UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE FILOSOFIA, CIÊNCIAS E LETRAS DE RIBEIRÃO PRETO
DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO E MATEMÁTICA

THAUANA MARCELA FERRARI

Equações do Tipo Solow com Retardo Dependendo do Estado

Ribeirão Preto–SP

2021

THAUANA MARCELA FERRARI

Equações do Tipo Solow com Retardo Dependendo do Estado

Versão Original

Dissertação apresentada à Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto (FFCLRP) da Universidade de São Paulo (USP), como parte das exigências para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de Concentração: Computação Aplicada.

Orientador: Eduardo Alex Hernandez Morales

Ribeirão Preto–SP

2021

Ferrari, Thauana Marcela
Equações do Tipo Solow com Retardo Dependendo do Estado. Ribeirão Preto–SP, 2021.
83p. : il.; 30 cm.

Dissertação apresentada à Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras
de Ribeirão Preto da USP, como parte das exigências para
a obtenção do título de Mestre em Ciências,
Área: Computação Aplicada.

Orientador: Eduardo Alex Hernandez Morales

1. Equações Diferenciais com Retardo Dependendo do Estado. 2. Modelo de Solow. 3. Métodos Computacionais.

Thauana Marcela Ferrari

Equações do Tipo Solow com Retardo Dependendo do Estado

Dissertação apresentada à Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto da USP, como parte das exigências para a obtenção do título de Mestre em Ciências.
Área: Computação Aplicada.

Trabalho aprovado. Ribeirão Preto–SP, 17 de Agosto de 2021:

Profa. Dra. Vanessa Rolnik Artioli
Presidente da banca

Prof. Dr. Rodrigo Eduardo Ponce Cubillos
Convidado 1

Prof. Dr. José Paulo Carvalho dos Santos
Convidado 2

Ribeirão Preto–SP
2021

Dedico esta dissertação ao Henrique, meu namorado,
por sempre estar ao meu lado me incentivando e me motivando,
à minha mãe e ao meu irmão por buscar me entender em todos os momentos,
ao meu orientador Eduardo Hernandez e à professora Vanessa Rolnik pela parceria.

Agradecimentos

Agradeço à minha mãe, Valmira Ferrari, pelo investimento na minha educação, desde pequena até agora no mestrado sempre me apoiando e incentivando. Agradeço ao meu irmão, Caio Ferrari, por tentar me entender em todas as horas e estar presente quando precisei.

Agradeço ao Henrique Makimoto de Sá, meu namorado, por ser essa pessoa incrível com quem sempre posso contar. Obrigada por viver meu mestrado comigo, por me apoiar, incentivar e nunca deixar eu perder o foco ao longo desses anos de mestrado.

Agradeço ao meu orientador, Eduardo Hernandez, pela oportunidade de fazer este mestrado, pela paciência e por todos os ensinamentos. Aproveito para agradecer à professora Vanessa Rolnik por me ajudar na parte numérica, sou grata a nossa amizade, e ao professor Luciano Nakabashi por se dispor a me ajudar na parte econômica.

Agradeço à Lucia Akemi Tatsuno, funcionária exemplar do programa de pós-graduação em computação aplicada, por se preocupar e cuidar de todos nós mestrandos e à todos os outros funcionários do PPG-CA e da pós-graduação da FFCLRP.

Agradeço aos meus amigos da graduação e da pós-graduação pelos momentos inesquecíveis de risadas no bandex e pela ajuda no meio acadêmico.

Agradeço aos professores do Departamento de Computação em Matemática por toda a ajuda que me deram e pela amizade, em especial às professoras: Katia Andreia Gonçalves de Azevedo, Michelle Fernanda Pierri Hernandez e Maria Aparecida Bená.

Agradeço aos professores que participaram da minha banca, dando ajudas significativas para melhorar minha dissertação de mestrado.

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro.

Resumo

Nesta dissertação introduzimos uma nova classe de equações integro-diferenciais com retardo dependendo do estado, motivada por recentes estudos na teoria de crescimento econômico. Para tais equações, apresentamos resultados sobre existência, unicidade e aproximações numéricas de soluções.

Palavras-chave: Equações Diferenciais com Retardo Dependendo do Estado, Modelo de Solow, Aproximação de Solução de Equação Diferencial.

Abstract

This dissertation introduces a new class of integral-differential equations with state dependent delay, motivated by recent studies in the theory of economic growth. For such equations, we present results about the existence, uniqueness and numerical approaches of solutions.

Keywords: Differential Equations with State Dependent Delay, Solow's Model, Approximation of Differential Equation Solution.

Sumário

Introdução **19**

1 EMBASAMENTO TEÓRICO **23**
1.1 Definições, notações e resultados preliminares **23**
1.2 Equações diferenciais: teoria matemática e exemplos **27**
1.2.1 Equações diferenciais ordinárias 28
1.2.2 Equações diferenciais com retardamento 30
1.2.2.1 Equações com retardamento discreto 30
1.2.2.2 Equações com retardamento contínuo 32
1.2.2.3 Equações com retardamento dependendo do estado 36
1.3 Aproximação numérica de soluções **39**
1.3.1 Para equações diferenciais ordinárias 40
1.3.2 Para equações diferenciais com retardamento dependendo do estado . . 44
1.4 Modelo de crecimento econômico **47**
1.4.1 O modelo básico de Solow 48
1.4.2 Modelo de Solow com população endógena 50

2 METODOLOGIA **53**

3 RESULTADOS **55**
3.1 Existência e unicidade da solução via iteradas de Picard **55**
3.1.1 Aproximação numérica de soluções 60
3.1.2 Exemplo 66
3.2 Existência e unicidade da solução via Teorema da Contração . **70**

4 CONCLUSÃO **77**

REFERÊNCIAS **79**

APÊNDICE A CÓDIGO NO MATLAB **81**

Introdução

O objetivo deste trabalho é o estudo da existência, unicidade e aproximação numérica de soluções de modelos de equações integro-diferenciais com retardo dependendo do estado descritos na forma

$$\begin{cases} k'(t) &= sf(k(t)) - k(t)\displaystyle\int_{-p}^{t} n_s(f(k(\sigma(\tau, k(\tau)))))g(t-\tau)\,d\tau, \quad t \in [0,a], \\ k(t) &= \varphi(t), \quad t \in [-p, 0], \end{cases} \tag{1}$$

em que s é uma constante entre $(0,1)$, $f(\cdot)$, $n_s(\cdot)$, $\sigma(\cdot)$, $g(\cdot)$ e $\varphi(\cdot)$ são funções adequadas.

O Problema (1) é motivado por recentes estudos sobre a teoria de crescimento econômico, em particular pelo modelo de Solow com população endógena apresentado por exemplo por Fanti e Manfredi (2003), Stamova e Stamov (2013) e Stamova e Stamov (2016) e é estudado nesta dissertação sob dois aspectos: o da teoria matemática, o qual busca condições para existência e unicidade de soluções, e o dos métodos numéricos para obtenção de aproximações para a solução.

Para entender a aplicação econômica envolvida no Modelo (1) proposto nesta dissertação, partimos do estudo do modelo básico de Solow, o qual ilustra a importância do capital físico na diferença dos níveis de renda per capita entre os países. Esse modelo foi introduzido pelo economista Robert Solow (1956) e considera uma função de produção $Y(t) = F(K(t), L(t))$, a qual descreve como o trabalho $L(\cdot)$ e o capital $K(\cdot)$ se combinam para gerar o produto $Y(\cdot)$, e uma equação de acumulação de capital por trabalhador, dada por $k'(t) = sf(k(t)) - (\delta + n)k(t)$, em que $k(\cdot)$ é o capital por trabalhador, $f(\cdot)$ é o produto por trabalhador, s é a fração do produto poupado, δ é a constante da depreciação do capital e n é a taxa de crescimento populacional.

Para considerar de forma mais realista a quantidade disponível de oferta de trabalho, os economistas Fanti e Manfredi (2003) perceberam que seria necessário estudar os comportamentos demográficos passados, devido ao intervalo de anos entre o nascimento e a entrada na força de trabalho dos indivíduos. Para modelar esse comportamento, eles usaram a teoria matemática de equações diferenciais com retardo distribuído para estudar a equação

$$k'(t) = sf(k(t)) - \left(\int_{-\infty}^{t} n_s(f(k(\tau)))g(t-\tau)\,d\tau\right)k(t),$$

onde $n_s(f(k(\tau)))$ representa a fertilidade relacionada à renda passada e o termo $g(t-\tau)$ é o núcleo de atraso correspondente, o qual é um ponderador médio para eventos mais ou menos importantes do passado.

Com o intuito de complementar os estudos de Fanti e Manfredi, introduzimos o Modelo de Solow integro-diferencial com retardo dependendo do estado apresentado em (1). Esta modelagem é interessante, pois além de considerar o retardo dependendo do estado $\sigma(\tau, k(\tau))$ no termo da renda na função $n_s(\cdot)$, mantém a ideia de uma função ponderadora $g(\cdot)$.

A teoria de equações diferenciais com retardo dependendo de estado é um campo de intensa pesquisa devido às diversas aplicações e ao fato de que a teoria qualitativa é bastante diferente e mais complexa do que as usuais em equações diferenciais com retardo.

Para estabelecer e comprovar nossos resultados do Modelo (1), adaptamos o método de Picard para trabalhar com funções Lipschitz. É uma alternativa viável porque o método de Picard é apropriado para estudar a aproximação de soluções usando o método numérico e pelo fato de que funções da forma $u \to u(\sigma(\cdot, u(\cdot)))$ não são Lipschitz em espaços de funções contínuas, pois os argumentos nos termos $u(\sigma(t, u(t)))$ e $v(\sigma(t, v(t)))$ podem ser diferentes. Em relação à última observação, notamos que se $u(\cdot)$ e $\sigma(\cdot)$ são Lipschitz, temos que

$$\|u(\sigma(\cdot, u(\cdot))) - v(\sigma(\cdot, v(\cdot)))\|_{C([0,a];\mathbb{R})} \quad \leq \quad (1 + L_\sigma [u]_{C_{Lip}([-p,a];\mathbb{R})})\|u - v\|_{C([-p,a];\mathbb{R})},$$

onde L_σ denota a constante de Lipschitz da função σ, o que sugere que o método de Picard pode ser usado. Este resultado pode ser encontrado no Artigo (HERNANDEZ; PIERRI; WU, 2016).

Para a construção e estudo da convergência dos métodos numéricos, utilizamos sequências de funções de aproximações contínuas no intervalo $[0, a]$,com base no estudo apresentado no Artigo (HERNANDEZ; ROLNIK; MANSO), submetido para publicação.

Além disso, introduzimos um modelo abstrato mais geral que o Problema (1), para o qual realizamos um estudo sobre existência e unicidade local e global de soluções usando o Teorema do Ponto Fixo de Banach, Teorema 1.5. Especificamente, estudamos o problema integro-diferencial

$$\begin{cases} u'(t) &= F_1(u_t) + F_2(u_t) \displaystyle\int_{-\infty}^{t} F_3(u(\sigma(\tau, u(\tau))))g(t-\tau)\, d\tau, \quad t \in [0, a], \\ u(t) &= \varphi(t), \quad t \in (-\infty, 0], \ \varphi \in \mathcal{B} = C_U((-\infty, 0]; X), \end{cases} \tag{2}$$

onde $(X, \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach, $\mathcal{B}$ é o espaço formado por todas as funções uniformemente contínuas limitadas definidas de $(-\infty, 0]$ em X, $F_1(\cdot)$, $F_2(\cdot)$, $F_3(\cdot)$, $\sigma(\cdot)$, $g(\cdot)$ e $u_t(\cdot)$ são funções adequadas.

É importante destacar que neste trabalho apresentamos resultados inéditos sobre a existência e unicidade de soluções para os Problemas (1) e (2) bem como a construção de

um metódo numérico que aproxima a solução do Problema (1) e o desenvolvimento de um programa no software MatLab.

Este texto está organizado em três capítulos, descritos brevemente a seguir.

O Capítulo 1 engloba os tópicos estudados que serviram como base para esta dissertação e está dividido em quatro seções: a seção 1.1 é um conjunto de definições e resultados preliminares; a seção 1.2 trata das equações diferenciais ordinárias e com retardamento para as quais apresentamos os estudos de dois teoremas importantes para o estudo de existência de soluções de equações diferenciais, Teorema de Picard e Teorema do Ponto Fixo de Banach, juntamente com suas demonstrações e exemplos; a seção 1.3 é destinada à construção de métodos numéricos e estudo da convergência para a solução de seus respectivos problemas; e a seção 1.4 aborda as teorias do modelo básico de Solow e do modelo de Solow com população endógena.

No Capítulo 2 apresentamos a metodologia dos estudos deste trabalho, dando ênfase aos principais trabalho estudados e explicando como eles foram essenciais para chegarmos nos Modelos (1) e (2).

No Capítulo 3 apresentamos os resultados dessa dissertação. Na seção 3.1 estabelecemos e provamos um resultado sobre a existência e unicidade de soluções do Problema (1) adaptando o método das iteradas de Picard do Teorema (3.3). Em seguida, introduzimos um método numérico que permite aproximar as funções destas iteradas de Picard e provamos sua convergência, Teorema (3.5), e terminamos a seção apresentando um exemplo numérico relacionando a aproximação de soluções do problema (1). Na seção 3.2 introduzimos o problema (2) e apresentamos resultados relacionados a existência e unicidade local e global de soluções. A existência e unicidade local de soluções para (2) é provada no Teorema 3.9 usando o princípio da contração de Banach. A existência global de soluções definidas em todo o intervalo $[-p, a]$ é apresentada no Corolário 3.10.

No Capítulo 4 apresentamos as concluções deste trabalho e no Apêndice A mostramos o código do programa no MatLab desenvolvido para esta dissertação e usado no exemplo numérico.

1

Embasamento Teórico

Este capítulo tem por objetivo apresentar as notações e resultados teóricos vinculados à teoria de equações com retardamento, análise numérica e crescimento econômico que embasaram este trabalho.

1.1 Definições, notações e resultados preliminares

Começamos definindo os espaços e as normas. O módulo em $\mathbb{R}$ é denotado por $|\cdot|$, como usual. $C([a,b];\mathbb{R})$ denota o espaço das funções contínuas definidas de $[a,b]$ em $\mathbb{R}$ munido da norma do supremo $\|u\|_{C([a,b];\mathbb{R})} = \sup_{s\in[a,b]} |u(s)|$ e $C^1([a,b];\mathbb{R})$ denota o espaço das funções contínuas com a primeira derivada contínua definidas de $[a,b]$ em $\mathbb{R}$. Usamos a notação $C_{Lip}([a,b];\mathbb{R})$ para o espaço formado por todas as funções Lipschitz de $[a,b]$ em $\mathbb{R}$, munido da norma $\|\cdot\|_{C_{Lip}([a,b];\mathbb{R})} = \|\cdot\|_{C([a,b];\mathbb{R})} + [\,\cdot\,]_{C_{Lip}([a,b];\mathbb{R})}$, em que $[\xi]_{C_{Lip}([a,b];\mathbb{R})} = \sup_{t,r\in[a,b],t\neq r} \frac{\|\xi(t)-\xi(r)\|}{|t-r|}$, e a definição de função Lipschitz como a seguir.

Definição 1.1 (Função Lipschitz) *(KREYSZIG, 1989) Uma função $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é dita ser Lipschitz se existir uma constante positiva L_f tal que*

$$|f(t_1)-f(t_2)| \;\leq\; L_f|t_1-t_2|, \;\; \forall t_1,t_2\in[a,b].$$

A constante L_f é chamada de constante de Lipschitz da função $f(\cdot)$.

Também precisamos da definição de função Lipschitz em duas variáveis como a seguir.

Definição 1.2 *(KREYSZIG, 1989) Uma função $f:[a,b]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é dita ser Lipschitz em duas variáveis se existir uma constante positiva L_f tal que*

$$|f(t_1,x_1)-f(t_2,x_2)| \;\leq\; L_f(|t_1-t_2|+|x_1-x_2|), \;\; \forall t_1,t_2\in[a,b] \;\; e \;\; \forall x_1,x_2\in\mathbb{R}.$$

A seguir, apresentamos alguns teoremas e lemas usados neste trabalho. O primeiro é o Teorema da Convergência Dominada, que é usado nas demonstrações dos teoremas de existência de soluções.

Teorema 1.3 (Teorema da Convergência Dominada) *(BARTLE, 1995) Suponha que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seja uma sequência de funções em $C([a,b];\mathbb{R})$ que converge pontualmente a uma função $x(\cdot)$ e exista uma função integrável $g:[a,b]\mapsto\mathbb{R}$ tal que $|u_n(t)|\leq|g(t)|$ para todo $t\in[a,b]$ e todo $n\in\mathbb{N}$. Então, $x(\cdot)$ é integrável e*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |u_n(s)-x(s)|ds \;=\; 0.$$

Usamos o próximo lema para demonstrar a unicidade da solução nos principais teoremas do nosso trabalho.

Lema 1.4 (Desigualdade de Gronwall) *(HALE, 1980) Se α é uma constante real e $\beta,\phi\in C([a,b];[0,\infty))$, $\beta(t)\geq 0$, são funções reais tais que*

$$\phi(t) \;\leq\; \alpha+\int_a^t \beta(s)\phi(s)\,ds,\;\; a\leq t\leq b,$$

então

$$\phi(t) \;\leq\; \left(\exp\int_a^t \beta(s)\,ds\right)\alpha,\;\; a\leq t\leq b.$$

O Teorema do ponto Fixo de Banach é de extrema importância no estudo da existência e unicidade de soluções na teoria geral de equações diferenciais com retardamento.

Teorema 1.5 (Teorema do Ponto Fixo de Banach) *(KREYSZIG, 1989) Suponha que X seja um espaço métrico completo, que $F\subset X$ seja fechado e que $T:F\to F$ seja uma contração. Então, existe um único $x\in F$ tal que $Tx=x$, ou seja, T possui um único ponto fixo em F.*

O seguinte lema permite trabalhar com funções Lipschitz. Devido a sua importância, apresentamos uma curta demonstração.

Lema 1.6 *(HERNANDEZ; PIERRI; WU, 2016) Suponha $u\in C_{Lip}([-p,a];\mathbb{R})$, $v\in C([-p,a];\mathbb{R})$ e $\sigma\in C_{Lip}([-p,a]\times\mathbb{R};[-p,a])$. Então $u(\sigma(\cdot,u(\cdot)))\in C_{Lip}([0,a];\mathbb{R})$ e*

$$[u(\sigma(\cdot,u(\cdot)))]_{C_{Lip}([0,a];\mathbb{R})} \;\leq\; [u]_{C_{Lip}([-p,a];\mathbb{R})}L_\sigma(1+[u]_{C_{Lip}([0,a];\mathbb{R})}).$$

Mais ainda,

$$\|u(\sigma(\cdot,u(\cdot)))-v(\sigma(\cdot,v(\cdot)))\|_{C([0,a];\mathbb{R})} \;\leq\; (1+L_\sigma[u]_{C_{Lip}([-p,a];\mathbb{R})})\|u-v\|_{C([-p,a];\mathbb{R})},$$

onde L_σ denota a constante de Lipschitz da função σ.

Prova: Para $t, s \in [0, a]$, $t \neq s$, temos que

$$\begin{aligned} |u(\sigma(t, u(t))) - |u(\sigma(s, u(s)))| &\leq [u]_{C_{Lip}([-p,a];\mathbb{R})} L_\sigma \left(|t - s| + |u(t) - u(s)|\right) \\ &\leq [u]_{C_{Lip}([-p,a];\mathbb{R})} L_\sigma \left(1 + [u]_{C_{Lip}([0,a];\mathbb{R})}\right) |t - s|, \end{aligned}$$

de onde segue que

$$[u(\sigma(\cdot, u(\cdot)))]_{C_{Lip}([0,a];\mathbb{R})} \leq [u]_{C_{Lip}([-p,a];\mathbb{R})} L_\sigma \left(1 + [u]_{C_{Lip}([0,a];\mathbb{R})}\right).$$

Além disso, para $s \in [0, a]$, temos que

$$\begin{aligned} &|u(\sigma(s, u(s))) - v(\sigma(s, v(s)))| \\ &\leq |u(\sigma(s, u(s))) - u(\sigma(s, v(s)))| + |u(\sigma(s, v(s))) - v(\sigma(s, v(s)))| \\ &\leq [u]_{C_{Lip}([-p,a];\mathbb{R})} L_\sigma |u(s) - v(s)| + \sup_{\tau \in [-p,a]} |u(\tau) - v(\tau)| \\ &\leq [u]_{C_{Lip}([-p,a];\mathbb{R})} L_\sigma \sup_{\tau \in [0,a]} |u(\tau) - v(\tau)| + \|u - v\|_{C([-p,a];\mathbb{R})} \\ &\leq (1 + [u]_{C_{Lip}([-p,a];\mathbb{R})} L_\sigma) \|u - v\|_{C([-p,a];\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

o que implica que

$$\|u(\sigma(\cdot, u(\cdot))) - v(\sigma(\cdot, v(\cdot)))\|_{C([0,a];\mathbb{R})} \leq (1 + L_\sigma [u]_{C_{Lip}([-p,a];\mathbb{R})}) \|u - v\|_{C([-p,a];\mathbb{R})}. \blacksquare$$

Usamos o Teorema do Valor Médio para provar que a função Cobb-Douglas é localmente Lipschitz.

Teorema 1.7 (Teorema do Valor Médio) *(BURDEN; FAIRES, 2010) Suponha que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b). Então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

Para o estudo dos métodos numéricos precisamos definir o que é um método numérico contínuo e o significado de convergência para ele. Iniciamos definindo a malha numérica, isto é, a posição discreta na qual as variáveis são calculadas. Escolhendo um número natural M para ser o número de subintervalos e dividindo o intervalo $[0, a]$ em M subintervalos de comprimento $h_M = \frac{a-0}{M}$, definimos a malha como sendo

$$\Delta_2 = \{t_i \in [0, a] : \ t_i = i h_M, \ i = 0, 1, \ldots, M\}. \tag{1.1}$$

A solução numérica de uma equação diferencial é um conjunto de pontos discretos $\{y_0, y_1, \ldots, y_M\}$ tal que $y_i \approx x(t_i)$ para cada $t_i \in \Delta_2$, sendo $x(t)$ a solução exata da equação diferencial para $t \in [0, a]$.

Já para equações diferenciais com retardamento a solução discreta não é suficiente, pois precisamos de soluções que não estão no conjunto $\{y_0, y_1, y_2, \ldots, y_M\}$. Devido a isso, apresentamos a seguinte definição.

Definição 1.8 (Método Numérico Contínuo) *(ENRIGHT; HAYASHI, 1998) Um método numérico é dito ser contínuo se sua solução for uma função contínua $y(\cdot)$ em $[0,a]$ obtida pela interpolação polinomial sobre as aproximações $\{y_0, y_1, \ldots, y_M\}$ satisfaz $y(t_i) = y_i$ e $y(t_{i+1}) = y_{i+1}$ para cada $i = 0, 1, \ldots, M-1$.*

Definição 1.9 (Método numérico convergente) *(ENRIGHT; HAYASHI, 1998) Um método numérico é dito ser convergente se a solução numérica contínua associada satisfaz*

$$\|y - x\|_{C([0,a];\mathbb{R})} \to 0, \quad \textit{quando} \;\; h_M \to 0.$$

Também usamos um lema importante nos estudos de convergência dos métodos numéricos. Devido a sua importância, apresentamos a demonstração.

Lema 1.10 *(HERNANDEZ; ROLNIK; MANSO) Para $n, M \in \mathbb{N}$, com n e M diferentes de zero, $t_k \in \Delta_2$ e $i \in \{1, 2, \ldots, M\}$, temos que*

$$\sum_{k=0}^{i-1} t_k^n \;\leq\; \frac{t_i^{n+1}}{(n+1)h_M} \quad e \quad \sum_{k_1=0}^{i-1}\sum_{k_2=0}^{k_1-1}\cdots\sum_{k_{n+1}=0}^{k_n-1} 1 \;\leq\; \frac{t_i^{n+1}}{(n+1)!\,h_M^{n+1}}.$$

Prova: Observamos que, para $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{i-1} t_k^n &= h_M^n[1^n + 2^n + 3^n + \cdots + (i-1)^n] \\ &= h_M^n \sum_{k=1}^{i-1} k^n. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Para estudar a soma em (1.2), vamos expandir o termo $(k+1)^{n+1}$ usando binômio de Newton. Notamos que

$$\begin{aligned}(k+1)^{n+1} &= \sum_{p=0}^{n+1}\binom{n+1}{p}k^{n+1-p}\,1^p = \binom{n+1}{0}k^{n+1} + \binom{n+1}{1}k^n + \sum_{p=2}^{n+1}\binom{n+1}{p}k^{n+1-p} \\ &= \frac{(n+1)!}{0!(n+1)!}k^{n+1} + \frac{(n+1)!}{1!\,n!}k^n + \sum_{p=2}^{n+1}\binom{n+1}{p}k^{n+1-p} \\ &= k^{n+1} + (n+1)k^n + \sum_{p=2}^{n+1}\binom{n+1}{p}k^{n+1-p}.\end{aligned}$$

Aplicando a soma para k variando de 1 a $i-1$ em ambos os lados da equação acima, temos que

$$\sum_{k=1}^{i-1}(k+1)^{n+1} \;=\; \sum_{k=1}^{i-1}k^{n+1} + (n+1)\sum_{k=1}^{i-1}k^n + \sum_{k=1}^{i-1}\sum_{p=2}^{n+1}\binom{n+1}{p}k^{n+1-p}.$$

Observando que o termo $\sum_{k=1}^{i-1}\sum_{p=2}^{n+1}\binom{n+1}{p}k^{n+1-p} \;\geq\; 0$, podemos concluir que

$$(n+1)\sum_{k=1}^{i-1} k^n \;\leq\; \sum_{k=1}^{i-1}[(k+1)^{n+1}-k^{n+1}] \;\leq\; i^{n+1}-1 \;\leq\; i^{n+1},$$

o que implica que

$$\sum_{k=1}^{i-1} k^n \;\leq\; \frac{t_i^{n+1}}{(n+1)h_M^{n+1}}. \tag{1.3}$$

De (1.2) e (1.3), obtemos que

$$\sum_{k=0}^{i-1} t_k^n \;=\; h_M^n \sum_{k=1}^{i-1} k^n \;\leq\; h_M^n \frac{t_i^{n+1}}{(n+1)h_M^{n+1}} \;=\; \frac{t_i^{n+1}}{(n+1)h_M}. \tag{1.4}$$

Agora, usando (1.4) e observando que $t_{k_n} = k_n h_M$, concluímos que

$$\begin{aligned}
\sum_{k_1=0}^{i-1}\sum_{k_2=0}^{k_1-1}\cdots\sum_{k_n=0}^{k_{n-1}-1}\sum_{k_{n+1}=0}^{k_n-1} 1 \;&=\; \sum_{k_1=0}^{i-1}\sum_{k_2=0}^{k_1-1}\cdots\sum_{k_n=0}^{k_{n-1}-1} k_n \;=\; \sum_{k_1=0}^{i-1}\sum_{k_2=0}^{k_1-1}\cdots\sum_{k_n=0}^{k_{n-1}-1} \frac{t_{k_n}}{h_M} \\
&\leq\; \sum_{k_1=0}^{i-1}\sum_{k_2=0}^{k_1-1}\cdots\sum_{k_{n-1}=0}^{k_{n-2}-1} \frac{t_{k_{n-1}}^2}{2\,h_M^2} \;\leq\; \sum_{k_1=0}^{i-1}\sum_{k_2=0}^{k_1-1}\cdots\sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-3}-1} \frac{t_{k_{n-2}}^3}{3!\,h_M^3} \\
&\;\;\vdots \\
&\leq\; \sum_{k_1=0}^{i-1} \frac{t_{k_1}^n}{n!\,h_M^n} \;\leq\; \frac{1}{n!\,h_M^n}\,\frac{t_i^{n+1}}{(n+1)h_M} \;\leq\; \frac{t_i^{n+1}}{(n+1)!\,h_M^{n+1}},
\end{aligned}$$

e a demonstração está completa. ■

1.2 Equações diferenciais: teoria matemática e exemplos

Equações diferenciais podem ser usadas para modelar situações do mundo real, tendo um papel relevante na interação da matemática com outras ciências. Está presente nas ciências sociais ao modelar o crescimento econômico, bem como nas ciências biológicas ao modelar o crescimento de populações. Dois motivos para o uso dessas equações é que, primeiro, é possível fazer previsões do comportamento de processos naturais em diversas circunstâncias e, segundo, é relativamente mais simples fazer simulações ao variar parâmetros do modelo em um amplo intervalo do que em um ambiente experimental (BOYCE; DIPRIMA, 2015).

Iniciamos esta seção com o estudo de equações diferenciais ordinárias (EDO) dando ênfase ao Teorema de Picard e sua demonstração, pois este teorema adicionado de algumas hipóteses nos permite demonstrar a existência e unicidade de soluções de equações diferenciais com retardamento (EDR) e, consequentemente, construir um método numérico simples e intuitivo para aproximar soluções.

1.2.1 Equações diferenciais ordinárias

Considere o Problema de Valor Inicial (PVI)

$$\begin{cases} x'(t) &= f(t, x(t)), \quad t \in [0, a], \\ x(0) &= x_0, \end{cases} \tag{1.5}$$

onde $f \in C([0, a] \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$.

Definição 1.11 *(HALE, 1980) Uma função $x \in C([0, a]; \mathbb{R})$ é dita solução de (1.5) se $x \in C^1([0, a]; \mathbb{R})$, $x(0) = x_0$ e $x'(t) = f(t, x(t))$ para todo $t \in [0, a]$.*

Lema 1.12 *(HALE, 1980) Uma função $x \in C([0, a]; \mathbb{R})$ é solução de (1.5) se, e somente se, $x(\cdot)$ é solução da equação integral*

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s))ds, \quad t \in [0, a].$$

No seguinte teorema adaptamos o famoso método das iteradas de Picard que nos permite obter a existência e unicidade de soluções do Problema (1.5).

Teorema 1.13 (Teorema de Picard) *(BOYCE; DIPRIMA, 2015) Suponha que $f(\cdot)$ seja Lipschitz com constante de Lipschitz L_f e que $f(\cdot)$ seja limitada. Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequência de funções em $C([0, a]; \mathbb{R})$ definida por $u_0(t) = x_0$ para $t \in [0, a]$ e*

$$u_{n+1}(t) = x_0 + \int_0^t f(s, u_n(s))\, ds, \quad \text{para } t \in [0, a].$$

Então, a sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente em $[0, a]$ para uma solução $x \in C([0, a]; \mathbb{R})$ do Problema (1.5). Mais ainda, $x(\cdot)$ é a única solução de (1.5).

Prova: Para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos reescrever $u_n(\cdot)$ da seguinte forma

$$u_n(t) \;=\; x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} [u_{i+1}(t) - u_i(t)], \quad t \in [0, a]. \tag{1.6}$$

Como a função $f(\cdot)$ é limitada, definimos $M_f = \sup\{|f(t, x)| : (t, x) \in [0, a] \times \mathbb{R}\}$. Além disso, notamos que

$$\begin{aligned} |u_{n+1}(t)| &\leq |x_0| + \int_0^t |f(s, u_n(s))|\, ds \\ &\leq |x_0| + M_f\, a, \end{aligned}$$

o que prova que a sequência $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é limitada uniformemente em $C([0, a]; \mathbb{R})$.

Mostramos a seguir que a série $\sum_{i=0}^{n-1} [u_{i+1}(\cdot) - u_i(\cdot)]$ é convergente em $C([0,a];\mathbb{R})$. Para começar, observamos que

$$|u_{n+1}(t) - u_n(t)| \;\leq\; L_f \int_0^t |u_n(s) - u_{n-1}(s)|\, ds, \quad n \in \mathbb{N},\; t \in [0,a]. \tag{1.7}$$

De (1.7), temos que

$$\begin{aligned}
|u_{n+1}(t) - u_n(t)| \;&\leq\; L_f^2 \int_0^t \int_0^s |u_{n-1}(s_1) - u_{n-2}(s_1)|\, ds_1\, ds \\
&\leq\; L_f^3 \int_0^t \int_0^s \int_0^{s_1} |u_{n-2}(s_2) - u_{n-3}(s_2)|\, ds_2\, ds_1\, ds \\
&\;\;\vdots \\
&\leq\; L_f^n \int_0^t \int_0^s \cdots \int_0^{s_{n-2}} |u_1(s_{n-1}) - u_0(s_{n-1})|\, ds_{n-1} \cdots ds_1\, ds \\
&\leq\; L_f^n \int_0^t \int_0^s \cdots \int_0^{s_{n-2}} \int_0^{s_{n-1}} |f(s_n, u_n(s_n))|\, ds_n\, ds_{n-1} \cdots ds_1\, ds \\
&\leq\; L_f^n\, M_f \int_0^t \int_0^s \cdots \int_0^{s_{n-2}} \int_0^{s_{n-1}} ds_n\, ds_{n-1} \cdots ds_1\, ds \\
&\leq\; L_f^n\, M_f \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \;\leq\; M_f \frac{L_f^n\, a^{n+1}}{(n+1)!},
\end{aligned} \tag{1.8}$$

de onde obtemos que

$$\sum_{i=0}^{n-1} |u_{i+1}(t) - u_i(t)| \;\leq\; \sum_{i=0}^{\infty} |u_{i+1}(t) - u_i(t)| \;\leq\; \sum_{i=0}^{\infty} M_f \frac{(L_f\, a)^i}{i!} \;\leq\; M_f e^{L_f\, a}.$$

Pelo teste M de Weierstrass, a série $\sum_{i=0}^{\infty} [u_{i+1}(t) - u_i(t)]$ converge uniformemente para $t \in [0,a]$ para alguma função $\psi \in C([0,a];\mathbb{R})$. Logo, aplicando o limite em (1.6), temos que

$$\lim_{n\to\infty} u_n(t) \;=\; x_0 + \sum_{i=0}^{\infty} [u_{i+1}(t) - u_i(t)] \;=\; x_0 + \psi(t) \;\equiv\; x(t),$$

de onde obtemos que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para uma função $x \in C([0,a];\mathbb{R})$. Mais ainda, usando o Teorema da Convergência Dominada, Teorema 1.3, e o fato de que as funções $u_n(\cdot)$ são limitadas, temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} u_{n+1}(t) \;&=\; x_0 + \lim_{n\to\infty} \int_0^t f(s, u_n(s))\, ds \\
&=\; x_0 + \int_0^t f(s, \lim_{n\to\infty} u_n(s))\, ds,
\end{aligned}$$

de onde obtemos que

$$x(t) \;=\; x_0 + \int_0^t f(s, x(s))\, ds.$$

Pelo Lema 1.12, a sequência de funções $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para uma solução $x \in C([0,a];\mathbb{R})$ do PVI (1.5).

Para finalizar, provamos a unicidade de $x(\cdot)$. Suponha que $\bar{x} \in C([0,a];\mathbb{R})$ seja solução de (1.5). Neste caso, para $t \in [0,a]$ temos que

$$\begin{aligned} |x(t) - \bar{x}(t)| &= \Big| \int_0^t f(s,x(s))\,ds - \int_0^t f(s,\bar{x}(s))\,ds \Big| \\ &\leq \int_0^t |f(s,x(s)) - f(s,\bar{x}(s))|\,ds \\ &\leq L_f \int_0^t |x(s) - \bar{x}(s)|\,ds. \end{aligned}$$

Tomando a norma do supremo em ambos os lados, temos que

$$\|x - \bar{x}\|_{C([0,t];\mathbb{R})} \leq L_f \int_0^t \|x - \bar{x}\|_{C([0,s];\mathbb{R})}\,ds,$$

e pelo Lema de Gronwall 1.4, segue que $x(t) = \bar{x}(t)$, o que conclui a demonstração. ■

Observamos que se $f(\cdot)$ não for limitada, podemos trabalhar de maneira similar e teremos resultados de existência de solução em um intervalo $[0,b]$, com $0 < b \leq a$.

1.2.2 Equações diferenciais com retardamento

O PVI (1.5) pode ser usado, por exemplo, para modelar o crescimento populacional em que $x'(t)$ é a variação da população em um determinado tempo e $f(t,x(t))$ é uma função que depende deste tempo e do tamanho da população no mesmo instante. Embora seja desejável encaixar a maioria dos problemas reais nas condições do PVI (1.5), o qual já tem uma teoria bem fundamentada de existência e unicidade de solução, isso nem sempre é possível, pois assumir que a taxa de variação do estado em cada instante t depende somente do que está acontecendo naquele momento pode ser inconsistente com a realidade.

Como um exemplo simples e atual, um investidor decide investir ou não em uma determinada ação avaliando o histórico de informações passadas da empresa, a qual impacta diretamente nos preços das ações com o passar do tempo, ou seja, ele precisa ter acesso a este período de informações e analisar se o risco vale a pena. Para modelar um problema como este, fazemos uso de equações diferenciais com retardamento.

A seguir, estudamos os três casos mais famosos de equações diferenciais com retardamento, sendo eles retardamento discreto, contínuo e dependendo do estado.

1.2.2.1 Equações com retardamento discreto

Iniciamos este estudo com um exemplo do cotidiano de uma pessoa tentando regular a temperatura da água durante o banho.

Exemplo 1.14 *(KOLMANOVSKII; MYSHKIS, 1999) Uma pessoa gostaria de tomar banho com a temperatura da água igual a T_d. Esta temperatura está relacionada com a temperatura atual do corpo da pessoa, no sentido de que se ela praticou esportes desejaria uma água mais fria e se está nevando desejaria uma água mais quente. Em outras palavras, a taxa de rotação do registro para mais quente ou mais frio é proporcional à temperatura T_d desejada, com coeficiente k.*

Assumindo que a variação ΔT da temperatura da água seja proporcional à variação $\Delta\alpha$ do ângulo rotacionado do registro, com coeficiente K, que $T_m(t)$ é a temperatura da água na saída do chuveiro no instante t e que h é o tempo constante do percurso da água entre sair do chuveiro e atingir a pessoa, podemos concluir que no instante t a pessoa sente a temperatura da água que saiu do chuveiro no instante $t-h$.

Com isso, é possível encontrar a equação diferencial da variação da temperatura da água na saída do chuveiro $T_m'(t) = -K\,k[T_m(t-h) - T_d]$, a qual depende da temperatura da água em um tempo passado, neste caso a quantidade discreta de menos h unidades de tempo.

Considere o problema de equações diferenciais com retardamento discreto da forma

$$\begin{cases} x'(t) &= f(t, x(t-r)), \quad t \in [0,a], \\ x(t) &= \varphi(t), \quad t \in [-r, 0], \end{cases} \tag{1.9}$$

onde $f \in C([0,a] \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$, $\varphi \in C([-r,0]; \mathbb{R})$ e $r > 0$.

Definição 1.15 *Uma função $x \in C([-p,a]; \mathbb{R})$ é dita solução de (1.9) se $x \in C^1([0,a]; \mathbb{R})$, $x = \varphi$ em $[-r, 0]$ e $x'(t) = f(t, x(t-r))$ para todo $t \in [0,a]$.*

Agora, apresentamos uma técnica de resolução conhecida como Método do Passo-a-Passo, presente no Livro (ONUCHIC, 1971).

Para determinar a solução $x(\cdot)$ do problema (1.9), vamos dividir o intervalo $[-r,a]$ em intervalos da forma $[(n-1)r, nr]$ com $n \in \mathbb{N}$ e supor, por simplicidade, que $mr = a$, para algum $m \in \mathbb{N}$.

Quando $t \in [0,r]$ o argumento $t - r \in [-r, 0]$. Isso nos permite definir a solução $x_1(\cdot)$ que satisfaz o problema

$$\begin{cases} x_1'(t) &= f(t, \varphi(t-r)), \quad t \in [0,r], \\ x_1(0) &= \varphi(0). \end{cases}$$

Portanto,

$$x_1(t) \;=\; \varphi(0) + \int_0^t f(\tau, \varphi(\tau - r))\, d\tau, \quad \text{para } t \in [0,r].$$

Quando $t \in [r, 2r]$ o argumento $t - r \in [0, r]$. Da mesma forma, definimos a solução $x_2(\cdot)$ que satisfaz o problema

$$\begin{cases} x_2'(t) &= f(t, x_1(t-r)), \quad t \in [r, 2r], \\ x_2(r) &= x_1(r). \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} x_2(t) &= x_1(r) + \int_r^t f(\tau, x_1(\tau - r))\, d\tau, \\ &= \varphi(0) + \int_0^r f(\tau, \varphi(\tau - r))\, d\tau + \int_r^t f(\tau, x_1(\tau - r))\, d\tau, \quad \text{para } t \in [r, 2r]. \end{aligned}$$

Supondo conhecida a solução em $[(n-2)r, (n-1)r]$, a qual definimos por $x_{n-1}(\cdot)$, conseguimos determinar a solução $x_n(\cdot)$ em $[(n-1)r, nr]$ que satisfaz o problema

$$\begin{cases} x_n'(t) &= f(t, x_{n-1}(t-r)), \quad t \in [(n-1)r, nr], \\ x_n((n-1)r) &= x_{n-1}((n-1)r). \end{cases}$$

Logo,

$$x_n(t) = x_{n-1}((n-1)r) + \int_{(n-1)r}^t f(\tau, x_{n-1}(\tau - r))\, d\tau, \quad \text{para } t \in [(n-1)r, nr].$$

Assim, escrevemos a solução $x(\cdot)$ em $[-r, a]$ do Problema (1.9) por

$$x(t) = \varphi(0) + \sum_{k=0}^{n-1} \int_{kr}^{(k+1)r} f(\tau, x_k(\tau - r))\, d\tau + \int_{(n-1)r}^t f(\tau, x_{n-1}(\tau - r))\, d\tau,$$

para $t \in [(n-1)r, nr]$, $n = 1, \ldots, m$ e definindo $\varphi = x_0$ em $[-r, 0]$.

Esse método nem sempre é simples de ser aplicado, principalmente se o retardo for de outra natureza. Nestes casos, uma alternativa é usar métodos numéricos para obter soluções aproximadas. Abordaremos esse assunto na Seção 1.3.

1.2.2.2 Equações com retardamento contínuo

Nesta parte, apresentamos alguns estudos básicos sobre a existência de soluções de equações diferenciais com retardamento. As definições e resultados seguintes são apresentadas no Livro (ONUCHIC, 1971) e na dissertação de mestrado (ESTEVAM, 2012).

Primeiro precisamos conhecer o espaço em que vamos trabalhar. Sejam $p < \infty$ e $0 < H$. Definimos o espaço $C_H = \{\psi \in C([-p, 0]; \mathbb{R}) : \|\psi\|_C < H\}$.

Definição 1.16 *Sejam $0 < a < \infty$, $x \in C([-p, a]; \mathbb{R})$ e $t \in [0, a)$. Definimos a função $x_t \in C([-p, 0]; \mathbb{R})$ como $x_t(\theta) = x(t + \theta)$ para $-p \leq \theta \leq 0$. A função $x_t(\cdot)$ é chamada história de $x(\cdot)$ no tempo t.*

Lema 1.17 *Se $x \in C([-p,a];\mathbb{R})$, então a função $F : [0,a] \to C([-p,0];\mathbb{R})$ dada por $F(t) = x_t$ é contínua.*

Prova: Como $x(\cdot)$ é contínua em $[-p,a]$, segue que $x(\cdot)$ é uniformemente contínua em $[-p,a]$. Assim, para $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|x(t) - x(s)| < \epsilon$ se $|t-s| < \delta$.

Do anterior, para $t, s \in [0,a]$ com $|t-s| < \delta$, vemos que

$$|x_t - x_s| \;<\; \sup_{\theta\in[-p,0]} |x_t(t+\theta) - x_s(s+\theta)| \;<\; \epsilon,$$

pois $|(t+\theta) - (s+\theta)| < \delta$ para todo $\theta \in [-p,0]$. ■

Definição 1.18 *Seja $f(t,\psi)$ uma aplicação de $[0,\infty) \times C_H$ em $\mathbb{R}$. A equação*

$$x'(t) \;=\; f(t, x_t) \tag{1.10}$$

é chamada de equação diferencial com retardamento (EDR).

Observamos que para $p = 0$ uma equação diferencial com retardamento se reduz a uma equação diferencial ordinária. A seguir, apresentamos alguns exemplos.

Exemplo 1.19 *A equação diferencial com retardo constante $x'(t) = g(t, x(t-r))$ pode ser reescrita como $x'(t) \;=\; f(t,x_t)$, definindo $f : [0,a] \times C([-r,0];\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ por $f(t,\psi) = g(t,\psi(-r))$.*

Exemplo 1.20 *A equação $x'(t) = g(t, x(t-\gamma(t,x(t))))$, onde $\gamma \in C([0,a]\times\mathbb{R};\mathbb{R})$ é uma classe de equações diferenciais com retardo dependendo do tempo e do estado. Esta equação pode ser reescrita como $x'(t) \;=\; f(t,x_t)$, com $f(t,\psi) = g(t,\psi(-\gamma(t,\psi(0))))$.*

Exemplo 1.21 *A equação integro-diferencial $x'(t) = \int_{-p}^{0} g(t,\theta,x(t+\theta))\,d\theta$, com $p > 0$, pode ser reescrita como $x'(t) \;=\; f(t,x_t)$, onde $f(t,\psi) = \int_{-p}^{0} g(t,\theta,\psi(\theta))\,d\theta$.*

Exemplo 1.22 *Além dos exemplos apresentados acima, Smith (2011) apresenta o conceito de retardo distribuído como*

$$\int_{t-r}^{t} x(s)g(t-s)\,ds \;=\; \int_{0}^{r} x(t-z)g(z)\,dz, \;\; 0 < r < \infty,$$

o qual reflete a média ponderada dos atrasos $x(t-z)$. Os termos com retardo distribuídos podem contribuir para uma modelagem mais realista para certos problemas, pois usam uma densidade de distribuição para atribuir pesos aos eventos mais importantes no passado. Essa densidade de distribuição $g(\cdot)$ é conhecida como Kernel, ou núcleo, e muitos artigos usam a distribuição Erlang [1] para fazer suas estimações, como no trabalho de Fanti e Manfredi (2003).

[1] A função de densidade de probabilidade é dada por $g(x) = Erlang_{k,\beta}(x) = \frac{\beta^k x^{k-1} e^{-\beta x}}{(k-1)!}$, para $x, \beta \geq 0$.

A Definição 1.18 nos motiva a estudar problemas da forma

$$\begin{cases} x'(t) &= f(t, x_t), \quad t \in [0, a], \\ x(t) &= \varphi(t), \quad t \in [-p, 0], \end{cases} \tag{1.11}$$

onde $f \in C([0, a] \times C_H; \mathbb{R})$ e $\varphi \in C_H$.

Definição 1.23 *Uma função $x \in C([-p, a]; \mathbb{R})$ é dita ser solução de* (1.11) *se $x \in C^1([0, a); \mathbb{R})$, $x = \varphi$ em $[-p, 0]$ e $x'(t) = f(t, x_t)$ para todo $t \in [0, a]$.*

Lema 1.24 *Uma função $x \in C([-p, a]; \mathbb{R})$ é solução do Problema* (1.11) *se, e somente se, $x = \varphi$ em $[-p, 0]$ e $x(\cdot)$ é solução da equação integral*

$$x(t) \;=\; \varphi(0) + \int_0^t f(s, x_s)\, ds, \quad t \in [0, a]. \tag{1.12}$$

Prova: Suponha que $x(\cdot)$ seja solução de (1.11). Integrando a equação diferencial de (1.11) entre 0 e t, temos que

$$x(t) - x(0) \;=\; \int_0^t f(s, x_s)\, ds,$$

o que implica que

$$x(t) \;=\; \varphi(0) + \int_0^t f(s, x_s)\, ds,$$

para todo $t \in [0, a]$ e $x = \varphi$ em $[-p, 0]$.

Suponha agora que $x(\cdot)$ seja solução de (1.12). Então, pela continuidade da função $f(\cdot)$ e da $x(\cdot)$ podemos derivar ambos os lados em relação a t. Aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos que

$$x'(t) \;=\; \frac{d}{dt} \int_0^t f(s, x_s)\, ds \;=\; f(t, x_t),$$

para todo $t \in [0, a]$ e $x = \varphi$ em $[-p, 0]$, o que completa a demonstração. ■

No próximo teorema, usamos o Teorema do Ponto Fixo de Banach, Teorema 1.5, para provar a existência e unicidade de soluções para o Problema (1.11) e para simplificar os cálculos escrevemos $\|\cdot\|_C$ no lugar de $\|\cdot\|_{C([-p,b];\mathbb{R})}$.

Teorema 1.25 (Existência e Unicidade de Soluções) *Se $f \in C([0, a] \times C_H; \mathbb{R})$ é Lipschitz, então existe $0 < b \leq a$ e uma única solução $x \in C([-p, b]; \mathbb{R})$ do problema* (1.11).

Prova: Seja $H_1 > \|\varphi\|_C + bL_f H_1 + b \sup_{\tau \in [0,b]} |f(\tau, 0)|$ e fixemos $b > 0$ de modo que $bL_f < 1$.

Seja $F(b) = \{u \in C([-p,b];\mathbb{R}) : \|u\|_{C([-p,b];\mathbb{R})} \leq H_1 \text{ e } u = \varphi \text{ em } [-p,0]\}$, munido da métrica $d(u,v) = \|u(s) - v(s)\|_{C([-p,b];\mathbb{R})}$, onde escolhemos H_1 de modo que $\|\varphi\|_C < H_1 < H$.

Como $F(b) \subset C([-p,b];\mathbb{R})$ e $C([-p,b];\mathbb{R})$ é um conjunto completo, se mostrarmos que $F(b)$ é um conjunto fechado podemos concluir que $F(b)$ também é um conjunto completo. Para isso, seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $F(b)$, isto é, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C([-p,b];\mathbb{R})$, $\|x_n\|_C \leq H_1$ e $x_n = \varphi$ em $[-p,0]$ e suponha que $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Então,

$$\|x\|_C \;=\; \|\lim_{n\to\infty} x_n\|_C \;=\; \lim_{n\to\infty} \|x_n\|_C.$$

Como $\|x_n\|_C \leq H_1$ para qualquer n, então $\lim_{n\to\infty} \|x_n\|_C \leq H_1$. Portanto, $\|x\|_C \leq H_1$.

Para mostrar que $x(t) = \varphi(t)$ para todo $t \in [-p,0]$, notamos que

$$x(t) \;=\; \lim_{n\to\infty} x_n(t) \;=\; \lim_{n\to\infty} \varphi(t) \;=\; \varphi(t).$$

Com isso, temos que $x \in F(b)$. Logo, $F(b)$ é um conjunto fechado.

Definimos agora a aplicação $T : F(b) \to C([-p,b];\mathbb{R})$ que a cada $x \in F(b)$ associa uma função $Tx : [-p,b] \to \mathbb{R}$ como

$$\begin{cases} (Tx)(t) &= \varphi(0) + \displaystyle\int_0^t f(s,x_s)\,ds, \quad t \in [0,b], \\ (Tx)(t) &= \varphi(t), \quad t \in [-p,0]. \end{cases}$$

No que segue da prova, mostramos que $F(b)$ é um espaço completo e que $T(\cdot)$ é uma contração em $F(b)$. Para $t \in [0,b]$, temos que

$$\begin{aligned} |(Tx)(t)| &\leq |\varphi(0)| + \int_0^t |f(s,x_s)|\,ds \;\leq\; |\varphi(0)| + \int_0^b |f(s,x_s)|\,ds \\ &\leq \|\varphi\|_C + \int_0^b (|f(s,x_s) - f(s,0)| + |f(s,0)|)\,ds \\ &\leq \|\varphi\|_C + L_f \int_0^b \|x_s\|\,ds + b \sup_{\tau\in[0,b]} |f(\tau,0)| \\ &\leq \|\varphi\|_C + bL_f H_1 + b \sup_{\tau\in[0,b]} |f(\tau,0)|. \end{aligned}$$

Assim, $\|Tx\|_C \leq H_1$ para todo $t \in [0,b]$. E como $\|(Tx)\|_C = \|\varphi\|_C \leq H_1$ para todo $t \in [-p,0]$, segue que $Tx \in F(b)$, o que prova que $T(F(b)) \subset F(b)$.

Por outro lado, para $x, y \in F(b)$ e $t \in [0,b]$, vemos que

$$\begin{aligned} |(Tx)(t) - (Ty)(t)| &\leq \int_0^t |f(s,x_s) - f(s,y_s)|\,ds \\ &\leq L_f \int_0^b \|x_s - y_s\|_C\,ds \\ &\leq L_f \int_0^b \sup_{t\in[-p,b]} |x(t) - y(t)|\,ds \\ &\leq bL_f \|x - y\|_{C([-p,b];\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

o que implica que

$$\|Tx - Ty\|_{C([-p,b];\mathbb{R})} \;\leq\; bL_f\|x - y\|_{C([-p,b];\mathbb{R})}. \tag{1.13}$$

Como $bL_f < 1$, obtemos de (1.13) que $T(\cdot)$ é uma contração em $F(b)$ e que possui um único ponto fixo $x \in F(b)$. A função $x(\cdot)$ é a única solução do Problema (1.12) em $[-p, b]$, e pelo Lema 1.24 implica que $x(\cdot)$ é a única solução do Problema (1.11) em $[-p, b]$. ■

1.2.2.3 Equações com retardamento dependendo do estado

Até agora, estudamos duas maneiras de demonstração de existência e unicidade de soluções. A primeira pelo método das iteradas de Picard, Teorema 1.13, no caso de uma EDO e a segunda usando o Teorema do Ponto Fixo de Banach, Teorema 1.5, no caso de EDR. No que segue, propomos o estudo de existência e unicidade para um problema com retardo dependendo do estado adaptando o método das iteradas de Picard.

Considere o problema

$$\begin{cases} x'(t) &= f(t, x(\sigma(t, x(t)))), \quad t \in [0, a], \\ x(t) &= \varphi(t), \;\; t \in [-p, 0], \end{cases} \tag{1.14}$$

onde $f \in C([0, a] \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$, $\sigma \in C([0, a] \times \mathbb{R}; [-p, a])$ e $\varphi \in C([-p, 0]; \mathbb{R})$.

Definição 1.26 *Uma função $x \in C([-p, a]; \mathbb{R})$ é dita solução de* (1.14) *se $x \in C^1([0, a]; \mathbb{R})$, $x = \varphi$ em $[-p, 0]$ e $x'(t) = f(t, x(\sigma(t, x(t))))$ para todo $t \in [0, a]$.*

Lema 1.27 *Uma função $x \in C([-p, a]; \mathbb{R})$ é solução do Problema* (1.14) *se, e somente se, $x = \varphi$ em $[-p, 0]$ e $x(\cdot)$ é solução da equação integral*

$$x(t) \;=\; \varphi(0) + \int_0^t f(s, x(\sigma(s, x(s)))) \, ds, \;\; t \in [0, a]. \tag{1.15}$$

Prova: A prova é similar a do Lema 1.24. ■

O estudo da existência de soluções Lipschitz é determinado por questões relacionadas a teoria de equações com retardo dependendo do estado. Em relação a isto, notamos que as funções da forma $u \to u(\sigma(\cdot, u(\cdot)))$ não são do tipo Lipschitz no espaço usual das funções contínuas, pois os argumentos nos termos $u(\sigma(t, u(t)))$ e $v(\sigma(t, v(t)))$ podem ser diferentes. Isso não permite o uso do princípio da contração, o que tem importantes implicações na teoria de equações com retardo dependendo do estado. Para desenvolver nossos estudos sobre existência e unicidade de soluções, trabalhamos com funções do tipo Lipschitz, que satisfazem as condições do Lema 1.6.

Portanto, no próximo resultado usamos o método das iteradas Picard para estabelecer a existência e unicidade de (1.14). Neste caso, a aplicação do método é mais complexa do que na prova do Teorema 1.13, pois cada uma das componentes das iteradas de Picard deve ser Lipschitz e temos que provar que a sequência converge para uma função Lipschitz.

Teorema 1.28 *Suponha que as funções $f(\cdot)$, $\sigma(\cdot)$ e $\varphi(\cdot)$ são Lipschitz, com constantes de Lipschitz L_f, L_σ e L_φ respectivamente e que $f(\cdot)$ seja limitada. Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequência de funções em $C([-p,a];\mathbb{R})$ definida por $u_n = \varphi$ em $[-p,0]$ e $n \in \mathbb{N}$, $u_0(t) = \varphi(0)$ para $t \in [0,a]$ e*

$$u_{n+1}(t) = \varphi(0) + \int_0^t f(s, u_n(\sigma(s, u_n(s)))) \, ds, \quad \textit{para } t \in [0,a] \textit{ e } n \in \mathbb{N}.$$

Então, a sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente em $[-p,a]$ para uma solução $x \in C_{Lip}([-p,a];\mathbb{R})$ do problema (1.14). Mais ainda, $x(\cdot)$ é a única solução em $[-p,a]$.

Prova: Inicialmente, provamos que as funções $u_n(\cdot)$ são uniformemente Lipschitz. Para isto, introduzimos a constante $M_f = \sup\{|f(t,x)| : \ (t,x) \in [-p,a] \times \mathbb{R}\}$ e consideramos três casos.

1. Para t, $r \in [0,a]$ com $r < t$, temos que

$$\begin{aligned} |u_{n+1}(t) - u_{n+1}(r)| &= \Big| \int_0^t f(s, u_n(\sigma(s, u_n(s)))) \, ds - \int_0^r f(s, u_n(\sigma(s, u_n(s)))) \, ds \Big| \\ &\leq \int_r^t |f(s, u_n(\sigma(s, u_n(s))))| \, ds \\ &\leq M_f(t-r). \end{aligned}$$

2. Para $r \in [-p,0]$ e $t \in [0,a]$, temos que

$$\begin{aligned} |u_{n+1}(t) - u_{n+1}(r)| &= \Big|\varphi(0) + \int_0^t f(s, u_n(\sigma(s, u_n(s)))) \, ds - \varphi(r)\Big| \\ &\leq \Big| \int_0^t f(s, u_n(\sigma(s, u_n(s)))) \, ds \Big| + |\varphi(0) - \varphi(r)| \\ &\leq M_f \, t + L_\varphi(-r) \\ &\leq (M_f + L_\varphi)(t-r). \end{aligned}$$

3. Para t, $r \in [-p,0]$ com $r < t$, temos que

$$|u_{n+1}(t) - u_{n+1}(r)| \ = \ |\varphi(t) - \varphi(r)| \ \leq \ L_\varphi(t-r).$$

Com isso, segue que cada função $u_n(\cdot)$ é Lipschitz com constante de Lipschitz $M_2 = M_f + L_\varphi$.

Agora introduzimos as funções $z_n, \ Z_n \in C([-p,a];\mathbb{R})$, dadas por $z_n(t) = Z_n(t) = 0$ para $t \in [-p,0]$, $z_n(t) = |u_{n+1}(t) - u_n(t)|$ e $Z_n(t) = \sup_{s\in[0,t]} z_n(s)$ para $t \in [0,a]$. Além do anterior, considerando a prova do Teorema 1.13, reescrevemos cada função $u_n(\cdot)$ na forma

$$u_n(t) = \varphi(0) + \sum_{m=0}^{n-1} [u_{m+1}(t) - u_m(t)], \quad t \in [0,a].$$

No que segue, provamos que $\sum_{m=0}^{n-1}[u_{m+1}(\cdot) - u_m(\cdot)]$ é convergente em $C([-p,a];\mathbb{R})$. Usando o Lema 1.6, para $t \in [0,a]$ temos que

$$\begin{aligned}
|z_{n+1}(t)| &= |u_{n+2}(t) - u_{n+1}(t)| \\
&= \Big| \int_0^t f(s, u_{n+1}(\sigma(s, u_{n+1}(s)))) \, ds - \int_0^t f(s, u_n(\sigma(s, u_n(s)))) \, ds \Big| \\
&\leq \int_0^t |f(s, u_{n+1}(\sigma(s, u_{n+1}(s)))) - f(s, u_n(\sigma(s, u_n(s))))| \, ds \\
&\leq L_f \int_0^t |u_{n+1}(\sigma(s, u_{n+1}(s))) - u_n(\sigma(s, u_n(s)))| \, ds \\
&\leq L_f(1 + M_2 L_\sigma) \int_0^t \sup_{\tau \in [0,s]} |u_{n+1}(\tau) - u_n(\tau)| \, ds \\
&\leq L_f(1 + M_2 L_\sigma) \int_0^t Z_n(s) \, ds,
\end{aligned}$$

de onde obtemos que

$$Z_{n+1}(t) \leq D \int_0^t Z_n(s) \, ds, \quad \forall t \in [0,a],$$

onde $D = L_f(1 + M_2 L_\sigma)$. Usando esta desigualdade, vemos que

$$\begin{aligned}
Z_{n+1}(t) &\leq D^2 \int_0^t \int_0^s Z_{n-1}(s_1) \, ds_1 \, ds \\
&\leq D^3 \int_0^t \int_0^s \int_0^{s_1} Z_{n-2}(s_2) \, ds_2 \, ds_1 \, ds \\
&\vdots \\
&\leq D^{n+1} \int_0^t \int_0^s \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_{n-1}} Z_0(s_n) \, ds_n \, ds_{n-1} \cdots ds_1 \, ds \\
&\leq Z_0(a) D^{n+1} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \\
&\leq Z_0(a) \frac{(D\,a)^{n+1}}{(n+1)!}.
\end{aligned}$$

Da desigualdade anterior e do teste M de Weierstrass, segue que a série $\sum_{n=0}^{\infty} Z_n(\cdot)$ é uniformemente convergente em $[0,a]$, o que por sua vez implica que a série $\sum_{n=0}^{\infty} z_n(\cdot)$ também é uniformemente convergente no intervalo $[0,a]$. Agora, notamos que

$$\lim_{n\to\infty} u_n(t) = \lim_{n\to\infty} \Big[\varphi(0) + \sum_{m=0}^{n-1} [u_{m+1}(t) - u_m(t)]\Big] = \varphi(0) + \sum_{m=0}^{\infty} [u_{m+1}(t) - u_m(t)],$$

o que implica que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para $t \in [0,a]$. Mais ainda, do Teorema da Convergência Dominada, Teorema 1.3, e o fato de que as funções $u_n(\cdot)$ são limitadas,

temos que

$$\begin{aligned} x(t) &= \lim_{n\to\infty} u_{n+1}(t) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\varphi(0) + \int_0^t f(s, u_n(\sigma(s, u_n(s)))) \, ds\right] \\ &= \varphi(0) + \int_0^t f(s, \lim_{n\to\infty} u_n(\sigma(s, \lim_{n\to\infty} u_n(s)))) \, ds \\ &= \varphi(0) + \int_0^t f(s, x(\sigma(s, x(s)))) \, ds \end{aligned}$$

o que prova que $x(\cdot)$ é uma solução da equação (1.15), e, portanto, é solução do Problema (1.14).

Para finalizar, provamos que $x(\cdot)$ é Lipschitz e que $x(\cdot)$ é a única solução em $[-p, a]$. Para $t, s \in [0, a]$ vemos que

$$|x(t) - x(s)| \;=\; \lim_{n\to\infty} |u_n(t) - u_n(s)| \;\leq\; \lim_{n\to\infty} M_2 \, |t - s| \;=\; M_2 \, |t - s|,$$

o que prova que $x(\cdot)$ é Lipschitz.

Suponha agora que $\bar{x}(\cdot)$ seja solução em $[-p, a]$. Usando o Lema 1.6, para $t \in [0, a]$ vemos que

$$\begin{aligned} |x(t) - \bar{x}(t)| &\leq \int_0^t |f(s, x(\sigma(s, x(s)))) - f(s, \bar{x}(\sigma(s, \bar{x}(s))))| \, ds \\ &\leq L_f \int_0^t |x(\sigma(s, x(s))) - \bar{x}(\sigma(s, \bar{x}(s)))| \, ds \\ &\leq L_f(1 + L_\sigma M_2) \int_0^t \|x - \bar{x}\|_{C([-p,s];\mathbb{R})} \, ds, \end{aligned}$$

o que implica que

$$\|x - \bar{x}\|_{C([-p,t];\mathbb{R})} \;\leq\; L_f(1 + L_\sigma M_2) \int_0^t \|x - \bar{x}\|_{C([-p,s];\mathbb{R})} \, ds.$$

A unicidade segue agora da desigualdade de Gronwall, Lema 1.4. A prova está completa. ■

Como visto em EDO, observamos que se $f(\cdot)$ não for limitada, podemos trabalhar de maneira similar e teremos resultados de existência de solução em um intervalo $[0, b]$, com $0 < b \leq a$.

1.3 Aproximação numérica de soluções

Nesta seção iniciamos a discussão sobre um método numérico baseado na sequência das iteradas Picard para obter uma aproximação de solução de equações diferenciais. O objetivo é criar uma sequência de funções algébricas que possa ser implementada computacionalmente.

A seguir, deduzimos o método e provamos sua convergência para os casos de equações diferenciais ordinárias e equações diferenciais com retardamento dependendo do estado. Notamos que todos os resultados estabelecidos e demonstrados nesta seção foram baseados em resultados do Artigo (HERNANDEZ; ROLNIK; MANSO).

1.3.1 Para equações diferenciais ordinárias

Para iniciar esta subseção, usamos a malha como em (1.1), repetida aqui

$$\Delta_2 \;=\; \{t_i \in [0,a] \mid t_i = ih_M,\; i = 0,1,\ldots,M\}.$$

A maioria dos métodos numéricos para resolver o PVI (1.5) é obtida a partir da integração numérica da EDO de t_i a t_{i+1}, ou seja,

$$x(t_{i+1}) \;=\; x(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(s, x(s))\, ds,$$

seguida de uma aproximação para a integral. Uma aproximação bem simples, introduzida por Leonhard Euler $(1707 - 1783)$ é

$$x(t_{i+1}) \;\approx\; x(t_i) + h_M f(t_i, x(t_i)), \tag{1.16}$$

a partir da qual definimos a solução numérica $\{y_0, y_1, y_2, \ldots, y_M\}$ dada por

$$\begin{cases} y_0 &= x_0, \\ y_{i+1} &= y_i + h_M f(t_i, y_i), \quad i = 0,1,\ldots,M-1. \end{cases} \tag{1.17}$$

Para a construção de um método numérico a partir da sequência $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ definida no Teorema 1.13, para cada ponto $t_i \in \Delta_2$, reescrevemos $u_{j+1}(t_i)$ como

$$u_{j+1}(t_i) \;=\; x_0 + \int_0^{t_i} f(s, u_j(s))\, ds \;=\; x_0 + \sum_{k=0}^{i-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(s, u_j(s))\, ds,$$

e estimamos as integrais usando a mesma ideia do método de Euler, como

$$u_{j+1}(t_i) \;\approx\; x_0 + \sum_{k=0}^{i-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t_k, u_j(t_k))\, ds \;\approx\; x_0 + h_M \sum_{k=0}^{i-1} f(t_k, u_j(t_k)),$$

de onde constuímos a sequência $(\Phi_j^M)_{j\in\mathbb{N}}$ dada por $\Phi_0^M(t_i) = x_0$ e

$$\Phi_{j+1}^M(t_i) = x_0 + h \sum_{k=0}^{i-1} f(t_k, \Phi_j^M(t_k)), \tag{1.18}$$

para todo t_i, com $i = 0, 1, \cdots, M-1$ e $j \geq 0$.

Para construir uma sequência de funções contínuas, usamos a interpolação linear em cada dois pontos consecutivos obtidos em (1.18). Com isso, obtemos o segmento de

reta que une os pontos $(t_i, \Phi^M_{j+1}(t_i))$ e $(t_{i+1}, \Phi^M_{j+1}(t_{i+1}))$. Notamos que para $t \in [t_i, t_{i+1}]$ temos que

$$\Phi^M_{j+1}(t) - \Phi^M_{j+1}(t_i) = \frac{\Phi^M_{j+1}(t_{i+1}) - \Phi^M_{j+1}(t_i)}{t_{i+1} - t_i}(t - t_i).$$

Usando (1.18), vemos que

$$\begin{aligned} \Phi^M_{j+1}(t) &= \Phi^M_{j+1}(t_i) + \frac{h_M\, f(t_i, \Phi^M_j(t_i))}{h_M}(t - t_i) \\ &= x_0 + h_M \sum_{k=0}^{i-1} f(t_k, \Phi^M_j(t_k)) + f(t_i, \Phi^M_j(t_i))(t - t_i), \end{aligned}$$

de onde segue a próxima definição.

Definição 1.29 *Definimos a sequência de funções $(\Phi^M_j)_{j\in\mathbb{N}}$ em $C([0,a];\mathbb{R})$ por $\Phi^M_0(t) = x_0$ e*

$$\Phi^M_{j+1}(t) = x_0 + h_M \sum_{k=0}^{i-1} f(t_k, \Phi^M_j(t_k)) + f(t_i, \Phi^M_j(t_i))(t - t_i), \tag{1.19}$$

para todo $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, \cdots, M-1$ e $j \geq 0$. Chamamos esta definição de Método de Aproximação para EDO.

A partir dessa definição, nosso objetivo é estudar se o termo $\Phi^M_{j+1}(\cdot)$ está próximo o suficiente de $u_{j+1}(\cdot)$ quando $M \to \infty$ $(h \to 0)$ mesmo com o acúmulo de erro ao longo dos termos causado pela substituição das integrais pela soma e pelo uso de interpolação.

Antes de enunciar e demonstrar o teorema de convergência, vamos estudar algumas propriedades das sequências $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ e $(\Phi^M_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Para isso, vamos considerar que as mesmas hipóteses do Teorema 1.13 sejam válidas nesta subseção.

A fim de reduzir as notações nos cálculos, vamos escrever os termos da sequência $(\Phi^M_j)_{j\in\mathbb{N}}$ apenas por $\Phi_j(\cdot)$ e h_M apenas por h.

Notamos que para $t \in [t_i, t_{i+1}]$ temos que

$$\begin{aligned} |\Phi_{j+1}(t)| &\leq |x_0| + h \sum_{k=0}^{i-1} |f(t_k, \Phi_j(t_k))| + |f(t_i, \Phi_j(t_i))|(t - t_i) \\ &\leq |x_0| + M_f\, h\, \frac{t_i}{h} + M_f(t - t_i) \\ &\leq |x_0| + M_f\, a, \end{aligned}$$

o que prova que a sequência $(\Phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é limitada uniformemente em $C([t_i, t_{i+1}];\mathbb{R})$ e, consequentemente, em $C([0,a];\mathbb{R})$.

Além disso, temos que as funções $u_j(\cdot)$ são Lipschitz com constantes iguais a M_f, pois para $s_1, s_2 \in [0,a]$ com $s_1 > s_2$, temos que

$$|u_{j+1}(s_1) - u_{j+1}(s_2)| \;\leq\; \int_{s_2}^{s_1} |f(s, u_j(s))|\, ds \;\leq\; M_f(s_1 - s_2).$$

Com isso, podemos enunciar o seguinte teorema de convergência.

Teorema 1.30 *Sejam $f(\cdot)$ e $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ como no Teorema 1.13. Então $\|u_j - \Phi_j^M\|_{C([0,a];\mathbb{R})} \to 0$ quando $M \to \infty$ ($h \to 0$) para cada $j \geq 0$. Mais ainda, $(\Phi_j^M)_{j\in\mathbb{N}}$ converge para a solução $x(\cdot)$ do Problema (1.5) quando $j \to \infty$ e $M \to \infty$.*

Prova: De acordo com a Definição 1.9, definimos $r_j : [0,a] \to \mathbb{R}$ por $r_j(t) = |u_j(t) - \Phi_j(t)|$ como a função que mensura o erro para cada $t \in [0,a]$ na iteração j. Queremos mostrar que $r_j \to 0$ quando o tamanho do passo $h \to 0$.

Vamos iniciar a análise do erro para os pontos da malha. Notamos que

$$\begin{aligned} r_{j+1}(t_i) &= \Big|\sum_{k=0}^{i-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(s,u_j(s))\,ds - h\sum_{k=0}^{i-1} f(t_k,\Phi_j(t_k))\Big| \\ &= \Big|\sum_{k=0}^{i-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(s,u_j(s))\,ds - \sum_{k=0}^{i-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t_k,\Phi_j(t_k))\,ds\Big| \\ &\leq L_f\sum_{k=0}^{i-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}} (|s-t_k| + |u_j(s) - \Phi_j(t_k)|)\,ds. \end{aligned}$$

Para $s \in [t_k, t_{k+1}]$, podemos estimar

$$\begin{aligned} |u_j(s) - \Phi_j(t_k)| &\leq |u_j(s) - u_j(t_k)| + |u_j(t_k) - \Phi_j(t_k)| \\ &\leq M_f|s - t_k| + r_j(t_k) \\ &\leq M_f h + r_j(t_k). \end{aligned}$$

Então, obtemos que

$$r_{j+1}(t_i) \;\leq\; L_f\sum_{k=0}^{i-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \Big(h(1+M_f) + r_j(t_k)\Big)\,ds \;\leq\; L_f h\sum_{k=0}^{i-1} r_j(t_k) + h\theta_1,$$

em que $\theta_1 = L_f(1+M_f)a$. Com isso, encontramos uma limitação para o erro nos pontos da malha para cada $j \geq 0$. Mais ainda, como $h\,\theta_1$ é independente de j e de i, notamos que a seguinte relação é verdadeira

$$r_{j+1}(t_m) \;\leq\; h\,L_f\sum_{k=0}^{m-1} r_j(t_k) + h\,\theta_1 \;\leq\; h\,L_f\sum_{k=0}^{i-1} r_j(t_k) + h\,\theta_1, \quad \forall\, m \leq i.$$

Nesta próxima etapa da demonstração, queremos encontrar uma limitação para o erro quando t varia em intervalos da forma $[t_k, t_{k+1}]$. Da Definição 1.29 com $t \in [t_k, t_{k+1}]$, temos que

$$\Phi_{j+1}(t) \;=\; x_0 + h\sum_{k_1=0}^{k-1} f(t_{k_1},\Phi_j(t_{k_1})) + f(t_k,\Phi_j(t_k))(t - t_k),$$

e podemos reescrever a sequência das iteradas de Picard definida no Teorema 1.13 por

$$u_{j+1}(t) \;=\; x_0 + \sum_{k_1=0}^{k-1}\int_{t_{k_1}}^{t_{k_1+1}} f(s,u_j(s))\,ds + \int_{t_k}^{t} f(s,u_j(s))\,ds.$$

Para $t \in [t_k, t_{k+1}]$, temos que

$$\begin{aligned}
r_{j+1}(t) &\leq \Big|\sum_{k_1=0}^{k-1}\int_{t_{k_1}}^{t_{k_1+1}} f(s,u_j(s))\,ds - h\sum_{k_1=0}^{k-1} f(t_{k_1},\Phi_j(t_{k_1}))\Big| \\
&\quad + \int_{t_k}^{t} |f(s,u_j(s))|\,ds + |f(t_k,\Phi_j(t_k))|(t-t_k) \\
&\leq r_{j+1}(t_k) + (t-t_k)\Big(\|f(\cdot,u_j(\cdot))\|_C + \|f(\cdot,\Phi_j(\cdot))\|_C\Big) \\
&\leq L_f h\sum_{k_1=0}^{k-1} r_j(t_{k_1}) + h\theta_1 + 2hM_f,
\end{aligned}$$

onde $\theta_2 = \theta_1 + 2M_f$. Logo, para $k+1 < i$, vemos que

$$r_{j+1}(t) \leq L_f h\sum_{k_1=0}^{i-1} r_j(t_{k_1}) + h\,\theta_2.$$

Com isso e usando o Lema 1.10, temos que

$$\begin{aligned}
r_{j+1}(t) &\leq h\,L_f\sum_{k_1=0}^{i-1} r_j(t_{k_1}) + h\,\theta_2 \\
&\leq h\,L_f\sum_{k_1=0}^{i-1}\Big(h\,L_f\sum_{k_2=0}^{k_1-1} r_{j-1}(t_{k_2}) + h\,\theta_2\Big) + h\,\theta_2 \\
&\leq h^2\,L_f^2\sum_{k_1=0}^{i-1}\sum_{k_2=0}^{k_1-1} r_{j-1}(t_{k_2}) + h\,\theta_2[L_f t_i + 1] \\
&\leq h^3\,L_f^3\sum_{k_1=0}^{i-1}\sum_{k_2=0}^{k_1-1}\sum_{k_3=0}^{k_2-1} r_{j-2}(t_{k_3}) + h\,\theta_2\Big[L_f^2\frac{t_i^2}{2} + L_f t_i + 1\Big] \\
&\ \ \vdots \\
&\leq h^{j+1}\,L_f^{j+1}\sum_{k_1=0}^{i-1}\sum_{k_2=0}^{k_1-1}\sum_{k_3=0}^{k_2-1}\cdots\sum_{k_{j+1}=0}^{k_j-1} r_0(t_{k_{j+1}}) \\
&\quad + h\,\theta_2\Big[L_f^j\frac{t_i^j}{j!} + L_f^{j-1}\frac{t_i^{j-1}}{(j-1)!} + \cdots + L_f t_i + 1\Big].
\end{aligned}$$

Observamos que $r_0(t) = |\Phi_0(t) - u_0(t)| = |x_0 - x_0| = 0$ para todo $t \in [0,a]$. Assim,

$$r_{j+1}(t) \leq h\,\theta_2\sum_{p=0}^{j}\frac{[L_f t_i]^p}{p!} \leq h\,\theta_2\,e^{L_f t_i} \leq h\,\theta_2\,e^{L_f a}, \tag{1.20}$$

o que implica que $r_{j+1}(t) \to 0$ quando $h \to 0$, para todo $t \in [t_k, t_{k+1}]$. Como o limitante independe de k, temos que $r_{j+1}(t) \to 0$ para todo $t \in [0,a]$. Além disso, como a limitação independe de j, podemos concluir que $\Phi_j \to u_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Para demonstrar que o método numérico pode gerar uma solução convergente para a solução do Problema (1.5), podemos afirmar que dado $\epsilon > 0$ existem $j_\epsilon, M_\epsilon \in \mathbb{N}$ tais que $\|\Phi_j^M - x\|_{C([0,a];\mathbb{R})} < \epsilon$ para todo $M \geq M_\epsilon$ e todo $j \geq j_\epsilon$.

Notamos que, pela demonstração do Teorema 1.13 e pela desigualdade (1.8), conseguimos obter j_ϵ tal que $\|u_{j_\epsilon} - x\|_{C([0,a];\mathbb{R})} \leq \frac{\epsilon}{2}$. Já pela demonstração deste teorema e pela desigualdade (1.20), conseguimos calcular M_ϵ tal que $\|\Phi_{j_\epsilon}^{M_\epsilon} - u_{j_\epsilon}\|_{C([0,a];\mathbb{R})} \leq \frac{\epsilon}{2}$. Logo,

$$\|\Phi_{j_\epsilon}^{M_\epsilon} - x\|_{C([0,a];\mathbb{R})} \;\leq\; \|\Phi_{j_\epsilon}^{M_\epsilon} - u_{j_\epsilon}\|_{C([0,a];\mathbb{R})} + \|u_{j_\epsilon} - x\|_{C([0,a];\mathbb{R})} \;\leq\; \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \;\leq\; \epsilon.$$

Isso conclui a prova. ■

1.3.2 Para equações diferenciais com retardamento dependendo do estado

Para a construção de um método numérico a partir da sequência $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ definida no Teorema 1.28, tomamos os pontos discretos como em (1.1) e usamos o mesmo procedimento da subseção anterior. Para $t = t_i$, observamos que

$$\begin{aligned} u_{j+1}(t_i) &= \varphi(0) + \int_0^{t_i} f(s, u_j(\sigma(s, u_j(s)))) \, ds \\ &= \varphi(0) + \sum_{k=0}^{i-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(s, u_j(\sigma(s, u_j(s)))) \, ds \\ &\approx \varphi(0) + \sum_{k=0}^{i-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t_k, u_j(\sigma(t_k, u_j(t_k)))) \, ds, \end{aligned}$$

de onde obtemos

$$u_{j+1}(t_i) \;\approx\; \varphi(0) + h_M \sum_{k=0}^{i-1} f(t_k, u_j(\sigma(t_k, u_j(t_k)))), \quad \text{para } i = 0, 1, 2, \cdots, M.$$

Diferentemente do caso anterior, aqui não podemos definir $\Phi_j^M(\cdot)$ a partir da aproximação de $u_j(\cdot)$, pois $\sigma(t_k, u_j(t_k))$ pode não ser um ponto da malha. Por isso, precisamos encontrar uma aproximação para essas funções em todo o domínio $[0, a]$.

Usando a técnica de interpolação linear nos pontos $(t_i, u_{j+1}(t_i))$ e $(t_{i+1}, u_{j+1}(t_{i+1}))$ com $t \in [t_i, t_{i+1}]$, notamos que

$$\begin{aligned} \frac{u_{j+1}(t_{i+1}) - u_{j+1}(t_i)}{t_{i+1} - t_i} &\approx \frac{1}{h_M}\Bigg[h_M \sum_{k=0}^{i} f(t_k, u_j(\sigma(t_k, u_j(t_k)))) \\ &\qquad - h_M \sum_{k=0}^{i-1} f(t_k, u_j(\sigma(t_k, u_j(t_k)))) \Bigg] \\ &\approx f(t_i, u_j(\sigma(t_i, u_j(t_i)))). \end{aligned}$$

Substituindo na fórmula da equação da reta, vemos que

$$u_{j+1}(t) \;\approx\; \varphi(0) + h_M \sum_{k=0}^{i-1} f(t_k, u_j(\sigma(t_k, u_j(t_k)))) + (t - t_i)\, f(t_i, u_j(\sigma(t_i, u_j(t_i)))),$$

para $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, 2, \ldots, M-1$, de onde segue a próxima definição.

Definição 1.31 *Definimos a sequência de funções* $(\Phi_j^M)_{j\in\mathbb{N}}$ *em* $C([-p,a];\mathbb{R})$ *por* $\Phi_0^M = u_0$ *em* $[-p,a]$, $\Phi_{j+1}^M(t) = u_{j+1}(t)$ *para* $t \in [-p,0]$ *e* $j \geq 0$, *e*

$$\Phi_{j+1}^M(t) \;=\; \varphi(0) + h_M \sum_{k=0}^{i-1} f(t_k, \Phi_j^M(\sigma(t_k, \Phi_j^M(t_k)))) + (t - t_i)\, f(t_i, \Phi_j^M(\sigma(t_i, \Phi_j^M(t_i)))),$$

para $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, 2, \ldots, M-1$ *e* $j \geq 0$. *Chamamos esta definição de Método de aproximação para EDR.*

No que segue, consideramos que as hipóteses do Teorema 1.28 e das definições introduzidas durante a prova sejam válidas e notamos que as sequências $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ e $(\Phi_j^M)_{j\in\mathbb{N}}$ são limitadas em $C([-p,a];\mathbb{R})$ pela constante $\|\varphi\|_{C([-p,a];\mathbb{R})} + M_f\, a$ (os cálculos são semelhantes aos feitos para o caso de EDO).

Agora, introduzimos e provamos o teorema principal desta subseção. A fim de reduzir os cálculos, escrevemos $\Phi_j(\cdot)$ no lugar de $\Phi_j^M(\cdot)$, h no lugar de h_M e $\|\cdot\|_C$ no lugar de $\|\cdot\|_{C([-p,a];\mathbb{R})}$.

Teorema 1.32 *Sejam* $f(\cdot)$, $\sigma(\cdot)$ *e* $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *como no Teorema 1.28. Então* $\|u_j - \Phi_j^M\| \to 0$ *quando* $M \to \infty$ *(*$h \to 0$*) para cada* $j \geq 0$. *Mais ainda,* $(\Phi_j^M)_{j\in\mathbb{N}}$ *converge para a solução* $x(\cdot)$ *do Problema* (1.14) *quando* $j \to \infty$ *e* $M \to \infty$.

Prova: De acordo com a Definição 1.9, definimos as funções $r_j, R_j : [-p,a] \to \mathbb{R}$ dadas por $r_j = R_j = 0$ em $[-p,0]$, $r_j(t) = |u_j(t) - \Phi_j(t)|$ e $R_j(t) = \|r_j\|_{C([-p,t];\mathbb{R})}$ para $t \in [0,a]$. Da definição de $\Phi_0(\cdot)$ segue que $r_0 = R_0 = 0$ para todo $t \in [-p,a]$. Assim,

$$\begin{aligned} r_{j+1}(t_i) &\leq \sum_{k=0}^{i-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |f(s, u_j(\sigma(s, u_j(s)))) - f(t_k, \Phi_j(\sigma(t_k, \Phi_j(t_k))))|\, ds \\ &\leq L_f \sum_{k=0}^{i-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (|s - t_k| + |u_j(\sigma(s, u_j(s))) - \Phi_j(\sigma(t_k, \Phi_j(t_k)))|)\, ds. \end{aligned}$$

Notamos que, para $s \in [t_k, t_{k+1}]$ podemos estimar

$$\begin{aligned} &|u_j(\sigma(s, u_j(s))) - \Phi_j(\sigma(t_k, \Phi_j(t_k)))| \\ &\quad\leq |u_j(\sigma(s, u_j(s))) - u_j(\sigma(t_k, \Phi_j(t_k)))| + |u_j(\sigma(t_k, \Phi_j(t_k))) - \Phi_j(\sigma(t_k, \Phi_j(t_k)))| \\ &\quad\leq M_2 L_\sigma(|s - t_k| + |u_j(s) - \Phi_j(t_k)|) + r_j(\sigma(t_k, \Phi_j(t_k))) \\ &\quad\leq M_2 L_\sigma h + M_2 L_\sigma(|u_j(s) - u_j(t_k)| + |u_j(t_k) - \Phi_j(t_k)|) + R_j(\sigma(t_k, \Phi_j(t_k))) \\ &\quad\leq (M_2 L_\sigma + M_2^2 L_\sigma) h + M_2 L_\sigma r_j(t_k) + R_j(t_k) \\ &\quad\leq (M_2 L_\sigma + M_2^2 L_\sigma) h + (1 + M_2 L_\sigma) R_j(t_k). \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} r_{j+1}(t_i) &\leq L_f \sum_{k=0}^{i-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Big(h + (M_2 L_\sigma + M_2^2 L_\sigma)h + (1 + M_2 L_\sigma) R_j(t_k)\Big)\, ds \\ &\leq L_f(1 + M_2 L_\sigma + M_2^2 L_\sigma)ah + L_f(1 + M_2 L_\sigma)h \sum_{k=0}^{i-1} R_j(t_k) \\ &\leq Ch \sum_{k=0}^{i-1} R_j(t_k) + h\theta_1, \end{aligned}$$

onde $C = L_f(1 + M_2 L_\sigma)$ e $\theta_1 = L_f(1 + M_2 L_\sigma(1 + M_2))a$. Mais ainda, como $h\theta_1$ é independente de j e de i, é fácil ver que

$$r_{j+1}(t_m) \leq Ch \sum_{k=0}^{m-1} R_j(t_k) + h\theta_1 \leq Ch \sum_{k=0}^{i-1} R_j(t_k) + h\theta_1, \quad \forall\, m \leq i. \tag{1.21}$$

Agora, para $k + 1 < i$ e $t \in [t_k, t_{k+1}]$, temos que

$$\begin{aligned} r_{j+1}(t) &\leq r_{j+1}(t_k) + \int_{t_k}^{t} |f(s, u_j(\sigma(s, u_j(s))))|\, ds + (t - t_k)|f(t_k, \Phi_j(\sigma(t_k, \Phi_j(t_k))))| \\ &\leq r_{j+1}(t_i) + (t - t_k)(\|f(\cdot\,, u_j(\sigma(\cdot\,, u_j(\cdot))))\|_C + \|f(\cdot\,, \Phi_j(\sigma(\cdot\,, \Phi_j(\cdot))))\|_C) \\ &\leq Ch \sum_{k_1=0}^{i-1} R_j(t_{k_1}) + h\theta_1 + 2M_f h \\ &\leq Ch \sum_{k_1=0}^{i-1} R_j(t_{k_1}) + h\theta_2, \end{aligned} \tag{1.22}$$

onde $\theta_2 = \theta_1 + 2M_f$. De (1.21) e (1.22), temos que

$$R_{j+1}(t_i) = \sup_{t \in [-p, t_i]} r_{j+1}(t) \leq Ch \sum_{k_1=0}^{i-1} R_j(t_{k_1}) + h\theta_2.$$

Usando esta relação e o Lema 1.10, obtemos

$$\begin{aligned} R_{j+1}(t_i) &\leq Ch \sum_{k_1=0}^{i-1} R_j(t_{k_1}) + h\theta_2 \\ &\leq Ch \sum_{k_1=0}^{i-1} \Big(Ch \sum_{k_2=0}^{k_1-1} R_{j-1}(t_{k_2}) + h\theta_2\Big) + h\theta_2 \\ &\leq C^2 h^2 \sum_{k_1=0}^{i-1} \sum_{k_2=0}^{k_1-1} R_{j-1}(t_{k_2}) + h\theta_2\Big[Ct_i + 1\Big] \\ &\leq C^3 h^3 \sum_{k_1=0}^{i-1} \sum_{k_2=0}^{k_1-1} \sum_{k_3=0}^{k_2-1} R_{j-2}(t_{k_3}) + h\theta_2\Big[C^2 \frac{t_i^2}{2} + Ct_i + 1\Big]. \end{aligned}$$

Continuando desta forma, e lembrando que $R_0(t) \equiv 0$, temos que

$$R_{j+1}(t_i) \leq h\theta_2 \sum_{p=0}^{j} \frac{[Ct_i]^p}{p!} \leq h\theta_2 e^{Ca},$$

o que implica que $R_{j+1}(t_i) \to 0$ quando $h \to 0$, para todo $j \in \mathbb{N}$.

Além disso, dado $\epsilon > 0$ existem $j_\epsilon, M_\epsilon \in \mathbb{N}$ tais que $\|\Phi_j^M - x\|_{C([0,a];\mathbb{R})} < \epsilon$, para todo $M \geq M_\epsilon$ e todo $j \geq j_\epsilon$. ■

1.4 Modelo de crecimento econômico

O crescimento econômico busca responder perguntas chaves da macroeconomia como porque alguns países são mais ricos do que outros e porque a economia de alguns países se desenvolve rapidamente ou não, o que faz com que esse tema seja relevante e atual (WEIL, 2009).

Podemos analisar o desenvolvimento de um país ao longo da sua história ou comparar o crescimento econômico de diferentes países. Para isso, utilizamos o Produto Interno Bruto (PIB), o qual é a uma medida de valor de todos os bens e serviços produzidos no país em um ano. É conveniente usar o PIB neste caso, pois ele é uma medida aproximada do padrão de vida de um país mesmo que apresente algumas desvantagens como o fato de seu cálculo poder variar de país para país e não considerar muitos aspectos do bem-estar econômico em sua medição (WEIL, 2009).

Além disso, existe uma relação direta entre o crescimento econômico e o nível de renda de um país. Um país com alto e constante nível de crescimento terá um aumento considerável na renda e as diferenças nas taxas médias de crescimento entre países se traduzem, ao longo do tempo, em diferenças nos níveis relativos da renda deste país (WEIL, 2009).

Como um exemplo, vamos considerar dois países sendo um mais rico que o outro. Consideramos, como hipóteses, que eles têm praticamente a mesma população e que quanto mais capital por trabalhador maior é a quantidade de produtos produzidos. Para um país ser mais rico do que o outro, já temos indícios que a quantidade de capital por trabalhador é diferente entre esses países. A principal fonte dessa diferença é a quatidade poupada da renda que impacta na taxa de investimento em novas tecnologias, capitais físicos e capitais humanos (conhecimentos advindos de estudos e experiências passadas). Além disso, temos que considerar a produtividade total dos bens, que nada mais é do que a ação conjunta de níveis tecnológicos com a eficiência dos trabalhadores. Com isso, é possível indicar três possíveis fontes da probreza relativa de um país: menor taxa de investimento, tecnologia inferior e menor eficiência no trabalho (WEIL, 2009).

Assim, temos a macroeconomia como o campo de estudo das forças que influenciam a economia como um todo. Os modelos econômicos são usados como representações simplificadas da realidade e estabelecem a relação entre variáveis endógenas (as quais o modelo tenta explicar) e exógenas (as quais o modelo pressupõe como dadas), com o objetivo de estudar como as variáveis exógenas afetam as endógenas e como a variação de uma das variáveis econômicas afeta o modelo como um todo (JONES, 2000).

1.4.1 O modelo básico de Solow

O modelo de Solow foi pensado e estruturado para ilustrar a importância do capital físico na diferença dos níveis de renda per capita entre países. Para isso, ele foi modelado em torno de uma função de produção, a qual descreve como o trabalho e o capital se combinam para gerar o produto (WEIL, 2009).

A seguir veremos que, pelas propriedades da função de produção, é possível deduzir que o produto per capita é uma função apenas do capital per capita (o termo "per capita" siginifica "por cada indivíduo").

Antes de partirmos para as hipóteses e desenvolvimento do modelo de Solow, é interessante entender o que é o conceito de capital e porque ele é bastante relevante na teoria macroeconômica.

Capital é o nome que a economia deu para "ferramentas". São os objetos físicos que substituem o trabalho humano ou que ampliam a capacidade produtiva. Além das máquinas, o capital inclui fábricas, veículos, computadores, prédios, entre outros. Basicamente, a prática de qualquer trabalho requer o uso de algum capital e geralmente um trabalhador com mais capital produz mais do que um trabalhador com menos capital. Levando isso em consideração, as diferenças de capital por trabalhador entre países são consideradas como uma explicação inicial e natural para a diferença do PIB entre países (WEIL, 2009).

O capital possui quatro características principais: é produtivo, é produzido, pode ganhar algum retorno e se desgasta. A primeira característica é auto-explicativa. A segunda diz respeito a produção do capital, que está intrinsecamente relacionado ao investimento. A terceira é fácil explicar com um exemplo: os taxistas alugam um taxi e o salário no final do mês paga o aluguel e suas outras despesas. Por fim, o termo econômico para o processo de desgaste é depreciação. A depreciação acontecerá ao usar o capital ou pelo próprio tempo (por exemplo enferrujar ou aprodrecer) (WEIL, 2009).

Agora abordaremos as hipóteses do modelo básico de Solow. No que segue, t é uma variável que representa unidades de tempo. As hipóteses H.1 - H.7 são encontradas no Artigo (SOLOW, 1956). As hipóteses adicionais H.8 - H.11 podem ser encontradas nos Livros (WEIL, 2009) e (JONES, 2000).

H.1: Trata-se de uma economia com apenas um produto, cuja taxa de produção é $Y(\cdot)$. Em outras palavras, os países produzem e consomem um único bem, sendo conveniente pensar nesse produto como unidades do PIB de um país.

H.2: A economia é fechada (comércio com o exterior não é considerado), isso implica que a renda total da população é equivalente ao produto $Y(\cdot)$.

H.3: Parte do produto é consumido e o restante é poupando e investido. A fração do

produto poupado $s \in (0,1)$ é constante e exógena e a taxa de poupança é definida como $sY(\cdot)$.

H.4: O estoque de capital da população $K(\cdot)$ é definido como a acumulação de mercadorias.

H.5: A variação do estoque de capital $K'(\cdot)$ está diretamente relacionada com a taxa de poupança, definida por $K'(t) = sY(t)$.

H.6: O produto $Y(\cdot)$ é produzido por dois fatores de produção, o capital $K(\cdot)$ e o trabalho $L(\cdot)$, o que implica na função de produção $Y(t) = F(K(t), L(t))$.

H.7: A função de produção apresenta retornos constantes de escala, isto é, se os insumos são duplicados o produto também é duplicado. Matematicamente, dizemos que $F(\cdot)$ é uma função homogênea de grau 1, em que para qualquer constante μ a relação $F(\mu K(t), \mu L(t)) = \mu F(K(t), L(t))$ é satisfeita.

H.8: A variação do estoque de capital diminui com a depreciação do capital. A taxa de depreciação δ é constante e exógena. Assim $K'(t) = sY(t) - \delta K(t)$.

H.9: A quantidade de trabalhadores é dada pela expressão $L(t) = L_0\, e^{nt}$, em que L_0 é o número de trabalhadores no tempo $t = 0$ e n é a taxa de crescimento populacional. O parâmetro n é constante e exógeno ao modelo.

H.10: A função de produção exibe um produto marginal decrescente. Matematicamente, os produtos marginais do capital e do trabalho são calculados por $\frac{\partial F(K,L)}{\partial K}$ e $\frac{\partial F(K,L)}{\partial L}$ respectivamente ou, em termos de capital per capita, por $\frac{df(k)}{dk}$.

H.11: Não há melhorias na produtividade (inovação tecnológica e efetividade por parte do trabalhador não são considerados). Sendo assim, a função de produção permanece a mesma durante todo o tempo.

Pelas hipóteses acima, podemos encontrar uma função de produção $f(\cdot)$ expressa em termos de unidades de trabalho. Se definirmos $y(t) = \frac{Y(t)}{L(t)}$ como produto por trabalhador e $k(t) = \frac{K(t)}{L(t)}$ como capital por trabalhador, a função de produção se torna

$$y(t) \;=\; \frac{Y(t)}{L(t)} \;=\; F\left(\frac{K(t)}{L(t)}, \frac{L(t)}{L(t)}\right) \;=\; F\left(k(t), 1\right) \;=\; f(k(t)). \tag{1.23}$$

Para reescrever a equação de acumulação de capital $K'(t) = sY(t) - \delta K(t)$ em termos per capita, os macroeconomistas manipulam as funções $k(\cdot)$ e $L(\cdot)$ primeiro aplicando a função logaritmo e depois derivando a expressão em relação ao tempo. Para a função $k(t) = \frac{K(t)}{L(t)}$, vemos que

$$k(t) = \frac{K(t)}{L(t)} \;\Rightarrow\; \ln k(t) = \ln K(t) - \ln L(t) \;\Rightarrow\; \frac{k'(t)}{k(t)} = \frac{K'(t)}{K(t)} - \frac{L'(t)}{L(t)},$$

e para a função $L(t) = L_0\, e^{nt}$, vemos que

$$L(t) = L_0\, e^{nt} \;\Rightarrow\; \ln L(t) = \ln L_0 + nt \;\Rightarrow\; \frac{L'(t)}{L(t)} = n.$$

Usando as relações anteriores, temos que

$$\begin{aligned}
&\frac{k'(t)}{k(t)} = \frac{K'(t)}{K(t)} - n \;\Rightarrow\; K'(t) = \Big(\frac{k'(t)}{k(t)} + n\Big)K(t) \\
\Rightarrow\;& sY(t) - \delta K(t) = \Big(\frac{k'(t)}{k(t)} + n\Big)K(t) \;\Rightarrow\; s\frac{Y(t)}{K(t)} - \delta = \frac{k'(t)}{k(t)} + n \\
\Rightarrow\;& k'(t) = s\frac{y(t)}{k(t)}k(t) - (\delta + n)k(t) \\
\Rightarrow\;& k'(t) = sy(t) - (\delta + n)k(t). \qquad (1.24)
\end{aligned}$$

A equação (1.24) é chamada de acumulação de capital por trabalhador. Isso completa a dedução do modelo de Solow.

Um dos principais exemplos de função de produção é a do tipo Cobb-Douglas

$$Y(t) \;=\; F(K(t), L(t)) \;=\; K(t)^{\alpha}\, L(t)^{1-\alpha}, \qquad (1.25)$$

onde $\alpha \in (0, 1)$ é um parâmetro fixo. Substituindo em (1.23), temos que $y(t) = k^{\alpha}(t)$. Isso quer dizer que com mais capital por trabalhador as empresas geram mais produto por trabalhador e que estes retornos de capital por trabalhador são crescentes a taxas decrescentes, por causa do parâmetro α (JONES, 2000).

1.4.2 Modelo de Solow com população endógena

Esta subseção tem como objetivo apresentar a inclusão da taxa de crescimento populacional no modelo de Solow. Esse processo é conhecido como endogeneizar uma variável, a qual é pressuposta exógena anteriormente.

A relação malthusiana entre fertilidade e renda foi uma das motivações para que economistas como Luciano Fanti e Piero Manfredi propusessem o estudo do modelo de Solow com população endógena, desenvolvido no Artigo (FANTI; MANFREDI, 2003).

A Teoria Malthusiana relaciona a taxa de reprodução dos humanos com o nível de riqueza ou pobreza dada a quantidade limitada de recursos disponíveis, sendo a terra o principal recurso daquela época (1798). Se tem recursos em abundância, a tendência é que a taxa de natalidade seja alta até o ponto que os recursos se tornem escassos e toda a população empobreça. Essa pobreza limitaria o crescimento populacional e, eventualmente, a sociedade alcançaria um nível de renda compatível com a população (WEIL, 2009).

A variação do crescimento populacional está diretamente relacionada com a taxa de oferta de trabalho, por isso, com o intuito de estudar de forma mais realista a quantidade disponível de oferta de trabalho, é necessário levar em consideração os comportamentos demográficos passados devido ao intervalo de anos entre o nascimento e a entrada na força de trabalho dos indivíduos (FANTI; MANFREDI, 2003).

Para modelar essa ideia, os economistas Fanti e Manfredi (2003) usaram a teoria matemática de equações diferenciais com retardo distribuído e supuseram duas novas hipóteses ao modelo, sendo elas apresentadas a seguir.

H.12: A taxa de depreciação do capital δ é igual a zero.

H.13: A taxa da variação da oferta de trabalho n_s é endógena ao modelo e está relacionada à fertilidade passada, portanto, aos níveis de renda passados.

Pela hipótese H.12, a equação (1.24) se torna

$$k'(t) = sf(k(t)) - n_s k(t).$$

Se a taxa de variação da oferta de trabalho fosse escrita em função do nível atual de renda per capita, ela seria $n_s(t) = n_s(f(k(t)))$. Porém, pela hipótese H.13, Fanti e Manfredi (2003) interpretaram que a inclusão de um atraso distribuído no termo da renda modelaria de forma mais real a situação, chegando na equação integro-diferencial

$$k'(t) = sf(k(t)) - \left(\int_{-\infty}^{t} n_s(f(k(\tau)))g(t-\tau)\, d\tau\right) k(t), \tag{1.26}$$

onde o termo $n_s(f(k(\tau)))$ captura a fertilidade relacionada à renda passada e o termo $g(t-\tau)$ é o núcleo de atraso correspondente, o qual é um ponderador médio para eventos mais ou menos importantes do passado. A função $g(\cdot)$ geralmente é suposta como uma distribuição Erlang de probabilidade, a qual já foi apresentada no rodapé do Exemplo 1.22.

Se existisse um padrão constante de r anos na entrada da força de trabalho, a melhor forma de modelar o problema seria usando equações diferenciais com retardo constante, da forma $k'(t) = sf(k(t)) - n_s(f(k(t-r)))k(t)$. Por exemplo, se todos os induvíduos que nasceram há 18 anos entrassem na força de trabalho hoje, a constante r seria igual a 18. Entretanto, esse padrão não existe e ao supor sua existência teríamos que desconsiderar, por exemplo, o grupo de profissionais que fazem especialização, cursos técnicos, graduação, pós-graduação, entre outros.

Outra forma de modelar este problema é fazendo o uso de equações diferenciais com retardo dependendo do estado, visto que, de fato a H.13 diz que a entrada na força de trabalho hoje depende de um tempo no passado e também da renda nesse tempo. Um possível modelo seria da forma $k'(t) = sf(k(t)) - n_s(f(k(\sigma(t, k(t)))))k(t)$, em que $\sigma(t, k(t)) < t$ é uma função que relaciona o tempo e o estado atual do capital a um tempo específico no passado. Em outras palavras, se chamarmos esse tempo de t^*, o valor do capital $k(t^*)$ seria o fator influenciador na taxa de natalidade $n_s(f(k(t^*)))$. É importante observar que a cada instante do tempo t, a função $\sigma(t, k(t))$ pode remeter a diferentes t^* do passado, pemitindo incluir no modelo uma espécie de memória de acontecimentos passados. Dessa forma, situações que estão ocorrendo no presente podem

ter crescimento populacional semelhante a acontecimentos na história da humanidade como guerras, pandemias ou períodos de paz e alta produção de alimentos.

Com o intuito de complementar os estudos de Fanti e Manfredi do Artigo (FANTI; MANFREDI, 2003), porém agora com uma nova vertente, pretendemos estudar o modelo de Solow integro-diferencial com retardo dependendo do estado

$$\begin{cases} k'(t) &= sf(k(t)) - k(t)\displaystyle\int_{-p}^{t} n_s(f(k(\sigma(\tau, k(\tau)))))g(t-\tau)\,d\tau, \quad t \in [0,a], \\ k(t) &= \varphi(t), \quad t \in [-p, 0], \end{cases} \tag{1.27}$$

o qual, além de considerar um retardo interessante no termo da renda na função n_s, mantém a ideia de uma função ponderadora g para eventos mais ou menos importantes do passado.

2

Metodologia

Para obter os resultados deste trabalho, fizemos um estudo teórico sobre equações diferenciais, métodos numéricos e modelos de crescimento econômico. A seguir, citamos as principais referências estudadas e como contribuíram para o estudo dos modelos propostos no capítulo de Resultados.

Em equações diferenciais, estudamos dois teoremas de existência e unicidade de soluções. No caso de EDOs estudamos o Teorema de Picard presente no Livro Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno, (BOYCE; DIPRIMA, 2015), o qual foi adaptado para provar a existência e unicidade de soluções de problemas de equações diferenciais com retardo dependendo do estado e na parte do estudo da convergência dos métodos numéricos. Além disso, usamos outra adptação desse teorema para provar a existência e unicidade de soluções para o modelo proposto desta dissertação. No caso de EDRs a principal referência é o Livro Equações Diferenciais com Retardamento, (ONUCHIC, 1971), onde estudamos o Teorema do Ponto Fixo de Banach, o qual também foi adaptado para provar a existência e unicidade de soluções para a generalização do modelo proposto.

Na construção e estudo da convergência dos métodos numéricos, estudamos o Artigo "Existence and numerical approximation of solutions of neutral differential equations with state-dependent delay", (HERNANDEZ; ROLNIK; MANSO). Este artigo aborda sequências de funções de aproximações contínuas em um intervalo fechado, o que ainda não está difundido na literatura e tem bastante relevância neste trabalho.

Os estudos de modelos de crescimento econômico, em especial o Modelo Básico de Solow, foram baseados nos Livros "Economic Growth" (WEIL, 2009) e Introdução à Teoria do Crescimento Econômico (JONES, 2000) e no Artigo "A Contribution to the Theory of Economic Growth" (SOLOW, 1956). O modelo que motivou os estudos dessa dissertação está presente no Artigo "The solow's model with endogenous population: a neoclassical growth cycle model", dos economistas Fanti e Manfredi (2003), o qual inclui a taxa de crescimento populacional no modelo de Solow.

Com esta base de estudos teóricos, estabelecemos resultados inéditos na literatura matemática, apresentados na próxima seção.

3

Resultados

Neste capítulo, estabelecemos um resultado de existência e unicidade para o modelo de equações do tipo Solow com retardo dependendo do estado pelo método das iteradas de Picard, constuímos uma sequência numérica contínua que converge para a solução desse modelo e apresentamos um exemplo. Além disso, estabelecemos um resultado de existência e unicidade para o modelo abstrato que generaliza o modelo apresentado primeiramente usando o Teorema do Ponto Fixo de Banach.

3.1 Existência e unicidade da solução via iteradas de Picard

Nesta seção estudamos a existência, unicidade e aproximação numérica de soluções para o modelo diferencial do tipo Solow com retardo dependendo do estado

$$\begin{cases} x'(t) &= sf(x(t)) - x(t)\displaystyle\int_{-p}^{t} \eta(f(x(\sigma(\tau, x(\tau)))))g(t-\tau)\,d\tau, \quad t \in [0,a], \\ x(t) &= \varphi(t), \quad t \in [-p,0], \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $s \in (0,1)$, $\eta \in C_{Lip}(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $f \in C_{Lip}(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $\sigma \in C_{Lip}([-p,a]\times\mathbb{R};[-p,a])$, $g \in C([0,p+a];\mathbb{R}^+)$ e $\varphi \in C_{Lip}([-p,0];\mathbb{R})$.

Para iniciar nossos estudos, introduzimos o seguinte conceito de solução.

Definição 3.1 *Uma função $x \in C([-p,a];\mathbb{R})$ é dita ser solução do Problema* (3.1) *se $x \in C^1([0,a];\mathbb{R})$, $x = \varphi$ em $[-p,0]$ e para todo $t \in [0,a]$*

$$x'(t) = sf(x(t)) - x(t)\int_{-p}^{t} \eta(f(x(\sigma(\tau, x(\tau)))))g(t-\tau)\,d\tau.$$

Lema 3.2 *Uma função $x \in C([-p,a];\mathbb{R})$ é solução do Problema* (3.1) *se, e somente se, $x(t) = \varphi(t)$ para $t \in [-p,0]$ e $x(\cdot)$ é solução da equação integral*

$$x(t) = \varphi(0) + \int_0^t \Big[sf(x(\theta)) - x(\theta)\int_{-p}^{\theta} \eta(f(x(\sigma(\tau, x(\tau)))))g(\theta-\tau)\,d\tau\Big]d\theta,\ t \in [0,a]. \quad (3.2)$$

Prova: Suponha que $x(\cdot)$ seja solução de (3.1). Integrando entre 0 e t, vemos que

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + \int_0^t \Big[sf(x(\theta)) - x(\theta)\int_{-p}^{\theta} \eta(f(x(\sigma(\tau, x(\tau)))))g(\theta-\tau)\,d\tau\Big]d\theta \\ &= \varphi(0) + \int_0^t \Big[sf(x(\theta)) - x(\theta)\int_{-p}^{\theta} \eta(f(x(\sigma(\tau, x(\tau)))))g(\theta-\tau)\,d\tau\Big]d\theta. \end{aligned}$$

Como $x = \varphi$ em $[-p,0]$, segue do anterior que $x(\cdot)$ é solução de (3.2).

Suponha agora que $x(\cdot)$ seja solução de (3.2). Como as funções $\eta(\cdot)$, $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ são contínuas, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, vemos que

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{d}{dt}\int_0^t \Big[sf(x(\theta)) - x(\theta)\int_{-p}^{\theta} \eta(f(x(\sigma(\tau, x(\tau)))))g(\theta-\tau)\,d\tau\Big]d\theta \\ &= sf(x(t)) - x(t)\int_{-p}^{t} \eta(f(x(\sigma(\tau, x(\tau)))))g(t-\tau)\,d\tau,\ \ \forall\, t \in [0,a]. \end{aligned}$$

Além disso, como $x = \varphi$ em $[-p,0]$, obtemos que $x(\cdot)$ é solução de (3.1). A prova está completa. ■

Estabelecemos e provamos agora o principal resultado desta seção sobre a existência e unicidade de solução para o Problema (3.1).

Teorema 3.3 *Suponha que $\eta(\cdot)$, $f(\cdot)$, $\sigma(\cdot)$ e $\varphi(\cdot)$ sejam Lipschitz, com constantes de Lipschitz iguais a L_η, L_f, L_σ e L_φ respectivamente e $\eta(\cdot)$ uma função limitada em $\mathbb{R}$. Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequência de funções em $C([-p,a];\mathbb{R})$ definida por $u_n = \varphi$ em $[-p,0]$ e $n \in \mathbb{N}$, $u_0(t) = \varphi(0)$ para $t \in [0,a]$ e*

$$u_{n+1}(t) \;=\; \varphi(0) + \int_0^t \Big[sf(u_n(\theta)) - u_n(\theta)\int_{-p}^{\theta} \eta(f(u_n(\sigma(\tau, u_n(\tau)))))g(\theta-\tau)\,d\tau\Big]d\theta,$$

para $t \in [0,a]$ e $n \in \mathbb{N}$. Então, a sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente em $C([-p,a],\mathbb{R})$ para uma solução $x \in C_{Lip}([-p,a];\mathbb{R})$ do Problema (3.1)*. Mais ainda, $x(\cdot)$ é a única solução em $C_{Lip}([-p,a],\mathbb{R})$.*

Prova: Para começar, notamos que $u_n(t) = \varphi(0) + \sum_{j=0}^{n-1}[u_{j+1}(t) - u_j(t)]$ para todo $t \in [0,a]$ e $n \in \mathbb{N}$. Para provar que a série de funções $\sum_{j=0}^{\infty}[u_{j+1}(\cdot) - u_j(\cdot)]$ é convergente em $C([-p,a];\mathbb{R})$, introduzimos as funções $z_n, Z_n : [-p,a] \to \mathbb{R}$ definidas por $z_n(t) = Z_n(t) = 0$ para $t \in [-p,0]$, $z_n(t) = |u_{n+1}(t) - u_n(t)|$ e $Z_n(t) = \sup_{s\in[-p,t]} z_n(s)$ para $t \in [0,a]$. Além disso, para simplificar os cálculos, definimos as funções $G_n : [0,a] \to \mathbb{R}$ por

$$G_n(\theta) \;=\; \int_{-p}^{\theta} \eta(f(u_n(\sigma(\tau, u_n(\tau)))))g(\theta-\tau)\,d\tau, \quad (3.3)$$

e mostramos sua limitação. Como $\eta(\cdot)$ é limitada em $\mathbb{R}$, chamamos sua limitação de $\|\eta\|_{C(\mathbb{R};\mathbb{R})}$ e definimos a constante

$$C_g = \sup_{t\in[0,a]} \int_{-p}^{t} |g(t-\tau)|\, d\tau, \quad \theta \in [0,a].$$

Observamos que

$$\begin{aligned} C_g &= \max_{s\in[0,p+a]} |g(s)| \sup_{t\in[0,a]} \int_{-p}^{t} d\tau \\ &= \|g\|_{C([0,\,p+a];\mathbb{R}^+)} \sup_{t\in[0,a]} (t+p) \\ &= \|g\|_{C([0,\,p+a];\mathbb{R}^+)}(p+a). \end{aligned}$$

Portanto, $|G_n(\theta)| \leq M_G := \|\eta\|_{C(\mathbb{R};\mathbb{R})}\|g\|_{C([0,\,p+a];\mathbb{R}^+)}(p+a)$ para todo $\theta \in [0,a]$.

Para iniciar nossos estudos sobre a convergência da série, mostramos que a sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $C_{Lip}([-p,a];\mathbb{R})$. No que segue, escrevemos $\|\cdot\|_C$ no lugar de $\|\cdot\|_{C([-p,a];\mathbb{R})}$. Usando que $\|u_0\|_{C_{([-p,a];\mathbb{R})}} = \|\varphi\|_{C([-p,0];\mathbb{R})}$, para $t \in [0,a]$ e $n \in \mathbb{N}$ temos que

$$\begin{aligned} |u_1(t)| &\leq |\varphi(0)| + \int_0^t |sf(u_0(\theta)) - u_0(\theta)G_0(\theta)|\, d\theta \\ &\leq \|\varphi\|_C + \int_0^t (s|f(u_0(\theta)) - f(0)| + s|f(0)| + |u_0(\theta)|\,|G_0(\theta)|)\, d\theta \\ &\leq \|\varphi\|_C + (sL_f + M_G)\int_0^t |u_0(\theta)|\, d\theta + s|f(0)|t, \end{aligned} \tag{3.4}$$

o que implica que

$$|u_1(t)| \leq \|\varphi\|_C(1 + (sL_f + M_G)t) + s|f(0)|t.$$

Procedendo como acima e usando a estimativa (3.4), vemos que

$$\begin{aligned} |u_2(t)| &\leq \|\varphi\|_C + (sL_f + M_G)\int_0^t |u_1(\theta)|\, d\theta + s|f(0)|t \\ &\leq \|\varphi\|_C + (sL_f + M_G)\int_0^t \Big(\|\varphi\|_C(1 + (sL_f + M_G)\theta) + s|f(0)|\theta\Big)\, d\theta + s|f(0)|t \\ &\leq \|\varphi\|_C\Big(1 + (sL_f + M_G)t + (sL_f + M_G)^2\frac{t^2}{2}\Big) + s|f(0)|\Big(t + (sL_f + M_G)\frac{t^2}{2}\Big). \end{aligned}$$

Continuando assim, inferimos que

$$\begin{aligned} |u_n(t)| &\leq \|\varphi\|_C \sum_{p=0}^{n} (sL_f + M_G)^p \frac{t^p}{p!} + s|f(0)| \sum_{p=1}^{n} (sL_f + M_G)^{p-1}\frac{t^p}{p!} \\ &\leq \Big(\|\varphi\|_C + \frac{s|f(0)|}{sL_f + M_G}\Big)e^{(sL_f+M_G)a}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e $t \in [0,a]$, o que prova que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $C([-p,a];\mathbb{R})$.

Para estimar $[u_n]_{C_{Lip}([-p,a];\mathbb{R})}$, definimos os números $M_1 = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_{C([-p,a];\mathbb{R})}$ e $M_f = \|f(\cdot)\|_{C([-M_1,M_1];\mathbb{R})}$, visto que a função $f(\cdot)$ é contínua e as funções $u_n(\cdot)$ são limitadas. Vamos considerar três casos.

1. Se t, $r \in [0,a]$ com $r < t$, temos que

$$\begin{aligned} |u_{n+1}(t) - u_{n+1}(r)| &\leq \int_r^t (s|f(u_n(\theta))| + |u_n(\theta)|\,|G_n(\theta)|)\,d\theta \\ &\leq (sM_f + M_1 M_G)(t-r). \end{aligned}$$

2. Se $r \in [-p,0]$ e $t \in [0,a]$, temos que

$$\begin{aligned} |u_{n+1}(t) - u_{n+1}(r)| &= \Big|\varphi(0) + \int_0^t [sf(u_n(\theta)) - u_n(\theta)\,G_n(\theta)]\,d\theta - \varphi(r)\Big| \\ &\leq \int_0^t (s|f(u_n(\theta))| + |u_n(\theta)|\,|G_n(\theta)|)\,d\theta + |\varphi(0) - \varphi(r)| \\ &\leq (sM_f + M_1 M_G)t + L_\varphi(-r) \\ &\leq (sM_f + M_1 M_G + L_\varphi)\,(t-r). \end{aligned}$$

3. Se t, $r \in [-p,0]$ com $r < t$, temos que

$$|u_{n+1}(t) - u_{n+1}(r)| \;=\; |\varphi(t) - \varphi(r)| \;\leq\; L_\varphi(t-r).$$

Das desigualdades anteriores vemos que $\sup_{n\in\mathbb{N}}[u_n]_{C_{Lip}([-p,a];\mathbb{R})} \leq M_2 := sM_f + M_1 M_G + L_\varphi$.

Estudamos agora a convergência das séries de funções $\sum_{j\geq 0} Z_j(\cdot)$ e $\sum_{j\geq 0} z_j(\cdot)$. Usando as desigualdades estabelecidas acima, temos que

$$\begin{aligned} z_{n+1}(t) &\leq \Big|\int_0^t \Big[sf(u_{n+1}(\theta)) - u_{n+1}(\theta)G_{n+1}(\theta) - (sf(u_n(\theta)) - u_n(\theta)G_n(\theta))\Big]d\theta\Big| \\ &\leq \int_0^t \Big[s\,|f(u_{n+1}(\theta)) - f(u_n(\theta))| + |u_{n+1}(\theta)G_{n+1}(\theta)) - u_n(\theta)G_n(\theta)|\Big]d\theta \\ &\leq \int_0^t \Big[sL_f|u_{n+1}(\theta) - u_n(\theta)| + |u_{n+1}(\theta)G_{n+1}(\theta)) - u_n(\theta)G_{n+1}(\theta)| \\ &\quad + |u_n(\theta)G_{n+1}(\theta) - u_n(\theta)G_n(\theta)|\Big]d\theta \\ &\leq \int_0^t \Big[sL_f z_n(\theta) + z_n(\theta)|G_{n+1}(\theta)| + |u_n(\theta)|\,|G_{n+1}(\theta) - G_n(\theta)|\Big]d\theta \\ &\leq \int_0^t \Big[sL_f z_n(\theta) + z_n(\theta)M_G + M_1\,|G_{n+1}(\theta) - G_n(\theta)|\Big]d\theta. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Em relação ao termo $|G_{n+1}(\theta) - G_n(\theta)|$, usando o Lema 1.6 temos que

$$\begin{aligned} |G_{n+1}(\theta) - G_n(\theta)| &\leq \int_{-p}^\theta |\eta(f(u_{n+1}(\sigma(\tau, u_{n+1}(\tau))))) - \eta(f(u_n(\sigma(\tau, u_n(\tau)))))|\,|g(\theta-\tau)|d\tau \\ &\leq L_\eta\, L_f \int_{-p}^\theta |u_{n+1}(\sigma(\tau, u_{n+1}(\tau))) - u_n(\sigma(\tau, u_n(\tau)))|\,|g(\theta-\tau)|d\tau \\ &\leq L_\eta\, L_f(1 + M_2\, L_\sigma)\|u_{n+1} - u_n\|_{C_{Lip}([-p,\theta];\mathbb{R})} \int_{-p}^\theta |g(\theta-\tau)|\,d\tau \\ &\leq L_\eta\, L_f\,(1 + M_2\, L_\sigma)C_g\, Z_n(\theta). \end{aligned}$$

Usando esta desigualdade em (3.6), segue que

$$z_{n+1}(t) \;\leq\; \int_0^t \Big[sL_f z_n(\theta) + z_n(\theta)M_G + C_1 Z_n(\theta)\Big]d\theta,$$

onde $C_1 = M_1 L_\eta L_f (1 + M_2\, L_\sigma) C_g$. Além disso, pela definição do Z_n, temos que

$$Z_{n+1}(t) \;\leq\; \int_0^t \Big[s L_f Z_n(\theta) + Z_n(\theta) M_G + C_1 Z_n(\theta) \Big] d\theta \;\leq\; \alpha \int_0^t Z_n(\theta)\, d\theta,$$

onde $\alpha = s L_f + M_G + C_1$. Como a última desigualdade é válida para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\begin{aligned}
Z_{n+1}(t) &\leq \alpha^2 \int_0^t \int_0^{s_1} Z_{n-1}(s_1)\, ds_1\, d\theta \\
&\leq \alpha^3 \int_0^t \int_0^{s_1} \int_0^{s_2} Z_{n-2}(s_2)\, ds_2\, ds_1\, d\theta \\
&\;\;\vdots \\
&\leq \alpha^{n+1} \int_0^t \int_0^{s_1} \int_0^{s_2} \cdots \int_0^{s_n} Z_0(s_n)\, ds_n \cdots ds_2\, ds_1\, d\theta \\
&\leq Z_0(a)\, \alpha^{n+1} \int_0^t \int_0^{s_1} \int_0^{s_2} \cdots \int_0^{s_n} ds_n \cdots ds_2\, ds_1\, d\theta \\
&\leq Z_0(a)\, \alpha^{n+1} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \;\leq\; Z_0(a)\, \frac{(\alpha\, a)^{n+1}}{(n+1)!}. \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

Como $\lim_{n\to\infty} Z_0(a)\, \frac{(\alpha\, a)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, a série $\sum_{n=0}^{\infty} Z_0(a)\, \frac{(\alpha\, a)^{n+1}}{(n+1)!}$ é convergente, o que implica que a série $\sum_{n=0}^{\infty} Z_{n+1}(\cdot)$ é convergente em $C([-p,a];\mathbb{R})$. Mais ainda, a série $\sum_{n=0}^{\infty} [u_{n+2}(\cdot) - u_{n+1}(\cdot)]$ converge uniformemente em $[-p,a]$ para uma função $\psi \in C([-p,a] : \mathbb{R})$, o que implica que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para a função $x(\cdot) = \varphi(0) + \psi(\cdot)$ em $[-p,a]$. Do anterior,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} u_{n+1}(t) &= \varphi(0) + \lim_{n\to\infty} \int_0^t s f(u_n(\theta))\, d\theta \\
&\quad - \lim_{n\to\infty} \int_0^t u_n(\theta) \int_{-p}^{\theta} \eta(f(u_n(\sigma(\tau, u_n(\tau)))))g(\theta - \tau)\, d\tau\, d\theta \\
&= \varphi(0) + \int_0^t s f(\lim_{n\to\infty} u_n(\theta))\, d\theta \\
&\quad - \int_0^t \lim_{n\to\infty} u_n(\theta) \int_{-p}^{\theta} \eta(f(\lim_{n\to\infty} u_n(\sigma(\tau, \lim_{n\to\infty} u_n(\tau)))))g(\theta - \tau)\, d\tau\, d\theta,
\end{aligned}$$

o que implica que

$$x(t) \;=\; \varphi(0) + \int_0^t s f(x(\theta))\, d\theta - \int_0^t x(\theta) \int_{-p}^{\theta} \eta(f(x(\sigma(\tau, x(\tau)))))g(\theta - \tau)\, d\tau\, d\theta. \qquad (3.8)$$

Do Lema 3.2 e da equação (3.8), concluímos que existe uma solução $x(\cdot) \in C([-p,a];\mathbb{R})$ do Problema (3.1). Mais ainda, essa solução é Lipschitz, pois para $t, s \in [0,a]$ observamos que

$$|x(t) - x(s)| \;\leq\; \lim_{n\to\infty} |u_n(t) - u_n(s)| \;\leq\; M_2 |t - s|,$$

o que mostra que $x \in C_{Lip}([-p,a];\mathbb{R})$.

Para mostrar a unicidade de solução, suponha que $\bar{x} \in C([-p,a];\mathbb{R})$ seja uma solução de (3.1) em $[-p,a]$. Notamos que

$$\begin{aligned}
|x(t)-\bar{x}(t)| &= \Big|\int_0^t \Big[sf(x(\theta)) - x(\theta)\int_{-p}^{\theta}\eta(f(x(\sigma(\tau,x(\tau)))))g(\theta-\tau)\,d\tau\Big]d\theta \\
&\quad - \int_0^t \Big[sf(\bar{x}(\theta)) - \bar{x}(\theta)\int_{-p}^{\theta}\eta(f(\bar{x}(\sigma(\tau,\bar{x}(\tau)))))g(\theta-\tau)\,d\tau\Big]d\theta\Big| \\
&\leq \int_0^t s|f(x(\theta)) - f(\bar{x}(\theta))|\,d\theta \\
&\quad + \Big|\int_0^t x(\theta)\int_{-p}^{\theta}\eta(f(x(\sigma(\tau,x(\tau)))))g(\theta-\tau)\,d\tau\,d\theta \\
&\quad - \int_0^t \bar{x}(\theta)\int_{-p}^{\theta}\eta(f(\bar{x}(\sigma(\tau,\bar{x}(\tau)))))g(\theta-\tau)\,d\tau\,d\theta\Big|.
\end{aligned}$$

Para tratar o segundo termo, usamos um argumento semelhante ao usado na estimativa de z_{n+1}, Z_{n+1}. Neste caso, somamos e subtraímos o termo

$$\int_0^t \bar{x}(\theta)\int_{-p}^{\theta}\eta(f(x(\sigma(\tau,x(\tau)))))g(\theta-\tau)\,d\tau\,d\theta.$$

Com isso e definindo $|\bar{x}(\cdot)| \leq C_2$, conseguimos obter a relação

$$\|x-\bar{x}\|_{C([-p,t];\mathbb{R})} \leq \alpha_2\int_0^t \|x-\bar{x}\|_{C([-p,\theta];\mathbb{R})}\,d\theta,$$

onde $\alpha_2 = sL_f + \|\eta\|_{C(\mathbb{R};\mathbb{R})}C_g + C_2L_\eta L_f(1+M_2L_\sigma)C_g$.

A unicidade segue agora da desigualdade de Gronwall, Lema 1.4. A prova está completa. ■

3.1.1 Aproximação numérica de soluções

O objetivo desta seção é construir uma sequência de funções $(\Phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ que aproximam os termos da sequência $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ definida no Teorema 3.3.

Para começar, vamos construir duas malhas de pontos discretos: uma com pontos discretos no intervalo $[-p,0]$ e outra com pontos discretos no intervalo $[0,a]$. Queremos que as duas malhas tenham o mesmo espaçamento entre os pontos. Para isso, escolhemos um número natural N_2, de forma que exista um $N_1 \in \mathbb{N}$, sendo $N_1, N_2 \neq 0$, tais que $\frac{p}{N_1} = \frac{a}{N_2}$ e indexamos ambas por um número inteiro M >0. Assim, definimos $h_M = \frac{p}{MN_1} = \frac{a}{MN_2}$ para $M \geq 1$. Observamos que é possível obter N_1 e N_2 se $\frac{p}{a}$ é um número racional.

Para cada $M \in \mathbb{N}^*$, definimos os conjuntos

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= \{t_i \in [-p,0] :\ t_i = -p + (i-MN_1)h_M,\ i = -MN_1, -MN_1+1, \ldots, 0\}, \\
\Delta_2 &= \{t_i \in [0,a] :\ t_i = ih_M,\ i = 0,1,\ldots,MN_2\}.
\end{aligned}$$

O raciocínio é análogo aos usados nas aproximações feitas para os casos anteriores, porém neste caso precisamos aproximar duas integrais. Para $t = t_i \in \Delta_2$, reescrevemos as funções $u_n(\cdot)$ definidas no Teorema 3.3 de forma conveniente e prosseguimos com as seguintes aproximações

$$\begin{aligned}
u_{j+1}(t_i) &= \varphi(0) + \int_0^{t_i} \Big[sf(u_j(\theta)) - u_j(\theta) \int_{-p}^{\theta} \eta(f(u_j(\sigma(\tau, u_j(\tau))))) g(\theta - \tau)\, d\tau \Big] d\theta \\
&= \varphi(0) + \sum_{k=0}^{i-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Big[sf(u_j(\theta)) - u_j(\theta) \int_{-p}^{\theta} \eta(f(u_j(\sigma(\tau, u_j(\tau))))) g(\theta - \tau)\, d\tau \Big] d\theta \\
&\approx \varphi(0) + h_M \sum_{k=0}^{i-1} \Big[sf(u_j(t_k)) - u_j(t_k) \int_{-p}^{t_k} \eta(f(u_j(\sigma(\tau, u_j(\tau))))) g(t_k - \tau)\, d\tau \Big] \\
&\approx \varphi(0) + h_M \sum_{k=0}^{i-1} \Big[sf(u_j(t_k)) - u_j(t_k)\, h_M \sum_{l=-MN_1}^{k-1} \eta(f(u_j(\sigma(t_l, u_j(t_l))))) g(t_k - t_l) \Big].
\end{aligned}$$

Para lidar com o retardo dependendo do estado é necessário que tenhamos aproximações que sejam contínuas em todo o domínio $[0, a]$. Para isso, como nos casos anteriores, usamos a técnica de interpolação linear nos pontos $(t_i, u_{j+1}(t_i))$ e $(t_{i+1}, u_{j+1}(t_{i+1}))$, com $t \in (t_i, t_{i+1})$, que tem como coeficiente angular do segmento de reta

$$\frac{u_{j+1}(t_{i+1}) - u_{j+1}(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \approx sf(u_j(t_i)) - u_j(t_i)\, h_M \sum_{l=-MN_1}^{i-1} \eta(f(u_j(\sigma(t_l, u_j(t_l))))) g(t_i - t_l),$$

de onde obtemos que

$$\begin{aligned}
u_{j+1}(t) &\approx \varphi(0) + h_M \sum_{k=0}^{i-1} \Big[sf(u_j(t_k)) - u_j(t_k)\, h_M \sum_{l=-MN_1}^{k-1} \eta(f(u_j(\sigma(t_l, u_j(t_l))))) g(t_k - t_l) \Big] \\
&\quad + (t - t_i) \Big[sf(u_j(t_i)) - u_j(t_i)\, h_M \sum_{l=-MN_1}^{i-1} \eta(f(u_j(\sigma(t_l, u_j(t_l))))) g(t_i - t_l) \Big]. \quad (3.9)
\end{aligned}$$

Esta aproximação é válida no intervalo fechado $[t_i, t_{i+1}]$, para cada $i = 0, 1, 2, \ldots, MN_2 - 1$.

Com isso, definimos a seguir uma nova sequência $(\Phi_j^M)_{j \in \mathbb{N}}$ em que cada termo $\Phi_j^M(\cdot)$ é uma aproximação para as funções $u_j(\cdot)$ definidas no Teorema 3.3.

Definição 3.4 (Método de aproximação para o Problema (3.1)**)** *Seja* $(\Phi_j^M)_{j \in \mathbb{N}}$ *a sequência em* $C([-p, a]; \mathbb{R})$ *dada por* $\Phi_0^M = u_0$ *em* $[-p, a]$, $\Phi_{j+1}^M = u_{j+1}$ *em* $[-p, 0]$ *para todo* $j \geq 0$ *e*

$$\begin{aligned}
\Phi_{j+1}^M(t) &= \varphi(0) + h_M \sum_{k=0}^{i-1} \Big[sf(\Phi_j^M(t_k)) - \Phi_j^M(t_k) \tilde{G}_j^M(t_k) \Big] \\
&\quad + (t - t_i) \Big[sf(\Phi_j^M(t_i)) - \Phi_j^M(t_i) \tilde{G}_j^M(t_i) \Big],
\end{aligned}$$

para $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, 2, \ldots, MN_2 - 1$, $M \in \mathbb{N}^*$ *e* $j \geq 0$, *onde* $\tilde{G}_j^M : \Delta_2 \to \mathbb{R}$ *é a função definida por*

$$\tilde{G}_j^M(t_w) = h_M \sum_{l=-MN_1}^{w-1} \eta(f(\Phi_j^M(\sigma(t_l, \Phi_j^M(t_l))))) g(t_w - t_l).$$

Como $\Phi_0^M(\cdot) = u_0(\cdot)$, a função $\Phi_1^M(\cdot)$ acumula, por construção, apenas o erro da aproximação das integrais pelos somatórios nos pontos da malha e o erro da interpolação linear para os pontos fora da malha. A função $\Phi_2^M(\cdot)$, entretanto, acumula também o erro vindo do primeiro termo, visto que $\Phi_1^M(\cdot) \approx u_1(\cdot)$, e isso segue acontecendo para todos os próximos termos da sequência $(\Phi_j^M)_{j\in\mathbb{R}}$. Em outras palavras, o erro se propaga ao longo dos termos da sequência. Isso nos motiva a estudar se o termo $\Phi_{j+1}^M(\cdot)$ está próximo o suficiente de $u_{j+1}(\cdot)$ quando $h_M \to 0$ $(M \to \infty)$.

Para os estudos desta seção, assumimos que as hipóteses do Teorema 3.3 são válidas e usamos as notações definidas na sua prova. Além disso, a fim de reduzir as notações nos cálculos, omitimos o índice M em $\Phi_j^M(\cdot)$, $\tilde{G}_j^M(\cdot)$ e h_M.

Usando que a função $\eta(\cdot)$ é limitada e que $g(\cdot)$ é uma função contínua definida em um intervalo fechado, vemos que

$$\begin{aligned}
|\tilde{G}_j(t_m)| &\leq h \sum_{l=-MN_1}^{m-1} |\eta(f(\Phi_j(\sigma(t_l, \Phi_j(t_l)))))|\, |g(t_m - t_l)| \\
&\leq h \sum_{l=-MN_1}^{MN_2-1} \|\eta\|_{C(\mathbb{R};\mathbb{R})} \|g\|_{C([0,p+a];\mathbb{R}^+)} \\
&\leq \|\eta\|_{C(\mathbb{R};\mathbb{R})} \|g\|_{C([0,p+a];\mathbb{R}^+)} h(MN_1 + MN_2) \\
&\leq \|\eta\|_{C(\mathbb{R};\mathbb{R})} \|g\|_{C([0,p+a];\mathbb{R}^+)} \Big(\frac{p}{MN_1} MN_1 + \frac{a}{MN_2} MN_2\Big) \\
&\leq \|\eta\|_{C(\mathbb{R};\mathbb{R})} \|g\|_{C([0,p+a];\mathbb{R}^+)} (p + a),
\end{aligned}$$

para todo $t_m \in \Delta_2$ e $M \geq 1$. Notamos que limitação encontrada acima é a mesma das funções $G_n(\cdot)$ definidas em (3.3). Então, $|\tilde{G}_j(t_m)| \leq M_G$ para todo $t_m \in \Delta_2$ e $M \geq 1$.

Mostramos agora que a sequência $(\Phi_j^M)_{j\in\mathbb{N}}$ é limitada em $C([-p, a]; \mathbb{R})$. Para $t \in [t_i, t_{i+1}]$, notamos que

$$\begin{aligned}
|\Phi_1(t)| &\leq \|\varphi\|_C + h \sum_{k=0}^{i-1} \Big(s|f(\Phi_0(t_k)) - f(0)| + s|f(0)| + |\Phi_0(t_k)|\, |\tilde{G}_0(t_k)|\Big) \\
&\quad + (t - t_i)\Big(s|f(\Phi_0(t_i)) - f(0)| + s|f(0)| + |\Phi_0(t_i)|\, |\tilde{G}_0(t_i)|\Big) \\
&\leq \|\varphi\|_C + h \sum_{k=0}^{i-1} |\Phi_0(t_k)|(sL_f + M_G) + s|f(0)|t_i \\
&\quad + (t - t_i)|\Phi_0(t_i)|(sL_f + M_G) + s|f(0)|(t - t_i) \\
&\leq \|\varphi\|_C + (sL_f + M_G)\Big(h \sum_{k=0}^{i-1} |\Phi_0(t_k)| + |\Phi_0(t_i)|(t - t_i)\Big) + s|f(0)|t. \quad (3.10)
\end{aligned}$$

Como $\|\Phi_0\|_{C([-p,a];\mathbb{R})} = \|\varphi\|_{C([-p,0];\mathbb{R})}$, temos que

$$|\Phi_1(t)| \leq \|\varphi\|_C (1 + (sL_f + M_G)\, t) + s|f(0)|t. \quad (3.11)$$

Usando o Lema 1.10 e as desigualdades (3.10) e (3.11), temos que

$$\begin{aligned}
|\Phi_2(t)| &\leq \|\varphi\|_C + (sL_f + M_G)\Big(h\sum_{k=0}^{i-1}|\Phi_1(t_k)| + |\Phi_1(t_i)|(t-t_i)\Big) + s|f(0)|t \\
&\leq \|\varphi\|_C + (sL_f + M_G)h\sum_{k=0}^{i-1}\Big(\|\varphi\|_C(1+(sL_f+M_G)\,t_k) + s|f(0)|t_k\Big) \\
&\quad + (sL_f + M_G)\Big(\|\varphi\|_C(1+(sL_f+M_G)\,t_i) + s|f(0)|t_i\Big)(t-t_i) + s|f(0)|t \\
&\leq \|\varphi\|_C\Big(1 + (sL_f+M_G)(t_i+t-t_i) + (sL_f+M_G)^2\Big(\frac{t_i^2}{2} + t_i(t-t_i)\Big)\Big) \\
&\quad + s|f(0)|\Big(t + (sL_f+M_G)\Big(\frac{t_i^2}{2} + t_i(t-t_i)\Big)\Big).
\end{aligned}$$

Usando agora que $t_i^2 + 2t_i(t-t_i) \leq (t_i + (t-t_i))^2 = t^2$, vemos que

$$|\Phi_2(t)| \leq \|\varphi\|_C\Big(1 + (sL_f+M_G)\,t + (sL_f+M_G)^2\frac{t^2}{2}\Big) + s|f(0)|\Big(t + (sL_f+M_G)\frac{t^2}{2}\Big).$$

Continuando deste forma, para $j \in \mathbb{N}$ e $t \in [t_i, t_{i+1}]$ podemos inferir que

$$\begin{aligned}
|\Phi_j(t)| &\leq \|\varphi\|_C\sum_{p=0}^{n}\frac{(sL_f+M_G)^p\,t^p}{p!} + s|f(0)|\sum_{p=1}^{n}\frac{(sL_f+M_G)^{p-1}\,t^p}{p!} \\
&\leq \Big(\|\varphi\|_C + \frac{s|f(0)|}{sL_f+M_G}\Big)e^{(sL_f+M_G)a},
\end{aligned}$$

o que prova que $(\Phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é limitada em $C([t_i, t_{i+1}];\mathbb{R})$, e, portanto, em $C([-p,a];\mathbb{R})$. Além disso, observamos que as funções $\Phi_j(\cdot)$ são limitadas pela mesma expressão (3.5) que limita as funções $u_n(\cdot)$, dessa forma, no que segue desta prova usamos que $M_1 = \sup_{j\in\mathbb{N}}\|\Phi_j\|_{C([-p,a];\mathbb{R})}$.

Podemos agora apresentar e provar o principal resultado desta seção.

Teorema 3.5 *Sejam $\eta(\cdot)$, $f(\cdot)$, $\sigma(\cdot)$, $\varphi(\cdot)$ e $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ como no Teorema 3.3 e $g \in C_{Lip}([0,p+a];\mathbb{R}^+)$ com constante de Lipschitz L_g. Então $\|u_j - \Phi_j^M\|_{C([-p,a];\mathbb{R})} \to 0$ quando $M \to \infty$ ($h_M \to 0$) para cada $j \in \mathbb{N}$. Mais ainda, $(\Phi_j^M)_{j\in\mathbb{N}}$ converge para a solução $x(\cdot)$ do Problema* (3.1) *quando $j \to \infty$ e $M \to \infty$.*

Prova: Para estudar a convergência do n-ésimo termo da sequência $(\Phi_j^M)_{j\in\mathbb{N}}$ para o n-ésimo termo da sequência $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ quando $h_M \to 0$, introduzimos as funções $r_j, R_j : [-p,a] \to \mathbb{R}$, dadas por $r_j(t) = R_j(t) = 0$ para $t \in [-p,0]$, $r_j(t) = |u_j(t) - \Phi_j(t)|$ e $R_j(t) = \sup_{s\in[-p,t]} r_j(s)$ para $t \in [0,a]$. Da definição de $\Phi_0(\cdot)$, vemos que $r_0(\cdot) = R_0(\cdot) = 0$ em $[-p,a]$.

No que segue, reescrevemos as funções $u_j(\cdot)$ definidas no Teorema 3.3 para $t \in [0,a]$ de forma convenientemente. Vemos que

$$u_{j+1}(t) = \varphi(0) + \sum_{k=0}^{i-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\Big[sf(u_j(\theta)) - u_j(\theta)G_j(\theta)\Big]\,d\theta + \int_{t_i}^{t}\Big[sf(u_j(\theta)) - u_j(\theta)G_j(\theta)\Big]\,d\theta.$$

Primeiro fazemos a análise para os pontos da malha $t = t_i \in \Delta_2$. Assim,

$$
\begin{aligned}
r_{j+1}(t_i) &\leq \sum_{k=0}^{i-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Big| sf(u_j(\theta)) - u_j(\theta)G_j(\theta) - sf(\Phi_j(t_k)) + \Phi_j(t_k)\tilde{G}_j(t_k) \Big| \, d\theta \\
&\leq \sum_{k=0}^{i-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Big(s|f(u_j(\theta)) - f(\Phi_j(t_k))| + |u_j(\theta)G_j(\theta) - \Phi_j(t_k)\tilde{G}_j(t_k)| \Big) \, d\theta \\
&\leq \sum_{k=0}^{i-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} sL_f |u_j(\theta) - \Phi_j(t_k)| \, d\theta \\
&\quad + \sum_{k=0}^{i-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Big(|u_j(\theta) - \Phi_j(t_k)| \, |G_j(\theta)| + |\Phi_j(t_k)| \, |G_j(\theta) - \tilde{G}_j(t_k)| \Big) \, d\theta \\
&\leq \sum_{k=0}^{i-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} sL_f (|u_j(\theta) - u_j(t_k)| + |u_j(t_k) - \Phi_j(t_k)|) \, d\theta \\
&\quad + \sum_{k=0}^{i-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Big(|u_j(\theta) - \Phi_j(t_k)| \, |G_j(\theta)| + |\Phi_j(t_k)| \, |G_j(\theta) - \tilde{G}_j(t_k)| \Big) \, d\theta \\
&\leq \sum_{k=0}^{i-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} sL_f (M_2 h + r_j(t_k)) \, d\theta \\
&\quad + \sum_{k=0}^{i-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Big((M_2 h + r_j(t_k)) M_G + M_1 \, |G_j(\theta) - \tilde{G}_j(t_k)| \Big) \, d\theta. \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

Agora, precisamos analisar o termo $|G_j(\theta) - \tilde{G}_j(t_k)|$ separadamente. Veja que

$$
\begin{aligned}
&|G_j(\theta) - \tilde{G}_j(t_k)| \\
&= \Big| \sum_{l=-MN_1}^{k-1} \int_{t_l}^{t_{l+1}} \eta(f(u_j(\sigma(\tau, u_j(\tau))))) g(\theta - \tau) \, d\tau + \int_{t_k}^{\theta} \eta(f(u_j(\sigma(\tau, u_j(\tau))))) g(\theta - \tau) \, d\tau \\
&\quad - \sum_{l=-MN_1}^{k-1} \int_{t_l}^{t_{l+1}} \eta(f(\Phi_j(\sigma(t_l, \Phi_j(t_l))))) g(t_k - t_l) \, d\tau \Big| \\
&\leq \sum_{l=-MN_1}^{k-1} \int_{t_l}^{t_{l+1}} \Big| \eta(f(u_j(\sigma(\tau, u_j(\tau))))) g(\theta - \tau) - \eta(f(\Phi_j(\sigma(t_l, \Phi_j(t_l))))) g(t_k - t_l) \Big| \, d\tau \\
&\quad + \|\eta\|_{C(\mathbb{R};\mathbb{R})} \, \|g\|_{C([0,p+a];\mathbb{R}^+)} \, h.
\end{aligned}
$$

Ao somar e subtrair o termo $\eta(f(\Phi_j(\sigma(t_l, \Phi_j(t_l))))) g(\theta - \tau)$, vemos que

$$
\begin{aligned}
&|G_j(\theta) - \tilde{G}_j(t_k)| \\
&\leq \sum_{l=-MN_1}^{k-1} \int_{t_l}^{t_{l+1}} \Big| \eta(f(u_j(\sigma(\tau, u_j(\tau))))) - \eta(f(\Phi_j(\sigma(t_l, \Phi_j(t_l))))) \Big| \, |g(\theta - \tau)| \, d\tau \\
&\quad + \sum_{l=-MN_1}^{k-1} \int_{t_l}^{t_{l+1}} |\eta(f(\Phi_j(\sigma(t_l, \Phi_j(t_l))))) | \, |g(\theta - \tau) - g(t_k - t_l)| \, d\tau \\
&\quad + \|\eta\|_{C(\mathbb{R};\mathbb{R})} \, \|g\|_{C([0,p+a];\mathbb{R}^+)} \, h \\
&\leq L_\eta L_f \|g\|_{C([0,p+a];\mathbb{R}^+)} \sum_{l=-MN_1}^{k-1} \int_{t_l}^{t_{l+1}} |u_j(\sigma(\tau, u_j(\tau))) - \Phi_j(\sigma(t_l, \Phi_j(t_l)))| \, d\tau \\
&\quad + \|\eta\|_{C(\mathbb{R};\mathbb{R})} L_g \, 2h \, h(MN_1 + MN_2) + \|\eta\|_{C(\mathbb{R};\mathbb{R})} \, \|g\|_{C([0,p+a];\mathbb{R}^+)} \, h.
\end{aligned}
$$

Podemos estimar o termo $|u_j(\sigma(\tau, u_j(\tau))) - \Phi_j(\sigma(t_l, \Phi_j(t_l)))|$, com $\tau \in [t_l, t_{l+1}]$. Notamos que

$$\begin{aligned}
&|u_j(\sigma(\tau, u_j(\tau))) - \Phi_j(\sigma(t_l, \Phi_j(t_l)))| \\
&\quad \leq \; |u_j(\sigma(\tau, u_j(\tau))) - u_j(\sigma(t_l, \Phi_j(t_l)))| + |u_j(\sigma(t_l, \Phi_j(t_l))) - \Phi_j(\sigma(t_l, \Phi_j(t_l)))| \\
&\quad \leq \; M_2 L_\sigma(|\tau - t_l| + |u_j(\tau) - \Phi_j(t_l)|) + r_j(\sigma(t_l, \Phi_j(t_l))) \\
&\quad \leq \; M_2 L_\sigma h + M_2 L_\sigma(|u_j(\tau) - u_j(t_l)| + |u_j(t_l) - \Phi_j(t_l)|) + R_j(\sigma(t_l, \Phi_j(t_l))) \\
&\quad \leq \; (M_2 L_\sigma + M_2^2 L_\sigma)h + M_2 L_\sigma r_j(t_k) + R_j(t_k) \\
&\quad \leq \; M_2 L_\sigma(1 + M_2)h + (1 + M_2 L_\sigma)R_j(t_k).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$|G_j(\theta) - \tilde{G}_j(t_k)| \;\leq\; c_1 R_j(t_k) + c_2\, h, \tag{3.13}$$

onde $c_1 = L_\eta L_f \|g\|_{C([0,p+a];\mathbb{R}^+)}(1 + M_2 L_\sigma)(p + a)$ e $c_2 = L_\eta L_f \|g\|_{C([0,p+a];\mathbb{R}^+)} M_2 L_\sigma(1 + M_2)(p + a) + 2\,\|\eta\|_{C(\mathbb{R};\mathbb{R})} L_g(p + a) + \|\eta\|_{C(\mathbb{R};\mathbb{R})}\,\|g\|_{C([0,p+a];\mathbb{R})}$. Usando (3.13) em (3.12), temos que

$$\begin{aligned}
r_{j+1}(t_i) \;&\leq\; \sum_{k=0}^{i-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} sL_f(M_2 h + R_j(t_k))\, d\theta \\
&\quad + \sum_{k=0}^{i-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Big[(M_2 h + R_j(t_k))M_G + M_1\,(c_1 R_j(t_k) + c_2\, h)\Big]\, d\theta \\
&\leq\; \alpha\, h \sum_{k=0}^{i-1} R_j(t_k) + \beta\, h,
\end{aligned}$$

onde $\alpha = sL_f + M_G + M_1 c_1$ e $\beta = (sL_f M_2 + M_2 M_G + M_1 c_2)a$. Mais ainda, percebendo que α e β são independente de j and i, para qualquer $m = 0, 1, \ldots, i-1$ podemos concluir que

$$\sup_{t \in [t_m, t_{m+1}]} r_{n+1}(t) \;\leq\; \alpha h \sum_{k=0}^{m-1} R_j(t_k) + \beta\, h \;\leq\; \alpha h \sum_{k=0}^{i-1} R_j(t_k) + \beta\, h. \tag{3.14}$$

Agora, faremos a análise para pontos contínuos $t \in [t_k, t_{k+1}]$, com $k + 1 < i$.

$$\begin{aligned}
r_{j+1}(t) \;&\leq\; \sum_{k_1=0}^{k-1} \int_{t_{k_1}}^{t_{k_1+1}} \Big|sf(u_j(\theta)) - u_j(\theta)G_j(\theta) - sf(\Phi_j(t_{k_1})) - \Phi_j(t_{k_1})\tilde{G}_j(t_{k_1})\Big|\, d\theta \\
&\quad + \int_{t_k}^{t} \Big|sf(u_j(\theta)) - u_j(\theta)G_j(\theta)\Big|\, d\theta + (t - t_k)\Big|sf(\Phi_j(t_k)) - \Phi_j(t_k)\tilde{G}_j(t_k)\Big| \\
&\leq\; r_{j+1}(t_k) + \int_{t_k}^{t} \Big(s|f(u_j(\theta))| + |u_j(\theta)|\,|G_j(\theta)|\Big)\, d\theta \\
&\quad + (t - t_k)\Big(s|f(\Phi_j(t_k))| + |\Phi_j(t_k)|\,|\tilde{G}_j(t_k)|\Big) \\
&\leq\; r_{j+1}(t_k) + (sM_f + M_1 M_G)\,(t - t_k) + (sM_f + M_1 M_G)\,(t - t_k) \\
&\leq\; \alpha\, h \sum_{k=0}^{i-1} R_j(t_k) + \beta\, h + 2(sM_f + M_1 M_G)\, h \\
&\leq\; \alpha\, h \sum_{k=0}^{i-1} R_j(t_k) + \beta_2\, h
\end{aligned} \tag{3.15}$$

em que $\beta_2 = \beta + 2(sM_f + M_1 M_G)$. De (3.14) e (3.15), temos que

$$R_{j+1}(t_i) \;=\; \sup_{t\in[-p,t_i]} r_{j+1}(t) \;\le\; \alpha\, h \sum_{k_1=0}^{i-1} R_j(t_{k_1}) + \beta_2\, h.$$

Usando essa desigualdade e o Lema 1.10, temos que

$$\begin{aligned}
R_{j+1}(t_i) &\le \alpha\, h \sum_{k_1=0}^{i-1} R_j(t_{k_1}) + \beta_2\, h \\
&\le \alpha\, h \sum_{k_1=0}^{i-1} \Big[\alpha\, h \sum_{k_2=0}^{k_1-1} R_{j-1}(t_{k_2}) + \beta_2\, h\Big] + \beta_2\, h \\
&\le \alpha^2\, h^2 \sum_{k_1=0}^{i-1} \sum_{k_2=0}^{k_1-1} R_{j-1}(t_{k_2}) + \beta_2\, h(t_i\alpha + 1) \\
&\le \alpha^2\, h^2 \sum_{k_1=0}^{i-1} \sum_{k_2=0}^{k_1-1} \Big[\alpha\, h \sum_{k_3=0}^{k_2-1} R_{j-2}(t_{k_3}) + \beta_2\, h\Big] + \beta_2\, h(t_i\alpha + 1) \\
&\le \alpha^3\, h^3 \sum_{k_1=0}^{i-1} \sum_{k_2=0}^{k_1-1} \sum_{k_3=0}^{k_2-1} R_{j-2}(t_{k_3}) + \beta_2\, h\Big(\frac{t_i^2}{2}\alpha^2 + t_i\alpha + 1\Big).
\end{aligned}$$

Continuando desta maneira e lembrando que $R_0(t) \equiv 0$, temos que

$$R_{j+1}(t_i) \;\le\; \beta_2\, h \sum_{p=0}^{j} \frac{[t_i\,\alpha]^p}{p!} \;\le\; \beta_2\, h e^{a\,\alpha}, \tag{3.16}$$

o que implica que $R_{j+1}(t_i) \to 0$ quando $h \to 0$, para todo $i = 1, \ldots, M$ e para cada $j \in \mathbb{N}$. Isso significa que $R_{j+1}(t) \to 0$ quando $h \to 0$ para todo $t \in [-p, a]$ e que $\Phi_j \to u_j$, quando $h \to 0$ para cada $j \in \mathbb{N}$.

Para demonstrar que o método numérico converge para a solução do Problema (3.1), podemos afirmar que dado $\epsilon > 0$ existem $j_\epsilon, M_\epsilon \in \mathbb{N}$ tais que $\|\Phi_j^M - x\|_{C([0,a];\mathbb{R})} < \epsilon$, para todo $M \ge M_\epsilon$ e todo $j \ge j_\epsilon$.

Notamos que, pela demonstração do Teorema 3.3 e pela desigualdade (3.7), conseguimos obter j_ϵ tal que $\|u_{j_\epsilon} - x\|_{C([0,a];\mathbb{R})} \le \frac{\epsilon}{2}$.

Já pela demonstração deste teorema e pela desigualdade (3.16), conseguimos calcular M_ϵ tal que $\|\Phi_{j_\epsilon}^{M_\epsilon} - u_{j_\epsilon}\|_{C([0,a];\mathbb{R})} \le \frac{\epsilon}{2}$. Logo,

$$\|\Phi_{j_\epsilon}^{M_\epsilon} - x\|_{C([0,a];\mathbb{R})} \;\le\; \|\Phi_{j_\epsilon}^{M_\epsilon} - u_{j_\epsilon}\|_{C([0,a];\mathbb{R})} + \|u_{j_\epsilon} - x\|_{C([0,a];\mathbb{R})} \;\le\; \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \;\le\; \epsilon.$$

Isso conclui a prova. ■

3.1.2 Exemplo

Nesta seção, estudamos o seguinte exemplo do Problema (3.1)

$$\begin{aligned}
x'(t) &= 0.2\, x(t) - x(t) \int_{-1}^{t} \sin\Big(x\Big(\tau - \frac{|x(\tau)|}{|x(\tau)|+1}\Big)\frac{1}{10}\Big)\, \frac{1}{4}(t-\tau)e^{-\frac{1}{2}(t-\tau)}\, d\tau,\ t \in [0,1], \\
x(t) &= |\cos(t)|,\ t \in [-1,0],
\end{aligned} \tag{3.17}$$

em que $s = 0.2$, $p = 1$, $a = 1$ e as funções $f(x) = x$, $\eta(t) = \sin(t/10)$, $\sigma(\tau, x) = \tau - \frac{|x|}{|x|+1}$, $g(t) = \frac{1}{4}te^{-\frac{1}{2}t}$ e $\varphi(t) = |\cos(t)|$.

É fácil ver que as funções satisfazem as hipóteses do Teorema 3.3, pois $f \in C_{Lip}(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $\eta \in C_{Lip}(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $\sigma \in C_{Lip}([-1,1] \times \mathbb{R}; [-1,1])$, $g \in C([0,2];\mathbb{R}^+)$ e $\varphi \in C_{Lip}([-1,0];\mathbb{R})$ são Lipschitz, com constantes de Lipschitz $L_f = 1$, $L_\eta = 1$, $L_\sigma = 1$, $L_\varphi = 1$ e $L_g = \frac{1}{4}$ e a função $\eta(\cdot)$ é limitada.

Assim, pelo Teorema 3.3, a sequência de Picard $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $C([-1,1];\mathbb{R})$ dada por $u_n(t) = |\cos(t)|$ para $t \in [-1,0]$ e $n \in \mathbb{N}$, $u_0(t) = 1$ para $t \in [0,1]$ e

$$u_{n+1}(t) = 1 + \int_0^t \Big[0.2\, u_n(\theta) - u_n(\theta) \int_{-1}^{\theta} \sin\Big(u_n\Big(\tau - \frac{|u_n(\tau)|}{|u_n(\tau)|+1}\Big)\frac{1}{10}\Big)\frac{1}{4}(\theta-\tau)e^{-\frac{1}{2}(\theta-\tau)}\, d\tau\Big] d\theta,$$

para $t \in [0,1]$ é convergente para a solução do Problema (3.17) e ela é única em $[-1,1]$.

Para calcular uma aproximação para a solução usando o método numérico definido em 3.4, começamos escolhendo uma precisão de ϵ e, a partir desse ϵ, calculamos o número de termos da sequência de Picard j_ϵ necessário para alcançar tal precisão. Tomando $\epsilon = 10^{-1}$ e usando as notações da prova do Teorema 3.3, calculamos as seguintes constantes

$$\begin{aligned}
C_g &= \sup_{t\in[0,1]} \int_{-1}^{t} |g(t-\tau)|\, d\tau = \max_{s\in[0,2]} |g(s)| \sup_{t\in[0,1]} \int_{-1}^{t} d\tau = g(2) \times 2 = 0.368;\\
M_G &= 2\|\eta\|_{C(\mathbb{R};\mathbb{R})}\|g\|_{C([0,2];\mathbb{R}^+)} = 0.368;\\
M_1 &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_{C([-1,1];\mathbb{R})} = e^{0,2-0.368} = 1.765;\\
M_f &= \|f(\cdot)\|_{C([-1.756,1.756];\mathbb{R})} = 1.765;\\
M_2 &= 0.2M_f + M_1M_G + L_\varphi = 2.003;\\
C_1 &= M_1L_\eta L_f(1 + M_2\, L_\sigma)C_g = 1.95;\\
\alpha &= 0.2L_f + M_G + C_1 = 2.518.
\end{aligned}$$

Além dos cálculos anteriores, precisamos estimar $Z_0(a)$ que aparece na desigualdade (3.7). Para isso, estimamos primeiramente $z_0(t) = |u_1(t) - u_0(t)|$. Notamos que

$$\begin{aligned}
z_0(t) &= \Big|\int_0^t \Big[0.2 - \int_{-1}^{\theta} \sin\Big(u_0\Big(\tau - \frac{|u_0(\tau)|}{|u_0(\tau)|+1}\Big)\frac{1}{10}\Big)\frac{1}{4}(\theta-\tau)e^{-\frac{1}{2}(\theta-\tau)}\, d\tau\Big] d\theta\Big|\\
&\le 0.2\int_0^t d\theta + \int_0^t\int_{-1}^{\theta} \Big|\sin\Big(u_0\Big(\tau - \frac{|u_0(\tau)|}{|u_0(\tau)|+1}\Big)\frac{1}{10}\Big)\Big|\Big|\frac{1}{4}(\theta-\tau)e^{-\frac{1}{2}(\theta-\tau)}\Big|\, d\tau\, d\theta\\
&\le 0.2t + \int_0^t\int_{-1}^{\theta} 0.184\, d\tau\, d\theta\\
&\le 0.2t + 0.184(\frac{t^2}{2} + t)\\
&\le 0.568,
\end{aligned}$$

visto que a função $z_0(\cdot)$ atinge o máximo em $t = 1$. Assim, $Z_0(a) = Z_0(1) = 0.568$. Com isso, podemos calcular o número j_ϵ pela relação (3.7)

$$Z_0(a)\frac{(\alpha\, a)^n}{(n)!} \;\le\; \frac{\epsilon}{2} \;=\; 0.05 \;\Leftrightarrow\; \frac{2.518^n}{n!} \;<\; 0.088,$$

de onde obtemos $n = 8$ e tomamos, portanto, $j_\epsilon = 8$.

Além disso, precisamos calcular o número de subintervalos M_ϵ. Para isso, utilizamos a desigualdade (3.16) definida na prova do Teorema 3.5. Usando as notações da prova do Teorema 3.5, calculamos as constantes

$$\begin{aligned}
c_1 &= 2L_\eta L_f \|g\|_{C([0,2];\mathbb{R}^+)}(1 + M_2 L_\sigma) = 1.105;\\
c_2 &= 2L_\eta L_f \|g\|_{C([0,2];\mathbb{R}^+)} M_2 L_\sigma (1 + M_2) + 4\|\eta\|_{C(\mathbb{R};\mathbb{R})} L_g + \|\eta\|_{C(\mathbb{R};\mathbb{R})}\|g\|_{C([0,2];\mathbb{R})} = 3.398;\\
\alpha &= 0.2L_f + M_G + M_1 c_1 = 2.518;\\
\beta &= 0.2L_f M_2 + M_2 M_G + M_1 c_2 = 7.135;\\
\beta_2 &= \beta + 2(0.2M_f + M_1 M_G) = 9.14.
\end{aligned}$$

Usando o anterior e a desigualdade (3.16), vemos que

$$\beta_2\, h e^{a\,\alpha} \;\leq\; \frac{\epsilon}{2} \;=\; 0,05 \;\;\Leftrightarrow\;\; h \;<\; 4.4 \times 10^{-4}.$$

Como $M_\epsilon > \frac{1}{h}$, obtemos que $M_\epsilon = 2280$.

Neste trabalho desenvolvemos um programa computacional usando o software MatLab. O código fonte é apresentado no Apêndice A. Usando este programa, geramos um gráfico para a aproximação da solução do Exemplo (3.17) com $j_\epsilon = 8$ e $M_\epsilon = 2280$ calculados acima, o qual pode ser visto na Figura 1.

Na Figura 2 apresentamos o gráfico das iteradas da sequência do método numérico com $M = 2280$ fixo e j variando e na Figura 3 apresentamos o gráfico das iteradas da sequência do método numérico com $j = 8$ fixo e M variando, para visualizar a convergência do método numérico para a solução do Problema (3.17). Observamos que não imprimimos a função história nesses gráficos a fim de ampliar a visibilidade das iteradas do método numérico.

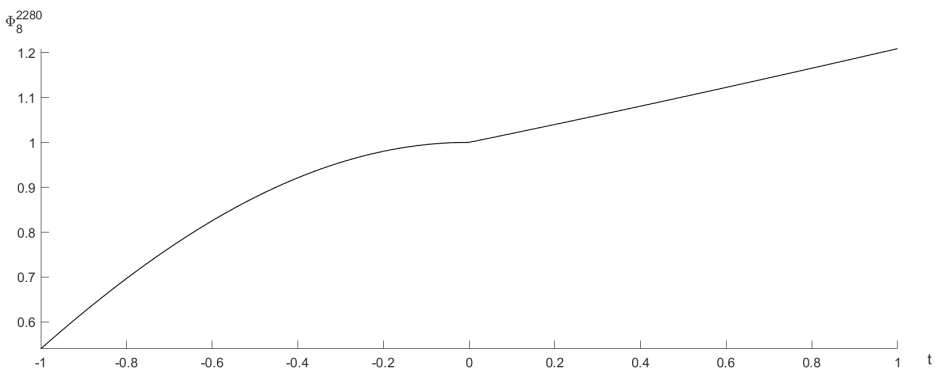

Figura 1 – Gráfico com $M_\epsilon = 2280$ e com $j_\epsilon = 8$

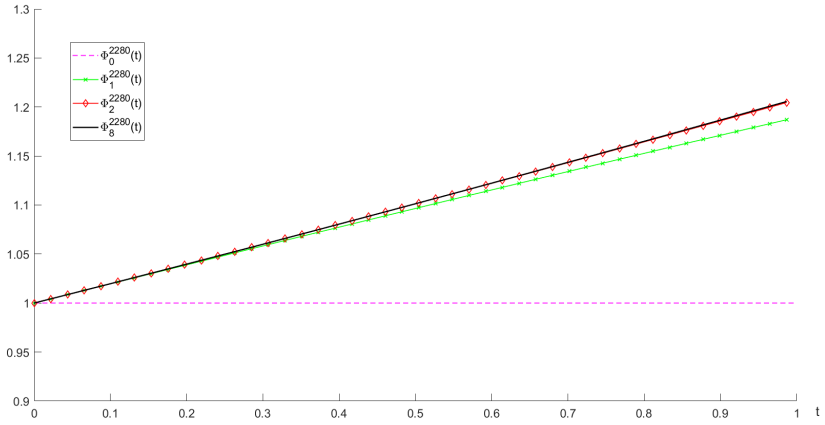

Figura 2 – Gráfico com $M = 2280$ fixo, com j variando

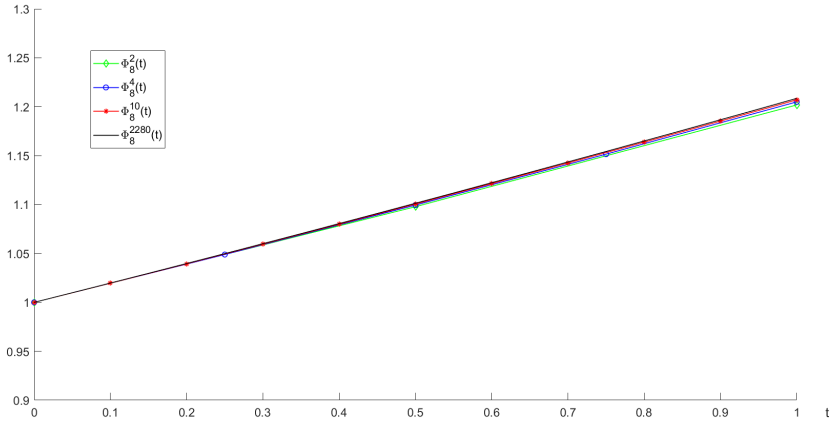

Figura 3 – Gráfico com $j = 8$ fixo, com M variando

3.2 Existência e unicidade da solução via Teorema da Contração

Nesta seção estudamos um modelo abstrato e com retardo infinito que permite generalizar os resultados sobre existência e unicidade de soluções do problema diferencial (3.1). Especificamente, estudamos o problema

$$\begin{cases} u'(t) &= F_1(u_t) + F_2(u_t)\displaystyle\int_{-\infty}^{t} F_3(u(\sigma(\tau, u(\tau))))g(t-\tau)\,d\tau, \quad t \in [0,a], \\ u(t) &= \varphi(t), \quad t \in (-\infty, 0], \ \varphi \in \mathcal{B} = C_U((-\infty,0];X), \end{cases} \tag{3.18}$$

onde $(X, \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach, $\mathcal{B}$ é o espaço formado por todas as funções uniformemente contínuas limitadas definidas de $(-\infty, 0]$ em X, munido da norma uniforme denotada por $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$, tal que $\|\varphi\|_{\mathcal{B}} = \sup_{\theta\in[-p,0]} \|\varphi(\theta)\|$, $F_i \in C(\mathcal{B}; X)$ para $i = 1, 2$, $F_3 \in C(X; X)$, $\sigma \in C((-\infty, a] \times X; (-\infty, a])$, $g \in C([0, \infty); \mathbb{R}^+)$ e $u_t : (-\infty, 0] \to X$, a história de $u(\cdot)$ no tempo t, é a função definida por $u_t(\theta) = u(t + \theta)$.

Notamos que, para $I \subset \mathbb{R}$, usamos a notação $C_{Lip}(I; X)$ como o espaço formado por todas as funções Lipschitz definidas de I em X, munido da norma $\|\cdot\|_{C_{Lip}(I;X)} = \|\cdot\|_{C(I;X)} + [\,\cdot\,]_{C_{Lip}(I;X)}$.

Definição 3.6 *Uma função $u \in C((-\infty, a]; X)$ é dita ser solução de* (3.18) *se $u \in C^1([0, a]; X)$, $u = \varphi$ em $(-\infty, 0]$ e para todo $t \in [0, a]$*

$$u'(t) = F_1(u_t) + F_2(u_t)\int_{-\infty}^{t} F_3(u(\sigma(\tau, u(\tau))))g(t-\tau)\,d\tau.$$

Para provar os resultados desta seção, precisamos dos seguintes lemas. O primeiro é uma adaptação do Lema 1.6.

Lema 3.7 *Suponha que $u, v \in C((-\infty, b]; X)$, $0 < b \leq a$, $u_0 = v_0$, $u_0 \in C_{Lip}((-\infty, 0]; X)$, $u_{|_{[0,b]}} \in C_{Lip}([0, b]; X)$ e $\sigma \in C_{Lip}((-\infty, b] \times X; (-\infty, b])$. Então $u \in C_{Lip}((-\infty, b]; X)$, $u(\sigma(\cdot, u(\cdot))) \in C_{Lip}((-\infty, b]; X)$ e*

$$\begin{aligned}
&[u(\cdot)]_{C_{Lip}((-\infty,b];X)} \leq \max\{[u_0]_{C_{Lip}((-\infty,0];X)}, [u_{|_{[0,b]}}]_{C_{Lip}([0,b];X)}\}, \\
&[u(\sigma(\cdot, u(\cdot)))]_{C_{Lip}((-\infty,b];X)} \\
&\qquad \leq [u]_{C_{Lip}((-\infty,b];X)}(1 + [\sigma]_{C_{Lip}((-\infty,b]\times X);(-\infty,b]}[u]_{C_{Lip}((-\infty,b];X)}), \\
&\|u(\sigma(\cdot, u(\cdot))) - v(\sigma(\cdot, v(\cdot)))\|_{C([0,b];X)} \\
&\qquad \leq (1 + [\sigma]_{C_{Lip}((-\infty,b]\times X);(-\infty,b]}[u]_{C_{Lip}((-\infty,b];X)})\|u - v\|_{C([0,b];X)}.
\end{aligned}$$

O segundo lema é uma adaptação do Lema 1.17. A prova é semelhante ao anterior e notamos que a continuidade da função $t \mapsto u_t$ é provada usando que $u(\cdot)$ é uniformemente contínua em $(-\infty, b]$.

Lema 3.8 *Suponha que $u, v \in C((-\infty, b]; X)$, $0 < b \leq a$ tais que $u_0 = v_0 \in \mathcal{B}$ e que $f \in C_{Lip}(\mathcal{B}; X)$. Então, as funções $t \to u_t$ e $t \to f(u_t)$ são contínuas e*

$$\|f(u_t) - f(v_t)\| \ \leq \ [f]_{C_{Lip}(\mathcal{B};X)} \|u - v\|_{C_{Lip}([0,b];X)}.$$

Para provar nosso principal resultado desta seção, introduzimos a seguinte condição.

Condição $H_{F_i,\sigma}$: As funções $F_i(\cdot)$, $i = 1, 2, 3$ e $\sigma(\cdot)$ são Lipschitz e $\sigma(t, x) \leq t$ para todo $0 \leq t \leq a$ e $x \in X$.

Por conveniência, no que segue usamos as notações $[F_i]_{C_{Lip}}$ e $[\sigma]_{C_{Lip}}$ no lugar de $\|F_i\|_{C(\mathcal{B};X)}$, $i = 1, 2$, $[F_3]_{C(X;X)}$ e $[\sigma]_{C_{Lip}((-\infty,a]\times X;(-\infty,a])}$. Além disso, para $u \in C_{Lip}(I; X)$ com $I \subset \mathbb{R}$, escrevemos simplesmente $[u]_{C_{Lip}}$ ao invés de $[u]_{C_{Lip}(I;X)}$. Adotamos uma nomenclatura semelhante para a norma de outros espaços de funções contínuas.

Teorema 3.9 *Assuma que a condição $H_{F_i,\sigma}$ é verificada, $\varphi \in \mathcal{B}$ e $g \in L^1([0, \infty); \mathbb{R}^+)$. Então, existe uma única solução $u \in C_{Lip}((-\infty, b]; X)$ do Problema* (3.18) *em $[0, b]$ para algum $b > 0$.*

Prova: Sejam $\Lambda_1 = \int_0^\infty g(\theta)\, d\theta$, $\Lambda_2 = \sup_{\theta \leq 0} \int_{-\infty}^{\theta} \|F_3(\varphi(\sigma(\tau, \varphi(\tau))))\| g(\theta - \tau)\, d\tau$ e $R > 0$ tal que

$$R \ > \ \|F_1(\varphi)\| + \|F_2(\varphi)\|\Lambda_2 + [\varphi]_{C_{Lip}((-\infty,0])}. \tag{3.19}$$

Seja $F_{3,\varphi} = F_3(\varphi(\sigma(0, \varphi(0))))$. Fixamos agora $0 < b \leq a$ tal que

$$\begin{aligned} &([F_1]_{C_{Lip}} Rb + \|F_1(\varphi)\|) + ([F_2]_{C_{Lip}} Rb + \|F_2(\varphi)\|)\Lambda_2 \\ &+([F_2]_{C_{Lip}} Rb + \|F_2(\varphi)\|)([F_3]_{C_{Lip}}[\sigma]_{C_{Lip}} R(1+R)b + \|F_{3,\varphi}\|)\, \|g\|_{C([0,a])} b \ \leq \ R, \quad (3.20) \\ &[F_1]_{C_{Lip}} b + (\Lambda_2 + ([F_3]_{C_{Lip}}[\sigma]_{C_{Lip}} R(1+R)b + \|F_{3,\varphi}\|)\, \|g\|_{C([0,a])})[F_2]_{C_{Lip}} b^2 \\ &+([F_2]_{C_{Lip}} Rb + \|F_2(\varphi)\|)[F_3]_{C_{Lip}}(1 + [\sigma]_{C_{Lip}} R)\Lambda_1 b \ < \ 1. \quad (3.21) \end{aligned}$$

Seja $S(b)$ o espaço

$$S(b) \ = \ \{u \in C((-\infty, b]; X) : \ u_0 = \varphi \text{ e } [u]_{C_{Lip}((-\infty,b];X)} \leq R\},$$

munido da métrica $d(u, v) = \|u - v\|_{C([0,b];X)}$ e $\Gamma : S(b) \to C((-\infty, b]; X)$ a função dada por $(\Gamma u)_0 = \varphi$ em $(-\infty, 0]$ e

$$\Gamma u(t) \ = \ \underbrace{\varphi(0) + \int_0^t F_1(u_s)\, ds}_{\Gamma_1 u(t)} + \underbrace{\int_0^t F_2(u_s) F(u)(s)\, ds}_{\Gamma_2 u(t)}, \quad t \in [0, b],$$

onde, por conveniência, usamos a notação $F(u)$ para a função $F(u) : [0, b] \mapsto X$ dada por

$$F(u)(t) = \int_{-\infty}^t F_3(u(\sigma(\tau, u(\tau))))g(t - \tau)\, d\tau.$$

No que segue, provamos que Γ é uma contração em $S(b)$. Para começar, para $u, v \in S(b)$ e $i = 1, 2$, notamos que

$$\begin{aligned} \|F_i(u_s)\| &\leq \|F_i(u_s) - F_i(\varphi)\| + \|F_i(\varphi)\| \\ &\leq [F_i]_{C_{Lip}} \|u_s - \varphi\| + \|F_i(\varphi)\| \\ &\leq [F_i]_{C_{Lip}} [u_{(\cdot)}]_{C_{Lip}} s + \|F_i(\varphi)\|, \end{aligned}$$

de onde obtemos que

$$\|F_i(u_{(\cdot)})\|_{C([0,b];X)} \leq [F_i]_{C_{Lip}} Rb + \|F_i(\varphi)\|, \quad \text{para } i = 1, 2.$$

Por outro lado, notando que $F_3(u(\sigma(s, u(s)))) = F_3(\varphi(\sigma(s, \varphi(s))))$ para $s \leq 0$, vemos que

$$\begin{aligned} \| \int_{-\infty}^{s} F_3(u(\sigma(\tau, u(\tau))))g(s-\tau)\, d\tau \| &\leq \int_{-\infty}^{s} \|F_3(\varphi(\sigma(\tau, \varphi(\tau))))\| g(s-\tau)\, d\tau \\ &\leq \sup_{\theta \leq 0} \int_{-\infty}^{\theta} \|F_3(\varphi(\sigma(\tau, \varphi(\tau))))\| g(\theta - \tau)\, d\tau \\ &\leq \Lambda_2. \end{aligned}$$

Além do anterior, para $s \in [0, b]$ temos que

$$\begin{aligned} \|F_3(u(\sigma(s, u(s))))\| &\leq \|F_3(u(\sigma(s, u(s)))) - F_3(u(\sigma(0, u(0))))\| + \|F_3(u(\sigma(0, u(0))))\| \\ &\leq [F_3]_{C_{Lip}} \|u(\sigma(s, u(s))) - u(\sigma(0, u(0)))\| + \|F_{3,\varphi}\| \\ &\leq [F_3]_{C_{Lip}} [u]_{C_{Lip}} |\sigma(s, u(s)) - \sigma(0, u(0))| + \|F_{3,\varphi}\| \\ &\leq [F_3]_{C_{Lip}} R [\sigma]_{C_{Lip}} (s + [u]_{C_{Lip}} s) + \|F_{3,\varphi}\|, \end{aligned}$$

o que implica que

$$\|F_3(u(\sigma(s, u(s))))\| \leq [F_3]_{C_{Lip}} [\sigma]_{C_{Lip}} R(1+R)s + \|F_{3,\varphi}\|, \quad 0 \leq s \leq b.$$

Das desigualdades anteriores, para $s \in [0, b]$ temos que

$$\begin{aligned} \|F(u)(s)\| &= \| \int_{-\infty}^{s} F_3(u(\sigma(\tau, u(\tau))))g(s-\tau)\, d\tau \| \\ &\leq \int_{-\infty}^{0} \|F_3(\varphi(\sigma(\tau, \varphi(\tau)))g(s-\tau)\|\, d\tau + \int_{0}^{s} \|F_3(u(\sigma(\tau, u(\tau)))g(s-\tau)\|\, d\tau \\ &\leq \Lambda_2 + ([F_3]_{C_{Lip}} [\sigma]_{C_{Lip}} R(1+R)b + \|F_{3,\varphi}\|)\, \|g\|_{C([0,a])} b. \end{aligned}$$

Provamos a seguir que $[\Gamma u]_{C_{Lip}((-\infty,b];X)} \leq R$. Usando as estimativas anteriores, para $t, h \in [0, b]$ com $t + h \in [0, b]$, vemos que

$$\begin{aligned} \|\Gamma u(t+h) - \Gamma u(t)\| &\leq \int_{t}^{t+h} \|F_1(u_s)\|\, ds + \int_{t}^{t+h} \|F_2(u_s) F(u)(s)\|\, ds \\ &\leq \|F_1(u_{(\cdot)})\|_{C([0,b];X)} h + \|F_2(u_{(\cdot)})\|_{C([0,b];X)} \|F(u)\|_{C([0,b];X)} h \\ &\leq ([F_1]_{C_{Lip}} Rb + \|F_1(\varphi)\|)h + ([F_2]_{C_{Lip}} Rb + \|F_2(\varphi)\|)\Lambda_2 h \\ &\quad + ([F_2]_{C_{Lip}} Rb + \|F_2(\varphi)\|)([F_3]_{C_{Lip}} [\sigma]_{C_{Lip}} R(1+R)b + \|F_{3,\varphi}\|)\|g\|_{C([0,a])} bh \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}[\Gamma u]_{C_{Lip}([0,b];X)} &\leq ([F_1]_{C_{Lip}}Rb + \|F_1(\varphi)\|) + ([F_2]_{C_{Lip}}Rb + \|F_2(\varphi)\|)\Lambda_2 \\ &+ ([F_2]_{C_{Lip}}Rb + \|F_2(\varphi)\|)([F_3]_{C_{Lip}}[\sigma]_{C_{Lip}}R(1+R)b + \|F_{3,\varphi}\|)\|g\|_{C([0,a])}b \leq R,\end{aligned}$$

o que mostra que $[\Gamma u]_{C_{Lip}((0,b];X)} \leq R$. Mais ainda, usando que $[\varphi]_{C_{Lip}((-\infty,0];X)} \leq R$, pelo Lema 3.7, obtemos que $[\Gamma u]_{C_{Lip}((-\infty,b];X)} \leq R$

Mostramos agora que $\Gamma(\cdot)$ é uma contração. Pela definição de $\Gamma_1(\cdot)$ e pelo Lema 3.8 é fácil ver que

$$\|\Gamma_1(u)(t) - \Gamma_1(v)(t)\| \leq \int_0^t \|F_1(u_s) - F_1(v_s)\|\, ds \leq [F_1]_{C_{Lip}}b\|u-v\|_{C([0,b];X)},$$

o que implica que

$$\|\Gamma_1(u) - \Gamma_1(v)\|_{C([0,b];X)} \leq [F_1]_{C_{Lip}}b\|u-v\|_{C([0,b];X)}.$$

Além do anterior, para Γ_2 temos que

$$\begin{aligned}&\|\Gamma_2(u)(t) - \Gamma_2(v)(t)\| \\ &\leq \int_0^t \|F_2(u_s) - F_2(v_s)\|\,\|F(u)(s)\|\, ds + \int_0^t \|F_2(v_s)\|\,\|F(u)(s) - F(v)(s)\|\, ds \\ &\leq \|F(u)\|_{C([0,b];X)} \int_0^t \|F_2(u_s) - F_2(v_s)\|\, ds \\ &\quad + \|F_2(v_{(\cdot)})\|_{C([0,b];X)} \int_0^t \|F(u)(s) - F(v)(s)\|\, ds \\ &\leq (\Lambda_2 + ([F_3]_{C_{Lip}}[\sigma]_{C_{Lip}}R(1+R)b + \|F_{3,\varphi}\|))\|g\|_{C([0,a])}[F_2]_{C_{Lip}}b^2\|u-v\|_{C([0,b];X)} \\ &\quad + ([F_2]_{C_{Lip}}Rb + \|F_2(\varphi)\|)\int_0^t \|F(u)(s) - F(v)(s)\|\, ds. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Em relação ao termo integral no lado direito de (3.22), do Lema 3.7 segue que

$$\begin{aligned}\|F(u)(s) - F(v)(s)\| &\leq \int_{-\infty}^s \|F_3(u(\sigma(\tau,u(\tau)))) - F_3(v(\sigma(\tau,v(\tau))))\|g(s-\tau)\, d\tau \\ &\leq \int_{-\infty}^s [F_3]_{C_{Lip}}\|u(\sigma(\tau,u(\tau))) - v(\sigma(\tau,v(\tau)))\|g(s-\tau)\, d\tau \\ &\leq \int_{-\infty}^s [F_3]_{C_{Lip}}(1 + [\sigma]_{C_{Lip}}[u]_{C_{Lip}})\|u-v\|_{C([0,b];X)}g(s-\tau)\, d\tau \\ &\leq [F_3]_{C_{Lip}}(1 + [\sigma]_{C_{Lip}}R)\|u-v\|_{C([0,b];X)}\int_0^\infty g(\tau)\, d\tau, \end{aligned} \tag{3.23}$$

de onde obtemos que

$$\|F(u) - F(v)\|_{C([0,b];X)} \leq [F_3]_{C_{Lip}}(1 + [\sigma]_{C_{Lip}}R)\Lambda_1\|u-v\|_{C([0,b];X)}. \tag{3.24}$$

Usando (3.23) e (3.24) em (3.22), inferimos que

$$\begin{aligned}\|\Gamma_2(u) - \Gamma_2(v)\|_{C([0,b];X)} &\leq \int_0^t \|F_2(u_s)F(u)(s) - F_2(v_s)F(v)(s)\|\, ds \\ &\leq (\Lambda_2 + ([F_3]_{C_{Lip}}[\sigma]_{C_{Lip}}R(1+R)b + \|F_{3,\varphi}\|)\,\|g\|_{C([0,a])})[F_2]_{C_{Lip}}b^2\|u-v\|_{C([0,b];X)} \\ &\quad + ([F_2]_{C_{Lip}}Rb + \|F_2(\varphi)\|)[F_3]_{C_{Lip}}(1 + [\sigma]_{C_{Lip}}R)\Lambda_1 b\|u-v\|_{C([0,b];X)}. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Finalmente, de (3.25) e (3.21) obtemos que $\Gamma(\cdot)$ é uma contração em $S(b)$, o que prova que existe uma única solução $u \in C_{Lip}((-\infty, b]; X)$. ■

O próximo resultado sobre a existência global e unicidade da solução segue diretamente da prova do Teorema 3.9.

Corolário 3.10 *Suponha que as condições do Teorema 3.9 sejam válidas e assuma que existe $R > 0$ tal que as desigualdades* (3.19), (3.20) *e* (3.21) *são verificadas com "a" no lugar de "b". Então, existe uma única solução $u \in C_{Lip}(-\infty, a]; X)$ do Problema* (3.18).

Para terminar esta seção, usamos o Teorema 3.9 para estudar a existência e unicidade de soluções para o problema diferencial com retardo dependendo do estado

$$\begin{cases} k'(t) &= sf(k(t)) - k(t)\displaystyle\int_{-\infty}^{t} n_s(f(k(\sigma(\tau, k(\tau)))))g(t-\tau)d\tau, \quad t \in [0, a], \\ k_0 &= \varphi \in \mathcal{B} = C_U((-\infty, 0]; \mathbb{R})), \end{cases} \tag{3.26}$$

o qual considera $p = \infty$ no Problema (3.1).

Proposição 3.11 *Se as funções $f(\cdot)$ e $n_s(\cdot)$ são Lipschitz, $\varphi \in C_{Lip}((-\infty, 0]; \mathbb{R})$ é limitada, $\sigma \in C_{Lip}((-\infty, a] \times \mathcal{B}; (-\infty, a])$, $\sigma(t, x) \leq t$ para todo $t \leq a$ e $x \in \mathbb{R}$ e $g \in L^1([0, \infty); \mathbb{R})$, então existe uma única solução $u \in C_{Lip}((-\infty, b]; \mathbb{R})$ do Problema* (3.26) *para algum $b > 0$.*

Para completar nossas observações sobre o Problema (3.26), em seguida, consideramos o caso especial onde $n_s(t) = t$ para todo t e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função dada por $f(s) = s^\alpha$

$$\begin{cases} k'(t) &= sk^\alpha(t) - k(t)\displaystyle\int_{-\infty}^{t} k^\alpha(\sigma(\tau, k(\tau)))g(t-\tau)d\tau, \quad t \in [0, a], \\ k_0 &= \varphi \in C_U((-\infty, 0]; \mathbb{R}), \end{cases} \tag{3.27}$$

com $s, \alpha \in (0, 1)$. Este modelo é particularmente interessante porque a função de produção por trabalhador $f(\cdot)$ é uma função do tipo função Cobb-Douglas, que é amplamente utilizada pelos economistas e, do ponto de matemático, traz uma complicação por ser apenas localmente Lipschitz em $(0, \infty)$.

Assim, a prova da próxima proposição segue da prova do Teorema 3.9 com algumas modificações e a introdução de uma suposição extra para a condição inicial $\varphi(\cdot)$, para ser possível lidar com a função Cobb-Douglas.

Proposição 3.12 *Suponha que as condições da Proposição 3.11 são verificados e que existe $\gamma > 0$ tal que $\varphi(\theta) > \gamma$ para todo $\theta \leq 0$. Então existe uma solução única solução $u \in C_{Lip}((-\infty, b]; \mathbb{R}^+)$ do Problema* (3.27) *para algum $b > 0$.*

Prova: Como apontado acima, a prova segue da prova do Teorema 3.9 com algumas modificações. Sejam $\epsilon > 0$ e $n_s > 0$ tais que $\frac{\gamma}{2} + \epsilon < \varphi(\theta) < n_s$ para todo $\theta \leq 0$. Pelo Teorema do Valor Médio, Teorema 1.7, é fácil ver que a função $f(s) = s^\alpha$ é Lipschitz em $[\frac{\gamma}{2} + \epsilon, \infty)$ com constante de Lipschitz $(\epsilon + \frac{\gamma}{2})^{\alpha-1}$.

Para usar os argumentos da prova do Teorema 3.9, definimos as funções $F_i : \mathcal{B} \to \mathbb{C}$, $i = 1, 2$ e $F_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ por $F_1\psi = s\psi^\alpha(0)$, $F_2\psi = \psi(0)$ e $F_3(s) = s^\alpha$.

Escolhemos agora $R > 0$ tal que a desigualdade (3.19) é satisfeita. Também escolhemos $0 < b \leq a$ tal que as desigualdades (3.20) e (3.21) são satisfeitas com $[F_1]_{C_{Lip}} = s(\epsilon + \frac{\gamma}{2})^{\alpha-1}$, $[F_2]_{C_{Lip}} = 1$ e $[F_3]_{C_{Lip}} = (\epsilon + \frac{\gamma}{2})^{\alpha-1}$. Além das condições acima para b, também assumimos que $\frac{\gamma}{2} + \epsilon < \varphi(0) - Rb < n_s$,

$$\varphi(0) \;\geq\; \frac{\gamma}{2} + \epsilon + n_s^{\alpha+1}\Lambda_1 b \;\text{ e }\; \varphi(0) \;\leq\; n_s - (sn_s^\alpha + n_s^{\alpha+1}\Lambda_1)b. \tag{3.28}$$

Seja $S(b)$ o espaço

$$S(b) \;=\; \{u \in C((-\infty, b]; \mathbb{R}) : \; u_0 = \varphi \text{ e } [u]_{C_{Lip}((-\infty,b];\mathbb{R})} \leq R, \; \frac{\gamma}{2} + \epsilon \leq u(t) \leq n_s, \;\; \forall \;\; t \leq b\},$$

dotado de métrica $d(u, v) = \|u - v\|_{C([0,b];\mathbb{R})}$ e $\Gamma : S(b) \to C((-\infty, b]; X)$ definido como na prova do Teorema 3.9.

Para mostra que $\Gamma(\cdot)$ é uma contração em $S(b)$, para $u \in S(b)$ e $t \in [0, b]$ notamos que $|u(t) - \varphi(0)| \leq Rb$, o que implica que $u(t) \in (\varphi(0) - Rb, \varphi(0) + Rb) \subset (\frac{\gamma}{2} + \epsilon, n_s)$. Usando este fato e observando que $\frac{\gamma}{2} + \epsilon < \varphi(\theta) < n_s$ para todo $\theta \leq 0$, notamos que

$$\begin{aligned}
\Gamma u(t) &= \varphi(0) + s\int_0^t u^\alpha(\tau)d\tau - \int_0^t u(\tau)\int_{-\infty}^\tau u^\alpha(\sigma(s, u(s)))g(\tau - s)\, ds\, d\tau \\
&\geq \varphi(0) - \int_0^t n_s \int_{-\infty}^\tau n_s^\alpha g(t - \tau)\, d\tau \\
&\geq \varphi(0) - n_s^{\alpha+1}\Lambda_1 b,
\end{aligned}$$

o que implica que $\Gamma u(t) \geq \frac{\gamma}{2} + \epsilon$. Argumentando de forma semelhante, obtemos

$$\begin{aligned}
\Gamma u(t) &= \varphi(0) + s\int_0^t u^\alpha(\tau)d\tau - \int_0^t u(\tau)\int_{-\infty}^\tau u^\alpha(\sigma(s, u(s)))g(\tau - s)\, ds\, d\tau \\
&\leq \varphi(0) + sn_s^\alpha b + n_s^{\alpha+1} b\Lambda_1,
\end{aligned}$$

o que mostra que $\Gamma u(t) \leq n_s$ para todo $t \in [0, b]$. Além disso, observando que $\frac{\gamma}{2} + \epsilon < \varphi(\theta) < n_s$ para todo $\theta \leq 0$, obtemos que $\frac{\gamma}{2} + \epsilon < \Gamma u(\theta) < n_s$ para todo $\theta \leq b$ e $u \in S(b)$.

A partir das observações acima e argumentando como na prova do Teorema 3.9 podemos provar que $[\Gamma u]_{C_{Lip}((-\infty,b];\mathbb{R})} \leq R$ e que $\Gamma(\cdot)$ é uma contração em $S(b)$, o que nos permite concluir a prova. ■

4

Conclusão

Este trabalho apresenta um tema atual e o estudo realizado contribui para o desenvolvimento de pesquisas nas três áreas do conhecimento envolvidas.

Na matemática pura, contribui para a compreensão de modelos diferenciais com retardo dependendo do estado trazendo dois novos teoremas, sendo que o primeiro apresenta condições suficientes para existência e unicidade de soluções do problema concreto do modelo de crescimento econômico de Solow com retardo dependendo do estado e o segundo estuda um modelo mais geral e abstrato e com retardo infinito.

Na análise numérica, apresenta um método baseado nas iteradas de Picard, que além de possuir uma fórmula simples de ser implementada computacionalmente, apresenta apenas uma hipótese adicional, além das que já foram impostas para garantir a existência e unicidade do problema diferencial, e pode ser estendido para incluir modificações e melhorias no modelo para resolver problemas cada vez mais realistas.

Na economia, apresenta a evolução dos modelos de crescimento econômico, desde o trabalho inicial do economista Robert Solow até os trabalhos mais atuais dos economistas Luciano Fanti e Pietro Manfredi, propondo uma modificação que tenha algum significado prático. A principal contribuição é a inclusão do retardo dependendo do estado no termo da renda dentro da função que representa a natalidade. A partir dessa modificação, decorreu todo o estudo, finalizando com o exemplo que apresenta uma solução numérica do problema.

Para continuidade deste trabalho, deixamos como proposta uma interpretação mais aprofundada do modelo econômico proposto bem como da solução numérica.

Referências

BARTLE, R. G. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. [S.l.]: John Wiley & Sons. Inc, 1995.

BOYCE, E. W.; DIPRIMA, R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. [S.l.]: LTC, 2015.

BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. *Numerical Analysis*. [S.l.]: Cengage Learning, 2010.

ENRIGHT, W. H.; HAYASHI, H. Convergence analysis of the solution of retarded and neutral delay differential equations by continuous numerical methods. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Society for Industrial and Applied Mathematics, v. 35, n. 2, p. 572–585, april 1998.

ESTEVAM, L. *Tópicos de Equações Diferenciais com Retardamento: uma abordagem segundo o trabalho do Prof. Nelson Onuchic*. [S.l.]: Dissertação de mestrado - UNESP Rio Claro, 2012.

FANTI, L.; MANFREDI, P. The solow's model with endogenous population: a neoclassical growth cycle model. *Journal of Economic Development*, v. 28, n. 2, p. 103, dec 2003.

HALE, J. K. *Ordinary Differential Equations*. [S.l.]: Krieger Publishing Company, 1980.

HERNANDEZ, E.; PIERRI, M.; WU, J. C $^{1+\alpha}$ -strict solutions and wellposedness of abstract differential equations with state dependent delay. *Journal of Differential Equations*, v. 261, n. 12, p. 6856–6882, 2016.

HERNANDEZ, E.; ROLNIK, V.; MANSO, J. Existence and numerical approximation of solutions of neutral differential equations with state-dependent delay. *Submetido à publicação*.

JONES, C. *Introdução à teoria do crescimento econômico*. [S.l.]: Campus, 2000.

KOLMANOVSKII, V.; MYSHKIS, A. *Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations*. [S.l.]: Kluwer Academic Publishers, 1999.

KREYSZIG, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*. [S.l.]: John Wiley & Sons. Inc, 1989.

ONUCHIC, N. *Equações Diferenciais com Retardamento*. [S.l.]: Escola de Engenharia de São Carlos, USP, 1971.

SMITH, H. *An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Live Sciences*. [S.l.]: Springer, 2011.

SOLOW, R. M. A contribution to the theory of economic growth. *The Quarterly Journal of Economics*, Oxford University Press (OUP), v. 70, n. 1, p. 65, feb 1956.

STAMOVA, I.; STAMOV, G. *Applied Impulsive Mathematical Models*. [S.l.]: Springer International Publishing Switzerland, 2016.

STAMOVA, I. M.; STAMOV, A. G. On the stability of the solutions of an impulsive solow model with endogenous population. *Economic Change and Restructuring*, Springer Science + Business Media, v. 46, n. 2, p. 203–217, march 2013.

WEIL, D. *Economic Growth*. [S.l.]: Pearson Addison Wesley, 2009. (Addison-Wesley series in economics).

A

Código no MatLab

Aqui apresentamos o código no programa MatLab desenvolvido para resolver o Problema (3.1). Para validar o programa, foi preciso testar vários problemas cuja solução é conhecida. Por isso, criamos um programa que resolve o seguinte modelo integro-diferencial

$$\begin{cases} x'(t) &= f_1(t,x(t)) + f_2(t,x(t)) \displaystyle\int_{t_0-p}^{t} f_3(t,\tau,x(\tau),x(\sigma(\tau,x(\tau)))) \, g(t-\tau)\, d\tau, \quad t \geq t_0 \\ x(t) &= \varphi(t), \quad t \in [t_0-p, t_0], \end{cases} \tag{A.1}$$

Observamos que se $f_3(t,\tau,x(\tau),x(\sigma(\tau,x(\tau)))) = \eta(f(x(\sigma(\tau,x(\tau))))),\ f_2(t,x(t)) = -x(t)$, $f_1(t,x(t)) = sf(x(t))$ e $t_0 = 0$ temos exatamente o Problema (3.1).

De (A.1) e para $t \in [t_i, t_{i+1}]$, obtemos o método numérico

$$\begin{aligned} \Phi_{j+1}(t_i) &= \varphi(t_0) + h \sum_{k=0}^{i-1} f_1(t_k, \Phi_j(t_k)) \\ &+ h \sum_{k=0}^{i-1} f_2(t_k, \Phi_j(t_k)) h \sum_{l=-MN1}^{k-1} f_3(t_k, t_l, \Phi_j(t_l), \Phi_j(\sigma(t_l, \Phi_j(t_l)))) \, g(t_k - t_l) \\ &+ (t-t_i) f_1(t_i, \Phi_j(t_i)) \\ &+ (t-t_i) f_2(t_i, \Phi_j(t_i)) h \sum_{l=-MN1}^{i-1} f_3(t_i, t_l, \Phi_j(t_l), \Phi_j(\sigma(t_l, \Phi_j(t_l)))) \, g(t_i - t_l) \end{aligned} \tag{A.2}$$

Para implementar um programa mais efeciente, reescrevemos o método (A.2) usando a recorrência das funções $(\Phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$, por

$$\begin{aligned} \Phi_{j+1}(t_i) &= \Phi_{j+1}(t_{i-1}) + h\, f_1(t_{i-1}, \Phi_j(t_{i-1})) \\ &+ h\, f_2(t_{i-1}, \Phi_j(t_{i-1}))\, h \sum_{l=-N_1}^{0} f_3(t_{i-1}, t_l, \varphi(t_l), \varphi(\sigma(t_l, \varphi(t_l)))) \, g(t_{i-1} - t_l) \\ &+ h\, f_2(t_{i-1}, \Phi_j(t_{i-1}))\, h \sum_{l=1}^{i-2} f_3(t_{i-1}, t_l, \Phi_j(t_l), \Phi_j(\sigma(t_l, \Phi_j(t_l)))) \, g(t_{i-1} - t_l). \end{aligned} \tag{A.3}$$

O Código 1 apresenta um arquivo com as entradas do Problema (3.17). O Código 2 aplica o método numérico (A.3).

Os dados de entrada do Código 2 são `MN1`, `MN2`, `num_iteradas`, em que as duas primeiras são informações da malha e a terceira é o índice do último termo da sequência numérica que queremos calcular. Este código retorna dois vetores de comprimento $MN2+1$ que correspondem aos pontos discretos em $[t_0, t_f]$ e a aproximação numérica obtida após `num_iteradas` iterações de (A.3).

Código 1 - Dados do Exemplo (3.17)

```
function [p,t0,tf,f1,f2,f3,sigma,g,varphi]=exemplo
p = 1;
t0 = 0;
tf = 1;
f1 = @(t,x) 0.2*x;
f2 = @(t,x) -x;
f3 = @(t,tau,x,y) sin(y/10);
sigma = @(tau,x) tau -abs(x)/(abs(x)+1);
g = @(t) (1/4)*t*exp((-1/2)*t);
varphi = @(t) abs(cos(t));
end
```

Código 2 - Programa Picard Numérico

```
function [vt,sol]=metodo_picard_numerico(MN1,MN2,num_iteradas)
[p,t0,tf,f1,f2,f3,sigma,g,varphi]=exemplo;
h=(tf-t0)/MN2;
vt=t0:h:tf;
Phi=zeros(num_iteradas+1,MN2+1);
Phi(1,:)=varphi(t0);
Phi(:,1)=varphi(t0);
for j=2:num_iteradas+1
  somaf3=0;
  for L=0:MN1-1
    tau=t0-p +h*L;
    somaf3= somaf3 + ...
        f3(vt(1),tau,varphi(tau),varphi(sigma(tau,varphi(tau)))) ...
        *g(vt(1)-tau);
  end
  Phi(j,2)=Phi(j,1)+ h*f1(vt(1),Phi(j-1,1))+ ...
      (h^2)*f2(vt(1),Phi(j-1,1))*somaf3;
end
for j=2:num_iteradas+1
  somaf3=0;
  for L=0:MN1
    tau=t0-p +h*L;
    somaf3= somaf3 + ...
        f3(vt(2),tau,varphi(tau),varphi(sigma(tau,varphi(tau)))) ...
        *g(vt(2)-tau);
```

```
  end
  Phi(j,3)=Phi(j,2)+ h*f1(vt(2),Phi(j-1,2))+ ...
      (h^2)*f2(vt(2),Phi(j-1,2))*somaf3;
end
for j=2:num_iteradas+1
  for i=4:MN2+1
    somaf3=0;
    for L=0:MN1
      tau=t0-p +h*L;
      somaf3= somaf3 + ...
          f3(vt(i-1),tau,varphi(tau),varphi(sigma(tau,varphi(tau)))) ...
          *g(vt(i-1)-tau);
    end
    for L=2:i-2
      arg=sigma(vt(L),Phi(j-1,L));
      if arg ≤ t0
          phiarg=varphi(arg);
      else
          phiarg=calculaphiarg(j-1,arg,vt,Phi,varphi);
      end
      somaf3= somaf3 + ...
          f3(vt(i-1),vt(L),Phi(j-1,L),phiarg)*g(vt(i-1)-vt(L));
    end
    Phi(j,i)=Phi(j,i-1)+ h*f1(vt(i-1),Phi(j-1,i-1))+ ...
        (h^2)*f2(vt(i-1),Phi(j-1,i-1))*somaf3;
  end
end
sol=Phi(num_iteradas+1,:);
end
function aux=calculaphiarg(termo,t_delay,t,Phi,varphi)
 if (t_delay≤t(1))
    aux= varphi(t_delay);
 else
    k=1;
    while t_delay>t(k)
       inf=k;
       sup=k+1;
       k=k+1;
    end
    if t_delay-t(inf)<0.0001
     aux=Phi(termo,inf);
    else
     aux=interp1([t(inf),t(sup)],[Phi(termo,inf),Phi(termo,sup)],t_delay);
    end
 end
end
```