

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE FILOSOFIA, CIÊNCIAS E LETRAS DE RIBEIRÃO PRETO
DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO E MATEMÁTICA

PAULO JOSÉ RODRIGUES

Urnas interagentes em grafos finitos

Ribeirão Preto-SP

2023

PAULO JOSÉ RODRIGUES

Urnas interagentes em grafos finitos

Versão Original

Dissertação apresentada à Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto (FFCLRP) da Universidade de São Paulo (USP), como parte das exigências para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de Concentração: Computação Aplicada.

Orientador: Rafael A. Rosales

Ribeirão Preto-SP

2023

PAULO JOSÉ RODRIGUES

Interacting urns in finite graphs

Original Version

Dissertation presented to Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto (FFCLRP) from the Universidade de São Paulo (USP), as part of the requirements to hold the Master of Science degree.

Field of Study: Applied Computing.

Supervisor: Rafael A. Rosales

Ribeirão Preto-SP

2023

Paulo José Rodrigues

Urnas interagentes em grafos finitos. Ribeirão Preto–SP, 2023.
59p. : il.; 30 cm.

Dissertação apresentada à Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras
de Ribeirão Preto da USP, como parte das exigências para
a obtenção do título de Mestre em Ciências,

Área: Computação Aplicada

Orientador: Rafael A. Rosales.

1. Processo estocástico com reforço.
2. algoritmo de aproximação estocástica.
3. Teoria de probabilidade.

Paulo José Rodrigues

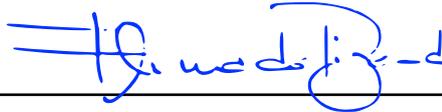
Urnas interagentes em grafos finitos

Dissertação apresentada à Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto da USP, como parte das exigências para a obtenção do título de Mestre em Ciências. Área: Computação Aplicada.

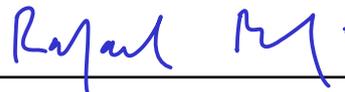
Ribeirão Preto-SP, 24 de fevereiro de 2023



Professora: Marta Cilene Gadotti
UNESP



Professor: Fernando Piguard de Almeida Prado
USP



Orientador: Rafael A. Rosales Mitrowsky
USP

Ribeirão Preto-SP
2023

Aos meus pais, obrigado pelo incansável apoio durante todo esse período de sacrifícios e conquistas na elaboração deste trabalho.

Agradecimentos

Aos meus pais, José Paulo Rodrigues e Marli Cristina Pereira Rodrigues pelo seu apoio incondicional.

Ao meu orientador Rafael Andrés Rosales Mitrowsky que me amparou e conduziu da melhor forma possível para a realização deste trabalho.

A Professora Marta Cilene Gadotti e ao Professor Fernando Pigearde de Almeida Prado, membros da banca examinadora, cujas observações melhoraram o conteúdo desta dissertação.

A Universidade de São Paulo e o Programa de Pós-Graduação em Computação Aplicada (PPGCA) por ter me acolhido como aluno do curso de mestrado.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro providencial para dedicação e conclusão deste trabalho. Ao Programa de Aperfeiçoamento de Ensino (PAE/USP) pelo aprendizado e pelo financiamento concedido, essencial para o bom andamento deste trabalho.

A todos os funcionários do Departamento de Computação e Matemática de Ribeirão Preto (DCM-USP) que sempre fizeram deste lugar minha segunda casa.

Aos amigos, familiares e todos os outros que torceram e acreditaram.

“Pensai o seguinte: a razão, meus senhores, é coisa boa, não há dúvida, mas a razão é só razão e satisfaz apenas a capacidade racional do homem, enquanto o ato de querer constitui a manifestação de toda a vida, isto é, de toda a vida humana, com a razão e com o coçar-se. E, embora nossa vida, nessa manifestação, resulte muitas vezes em algo ignóbil, é sempre a vida e não apenas a extração de uma raiz quadrada.”

- Fiódor Dostoiévski

Resumo

Rodrigues, P. J. **Urnas interagentes em grafos finitos**. 2023. 59f. Dissertação (Mestrado). Faculdade de Filosofia, Ciência e Letras de Ribeirão Preto - Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto, 2023.

Nesta dissertação consideramos um modelo de urnas interagentes, onde a interação é em parte definida pela estrutura de um grafo finito. Nosso trabalho surge como uma generalização de um modelo proposto independentemente por [Benaïm et al. \(2015\)](#) e [van der Hofstad et al. \(2016\)](#). Nestes artigos, uma urna é colocada nos vértices de um grafo finito $G = (E, V)$. Em cada etapa, uma bola é colocada em cada aresta $\langle u, v \rangle \in E$. A bola adicionada na aresta $\langle u, v \rangle$ pode ir para qualquer um dos vértices incidentes u ou v com probabilidade proporcional ao número atual de bolas em u e v . Nesta dissertação consideramos uma generalização deste processo ao incluir a interação de bolas de duas cores. A probabilidade de que uma bola de uma determinada cor seja colocada na urna do vértice u , por exemplo, é uma função decrescente do número de bolas da cor oposta em u . O objetivo principal deste trabalho consiste no estudo das propriedades assintóticas da ocupação dos vértices de G por ambas as cores. Nossa abordagem é baseada no tratamento de sistemas dinâmicos para processos de aproximação estocástica. O modelo aqui descrito é motivado por aplicações relacionadas aos processos de tomada de decisão e ao comportamento coletivo de agentes econômicos heterogêneos definidos em grafos. Nestes termos, o processo definido pela ocupação dos vértices de G por cada cor serve como ferramenta para modelar a competição entre duas populações por um bem ou tecnologia disponível no mercado.

Palavras-chave: Urnas interagentes, processo estocástico, processo com reforço, processo de aproximação estocástica, estabilidade, competição econômica.

Abstract

Rodrigues, P. J. **Interacting urns in finite graphs**. 2023. 59f. Dissertation (Masters degree). Faculdade de Filosofia, Ciência e Letras de Ribeirão Preto - Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto, 2023.

We consider a model of interacting urns in which the interaction depends on the geometry of a finite graph. Our work arises as a generalization of a model proposed independently by [Benaïm et al. \(2015\)](#) and [van der Hofstad et al. \(2016\)](#). In these articles, a urn is placed on the vertices of a finite graph $G = (E, V)$. At each time step, a ball is placed on each edge of the graph. The ball added at edge $\langle u, v \rangle \in E$ goes to any of the incident vertices u and v with probability proportional to the actual number of balls at u and v . Here we consider a generalization of this process, consisting in the extension that includes the interaction of balls of two colors. The probability that a ball of a given color goes to any one vertex in $\langle u, v \rangle$ is a decreasing function of the number of balls of the opposite color in that vertex. The main objective of this work consists in the study of the asymptotic properties of the vertex occupation by both colors. Our approach is based on the dynamical system treatment of stochastic approximation processes. The model described here is motivated by applications related to decision-making processes and the collective behavior of heterogeneous economic agents defined on graphs. In these terms, the stochastic process defined by the vertex occupation by each color serves as a tool to model the competition between two populations for a good or technology available on the market.

Keywords: Interacting urns, stochastic process, reinforced process, stochastic approximations, stability, economic competition.

Lista de figuras

Figura 1	– Retas ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 com um equilíbrio (B', B) do tipo (a_2) , e retas r_1, r_2 , e r_3 com um equilíbrio (C', C) do tipo (a_3) representados no 2-símplice. .	33
Figura 2	– Esquerda: gráficos das funções $g_\alpha(t)$ e $1 - t$ para diversos valores de α . Direita: gráficos de $h(t)$ e αt para diversos valores de α . Os círculos amarelos em cada um dos gráficos correspondem ao valor de t em que $g_\alpha(t) = 1 - t$ e $h(t) = \alpha t$	34
Figura 3	– Retas ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 descritas na demonstração do Lema 7, contidas no espaço de fase Δ definido pelo 2-símplice. sA retas ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_3 representam o equilíbrio (B', B) do tipo (b_2)	38
Figura 4	– Reta ℓ com um equilíbrio (B, B') , representados no 2-símplice Δ . O ponto $A(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ representa o ponto médio do segmento ℓ	41
Figura 5	– Gráfico das funções ℓ_α e g em (3.19). As duas retas ℓ_α correspondem aos casos ℓ_2 e $\ell_{6,8}$	48
Figura 6	– simulações para diferentes α no modelo triangular competitivo	51
Figura 7	– simulações para diferentes α no modelo triangular cooperativo.	52
Figura 8	– simulações para diferentes α no modelo estrela competitivo.	53
Figura 9	– simulações para diferentes α no modelo estrela cooperativo.	54

Sumário

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	O modelo de duas cores	15
1.2	Objetivo geral	17
1.2.1	Objetivos específicos	18
1.3	Referencial Teórico	18
1.3.1	Aproximações estocásticas	18
1.3.2	Abordagem dinâmica	18
1.3.3	O teorema do conjunto limite	19
2	APROXIMAÇÕES ESTOCÁSTICAS	22
2.1	Representação por uma aproximação estocástica	22
2.2	Abordagem dinâmica	23
2.2.1	Convergência com probabilidade positiva	26
2.2.2	Não convergência para equilíbrios instáveis	28
3	GRAFOS DE 3 VÉRTICES	31
3.1	Grafo triangular	31
3.1.1	Modelo competitivo	31
3.1.2	Modelo cooperativo	37
3.2	Estrela de 3 vértices	41
3.2.1	Modelo competitivo	42
3.2.2	Modelo cooperativo	46
4	SIMULAÇÕES	50
4.1	Modelo Triângular Competitivo	51
4.2	Modelo Triângular Cooperativo	52
4.3	Modelo Estrela Competitivo	53
4.4	Modelo Estrela Cooperativo	54
5	CONCLUSÕES	55
	Referências	57

Capítulo 1

Introdução

Processos com reforço dependentes do caminho modelados por esquemas de urnas tem sido considerados em diversos campos tais como física, química, sociologia e economia [Mahmoud \(2008\)](#); [Pemantle \(2007\)](#). Tais processos são importantes para tentar entender situações de competição e concorrência econômica, onde firmas, tecnologias ou produtos competem para difusão em um mercado específico. A competição envolve a interação entre populações de agentes heterogêneos, com diferenças e peculiaridades entre si, que incorporam tecnologias diferentes, expectativas diferentes e, muitas vezes, exibindo comportamentos diferentes. Além disso, é frequente o caso de que a aprendizagem organizacional esteja associada a vários tipos de externalidades e retornos crescentes [Dosi and Kaniovski \(1994\)](#); [Arthur et al. \(1988\)](#). O tempo todo, agentes econômicos são expostos a uma variedade imensa de bens, tecnologias e serviços e os mesmos precisam escolher qual deles adquirir ou adotar de acordo com suas preferências e racionalidade, assim como questões emocionais, dificilmente consideradas em um contexto mais amplo. Uma visão mais aprofundada do assunto pode ser encontrada em [Jackson \(2008\)](#), [Skyrms and Pemantle \(2000\)](#).

É óbvio que, uma dinâmica de difusão e competição entre agentes heterogêneos implicam que a história conta. Vários resultados são possíveis e o acúmulo de microdecisões “seleciona” um dos possíveis resultados de longo prazo. Em outras palavras, o que vai acontecer no futuro depende do passado, do “caminho”, e pode ser totalmente aleatório, pelo menos no início. Com o tempo, o processo se auto-reforça cada vez mais “perdendo” aleatoriedade, assim como uma dinâmica de urnas com reforço. A dinâmica de urna com reforço converge assintoticamente para um dos possíveis resultados. Esta propriedade assintótica permite explicar o efeito do “*lock-in*” econômico em uma das tecnologias ou produtos (não necessariamente os “melhores”) disponíveis no mercado [Arthur \(1989\)](#); [Dosi and Nelson \(1994\)](#); [Dosi et al. \(2019\)](#). No entanto, todos nós vivemos em um tempo finito e estamos interessados em entender o comportamento deste processo em um período finito considerável de tempo.

Diante disto, considerando este reforço, padrões de escolhas são observados de tal forma que, os agentes preferem escolher aqueles bens ou serviços que conhecem em detrimento de algo desconhecido, muitas vezes regidos por um comportamento coletivo de tomada de decisão [Guel \(2012\)](#). Esse comportamento coletivo, na qual indivíduos

consideram quantos já participaram de uma ação é bastante observado no mundo real, e ele será considerado durante o estudo deste projeto.

Um esquema de urnas que se encaixa perfeitamente a esta ideia de reforço são as Urnas de Pólya-Eggenberger, ver [Mahmoud \(2008\)](#). Em 1923, Pólya e Eggenberger formularam um processo dependente do caminho conhecido hoje em dia como a ‘Urna de Pólya’ o qual possui uma propriedade notável. Suponhamos que exista uma urna de capacidade infinita na qual são adicionadas bolas de duas cores - brancas e azuis. Iniciando com uma bola branca e uma azul na urna, uma bola é adicionada a cada vez, indefinidamente, de acordo com a seguinte regra:

1. uma bola é escolhida da urna ao acaso e sua cor é observada
2. se a bola escolhida em 1. é branca, s bolas brancas são colocadas dentro da urna; caso contrário são adicionadas s bolas azuis

Este processo tem incrementos que são dependentes do caminho - a probabilidade de que a bola adicionada na iteração $n+1$ seja branca é igual à proporção de bolas brancas no passo n . Podemos então perguntar: a proporção de bolas brancas (ou azuis) vagam indefinidamente entre zero e um, ou opera uma lei forte, de modo que a proporção se estabeleça até um limite, fazendo com que uma estrutura surja? E se houver uma proporção limite fixa, qual seria ela? Pólya mostrou ([Pólya, 1930](#)) que se $s = 2$ a proporção de bolas brancas converge quase certamente a um limite X , mas X é uma variável aleatória uniformemente distribuída entre 0 e 1. Mais geralmente, a proporção limite depende criticamente da configuração inicial de bolas na urna. Sejam $A(n)$ e $B(n)$, respectivamente o número de bolas azuis e brancas no passo n , $n \in \mathbb{N}$. Pólya mostrou que $X(n) = B(n)/(A(0) + B(0) + sn)$ converge em distribuição a uma variável aleatória X com densidade beta($B(0)/s, A(0)/s$). A densidade uniforme corresponde ao caso $B(0) = A(0) = 1$ e $s = 2$.

Recentemente, [Benaïm et al. \(2015\)](#) e [van der Hofstad et al. \(2016\)](#), de forma independente, consideraram um modelo de urnas as quais interagem a depender da estrutura imposta por um grafo. O modelo é o seguinte: seja $G = (E, V)$ um grafo finito, conexo, não direcionado e tal que $|E| = N$ e $|V| = d$. Suponhamos que cada vértice $v \in V$ possui uma urna com $U_v(0) \geq 1$ bolas. Em cada instante $n \geq 1$ é colocada uma bola em cada um dos elos de G . Denotamos por $\langle u, v \rangle$ o elo incidente aos vértices u e v , e por $U_i(n)$ o número de bolas no instante n em cada vértice $i = v, u$. Seja $\mathfrak{F}_n = \{\sigma(U_v(k)); 1 \leq k \leq n; v \in V\}$ a menor sigma-álgebra gerada pelo processo descrito pelo número de bolas nos vértices de G até o instante n . A probabilidade de que a bola no elo $\langle v, u \rangle$ seja adicionada à urna U_v no instante $n + 1$ é dada pela expressão

$$\mathbb{P}(v \text{ é escolhido dentre } \{u, v\} \text{ em } n + 1 \mid \mathfrak{F}_n) = \frac{U_v(n)^\alpha}{U_u(n)^\alpha + U_v(n)^\alpha},$$

onde $\alpha > 0$. A depender de α e da estrutura de G , [Benaïm et al. \(2015\)](#) e [van der Hofstad et al. \(2016\)](#) obtiveram resultados sobre a convergência quase certa da proporção de bolas em cada vértice.

[Benaïm et al. \(2015\)](#) tem por motivação a competição entre empresas pela comercialização de seus produtos em um mercado: imagine que temos 3 companhias denotadas M , A e G e que cada companhia vende dois produtos, M vende OS e SE , A vende OS e SP e G vende SE e SP . Cada par de companhias competem por um único produto. Uma questão natural neste caso é qual companhia vende mais produtos no longo prazo. Pode-se ver facilmente que a relação de interação entre as três empresas forma um grafo triangular: um vértice representa uma empresa e uma aresta representa um produto. Sob outras simplificações, o modelo descreve a evolução a longo prazo de tal competição. Por outro lado, [van der Hofstad et al. \(2016\)](#) propõe modelar a formação e reforço de conexões entre neurônios por meio do modelo de urnas. Estima-se que ao nascer, um cérebro humano possua dezenas de bilhões de neurônios com milhares de sinapses (conexões) por neurônio. Acredita-se que por volta dos 2 primeiros anos o número de sinapses por neurônio aumenta com os “caminhos” se tornando cada vez mais suaves e fortes através de um processo chamado mielinização. Posteriormente, por questões ambientais ou fatores de aprendizado, a poda sináptica ocorre: o cérebro remove conexões que raramente ou nunca são usadas e reforça aquelas que são estimuladas. O seguinte modelo simplista porém significativo pode ser considerado: um sinal entra no cérebro em algum neurônio aleatoriamente escolhido e é transmitido para um único neurônio vizinho com probabilidade dependendo da eficiência relativa das sinapses conectando os neurônios e, ao fazê-lo, a eficiência da sinapse é melhorada/reforçada.

Modelos de urnas interagentes são atualmente de grande interesse. Além das referências [Benaïm et al. \(2015\)](#) e [van der Hofstad et al. \(2016\)](#), diversos modelos e aplicações podem ser encontrados em [Aletti and Ghiglietti \(2017\)](#), [Crimaldi et al. \(2020\)](#), [Kaur and Sahasrabudhe \(2022\)](#), [Costa and Jordan \(2022\)](#), [Launay \(2012\)](#), [Launay and Limic \(2012\)](#), [Laruelle and Pagès \(2019\)](#), e [Ruszel and Thacker \(2022\)](#).

1.1 O modelo de duas cores

Apresentamos nesta seção a generalização do modelo introduzido por [Benaïm et al. \(2015\)](#) a urnas com duas cores. O modelo resultante é inédito e sua introdução é uma das contribuições deste trabalho.

Suponhamos que cada vértice $v \in V$ possui uma urna com $B_v(0) \geq 1$ bolas brancas e $A_v(0) \geq 1$ bolas azuis. No instante $n \geq 1$ é colocada uma bola de cada cor em cada um dos elos de G . Seja $\langle v, u \rangle \in E$, e $B_i(n)$, $A_i(n)$ o número de bolas brancas e azuis no

instante n em cada vértice $i = v, u$. Seja $\mathfrak{F}_n = \{\sigma(B_v(k), A_v(k); 1 \leq k \leq n; v \in V)\}$ a menor sigma-álgebra gerada pelo processo descrito pelo número de bolas de cada cor nos vértices de G até o instante n . Consideramos agora os eventos

$$B(u, v, n + 1) = \{\text{a bola branca do elo } \langle u, v \rangle \text{ vá para o vértice } v \text{ em } n + 1\}, \quad (1.1)$$

e

$$A(u, v, n + 1) = \{\text{a bola azul do elo } \langle u, v \rangle \text{ vá para o vértice } v \text{ em } n + 1\}. \quad (1.2)$$

Analogamente, utilizamos $B(v, u, n + 1)$ e $A(v, u, n + 1)$ para denotar respectivamente o movimento das bolas brancas e azuis no sentido contrário, ou seja do vértice v ao vértice u . Suponhamos que $N_0 = \sum_{i=1}^d B_i(0) = \sum_{i=1}^d A_i(0)$, $N_0 \in \mathbb{N}$, seja o número inicial total de bolas brancas e azuis no sistema. Assim, a proporção de bolas brancas e bolas azuis no vértice v no instante n é dada respectivamente pelas variáveis aleatórias

$$X_v(n) = \frac{B_v(n)}{N_0 + Nn}, \quad \text{e} \quad Y_v(n) = \frac{A_v(n)}{N_0 + Nn}. \quad (1.3)$$

Dada sigma-álgebra \mathfrak{F}_n , a probabilidade dos eventos (1.1) e (1.2) é definida por

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B(u, v, n + 1) \mid \mathfrak{F}_n) &= \frac{e^{-\alpha Y_v(n)}}{e^{-\alpha Y_v(n)} + e^{-\alpha Y_u(n)}} \\ \mathbb{P}(A(u, v, n + 1) \mid \mathfrak{F}_n) &= \frac{e^{-\alpha X_v(n)}}{e^{-\alpha X_v(n)} + e^{-\alpha X_u(n)}} \end{aligned} \quad (1.4)$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$ representa um parâmetro de nosso modelo. A probabilidade da bola branca ser colocada no vértice u é dada por $\mathbb{P}(B(v, u, n + 1) \mid \mathfrak{F}_n) = 1 - \mathbb{P}(B(u, v, n + 1) \mid \mathfrak{F}_n)$. Analogamente para a bola azul temos $\mathbb{P}(A(v, u, n + 1) \mid \mathfrak{F}_n) = 1 - \mathbb{P}(A(u, v, n + 1) \mid \mathfrak{F}_n)$.

Diferentemente do modelo estudado em [Benaïm et al. \(2015\)](#) e [van der Hofstad et al. \(2016\)](#), no qual as bolas de uma mesma cor competem pelos vértices de G , o modelo descrito aqui descreve a competição ($\alpha > 0$) ou cooperação ($\alpha < 0$) entre bolas de cores diferentes. Ressaltamos que esta generalização não é trivial pois ela considera o estudo de dois processos com reforço interagentes. A interação aqui é definida de forma explícita pelas probabilidades de transição descritas em (1.4):

- P_1 . Se $\alpha > 0$, a probabilidade de que as bolas de uma determinada cor sejam colocadas em uma urna qualquer decresce exponencialmente com o número de bolas da outra cor nessa urna. Valores de α maiores que zero potencializam a repulsão entre cores opostas.
- P_2 . Se $\alpha < 0$, a probabilidade de que as bolas de uma determinada cor sejam colocadas em uma urna qualquer cresce exponencialmente com o número de bolas da outra cor. Valores de α mais negativos potencializam a atração de cores opostas.

P_3 . No caso $\alpha = 0$ não existe interação nenhuma; as bolas colocadas no elo $\langle u, v \rangle$ possuem em qualquer instante probabilidade igual a $\frac{1}{2}$ de ir a qualquer uma das urnas nos vértices u e v .

Observação 1. As probabilidades de transição das bolas de uma determinada cor em (1.4) são definidas em função da proporção de bolas da outra cor. Esta distinção entre cores é uma ilusão pois como é mostrado pelas identidades

$$\frac{e^{-\alpha Y_v(n)}}{e^{-\alpha Y_v(n)} + e^{-\alpha Y_u(n)}} = \frac{e^{-\alpha(1-X_v(n))}}{e^{-\alpha(1-X_v(n))} + e^{-\alpha(1-X_u(n))}} = \frac{e^{\alpha X_v(n)}}{e^{\alpha X_v(n)} + e^{\alpha X_u(n)}},$$

a informação codificada por ambas as cores é equivalente. A escolha em (1.4) apenas permite chegarmos a uma interpretação interessante.

Nesta dissertação apresentamos resultados relativos ao comportamento limite da proporção de bolas brancas e bolas azuis em cada um dos vértices do grafo subjacente G , considerando ambas as versões cooperativa e competitiva do modelo. Sejam

$$X(n) = (X_1(n), \dots, X_d(n)) \quad \text{e} \quad Y(n) = (Y_1(n), \dots, Y_d(n))$$

respectivamente as proporções dos números de bolas brancas e azuis nos vértices de G no instante n . Seja

$$Z = \{Z(n)\} = \{(X(n), Y(n))\}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (1.5)$$

o processo conjunto descrito pela ocupação dos vértices de G pelas bolas brancas e azuis. Suporemos, sem fazer maiores referências sobre o assunto, que Z está definido num espaço de probabilidade adequado $(\Omega, \mathfrak{B}, \mathbb{P})$. Observamos que ambos os processos $X(n)$ e $Y(n)$ assumem valores no $d-1$ -símplice $\Delta = \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : \sum_{v=1}^d x_v = 1; x_v \geq 0, v = 1, \dots, d\}$. O processo conjunto $Z(n)$ assume valores no espaço produto $\mathfrak{Y} = \Delta \times \Delta$.

Na seção 1.3 deste capítulo apresentamos as ferramentas utilizadas ao longo desta dissertação para analisarmos o processo Z . Todos os resultados seguintes, apresentados nos Capítulos 2-4, são inéditos. No Capítulo 2 apresentamos resultados relativamente gerais, válidos para qualquer grafo G conexo, finito e não direcionado. Resultados para dois grafos específicos, o grafo completo de três vértices ($N = d = 3$) e uma estrela de dois elos ($N = 3, d = 2$) são descritos no Capítulo 3. Estes resultados incluem tanto a caracterização dos possíveis limites para Z assim como a convergência deste processo a estes pontos com probabilidade positiva em função do parâmetro de reforço α . Simulações do processo Z nos grafos triangular e estrela são apresentados no Capítulo 4.

1.2 Objetivo geral

O objetivo principal deste projeto consiste em descrever o comportamento assintótico do processo Z em grafos em geral. Toda a teoria desenvolvida no Capítulo 2 foi desenvolvida

seguindo este objetivo.

1.2.1 Objetivos específicos

Este trabalho tem como objetivos específicos descrever o comportamento assintótico do processo Z em dois grafos relativamente pequenos: triângular e estrela. Além disso, também apresenta simulações computacionais para analisar e comparar os resultados obtidos deste comportamento.

1.3 Referencial Teórico

1.3.1 Aproximações estocásticas

Um passo importante para o estudo das propriedades assintóticas do processo $Z = \{Z(n)\}_{n \geq 0}$, consiste em observar que este pode ser representado como uma aproximação estocástica. Esta representação é fundamental para a abordagem baseada na teoria dos sistemas dinâmicos utilizada no decorrer desta dissertação. Nesta seção apresentamos brevemente os elementos desta abordagem.

Introduzimos a seguir a noção de um processo de aproximação estocástica e posteriormente, no Capítulo 2, mostraremos que Z de fato admite esta representação.

Definição 1. Uma aproximação estocástica com valores em \mathbb{R}^m é um processo $W = \{W(n)\}_{n \geq 0}$, cujos incrementos satisfazem a recursão

$$W(n+1) - W(n) = \gamma_n H(W(n), \xi(n)), \quad (1.6)$$

onde $H : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma função mensurável, $\{\xi(n)\}_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^m$ é uma sequência de variáveis aleatórias e $\{\gamma_n\}_{n \geq 0}$ é uma de sequência monótona decrescente de números não negativos.

A noção de mensurabilidade na Definição 1 é determinada pelas medidas de probabilidade μ_n , correspondentes as leis das variáveis aleatórias $\xi(n)$, $n \geq 0$.

1.3.2 Abordagem dinâmica

A abordagem dinâmica é um método introduzido por [Kushner \(1977\)](#), [Ljung \(1977\)](#) e [Kushner and Clark \(1978\)](#) para analisar processos de aproximação estocástica tais como

aqueles descritos pela equação (1.6). Esta perspectiva considera as recursões do tipo (2.1), re-escrevendo H como

$$H(W(n), \xi(n)) = F(W(n)) + U_n,$$

onde $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um campo vetorial e $U_n \in \mathbb{R}^m$ é uma variável aleatória. Sob uma condição de regularidade para a sequência U_n , explicitada no Teorema 1 da próxima seção, a análise ao longo prazo do processo $W(n)$ pode ser realizada por meio de uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) autônoma da forma

$$\frac{d}{dt}w(t) = F(w(t)). \quad (1.7)$$

1.3.3 O teorema do conjunto limite

Nesta seção apresentamos um resultado importante, o qual essencialmente indica que, sob certas condições, os pontos de acumulação do processo $W = \{W(n)\}_{n \geq 0}$ estão quase certamente contidos no conjunto conhecido como o conjunto recorrente em cadeia¹ das soluções da EDO definida em (1.7). O conjunto recorrente em cadeia contém aqueles pontos que podem surgir no longo prazo se a dinâmica determinística definida por (1.7) esta sujeita a pequenas perturbações que ocorrem em momentos isolados no tempo. Faremos uso de vários objetos da teoria dos sistemas dinâmicos para definirmos corretamente estes conjuntos. A maior parte das definições apresentadas a seguir podem ser encontradas em textos introdutórios tais como Hirsch et al. (2013) e outros relativamente mais avançados como Robinson (1999). A definição de conjunto recorrente em cadeia na Definição 4 corresponde a apresentada em Benaïm (1996) e Benaïm (1999).

Definição 2. Um semi-fluxo em \mathbb{R}^m é um mapa contínuo $\phi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que ϕ_0 é a identidade em \mathbb{R}^m e $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$ para quaisquer $t, s \geq 0$. Com o objetivo de simplificar a notação escrevemos $\phi_t(w)$ em lugar de $\phi(t, w)$. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^m$ é dito positivamente invariante se $\phi_t(A) \subset A$ para todo $t \geq 0$. Seja F um campo vetorial Lipschitz contínuo em \mathbb{R}^m . O semi-fluxo induzido por F é o único mapa $\Phi = \{\phi_t\}$ tal que: 1. $\phi_0(w_0) = w_0$ para cada $w_0 \in \mathbb{R}^m$, e 2. $\frac{d}{dt}\phi_t(w_0) = F(\phi_t(w_0))$ para todo $t \geq 0$.

Definição 3. Um ponto $w \in \mathbb{R}^m$ é um equilíbrio de Φ se $\phi_t(w) = w$. O conjunto dos equilíbrios de Φ , induzidos pelo campo vetorial F é o conjunto $E = \{w \in \mathbb{R}^m : F(w) = 0\}$. Seja $JF(w)$ a matriz Jacobiana do campo vetorial F no ponto $w \in \mathbb{R}^m$ e seja $\sigma(JF(w)) \subset \mathbb{C}$, o conjunto dos autovalores de $JF(w)$. Um equilíbrio w é dito hiperbólico se todos os autovalores de $JF(w)$ possuem partes reais diferentes de zero. Um equilíbrio hiperbólico w é dito linearmente estável se $\sigma(JF(w))$ só possui autovalores com partes reais negativas; caso contrário w é chamado de linearmente instável.

¹ chain recurrent set

Observação 2. Um equilíbrio w_* é dito estável (Lyapunov estável) se para qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|\phi_0(w) - w_*\| < \delta \Rightarrow \|\phi_t(w) - w_*\| < \epsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

O equilíbrio w_* é assintoticamente estável se além de ser estável, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|\phi_0(w) - w_*\| \leq \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\phi_t(w) - w_*\| = 0.$$

A estabilidade assintótica decorre da noção de estabilidade linear definida em 3. De fato, suponhamos que w_* seja um equilíbrio hiperbólico linearmente estável. Neste caso, segundo o Teorema 5.1 da página 153 em Robinson (1999), existe uma vizinhança $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$ de w_* e constantes $C \geq 1$, $\zeta > 0$, tais que para qualquer condição inicial $w \in \mathcal{U}$ e todo $t \geq 0$,

$$\|\phi_t(w) - w_*\| \leq Ce^{-t\zeta} \|\phi_0(w) - w_*\|.$$

A constante ζ é tal que $-\zeta$ é um limitante superior da parte real dos autovalores $\lambda \in \sigma(JF(w_*))$, isto é $\Re(\lambda) \leq -\zeta < 0$. Assim, dado $\epsilon > 0$, para verificar a estabilidade assintótica de w_* , é suficiente escolher δ de forma que $\{w \in \mathbb{R}^m : \|\phi_t(w) - w_*\|\} \subset \mathcal{U}$.

Definição 4. Sejam $\delta > 0$, $T > 0$. Uma (δ, T) -pseudo órbita de $x \in \mathbb{R}^m$ até $y \in \mathbb{R}^m$ é uma sequência finita de órbitas parciais $\{\phi_t(y_i) : 0 \leq t \leq t_i, i = 0, \dots, k-1, t_i \geq T$ do semi-fluxo $\Phi = \{\phi_t\}_{t \geq 0}$ tal que

$$\|y_0 - x\| < \delta, \quad \|\phi_{t_i}(y_i) - y_{i+1}\| < \delta, \quad i = 0, \dots, k-1, \quad \text{e} \quad y_k = y.$$

Um ponto $w \in \mathbb{R}^m$ é dito recorrente em cadeia se para cada $\delta > 0$ e $T > 0$ existe uma (δ, T) -pseudo órbita de w em w . O conjunto dos pontos recorrentes em cadeia do semi-fluxo Φ é denotado por $\mathcal{R}(\Phi)$.

É relativamente simples mostrar que o conjunto recorrente em cadeia $\mathcal{R}(\Phi)$ é fechado, positivamente invariante pelo semi-fluxo Φ e tal que $E \subset \mathcal{R}(\Phi)$.

Definição 5. Seja $\mathcal{L}(\{W(n)\})$ o conjunto limite das trajetórias do processo estocástico $W = \{W(n)\}_{n \geq 0}$. Isto é, para cada ponto $\omega \in \Omega$, o valor de $\mathcal{L}(\{W(n)\})$ em ω é dado pelo conjunto dos pontos $w \in \mathbb{R}^m$ tais que $\lim_{k \rightarrow \infty} W(n_k, \omega) = w$, para alguma sequência estritamente crescente de números inteiros $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$.

Estas definições permitem enunciar o seguinte teorema, o qual fornece a relação entre o comportamento limite do processo $\{W(n)\}_{n \geq 0}$ com o comportamento assintótico do semi-fluxo Φ determinado pelo campo vetorial F em (1.7).

Teorema 1. *Seja $W = \{W(n)\}_{n \geq 0}$ um processo de aproximação estocástica com representação*

$$W(n+1) - W(n) = \gamma_n(F(W(n)) + U_n).$$

Sob as condições

1. $\{W(n)\}_{n \geq 0}$ é (quase certamente) limitado,
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0$, $\sum_{n \geq 0} \gamma_n = \infty$, e $\sum_{n \geq 0} \gamma_n^2 < \infty$,
3. para cada $T > 0$, quase certamente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{\{r: 0 \leq \tau_r - \tau_n \leq T\}} \left\| \sum_{k=n}^{r-1} \gamma_k U_k \right\| \right) = 0,$$

onde $\tau_0 = 0$ e $\tau_n = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k$,

o conjunto limite $\mathfrak{L}(\{W(n)\})$ é quase certamente conexo e está quase certamente contido em $\mathcal{R}(\Phi)$, onde Φ é o semi-fluxo induzido pelo campo vetorial F definido em (1.7).

Demonstração. A demonstração decorre do Teorema 1.2 em [Benaïm \(1996\)](#). □

Aproximações estocásticas

Iniciamos este Capítulo mostrando que o processo $Z = \{Z(n)\}$ pode ser representado como uma aproximação estocástica. Isto por sua vez permite identificar o campo vetorial do nosso modelo. Neste Capítulo apresentamos também alguns resultados intermediários, necessários na análise dos exemplos do Capítulo 3: a convergência com probabilidade positiva aos equilíbrios estáveis de F , e a não convergência aos equilíbrios instáveis pertencentes ao interior de \mathfrak{J} . Os resultados apresentados neste Capítulo são relativamente gerais pois valem para qualquer grafo não direcionado, conexo e finito.

2.1 Representação por uma aproximação estocástica

O seguinte resultado mostra que o processo $Z = \{Z(n)\}_{\{n \geq 0\}}$, definido por (1.5), é uma aproximação estocástica.

Lema 1. *Seja $G = (E, V)$ um grafo finito conexo não direcionado com $|E| = N$ e $|V| = d$. Seja $Z(n) = (X_1(n), \dots, X_d(n), Y_1(n), \dots, Y_d(n))$, onde para cada $v \in V$*

$$X_v(n) = \frac{B_v(n)}{N_0 + Nn}, \quad Y_v(n) = \frac{A_v(n)}{N_0 + Nn}.$$

O processo $Z = \{Z(n)\}_{\{n \geq 0\}}$, $n \in \mathbb{N}$, satisfaz a recursão

$$Z(n+1) - Z(n) = \gamma_n H(Z(n), \xi(n)), \quad (2.1)$$

onde

$$\gamma_n = 1/(N_0/N + (n+1)), \quad H(Z(n), \xi(n)) = -Z(n) + \xi(n), \quad (2.2)$$

e

$$\xi(n) = (\xi_1^x(n), \dots, \xi_d^x(n), \xi_1^y(n), \dots, \xi_d^y(n)) \quad (2.3)$$

é o vetor da fração do número de bolas de cada cor adicionadas em cada um dos vértices de G no instante $n+1$.

Demonstração. Sejam u e v dois vértices de G tais que $\langle u, v \rangle \in E$. Seja $B(u, v, n+1)$ o evento no qual a bola branca do elo $\langle u, v \rangle$ vá para o vértice v no instante $n+1$, e

$A(u, v, n+1)$ o evento no qual a bola azul vá para o vértice v . Definimos agora para cada elo $\langle u, v \rangle \in E$ as variáveis Bernoulli,

$$\delta_{v \leftarrow u}(n+1) = \mathbf{1}_{\{B(u, v, n+1)\}}, \quad \sigma_{v \leftarrow u}(n+1) = \mathbf{1}_{\{A(u, v, n+1)\}}.$$

Observamos que ambas $\delta_{v \leftarrow u}(n+1)$ e $\sigma_{v \leftarrow u}(n+1)$ são variáveis aleatórias independentes. Sejam $C_v^x(n+1)$ e $C_v^y(n+1)$ respectivamente o número de bolas brancas e azuis adicionadas ao vértice v no tempo $n+1$, isto é,

$$C_v^x(n+1) = \sum_{u \sim v} \delta_{v \leftarrow u}(n+1), \quad C_v^y(n+1) = \sum_{u \sim v} \sigma_{v \leftarrow u}(n+1). \quad (2.4)$$

Dado $v \in V$, $\sum_{u \sim v}$ denota a soma sob todos os vértices u tais que $\langle u, v \rangle \in E$.

Estas definições permitem escrever o incremento no número de bolas brancas no vértice v no instante $n+1$ da seguinte forma

$$\begin{aligned} X_v(n+1) - X_v(n) &= \frac{B_v(n) + C_v^x(n+1)}{N_0 + (n+1)N} - \frac{B_v(n)}{N_0 + nN} \\ &= \frac{-NX_v(n) + C_v^x(n+1)}{N_0 + (n+1)N} \\ &= \frac{1}{N_0/N + (n+1)} \left(-X_v(n) + \frac{1}{N} C_v^x(n+1) \right). \end{aligned}$$

Analogamente para o incremento do número de bolas azuis temos

$$Y_v(n+1) - Y_v(n) = \frac{1}{N_0/N + (n+1)} \left(-Y_v(n) + \frac{1}{N} C_v^y(n+1) \right).$$

O processo $Z(n)$ portanto satisfaz (2.1) com $\gamma_n = 1/(N_0/N + (n+1))$ e

$$\xi_v^x(n) = \frac{1}{N} C_v^x(n+1), \quad \xi_v^y(n) = \frac{1}{N} C_v^y(n+1). \quad (2.5)$$

□

2.2 Abordagem dinâmica

Nesta seção desenvolvemos uma expressão alternativa para H em (2.2), a qual permite obter uma fórmula explícita para o campo vetorial F de nosso modelo. Seja $T\mathfrak{Y}$ o espaço tangente de \mathfrak{Y} , isto é $T\mathfrak{Y} = \{a \in \mathbb{R}^{d \times 2} \mid \sum_{v=1}^d a_v^i = 0, i \in \{x, y\}\}$. Para qualquer ponto $z \in \mathfrak{Y}$ com coordenadas $(x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_d)$ e cada $v \in V$, sejam $\pi_v^x, \pi_v^y : \mathfrak{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$\pi_v^x(z) = \sum_{u \sim v} \frac{e^{-\alpha y_v(n)}}{e^{-\alpha y_v(n)} + e^{-\alpha y_u(n)}}, \quad \pi_v^y(z) = \sum_{u \sim v} \frac{e^{-\alpha x_v(n)}}{e^{-\alpha x_v(n)} + e^{-\alpha x_u(n)}}. \quad (2.6)$$

Lema 2. Seja $Z = \{Z(n)\}_{\{n \geq 0\}}$ o processo em (1.5), definido no grafo $G = (E, V)$ não direcionado, conexo, e tal que $|V| = d$, $|E| = N$. Z admite a representação

$$Z(n+1) - Z(n) = \gamma_n \left(F(Z(n)) + U_n \right),$$

onde $F : \mathfrak{Y} \rightarrow T\mathfrak{Y}$ é um campo vetorial com funções de coordenadas

$$F_v^x(z) = -x_v + \frac{1}{N} \pi_v^y(z), \quad F_v^y(z) = -y_v + \frac{1}{N} \pi_v^x(z) \quad (2.7)$$

e

$$U_n = \xi(n) - \mathbb{E}[\xi(n) \mid \mathfrak{F}_n]. \quad (2.8)$$

Demonstração. A prova consiste em separar $\xi(n)$ em duas componentes: o valor esperado e uma parte conhecida como o “ruído”. Partindo do Lema 1, escrevemos

$$Z(n+1) - Z(n) = \gamma_n \left\{ \left(-Z(n) + \mathbb{E}[\xi(n) \mid \mathfrak{F}_n] \right) + \left(\xi(n) - \mathbb{E}[\xi(n) \mid \mathfrak{F}_n] \right) \right\}. \quad (2.9)$$

Para o processo $\{X(n)\}_{n \geq 0}$, correspondente a ocupação relativa dos vértices pelas bolas brancas, de (1.4), (2.3) e (2.4) obtemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\xi_v^x(n) \mid \mathfrak{F}_n] &= \frac{1}{N} \sum_{u \sim v} \mathbb{E}[\delta_{v \leftarrow u}(n+1) \mid \mathfrak{F}_n] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{u \sim v} \mathbb{P}(B(u, v, n+1) \mid \mathfrak{F}_n) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{u \sim v} \frac{e^{-\alpha Y_v(n)}}{e^{-\alpha Y_v(n)} + e^{-\alpha Y_u(n)}}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Analogamente, para o processo $\{Y(n)\}_{n \geq 0}$ temos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\xi_v^y(n) \mid \mathfrak{F}_n] &= \frac{1}{N} \sum_{u \sim v} \mathbb{E}[\sigma_{v \leftarrow u}(n+1) \mid \mathfrak{F}_n] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{u \sim v} \mathbb{P}(A(u, v, n+1) \mid \mathfrak{F}_n) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{u \sim v} \frac{e^{-\alpha X_v(n)}}{e^{-\alpha X_v(n)} + e^{-\alpha X_u(n)}}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

A demonstração do lema segue de (2.9) ao considerar as expressões para $\mathbb{E}[\xi_v^x(n) \mid \mathfrak{F}_n]$ e $\mathbb{E}[\xi_v^y(n) \mid \mathfrak{F}_n]$ junto à aquelas para U_n em (2.8) e F_v^x, F_v^y em (2.7). \square

O seguinte lema mostra que Z satisfaz as condições do Teorema 1.

Lema 3. O processo $Z = \{Z(n)\}_{n \geq 0}$ satisfaz a condições (i) – (iii) do Teorema 1.

Demonstração. A condição (i) do Teorema 1 é imediata. A condição (ii) decorre da forma para γ_n especificada no Lema 1. O resto da prova consiste em mostrar que $\{Z(n)\}$ satisfaz (iii).

Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, seja $M(n) = \sum_{k=0}^n \gamma_k U_k$ o vetor com coordenadas $M(n) = (M_x^1(n), \dots, M_d^x(n), M_1^y(n), \dots, M_d^y(n))$. O processo $\{M(n), n \geq 0\}$ é um martingal a respeito do filtro $\{\mathfrak{F}_{n+1}, n \geq 0\}$, isto é,

$$\mathbb{E}[M(n+1) \mid \mathfrak{F}_{n+1}] = \sum_{k=0}^n \gamma_k U_k + \gamma_{n+1} \mathbb{E}[U_{n+1} \mid \mathfrak{F}_{n+1}] = M(n).$$

No caso em que $N = d$, é possível obter o seguinte limitante superior

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\|M(n+1) - M(n)\|^2 \mid \mathfrak{F}_{n+1}] &= \gamma_{n+1}^2 \mathbb{E}[\|U_{n+1}\|^2 \mid \mathfrak{F}_{n+1}] \\ &\leq \gamma_{n+1}^2 \left(\sum_{v=1}^d \sum_{i \in \{x,y\}} \xi_v^i(n+1) \right)^2 \\ &\leq (\gamma_{n+1} 2d)^2. \end{aligned}$$

Sejam $v \in V$ e $i \in \{x, y\}$ quaisquer porém dados e fixos. Utilizando a decomposição de Doob para o sub-martingal $\{(M_v^i(n))^2\}_{n \geq 1}$ (Durrett, 2010, Teorema 5.2.10), seja $\{A_v^i(n)\}_{n \geq 1}$ a sequência crescente e previsível definida por

$$A_v^i(n+1) = (M_v^i(n))^2 - J_v^i(n),$$

onde $\{J_v^i(n)\}$ é um martingal e $A_v^i(1) = 0$. A sequência $\{A_v^i(n)\}$ satisfaz

$$A_v^i(n+2) - A_v^i(n+1) = \mathbb{E}[M_v^i(n+1)^2 \mid \mathfrak{F}_{n+1}] - M_v^i(n)^2.$$

Por outro lado, segundo a fórmula da variância condicional para o incremento $M_v^i(n+1) - M_v^i(n)$ (Durrett, 2010, Teorema 5.4.7) segue

$$\mathbb{E}[M_v^i(n+1)^2 \mid \mathfrak{F}_{n+1}] - M_v^i(n)^2 = \mathbb{E}[(M_v^i(n+1) - M_v^i(n))^2 \mid \mathfrak{F}_{n+1}].$$

Assim, para qualquer inteiro positivo n ,

$$A_v^i(n+2) = \sum_{k=0}^n \mathbb{E}[(M_v^i(k+1) - M_v^i(k))^2 \mid \mathfrak{F}_{k+1}] \leq (2d)^2 \sum_{k=0}^n \gamma_{k+1}^2.$$

Utilizando a forma para γ_n em (2.2) e considerando o limite $n \rightarrow \infty$, da última desigualdade obtemos $A_\infty < \infty$ quase certamente. De acordo ao Teorema 5.4.9 em Durrett (2010), isto implica na convergência quase certa do martingal $M_v^i(n)$ a um limite finito e portanto mostra que $M_v^i(n)$ é quase certamente uma sequência Cauchy. Concluímos portanto que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_k \left\| \sum_{i=n}^{k-1} \gamma_i U_i \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_k \|M(k-1) - M(n-1)\| = 0$$

ocorre quase certamente. Isto mostra que o processo $Z(n)$ satisfaz a condição (iii) do Teorema 1.

□

O seguinte resultado é consequência do Lema 3 e do Teorema 1.

Teorema 2. $\mathfrak{L}(\{Z(n)\})$, o conjunto limite do processo $Z = \{Z(n)\}_{n \geq 0}$ definido em (1.5), é quase certamente conexo e está contido em $\mathcal{R}(\Phi)$, sendo Φ o semi-fluxo induzido pelo campo vetorial $F : \mathfrak{Y} \rightarrow T\mathfrak{Y}$ definido por (2.7).

2.2.1 Convergência com probabilidade positiva

Apresentamos nesta seção um resultado o qual permite caracterizar em certa medida a convergência do processo $\{Z(n)\}_{n \geq 0}$. Este resultado é válido para qualquer grafo G finito não direcionado e diz a respeito da convergência com probabilidade positiva do processo estocástico $\{Z(n)\}_{n \geq 0}$ aos equilíbrios linearmente estáveis do campo vetorial F .

Teorema 3. *Seja $\alpha > 0$ e $z_* \in \mathfrak{Y}$ um equilíbrio linearmente estável do campo vetorial F em (2.7). Neste caso*

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} Z(n) = z\right) > 0.$$

A demonstração fará uso de duas definições e de um lema apresentados a seguir. As Definições 6 e 7 foram tomadas de Benaïm (1999).

Definição 6. O conjunto $A \subset \mathfrak{Y}$ é um atrator do semi-fluxo $\Phi = \{\phi_t\}_{t \geq 0}$ se as seguintes condições são satisfeitas

1. A é não vazio, compacto e invariante pelo semi-fluxo Φ , isto é, $\phi_t(A) \subseteq A$, $\forall t \geq 0$;
2. A possui uma vizinhança $\mathcal{U} \subset \mathfrak{Y}$ tal que $\text{dist}(\phi_t(z), A) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ uniformemente para $z \in \mathcal{U}$,

onde $\text{dist}(p, A) = \inf_{a \in A} \|p - a\|$. A bacia de A , $b(A)$, é o conjunto aberto, invariante pelo semi-fluxo Φ , constituído pelos pontos $z \in \mathfrak{Y}$ tais que $\text{dist}(\phi_t(z), A) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

O seguinte lema, adaptado ao nosso caso de um Teorema em Hirsch and Smale (1974), estabelece que os equilíbrios linearmente estáveis do campo vetorial F são conjuntos atratores.

Lema 4 (Hirsch and Smale (1974), Teorema (b), p. 181). *Seja z_* um ponto de equilíbrio linearmente estável do campo vetorial F definido em (2.7). O conjunto $A = \{z_*\}$ é um atrator para o semi-fluxo Φ induzido por F .*

Sejam $\tau_0 = 0$ e $\tau_n = \sum_{k=1}^n \gamma_k$, $n \geq 1$, onde γ_k é definido por (2.2). Seja $\tilde{Z} = \{\tilde{Z}(t)\}$, $t \in [0, \infty)$ um processo estocástico a tempo contínuo, linear por partes determinado pela interpolação linear do processo $\{Z(n)\}_{n \geq 0}$, isto é

$$\tilde{Z}(\tau_n + s) = Z(n) + s \frac{Z(n+1) - Z(n)}{\tau_{n+1} - \tau_n} \quad 0 \leq s \leq \gamma_{n+1}, \quad n \geq 0.$$

Definição 7. Um ponto $a \in \mathfrak{Y}$ é dito atingível pelo processo \tilde{Z} se para cada $t > 0$ e qualquer vizinhança aberta \mathcal{A} de a em \mathfrak{Y} ,

$$\mathbb{P}(\exists s \geq t : \tilde{Z}(s) \in \mathcal{A}) > 0.$$

Denotamos por $\text{Atg}(\tilde{Z})$ o conjunto de todos os pontos atingíveis por \tilde{Z} , ou seja,

$$\text{Atg}(\tilde{Z}) = \{a \in \mathfrak{Y} : a \text{ é atingível por } \tilde{Z}\}.$$

Seja z qualquer ponto em \mathfrak{Y} com coordenadas $(x_1, x_2, \dots, x_d, y_1, y_2, \dots, y_d)$. De agora em diante utilizamos a notação sugestiva $z = ((x_1, x_2, \dots, x_d), (y_1, y_2, \dots, y_d))$. Esta notação é utilizada na seguinte definição e no Capítulo 3.

Definição 8. Para qualquer $z \in \mathfrak{Y}$, seja $\text{Per}(z)$ o conjunto das permutações das coordenadas de z tais que a posição relativa entre as coordenadas x_v e y_v sejam preservadas, isto é, $\text{Per}(z) = \{((x_2, x_1, x_3, \dots), (y_2, y_1, y_3, \dots)), ((x_1, x_3, x_2, \dots), (y_1, y_3, y_2, \dots)), \dots\}$.

Demonstração do Teorema 3. Seja z_* um equilíbrio linearmente estável de F . Fazendo abuso da notação, z_* será utilizado no decorrer da demonstração para denotar um elemento qualquer do conjunto $\text{Per}(z_*)$. Seja $A = \{z_*\}$ o atrator de z_* . Uma vez verificada a condição $\text{Atg}(\tilde{Z}) \cap b(A) \neq \emptyset$, a conclusão do teorema segue do Teorema 7.3 em [Benaim \(1999\)](#). Esta última condição estabelece que bacia do equilíbrio z_* é atingível pelo processo \tilde{Z} . Neste sentido, observamos que é suficiente mostrar que

$$\text{Atg}(Z) \cap b(A) \neq \emptyset \tag{2.12}$$

pois $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0$. O conjunto $\text{Atg}(Z)$ esta constituído pelos pontos em \mathfrak{Y} atingíveis pelo processo Z . Isto é, se $a \in \text{Atg}(Z)$, então para cada $k \in \mathbb{N}$ e qualquer vizinhança aberta \mathcal{A} de a , tem-se $\mathbb{P}(\exists n \geq k : Z(n) \in \mathcal{A}) > 0$. Nestes termos, o resto da demonstração consiste em verificar (2.12).

Seja $B_\epsilon(z_*) = \{z \in \mathfrak{Y} : z_v^i < (z_v^i)_* + \epsilon_v^i, v \in V, i \in \{x, y\}\}$, e $\epsilon = (\epsilon_1^x, \dots, \epsilon_d^x, \epsilon_1^y, \dots, \epsilon_d^y) \in \text{T}\mathfrak{Y}$, com $|\epsilon|$ suficientemente pequeno de forma que $B_\epsilon(z_*) \subset b(A)$. Seja $k > 0$ fixo. Suponhamos que $z(k) \notin b(A)$ e que $z(k+m) \in B_\epsilon(z_*)$ para algum $m > 0$. Neste caso existe $\delta \in \text{T}\mathfrak{Y}$ tal que $|\delta| < |\epsilon|$ e $z_v^i(k+m) = (z_v^i)_* + \delta_v^i$. Assim, o número de bolas da cor i adicionadas a urna no vértice v durante os instantes $k+1, k+2, \dots, k+m$ é

$$N_v^i = ((z_v^i)_* + \delta_v^i)(N_0 + (k+m)N) - z_v^i(k)(N_0 + kN).$$

Para uma determinada realização do processo $z(n)$, sejam $k+1 \leq k_v^i(1) < k_v^i(2) < \dots < k_v^i(N_v^i) \leq k+m$ os instantes nos quais são adicionadas bolas da cor i ao vértice v , e seja $\mathcal{K}_v^i = \{k_v^i(j) : 1 \leq j \leq N_v^i\}$. Dado $z(k)$, a probabilidade da trajetória específica determinada pelos instantes \mathcal{K}_v^i , para todo $i \in \{x, y\}$ e $v \in V$, é

$$P_{\mathcal{K}_v^i} = \prod_{i,v} \prod_{\ell \in \mathcal{K}_v^{3-i}} \frac{1}{N} \sum_{w \sim v} \frac{\exp(-\alpha z_v^{3-i}(\ell-1))}{\exp(-\alpha z_v^{3-i}(\ell-1)) + \exp(-\alpha z_w^{3-i}(\ell-1))} > 0.$$

A probabilidade de atingir o ponto $z(k+m) = z_* + \delta$ desde $z(k)$, denotada P_δ , é obtida ao somarmos sobre todas as possíveis trajetórias determinadas por N_v^i , $v \in V$, $i \in \{x, y\}$. Se denotamos esta última soma por $\sum_{\{k_v^i(1), \dots, k_v^i(N_v^i)\} \in \mathcal{K}_v^i}$, temos

$$P_\delta = \sum_{i,v} \sum_{\{k_v^i(1), \dots, k_v^i(N_v^i)\} \in \mathcal{K}_v^i} P_{\mathcal{K}_v^i} > 0.$$

Isto permite concluir que $\mathbb{P}(z(k+m) \in b(A)) > P_\delta > 0$, e, portanto, que $\text{Atg}(Z) \cap b(A) \neq \emptyset$. \square

2.2.2 Não convergência para equilíbrios instáveis

O seguinte resultado mostra que o processo $\{Z(n)\}_{n \geq 0}$ não converge aos equilíbrios linearmente instáveis do campo vetorial F subjacente, quando estes pertencem ao interior de \mathfrak{Y} . Este tipo de resultado foi desenvolvido pela primeira vez em Pemantle (1990).

Teorema 4. *Seja $\alpha > 0$ e seja $z_* \in \mathfrak{Y}^\circ$ um equilíbrio linearmente instável. Neste caso,*

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} Z(n) = z\right) = 0.$$

Demonstração. Observamos primeiro que os equilíbrios de F ocorrem no interior de \mathfrak{Y} . De fato, se $F(z_*) = 0$ então $z_* = \pi(z_*) > 0$. A conclusão do teorema neste caso decorre do Teorema 1 em Pemantle (1990), sempre e quando seja satisfeita a seguinte condição adicional. Seja $\mathcal{B}(z_*)$ uma vizinhança de z_* em \mathfrak{Y} e c uma constante positiva tal que para cada $n > 0$ e tudo $z \in \mathcal{B}(z_*)$,

$$\mathbb{E}\left[\langle \vartheta, U_n \rangle^+ \mid Z(n) = z\right] \geq c, \quad (2.13)$$

onde $\vartheta \in \text{T}\mathfrak{Y}_1$, $\text{T}\mathfrak{Y}_1 = \{z \in \text{T}\mathfrak{Y} : \sum_{i,v} |z_v^i| = 1\}$, e para qualquer número w , $w^+ = \max\{w, 0\}$.

O resto da demonstração consiste em verificar a validade de (2.13) para qualquer equilíbrio instável z_* . Os argumentos utilizados estão baseados na demonstração do Lemma 9 em Rosales et al. (2022).

Para cada $i = x, y$, seja

$$v^i = \{v \in V : \vartheta_{vi}^i \geq \vartheta_v^i \text{ para todo } v \in V\}.$$

Seja A o evento definido por

$$A = \bigcap_{i=1}^2 \left\{ C_{vi}^i(n+1) \geq C_v^i(n+1), \quad \forall v \neq v^i \right\}$$

A denota o evento no qual a urna que recebe o maior número de bolas da cor i no instante $n + 1$ é aquela que está no vértice v^i . Escrevemos primeiro

$$\mathbb{E}\left[\langle \vartheta, U_n \rangle^+ \mid Z(n) = z\right] \geq \mathbb{E}\left[\langle \vartheta, U_n \rangle^+ \mid Z(n) = z, A\right] \mathbb{P}(A \mid Z(n) = z),$$

uma vez que a distribuição de U_n está unicamente determinada por $Z(n)$ de acordo a (2.8) e a variável aleatória $\langle \vartheta, U_n \rangle^+$ é não negativa. Dado o evento $Z(n) = z$, os movimentos das bolas em elos distintos são independentes, logo de (2.5), (2.10), (2.11) e (2.6) obtemos

$$\mathbb{P}(A \mid Z(n) = z) = \pi_{v^x}^x(z) \pi_{v^y}^y(z).$$

Por outro lado, da definição de U_n em (2.8), condicionando por $\{A, Z(n) = z\}$, temos

$$\begin{aligned} (U_n)_v^i &= \frac{1}{N} \xi_v^i(n) + \mathbb{E}[\xi_v^i(n) \mid A, Z(n) = z] = \frac{1}{N} \xi_{v^i}^i(n) + \frac{1}{N} \pi_{v^i}^i(z) \\ &\geq \frac{1}{N} (\delta_{v, v^i} + \pi_{v^i}^i(z)) \end{aligned}$$

onde $\delta_{v, v^i} = 1$ se $v = v^i$ e $\delta_{v, v^i} = 0$ se $v \neq v^i$. Sob o evento $\{A, Z(n) = z\}$, temos portanto que

$$\begin{aligned} \langle \vartheta, U_n \rangle &> = \frac{1}{N} \sum_{i,v} \vartheta_v^i (\delta_{v, v^i} - \pi_v^i(z)) \\ &= \frac{1}{N} \left(\sum_i \vartheta_{v^i}^i - \sum_i \langle \vartheta^i, \pi^i(z) \rangle \right) \\ &= \frac{1}{N} \left(\sum_i \max_v \vartheta_v^i - \sum_i \langle \vartheta^i, \pi^i(z) \rangle \right) \end{aligned}$$

e assim

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\langle \vartheta, U_n \rangle^+ \mid Z(n) = z\right] &\geq \frac{1}{N} \left(\sum_i \max_v \vartheta_v^i - \sum_i \langle \vartheta^i, \pi^i(z) \rangle \right)^+ \pi_{v^x}^x(z) \pi_{v^y}^y(z) \\ &\geq \frac{1}{N} \left(\sum_i \max_v \vartheta_v^i - \sum_i \langle \vartheta^i, \pi^i(z) \rangle \right)^+ \left(\min_{i,v} \pi_v^i(z) \right)^2 \\ &\geq \frac{1}{N} \left(\sum_i \langle (\vartheta^i)^-, \pi^i(z) \rangle \right)^+ \left(\min_{i,v} \pi_v^i(z) \right)^2. \end{aligned}$$

A segunda desigualdade segue uma vez que $0 \leq \min_{i,v} \pi_v^i(z) \leq \pi_{v^i}^i(z) \leq 1$ para todo i . A terceira desigualdade vale pois para cada i , $\max_v \vartheta_v^i \geq (\vartheta^i)^+$ e também pois para cada i , π_v^i é uma medida de probabilidade, e portanto $\max_v \vartheta_v^i - \langle (\vartheta^i)^+, \pi^i(z) \rangle \geq 0$ para todo i . Para concluir a demonstração, resta estabelecer um limitante inferior para a expressão $\sum_i \langle (\vartheta^i)^-, \pi^i(z) \rangle$. Desenvolvendo o produto interno obtemos,

$$\sum_i \langle (\vartheta^i)^-, \pi^i(z) \rangle = \sum_{i,v} \pi_v^i(z) (\vartheta_v^i)^-$$

$$\begin{aligned} &\geq \min_{i,v} \pi_v^i(z) \sum_{i,v} (\vartheta_v^i)^- \\ &\geq \min_{i,v} \pi_v^i(z) \max_{i,v} (\vartheta_v^i)^- \geq \min_{i,v} \pi_v^i(z) \frac{1}{4d}. \end{aligned}$$

A última desigualdade é justificada ao observarmos que $\max_{i,v} (\vartheta_v^i)^- \geq 1/(4d)$. De fato, como $\vartheta \in \mathcal{T}\mathfrak{N}_1$, tem-se $1 = \sum_{i,v} |\vartheta_v^i|$ e portanto

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{i,v} |\vartheta_v^i| = \sum_{i \in \{x,y\}} \left(\sum_{v=1}^d (\vartheta_v^i)^+ + \sum_{v=1}^d (\vartheta_v^i)^- \right) \\ &= \sum_{i \in \{x,y\}} \sum_{v=1}^d (\vartheta_v^i)^- \leq 2 \cdot 2 \max_{i,v} (\vartheta_v^i)^-. \end{aligned}$$

O limitante inferior em (2.13) é portanto satisfeito ao escolhermos

$$c = \frac{1}{4Nd} \left(\min_{i,v} \pi_v^i(z) \right)^2. \quad \square$$

Capítulo 3

Grafos de 3 vértices

Este capítulo descreve os resultados obtidos para o processo $Z = \{Z(n)\}$ apresentado no Capítulo 1 em duas situações diferentes: quando o grafo subjacente é o grafo completo de 3 vértices e quando o grafo é uma estrela de 3 vértices. Em cada um destes casos é considerado o modelo cooperativo e o modelo competitivo.

3.1 Grafo triangular

No decorrer desta seção, G representa o grafo completo de três vértices, isto é, o grafo definido por $d = N = 3$.

3.1.1 Modelo competitivo

Estudamos primeiramente a dinâmica competitiva. O seguinte teorema resume os resultados neste caso.

Teorema 5. *Seja G o grafo completo de três vértices. Sejam (a_1) e (a_2) em \mathfrak{A} definidos por*

$$\left(\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\right) \quad (a_1)$$

$$\text{Per}\left(\left(x, \frac{1}{3}, 1 - x - \frac{1}{3}\right), \left(1 - x - \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, x\right)\right), \quad x \in \left(0, \frac{1}{3}\right) \quad (a_2)$$

O processo $Z(n)$ converge com probabilidade positiva a qualquer um dos pontos em (a_1) ou (a_2) a depender de α da seguinte forma

$$(a_1) \text{ se } \alpha \in [0, 4)$$

$$(a_2) \text{ se } \alpha \in (4, \infty)$$

No limite $\alpha \rightarrow \infty$, $Z(n)$ converge com probabilidade positiva a um dos elementos de $\text{Per}\left(\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right), \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right)$.

A demonstração do Teorema 5 será feita através dos lemas 5 e 6 apresentados a seguir. Estes lemas analisam a dinâmica determinística definida pela EDO 2.7. A conexão com o processo estocástico $Z(n)$ será feita no final, utilizando os Teoremas 3 e 4.

Lema 5. Para cada $\alpha \in [0, \infty)$ existe um único equilíbrio da forma (a_1) . Para cada $\alpha \in (4, \infty)$ existe um único equilíbrio do tipo (a_2) . Para cada $\alpha \in (4, \infty)$, existe um único equilíbrio do tipo (a_3) definido por

$$\text{Per}\left(\left(u, v, v\right), \left(a, b, b\right)\right), \quad u = \frac{1}{3} + \vartheta(\alpha), \quad a = \frac{1}{3} - \vartheta(\alpha). \quad (a_3)$$

onde ϑ é uma função estritamente crescente. No limite $\alpha \rightarrow \infty$, os equilíbrios são da forma

$$\text{Per}\left(\left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}\right)\right) \cup \text{Per}\left(\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right), \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right).$$

Demonstração. O equilíbrio (a_1) existe para qualquer $\alpha \in [0, \infty)$. Em efeito, ao avaliar $F(z)$ em $z = \left(\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\right)$, resulta de imediato que o sistema $F(z) = 0$ é de fato satisfeito.

Para analisarmos os equilíbrios do tipo (a_2) , é suficiente considerar um dos elementos do conjunto $\text{Per}\left(\left(x, \frac{1}{3}, 1 - x - \frac{1}{3}\right), \left(1 - x - \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, x\right)\right)$, por exemplo

$$\left(\left(x, \frac{1}{3}, 1 - x - \frac{1}{3}\right), \left(1 - x - \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, x\right)\right). \quad (3.1)$$

Consideramos a seguinte parametrização para as coordenadas do pontos (3.1),

$$\begin{aligned} B' &: \left(x, \frac{1}{3}, 1 - x - \frac{1}{3}\right) = A + t\vec{v}, \quad t \in (0, 1] \\ B &: \left(1 - x - \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, x\right) = A + t\vec{v}, \quad t \in [-1, 0) \end{aligned}$$

onde A é o ponto com coordenadas $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ e $\vec{v} = \left(-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$ é o vetor diretor da reta $\ell_1 \in \Delta$ apresentada na Figura 1. As retas ℓ_2 e ℓ_3 apresentadas nesta figura estão constituídas pelos outros elementos de $\text{Per}(B', B)$.

Podemos reescrever B' e B parametricamente em função de $t \in (0, 1]$ como

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}t, & x_2 &= \frac{1}{3}, & x_3 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3}t, \\ y_1 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3}t, & y_2 &= \frac{1}{3}, & y_3 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}t. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Suponhamos agora que $z = \left((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\right) \in \mathfrak{V}$ seja um equilíbrio do tipo (a_2) , ou seja, que $F(z) = 0$. Da igualdade $F_3^x(z) = 0$ obtemos

$$x_3 = \frac{1}{3} \left(\frac{e^{-\alpha y_3}}{e^{-\alpha y_3} + e^{-\alpha y_1}} + \frac{e^{-\alpha y_3}}{e^{-\alpha y_3} + e^{-\alpha y_2}} \right).$$

Em termos da parametrização (3.2) isto equivale a escrever

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{3}t = \frac{1}{3} \left(\frac{e^{-\alpha(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}t)}}{e^{-\alpha(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}t)} + e^{-\alpha(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}t)}} + \frac{e^{-\alpha(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}t)}}{e^{-\alpha(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}t)} + e^{-\alpha(\frac{1}{3})}} \right),$$

Assim, de forma simplificada, a condição de equilíbrio é

$$1 - t = g_\alpha(t), \quad (3.3)$$

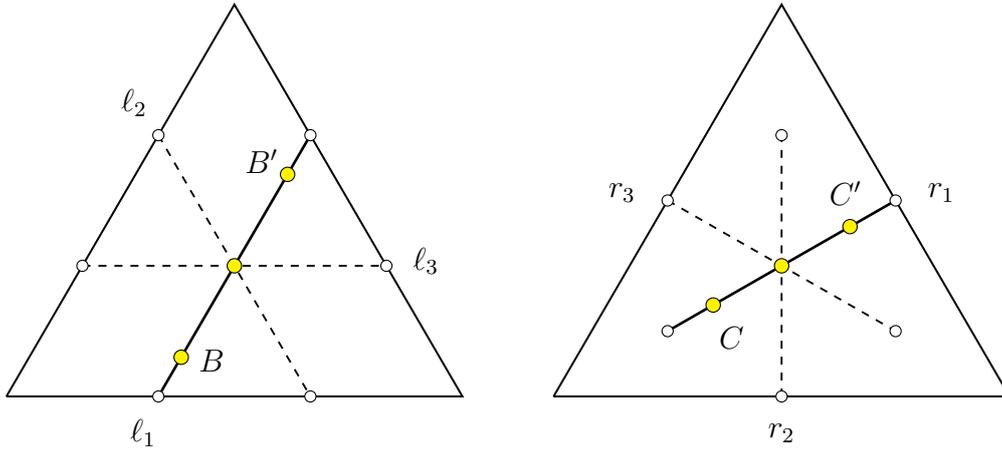


Figura 1 – Retas ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 com um equilíbrio (B', B) do tipo (a_2) , e retas r_1, r_2, r_3 com um equilíbrio (C', C) do tipo (a_3) representados no 2-símplice.

onde $g_\alpha(t)$ é a função $g_\alpha : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g_\alpha(t) = \frac{1}{1 + e^{t\alpha/3}} + \frac{1}{1 + e^{2t\alpha/3}}. \quad (3.4)$$

Os equilíbrios do tipo (a_2) correspondem aos pontos t tais que a reta $1 - t$ intercepta o gráfico de $g_\alpha(t)$. Exemplos disto são apresentados na Figura 2 para diferentes valores de α .

Mostramos agora que para cada $\alpha > 4$, existe uma única solução de (3.3) respectivamente nos casos quando $t \in (0, 1]$ e $t \in [-1, 0)$. É relativamente simples verificar que a função g_α é estritamente decrescente, contínua e com valor igual a 1 em $t = 0$ para qualquer valor de α . Segue disto último que para qualquer $\alpha > 0$, $1 - t = g_\alpha(t) = 1$ quando $t = 0$. Por outro lado $g'_\alpha(t)|_{t=0} = -\alpha/4$, portanto g_α possui derivada menor do que -1 , o coeficiente angular da reta $1 - t$, em $t = 0$ quando $\alpha > 4$. Por outro lado, como $g_\alpha(1) > 0$, da continuidade e monotonicidade de g_α concluímos que existe uma única solução de (3.3) quando $t \in (0, 1]$ pois em $t = 1$, a reta $1 - t$ possui valor menor do que $g_\alpha(1)$. No caso $t \in [-1, 0)$, é suficiente observar que $g_\alpha(t) < 1 - t$ quando $t = -1$. Existe portanto um único equilíbrio do tipo (a_2) para cada $\alpha \in (4, \infty)$. Observamos agora que g_α é convexa se $t \in (0, 1)$ e concava se $t \in (-1, 0)$. Como $g'_\alpha(t)|_{t=0} > -1$ quando $\alpha < 4$, temos que (3.3) não possui solução em $t \in (-1, 1) \setminus \{0\}$ neste caso.

Analisamos agora a existência e unicidade dos equilíbrios do tipo (a_3) . É suficiente considerar um dos elementos do conjunto $\text{Per}((u, v, v), (a, b, b))$, por exemplo $((u, v, v), (a, b, b))$. Utilizamos a seguinte parametrização

$$\begin{aligned} C' : (u, v, v) &= A + t\vec{v}, \quad t \in (0, 1], \\ C : (a, b, b) &= A + t\vec{v}, \quad t \in [-1, 0). \end{aligned}$$

onde $A(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ e $\vec{v} = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$ é o vetor diretor da reta $r_1 \in \Delta$ apresentada na Figura 1. As retas r_2 e r_3 estão constituídas pelos outros equilíbrios do tipo (a_3) . Assim, podemos

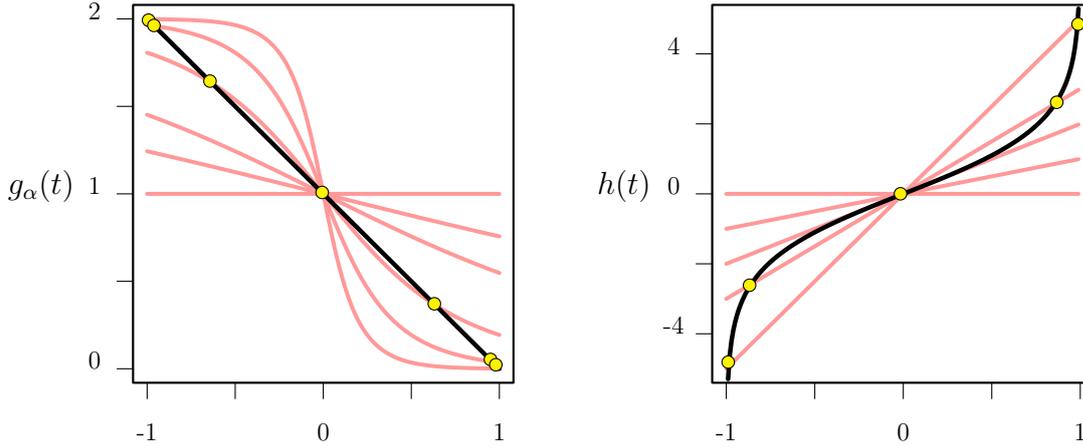


Figura 2 – Esquerda: gráficos das funções $g_\alpha(t)$ e $1 - t$ para diversos valores de α . Direita: gráficos de $h(t)$ e αt para diversos valores de α . Os círculos amarelos em cada um dos gráficos correspondem ao valor de t em que $g_\alpha(t) = 1 - t$ e $h(t) = \alpha t$.

reescrever C' e C em função de t como

$$\begin{aligned} u = x_1 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}t, & v = x_2 = x_3 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{6}t, \\ a = y_1 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3}t, & b = y_2 = y_3 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{6}t. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Se z é um equilíbrio, então $F(z) = 0$, logo por exemplo $F_2^x(z) = 0$, isto é

$$v = x_2 = \frac{1}{3} \left(\frac{e^{-\alpha y_2}}{e^{-\alpha y_2} + e^{-\alpha y_1}} + \frac{e^{-\alpha y_2}}{e^{-\alpha y_2} + e^{-\alpha y_3}} \right)$$

e usando (3.5),

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{6}t = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1 + e^{t\alpha/2}} \right) + \frac{1}{6}.$$

Obtemos assim a condição de equilíbrio em termos do parâmetro t ,

$$\frac{\alpha t}{2} = \ln \left(\frac{t+1}{1-t} \right) \tag{3.6}$$

Seja $h(t)$ a função $h : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definida pela expressão ao lado direito da igualdade (3.6). Observamos que h é igual ao dobro do arcotangente hiperbólico de t . Nestes termos, para cada α , o equilíbrio do tipo (a_3) é determinado pelo valor de t tal que a reta $\frac{\alpha t}{2}$ intercepta o gráfico de $h(t)$. Exemplos disto são apresentados na Figura 2 para diferentes valores de α . Observamos primeiro que para qualquer $\alpha > 0$, $\frac{\alpha t}{2} = h(t)$ em $t = 0$. Suponhamos que $\alpha > 4$. Mostraremos que neste caso (3.6) possui uma única solução em $t \in (0, 1)$. O caso $t \in (-1, 0)$ segue utilizando um argumento análogo pois $h(-t) = h(t)$. A função h é contínua, estritamente crescente e tal que $\lim_{t \rightarrow 1^-} h(t) = \infty$. A existência de uma solução a (3.6) em $(0, 1)$ segue portanto do Teorema do Valor Intermediário. De fato, como h é contínua e assume todos os valores de 0 a ∞ em $(0, 1)$, pelo Teorema do Valor

Intermediário, para cada $\alpha > 0$, existe t tal que $h(t) = \alpha t/2$. O valor de t que satisfaz $h(t) = \alpha t$ é único pois h é estritamente crescente. Uma expansão de segunda ordem de h em $t = 0$ fornece $h(t) = 2t + \mathcal{O}(t)^2$, logo $\alpha t/2 < h(t)$. Concluimos disto que (3.6) não possui solução em t se $\alpha < 4$.

Resta demonstrar a última afirmação feita pelo lema. Da definição de g_α em (3.4) temos que para qualquer $t \in [0, 1]$, $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} g_\alpha(t) = 0$. A única solução da equação (3.3) neste caso é quando $t = 1$. A substituição de $t = 1$ em (3.2) mostra que os equilíbrios do campo quando $\alpha \rightarrow \infty$ pertencem ao conjunto $\text{Per}((\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}), (\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}))$. Analogamente, quando $\alpha \rightarrow \infty$, a única solução de (3.6) é quando $t = 1$. Substituindo $t = 1$ em (3.5) mostra que no limite $\alpha \rightarrow \infty$, F possui equilíbrios no conjunto $\text{Per}((\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}), (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$. \square

Lema 6. *O equilíbrio (a_1) é linearmente estável se $\alpha \in (0, 4)$ e linearmente instável se $\alpha \in (4, \infty)$. O equilíbrio (a_2) é linearmente estável se $\alpha \in (4, \infty)$. O equilíbrio (a_3) é linearmente instável se $\alpha \in [4, \infty]$.*

Demonstração. Para qualquer equilíbrio $z_* \in E$, a demonstração consiste em analisar o espectro $\sigma(JF(z_*))$ (Definição 3). De maneira geral, a matriz Jacobiana JF em $z \in \mathfrak{D}$ é determinada pelas seguintes derivadas parciais,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_v^x(z)}{\partial x_v} &= \frac{\partial F_v^y(z)}{\partial y_v} = -1, & v \in V \\ \frac{\partial F_w^i(z)}{\partial x_v} &= \frac{\partial F_w^i(z)}{\partial y_v} = 0, & i \in \{x, y\}, \quad w, v \in V : w \neq v \\ \frac{\partial F_v^x(z)}{\partial y_v} &= \frac{\alpha}{3} \pi_v^x(z) (\pi_v^x(z) - 1), & v \in V \\ \frac{\partial F_v^y(z)}{\partial x_v} &= \frac{\alpha}{3} \pi_v^y(z) (\pi_v^y(z) - 1), & v \in V \\ \frac{\partial F_w^x(z)}{\partial y_v} &= \frac{\alpha}{3} \pi_v^x(z) \pi_w^x(z), & w, v \in V : w \neq v \\ \frac{\partial F_w^y(z)}{\partial x_v} &= \frac{\alpha}{3} \pi_v^y(z) \pi_w^y(z), & w, v \in V : w \neq v. \end{aligned}$$

onde π é dado por (2.6). Analisamos a seguir $\sigma(JF(z_*))$, sendo z_* qualquer um dos pontos (a_1) , (a_2) e (a_3) .

A matriz Jacobiana para o equilíbrio do tipo (a_1) possui polinômio característico

$$\frac{1}{256} (1 + \lambda)^2 (\alpha^2 - 16(1 + \lambda)^2)^2. \quad (3.7)$$

Assim, salvo multiplicidade algébrica, os autovalores são -1 , $-1 - \alpha/4$, e $-1 + \alpha/4$. Portanto o equilíbrio (a_1) é linearmente estável se $\alpha \in [0, 4)$ e linearmente instável se $\alpha > 4$.

Para os equilíbrios do tipo (a_2) a matriz Jacobiana possui autovalores

$$-1, \quad -1, \quad \pm \frac{\alpha}{12} \left(\text{sech}\left(\frac{t\alpha}{6}\right)^2 + 2\text{sech}\left(\frac{t\alpha}{3}\right)^2 \right) - 1, \quad \pm \frac{\alpha}{4} \text{sech}\left(\frac{t\alpha}{6}\right)^2 - 1$$

onde $t \in [-1, 1]$ é o parâmetro utilizado na parametrização para o equilíbrio (a_2) definida em (3.2). É relativamente simples verificar que o autovalor $\frac{\alpha}{4}\operatorname{sech}\left(\frac{t\alpha}{6}\right)^2 - 1$ é maior do que os autovalores restantes, para qualquer $t \in [-1, 1]$ e todo $\alpha > 0$. A estabilidade do equilíbrio (a_2) decorre portanto do sinal deste autovalor. Seja $\lambda_\alpha : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ a função $t \mapsto \frac{\alpha}{4}\operatorname{sech}\left(\frac{t\alpha}{6}\right)^2 - 1$. Como a função λ_α é par, é suficiente analisar seu comportamento no intervalo $(0, 1]$. Para cada $\alpha > 0$, a função λ_α é monótona decrescente e contínua em $t \in (0, 1]$. Em $t = 0$ temos que $\lambda_\alpha(0) = -1 + \alpha/4$, logo $\lambda_\alpha(0) > 0$ se $\alpha > 4$. Quando $\alpha > 4$, $\lambda_\alpha(t)$ possui uma única raiz em $(0, 1]$ igual a $\frac{6}{\alpha}\operatorname{arcosh}(\sqrt{\alpha}/2)$. Seja $\eta_\alpha : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \tanh\left(\frac{\alpha t}{4}\right) + 1$. É relativamente simples verificar que $\eta_\alpha(0) = k_\alpha(0)$ e $\eta_\alpha(t) > k_\alpha(t)$ para todo $\alpha > 0$ e $t \in (0, 1]$. Um desenvolvimento de Taylor em torno de $t = 0$ para η_α resulta em $1 + \alpha t/4 - \alpha^3 t^3/192 + \mathcal{O}(t^4)$. Assim, ao considerar a solução de (3.4), substituindo k_α pela série para k_α e resolvendo para t resulta

$$t = \frac{4\sqrt{3}\sqrt{\alpha-4}}{\sqrt{\alpha^3}}.$$

Para $\alpha \in (4, 6]$, este último valor está a direita da raiz do autovalor $\lambda_\alpha(t)$. Isto mostra que o equilíbrio (a_2) é linearmente estável quando $\alpha \in (4, 6]$. Um argumento similar utilizando a série de η_α em $t = \frac{1}{2}$ permite estabelecer a estabilidade de (a_2) quando $\alpha > 6$.

Estudamos por último os equilíbrios do tipo (a_3) . Os autovalores da matriz Jacobiana do campo vetorial neste caso são

$$-1, \quad -1, \quad \pm \frac{\alpha}{4}\operatorname{sech}\left(\frac{t\alpha}{4}\right)^2 - 1, \quad \text{e} \quad \pm \frac{\alpha}{12}\left(2 + \operatorname{sech}\left(\frac{t\alpha}{4}\right)^2\right) - 1.$$

O autovalor definido pela última expressão a direita com sinal positivo é uniformemente maior ou igual aos outros autovalores para todo $\alpha > 0$. Baseamos portanto a análise da estabilidade do equilíbrio (a_3) na função $\lambda_\alpha : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $t \mapsto \alpha/12(2 + \operatorname{sech}((t\alpha)/4)^2) - 1$. Esta função é contínua e monótona decrescente em $t \in (0, 1)$ para todo $\alpha > 0$, e quando $\alpha = 6$, $\lambda_6(1) > 0$. Isto mostra que os equilíbrios do tipo (a_3) são linearmente instáveis quando $\alpha \geq 6$. Passamos agora ao caso $\alpha \in (4, 6)$. Para cada $\alpha \in (4, 6)$, λ_α possui uma única raiz em $(0, 1)$ igual a $t_r(\alpha) = 4\operatorname{arcosh}(\sqrt{\alpha/(6-\alpha)}/\sqrt{2})/\alpha$. Seja h a função definida na demonstração do Lema 5. Para $t \in (0, 1)$, o Theorema 2.3 em [Dhaigude et al. \(2021\)](#) fornece o limitante inferior $3/(3-t^2) < h(t)/t$. A substituição de $h(t)$ por este limitante em (3.6) e a resolução da equação resultante em termos de t resulta em $t_e(\alpha) = \sqrt{3(\alpha-4)/\alpha}$. É relativamente simples verificar que $t_e(\alpha) < t_r(\alpha)$ para todo $\alpha \in (4, 6)$. Isto mostra que os equilíbrios em (a_3) também são instáveis quando $\alpha \in (4, 6)$ e conclui portanto a demonstração. □

Demonstração do Teorema 5. A demonstração segue ao aplicar os Teoremas 3 e 4. O primeiro garante a convergência de $Z(n)$ com probabilidade positiva a qualquer equilíbrio

estável de F . O Teorema 4 permite descartar a convergência de $Z(n)$ aos equilíbrios instáveis de F . Só resta por ser identificados os equilíbrios de F em função de α , o qual é feito nos Lemas 5 e 6. \square

3.1.2 Modelo cooperativo

Abordamos nesta seção o modelo cooperativo no grafo completo de três vértices. Neste caso, para $v \in V$ e $\alpha > 0$, campo vetorial F possui componentes

$$\begin{aligned} F_v^x(z) &= -x_v + \frac{1}{N} \sum_{u \sim v} \frac{e^{\alpha y_v(n)}}{e^{\alpha y_v(n)} + e^{\alpha y_u(n)}} \\ F_v^y(z) &= -y_v + \frac{1}{N} \sum_{u \sim v} \frac{e^{\alpha x_v(n)}}{e^{\alpha x_v(n)} + e^{\alpha x_u(n)}} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Observamos que segundo 1.4, o modelo cooperativo está definido por expressões contendo exponenciais $e^{-\alpha z}$ e $\alpha < 0$. Para simplificar a exposição, nesta seção reescrevemos estes termos simplesmente como $e^{\alpha z}$ com $\alpha > 0$. Esta convenção também será utilizada no decorrer desta seção para os expoentes de π em (2.6).

O seguinte teorema resume os resultados obtidos a respeito do comportamento assintótico do processo $Z(n)$ neste caso.

Teorema 6. *Seja G o grafo completo de três vértices e F o campo vetorial definido pelo modelo cooperativo em (3.8). Sejam (b_1) e (b_2) em \mathfrak{N} definidos por*

$$\left(\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) \right) \quad (b_1)$$

$$\text{Per} \left(\left(x, \frac{1}{3}, 1 - x - \frac{1}{3} \right), \left(x, \frac{1}{3}, 1 - x - \frac{1}{3} \right) \right), \quad x \in \left(0, \frac{1}{3} \right) \quad (b_2)$$

O processo $Z(n)$ converge com probabilidade positiva ao ponto (b_1) ou a qualquer um dos pontos em (b_2) , dependendo de α da seguinte maneira

$$(b_1) \quad \text{se } \alpha \in [0, 4),$$

$$(b_2) \quad \text{se } \alpha \in (4, \infty).$$

No limite $\alpha \rightarrow \infty$, $Z(n)$ converge com probabilidade positiva a um dos elementos de $\text{Per} \left(\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0 \right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0 \right) \right)$.

A demonstração do teorema será feita utilizando os Lemas 7 e 8. O primeiro destes Lemas mostra a existência dos equilíbrios da forma (b_1) e (b_2) em função do parâmetro de reforço α . O lema 8 caracteriza a estabilidade destes equilíbrios.

Lema 7. *O equilíbrio (b_1) existe para qualquer $\alpha > 0$. Para cada $\alpha \in (4, \infty)$ existe um único equilíbrio do tipo (b_2) . No limite $\alpha \rightarrow \infty$, os equilíbrios são da forma $\text{Per} \left(\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0 \right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0 \right) \right)$.*

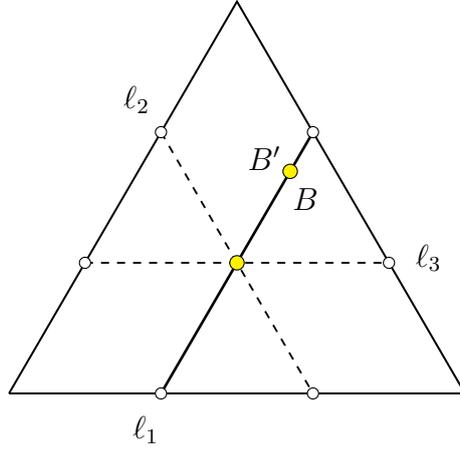


Figura 3 – Retas ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 descritas na demonstração do Lema 7, contidas no espaço de fase Δ definido pelo 2-símplice. As retas ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_3 representam o equilíbrio (B', B) do tipo (b_2) .

Demonstração. De maneira análoga ao considerado na demonstração da existência dos equilíbrios no caso competitivo, denotamos qualquer ponto $z \in \mathfrak{Y}$ por $z = ((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3))$. Observamos que agora, no caso cooperativo, as coordenadas de Φ em cada símlice Δ são iguais. Assim, os pontos da forma (b_1) podem ser descritos por $z = ((y_1, y_2, y_3), (y_1, y_2, y_3))$. Se $y_1 = y$, utilizando um argumento similar ao descrito na demonstração do Lema 5, os pontos do tipo (b_2) podem ser representados como

$$B = B' : \left(y, \frac{1}{3}, 1 - y - \frac{1}{3} \right) = A + t\vec{v}, \quad t \in [-1, 1]$$

onde A é o ponto com coordenadas $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ e $\vec{v} = (-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3})$ é o vetor diretor da reta $\ell_1 \subset \Delta$ apresentada na Figura 3. As retas ℓ_2 e ℓ_3 apresentadas na Figura 3 estão constituídas pelos outros elementos de $\text{Per}(B', B)$. Reescrevemos B' e B parametricamente em função de $t \in (0, 1]$ como

$$y_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}t, \quad y_2 = \frac{1}{3}, \quad y_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}t. \quad (3.9)$$

Suponhamos agora que $z = ((y_1, y_2, y_3), (y_1, y_2, y_3))$ seja um equilíbrio do tipo (b_2) , ou seja, que $F(z) = 0$. De (3.8), a igualdade $F_3^x(z) = 0$ resulta em

$$y_3 = \frac{1}{3} \left(\frac{e^{\alpha y_3}}{e^{\alpha y_3} + e^{\alpha y_1}} + \frac{e^{\alpha y_3}}{e^{\alpha y_3} + e^{\alpha y_2}} \right).$$

Em termos da parametrização (3.9) isto equivale a escrever

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3}t = \frac{1}{3} \left(\frac{e^{\alpha(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}t)}}{e^{\alpha(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}t)} + e^{\alpha(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}t)}} + \frac{e^{\alpha(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}t)}}{e^{\alpha(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}t)} + e^{\alpha(\frac{1}{3})}} \right),$$

Assim, de forma simplificada, a condição de equilíbrio é

$$1 + t = k_\alpha(t), \quad (3.10)$$

onde $k_\alpha(t)$ é a função $k_\alpha : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$k_\alpha(t) = \frac{1}{1 + e^{-t\alpha/3}} + \frac{1}{1 + e^{-2t\alpha/3}}. \quad (3.11)$$

Os equilíbrios do tipo (b_2) correspondem aos pontos t tais que a reta $1 + t$ intercepta o gráfico de $k_\alpha(t)$.

Mostramos agora que para cada $\alpha > 4$, existe uma única solução de (3.10) respectivamente nos casos quando $t \in (0, 1]$ e $t \in [-1, 0)$. Note que, para $t = 0$, é obtido o ponto $B = B' = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, ou seja, o equilíbrio (b_1) . É relativamente simples verificar que a função k_α é estritamente crescente, contínua e com valor igual a 1 em $t = 0$ para qualquer valor de α . Segue disto que para qualquer $\alpha > 0$, $1 + t = k_\alpha(t) = 1$ quando $t = 0$. Isto é suficiente para mostrar que o equilíbrio do tipo (b_1) existe para qualquer $\alpha > 0$. Por outro lado $k'_\alpha(t)|_{t=0} = \alpha/4$, portanto k_α possui derivada maior do que 1, o coeficiente angular da reta $1 + t$, em $t = 0$ quando $\alpha > 4$. Como $k_\alpha(1) > 0$, da continuidade e monotonicidade de k_α concluímos que existe uma única solução de (3.10) quando $t \in (0, 1]$ pois em $t = 1$, a reta $1 + t$ possui valor maior do que $k_\alpha(1)$. No caso $t \in [-1, 0)$ o raciocínio é análogo. Existe portanto um único equilíbrio do tipo (b_2) para cada $\alpha \in (4, \infty)$. Observamos agora que k_α é concava se $t \in (0, 1)$ e convexa se $t \in (-1, 0)$. Quando $\alpha < 4$, como $k'_\alpha(t)|_{t=0} < 1$, temos que (3.10) não possui solução em $t \in (-1, 1) \setminus \{0\}$.

Resta demonstrar a última afirmação do lema. Da definição de k_α em (3.11) temos que para qualquer $t \in (0, 1]$, $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} k_\alpha(t) = 2$. A única solução da equação (3.10) neste caso é quando $t = 1$. No caso $t \in [-1, 0)$, temos $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} k_\alpha(t) = 0$, logo a única solução de (3.10) é obtida quando $t = -1$. A substituição de $t = -1$ ou $t = 1$ em (3.9) conclui a demonstração. \square

Lema 8. *O equilíbrio (b_1) é linearmente estável se $\alpha \in (0, 4)$ e linearmente instável se $\alpha \in (4, \infty)$. O equilíbrio (b_2) é linearmente estável se $\alpha \in (4, \infty)$.*

Demonstração. A estabilidade de um equilíbrio $z_* \in \mathfrak{V}$ é determinada pela espectro da matriz Jacobiana de F em z_* . Para qualquer ponto $z \in \mathfrak{V}$, a matriz Jacobiana é determinada pelas seguintes derivadas parciais,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_v^x(z)}{\partial x_v} &= \frac{\partial F_v^y(z)}{\partial y_v} = -1, & v \in V \\ \frac{\partial F_w^i(z)}{\partial x_v} &= \frac{\partial F_w^i(z)}{\partial y_v} = 0, & i \in \{x, y\}, \quad w, v \in V : w \neq v \\ \frac{\partial F_v^x(z)}{\partial y_v} &= -\frac{\alpha}{3} \pi_v^x(z) (\pi_v^x(z) + 1), & v \in V \\ \frac{\partial F_v^y(z)}{\partial x_v} &= -\frac{\alpha}{3} \pi_v^y(z) (\pi_v^y(z) + 1), & v \in V \\ \frac{\partial F_w^x(z)}{\partial y_v} &= -\frac{\alpha}{3} \pi_v^x(z) \pi_w^x(z), & w, v \in V : w \neq v \end{aligned}$$

$$\frac{\partial F_w^y(z)}{\partial x_v} = -\frac{\alpha}{3} \pi_v^y(z) \pi_w^y(z), \quad w, v \in V : w \neq v.$$

Analizamos a seguir o espectro da matriz Jacobiana resultante para cada um dos equilíbrios (b_1) e (b_2) .

A matriz Jacobiana para o equilíbrio do tipo (b_1) possui polinômio característico idêntico a aquele apresentado em (3.7), no caso competitivo. Os seus autovalores, salvo multiplicidade algébrica, são portanto -1 , $-1 - \alpha/4$, e $-1 + \alpha/4$. Disto concluímos que equilíbrio (b_1) é linearmente estável se $\alpha \in [0, 4)$ e linearmente instável se $\alpha > 4$.

Para os equilíbrios do tipo (b_2) a matriz Jacobiana possui autovalores

$$-1, \quad -1, \quad \pm \frac{\alpha}{12} \left(\operatorname{sech}\left(\frac{t\alpha}{6}\right)^2 + 2\operatorname{sech}\left(\frac{t\alpha}{3}\right)^2 \right) - 1, \quad \pm \frac{\alpha}{4} \operatorname{sech}\left(\frac{t\alpha}{6}\right)^2 - 1$$

onde $t \in [-1, 1]$ é o parâmetro utilizado na parameterização para o equilíbrio (b_2) definida em (3.9). Observamos que neste caso, temos os mesmos autovalores do equilíbrio (a_2) descritos na demonstração do Lema 5. Assim, os pontos do tipo (b_2) são linearmente estáveis quando $\alpha \in (4, \infty)$. \square

Observação 3. O modelo cooperativo não possui o equilíbrio (a_3) , presente no caso competitivo. Isso é fácil de mostrar analiticamente realizando um desenvolvimento análogo ao do caso competitivo utilizando a seguinte parametrização para (B, B')

$$y_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}t, \quad y_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}t, \quad y_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}t.$$

Se z é um equilíbrio, então $F(z) = 0$, logo por exemplo $F_2^x(z) = 0$, isto é

$$x_2 = \frac{1}{3} \left(\frac{e^{\alpha y_2}}{e^{\alpha y_2} + e^{\alpha y_1}} + \frac{e^{\alpha y_2}}{e^{\alpha y_2} + e^{\alpha y_3}} \right),$$

e, portanto,

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{6}t = \frac{1}{6} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1 + e^{t\alpha/2}} \right).$$

Temos assim a seguinte condição de equilíbrio parametrizada por t

$$\frac{\alpha t}{2} = \ln \left(\frac{1-t}{1+t} \right),$$

Esta identidade difere da condição (3.6) obtida no caso competitivo. Agora, cada lado da igualdade acima possui sinais diferentes nos intervalos $[-1, 0)$ e $(0, -1]$. Só existe portanto uma solução em $t = 0$. Esta última corresponde de fato ao equilíbrio (b_1) .

Demonstração do Teorema 6. As afirmações feitas pelo teorema seguem do Teorema 3 e dos Lemas 7 e 8. \square

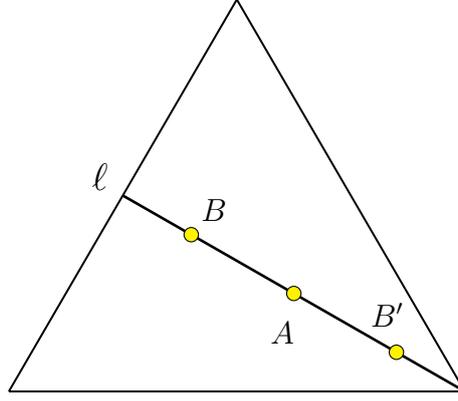


Figura 4 – Reta ℓ com um equilíbrio (B, B') , representados no 2-símplice Δ . O ponto $A(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ representa o ponto médio do segmento ℓ .

3.2 Estrela de 3 vértices

Nesta seção estudaremos a dinâmica de competição e cooperação desta vez em um grafo estrela. Uma estrela é o grafo bipartido completo $K_{1,k}$, equivalentemente, uma árvore com 1 vértice interno e k folhas. Especificamente, nesta seção consideramos o modelo resultante para a estrela de três vértices, isto é, o grafo $K_{1,2}$.

Denotamos o vértice interno de $K_{1,2}$ por 2. Os vértices que constituem as folhas serão denotados por 1 e 3. Para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, de acordo com (2.7), as componentes do campo F para os vértices $v = 1, 2, 3$ são dadas pelas expressões

$$F_v^y(z) = \begin{cases} -y_v + \frac{1}{2} \frac{e^{\pm\alpha x_v(n)}}{e^{\pm\alpha x_v(n)} + e^{\pm\alpha x_2(n)}}, & v = 1, 3 \\ -y_v + \frac{1}{2} \sum_{u \sim v} \frac{e^{\pm\alpha x_v(n)}}{e^{\pm\alpha x_v(n)} + e^{\pm\alpha x_u(n)}}, & v = 2 \end{cases} \quad (3.12)$$

$$F_v^x(z) = \begin{cases} -x_v + \frac{1}{2} \frac{e^{\pm\alpha y_v(n)}}{e^{\pm\alpha y_v(n)} + e^{\pm\alpha y_2(n)}}, & v = 1, 3 \\ -x_v + \frac{1}{2} \sum_{u \sim v} \frac{e^{\pm\alpha y_v(n)}}{e^{\pm\alpha y_v(n)} + e^{\pm\alpha y_u(n)}}, & v = 2 \end{cases}$$

O modelo competitivo é obtido quando o símbolo \pm é substituído por ‘-’. O caso cooperativo corresponde a substituição por ‘+’.

Cabe destacar que diferentemente do grafo triangular descrito na Seção 3.1, as componentes do campo vetorial no grafo estrela não são simétricas. Isto decorre da geometria do grafo estrela: dois vértices possuem uma única aresta incidente mas o nó interno possui duas.

3.2.1 Modelo competitivo

O seguinte teorema resume as propriedades assintóticas do processo Z quando é considerada a dinâmica competitiva sobre grafo estrela em função do parâmetro de reforço $\alpha \geq 0$.

Teorema 7. *Seja G o grafo com $d = 3$ e $N = 2$, correspondente a estrela $K_{1,2}$, e seja F o campo vetorial em (3.12) no caso competitivo. Sejam (c_1) , (c_2) e $(c_3) \in \mathfrak{N}$ definidos por*

$$\left(\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right), \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right) \right) \quad \text{se } \alpha = 0. \quad (c_1)$$

$$\left((x, 1 - 2x, x), (x, 1 - 2x, x) \right), \quad x \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3} \right) \quad \text{se } \alpha > 0. \quad (c_2)$$

$$\left((x, 1 - 2x, x), (y, 1 - 2y, y) \right) \begin{cases} x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right), y \in \left(0, \frac{1}{4} \right) \\ \text{ou} \\ x \in \left(0, \frac{1}{4} \right), y \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right) \end{cases} \quad \text{se } \alpha > 4 \ln 2. \quad (c_3)$$

O processo $Z(n)$ converge com probabilidade positiva ao ponto (c_1) se $\alpha = 0$. Se $x \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3} \right)$ e $\alpha \in \left(0, \frac{8}{3} \right)$, $Z(n)$ converge para (c_2) . Para α suficientemente grande, $Z(n)$ converge com probabilidade positiva para um dos pontos de (c_3) .

No limite $\alpha \rightarrow \infty$, $Z(n)$ converge com probabilidade positiva ao ponto

$$\left(\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right), (0, 1, 0) \right).$$

Para a demonstração do Teorema 7 faremos uso dos Lemas 9 e 10.

Lema 9. *Seja F o campo vetorial em (3.12) no caso competitivo. Dependendo de α , F possui os seguintes equilíbrios*

$$\left(\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right), \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right) \right) \quad \text{se } \alpha = 0,$$

$$\left((x, 1 - 2x, x), (x, 1 - 2x, x) \right), \quad x \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3} \right), \quad \text{se } \alpha > 0$$

$$\left((x, 1 - 2x, x), (y, 1 - 2y, y) \right) \begin{cases} x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right), y \in \left(0, \frac{1}{4} \right) \\ \text{ou} \\ x \in \left(0, \frac{1}{4} \right), y \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right) \end{cases} \quad \text{se } \alpha > 4 \ln 2$$

$$\left(\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right), (0, 1, 0) \right) \quad \text{e} \quad \left(\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right) \right), \quad \text{no limite } \alpha \rightarrow \infty.$$

Para $\alpha \in (0, \infty)$ existe um único valor de x e y .

Demonstração. Seja $z = (B, B')$ um equilíbrio do tipo (c_3) . Ou seja, z é tal que $F(z) = 0$ e tal que B e B' são os pontos com coordenadas $(x, 1 - 2x, x)$ e $(y, 1 - 2y, y)$ respectivamente. Das condições $F_v^x(z) = 0$, $v = 1, 2, 3$, em (3.12), obtém-se

$$x = \frac{1}{2} \frac{1}{e^{-\alpha(1-3y)} + 1}. \quad (3.13)$$

Analogamente, as condições $F_v^y(z) = 0$, $v = 1, 2, 3$ em (3.12), fornecem

$$y = \frac{1}{2} \frac{1}{e^{-\alpha(1-3x)} + 1}. \quad (3.14)$$

Dado $\alpha > 0$, seja $\varphi_\alpha : [0, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $t \mapsto 1/(2e^{-\alpha(1-3t)} + 2)$. Assim, as relações (3.13) e (3.14) podem ser reescritas em termos de φ_α como

$$x = \varphi_\alpha(y) \quad \text{e} \quad y = \varphi_\alpha(x).$$

Logo, a condição que caracteriza os equilíbrios do tipo (c₃) e pode ser descrita em termos de uma única variável como

$$x = \varphi_\alpha \circ \varphi_\alpha(x), \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]. \quad (3.15)$$

Note que (3.15) também é satisfeita pelos equilíbrios (c₂), pois para estes últimos vale a identidade $x = \varphi_\alpha(x)$.

Segundo (3.15), os equilíbrios são caracterizados pelos pontos fixos de $\varphi_\alpha \circ \varphi_\alpha$ em $[0, \frac{1}{2}]$ ou equivalentemente pelas raízes da função $\eta_\alpha(x) = \varphi_\alpha \circ \varphi_\alpha(x) - x$. Utilizando η_α , mostraremos a seguir o seguinte:

- I_1) (3.15) possui uma única solução em $[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$ se $0 \leq \alpha < 4 \ln 2$,
- I_2) (3.15) possui uma única solução em cada um dos intervalos $[0, \frac{1}{4}]$, $[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$, e $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ quando $\alpha > 4 \ln 2$.

Com este objetivo analisamos separadamente o comportamento de η_α quando $x \in \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\}$.

No caso $x = \frac{1}{4}$ temos

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\alpha\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2 + 2\kappa(\alpha)}, \quad \text{sendo} \quad \kappa(\alpha) = \exp\left(-\alpha + \frac{3\alpha}{2(e^{-\alpha/4} + 1)}\right).$$

Da expressão para κ , resulta simples observar que $\kappa(4 \ln 2) = e^0 = 1$, logo $\varphi_{4 \ln 2} \circ \varphi_{4 \ln 2}(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$ e assim $\eta_{4 \ln 2}(\frac{1}{4}) = 0$. Por outro lado, κ é crescente monotonamente com α , logo $\kappa(\alpha) > 0$ se $\alpha > 4 \ln 2$. $\eta_\alpha(\frac{1}{4})$ é decrescente monotonamente com α , logo $\eta_\alpha(\frac{1}{4}) < 0$ quando $\alpha > 4 \ln 2$ e $\eta_\alpha(\frac{1}{4}) > 0$ quando $\alpha < 4 \ln 2$. No caso $x = \frac{1}{3}$ resulta

$$\eta_\alpha\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2 + 2e^{-\alpha/4}} - \frac{1}{3}.$$

Desta expressão obtém-se $\eta_{4 \ln 2}(\frac{1}{3}) = 0$. Como $\eta_\alpha(\frac{1}{3})$ é crescente com α , concluímos que $\eta_\alpha(\frac{1}{3}) < 0$ se $\alpha < 4 \ln 2$ e $\eta_\alpha(\frac{1}{3}) > 0$ se $\alpha > 4 \ln 2$. No caso $x = \frac{1}{2}$ temos

$$\eta_\alpha\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2 + 2\kappa(\alpha)} - \frac{1}{2}, \quad \text{sendo} \quad \tilde{\kappa}(\alpha) = \exp\left(-\alpha + \frac{3\alpha}{2(e^{\alpha/2} + 1)}\right),$$

logo $\eta_\alpha(\frac{1}{2})$ é negativa para tudo $\alpha > 0$. Por ultimo, para o caso $x = 0$, temos que

$$\eta_\alpha(0) = \left\{2\left(1 + e^{-\alpha + 3\alpha/(2(e^{-\alpha} + 1))}\right)\right\}^{-1},$$

do qual é imediato verificar que $\eta_\alpha(0) > 0$ para todo $\alpha > 0$. A existência de pelo menos uma raiz da função η_α em $[0, \frac{1}{4}]$ quando $\alpha > 4 \ln 2$, segue do Teorema do Valor Intermediário pois η_α é contínua, $\eta_\alpha(0) > 0$, e $\eta_\alpha(\frac{1}{4}) < 0$. A unicidade desta raiz decorre do fato de η_α ser concava para acima, i.e. $\eta_\alpha''(x) > 0$, quando $x \in [0, \frac{1}{4}]$. Para mostrarmos que η_α não possui raiz em $[0, \frac{1}{4}]$ quando $\alpha < 4 \ln 2$, é suficiente observar que $\eta_\alpha(x)$ é estritamente decrescente e $\eta_\alpha(\frac{1}{4}) > 0$. Para analisar a situação no intervalo $[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$, observamos que $\eta_\alpha(\frac{1}{4})$ e $\eta_\alpha(\frac{1}{3})$ possuem sinais opostos para qualquer $\alpha > 0$, salvo em $\alpha = 4 \ln 2$, onde ambas são iguais a zero. Pelo Teorema do Valor Intermediário, η_α possui portanto pelo menos uma raiz em $[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$ se $\alpha > 0$. Uma análise análoga a aquela descrita para $x \in [0, \frac{1}{4}]$ mostra que $\eta_\alpha(x)$ apresenta uma única raiz em $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ se $\alpha > 4 \ln 2$ e nenhuma quando $\alpha < 4 \ln 2$. Isto conclui a demonstração dos itens I_1 e I_2 .

Sejam $\varrho \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ e $\alpha \in (0, -4 \ln((1 - 2\varrho)/\varrho))$. No caso em que $\varrho = \frac{1}{3}$, isto é, quando $\alpha = 4 \ln 2$, de (3.13) resulta

$$x > \frac{1}{3} \iff y < \frac{1}{4}.$$

Mais geralmente, se $\varrho > \frac{1}{3}$, ou seja quando $\alpha > 4 \ln 2$, de (3.13) tem-se

$$x > \varrho \iff y < \frac{\alpha + \ln\left(\frac{(1 - 2\varrho)}{\varrho}\right)}{3\alpha} < \frac{1}{4}.$$

Este último resultado, junto ao estudo da raízes de η_α , mostra que F possui um equilíbrio do tipo (c_3) com $x \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$, $y \in (0, \frac{1}{4})$ quando $\alpha > 4 \ln 2$. Note que, devido a simetria de x e y descritas pelas equações (3.13) e (3.14), também mostramos que F possui um equilíbrio do tipo (c_3) com $x \in (0, \frac{1}{4})$, $y \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ quando $\alpha > 4 \ln 2$. Assuma agora que (c_2) é um equilíbrio do campo vetorial F , isto é, $z = (z^1, z^2)$ tal que $F(z) = 0$ e $z^1 = z^2 = (x, 1 - 2x, x)$ para $x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$. Um argumento semelhante ao descrito para (c_3) mostra que para cada α , x é uma raiz de

$$r_\alpha(x) = \varphi_\alpha(x) - x.$$

Para analisar a unicidade desta raiz, basta observar que para qualquer $\alpha > 0$, $r_\alpha(x)$ é estritamente decrescente e tal que $r_\alpha(\frac{1}{4}) > 0$ e $r_\alpha(\frac{1}{3}) < 0$. A aplicação do Teorema do Valor Intermediário agora nos dá o resultado desejado.

Para a conclusão da demonstração, podemos verificar que se $\alpha = 0$, das equações (3.13) e (3.14) temos $x = y = \frac{1}{4}$, o que corresponde ao equilíbrio $((\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}), (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}))$. Também, no limite $\alpha \rightarrow \infty$ temos para o equilíbrio do tipo (c_1) , considerando a equação (3.13) que $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} x = \frac{1}{2}$ e por consequência $y = 0$, o que corresponde ao equilíbrio $((\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}), (0, 1, 0))$. Para o equilíbrio (c_2) , se $\alpha \rightarrow \infty$, $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} x = \frac{1}{2}$, que corresponde ao equilíbrio $((\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}))$. \square

Observação 4. A existência do equilíbrio do tipo (c_3) com $x \in [0, \frac{1}{4}] \cup [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$, é mostrada no Lema 9 quando $\alpha > 4 \ln 2$. O limitante para α é obtido ao considerar os pontos de teste $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{3}$. É possível que (c_3) já ocorra para valores de α menores do que $4 \ln 2 = 2.773$, mas o valor exato onde isto ocorre é difícil de se determinar analiticamente. Cálculos numéricos realizados com MATHEMATICA (Wolfram Research, 2022) sugerem que o valor é $\alpha \approx 2.745$.

Lema 10. *Existe $\alpha_* > 0$ suficientemente grande tal que se $\alpha > \alpha_*$, então o equilíbrio (c_3) é linearmente estável. O equilíbrio (c_2) é linearmente estável se $\alpha < \frac{8}{3}$ e linearmente instável se $\alpha > 3.08$. Quando $\alpha \rightarrow \infty$, $((\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}), (0, 1, 0))$ é estável e $((\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}))$ é instável.*

Demonstração. A estabilidade de um equilíbrio $z_* \in \mathfrak{Y}$ é determinada pela espectro da matriz Jacobiana de F em z_* . Para qualquer ponto $z \in \mathfrak{Y}$, a matriz Jacobiana é determinada pelas seguintes derivadas parciais,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_v^x(z)}{\partial x_v} &= \frac{\partial F_v^y(z)}{\partial y_v} = -1, & v \in \{1, 2, 3\} \\ \frac{\partial F_w^i(z)}{\partial x_v} &= \frac{\partial F_w^i(z)}{\partial y_v} = 0, & i \in \{x, y\}, w, v \in \{1, 2, 3\}, w \neq v \\ \frac{\partial F_v^i(z)}{\partial j_v} &= -\frac{\alpha}{2} \pi_v^i(z) (1 - \pi_v^i(z)) & v \in \{1, 3\}, i, j \in \{x, y\}, i \neq j \\ \frac{\partial F_w^i(z)}{\partial j_v} &= \frac{\alpha}{2} \pi_v^i(z) (1 - \pi_v^i(z)), & w, v \in \{1, 2, 3\}, w \neq v, i, j \in \{x, y\}, i \neq j \\ \frac{\partial F_2^i(z)}{\partial j_2} &= -\alpha \pi_v^i(z) (1 - \pi_v^i(z)), & i, j \in \{x, y\}, i \neq j \end{aligned}$$

Estas derivadas são facilmente verificadas ao considerarmos um exemplo. De (3.13) obtemos

$$F_1^x(z) = -x_1 + \frac{1}{2} \frac{e^{-\alpha y_1}}{e^{-\alpha y_1} + e^{-\alpha y_2}}.$$

Derivando a respeito de y_1 resulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1^x(z)}{\partial y_1} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dy_1} \left(\frac{e^{-\alpha y_1}}{e^{-\alpha y_1} + e^{-\alpha y_2}} \right) = -\frac{\alpha}{2} \frac{e^{-\alpha y_1}}{e^{-\alpha y_1} + e^{-\alpha y_2}} + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{e^{-\alpha y_1}}{e^{-\alpha y_1} + e^{-\alpha y_2}} \right)^2 \\ &= -\frac{\alpha}{2} \pi_1^x(z) + \frac{\alpha}{2} (\pi_1^x(z))^2. \end{aligned}$$

No equilíbrio z_* tem-se $F(z_*) = 0$, portanto $z_* = \pi(z_*)$, e assim da última equação acima e da forma das coordenadas de (c_3) resulta

$$\frac{\partial F_1^x(z)}{\partial y_1} = -\frac{\alpha}{2} x_1 + \frac{\alpha}{2} x_1^2 = -\frac{\alpha}{2} x + \frac{\alpha}{2} x^2 = -\frac{\alpha}{2} x(1-x).$$

O espectro da matriz Jacobiana do campo vetorial em z_* está constituído pelos autovalores

$$-1, \quad -1, \quad -1 \pm \alpha \sqrt{x(1-x)y(1-y)}, \quad -1 \pm \frac{3}{2} \alpha \sqrt{x(1-x)y(1-y)}. \quad (3.16)$$

Munidos do resultado estabelecido pelo Lema 9, suponhamos sem perda de generalidade que $y \in [0, \frac{1}{3})$ quando α é suficientemente grande. Assim, da equação (3.13), no limite quando $\alpha \rightarrow \infty$ resulta $x \rightarrow \frac{1}{2}$, e portanto, de (3.14) obtém-se $y \rightarrow 0$. Segue assim de (3.17) que todos os autovalores são iguais a -1 no limite quando $\alpha \rightarrow \infty$. Assim, para α suficientemente grande, os autovalores estão contidos no interior de uma circunferência em \mathbb{C} com diâmetro 1 e centro $-\frac{1}{2}$. Isto estabelece a afirmação feita pelo lema a respeito da estabilidade dos equilíbrios do tipo (c_3) .

O espectro da matriz Jacobiana do campo vetorial z_* para o equilíbrio (c_2) possui os autovalores

$$-1, \quad -1, \quad -1 \pm \frac{\alpha}{4(1 + \cosh[\alpha - 3x\alpha])}, \quad -1 \pm \frac{3\alpha}{4(1 + \cosh[\alpha - 3x\alpha])}. \quad (3.17)$$

Seja $\lambda_\alpha : [\frac{1}{4}, \frac{1}{3}] \rightarrow \mathbb{R}$ a função

$$x \mapsto -1 + \frac{3\alpha}{4(1 + \cosh[\alpha - 3x\alpha])}.$$

É relativamente simples verificar que λ_α é maior que os autovalores restantes para todo $\alpha > 0$. A estabilidade do equilíbrio (c_2) depende portanto do sinal de λ_α . Para cada $\alpha > 0$, a função λ_α é monótona crescente e contínua em $x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$. Quando $\alpha > \frac{8}{3}$, λ_α possui uma única raiz em $[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$ igual a $\frac{1}{3} - \operatorname{arccosh}[\frac{1}{4}(-4 + 3\alpha)]/(3\alpha)$. Isto mostra que $\lambda_\alpha < 0$ se $\alpha < \frac{8}{3}$, logo (c_2) é estável se $\alpha < \frac{8}{3}$. No entanto, neste caso em específico, não podemos garantir que (c_2) é instável se $\alpha > \frac{8}{3}$. Desenvolvendo λ_α para $x = \frac{1}{4}$, que é o limitante inferior de x , temos como raiz $\alpha = 3.08$. Realizando a mesma análise de λ_α para $x = \frac{1}{3}$ que é o limitante superior de x , temos como raiz $\alpha = \frac{8}{3}$. Desta forma podemos garantir apenas que (c_2) é instável se $\alpha > 3.08$. Se $\frac{8}{3} > \alpha > 3.08$, dependendo do lugar onde se encontre o valor de x definido pela condição de equilíbrio, o mesmo pode ser estável ou instável.

Por fim, podemos verificar facilmente que se $\alpha \rightarrow \infty$, $((\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}), (0, 1, 0))$ comporta-se como um equilíbrio do tipo (c_3) , o que também confirma sua estabilidade se $\alpha > \alpha_*$ suficientemente grande. O equilíbrio $((\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}))$ é do tipo (c_2) e, portanto, instável quando $\alpha \rightarrow \infty$. □

Demonstração do Teorema 7. As afirmações feitas no teorema seguem dos Teoremas 3 e 4 junto aos Lemas 9 e 10. □

3.2.2 Modelo cooperativo

O seguinte teorema fornece uma descrição dos equilíbrios do campo vetorial F no caso do grafo estrela cooperativo em função do parâmetro de reforço $\alpha > 0$.

Teorema 8. *Seja G a estrela $K_{1,2}$ e F o campo vetorial em (3.12), na versão cooperativa. Sejam (d_1) , (d_2) e $(d_3) \in \mathfrak{D}$ os seguintes pontos*

$$\left(\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)\right) \quad (d_1)$$

$$\left((x, 1 - 2x, x), (x, 1 - 2x, x)\right), \quad x \in \left(0, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \quad (d_2)$$

$$\left((0, 1, 0), (0, 1, 0)\right), \quad \left(\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)\right). \quad (d_3)$$

Se $\alpha = 0$ então Z converge com probabilidade positiva ao ponto (d_1) . Para qualquer $\alpha > 0$, Z converge com probabilidade positiva ao ponto (d_2) com $x \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$. Para α suficientemente grande Z converge com probabilidade positiva ao ponto da forma (d_2) com $x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$. No limite $\alpha \rightarrow \infty$, Z converge com probabilidade positiva a qualquer um dos pontos em d_3 .

A demonstração do Teorema 8 será feita considerando os Lemas 11 e 12 apresentados a continuação.

Lema 11. *A depender de α , o campo vetorial F em (3.12) na versão cooperativa possui os seguintes equilíbrios:*

- (d_1) se $\alpha = 0$.
- (d_2) com $x \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ se $\alpha > 0$.
- se α é suficientemente grande, existem dois equilíbrios do tipo (d_2) com $x = x_1$ e $x = x_2$ tais que $x_1, x_2 \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$.
- (d_3) no limite $\alpha \rightarrow \infty$.

Demonstração. É imediato verificar que (d_1) é um equilíbrio do campo vetorial F no caso cooperativo quando $\alpha = 0$. Para os pontos z_* da forma (d_2) , a condição de equilíbrio $F(z_*) = 0$, com F dado por (3.12), leva a consideração da seguinte equação em uma única variável x ,

$$x = \frac{1}{2 + 2e^{\alpha(1-3x)}}, \quad (3.18)$$

ou equivalentemente

$$\alpha(1 - 3x) = \ln\left(\frac{1 - 2x}{2x}\right). \quad (3.19)$$

Sejam ℓ_α e $g : \left[0, \frac{1}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, respectivamente as funções a esquerda e a direita de (3.19). A depender de α , a reta $\ell_\alpha(x)$ intercepta $g(x)$ em um, dois ou três pontos. Exemplos da primeira e da terceira situação são apresentados na Figura 5. É imediato verificar que g é estritamente decrescente e tal que g assume todos os valores em $[0, \infty)$ quando $x \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$. Do Teorema do Valor Intermediário temos que existe uma única solução a (3.19) para

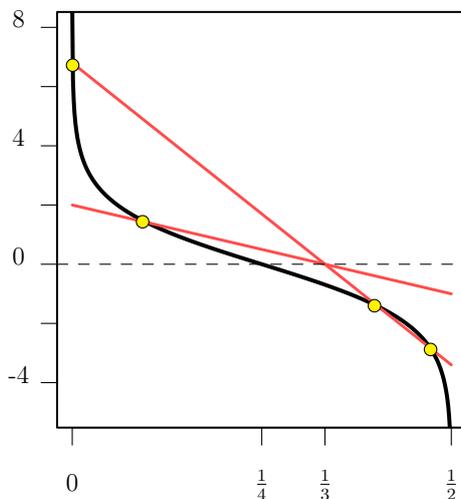


Figura 5 – Gráfico das funções ℓ_α e g em (3.19). As duas retas ℓ_α correspondem aos casos ℓ_2 e $\ell_{6,8}$.

cada $\alpha > 0$. Isto é suficiente para mostrar a existência do equilíbrio (d_2) em $(0, \frac{1}{4})$ quando $\alpha > 0$.

Passamos agora a análise dos equilíbrios da forma (d_2) com $x_1, x_2 \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$. Observamos primeiro que g é côncava para baixo e assume todos os valores em $(-\infty, 0)$ se $x \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$. Quando α é suficientemente grande, a reta ℓ_α corta em no máximo dois pontos x_1 e x_2 o gráfico de g , mas isto só ocorre quando ambos x_1 e $x_2 \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ pois neste caso $\ell_\alpha < 0$.

Resta por ser considerado o comportamento dos equilíbrios no caso em que $\alpha \rightarrow \infty$. Se $x \in (0, \frac{1}{4})$, do lado direito de (3.18) obtemos que $x = 0$ quando $\alpha \rightarrow \infty$. Se $x \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ de (3.18) obtemos que $x = \frac{1}{2}$ quando $\alpha \rightarrow \infty$. Isto é suficiente para mostrar a forma dos equilíbrios do tipo (d_3) . \square

Lema 12. *O equilíbrio (d_1) é linearmente estável quando $\alpha = 0$. O equilíbrio (d_2) é linearmente estável se $\alpha > \alpha_*$, onde $\alpha_* > 0$ é suficientemente grande. Os equilíbrios em (d_3) são linearmente estáveis quando $\alpha \rightarrow \infty$.*

Demonstração. Todos os autovalores da matriz Jacobiana de F no ponto determinado por (d_1) , quando $\alpha = 0$, são iguais a -1 . Isto mostra a primeira afirmação feita pelo lema.

Para o equilíbrio do tipo (d_2) , observamos primeiro que os autovalores da matriz Jacobiana de F são dominados pelo autovalor

$$\lambda_\alpha(x) = \frac{3\alpha}{4 + 4\cosh(\alpha - 3x\alpha)} - 1.$$

A função $\lambda_\alpha(x)$ possui um máximo global para $x \in [0, 1]$ e todo $\alpha > 0$ em $x = \frac{1}{3}$. Também, $\lambda_\alpha(\frac{1}{3}) < 0$ se $\alpha < \frac{8}{3}$. Se $\alpha > \frac{8}{3}$ então $\lambda_\alpha(x)$ é positiva no intervalo $[x_i, x_s]$ onde

$$x_i = \frac{1}{3} - \frac{1}{3\alpha} \operatorname{arccosh}\left(\frac{1}{4}(3\alpha - 4)\right), \quad x_s = \frac{1}{3} + \frac{1}{3\alpha} \operatorname{arccosh}\left(\frac{1}{4}(3\alpha - 4)\right) \quad (3.20)$$

Mostramos agora que (d_2) com $x \in (0, \frac{1}{4})$ é linearmente estável para qualquer $\alpha > 0$. Para isto basta mostrar que o valor de x que satisfaz (3.19) está a esquerda do intervalo (3.20) quando $\alpha > \frac{8}{3}$. Observamos que (d_2) é estável se $\alpha < \frac{8}{3}$. Utilizando as cotas em [Topsøe \(2007\)](#) obtemos a desigualdade

$$g(x) = \ln(1 - 2x) - \ln(2x) \leq -2x - \left(1 - \frac{1}{2x}\right).$$

Ao resolvermos em x a igualdade $\ell_\alpha(x) = -2x - (1 - 1/(2x))$ obtemos o valor \tilde{x}

$$\tilde{x} = \frac{1 + \alpha - \sqrt{5 - 4\alpha + \alpha^2}}{2(3\alpha - 2)}.$$

Observamos agora que $\tilde{x} < x_i$ o qual implica que $x < x_i$.

Utilizando um argumento similar mostramos que (d_2) com $x \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ é estável para α suficientemente grande. Consideramos primeiro a desigualdade

$$g(x) \geq -\frac{2x}{1 - 2x} - (2x - 1).$$

Logo, ao resolvermos $\ell_\alpha(x) = -2x(1 - 2x) - (2x - 1)$ a respeito de x , obtemos $x > x_s$ sempre e quando α for suficientemente grande; de fato quando $\alpha > 10 + 4\sqrt{5}$. Isto mostra que $x > x_s$ para todo α suficientemente grande.

No limite $\alpha \rightarrow \infty$ o intervalo $[x_i, x_s]$ se reduz ao ponto $\{\frac{1}{3}\}$. Sendo assim, a última afirmação feita pelo lema segue do Lema 11. \square

Demonstração do Teorema 8. As afirmações feitas no teorema seguem dos Teoremas 3 e 4 junto aos Lemas 11 e 12. \square

Capítulo 4

Simulações

Neste capítulo temos por objetivo alinhar os resultados obtidos no Capítulo 3 com simulações computacionais. Vários dos resultados analíticos descritos no Capítulo 3 foram motivados por simulações, e nesse sentido em alguns casos as simulações de fato precederam a teoria. O objetivo aqui consiste em mostrar como as simulações e a teoria estão de acordo.

As simulações do processo da ocupação das urnas por parte das bolas brancas e azuis foram realizadas na linguagem R (R Core Team, 2020). O código fonte dos scripts utilizados para realizar todas as simulações e figuras deste capítulo podem ser obtidas em

<https://github.com/paulorodrigues29/Simulacoes-Mestrado>

Nesse site também disponibilizamos diversos notebooks de MATHEMATICA empregados na demonstração de alguns dos lemas do Capítulo 3 tanto para o grafo triangular quanto para a estrela.

Com o objetivo de simplificar a apresentação, as figuras incluídas neste capítulo apenas mostram a evolução da ocupação dos vértices por uma única cor, $X(n)$. As simulações são sobrepostas sobre as soluções da EDO

$$\frac{d}{dt}z(t) = F(z(t)), \quad z \in \mathfrak{Y},$$

sendo F o campo vetorial definido pelas funções de coordenada em (2.7). As soluções $\phi_t(z_0)$, obtidas ao escolher diversos pontos iniciais $z_0 \in \mathfrak{Y}$, foram determinadas numericamente com a função `ode()` da livreria `deSolve`, Soetaert et al. (2010). Ambas, as simulações e as soluções para uma cor são apresentadas no espaço de fase constituído pelo 2-símplice, isto é no conjunto $\Delta = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^3 x_i = 1\}$. Para tal representação, os pontos (x_1, x_2, x_3) do 2-símplice foram identificados com um triângulo em \mathbb{R}^2 ao utilizar a transformação ternária $T : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $(x_1, x_2, x_3) \mapsto ((2x_2 + x_3)/2, x_3\sqrt{3}/2)$. Cada figura também apresenta as posições dos equilíbrios, obtidas ao resolver numericamente os pontos fixos de diversas funções descritas no Capítulo 3. Com este objetivo foi utilizada a função `uniroot.all()` da livreria `rootSolve`, Soetaert (2009). As figuras apresentadas a seguir mostram os resultados obtidos para cada um dos grafos na versão competitiva e cooperativa para vários valores do parâmetro de reforço.

4.2 Modelo Triângular Cooperativo

A Figura 7 apresenta resultados relativos a teoria descrita na Seção 3.1.2. Os pontos amarelos correspondem a resolução numérica da equação (3.10).

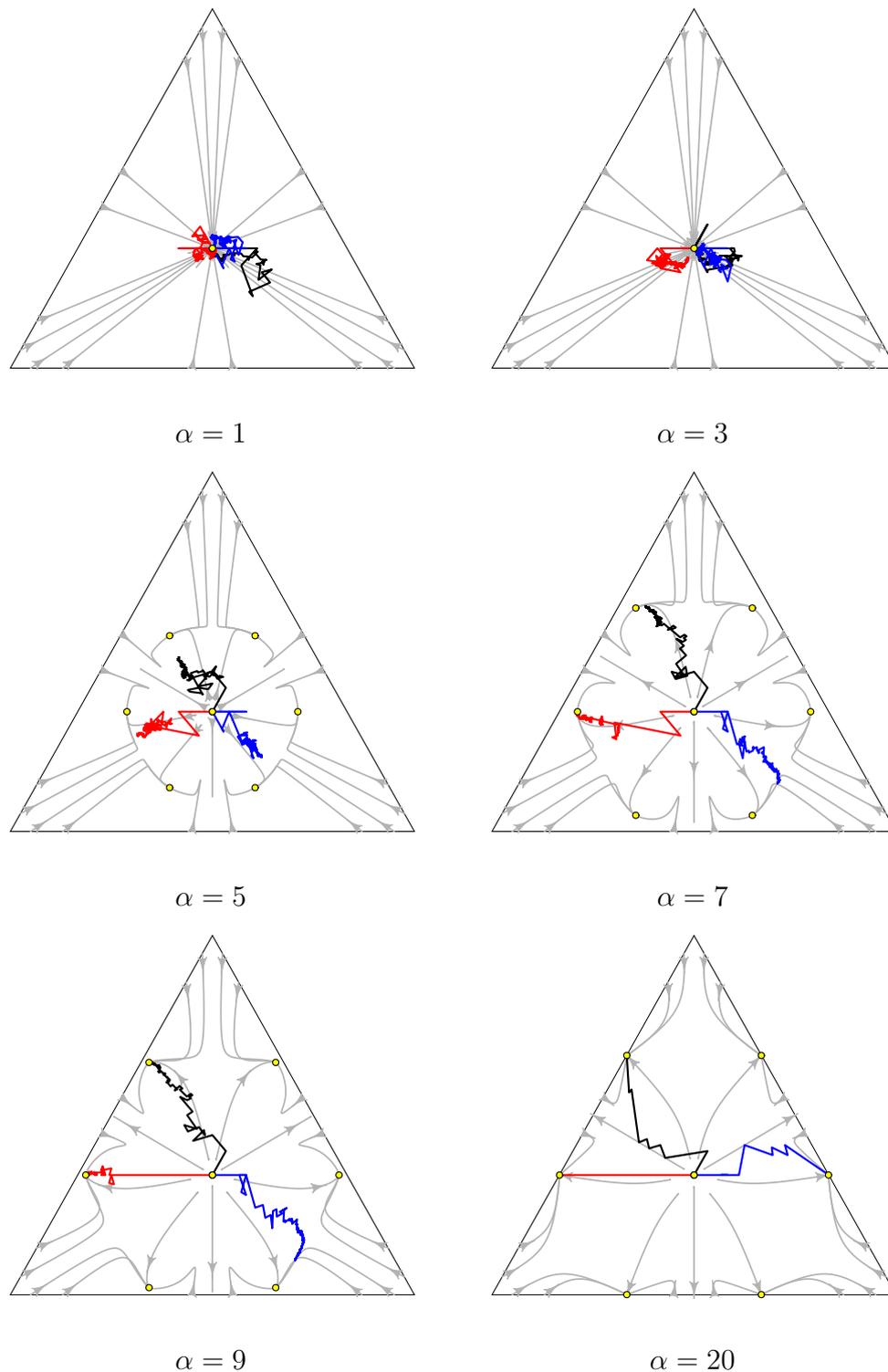


Figura 7 – simulações para diferentes α no modelo triângular cooperativo.

4.3 Modelo Estrela Competitivo

A Figura 8 apresenta resultados relativos a teoria descrita na Seção 3.2.1. Os pontos amarelos são caracterizados pelas soluções da equação (3.15).

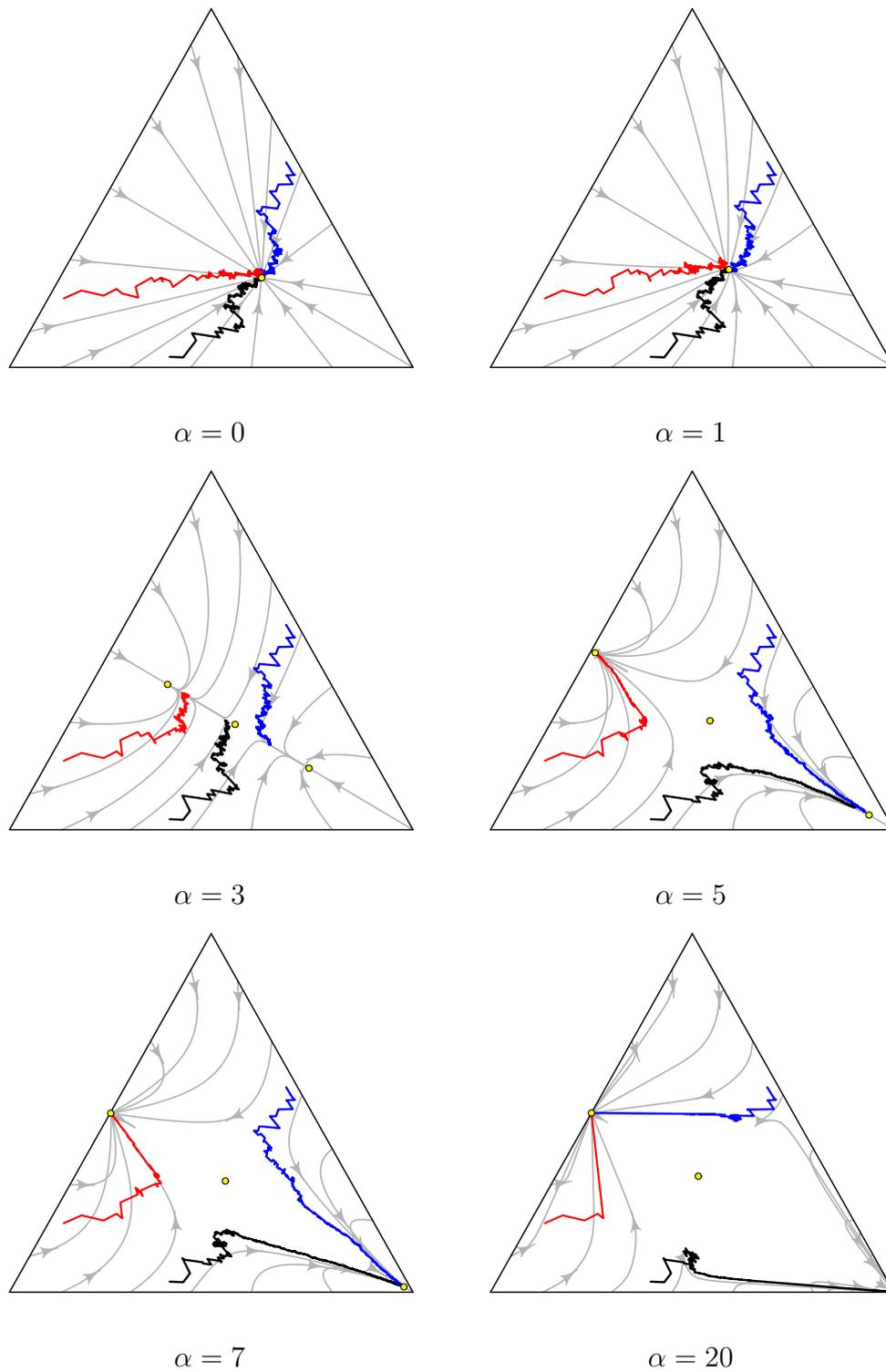


Figura 8 – simulações para diferentes α no modelo estrela competitivo.

4.4 Modelo Estrela Cooperativo

A Figura 9 apresenta resultados relativos a teoria descrita na Seção 3.2.2. Os pontos amarelos são caracterizados pelas soluções da equação (3.18).

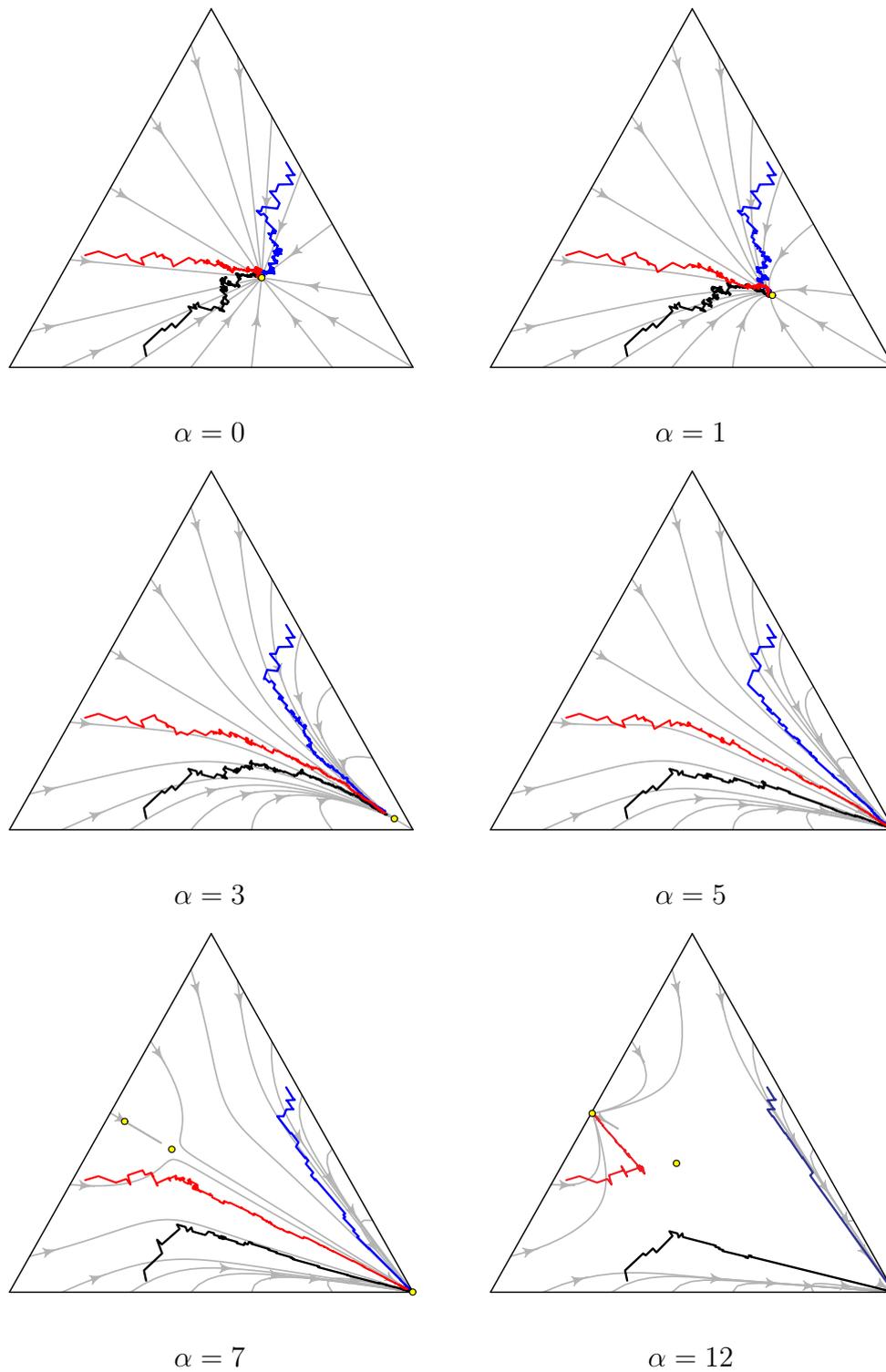


Figura 9 – simulações para diferentes α no modelo estrela cooperativo.

Conclusões e perspectivas futuras

O trabalho apresentado nesta dissertação considerou um modelo de urnas interagentes a depender da geometria determinada por um grafo finito. Especificamente, foi desenvolvido um modelo o qual generaliza [Benaïm et al. \(2015\)](#) e [van der Hofstad et al. \(2016\)](#) a urnas com duas cores. O modelo proposto aqui permite estudar duas dinâmicas diferentes: a competição e a cooperação entre as cores. Mostramos que para qualquer uma destas dinâmicas, a fração de bolas de cada cor em cada urna converge com probabilidade positiva a uma medida de probabilidade determinada pelos equilíbrios de uma equação diferencial ordinária.

Foram considerados dois grafos de 3 vértices com duas cores, explorando situações distintas de cooperação e competição. É interessante notar a diferença dos modelos estrelar e triangular neste trabalho, visto que, pela simples diferença de um elo (ligação) entre vértices nos dois modelos, equilíbrios diferentes são apresentados, bem como diferentes convergências.

Para continuidade deste trabalho poderá ser interessante considerar modelos definidos por probabilidades de transição diferentes das consideradas em (1.4) com o propósito de incluir outras dinâmicas com repulsão/atração a depender dos vértices de G . Por exemplo, a probabilidade

$$\mathbb{P}(B(u, v, n + 1) \mid \mathfrak{F}_n) = \frac{(2 - A_v(n))^\alpha}{(2 - A_v(n))^\alpha + (2 - A_u(n))^\alpha},$$

fornece um outro modelo com competição entre cores opostas. Mais geralmente, para os vértices u e v do elo $\langle u, v \rangle$, a competição pode ser estabelecida por uma probabilidade

$$\mathbb{P}(B(u, v, n + 1) \mid \mathfrak{F}_n) = f(A_v(n), A_u(n)),$$

onde $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow [0, 1]$ é estritamente decrescente a respeito de $A_v(n)$. Vale ressaltar que a dinâmica descrita pelo processo da ocupação dos vértices por cada cor pode ser relativamente complexa a depender da escolha de f . Dependendo dessa escolha, situações interessantes podem ser abordadas, tais como a definição de campos vetoriais F que admitam uma função de Lyapunov. Neste caso é possível estabelecer a convergência quase certa de $Z(n)$. Se o conjunto dos equilíbrios $E = \{z \in \mathfrak{N} : F(z) = 0\}$ esta formado por pontos isolados, da Proposição 6.4 em [Benaïm \(1999\)](#) segue que $Z(n)$ converge quase certamente a um destes pontos.

Além da convergência com probabilidade positiva de $Z(n)$ a um dos equilíbrios de F , existem outras questões interessantes para o modelo descrito nesta dissertação tais como limites distribucionais, grandes desvios, etc. Nenhum destes assuntos foram considerados neste trabalho, mas podem em princípio ser desenvolvidos utilizando a teoria das aproximações estocásticas.

Referências

- Aletti, G. and Ghiglietti, A. (2017). Interacting generalized friedman’s urn systems. *Stochastic Processes and their Applications*, 127(8):2650–2678.
- Arthur, W. B. (1989). Competing technologies, increasing returns, and lock-in by historical events. *Economic Journal*, 99(394):116–31.
- Arthur, W. B., Anderson, P. W., Arrow, K. J., and Pines, D. (1988). Self-Reinforcing Mechanisms in Economics. In *The Economy as an Evolving Complex System*. Addison Wesley, Redwood City.
- Benaïm, M. (1996). A dynamical system approach to stochastic approximations. *SIAM J. Control Optim.*, 34(2):437–472.
- Benaïm, M. (1999). Dynamics of stochastic approximation algorithms. In Azéma, J., Émery, M., Ledoux, M., and Yor, M., editors, *Séminaire de Probabilités XXXIII*, pages 1–68, Berlin, Heidelberg. Springer Berlin Heidelberg.
- Benaïm, M., Benjamini, I., Chen, J., and Lima, Y. (2015). A generalized Pólya’s urn with graph based interactions. *Random Structures Algorithms*, 46(4):614–634.
- Costa, M. and Jordan, J. (2022). Phase transitions in non-linear urns with interacting types. *Bernoulli*, 28(4):2546–2562.
- Crimaldi, I., Louis, P.-Y., and Minelli, I. G. (2020). Interacting non-linear reinforced stochastic processes: synchronization and no-synchronization. <https://arxiv.org/abs/2008.01489>.
- Dhaigude, R. M., Thool, S. B., Bagul, Y. J., and Raut, V. M. (2021). On simple bounds for inverse hyperbolic sine and inverse hyperbolic tangent functions. *Jñānābha*, 51(1):101–108.
- Dosi, G. and Kaniovski, Y. (1994). On “badly behaved” dynamics: Some applications of generalized urn schemes to technological and economic change. *Journal of Evolutionary Economics*, 4(2):93–123.

- Dosi, G., Moneta, A., and Stepanova, E. (2019). Dynamic increasing returns and innovation diffusion: bringing polya urn processes to the empirical data. *Industry and Innovation*, 26(4):461–478.
- Dosi, G. and Nelson, R. (1994). An introduction to evolutionary theories in economics. *Journal of Evolutionary Economics*, 4(3):153–72.
- Durrett, R. (2010). *Probability: Theory and Examples*. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press, NY, USA, fourth edition.
- Guel, F. L. (2012). Arthur’s model of competing technologies when some choices are non-exclusive. https://editorialexpress.com/cgi-bin/conference/download.cgi?db_name=CEF2012&paper_id=300.
- Hirsch, M., Smale, S., and Devaney, R. (2013). *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*. Elsevier Inc.
- Hirsch, M. W. and Smale, S. (1974). *Differential equations, dynamical systems, and linear algebra*. Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London.
- Jackson, M. O. (2008). *Social and Economic Networks*. Princeton University Press, USA.
- Kaur, G. and Sahasrabudhe, N. (2022). Interacting urns on a finite directed graph. *Journal of Applied Probability*, page 1–23.
- Kushner, H. and Clark, D. (1978). *Stochastic Approximation Methods for Constrained and Unconstrained Systems*, volume 26 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag New York.
- Kushner, H. J. (1977). General convergence results for stochastic approximations via weak convergence theory. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 61(2):490 – 503.
- Laruelle, S. and Pagès, G. (2019). Nonlinear randomized urn models: a stochastic approximation viewpoint. *Electron. J. Probab.*, 24:Paper No. 98, 47.
- Launay, M. (2012). Interacting urn models. <https://arxiv.org/abs/1101.1410>.
- Launay, M. and Limic, V. (2012). Generalized interacting urn models. <https://arxiv.org/abs/1207.5635>.
- Ljung, L. (1977). Analysis of recursive stochastic algorithms. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 22(4):551–575.
- Mahmoud, H. (2008). *Polya Urn Models*. Chapman & Hall/CRC, 1 edition.

- Pemantle, R. (1990). Nonconvergence to unstable points in urn models and stochastic approximations. *Ann. Probab.*, 18(2):698–712.
- Pemantle, R. (2007). A survey of random processes with reinforcement. *Probab. Surveys*, 4:1 – 79.
- Pólya, G. (1930). Sur quelques points de la théorie des probabilités. *Annales de l'institut Henri Poincaré*, 1(2):117–161.
- R Core Team (2020). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. <https://www.R-project.org/>.
- Robinson, C. (1999). *Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos*, volume 28 of *Studies in Advanced Mathematics*. CRC-Press.
- Rosales, R. A., Prado, F. P., and Pires, B. (2022). Vertex reinforced random walks with exponential interaction on complete graphs. *Stochastic Process. Appl.*, 148:353–379.
- Ruszel, W. M. and Thacker, D. (2022). Positive reinforced generalized time-dependent pólya urns via stochastic approximation. <https://arxiv.org/abs/2201.12603>.
- Skyrms, B. and Pemantle, R. (2000). A dynamic model of social network formation. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 97(16):9340–9346.
- Soetaert, K. (2009). rootsolve: Nonlinear root finding, equilibrium and steady-state analysis of ordinary differential equations. R package 1.6, <https://cran.r-project.org/web/packages/rootSolve/index.html>.
- Soetaert, K., Petzoldt, T., and Setzer, R. W. (2010). Solving differential equations in R: Package deSolve. *Journal of Statistical Software*, 33(9):1–25.
- Topsøe, F. (2007). *Some Bounds for the Logarithmic Function*, volume 4, pages 137–151. Nova Science Publishers, United States.
- van der Hofstad, R., Holmes, M., Kuznetsov, A., and Ruszel, W. (2016). Strongly reinforced Pólya urns with graph-based competition. *Ann. Appl. Probab.*, 26(4):2494–2539.
- Wolfram Research, I. (2022). Mathematica, Version 13.1. <https://www.wolfram.com/mathematica>.