s-\sigma}$, isto é, $\langle \xi \rangle^{s-\sigma} \mathfrak{F}(\psi) \in L^2$. Observe também que, se $|\xi| < \epsilon$ e $t \in [0, T]$, pelo limite fundamental, temos $|\sin(|\xi|^\sigma t)| \leq |\xi|^\sigma t \leq |\xi|^\sigma T$. Por outro lado, $|\sin(|\xi|^\sigma t)| \leq 1$, para $|\xi| \geq \epsilon$, $t \in [0, T]$. Dessa forma

$$|v(t, \xi)| = \left| \frac{\sin(|\xi|^\sigma t)}{|\xi|^\sigma} \mathfrak{F}(\psi)(\xi) \right| \leq \frac{C(\epsilon, T) |\mathfrak{F}(\psi)(\xi)|}{\langle \xi \rangle^\sigma}.$$

Logo

$$\langle \xi \rangle^s |v(t, \xi)| \leq C(\epsilon, T) \langle \xi \rangle^{s-\sigma} |\mathfrak{F}(\psi)(\xi)|.$$

Isso implica que $v \in L^\infty((0, T), L^{2, s})$. Da mesma maneira, podemos obter

$$\partial_t v \in L^\infty((0, T), L^{s-\sigma}).$$

Resta mostrar que

$$v \in C([0, T], L^{2, s}) \cap C^1([0, T], L^{2, s-\sigma}).$$

A propriedade $v \in C([0, T], L^{2, s})$ é consequência do seguinte limite

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_2} \|v(t_1, \cdot) - v(t_2, \cdot)\|_{L^{2, s}} = 0,$$

que será demonstrado a seguir.

Temos

$$\begin{aligned} & \lim_{t_1 \rightarrow t_2} \int_{\mathbb{R}^n} |v(t_1, \xi) - v(t_2, \xi)|^2 \langle \xi \rangle^{2s} d\xi = \\ & \lim_{t_1 \rightarrow t_2} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \cos\left(\frac{|\xi|^\sigma(t_1 + t_2)}{2}\right) \sin\left(\frac{|\xi|^\sigma(t_1 - t_2)}{2}\right) \right|^2 \frac{1}{|\xi|^{2\sigma}} |\mathfrak{F}(\psi)(\xi)|^2 \langle \xi \rangle^{2s} d\xi. \end{aligned}$$

Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ uma bola suficientemente grande ao redor da origem com raio R . Assim

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} \left| \cos\left(\frac{|\xi|^\sigma(t_1 + t_2)}{2}\right) \sin\left(\frac{|\xi|^\sigma(t_1 - t_2)}{2}\right) \right|^2 \frac{|\mathfrak{F}(\psi)(\xi)|^2}{|\xi|^{2\sigma}} \langle \xi \rangle^{2s} d\xi \\ &= \int_K \left| \cos\left(\frac{|\xi|^\sigma(t_1 + t_2)}{2}\right) \sin\left(\frac{|\xi|^\sigma(t_1 - t_2)}{2}\right) \right|^2 \frac{|\mathfrak{F}(\psi)(\xi)|^2}{|\xi|^{2\sigma}} \langle \xi \rangle^{2s} d\xi \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n - K} \left| \cos\left(\frac{|\xi|^\sigma(t_1 + t_2)}{2}\right) \sin\left(\frac{|\xi|^\sigma(t_1 - t_2)}{2}\right) \right|^2 \frac{|\mathfrak{F}(\psi)(\xi)|^2}{|\xi|^{2\sigma}} \langle \xi \rangle^{2s} d\xi \end{aligned}$$

Observe que

$$\int_K \left| \cos\left(\frac{|\xi|^\sigma(t_1 + t_2)}{2}\right) \sin\left(\frac{|\xi|^\sigma(t_1 - t_2)}{2}\right) \right|^2 \frac{|\mathfrak{F}(\psi)(\xi)|^2}{|\xi|^{2\sigma}} \langle \xi \rangle^{2s} d\xi$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_K \frac{(t_1 - t_2)^2}{4} |\mathfrak{F}(\psi)(\xi)|^2 \langle \xi \rangle^{2s} d\xi \\
&\leq \int_K \frac{(t_1 - t_2)^2}{4} \|\mathfrak{F}(\psi)\|_{L^{2,s}}^2 d\xi \\
&\leq C_R (t_1 - t_2)^2 \|\mathfrak{F}(\psi)\|_{L^{2,s}}^2,
\end{aligned}$$

para $|t_1 - t_2| < \epsilon(R)$.
Além disso, temos

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n - K} \left| \cos\left(\frac{|\xi|^\sigma(t_1 + t_2)}{2}\right) \sin\left(\frac{|\xi|^\sigma(t_1 - t_2)}{2}\right) \right|^2 \frac{|\mathfrak{F}(\psi)(\xi)|^2 \langle \xi \rangle^{2s}}{|\xi|^{2\sigma}} d\xi \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n - K} \frac{|\mathfrak{F}(\psi)(\xi)|^2 \langle \xi \rangle^{2s}}{|\xi|^{2\sigma}} d\xi \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n - K} \frac{\|\mathfrak{F}(\psi)\|_{L^{2,s}}^2}{|\xi|^{2\sigma}} d\xi \\
&\leq \tilde{\epsilon}(R),
\end{aligned}$$

em que $\lim_{R \rightarrow \infty} \tilde{\epsilon}(R) = 0$.

Logo

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_2} \|v(t_1, \cdot) - v(t_2, \cdot)\|_{L^{2,s}} = 0$$

Isso mostra que $v \in C([0, T], L^{2,s})$ e, portanto, $u \in C([0, T], H^s)$. Usando a mesma argumentação, temos que $v \in C^1([0, T], L^{2,s-\sigma})$, o que implica que $u \in C^1([0, T], H^{s-\sigma})$. \square

O teorema anterior implica que o problema de Cauchy é $H^s(\mathbb{R}^n)$ bem posto, para $s \geq \sigma$.

Observação 89. (*Homogeneidade*) Observe, inicialmente, que se f e g são funções em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tais que

$$g(x) = f(t^{\frac{1}{\sigma}}x),$$

então, pelo item (7) da Proposição 42, tem-se

$$\widehat{g}(\xi) = t^{-\frac{n}{\sigma}} \widehat{f}\left(\frac{\xi}{t^{\frac{1}{\sigma}}}\right)$$

Assim, para cada $t > 0$ e cada $\sigma > 0$, sejam

$$m_{t,\sigma}(\xi) = \frac{\sin(t|\xi|^\sigma)}{|\xi|^\sigma}$$

e

$$m_\sigma(\xi) = m_{1,\sigma}(\xi) = \frac{\sin(|\xi|^\sigma)}{|\xi|^\sigma}.$$

Se $m_\sigma \in M_p^q$, para algum $\sigma > 0$, então

$$\|m_{t,\sigma}\|_{M_p^q} = \sup_{0 \neq f \in \mathcal{S}} \frac{\|\mathfrak{F}^{-1}(m_{t,\sigma}(\xi)\widehat{f}(\xi))(x)\|_{L^q}}{\|f\|_{L^p}} =$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\| \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix \cdot \xi} \frac{\sin(t|\xi|^\sigma)}{|\xi|^\sigma} \widehat{f}(\xi) d\xi \|_{L^q}}{\|f\|_{L^p}} = \\
& \frac{\| \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i(t^{-\frac{1}{\sigma}}x) \cdot \eta} \frac{\sin(|\eta|^\sigma)}{t^{-1}|\eta|^\sigma} \widehat{f}\left(\frac{\eta}{t^{\frac{1}{\sigma}}}\right) t^{-\frac{n}{\sigma}} d\eta \|_{L^q}}{\|f\|_{L^p}} = \\
& \frac{t \|\mathfrak{F}^{-1}\left(\frac{\sin(|\eta|^\sigma)}{|\eta|^\sigma} t^{-\frac{n}{\sigma}} \widehat{f}\left(\frac{\eta}{t^{\frac{1}{\sigma}}}\right)\right)(t^{-\frac{1}{\sigma}}x)\|_{L^q}}{\|f\|_{L^p}} = \\
& \frac{t^{-\frac{n}{p\sigma}} \cdot t \cdot t^{\frac{n}{q\sigma}} \|\mathfrak{F}^{-1}\left(\frac{\sin(|\eta|^\sigma)}{|\eta|^\sigma} t^{-\frac{n}{\sigma}} \widehat{f}\left(\frac{\eta}{t^{\frac{1}{\sigma}}}\right)\right)(x)\|_{L^q}}{(t^{\frac{1}{\sigma}})^{-\frac{n}{p}} \|f\|_{L^p}} = \\
& t^{1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \frac{\|\mathfrak{F}^{-1}\left(\frac{\sin(|\eta|^\sigma)}{|\eta|^\sigma} \widehat{g}(\eta)\right)\|_{L^q}}{\|g\|_{L^p}} = \\
& t^{1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \|m_\sigma\|_{M_p^q},
\end{aligned}$$

em que $g(x) = f(t^{\frac{1}{\sigma}}x)$.

Tendo em vista a observação anterior, para obter estimativas $L^p - L^q$ para a solução do problema (3.1), podemos supor, por homogeneidade, que $t = 1$. Seja $\chi \in C_0^\infty$ tal que $\chi(\xi) = 1$, para $|\xi| \leq \frac{1}{2}$, $\chi(\xi) = 0$ se $|\xi| \geq 1$, e $\chi(\xi) \in [0, 1]$. Assim, mostraremos que, para frequências pequenas, $\frac{\chi(\xi)\sin(|\xi|^\sigma)}{|\xi|^\sigma} \in M_p^q$, $1 \leq p \leq q \leq \infty$, e, para frequências grandes, $\frac{(1-\chi(\xi))\sin(|\xi|^\sigma)}{|\xi|^\sigma} \in M_p^q$, em que $1 \leq p \leq q \leq \infty$ e

$$\frac{n}{\sigma} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) + n \max \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right), \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2} \right) \right\} < 1.$$

Isto é, provaremos o seguinte teorema:

Teorema 90. *Seja $\sigma > 0$ e $\sigma \neq 1$. Se $u_1 \in L^p$, então a solução u para o problema de Cauchy (3.1) satisfaz a seguinte estimativa*

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^q} \lesssim t^{1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \|u_1\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall t > 0, \quad (3.3)$$

para todo $1 \leq p \leq q \leq \infty$ satisfazendo

$$\frac{n}{\sigma} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) + n \max \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right), \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2} \right) \right\} < 1.$$

Para demonstrar esse teorema, analisaremos, separadamente, frequências pequenas e grandes.

3.1 Freqüências pequenas

Nesta parte, provaremos dois resultados diferentes para as estimativas de freqüências baixas, sendo o segundo mais forte que o primeiro, de forma a seguir a ordem natural em que foi construído este projeto. Num primeiro momento, utilizaremos fortemente um resultado devido a Mikhlin e Hörmander para demonstrar que $m_\sigma(\xi) \doteq \frac{\chi(|\xi|)\sin(|\xi|^\sigma)}{|\xi|^\sigma} \in M_p^q$, para $1 < p \leq q < \infty$. Em seguida, usando técnicas diferentes, provaremos um resultado mais forte que garante que $\frac{\chi(|\xi|)\sin(|\xi|^\sigma)}{|\xi|^\sigma} \in M_p^q$, para quaisquer p e q que satisfazem $p \leq q$.

Proposição 91. *Para $1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty$, temos*

$$\frac{\chi(|\xi|)\sin(|\xi|^\sigma)}{|\xi|^\sigma} \in M_p^q$$

Demonstração. Seja r tal que

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{q'} - \frac{1}{p'} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}.$$

Observe que, para $r < \infty$, temos

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\chi(|\xi|)\sin(|\xi|^\sigma)}{|\xi|^\sigma} \right\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\chi(|\xi|)\sin(|\xi|^\sigma)}{|\xi|^\sigma} \right|^r d\xi \right)^{\frac{1}{r}} \\ &= \left(\int_{|\xi| \leq 1} \left| \frac{\chi(|\xi|)\sin(|\xi|^\sigma)}{|\xi|^\sigma} \right|^r d\xi + \int_{|\xi| \geq 1} \left| \frac{\chi(|\xi|)\sin(|\xi|^\sigma)}{|\xi|^\sigma} \right|^r d\xi \right)^{\frac{1}{r}} \\ &= \left(\int_{|\xi| \leq 1} \left| \frac{\sin(|\xi|^\sigma)}{|\xi|^\sigma} \right|^r d\xi \right)^{\frac{1}{r}} \\ &\lesssim 1. \end{aligned}$$

De fato, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de forma que, se $0 < |\xi| < \delta$, então

$$\left| \frac{\sin(|\xi|^\sigma)}{|\xi|^\sigma} \right| < \epsilon + 1.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left(\int_{|\xi| \leq 1} \left| \frac{\sin(|\xi|^\sigma)}{|\xi|^\sigma} \right|^r d\xi \right)^{\frac{1}{r}} &= \left(\int_{|\xi| < \delta} \left| \frac{\sin(|\xi|^\sigma)}{|\xi|^\sigma} \right|^r d\xi + \int_{\delta \leq |\xi| < 1} \left| \frac{\sin(|\xi|^\sigma)}{|\xi|^\sigma} \right|^r d\xi \right)^{\frac{1}{r}} \\ &\leq \int_{|\xi| < \delta} (\epsilon + 1)^r d\xi + \int_{\delta \leq |\xi| < 1} \frac{1}{|\xi|^{r\sigma}} \\ &\leq C. \end{aligned}$$

Se $r = \infty$, como $\frac{\chi(|\xi|)\sin(|\xi|^\sigma)}{|\xi|^\sigma}$ é limitado, temos

$$\left\| \frac{\sin(|\xi|^\sigma)}{|\xi|^\sigma} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \lesssim 1.$$

Agora, dada uma função $\psi \in \mathcal{S}$, pela desigualdade de Hausdorff-Young e de Hölder, concluímos que

$$\begin{aligned} \left\| \mathfrak{F}^{-1} \left(\frac{\sin(|\xi|^\sigma)}{|\xi|^\sigma} \right) * \psi \right\|_{L^q} &\lesssim \left\| \frac{\sin(|\xi|^\sigma)}{|\xi|^\sigma} \cdot \widehat{\psi}(\xi) \right\|_{L^{q'}} \\ &\lesssim \left\| \frac{\sin(|\xi|^\sigma)}{|\xi|^\sigma} \right\|_{L^r} \|\widehat{\psi}\|_{L^{p'}} \\ &\lesssim \|\psi\|_{L^p} \end{aligned}$$

Isso mostra que

$$\frac{\chi(|\xi|) \sin(|\xi|^\sigma)}{|\xi|^\sigma} \in M_p^q,$$

para $1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty$. □

A seguir, enunciamos o lema que será usado na próxima proposição.

Lema 92. (*Mikhlin-Hörmander*) *Sejam $1 < p < \infty$ e*

$$k = \max \{ [n(1/p - 1/2)] + 1, [n/2] + 1 \}.$$

Suponha que $m \in C^k(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ e

$$\left| \partial_\xi^\beta m(\xi) \right| \leq C |\xi|^{-|\beta|}, \quad |\beta| \leq k.$$

Então $m \in M_p$.

Proposição 93. *Para $1 < q < \infty$ temos*

$$\frac{\chi(|\xi|) \sin(|\xi|^\sigma)}{|\xi|^\sigma} \in M_q^q.$$

Demonstração. Sejam α um multi-índice e $\xi \neq 0$. Usando as regras da cadeia e de Leibniz, é fácil ver que

$$\partial_j^n |\xi|^{-\sigma} = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} C_k \xi_j^{2k} |\xi|^{-\sigma-(n+2k)}, & \text{se } n \text{ é par} \\ \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \widetilde{C}_k \xi_j^{2k+1} |\xi|^{-\sigma-(n+1+2k)}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} \quad (3.4)$$

Logo, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, existe uma constante C_n tal que

$$|\partial_j^n |\xi|^{-\sigma}| \leq C_n |\xi|^{-\sigma-n}.$$

Agora usamos (3.4) repetidas vezes para obter uma constante C_α de forma que

$$|\partial^\alpha |\xi|^{-\sigma}| \leq C_\alpha |\xi|^{-\sigma-|\alpha|}.$$

Analogamente, mostra-se que, para $0 < |\xi| \leq R$, existe uma constante $C_{\alpha,R}$ tal que

$$\partial^\alpha \sin(|\xi|^\sigma) \leq C_{\alpha,R} |\xi|^{\sigma-|\alpha|}. \quad (3.5)$$

Logo, para $0 < |\xi| \leq R$, pela regra da cadeia, temos

$$\begin{aligned} \partial^\alpha \left(\frac{\sin(|\xi|^\sigma)}{|\xi|^\sigma} \right) &= \partial^\alpha (|\xi|^{-\sigma} \sin(|\xi|^\sigma)) \\ &= \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdots \binom{\alpha_n}{\beta_n} \partial^{\alpha-\beta} (|\xi|^{-\sigma}) \partial^\beta (\sin(|\xi|^\sigma)). \\ &= \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \binom{\beta_1+\gamma_1}{\beta_1} \cdots \binom{\beta_n+\gamma_n}{\beta_n} \partial^\gamma (|\xi|^{-\sigma}) \partial^\beta (\sin(|\xi|^\sigma)). \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \left| \partial^\alpha \left(\frac{\sin(|\xi|^\sigma)}{|\xi|^\sigma} \right) \right| &\leq \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \binom{\beta_1+\gamma_1}{\beta_1} \cdots \binom{\beta_n+\gamma_n}{\beta_n} |\partial^\gamma (|\xi|^{-\sigma})| |\partial^\beta (\sin(|\xi|^\sigma))| \\ &\leq \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \binom{\beta_1+\gamma_1}{\beta_1} \cdots \binom{\beta_n+\gamma_n}{\beta_n} C_\gamma C_{\beta,R} |\xi|^{-\sigma-|\gamma|} |\xi|^{\sigma-|\beta|} \\ &= \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \binom{\beta_1+\gamma_1}{\beta_1} \cdots \binom{\beta_n+\gamma_n}{\beta_n} C_\gamma C_{\beta,R} |\xi|^{-(|\gamma|+|\beta|)} \\ &= \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \binom{\beta_1+\gamma_1}{\beta_1} \cdots \binom{\beta_n+\gamma_n}{\beta_n} C_\gamma C_{\beta,R} |\xi|^{-|\alpha|} \\ &\leq \tilde{C}_{\alpha,R} |\xi|^{-|\alpha|}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\left| \partial^\alpha \left(\frac{\chi(|\xi|) \sin(|\xi|^\sigma)}{|\xi|^\sigma} \right) \right| \leq \tilde{C}_{\alpha,R} |\xi|^{-|\alpha|},$$

para qualquer α multi-índice. Pelo lema de Mikhlin-Hörmander (lema 92), temos o resultado desejado. \square

Assim, interpolando as proposições 91 e 93, concluímos que $\frac{\chi(|\xi|) \sin(|\xi|^\sigma)}{|\xi|^\sigma} \in M_p^q$, para $1 < p \leq q < \infty$.

Como dito no início desta subseção, o resultado provado anteriormente não é o melhor possível, isto é, podemos utilizar outras técnicas para mostrar o resultado para $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Isso será feito na sequência.

Observe que

$$\frac{\sin(x)}{x} = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!}, \quad x \in \mathbb{R} - \{0\},$$

com raio de convergência $r = \infty$. Então, redefinindo a função na origem, vemos que $\frac{\sin(x)}{x}$ é uma função analítica. Definindo $x = |\xi|^\sigma$, temos

$$\frac{\sin(|\xi|^\sigma)}{|\xi|^\sigma} = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k |\xi|^{2\sigma k}}{(2k+1)!} = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k \{\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2\}^{\sigma k}}{(2k+1)!}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (3.6)$$

Se $\sigma \in \mathbb{N}$, então (3.6) define uma função analítica de várias variáveis. Logo, $\frac{\chi(|\xi|) \sin(|\xi|^\sigma)}{|\xi|^\sigma} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, desde que $\sigma \in \mathbb{N}$. Portanto, pela desigualdade de Young, para $q \geq 1$, $p \leq q$ e $\sigma \in \mathbb{N}$, temos

$$\|\mathfrak{F}^{-1}\{m_\sigma(\xi)\} * \phi\|_{L^q} \leq \|\mathfrak{F}^{-1}\{m_\sigma(\xi)\}\|_{L^r} \|\phi\|_{L^p},$$

para qualquer $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Agora, se $\sigma > 0$, usando derivação termo a termo, (3.4) e (3.6), chega-se a

$$|\partial_\xi^\alpha m_\sigma(\xi)| \leq C|\xi|^{2\sigma-|\alpha|}, \quad \xi \neq 0.$$

Além disso, é fácil ver que

$$e^{ix \cdot \xi} = - \sum_{j=1}^n \frac{ix_j}{|x|^2} \partial_{\xi_j} e^{ix \cdot \xi}. \quad (3.7)$$

Seja α um multi-índice. Integrando por partes $|\alpha|$ vezes e usando (3.7), podemos escrever

$$\mathfrak{F}^{-1}\{m_\sigma\}(x) = (2\pi)^{-n} \left(\sum_{j=1}^n \frac{ix_j}{|x|^2} \right)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \partial_\xi^\alpha m_\sigma(\xi) d\xi. \quad (3.8)$$

Se $2\sigma > 1$, consideremos $|\alpha| = n + 1$. Assim

$$|\mathfrak{F}^{-1}\{m_\sigma\}(x)| \leq C|x|^{-n-1} \int_{\text{supp}(\chi)} |\xi|^{2\sigma-n-1} d\xi \leq C|x|^{-n-1}.$$

Agora, mostraremos que $\mathfrak{F}^{-1}\{m_\sigma\} \in L^r$, para $r \geq 1$. De fato, como $\mathfrak{F}^{-1}\{m_\sigma\}$ é limitada,

$$\mathfrak{F}^{-1}\{m_\sigma\} \in L^\infty.$$

Para $r \in [1, \infty)$, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\mathfrak{F}^{-1}\{m_\sigma\}(x)|^r dx &= \int_{|x| \leq 1} |\mathfrak{F}^{-1}\{m_\sigma\}(x)|^r dx + \int_{|x| > 1} |\mathfrak{F}^{-1}\{m_\sigma\}(x)|^r dx \\ &\leq C_1 + C_2 \int_{|x| > 1} |x|^{-r(n+1)} dx \\ &< \infty, \end{aligned}$$

pois $r(n+1) > n$. Logo, $\mathfrak{F}^{-1}\{m_\sigma\} \in L^r$ se, $r \in [1, \infty)$.

Portanto, se $2\sigma > 1$, $q \geq 1$ e $p \leq q$, temos

$$\|\mathfrak{F}^{-1}\{m_\sigma(\xi)\} * \phi\|_{L^q} \leq \|\mathfrak{F}^{-1}\{m_\sigma(\xi)\}\|_{L^r} \|\phi\|_{L^p}, \quad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Observe que, nas demonstrações acima, não contemplamos o caso $0 < 2\sigma \leq 1$. Para fazer isso, precisamos utilizar integração por partes uma vez a mais em

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \partial_\xi^\alpha m_\sigma(\xi) d\xi$$

e, em seguida, estimar três integrais, das quais uma é integral de superfície.

Assim, sejam $0 < 2\sigma < 1$ e $|\alpha| = n$. Para $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \partial_\xi^\alpha m_\sigma(\xi) d\xi &= \int_{|\xi| \leq |x|^{-1}} e^{ix \cdot \xi} \partial_\xi^\alpha m_\sigma(\xi) d\xi + \int_{|\xi| > |x|^{-1}} e^{ix \cdot \xi} \partial_\xi^\alpha m_\sigma(\xi) d\xi \\ &= \int_{|\xi| \leq |x|^{-1}} e^{ix \cdot \xi} \partial_\xi^\alpha m_\sigma(\xi) d\xi - \sum_{j=1}^n \frac{ix_j}{|x|^2} \int_{|\xi| > |x|^{-1}} \partial_{\xi_j} e^{ix \cdot \xi} \partial_\xi^\alpha m_\sigma(\xi) d\xi \end{aligned}$$

Estimaremos, separadamente, as integrais acima.

Para estimar a primeira integral, basta utilizar coordenadas radiais. Com efeito,

$$\begin{aligned} \int_{|\xi| \leq |x|^{-1}} |e^{ix \cdot \xi} \partial_\xi^\alpha m_\sigma(\xi)| d\xi &\leq C \int_{|\xi| \leq |x|^{-1}} |\xi|^{2\sigma-n} d\xi \\ &= C_1 |x|^{-2\sigma}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Agora, integrando por partes,

$$\begin{aligned} &\int_{|\xi| > |x|^{-1}} \partial_{\xi_j} e^{ix \cdot \xi} \partial_\xi^\alpha m_\sigma(\xi) d\xi = \\ &- \int_{|\xi| > |x|^{-1}} e^{ix \cdot \xi} \partial_{\xi_j} \partial_\xi^\alpha m_\sigma(\xi) d\xi + \int_{|\xi|=|x|^{-1}} e^{ix \cdot \xi} \partial_\xi^\alpha m_\sigma(\xi) n_i(\xi) d\nu(\xi) \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} &\int_{|\xi| > |x|^{-1}} e^{ix \cdot \xi} \partial_\xi^\alpha m_\sigma(\xi) d\xi = \\ &\sum_{j=1}^n \frac{ix_j}{|x|^2} \int_{|\xi| > |x|^{-1}} e^{ix \cdot \xi} \partial_{\xi_j} \partial_\xi^\alpha m_\sigma(\xi) d\xi - \sum_{j=1}^n \frac{ix_j}{|x|^2} \int_{|\xi|=|x|^{-1}} e^{ix \cdot \xi} \partial_\xi^\alpha m_\sigma(\xi) n_i(\xi) d\nu(\xi) \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} &\left| \int_{|\xi| > |x|^{-1}} e^{ix \cdot \xi} \partial_\xi^\alpha m_\sigma(\xi) d\xi \right| \leq \\ &|x|^{-1} \int_{|\xi| > |x|^{-1}} |\partial_{\xi_j} \partial_\xi^\alpha m_\sigma(\xi)| d\xi + |x|^{-1} \int_{|\xi|=|x|^{-1}} |\partial_\xi^\alpha m_\sigma(\xi)| d\nu(\xi) \leq \\ &|x|^{-1} \int_{|\xi| > |x|^{-1}} |\partial_{\xi_j} \partial_\xi^\alpha m_\sigma(\xi)| d\xi + |x|^{-1} \int_{|\xi|=|x|^{-1}} |\xi|^{2\sigma-n} d\nu(\xi). \end{aligned}$$

Note que

$$\int_{|\xi|=|x|^{-1}} |\xi|^{2\sigma-n} d\nu(\xi)$$

é uma integral de superfície. Calculemo-la.

Se $n = 1$, temos

$$\begin{aligned} \int_{|\xi| > |x|^{-1}} e^{ix \cdot \xi} m'_\sigma(\xi) d\xi &= -\frac{1}{x} \int_{|x|^{-1}}^1 \frac{d}{d\xi} (e^{ix \cdot \xi}) \frac{d}{d\xi} m_\sigma(\xi) d\xi \\ &= -\frac{1}{x} \left(- \int_{|x|^{-1}}^1 e^{ix \cdot \xi} \frac{d^2}{d\xi^2} m_\sigma(\xi) + [e^{ix \cdot \xi} \frac{1}{d\xi} m_\sigma(\xi)]_{\xi=|x|^{-1}}^{\xi=1} \right) \\ &= \frac{1}{x} e^{ix \cdot |x|^{-1}} \frac{d}{d\xi} m_\sigma(|x|^{-1}) + \frac{1}{x} \int_{|x|^{-1}}^1 e^{ix \cdot \xi} \frac{d^2}{d\xi^2} m_\sigma(\xi). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\left| \int_{|x|^{-1}}^1 e^{ix \cdot \xi} \frac{d}{d\xi} m_\sigma(\xi) d\xi \right| &\leq \frac{1}{|x|} \left| \frac{d}{d\xi} m_\sigma(|x|^{-1}) \right| + \frac{1}{|x|} \int_{|x|^{-1}}^1 \left| \frac{d^2}{d\xi^2} m_\sigma(\xi) \right| d\xi \\
&\leq \frac{C}{|x|} (|x|^{-1})^{2\sigma-1} + \frac{C}{|x|} \int_{|x|^{-1}}^1 |\xi|^{2\sigma-2} d\xi \\
&= C|x|^{-2\sigma} + \frac{C}{|x|} \int_{|x|^{-1}}^1 |\xi|^{2\sigma-2} d\xi \\
&\leq \begin{cases} \tilde{C}|x|^{-2\sigma}, & \text{se } 2\sigma < 1 \\ C(|x|^{-2\sigma} + |x|^{-1} \log(|x|)), & \text{se } 2\sigma = 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Agora, se $n > 1$, seja

$$M = \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| = |x|^{-1}\}.$$

Sejam M^+ e M^- , respectivamente, os hemisférios superior e inferior de M . Assim, se Σ^+ é uma parametrização de M^+ e $f(\xi) = |\xi|^{2\sigma-n}$, temos, usando o Exemplo 102,

$$\begin{aligned}
\int_{M^+} |\xi|^{2\sigma-n} d\nu(\xi) &= \int_{M^+} f(\xi) d\nu(\xi) \\
&= \int_{|y| < |x|^{-1}} f(\Sigma^+(y)) \frac{|x|^{-1}}{\sqrt{|x|^{-2} - |y|^2}} dy \\
&= \int_{|y| < |x|^{-1}} |x|^{-2\sigma+n} \frac{|x|^{-1}}{\sqrt{|x|^{-2} - |y|^2}} dy \\
&= |x|^{-2\sigma+n-1} \int_{|y| < |x|^{-1}} \frac{1}{\sqrt{|x|^{-2} - |y|^2}} dy \\
&= C_2 |x|^{-2\sigma+n-1} \int_{\rho < |x|^{-1}} \frac{1}{\sqrt{|x|^{-2} - \rho^2}} \rho^{n-2} d\rho \\
&\leq C_2 |x|^{-2\sigma+n-1} |x|^{2-n} \int_{\rho < |x|^{-1}} \frac{1}{\sqrt{|x|^{-2} - \rho^2}} d\rho \\
&\leq \tilde{C}_2 |x|^{-2\sigma+1}
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\int_{M^-} f(\xi) d\nu(\xi) = \int_{M^+} f(\xi) d\nu(\xi).$$

Isso implica que

$$|x|^{-1} \int_{|\xi|=|x|^{-1}} |\xi|^{2\sigma-n} d\nu(\xi) \lesssim |x|^{-2\sigma}. \quad (3.10)$$

Finalmente, usando de novo coordenadas radiais,

$$\begin{aligned}
|x|^{-1} \int_{|\xi| > |x|^{-1}} |\partial_{\xi_j} \partial_\xi^\alpha m_\sigma(\xi)| d\xi &\leq |x|^{-1} \int_{|x|^{-1} < |\xi| < 1} |\xi|^{2\sigma-n-1} d\xi \\
&= \begin{cases} C_3 |x|^{-2\sigma}, & \text{se } 2\sigma < 1 \\ C_3 |x|^{-1} \log(|x|), & \text{se } 2\sigma = 1. \end{cases} \\
&\leq \begin{cases} C_3 |x|^{-2\sigma}, & \text{se } 2\sigma < 1 \\ C_3 |x|^{-1+\epsilon}, & \text{se } 2\sigma = 1, \end{cases}
\end{aligned} \quad (3.11)$$

em que $0 < \epsilon < 1$.

Dessa forma, por (3.8), (3.9), (3.10) e (3.11), temos

$$|\mathfrak{F}^{-1}\{m_\sigma\}(x)| \lesssim \begin{cases} |x|^{-n-2\sigma}, & \text{se } 2\sigma < 1 \\ |x|^{-n-2\sigma} + |x|^{-n-1+\epsilon}, & \text{se } 2\sigma = 1, \end{cases}$$

em que $0 < \epsilon < 1$.

Isso mostra que $\mathfrak{F}^{-1}\{m_\sigma\} \in L^r$, para qualquer $r \geq 1$. Logo, se $\sigma > 0$, $q \geq 1$ e $p \leq q$, temos

$$\|\mathfrak{F}^{-1}\{m_\sigma\} * \phi\|_{L^q} \leq \|\mathfrak{F}^{-1}\{m_\sigma\}\|_{L^r} \|\phi\|_{L^p}, \quad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

3.2 Frequências grandes

Utilizaremos o lema de Littman I (Lema 86) para obter estimativas $L^\infty - L^\infty$ para integrais oscilatórias. Para isso, escolhemos $0 \leq \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ com suporte em $\{x : \frac{1}{2} < |x| < 2\}$. Definimos $\phi_k(x) := \phi(2^{-k}x)$, para k inteiro, e assumimos que

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \phi_k(x) = 1, \quad x \neq 0.$$

(Para a existência de uma função como essa, veja [8]).

Seja $\eta \doteq 2^{-k}\xi$ (e, portanto, $d\eta = 2^{-kn}d\xi$). Assim

$$\left\| \mathfrak{F}^{-1} \left(e^{i|\xi|^\sigma} \frac{\phi_k(|\xi|)}{|\xi|^\sigma} \right) \right\|_{L^\infty} = 2^{k(n-\sigma)} \left\| \mathfrak{F}^{-1} \left(e^{i2^{\sigma k}|\eta|^\sigma} \frac{\phi(|\eta|)}{|\eta|^\sigma} \right) \right\|_{L^\infty}.$$

Seja $\rho(\eta) = |\eta|^\sigma$. Então $\kappa \doteq \text{rank } H_\rho(\eta) = \begin{cases} n, & \sigma > 1 \\ n-1, & \sigma = 1 \end{cases}$.

Logo, o lema de Littman implica que

$$2^{k(n-\sigma)} \left\| \mathfrak{F}^{-1} \left(e^{i2^{k\sigma}|\eta|^\sigma} \frac{\phi(|\eta|)}{|\eta|^\sigma} \right) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \lesssim 2^{k(n-\sigma)} (2^{k\sigma})^{-\frac{n}{2}} = 2^{k(n-\sigma-\frac{n\sigma}{2})}. \quad (3.12)$$

para k inteiro.

Portanto

$$\left\| \mathfrak{F}^{-1} \left(e^{i|\xi|^\sigma} \frac{\phi_k(|\xi|)}{|\xi|^\sigma} \right) \right\|_{L^\infty} \leq C 2^{k(n-\sigma-\frac{n\sigma}{2})}.$$

Dessa forma, pela desigualdade de Young (Teorema 18), temos

$$\begin{aligned} \left\| \mathfrak{F}^{-1}(m(\xi)\phi_k(|\xi|)\mathfrak{F}(u_1)) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} &= \left\| \mathfrak{F}^{-1}(m(\xi)\phi_k(|\xi|)) * u_1 \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \left\| \mathfrak{F}^{-1}(m(\xi)\phi_k(|\xi|)) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|u_1\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C 2^{k(n-\sigma-\frac{n\sigma}{2})} \|u_1\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned}$$

em que $m(\xi) = (1 - \chi(|\xi|)) \frac{e^{i|\xi|^\sigma}}{|\xi|^\sigma}$.

Defina

$$m_k(\xi) \doteq \phi_k(|\xi|)m(\xi).$$

Pela definição de norma nos espaços M_p^q ,

$$\|m_k\|_{M_1^\infty} \leq C 2^{k(n-\sigma-\frac{n\sigma}{2})}. \quad (3.13)$$

Agora, usando o fato de que $M_2 = L^\infty$ e fazendo $\eta = 2^{-k}\xi$, obtemos

$$\begin{aligned} \|m_k\|_{M_2^2} &= \|m_k\|_{L^\infty} \\ &= \inf\{C : |\phi_k(|\xi|).m(\xi)| \leq C \text{ q.t.p, } \xi \in \mathbb{R}^n\} \\ &= \inf\{C : |\phi(2^{-k}|\xi|).m(\xi)| \leq C \text{ q.t.p, } \xi \in \mathbb{R}^n\} \\ &= \inf\{C : |\phi(|\eta|).m(2^k\eta)| \leq C \text{ q.t.p, } \eta \in \mathbb{R}^n\} \\ &= 2^{-k\sigma} \inf\{C : |\phi(|\eta|)| \leq C \text{ q.t.p, } \eta \in \mathbb{R}^n\} \\ &= 2^{-k\sigma} \|\phi\|_{L^\infty} \\ &\leq C 2^{-k\sigma}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

pois $\text{supp}(\phi) \subseteq \{\xi \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{2} \leq |\xi| \leq 2\}$.

Usando (3.13), (3.14) e o teorema da interpolação de Riesz-Thorin ($L^2 - L^2$ e $L^1 - L^\infty$),

$$\|m_k\|_{M_{p_0}^{q_0}} \leq C 2^{k(-\sigma + (\frac{1}{p_0} - \frac{1}{2})(n(2-\sigma)))}, \quad (3.15)$$

para $\frac{1}{p_0} + \frac{1}{q_0} = 1$.

Por dualidade, é suficiente provar o teorema (90) para $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$.

Note que, fazendo a mudança $\eta = 2^{-k}\xi$, temos

$$\begin{aligned} \|m_k\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} |\phi_k(|\xi|)m(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\phi(2^{-k}|\xi|)m(\xi)|^2 d\xi \\ &= 2^{nk} \int_{\mathbb{R}^n} |\phi(|\eta|)m(2^k\eta)|^2 d\eta \\ &= 2^{nk} \int_{\frac{1}{2} < |\eta| < 1} \left| \phi(|\eta|) \frac{1 - \chi(2^k|\eta|)}{2^{k\sigma}|\eta|^\sigma} \right|^2 d\eta \\ &= 2^{nk} \cdot 2^{-2k\sigma} \int_{\frac{1}{2} < |\eta| < 1} \left| \phi(|\eta|) \frac{1 - \chi(2^k|\eta|)}{|\eta|^\sigma} \right|^2 d\eta \\ &\lesssim 2^{nk} \cdot 2^{-2k\sigma}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|m_k\|_{L^2} \lesssim 2^{\frac{nk}{2}} \cdot 2^{-k\sigma}.$$

Além disso, se $F(u) = \frac{e^{iu}}{u}$, é fácil mostrar que $|D^M F(u)| \leq C_M u^{-1}$. Portanto, como $m(\xi) = (1 - \chi(|\xi|))F(|\xi|^\sigma)$, pela regra da cadeia, temos

$$|D^N m(\xi)| \leq C'_N |\xi|^{N(\sigma-1)-1},$$

o que implica que

$$\|D^N m_k\|_{L^2}^2 \leq C'_N \int_{2^{k-1} \leq |\xi| \leq 2^{k+1}} |\xi|^{2N(\sigma-1)-2\sigma} d\xi \leq C''_N 2^{2k(N(\sigma-1)-\sigma-\frac{n}{2})}.$$

Aplicando a desigualdade de Bernstein para $N > \frac{n}{2}$, temos

$$\|m_k\|_{M_1} \leq \|m_k\|_{L^2}^{(1-\frac{n}{2N})} \|D^N m_k\|_{L^2}^{\frac{n}{2N}} \leq C 2^{k\sigma(\frac{n}{2}-1)}. \quad (3.16)$$

Usando (3.15), (3.16) e novamente o teorema de interpolação de Riesz-Thorin ($L^{p_0} - L^{q_0}$ e $L^1 - L^1$), concluimos que

$$\begin{aligned} \|m_k\|_{M_p^q} &\leq C 2^{k(-\sigma + (\frac{1}{p_0} - \frac{1}{2})(n(2-\sigma)))(1-\theta)} 2^{k\sigma(\frac{n}{2}-1)\theta} \\ &= C 2^{kn(\frac{1}{p} + \frac{\sigma-1}{q} - \sigma(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}))}, \end{aligned}$$

em que $0 < \theta < 1$, $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \theta$ e $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \theta$.

Portanto, para frequências grandes e k_0 fixado, usando a decomposição diádica $\phi_k(|\xi|) = \phi(2^{-k}|\xi|)$, $k \geq 1$, com $\text{supp}(\phi_k) \subseteq \{\xi \in \mathbb{R}^n : 2^{k-1} \leq |\xi| \leq 2^{k+1}\}$, temos

$$\|m\|_{M_p^q} \leq C \sum_{k \geq k_0} \|m_k\|_{M_p^q},$$

que é convergente, pois

$$\begin{aligned} \frac{n}{\sigma} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) + n \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2} \right) &< 1 \Leftrightarrow \\ \frac{1}{p} - \frac{1}{q} + \sigma \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2} \right) &< \frac{\sigma}{n} \Leftrightarrow \\ \frac{1}{p} + \frac{\sigma-1}{q} - \frac{\sigma}{2} &< \frac{\sigma}{n} \Leftrightarrow \\ \frac{1}{p} + \frac{\sigma-1}{q} - \sigma \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \right) &< 0. \end{aligned}$$

Dessa forma, está demonstrado o Teorema (90)

Capítulo 4

Equação da onda

Agora, considere o problema de Cauchy abaixo

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = 0, u_t(0, x) = g(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Sejam $m(\xi) = (1 - \chi(|\xi|)) \cdot \frac{e^{i|\xi|}}{|\xi|}$ e $m_k(\xi) = \phi_k(|\xi|) \cdot m(\xi)$. Em [12], o autor demonstra que

(i) $m \in M_p^q$ se, e somente se, $1 < p \leq q < \infty$ e

$$n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) + (n-1) \max\left\{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right), \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2}\right)\right\} \leq 1;$$

(ii) $m \in M_p^\infty$, $1 < p < \infty$, se, e somente se, $2 < (3-n)p$;

(iii) $m \in M_1^q$, $1 < q < \infty$, se, e somente se, $(n-1)q < 2$;

(iv) $m \in M_1^1 = M_\infty^\infty$ se, e somente se, $n = 1$ ou $n = 2$.

A seguir, faremos uma demonstração alternativa para uma versão fraca desse resultado. Poderíamos tentar reproduzir a demonstração da seção anterior no caso $\sigma = 1$ do problema (3.1). Para frequências pequenas, não haveria problema algum. Isto é, podemos mostrar, de forma análoga ao que foi feito na seção anterior, que $\frac{\chi(|\xi|)\sin(|\xi|)}{|\xi|} \in M_p^q$, para $1 \leq p \leq q \leq \infty$. No entanto, para frequências grandes, não obteríamos estimativas ótimas. Vejamos.

Pelo lema de Littman II (87), temos

$$\|m_k\|_{M_1^\infty} \lesssim 2^{\frac{k(n-1)}{2}}.$$

Além disso, como $M_2 = L^\infty$,

$$\|m_k\|_{M_2} \lesssim 2^{-k}.$$

Interpolando, chegamos a

$$\|m_k\|_{M_{p_0}^{q_0}} \lesssim 2^{k\left(\frac{n+1}{p_0} - \frac{n+3}{2}\right)},$$

para $\frac{1}{p_0} + \frac{1}{q_0} = 1$.

Pela desigualdade de Bernstein, para $N > \frac{n}{2}$,

$$\|m_k\|_{M_1} \lesssim 2^k \binom{\frac{n}{2}-1}{k}.$$

Entretanto, as estimativas em [14] e [17] implicam que deveríamos obter

$$\|m_k\|_{M_1} \lesssim 2^k \binom{\frac{n-1}{2}-1}{k}.$$

Provaremos agora o principal resultado desta seção. Antes de provarmos o teorema, precisamos do seguinte lema.

Lema 94. *Se $0 < \delta < 1$, seja*

$$\widehat{b}(\xi) = (1 - \chi(|\xi|))|\xi|^{-\left(\frac{n-1}{2}+\delta\right)} e^{i|\xi|}.$$

Então, temos:

$$b \in L_{loc}^\infty(|x| \neq 1), \quad (4.1)$$

$$b(x) = b_1(x) + C(\operatorname{sgn}(1 - |x|))|1 - |x||^{\delta-1}(1 + o(1)), \quad |x| \rightarrow 1, \quad (4.2)$$

em que $b_1 \in L^\infty$, e

$$b(x) = O(|x|^{-N}), \quad |x| \rightarrow \infty, \quad (4.3)$$

para qualquer N .

A demonstração do resultado anterior pode ser encontrada na página 346 de [16].

Teorema 95. *Seja $u_1 \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Se $1 \leq p \leq q \leq \infty$ e*

$$n \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) + (n-1) \max \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right), \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2} \right) \right\} < 1 \quad (4.4)$$

então o problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & x \in \mathbb{R}^n \quad t > 0 \\ u(0, x) = 0 \\ u_t(0, x) = u_1(x). \end{cases} \quad (4.5)$$

satisfaz as seguintes estimativas $L^p - L^q$

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \lesssim t^{1-n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \|u_1\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

uniformemente para $t > 0$.

Observação 96. *Para $n = 1$, usando a fórmula de D'Alembert*

$$u(t, x) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} u_1(s) ds,$$

conclui-se que

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{2} \|u_1\|_{L^1}.$$

Antes de demonstrarmos esse resultado, observemos as imagens abaixo, que representam as regiões do plano $\frac{1}{p} \times \frac{1}{q}$ em que valem as estimativas obtidas em [12] e as do Teorema 95.

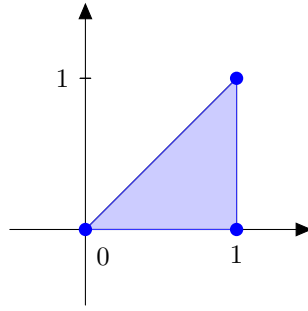


Figura 4.1: Estimativas $L^p - L^q$ em [12] e no Teorema 95, para $n = 1$.

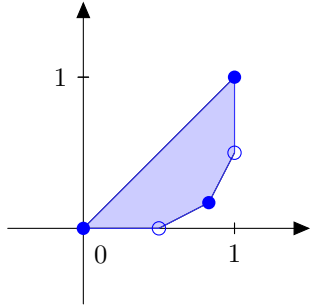


Figura 4.2: Estimativas em [12], $n = 2$.

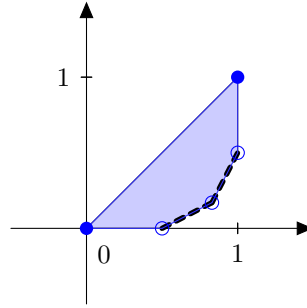


Figura 4.3: Teorema 95, para $n = 2$.

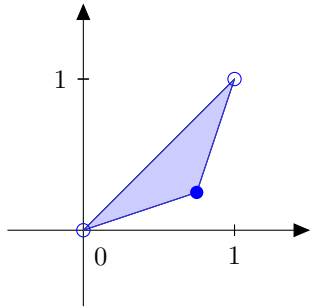


Figura 4.4: Estimativas em [12], $n = 3$

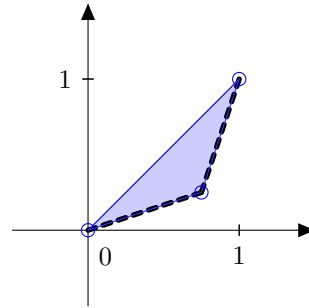


Figura 4.5: Teorema 95, para $n = 3$

Demonstração. (Teorema 95) Faremos a demonstração para $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$. Por dualidade, conclui-se o resultado também para $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$. Pelo lema de Littman, temos

$$\|m_k\|_{M_1^\infty} \lesssim 2^{k \frac{n-1}{2}}.$$

Além disso, como $M_2 = L^\infty$,

$$\|m_k\|_{M_2} \lesssim 2^{-k}.$$

Logo, pelo Teorema de Interpolação de Riesz-Thorin,

$$\|m\|_{M_{p_0}^{q_0}} \lesssim 2^{k \left(\frac{n+1}{p_0} - \frac{n+3}{2} \right)}, \quad (4.6)$$

em que $\frac{1}{p_0} = \frac{1-\theta}{2} + \theta$, $\frac{1}{q_0} = \frac{1-\theta}{2}$ e $0 < \theta < 1$.
Agora, note que, para $0 < \delta < 1$,

$$\begin{aligned} m_k(\xi) &= \phi(2^{-k}|\xi|)(1 - \chi(|\xi|))|\xi|^{-1}e^{i|\xi|} \\ &= \{\phi(2^{-k}|\xi|)|2^{-k}\xi|^{\frac{n-1}{2}+\delta-1}\} \{(1 - \chi(|\xi|))|\xi|^{-\left(\frac{n-1}{2}+\delta\right)}e^{i|\xi|}\}2^k\left(\frac{n-1}{2}+\delta-1\right) \end{aligned}$$

Mostraremos, inicialmente, que

$$\phi(2^{-k}|\xi|)|2^{-k}\xi|^{\frac{n-1}{2}+\delta-1} \in M_1.$$

Como M_p é invariante por homotetia para qualquer $p \geq 1$, basta mostrar que

$$\hat{a}(\xi) \doteq \phi(|\xi|)|\xi|^{\frac{n-1}{2}+\delta-1} \in M_1.$$

Pela desigualdade de Bernstein, se $N > \frac{n}{2}$, existe uma constante C tal que

$$\|\hat{a}\|_{M_1} \leq C\|\hat{a}\|_{L^2}^{1-\frac{n}{2N}}\|D^N\hat{a}\|_{L^2}^{\frac{n}{2N}}.$$

Como $\text{supp}(\phi) \subseteq \{\xi \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{2} < |\xi| < 2\}$, é claro que, para $N > \frac{n}{2}$, $\hat{a}, D^N\hat{a} \in L^2$.

Agora, resta mostrar que

$$\hat{b}(\xi) \doteq (1 - \chi(|\xi|))|\xi|^{-\left(\frac{n-1}{2}+\delta\right)}e^{i|\xi|} \in M_1.$$

Pelo Lema 94, como $0 < \delta < 1$, temos os seguintes casos:

(i) Se $1 - \delta' < |x| < 1 + \delta'$, para algum $\delta' > 0$,

$$b(x) = b_1(x) + C \text{sgn}(1 - |x|)|1 - |x||^{\delta-1}(1 + o(1)),$$

em que $b_1 \in L^\infty$.

Dessa forma

$$\begin{aligned} \int_{1-\delta' < |x| < 1+\delta'} |b(x)|dx &\leq \int_{1-\delta' < |x| < 1+\delta'} |b_1(x)|dx + \tilde{C} \int_{1-\delta' < |x| < 1+\delta'} \frac{1}{|1 - |x||^{1-\delta}}dx \\ &\leq C_1 + \tilde{C} \int_{1-\delta' < r < 1+\delta'} \frac{1}{|1 - r|^{1-\delta}}r^{n-1}dr \\ &\leq C_1 + \tilde{C} \int_{1-\delta' < r < 1+\delta'} \frac{1}{|1 - r|^{1-\delta}}dr < \infty, \end{aligned}$$

pois $0 < 1 - \delta < 1$. Com isso, para $1 - \delta' < |x| < 1 + \delta'$, concluímos que $b \in L^1$.

(ii) Se $|x| > M$, para algum $M > 0$,

$$b(x) = O(|x|^{-N}),$$

para $N > n$. Assim,

$$\int_{M < |x| < \infty} |b(x)|dx = \int_{M < |x| < \infty} O(|x|^{-N})dx < \infty \Leftrightarrow N > n.$$

Isso mostra que, para $|x| > M$, $b \in L^1$.

(iii) Finalmente, se $1 + \delta' \leq |x| \leq M$,

$$b\chi_K \in L^\infty, \text{ pois } b \in L_{loc}^\infty, \text{ para qualquer compacto } K \subseteq \mathbb{R}^n, \text{ em que } \chi_K(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in K \\ 0 & \text{se } x \notin K. \end{cases}$$

Logo,

$$\int_{1+\delta' \leq |x| \leq M} |b(x)| dx < \infty,$$

o que mostra que $b \in L^1$, se $1 + \delta' \leq |x| \leq M$.

Portanto $b \in L^1$, se $\delta < 1$. Isso implica, pela definição dos espaços M_p^q , que $\hat{b} \in M_1$, se $\delta < 1$. Dessa forma

$$\|m_k\|_{M_1} \leq C 2^k \left(\frac{n-1}{2} + \delta - 1 \right). \quad (4.7)$$

Interpolando (4.6) e (4.7), chega-se a

$$\|m_k\|_{M_p^q} \lesssim 2^k \left(\frac{n-1}{2} + \delta - 1 \right)^{(1-\theta)} 2^k \left(\frac{n+1}{p_0} - \frac{n+3}{2} \right)^\theta, \quad (4.8)$$

para $\frac{1}{p} = 1 - \theta + \frac{\theta}{p_0}$ e $\frac{1}{q} = 1 - \theta + \frac{\theta}{q_0}$.

Observe que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 2 - 2\theta + \left(\frac{1}{p_0} + \frac{1}{q_0} \right) = 2 - \theta$. Portanto $\theta = 2 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. Além disso, $\frac{\theta}{p_0} = 1 - \frac{1}{q}$. Assim,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{n-1}{2} + \delta - 1 \right) \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \right) + (n+1) \frac{\theta}{p_0} - \frac{(n+3)}{2} \left(2 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) = \\ & \left(\frac{n-1}{2} + \delta - 1 \right) \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \right) + (n+1) \left(1 - \frac{1}{q} \right) - \frac{(n+3)}{2} \left(2 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) = \\ & \delta \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \right) + \frac{n}{p} - \frac{n}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{q} = \\ & \delta \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \right) + \frac{n}{p} - \frac{1}{q} - \frac{(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\|m_k\|_{M_p^q} \lesssim 2^k \left[\delta \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \right) + \frac{n}{p} - \frac{1}{q} - \frac{(n+1)}{2} \right].$$

Como

$$\|m\|_{M_p^q} \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} \|m_k\| < \infty,$$

desde que $\delta \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \right) + \frac{n}{p} - \frac{1}{q} - \frac{(n+1)}{2} < 0$, para δ suficientemente pequeno, temos o resultado desejado. □

Apêndice A

Integral de Superfície

Definição 97. Um subconjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma hipersuperfície de classe C^k e dimensão $n - 1$ se, para todo $x_0 \in M$, existem $\epsilon > 0$, um aberto $D \subset \mathbb{R}^n$ contendo a origem e um difeomorfismo de classe C^k $\psi : D \rightarrow B(x_0, \epsilon)$ tais que $\psi(D \cap \{x_n = 0\}) = B(x_0, \epsilon) \cap M$.

Exemplo 98. Sejam $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$ aberto contendo a origem e $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k . Então $M = \{(y, g(y)) : y \in V\}$ é uma hipersuperfície de classe C^k . De fato, dado $(y_0, g(y_0)) \in M$, defina $\psi : V - \{y_0\} \times \mathbb{R} \rightarrow V \times \mathbb{R}$ por

$$\psi(y, z) \doteq (y + y_0, g(y + y_0) - z).$$

Então ψ é um difeomorfismo e

$$\psi((V - \{y_0\}) \times \{0\}) = \{(y + y_0, g(y + y_0)) : y \in V - \{y_0\}\} = M$$

Proposição 99. (Superfícies parametrizadas) Sejam $k \geq 1$ e $D \subset \mathbb{R}^n$ aberto contendo a origem. Se $\Sigma \in C^k(D, \mathbb{R}^n)$ satisfaz

1. $\Sigma : D \rightarrow M = \Sigma(D)$ é um homeomorfismo;
2. $\Sigma'(y) : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é injetor para todo $y \in D$;

então M é uma hipersuperfície de classe C^k em \mathbb{R}^n . Além disso, se $f \in C(W \subset \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n)$, $0 \in W$, então $f \in C^k(W, \mathbb{R}^n)$ se, e somente se, $\Sigma^{-1} \circ f \in C^k(W, D)$.

Chamaremos M de superfície parametrizada de classe C^k e $\Sigma : D \rightarrow M$ de uma parametrização de M .

Demonstração. Veja o capítulo 26 de [3]. □

Definição 100. Sejam $\Sigma : D \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$ uma hipersuperfície de \mathbb{R}^n e $f \in C_0(M, \mathbb{R})$. Então a integral de superfície de f sobre M , $\int_M f d\sigma$, é definida por

$$\begin{aligned} \int_M f d\sigma &= \int_D f \circ \Sigma(y) \left| \det \left[\frac{\partial \Sigma}{\partial y_1}(y), \dots, \frac{\partial \Sigma}{\partial y_{n-1}}(y), n(y) \right] \right| dy \\ &= \int_D f \circ \Sigma(y) \left| \det \left[\Sigma'(y) \cdot e_1, \dots, \Sigma'(y) \cdot e_n, n(y) \right] \right| dy, \end{aligned}$$

em que $n(y) \in \mathbb{R}^n$ é um vetor unitário normal a $Im(\Sigma'(y))$, para todo $y \in D$.

Exemplo 101. Sejam $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$ aberto contendo a origem e $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^k . Seja $M = \{(y, g(y)); y \in V\}$. Calculemos $d\sigma$ da parametrização $\Sigma : V \rightarrow M$, definida por $\Sigma(y) = (y, g(y))$.

É possível verificar que

$$n(y) = \frac{(\nabla g(y), -1)}{\sqrt{1 + |\nabla g(y)|^2}}$$

é normal a M em $\Sigma(y)$, isto é, $n(y) \cdot \partial_k \Sigma(y) = 0$, para qualquer $k = 1, \dots, n-1$. Portanto,

$$\begin{aligned} d\sigma &= |\det[\partial_1 \Sigma, \dots, \partial_n \Sigma, n]| dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla g(y)|^2}} \left| \det \begin{bmatrix} I_{n-1} & (\nabla g)^T \\ \nabla g & -1 \end{bmatrix} \right| dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla g(y)|^2}} \left| \det \begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \\ \nabla g & -1 - |\nabla g|^2 \end{bmatrix} \right| dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla g(y)|^2}} (1 + |\nabla g(y)|^2) dy \\ &= \sqrt{1 + |\nabla g(y)|^2}. \end{aligned}$$

Logo

$$\int_M f d\sigma = \int_V f(\Sigma(y)) \sqrt{1 + |\nabla g(y)|^2} dy$$

Exemplo 102. No exemplo anterior, se definirmos $V = B(0, r) \subset \mathbb{R}^{n-1}$, $g(y) = \sqrt{r^2 - |y|^2}$ e $M = S_{r+}^{n-1}$, ou seja, M é o hemisfério superior da esfera centrada na origem de raio r de \mathbb{R}^n , S_r^{n-1} , teremos

$$\nabla g(y) = \frac{-y}{g(y)}$$

e

$$d\sigma = \sqrt{1 + \frac{|y|^2}{g^2(y)}} dy = \frac{r}{g(y)} dy.$$

Portanto,

$$\int_{S_{r+}^{n-1}} f d\sigma = \int_{|y| < r} f(y, \sqrt{r^2 - |y|^2}) \frac{r}{\sqrt{r^2 - |y|^2}} dy.$$

Analogamente,

$$\int_{S_{r-}^{n-1}} f d\sigma = \int_{|y| < r} f(y, -\sqrt{r^2 - |y|^2}) \frac{r}{\sqrt{r^2 - |y|^2}} dy$$

Teorema 103. (Coordenadas radiais em \mathbb{R}^n) Se f é uma função mensurável definida em \mathbb{R}^n , não-negativa ou integrável, então

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_0^\infty \int_{S_r^{n-1}} f(x) d\sigma \left(\frac{x}{r} \right) dr,$$

em que S_r^{n-1} é a esfera centrada na origem de raio r , e $d\sigma$ é a medida de superfície.

Corolário 104. *Se f é uma função mensurável definida em \mathbb{R}^n , não-negativa ou integrável, tal que $f(x) = g(|x|)$, para alguma função g definida em $(0, \infty)$, então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \sigma(S^{n-1}) \int_0^\infty r^{n-1} g(r) dr,$$

em que $\sigma(S^{n-1})$ é a área da esfera unitária $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$.

Proposição 105. *(Integração por partes) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade diferenciável com fronteira C^2 , $n : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ o vetor normal a Ω e $f, g \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ de forma que*

$$\int_{\Omega} \{|f| |g| + |\partial_i f| |g| + |f| |\partial_i g|\} dm + \int_{\partial\Omega} |fg n_i| d\sigma < \infty,$$

então

$$\int_{\Omega} f(x) \partial_i g(x) dm = - \int_{\Omega} \partial_i f(x) g(x) dm + \int_{\partial\Omega} f(x) g(x) n_i(x) d\sigma(x).$$

Bibliografia

- [1] Haim Brezis e Haim Brézis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Vol. 2. 3. Springer, 2011.
- [2] M D’Abbicco e Marcelo Rempel Ebert. “A new phenomenon in the critical exponent for structurally damped semi-linear evolution equations”. Em: *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications* 149 (2017), pp. 1–40.
- [3] Bruce K Driver. “Analysis tools with applications”. Em: *Lecture notes* (2003).
- [4] Marcelo R Ebert e Michael Reissig. “Methods for partial differential equations”. Em: *Qualitative Properties of Solutions, Phase Space Analysis, Semilinear Models* (2018).
- [5] Marcelo Rempel Ebert e Linniker Monteiro Lourenço. “The critical exponent for evolution models with power non-linearity”. Em: *New Tools for Nonlinear PDEs and Application*. Springer, 2019, pp. 153–177.
- [6] Gerald B Folland. *Real analysis: modern techniques and their applications*. Vol. 40. John Wiley & Sons, 1999.
- [7] Loukas Grafakos. *Classical fourier analysis*. Vol. 2. Springer, 2008.
- [8] Lars Hörmander. “Estimates for translation invariant operators in L^p spaces”. Em: *Acta Mathematica* 104.1-2 (1960), pp. 93–140.
- [9] S Lang. *Real Analysis*. Addison-Wesley Publishing Company, 1983.
- [10] Bernard Marshall et al. “ L^p - L^q estimates for the Klein-Gordon equation”. Em: (1980).
- [11] Akitaka Matsumura. “On the asymptotic behavior of solutions of semi-linear wave equations”. Em: *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences* 12.1 (1976), pp. 169–189.
- [12] Akihiko Miyachi. “On some singular Fourier multipliers for $H^p(\mathbb{R}^n)$ ”. Em: *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo* 28 (jan. de 1981).
- [13] Hartmut Pecher. “ L^p -Abschätzungen und klassische Lösungen für nichtlineare Wellengleichungen. I”. Em: *Mathematische Zeitschrift* 150.2 (1976), pp. 159–183.
- [14] Juan C Peral. “ L^p estimates for the wave equation”. Em: *Journal of functional analysis* 36.1 (1980), pp. 114–145.
- [15] Walter Rudin. “Real and Complex Analysis, McGraw-Hill”. Em: *Inc.*, (1974).
- [16] Sigrid Sjöstrand. “On the Riesz means of the solutions of the Schrödinger equation”. Em: *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze* 24.2 (1970), pp. 331–348.

- [17] Robert S Strichartz. “Convolutions with kernels having singularities on a sphere”.
Em: *Transactions of the American Mathematical Society* 148.2 (1970), pp. 461–
471.