

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FFCLRP - DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO E MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Murilo de Souza Penteado

**Explosão canard e oscilação de relaxamento em sistemas
rápido-lento suaves por partes**

Ribeirão Preto
2023

Murilo de Souza Penteado

**Explosão canard e oscilação de relaxamento em sistemas
rápido-lento suaves por partes**

Dissertação apresentada à Faculdade de Filosofia
Ciências e Letras de Ribeirão Preto, como parte das
exigências para obtenção do título de Mestre em
Ciências – Matemática. *VERSÃO CORRIGIDA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Pedro Toniol Cardin

**Ribeirão Preto
2023**

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Penteado, Murilo de Souza

Explosão canard e oscilação de relaxamento em sistemas rápido-lento suaves por partes. Ribeirão Preto, 2023.

97 p. : il. ; 30 cm

Dissertação de Mestrado, apresentada à Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto/USP. Área de concentração: Matemática .

Orientador: Cardin, Pedro Toniol.

1. Explosao canard. 2. Oscilação de relaxamento. 3. Sistemas de Filippov. 4. Sistemas rápido-lento. 5. Teoria de Fenichel.

*Às pessoas mais importantes da minha vida,
Lívia, Mariele, Miriam e Valdomiro,
dedico este trabalho.*

AGRADECIMENTOS

A Deus, por estar sempre presente em minha vida e por toda força e perseverança dispensados à mim para superar os momentos de dificuldade.

Aos meus pais, Miriam e Valdomiro, e à minha irmã, Mariele, por todo amor e carinho, além do apoio e incentivo que me forneceram, possibilitando a realização de minha trajetória acadêmica até aqui.

À minha namorada, Livea, pelo amor e companheirismo, por acreditar no meu potencial e por toda ajuda e paciência no mais diversos momentos.

Ao meu orientador, Professor Dr. Pedro Toniol Cardin, por toda dedicação, incentivo e paciência ao me orientar e contribuir grandemente com minha formação.

Aos meus amigos e primos, pelos momentos de descontração que tornaram a caminhada mais leve.

Aos membros da comissão examinadora, Professor Dr. Paulo Ricardo da Silva e Professor Dr. Rodrigo Donizete Euzébio, por aceitarem o convite e pelas contribuições ao trabalho.

Aos membros do PPGM que contribuíram com minha trajetória na pós-graduação.

A todas as pessoas que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

À CAPES pelo apoio financeiro importantíssimo e pelo papel que desenvolve, mesmo em momentos difíceis de contestação da ciência.

*“Os números são apenas a porta de entrada,
uma rota pela qual podemos mergulhar na impressionante matemática associada a eles.
Todo número é especial.
Quando você chega a apreciá-los como indivíduos, eles são como velhos amigos.
Cada um tem uma história para contar.
Muitas vezes essa história conduz a montes de outros números,
mas o que realmente importa é a matemática que os une.
Os números são personagens num drama, e a coisa mais importante é o drama em si.
Mas você não pode ter um drama sem personagens.”*

(STEWART, 2016)

RESUMO

PENTEADO, M. S. **Explosão canard e oscilação de relaxamento em sistemas rápido-lento suaves por partes**. 2023. 97 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Faculdade de Filosofia Ciências e Letras de Ribeirão Preto, Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto, 2023.

O objetivo deste trabalho é apresentar um estudo geométrico dos fenômenos da explosão canard e oscilação de relaxamento no contexto de sistemas dinâmicos rápido-lento suaves por partes. Inicialmente, são introduzidas algumas noções sobre sistemas com duas escalas de tempo e, também, sobre sistemas suaves por partes, além de uma breve apresentação da Teoria Geométrica das Perturbações Singulares, com base nos Teoremas de Fenichel aplicados à sistemas rápido-lento. Posteriormente, é realizada uma discussão do fenômeno de oscilação de relaxamento para sistemas suaves e, na sequência, para o caso suave por partes. Por fim, é apresentado o fenômeno da explosão canard para sistemas suaves e para sistemas de Liénard contínuos suaves por partes.

Palavras-chave: Explosão canard, Oscilação de relaxamento, Sistemas de Filippov, Sistemas rápido-lento, Teoria de Fenichel.

ABSTRACT

PENTEADO, M. S. **Canard explosion and relaxation oscillation in piecewise smooth fast-slow systems**. 2023. 97 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Faculdade de Filosofia Ciências e Letras de Ribeirão Preto, Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto, 2023.

The aim of this work is to present a geometric study of the relaxation oscillation and canard explosion phenomena in the context of piecewise smooth fast-slow dynamical systems. Initially, some notions about systems with two time scales and about piecewise smooth systems are introduced, besides a brief presentation of the Geometric Singular Perturbation Theory, based on Fenichel's Theorems applied to fast-slow systems. Subsequently, a discussion of the relaxation oscillation phenomenon for smooth systems is carried out and, next, for the piecewise smooth case. Finally, the canard explosion phenomenon is presented for smooth systems and for piecewise smooth continuous Liénard systems.

Keywords: Canard explosion, Fast-slow systems, Fenichel theory, Filippov systems, Relaxation oscillations.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Representação dos fluxos rápido e lento do Exemplo 1.1.	24
Figura 2 – Exemplos de regiões sobre uma variedade de não-suavidade.	26
Figura 3 – Campo vetorial deslizante.	26
Figura 4 – Exemplos de singularidades em sistemas suaves por partes.	28
Figura 5 – Retrato de fase do Exemplo 1.2.	29
Figura 6 – Movimentos periódicos com deslize.	30
Figura 7 – Variedades crítica e lenta do Exemplo 2.1.	38
Figura 8 – Representação dos fluxos rápido e lento do Exemplo 2.4.	42
Figura 9 – Representação dos fluxos rápido e lento do Exemplo 2.5.	42
Figura 10 – Representação dos fluxos rápido e lento do Exemplo 3.1.	47
Figura 11 – Representação de um cenário que satisfaz as condições do Teorema 3.1.	49
Figura 12 – Variedade crítica, variedades lentas e seções transversais próximas à uma dobra.	50
Figura 13 – Representação de um cenário que satisfaz as condições do Teorema 3.2.	53
Figura 14 – Ilustração da convergência dos ciclos limites de costura do Exemplo 3.12.	56
Figura 15 – Ilustração da convergência dos ciclos limites de costura do Exemplo 3.13.	58
Figura 16 – Ilustração da convergência dos ciclos limites de costura do Exemplo 3.14.	59
Figura 17 – Configuração dos fluxos rápido e lento próximo à singularidade dobrada genérica do Exemplo 4.1 para diferentes valores de λ	63
Figura 18 – Configuração das variedades lentas próximo à singularidade dobrada do Exemplo 4.1.	63
Figura 19 – Representação dos ciclos canard singulares.	70
Figura 20 – Desenho de um pato a partir de um canard com cabeça.	70
Figura 21 – Órbitas periódicas obtidas para diferentes valores de λ na equação de van der Pol com um termo de força constante.	72
Figura 22 – Esboço das curvas que descrevem a explosão canard para a equação de van der Pol com um termo de força constante.	72
Figura 23 – Variedade crítica “2-shaped” e variedade de não-suavidade.	73
Figura 24 – Conjunto positivamente invariante construído como descrito pela demonstração do Teorema 4.4.	76
Figura 25 – Conjunto positivamente invariante construído com base na demonstração do Teorema 4.5.	77

Figura 26 – Conjuntos positivamente invariantes como descritos na demonstração do Teorema 4.5.	79
Figura 27 – Ilustração de uma órbita periódica obtida após uma super-explosão. . .	80
Figura 28 – Ciclos canard suaves por partes do sistema (4.17).	82
Figura 29 – Intersecção transversal entre a variedade crítica e uma curva em uma vizinhança do ponto de dobra.	83
Figura 30 – Ilustração dos conjuntos positivamente invariantes necessários para a demonstração do item (iii) – (c) do Teorema 4.7.	86
Figura 31 – Ilustração da convergência dos ciclos limites de costura do Exemplo 5.1. 91	
Figura 32 – Equilíbrios de (5.6).	92

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	17
1 PRELIMINARES	21
1.1 Sistemas rápido-lento	21
1.2 Sistemas suaves por partes	24
2 TEORIA GEOMÉTRICA DAS PERTURBAÇÕES SINGULARES	33
2.1 Teoremas de Fenichel	33
2.2 Fluxo lento	38
2.3 Singularidades	40
3 OSCILAÇÃO DE RELAXAMENTO	45
3.1 A equação de van der Pol	45
3.2 Oscilação de relaxamento em sistemas suaves	47
3.3 Oscilação de relaxamento em sistemas suaves por partes	50
4 EXPLOSÃO CANARD	61
4.1 Singularidades dobradas	61
4.2 Bifurcação de Hopf singular em \mathbb{R}^2	66
4.3 Explosão canard em sistemas suaves	68
4.4 Explosão canard em sistemas suaves por partes	71
4.4.1 <i>Sistemas de van der Pol suaves por partes</i>	73
4.4.2 <i>Sistemas de Liénard suaves por partes</i>	82
5 EXEMPLOS DE APLICAÇÕES	89
REFERÊNCIAS	95

INTRODUÇÃO

No final do século XVII, Isaac Newton e Gottfried Leibniz desenvolveram métodos do Cálculo Diferencial e Integral, possibilitando assim o início do estudo das Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs). Essa área do conhecimento desempenha um importante papel na pesquisa científica, pois muitos fenômenos naturais como, por exemplo, a evolução de populações, variações climáticas, reações químicas, entre outros, podem ser estudados por meio de modelos matemáticos que envolvem EDOs. Sendo assim, uma compreensão das propriedades locais, globais e assintóticas das soluções dessas equações auxilia num melhor entendimento de tais fenômenos naturais.

Ao se estudar algum fenômeno que é modelado por uma EDO, pode-se estar interessado em encontrar soluções que satisfaçam a equação ou determinadas condições iniciais, ou o interesse pode residir em entender o comportamento dessas soluções, isto é, quais condições e parâmetros influenciarão o comportamento das soluções da EDO. Embora seja possível resolver muitas EDOs e obter explicitamente suas soluções, é muito maior a quantidade de equações que não podem ser resolvidas dessa maneira, ou sequer serem resolvidas. Após perceber essa dificuldade e juntamente com a publicação do artigo “Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle” (POINCARÉ, 1882), em 1881, o matemático francês Henry Poincaré unificou a teoria das EDOs e contribuiu grandemente com uma nova forma de pensamento da área, que posteriormente passou a ser conhecida como *Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias*. A ideia central dessa teoria é tentar entender o comportamento das soluções de uma EDO sem necessariamente conhecê-las de forma explícita.

Com relação ao estudo de sistemas dinâmicos suaves, tal teoria encontra-se já bem desenvolvida. Todavia, muitos dos fenômenos naturais são modelados por funções que apresentam uma perda de suavidade. Sistemas nessa forma são conhecidos como *sistemas suaves por partes*. Graças à contribuição do matemático A. F. Filippov, que estabeleceu métodos de resolução para esses sistemas diferenciais em (FILIPPOV, 1988), posteriormente adotados como um dos possíveis padrões de estudos para sistemas suaves por partes, a convenção apresentada por ele é comumente tomada como base e tais sistemas também são ditos *sistemas de Filippov*.

Outra característica que alguns fenômenos naturais apresentam é a possibilidade de evoluírem em diferentes escalas de tempo. Exemplos de sistemas dinâmicos com múltiplas escalas de tempo surgem, por exemplo, na teoria de controle (ESTEBAN; GORDILLO;

ARACIL, 2013), em modelos de cadeia alimentar com duas ou mais espécies (HEK, 2010), em sistemas epidemiológicos (LI *et al.*, 2014), em estudos climáticos (ROBERTS; SAHA, 2017), dentre outros.

Vale destacar que sistemas multi-escalas aparecem naturalmente na teoria de sistemas dinâmicos suaves por partes, como mostrado em (LLIBRE; TEIXEIRA; SILVA, 2008). Mais precisamente, depois de aplicar o método de regularização de sistemas descontínuos desenvolvido por Sotomayor e Teixeira em (SOTOMAYOR; TEIXEIRA, 1998), seguido por um “blow-up” global, um sistema com duas escalas de tempo é obtido. Além disso, mostra-se que a dinâmica do *campo vetorial deslizante* (para uma definição, veja a Seção 1.2) associado ao sistema suave por partes é equivalente à dinâmica do *problema reduzido* (para uma definição, veja a Seção 1.1) associado ao sistema multi-escala.

O objetivo deste trabalho é apresentar noções iniciais sobre sistemas dinâmicos com duas escalas de tempo (rápida e lenta), além de uma análise geométrica sobre dois fenômenos bem conhecidos na teoria de sistemas rápido-lento, o *fenômeno de oscilação de relaxamento* e o *fenômeno da explosão canard*. O primeiro fenômeno é caracterizado por um tipo especial de movimento periódico (ciclo limite) consistindo de longos períodos de movimento quase estático intercalados por curtos períodos de uma rápida transição. Já a explosão canard é um fenômeno caracterizado pelo nascimento de ciclos limites, por meio de uma bifurcação de Hopf, que sofrem um crescimento muito rápido em sua amplitude. Essa transição de ciclos pequenos para ciclos de maior amplitude ocorre em um intervalo exponencialmente pequeno do parâmetro de bifurcação, por isso o fenômeno recebe o nome de explosão.

No contexto de sistemas rápido-lento suaves, o estudo sobre oscilações de relaxamento, que começou com van der Pol em 1926 no artigo (POL, 1926), tem uma história mais longa do que o estudo sobre explosão canard, o qual foi descoberto e analisado em 1981 por um grupo de matemáticos franceses no artigo (BENOIT *et al.*, 1981).

Mais recentemente, esses dois fenômenos começaram a ser analisados também no contexto de sistemas dinâmicos rápido-lento suaves por partes, tanto contínuos quanto descontínuos, e alguns progressos foram feitos desde então. Por exemplo, em (ROBERTS; GLENDINNING, 2014) os autores analisam esses fenômenos no contexto de sistemas de van der Pol (contínuos) suaves por partes. Já em (ROBERTS, 2016), os resultados obtidos em (ROBERTS; GLENDINNING, 2014) são generalizados ao considerar o contexto de sistemas de Liénard (contínuos) suaves por partes. Ainda, um cenário um pouco mais simples onde esses dois fenômenos foram (e continuam sendo) analisados, é no contexto de sistemas rápido-lento lineares por partes, sendo (DESROCHES *et al.*, 2013), (DESROCHES *et al.*, 2016) e (ROTSTEIN; COOMBES; GHEORGHE, 2012) as principais referências.

O artigo (CARDIN, 2022) apresenta uma análise geométrica do fenômeno de oscilação de relaxamento, exibindo condições que garantem sua existência e, também, um

estudo da regularização de oscilações de relaxamento de costura. Diferente das referências (ROBERTS; GLENDINNING, 2014), (ROBERTS, 2016) e (HOGAN, 2003), nos quais a estrutura suave por partes do sistema ocorre apenas na componente rápida do campo de vetores rápido-lento, em (CARDIN, 2022) os sistemas rápido-lento suave por partes considerados são gerais.

Como veremos, a análise feita nos artigos (ROBERTS; GLENDINNING, 2014), (ROBERTS, 2016) e (CARDIN, 2022) utiliza ferramentas da assim chamada *Teoria Geométrica das Perturbações Singulares*.

O presente trabalho está distribuído da seguinte forma.

No Capítulo 1, primeiramente, apresentamos noções básicas a respeito de sistemas rápido-lento, como as definições dos fluxos rápido e lento e de uma variedade crítica, e introduzimos os conceitos iniciais da teoria de sistemas suaves por partes, tais como as definições de pontos regulares, singulares e de tangência, trajetória local e órbitas periódicas, com base na convenção de Filippov (FILIPPOV, 1988).

Na sequência, no Capítulo 2, abordamos alguns elementos da *Teoria Geométrica das Perturbações Singulares* (TGPS) como, por exemplo, a noção de normal hiperbolicidade e os Teoremas de Fenichel sobre a persistência de variedades compactas normalmente hiperbólicas. Além disso, discutimos o comportamento do fluxo lento, definimos pontos singulares e regulares, no contexto de sistemas rápido-lento, e órbitas singulares.

Já no Capítulo 3, fazemos uma breve apresentação da famosa *equação de van der Pol*, a fim de ilustrar o fenômeno de oscilação de relaxamento, introduzido neste mesmo capítulo. Considerando sistemas planares, apresentamos um resultado que fornece condições para a existência de uma oscilação de relaxamento em sistemas suaves e finalizamos o capítulo com uma versão análoga desse resultado para sistemas suaves por partes, tendo por base o artigo (CARDIN, 2022), além de exemplos que ilustram a existência das oscilações de relaxamento de costura nesse tipo de sistema.

No Capítulo 4, apresentamos o fenômeno da explosão canard. Inicialmente, discutimos o comportamento de um sistema rápido-lento próximo à uma singularidade dobrada, além de dois resultados importantes para a análise do fenômeno, os quais fornecem condições para ocorrência de um *canard maximal* e de uma bifurcação de Hopf. Na sequência, enunciaremos o resultado que garante o fenômeno da explosão canard em sistemas suaves. Na parte final do capítulo, embasados nos artigos (ROBERTS; GLENDINNING, 2014) e (ROBERTS, 2016), estendemos a discussão desse fenômeno para o caso de sistemas de Liénard (contínuos) suaves por partes, fornecendo condições que garantem a ocorrência do fenômeno em um assim chamado “corner” sobre a variedade de não-suavidade do sistema.

Por último, no Capítulo 5, a fim de ilustrar áreas do conhecimento em que os conceitos e resultados discutidos nos capítulos anteriores possam ser úteis, apresentamos

dois exemplos. O primeiro, presente em (CARDIN, 2022), mostra a existência de uma oscilação de relaxamento de costura para um sistema rápido-lento suave por partes obtido por meio de um oscilador suave-descontínuo, muito utilizado na engenharia. Já o segundo exemplo, apresentado em (ROBERTS; GLENDINNING, 2014), aborda um modelo de circulação “thermohaline” de Stommel, presente em alguns estudos climáticos.

PRELIMINARES

O objetivo principal deste capítulo é apresentar noções elementares sobre sistemas rápido-lento e sistemas dinâmicos suaves por partes. A primeira seção introduz os sistemas rápido-lento e foi baseada no Capítulo 1 de (KUEHN, 2015). Já a segunda seção, aborda algumas noções envolvendo sistemas suaves por partes, tomando por base a convenção de Filippov (FILIPPOV, 1988).

1.1 Sistemas rápido-lento

Nesta seção, apresentamos conceitos iniciais sobre sistemas dinâmicos com múltiplas escalas de tempo, mais precisamente, sobre os chamados *sistemas rápido-lento* que apresentam duas escalas de tempo diferentes, uma rápida e uma lenta.

Essa noção de separação em escalas de tempo diferentes é uma característica que pode ser observada em várias situações naturais, desde pequenas reações químicas, partículas em fluidos, modelos de neurônios, até casos de maior amplitude como, por exemplo, incêndios florestais, sistemas climáticos, ecologia, entre outros. De forma geral, se os parâmetros físicos envolvidos no sistema apresentam a mesma ordem de magnitude, então o sistema possui duas escalas de tempo, agora se os parâmetros apresentam ordens de magnitude diferentes, o sistema dinâmico poderá envolver três ou mais escalas de tempo.

A próxima definição apresenta formalmente o conceito de um sistema com duas escalas de tempo.

Definição 1.1. Um **sistema (m, n) -rápido-lento** é um sistema de equações diferenciais ordinárias que apresenta a forma

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dx}{d\tau} &= \varepsilon \dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \varepsilon), \\ \frac{dy}{d\tau} &= \dot{\mathbf{y}} = g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \varepsilon), \end{aligned} \tag{1.1}$$

com $f : U \times I \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : U \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$, sendo U um aberto de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ e I um intervalo da forma $(0, \varepsilon_0]$, com ε_0 positivo e suficientemente pequeno ($0 < \varepsilon_0 \ll 1$). Definindo uma nova variável independente $t := \tau/\varepsilon$, obtêm-se o seguinte sistema equivalente

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \mathbf{x}' = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \varepsilon), \\ \frac{dy}{dt} &= \mathbf{y}' = \varepsilon g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \varepsilon). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Diz-se que t é a **escala de tempo rápido** (ou apenas, **tempo rápido**) e τ a **escala de tempo lento** (ou apenas, **tempo lento**). Assim, o sistema (1.1) é o **sistema lento** e (1.2) o **sistema rápido**. A variável \mathbf{x} é dita **variável rápida**, \mathbf{y} a **variável lenta** e ε o **parâmetro de perturbação singular**.

Observamos que em muitos exemplos teóricos e modelos matemáticos de problemas reais envolvendo sistemas rápido-lento, as funções f e g podem ser independentes do parâmetro ε , possibilitando assim a escrita dos sistemas (1.1) e (1.2) com $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ e $g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Como a formulação de um sistema rápido-lento envolve dois sistemas equivalentes, um em cada escala de tempo, a fim de tentar entender a dinâmica do sistema (1.1) (ou (1.2)) para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, é natural tentar entender as dinâmicas limites ($\varepsilon \rightarrow 0$) em cada uma das escalas de tempo.

Definição 1.2. A equação diferencial-algébrica obtida fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ no sistema (1.1),

$$\begin{aligned} 0 &= f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, 0), \\ \dot{\mathbf{y}} &= g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, 0), \end{aligned} \quad (1.3)$$

é chamada de **subsistema lento** (ou **problema reduzido**), e o fluxo gerado por (1.3) é chamado de **fluxo lento** (ou **fluxo reduzido**).

Observação 1.1. Note que a equação (1.3) é uma EDO com uma restrição algébrica, $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, 0) = 0$. Isso significa que as condições iniciais $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ e $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$ devem satisfazer a restrição para que existam soluções da EDO dada por $\dot{\mathbf{y}} = g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, 0)$.

Definição 1.3. O sistema parametrizado de EDOs obtido fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ no sistema (1.2),

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, 0), \\ \mathbf{y}' &= 0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

é chamado de **subsistema rápido** (ou **problema de camadas**), e o fluxo gerado por (1.4) é chamado de **fluxo rápido**. Para cada \mathbf{y} fixado, obtemos uma “camada” do sistema (1.4).

Observação 1.2. Lembramos que um **fluxo** é qualquer família de transformações $\varphi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, com $t \in \mathbb{R}$, tal que $\varphi_0 = Id$ e $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$, para $t, s \in \mathbb{R}$.

A fim de distinguir os problemas limites (1.3) e (1.4) do sistema rápido-lento, é comum encontrar na literatura a nomenclatura de **sistema completo** para os sistemas (1.1) e (1.2).

A ideia no estudo de um sistema rápido-lento é aproximar as curvas soluções por segmentos de órbitas dos problemas reduzido e de camada. Mais especificamente, próximo ao conjunto descrito pela equação algébrica $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, 0) = 0$, uma trajetória do sistema completo é dada aproximadamente pelo fluxo lento, já suficientemente longe do conjunto $\{f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, 0) = 0\}$, espera-se que o movimento lento das variáveis \mathbf{y} seja irrelevante e, assim, pode-se aproximar as trajetórias pelo fluxo rápido. Fica claro que o conjunto $\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, 0) = 0\}$ desempenha um papel especial na teoria. Isso motiva a próxima definição.

Definição 1.4. O conjunto $S = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U : f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, 0) = 0\}$ é dito o **conjunto crítico** do sistema rápido-lento, ou **variedade crítica** no caso em que S é uma subvariedade de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.

Observação 1.3. No decorrer do nosso estudo, estaremos interessados nos casos em que S é uma variedade suficientemente suave. Sendo assim, usaremos a notação “conjunto crítico” apenas quando essa hipótese não for verdadeira.

A seguir, apresentamos um resultado que estabelece uma relação entre pontos críticos do fluxo rápido e pontos da variedade crítica S , e um exemplo que ilustra as ideias e conceitos apresentados nesta seção.

Proposição 1.1. Pontos críticos do fluxo rápido estão em correspondência um a um com pontos no conjunto S .

Demonstração: Primeiramente, vamos fixar \mathbf{y}_0 qualquer e tomar por hipótese que \mathbf{x}_0 é um ponto crítico de

$$\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0, 0).$$

Logo, $f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, 0) = 0$ e, conseqüentemente, $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in S$. Agora, tomando por hipótese que $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in S$, então $f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, 0) = 0$. Assim, \mathbf{x}_0 é um ponto crítico de $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0, 0)$. ■

Exemplo 1.1. Vamos considerar o sistema (1, 1)-rápido-lento dado por

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x} &= y - \frac{x^3}{3} + x, \\ \dot{y} &= -x. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Note que, tomando $\varepsilon = 0$, a variedade crítica S é dada por

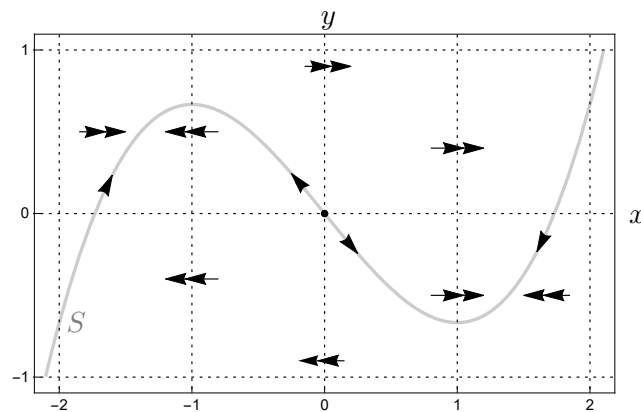
$$S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = \frac{x^3}{3} - x \right\}$$

a qual é, de fato, uma variedade suave, uma vez que é o gráfico de uma função suave como ilustra a Figura 1. O fluxo lento $\dot{y} = -x$ é restrito a S e, analisando o sinal de x , obtemos a direção para qual ele aponta, conforme ilustrado pelas setas simples na Figura 1. De acordo com as ideias apresentadas, o fluxo rápido é dado por camadas horizontais parametrizadas por diferentes valores de y no sistema

$$\begin{aligned}x' &= y - \frac{x^3}{3} - x, \\y' &= 0,\end{aligned}$$

representado por setas duplas na Figura 1. ◇

Figura 1 – Representação dos fluxos rápido e lento para o Exemplo 1.1.



Fonte: Elaborada pelo autor.

O sistema rápido-lento (1.5), ilustrado no exemplo anterior, é obtido através da famosa equação de van der Pol. Dada a importância dessa equação para a área de estudos e para a compreensão dos fenômenos de *oscilação de relaxamento* e *explosão canard*, no Capítulo 3 faremos uma análise mais aprofundada desse sistema.

1.2 Sistemas suaves por partes

Na natureza, muitos fenômenos podem ser modelados por meio de equações diferenciais ordinárias (EDOs) contínuas e, dessa forma, estudados utilizando as ferramentas matemáticas já desenvolvidas, por exemplo, da Teoria Qualitativa das EDOs. Entretanto, existem muitas situações em que os modelos matemáticos obtidos são descritos por funções não-suaves (descontínuas, não-diferenciáveis, etc). O objetivo desta seção é introduzir alguns dos conceitos básicos sobre a teoria desenvolvida para sistemas que apresentam uma perda de suavidade.

A seguir, apresentamos os conceitos iniciais da teoria de sistemas suaves por partes tomando por base a chamada *convenção de Filippov*, presente em (FILIPPOV, 1988). Vale destacar que essa convenção é apenas uma das possíveis abordagens existentes para o estudo

da continuação das soluções de sistemas suaves por partes. Outras abordagens conhecidas são o Método de Ya. Tsyarkin, o Método de Y. Neimark, o Método de M. Aizerman e Ye. Pyatnitskii, o Método de V. Yakubovich e o Método de Controle Equivalente. Para mais detalhes veja, por exemplo, (UTKIN, 2022).

Sejam X e Y campos de vetores suaves definidos em um aberto conexo $U \subset \mathbb{R}^n$ contendo a origem. Vamos considerar $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^k , com $k > 1$, que possui 0 como valor regular, isto é, não existem pontos críticos de f no nível 0. Logo, $\Sigma = f^{-1}(0)$ é uma subvariedade de codimensão 1 em U que o divide em outros dois conjuntos abertos dados por

$$\Sigma^+ = \{\mathbf{x} \in U : f(\mathbf{x}) > 0\} \quad \text{e} \quad \Sigma^- = \{\mathbf{x} \in U : f(\mathbf{x}) < 0\}.$$

Dessa forma, é possível definir um campo de vetores suave por partes dado por

$$Z(\mathbf{x}) = \begin{cases} X(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Sigma^+, \\ Y(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Sigma^-, \end{cases} \quad (1.6)$$

e associá-lo ao sistema de equações diferenciais ordinárias suave por partes

$$\mathbf{x}' = Z(\mathbf{x}). \quad (1.7)$$

Tais sistemas também são chamados de **sistemas de Filippov**.

Usaremos a notação $Z = (X, Y)_f$ para nos referirmos ao campo definido em (1.6). Assumiremos também que os campos X e Y são de classe C^k nos fechos de Σ^+ e Σ^- ($\overline{\Sigma^+}$ e $\overline{\Sigma^-}$), respectivamente.

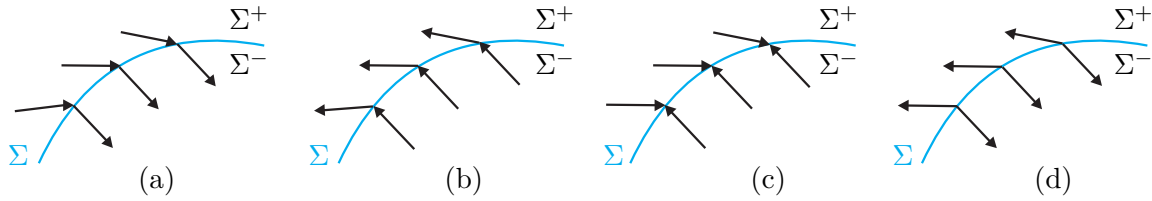
Primeiro, vamos definir a trajetória local através de um ponto $p \in U$, ou seja, apresentar uma definição para o fluxo $\varphi_Z(t, p)$ do sistema (1.7). Se $p \in \Sigma^+$ (respectivamente, $p \in \Sigma^-$), sua trajetória local é dada pela trajetória do campo X (respectivamente, Y). No entanto, quando $p \in \Sigma$, usaremos a convecção de Filippov para a trajetória local através do ponto p .

Em Σ , distinguimos as três regiões disjuntas a seguir:

- **Região de Costura:** $\Sigma^c = \{p \in \Sigma : Xf(p) \cdot Yf(p) > 0\}$,
- **Região de Deslize:** $\Sigma^d = \{p \in \Sigma : Xf(p) < 0 \text{ e } Yf(p) > 0\}$,
- **Região de Escape:** $\Sigma^e = \{p \in \Sigma : Xf(p) > 0 \text{ e } Yf(p) < 0\}$,

onde $Xf(p) = X(p) \cdot \text{grad}f(p)$ é a *derivada de Lie* de f referente ao campo X no ponto p . Essas regiões estão ilustradas na Figura 2.

Figura 2 – Regiões em Σ : Σ^c em (a) e (b), Σ^d em (c), e Σ^e em (d).



Fonte: Retirada do artigo (CARDIN, 2022).

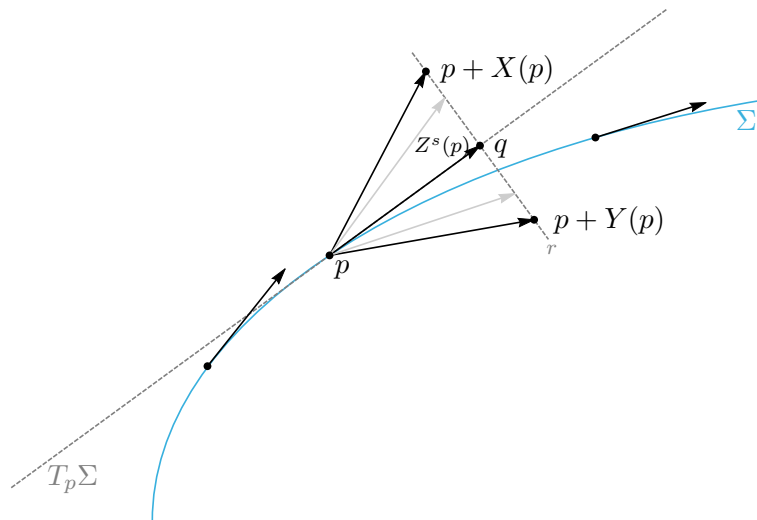
Se $p \in \Sigma^c$, as trajetórias de X e Y alcançando p podem ser unidas continuamente formando uma trajetória que cruza Σ . Se $p \in \Sigma^d \cup \Sigma^e$, as trajetórias de X e Y alcançando p podem ser unidas continuamente às trajetórias do chamado *campo de vetores deslizante*, o qual é dado por uma combinação linear convexa dos campos X e Y . Mais precisamente, dado $p \in \Sigma^d \cup \Sigma^e$, vamos considerar a reta r que liga os pontos $p + X(p)$ e $p + Y(p)$, e q que é o único ponto de intersecção da reta r com o hiperplano tangente a Σ em p , $T_p\Sigma$. Isto é, esse campo denota o único vetor tangente a Σ contido no cone gerado por $X(p)$ e $Y(p)$, veja a Figura 3. Formalmente, temos a seguinte definição.

Definição 1.5. Sejam $Z = (X, Y)_f$, com a subvariedade de descontinuidade Σ , e $p \in \Sigma$ um ponto na região de deslize ou de escape. Define-se o **campo vetorial deslizante** associado ao campo de vetores suave por partes Z em p , denotado por $Z^s(p)$, como

$$Z^s(p) = (1 - \alpha)Y(p) + \alpha X(p), \quad (1.8)$$

onde $\alpha = Yf(p)/(Yf(p) - Xf(p))$.

Figura 3 – Combinação convexa dos campos X e Y e o campo deslizante $Z^s(p)$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A seguir, apresentamos a noção de ponto regular e singular de um sistema de Filippov.

Definição 1.6. Um ponto $p \in \Sigma$ é dito um **ponto regular** do sistema (1.7) se:

- a) p pertence a região de costura;
- b) p pertence ou a região de deslize ou de escape e $\det[X, Y](p) \neq 0$. Isso significa que os vetores $X(p)$ e $Y(p)$ são linearmente independentes.

Definição 1.7. Considere um sistema de Filippov (1.7) e seja $p \in \Sigma$. Define-se:

- a) p é um **ponto de tangência** se $Xf(p) = 0$ ou $Yf(p) = 0$;
- b) r é a **ordem de contato** da trajetória Γ_X de X com Σ no ponto p se $X^i f(p) = 0$ para todo $i = 1, \dots, r-1$ e $X^r f(p) \neq 0$. Definição análoga vale para o campo Y . Se r é par e $X^r f(p) < 0$ (ou se $Y^r f(p) > 0$), o ponto p é dito uma **tangência invisível**. Se r é ímpar ou se r é par e $X^r f(p) > 0$ (ou se $Y^r f(p) < 0$), o ponto p é dito uma **tangência visível**;
- c) Se p é uma tangência invisível para ambos os campos X e Y , p é dito um **ponto de tangência singular**;
- d) Se p não é um ponto de tangência singular, p é dito um **ponto de tangência regular**.

Definição 1.8. Define-se as **singularidades** do sistema de Filippov (1.7) como:

- a) $p \in \Sigma^\pm$ tal que p é um ponto crítico de X ou Y , ou seja, $X(p) = 0$ ou $Y(p) = 0$, respectivamente;
- b) $p \in \Sigma^d \cup \Sigma^e$ tal que p é um ponto crítico do campo deslizante, isto é, $Z^s(p) = 0$;
- c) $p \in \partial\Sigma^c \cup \partial\Sigma^d \cup \partial\Sigma^e$, ou seja, os pontos de tangência de Z .

Definição 1.9. Define-se a **trajetória local** de um campo de vetores de Filippov (1.7) passando por um ponto p como:

- a) Se $p \in \Sigma^+$ e $X(p) \neq 0$, a trajetória é dada por $\varphi_Z(t, p) = \varphi_X(t, p)$, para $t \in I \subset \mathbb{R}$. Analogamente, se $p \in \Sigma^-$ e $Y(p) \neq 0$, a trajetória é dada por $\varphi_Z(t, p) = \varphi_Y(t, p)$, para $t \in I \subset \mathbb{R}$.
- b) Se $p \in \Sigma^c$, existem duas possibilidades:

- 1) Se $Xf(p) > 0$ e $Yf(p) > 0$, ao tomar a origem do tempo em p , a trajetória é dada por

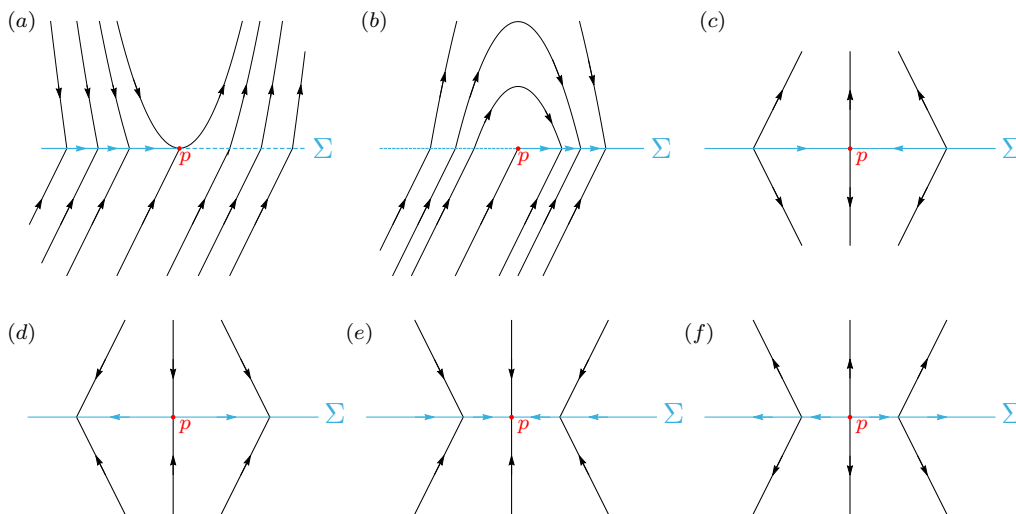
$$\varphi_Z(t, p) = \begin{cases} \varphi_X(t, p), & t \in I \cap \{t \geq 0\}, \\ \varphi_Y(t, p), & t \in I \cap \{t \leq 0\}. \end{cases}$$

2) Se $Xf(p) < 0$ e $Yf(p) < 0$, ao tomar a origem do tempo em p , a trajetória é dada por

$$\varphi_Z(t, p) = \begin{cases} \varphi_Y(t, p), & t \in I \cap \{t \geq 0\}, \\ \varphi_X(t, p), & t \in I \cap \{t \leq 0\}. \end{cases}$$

- c) Se $p \in \Sigma^e$, tomando a origem do tempo em p , a trajetória é definida como $\varphi_Z(t, p) = \varphi_{Z^s}(t, p)$ para $t \in I \cap \{t \leq 0\}$ e $\varphi_Z(t, p)$ é ou $\varphi_X(t, p)$ ou $\varphi_Y(t, p)$ ou $\varphi_{Z^s}(t, p)$ para $t \in I \cap \{t \geq 0\}$. Se $p \in \Sigma^d$, a definição é a mesma, mas invertendo o tempo.
- d) Se p é um ponto de tangência regular, ao tomar a origem do tempo em p , a trajetória é dada por $\varphi_Z(t, p) = \varphi_1(t, p)$ para $t \in I \cap \{t \leq 0\}$ e $\varphi_Z = \varphi_2(t, p)$ para $t \in I \cap \{t \geq 0\}$, onde cada φ_1, φ_2 é ou φ_X ou φ_Y ou φ_{Z^s} .
- e) Se p não se enquadra em nenhum dos itens acima, a trajetória é dada por $\varphi_Z(t, p) = p$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Estão incluídos neste caso os pontos críticos dos campos X e Y e do campo deslizante Z^s , além dos pontos de tangência singular.

Figura 4 – Algumas singularidades de sistemas de Filippov no caso planar: (a) dobra visível com relação à X , (b) dobra invisível com relação à X , (c), (d), (e) e (f) equilíbrio do campo deslizante com (c) e (d) selas, (e) nó estável e (f) nó instável.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Definição 1.10. O conjunto $\gamma(p) = \{\varphi_Z(t, p) : t \in I\}$ é dito uma **órbita local** de um ponto $p \in U$.

Definição 1.11. Uma **órbita regular maximal** de Z é definida como uma curva suave por partes γ tal que:

- a) $\gamma \cap \Sigma^+$ e $\gamma \cap \Sigma^-$ são uniões de órbitas dos campos suaves X e Y , respectivamente;
- b) a intersecção $\gamma \cap \Sigma$ é constituída apenas por pontos na região de costura e pontos de tangência regulares em $\partial\Sigma^c$;

c) γ é maximal com respeito a essas condições.

Além disso, uma órbita regular nunca atinge as regiões de escape ou deslize.

Definição 1.12. Uma curva suave $\gamma \subset \overline{\Sigma^d} \cup \overline{\Sigma^e}$ que é uma órbita maximal do campo de vetores Z^s é dita uma **órbita deslizante maximal**.

Na sequência, apresentamos um exemplo de sistema de Filippov planar para ilustrar algumas noções apresentadas nesta seção.

Exemplo 1.2. Vamos considerar o campo de vetores suave por partes dado por

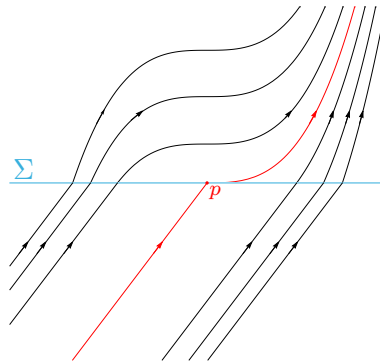
$$Z(x, y) = \begin{cases} (1, x^2) & \text{se } y > 0, \\ (1, 1) & \text{se } y < 0. \end{cases} \quad (1.9)$$

Sejam $p = (0, 0)$ e $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$. Realizando os cálculos das derivadas de Lie referente aos campos X e Y nos pontos de Σ , temos que

$$\begin{aligned} Xf(x, 0) &= (1, x^2) \cdot (0, 1) = x^2, \\ X^2f(x, 0) &= X(Xf) = (1, x^2) \cdot (2x, 0) = 2x, \\ X^3f(x, 0) &= X(X^2f) = (1, x^2) \cdot (2, 0) = 2, \\ Yf(x, 0) &= (1, 1) \cdot (0, 1) = 1. \end{aligned}$$

Note que $Xf(x, 0) \cdot Yf(x, 0) = x^2 > 0$ para todo $x \neq 0$, o que implica que $\Sigma - \{p\}$ é a região de costura Σ^c e $p \in \partial\Sigma^c$. Além disso, $Xf(p) \cdot Yf(p) = 0$, implicando que p é o único ponto de tangência de Z . Este exemplo ilustra um **ponto de cúspide**. Note que a órbita passando pelo ponto p é ilustrada pela curva em vermelho na Figura 5. \diamond

Figura 5 – Retrato de fase do Exemplo 1.2.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A seguir, apresentamos os conceitos de órbitas periódicas para sistemas de Filippov. Quando estudamos sistemas suaves por partes, além das órbitas periódicas de X e Y contidas em Σ^+ e Σ^- , respectivamente, temos também outros tipos de órbitas periódicas que intersectam Σ .

Definição 1.13. Seja $\gamma = \{\varphi_Z(t, p) : t \in \mathbb{R}\}$ uma órbita regular que pertence a $\Sigma^+ \cup \Sigma^- \cup \overline{\Sigma^c}$ tal que $\varphi_Z(t+T, p) = \varphi_Z(t, p)$, para algum $T > 0$. Diz-se que γ é uma **órbita periódica regular** e, neste caso, T é dito o **período** de γ quando é o menor valor que satisfaz a condição acima.

Definição 1.14. Se γ é uma órbita periódica regular e $\emptyset \neq \gamma \cap \Sigma \subset \Sigma^c$, diz-se que γ é uma **órbita periódica de costura**. Quando $\gamma \subset \Sigma^+ \cup \Sigma^-$, diz-se que γ é uma **órbita periódica padrão**.

Definição 1.15. Seja γ uma órbita periódica regular. Se existe uma vizinhança V de γ tal que a órbita que passa por q , $\gamma(q)$, não é uma órbita periódica regular, para todo $q \in V$, diz-se que γ é um **ciclo limite**. Isso significa que γ é uma órbita periódica regular isolada.

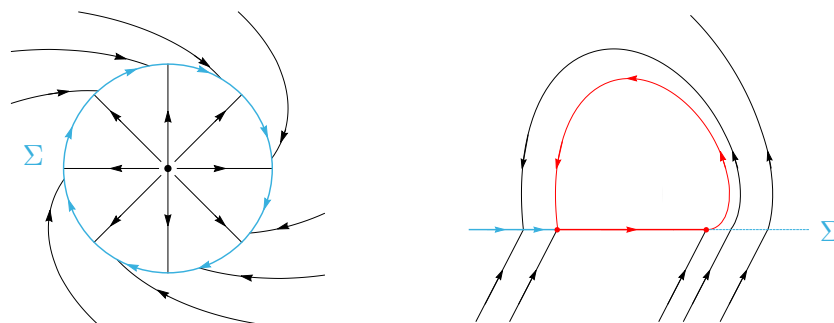
Definição 1.16. Uma órbita periódica do campo deslizante Z^s é dita uma **órbita periódica deslizante**.

Observamos que as órbitas periódicas deslizantes estão contidas na união das regiões de deslize e escape. Quando consideramos sistemas de Filippov planares, a órbita periódica deslizante aparece se a subvariedade de descontinuidade Σ é homeomorfa a um círculo e, além disso, $\Sigma = \Sigma^d$ ou $\Sigma = \Sigma^e$, conforme ilustrado na Figura 6.

De acordo com as definições 1.11 e 1.12, é possível ver que não existem órbitas periódicas compostas por movimentos regulares e deslizantes ao mesmo tempo, ou seja, compostas por pontos de $\Sigma^+ \cup \Sigma^-$ e pontos de $\Sigma^d \cup \Sigma^e$, simultaneamente. A fim de caracterizar esses tipos de movimentos, apresentamos as próximas definições.

Definição 1.17. Define-se um **ciclo periódico** como o fecho de um conjunto finito de pedaços de órbitas $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ tais que γ_{2k} são pedaços de órbitas deslizantes e γ_{2k-1} são órbitas regulares maximais. Além disso, os pontos de partida e chegada de γ_{2k-1} pertencem a $\overline{\gamma_{2k-2}}$ e $\overline{\gamma_{2k}}$, respectivamente. O **período do ciclo** é definido como a soma dos tempos necessários em cada pedaço de órbita γ_i , onde $i = 1, \dots, n$.

Figura 6 – $\Sigma = \Sigma^d$ à esquerda e um ciclo periódico à direita.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na literatura, também é possível encontrarmos o nome **poli-ciclos** (“polycycles”) ao invés de ciclos periódicos para a definição anterior.

Definição 1.18. Define-se um **pseudociclo** como o fecho de um conjunto de órbitas regulares $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ tais que as extremidades de qualquer γ_i coincide com uma extremidade de γ_{i-1} e outra de γ_{i+1} (inclusive entre γ_1 e γ_n) formando assim uma curva homeomorfa a $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Embora tenhamos apresentado alguns tipos de movimentos periódicos para sistemas de Filippov, o estudo desenvolvido no Capítulo 3 sobre movimentos periódicos em sistemas rápido-lento suaves por partes irá considerar apenas o caso de órbitas periódicas de costura.

TEORIA GEOMÉTRICA DAS PERTURBAÇÕES SINGULARES

Durante a década de 1970, o matemático americano Neil Harvey Fenichel dedicou-se ao estudo de variedades invariantes gerais e contribuiu com a introdução da chamada *Teoria Geométrica das Perturbações Singulares* (TGPS). Nesse período, Fenichel apresentou seus resultados por meio das publicações dos artigos (FENICHEL, 1971/1972), (FENICHEL, 1973/74) e (FENICHEL, 1977) que, mais tarde, culminaram na publicação de (FENICHEL, 1979), artigo no qual ele aplicou sua teoria à sistemas rápido-lento. Graças à sua contribuição, essa abordagem é conhecida atualmente como *teoria de Fenichel*. É importante destacar que a TGPS se baseia em elementos da teoria geométrica e qualitativa de sistemas dinâmicos, não abrangendo apenas os resultados apresentados por Fenichel. Além disso, ela apresenta uma gama muito mais ampla de técnicas geométricas como, por exemplo, o “exchange lemma” e o método “blow-up” que não serão discutidos neste trabalho.

Com isso em mente, o objetivo deste capítulo é apresentar as definições e resultados elementares da TGPS para o caso de sistemas rápido-lento. Mais detalhes sobre a teoria geral desenvolvida por Fenichel, assim como as demonstrações omitidas no decorrer do capítulo, podem ser encontrados nos artigos supracitados, no Capítulo 2 de (KUEHN, 2015) e, também, em (CARDIN; TEIXEIRA, 2017).

2.1 Teoremas de Fenichel

Inicialmente, vamos considerar um sistema (m, n) -rápido-lento geral dado por

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dx}{d\tau} &= \varepsilon \dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \varepsilon), \\ \frac{dy}{d\tau} &= \dot{\mathbf{y}} = g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \varepsilon), \end{aligned} \tag{2.1}$$

com $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ e $0 < \varepsilon \ll 1$ um parâmetro de perturbação singular suficientemente pequeno. Além disso, vamos assumir que as funções $f : U \times I \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : U \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$, com I um intervalo da forma $(0, \varepsilon_0]$, são suficientemente suaves.

Reescrevendo o sistema (2.1) com relação à escala de tempo rápido $t := \tau/\varepsilon$, obtemos o sistema equivalente

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{x}' = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \varepsilon), \\ \frac{d\mathbf{y}}{dt} &= \mathbf{y}' = \varepsilon g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \varepsilon). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Os problemas limites são, respectivamente, o problema reduzido (ou subsistema lento)

$$\begin{aligned} 0 &= f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, 0), \\ \dot{\mathbf{y}} &= g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, 0), \end{aligned} \quad (2.3)$$

e o problema de camadas (ou subsistema rápido)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, 0), \\ \mathbf{y}' &= 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Além disso, o conjunto $S = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U : f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, 0) = 0\}$ é a variedade crítica do sistema (2.1) (ou (2.2)).

Definição 2.1. Um subconjunto $S_0 \subset S$ é dito **normalmente hiperbólico** se a matriz de ordem m , $D_{\mathbf{x}}f(p, 0)$, das derivadas parciais de primeira ordem de f com relação às variáveis rápidas, não possui autovalores com parte real nula, para todo $p \in S_0$.

O próximo resultado apresenta uma relação entre pontos normalmente hiperbólicos da variedade crítica e pontos críticos do subsistema rápido.

Proposição 2.1. Um subconjunto $S_0 \subset S$ é normalmente hiperbólico se, e somente se, para cada $p = (\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \in S_0$, \mathbf{x}^* é um ponto crítico hiperbólico de $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*, 0)$.

Demonstração: Se S_0 é normalmente hiperbólico, a matriz $D_{\mathbf{x}}f(p, 0)$ não possui autovalores com parte real nula, para todo $p = (\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \in S_0$. Logo, \mathbf{x}^* é um ponto crítico hiperbólico da equação $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*, 0)$. Agora, se \mathbf{x}^* é um ponto crítico hiperbólico da equação $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*, 0)$, então $f(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, 0) = 0$ e a matriz Jacobiana $D_{\mathbf{x}}f(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, 0)$ não possui autovalores com parte real nula. Portanto, $p = (\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \in S_0$ é normalmente hiperbólico. ■

Por meio de uma análise dos pontos críticos do subsistema rápido contidos em S_0 , é possível determinar a dinâmica próxima à subvariedade crítica, isto é, se S_0 apresenta um comportamento estável ou instável. Como essa é uma notação usada para os pontos críticos ou conjuntos invariantes do sistema completo ($\varepsilon > 0$), a fim de evitar confusões, introduzimos a seguinte definição.

Definição 2.2. Um subconjunto normalmente hiperbólico $S_0 \subset S$ é dito um conjunto **atrator** se todos os autovalores de $D_{\mathbf{x}}f(p, 0)$ possuem parte real negativa, com $p \in S_0$. Por outro lado, S_0 é dito um conjunto **repulsor** se todos os autovalores de $D_{\mathbf{x}}f(p, 0)$ possuem parte real positiva, com $p \in S_0$. Se S_0 é normalmente hiperbólico e não é nem um conjunto atrator e nem um conjunto repulsor, diz-se que S_0 é do **tipo sela**.

Outra noção importante para o entendimento da TGPS é a possibilidade de mensurar a distância entre dois conjuntos, o que motiva a próxima definição.

Definição 2.3. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}^{m+n}$ conjuntos compactos e não-vazios. A **distância de Hausdorff** entre A e B é definida como

$$d_H(A, B) := \max \left\{ \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \|a - b\|, \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} \|a - b\| \right\}.$$

A seguir, apresentamos os principais resultados da teoria de Fenichel. Tal teoria estabelece condições que garantem a existência de variedades lentas invariantes do sistema (2.1) próximo às partes normalmente hiperbólicas da variedade crítica S . Isto é, uma variedade compacta $S_0 \subset S$ normalmente hiperbólica persiste como uma variedade lenta localmente invariante S_ε de (2.1) para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Além disso, a restrição de (2.1) a S_ε é uma pequena perturbação do problema reduzido (2.3).

Teorema 2.1 (1º Teorema de Fenichel). Suponha que $S_0 \subseteq S$ é uma subvariedade compacta normalmente hiperbólica (possivelmente com fronteira) do sistema (2.1), com $f, g \in C^r$ e $r < \infty$. Então, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe uma variedade localmente invariante S_ε difeomorfa a S_0 . A variedade S_ε possui distância de Hausdorff $\mathcal{O}(\varepsilon)$ de S_0 , S_ε é C^r -suave e, além disso, o fluxo do sistema (2.1) sobre S_ε converge para o fluxo lento do problema reduzido (2.3) quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Observação 2.1.

- i) A invariância local de S_ε significa que trajetórias do sistema (2.1) podem entrar ou sair dela apenas por suas fronteiras. Além disso, não vale que S_ε é globalmente invariante;
- ii) Tanto no Teorema 2.1 como no decorrer do texto, quando os símbolos \mathcal{O} ou o aparecem, estamos nos referindo a *notação de Landau*. Assim,
 - o $\delta_1(\varepsilon) = \mathcal{O}(\delta_2(\varepsilon))$, para $\varepsilon \rightarrow 0$, significa que a ordem de δ_1 não é menor do que a ordem de δ_2 se existe uma constante $k > 0$ tal que $\|\delta_1(\varepsilon)\| \leq k \|\delta_2(\varepsilon)\|$ para $\varepsilon \rightarrow 0$;
 - o $\delta_1(\varepsilon) = o(\delta_2(\varepsilon))$, para $\varepsilon \rightarrow 0$, significa que a ordem de δ_1 é maior do que a ordem de δ_2 se $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\delta_1(\varepsilon)}{\delta_2(\varepsilon)} = 0$.

- iii) As funções δ_1 e δ_2 devem ser funções de ordem, isto é, contínuas, positivas (ou negativas) no intervalo $(0, \varepsilon_0]$, com ε_0 um parâmetro positivo pequeno, e os limites $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_i(\varepsilon)$, com $i = 1, 2$, devem existir.

Definição 2.4. Uma variedade S_ε , como a obtida no 1º Teorema de Fenichel, é dita uma **variedade lenta** ou uma **variedade de Fenichel**.

Em geral, a variedade S_ε não é única, pode existir uma família de variedades lentas, as quais se encontram a uma distância de Hausdorff $\mathcal{O}(e^{-K/\varepsilon})$ umas das outras, para algum $K > 0$ com $K = \mathcal{O}(1)$. Além disso, dizer que S_ε tem distância de Hausdorff $\mathcal{O}(\varepsilon)$ de S_0 , significa que existe uma constante $C > 0$ tal que $d_H(S_\varepsilon, S_0) \leq C\varepsilon$.

Sob a condição de normal hiperbolicidade, segue que a matriz $(D_{\mathbf{x}}f)(p, 0)$ é invertível para qualquer $\mathbf{x} \in S_0$, logo o Teorema da Função Implícita (veja, por exemplo, página 164 de (LIMA, 1999)) garante que, localmente, a equação $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, 0) = 0$ pode ser resolvida para \mathbf{x} em função de \mathbf{y} . Supondo que $S_0 = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U : \mathbf{x} = h_0(\mathbf{y})\}$ é dada globalmente como um gráfico, teremos que S_ε será descrita por uma pequena perturbação h_ε de h_0 , ou seja, $S_\varepsilon = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{m+n} : \mathbf{x} = h_\varepsilon(\mathbf{y})\}$. Neste caso, pode-se ver claramente que o fluxo do sistema (1.1) em S_ε

$$\dot{\mathbf{y}} = g(h_\varepsilon(\mathbf{y}), \mathbf{y}, \varepsilon)$$

converge, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, para o fluxo lento sobre S_0 , o qual é dado por $\dot{\mathbf{y}} = g(h_0(\mathbf{y}), \mathbf{y}, 0)$.

Agora, observe que, se $S_0 \subseteq S$ é normalmente hiperbólica, então cada $p_0 \in S_0$ é um ponto crítico hiperbólico do problema de camadas (2.4). Assim, pelo Teorema da Variedade Estável (veja, por exemplo, página 107 de (PERKO, 2001)), p_0 possui variedades locais estável e instável dadas por $W^s(p_0)$ e $W^u(p_0)$, respectivamente. Define-se as **variedades locais estável e instável** de S_0 , respectivamente, por

$$W^s(S_0) = \bigcup_{p_0 \in S_0} W^s(p_0) \quad \text{e} \quad W^u(S_0) = \bigcup_{p_0 \in S_0} W^u(p_0).$$

Suponhamos que essas variedades tenham dimensões m_s e m_u , respectivamente, tais que $m_s + m_u = m$, ou seja, que a matriz $(D_{\mathbf{x}}f)(p_0, 0)$, para $p_0 \in S_0$, tem m_s autovalores com parte real negativa e m_u autovalores com parte real positiva. O próximo resultado garante que as variedades $W^s(S_0)$ e $W^u(S_0)$ persistem para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Teorema 2.2 (2º Teorema de Fenichel). Sob as hipóteses do Teorema 2.1, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, existem variedades locais estável e instável, $W^s(S_\varepsilon)$ e $W^u(S_\varepsilon)$, difeomorfas a $W^s(S_0)$ e $W^u(S_0)$, respectivamente. Elas estão $\mathcal{O}(\varepsilon)$ próximas de $W^s(S_0)$ e $W^u(S_0)$, respectivamente, e além disso, são C^r -suaves para qualquer $r < \infty$ e localmente invariantes com relação ao fluxo do sistema (2.1).

As variedades $W^s(S_\varepsilon)$ e $W^u(S_\varepsilon)$ têm dimensões $m_s + n$ e $m_u + n$, respectivamente. Assim, a variedade lenta S_ε apresenta as mesmas propriedades de estabilidade, com relação

às variáveis rápidas, que a variedade S_0 (é um conjunto normalmente hiperbólico atrator, repulsor ou do tipo sela).

A seguir, enunciamos o 3º Teorema de Fenichel, o qual estuda a persistência das variedades estável e instável individuais $W^s(p_0)$ e $W^u(p_0)$, respectivamente.

Teorema 2.3 (3º Teorema de Fenichel). Sob as hipóteses do Teorema 2.1, para cada $p_\varepsilon \in S_\varepsilon$, com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, existem variedades $W^s(p_\varepsilon) \subset W^s(S_\varepsilon)$ e $W^u(p_\varepsilon) \subset W^u(S_\varepsilon)$ difeomorfas a $W^s(p_0)$ e $W^u(p_0)$, respectivamente. Elas estão $\mathcal{O}(\varepsilon)$ próximas de $W^s(p_0)$ e $W^u(p_0)$, respectivamente, e além disso, são C^r -suaves para qualquer $r < \infty$ e as famílias $\{W^s(p_\varepsilon) : p_\varepsilon \in S_\varepsilon\}$ e $\{W^u(p_\varepsilon) : p_\varepsilon \in S_\varepsilon\}$ são invariantes no seguinte sentido

$$W^s(p_\varepsilon) \cdot t \subset W^s(p_\varepsilon \cdot t) \quad \text{e} \quad W^u(p_\varepsilon) \cdot t \subset W^u(p_\varepsilon \cdot t)$$

para todo $t \geq 0$ e para todo $t \leq 0$, respectivamente.

Observação 2.2. A notação $p_\varepsilon \cdot t$ é utilizada para denotar a trajetória que passa por p_ε após o tempo t , já $W^s(p_\varepsilon) \cdot t$ e $W^u(p_\varepsilon) \cdot t$ são utilizadas para denotar a aplicação do fluxo aos conjuntos $W^s(p_\varepsilon)$ e $W^u(p_\varepsilon)$ também após o tempo t .

A seguir, apresentamos exemplos que ilustram algumas das conclusões dos Teoremas de Fenichel.

Exemplo 2.1. Vamos considerar o seguinte sistema $(1, 1)$ -rápido-lento

$$\begin{aligned} x' &= y^2 - x, \\ y' &= -\varepsilon y. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Primeiramente, note que a variedade crítica é dada por $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y^2\}$, o qual é um conjunto normalmente hiperbólico e atrator, uma vez que $D_x f(p, 0) = \frac{\partial}{\partial x}(y^2 - x) = -1 < 0$ para todo $p \in S$. Agora, observe que o sistema (2.5) pode ser resolvido de forma explícita com solução dada por

$$(x(t), y(t)) = \left(\left[x(0) - \frac{y(0)^2}{1 - 2\varepsilon} \right] e^{-t} + \frac{y(0)^2}{1 - 2\varepsilon} e^{-2\varepsilon t}, y(0)e^{-\varepsilon t} \right). \tag{2.6}$$

Se tomamos condições iniciais $(x(0), y(0))$ tais que $x(0) = \frac{y(0)^2}{1 - 2\varepsilon}$, então a solução (2.6) evolui apenas na escala de tempo lento $\tau = \varepsilon t$:

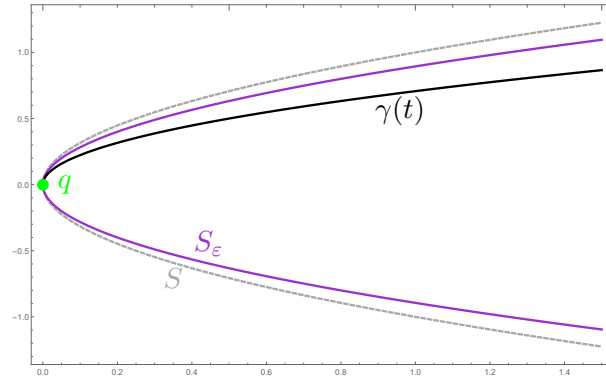
$$(x(t), y(t)) = \left(\frac{y(0)^2}{1 - 2\varepsilon} e^{-2\varepsilon t}, y(0)e^{-\varepsilon t} \right).$$

Em particular, note que $x(t) = \frac{y(t)^2}{1 - 2\varepsilon}$ para todo $t \geq 0$. Assim, a variedade de Fenichel é dada por

$$S_\varepsilon = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \frac{y^2}{1 - 2\varepsilon} \right\}.$$

◇

Figura 7 – Variedade crítica S , variedade lenta S_ε (para $\varepsilon = 0.2$) e $\gamma(t)$ uma trajetória do sistema (2.5).



Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 2.2. Vamos considerar o sistema $(1, 1)$ -rápido-lento dado por

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{x} &= y - x, \\ \dot{y} &= 1.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Note que a variedade crítica é dada por $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$ e para o sistema (2.7), é fácil obter a forma explícita da solução:

$$(x(\tau), y(\tau)) = (y(0) + \tau - \varepsilon + (x(0) - y(0) + \varepsilon)e^{-\tau/\varepsilon}, y(0) + \tau).$$

Tomando condições iniciais $(x(0), y(0))$ tais que $x(0) - y(0) + \varepsilon = 0$, temos que $x(\tau) - y(\tau) + \varepsilon = 0$, para todo $\tau \in \mathbb{R}$, e a solução acima evolui apenas na escala de tempo lento. Logo, a curva dada por $S_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x + \varepsilon\}$ é uma variedade lenta. Além disso, note que $d_H(S, S_\varepsilon) = \varepsilon$. Essas observações refletem as afirmações do 1º Teorema de Fenichel que garantem a existência de uma variedade lenta localmente difeomorfa a S , que está a uma distância de Hausdorff $\mathcal{O}(\varepsilon)$ de S e, também, que a variedade lenta possui as mesmas propriedades de estabilidade de S , isto é, um conjunto normalmente hiperbólico atrator (2º Teorema de Fenichel). Por último, note que se tomamos condições iniciais $(x(0), y(0))$ tais que $x(0) - y(0) + \varepsilon = e^{-k/\varepsilon}$ para algum $k > 0$ fixo, com $k = \mathcal{O}(1)$, as diferentes variedades lentas estão dentro de uma faixa de tamanho $\mathcal{O}(e^{-k/\varepsilon})$. \diamond

2.2 Fluxo lento

Na seção anterior, estudamos o comportamento do sistema completo próximo à variedade crítica S . Agora, nesta seção, apresentamos noções para o estudo do fluxo lento que ocorre sobre S . Para isso, introduzimos uma diferenciação para os pontos sobre S .

Definição 2.5. Seja S uma variedade crítica. Os pontos do conjunto

$$S_s = \{p \in S : (D_{\mathbf{x}}f)(p, 0) \text{ não é invertível}\}$$

são ditos **pontos singulares (rápido-lento)**, já os pontos do conjunto $S_r := S - S_s$ são ditos **regulares (rápido-lento)**.

Exemplo 2.3. Vamos considerar $p^* \in S$ e supor que a parte linear do subsistema rápido é dada por

$$(D_x f)(p^*, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Note que a matriz inversa de $(D_x f)(p^*, 0)$ é dada por

$$(D_x f)^{-1}(p^*, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

o que implica que p^* é um ponto regular de acordo com a Definição 2.5. Porém, para os pontos $p^* \in S$, a matriz $(D_x f)(p^*, 0)$ possui um par de autovalores complexos com parte real nula dados por $\pm i$. Logo, o conjunto S não é normalmente hiperbólico. \diamond

Esse exemplo mostra que a condição de regularidade é mais “fraca” do que a de normal hiperbolicidade. Por outro lado, se $p \in S_s$, a matriz $(D_x f)(p, 0)$ não é invertível, logo $\det[(D_x f)(p, 0)] = 0$ e, assim, 0 é um autovalor de multiplicidade pelo menos 1 da matriz $(D_x f)(p, 0)$ e, conseqüentemente, S não é normalmente hiperbólico em p . Agora, se $p \in S$ é um ponto normalmente hiperbólico, então p não é um ponto singular.

Outro aspecto importante é com relação à representação local de S . Na seção anterior, vimos que quando $p \in S$ é normalmente hiperbólico, pelo Teorema da Função Implícita, S pode ser escrita localmente para \mathbf{x} em função de \mathbf{y} . Note que isso continua válido no caso em que $p \in S$ é um ponto regular (mesmo p não sendo normalmente hiperbólico). Ou seja, existe uma função $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ que descreve S próximo a p como o gráfico $\mathbf{x} = h(\mathbf{y})$ e $f(h(\mathbf{y}), \mathbf{y}, 0) = 0$ é válido próximo de p . Isso reduz o subsistema lento (2.3) à forma

$$\dot{\mathbf{y}} = g(h(\mathbf{y}), \mathbf{y}, 0). \quad (2.8)$$

Embora seja interessante conseguirmos parametrizar o subsistema lento, sua formulação como em (2.8) não representa um campo vetorial em \mathbb{R}^{m+n} , o que impossibilita uma comparação direta entre o limite singular ($\varepsilon \rightarrow 0$) e o sistema completo ($0 < \varepsilon \ll 1$). Como sabemos que o subsistema lento deve ser tangente à variedade crítica, esse não é um grande problema, uma vez que podemos incorporá-lo em \mathbb{R}^{m+n} . O próximo resultado mostra que, quando necessário, é possível obter uma expressão adequada para o fluxo lento.

Proposição 2.2. Se S é uma variedade suave e $p = (\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in S_r$ é tal que $D_x f(p, 0)$ possui posto máximo, então existe uma vizinhança $V \subset S$ de p tal que o subsistema lento, para $\varepsilon = 0$, em V é dado por

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= -D_x f(q, 0)^{-1} \cdot D_y f(q, 0) \cdot g(q, 0), \\ \dot{\mathbf{y}} &= g(q, 0), \end{aligned} \quad (2.9)$$

para todo $q \in V$.

Demonstração: Pela continuidade do determinante, é possível encontrar uma vizinhança de p , digamos $V \subset S$, tal que $D_{\mathbf{x}}f(q, 0)$ é invertível para todo $q \in V$. Note que, derivando implicitamente $0 = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, 0)$ com relação a τ , obtemos

$$(D_{\mathbf{x}}f)(q, 0)\dot{\mathbf{x}} + (D_{\mathbf{y}}f)(q, 0)\dot{\mathbf{y}} = (D_{\mathbf{x}}f)(q, 0)\dot{\mathbf{x}} + (D_{\mathbf{y}}f)(q, 0)g(q, 0) = 0.$$

Para concluir o resultado basta uma manipulação adequada da igualdade acima. ■

Vale destacar que, em geral, não é uma tarefa fácil encontrar expressões para o fluxo lento, como as descritas acima, para problemas mais complexos ou de dimensões maiores, uma vez que é necessário lidar com soluções de sistemas de equações não-lineares $0 = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, 0)$. Como o objetivo deste trabalho é estudar sistemas rápido-lento planares, isso não será um problema.

2.3 Singularidades

Nas seções anteriores, apresentamos ideias e resultados em que a variedade crítica consistia de pontos regulares ou que era um conjunto normalmente hiperbólico. Entretanto, quando essas suposições não são válidas, isto é, nos pontos de S em que a regularidade e a normal hiperbolicidade são perdidas, a dinâmica do sistema completo próxima a eles pode ser mais complexa. Nesta seção, apresentamos alguns exemplos de pontos singulares e de órbitas singulares.

Na sequência, suponha que $p \in S$ é um ponto singular no sentido da Definição 2.5. O caso mais simples em que a matriz $(D_{\mathbf{x}}f)(p, 0)$ não possui posto máximo é quando ela possui 0 como um autovalor de multiplicidade 1, ou seja, quando ela possui posto $m - 1$. Formalmente, introduzimos a próxima definição.

Definição 2.6. Um ponto $p \in S$ é dito um **ponto de dobra** se $(D_{\mathbf{x}}f)(p, 0)$ possui posto $m - 1$. Além disso, o ponto de dobra é dito **não-degenerado** se para vetores v e w nos espaços nulos esquerdo e direito, respectivamente, de $(D_{\mathbf{x}}f)(p, 0)$ as condições abaixo são satisfeitas:

$$w \cdot [(D_{\mathbf{xx}}f)(p, 0) \cdot (v, v)] \neq 0 \quad \text{e} \quad w \cdot [(D_{\mathbf{y}}f)(p, 0)] \neq 0.$$

Outra característica importante dos pontos singulares é que eles são pontos naturais de transição do subsistema lento para o subsistema rápido ou vice-versa. Como veremos, a ideia é considerar concatenações de segmentos de trajetórias dos fluxos rápido e lento para o estudo da dinâmica do sistema completo.

Definição 2.7. Uma **trajetória singular** (ou **órbita singular**) é uma imagem homeomorfa $\gamma_0(t)$ de um intervalo real (a, b) , com $a < b$, tal que:

- a) o intervalo é particionado como $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$;
- b) a imagem de cada subintervalo $\gamma_0(t_{j-1}, t_j)$ é uma trajetória ou do subsistema rápido ou do subsistema lento;
- c) a imagem $\gamma_0(a, b)$ tem uma orientação consistente com as orientações em cada subintervalo (t_{j-1}, t_j) induzidas pelos fluxos rápido e lento.

Órbitas singulares também podem ser chamadas de **órbitas candidatas**, como definido em (KUEHN, 2015), ou ainda **conjunto limite periódico**, como descrito em (DUMORTIER; ROUSSARIE, 1996), quando é um limite possível (com relação a distância de Hausdorff) de uma sequência de ciclos limites.

Exemplo 2.4. Vamos considerar o sistema $(1, 1)$ -rápido-lento dado por

$$\begin{aligned} x' &= y - x^2, \\ y' &= \varepsilon g(x, y, \varepsilon). \end{aligned} \tag{2.10}$$

A variedade crítica é dada pelo conjunto $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$. Note que o ponto $q = (0, 0)$ não é regular e nem normalmente hiperbólico. De fato, a matriz $(D_x f)(q, 0)$ não é invertível e possui 0 como autovalor uma vez que

$$(D_x f)(q, 0) = -2x|_q = 0.$$

Além disso, temos que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(q, 0) = -2 \neq 0 \quad \text{e} \quad (D_y f)(q, 0) = 1 \neq 0,$$

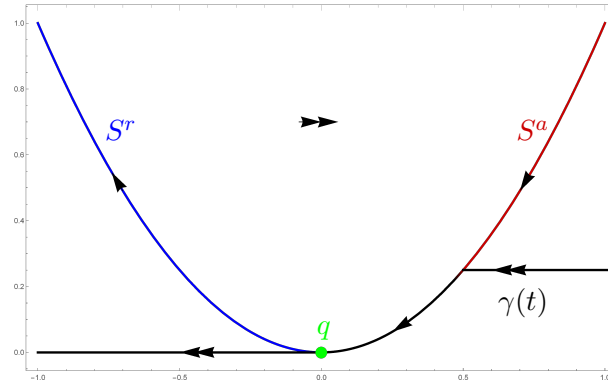
satisfazendo as condições de não-degenerescência da Definição 2.6. Por último, note que o subsistema rápido de (2.10) é

$$\begin{aligned} x' &= y - x^2, \\ y' &= 0. \end{aligned}$$

Logo, $y \in \mathbb{R}$ é um parâmetro e a equação $x' = y - x^2$ está na forma normal para uma **bifurcação do tipo dobra** em $y = 0$. A Figura 8 ilustra o comportamento dos subsistemas rápido e lento próximos ao ponto q . As setas duplas e as setas simples indicam as direções dos fluxos rápido e lento, respectivamente, enquanto que $\gamma(t)$ representa uma possível órbita singular. \diamond

O Exemplo 2.4, além de ilustrar a Definição 2.6, também faz uma alusão à forma normal da bifurcação dobra (também conhecida como bifurcação sela-nó). Veja o Exemplo 1 da seção 4.2 de (PERKO, 2001) ou, ainda, o capítulo 4 da mesma referência para mais detalhes sobre a *Teoria das Bifurcações*.

Figura 8 – Representação dos fluxos rápido e lento do Exemplo 2.4.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 2.5. Vamos considerar o sistema $(1, 1)$ -rápido-lento dado por

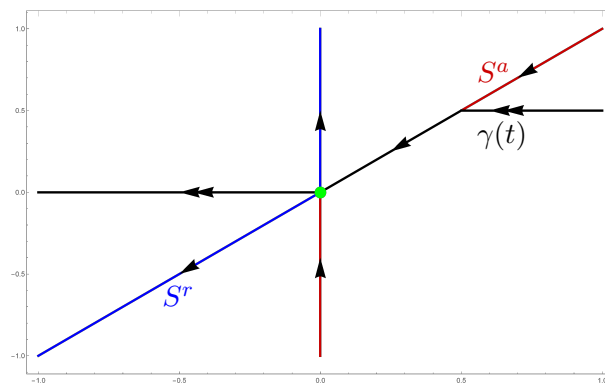
$$\begin{aligned} x' &= x(y - x), \\ y' &= \varepsilon g(x, y, \varepsilon). \end{aligned} \quad (2.11)$$

O conjunto crítico $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \text{ ou } y = x\}$ é uma variedade exceto em $(0, 0)$. Observe que o subsistema rápido de (2.11) é

$$\begin{aligned} x' &= x(y - x), \\ y' &= 0. \end{aligned}$$

Logo, $y \in \mathbb{R}$ é um parâmetro e a equação $x' = x(y - x)$ está na forma normal para uma **bifurcação transcritical** em $y = 0$. A Figura 9 ilustra o comportamento dos fluxos rápido e lento para o sistema (2.11). As setas duplas e as setas simples indicam as direções dos fluxos rápido e lento, respectivamente, enquanto que $\gamma(t)$ representa uma possível órbita singular. \diamond

Figura 9 – Representação do fluxo rápido (setas duplas) e do fluxo lento (setas únicas) obtidos no limite singular para o sistema 2.11.



Fonte: Elaborada pelo autor.

O próximo exemplo ilustra o caso da bifurcação de Hopf para o subsistema rápido.

Exemplo 2.6. Vamos considerar o sistema $(2, 1)$ -rápido-lento dado por

$$\begin{aligned}x_1' &= yx_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) = f_1(\mathbf{x}, y), \\x_2' &= x_1 + yx_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2) = f_2(\mathbf{x}, y) \\y' &= \varepsilon g(x, y, \varepsilon),\end{aligned}\tag{2.12}$$

onde $\mathbf{x} := (x_1, x_2)$ e $f := (f_1, f_2)$. A variedade crítica é $S = \{(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 = 0\}$, ou seja, o eixo y . Note que

$$D_{\mathbf{x}}f|_S = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & -1 \\ 1 & y \end{pmatrix}.$$

Logo, todos os pontos da variedade crítica são regulares e S é um conjunto normalmente hiperbólico, com excessão da origem uma vez que $D_{\mathbf{x}}f$ possui um par de autovalores complexos $\pm i$ para $y = 0$. O subsistema rápido de (2.12) é dado por

$$\begin{aligned}x_1' &= yx_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2), \\x_2' &= x_1 + yx_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \\y' &= 0.\end{aligned}$$

Assim, $y \in \mathbb{R}$ é um parâmetro e temos que (x_1', x_2') está na forma normal de uma bifurcação de Hopf. \diamond

OSCILAÇÃO DE RELAXAMENTO

Este capítulo é destinado ao estudo de um tipo especial de movimento periódico conhecido como *oscilação de relaxamento*, tanto no contexto de sistemas rápido-lento suaves como no contexto em que o sistema é suave por partes. Inicialmente, apresentamos a famosa equação de van der Pol e as principais ideias sobre o fenômeno de oscilação de relaxamento, além de um resultado para o caso suave planar. Posteriormente, na Seção 3.3, apresentamos um resultado análogo para o caso de sistemas rápido-lento suaves por partes, presente em (CARDIN, 2022).

3.1 A equação de van der Pol

Balthasar van der Pol foi um físico holandês pioneiro no estudo e desenvolvimento da rádio-comunicação muito renomado, tanto que em 1927, após estabelecer a primeira comunicação radiotelefônica entre a Holanda e as Índias Orientais Holandesas, foi nomeado Cavaleiro da Ordem de Orange-Nassau, honra concedida à cidadãos que merecem o reconhecimento da sociedade holandesa. Além da sua contribuição à área da rádio-comunicação, van der Pol é reconhecido pela apresentação da famosa equação que leva seu nome, dada por

$$x'' + \mu(x^2 - 1)x' + x = 0, \quad (3.1)$$

por meio do artigo (POL, 1926) publicado em 1926. Essa equação é um caso particular das equações diferenciais de segunda ordem obtidas por Liénard, Andronov e van der Pol, conhecidas como *equações de Liénard*.

Supomos que o parâmetro μ é suficientemente grande ($\mu \gg 1$). A equação de van der Pol pode ser transformada em um sistema rápido-lento. Para isso, tomamos $t = \mu\tau$ e trocamos x' por $\frac{\dot{x}}{\mu}$ e x'' por $\frac{\ddot{x}}{\mu^2}$, onde x' e \dot{x} denotam a derivada em relação à t e τ , respectivamente. Usando a chamada transformação de Liénard $y := \frac{\dot{x}}{\mu^2} + \frac{x^3}{3} - x$, temos que

$\dot{y} = -x$ e, conseqüentemente, a equação (3.1) pode ser transformada no seguinte sistema rápido-lento de primeira ordem

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{x} &= y - \frac{x^3}{3} + x, \\ \dot{y} &= -x,\end{aligned}\tag{3.2}$$

onde $\varepsilon = 1/\mu^2$.

Se na equação de van der Pol consideramos um termo de força constante, representado por $a > 0$, obtemos a seguinte equação:

$$x'' + \mu(x^2 - 1)x' + x = a.\tag{3.3}$$

Usando a mesma estratégia anterior, podemos escrever a equação (3.3) como um sistema (1,1)-rápido-lento dado por

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{x} &= y - \frac{x^3}{3} + x, \\ \dot{y} &= a - x.\end{aligned}\tag{3.4}$$

Essa equação desempenhou um importante papel no estudo de múltiplas escalas de tempo e no estudo do chamado fenômeno da explosão canard, o qual nos aprofundaremos no Capítulo 4.

A seguir, usaremos o sistema (3.2) para ilustrar o fenômeno de oscilação de relaxamento, além de ilustrar algumas das ideias estudadas nos capítulos anteriores.

A equação de van der Pol é o modelo mais utilizado na abordagem do fenômeno de oscilação de relaxamento e, geralmente, os créditos do início do estudo desse tipo de oscilação são dados a van der Pol. De fato, sua contribuição para o desenvolvimento dos estudos sobre comportamentos auto-oscilantes sustentados não-lineares é gigantesca e inegável, sendo possível destacar seu papel na distinção deste tipo particular de oscilação, a qual difere das oscilações senoidais, e na forma como tais fenômenos deveriam ser investigados. No entanto, é preciso salientar que a aparição dessas oscilações já havia sido observada em trabalhos anteriores ao de van der Pol, veja (GINOUX; LETELLIER, 2012) por exemplo.

Exemplo 3.1. Vamos considerar o sistema (3.2). A variedade crítica é dada por $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{x^3}{3} - x\}$. De acordo com a Definição 2.6, $A_+ = (1, -2/3)$ e $A_- = (-1, 2/3)$ são pontos de dobra não-degenerados de S , uma vez que $D_x f(A_{\pm}, 0) = 0$, $D_{xx} f(A_{\pm}, 0) = -2 \neq 0$ e $D_y f(A_{\pm}, 0) = 1 \neq 0$. Além disso, os pontos A_{\pm} dividem S em três partes normalmente hiperbólicas, $S^{a^-} = S \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < -1\}$, $S^r = S \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 1\}$ e $S^{a^+} = S \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1\}$, sendo $S^{a^{\pm}}$ conjuntos atratores e S^r um conjunto repulsor. Agora, observe que os subsistemas rápido e lento, obtidos por meio do limite singular $\varepsilon \rightarrow 0$, são dados por

$$\begin{aligned}x' &= y - \frac{x^3}{3} + x, & e & & 0 &= y - \frac{x^3}{3} + x, \\ y' &= 0, & & & \dot{y} &= -x,\end{aligned}$$

respectivamente. Podemos também parametrizar o fluxo lento usando a variável x . De fato, se derivamos $f(x, y) = y - x^3/3 + x$ com relação a τ , obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} = (1 - x^2)\dot{x} + \dot{y} = 0.$$

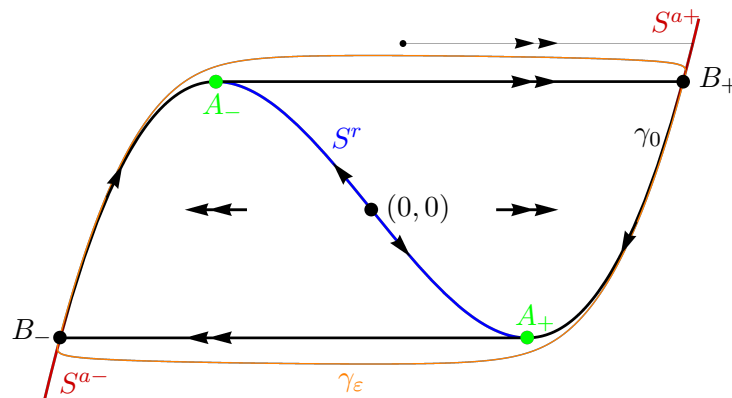
Logo, como $\dot{y} = -x$ no subsistema lento, o fluxo lento pode ser dado explicitamente por

$$\dot{x} = \frac{x}{1 - x^2},$$

o qual possui um ponto crítico instável na origem e não está definido nos pontos A_{\pm} . Observe ainda que o subsistema rápido pode ter 1, 2 ou 3 pontos críticos em cada camada dependendo dos valores que y assume. De fato, para $|y| > 2/3$ há apenas um ponto crítico estável; para $|y| < 2/3$ há 3 pontos críticos em cada camada e o ramo S^r consiste de pontos críticos instáveis; para $|y| = 2/3$ cada camada possui dois pontos críticos. Com base nessas observações, os fluxos rápido (setas duplas) e lento (setas simples) são como os indicados na Figura 10.

Seja γ_0 a órbita singular fechada definida como a união de trajetórias do subsistema rápido ligando os pontos A_{\mp} e $B_{\pm} = (\pm 2, \pm 2/3)$, respectivamente, e dos pedaços de S ligando os pontos B_{\pm} e A_{\pm} , respectivamente. Como veremos abaixo no Teorema 3.1, γ_0 perturba como um ciclo limite estável γ_{ε} do sistema (3.2), para $0 < \varepsilon \ll 1$, veja a Figura 10. Além disso, $\gamma_{\varepsilon} \rightarrow \gamma_0$ na distância de Hausdorff conforme $\varepsilon \rightarrow 0$. \diamond

Figura 10 – Representação dos fluxos rápido e lento obtidos no limite singular do Exemplo 3.1, da órbita singular γ_0 , do ciclo limite γ_{ε} e das dobras e partes normalmente hiperbólicas de S .



Fonte: Elaborada pelo autor.

3.2 Oscilação de relaxamento em sistemas suaves

Nesta seção, introduzimos as oscilações de relaxamento e um resultado que garante sua existência para sistemas suaves planares, apresentado em (KRUPA; SZMOLYAN, 2001b).

Definição 3.1. Uma família contínua de soluções periódicas γ_ε de um sistema rápido-lento é dita uma **oscilação de relaxamento** se ela converge, com relação a distância de Hausdorff, no limite singular $\varepsilon \rightarrow 0$ para uma órbita singular γ_0 .

Definição 3.2. Um ponto $p \in S$ no qual segmentos dos fluxos rápido e lento são concatenados é dito um **ponto de salto** (“**jump point**”) se o fluxo rápido é direcionado para longe da variedade crítica S . Quando o fluxo rápido é direcionado para S , então p é dito um **ponto de descida** (“**drop point**”).

A Definição 3.1 contempla o caso mostrado no Exemplo 3.1, mas ela também abrange outros tipos de oscilações que ocorrem em sistemas rápido-lento que, tradicionalmente, não são chamados de oscilações de relaxamento. Logo, a próxima definição surge com o intuito de especificar um pouco mais o fenômeno no qual estamos interessados.

Definição 3.3. Uma família contínua de soluções periódicas γ_ε de um sistema rápido-lento é dita uma **oscilação de relaxamento simples** se ela converge, com relação a distância de Hausdorff, no limite singular $\varepsilon \rightarrow 0$ para uma órbita singular γ_0 e, além disso, os saltos ocorrem apenas em pontos de dobra genéricos e os pontos de descida são normalmente hiperbólicos.

Nesta seção, focaremos no caso planar, ou seja, consideramos sistemas $(1, 1)$ -rápido-lento

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y, \varepsilon), \\ y' &= \varepsilon g(x, y, \varepsilon), \end{aligned} \tag{3.5}$$

onde $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Nosso intuito é explorar um resultado que nos garante a existência de uma oscilação de relaxamento simples para o sistema (3.5). Para isso, vamos fazer as seguintes suposições:

(A₁) A variedade crítica S é “S-shaped” (em forma de S), isto é, pode ser escrita como $y = h(x)$ com $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função com dois pontos críticos, um máximo local $A_+ = (x_M, y_M)$ e um mínimo local $A_- = (x_m, y_m)$, ambos dobras não-degeneradas. Sem perda de generalidade, podemos transladar o ponto A_- para a origem. Neste caso, obtemos as seguintes partes da variedade crítica

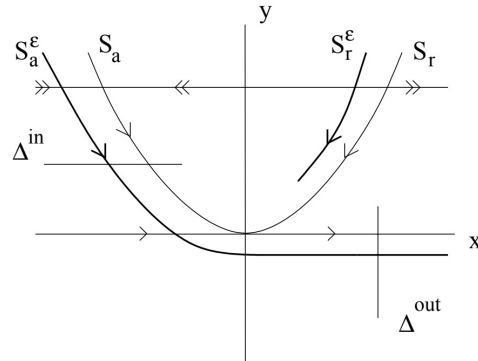
$$S^{a-} = S \cap \{x < 0\}, S^r = S \cap \{0 < x < x_M\}, S^{a+} = S \cap \{x_M < x\};$$

(A₂) Os ramos $S^{a\pm}$ são conjuntos atratores e o ramo S^r é um conjunto repulsor, todos normalmente hiperbólicos;

(A₃) Os pontos de dobra de S são genéricos, isto é, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial f}{\partial y}$ e g não se anulam em A_\pm ;

(A₄) O fluxo lento em S^{a-} aponta para a direita ($\dot{x} > 0$) e, em S^{a+} , aponta para a esquerda ($\dot{x} < 0$).

Figura 12 – Variedade crítica, variedades lentas e seções transversais próximas à uma dobra.



Fonte: Retirada do artigo (KRUPA; SZMOLYAN, 2001a).

Demonstração (Teorema 3.1): De acordo com a teoria de Fenichel, existem variedades lentas $S_\varepsilon^{a\pm}$ que estão $\mathcal{O}(\varepsilon)$ próximas de $S^{a\pm}$, respectivamente. Já pelo Lema 3.1, próximo à uma dobra genérica, as variedades lentas podem ser continuadas além dos pontos de dobra e, assim, seguirem próximas à uma camada do fluxo rápido até chegarem à uma vizinhança da outra variedade lenta. Vamos considerar uma seção Δ , como na Figura 11, e assumir que $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno. Analisando duas trajetórias $\gamma_\varepsilon^{1,2}$ que começam em Δ , segue que, inicialmente, $\gamma_\varepsilon^{1,2}$ serão atraídas para S_ε^{a-} e, ao passarem próximas do ponto de dobra A_- , irão se contrair exponencialmente uma em direção a outra e seguirem próximas à uma camada do fluxo rápido até atingirem uma vizinhança da variedade lenta S_ε^{a+} . Analogamente, $\gamma_\varepsilon^{1,2}$ são atraídas para S_ε^{a+} , passam próximas a dobra em A_+ , seguem próximas à uma camada do fluxo rápido, até atingirem uma vizinhança de S_ε^{a-} , e retornam a Δ após serem atraídas por S_ε^{a-} .

Portanto, analisando a aplicação de primeiro retorno $\Pi : \Delta \rightarrow \Delta$, temos que Π é uma contração (com taxa exponencial $\mathcal{O}(e^{-1/\varepsilon})$) e, pelo Teorema do Ponto Fixo (veja, por exemplo, página 31 de (BARREIRA; VALLS, 2012)), Π possui um único ponto fixo, que corresponde a um ciclo limite γ_ε . Como a contração é exponencial próxima do ciclo limite, seu multiplicador característico é limitado acima por $-K/\varepsilon$ para alguma constante $K > 0$. Além disso, segue da teoria de Fenichel e do Lema 3.1 que, no limite singular ($\varepsilon \rightarrow 0$), $\gamma_\varepsilon \rightarrow \gamma_0$ na distância de Hausdorff. ■

3.3 Oscilação de relaxamento em sistemas suaves por partes

Nesta seção, retomando os conceitos estudados na Seção 1.2 sobre sistemas suaves por partes, apresentamos condições que garantem a existência de uma oscilação de relaxamento simples para o sistema (3.5) no caso em que f e g são funções suaves por partes

dadas por

$$f(x, y, \varepsilon) = \begin{cases} f^-(x, y, \varepsilon) & \text{se } h(x, y) < 0, \\ f^+(x, y, \varepsilon) & \text{se } h(x, y) > 0, \end{cases} \quad (3.6)$$

e

$$g(x, y, \varepsilon) = \begin{cases} g^-(x, y, \varepsilon) & \text{se } h(x, y) < 0, \\ g^+(x, y, \varepsilon) & \text{se } h(x, y) > 0, \end{cases} \quad (3.7)$$

onde $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave que possui 0 como um valor regular e f^-, f^+, g^- e g^+ são funções suficientemente suaves em suas componentes. Logo, podemos considerar o sistema (1, 1)-rápido-lento dado por

$$(x', y') = \begin{cases} (f^-(x, y, \varepsilon), \varepsilon g^-(x, y, \varepsilon)) & \text{se } h(x, y) < 0, \\ (f^+(x, y, \varepsilon), \varepsilon g^+(x, y, \varepsilon)) & \text{se } h(x, y) > 0, \end{cases} \quad (3.8)$$

na escala de tempo rápido. Equivalentemente, considerando a escala de tempo lento, o sistema pode ser dado por

$$(\varepsilon \dot{x}, \dot{y}) = \begin{cases} (f^-(x, y, \varepsilon), g^-(x, y, \varepsilon)) & \text{se } h(x, y) < 0, \\ (f^+(x, y, \varepsilon), g^+(x, y, \varepsilon)) & \text{se } h(x, y) > 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

A não-suavidade (ou mesmo descontinuidade) dos sistemas (3.8) e (3.9) ocorre no conjunto

$$\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : h(x, y) = 0\}.$$

Assim como no caso suave, podemos considerar os problemas de camada e reduzido dados, respectivamente, por

$$(x', y') = \begin{cases} (f^-(x, y, 0), 0) & \text{se } h(x, y) < 0, \\ (f^+(x, y, 0), 0) & \text{se } h(x, y) > 0, \end{cases} \quad (3.10)$$

e

$$(0, \dot{y}) = \begin{cases} (f^-(x, y, \varepsilon), g^-(x, y, \varepsilon)) & \text{se } h(x, y) < 0, \\ (f^+(x, y, \varepsilon), g^+(x, y, \varepsilon)) & \text{se } h(x, y) > 0. \end{cases} \quad (3.11)$$

Na sequência, apresentamos um resultado análogo ao Teorema 3.1, presente em (CARDIN, 2022). Para isso, vamos assumir as seguintes hipóteses:

(B₁) f^-, f^+, g^- e g^+ são funções suficientemente suaves em seus argumentos.

(B₂) A variedade crítica S pode ser escrita na forma $y = \varphi(x)$, onde a função $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é suave por partes e contínua, com dois pontos críticos nos quais a derivada se anula, um mínimo local x_m e um máximo local x_M , ambos dobras não-degeneradas. A função contínua φ é diferenciável exceto, possivelmente, na abscissa dos pontos em $S \cap \Sigma$, os quais podem ser pontos críticos de φ onde a derivada φ' não existe. Sem perda de generalidade, assumiremos que $x_M < x_m$.

(B₃) Suponha que as retas $y = y_M := \varphi(x_M)$ e $y = y_m := \varphi(x_m)$, passando pelos pontos $A := (x_M, y_M)$ e $B := (x_m, y_m)$, intersectam o gráfico de φ nos pontos $C \neq A$ e $D \neq B$, respectivamente.

De acordo com (B₃), temos que a variedade crítica S pode ser decomposta como

$$S = S_l \cup \{A\} \cup S_m \cup \{B\} \cup S_r,$$

onde

$$\begin{aligned} S_l &= \{(x, \varphi(x)) \in \mathbb{R}^2 : x < x_M\}, \\ S_m &= \{(x, \varphi(x)) \in \mathbb{R}^2 : x_M < x < x_m\}, \\ S_r &= \{(x, \varphi(x)) \in \mathbb{R}^2 : x > x_m\}. \end{aligned}$$

Além disso, os ramos S_l , S_m e S_r podem ter partes que se encontram em ambos os lados de Σ . A parte de S_i , para $i \in \{l, m, r\}$, em $\Sigma^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : h(x, y) < 0\}$ e em $\Sigma^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : h(x, y) > 0\}$, será denotada por S_i^- e S_i^+ , respectivamente.

(B₄) Os pontos de dobra A e B são genéricos, isto é, $(\partial^2 f / \partial x^2)$, $(\partial f / \partial y)$ e g não se anulam em $(A, 0)$ e $(B, 0)$.

(B₅) $(\partial f / \partial x)(x, y, 0) < 0$ para $(x, y) \in S_l \cup S_r$ e $(\partial f / \partial x)(x, y, 0) > 0$ para $(x, y) \in S_m$. Isso significa que, para o problema de camada (3.10), os ramos S_l e S_r são atratores enquanto que o ramo S_m é repulsor.

(B₆) $g(x, y, 0) > 0$ para $(x, y) \in S_l$ e $g(x, y, 0) < 0$ para $(x, y) \in S_r$. Também, assuma que existem pontos x_- e x_+ , com $x_M < x_- < x_+ < x_m$, tais que $g(x, y, 0) < 0$ para $(x, y) \in S$ com $x_+ < x < x_m$ e $g(x, y, 0) > 0$ para $(x, y) \in S$ com $x_M < x < x_-$.

Antes de apresentar a última hipótese, definimos uma **trajetória singular de costura** Γ como a união das trajetórias de (3.10) que ligam o ponto A ao ponto C e B ao ponto D , com as partes de S que juntam D e A , e C e B , veja a Figura 13.

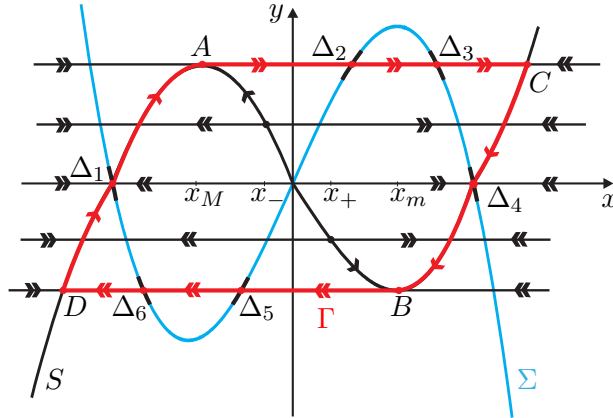
(B₇) Γ e Σ se intersectam transversalmente apenas numa quantidade finita de pontos de costura do sistema (3.8), isto é, $\Gamma \cap \Sigma \subset \Sigma^c$. Além disso, se $S \cap \Gamma \cap \Sigma \neq \emptyset$, assuma que S é normalmente hiperbólica em qualquer ponto em $S \cap \Gamma \cap \Sigma$, ou seja, os pontos de dobra de S não pertencem a $S \cap \Gamma \cap \Sigma$.

O próximo resultado estabelece a existência de uma oscilação de relaxamento de costura para o sistema rápido-lento suave por partes (3.8).

Teorema 3.2. Seja V uma pequena vizinhança tubular de Γ e assuma que o sistema (3.8) satisfaz as hipóteses (B₁) – (B₇). Então, para cada $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe um único ciclo limite de costura $\Gamma_\varepsilon \subset V$ que se aproxima de Γ na distância de Hausdorff

conforme $\varepsilon \rightarrow 0$. Além disso, Γ_ε é estável, com expoente característico limitado acima por $-K/\varepsilon$ para alguma constante $K > 0$.

Figura 13 – Esboço da dinâmica rápida e lenta sob as hipóteses $(B_1) - (B_7)$. A curva fechada em vermelho representa a trajetória singular de costura Γ , enquanto que as curvas em azul e preto representam, respectivamente, a variedade de descontinuidade Σ e a variedade crítica S .



Fonte: Retirada do artigo (CARDIN, 2022).

Observação 3.1. A região tubular V citada no Teorema 3.2 é fixada e independe de ε .

Demonstração: Seja $\Gamma \cap \Sigma = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$, com $P_j = (x_j, y_j)$, para $j = 1, \dots, n$. Em cada ponto P_j , vamos considerar uma seção transversal adequada $\Delta_j \subset \Sigma$ (assim como ilustrado na Figura 13). De acordo com (B_7) , cada ponto P_j é de costura e, dessa forma, por argumentos de continuidade relacionados à derivada de Lie e tomando uma seção transversal Δ_j menor caso seja necessário, podemos assumir que todos os pontos em Δ_j também são pontos de costura do sistema (3.8), para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Pelas hipóteses do Teorema 3.2, é possível definir funções de transição $\pi_j : \Delta_j \rightarrow \Delta_{j+1}$, com $j = 1, \dots, n-1$, e $\pi_n : \Delta_n \rightarrow \Delta_1$. A seguir, faremos uma análise dos diferentes tipos de funções de transição que podem ocorrer. Note que um ponto P_j de $\Gamma \cap \Sigma$ pode pertencer à $S_l \cup \overline{AC} \cup S_r \cup \overline{BD}$, mas temos que $P_j \neq A$ e $P_j \neq B$, de acordo com (B_7) . Logo, obtemos os seguintes casos: (i) $P_j, P_{j+1} \in S_l$, (ii) $P_j \in S_l$ e $P_{j+1} \in \overline{AC}$, (iii) $P_j, P_{j+1} \in \overline{AC}$ e (iv) $P_j \in \overline{AC}$ e $P_{j+1} \in S_r$. As análises das funções de transição para as outras possibilidades são análogas. Por exemplo, se $P_j, P_{j+1} \in S_r$, a análise é similar ao caso (i); se $P_j \in S_r$ e $P_{j+1} \in \overline{BD}$, a análise é similar ao caso (ii); se $P_j, P_{j+1} \in \overline{BD}$ é análogo ao caso (iii) e se $P_j \in \overline{BD}$ e $P_{j+1} \in S_l$ a análise é similar ao caso (iv). Observe que é possível a existência de outras situações como, por exemplo, se $P_j \in S_l$ e $P_{j+1} \in S_r$. Em tais situações, basta notar que a função de transição é dada por uma composição de funções nas formas analisadas.

Pela teoria de Fenichel, segue que (subvariedades compactas adequadas de) S_l^-, S_l^+, S_r^- e S_r^+ perturbam as variedades lentas $S_{l,\varepsilon}^-, S_{l,\varepsilon}^+, S_{r,\varepsilon}^-$ e $S_{r,\varepsilon}^+$, respectivamente. Além disso, pelo

Lema 3.1, a variedade lenta persistente $S_{l,\varepsilon}^+$ (respectivamente, $S_{r,\varepsilon}^-$) continua além do ponto de dobra A (respectivamente, B) e segue próxima à uma camada do sistema $x' = f^+(x, y, 0), y' = 0$ (respectivamente, $x' = f^-(x, y, 0), y' = 0$).

Sejam $p_j, q_j \in \Delta_j$ e $\gamma_{p_j,\varepsilon}$ e $\gamma_{q_j,\varepsilon}$ as órbitas do sistema (3.8) começando em p_j e q_j , respectivamente, para $0 < \varepsilon \ll 1$. Assim:

- (i) Como p_j e q_j são pontos de costura, as órbitas $\gamma_{p_j,\varepsilon}$ e $\gamma_{q_j,\varepsilon}$ entram em $\Sigma^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : h(x, y) > 0\}$ (ou, respectivamente, em $\Sigma^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : h(x, y) < 0\}$) e, pelo 1º Teorema de Fenichel, são atraídas para $S_{l,\varepsilon}^+$ (ou, respectivamente, para $S_{l,\varepsilon}^-$) contraindo exponencialmente uma em direção a outra até intersectarem Δ_{j+1} . Neste caso, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, a função de transição π_j é uma contração com taxa de contração limitada acima por $e^{-K_j/\varepsilon}$ para alguma constante $K_j > 0$;
- (ii) Novamente, como p_j e q_j são pontos de costura, as órbitas $\gamma_{p_j,\varepsilon}$ e $\gamma_{q_j,\varepsilon}$ entram em Σ^+ (ou, respectivamente, em Σ^-) e, pelo 1º Teorema de Fenichel, são atraídas para $S_{l,\varepsilon}^+$ (ou, respectivamente, para $S_{l,\varepsilon}^-$). Pelo Lema 3.1, $\gamma_{p_j,\varepsilon}$ e $\gamma_{q_j,\varepsilon}$ passam próximas ao ponto de dobra A contraindo exponencialmente uma em direção a outra até intersectarem Δ_{j+1} . Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, a função de transição π_j também é uma contração com o taxa de contração limitada acima por $e^{-K_j/\varepsilon}$ para alguma constante $K_j > 0$;
- (iii) Como p_j e q_j são pontos de costura, as órbitas $\gamma_{p_j,\varepsilon}$ e $\gamma_{q_j,\varepsilon}$ entram em Σ^+ (ou, respectivamente, em Σ^-) e seguem próximas à uma camada do sistema $x' = f^+(x, y, 0), y' = 0$ (ou, respectivamente, $x' = f^-(x, y, 0), y' = 0$) até intersectarem Δ_{j+1} . Uma vez que o fluxo do problema de camadas é trivial e conhecido explicitamente, pela teoria de perturbação regular, temos que as trajetórias, para $\varepsilon > 0$ pequeno o suficiente, estão $\mathcal{O}(\varepsilon)$ -próximas de suas contrapartes $\varepsilon = 0$ na seção de saída. Neste caso, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, segue pelo Teorema do Fluxo Tubular (veja, por exemplo, página 51 de (BARREIRA; VALLS, 2012)) que a função de transição π_j pode estar, no máximo, expandindo algebricamente;
- (iv) Por último, como p_j e q_j são pontos de costura, as órbitas $\gamma_{p_j,\varepsilon}$ e $\gamma_{q_j,\varepsilon}$ entram em Σ^+ (ou, respectivamente, em Σ^-) e seguem próximas à uma camada do sistema $x' = f^+(x, y, 0), y' = 0$ (ou, respectivamente, $x' = f^-(x, y, 0), y' = 0$) até que cheguem nas proximidades da variedade lenta $S_{r,\varepsilon}^+$ (ou, respectivamente, $S_{r,\varepsilon}^-$). Pelo 1º Teorema de Fenichel, elas são atraídas para $S_{r,\varepsilon}^+$ (ou, respectivamente, para $S_{r,\varepsilon}^-$) contraindo exponencialmente uma em direção a outra até intersectarem Δ_{j+1} . Neste caso, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, a função de transição π_j é uma contração com taxa de contração limitada acima por $e^{-K_j/\varepsilon}$ para alguma constante $K_j > 0$.

Para concluir a demonstração, note que qualquer escolha da função de transição $\pi : \Delta_j \rightarrow \Delta_j$ será dada por uma composição de funções de transição π_j como as estudadas em cada caso, sendo que ao menos uma irá contrair exponencialmente e as demais podem estar, no máximo, expandindo algebricamente. Assim, a função π é uma contração com taxa de contração limitada acima por $e^{-K/\varepsilon}$ para alguma constante $K > 0$. O Teorema do Ponto Fixo nos garante então que π possui um único ponto fixo, o qual corresponde a um ciclo limite de costura Γ_ε (estável) com expoente característico limitado acima por $-K/\varepsilon$. Pela teoria de Fenichel e pelo Lema 3.1, concluímos que $\Gamma_\varepsilon \rightarrow \Gamma$ na distância de Hausdorff conforme $\varepsilon \rightarrow 0$. ■

A seguir, apresentamos alguns exemplos que ilustram o Teorema 3.2.

Exemplo 3.2. Vamos considerar o seguinte sistema rápido-lento suave por partes

$$(x', y') = \begin{cases} (y + x - \frac{x^3}{3}, -2\varepsilon x) & \text{se } y < 0, \\ (y + 3x - x^3, -\varepsilon x) & \text{se } y > 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

De acordo com as notações apresentadas anteriormente, temos que

$$\begin{aligned} f^-(x, y, \varepsilon) &= y + x - x^3/3, & f^+(x, y, \varepsilon) &= y + 3x - x^3, \\ g^-(x, y, \varepsilon) &= -2x, & g^+(x, y, \varepsilon) &= -x, \end{aligned}$$

com $h(x, y) = y$. Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^-}{\partial x} &= 1 - x^2, & \frac{\partial f^+}{\partial x} &= 3 - 3x^2, & \frac{\partial g^-}{\partial x} &= -2, & \frac{\partial g^+}{\partial x} &= -1, \\ \frac{\partial f^-}{\partial y} &= 1, & \frac{\partial f^+}{\partial y} &= 1, & \frac{\partial^2 f^-}{\partial x^2} &= -2x, & \frac{\partial^2 f^+}{\partial x^2} &= -6x. \end{aligned}$$

Observe que todos os pontos sobre $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$, com exceção da origem, são pontos de costura do sistema (3.12). De fato,

$$\begin{aligned} (X_\varepsilon^+ h) \cdot (X_\varepsilon^- h) &= \langle X_\varepsilon^+, \nabla h \rangle \cdot \langle X_\varepsilon^-, \nabla h \rangle \\ &= \langle (y + x - \frac{x^3}{3}, -2\varepsilon), (0, 1) \rangle \cdot \langle (y + 3x - x^3, -\varepsilon), (0, 1) \rangle \\ &= (-2\varepsilon x) \cdot (-\varepsilon x) = 2\varepsilon^2 x^2, \end{aligned}$$

que é positivo para todo $(x, 0) \in \Sigma$ com $x \neq 0$. Além disso, as hipóteses $(B_1) - (B_7)$ são válidas. De fato, observe que a variedade crítica S é dada por $y = \varphi(x)$, com

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} - x & \text{se } x \in (-\infty, \sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3}), \\ x^3 - 3x & \text{se } x \in [-\sqrt{3}, 0] \cup [\sqrt{3}, +\infty), \end{cases}$$

as constantes $x_M = -1, y_M = 2, x_m = 1, y_m = -2/3, x_- = 0, x_+ = 0$, e os pontos $A = (-1, 2)$ e $B = (1, -2/3)$ são dobras genéricas de S , uma vez que $(\partial^2 f / \partial x^2), (\partial f / \partial y)$

e g não se anulam em A e B . Assim, as condições (B_1) , (B_2) , (B_3) e (B_4) são satisfeitas. Já a condição (B_5) é válida pois

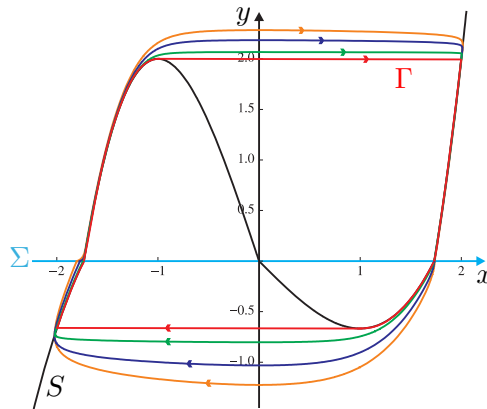
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, 0) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{se } y < 0, \\ 3 - 3x^2 & \text{se } y > 0, \end{cases}$$

é negativa em $S_l \cup S_r = \{(x, y) \in S : x < -1\} \cup \{(x, y) \in S : x > 1\}$ e positiva em $S_m = \{(x, y) \in S : -1 < x < 1\}$. A condição (B_6) é satisfeita pois

$$g(x, y, 0) = \begin{cases} -2x & \text{se } y < 0, \\ -x & \text{se } y > 0, \end{cases}$$

é positiva em S_l , negativa em S_r e, além disso, $g(x, y, 0) < 0$ para $(x, y) \in S$, com $0 < x < 1$, e $g(x, y, 0) > 0$ para $(x, y) \in S$, com $-1 < x < 0$. Por último, vamos considerar Γ a trajetória singular de costura como ilustrado na Figura 14 e V uma pequena vizinhança tubular de Γ . Note que $\Gamma \cap \Sigma = \{(-\sqrt{3}, 0), (\sqrt{3}, 0)\}$, donde é possível concluir que (B_7) é satisfeita. Portanto, pelo Teorema 3.2, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, o sistema (3.12) possui um único ciclo limte de costura estável $\Gamma_\varepsilon \subset V$ tal que $\Gamma_\varepsilon \rightarrow \Gamma$ na distância de Hausdorff conforme $\varepsilon \rightarrow 0$, veja a Figura 14. \diamond

Figura 14 – Ilustração da convergência dos ciclos limites de costura Γ_ε para Γ , conforme $\varepsilon \rightarrow 0$, para o Exemplo 3.12. A curva vermelha representa a trajetória singular de costura Γ , enquanto que as curvas laranja, azul e verde, representam o ciclos Γ_ε para $\varepsilon = 1/10$, $\varepsilon = 5/100$ e $\varepsilon = 1/100$, respectivamente. Além disso, Σ e S representam, respectivamente, as variedades de descontinuidade e crítica.



Fonte: Retirada do artigo (CARDIN, 2022).

Exemplo 3.3. Vamos considerar o sistema de Liénard rápido-lento suave por partes

$$(x', y') = \begin{cases} (y + 4x + x^2, \varepsilon(-x - 1)) & \text{se } x < 0, \\ (y + 2x - x^2, \varepsilon(-x + \frac{1}{2})) & \text{se } x > 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

Usando as notações vistas anteriormente, temos que

$$f^-(x, y, \varepsilon) = y + 4x + x^2, \quad f^+(x, y, \varepsilon) = y + 2x - x^2,$$

$$g^-(x, y, \varepsilon) = -x - 1, \quad g^+(x, y, \varepsilon) = -x + \frac{1}{2},$$

com $h(x, y) = x$. Logo,

$$\frac{\partial f^-}{\partial x} = 4 + 2x, \quad \frac{\partial f^+}{\partial x} = 2 - 2x, \quad \frac{\partial g^-}{\partial x} = -1, \quad \frac{\partial g^+}{\partial x} = -1,$$

$$\frac{\partial f^-}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial f^+}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial^2 f^-}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f^+}{\partial x^2} = -2.$$

Observe que os pontos de $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$, com exceção da origem, são pontos de costura do sistema (3.13) uma vez que

$$\begin{aligned} (X_\varepsilon^+ h) \cdot (X_\varepsilon^- h) &= \langle X_\varepsilon^+, \nabla h \rangle \cdot \langle X_\varepsilon^-, \nabla h \rangle \\ &= (y + 4x + x^2) \cdot (y + 2x - x^2) \\ &= y^2 + 2xy - yx^2 + 4xy + 8x^2 - 4x^3 + x^2y + 2x^3 - x^4 \end{aligned}$$

é sempre positivo para os pontos $(0, y) \in \Sigma$ com $y \neq 0$. A variedade crítica S é dada por $y = \varphi(x)$, com

$$\varphi(x) = \begin{cases} -x^2 - 4x & \text{se } x \in (-\infty, 0), \\ x^2 - 2x & \text{se } x \in [0, +\infty). \end{cases}$$

Temos ainda $x_m = 1$, $x_M = -2$, $y_m = -1$, $y_M = 4$, $x_- = -1$ e $x_+ = 1/2$, com $A = (-2, 4)$ e $B = (1, -1)$ dobras genéricas de S uma vez que $(\partial^2 f / \partial x^2)$, $(\partial f / \partial y)$ e g não se anulam em A e B . Logo, as condições $(B_1) - (B_4)$ são satisfeitas. A condição (B_5) é válida pois

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, 0) = \begin{cases} 4 + 2x & \text{se } x < 0, \\ 2 - 2x & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

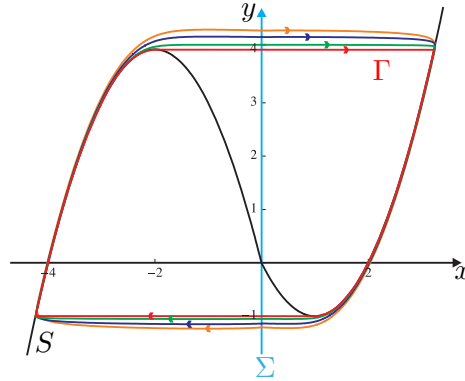
é negativa em $S_l \cup S_r = \{(x, y) \in S : x < -2\} \cup \{(x, y) \in S : x > 1\}$ e positiva em $S_m = \{(x, y) \in S : -2 < x < 1\}$. Já a condição (B_6) é verificada pois

$$g(x, y, 0) = \begin{cases} -x - 1 & \text{se } x < 0, \\ -x + \frac{1}{2} & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

é positiva em S_l e negativa em S_r , além de que $g(x, y, 0) < 0$ para $(x, y) \in S$, com $1/2 < x < 1$, e $g(x, y, 0) > 0$ para $(x, y) \in S$, com $-2 < x < -1$.

Agora, vamos considerar a órbita singular de costura Γ como ilustrado na Figura 15 e V uma pequena vizinhança tubular de Γ . Note que Γ e Σ se intersectam transversalmente em $(0, -1)$ e $(0, 4)$, os quais são pontos de costura de (3.13), o que garante que a condição (B_7) é satisfeita. Portanto, pelo Teorema 3.2, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, o sistema (3.13) possui um único ciclo limite de costura $\Gamma_\varepsilon \subset V$ estável tal que $\Gamma_\varepsilon \rightarrow \Gamma$ na distância de Hausdorff conforme $\varepsilon \rightarrow 0$, veja a Figura 15. \diamond

Figura 15 – Ilustração da convergência dos ciclos limites de costura Γ_ε para Γ , conforme $\varepsilon \rightarrow 0$, para o Exemplo 3.13. A curva vermelha representa a trajetória singular de costura Γ , enquanto que as curvas laranja, azul e verde, representam o ciclos Γ_ε para $\varepsilon = 1/10$, $\varepsilon = 5/100$ e $\varepsilon = 1/100$, respectivamente. Além disso, Σ e S representam, respectivamente, as variedades de descontinuidade e crítica.



Fonte: Retirada do artigo (CARDIN, 2022).

Exemplo 3.4. Vamos considerar o sistema rápido-lento suave por partes dado por

$$(x', y') = \begin{cases} \left(y - x^3 + \frac{5x^2}{2} + x - \frac{5}{2}, \varepsilon(-x) \right) & \text{se } y - x^2 + 1 < 0, \\ \left(y + x^2 - 1, \varepsilon(2 - x) \right) & \text{se } y - x^2 + 1 > 0. \end{cases} \quad (3.14)$$

Considerando as notações vistas, temos que

$$f^-(x, y, \varepsilon) = y - x^3 + \frac{5x^2}{2} + x - \frac{5}{2}, \quad f^+(x, y, \varepsilon) = y + x^2 - 1, \\ g^-(x, y, \varepsilon) = -x, \quad g^+(x, y, \varepsilon) = 2 - x,$$

com $h(x, y) = y - x^2 + 1$. Logo,

$$\frac{\partial f^-}{\partial x} = 1 + 5x - 3x^2, \quad \frac{\partial f^+}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial g^-}{\partial x} = -1, \quad \frac{\partial g^+}{\partial x} = -1, \\ \frac{\partial f^-}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial f^+}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial^2 f^-}{\partial x^2} = 5 - 6x, \quad \frac{\partial^2 f^+}{\partial x^2} = 2.$$

A variedade de descontinuidade é dada por $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 - 1\}$ e a variedade crítica S é dada por $y = \varphi(x)$, com

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^3 - \frac{5x^2}{2} - x + \frac{5}{2} & \text{se } x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty), \\ 1 - x^2 & \text{se } x \in [-1, 1], \end{cases}$$

e os pontos $A = (0, 1)$ e $B = ((5 + \sqrt{37})/6, ((5 + \sqrt{37})/6)^3 - 5((5 + \sqrt{37})/6)^2/2 - ((5 + \sqrt{37})/6) + 5/2) \approx (1.84713, -1.57465)$ são dobras genéricas ($(\partial^2 f / \partial x^2)$, $(\partial f / \partial y)$ e g não se anulam em A e B). Assim, as condições $(B_1) - (B_4)$ são válidas. A condição (B_5) é válida pois

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, 0) = \begin{cases} 1 + 5x - 3x^2 & \text{se } y - x^2 + 1 < 0, \\ 2x & \text{se } y - x^2 + 1 > 0, \end{cases}$$

é negativa em $S_l \cup S_r = \{(x, y) \in S : x < 0\} \cup \{(x, y) \in S : x > (5 + \sqrt{37})/6\}$ e positiva em $S_m = \{(x, y) \in S : 0 < x < (5 + \sqrt{37})/6\}$. Já a condição (B_6) é verificada pois

$$g(x, y, 0) = \begin{cases} -x & \text{se } y - x^2 + 1 < 0, \\ 2 - x & \text{se } y - x^2 + 1 > 0, \end{cases}$$

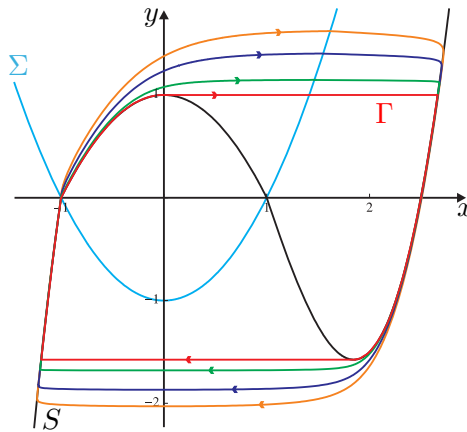
é positiva em S_l e negativa em S_r , além de que $g(x, y, 0) < 0$ para $(x, y) \in S$, com $1 < x < (5 + \sqrt{37})/6$, e $g(x, y, 0) > 0$ para $(x, y) \in S$, com $0 < x < 1$.

Para finalizar, vamos considerar Γ a órbita singular de costura como na Figura 16 e uma pequena vizinhança tubular V de Γ . Note que Σ e Γ se intersectam transversalmente nos pontos $(-1, 0)$ e $(\sqrt{2}, 1)$, os quais são de costura uma vez que

$$\begin{aligned} (X_\varepsilon^+ h) \cdot (X_\varepsilon^- h) &= 3\varepsilon^2 > 0 \quad \text{em } (-1, 0) \\ (X_\varepsilon^+ h) \cdot (X_\varepsilon^- h) &= (-4\sqrt{2} + 2\varepsilon - \sqrt{2}\varepsilon) \cdot (4 - 7\sqrt{2} - \sqrt{2}\varepsilon) > 0 \quad \text{em } (\sqrt{2}, 1), \end{aligned}$$

satisfazendo a condição (B_7) . Portanto, pelo Teorema 3.2, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, o sistema (3.14) possui um único ciclo limite de costura $\Gamma_\varepsilon \subset V$ estável tal que $\Gamma_\varepsilon \rightarrow \Gamma$ na distância de Hausdorff conforme $\varepsilon \rightarrow 0$, veja a Figura 16. \diamond

Figura 16 – Ilustração da convergência dos ciclos limites de costura Γ_ε para Γ , conforme $\varepsilon \rightarrow 0$, para o Exemplo 3.14. A curva vermelha representa a trajetória singular de costura Γ , enquanto que as curvas laranja, azul e verde, representam o ciclos Γ_ε para $\varepsilon = 1/10$, $\varepsilon = 5/100$ e $\varepsilon = 1/100$, respectivamente. Além disso, Σ e S representam, respectivamente, as variedades de descontinuidade e crítica.



Fonte: Retirada do artigo (CARDIN, 2022).

EXPLOÇÃO CANARD

Neste capítulo, continuaremos a análise do comportamento de sistemas rápido-lento próximo aos pontos da variedade crítica onde a condição de normal hiperbolicidade é perdida. Além disso, focaremos no estudo do fenômeno conhecido como *explosão canard*. Primeiramente, baseados nas seções iniciais do Capítulo 8 de (KUEHN, 2015), introduzimos algumas noções sobre trajetórias canard e bifurcação de Hopf singular que nos possibilitam estudar o fenômeno. Na Seção 4.4, apresentamos estudos iniciais sobre esse fenômeno no contexto de sistemas rápido-lento suaves por partes, mais precisamente, em sistemas de Liénard nos quais a não-suavidade ocorre apenas na componente rápida do sistema, considerando os artigos (ROBERTS; GLENDINNING, 2014) e (ROBERTS, 2016).

No caso do estudo apresentado ao longo deste capítulo, a abordagem é realizada com base em ferramentas da TGPS. Vale destacar que foram Dumortier e Roussarie, por meio do artigo (DUMORTIER; ROUSSARIE, 1996), que forneceram uma explicação geométrica e uma prova do fenômeno da explosão canard ocorrendo na equação

$$\varepsilon \ddot{x} + (x^2 + x)\dot{x} + x = a$$

usando folheações por variedades centrais e o método “blow-up”. Posteriormente, o método foi também utilizado no estudo de outros problemas de perturbação singular como, por exemplo, em (KRUPA; SZMOLYAN, 2001a).

4.1 Singularidades dobradas

Vamos considerar a família a um parâmetro $\lambda \in \mathbb{R}$ de sistemas $(1, 1)$ -rápido-lento suficientemente suaves dada por

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y, \lambda, \varepsilon), \\ y' &= \varepsilon g(x, y, \lambda, \varepsilon). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Além disso, assumiremos que a variedade crítica $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y, \lambda, 0) = 0\}$ é descrita localmente como um gráfico $y = h(x)$ e que $p = (x_0, y_0)$ é um ponto de dobra não-degenerado do sistema (4.1), para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Nos capítulos anteriores, estudamos o caso em que p era genérico, isto é, $g(p, \lambda, 0) \neq 0$. Neste caso, o fluxo lento

$$\dot{x} = \frac{g(x, h(x), \lambda, 0)}{h'(x)} \quad (4.2)$$

é singular em p , uma vez que $h'(x_0) = 0$.

A partir de agora, estaremos interessados no caso não-genérico. Ou seja, vamos supor que, para um valor isolado de λ_0 , $g(p, \lambda_0, 0) = 0$. Neste caso, dizemos que p é uma singularidade dobrada em λ_0 do sistema (4.1). Formalmente, temos a seguinte definição.

Definição 4.1. O ponto de dobra p é dito uma **singularidade dobrada** em λ_0 se satisfaz as condições a seguir

$$f(p, \lambda_0, 0) = 0, f_x(p, \lambda_0, 0) = 0, f_{xx}(p, \lambda_0, 0) \neq 0, f_y(p, \lambda_0, 0) \neq 0 \text{ e } g(p, \lambda_0, 0) = 0. \quad (4.3)$$

Observação 4.1.

- (i) O nome “singularidade dobrada” surge do fato de que o ponto p é uma singularidade em duas situações diferentes. Mais especificamente, $g(p, \lambda_0, 0) = 0$ implica que a origem é um ponto crítico (ou singular) do sistema (4.1) e, também, do fluxo lento;
- (ii) Em uma singularidade dobrada, o fluxo lento pode estar bem definido para λ_0 . De fato, isso ocorre se os zeros no numerador e denominador de (4.2) se cancelam, evitando dessa forma possíveis indefinições para a fórmula dada;
- (iii) Na continuação, sem perda de generalidade, vamos assumir que o ponto de dobra é $p = (0, 0)$ e que $\lambda_0 = 0$. Além disso, assumiremos também que $f_{xx}(p, 0, 0) > 0$ e $f_y(p, 0, 0) < 0$.

Definição 4.2. Uma singularidade dobrada de (4.1) é dita **genérica** se

$$g_x(p, 0, 0) \neq 0 \quad \text{e} \quad g_\lambda(p, 0, 0) \neq 0. \quad (4.4)$$

A condição $g_x(p, 0, 0) \neq 0$ implica que a variedade crítica S e $\{g(x, y, \lambda, 0) = 0\}$ se intersectam transversalmente. Já $g_\lambda(p, 0, 0) \neq 0$ implica que o ponto de interseção entre S e $\{g(x, y, \lambda, 0) = 0\}$ passa por p com velocidade não-nula quando λ varia próximo a $\lambda_0 = 0$. Em outras palavras, o ponto de interseção não “estaciona” em p quando λ passa por 0.

Localmente, próximo à uma singularidade dobrada genérica, a variedade crítica pode ser representada por uma parábola, sendo o ramo direito S^r um conjunto normalmente hiperbólico repulsor e o ramo esquerdo S^a um conjunto normalmente hiperbólico atrator. Para uma ilustração, veja as Figuras 17 e 18 relacionadas ao próximo exemplo.

Exemplo 4.1. Vamos considerar o sistema

$$\begin{aligned} x' &= -y + x^2, \\ y' &= \varepsilon(x - \lambda). \end{aligned}$$

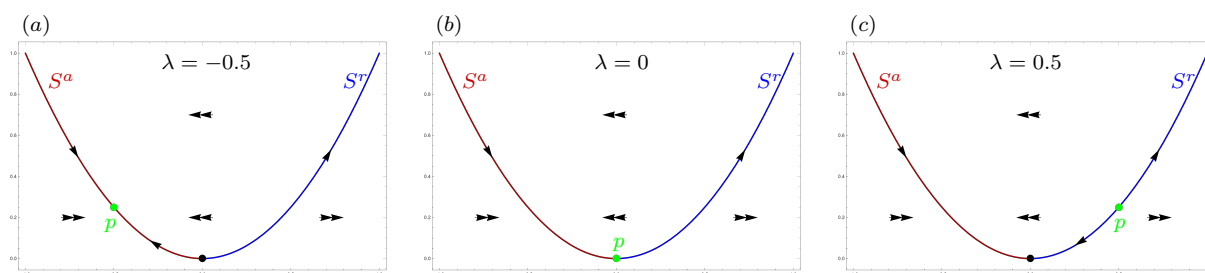
Observe que as condições (4.3) e (4.4) são satisfeitas para $p = (0, 0)$. De fato,

$$f(p, 0, 0) = 0, f_x(p, 0, 0) = (2x)|_p = 0, f_{xx}(p, 0, 0) = 2,$$

$$f_y(p, 0, 0) = -1, g_x(p, 0, 0) = 1, g_\lambda(p, 0, 0) = -1.$$

Logo, p é uma singularidade dobrada genérica para $\lambda = 0$. ◇

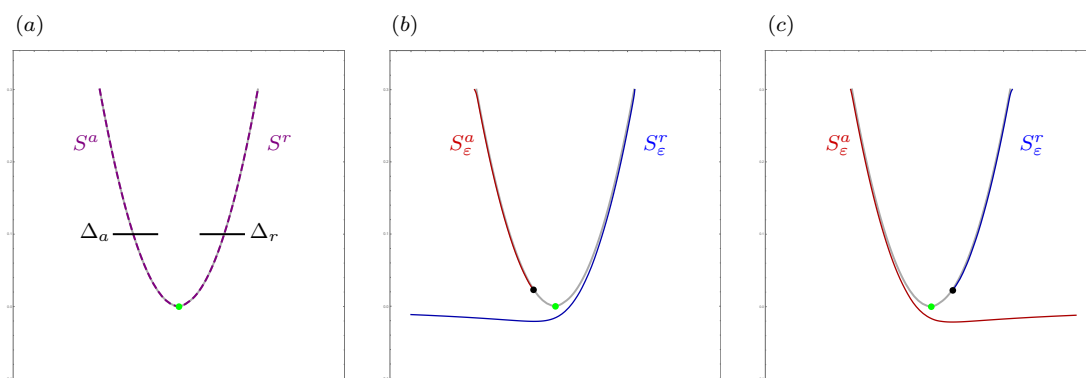
Figura 17 – Configuração dos fluxos rápido e lento próximo à singularidade dobrada genérica do Exemplo 4.1 para diferentes valores de λ .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Como vimos no Capítulo 2, a Teoria de Fenichel garante que os ramos esquerdo e direito, S^a e S^r , perturbam as variedades lentas S_ε^a e S_ε^r , respectivamente. Como veremos a seguir, existem valores “especiais” de λ e ε para os quais as variedades lentas S_ε^a e S_ε^r se conectam.

Figura 18 – Configuração próximo à singularidade dobrada do Exemplo 4.1. A parte (a) é o limite singular, $\varepsilon = 0$, sendo a órbita em roxo um candidato a canard maximal que conecta S^a e S^r e a curva em cinza a variedade crítica S . As partes (b) e (c) ilustram as variedades lentas atratora S_ε^a e repulsora S_ε^r , para $\varepsilon = 0.01$ e $\lambda = \pm 0.15$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Sob as condições (4.3) e com $f_{xx}(p, 0, 0) > 0$ e $f_y(p, 0, 0) < 0$, é possível transformar o sistema (4.1) para a forma normal

$$\begin{aligned} x' &= -yh_1(x, y, \lambda, \varepsilon) + x^2h_2(x, y, \lambda, \varepsilon) + \varepsilon h_3(x, y, \lambda, \varepsilon), \\ y' &= \varepsilon(\pm xh_4(x, y, \lambda, \varepsilon) - \lambda h_5(x, y, \lambda, \varepsilon) + yh_6(x, y, \lambda, \varepsilon)), \end{aligned} \quad (4.5)$$

onde $h_3 = \mathcal{O}(x, y, \lambda, \varepsilon)$, $h_j = 1 + \mathcal{O}(x, y, \lambda, \varepsilon)$, $j = 1, 2, 4, 5$. Assumimos, sem perda de generalidade, que o sinal em frente ao termo xh_4 é positivo (neste caso, o fluxo lento é como ilustrado na Figura 17). Sejam:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\partial h_3}{\partial x}(0), & a_2 &= \frac{\partial h_1}{\partial x}(0), & a_3 &= \frac{\partial h_2}{\partial x}(0), & a_4 &= \frac{\partial h_4}{\partial x}(0), \\ a_5 &= h_6(0) & \text{e} & & A &= -a_2 + 3a_3 - 2a_4 + 2a_5. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Para $j = a, r$, sejam Δ_j uma seção transversal horizontal a S^j próximo ao ponto de dobra, como na Figura 18 (a), e $\pi : \Delta_a \rightarrow \Delta_r$ a aplicação de transição para o fluxo. Além disso, definimos $q_{j,\varepsilon} = \Delta_j \cap S_\varepsilon^j$, com $j = a, r$.

O próximo resultado, presente em (KRUPA; SZMOLYAN, 2001a), garante a conexão das variedades lentas atratora e repulsora do sistema (4.1) próximo à uma singularidade dobrada. Salientamos que esse teorema é uma extensão de um resultado presente em (DUMORTIER; ROUSSARIE, 1996). Mais precisamente, no artigo de Dumortier e Roussarie, a abordagem é feita para o caso particular da equação de van der Pol.

Teorema 4.1. Considere o sistema (4.1) com uma singularidade dobrada genérica e assumamos que o fluxo lento (4.2) conecta S^a e S^r . Então, existem $\varepsilon_0 > 0$ e uma função suave $\lambda = \lambda_c(\sqrt{\varepsilon})$ definida no intervalo $[0, \varepsilon_0]$ tal que, para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, valem as seguintes propriedades:

i) $\pi(q_{a,\varepsilon}) = q_{r,\varepsilon}$ se, e somente se, $\lambda = \lambda_c(\sqrt{\varepsilon})$;

ii) A função λ_c tem a expansão

$$\lambda_c(\sqrt{\varepsilon}) = -\left(\frac{a_1 + a_5}{2} + \frac{A}{8}\right)\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{3}{2}});$$

ii) A função de transição π é definida apenas para λ em um intervalo ao redor de $\lambda_c(\sqrt{\varepsilon})$ de largura $\mathcal{O}(e^{-\frac{k}{\varepsilon}})$, para algum $k > 0$;

iv) $\frac{\partial}{\partial \lambda}(\pi(q_{a,\varepsilon}) - q_{r,\varepsilon}) \Big|_{\lambda=\lambda_c(\sqrt{\varepsilon})} > 0$.

Observação 4.2.

(i) A demonstração do Teorema 4.1 envolve ferramentas do assim chamado método “blow-up”, que foge do nosso escopo. No entanto, ela pode ser encontrada tanto no artigo (KRUPA; SZMOLYAN, 2001a) como também na seção 8.1 de (KUEHN, 2015);

(ii) No enunciado do Teorema 4.1, a notação $\sqrt{\varepsilon}$ em $\lambda_c(\sqrt{\varepsilon})$ é para enfatizar o fato de que a expansão obtida é baseada em uma sequência assintótica $\{\varepsilon^{k/2}\}_{k=0}^{\infty}$ e que λ_c é suave como função de $\sqrt{\varepsilon}$.

Definição 4.3. Uma solução situada em $S_\varepsilon^a \cap S_\varepsilon^r$ é dita um **canard maximal**. Já um **canard** é uma solução que permanece a uma distância $\mathcal{O}(\varepsilon)$ de S_ε^r por um longo período de tempo na escala de tempo lento $\tau = \varepsilon t$.

Vale destacar que identificar numericamente esse tipo de solução é muito difícil, uma vez que essas soluções ocorrem em regiões exponencialmente pequenas no espaço de parâmetros. Além disso, a ocorrência de canards maximais é algo bastante inesperado, mas o resultado garante que próximo à uma singularidade dobrada, essas soluções (canard e canard maximal) vão ocorrer. Por conta disso, a terminologia **ponto canard** também é usada na literatura para se referir à singularidades dobradas. Outro nome que também pode ser encontrado na literatura para pontos canard é **singularidade removível** (“removable singularity”).

Exemplo 4.2. Vamos considerar novamente o sistema (1,1)-rápido-lento obtido pela equação de van der Pol com um termo de força constante a

$$\begin{aligned} x' &= y - \left(\frac{x^3}{3} - x\right), \\ y' &= \varepsilon(a - x). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Note que $p = (1, -2/3)$ é um ponto de dobra e, além disso, se tomamos $X = x - 1$ e $Y = y + 2/3$, p é transladado para origem. Logo, (4.7) torna-se

$$\begin{aligned} X' &= Y - X^2 \left(1 + \frac{X}{3}\right), \\ Y' &= \varepsilon(a - X - 1). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Se invertemos o tempo, isto é, $t \mapsto -t$, e tomamos $\lambda := a - 1$, o sistema (4.8) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} X' &= -Y + X^2 \left(1 + \frac{X}{3}\right), \\ Y' &= \varepsilon(X - \lambda). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Note que (4.9) está na forma normal (4.5), com

$$h_1 = -1, h_2 = 1 + X/3, h_3 = h_6 = 0, h_4 = h_5 = 1.$$

Dessa forma,

$$a_1 = a_2 = a_4 = a_5 = 0, a_3 = 1/3 \quad \text{e} \quad A = 1.$$

Portanto, pelo Teorema 4.1, existe um canard maximal sobre uma curva λ_c no espaço de parâmetros (ε, λ) com expansão

$$\lambda_c(\sqrt{\varepsilon}) = - \left(\frac{a_1 + a_5}{2} + \frac{A}{8} \right) \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^{3/2}) = -\frac{\varepsilon}{8} + \mathcal{O}(\varepsilon^{3/2}).$$

◇

4.2 Bifurcação de Hopf singular em \mathbb{R}^2

Na sequência do estudo, vamos continuar analisando o comportamento do sistema (4.1) próximo a uma singularidade dobrada. Como na seção anterior, assumiremos que a variedade crítica $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y, \lambda, 0) = 0\}$ é descrita localmente como um gráfico $y = h(x)$ e que $p = (0, h(0)) = (0, 0)$ é um ponto de dobra não-degenerado do sistema (4.1), para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Além disso, também vamos considerar a forma normal (4.5) e os a_i e A definidos em (4.6), para $i = 1, \dots, 5$.

O próximo resultado, apresentado em (KRUPA; SZMOLYAN, 2001b), garante a ocorrência de uma bifurcação de Hopf conforme o equilíbrio do sistema (4.1) passa por um ponto canard. Ou seja, garante a mudança de estabilidade do equilíbrio, assim como a criação de uma pequena órbita periódica, que neste caso chamaremos de **ciclos Hopf**.

Teorema 4.2. Considere o sistema (4.1) com uma singularidade dobrada genérica e a forma normal (4.5). Então, existem $\varepsilon_0 > 0$ e $\lambda_0 > 0$ tais que, para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ e $|\lambda| < \lambda_0$, o sistema (4.1) tem precisamente um ponto crítico $p_{\varepsilon, \lambda}$ com $p_{\varepsilon, \lambda} \rightarrow p = (0, 0)$ quando $(\varepsilon, \lambda) \rightarrow (0, 0)$. Além disso, existe uma curva $\lambda = \lambda_H(\sqrt{\varepsilon})$ de bifurcações de Hopf tal que $p_{\varepsilon, \lambda}$ é estável para $\lambda < \lambda_H(\sqrt{\varepsilon})$, instável para $\lambda > \lambda_H(\sqrt{\varepsilon})$ e

$$\lambda_H(\sqrt{\varepsilon}) = -\left(\frac{a_1 + a_5}{2}\right)\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{3}{2}}).$$

A bifurcação de Hopf é não-degenerada se $A \neq 0$. Ela é supercrítica se $A < 0$ e subcrítica se $A > 0$, onde A é dado em (4.6).

Assim como no Teorema 4.1, a demonstração do Teorema 4.2 é feita por meio de ferramentas do método “blow-up”. Para mais detalhes, veja a Seção 8.2 de (KUEHN, 2015) ou o artigo (KRUPA; SZMOLYAN, 2001b).

A constante A que aparece no Teorema 4.2 está relacionada com o primeiro coeficiente de Lyapunov l_1 em uma bifurcação de Hopf. Na literatura, é possível encontrar várias convenções diferentes para o cálculo desse coeficiente, entretanto, independente da escolha, a relação será dada por $l_1 = \rho A$, onde $\rho > 0$. Assim, $A > 0 \Rightarrow l_1 > 0$ e $A < 0 \Rightarrow l_1 < 0$, donde segue a parte final do Teorema 4.2. Para mais detalhes, veja a Seção 8.3 de (KUEHN, 2015).

A bifurcação garantida pelo Teorema 4.2 também pode ser chamada bifurcação de Hopf singular, pois os autovalores são ditos singulares, de acordo com a definição a seguir.

Definição 4.4. Suponha que um sistema com múltiplas escalas de tempo apresente uma bifurcação de Hopf conforme o parâmetro λ varia. Considere o sistema na variedade central bidimensional. Então, diz-se que uma **bifurcação de Hopf singular** ocorre se a linearização possui um par de **autovalores singulares** no ponto de bifurcação $\lambda = \lambda_H$,

isto é,

$$\sigma(\lambda, \varepsilon) = \alpha(\lambda, \varepsilon) + i\beta(\lambda, \varepsilon),$$

tal que $\alpha(\lambda_H, \varepsilon) = 0$, $\alpha_\lambda(\lambda_H, \varepsilon) \neq 0$, com

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |\beta(\lambda_H, \varepsilon)| = \infty, \text{ na escala de tempo lento } \tau,$$

e

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \beta(\lambda_H, \varepsilon) = 0, \text{ na escala de tempo rápido } t.$$

Em outras palavras, uma bifurcação de Hopf singular ocorre quando os autovalores se tornam singulares conforme $\varepsilon \rightarrow 0$.

Exemplo 4.3. Vamos considerar novamente o sistema

$$\begin{aligned} x' &= -y + x^2, \\ y' &= \varepsilon(x - \lambda). \end{aligned}$$

Note que o sistema está na forma normal 4.5, onde $a_i = 0$, para $i = 1, \dots, 5$, implicando $A = 0$, e que $p_\lambda = (\lambda, \lambda^2)$ é o seu único ponto crítico. Logo, pelo Teorema 4.2, o sistema apresenta uma bifurcação de Hopf. Além disso, observe que a linearização

$$D_x(p_\lambda) = \begin{pmatrix} 2\lambda & -1 \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$$

tem autovalores $\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \varepsilon}$. Para $\lambda = 0$, os autovalores de $D_x(0, 0)$ são $\pm i\sqrt{\varepsilon}$ e para (λ, ε) na região $\lambda^2 - \varepsilon < 0$, temos que:

- se $\lambda < 0 \Rightarrow p_\lambda$ é um foco estável, pois $\text{tr}(D_x) = 2\lambda < 0$;
- se $\lambda > 0 \Rightarrow p_\lambda$ é um foco instável, pois $\text{tr}(D_x) = 2\lambda > 0$.

Assim, é possível identificar a mudança de estabilidade de $p_0 = (0, 0)$ conforme λ passa por 0. Por último, note que, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, os autovalores $\pm i\sqrt{\varepsilon} \rightarrow 0$. Alternativamente, considerando a escala de tempo lento $\tau = \varepsilon t$, para o sistema

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x} &= -y + x^2, \\ \dot{y} &= x - \lambda, \end{aligned}$$

os autovalores para $\lambda = 0$ de $D_x(0, 0)$ são $\pm i\sqrt{1/\varepsilon}$, os quais tendem ao infinito quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Ou seja, os autovalores são singulares e, conseqüentemente, a bifurcação de Hopf é singular. \diamond

Exemplo 4.4. Vamos considerar o sistema

$$\begin{aligned} x' &= -y + x^2 - x^3, \\ y' &= \varepsilon(x + y - \lambda). \end{aligned} \tag{4.10}$$

A variedade crítica é $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 - x^3\}$ com pontos de dobra não-degenerados $p = (0, 0)$ e $q = (2/3, 4/27)$. De fato, note que

$$f(p, 0, 0) = 0, f_x(p, 0, 0) = 0, f_{xx}(p, 0, 0) = 2, f_y(p, 0, 0) = -1,$$

$$f(q, 0, 0) = 0, f_x(q, 0, 0) = 0, f_{xx}(q, 0, 0) = 2, f_y(q, 0, 0) = -1.$$

Entretanto, apenas p é uma singularidade dobrada genérica para $\lambda = 0$. De fato, note que

$$g(p, 0, 0) = 0, g_x(p, 0, 0) = 1, g_\lambda(p, 0, 0) = -1$$

$$g(q, 0, 0) = \frac{22}{27} \neq 0, g_x(q, 0, 0) = 1, g_\lambda(q, 0, 0) = -1.$$

De acordo com a forma normal (4.5), temos que

$$h_1 = h_4 = h_5 = h_6 = 1, h_2 = 1 - x, h_3 = 0,$$

e conseqüentemente,

$$a_1 = a_2 = a_4 = 0, a_3 = -1, a_5 = 1, A = -1.$$

Portanto, pelo Teorema 4.2, o sistema (4.10) apresenta uma bifurcação Hopf singular supercrítica para valores de λ sobre a curva

$$\lambda_H(\sqrt{\varepsilon}) = -\frac{\varepsilon}{2} + \mathcal{O}(\varepsilon^{3/2})$$

e, pelo Teorema 4.1, um canard maximal ocorre para valores de λ sobre a curva

$$\lambda_c(\sqrt{\varepsilon}) = -\frac{3}{8}\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^{3/2}).$$

◇

Para esse exemplo, é muito difícil constatar a ocorrência de uma bifurcação de Hopf por meio do cálculo dos equilíbrios, da parte linear e dos autovalores, mas pelo resultado, podemos concluir isso de forma imediata.

4.3 Explosão canard em sistemas suaves

Vamos considerar a família a um parâmetro $\lambda \in \mathbb{R}$ de sistemas (1, 1)-rápido-lento suficientemente suaves dada por

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y, \lambda, \varepsilon), \\ y' &= \varepsilon g(x, y, \lambda, \varepsilon). \end{aligned} \tag{4.11}$$

Suponha que:

(C₁) A variedade crítica S de (4.11) é uma curva suave $y = h(x)$ “S-shaped” com duas dobras não-degeneradas, p_- e p_+ , e

$$S = S^{a-} \cup \{p_-\} \cup S^r \cup \{p_+\} \cup S^{a+},$$

onde $S^{a\pm}$ são conjuntos normalmente hiperbólicos atratores e S^r é um conjunto normalmente hiperbólico repulsor;

(C₂) p_- e p_+ são, respectivamente, pontos de máximo e mínimo locais de h . Sem perda de generalidade, podemos assumir que $p_+ = (0, 0)$. Para $\lambda = \lambda_c$, assumiremos que p_+ é uma singularidade dobrada genérica, enquanto p_- é uma dobra genérica. Ou seja, para $\lambda \in \mathbb{R}$, temos que

$$f_x(p_{\pm}, \lambda, 0) = 0, \quad f_{xx}(p_{\pm}, \lambda, 0) \neq 0, \quad f_y(p_{\pm}, \lambda, 0) \neq 0,$$

$$g(p_+, \lambda_c, 0) = 0, \quad g(p_-, \lambda_c, 0) \neq 0, \quad g_x(p_+, \lambda_c, 0) \neq 0, \quad g_\lambda(p_+, \lambda_c, 0) \neq 0.$$

(C₃) Para $\lambda = \lambda_c$, o fluxo lento satisfaz $\dot{x} < 0$ sobre $S^r \cup S^{a+}$ e $\dot{x} > 0$ sobre S^{a-} .

Observe que, sob as suposições (C₁) – (C₃), é possível aplicar os Teoremas 4.1 e 4.2. Depois da bifurcação de Hopf singular, as órbitas periódicas são pequenas (ciclos Hopf). Como veremos no Teorema 4.3, quando λ alcança o valor do canard maximal $\lambda = \lambda_c$, um crescimento muito rápido das órbitas periódicas ocorre levando a uma oscilação de relaxamento. Além disso, as órbitas periódicas de “tamanho intermediário” são obtidas como perturbações dos chamados ciclos canard singulares para $\varepsilon = 0$. Formalmente, temos a seguinte definição.

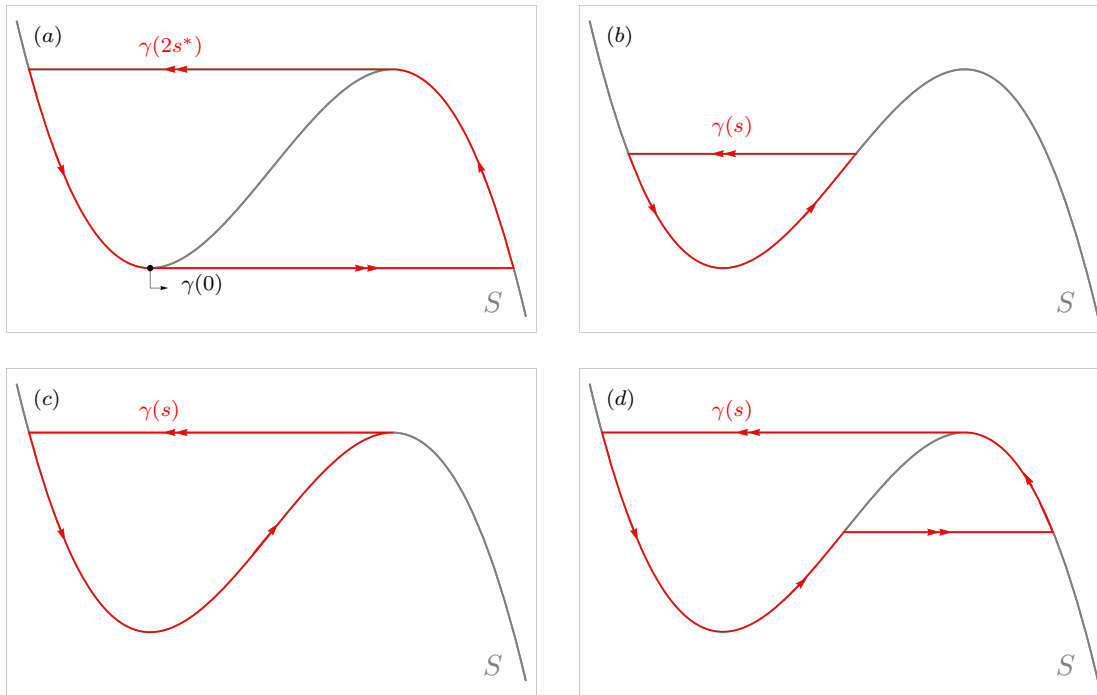
Definição 4.5. Sob as condições (C₁) – (C₃), define-se a seguinte família contínua $\gamma(s)$, $s \in [0, 2s^*]$, de **ciclos canards singulares**:

- a) $\gamma(0)$ é a singularidade dobrada p_+ , $\gamma(2s^*)$ é uma órbita singular;
- b) $\gamma(s)$ para $s \in (0, s^*]$ consiste de órbitas singulares com segmentos lentos em S^{a+} e S^r (ou S^{a-} e S^r) com apenas um ponto de salto; essas órbitas singulares são ditas **canards sem cabeça**;
- c) $\gamma(s)$ para $s \in (s^*, 2s^*)$ consiste de órbitas singulares com segmentos lentos em $S^{a\pm}$ e S^r e um salto rápido de S^r para S^{a-} (ou para S^{a+}), essas órbitas singulares são ditas **canards com cabeça**.

Observação 4.3. Uma das justificativas para que as órbitas vistas anteriormente recebam o nome de *canard* é que, usando um pouco de imaginação, podemos desenhar patas, um olho e algumas penas à ilustração de um canard com cabeça e teremos um desenho que lembra um pato (tradução para o português da palavra em francês canard), veja a Figura

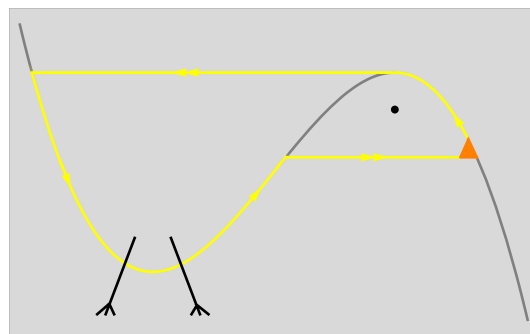
20. Outra explicação é com relação ao surgimento de canards maximais. Como a variedade lenta é repulsora, o surgimento de um canard maximal é bastante inesperado. Já na língua francesa, a palavra canard pode significar “notícias falsas”, daí um dos usos.

Figura 19 – Representação dos ciclos canard singulares. O item *a*) da Definição 4.5 está ilustrado no item (a), os canards sem cabeça, maximal e com cabeça estão em (b), (c) e (d), respectivamente.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 20 – Desenho de um pato a partir de um canard com cabeça.



Fonte: Elaborada pelo autor.

O próximo resultado, presente em (KRUPA; SZMOLYAN, 2001b), mostra que a transição de ciclos pequenos para ciclos grandes ocorre quase que instantaneamente (de fato, em um intervalo do parâmetro exponencialmente pequeno). Por isso, nos referimos a essa transição como *fenômeno da explosão canard*.

Teorema 4.3. Assuma as hipóteses $(C_1) - (C_3)$. Então, para $0 < \varepsilon \ll 1$, existe uma família suave de órbitas periódicas (chamados ciclos canard)

$$s \mapsto (\lambda(s, \sqrt{\varepsilon}), \gamma(s, \sqrt{\varepsilon})), \quad s \in [0, 2s^*],$$

crecendo de uma amplitude que é $\mathcal{O}(\varepsilon)$ para uma oscilação de relaxamento dentro de um intervalo do parâmetro λ exponencialmente pequeno

$$|\lambda(s, \sqrt{\varepsilon}) - \lambda_c(\sqrt{\varepsilon})| = \mathcal{O}(e^{-k/\varepsilon})$$

para algum $k > 0$, conforme $\varepsilon \rightarrow 0$, $\lambda_c(\sqrt{\varepsilon})$ o valor do canard maximal. Além disso, $\gamma(s, \sqrt{\varepsilon}) \rightarrow \gamma(s, 0) = \gamma(s)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$ na distância de Hausdorff.

Exemplo 4.5. O exemplo clássico para o estudo da explosão canard é o sistema obtido pela equação de van der Pol com um termo de força constante a

$$\begin{aligned} x' &= y - \left(\frac{x^3}{3} - x\right), \\ y' &= \varepsilon(a - x). \end{aligned}$$

Como vimos no Exemplo 4.2, o ponto $p_+ = (1, -2/3)$ é uma dobra. Além disso, observe que a variedade crítica $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^3/3 - x\}$ é “S-shaped”, o ponto $p_- = (-1, 2/3)$ também é uma dobra e, para $a = 1$, p_- é genérica enquanto que p_+ é uma singularidade dobrada. Logo, os Teoremas 4.1 e 4.2 podem ser aplicados e trasladando p_+ para a origem (a bifurcação ocorre para $\lambda = 0$ onde $\lambda := a - 1$), obtemos

$$\lambda_c(\sqrt{\varepsilon}) = -\frac{\varepsilon}{8} + \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{3}{2}})$$

e

$$\lambda_H(\sqrt{\varepsilon}) = 0 + \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{3}{2}}) \approx 0.$$

Já pelo Teorema 4.3, temos que

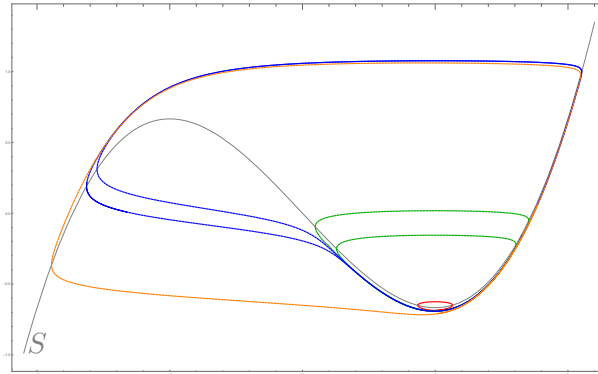
$$\lambda_{sc}(s, \sqrt{\varepsilon}) = \lambda_c(\sqrt{\varepsilon}) + \mathcal{O}(e^{-k/\varepsilon}) \quad \text{e} \quad \lambda_{or}(s, \sqrt{\varepsilon}) = \lambda_c(\sqrt{\varepsilon}) - \mathcal{O}(e^{-k/\varepsilon})$$

são as curvas onde a explosão canard começa e termina, respectivamente. Neste caso, o subscrito “sc” é para representar a curva onde os pequenos ciclos começam e “or” a curva de oscilações de relaxamento, veja a Figura 22. \diamond

4.4 Explosão canard em sistemas suaves por partes

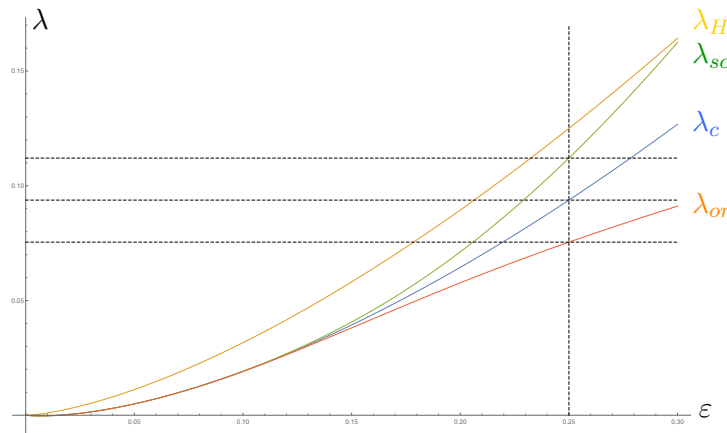
Como mencionado na Introdução, o fenômeno da explosão canard foi descoberto e analisado por um grupo de matemáticos franceses em 1981 no artigo (BENOIT *et al.*, 1981). Recentemente, esse fenômeno começou a ser estudado também no contexto de sistemas rápido-lento suaves por partes, inicialmente para sistemas lineares por partes nos artigos (ROTSTEIN; COOMBES; GHEORGHE, 2012) e (DESROCHES *et al.*, 2013).

Figura 21 – Órbitas periódicas obtidas para diferentes valores de λ na equação de van der Pol com um termo de força constante, neste caso para $\varepsilon = 0.05$. A curva em vermelho representa os pequenos ciclos gerados pela bifurcação de Hopf, as curvas em verde representam perturbações dos canards sem cabeça (início da explosão canard), e as curvas em azul representam perturbações dos canards com cabeça, e a curva em laranja representa uma oscilação de relaxamento (fim da explosão canard).



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 22 – Esboço das curvas λ_H , λ_{sc} , λ_c e λ_{or} para a equação de van der Pol com um termo de força constante, após a translação.



Fonte: Elaborada pelo autor.

O foco desta seção é apresentar alguns resultados contidos em outros dois artigos que vieram na continuação do estudo do fenômeno da explosão canard, nos quais os sistemas rápido-lento suaves por partes considerados são não-lineares. Primeiramente, na Subseção 4.4.1, apresentamos os estudos desenvolvidos em (ROBERTS; GLENDINNING, 2014), o qual estende os resultados dos artigos (ROTSTEIN; COOMBES; GHEORGHE, 2012) e (DESROCHES *et al.*, 2013) para sistemas de van der Pol (contínuos) suaves por partes. Na sequência, na Subseção 4.4.2, apresentamos os estudos desenvolvidos em (ROBERTS, 2016), os quais ampliam ainda mais a análise do fenômeno para sistemas de Liénard (contínuos) suaves por partes.

4.4.1 Sistemas de van der Pol suaves por partes

Nesta subseção, vamos analisar sistemas rápido-lento suaves por partes nos quais um dos extremos da variedade crítica S pertence ao conjunto de não-suavidade do sistema, o qual chamamos de “*corner*”. Mais especificamente, iremos supor que a variedade crítica possui dois extremos, sendo um uma dobra suave e o outro uma dobra não-suave (um “corner”). Neste caso, dizemos que S é “2-shaped”. No “corner”, a bifurcação e a dinâmica local podem ser completamente diferentes do que ocorre em uma dobra suave. Como veremos, o principal resultado desta subseção fornece condições que garantem a existência de uma bifurcação não-suave do tipo Hopf e a ocorrência do fenômeno da explosão canard para sistemas de van der Pol (contínuos) suaves por partes da forma

$$\begin{aligned} x' &= -y + F(x), \\ y' &= \varepsilon(x - \lambda), \end{aligned} \quad (4.12)$$

onde

$$F(x) = \begin{cases} f_-(x) & \text{se } x \leq 0, \\ f_+(x) & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

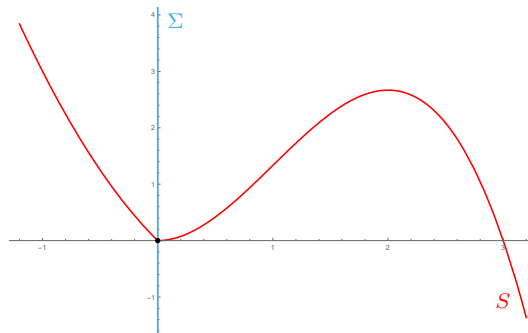
Assumimos que $f_{\pm} \in C^k$, $k \geq 1$, $f_-(0) = f_+(0) = 0$, $f'_-(0) < 0$, $f'_+(0) > 0$, e que f_+ possui um máximo local em $x_M > 0$. A variedade crítica

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = F(x)\}$$

apresenta uma dobra suave em x_M e um “corner” ao longo da variedade de não-suavidade

$$\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}.$$

Figura 23 – Variedade crítica S “2-shaped” e a variedade de não-suavidade Σ .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Observe que a variedade crítica pode ser dividida em três ramos normalmente hiperbólicos, dados por

$$\begin{aligned} S^l &= \{(x, F(x)) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\} &= \{(x, f_-(x)) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}, \\ S^m &= \{(x, F(x)) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < x_M\} &= \{(x, f_+(x)) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < x_M\}, \\ S^r &= \{(x, F(x)) \in \mathbb{R}^2 : x_M < x\} &= \{(x, f_+(x)) \in \mathbb{R}^2 : x_M < x\}. \end{aligned}$$

Para estudar o comportamento do sistema suave por partes, vamos utilizar um sistema auxiliar, o qual chamamos de **sistema sombra** (“*shadow system*”). A ideia é considerar um sistema suave que, em um dos semiplanos, coincide com o sistema suave por partes e no outro semiplano é possível comparar as trajetórias de ambos os sistemas. Mais precisamente, como $f'_+(0)$ existe, $f_+(x)$ pode ser estendida para o semiplano esquerdo e, ao menos localmente, temos que $f_+(x) \leq f_-(x)$, para $x < 0$. Assim, assumindo que $f_+(x) \leq f_-(x)$ para todo $x < 0$, definimos o **sistema sombra** como

$$\begin{aligned} x' &= -y + f_+(x), \\ y' &= \varepsilon(x - \lambda). \end{aligned} \quad (4.13)$$

O próximo resultado diz como é possível realizar a comparação entre trajetórias do sistema (4.12) e trajetórias do sistema sombra (4.13).

Lema 4.1. Considere a trajetória $\gamma_n(t) = (x_n(t), y_n(t))$ de (4.12) que cruza o eixo y entrando no semiplano esquerdo em $\gamma_n(0) = (0, y_c)$. Também considere a trajetória análoga γ_s do sistema sombra (4.13). Então, a distância da origem à γ_n é limitada pela distância da origem à γ_s .

Corolário 4.1. Considere a trajetória $\gamma_n(t) = (x_n(t), y_n(t))$ de (4.12) que cruza o eixo y entrando no semiplano esquerdo em $\gamma_n(0) = (0, y_c)$. Também considere a trajetória análoga γ_s do sistema

$$\begin{aligned} x' &= -y + \tilde{F}(x), \\ y' &= \varepsilon(x - \lambda), \end{aligned} \quad (4.14)$$

onde

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} \tilde{f}_-(x) & \text{se } x \leq 0, \\ f_+(x) & \text{se } x \geq 0, \end{cases}$$

com $\tilde{f}'_-(0) > f'_-(0)$. Então, a distância radial da origem à γ_n é limitada pela distância radial da origem à γ_s .

As demonstrações do Lema 4.1 e do Corolário 4.1 podem ser encontradas em (ROBERTS; GLENDINNING, 2014).

O primeiro resultado desta subseção estuda a dinâmica local próxima à dobra suave em x_M . Ele nos garante a existência de uma bifurcação de Hopf suave e analisa o comportamento dos ciclos gerados por ela, conforme o parâmetro λ passa pelo valor de bifurcação.

Teorema 4.4. No sistema (4.12), para $0 < \varepsilon \ll 1$ fixo, assumamos que $f_-(0) = f_+(0) = 0$, $f'_+(0) > 0$ e $f'_-(0) < 0$. Então, o sistema (4.12) exibe uma bifurcação de Hopf no ponto crítico $p_\lambda = (\lambda, f_+(\lambda))$ quando $\lambda = x_M$. Além disso:

- (i) Se a bifurcação de Hopf é supercrítica, então ciclos canard são gerados.

(ii) Se a bifurcação de Hopf é subcrítica, então oscilações de relaxamento são geradas.

Demonstração: Primeiramente, observe que o sistema (4.12), para $x \geq 0$, pode ser escrito na forma normal (4.5) e, também, que o ponto $(x_M, F(x_M)) = (x_M, f_+(x_M))$ é uma singularidade dobrada genérica de (4.12). Logo, pelo Teorema 4.2, o sistema (4.12) exibe uma bifurcação de Hopf quando $\lambda = x_M$. Essa bifurcação é “suave” e, por isso, para estudar sua criticidade é possível usar, por exemplo, o resultado citado anteriormente ou a teoria sobre bifurcações de Hopf encontrada na literatura. Agora, suponha que a bifurcação é supercrítica. Seja $\Gamma^n(\lambda)$ a família de órbitas periódicas estáveis no sistema suave por partes e $\Gamma^s(\lambda)$ a família para o sistema sombra. Para algum valor $\lambda_G(\varepsilon)$, o sistema (4.12) exibe uma bifurcação grazing onde a órbita periódica estável é tangente à variedade de não-suavidade Σ em $x = 0$. Se $\Gamma^s(\lambda) \subset \{x > 0\}$, o que acontece para todo $\lambda_G \leq \lambda < x_M$, então $\Gamma^n = \Gamma^s$.

Depois da bifurcação grazing, isto é, para $\lambda < \lambda_G$, a órbita Γ^s cruza o eixo y transversalmente. Sejam $y_c > 0$ a coordenada y desse cruzamento e $y_d < 0$ a coordenada y na qual Γ^s retorna para o semiplano direito. Também, vamos definir γ_n como a trajetória de (4.12) passando por $(0, y_d)$. Sem perda de generalidade, assumiremos que $\gamma_n(0) = (0, y_d)$. Logo, existe um tempo $t_c > 0$ tal que $\gamma_n(t_c) = (0, y_c)$ e, para todo $t \in [0, t_c]$, γ_n coincide com Γ^s . De acordo com o Lema (4.1), para todo $t > t_c$, γ_n deve estar contida no interior de Γ^s . Em particular, existe um par (t_d, y_d^*) com $t_d > t_c$ e $y_d^* > y_d$ tal que $\gamma_n(t_d) = (0, y_d^*)$. Seja V o conjunto delimitado pela curva fechada

$$\partial V = \{\gamma_n(t) : 0 \leq t \leq t_d\} \cup \{(0, y) : y_d < y < y_d^*\}.$$

Neste caso, o campo de vetores em (4.12) ou é tangente ou aponta para o interior de ∂V , como ilustrado pela Figura 24. Além disso, o ponto crítico $p_\lambda \in V$ é instável, uma vez que os autovalores

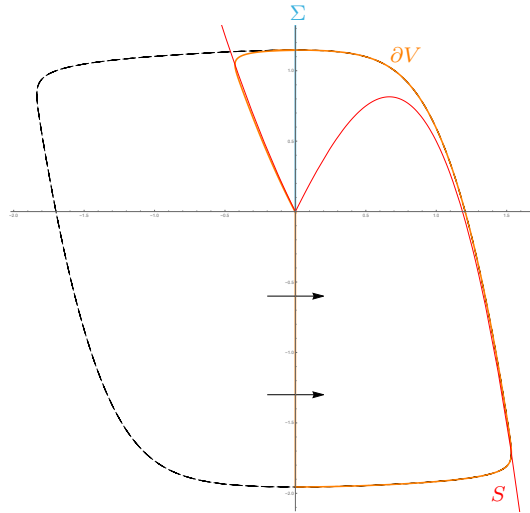
$$\mu_\pm(\lambda) = \frac{f'_+(\lambda) \pm \sqrt{[f'_+(\lambda)]^2 - 4\varepsilon}}{2}$$

da parte linear do sistema (4.12) em p_λ possuem parte real positiva ($\text{Re}(\mu_\pm) > 0$), para todo $\lambda > 0$. Logo, pelo Teorema 1 de (BUZZI; CARVALHO; EUZEBIO, 2018) (que é uma versão do Teorema de Poincaré-Bendixson para sistemas suaves por partes), podemos garantir a existência de uma órbita periódica estável no interior de V , uma vez que o conjunto ω -limite seria um pseudociclo, o que prova (i).

Para o caso em que a bifurcação é subcrítica, a demonstração é análoga ao caso supercrítico, a diferença é que pode não haver nenhuma órbita periódica $\Gamma^s(\lambda)$ que esteja contida inteiramente no semiplano direito. ■

Corolário 4.2. Assuma que o sistema sombra (4.13) exibe ciclos canard, isto é, satisfaz as condições (A1) – (A4) vistas na Seção 3.2. Então, as órbitas $\Gamma^n(\lambda)$ são limitadas pelas órbitas canard estáveis do sistema sombra.

Figura 24 – Conjunto V positivamente invariante, construído como descrito pela demonstração do Teorema 4.4. A curva fechada em laranja representa ∂V , enquanto que a curva fechada tracejada é a órbita periódica do sistema sombra.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Observação 4.4. Como veremos na próxima subseção, bifurcações de Hopf que levam um sistema a apresentar uma explosão canard não precisam acontecer necessariamente em um ponto de dobra da variedade crítica. Entretanto, nesta primeira situação, como $\{g(x, y, \lambda, \varepsilon) = 0\}$ é uma reta vertical, a bifurcação ocorre justamente quando essa reta intersecta a variedade crítica no ponto de dobra.

Na sequência, estudaremos a dinâmica local do sistema (4.12) próxima ao “corner”. O próximo resultado garante a existência ou de uma bifurcação “Hopf-like” ou de uma *super-explosão*. Esse último termo é usado para descrever a transição instantânea de um equilíbrio estável para uma oscilação de relaxamento estável, sem passar pelos ciclos canard como ocorre em uma explosão canard. Este fenômeno foi analisado inicialmente em (DESROCHES *et al.*, 2013), e vale destacar que é um efeito da não-suavidade do sistema, não podendo ser encontrado no caso suave.

Teorema 4.5. Assuma que $f_-(0) = f_+(0) = 0$, $f'_+(0) > 0$ e $f'_-(0) < 0$. Então, o sistema (4.12) exibe uma bifurcação para $\lambda = 0$ no qual uma órbita periódica estável $\Gamma^n(\lambda)$ existe para $0 < \lambda < x_M$. Existe um ε_0 tal que, para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ fixo, a natureza da bifurcação é descrita por:

- (i) Se $0 < f'_+(0) < 2\sqrt{\varepsilon}$, o sistema (4.12) exibe uma bifurcação “Hopf-like” para $\lambda = 0$. A bifurcação é subcrítica se $|f'_-(0)| < f'_+(0)$ e supercrítica se $f'_+(0) < |f'_-(0)|$;
- (ii) Se $f'_+(0) \geq 2\sqrt{\varepsilon}$, a bifurcação em $\lambda = 0$ é uma super-explosão. O sistema possui uma órbita periódica estável $\Gamma^n(\lambda)$ que é uma oscilação de relaxamento. Se $|f'_-(0)| \geq 2\sqrt{\varepsilon}$, a bifurcação é supercrítica, pois não aparecem órbitas periódicas para $\lambda < 0$.

Entretanto, se $|f'_-(0)| < 2\sqrt{\varepsilon}$, a bifurcação é subcrítica, pois uma órbita periódica estável e um equilíbrio estável coexistem para algum $\lambda < 0$.

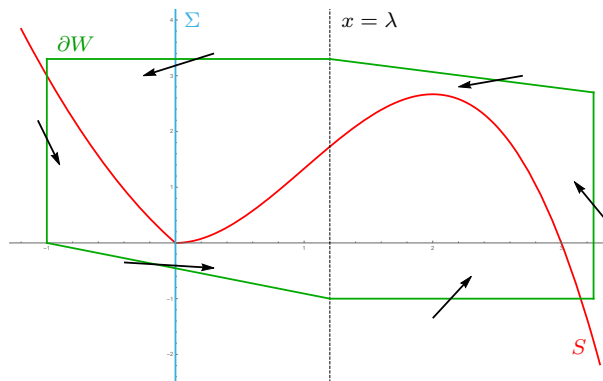
Demonstração: Primeiramente, observe que o sistema (4.12) sempre possui um único ponto crítico $p_\lambda = (\lambda, F(\lambda))$, o qual possui autovalores correspondentes dados por

$$\mu_\pm(\lambda) = \begin{cases} \frac{f'_-(\lambda) \pm \sqrt{[f'_-(\lambda)]^2 - 4\varepsilon}}{2} & \text{se } \lambda < 0, \\ \frac{f'_+(\lambda) \pm \sqrt{[f'_+(\lambda)]^2 - 4\varepsilon}}{2} & \text{se } \lambda > 0. \end{cases} \quad (4.15)$$

Se $0 < \lambda < x_M$, segue que $f'_+(\lambda) > 0$ e, desta forma, ambos autovalores possuem parte real positiva ($\text{Re}(\mu_\pm) > 0$), implicando que o ponto crítico p_λ é instável. Neste caso, para demonstrar a existência de uma órbita periódica estável $\Gamma^n(\lambda)$, basta mostrar que existe um conjunto positivamente invariante contendo p_λ . Vamos considerar o conjunto W como ilustrado na Figura 25. Escolhendo qualquer ponto $(\hat{x}, 0)$ com $\hat{x} < 0$, a fronteira ∂W é composta de seis segmentos l_j , com $j = 1, 2, \dots, 6$, dados por

$$\begin{aligned} l_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = m_1(x - \hat{x}) \text{ onde } m_1 < 0 \text{ é } \mathcal{O}(1), \hat{x} \leq x \leq \lambda\}, \\ l_2 &= \{(x, y_1) \in \mathbb{R}^2 : y_1 = m_1(\lambda - \hat{x}), \lambda \leq x \leq x_2 = f_+^{-1}(y_1) + 1\}, \\ l_3 &= \{(x_2, y) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = (f_+^{-1}(y_1) + 1), y_1 < y < y_3 = f_+(x_M)\}, \\ l_4 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = m_4(x - x_2) + y_3 \text{ onde } m_4 > \frac{g(\hat{x}) - y_3}{\lambda - x_2} \text{ é } \mathcal{O}(1), \lambda \leq x \leq x_2\}, \\ l_5 &= \{(x, y_5) \in \mathbb{R}^2 : y_5 = m_4(\lambda - x_2) + y_3, \hat{x} < x < \lambda\}, \\ l_6 &= \{(\hat{x}, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < y_5\}. \end{aligned}$$

Figura 25 – Conjunto W positivamente invariante, construído com base nos segmentos l_j , com $j = 1, \dots, 6$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Observe que os valores tomados na construção dos segmentos l_1, \dots, l_6 são escolhidos de modo que o campo vetorial aponte para o interior de ∂W , ou seja, W é um conjunto positivamente invariante. Assim, pelo Teorema 1 de (BUZZI; CARVALHO; EUZEBIO, 2018), segue que existe uma órbita periódica estável $\Gamma^n(\lambda)$ em W , para $0 < \lambda < x_M$.

A órbita $\Gamma^n(\lambda)$ é criada por meio da bifurcação em $\lambda = 0$ e irá diferir em amplitude dependendo de $f'_+(0)$.

Vamos considerar o caso em que $0 < f'_+(0) < 2\sqrt{\varepsilon}$. Se também supomos que $|f'_-(0)| < 2\sqrt{\varepsilon}$, então a bifurcação em $\lambda = 0$ é “Hopf-like” (ou Hopf não-suave), assim como descrita por (SIMPSON; MEISS, 2007). De fato, na notação usada nessa referência, temos que

$$\begin{aligned}\mu_L &= \frac{|f'_-(0)|}{2}, \\ \mu_R &= \frac{f'_+(0)}{2}, \\ \omega_L &= \frac{\sqrt{4\varepsilon - [f'_-(0)]^2}}{2}, \\ \omega_R &= \frac{\sqrt{4\varepsilon - [f'_+(0)]^2}}{2},\end{aligned}$$

e

$$\Lambda = \frac{\mu_L}{\omega_L} - \frac{\mu_R}{\omega_R}.$$

Além disso, a bifurcação “Hopf-like” é subcrítica se $\Lambda < 0$ e supercrítica se $\Lambda > 0$. Logo,

$$\begin{aligned}\Lambda < 0 &\Leftrightarrow \frac{\mu_L}{\omega_L} < \frac{\mu_R}{\omega_R} \\ &\Leftrightarrow \mu_L \omega_R < \mu_R \omega_L \\ &\Leftrightarrow |f'_-(0)| \cdot \sqrt{4\varepsilon - [f'_+(0)]^2} < f'_+(0) \cdot \sqrt{4\varepsilon - [f'_-(0)]^2} \\ &\Leftrightarrow [f'_-(0)]^2 \cdot (4\varepsilon - [f'_+(0)]^2) < [f'_+(0)]^2 \cdot (4\varepsilon - [f'_-(0)]^2) \\ &\Leftrightarrow 4\varepsilon \cdot [f'_-(0)]^2 - [f'_-(0)]^2 \cdot [f'_+(0)]^2 < 4\varepsilon \cdot [f'_+(0)]^2 - [f'_+(0)]^2 \cdot [f'_-(0)]^2 \\ &\Leftrightarrow [f'_-(0)]^2 < [f'_+(0)]^2.\end{aligned}$$

Assim, o sistema (4.12) exibe uma bifurcação “Hopf-like” subcrítica quando $|f'_-(0)| < f'_+(0)$ e uma bifurcação “Hopf-like” supercrítica quando $|f'_-(0)| > f'_+(0)$. O Corolário 4.1 também garante a existência de ciclos canard para o caso em que $|f'_-(0)| \geq 2\sqrt{\varepsilon}$. A bifurcação neste caso é de um nó estável (uma vez que os autovalores serão reais e negativos) para um foco instável. Os ciclos canard no sistema com um nó estarão contidos nos ciclos para o sistema com uma bifurcação “Hopf-like”. Isso finaliza a demonstração do item (i).

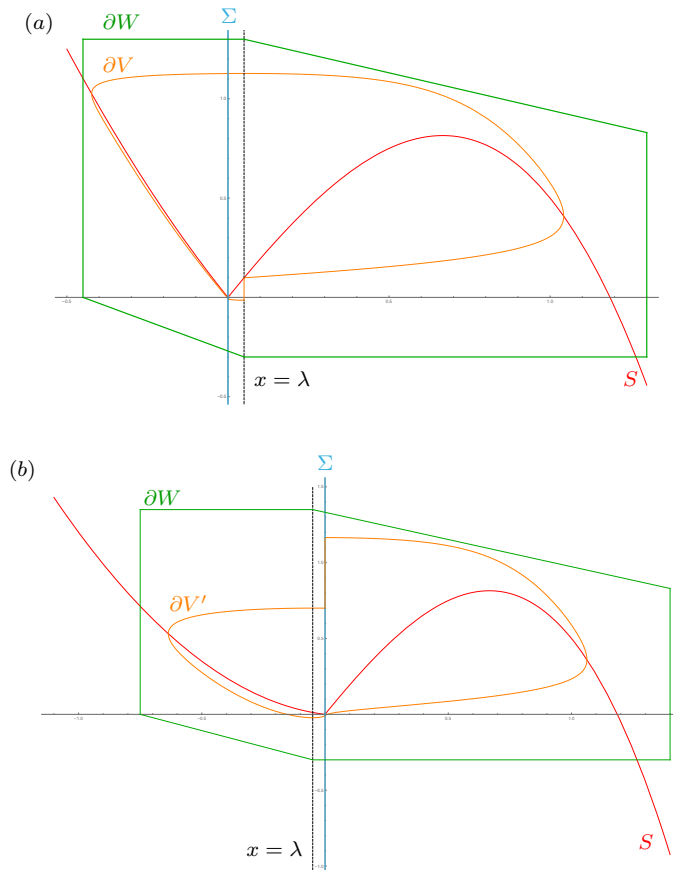
Agora, vamos considerar o caso em que $f'_+(0) \geq 2\sqrt{\varepsilon}$. Neste caso, para $0 < \lambda < x_M$, o equilíbrio p_λ é um nó instável. Sejam $\mu_2 \geq \mu_1 > 0$ os autovalores instáveis forte e fraco, respectivamente, correspondentes à p_λ e v_i os autovetores associados à μ_i , para $i = 1, 2$. Então, para $i = 1, 2$, temos que

$$\begin{aligned}f'_+(\lambda)x_i - y_i &= \mu_i x_i, \\ \varepsilon x_i &= \mu_i y_i.\end{aligned}$$

Isso implica que a inclinação do autovetor v_2 é ε/μ_2 . Logo, como μ_2 depende de ε , temos que $\mu_2 \rightarrow f'_+(\lambda) \neq 0$ conforme $\varepsilon \rightarrow 0$ e, conseqüentemente, $(\varepsilon/\mu_2) \rightarrow 0$ conforme $\varepsilon \rightarrow 0$. Assim, existe ε_0 tal que, para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, a trajetória instável forte deve alcançar a região $x > x_M$ do espaço de fase, ser atraída para variedade lenta atratora S_ε^r , passar próximo ao ponto $(x_M, f_+(x_M))$ e seguir próxima à uma camada do fluxo rápido até atingir

a variedade de não-suavidade $\Sigma = \{x = 0\}$. Como o campo vetorial de (4.12) aponta para o semiplano esquerdo ao longo do eixo y , para $y > 0$, a trajetória instável forte seguirá aproximadamente uma camada do fluxo rápido, sendo atraída para variedade lenta S_ε^l e retornando para o semiplano direito em algum ponto de Σ com $y < 0$. Essa trajetória deverá continuar para baixo e para direita, seguindo o fluxo rápido, até atingir a reta $x = \lambda$ em algum ponto (λ, \hat{y}) , com $\hat{y} < f_+(\lambda)$. Seja V a região delimitada pela trajetória descrita anteriormente e o segmento de reta ao longo da reta $x = \lambda$ que conecta \hat{y} e $f_+(\lambda)$. Assim, o conjunto $W \setminus V$ é positivamente invariante com um equilíbrio instável e, conseqüentemente, pelo Teorema 1 de (BUZZI; CARVALHO; EUZEBIO, 2018), existe uma órbita periódica estável $\Gamma^n(\lambda)$ em $W \setminus V$ que deve ser uma oscilação de relaxamento. Para essa situação, a bifurcação será uma super-explosão, veja as Figuras 26 (a) e 27.

Figura 26 – Conjuntos $W \setminus V$, em (a), e $W \setminus V'$, em (b), como descritos na demonstração do Teorema 4.5 para $\lambda = 0.05$ e $\lambda = -0.05$, respectivamente.

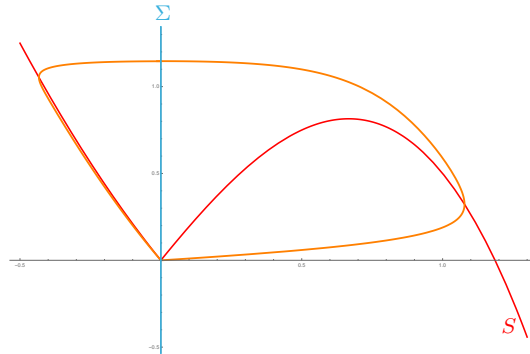


Fonte: Elaborada pelo autor.

Vamos supor que $|f'_-(0)| \geq 2\sqrt{\varepsilon}$. Então, para $\lambda < 0$, o equilíbrio p_λ é um nó estável. Além disso, esse equilíbrio é o atrator global do sistema, uma vez que a trajetória estável forte para p_λ limita as trajetórias acima do nó estável no semiplano esquerdo. Como nenhuma órbita periódica estável pode coexistir com p_λ , dizemos que a bifurcação é supercrítica.

Agora, vamos supor que $|f'_-(0)| < 2\sqrt{\varepsilon}$. Então, para $\lambda < 0$, o equilíbrio p_λ é um foco estável e, tomando $|\lambda|$ suficientemente pequeno, existe um $\beta \in (g(\lambda), h(x_M))$ tal que a trajetória passando por $(0, \beta)$ espirala ao redor de p_λ e entra no semiplano direito abaixo de $(0, 0)$. A dinâmica no semiplano direito é governada por um nó instável no sistema sombra (4.13). Assim, após entrar no semiplano direito, a trajetória através de $(0, \beta)$ deve seguir próxima à uma camada do fluxo rápido até ser atraída para S_ε^r , passar próximo ao ponto $(x_M, f_+(x_M))$, seguir próxima à uma camada do fluxo rápido até atingir a variedade de não-suavidade Σ e entrar novamente no semiplano esquerdo em $(0, \beta')$, com $\beta' > \beta$. Seja V' a região delimitada por essa trajetória e pelo segmento de reta sobre o eixo y conectando $(0, \beta)$ e $(0, \beta')$. Observe que V' é um conjunto negativamente invariante. Assim, $W \setminus V'$ é um conjunto positivamente invariante que não possui equilíbrios estáveis. Portanto, deve haver uma órbita periódica estável $\Gamma^n(\lambda)$ em $W \setminus V'$. Como um equilíbrio estável e uma órbita periódica estável coexistem para $\lambda < 0$, dizemos que esse fenômeno é uma super-explosão subcrítica. Isso finaliza a prova do item (ii). ■

Figura 27 – Ilustração de uma órbita periódica obtida após uma super-explosão. Neste caso, foi usado o sistema (4.12) com $f_-(x) = (x - 1)^2 - 1$ e $f_+(x) = -(x + 1)^2(x - 1.5) - 1.5$, $\varepsilon = 0.2$ e $\lambda = 0.001$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Um sistema rápido-lento suave por partes é dito “**Z-shaped**” se a variedade crítica S apresenta dois “corners”, isto é, a função F não é diferenciável nos dois extremos, em 0 e x_M .

Corolário 4.3. Considere o sistema “Z-shaped”

$$\begin{aligned} x' &= -y + F(x), \\ y' &= \varepsilon(x - \lambda), \end{aligned} \tag{4.16}$$

onde

$$F(x) = \begin{cases} f_-(x) & \text{se } x \leq 0, \\ f_m(x) & \text{se } 0 \leq x \leq x_M, \\ f_+(x) & \text{se } x_M \leq x, \end{cases}$$

com $f_-, f_m, f_+ \in C^k$ $k \geq 1$, $f_-(0) = f_m(0) = 0$, $f_+(x_M) = f_m(x_M)$, $f'_-(0) < 0$, $f'_m(x) > 0$ para todo $0 < x < x_M$, e $f'_+(x_M) < 0$. Então, o sistema (4.16) exibe uma bifurcação para $\lambda = 0$ na qual uma órbita periódica estável $\Gamma^n(\lambda)$ existe para $0 < \lambda < x_M$.

Além disso, existe um ε_0 tal que, para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ fixo, a natureza da bifurcação é descrita por:

- (i) Se $0 < f'_m(0) < 2\sqrt{\varepsilon}$, então ciclos canard $\Gamma^n(\lambda)$ surgem de uma bifurcação “Hopf-like” quando λ cresce a partir de $\lambda = 0$. A bifurcação é supercrítica se $f'_m(0) < |f'_-(0)|$ e subcrítica se $f'_m(0) > |f'_-(0)|$;
- (ii) Se $f'_m(0) > 2\sqrt{\varepsilon}$, a bifurcação em $\lambda = 0$ é uma super-explosão. O sistema possui uma órbita periódica estável $\Gamma^n(\lambda)$ que é uma oscilação de relaxamento. Se $|f'_-(0)| \geq 2\sqrt{\varepsilon}$, a bifurcação é supercrítica, pois não aparecem órbitas periódicas para $\lambda < 0$. Entretanto, se $|f'_-(0)| < 2\sqrt{\varepsilon}$, a bifurcação é subcrítica, pois uma órbita periódica estável e um equilíbrio estável coexistem para algum $\lambda < 0$.

Demonstração: Para demonstrar este corolário, basta seguir o mesmos passos da demonstração do Teorema 4.5 usando o sistema (4.12) como o sistema sombra. ■

Aplicando o Lema 4.1 ao Teorema 4.5, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 4.4. Para um $\varepsilon > 0$ fixo, assuma que o sistema sombra (4.13) satisfaz as suposições (A1) – (A4) da seção 3.2 para um ponto canard em $(x_m, f_+(x_m))$, com $x_m < 0$. Também assuma que $0 < f'_+(0) < 2\sqrt{\varepsilon}$ no sistema suave por partes (4.12). Então, para $\lambda \in (0, x_M)$ fixo, $\Gamma^n(\lambda)$ é limitada pela órbita periódica Γ^s do sistema sombra. Além disso, se o parâmetro de criticidade $A < 0$ e $|x_m| < \lambda_{sc}(\sqrt{\varepsilon})$, então as órbitas periódicas $\Gamma^n(\lambda)$ criadas pela bifurcação “Hopf-like” são ciclos canard e o sistema (4.12) apresentará uma explosão canard.

Exemplo 4.6. Vamos considerar o sistema

$$\begin{aligned} x' &= -y + F(x), \\ y' &= \varepsilon(x - \lambda), \end{aligned} \tag{4.17}$$

onde

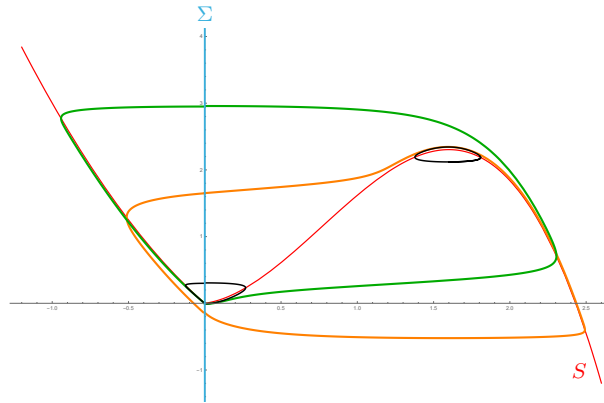
$$F(x) = \begin{cases} (x - 1)^2 - 1 & \text{se } x \leq 0, \\ -x^3 + \frac{23}{10}x^2 + \frac{8}{25}x & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Primeiramente, observe que o sistema (4.17), para $x > 0$, pode ser escrito na forma normal (4.5). Além disso, para $\lambda_H = 1.6$, o ponto de máximo de f_+ , $p = (1.6, 2.304)$, é uma singularidade dobrada genérica do sistema. Logo, pelo Teorema 4.2, o sistema (4.17) exibe uma bifurcação de Hopf supercrítica no valor de bifurcação $\lambda_H = 1.6$, uma vez que $A = -0.375$. Assim, pelo Teorema 4.4, ciclos canard são gerados para valores

suficientemente menores do que λ_H . A Figura 28 ilustra um ciclo canard do sistema (4.17) para $\varepsilon = 0.2$ gerada pela bifurcação na dobra suave, curva fechada em laranja.

Agora, fazendo a análise do “corner” que ocorre em $(0,0)$, é possível ver que $f_-(0) = f_+(0) = 0$, $f'_-(0) < 0$, $0 < f'_+(0) < 2\sqrt{\varepsilon}$ (estamos considerando $\varepsilon = 0.2$ fixo) e $f'_+(0) < |f'_-(0)|$. Assim, pelo Teorema 4.5, o sistema (4.17) exibe uma bifurcação “Hopf-like” supercrítica para $\lambda = 0$. A Figura 28 ilustra um ciclo canard do sistema (4.17) gerada pela bifurcação no “corner”, curva fechada em verde. \diamond

Figura 28 – Ciclos canard suaves por partes do sistema (4.17), para $\varepsilon = 0.2$. As curvas fechadas em preto representam os pequenos ciclos gerados após as bifurcações de Hopf e “Hopf-like” na singularidade dobrada e no “corner”, respectivamente. A curva em laranja é um canard com cabeça obtido após a explosão na singularidade dobrada, enquanto que a curva em verde é um canard com cabeça obtido após a explosão no “corner”.



Fonte: Elaborada pelo autor.

4.4.2 Sistemas de Liénard suaves por partes

Na subseção anterior, o estudo do fenômeno da explosão canard foi realizado para sistemas de van der Pol (contínuos) suaves por partes. Nesta subseção, vamos estender essa análise considerando agora sistemas de Liénard (contínuos) suaves por partes da forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + F(x), \\ \dot{y} &= \varepsilon g(x, y, \lambda, \varepsilon), \end{aligned} \quad (4.18)$$

onde

$$F(x) = \begin{cases} f_-(x) & \text{se } x \leq 0, \\ f_+(x) & \text{se } x \geq 0, \end{cases}$$

com $f_-, f_+ \in C^k$, $k \geq 3$, tais que $f_-(0) = f_+(0) = 0$, $f'_-(0) \leq 0$ e $f'_+(0) \geq 0$, no entanto F não pode ser C^1 em $x = 0$, isto é, $f'_-(0) = 0$ e $f'_+(0) = 0$ não pode acontecer simultaneamente. Também vamos assumir que f_+ possui um máximo local em x_M . Como assumimos que F não é diferenciável em 0, segue que a variedade crítica

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = F(x)\}$$

é “2-shaped” com uma dobra suave em x_M e um “corner” em $x = 0$ como na Figura 23.

Além disso, S pode ser dividida nos ramos

$$\begin{aligned} S^l &= \{(x, f_-(x)) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}, \\ S^m &= \{(x, f_+(x)) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < x_M\}, \\ S^r &= \{(x, f_+(x)) \in \mathbb{R}^2 : x > x_M\}, \end{aligned}$$

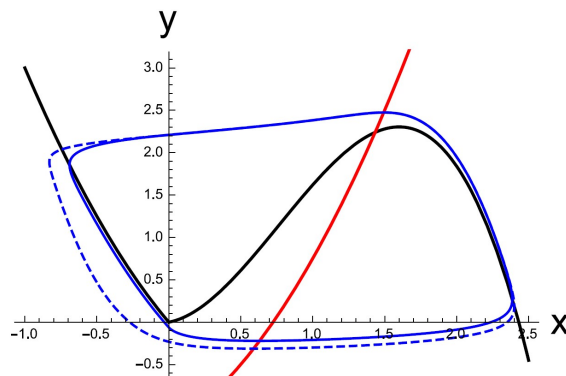
os quais são conjuntos normalmente hiperbólicos com S^l e S^r atratores e S^m repulsor. Já o conjunto

$$\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$$

é a variedade de não-suavidade.

Como destacado na Observação 4.4, bifurcações de Hopf que levam à uma explosão canard não precisam acontecer necessariamente em uma dobra da variedade crítica. O próximo resultado ilustra esse fato, garantindo a existência de uma bifurcação de Hopf para valores do parâmetro λ próximos à x_M . Isso ocorre pois não estamos mais supondo que $\{g(x, y, \lambda, \varepsilon) = 0\}$ seja uma reta vertical, como feito para o sistema de van der Pol suave por partes (4.12) onde $g(x, y, \lambda, \varepsilon) = x - \lambda$.

Figura 29 – Exemplo de um conjunto $\{g(x, y, \lambda, \varepsilon) = 0\}$, curva em vermelho, que não é uma reta vertical e intersecta a variedade crítica transversalmente em uma vizinhança do ponto de dobra. A curva fechada tracejada é a órbita periódica estável Γ^s do sistema sombra, enquanto que a curva fechada sólida é a órbita periódica estável Γ^n do sistema suave por partes.



Fonte: Retirada do artigo (ROBERTS, 2016).

Teorema 4.6. Seja $0 < \varepsilon \ll 1$ suficientemente pequeno e fixo, e suponha que o parâmetro λ indica a coordenada x do único ponto de interseção transversal dos conjuntos $\{g(x, y, \lambda, \varepsilon) = 0\}$ e $\{y = F(x)\}$. Se

$$g_x(x_M, F(x_M), x_M, \varepsilon) > 0,$$

então o sistema (4.18) exibe uma bifurcação de Hopf para algum λ_M em uma vizinhança de x_M .

- (i) Se a bifurcação de Hopf é supercrítica, então ciclos canard estáveis são produzidos;
- (ii) Se a bifurcação de Hopf é subcrítica, então oscilações de relaxamento estáveis são produzidas. Além disso, órbitas canard instáveis existem para valores de λ em um raio $\mathcal{O}(\varepsilon)$ antes da bifurcação, e as órbitas canard são destruídas através da bifurcação.

A demonstração desse resultado é análoga à do Teorema 4.4, veja (ROBERTS, 2016) para mais detalhes. A ideia é analisar a mudança de estabilidade do único ponto crítico do sistema e verificar a ocorrência de uma bifurcação de Hopf. Após isso, a estratégia adotada é utilizar o sistema sombra, garantindo a limitação da órbita do sistema suave por partes e construindo um conjunto positivamente invariante a fim de aplicar o Teorema 1 de (BUZZI; CARVALHO; EUZEBIO, 2018). Entretanto, neste caso considera-se o sistema sombra dado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + f_+(x), \\ \dot{y} &= \varepsilon g(x, y, \lambda, \varepsilon).\end{aligned}\tag{4.19}$$

Para realizar a comparação entre as trajetórias dos sistemas (4.18) e (4.19), usa-se o próximo resultado.

Lema 4.2. Considere a trajetória $\gamma_n(t) = (x_n(t), y_n(t))$ de (4.18) que cruza o eixo y entrando no semiplano esquerdo em $\gamma_n(0) = (0, y_c)$. Também considere a trajetória análoga γ_s do sistema sombra (4.19), com $f_+(x) < f_-(x)$ para $x < 0$. Então, a distância radial da origem à γ_n é limitada pela distância radial da origem à γ_s .

Corolário 4.5. Considere a trajetória $\gamma_n(t) = (x_n(t), y_n(t))$ de (4.18) que cruza o eixo y entrando no semiplano esquerdo em $\gamma_n(0) = (0, y_c)$. Também considere a trajetória análoga γ_s do sistema

$$\begin{aligned}x' &= -y + \tilde{F}(x), \\ y' &= \varepsilon g(x, y, \lambda, \varepsilon),\end{aligned}\tag{4.20}$$

onde

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} \tilde{f}_-(x) & \text{se } x \leq 0, \\ f_+(x) & \text{se } x \geq 0, \end{cases}$$

com $\tilde{f}'_-(0) > f'_-(0)$. Então, a distância radial da origem à γ_n é limitada pela distância radial da origem à γ_s .

As demonstrações do Lema 4.2 e do Corolário 4.5 podem ser encontradas em (ROBERTS, 2016). Além disso, o Lema 4.2 é uma generalização do Lema 4.1 e garante que uma dinâmica do fluxo lento mais geral não mudará a análise global.

Combinando o Lema 4.2 e o Teorema 4.6, obtemos o próximo resultado, que garante a limitação das órbitas periódicas do sistema (4.18) criadas pela bifurcação de Hopf, veja Figura 29.

Corolário 4.6. Sejam Γ^s órbitas periódicas criadas pela bifurcação de Hopf próximo de x_M no sistema sombra (4.19) e Γ^n órbitas periódicas criadas pela bifurcação de Hopf no sistema (4.18). Então, Γ^n é limitada por Γ^s .

Assim como no Teorema 4.6, a dinâmica lenta local mais complexa possibilita que a bifurcação não ocorra apenas no “corner”, mas também em uma vizinhança da origem. O próximo resultado garante a existência ou de uma bifurcação de Hopf (suave ou “Hopf-like”) ou de uma super-explosão em uma vizinhança da origem.

Teorema 4.7. Dado um sistema na forma (4.18) com $f_-, f_+ \in C^k$, $k \geq 3$, $f_-(0) = f_+(0) = 0$, $f'_-(0) < 0$ e $f'_+(0) > 0$, suponha que

$$g_x(0, 0, 0, \varepsilon) > \max\{-f'_+(0)g_y(0, 0, 0, \varepsilon), -f'_-(0)g_y(0, 0, 0, \varepsilon)\}.$$

Então, para ε suficientemente pequeno e fixo, existe um λ_0 em uma vizinhança de 0 tal que uma órbita periódica estável $\Gamma^n(\lambda)$ é criada através de uma bifurcação quando $\lambda = \lambda_0$. Sejam $\alpha_{\pm} = f'_{\pm}(0) + \varepsilon g_y(0, 0, \lambda_0, \varepsilon)$ e $\beta_{\pm} = [\varepsilon g_y(0, 0, \lambda_0, \varepsilon) - f'_{\pm}(0)]^2 - 4\varepsilon g_x(0, 0, \lambda_0, \varepsilon)$. A bifurcação é descrita da seguinte forma:

- (i) Se $\alpha_- > 0$, então a bifurcação é Hopf (suave) e $\lambda_0 < 0$;
- (ii) Se $\alpha_+ < 0$, então a bifurcação é Hopf (suave) e $\lambda_0 > 0$;
- (iii) Se $f'_-(0) \leq -\varepsilon g_y(0, 0, \lambda_0, \varepsilon) \leq f'_+(0)$ (isto é, $\pm\alpha_{\pm} \geq 0$), então a bifurcação é não-suave e $\lambda_0 = 0$.

- (a) Se $\beta_+ < 0$ e $\beta_- < 0$, então há uma bifurcação “Hopf-like”. Seja

$$\Lambda = \frac{\alpha_+}{\sqrt{-\beta_+}} - \frac{-\alpha_-}{\sqrt{-\beta_-}}.$$

Então a bifurcação é supercrítica se $\Lambda < 0$ e subcrítica se $\Lambda > 0$.

- (b) Se $\beta_+ < 0$ e $\beta_- \geq 0$, então a bifurcação é “nonsmooth Hopf-like” supercrítica que cria órbitas periódicas de pequena amplitude;
- (c) Se $\beta_+ \geq 0$, então a bifurcação é uma super-explosão. A bifurcação é subcrítica se $\beta_- < 0$ e supercrítica se $\beta_- \geq 0$.

Observação 4.5. Vale destacar que, diferentemente do caso de van der Pol suave por partes, no qual uma bifurcação de Hopf ocorre no “corner” somente se $g_y = 0$, o item (iii) do Teorema 4.7 mostra que mesmo quando $g_y \neq 0$, uma bifurcação “Hopf-like” pode ocorrer no “corner”.

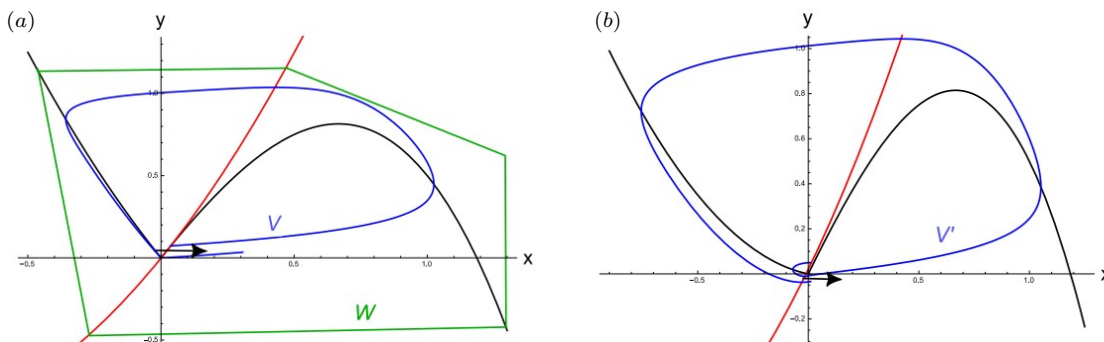
A demonstração do Teorema 4.7 em detalhes pode ser encontrada em (ROBERTS, 2016). Para demonstrar os itens (i) e (ii), basta verificar a ocorrência de uma bifurcação

de Hopf (suave), como encontra-se na literatura. Já no item $(iii) - (a)$, é possível verificar a ocorrência de uma bifurcação que gera uma órbita periódica e que o ponto crítico passa de um foco estável para um foco instável, conforme λ aumenta passando por 0. Assim, neste caso, temos uma bifurcação “Hopf-like” como descrita em (SIMPSON; MEISS, 2007), onde a criticidade da bifurcação será dada pelo parâmetro Λ .

No item $(iii) - (b)$, o autor de (ROBERTS, 2016) chama a bifurcação de “nonsmooth Hopf-like” a fim de diferenciar a bifurcação discutida em (SIMPSON; MEISS, 2007), uma vez que é possível constatar a transição do ponto crítico que sai de um nó estável (não mais de um foco) para um foco instável. Para demonstrar esse item, constrói-se um sistema sombra suave por partes que satisfaz as hipóteses de $(iii) - (b)$ e, como para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno ele admite uma órbita periódica estável, pode-se aplicar o Corolário 4.5, garantindo a limitação das órbitas do sistema pelas órbitas do sistema sombra suave por partes. É possível construir assim um conjunto positivamente invariante contendo o ponto crítico instável em seu interior e então, pelo Teorema 1 de (BUZZI; CARVALHO; EUZEBIO, 2018), existe uma órbita periódica estável.

Por último, para demonstrar o item $(iii) - (c)$, a ideia é análoga ao caso (ii) do Teorema 4.5. Mais precisamente, no caso supercrítico é possível construir um conjunto $W \setminus V$ positivamente invariante seguindo os mesmos passos do caso supercrítico de van der Pol, veja Figura 30 (a). Assim, não existe nenhum ponto crítico estável no interior desse conjunto e, pelo Teorema 1 de (BUZZI; CARVALHO; EUZEBIO, 2018), a existência de uma órbita periódica estável é garantida. Além disso, é possível verificar que o ponto crítico passa de um nó estável para um nó instável. Já no caso subcrítico, é possível construir um conjunto $W \setminus V'$ positivamente invariante seguindo os mesmos passos do caso subcrítico de van der Pol, veja Figura 30 (b) e, assim, garantir a existência de uma órbita periódica estável no interior desse conjunto. Neste caso, é possível verificar que um ponto crítico estável e uma órbita periódica estável coexistem para $\lambda < 0$. O que finaliza a demonstração.

Figura 30 – Ilustração dos conjuntos $W \setminus V$ e $W \setminus V'$ necessários para a demonstração do item $(iii) - (c)$ do Teorema 4.7.



Fonte: Retirada do artigo (ROBERTS, 2016).

Como aplicação do Lema 4.2, obtemos o próximo resultado, o qual caracteriza a amplitude das órbitas periódicas criadas pela bifurcação do Teorema 4.7.

Corolário 4.7. Sejam $\varepsilon, \lambda > 0$ fixos e Γ^n uma órbita periódica estável do sistema (4.18) criada pela bifurcação de Hopf descrita no Teorema 4.7. Além disso, assumamos que o sistema sombra (4.19) possui uma órbita periódica estável Γ^s . Então, Γ^n é limitada por Γ^s .

EXEMPLOS DE APLICAÇÕES

Nos capítulos anteriores, foram apresentados vários conceitos e resultados envolvendo sistemas rápido-lento suaves e suaves por partes. Embora alguns exemplos tenham sido abordados, nenhum mostra de fato uma aplicação da teoria em outra área de conhecimento. O intuito deste capítulo é fornecer algumas possibilidades de aplicações para o que foi apresentado anteriormente e, também, servir como motivação a quem queira se aprofundar mais no assunto ou que se interesse por alguma das áreas de aplicações.

O primeiro exemplo, presente em (CARDIN, 2022), ilustra a existência de uma oscilação de relaxamento de costura para um oscilador suave-descontínuo bastante utilizado na engenharia.

Exemplo 5.1. Vamos considerar a equação de Liénard descontínua

$$x'' + (c + dx^2)x' + x - \text{sign}(x) = 0, \quad (5.1)$$

onde $c, d \in \mathbb{R}$. Essa equação é o caso limite ($\alpha \rightarrow 0^+$) do oscilador suave-descontínuo dado por

$$x'' + (c + dx^2)x' + x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 + \alpha^2}}\right) = 0. \quad (5.2)$$

Observe que o parâmetro α determina a suavidade de (5.2). Mais precisamente, quando $\alpha > 0$, (5.2) é suave, no entanto o caso limite (5.1) é apenas suave por partes (descontínuo). A equação (5.2) é um modelo para uma ponte em arco com amortecimento viscoso não-linear, veja a referência [25] de (CARDIN, 2022) para uma descrição do modelo físico.

Vamos assumir que $c = \mu a$ e $d = \mu 3b$, com μ um parâmetro real suficientemente grande e $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ parâmetros arbitrários mas fixos. As equações (5.1) e (5.2) podem ser transformadas, respectivamente, nos sistemas rápido-lento de Liénard

$$(x', y') = (y - ax - bx^3, \varepsilon(\text{sign}(x) - x)) = \begin{cases} (y - ax - bx^3, \varepsilon(-1 - x)) & \text{se } x < 0, \\ (y - ax - bx^3, \varepsilon(1 - x)) & \text{se } x > 0, \end{cases} \quad (5.3)$$

e

$$(x', y') = \left(y - ax - bx^3, \varepsilon x \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + \alpha^2}} - 1 \right) \right), \quad (5.4)$$

onde $0 < \varepsilon \ll 1$.

Usando as notações vistas na Seção 3.3, temos que

$$f^-(x, y, \varepsilon) = f^+(x, y, \varepsilon) = y - ax - bx^3, \quad g^-(x, y, \varepsilon) = -1 - x, \quad g^+(x, y, \varepsilon) = 1 - x.$$

Logo,

$$\frac{\partial f^-}{\partial x} = \frac{\partial f^+}{\partial x} = -a - 3bx^2, \quad \frac{\partial^2 f^-}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f^+}{\partial x^2} = -6bx, \quad \frac{\partial f^-}{\partial y} = \frac{\partial f^+}{\partial y} = 1.$$

Além disso, $h(x, y) = x$.Assumiremos também que a e b satisfazem

$$a < 0, \quad b > 0 \quad \text{e} \quad a < -3b. \quad (5.5)$$

Assim, as hipóteses $(B_1) - (B_7)$ são válidas. De fato, se a e b satisfazem (5.5), então a variedade crítica $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \varphi(x) := ax + bx^3\}$ é “S-shaped”. As constantes x_M, x_m, y_M, y_m, x_- e x_+ assumem os valores $k, -k, -(2a/3)k, -1$ e 1 , respectivamente, com $k = \sqrt{-a/(3b)}$. Além disso, os pontos $A = (x_M, y_M) = (-k, -(2a/3)k)$ e $B = (x_m, y_m) = (k, (2a/3)k)$ são dobras genéricas de S uma vez que $(\partial^2 f / \partial x^2), (\partial f / \partial y)$ e g não se anulam em A e B , o que verifica $(B_1) - (B_4)$. A hipótese (B_5) também é válida uma vez que $(\partial f / \partial x)(x, y, 0) = -a - 3bx^2$ é negativa em $S^l \cup S^r = \{(x, y) \in S : x < -k\} \cup \{(x, y) \in S : x > k\}$ e positiva em $S^m = \{(x, y) \in S : -k < x < k\}$. A condição (B_6) é válida pois

$$g(x, y, 0) = \begin{cases} -1 - x & \text{se } x < 0, \\ 1 - x & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

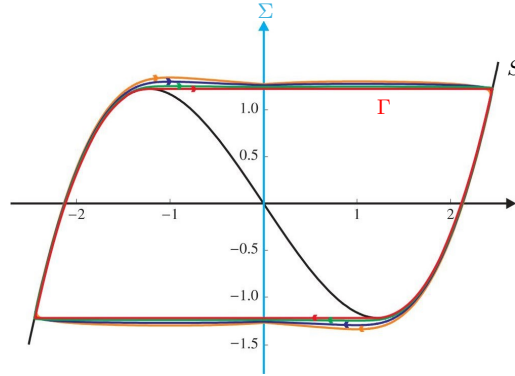
é positiva em S^l e negativa em S^r . Também, $g(x, y, 0) < 0$ para $(x, y) \in S$ com $1 < x < k$ e $g(x, y, 0) > 0$ para $(x, y) \in S$ com $-k < x < -1$.

Por último, considerando uma trajetória singular de costura Γ , como ilustrado na Figura 31, e uma pequena vizinhança tubular V de Γ , temos que Γ e Σ se intersectam transversalmente em $(0, -(2a/3)k)$ e $(0, (2a/3)k)$, os quais são pontos de costura de (5.3), verificando (B_7) . Assim, pelo Teorema 3.2, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, o sistema (5.3) possui um único ciclo limite de costura estável $\Gamma_\varepsilon \subset V$ tal que $\Gamma_\varepsilon \rightarrow \Gamma$ na distância de Hausdorff conforme $\varepsilon \rightarrow 0$, veja Figura 31. \diamond

A fim de ilustrar algumas das ideias apresentadas na Seção 4.4 e, também, uma área na qual o conhecimento sobre órbitas canard em “corners” pode ser aplicado, consideramos o próximo exemplo, presente em (ROBERTS; GLENDINNING, 2014).

Exemplo 5.2. Este exemplo ilustra uma variação do modelo de circulação “thermohaline” de Stommel, veja as referências [20] e [21] de (ROBERTS; GLENDINNING, 2014). O

Figura 31 – Ilustração da convergência dos ciclos limites de costura Γ_ε para Γ , conforme $\varepsilon \rightarrow 0$, para o Exemplo 5.1, para $a = -3/2$ e $b = 1/3$. A curva vermelha representa a trajetória singular de costura Γ , enquanto que as curvas laranja, azul e verde, representam o ciclos Γ_ε para $\varepsilon = 1/10$, $\varepsilon = 5/100$ e $\varepsilon = 1/100$, respectivamente. Além disso, Σ e S representam, respectivamente, as variedades de descontinuidade e crítica.



Fonte: Retirada do artigo (CARDIN, 2022).

modelo original de Stommel, elaborado em 1961, contém uma curva de bifurcação “2-shaped” produzindo duas bifurcações sela-nó, uma no “corner” e outra na dobra suave. É possível transformar esse modelo em um sistema rápido-lento suave por partes como (4.12). Para isso, é necessário incorporar um parâmetro no modelo que se comporta como uma variável lenta.

Como citado no artigo em questão, é possível mostrar que o modelo de Stommel adimensional pode ser reduzido para o seguinte sistema suave por partes

$$\dot{y} = \mu - y - K|1 - y|y, \quad (5.6)$$

o qual tem equilíbrios em

$$\mu = \begin{cases} (1 + K)y - Ky^2 & \text{para } y < 1, \\ (1 - K)y + Ky^2 & \text{para } y > 1. \end{cases} \quad (5.7)$$

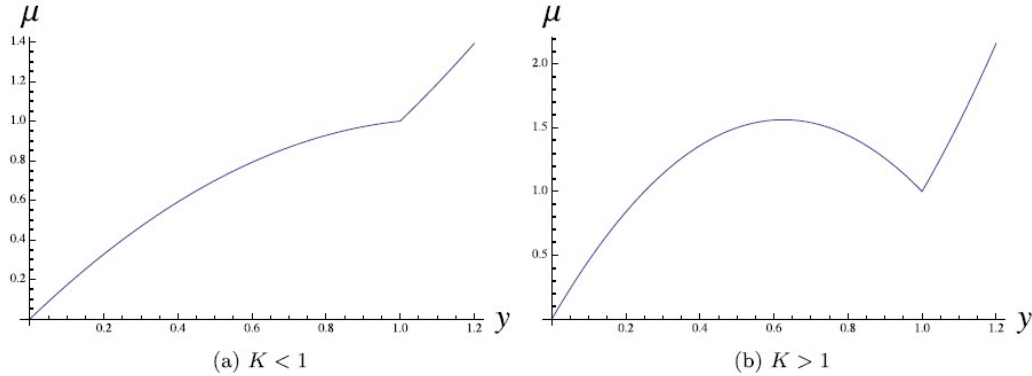
A natureza do sistema depende do parâmetro K , veja Figura 32.

Se $0 \leq K < 1$, então $(d\mu/dy) > 0$ para todo y em um vizinhança de 1, exceto para $y = 1$, onde a derivada é descontínua. Logo, para $K < 1$, a curva do equilíbrio $\mu = \mu(y)$ é monótona e crescente, e o sistema (5.6) possui um único equilíbrio, o qual é globalmente atrator. É importante ressaltar que uma solução do sistema corresponde a um único estado de circulação estável (ou seja, direção e força). Por outro lado, se $K > 1$, o sistema exibe dois equilíbrios estáveis para uma faixa de valores de μ . Além disso, $\mu(y)$ é ainda monótona e crescente para $y > 1$ e possui um máximo local em $y = (1 + K)/(2K) < 1$. Observe que, para

$$1 < \mu < \frac{(1 + K)^2}{4K},$$

o sistema (5.6) possui três equilíbrios, sendo os equilíbrios de fora estáveis e o equilíbrio do meio instável.

Figura 32 – Equilíbrios de (5.6) para diferentes valores de μ com $K < 1$ e $K > 1$.



Fonte: Retirada do artigo (ROBERTS; GLENDINNING, 2014).

É tomado por hipótese que o laço de histerese (“hysteresis loop”), que aparece implicitamente na Figura 32, é importante para entender a variabilidade nos dados paleoclimáticos, especificamente no que diz respeito a eventos de aquecimento rápido no Atlântico Norte (veja as referências [2], [6] e [18] de (ROBERTS; GLENDINNING, 2014)). O diagrama de bifurcação sugere que μ é a chave para gerar um comportamento oscilatório (quando $K > 1$), então μ é incluído como uma variável dinâmica e assume-se que μ evolui de acordo com a formação média de nuvens de longo prazo e que y afeta esse processo de forma negativa. Além disso, como μ é um parâmetro do sistema físico, supõe-se que ele evolua em uma escala de tempo maior que y . Assim, faz sentido considerar o sistema

$$\begin{aligned} y' &= \mu - y - K|1 - y|y, \\ \mu' &= \varepsilon(\lambda - y), \end{aligned} \quad (5.8)$$

onde $K > 1$.

Note que a variedade crítica S de (5.8) é precisamente o conjunto de equilíbrio de (5.6) mostrado na Figura 32 (b). Conforme λ diminui passando por 1, o sistema exhibe uma bifurcação “Hopf-like” como descrita no Teorema 4.5. Isto é, se $K < 1 + 2\sqrt{\varepsilon}$, ciclos canard aparecem no corner. Entretanto, se $K > 1 + 2\sqrt{\varepsilon}$, o sistema sofre uma super-exlosão. Em ambos os casos, a inclinação do ramo estável direito é maior que 1, então a bifurcação é supercrítica.

No contexto do modelo oceânico (5.8), um equilíbrio estável indica um estado de circulação estável (direção e força). Para $y < 1$, o oceano transporta água em direção aos polos ao longo da superfície (às vezes chamada de circulação “positiva”), já para $y > 1$, a água é transportada do polo para o equador ao longo da superfície (chamada de circulação “negativa”). Quando λ diminui passando por 1, a bifurcação que ocorre indica uma mudança no sistema de um estado de circulação negativo estável para uma

circulação reversa periódica. Se os ciclos canard são criados pela bifurcação, então, próximo ao ponto de bifurcação em $\lambda = 1$, a circulação oscilará entre os estados de circulação fraca em cada direção. Agora, se a bifurcação é uma super-explosão, a circulação oscilará entre uma circulação negativa fraca (na direção do equador) e uma circulação positiva forte (na direção dos polos). Assim, imediatamente após a bifurcação, a oscilação de relaxamento criada pela super-explosão é uma reminiscência do loop de histerese desejado, diferentemente dos ciclos canard sem cabeça que não alcançarão o ramo estável esquerdo da variedade crítica correspondente a uma forte circulação em direção aos polos. \diamond

O artigo ([ROBERTS; SAHA, 2017](#)) também aborda o modelo de circulação “thermo-haline” de Stommel, se aprofundando ainda mais na análise.

REFERÊNCIAS

- BARREIRA, L.; VALLS, C. **Equações Diferenciais Ordinárias: Teoria Qualitativa**. [S.l.]: Livraria da Física, 2012. xii+248 p. ISBN 978-85-7861-167-5. Citado nas páginas 50 e 54.
- BENOIT, E.; CALLOT, J.-L.; DIENER, F.; DIENER, M. Chasse au canard. **Collect. Math.**, v. 32, n. 1-2, p. 37–119, 1981. ISSN 0010-0757. Citado nas páginas 18 e 71.
- BUZZI, C. A.; CARVALHO, T.; EUZEBIO, R. D. On Poincaré-Bendixson theorem and non-trivial minimal sets in planar nonsmooth vector fields. **Publ. Mat.**, v. 62, n. 1, p. 113–131, 2018. ISSN 0214-1493. Disponível em: <<https://doi.org/10.5565/PUBLMAT6211806>>. Citado nas páginas 75, 77, 79, 84 e 86.
- CARDIN, P. T. Relaxation oscillation in planar discontinuous piecewise smooth fast-slow systems. **Chaos**, v. 32, n. 1, p. Paper No. 013104, 13, 2022. ISSN 1054-1500. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/5.0048340>>. Citado nas páginas 18, 19, 20, 26, 45, 51, 53, 56, 58, 59, 89 e 91.
- CARDIN, P. T.; TEIXEIRA, M. A. Fenichel theory for multiple time scale singular perturbation problems. **SIAM J. Appl. Dyn. Syst.**, v. 16, n. 3, p. 1425–1452, 2017. ISSN 1536-0040. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1137/16M1067202>>. Citado na página 33.
- DESROCHES, M.; FREIRE, E.; HOGAN, S. J.; PONCE, E.; THOTA, P. Canards in piecewise-linear systems: explosions and super-explosions. **Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.**, v. 469, n. 2154, p. 20120603, 18, 2013. ISSN 1364-5021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1098/rspa.2012.0603>>. Citado nas páginas 18, 71, 72 e 76.
- DESROCHES, M.; GUILLAMON, A.; PONCE, E.; PROHENS, R.; RODRIGUES, S.; TERUEL, A. E. Canards, folded nodes, and mixed-mode oscillations in piecewise-linear slow-fast systems. **SIAM Rev.**, v. 58, n. 4, p. 653–691, 2016. ISSN 0036-1445. Disponível em: <<https://doi.org/10.1137/15M1014528>>. Citado na página 18.
- DUMORTIER, F.; ROUSSARIE, R. Canard cycles and center manifolds. **Mem. Amer. Math. Soc.**, v. 121, n. 577, p. x+100, 1996. ISSN 0065-9266. With an appendix by Cheng Zhi Li. Disponível em: <<https://doi.org/10.1090/memo/0577>>. Citado nas páginas 41, 61 e 64.
- ESTEBAN, S.; GORDILLO, F.; ARACIL, J. Three-time scale singular perturbation control and stability analysis for an autonomous helicopter on a platform. **Internat. J. Robust Nonlinear Control**, v. 23, n. 12, p. 1360–1392, 2013. ISSN 1049-8923. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/rnc.2823>>. Citado na página 18.
- FENICHEL, N. Persistence and smoothness of invariant manifolds for flows. **Indiana Univ. Math. J.**, v. 21, p. 193–226, 1971/1972. ISSN 0022-2518. Citado na página 33.

_____. Asymptotic stability with rate conditions. **Indiana Univ. Math. J.**, v. 23, p. 1109–1137, 1973/74. ISSN 0022-2518. Citado na página 33.

_____. Asymptotic stability with rate conditions. II. **Indiana Univ. Math. J.**, v. 26, n. 1, p. 81–93, 1977. ISSN 0022-2518. Citado na página 33.

_____. Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations. **J. Differential Equations**, v. 31, n. 1, p. 53–98, 1979. ISSN 0022-0396. Disponível em: [http://dx.doi.org/10.1016/0022-0396\(79\)90152-9](http://dx.doi.org/10.1016/0022-0396(79)90152-9). Citado na página 33.

FILIPPOV, A. F. **Differential equations with discontinuous righthand sides**. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1988. v. 18. x+304 p. (Mathematics and its Applications (Soviet Series), v. 18). Translated from the Russian. ISBN 90-277-2699-X. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-94-015-7793-9>. Citado nas páginas 17, 19, 21 e 24.

GINOUX, J.-M.; LETELLIER, C. Van der Pol and the history of relaxation oscillations: toward the emergence of a concept. **Chaos**, v. 22, n. 2, p. 023120, 15, 2012. ISSN 1054-1500. Disponível em: <https://doi.org/10.1063/1.3670008>. Citado na página 46.

HEK, G. Geometric singular perturbation theory in biological practice. **J. Math. Biol.**, v. 60, n. 3, p. 347–386, 2010. ISSN 0303-6812. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s00285-009-0266-7>. Citado na página 18.

HOGAN, S. J. Relaxation oscillations in a system with a piecewise smooth drag coefficient. **J. Sound Vibration**, v. 263, n. 2, p. 467–471, 2003. ISSN 0022-460X. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(02\)01431-1](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(02)01431-1). Citado na página 19.

KRUPA, M.; SZMOLYAN, P. Extending geometric singular perturbation theory to nonhyperbolic points—fold and canard points in two dimensions. **SIAM J. Math. Anal.**, v. 33, n. 2, p. 286–314, 2001. ISSN 0036-1410. Disponível em: <https://doi.org/10.1137/S0036141099360919>. Citado nas páginas 49, 50, 61 e 64.

_____. Relaxation oscillation and canard explosion. **J. Differential Equations**, v. 174, n. 2, p. 312–368, 2001. ISSN 0022-0396. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1006/jdeq.2000.3929>. Citado nas páginas 47, 66 e 70.

KUEHN, C. **Multiple time scale dynamics**. Springer, Cham, 2015. v. 191. xiv+814 p. (Applied Mathematical Sciences, v. 191). ISBN 978-3-319-12315-8; 978-3-319-12316-5. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-12316-5>. Citado nas páginas 21, 33, 41, 49, 61, 64 e 66.

LI, C.; LI, J.; MA, Z.; ZHU, H. Canard phenomenon for an SIS epidemic model with nonlinear incidence. **J. Math. Anal. Appl.**, v. 420, n. 2, p. 987–1004, 2014. ISSN 0022-247X. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2014.06.035>. Citado na página 18.

LIMA, E. L. **Curso de análise. Vol. 2**. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1999. v. 5. x+547 p. (Projeto Euclides [Euclid Project], v. 5). ISBN 85-244-0108-7. Citado na página 36.

- LLIBRE, J.; TEIXEIRA, M. A.; SILVA, P. R. da. Sliding Vector Fields via Slow–Fast Systems. **Bulletin of the Belgian Mathematical Society - Simon Stevin**, The Belgian Mathematical Society, v. 15, n. 5, p. 851 – 869, 2008. Disponível em: <<https://doi.org/10.36045/bbms/1228486412>>. Citado na página 18.
- PERKO, L. **Differential Equations and Dynamical Systems**. Springer-Verlag, New York, 2001. v. 7. xiv+553 p. (Texts in Applied Mathematics, v. 7). Third. ISBN 0-387-95116-4. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0003-8>>. Citado nas páginas 36 e 41.
- POINCARÉ, H. Mémoire sur les courbes définies une équation différentielle (2nde partie). **Journal de mathématiques pures et appliquées**, v. 5, p. 251–296, 1882. Citado na página 17.
- POL, B. van der. On relaxation oscillations. **Philosophical Mag.**, v. 7, p. 978–992, 1926. Citado nas páginas 18 e 45.
- ROBERTS, A. Canard explosion and relaxation oscillation in planar, piecewise-smooth, continuous systems. **SIAM J. Appl. Dyn. Syst.**, v. 15, n. 1, p. 609–624, 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1137/140998147>>. Citado nas páginas 18, 19, 61, 72, 83, 84, 85 e 86.
- ROBERTS, A.; GLENDINNING, P. Canard-like phenomena in piecewise-smooth van der Pol systems. **Chaos**, v. 24, n. 2, p. 023138, 11, 2014. ISSN 1054-1500. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.4885502>>. Citado nas páginas 18, 19, 20, 61, 72, 74, 90 e 92.
- ROBERTS, A.; SAHA, R. Relaxation oscillations in an idealized ocean circulation model. **Clim Dyn**, v. 48, p. 2123–2134, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00382-016-3195-3>>. Citado nas páginas 18 e 93.
- ROTSTEIN, H. G.; COOMBES, S.; GHEORGHE, A. M. Canard-like explosion of limit cycles in two-dimensional piecewise-linear models of FitzHugh-Nagumo type. **SIAM J. Appl. Dyn. Syst.**, v. 11, n. 1, p. 135–180, 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1137/100809866>>. Citado nas páginas 18, 71 e 72.
- SIMPSON, D. J. W.; MEISS, J. D. Andronov-Hopf bifurcations in planar, piecewise-smooth, continuous flows. **Phys. Lett. A**, v. 371, n. 3, p. 213–220, 2007. ISSN 0375-9601. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.physleta.2007.06.046>>. Citado nas páginas 78 e 86.
- SOTOMAYOR, J.; TEIXEIRA, M. A. Regularization of discontinuous vector fields. In: **International Conference on Differential Equations (Lisboa, 1995)**. [S.l.]: World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1998. p. 207–223. Citado na página 18.
- STEWART, I. **O fantástico mundo dos números: a matemática do zero ao infinito**. [S.l.]: Zahar, Rio de Janeiro, 2016. 384 p. (tradução George Schlesinger). ISBN 978-85-378-1552-6. Citado na página 7.
- UTKIN, V. Brief comments for doubts in Filippov method. **J. Control Autom. Electr. Syst.**, v. 33, p. 1628–1632, 2022. ISSN 2195-3899. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s40313-022-00952-9>>. Citado na página 25.