

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE FILOSOFIA, CIÊNCIAS E LETRAS DE RIBEIRÃO PRETO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA APLICADA À MEDICINA E BIOLOGIA

**Resultados Analíticos para as Distribuições
Estatísticas Relacionadas à Caminhada Determinista
do Turista sem Memória: Efeito da Dimensionalidade
do Sistema e Modelos de Campo Médio**

(Versão Corrigida)

César Augusto Sangaletti Terçariol

Dissertação submetida ao Departamento de Física e Matemática da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto da Universidade de São Paulo como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Física Aplicada à Medicina e Biologia.

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Souto Martinez

Ribeirão Preto, novembro de 2004.

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE DOCUMENTO, POR MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Terçariol, C. A. S.

Resultados Analíticos para as Distribuições Estatísticas Relacionadas à Caminhada Determinista do Turista sem Memória: Efeito da Dimensionalidade do Sistema e Modelos de Campo Médio

(Versão Corrigida)/ César Augusto Sangaletti Terçariol; orientador Prof. Dr. Alexandre Souto Martinez.

– Ribeirão Preto/SP, 2005.

114 f.

Dissertação (Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada à Medicina e Biologia) – Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto da Universidade de São Paulo.

Palavras Chaves: caminhada determinista, caminhada do turista, meios aleatórios, distribuição conjunta, distribuição de tempos de transiente, distribuição de período de atratores, modelo de distâncias aleatórias, modelo de mapeamento aleatório, estatística extremal, dimensionalidade do sistema.

Dedico esta dissertação à memória do meu amigo e mestre Luís Alberto Trindade.

Agradecimentos

Quero manifestar minha gratidão ao meu orientador Alexandre Souto Martinez pela atenção e receptividade demonstradas desde o primeiro contato até os momentos mais conturbados, personalidade dinâmica que se tornou minha referência pessoal e profissional, protagonista da transformação intelectual e filosófica por mim experimentada nestes dois últimos anos.

Gostaria de agradecer aos componentes da banca, Osame Kinouchi Filho e Roberto Nicolau Onody, pelas sugestões e críticas construtivas que fizeram a este trabalho.

Agradeço aos professores doutores

- Antonio Caliri
- Antonio Carlos Roque da Silva Filho
- Carlos Alberto Pelá
- Carlos Frederico de Oliveira Graeff
- Draulio Barros de Araújo
- Marco Antonio Alves da Silva
- Nelson Augusto Alves
- Oswaldo Baffa Filho
- Ubiraci Pereira da Costa Neves

pela prestatividade e carisma que demonstraram durante as disciplinas que cursei.

Agradeço aos coordenadores de curso e alunos do Centro Universitário Barão de Mauá pela cooperação em flexibilizar meus horários de aula.

Sou grato ao então doutorando Ivan Torres Pisa e ao Prof. Dr. Evandro Eduardo Seron Ruiz pelo incentivo e orientação a mim dispensados nos momentos iniciais.

Agradeço aos colegas de estudo pela oportunidade de intercâmbio de conhecimento.

Resumo

Considere um meio caracterizado por N pontos cujas coordenadas são geradas aleatoriamente de maneira uniforme nas arestas unitárias de um hipercubo d -dimensional. Um caminhante parte de cada ponto deste meio desordenado e se movimenta obedecendo à regra determinista de ir para o ponto mais próximo que não tenha sido visitado nos últimos μ passos. Este processo foi denominado de caminhada determinista do turista. Cada trajetória gerada por esta dinâmica possui uma parte inicial não-periódica de t passos (transiente) e uma parte final periódica de p passos (atrator). As probabilidades de vizinhança são expressas através da fórmula de Cox, que é parametrizada pela função beta incompleta normalizada $I_d = I_{1/4}[1/2, (d+1)/2]$. Enfatizamos aqui que a distribuição relevante é $S_{\mu,d}^{(N)}(t,p)$, a distribuição conjunta de t e p , que tem como casos particulares as distribuições marginais, previamente estudadas. O objetivo deste estudo é obter analiticamente estas distribuições para a caminhada determinista do turista sem memória no espaço euclidiano, no modelo de distâncias aleatórias (que corresponde ao limite $d \rightarrow \infty$) e no modelo de mapeamento aleatório (que é um caso limite das redes de Kauffman). As distribuições analíticas obtidas foram validadas através de experimentos numéricos. A distribuição conjunta de tempos de transiente e período de atratores, no limite termodinâmico para uma dimensionalidade arbitrária vale: $S_{1,d}^{(\infty)}(t,p) = [\Gamma(1 + I_d^{-1}) \cdot (t + I_d^{-1}) / \Gamma(t + p + I_d^{-1})] \cdot \delta_{p,2}$, onde $t = 0, 1, 2, \dots, \infty$; $\Gamma(z)$ é a função gama e $\delta_{i,j}$ é o delta de Kronecker. A caminhada determinista do turista sem memória no modelo de mapeamento aleatório produz uma distribuição de períodos não-trivial ($S_{0,rm}^{(N)}(p) \propto p^{-1}$), que é obtida de $S_{0,rm}^{(N)}(t,p) = \Gamma(N) / \{\Gamma[N+1 - (t+p)]N^{t+p}\}$, onde enfatizamos que o número de pontos explorados $n_e = t+p$ é a grandeza fundamental nos problemas considerados.

Palavras Chaves: caminhada determinista, caminhada do turista, meios aleatórios, distribuição conjunta, distribuição de tempos de transiente, distribuição de período de atratores, modelo de distâncias aleatórias, modelo de mapeamento aleatório, estatística extremal, dimensionalidade do sistema.

Abstract

Consider a medium characterized by N points whose coordinates are randomly generated by a uniform distribution along the unitary edges of a d -dimensional hypercube. A walker leaves from each point of this disordered medium and moves according to the deterministic rule to go to the nearest point which has not been visited in the preceding μ steps. This process has been called the deterministic tourist walk. Each trajectory generated by this dynamics has an initial non-periodic part of t steps (transient) and a final periodic part of p steps (attractor). The neighborhood probabilities are given by the Cox formula, which is parameterized by the normalized incomplete beta function $I_d = I_{1/4}[1/2, (d+1)/2]$. Here we stress that the relevant distribution is the joint t and p distribution $S_{\mu,d}^{(N)}(t,p)$, which has as particular cases, the marginal distributions previously studied. The objective of this study is to obtain analytically these distributions for the memoryless deterministic tourist walk in the euclidean space, random link model (which corresponds to $d \rightarrow \infty$ limit) and random map model (which is a limiting case of the Kauffman model). The obtained distributions have been validated by numerical experiments. The joint transient time and attractor period distribution in the thermodynamic limit for an arbitrary dimensionality is: $S_{1,d}^{(\infty)}(t,p) = [\Gamma(1 + I_d^{-1}) \cdot (t + I_d^{-1}) / \Gamma(t + p + I_d^{-1})] \cdot \delta_{p,2}$, where $t = 0, 1, 2, \dots, \infty$; $\Gamma(z)$ is the gamma function and $\delta_{i,j}$ is the Kronecker's delta. The memoryless deterministic tourist walk in the random map leads to a non-trivial cycle distribution ($S_{0,rm}^{(N)}(p) \propto p^{-1}$), which is obtained from $S_{0,rm}^{(N)}(t,p) = \Gamma(N) / \{\Gamma[N + 1 - (t + p)] N^{t+p}\}$, where we stress that the number of explored points $n_e = t + p$ is the fundamental quantity in the considered problems.

Keywords: deterministic walk, tourist walk, random media, joint distribution, transient time distribution, attractor period distribution, random distance model, random map model, extremum statistics, system dimensionality.

Sumário

Lista de Siglas	p. 15
Lista de Símbolos	p. 17
1 Introdução	p. 19
2 Modelo da Caminhada Determinista do Turista	p. 23
2.1 Meio Desordenado: Aspecto Estático	p. 23
2.2 Caminhada Determinista do Turista: Aspecto Dinâmico	p. 24
2.2.1 Turista Preguiçoso	p. 24
2.2.2 Turista sem Memória	p. 25
2.2.3 Turista com Memória	p. 25
2.3 Efeito de Borda	p. 25
2.4 Algumas Funções Especiais	p. 26
2.4.1 Funções Complementares	p. 27
2.4.2 Aproximação para $I_z(a, b)$	p. 28
2.5 Probabilidade de Vizinhança em Ambientes Poissônicos: Fórmula de Cox	p. 28
2.6 Aproximação de Campo Médio	p. 30
2.6.1 Modelo de Distâncias Aleatórias	p. 31
2.6.2 Modelo de Mapeamento Aleatório	p. 32
2.7 Conclusão	p. 34
3 Experimento Numérico da Caminhada do Turista	p. 35

3.1	Tabela de Vizinhança	p. 35
3.1.1	Espaço Euclidiano	p. 37
3.1.2	Modelo de Distâncias Aleatórias	p. 38
3.1.3	Modelo de Mapeamento Aleatório	p. 39
3.2	Caminhada do Turista	p. 39
3.3	Tratamento Estatístico	p. 40
3.4	Conclusão	p. 41
4	Distribuição dos Tempos de Transiente no Modelo de Distâncias Aleatórias	p. 43
4.1	Estatística de Extremos	p. 43
4.2	Distribuição de Tempo de Transiente: Resultado Analítico	p. 45
4.2.1	Limite Termodinâmico	p. 51
4.2.2	Distribuição Acumulada e Probabilidade de Subsistência	p. 53
4.3	Efeito de Tamanho Finito	p. 55
4.4	Validação Numérica	p. 56
4.5	Conclusão	p. 56
5	Distribuição dos Tempos de Transiente em Sistemas Unidimensionais	p. 59
5.1	Meio Semi-infinito	p. 59
5.2	Meio Infinito	p. 64
5.2.1	Distribuição Acumulada e Probabilidade de Subsistência	p. 66
5.2.2	Efeito de Tamanho Finito	p. 68
5.3	Validação Numérica	p. 68
5.4	Conclusão	p. 69
6	Distribuição de Transientes em Sistemas de Dimensionalidade Arbitrária	p. 71

6.1	Probabilidade de Subsistência	p. 71
6.2	Distribuição de Tempos de Transiente	p. 73
6.3	Distribuição Acumulada	p. 75
6.4	Validação Numérica	p. 76
6.5	Conclusão	p. 76
7	Distribuição Conjunta no Modelo de Mapeamento Aleatório	p. 79
7.1	Distribuição Conjunta de Tempos de Transientes e Períodos dos Atratores	p. 80
7.1.1	Período Unitário	p. 80
7.1.2	Período Duplo	p. 81
7.1.3	Período Arbitrário	p. 81
7.2	Probabilidade de Exploração	p. 84
7.3	Distribuição Acumulada	p. 85
7.4	Validação Numérica	p. 85
7.5	Conclusão	p. 85
8	Conclusão	p. 87
	Apêndice A – Distribuição Geométrica	p. 91
	Apêndice B – Tabelas de Resultado de Simulações Numéricas	p. 93
	Apêndice C – Código-Fonte do Programa de Simulação Numérica	p. 101
C.1	Primeira Parte: Geração da Tabela de Vizinhança	p. 101
C.1.1	Modelo Euclideano	p. 103
C.1.2	Modelo de Distâncias Aleatórias	p. 104
C.1.3	Modelo de Mapeamento Aleatório	p. 105
C.2	Segunda Parte: Caminhada do Turista e Tratamento Estatístico	p. 107
	Referências	p. 113

Lista de Siglas

DFM Departamento de Física e Matemática

FAMB Física Aplicada à Medicina e Biologia

FCFRP Faculdade de Ciências Farmacêuticas de Ribeirão Preto

FFCLRP Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto

USP Universidade de São Paulo

PA Progressão Aritmética

pdf Função de Densidade de Probabilidade (Probability Density Function)

Lista de Símbolos

N Número de pontos do meio

d Dimensionalidade do meio

μ Memória do turista

t Tamanho do transiente (em número de passos)

p Período do atrator (em número de passos)

n_e Número de sítios explorados pelo turista

I_d Função beta incompleta normalizada: $I_d = I_{1/4}[1/2, (d + 1)/2]$

rl Modelo de distâncias aleatórias (*random link*)

rm Modelo de mapeamento aleatório (*random map*)

$D_{i,j}$ Distância entre os sítios i e j

$S_{\mu,d}^{(N)}(t, p)$ Distribuição conjunta de probabilidade do tempo de transiente (t) e período do atrator (p) de uma caminhada do turista com μ passos de memória num meio desordenado de dimensionalidade d com N pontos

$F_{\mu,d}^{(N)}(t)$ Distribuição acumulada do tempo de transiente

$q_{\mu,d}^{(N)}(j)$ Probabilidade de subsistência (ou exploração) no j -ésimo passo da caminhada

$p_{\mu,d}^{(N)}(j)$ Probabilidade de captura (ou revisita) no j -ésimo passo da caminhada

$P_1^{(d)}$ Densidade de casais num ambiente poissônico d -dimensional: $P_1^{(d)} = 1/(1 + I_d)$

1 *Introdução*

As caminhadas aleatórias em meios regulares e desordenados são um assunto bastante explorado, capaz de modelar uma grande variedade de fenômenos, como por exemplo, problemas de transporte (difusão) [1, 2]. Em contrapartida, as caminhadas deterministas em meios desordenados são um assunto pouco explorado, cujos comportamentos ainda não são totalmente compreendidos.

Estamos propondo o modelo de uma caminhada determinista sobre um meio desordenado. Este meio é caracterizado por N pontos cujas coordenadas são geradas aleatoriamente de maneira uniforme nas arestas unitárias de um hipercubo de d dimensões. De cada ponto deste meio, parte um caminhante que se movimenta obedecendo à regra determinista de ir para o ponto mais próximo que não tenha sido visitado nos últimos μ passos. A trajetória gerada por esta dinâmica possui uma parte inicial não-periódica de t passos, denominada transiente, e uma parte final periódica de p passos, denominada de atrator, na qual os mesmos sítios serão sempre visitados na mesma seqüência. Apesar de poder ser enunciado de forma simples, esta dinâmica possui um comportamento complexo, com resultados não-triviais para $\mu \geq 2$. Estas caminhadas foram denominadas de *Caminhada Determinista do Turista* [3, 4, 5, 6].

Observamos que a regra pode ser relaxada, permitindo que o viajante visite com probabilidades maiores os sítios mais próximos, sendo esta denominada de *Caminhada Estocástica do Turista* [7, 8].

O objetivo desta dissertação é estender a idéia apresentada na Referência [9] utilizando uma generalização da distribuição geométrica e obter analiticamente as distribuições conjuntas de probabilidade para os tempos de transientes e período dos atratores da caminhada determinista do turista sem memória.

No Capítulo 2 apresentamos o modelo da caminhada do turista, enfatizando seus aspectos mais importantes. A seguir, introduzimos algumas funções especiais, discutimos as relações de vizinhança em processos poissônicos e destacamos a variável I_d , que será a

grandeza relevante do nosso estudo. Encerramos o Capítulo com dois modelos que apresentam a característica da aproximação de campo médio e são casos limites dos espaços euclidianos e das redes de Kauffman [10].

No Capítulo 3 descrevemos os detalhes da implementação do programa de simulação numérica utilizado na validação dos resultados obtidos. Em particular, ressaltamos as melhorias feitas em relação à versão anterior [11].

No Capítulo 4 determinamos analiticamente a distribuição de transientes para o modelo de distâncias aleatórias, tanto para sistemas com tamanho finito quanto para o limite termodinâmico. Em seguida, fazemos uma analogia à distribuição geométrica e determinamos as probabilidades de subsistência e de captura ao longo da caminhada. Esta nova interpretação do problema será a forma padrão de abordarmos os demais modelos. Finalizando o Capítulo, mensuramos o efeito de tamanho finito e apresentamos os resultados das simulações numéricas que validam nossos resultados.

No Capítulo 5 focalizamos os sistemas unidimensionais. Determinamos o limite termodinâmico da distribuição de transientes para um meio semi-infinito e discutimos sua equivalência para com o modelo de distâncias aleatórias. Com uma simples modificação na formulação algébrica, obtemos a distribuição de transientes para o meio de interesse: o meio infinito. Estendemos a este modelo a analogia com a distribuição geométrica, determinando a probabilidade de subsistência a cada passo da trajetória. Assim como no modelo de distâncias aleatórias, a análise destas probabilidades revelou grande regularidade, elegendo-as como grandezas elementares na composição da distribuição de transientes. A seguir mostramos que o efeito de tamanho finito é pouco pronunciado no caso unidimensional e apresentamos a validação numérica de nossos resultados.

No Capítulo 6 generalizamos os resultados obtidos para meios com dimensionalidade arbitrária. Nossa demonstração segue uma seqüência diferente dos Capítulos anteriores. Inicialmente, inferimos as probabilidades de subsistência, e a partir destas construímos a distribuição dos transientes e sua distribuição acumulada. Por fim, apresentamos a validação numérica para algumas dimensionalidades em particular.

No Capítulo 7 descrevemos um modelo de distâncias aleatórias assimétricas e mostramos que este é equivalente ao modelo de mapeamento aleatório estudado por Derrida e Flyvbjerg [12, 13]. A distribuição conjunta dos tempos de transiente e período dos atratores é o resultado inovador que obtemos para este modelo. A partir desta distribuição conjunta, obtemos a distribuição para o número de sítios explorados na caminhada e fazemos a analogia à distribuição geométrica, determinando as probabilidades de exploração

e de revisita ao longo da caminhada.

As considerações finais e perspectivas de futuros trabalhos são apresentados no Capítulo 8.

No Apêndice A fazemos uma breve revisão sobre a distribuição geométrica. No Apêndice B apresentamos as tabelas que validam os resultados analíticos com simulações numéricas. Finalmente, no Apêndice C apresentados códigos numéricos desenvolvidos e utilizados neste trabalho.

2 *Modelo da Caminhada Determinista do Turista*

Neste Capítulo apresentamos o modelo de uma caminhada determinista em um meio desordenado. Esta caminhada é realizada num meio contínuo com pontos distribuídos aleatoriamente. Enfatizamos o papel da distribuição conjunta entre os tempos de transiente e período dos atratores através de exemplos simples. De fato, são estas distribuições o objetivo desta dissertação. Outros aspectos importantes enfatizados são os efeitos de borda, de tamanho finito e da dimensionalidade.

Em seguida, apresentamos algumas funções especiais que serão relevantes em nosso trabalho. A discussão das probabilidades de vizinhança em ambientes poissônicos revelará a grandeza de interesse I_d , que se mostrará fundamental na generalização dos resultados obtidos para espaços euclidianos de dimensionalidade arbitrária. Em particular, o limite $d \gg 1$ leva aos modelos de campo médio.

2.1 Meio Desordenado: Aspecto Estático

Considere o meio desordenado (mapa) como sendo composto por N pontos (sítios) de um espaço euclidiano de d dimensões, cujas coordenadas $x_i^{(k)}$ (com $i = 1, 2, \dots, N$ e $k = 1, 2, \dots, d$) são geradas aleatoriamente seguindo uma função de densidade de probabilidade (pdf) uniforme no intervalo $[0; 1]$. Neste meio, define-se a distância entre dois sítios i e j quaisquer através da métrica euclidiana:

$$D_{ij} = \sqrt{\sum_{k=1}^d [x_i^{(k)} - x_j^{(k)}]^2}. \quad (2.1)$$

Matematicamente, este meio representa N pontos dispostos aleatoriamente no interior de um hipercubo de d dimensões com arestas unitárias.

2.2 Caminhada Determinista do Turista: Aspecto Dinâmico

Considere agora neste meio desordenado um viajante que parte de um sítio inicial s_0 . O viajante se movimenta de acordo com a regra determinista de ir para o sítio mais próximo que não tenha sido visitado nos últimos μ passos. Esta regra gera a caminhada do turista [3]. A grandeza μ , denominada memória, representa o tempo (em número de passos) necessário para a regeneração dos sítios visitados (tempo refratário).

Partindo de cada sítio do mapa (ou de vários mapas), o viajante percorre trajetórias diferentes que possuem uma parte inicial não-periódica (transiente de tamanho t) e terminam em ciclos (atratores de período p). Dependendo da dimensionalidade do sistema e da memória, várias situações podem ser consideradas, como veremos abaixo.

2.2.1 Turista Preguiçoso

O caso mais simples a ser considerado é o do turista preguiçoso, no qual $\mu = 0$. O viajante fica preso no sítio inicial s_0 , pois ele é, a cada passo, o sítio mais próximo permitido. Dessa forma, todos os sítios são atratores de período unitário do sistema. A distribuição de transientes $S_{\mu,d}(t)$ vale simplesmente

$$S_{0,d}(t) = \delta_{t,0} ,$$

e a distribuição de períodos $S_{\mu,d}(p)$

$$S_{0,d}(p) = \delta_{p,1} .$$

Neste caso simples, a distribuição conjunta vale

$$S_{0,d}(t, p) = S_{0,d}(t) \cdot S_{0,d}(p) = \delta_{t,0} \cdot \delta_{p,1} .$$

Embora esta situação seja trivial, sua extensão para a caminhada estocástica do turista (e para o mapeamento aleatório, como veremos no Capítulo 7) produz resultados analíticos onde observa-se uma mudança abrupta de comportamento [8].

2.2.2 Turista sem Memória

No caso em que $\mu = 1$, o turista é obrigado, a cada passo, a deixar o sítio em que se encontra e mover-se até o sítio mais próximo dentre os demais. A denominação *turista sem memória* se deve ao fato de que, a cada passo, o turista tem conhecimento apenas do sítio em que está, mas não se “lembra” de nenhum dos sítios visitados nos passos precedentes. As trajetórias sempre terminam em dois sítios que são mutuamente mais próximos. Diz-se que estes pontos formam um casal. Os casais são os atratores do sistema. Portanto, a distribuição de períodos vale

$$S_{1,d}(p) = \delta_{p,2} ,$$

ou seja, todos os ciclos têm período 2. No entanto, a distribuição de transientes não é concentrada num único valor. Como veremos, a densidade de atratores é grande, fazendo com que o tempo de transiente tenha um valor médio pequeno ($\bar{t} < 1$), assim como sua variância ($\sigma_t^2 < 1$). O cálculo e validação das distribuições dos tempos de transiente em função da dimensionalidade será considerado neste trabalho.

2.2.3 Turista com Memória

Os casos em que $\mu \geq 2$ diferem drasticamente dos anteriores. Mesmo com $\mu = 2$ é possível obter trajetórias com transientes e períodos grandes. Resultados referentes a estas situações podem ser encontrados na Referência [11] e não serão considerados aqui.

2.3 Efeito de Borda

No meio desordenado proposto, nem todos os sítios se relacionam igualmente com seus vizinhos. Os sítios situados próximos às faces do hipercubo sofrem um certo isolamento em relação aos demais, pois têm menor região de vizinhança. Este isolamento, denominado efeito de borda, aumenta acentuadamente à medida que a dimensionalidade do meio cresce. Dizemos que este meio tem condições abertas de contorno.

Uma maneira de tornar todos os sítios igualmente acessíveis aos demais é conectar a extremidade 0 de cada dimensão à sua extremidade 1, tornando-as circulares. Em vez de um hipercubo, obtém-se dessa forma uma hipersuperfície toroidal de d dimensões. Diz-se, então, que o meio tem condições periódicas de contorno. As Figs. 1 e 2 ilustram este processo para $d = 1$ e $d = 2$, respectivamente.

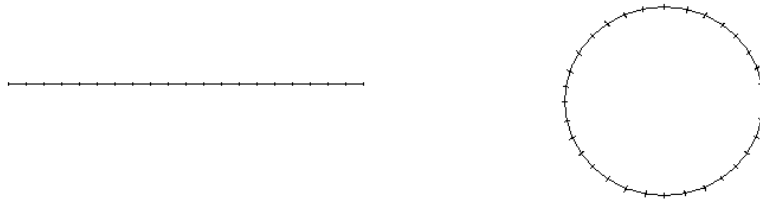


Figura 1: Condições abertas e periódicas de contorno em 1 dimensão.

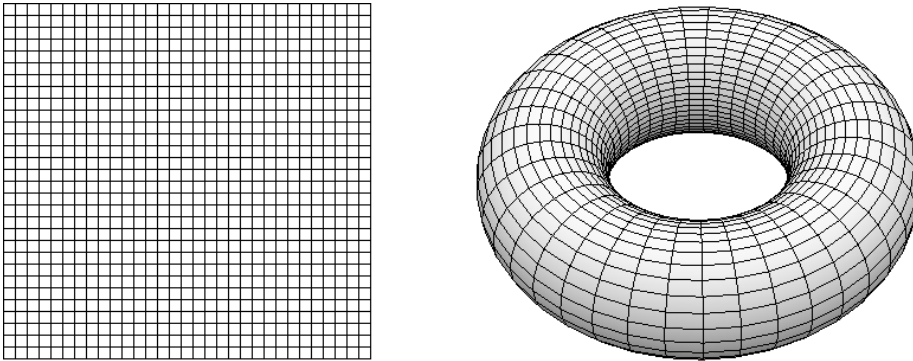


Figura 2: Condições abertas e periódicas de contorno em 2 dimensões.

Deve-se observar que a circunferência da Fig. 1 é geometricamente bidimensional, mas topologicamente unidimensional. Do mesmo modo, o toróide da Fig. 2 tem três dimensões geométricas, mas é topologicamente bidimensional, pois os pontos do meio desordenado estão distribuídos apenas sobre sua superfície. Não é possível construir figuras que ilustrem meios com condições periódicas de contorno para $d \geq 3$, mas o processo continua sendo algebricamente válido.

2.4 Algumas Funções Especiais

Nesta seção, definiremos algumas funções especiais que serão úteis ao longo do texto. Inicialmente, definimos a função gama [14]

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} dt t^{z-1} e^{-t},$$

cuja principal propriedade

$$\Gamma(z) = (z-1)\Gamma(z-1)$$

a torna uma generalização do fatorial

$$\Gamma(z) = (z-1)!.$$

Para $|z| \gg 1$ e $|\arg z| < \pi$, pode-se usar a aproximação de Stirling [14]

$$\Gamma(z) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{z}} \left(\frac{z}{e}\right)^z \left[1 + \frac{1}{12z} + \frac{1}{288z^2} + \dots\right].$$

A função gama incompleta não-normalizada [14] é definida por

$$\gamma(a, b) = \int_0^b dt t^{a-1} e^{-t} \quad (2.2)$$

e apresenta a seguinte propriedade [14]

$$\gamma(1/2, x) = 2 \int_0^{\sqrt{x}} dt e^{-t^2} = \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\sqrt{x}),$$

onde a função erro [14] é definida como

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z dt e^{-t^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot z^{2k+1}}{k!(2k+1)}.$$

Esta última cresce monotonamente de $\operatorname{erf}(0) = 0$ a $\operatorname{erf}(\infty) = 1$.

2.4.1 Funções Complementares

Também é conveniente definir as funções complementares. A função gama incompleta não-normalizada complementar é escrita como

$$\Gamma(a, b) = \int_b^{\infty} dt t^{a-1} e^{-t} = \Gamma(a) - \gamma(a, b) \quad (2.3)$$

e a função erro complementar [14] definida por

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} dt e^{-t^2} = 1 - \operatorname{erf}(z).$$

Para $|z| \gg 1$, a função erro complementar tem a seguinte forma assintótica

$$\operatorname{erfc}(z) \approx \frac{e^{-z^2}}{z\sqrt{\pi}}. \quad (2.4)$$

A função beta incompleta [14] normalizada é definida como

$$I_z(a, b) = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^z dt t^{a-1} (1-t)^{b-1} \quad (2.5)$$

com $\operatorname{Re}(a) > 0$ e $\operatorname{Re}(b) > 0$ e a função beta [14] é definida como sendo o fator de normalização de $I_z(a, b)$

$$B(a, b) = B(b, a) = \int_0^1 dt t^{a-1} (1-t)^{b-1} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)},$$

além disso pode-se concluir que ela é uma extensão da inverso da fórmula de combinação do binômio de Newton.

2.4.2 Aproximação para $I_z(a, b)$

Com a finalidade de estudar o limite de alta dimensionalidade $d \gg 1$, considera-se o comportamento da Eq. 2.5 quando $b \gg a \sim 1$. Neste limite a Eq. 2.5 é escrita da seguinte forma:

$$I_z(a, b) \approx \frac{b^a}{\Gamma(a)} \int_0^z dt t^{a-1} (1-t)^b,$$

se $t \ll 1$, então o fator $(1-t)^b = e^{b \ln(1-t)} \approx e^{-bt}$. Definindo a variável $\tilde{t} = bt$, tem-se:

$$I_z(a, b) \approx \frac{\gamma(a, bz)}{\Gamma(a)}.$$

onde $\gamma(a, b)$ é dada pela Eq. 2.2.

Quando $a = 1/2$ e $b \gg 1$ tem-se

$$\begin{aligned} I_z(a, b) &\approx \frac{\gamma(1/2, bz)}{\Gamma(1/2)} \approx \operatorname{erf}(\sqrt{bz}) = 1 - \operatorname{erfc}(\sqrt{bz}) \\ &\approx 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{e^{-bz}}{\sqrt{bz}}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

2.5 Probabilidade de Vizinhança em Ambientes Poissonônicos: Fórmula de Cox

A fórmula de Cox [15] (Eq. 2.7) fornece a probabilidade de um evento arbitrário, num processo poissonônico de dimensionalidade d , ser o m -ésimo vizinho mais próximo de seu próprio n -ésimo vizinho mais próximo.

$$P_{m,n}^{(d)} = \frac{(I_d^{-1} + 1)^{-(m+n)}}{1 - I_d} \cdot \sum_{j=1}^{\min(m,n)} \frac{(I_d^{-2} - 1)^j}{\Gamma(j)} \cdot \frac{\Gamma(m+n-j)}{\Gamma(m+1-j)\Gamma(n+1-j)}. \quad (2.7)$$

Observe que a dimensionalidade do meio considerado aparece indiretamente na fórmula de Cox via a grandeza

$$I_d = I_{1/4} \left(\frac{1}{2}, \frac{d+1}{2} \right), \quad (2.8)$$

denotada por p na Referência [15]. Esta é a grandeza relevante que parametriza as distribuições de tempos de transiente estudadas neste trabalho, onde $I_z(a, b)$ é a função beta incompleta normalizada (Eq. 2.5).

Em particular, se $m = n$, têm-se vizinhos reflexivos de ordem n e a probabilidade é dada pela fórmula de Dacey [16] (Eq. 2.9).

$$P_n^{(d)} = \frac{(I_d^{-1} + 1)^{-2n}}{1 - I_d} \cdot \sum_{j=1}^n \frac{(I_d^{-2} - 1)^j}{\Gamma(j)} \cdot \frac{\Gamma(2n - j)}{\Gamma^2(n + 1 - j)} \quad (2.9)$$

Esta fórmula retifica o erro (para $n > 1$) na fórmula de Clark e Evans [17, 18] que foi introduzida no contexto do estudo de distâncias entre plantas em ambientes naturais.

Para os estudos que seguem, será útil a probabilidade $P_1^{(d)}$ de se ter vizinhos reflexivos de ordem 1, pois estes pontos representam os atratores do meio desordenado quando $\mu = 1$. Neste caso, a Eq. 2.9 se reduz a:

$$P_1^{(d)} = \frac{1}{1 + I_d}, \quad (2.10)$$

que para $d \gg 1$, usando a Eq. 2.6 a equação acima pode ser aproximada por

$$P_1^{(d)} = \frac{1}{1 + \alpha_d}, \quad (2.11)$$

onde

$$\alpha_d = 1 - \frac{e^{-d/8}}{\sqrt{\frac{\pi d}{8}}} \quad (2.12)$$

é uma aproximação de I_d . Observe que esta grandeza sugere uma dimensionalidade característica ($d_0 = 8$) a partir da qual os efeitos relacionados à dimensionalidade podem ser desprezados.

A Tabela 1 apresenta alguns valores de $P_1^{(d)}$.

Estes valores também representam a probabilidade do viajante partir de um sítio e percorrer uma trajetória com transiente nulo, ou seja,

$$S_{1,d}(t = 0) = P_1^{(d)}. \quad (2.13)$$

O gráfico da Fig. 3 mostra o valor de $P_1^{(d)}$ partindo de $3/4$ em $d = 0$ e diminuindo monotonamente, convergindo para $1/2$ à medida que d aumenta.

Observe ainda que a expressão para $P_1^{(d)}$ produz resultados para qualquer valor real

d	$P_1^{(d)}$	aprox.	d	$P_1^{(d)}$	aprox.
0	$3/4$	0,75000	7	$2048/3807$	0,53796
1	$2/3$	0,66667	8	$\frac{840\pi}{1120\pi+837\sqrt{3}}$	0,53115
2	$\frac{6\pi}{8\pi+3\sqrt{3}}$	0,62150	9	$65536/124659$	0,52572
3	$16/27$	0,59259	10	$\frac{840\pi}{1120\pi+891\sqrt{3}}$	0,52134
4	$\frac{12\pi}{16\pi+9\sqrt{3}}$	0,57247	\vdots	\vdots	\vdots
5	$256/459$	0,55773	∞	$1/2$	0,50000
6	$\frac{30\pi}{40\pi+27\sqrt{3}}$	0,54659			

Tabela 1: Densidade de atratores em função da dimensionalidade do sistema quando $\mu = 1$.

de d , o que abre a possibilidade de sua interpretação em meios com dimensionalidade não-inteira (fractais). Curiosamente, obtém-se o valor teórico $P_1^{(0)} = 3/4$ para a densidade de atratores num meio de dimensionalidade nula, contrariando a expectativa $P_1^{(0)} = 1$, pois neste caso todos os pontos do meio estariam colapsados, e seriam todos eles atratores do sistema.

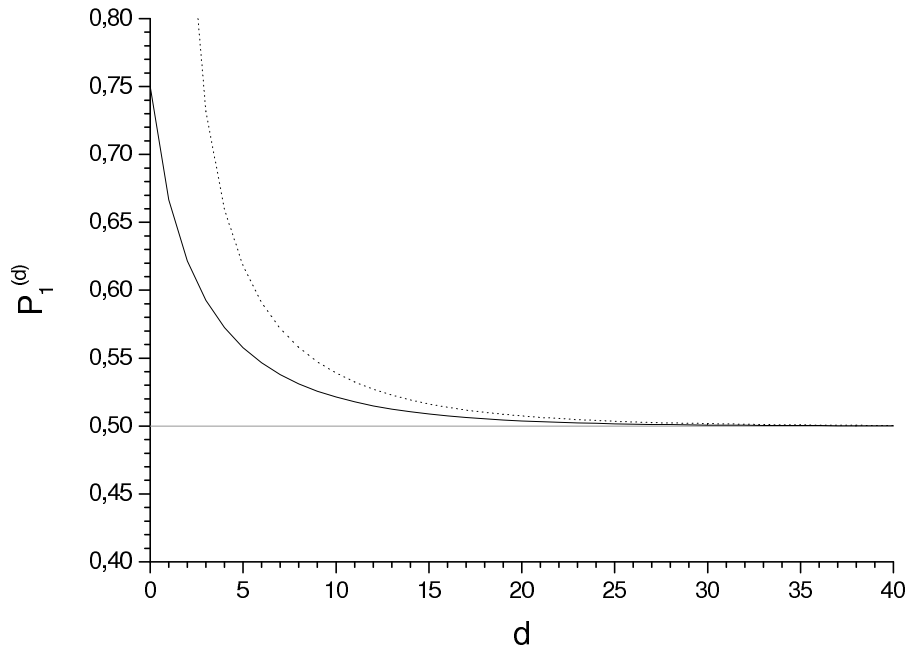


Figura 3: Densidade de casais em função da dimensionalidade. A linha contínua se refere à Eq. 2.10 e a linha pontilhada à Eq. 2.11.

2.6 Aproximação de Campo Médio

A aproximação de campo médio consiste em fazer com que cada nodo do grafo, ou sítio da rede, ou cidade do mapa, interaja com todos os outros nodos, sítios do sistema.

Vamos considerar aqui dois sistemas que têm esta característica: o modelo de distâncias aleatórias e o modelo de mapeamento aleatório. O primeiro é o limite natural de alta dimensionalidade para a caminhada do turista. O segundo apresenta uma distribuição de ciclos não-trivial mesmo para os casos do turista preguiçoso e do turista sem memória, além de ter sido introduzido no contexto das redes de Kauffman [10].

2.6.1 Modelo de Distâncias Aleatórias

À medida que a dimensionalidade do espaço euclidiano aumenta, as correlações entre as distâncias (como a desigualdade triangular) são enfraquecidas. Por isso, no limite de alta dimensionalidade $d \rightarrow \infty$, estas correlações podem ser desprezadas e as distâncias entre os pontos passam a ser consideradas variáveis aleatórias independentes. Apenas a simetria $D_{i,j} = D_{j,i}$ é preservada. Este é o modelo de distâncias aleatórias (*random link*) proposto originalmente por Mézard e Parisi [19] e posteriormente explorado por Percus e Martin [20].

Distribuição de Distâncias

Surge aqui uma questão que não é freqüentemente abordada. No limite de alta dimensionalidade, as distâncias são variáveis aleatórias independentes, mas qual a pdf que elas seguem? Para a caminhada do turista, a pdf segundo a qual estas distâncias estão distribuídas não é importante, pois, dada uma variável aleatória X , com sua pdf $f(x)$, pode-se definir uma variável aleatória $Y = h(X)$, com sua pdf $g(y)$ desejada, impondo a condição de que suas funções acumuladas sejam iguais,

$$G(Y) = F(X) .$$

Se $g(y) > 0$ para todos os valores possíveis de Y , então a função acumulada G é bijetora e, portanto, inversível. Logo, obtemos a definição

$$Y = G^{-1}(F(X)) ,$$

onde se observa que

$$h = G^{-1} \circ F .$$

Assim, se as distâncias $D_{i,j}$ forem consideradas como sendo valores particulares de uma variável aleatória X , cuja pdf é $f(x)$, é possível obter a variável aleatória $Y = h(X)$ com

distribuição uniforme $g(y) = 1$ no intervalo $[0; 1]$. Neste caso, como a função acumulada G é a função identidade, sua inversa também é a função identidade. Logo,

$$Y = F(X) = \int_0^X dx f(x).$$

Como $f(x) > 0, \forall x$, têm-se que Y é uma função estritamente crescente de X . Portanto, se as distâncias D_1 e D_2 guardam entre si a desigualdade $D_1 < D_2$ na métrica X , seus valores correspondentes na métrica Y também o farão. Na caminhada do turista, os dois mapas geram as mesmas trajetórias, pois o que importa, a cada passo, é determinar qual dos sítios é o mais próximo, e não a distância a ser percorrida propriamente dita.

Como exemplo, considere que X segue a pdf

$$f(x) = \frac{3x^2 - 4x + 2}{4},$$

normalizada no intervalo $[0; 2]$. A variável transformada

$$Y = h(X) = \int_0^X dx \frac{3x^2 - 4x + 2}{4} = \frac{X^3 - 2X^2 + 2X}{4}$$

segue uma pdf uniforme no intervalo $[0; 1]$. A Fig. 4 ilustra este processo.

A fim de validar estes resultados, foram realizadas simulações numéricas com o modelo de distâncias aleatórias cujas distâncias foram geradas segundo uma distribuição uniforme e segundo uma distribuição *rampa*, na qual $f(x) = 2x$, $x \in [0; 1]$, e não se observou diferença alguma entre as distribuições de tempos de transiente.

2.6.2 Modelo de Mapeamento Aleatório

No modelo de distâncias aleatórias descrito na seção anterior, as distâncias entre os sítios são consideradas variáveis aleatórias independentes, porém a simetria $D_{i,j} = D_{j,i}$ entre as distâncias de ida e de volta é preservada. Pode-se, entretanto, construir um modelo de distâncias aleatórias *assimétricas*, no qual as distâncias de ida e volta não são necessariamente iguais. Assim, em geral $D_{i,j} \neq D_{j,i}$. Esta desigualdade se manifesta, por exemplo, numa cidade com avenidas de mão única, de forma que o caminho de ida geralmente difere do caminho de volta. Observamos que neste caso a única característica remanescente do modelo anterior é que a distância de um sítio a ele mesmo é zero ($D_{i,i} = 0, \forall i$).

Uma das variantes do modelo de distâncias aleatórias assimétricas estudada por Der-

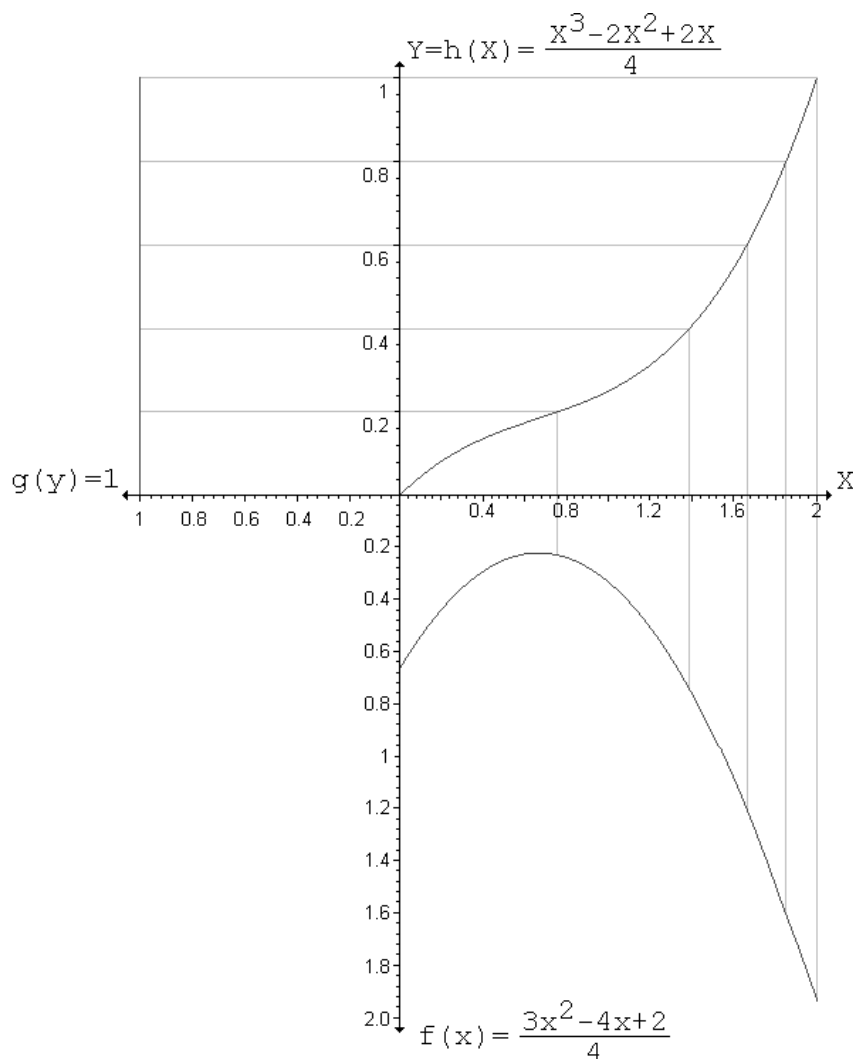


Figura 4: Transformação da variável aleatória X na variável aleatória Y . O 4º quadrante mostra a pdf $f(x)$ em função dos valores de X . O 1º quadrante exibe a transformação $Y = h(X)$. O 2º quadrante ilustra a pdf $g(y)$ da variável Y assim definida.

rida e Flyvbjerg [12], denominada mapa aleatório (*random map*), consiste em eliminar a restrição $D_{i,i} = 0$, permitindo que a distância de um sítio a ele mesmo seja diferente de zero. Esta distância pode representar, por exemplo, um custo para o turista permanecer num dado sítio. Esta variante é o modelo mais desconcorrelacionado possível, pois para um mapa de N pontos as distâncias são consideradas N^2 variáveis aleatórias independentes. Um procedimento equivalente consiste em gerar diretamente a tabela de vizinhança, escolhendo os vizinhos para cada sítio de maneira aleatória e sem reposição. Ao contrário dos modelos anteriores, mesmo para $\mu = 0$, é possível não existir um turista preguiçoso, pois a caminhada pode apresentar os mais variados tempos de transiente e períodos de atratores. Esta caminhada corresponde a aproximação de campo médio para as redes de Kauffman [10].

2.7 Conclusão

Neste Capítulo descrevemos o modelo da caminhada do turista, uma caminhada determinista sobre um meio desordenado. Apesar de poder ser enunciado de forma simples, este modelo possui um comportamento complexo quando se introduz a memória. Destacamos o efeito de borda e apresentamos uma alternativa para minimizar este efeito através das condições periódicas de contorno.

A seguir, definimos algumas funções especiais que foram subsídios à análise da distribuição de vizinhos em processos poissônicos. Nesta discussão, identificamos I_d como a grandeza relevante na parametrização das distribuições de probabilidade de tempos de transientes em função da dimensionalidade do meio.

Também foram apresentados dois modelos com característica de aproximação de campo médio: o modelo de distâncias aleatórias, que representa o limite de alta dimensionalidade para espaços euclidianos; e o modelo de mapeamento aleatório, que representa um caso limite para as redes de Kauffman.

Adicionalmente, tratamos da questão raramente mencionada da distribuição de distâncias no modelo de distâncias aleatórias e demonstramos que ela não é importante para a caminhada do turista, pois estas distâncias, quando expressas em outras métricas, apresentam distribuições diversas.

3 *Experimento Numérico da Caminhada do Turista*

Com o objetivo de realizar experimentos numéricos com as caminhadas deterministas do turista, consideramos o programa desenvolvido por Gilson Francisco de Lima, durante o seu doutorado [11]. Neste Capítulo apresentamos melhorias que foram realizadas neste programa de simulação numérica.

Visando uma maior eficiência, o programa original foi dividido em duas partes. Na primeira parte, grava-se num arquivo várias tabelas de vizinhança com a maior memória μ a ser utilizada. Na segunda parte, um programa lê o arquivo de tabelas e gera as caminhadas, obtendo as estatísticas de interesse.

Melhorias também foram realizadas no critério de detecção dos ciclos. A modificação mais importante realizada refere-se ao tratamento estatístico dos dados: obtemos a distribuição conjunta dos tempos de transientes e períodos dos ciclos, que é mais fundamental do que as distribuições marginais obtidas na primeira versão.

Neste Capítulo, as palavras em negrito referem-se às variáveis utilizadas no código-fonte. A seguir apresentamos os detalhes desta nova implementação do código numérico.

3.1 **Tabela de Vizinhança**

A regra determinista impõe que o turista vá para o sítio mais próximo que não tenha sido visitado nos últimos μ passos da caminhada. Como a paisagem é estática, não há necessidade de se calcular e comparar as distâncias entre o sítio atual e todos os demais a cada passo da caminhada. É computacionalmente mais viável construir uma tabela de vizinhos ordenada pela distância. Toda a dinâmica da caminhada é desenvolvida sobre a tabela de vizinhos e não sobre a matriz de distâncias. É necessário armazenar nesta tabela apenas os $\mu + 1$ vizinhos mais próximos de cada sítio, pois a regra determinista proíbe o acesso aos demais.

A primeira parte do algoritmo consiste na geração da tabela de vizinhança, e tem como entrada as grandezas:

m: número de mapas a serem gerados,

n: número de sítios por mapa,

mi: memória a ser gerada,

semente: inicializa o gerador de números aleatórios,

modelo: euclidiano, distâncias aleatórias, mapeamento aleatório.

Se o modelo euclidiano for selecionado, duas outras grandezas de entrada devem ser informadas:

dim: dimensionalidade do meio,

cpc: condição periódica de contorno.

Como saída têm-se as **m** matrizes **viz**(1:**n**, 0:**mi**), que representam as tabelas de vizinhança de cada mapa, com N linhas (enumeradas de 1 a N) e $\mu + 1$ colunas (enumeradas de 0 a μ).

Por exemplo, o terceiro vizinho mais próximo do sítio 7 está armazenado em **viz**(7, 3). A coluna 0, destinada a armazenar o próprio sítio (por exemplo, **viz**(7, 0) = 7), foi introduzida para poder utilizar uma variante do modelo de mapeamento aleatório e com o intuito de utilizar o mesmo algoritmo para simulação de caminhadas estocásticas com $\mu = 0$.

Para contornar as limitações de memória volátil, as M tabelas de vizinhança foram gravadas seqüencialmente num único arquivo em disco. Esta técnica possibilitou a implementação independente da primeira e segunda partes do algoritmo (geração da tabela de vizinhança e caminhada do turista) em arquivos executáveis distintos, promovendo uma programação modular. Pode-se, desta forma, gerar um único arquivo de tabelas para um dado valor de **mi**, considerado suficientemente grande, e reutilizar este arquivo para gerar várias caminhadas com memórias que podem variar de 0 a **mi**.

Para cada um dos modelos (euclidiano, distâncias aleatórias ou mapeamento aleatório) foi implementada uma rotina de geração da tabela de vizinhança, pois cada modelo exigiu a criação de variáveis distintas, incompatíveis entre si.

3.1.1 Espaço Euclidiano

O processo para se gerar a tabela de vizinhança para um espaço euclidiano de d dimensões consiste em:

1. Gerar aleatoriamente as coordenadas $x_i^{(k)}$ para cada um dos N pontos do mapa.

Para tanto, utilizou-se o gerador de números aleatórios **ran2** do livro Numerical Recipes [21]. Os valores foram armazenados na matriz **coord**(1:n, 1:dim).

2. Construir a matriz de distâncias.

Nesta etapa, seria natural declarar uma matriz **dist**(1:n, 1:n) e armazenar cada distância calculada $D_{i,j}$ simultaneamente em **dist**(i, j) e **dist**(j, i), aproveitando a simetria da métrica euclidiana. No entanto, a memória requerida para este processo cresce proporcionalmente a N^2 , limitando a utilização do algoritmo a sistemas muito pequenos.

Um procedimento mais eficiente no uso da memória consiste em armazenar num vetor **dist**(1:n) apenas as distâncias de um dado sítio aos demais e determinar, para este sítio, seus vizinhos mais próximos. Desta forma, evita-se armazenar na memória toda a matriz de distâncias. A única desvantagem desse método é que não se pode tirar proveito da simetria da métrica euclidiana. Este procedimento foi proposto por Osame Kinouchi Filho em 1999 e implementado no programa desenvolvido por Gilson Francisco de Lima.

Visando aumentar a eficiência no processamento, não foi extraída a raiz quadrada da Eq. 2.1 (pois pode-se utilizar $D_{i,j}^2$ em vez de $D_{i,j}$ na determinação de vizinhos mais próximos) e nem calculada a distância de um sítio a ele mesmo (pois $D_{i,i} = 0, \forall i$). Neste caso, foi atribuído o valor **dim**+2 para a distância. Observe que a maior distância possível entre dois pontos de um hipercubo d -dimensional (com condição aberta de contorno) é o comprimento de sua diagonal, que mede \sqrt{d} . Como não foi extraída a raiz quadrada, a maior distância ao quadrado é d . Adiciona-se 2 para evitar problemas na comparação de variáveis com ponto flutuante durante as ordenações.

O quadrado da distância $D_{i,j}^2$ entre dois sítios i e j foi calculado pela expressão:

$$D_{ij}^2 = \sum_{k=1}^d \Delta x^{(k)} \cdot \Delta x^{(k)}, \quad (3.1)$$

onde

$$\Delta x^{(k)} = |x_i^{(k)} - x_j^{(k)}| .$$

Na Eq. 3.1, utilizou-se a instrução $\Delta x^{(k)} \cdot \Delta x^{(k)}$ em vez de $[\Delta x^{(k)}]^2$ por ser mais eficiente no processamento.

Para mapas com condições periódicas de contorno, após o cálculo de $\Delta x^{(k)}$ foi inserida a instrução:

$$\Delta x^{(k)} = \min [\Delta x^{(k)}, 1 - \Delta x^{(k)}] .$$

3. Construir a tabela de vizinhança.

Para cada sítio $\mathbf{i}=1..n$, faz-se incondicionalmente a atribuição $\mathbf{viz}(\mathbf{i}, 0) = \mathbf{i}$ (pois o sítio \mathbf{i} é o seu próprio vizinho de ordem 0). Em seguida, varre-se todo o vetor $\mathbf{dist}(1:n)$ em busca da menor distância para se determinar o vizinho de ordem $\mathbf{k} = 1..mi$. O sítio \mathbf{j} encontrado é armazenado em $\mathbf{viz}(\mathbf{i}, \mathbf{k})$ e atribui-se o valor $\mathbf{dim}+2$ a $\mathbf{dist}(\mathbf{j})$ para excluir o sítio \mathbf{j} da lista de candidatos a próximo vizinho.

O processo se repete para se determinar os demais vizinhos.

3.1.2 Modelo de Distâncias Aleatórias

Para o modelo de distâncias aleatórias, o processo de geração da tabela de vizinhança consiste em eliminar a primeira etapa do caso euclidiano (gerar coordenadas) e gerar aleatoriamente as distâncias entre os sítios (pois são independentes) no intervalo $[0; 1]$. As distâncias são então armazenadas na matriz $\mathbf{dist}(1:n, 1:n)$, cuja diagonal principal foi preenchida com o valor $\mathbf{3}$ (que equivale a não calcular a distância de um sítio a ele mesmo, no caso euclidiano). Aqui não é possível, como no caso euclidiano, gerar apenas as distâncias relativas a um sítio por vez (para economizar memória), pois a matriz de distâncias deve ser simétrica. Assim, o valor de cada distância $D_{i,j}$ gerada deve ser atribuído a $\mathbf{dist}(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ e a $\mathbf{dist}(\mathbf{j}, \mathbf{i})$. Este é um processo que exige memória de ordem N^2 , contrariamente ao modelo euclidiano, que exige memória de ordem N . Construída a matriz de distâncias, o procedimento para se gerar a matriz de vizinhança é idêntico ao do modelo euclidiano.

3.1.3 Modelo de Mapeamento Aleatório

Neste modelo, como não existe a simetria $D_{i,j} = D_{j,i}$ pode-se gerar aleatoriamente as distâncias relativas a apenas um sítio por vez e armazená-las no vetor **dist**(1:n), como no caso euclidiano. A diagonal principal foi preenchida com o valor **3**, fazendo com que a distância de um sítio a ele mesmo seja nula. Esta condição pode ser suprimida, obtendo-se então o modelo de mapeamento aleatório de B. Derrida e H. Flyvbjerg [12, 13]. As demais etapas são idênticas aos casos anteriores.

3.2 Caminhada do Turista

Esta etapa consiste em gerar as trajetórias de um turista que parte de cada sítio e segue a regra determinista de ir para o sítio mais próximo que não tenha sido visitado nos últimos μ passos. Para cada trajetória gerada deve-se identificar o tempo de transiente e o período do atrator. Por fim, constrói-se a distribuição conjunta de transientes e de períodos. Esta segunda parte do algoritmo tem como entrada as tabelas de vizinhança, obtidas através da leitura do arquivo seqüencial gerado pela primeira parte, e os parâmetros:

m_g: número de mapas gerados,

m: número de mapas a serem usados,

n: número de sítios por mapa,

mi_g: memória gerada,

mi: memória a ser usada;

e como saída a matriz **distr**(0:n, mi+1:n) que armazena a distribuição de probabilidade conjunta dos tempos de transientes e períodos de ciclos de todas as caminhadas realizadas sobre um mapa. Esta foi uma das alterações realizadas sobre a versão anterior, que considerava apenas as distribuições marginais. As principais variáveis deste algoritmo são:

viz(1:n, 0:mi): a matriz de vizinhos,

traj(1:n): o vetor que armazena a trajetória percorrida,

ult_vis(1:n): o vetor que armazena o passo no qual um dado sítio foi visitado pela última vez.

O vetor **ult_vis** é inicializado com **-n**, o que significa dizer que nenhum sítio foi visitado ainda. O turista dá seu primeiro passo $j=1$ e vai para o sítio $i=1..n$. Este primeiro passo é isento de qualquer verificação de permissão, pois todos os sítios estão disponíveis. Para os demais passos, incrementa-se a variável **j** (contador de passos) em uma unidade e seguem-se as etapas:

1. Determinar o próximo sítio.

Lê-se a matriz **viz** para se determinar o vizinho de ordem $k=0..mi$ do **sítio_atual**. O sítio encontrado é armazenado em **prox_sit**. Obtém-se do vetor **ult_vis** o passo em que **prox_sit** foi visitado pela última vez e armazena-se o resultado em **ult_visita**. A diferença $\mathbf{delta} = \mathbf{j} - \mathbf{ult_visita}$ representa há quantos passos **prox_sit** foi visitado pela última vez. Se $\mathbf{delta} > \mathbf{mi}$, conclui-se que o sítio **prox_sit** é permitido e, por isso, ele é escolhido; caso contrário repetem-se os testes com os próximos vizinhos.

2. Mover-se para o sítio eleito como o próximo.

Nesta etapa, apenas alimenta-se os vetores **traj** e **ult_vis**. Apesar de ser redundante armazenar os sítios visitados em cada passo da trajetória em **traj** e o último passo no qual cada sítio foi visitado em **ult_vis**, esta técnica poupa tempo de processamento.

3. Verificar se o turista já está num atrator.

O critério utilizado consiste em comparar os sítios visitados nos $mi-1$ passos anteriores ao passo atual (**j**) com os respectivos sítios visitados nos $mi-1$ passos anteriores a **ult_visita**. Se nenhuma diferença for detectada, encerra-se a caminhada e conclui-se que o turista percorreu uma trajetória de tamanho $\mathbf{tam_traj} = \mathbf{j}$ e entrou num atrator de **periodo** igual a **delta**.

A próxima etapa consiste em determinar o tempo de **transiente**. Como o **periodo** já é conhecido, compara-se o sítio visitado no passo $\mathbf{tam_traj} - \mathbf{periodo}$ com o sítio visitado no último passo **tam_traj**, em seguida comparam-se os sítios visitados nos passos anteriores correspondentes até que alguma diferença seja detectada. O passo no qual foi detectada a diferença corresponde ao último passo do transiente. Se nenhuma diferença for encontrada, a variável **transiente** mantém seu valor de inicialização, 0.

3.3 Tratamento Estatístico

A etapa final consiste em determinar as estatísticas de interesse. Para cada caminhada de um mapa, contabiliza-se na matriz **distr** o par período-transiente encontrado. Para

vários mapas, acumulam-se na matriz **soma** as distribuições do primeiro momento e na matriz **soma2** as distribuições do segundo momento. A partir das distribuições dos momentos, calcula-se para cada par $(t;p)$ a média e o erro-padrão de $S(t,p)$ (comumente chamado de *desvio-estatístico* nos métodos de Monte Carlo)

$$\mathbf{media} = \frac{\mathbf{soma}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}}$$

$$\mathbf{erro} = \sqrt{\frac{\frac{\mathbf{soma2}}{\mathbf{n}^2 \cdot \mathbf{m}} - \mathbf{media}^2}{\mathbf{m} - 1}}.$$

A obtenção destas fórmulas requer uma explicação detalhada. Para um dado mapa, a grandeza $S(t,p)$ representa a proporção $x = N_x/N$, onde N_x é o número de caminhadas com transiente t e período p . Para M mapas, cada uma das proporções x_1, x_2, \dots, x_M é um elemento de uma amostra de tamanho M . Portanto, a média de x é dada por:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^M x_i}{M} = \frac{\mathbf{soma}}{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{soma}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}}.$$

Pelo teorema do limite central de Gauss, a variância $\sigma_{\bar{x}}^2$ da média amostral \bar{x} pode ser estimada por:

$$s_{\bar{x}}^2 = \frac{s_x^2}{M-1} = \frac{\overline{x^2} - \bar{x}^2}{M-1} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^m x_i^2}{M} - \bar{x}^2}{M-1} = \frac{\frac{\mathbf{soma2}/\mathbf{n}^2 - \mathbf{media}^2}{\mathbf{m}}}{\mathbf{m} - 1}.$$

O intuito de se calcular o erro-padrão é avaliar as diferenças entre os resultados experimentais e os resultados teóricos a serem obtidos nesta dissertação.

3.4 Conclusão

O programa de simulação numérica constituirá uma ferramenta importante para a validação dos resultados analíticos a serem obtidos neste trabalho. Por outro lado, a concordância dos resultados numéricos obtidos com as expressões analíticas e com os resultados presentes na Referência [11] comprovaram a funcionalidade do programa.

Neste Capítulo apresentamos as principais modificações realizadas no programa original:

- Armazenamento em arquivo das tabelas de vizinhança geradas.

Esta modificação representou uma economia de memória no processo de geração de

mapas, pois evita-se a declaração da matriz $\mathbf{viz}(1:\mathbf{n}, 0:\mathbf{mi})$. Outra vantagem é a possibilidade de gerar mapas com uma memória μ considerada satisfatória e reutilizar estes mapas na simulação de caminhadas com memórias de valores inferiores.

- Critério de detecção de ciclos

Com o método de comparar os sítios precedentes ao passo atual com os precedentes à última visita ao sítio atual, é possível detectar um atrator assim que o turista completar o primeiro ciclo.

- Distribuição conjunta dos tempos de transiente e períodos dos ciclos.

O tratamento estatístico foi a modificação mais importante. Uma caminhada é caracterizada pelo transiente e pelo atrator. Portanto, consolidar os dados numa distribuição conjunta permite uma melhor caracterização da trajetória. Adicionalmente, podem-se obter as distribuições marginais de transientes e períodos.

Melhorias ainda podem ser feitas neste programa, como a alocação dinâmica do vetor $\mathbf{traj}(1:\mathbf{n})$ e a separação das etapas de geração das trajetórias e de tratamento estatístico em módulos independentes. A etapa de geração das trajetórias armazenaria num arquivo as grandezas de interesse e a etapa de tratamento estatístico determinaria, a partir da leitura deste arquivo, as distribuições dessas grandezas. Pode-se, assim, evitar a declaração da matriz \mathbf{distr} , que representa um alto consumo de memória, por ser da ordem de N^2 . Na rotina de geração da tabela de vizinhança para o modelo de distâncias aleatórias, pode-se evitar a declaração da matriz $\mathbf{dist}(1:\mathbf{n}, 1:\mathbf{n})$, que também representa um alto consumo de memória, declarando um vetor $\mathbf{dist}(1:\mathbf{n})$, como no caso euclideano. A simetria $D_{i,j} = D_{j,i}$ pode ser conseguida com um controle rigoroso sobre a semente do gerador de números aleatórios.

4 *Distribuição dos Tempos de Transiente no Modelo de Distâncias Aleatórias*

O modelo de distâncias aleatórias (*random link*) representa o limite de alta dimensionalidade para o espaço euclidiano. Tendo em vista este fato, seria natural a decisão de iniciar a análise pelo espaço unidimensional, e em seguida analisar o bidimensional, o tridimensional, até se obter o limite $d \rightarrow \infty$. No entanto, o modelo de distâncias aleatórias oferece maior facilidade na obtenção de resultados analíticos devido à independência entre as distâncias, pois estas são as variáveis de interesse para a caminhada (e não as coordenadas dos pontos).

Como a regra determinista impõe que se vá para o sítio mais próximo, será útil obter a pdf da distância a ser percorrida a cada passo. Por isso, iniciamos este Capítulo com uma breve revisão da estatística de extremos, e a seguir obtemos analiticamente a distribuição dos tempos de transiente para o modelo de distâncias aleatórias. Enfatiza-se que obtivemos a correção para o efeito de tamanho finito. Finalmente apresentamos os resultados no limite termodinâmico e determinamos a distribuição acumulada e as probabilidades de subsistência ao longo da caminhada, fazendo uma analogia com a distribuição geométrica. Esta analogia se mostrará útil na a generalização para dimensionalidades arbitrárias.

4.1 Estatística de Extremos

Considere N variáveis aleatórias contínuas independentes X_1, X_2, \dots, X_N ; com suas respectivas pdf $f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_N(x_N)$. A pdf $g(y)$ da variável aleatória Y , definida como o mínimo entre as variáveis X_1, X_2, \dots, X_N , pode ser determinada como segue.

Para que Y assuma um dado valor y , é necessário que pelo menos uma das variáveis X_1, X_2, \dots, X_N seja igual a y e que todas as demais sejam maiores ou iguais a y . Assim:

$$\begin{aligned} g(y) &= f_1(y) \cdot \int_y^\infty dx_2 f_2(x_2) \cdot \int_y^\infty dx_3 f_3(x_3) \cdots \int_y^\infty dx_N f_N(x_N) + \\ &+ \int_y^\infty dx_1 f_1(x_1) \cdot f_2(y) \cdot \int_y^\infty dx_3 f_3(x_3) \cdots \int_y^\infty dx_N f_N(x_N) + \cdots \\ &\cdots + \int_y^\infty dx_1 f_1(x_1) \cdot \int_y^\infty dx_2 f_2(x_2) \cdots \int_y^\infty dx_{N-1} f_{N-1}(x_{N-1}) \cdot f_N(y) . \end{aligned}$$

De maneira mais compacta:

$$g(y) = \sum_{i=1}^N \left[f_i(y) \cdot \prod_{j(\neq i)=1}^N \int_y^\infty dx_j f_j(x_j) \right] .$$

Se X_1, X_2, \dots, X_N têm todas a mesma pdf $f(x) = f_1(x_1) = f_2(x_2) = \dots = f_N(x_N)$, temos para Y :

$$g(y) = N f(y) \left[\int_y^\infty dx f(x) \right]^{N-1} = N f(y) [1 - F(y)]^{N-1} ,$$

onde

$$F(y) = \int_{-\infty}^y dx f(x)$$

é a função acumulada de $f(x)$, ou seja, a probabilidade de $Y \leq y$. Em particular, se a pdf $f(x)$ for uma distribuição uniforme entre 0 e 1:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 1, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{se } x > 1 \end{cases} ,$$

a função de densidade de probabilidade de Y torna-se simplesmente:

$$g(y) = N \cdot \left[\int_y^1 dx \right]^{N-1} = N (1 - y)^{N-1} ,$$

com y variando de 0 a 1.

Maiores detalhes sobre a estatística de extremos podem ser encontrados na Referência [22].

4.2 Distribuição de Tempo de Transiente: Resultado Analítico

A distribuição de probabilidade dos tempos de transientes para uma caminhada determinista, com $\mu = 1$, pode ser obtida para o modelo de distâncias aleatórias observando que:

1. a matriz de distâncias é simétrica,
2. as distâncias entre sítios são variáveis aleatórias independentes uniformemente distribuídas no intervalo de 0 a 1,
3. a distância percorrida diminui a cada passo da caminhada, até que o turista entre num ciclo, que imperativamente tem período $p = 2$.

A Tabela 2 ilustra uma possível configuração de distâncias para um mapa de tamanho $N = 10$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Y
1	0,000	0,753	0,608	0,869	0,998	0,466	0,428	0,917	0,848	0,290	0,290
2	0,753	0,000	0,895	0,409	0,686	0,310	0,645	0,904	0,440	0,349	0,310
3	0,608	0,895	0,000	0,800	0,442	0,594	0,568	0,785	0,691	0,284	0,284
4	0,869	0,409	0,800	0,000	0,439	0,237	0,208	0,732	0,002	0,328	0,002
5	0,998	0,686	0,442	0,439	0,000	0,600	0,202	0,047	0,531	0,060	0,047
6	0,466	0,310	0,594	0,237	0,600	0,000	0,797	0,786	0,205	0,746	0,205
7	0,428	0,645	0,568	0,208	0,202	0,797	0,000	0,032	0,177	0,491	0,032
8	0,917	0,904	0,785	0,732	0,047	0,786	0,032	0,000	0,910	0,970	0,032
9	0,848	0,440	0,691	0,002	0,531	0,205	0,177	0,910	0,000	0,900	0,002
10	0,290	0,349	0,284	0,328	0,060	0,746	0,491	0,970	0,900	0,000	0,060

Tabela 2: Tabela de distâncias para $N = 10$ em uma possível configuração do modelo de distâncias aleatórias. A coluna Y representa a distância ao sítio mais próximo.

Como exemplo, serão analisadas as condições para se ter trajetória com transiente $t = 3$. Para tanto, a caminhada deve ser composta por 5 sítios distintos: 3 pertencentes ao transiente e 2 pertencentes ao casal. O roteiro abaixo mostra os passos desta caminhada:

1. Suponha que o turista parta do sítio 1. A regra impõe que ele vá para o sítio mais próximo, que é o próprio sítio 1. No entanto, como $\mu = 1$, o turista se vê obrigado a deixar o sítio 1 e percorrer a distância $y_1 = D_{1,10} = 0,290$ até o segundo sítio mais próximo, entre os $N - 1$ restantes. A distância y_1 é, portanto, o mínimo entre $N - 1$

- variáveis aleatórias independentes e pode, em princípio, assumir qualquer valor no intervalo de 0 a 1.
2. O turista vai, então, para o sítio 10. Novamente, o sítio mais próximo é o próprio 10, mas a memória o exclui. Restam $N - 1$ sítios. No entanto, o turista não deve voltar ao sítio 1, o que caracterizaria um tempo de transiente $t = 0$. Para tanto, é necessário que o sítio mais próximo dentre os $N - 2$ restantes esteja a uma distância y_2 menor do que a distância $D_{10,1} = D_{1,10} = y_1 = 0,290$ já percorrida. Dessa forma, a distância $y_2 = 0,060$ é o mínimo entre $N - 2$ variáveis aleatórias independentes e deve assumir valores entre 0 e y_1 .
 3. No próximo passo, turista vai para o sítio 5. O procedimento se repete. A memória exclui o sítio 5. Para que o transiente continue, é necessário que o sítio mais próximo esteja a uma distância y_3 menor do que a anterior, $D_{5,10} = D_{10,5} = y_2 = 0,060$ (e conseqüentemente, menor do que $D_{5,1} = D_{1,5} = 0,998$ pois $y_2 < y_1 < D_{1,5}$). Assim, $y_3 = 0,047$ é o mínimo entre $N - 3$ variáveis aleatórias e deve variar de 0 a y_2 .
 4. O turista vai, então, para o sítio 8. Voltar ao sítio 5 implicaria num transiente $t = 2$. Portanto, o mais próximo dos $N - 4$ sítios restantes deve estar a uma distância $y_4 < y_3 < y_2 < y_1$. Assim, $y_4 = 0,032$ é o mínimo entre $N - 4$ variáveis aleatórias, e deve estar contida no intervalo de 0 a y_3 .
 5. O turista vai para o sítio 7. Agora ele deve voltar para o sítio 8, finalizando a exploração do mapa. Para isso, é necessário que o mais próximo dos $N - 5$ sítios restantes esteja a uma distância y_5 maior que a última distância percorrida, y_4 . Dessa forma, y_5 é o mínimo entre $N - 5$ variáveis independentes, e deve assumir qualquer valor de y_4 a 1.

A trajetória assim obtida está representada na Tabela 3.

passo	1	2	3	4	5	6	7	8	9 ...
sítio	1	10	5	8	7	8	7	8	7 ...
distância	0,290	0,060	0,047	0,032	0,032	0,032	0,032	0,032	...

Tabela 3: Trajetória obtida partindo do sítio 1 da Tabela 2 com $\mu = 1$.

Pode-se observar que a distância percorrida a cada passo é menor que a distância percorrida no passo anterior, até que o turista entre num ciclo.

Generalizando este raciocínio para um tempo de transiente $t \leq N - 2$, obtém-se a seguinte expressão:

$$S_{1,rl}^{(N)}(t) = \int_0^1 dx_1 (N-1)(1-x_1)^{N-2} \int_0^{x_1} dx_2 (N-2)(1-x_2)^{N-3} \\ \int_0^{x_2} dx_3 (N-3)(1-x_3)^{N-4} \dots \int_0^{x_{t-1}} dx_t (N-t)(1-x_t)^{N-t-1} \\ \int_0^{x_t} dx_{t+1} (N-t-1)(1-x_{t+1})^{N-t-2} \int_{x_{t+1}}^1 dx_{t+2} (N-t-2)(1-x_{t+2})^{N-t-3} .$$

Os fatores $(N-1)$, $(N-2)$, $(N-3)$, \dots , $(N-t)$, $(N-t-1)$, $(N-t-2)$ são constantes no processo de integração e podem ser postos fora dos integrandos:

$$S_{1,rl}^{(N)}(t) = \prod_{i=1}^{t+2} (N-i) \int_0^1 dx_1 (1-x_1)^{N-2} \int_0^{x_1} dx_2 (1-x_2)^{N-3} \int_0^{x_2} dx_3 (1-x_3)^{N-4} \dots \\ \dots \int_0^{x_{t-2}} dx_{t-1} (1-x_{t-1})^{N-t} \int_0^{x_{t-1}} dx_t (1-x_t)^{N-t-1} \\ \int_0^{x_t} dx_{t+1} (1-x_{t+1})^{N-t-2} \int_{x_{t+1}}^1 dx_{t+2} (1-x_{t+2})^{N-t-3} .$$

Para sistematizar o processo, considere a seqüência:

$$\begin{aligned} a_0 &= N - t - 2 , \\ a_1 &= N - t - 1 , \\ a_2 &= N - t , \\ a_3 &= N - t + 1 , \\ a_4 &= N - t + 2 , \\ a_5 &= N - t + 3 , \\ &\vdots \\ a_{t-1} &= N - 3 , \\ a_t &= N - 2 , \\ a_{t+1} &= N - 1 . \end{aligned}$$

Nestes termos:

$$\begin{aligned}
S_{1,r,l}^{(N)}(t) &= \prod_{i=0}^{t+1} a_i \int_0^1 dx_1 (1-x_1)^{a_{t+1}-1} \int_0^{x_1} dx_2 (1-x_2)^{a_t-1} \int_0^{x_2} dx_3 (1-x_3)^{a_{t-1}-1} \dots \\
&\dots \int_0^{x_{t-2}} dx_{t-1} (1-x_{t-1})^{a_3-1} \int_0^{x_{t-1}} dx_t (1-x_t)^{a_2-1} \\
&\int_0^{x_t} dx_{t+1} (1-x_{t+1})^{a_1-1} \int_{x_{t+1}}^1 dx_{t+2} (1-x_{t+2})^{a_0-1}. \tag{4.1}
\end{aligned}$$

As $t+2$ integrais são encadeadas. Indexando cada integral pelo índice da variável de integração, obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{t+2} &= \int_x^1 dx (1-x)^{a_0-1} = \frac{(1-x)^{a_0}}{a_0}, \\
\mathcal{I}_{t+1} &= \int_0^x dx \frac{(1-x)^{a_0+a_1-1}}{a_0} = \frac{1}{a_0(a_0+a_1)} - \frac{(1-x)^{a_0+a_1}}{a_0(a_0+a_1)}, \\
\mathcal{I}_t &= \int_0^x dx \frac{(1-x)^{a_2-1}}{a_0(a_0+a_1)} - \int_0^x dx \frac{(1-x)^{a_0+a_1+a_2-1}}{a_0(a_0+a_1)} \\
&= \frac{1}{a_0(a_0+a_1)a_2} - \frac{(1-x)^{a_2}}{a_0(a_0+a_1)a_2} - \frac{1}{a_0(a_0+a_1)(a_0+a_1+a_2)} \\
&\quad + \frac{(1-x)^{a_0+a_1+a_2}}{a_0(a_0+a_1)(a_0+a_1+a_2)}, \\
\mathcal{I}_{t-1} &= \int_0^x dx \frac{(1-x)^{a_3-1}}{a_0(a_0+a_1)a_2} - \int_0^x dx \frac{(1-x)^{a_3+a_2-1}}{a_0(a_0+a_1)a_2} \\
&\quad - \int_0^x dx \frac{(1-x)^{a_3-1}}{a_0(a_0+a_1)(a_0+a_1+a_2)} + \int_0^x dx \frac{(1-x)^{a_0+a_1+a_2+a_3-1}}{a_0(a_0+a_1)(a_0+a_1+a_2)} \\
&= \frac{1}{a_0(a_0+a_1)a_2a_3} - \frac{(1-x)^{a_3}}{a_0(a_0+a_1)a_2a_3} - \frac{1}{a_0(a_0+a_1)a_2(a_2+a_3)} \\
&\quad + \frac{(1-x)^{a_2+a_3}}{a_0(a_0+a_1)a_2(a_2+a_3)} - \frac{1}{a_0(a_0+a_1)(a_0+a_1+a_2)a_3} \\
&\quad + \frac{(1-x)^{a_3}}{a_0(a_0+a_1)(a_0+a_1+a_2)a_3} \\
&\quad + \frac{1}{a_0(a_0+a_1)(a_0+a_1+a_2)(a_0+a_1+a_2+a_3)} \\
&\quad - \frac{(1-x)^{a_0+a_1+a_2+a_3}}{a_0(a_0+a_1)(a_0+a_1+a_2)(a_0+a_1+a_2+a_3)}.
\end{aligned}$$

Cada passo de integração, com exceção do primeiro \mathcal{I}_{t+2} , dobra o número de parcelas, de acordo com o esquema da Fig. 5.

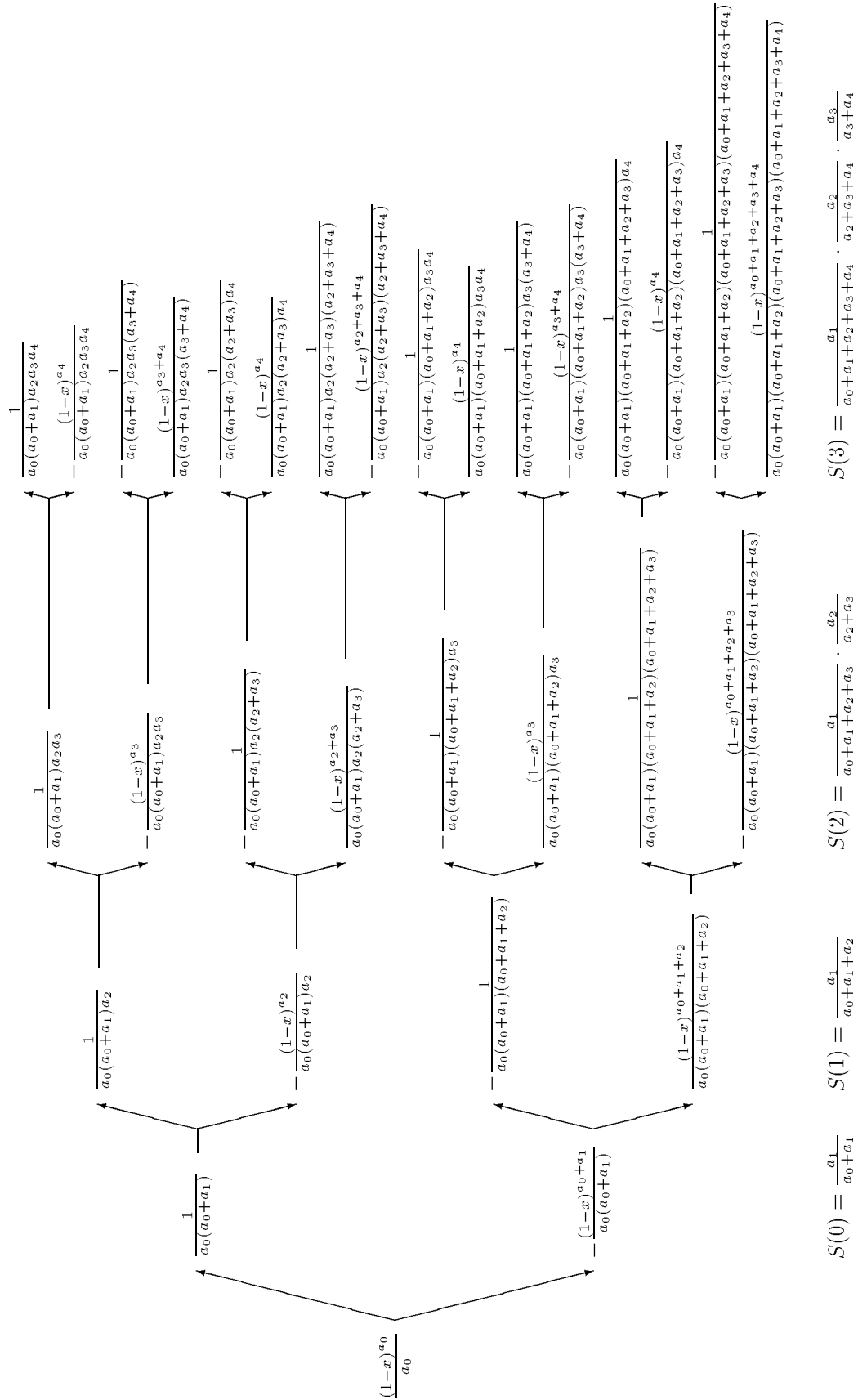


Figura 5: Cálculo das integrais encadeadas da Eq. 4.1. Cada passo de integração dobra o número de integrais.

Como são $t + 2$ integrais, têm-se $2^{t+2-1} = 2^{t+1}$ parcelas. No entanto, metade das parcelas são dependentes de x . Estas desaparecerão na última integral \mathcal{I}_1 . Portanto a expressão resulta em 2^t parcelas. Somando estas parcelas (e multiplicando a soma pelo produtório da Eq. 4.1), obtêm-se as seguintes expressões para $S_{1,rl}^{(N)}(t)$:

$$S_{1,rl}^{(N)}(0) = \frac{a_0 a_1}{a_0(a_0 + a_1)} = \frac{a_1}{a_0 + a_1}$$

$$S_{1,rl}^{(N)}(1) = \frac{a_0 a_1 a_2}{a_0(a_0 + a_1 + a_2)a_2} = \frac{a_1}{a_0 + a_1 + a_2}$$

$$S_{1,rl}^{(N)}(2) = \frac{a_0 a_1 a_2 a_3}{a_0(a_0 + a_1 + a_2 + a_3)(a_2 + a_3)a_3} = \frac{a_1}{a_0 + a_1 + a_2 + a_3} \cdot \frac{a_2}{a_2 + a_3}$$

$$\begin{aligned} S_{1,rl}^{(N)}(3) &= \frac{a_0 a_1 a_2 a_3 a_4}{a_0(a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4)(a_2 + a_3 + a_4)(a_3 + a_4)a_4} \\ &= \frac{a_1}{a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4} \cdot \frac{a_2}{a_2 + a_3 + a_4} \cdot \frac{a_3}{a_3 + a_4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{1,rl}^{(N)}(4) &= \frac{a_0 a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}{a_0(a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)(a_2 + a_3 + a_4 + a_5)(a_3 + a_4 + a_5)(a_4 + a_5)a_5} \\ &= \frac{a_1}{a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5} \cdot \frac{a_2}{a_2 + a_3 + a_4 + a_5} \cdot \frac{a_3}{a_3 + a_4 + a_5} \cdot \frac{a_4}{a_4 + a_5} \end{aligned}$$

Genericamente:

$$S_{1,rl}^{(N)}(t) = \frac{a_1}{\sum_{i=0}^{t+1} a_i} \cdot \prod_{j=2}^t \left[\frac{a_j}{\sum_{k=j}^{t+1} a_k} \right]. \quad (4.2)$$

A seqüência $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{t+1}$; é uma progressão aritmética (PA) de $t + 2$ termos com primeiro termo $a_0 = N - t - 2$ e último termo $a_{t+1} = N - 1$, assim:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{t+1} a_i &= \frac{(a_0 + a_{t+1})(t + 2)}{2} = \frac{(N - t - 2 + N - 1)(t + 2)}{2} \\ &= \left(N - \frac{t + 3}{2} \right) (t + 2). \end{aligned}$$

A seqüência $a_j, a_{j+1}, a_{j+2}, \dots, a_{t+1}$; é uma PA de $t + 2 - j$ termos com primeiro termo $a_j = a_0 + rj = N - t - 2 + j$ e último termo $a_{t+1} = N - 1$, assim:

$$\begin{aligned} \sum_{k=j}^{t+1} a_k &= \frac{(a_j + a_{t+1})(t + 2 - j)}{2} = \frac{(N - t - 2 + j + N - 1)(t + 2 - j)}{2} \\ &= \left(N - \frac{t + 3 - j}{2} \right) (t + 2 - j). \end{aligned}$$

Substituindo estas somas de PA na Eq. 4.2, obtém-se:

$$S_{1,rl}^{(N)}(t) = \frac{N-t-1}{\left(N - \frac{t+3}{2}\right)(t+2)} \cdot \prod_{j=2}^t \frac{N-t-2+j}{\left(N - \frac{t+3-j}{2}\right)(t+2-j)}.$$

Esta expressão pode ser ligeiramente simplificada com a substituição $k = t + 2 - j$:

$$S_{1,rl}^{(N)}(t) = \frac{N-t-1}{\left(N - \frac{t+3}{2}\right)(t+2)} \cdot \prod_{k=2}^t \frac{N-k}{\left(N - \frac{k+1}{2}\right)k}, \quad t = 0, 1, 2, \dots, N-2. \quad (4.3)$$

Uma propriedade notável deste resultado é que a probabilidade de se ter um transiente $t = 1$ vale $1/3$, para qualquer valor de $N \geq 3$:

$$S_{1,rl}^{(N)}(1) = \frac{N-1-1}{\left(N - \frac{1+3}{2}\right) \cdot (1+2)} \cdot \prod_{k=2}^1 \frac{N-k}{\left(N - \frac{k+1}{2}\right)k} = \frac{N-2}{(N-2) \cdot 3} = \frac{1}{3}.$$

Desta maneira, obtivemos analiticamente a distribuição dos tempos de transiente para o modelo de distâncias aleatórias com $\mu = 1$.

4.2.1 Limite Termodinâmico

Iniciando a Eq. 4.3 com os fatores que dependem exclusivamente de t , é possível obter o fator de correção de tamanho finito:

$$S_{1,rl}^{(N)}(t) = S_{1,rl}^{(\infty)}(t) \cdot \frac{N-t-1}{N - \frac{t+3}{2}} \cdot \prod_{k=2}^t \frac{N-k}{N - \frac{k+1}{2}},$$

onde

$$S_{1,rl}^{(\infty)}(t) = \frac{t+1}{(t+2)!}, \quad t = 0, 1, 2, \dots, \infty \quad (4.4)$$

representa o limite termodinâmico ($N \gg 1$).

Esta distribuição de probabilidade já está normalizada, pois:

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{\infty} S_{1,rl}^{(\infty)}(t) &= \sum_{t=0}^{\infty} \frac{t+1}{(t+2)!} = \sum_{t=2}^{\infty} \frac{t-1}{t!} = \sum_{t=2}^{\infty} \frac{t}{t!} - \sum_{t=2}^{\infty} \frac{1}{t!} = \sum_{t=2}^{\infty} \frac{1}{(t-1)!} - (e-2) \\ &= \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t!} - e + 2 = e - 1 - e + 2 = 1. \end{aligned}$$

Através de manipulações algébricas semelhantes, obtém-se a média

$$\bar{t} = e - 2$$

e a variância

$$\sigma_t^2 = 3e - e^2 = e(1 - \bar{t}) .$$

A Tabela 4 mostra alguns valores de $S_{1,rl}^{(\infty)}(t)$. Observe que, em particular, $S_{1,rl}^{(\infty)}(0) = 1/2 = P_1^{(\infty)}$, resultado obtido pela fórmula de Cox [15] (Eq. 2.7).

t	$S_{1,rl}^{(\infty)}(t)$
0	1/2
1	1/3
2	1/8
3	1/30
4	1/144
5	1/840
6	1/5760
7	1/45360
8	1/403200

Tabela 4: Tabela da distribuição dos tempos de transiente para o modelo de distâncias aleatórias.

A Fig. 6 mostra a distribuição de tempos de transientes para alguns valores de N e a convergência para o limite termodinâmico.

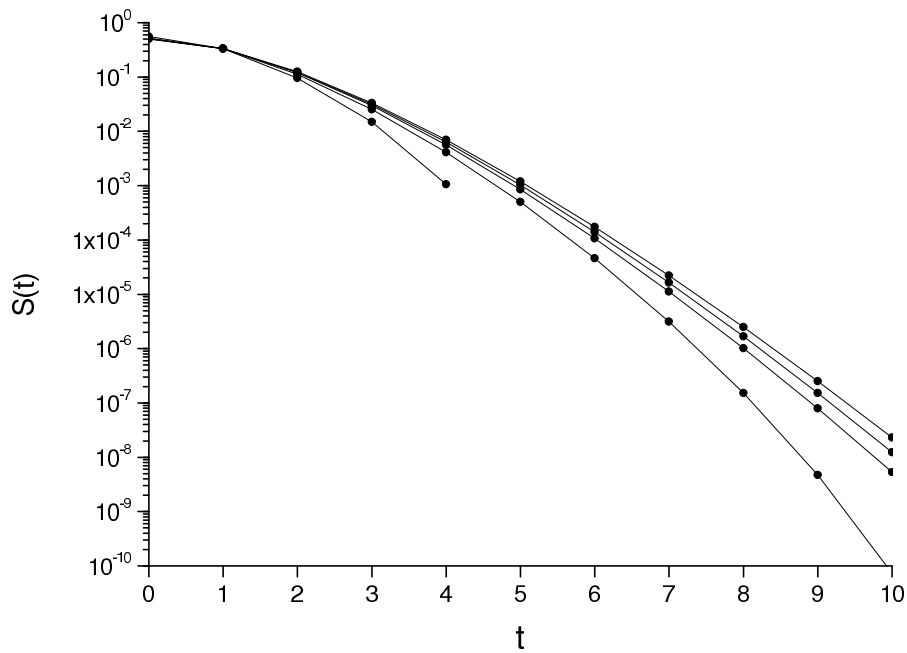


Figura 6: Distribuição dos tempos de transientes para o modelo de distâncias aleatórias. De baixo para cima, as curvas referem-se respectivamente a $N = 6, 12, 25$ e ao limite $N \gg 1$. A distribuição é discreta; as linhas servem apenas de referência.

4.2.2 Distribuição Acumulada e Probabilidade de Subsistência

A probabilidade do turista entrar num atrator não é constante durante a caminhada, mas pode ser expressa, por meios analíticos, em função do passo da trajetória. Examinemos, inicialmente, o limite termodinâmico. A distribuição acumulada vale:

$$\begin{aligned}
 F_{1,rl}^{(\infty)}(t) &= \sum_{k=0}^t S_{1,rl}^{(\infty)}(k) = \sum_{k=0}^t \frac{k+1}{(k+2)!} = \sum_{k=2}^{t+2} \frac{k-1}{k!} \\
 &= \sum_{k=2}^{t+2} \frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=2}^{t+2} \frac{1}{k!} = \sum_{k=1}^{t+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=2}^{t+2} \frac{1}{k!} \\
 &= 1 - \frac{1}{(t+2)!}.
 \end{aligned}$$

Uma maneira alternativa de se escrever a Eq. 4.4 é através da fórmula recursiva:

$$\begin{aligned}
 S_{1,rl}^{(\infty)}(t) &= \left[1 - F_{1,rl}^{(\infty)}(t-1)\right] \cdot \frac{t+1}{t+2} \\
 &= \frac{1}{(t+1)!} \cdot \frac{t+1}{t+2}.
 \end{aligned}$$

O primeiro fator representa a probabilidade do caminhante subsistir (não entrar num atrator) nos t primeiros passos; e o segundo, a probabilidade de ser capturado (entrar num atrator) no passo $t+1$. Assim:

$$\begin{aligned}
 S_{1,rl}^{(\infty)}(0) &= \frac{1}{2} \\
 S_{1,rl}^{(\infty)}(1) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \\
 S_{1,rl}^{(\infty)}(2) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \\
 S_{1,rl}^{(\infty)}(3) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} \\
 S_{1,rl}^{(\infty)}(4) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{6} \\
 S_{1,rl}^{(\infty)}(5) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{7}
 \end{aligned}$$

Em analogia à distribuição geométrica (vide Apêndice A), a Eq. 4.4 pode também ser

escrita na forma

$$S_{1,rl}^{(\infty)}(t) = p_{1,rl}^{(\infty)}(t+1) \cdot \prod_{j=1}^t q_{1,rl}^{(\infty)}(j),$$

onde as probabilidades de sucesso e fracasso dependem do estágio da extração:

$$q_{1,rl}^{(\infty)}(j) = \frac{1}{j+1}$$

representa a probabilidade de subsistência (não entrar num atrator) no passo j , e

$$p_{1,rl}^{(\infty)}(j) = 1 - q_{1,rl}^{(\infty)}(j)$$

representa a probabilidade de captura (entrar num atrator) no passo j .

Dessa forma, obtivemos uma expressão analítica muito simples para a probabilidade de subsistência ao longo da caminhada.

Um raciocínio análogo pode ser aplicado a sistemas com tamanho finito. Com algumas manipulações algébricas, a Eq. 4.3 pode ser expressa na forma

$$S_{1,rl}^{(N)}(t) = \left[1 - \frac{N-t-2}{\left(N - \frac{t+1}{2} - 1\right)(t+2)} \right] \cdot \prod_{k=1}^t \frac{N-k-1}{\left(N - \frac{k}{2} - 1\right)(k+1)},$$

que permite obter o fator de correção de tamanho finito para a probabilidade de subsistência:

$$q_{1,rl}^{(N)}(j) = q_{1,rl}^{(\infty)}(j) \cdot \frac{N-j-1}{N - \frac{j}{2} - 1}.$$

Assim, a Eq. 4.3 também pode ser escrita de maneira análoga à distribuição geométrica:

$$S_{1,rl}^{(N)}(t) = p_{1,rl}^{(N)}(t+1) \cdot \prod_{j=1}^t q_{1,rl}^{(N)}(j),$$

onde

$$p_{1,rl}^{(N)}(j) = 1 - q_{1,rl}^{(N)}(j).$$

Em termos das probabilidades de subsistência, a distribuição acumulada para tamanho

finito pode ser determinada como segue:

$$\begin{aligned}
S(0) &= 1 - q(1) = 1 - q(1) \\
S(1) &= q(1)[1 - q(2)] = q(1) - q(1)q(2) \\
S(2) &= q(1)q(2)[1 - q(3)] = q(1)q(2) - q(1)q(2)q(3) \\
S(3) &= q(1)q(2)q(3)[1 - q(4)] = q(1)q(2)q(3) - q(1)q(2)q(3)q(4) \\
&\vdots \\
S(t) &= q(1)q(2) \cdots q(t)[1 - q(t+1)] = q(1)q(2) \cdots q(t) - q(1)q(2) \cdots q(t+1)
\end{aligned}$$

Somando o primeiro e o terceiro membro de cada equação, obtemos:

$$F_{1,rl}^{(N)}(t) = \sum_{k=0}^t S_{1,rl}^{(N)}(k) = 1 - \prod_{j=1}^{t+1} q_{1,rl}^{(N)}(j).$$

Através desta expressão, verifica-se facilmente que a distribuição de transientes para tamanho finito também está normalizada:

$$\sum_{k=0}^{N-2} S_{1,rl}^{(N)}(k) = 1 - \prod_{j=1}^{N-1} q_{1,rl}^{(N)}(j) = 1 - 0 = 1,$$

pois

$$q_{1,rl}^{(N)}(N-1) = q_{1,rl}^{(\infty)}(N-1) \cdot \frac{N - (N-1) - 1}{N - \frac{N-1}{2} - 1} = 0.$$

Esta análise da probabilidade de subsistência ao longo da caminhada possibilitará uma generalização para o caso de sistemas com dimensionalidade arbitrária.

4.3 Efeito de Tamanho Finito

Como medida do quão distantes as distribuições para tamanho finito estão do limite termodinâmico, pode-se definir, para um dado N , o erro quadrático médio

$$E_{1,rl}(N) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{t=0}^{\infty} [S_{1,rl}^{(N)}(t) - S_{1,rl}^{(\infty)}(t)]^2. \quad (4.5)$$

Numericamente, verifica-se que $E_{1,rl}$ segue uma lei de potência em função de N dada por

$$E_{1,rl}(N) \approx 0,08611 \cdot N^{-3}, \quad (4.6)$$

com um pequeno desvio para valores de $N < 10$, como pode ser observado na Fig. 7.

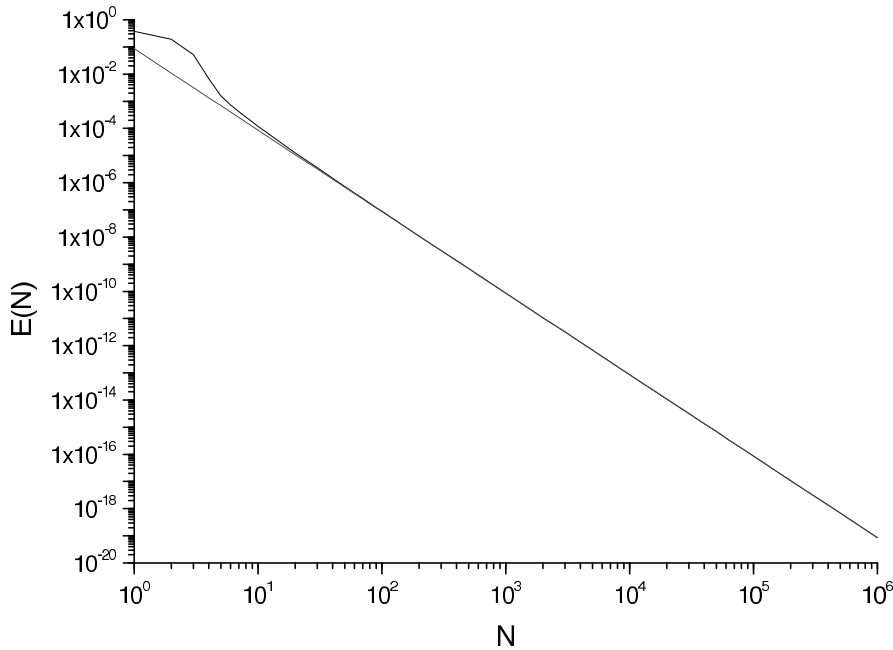


Figura 7: Erro quadrático médio devido ao efeito de tamanho finito. Observa-se um pequeno desvio entre as curvas obtidas a partir das Eqs. 4.5 e 4.6 para valores de $N < 10$.

4.4 Validação Numérica

Simulações numéricas mostraram plena concordância com os resultados analíticos obtidos. As Tabelas 7 e 8 do Apêndice B comparam os resultados analíticos calculados a partir da Eq. 4.3 com os valores médios resultantes de simulações para $N = 6, 12, 25, 50, 100$ e 200 , respectivamente. Os gráficos construídos a partir daquelas tabelas não permitiram uma distinção entre o resultado analítico e o simulado e, por esse motivo, não foram ali incluídos. Foram utilizados $M = 2048000000$ mapas distintos para a simulação com $N = 6$ pontos. Para que as simulações para os demais valores de N também fossem concluídas em tempo hábil, o número de mapas foi progressivamente reduzido. Como tempo de processamento da simulação mostrou-se aproximadamente proporcional a N^2 , o número de mapas foi dividido por 4 à medida que o número de pontos dobrava a cada nova simulação.

4.5 Conclusão

A independência entre as distâncias no modelo de distâncias aleatórias foi o ponto-chave para o desenvolvimento deste Capítulo. A fim de explorarmos esta propriedade, iniciamos com uma breve resivão de estatística de extremos, onde determinamos a pdf de

uma variável definida como o mínimo entre N variáveis aleatórias independentes. Esta pdf assumiu uma forma algébrica muito simples para o caso em que as N variáveis tinham distribuição uniforme no intervalo $[0; 1]$.

De posse desta pdf, determinamos analiticamente a distribuição de tempos de transiente para uma caminhada do turista sem memória $\mu = 1$ em sistemas com tamanho finito, utilizando a propriedade da simetria da matriz de distâncias e o fato da distância percorrida diminuir a cada passo da trajetória, até que o turista entre num ciclo. O limite termodinâmico para esta distribuição resultou numa expressão muito simples, embora o processo necessário para obtê-lo estivesse longe de ser trivial.

A seguir, determinamos a distribuição acumulada e, em analogia à distribuição geométrica, foram determinadas as probabilidades de subsistência e de captura a cada passo da caminhada. Também foram determinados os fatores de correção de tamanho finito para estas probabilidades. Esta nova interpretação permitiu a verificação da condição de normalização para caso de mapas com tamanho finito e será útil na generalização do resultado para espaços euclideo de dimensionalidade arbitrária.

Em seguida avaliamos o efeito de tamanho finito através do erro quadrático médio entre $S_{1,rl}^{(N)}$ e $S_{1,rl}^{(\infty)}$. Numericamente verificamos que este erro segue uma lei de potência em função do número N de pontos.

Por fim, exibimos no Apêndice B os resultados de simulações numéricas que validaram os resultados analíticos obtidos neste Capítulo.

5 *Distribuição dos Tempos de Transiente em Sistemas Unidimensionais*

Assim como o modelo de distâncias aleatórias representa o limite superior da dimensionalidade ($d \rightarrow \infty$) para os espaços euclidianos, o modelo em uma dimensão representa o limite inferior. Dentre os espaços euclidianos com dimensionalidade finita, os sistemas unidimensionais são de mais fácil análise.

Neste Capítulo determinamos analiticamente a distribuição dos tempos de transientes para sistemas unidimensionais no limite termodinâmico. Iniciamos a demonstração considerando um meio semi-infinito, estabelecendo uma conexão surpreendente com o modelo de distâncias aleatórias. Com uma simples modificação, obtemos a distribuição de transientes para meio de interesse (meio infinito).

A seguir, determinamos a distribuição acumulada e fazemos uma analogia à distribuição geométrica, destacando as probabilidades de subsistência e de captura ao longo da caminhada.

5.1 Meio Semi-infinito

Os objetivos de iniciarmos nossa análise pelo meio desordenado semi-infinito são:

- desenvolver o núcleo do cálculo para a distribuição de transientes no meio infinito,
- revelar uma equivalência não-trivial entre sistemas unidimensionais e o modelo de distâncias aleatórias,
- avaliar o efeito de borda.

O meio semi-infinito pode ser imaginado como um conjunto de infinitos pontos distribuídos aleatoriamente de maneira uniforme sobre uma semi-reta, seguindo uma densidade média de r pontos por unidade de comprimento. Consideraremos, em particular, o sítio s_1 situado na origem da semi-reta, como mostra a Fig. 8.

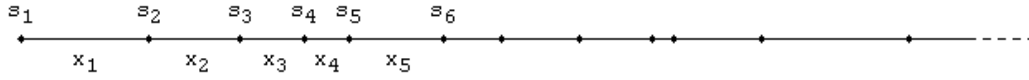


Figura 8: Meio semi-infinito. O sítio s_1 está localizado na extremidade da semi-reta.

Este modelo é descrito por um processo de Poisson unidimensional. Os sítios podem ser considerados eventos que ocorrem aleatoriamente no tempo. Portanto, as distâncias entre sítios consecutivos seguem uma distribuição exponencial, cuja pdf é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} re^{-rx}, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases} .$$

A distribuição dos tempos de transientes para uma caminhada determinista de um turista que parte da origem do sistema, com $\mu = 1$, pode ser determinada observando que a distância percorrida diminui a cada passo. Como exemplo, serão analisadas as condições para que a caminhada possua um tempo de transiente $t = 3$.

1. Considere que o turista inicia sua caminhada no sítio s_1 . O sítio permitido mais próximo de s_1 é s_2 . O turista deve percorrer a distância x_1 que, em princípio, pode assumir qualquer valor no intervalo de 0 a ∞ .
2. O turista vai, então, para o sítio s_2 . Para que a caminhada continue, é necessário que $x_2 < x_1$. Portanto, a distância x_2 deve estar entre 0 e x_1 .
3. No próximo passo, o turista vai para o sítio s_3 . Voltar ao sítio s_2 implicaria num tempo de transiente $t = 1$. Portanto, para que o transiente continue, é necessário que $x_3 < x_2$.
4. O turista vai, então, para o sítio s_4 . O procedimento se repete. Para que o turista ainda esteja num transiente, é necessário que $x_4 < x_3$.

5. O turista vai, então, para o sítio s_5 . Agora ele deve voltar para o sítio s_4 , encerrando a exploração do meio. Para que isso aconteça, o sítio s_6 deve estar a uma distância $x_5 > x_4$.

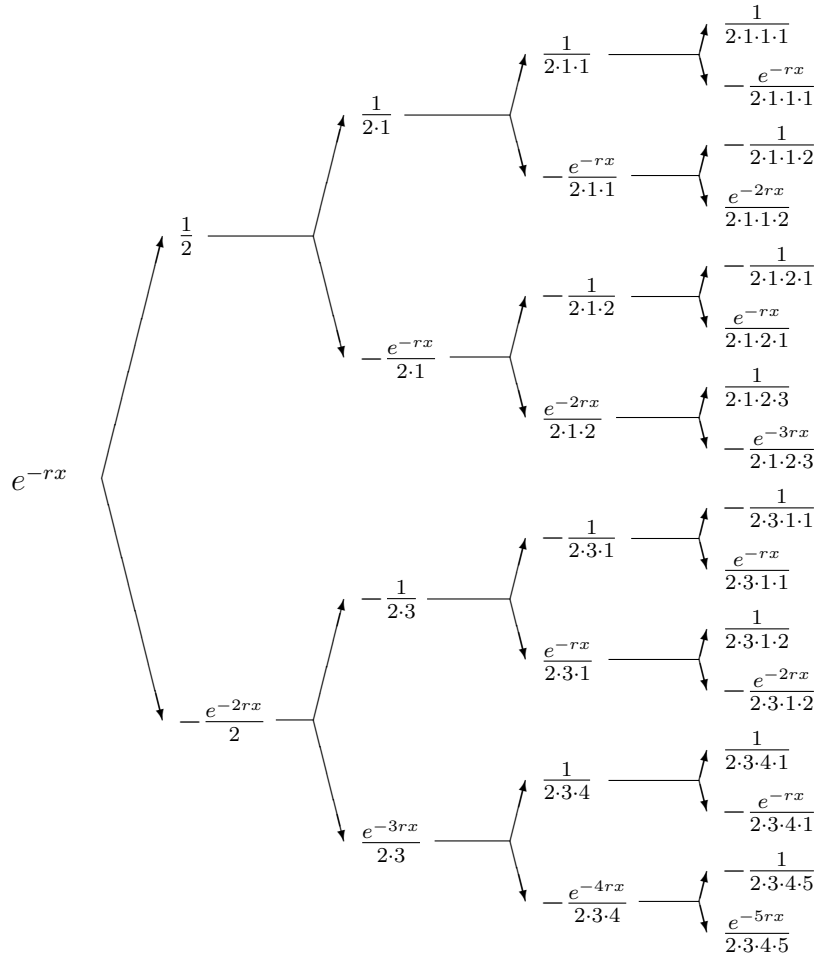
Generalizando este raciocínio para um tempo de transiente t arbitrário, obtemos:

$$S_{1,s_i}^{(\infty)}(t) = \int_0^\infty dx_1 r e^{-rx_1} \int_0^{x_1} dx_2 r e^{-rx_2} \int_0^{x_2} dx_3 r e^{-rx_3} \dots \\ \dots \int_0^{x_{t-1}} dx_t r e^{-rx_t} \int_0^{x_t} dx_{t+1} r e^{-rx_{t+1}} \int_{x_{t+1}}^\infty dx_{t+2} r e^{-rx_{t+2}}. \quad (5.1)$$

Nesta expressão, as $t+2$ integrais são encadeadas. Indexando cada integral pelo índice da variável de integração, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{t+2} &= \int_x^\infty dx r e^{-rx} = e^{-rx}, \\ \mathcal{I}_{t+1} &= \int_0^x dx r e^{-2rx} = \frac{1}{2} - \frac{e^{-2rx}}{2}, \\ \mathcal{I}_t &= \int_0^x dx \frac{r e^{-rx}}{2} - \int_0^x dx \frac{r e^{-3rx}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{e^{-rx}}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{e^{-3rx}}{2 \cdot 3}, \\ \mathcal{I}_{t-1} &= \int_0^x dx \frac{r e^{-rx}}{2} - \int_0^x dx \frac{r e^{-2rx}}{2} - \int_0^x dx \frac{r e^{-rx}}{2 \cdot 3} + \int_0^x dx \frac{r e^{-4rx}}{2 \cdot 3} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{e^{-rx}}{2} - \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{e^{-2rx}}{2 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{e^{-rx}}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{e^{-4rx}}{2 \cdot 3 \cdot 4}, \\ \mathcal{I}_{t-2} &= \int_0^x dx \frac{r e^{-rx}}{2} - \int_0^x dx \frac{r e^{-2rx}}{2} - \int_0^x dx \frac{r e^{-rx}}{2 \cdot 2} + \int_0^x dx \frac{r e^{-3rx}}{2 \cdot 2} \\ &\quad - \int_0^x dx \frac{r e^{-rx}}{2 \cdot 3} + \int_0^x dx \frac{r e^{-2rx}}{2 \cdot 3} + \int_0^x dx \frac{r e^{-rx}}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \int_0^x dx \frac{r e^{-5rx}}{2 \cdot 3 \cdot 4} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{e^{-rx}}{2} - \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{e^{-2rx}}{2 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{e^{-rx}}{2 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{e^{-3rx}}{2 \cdot 2 \cdot 3} \\ &\quad - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{e^{-rx}}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 2} - \frac{e^{-2rx}}{2 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{e^{-rx}}{2 \cdot 3 \cdot 4} \\ &\quad - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{e^{-5rx}}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}. \end{aligned}$$

Como no modelo de distâncias aleatórias (Cap. 4), cada passo de integração, com exceção do primeiro \mathcal{I}_{t+2} , dobra o número de parcelas, de acordo com o esquema da Fig. 9.



$$S(0) = \frac{1}{2} \quad S(1) = \frac{2}{6} \quad S(2) = \frac{3}{24} \quad S(3) = \frac{4}{120}$$

Figura 9: Cálculo das integrais encadeadas da Eq. 5.1. Cada passo de integração dobra o número de integrais.

Como são $t + 2$ integrais, têm-se $2^{t+2-1} = 2^{t+1}$ parcelas. No entanto, metade das parcelas são dependentes de x . Estas desaparecerão na última integral \mathcal{I}_1 . Portanto a expressão resulta em 2^t parcelas. Somando estas parcelas, obtêm-se os seguintes valores para $S_{1,si}^{(\infty)}(t)$:

$$\begin{aligned} S_{1,si}^{(\infty)}(0) &= \frac{1}{2} \\ S_{1,si}^{(\infty)}(1) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} \\ S_{1,si}^{(\infty)}(2) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = \frac{3}{24} \\ S_{1,si}^{(\infty)}(3) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{12} - \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} = \frac{4}{120} \\ S_{1,si}^{(\infty)}(4) &= \dots = \frac{5}{720} \\ S_{1,si}^{(\infty)}(5) &= \dots = \frac{6}{5040} . \end{aligned}$$

Genericamente:

$$S_{1,si}^{(\infty)}(t) = \frac{t+1}{(t+2)!}, \quad t = 0, 1, 2, \dots, \infty. \quad (5.2)$$

Esta expressão é a mesma da Eq. 4.4, o limite termodinâmico para o modelo de distâncias aleatórias. Portanto, todas as suas propriedades (condição de normalização, valor médio, variância, distribuição acumulada e probabilidades de subsistência) já foram determinadas. Cabe ainda observar que a densidade média do meio (r pontos por unidade de comprimento) não interfere na distribuição de tempos de transiente, apenas afeta a distância percorrida a cada passo.

Parece estranho, à primeira vista, dois modelos que representam limites opostos no tocante à dimensionalidade apresentarem a mesma expressão para a distribuição de tempos de transientes. Mas esta equivalência pode ser compreendida observando que, apesar de haver fortes correlações na matriz de distâncias para sistemas unidimensionais, as únicas distâncias importantes para o turista sem memória ($\mu = 1$) são aquelas entre sítios consecutivos, e estas distâncias são, de fato, variáveis independentes.

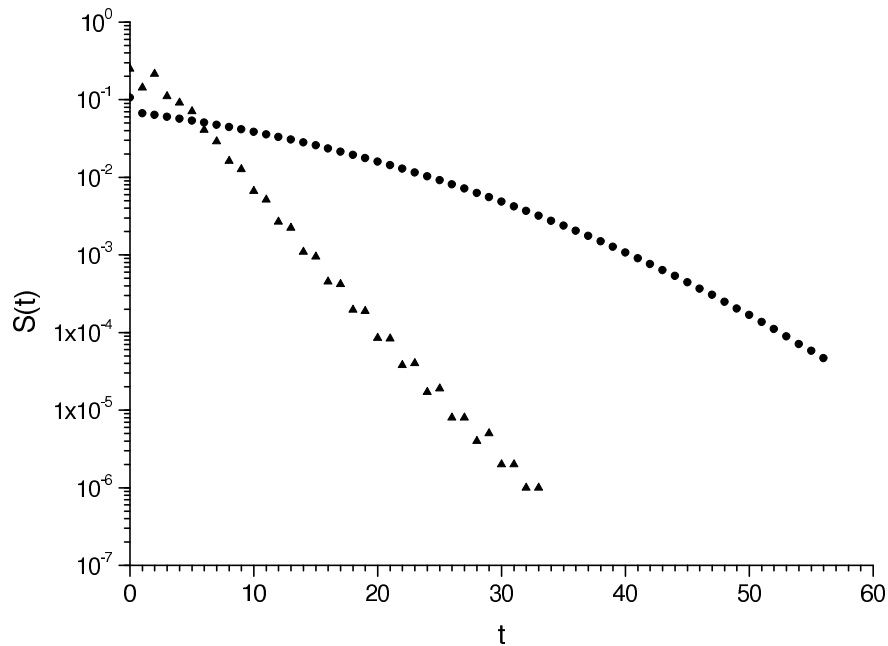


Figura 10: Resultado de uma simulação numérica para $\mu = 2$ e $N = 100$ pontos por mapa. Os círculos representam as médias de transientes entre $M = 2000000$ mapas distintos no modelo de distâncias aleatórias, e os triângulos, as médias sobre $M = 40000000$ mapas no modelo unidimensional.

Simulações mostraram que esta equivalência não existe para $\mu = 2$, pois neste caso não são apenas as distâncias entre sítios consecutivos as grandezas importantes para a

caminhada; as distâncias entre vizinhos de ordem 2 também são relevantes. Dessa forma surgem correlações entre distâncias. A Fig. 10 compara os resultados numéricos obtidos a partir de simulações com o modelo de distâncias aleatórias e com o modelo unidimensional, para $\mu = 2$ e $N = 100$. A discrepância entre os resultados é enorme.

5.2 Meio Infinito

Com uma simples modificação no modelo anterior, pode-se obter analiticamente a distribuição de tempos de transiente para um meio ilimitado em ambos sentidos. Considere que o turista parte do sítio s_1 do meio infinito mostrado na Fig. 11.

Para que se tenha um tempo de transiente $t = 3$, como citado na seção anterior, a única condição adicional é que o sítio s_0 situado à esquerda de s_1 esteja a uma distância x_0 maior do que a distância x_1 entre os sítios s_1 e s_2 . Também deve-se multiplicar a expressão por 2, pois, devido à simetria, há igual probabilidade do turista caminhar para a direita ou para a esquerda.

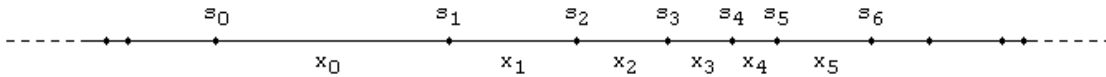


Figura 11: Meio infinito. O turista parte do sítio s_1 .

Aplicando estas alterações à equação 5.1 temos:

$$S_{1,1}^{(\infty)}(t) = 2 \cdot \int_0^\infty dx_1 r e^{-rx_1} \int_{x_1}^\infty dx_0 r e^{-rx_0} \int_0^{x_1} dx_2 r e^{-rx_2} \int_0^{x_2} dx_3 r e^{-rx_3} \dots \\ \dots \int_0^{x_{t-1}} dx_t r e^{-rx_t} \int_0^{x_t} dx_{t+1} r e^{-rx_{t+1}} \int_{x_{t+1}}^\infty dx_{t+2} r e^{-rx_{t+2}} .$$

A integral em x_0 não é encadeada com as demais, e pode ser calculada a priori:

$$\int_{x_1}^\infty dx_0 r e^{-rx_0} = \left[-e^{-rx_0} \right]_{x_1}^\infty = e^{-rx_1} .$$

Dessa forma, o esquema da Fig. 9 fica ligeiramente alterado. Na última etapa de integração, é adicionada aos expoentes de e^{-rx} , e^{-2rx} , e^{-3rx} , ... a parcela $-rx$. Conseqüentemente, os fatores 2, 3, 4, ..., dos denominadores advindos da última integral

serão acrescidos de uma unidade. Assim:

$$S_{1,1}^{(\infty)}(0) = 2 \cdot \left[\frac{1}{3} \right] = 2 \cdot \frac{1}{3} = 2 \cdot \frac{2}{6}$$

$$S_{1,1}^{(\infty)}(1) = 2 \cdot \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{8} \right] = 2 \cdot \frac{1}{8} = 2 \cdot \frac{3}{24}$$

$$S_{1,1}^{(\infty)}(2) = 2 \cdot \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{12} + \frac{1}{30} \right] = 2 \cdot \frac{1}{30} = 2 \cdot \frac{4}{120}$$

$$S_{1,1}^{(\infty)}(3) = 2 \cdot \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{12} + \frac{1}{18} + \frac{1}{48} - \frac{1}{144} \right] = 2 \cdot \frac{1}{144} = 2 \cdot \frac{5}{720}$$

$$S_{1,1}^{(\infty)}(4) = \dots = 2 \cdot \frac{6}{5040}$$

$$S_{1,1}^{(\infty)}(5) = \dots = 2 \cdot \frac{7}{40320}.$$

Genericamente:

$$S_{1,1}^{(\infty)}(t) = \frac{2(t+2)}{(t+3)!}, \quad t = 0, 1, 2, \dots, \infty. \quad (5.3)$$

Desta forma, determinamos analiticamente o limite termodinâmico da distribuição dos tempos de transientes para sistemas unidimensionais com $\mu = 1$.

A Tabela 5 mostra alguns valores de $S_{1,1}^{(\infty)}(t)$. Observe que, em particular, $S_{1,1}^{(\infty)}(0) = 2/3 = P_1^{(1)}$, resultado obtido pela fórmula de Cox [15] (Eq. 2.7).

t	$S_{1,1}^{(\infty)}(t)$
0	2/3
1	1/4
2	1/15
3	1/72
4	1/420
5	1/2880
6	1/22680
7	1/201600
8	1/1995840

Tabela 5: Tabela da distribuição dos tempos de transientes para sistemas unidimensionais.

Esta distribuição de probabilidade satisfaz à condição de normalização, pois:

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{\infty} S_{1,1}^{(\infty)}(t) &= \sum_{t=0}^{\infty} \frac{2(t+2)}{(t+3)!} = 2 \sum_{t=3}^{\infty} \frac{t-1}{t!} = 2 \left[\sum_{t=3}^{\infty} \frac{t}{t!} - \sum_{t=3}^{\infty} \frac{1}{t!} \right] \\ &= 2 \left[\sum_{t=2}^{\infty} \frac{1}{t!} - \left(e - \frac{5}{2} \right) \right] = 2 \left[e - 2 - e + \frac{5}{2} \right] = 2 \left[-2 + \frac{5}{2} \right] = 1. \end{aligned}$$

Através de manipulações algébricas semelhantes, obtêm-se o valor médio

$$\bar{t} = 2e - 5$$

e a variância

$$\sigma_t^2 = 14e - 4e^2 - 8 = 2e(2 - \bar{t}) - 8.$$

5.2.1 Distribuição Acumulada e Probabilidade de Subsistência

A exemplo do modelo de distâncias aleatórias, a probabilidade do turista entrar num atrator a cada passo de uma caminhada no caso unidimensional também pode ser determinada analiticamente. Para tanto, determinamos inicialmente a distribuição acumulada dos tempos de transiente

$$\begin{aligned} F_{1,1}^{(\infty)}(t) &= \sum_{k=0}^t S_{1,1}^{(\infty)}(k) = \sum_{k=0}^t \frac{2(k+2)}{(k+3)!} = 2 \left[\sum_{k=3}^{t+3} \frac{k-1}{k!} \right] \\ &= 2 \left[\sum_{k=3}^{t+3} \frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=3}^{t+3} \frac{1}{k!} \right] = 2 \left[\sum_{k=2}^{t+2} \frac{1}{k!} - \sum_{k=3}^{t+3} \frac{1}{k!} \right] = 2 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(t+3)!} \right] \\ &= 1 - \frac{2}{(t+3)!} \end{aligned}$$

e a forma recursiva da Eq. 5.3

$$\begin{aligned} S_{1,1}^{(\infty)}(t) &= \left[1 - F_{1,1}^{(\infty)}(t-1) \right] \cdot \frac{t+2}{t+3} \\ &= \frac{2}{(t+2)!} \cdot \frac{t+2}{t+3}. \end{aligned}$$

O primeiro fator representa a probabilidade do turista subsistir nos t primeiros passos.

O segundo, a probabilidade de ser capturado no passo $t + 1$. Assim:

$$S_{1,1}^{(\infty)}(0) = \frac{2}{3}$$

$$S_{1,1}^{(\infty)}(1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}$$

$$S_{1,1}^{(\infty)}(2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5}$$

$$S_{1,1}^{(\infty)}(3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{6}$$

$$S_{1,1}^{(\infty)}(4) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{7}$$

$$S_{1,1}^{(\infty)}(5) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{7}{8}$$

Desta maneira, pode-se fazer analogia à distribuição geométrica:

$$S_{1,1}^{(\infty)}(t) = p_{1,1}^{(\infty)}(t+1) \cdot \prod_{j=1}^t q_{1,1}^{(\infty)}(j),$$

onde as probabilidades de sucesso e fracasso dependem do estágio da extração:

$$q_{1,1}^{(\infty)}(j) = \frac{1}{j+2}$$

representa a probabilidade de subsistência (não entrar num atrator) no passo j , e

$$p_{1,1}^{(\infty)}(j) = 1 - q_{1,1}^{(\infty)}(j)$$

representa a probabilidade de captura (entrar num atrator) no passo j .

Similarmente ao modelo de distâncias aleatórias, obtivemos uma expressão muito simples para a probabilidade de subsistência ao longo da trajetória no modelo unidimensional. De fato, esta regularidade observada entre estes dois modelos nos levou a considerar a probabilidade de subsistência como a grandeza apropriada na generalização para sistemas de dimensionalidade qualquer.

5.2.2 Efeito de Tamanho Finito

Ao contrário do modelo de distâncias aleatórias, verificou-se numericamente, para sistemas unidimensionais, uma fraca dependência da distribuição de tempos de transiente para com o número de pontos do meio desordenado. A Fig. 12 mostra as curvas referentes a $N = 6, 12, 25, 50, 100$, obtidas a partir de simulação, e o limite $N \gg 1$, calculado a partir da Eq. 5.3. As curvas se apresentam quase totalmente sobrepostas, de tal forma que não é possível distingüí-las.

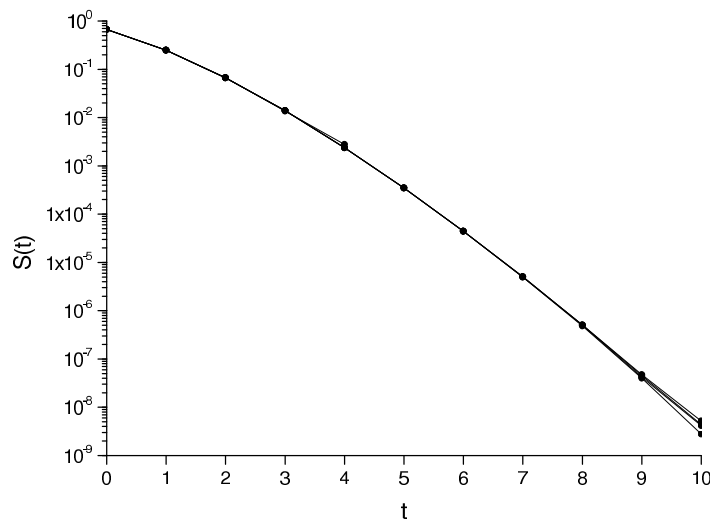


Figura 12: Efeito de tamanho finito sobre a distribuição dos tempos de transientes para sistemas unidimensionais. Foram traçadas as curvas referentes a $N = 6, 12, 25, 50$ e ao limite $N \gg 1$. As linhas servem apenas como guias, pois a distribuição é discreta.

5.3 Validação Numérica

Para fins de validação numérica, a Tabela 14 do Apêndice B compara os resultados analíticos calculados a partir da Eq. 5.3 com os valores médios resultantes de $M = 25000000$ simulações para $N = 100$ sítios por mapa, com condições periódicas de contorno. A Tabela 13 compara valores obtidos analiticamente a partir da Eq. 5.2 com resultados numéricos de $M = 25000000$ simulações para $N = 100$ sítios por mapa, com condições abertas de contorno. Neste caso o turista realizou apenas uma caminhada por mapa, partindo da origem.

5.4 Conclusão

A interpretação analítica para a distribuição de transientes em sistemas unidimensionais com tamanho finito resistiu a todas as tentativas investidas na sua obtenção. Para N pontos confinados no intervalo $[0; 1]$, as restrições entre os limites de integração de suas abscissas se revelou um problema de difícil análise. Porém, o impacto desta deficiência foi minimizado pelo fraco pronunciamento do efeito de tamanho finito que as simulações numéricas revelaram para estes sistemas.

Em contraste, no limite termodinâmico o modelo pôde ser facilmente interpretado nos moldes da familiar distribuição exponencial. Similarmente à aplicação desta distribuição em processos temporais (que possuem um ponto de origem), iniciamos nossa análise pelo meio semi-infinito. Utilizamos uma formulação idêntica àquela desenvolvida para o modelo de distâncias aleatórias e o resultado obtido também foi o mesmo. Também salientamos que a equivalência entre estes dois modelos só existe para o caso $\mu = 1$ e mostramos, através de simulações, que para $\mu = 2$ os resultados são bem discrepantes. Depois, com uma simples modificação, obtivemos o resultado de interesse: a distribuição de tempos de transientes para o meio infinito. Assim como no modelo de distâncias aleatórias, obtivemos a distribuição acumulada e as probabilidades de subsistência e de captura ao longo da caminhada, em analogia à distribuição geométrica. Encerramos o Capítulo mostrando, através de simulações numéricas, que o efeito de tamanho finito é minúsculo para sistemas unidimensionais.

6 *Distribuição de Transientes em Sistemas de Dimensionalidade Arbitrária*

Neste Capítulo apresentamos argumentos que nos permitem inferir a forma analítica da distribuição dos tempos de transientes para a caminhada do turista sem memória em sistemas com dimensionalidade arbitrária no limite termodinâmico.

Ao contrário dos Capítulos anteriores, iniciamos nossa dedução pela probabilidade de subsistência, pois esta tem se mostrado a grandeza de fácil análise para a caracterização da distribuição de transientes. A partir das probabilidades de subsistência e de captura, construímos a distribuição propriamente dita, a distribuição acumulada e determinamos seu valor médio. A distribuição obtida é validada através de simulações numéricas e concorda com os resultados analíticos já obtidos nos casos limites, isto é, para o modelo de distâncias aleatórias e para sistemas unidimensionais.

6.1 Probabilidade de Subsistência

Simulações numéricas revelaram que as distribuições de tempos de transientes para dimensionalidades arbitrárias estavam interpoladas entre as distribuições limites ($d = 1$ e $d \rightarrow \infty$) obtidas analiticamente nos Capítulos precedentes. A Fig. 13 mostra estes limites.

Suspeitou-se, então, que a forma analítica da distribuição para d arbitrário era análoga aos casos limites. Partindo desta suposição, decidiu-se inicialmente obter a expressão para a probabilidade de subsistência a cada passo da trajetória em função da dimensionalidade do meio, pois esta probabilidade tem se mostrado um elemento fundamental na composição da distribuição de transientes e também tem se apresentado através de expressões algébricas muito simples e de grande regularidade.

Como já foi mencionado na seção 2.5 do Capítulo 2, a probabilidade do turista partir

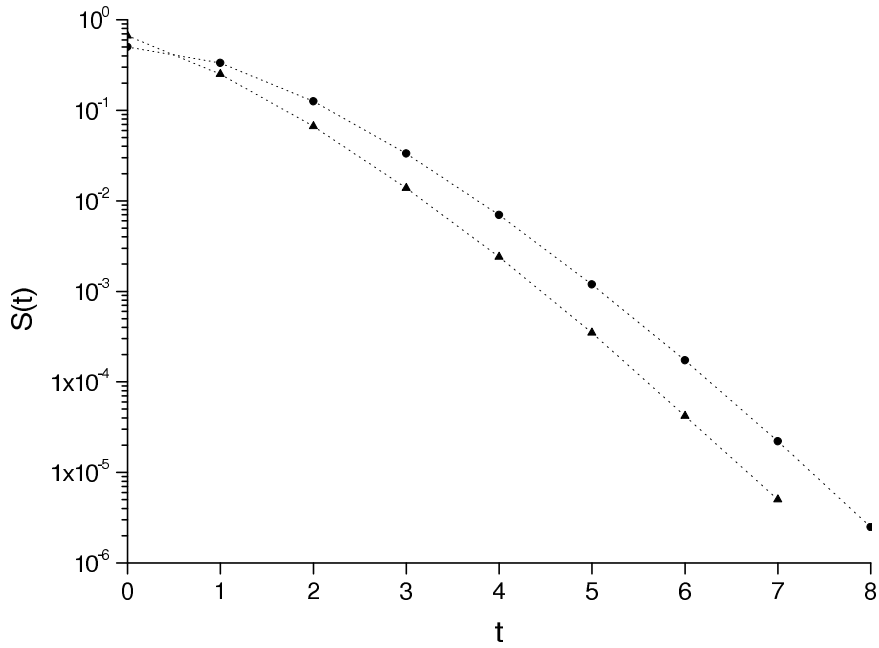


Figura 13: Comparação entre as distribuições de tempos de transiente. Os círculos representam o modelo de distâncias aleatórias e os triângulos representam o sistema unidimensional. As linhas pontilhadas servem apenas de orientação.

de um sítio e percorrer uma trajetória com transiente nulo num meio de dimensionalidade d é igual à probabilidade $P_1^{(d)}$ de se ter vizinhos reflexivos de ordem 1, fornecida pela fórmula de Cox [15] (Eq. 2.7):

$$S_{1,d}^{(\infty)}(0) = P_1^{(d)} .$$

Portanto, esta é a probabilidade do turista ser capturado no primeiro passo:

$$p_{1,d}^{(\infty)}(1) = P_1^{(d)} .$$

Assim, a probabilidade de subsistência no primeiro passo vale

$$q_{1,d}^{(\infty)}(1) = 1 - P_1^{(d)} .$$

Mas como

$$P_1^{(d)} = \frac{1}{1 + I_d} ,$$

tem-se

$$q_{1,d}^{(\infty)}(1) = 1 - \frac{1}{1 + I_d} ,$$

ou

$$q_{1,d}^{(\infty)}(1) = \frac{1}{1 + I_d^{-1}}.$$

Comparando esta expressão com as probabilidades de subsistência obtidas analiticamente para o modelo de distâncias aleatórias e para o sistema unidimensional, conjecturamos que a probabilidade de subsistência a cada passo da trajetória para dimensionalidades arbitrárias é dada por:

$$q_{1,d}^{(\infty)}(j) = \frac{1}{j + I_d^{-1}}.$$

Este resultado está de acordo com os casos limites $d = 1$ e $d \rightarrow \infty$, pois

$$q_{1,1}^{(\infty)}(j) = \frac{1}{j + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}} = \frac{1}{j + 2}$$

e

$$q_{1,rl}^{(\infty)}(j) = \frac{1}{j + (1)^{-1}} = \frac{1}{j + 1}.$$

Dessa forma obtivemos empiricamente as variáveis fundamentais para a construção de uma expressão para a distribuição de tempos de transientes.

6.2 Distribuição de Tempos de Transiente

A partir das probabilidades de subsistência, é possível construir uma expressão analítica fechada para a distribuição de tempos de transiente para dimensionalidade arbitrária utilizando a analogia que temos feito com a distribuição geométrica.

$$\begin{aligned} S_{1,d}^{(\infty)}(t) &= p_{1,d}^{(\infty)}(t+1) \cdot \prod_{j=1}^t q_{1,d}^{(\infty)}(j) \\ &= \left[1 - \frac{1}{t+1 + I_d^{-1}} \right] \cdot \prod_{j=1}^t \left[\frac{1}{j + I_d^{-1}} \right] \\ &= \left[\frac{t + I_d^{-1}}{t+1 + I_d^{-1}} \right] \cdot \frac{\Gamma(1 + I_d^{-1})}{\Gamma(t+1 + I_d^{-1})} \end{aligned}$$

$$S_{1,d}^{(\infty)}(t) = \frac{\Gamma(1 + I_d^{-1}) \cdot (t + I_d^{-1})}{\Gamma(t+2 + I_d^{-1})}, \quad t = 0, 1, 2, \dots, \infty. \quad (6.1)$$

Pode-se mostrar que esta distribuição tem um decaimento do tipo

$$S_{1,d}^{(\infty)}(t) \sim e^t t^{-t}$$

considerando $t \gg 2 + I_d^{-1}$ e desprezando as parcelas dependentes de z na aproximação de Stirling [14] dada pela Eq. 2.2.

Assim, combinando a experiência adquirida nos modelos de distâncias aleatórias e unidimensional com a análise das probabilidades de vizinhança em ambientes poissônicos, pudemos inferir a distribuição analítica para tempos de transiente de uma caminhada determinista com $\mu = 1$ sobre um meio desordenado de dimensionalidade d arbitrária. Neste processo, a grandeza I_d se tornou a variável relevante que parametriza esta distribuição em função da dimensionalidade do meio.

Chamamos a atenção para o fato de que podemos escrever esta distribuição em função do número de sítios explorados $n_e = t + p$, uma vez que o período do atrator sempre vale 2.

Este resultado também está de acordo com os casos limites $d = 1$ e $d \rightarrow \infty$, pois

$$S_{1,1}^{(\infty)}(t) = \frac{\Gamma \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^{-1} \right] \cdot \left[t + \left(\frac{1}{2} \right)^{-1} \right]}{\Gamma \left[t + 2 + \left(\frac{1}{2} \right)^{-1} \right]} = \frac{2(t+2)}{(t+3)!}$$

e

$$S_{1,rl}^{(\infty)}(t) = \frac{\Gamma(1 + 1^{-1}) \cdot (t + 1^{-1})}{\Gamma(t + 2 + 1^{-1})} = \frac{t+1}{(t+2)!}.$$

Esta concordância com os resultados analíticos já obtidos confere maior confiabilidade à generalização estabelecida.

A Figura 14 mostra o efeito da dimensionalidade do meio sobre a distribuição de tempos de transientes.

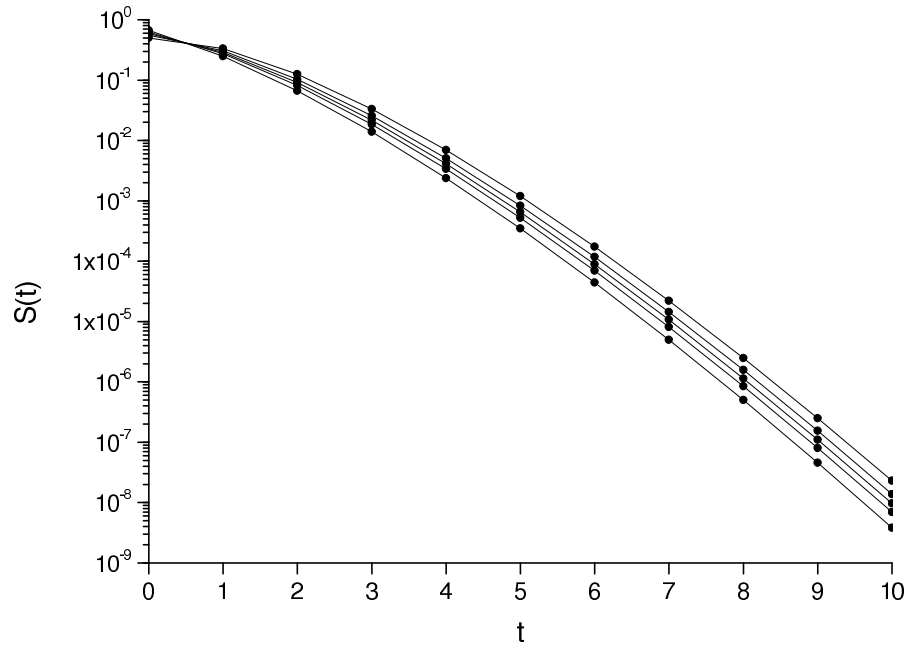


Figura 14: Efeito da dimensionalidade sobre a distribuição de transientes. De baixo para cima, as curvas referem-se a $d = 1, 2, 3, 5$ e ∞ . A distribuição é discreta; as linhas contínuas servem apenas para facilitar a visualização.

6.3 Distribuição Acumulada

A distribuição acumulada pode ser obtida de maneira idêntica aos Capítulos anteriores:

$$\begin{aligned}
 S(0) &= 1 - q(1) = 1 - q(1) \\
 S(1) &= q(1)[1 - q(2)] = q(1) - q(1)q(2) \\
 S(2) &= q(1)q(2)[1 - q(3)] = q(1)q(2) - q(1)q(2)q(3) \\
 S(3) &= q(1)q(2)q(3)[1 - q(4)] = q(1)q(2)q(3) - q(1)q(2)q(3)q(4) \\
 &\vdots \\
 S(t) &= q(1)q(2) \cdots q(t)[1 - q(t+1)] = q(1)q(2) \cdots q(t) - q(1)q(2) \cdots q(t+1)
 \end{aligned}$$

Somando o primeiro e o terceiro membros destas equações, obtemos:

$$\begin{aligned}
 F_{1,d}^{(\infty)}(t) &= \sum_{k=0}^t S_{1,d}^{(\infty)}(k) = 1 - \prod_{j=1}^{t+1} q_{1,d}^{(\infty)}(j) = 1 - \prod_{j=1}^{t+1} \frac{1}{j + I_d^{-1}} \\
 &= 1 - \frac{\Gamma(1 + I_d^{-1})}{\Gamma(t + 2 + I_d^{-1})}.
 \end{aligned}$$

A partir da distribuição acumulada, é fácil verificar a condição de normalização:

$$\sum_{k=0}^{\infty} S_{1,d}^{(\infty)}(k) = 1 - \prod_{j=1}^{\infty} q(j) = 1 - 0 = 1 .$$

O valor médio pode ser determinado de forma análoga:

$$\begin{aligned} 0 \cdot S(0) &= 0\{1 - q(1)\} = 0 \\ 1 \cdot S(1) &= 1\{q(1)[1 - q(2)]\} = q(1) - q(1)q(2) \\ 2 \cdot S(2) &= 2\{q(1)q(2)[1 - q(3)]\} = 2q(1)q(2) - 2q(1)q(2)q(3) \\ 3 \cdot S(3) &= 3\{q(1)q(2)q(3)[1 - q(4)]\} = 3q(1)q(2)q(3) - 3q(1)q(2)q(3)q(4) \\ &\vdots \\ t \cdot S(t) &= t\{q(1)q(2) \cdots q(t)[1 - q(t+1)]\} = tq(1)q(2) \cdots q(t) - tq(1)q(2) \cdots q(t+1) . \end{aligned}$$

Assim:

$$\bar{t} = \sum_{t=0}^{\infty} t \cdot S_{1,d}^{(\infty)}(t) = \sum_{t=1}^{\infty} \prod_{j=1}^t q_{1,d}^{(\infty)}(j) = e \left[\Gamma(1 + I_d^{-1}) - \Gamma(1 + I_d^{-1}, 1) \right] ,$$

onde $\Gamma(a, b)$ é a função gama incompleta não-normalizada complementar definida pela Eq. 2.3.

6.4 Validação Numérica

As Tabelas 15, 16, 17, 18 e 19 do Apêndice B comparam os resultados analíticos, calculados a partir da Eq. 6.1, com resultados numéricos, obtidos a partir de simulações $d = 2, 3, 5, 8, 12$, respectivamente, sobre $M = 1000$ mapas distintos com $N = 10000$ pontos por mapa. Deve-se observar que parte da diferença entre os resultados se deve ao efeito de tamanho finito.

Como nos Capítulos precedentes, os gráficos referentes a estes valores foram omitidos, já que as curvas referentes aos resultados analíticos e numéricos estavam praticamente sobrepostas, impossibilitando a distinção.

6.5 Conclusão

Mesmo para sistemas bidimensionais no limite termodinâmico, a formulação de uma expressão para a distribuição de tempos de transientes apresentou vários obstáculos, pois a região de vizinhança a ser explorada pelo turista pode assumir as mais variadas formas

para cada passo da caminhada.

Como os resultados analíticos obtidos para as distribuições limites dos Capítulos precedentes apresentaram grande regularidade na análise da probabilidade de subsistência, em analogia à distribuição geométrica, supomos que tal regularidade era inerente aos sistemas com dimensionalidades arbitrárias.

Por isso, iniciamos este Capítulo obtendo de forma empírica a probabilidade de subsistência a cada passo da caminhada. Nesta generalização, a dimensionalidade do meio foi parametrizada através da grandeza I_d . A partir das probabilidades de subsistência e de captura foi possível construir uma expressão analítica fechada para a distribuição de tempos de transiente. A seguir determinamos a distribuição acumulada, verificamos a condição de normalização e obtivemos o valor médio. Os resultados genéricos obtidos neste Capítulo concordaram analiticamente com os resultados obtidos para o modelo de distâncias aleatórias e para o modelo unidimensional.

Apesar dos resultados obtidos neste Capítulo terem sido baseados numa conjectura, simulações numéricas confirmaram sua validade.

7 *Distribuição Conjunta no Modelo de Mapeamento Aleatório*

No modelo de distâncias aleatórias (*random link*) apresentado no Capítulo 4, as distâncias entre os sítios foram consideradas variáveis independentes, mas a simetria $D_{i,j} = D_{j,i}$ entre as distâncias de ida e volta foi preservada. Porém, pode-se considerar um modelo de distâncias aleatórias *assimétricas*, no qual a distância de ida $D_{i,j}$ não é necessariamente igual à distância de volta $D_{j,i}$. Esta desigualdade se manifesta, por exemplo, numa cidade com avenidas de mão única, na qual o caminho de ida geralmente difere do caminho de volta. Dessa forma, as “distâncias” $D_{i,j}$ do modelo passam a representar o *comprimento do percurso* (via terrestre) entre dois pontos da cidade e não a *distância física* (em linha reta) entre estes pontos. Neste modelo, o caso $\mu = 0$ corresponde ao turista preguiçoso, como nos modelos anteriores. Entretanto, para $\mu = 1$ observa-se um comportamento bem diferente: a trajetória pode apresentar atratores com os mais diversos períodos e a distribuição de tempos de transiente diverge no limite termodinâmico.

Adicionalmente, pode-se também eliminar a restrição $D_{i,i} = 0, \forall i$, fazendo com que a distância de um sítio a ele mesmo possa ser não-nula. Obtem-se, dessa forma, um modelo de distâncias aleatórias totalmente descorrelacionadas. Novamente, as “distâncias” do modelo perdem o significado de *distância física* e podem representar, por exemplo, um *custo* para o caminhante permanecer num dado sítio. Este modelo é equivalente ao modelo de mapeamento aleatório (*random map*) estudado por Derrida e Flyvbjerg [12, 13] e será o objeto de estudo deste Capítulo. No modelo proposto por estes pesquisadores, a construção do mapa consiste em associar a cada um dos N sítios um sucessor, escolhido ao acaso; e a lei que rege a caminhada impõe que, a cada passo, se vá para sucessor do sítio atual. Eventualmente um sítio pode ser seu próprio sucessor.

Enfatiza-se que a grandeza relevante no processo é o número de sítios explorados pelo turista, ou seja, a soma do tempo de transiente com o período do atrator.

O mapeamento aleatório de Derrida-Flyvbjerg é uma aproximação de campo médio para as redes de Kauffman [10]. Mesmo para $\mu = 0$ e $\mu = 1$ o modelo apresenta uma distribuição de períodos não trivial. Este modelo pode ser aplicado em situações que não possuam o conceito de distância, e as ligações podem ser representadas por um grafo orientado.

7.1 Distribuição Conjunta de Tempos de Transientes e Períodos dos Atratores

No modelo de mapeamento aleatório, ao contrário dos modelos anteriores, mesmo com $\mu = 0$ é possível obter atratores com períodos que vão de 1 a N . Portanto, a descrição completa da caminhada requer uma distribuição conjunta dos tempos de transiente e período dos atratores.

Considere que o turista parta de um sítio s_1 . A seguir, analisamos as probabilidades do turista percorrer uma trajetória com tempo de transiente t e terminar num atrator de período p .

7.1.1 Período Unitário

Para que a caminhada tenha um transiente $t = 0$ e um período $p = 1$ (ou seja, consista de um único ponto), o sítio mais próximo de s_1 deve ser o próprio s_1 , portanto a probabilidade vale simplesmente

$$S_{0,rm}^{(N)}(0, 1) = \frac{1}{N}.$$

pois esta é a probabilidade do turista permanecer no sítio s_1 no primeiro passo.

Para se obter um transiente $t = 1$ e um período $p = 1$, o turista deve ir para um sítio s_2 qualquer entre os $N - 1$ restantes, e no próximo passo permanecer no sítio s_2 . Daí:

$$S_{0,rm}^{(N)}(1, 1) = \frac{N - 1}{N} \cdot \frac{1}{N}.$$

Para um transiente $t = 2$ e um período $p = 1$, o turista deve ir para um sítio s_2 qualquer entre os $N - 1$ restantes, no próximo passo ir para um sítio s_3 entre os $N - 2$ restantes, e no passo seguinte permanecer no sítio s_3 . Assim:

$$S_{0,rm}^{(N)}(2, 1) = \frac{N - 1}{N} \cdot \frac{N - 2}{N} \cdot \frac{1}{N}.$$

Dessa forma, a distribuição marginal dos tempos de transiente para períodos $p = 1$ é

$$S_{0,rm}^{(N)}(t, 1) = \frac{N-1}{N} \cdot \frac{N-2}{N} \cdots \frac{N-t}{N} \cdot \frac{1}{N}.$$

7.1.2 Período Duplo

Para se obter um transiente $t = 0$ e um período $p = 2$, o turista deve ir para um sítio s_2 qualquer entre os $N - 1$ restantes, e no próximo passo retornar ao sítio s_1 . Então:

$$S_{0,rm}^{(N)}(0, 2) = \frac{N-1}{N} \cdot \frac{1}{N}.$$

Para um transiente $t = 1$ e um período $p = 2$, o turista deve ir para um sítio s_2 qualquer entre os $N - 1$ restantes, no próximo passo ir para um sítio s_3 entre os $N - 2$ restantes, e em seguida retornar ao sítio s_2 . Assim:

$$S_{0,rm}^{(N)}(1, 2) = \frac{N-1}{N} \cdot \frac{N-2}{N} \cdot \frac{1}{N}.$$

Para se obter $t = 2$ e $p = 2$, o turista deve ir para um sítio s_2 qualquer entre os $N - 1$ restantes, no passo seguinte ir para um sítio s_3 entre os $N - 2$ restantes, no próximo passo para um sítio s_4 entre os $N - 3$ restantes, e finalmente retornar ao sítio s_3 . Dessa forma:

$$S_{0,rm}^{(N)}(2, 2) = \frac{N-1}{N} \cdot \frac{N-2}{N} \cdot \frac{N-3}{N} \cdot \frac{1}{N}.$$

Assim, a distribuição marginal dos tempos de transiente para períodos $p = 2$ é

$$S_{0,rm}^{(N)}(t, 1) = \frac{N-1}{N} \cdot \frac{N-2}{N} \cdots \frac{N-t}{N} \cdot \frac{N-t-1}{N} \cdot \frac{1}{N}.$$

7.1.3 Período Arbitrário

Generalizando este procedimento para um período p arbitrário, obtêm-se os valores de $S_{0,rm}^{(N)}(t, p)$ ilustrados na Tabela 6. Esta é uma matriz de ordem N simétrica e triangular, pois todos os elementos abaixo da diagonal secundária são nulos.

Com uma simples inspeção nos valores da Tabela 6 pode-se concluir que a distribuição conjunta dos tempos de transiente e períodos dos atratores vale

$$S_{0,rm}^{(N)}(t, p) = \frac{1}{N} \cdot \prod_{j=1}^{t+p-1} \frac{N-j}{N} = \frac{\Gamma(N)}{\Gamma(N-t-p+1)N^{t+p}}. \quad (7.1)$$

p	t=0	t=1	t=2	t=3
1	$\frac{1}{N}$	$\frac{N-1}{N} \frac{1}{N}$	$\frac{N-1}{N} \frac{N-2}{N} \frac{1}{N}$	$\frac{N-1}{N} \frac{N-2}{N} \frac{N-3}{N} \frac{1}{N}$
2	$\frac{N-1}{N} \frac{1}{N}$	$\frac{N-1}{N} \frac{N-2}{N} \frac{1}{N}$	$\frac{N-1}{N} \frac{N-2}{N} \frac{N-3}{N} \frac{1}{N}$	$\frac{N-1}{N} \frac{N-2}{N} \frac{N-3}{N} \frac{N-4}{N} \frac{1}{N}$
3	$\frac{N-1}{N} \frac{N-2}{N} \frac{1}{N}$	$\frac{N-1}{N} \frac{N-2}{N} \frac{N-3}{N} \frac{1}{N}$	$\frac{N-1}{N} \frac{N-2}{N} \frac{N-3}{N} \frac{N-4}{N} \frac{1}{N}$	$\frac{N-1}{N} \frac{N-2}{N} \frac{N-3}{N} \frac{N-4}{N} \frac{N-5}{N} \frac{1}{N}$
4	$\frac{N-1}{N} \frac{N-2}{N} \frac{N-3}{N} \frac{1}{N}$	$\frac{N-1}{N} \frac{N-2}{N} \frac{N-3}{N} \frac{N-4}{N} \frac{1}{N}$	$\frac{N-1}{N} \frac{N-2}{N} \frac{N-3}{N} \frac{N-4}{N} \frac{N-5}{N} \frac{1}{N}$	$\frac{N-1}{N} \frac{N-2}{N} \frac{N-3}{N} \frac{N-4}{N} \frac{N-5}{N} \frac{N-6}{N} \frac{1}{N}$

Tabela 6: Distribuição conjunta de transientes e períodos. Observa-se que a tabela é simétrica e que a grandeza relevante é o número de sítios explorados $n_e = t + p$.

A partir desta expressão, pode-se obter a probabilidade marginal da caminhada levar o turista a um atrator de período p . Basta observar que a trajetória deve ter um transiente t entre os limites 0 e $N - p$. Assim:

$$S_{0,rm}^{(N)}(p) = \sum_{t=0}^{N-p} S_{0,rm}^{(N)}(t, p) = \sum_{j=p}^N \frac{\Gamma(N)}{\Gamma(N-j+1)N^j}. \quad (7.2)$$

Este resultado está de acordo com as Referências [11, 12], onde podemos encontrar uma expressão para o limite $N \gg 1$:

$$S_{0,rm}^{(N)}(p) = \frac{1}{\sqrt{N}} \int_{p/\sqrt{N}}^{\infty} dy e^{-y^2/2} = \sqrt{\frac{\pi}{2N}} \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{p}{\sqrt{2N}}\right) \quad (7.3)$$

e os valores da média

$$\bar{p} = \sqrt{\frac{\pi N}{8}}$$

e da variância

$$\sigma_p^2 = \left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{8}\right) \cdot N.$$

Convém observar que a simetria encontrada na Tabela 6 implica a igualdade

$$S_{0,rm}^{(N)}(p) = S_{0,rm}^{(N)}(t - 1),$$

ou seja, as distribuições marginais para o período p e o transiente t são idênticas, apenas estão deslocadas de uma unidade. Portanto, as Eqs. 7.2 e 7.3 continuam válidas se substituirmos p por $t - 1$.

Usando a Eq. 2.4, observa-se que para $p^2/(2N) \gg 1$ pode-se aproximar a Eq. 7.3 por

$$S_{0,rm}^{(N)}(p) = \sqrt{\frac{\pi}{2N}} \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{p}{\sqrt{2N}}\right) \approx \frac{e^{-p^2/(2N)}}{p},$$

e quando $p \ll \sqrt{2N}$ têm-se que $S_{0,rm}^{(N)}(p) \approx p^{-1}$, que é independente do tamanho N do sistema.

Em função do número de sítios explorados

$$n_e = t + p,$$

a Eq. 7.1 se torna:

$$S_{0,rm}^{(N)}(n_e) = \frac{n_e \Gamma(N)}{\Gamma(N - n_e + 1) N^{n_e}}, \quad n_e = 1, 2, \dots, N. \quad (7.4)$$

Esta distribuição é uma espécie de “distribuição diagonal secundária”. A Fig. 15 mostra as distribuições do número de sítios explorados n_e para $N = 1000, 2000, 4000, 8000, 16000$ e 32000 pontos.

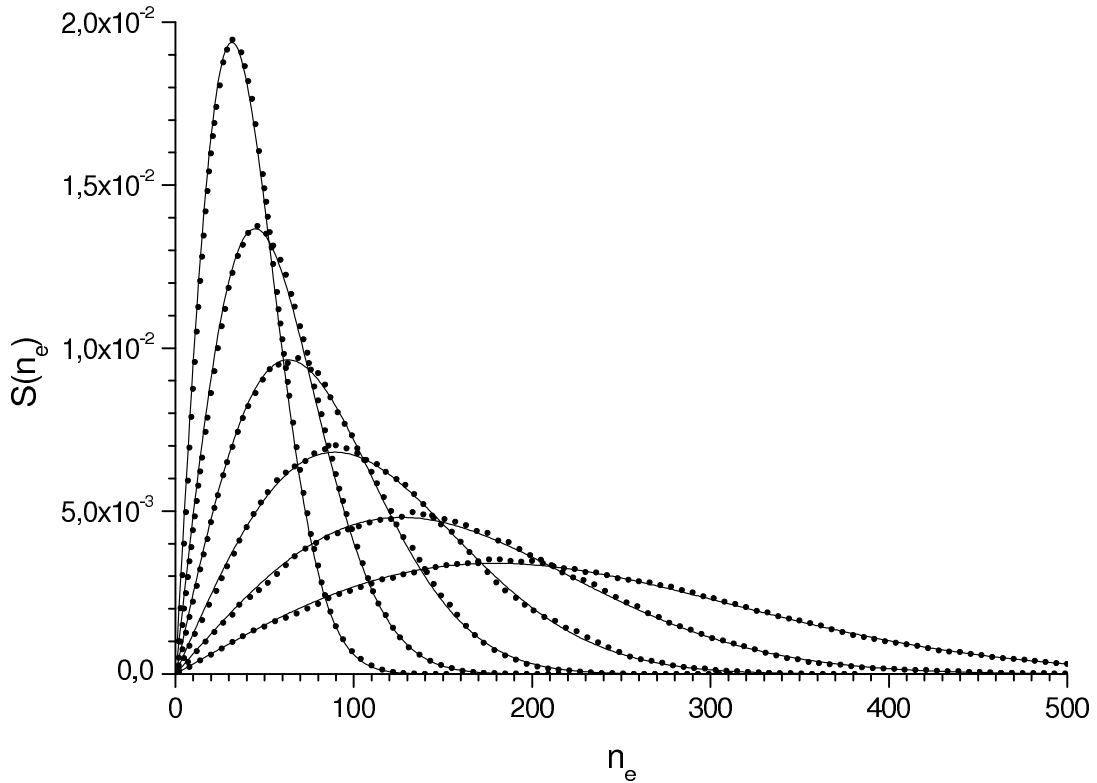


Figura 15: Distribuição do número de sítios explorados. De cima para baixo, as curvas referem-se respectivamente a $N = 1000, 2000, 4000, 8000, 16000$ e 32000 pontos por mapa. Os pontos se referem a resultados experimentais. À medida que N aumenta a distribuição se torna mais dispersa.

Observa-se aqui a forte influência da grandeza N na forma da distribuição, que diverge no limite termodinâmico.

7.2 Probabilidade de Exploração

A analogia que temos feito à distribuição geométrica também pode ser aplicada ao modelo de mapeamento aleatório. Porém, adotaremos como fracasso a exploração de um novo sítio e como sucesso a revisita a um sítio. Considere que o turista parta do sítio s_1 . Para que turista explore o mapa (visite um novo sítio) no primeiro passo, é necessário que o sítio s_1 não esteja conectado a ele mesmo, mas a algum dos $N - 1$ sítios restantes. Assim a probabilidade de exploração no primeiro passo vale

$$q_{0,rm}^{(N)}(1) = \frac{N - 1}{N}.$$

O turista vai então para o sítio s_2 . Para que ele explore um novo sítio no segundo passo, o sítio s_2 não deve estar conectado a si mesmo e nem ao sítio s_1 , mas a algum dos $N - 2$ sítios restantes. Portanto:

$$q_{0,rm}^{(N)}(2) = \frac{N - 2}{N}.$$

Este raciocínio pode ser generalizado para um passo $j \leq N$ arbitrário:

$$q_{0,rm}^{(N)}(j) = \frac{N - j}{N}.$$

Assim, a Eq. 7.4 pode ser escrita na forma

$$S_{0,rm}^{(N)}(n_e) = p_{0,rm}^{(N)}(n_e) \cdot \prod_{j=1}^{n_e-1} q_{0,rm}^{(N)}(j), \quad (7.5)$$

onde

$$p_{0,rm}^{(N)}(j) = 1 - q_{0,rm}^{(N)}(j) = \frac{j}{N}$$

representa a probabilidade de revisita no passo j . A verificação da equivalência entre as Eqs. 7.4 e 7.5 é imediata. Pode-se observar que a probabilidade de exploração diminui em progressão aritmética a cada passo da trajetória, diferentemente dos modelos anteriores, nos quais a probabilidade de subsistência diminuía em progressão harmônica. Outra diferença notável é que, no limite termodinâmico, a probabilidade de exploração é unitária. Dessa forma, a trajetória pode ter um tempo de transiente infinito, o que caracteriza o caos.

7.3 Distribuição Acumulada

A distribuição acumulada para o número de sítios explorados n_e pode ser obtida de maneira idêntica aos modelos anteriores.

$$\begin{aligned}
 S(1) &= 1 - q(1) &= 1 - q(1) \\
 S(2) &= q(1)[1 - q(2)] &= q(1) - q(1)q(2) \\
 S(3) &= q(1)q(2)[1 - q(3)] &= q(1)q(2) - q(1)q(2)q(3) \\
 S(4) &= q(1)q(2)q(3)[1 - q(4)] &= q(1)q(2)q(3) - q(1)q(2)q(3)q(4) \\
 &\vdots &\vdots \\
 S(n_e) &= q(1)q(2) \cdots q(n_e - 1)[1 - q(n_e)] &= q(1)q(2) \cdots q(n_e - 1) - q(1)q(2) \cdots q(n_e)
 \end{aligned}$$

Somando o primeiro e o terceiro membros destas equações, obtemos:

$$\begin{aligned}
 F_{0,rm}^{(N)}(n_e) &= \sum_{k=1}^{n_e} S_{0,rm}^{(N)}(k) = 1 - \prod_{j=1}^{n_e} q_{0,rm}^{(N)}(j) = 1 - \prod_{j=1}^{n_e} \frac{N-j}{N} \\
 &= 1 - \frac{\Gamma(N)}{\Gamma(N - n_e)N^{n_e}} .
 \end{aligned}$$

Através da distribuição acumulada, é fácil verificar a condição de normalização:

$$\sum_{n_e=1}^N S_{0,rm}^{(N)}(n_e) = 1 - \prod_{j=1}^N \frac{N-j}{N} = 1 - 0 = 1 .$$

7.4 Validação Numérica

A Tabela 20 do Apêndice B compara os valores obtidos a partir da Eq. 7.4 com os resultados de uma simulação realizada sobre $M = 10000000$ mapas no modelo de mapeamento aleatório com $N = 20$ pontos por mapa. O gráfico resultante dos valores ali contidos não permitiu a distinção entre as curvas e foi, por isso, omitido.

7.5 Conclusão

O rompimento da simetria $D_{i,j} = D_{j,i}$ entre as distâncias de ida e volta gerou o modelo de distâncias assimétricas, com características bem diferentes dos modelos anteriores. Neste Capítulo consideramos uma variante deste modelo, na qual a restrição $D_{i,i} = 0, \forall i$ também foi eliminada. Obtivemos, assim, o modelo mais descorrelacionado possível, que se mostrou equivalente ao modelo de mapeamento aleatório estudado por

Derrida e Flyvbjerg, uma aproximação de campo médio para as redes de Kauffman.

Iniciamos o Capítulo determinando a distribuição conjunta dos tempos de transientes e período dos atratores para uma caminhada do turista com $\mu = 0$ sobre este modelo. A distribuição marginal para os períodos concordou com os resultados já obtidos em trabalhos anteriores. Também mostramos a equivalência entre as distribuições marginais dos tempos de transientes e período dos atratores. Adicionalmente, obtivemos a distribuição do número de sítios $n_e = t + p$ explorados na caminhada. Observamos que esta distribuição diverge no limite termodinâmico.

Como nos modelos anteriores, estabelecemos uma analogia com a distribuição geométrica, porém substituímos a captura do turista pela revisita um sítio e a subsistência pela exploração de um novo sítio. A expressão obtida para a probabilidade de exploração revelou o caos no limite $N \gg 1$. Esta analogia com a distribuição geométrica também foi útil na obtenção da distribuição acumulada e na verificação da condição de normalização. A re-obtenção dos resultados de Derrida e Flyvbjerg pelas probabilidades de exploração e de revisita valida este novo procedimento analítico.

Por fim, validamos numericamente a distribuição encontrada para o número de sítios explorados. Utilizamos um mapa com apenas $N = 20$ pontos, pois para valores grandes de N a distribuição se apresenta em tabelas demasiadamente longas.

8 *Conclusão*

Nosso trabalho concentrou-se na determinação analítica das distribuições conjuntas de tempos de transiente e período de atratores no problema da caminhada determinista do turista sem memória. Para este problema, a distribuição de períodos é trivial. Porém a procura pela forma analítica da distribuição de transientes nos levou a criar métodos próprios e trouxe resultados originais.

No Capítulo 2 descrevemos o modelo e destacamos seus aspectos relevantes: a memória, o efeito de borda e a dimensionalidade do meio. Definimos algumas funções especiais que foram úteis ao longo do texto. A discussão sobre probabilidades de vizinhança em ambientes poissônicos nos levou à variável I_d , que se tornou a grandeza relevante na parametrização da dimensionalidade do meio.

Em seguida, apresentamos o modelo de distâncias aleatórias como limite de alta dimensionalidade para espaços euclidianos e abordamos a questão raramente mencionada da distribuição das distâncias neste modelo. Também apresentamos o modelo de mapeamento aleatório como caso limite para as redes de Kauffman.

No Capítulo 3 descrevemos os detalhes da implementação do programa de simulação numérica e destacamos as melhorias realizadas em relação à versão anterior. Também mencionamos as melhorias que ainda podem ser feitas.

No Capítulo 4 iniciamos nossa análise pelo modelo de distâncias aleatórias. A independência estatística inerente às distâncias entre seus pontos possibilitou uma formulação do problema para mapas com tamanho finito. Apesar de terem sido necessárias muitas manipulações algébricas para a obtenção da distribuição de transientes, seu limite termodinâmico resultou numa expressão algébrica extremamente simples.

A partir da distribuição acumulada, foi possível obter uma forma recursiva para a distribuição de transientes, e então ficou claro que a probabilidade de subsistência não se mantinha constante ao longo da caminhada, mas decrescia harmonicamente em função do número de passos dados pelo turista. Esta probabilidade se apresentou sob forma de uma

expressão muito simples, o que nos levou a estabelecer uma analogia com a distribuição geométrica. Esta analogia permitiu, de imediato, verificar a condição de normalização para a distribuição de transientes em mapas com tamanho finito e obter o fator de correção para a probabilidade de subsistência nestes mapas.

O efeito de tamanho finito foi avaliado numericamente através do erro quadrático médio, que se revelou como uma lei de potência em função do número N de sítios.

No Capítulo 5 abordamos os sistemas unidimensionais. Iniciamos nossa demonstração pelo meio semi-infinito com o intuito de desenvolver uma base para a formulação do problema de interesse. Por se tratar de um ambiente poissônico, as distâncias entre sítios consecutivos seguem a distribuição exponencial. Portanto, utilizamos para o caso unidimensional a mesma formulação do modelo de distâncias aleatórias.

Como subproduto, obtivemos o limite termodinâmico da distribuição de transientes para um turista que parte da origem do meio semi-infinito. Neste caso, a distribuição obtida foi a mesma do modelo de distâncias aleatórias. Salientamos, entretanto, que para $\mu = 2$ estas distribuições são completamente diferentes.

Com uma simples modificação, conseguimos o resultado de interesse: o limite termodinâmico da distribuição para o meio infinito. A distribuição acumulada, a probabilidade de subsistência ao longo da caminhada e a analogia com a distribuição geométrica também foram determinadas, como no modelo de distâncias aleatórias.

Apesar dos esforços, não obtivemos resultado analítico algum para sistemas unidimensionais com tamanho finito. Porém, o impacto desta deficiência foi minimizado pelo fraco pronunciamento do efeito de tamanho finito que as simulações numéricas revelaram para estes sistemas.

No Capítulo 6 apresentamos argumentos que nos levaram a obter empiricamente o limite termodinâmico da distribuição de transientes em meios com dimensionalidade arbitrária. A probabilidade de subsistência foi o elemento-chave neste processo.

A comparação entre probabilidade de vizinhança de primeira ordem, fornecida pela fórmula de Cox, e as probabilidades de subsistência nos modelos já estudados nos permitiu inferir uma expressão muito simples para a probabilidade de subsistência em meios com dimensionalidade qualquer. A observação e manipulação dos resultados advindos de simulações numéricas exaustivas para $d = 3$ também nos auxiliaram nesta inferência. A grandeza I_d , introduzida no Capítulo 2, foi a variável que parametrizou a dimensionalidade do meio.

De posse da probabilidade de subsistência, a analogia com a distribuição geométrica nos permitiu obter uma expressão analítica fechada genérica para a distribuição de transientes em espaços euclidianos. Esta expressão concordou com os casos limites ($d = 1$ e $d \rightarrow \infty$) e foi validada numericamente.

No Capítulo 7 consideramos o modelo de mapeamento aleatório proposto por Derrida e Flyvbjerg. O resultado mais importante que obtivemos foi a distribuição conjunta dos tempos de transientes e período dos atratores para uma caminhada do turista com $\mu = 0$. A partir desta distribuição conjunta, a distribuição marginal para o período dos atratores pôde ser determinada e concordou com as Referências [11] e [12]. Também mostramos que as distribuições marginais para o transiente e para o período são idênticas e que estão deslocadas de uma unidade. A seguir determinamos a distribuição para o número de sítios explorados $n_e = t + p$, que se impôs como a variável relevante neste problema. Desta vez, na analogia que fizemos com a distribuição geométrica, substituímos a probabilidade de subsistência pela probabilidade de exploração. Esta analogia permitiu a verificação da condição de normalização e deixou claro que a distribuição diverge no limite termodinâmico.

Como objetivos para futuros trabalhos, ressaltamos que:

- melhorias podem ser realizadas no programa de simulação numérica,
- a obtenção da distribuição de transientes em sistemas unidimensionais com tamanho finito ainda requer uma formulação apropriada,
- para sistemas de dimensionalidades arbitrárias, até mesmo no limite termodinâmico a distribuição de transientes carece de uma demonstração,
- os métodos aqui desenvolvidos podem ser as ferramentas necessária à obtenção da distribuição conjunta do transiente e do período para caminhadas com $\mu \geq 2$,
- outras estatísticas devem ser exploradas, tais como bacias de atração e número de sítios por atrator,
- com esta nova implementação do programa numérico e com o aumento do poder do processamento dos computadores atuais é possível recalcular as distribuições marginais aumentando o número de sítios e melhorando a precisão estatística,
- uma nova interpretação do problema pode ser obtida se considerarmos que a memória é um atributo do meio (e não do caminhante), já que a grandeza μ representa o tempo necessário para a regeneração de um dado sítio.

APÊNDICE A – Distribuição Geométrica

Esta breve revisão foi baseada na Referência [23].

Um experimento que possui apenas duas possibilidades, denominadas genericamente “sucesso” e “fracasso”, é denominado prova de *Bernoulli*. Representa-se por p a probabilidade de ocorrência de sucesso e por $q = 1 - p$ a probabilidade de ocorrência de fracasso.

Seja o experimento que consiste em se repetir uma prova de Bernoulli tantas vezes quantas forem necessárias, até se obter o primeiro sucesso. Se as provas forem independentes e de mesma probabilidade p de sucesso, então o número de tentativas X será uma variável aleatória com *distribuição geométrica*, sendo imediato verificar que

$$P(X = j) = p \cdot q^{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots, \infty.$$

A média e a variância dessa distribuição valem

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \frac{1}{p}, \\ \sigma_X^2 &= \frac{q}{p^2}. \end{aligned}$$

A distribuição geométrica possui a propriedade de “não ter memória”, isto é, a probabilidade de que o número de provas até o primeiro sucesso seja $s + t$, sabendo-se que as s primeiras provas foram fracassos, é igual à probabilidade de o número de provas até o primeiro sucesso ser igual às t provas restantes, ou seja,

$$P(X = s + t | X > s) = P(X = t).$$

Uma adaptação da distribuição geométrica consiste em considerar que as probabilidades de ocorrência de sucesso e de fracasso não sejam constantes durante a realização

das provas, mas que sigam regras bem definidas

$$p(j) = f_p(j) \quad e \quad q(j) = f_q(j) ,$$

onde j representa o número ordinal da prova e $0 \leq f_p(j), f_q(j) \leq 1, \forall j$.

Com essa modificação, a distribuição de probabilidade para o número X de tentativas necessárias ao aparecimento do primeiro sucesso é dada por

$$P(X = t) = p(t) \cdot \prod_{j=1}^{t-1} q(j) , \quad t = 1, 2, \dots, \infty .$$

Nesta dissertação, a distribuição de tempos de transiente no limite termodinâmico pôde ser melhor compreendida e generalizada nos moldes desta “distribuição geométrica modificada”, pois a probabilidade $q_{\mu,d}^{(\infty)}(j)$ de subsistência no passo j de uma caminhada determinista do turista sem memória ($\mu = 1$) num meio desordenado d -dimensional pôde ser sintetizada numa única e simples expressão:

$$q_{1,d}^{(\infty)}(j) = \frac{1}{j + I_d^{-1}} .$$

APÊNDICE B – Tabelas de Resultado de Simulações Numéricas

Agrupamos neste Apêndice as tabelas referentes aos resultados das simulações numéricas realizadas com o intuito de validar os resultados analíticos obtidos nesta dissertação. Em todas elas, a coluna *analítico* se refere a valores obtidos através de expressões algébricas, ao passo que as colunas *média* e *erro-padrão* se referem aos valores advindos de simulações. Os valores do erro-padrão servem como parâmetros na avaliação das diferenças entre os resultados experimentais e os resultados teóricos.

t	Analítico	Média	Erro-padrão
0	$5,55556 \cdot 10^{-1}$	$5,55559 \cdot 10^{-1}$	$4,2 \cdot 10^{-6}$
1	$3,33333 \cdot 10^{-1}$	$3,33331 \cdot 10^{-1}$	$3,1 \cdot 10^{-6}$
2	$9,52381 \cdot 10^{-2}$	$9,52372 \cdot 10^{-2}$	$2,6 \cdot 10^{-6}$
3	$1,48148 \cdot 10^{-2}$	$1,48149 \cdot 10^{-2}$	$1,1 \cdot 10^{-6}$
4	$1,05820 \cdot 10^{-3}$	$1,05825 \cdot 10^{-3}$	$2,9 \cdot 10^{-7}$

Tabela 7: Simulação com $N = 6$ pontos sobre $M = 2048000000$ mapas distintos no modelo de distâncias aleatórias. Os valores da primeira coluna foram calculados a partir da Eq. 4.3.

t	Analítico	Média	Erro-padrão
0	$5,23810 \cdot 10^{-1}$	$5,23804 \cdot 10^{-1}$	$6,2 \cdot 10^{-6}$
1	$3,33333 \cdot 10^{-1}$	$3,33337 \cdot 10^{-1}$	$4,4 \cdot 10^{-6}$
2	$1,12782 \cdot 10^{-1}$	$1,12782 \cdot 10^{-1}$	$4,0 \cdot 10^{-6}$
3	$2,53968 \cdot 10^{-2}$	$2,53972 \cdot 10^{-2}$	$2,3 \cdot 10^{-6}$
4	$4,12797 \cdot 10^{-3}$	$4,12823 \cdot 10^{-3}$	$9,3 \cdot 10^{-7}$
5	$5,01253 \cdot 10^{-4}$	$5,01738 \cdot 10^{-4}$	$3,2 \cdot 10^{-7}$
6	$4,58663 \cdot 10^{-5}$	$4,59434 \cdot 10^{-5}$	$9,3 \cdot 10^{-8}$
7	$3,12016 \cdot 10^{-6}$	$3,12451 \cdot 10^{-6}$	$2,4 \cdot 10^{-8}$
8	$1,51208 \cdot 10^{-7}$	$1,50391 \cdot 10^{-7}$	$5,1 \cdot 10^{-9}$
9	$4,72751 \cdot 10^{-9}$	$5,04557 \cdot 10^{-9}$	$9,4 \cdot 10^{-10}$

Tabela 8: Simulação com $N = 12$ pontos sobre $M = 512\,000\,000$ mapas distintos no modelo de distâncias aleatórias. Os valores da primeira coluna foram calculados a partir da Eq. 4.3.

t	Analítico	Média	Erro-padrão
0	$5,10638 \cdot 10^{-1}$	$5,10636 \cdot 10^{-1}$	$8,7 \cdot 10^{-6}$
1	$3,33333 \cdot 10^{-1}$	$3,33335 \cdot 10^{-1}$	$6,2 \cdot 10^{-6}$
2	$1,19622 \cdot 10^{-1}$	$1,19618 \cdot 10^{-1}$	$5,7 \cdot 10^{-6}$
3	$2,97872 \cdot 10^{-2}$	$2,97890 \cdot 10^{-2}$	$3,5 \cdot 10^{-6}$
4	$5,64444 \cdot 10^{-3}$	$5,64606 \cdot 10^{-3}$	$1,6 \cdot 10^{-6}$
5	$8,55567 \cdot 10^{-4}$	$8,56241 \cdot 10^{-4}$	$6,0 \cdot 10^{-7}$
6	$1,07007 \cdot 10^{-4}$	$1,06915 \cdot 10^{-4}$	$2,1 \cdot 10^{-7}$
7	$1,12749 \cdot 10^{-5}$	$1,12906 \cdot 10^{-5}$	$6,6 \cdot 10^{-8}$
8	$1,01538 \cdot 10^{-6}$	$1,02656 \cdot 10^{-6}$	$2,0 \cdot 10^{-8}$
9	$7,89467 \cdot 10^{-8}$	$6,43750 \cdot 10^{-8}$	$4,8 \cdot 10^{-9}$
10	$5,33606 \cdot 10^{-9}$	$4,06250 \cdot 10^{-9}$	$1,4 \cdot 10^{-9}$

Tabela 9: Simulação com $N = 25$ pontos sobre $M = 128\,000\,000$ mapas distintos no modelo de distâncias aleatórias. Os valores da primeira coluna foram calculados a partir da Eq. 4.3.

t	Analítico	Média	Erro-padrão
0	$5,05155 \cdot 10^{-1}$	$5,05145 \cdot 10^{-1}$	$1,2 \cdot 10^{-5}$
1	$3,33333 \cdot 10^{-1}$	$3,33351 \cdot 10^{-1}$	$8,8 \cdot 10^{-6}$
2	$1,22409 \cdot 10^{-1}$	$1,22411 \cdot 10^{-1}$	$8,1 \cdot 10^{-6}$
3	$3,16151 \cdot 10^{-2}$	$3,16107 \cdot 10^{-2}$	$5,0 \cdot 10^{-6}$
4	$6,30692 \cdot 10^{-3}$	$6,30330 \cdot 10^{-3}$	$2,4 \cdot 10^{-6}$
5	$1,02318 \cdot 10^{-3}$	$1,02216 \cdot 10^{-3}$	$9,4 \cdot 10^{-7}$
6	$1,39498 \cdot 10^{-4}$	$1,39168 \cdot 10^{-4}$	$3,4 \cdot 10^{-7}$
7	$1,63534 \cdot 10^{-5}$	$1,63125 \cdot 10^{-5}$	$1,2 \cdot 10^{-7}$
8	$1,67643 \cdot 10^{-6}$	$1,71812 \cdot 10^{-6}$	$3,6 \cdot 10^{-8}$
9	$1,52232 \cdot 10^{-7}$	$1,53125 \cdot 10^{-7}$	$1,1 \cdot 10^{-8}$
10	$1,23705 \cdot 10^{-8}$	$1,18750 \cdot 10^{-8}$	$3,0 \cdot 10^{-9}$
11	$9,06948 \cdot 10^{-10}$	$1,25000 \cdot 10^{-9}$	$1,3 \cdot 10^{-9}$

Tabela 10: Simulação com $N = 50$ pontos sobre $M = 32\,000\,000$ mapas distintos no modelo de distâncias aleatórias. Os valores da primeira coluna foram calculados a partir da Eq. 4.3.

t	Analítico	Média	Erro-padrão
0	$5,02538 \cdot 10^{-1}$	$5,02553 \cdot 10^{-1}$	$1,8 \cdot 10^{-5}$
1	$3,33333 \cdot 10^{-1}$	$3,33326 \cdot 10^{-1}$	$1,3 \cdot 10^{-5}$
2	$1,23728 \cdot 10^{-1}$	$1,23736 \cdot 10^{-1}$	$1,2 \cdot 10^{-5}$
3	$3,24873 \cdot 10^{-2}$	$3,24747 \cdot 10^{-2}$	$7,2 \cdot 10^{-6}$
4	$6,62882 \cdot 10^{-3}$	$6,62632 \cdot 10^{-3}$	$3,5 \cdot 10^{-6}$
5	$1,10696 \cdot 10^{-3}$	$1,10600 \cdot 10^{-3}$	$1,4 \cdot 10^{-6}$
6	$1,56391 \cdot 10^{-4}$	$1,56716 \cdot 10^{-4}$	$5,2 \cdot 10^{-7}$
7	$1,91319 \cdot 10^{-5}$	$1,92763 \cdot 10^{-5}$	$1,8 \cdot 10^{-7}$
8	$2,06177 \cdot 10^{-6}$	$2,04375 \cdot 10^{-6}$	$5,7 \cdot 10^{-8}$
9	$1,98348 \cdot 10^{-7}$	$1,90000 \cdot 10^{-7}$	$1,7 \cdot 10^{-8}$
10	$1,72152 \cdot 10^{-8}$	$1,25000 \cdot 10^{-8}$	$4,3 \cdot 10^{-9}$
11	$1,35970 \cdot 10^{-9}$	$1,25000 \cdot 10^{-9}$	$1,3 \cdot 10^{-9}$

Tabela 11: Simulação com $N = 100$ pontos sobre $M = 8\,000\,000$ mapas distintos no modelo de distâncias aleatórias. Os valores da primeira coluna foram calculados a partir da Eq. 4.3.

t	Analítico	Média	Erro-padrão
0	$5,01259 \cdot 10^{-1}$	$5,01266 \cdot 10^{-1}$	$2,5 \cdot 10^{-5}$
1	$3,33333 \cdot 10^{-1}$	$3,33334 \cdot 10^{-1}$	$1,8 \cdot 10^{-5}$
2	$1,24369 \cdot 10^{-1}$	$1,24368 \cdot 10^{-1}$	$1,6 \cdot 10^{-5}$
3	$3,29135 \cdot 10^{-2}$	$3,29074 \cdot 10^{-2}$	$1,0 \cdot 10^{-5}$
4	$6,78741 \cdot 10^{-3}$	$6,78811 \cdot 10^{-3}$	$4,9 \cdot 10^{-6}$
5	$1,14876 \cdot 10^{-3}$	$1,14922 \cdot 10^{-3}$	$2,0 \cdot 10^{-6}$
6	$1,64964 \cdot 10^{-4}$	$1,64135 \cdot 10^{-4}$	$7,5 \cdot 10^{-7}$
7	$2,05730 \cdot 10^{-5}$	$2,04325 \cdot 10^{-5}$	$2,6 \cdot 10^{-7}$
8	$2,26700 \cdot 10^{-6}$	$2,24250 \cdot 10^{-6}$	$8,3 \cdot 10^{-8}$
9	$2,23693 \cdot 10^{-7}$	$2,22500 \cdot 10^{-7}$	$2,7 \cdot 10^{-8}$
10	$1,99769 \cdot 10^{-8}$	$3,00000 \cdot 10^{-8}$	$1,0 \cdot 10^{-8}$
11	$1,62874 \cdot 10^{-9}$	$2,50000 \cdot 10^{-9}$	$2,5 \cdot 10^{-9}$

Tabela 12: Simulação com $N = 200$ pontos sobre $M = 2\,000\,000$ mapas distintos no modelo de distâncias aleatórias. Os valores da primeira coluna foram calculados a partir da Eq. 4.3.

t	Analítico	Média	Erro-padrão
0	$5,0000 \cdot 10^{-1}$	$4,9993 \cdot 10^{-1}$	$1,0 \cdot 10^{-4}$
1	$3,3333 \cdot 10^{-1}$	$3,3327 \cdot 10^{-1}$	$9,4 \cdot 10^{-5}$
2	$1,2500 \cdot 10^{-1}$	$1,2509 \cdot 10^{-1}$	$6,6 \cdot 10^{-5}$
3	$3,3333 \cdot 10^{-2}$	$3,3369 \cdot 10^{-2}$	$3,6 \cdot 10^{-5}$
4	$6,9444 \cdot 10^{-3}$	$6,9408 \cdot 10^{-3}$	$1,7 \cdot 10^{-5}$
5	$1,1905 \cdot 10^{-3}$	$1,2027 \cdot 10^{-3}$	$6,9 \cdot 10^{-6}$
6	$1,7361 \cdot 10^{-4}$	$1,7552 \cdot 10^{-4}$	$2,6 \cdot 10^{-6}$
7	$2,2046 \cdot 10^{-5}$	$2,2640 \cdot 10^{-5}$	$9,5 \cdot 10^{-7}$
8	$2,4802 \cdot 10^{-6}$	$2,6800 \cdot 10^{-6}$	$3,3 \cdot 10^{-7}$
9	$2,5052 \cdot 10^{-7}$	$2,8000 \cdot 10^{-7}$	$1,1 \cdot 10^{-7}$

Tabela 13: Simulação com $N = 100$ pontos sobre $M = 25\,000\,000$ mapas distintos em $d = 1$ dimensão com condições abertas de contorno. O turista realizou apenas uma caminhada por mapa, partindo da origem. Os valores da primeira coluna foram calculados a partir da Eq. 5.2.

t	Analítico	Média	Erro-padrão
0	$6,66667 \cdot 10^{-1}$	$6,66672 \cdot 10^{-1}$	$8,4 \cdot 10^{-6}$
1	$2,50000 \cdot 10^{-1}$	$2,49998 \cdot 10^{-1}$	$5,6 \cdot 10^{-6}$
2	$6,66667 \cdot 10^{-2}$	$6,66628 \cdot 10^{-2}$	$4,4 \cdot 10^{-6}$
3	$1,38889 \cdot 10^{-2}$	$1,38891 \cdot 10^{-2}$	$2,3 \cdot 10^{-6}$
4	$2,38095 \cdot 10^{-3}$	$2,38034 \cdot 10^{-3}$	$9,7 \cdot 10^{-7}$
5	$3,47222 \cdot 10^{-4}$	$3,47917 \cdot 10^{-4}$	$3,7 \cdot 10^{-7}$
6	$4,40917 \cdot 10^{-5}$	$4,42340 \cdot 10^{-5}$	$1,3 \cdot 10^{-7}$
7	$4,96032 \cdot 10^{-6}$	$4,94600 \cdot 10^{-6}$	$4,4 \cdot 10^{-8}$
8	$5,01042 \cdot 10^{-7}$	$4,83600 \cdot 10^{-7}$	$1,4 \cdot 10^{-8}$
9	$4,59289 \cdot 10^{-8}$	$4,00000 \cdot 10^{-8}$	$4,0 \cdot 10^{-9}$
10	$3,85417 \cdot 10^{-9}$	$2,80000 \cdot 10^{-9}$	$1,1 \cdot 10^{-9}$
11	$2,98239 \cdot 10^{-10}$	$8,00000 \cdot 10^{-10}$	$5,7 \cdot 10^{-10}$

Tabela 14: Simulação com $N = 100$ pontos sobre $M = 25\,000\,000$ mapas distintos em $d = 1$ dimensão com condições periódicas de contorno. Os valores da primeira coluna foram calculados a partir da Eq. 5.3.

t	Analítico	Média	Erro-padrão
0	$6,2150 \cdot 10^{-1}$	$6,2104 \cdot 10^{-1}$	$1,5 \cdot 10^{-4}$
1	$2,7457 \cdot 10^{-1}$	$2,7566 \cdot 10^{-1}$	$9,6 \cdot 10^{-5}$
2	$8,1536 \cdot 10^{-2}$	$8,1204 \cdot 10^{-2}$	$8,1 \cdot 10^{-5}$
3	$1,8420 \cdot 10^{-2}$	$1,8209 \cdot 10^{-2}$	$4,4 \cdot 10^{-5}$
4	$3,3706 \cdot 10^{-3}$	$3,3085 \cdot 10^{-3}$	$1,9 \cdot 10^{-5}$
5	$5,1923 \cdot 10^{-4}$	$5,0770 \cdot 10^{-4}$	$7,6 \cdot 10^{-6}$
6	$6,9128 \cdot 10^{-5}$	$6,6700 \cdot 10^{-5}$	$2,7 \cdot 10^{-6}$
7	$8,1076 \cdot 10^{-6}$	$7,2000 \cdot 10^{-6}$	$8,7 \cdot 10^{-7}$
8	$8,5000 \cdot 10^{-7}$	$1,1000 \cdot 10^{-6}$	$3,3 \cdot 10^{-7}$
9	$8,0583 \cdot 10^{-8}$	$2,0000 \cdot 10^{-7}$	$1,4 \cdot 10^{-7}$

Tabela 15: Simulação com $N = 10\,000$ pontos sobre $M = 1\,000$ mapas distintos em $d = 2$ dimensões com condições periódicas de contorno. Os valores da primeira coluna foram calculados a partir da Eq. 6.1.

t	Analítico	Média	Erro-padrão
0	$5,9259 \cdot 10^{-1}$	$5,9248 \cdot 10^{-1}$	$1,5 \cdot 10^{-4}$
1	$2,8947 \cdot 10^{-1}$	$2,8971 \cdot 10^{-1}$	$1,0 \cdot 10^{-4}$
2	$9,1459 \cdot 10^{-2}$	$9,1233 \cdot 10^{-2}$	$8,4 \cdot 10^{-5}$
3	$2,1621 \cdot 10^{-2}$	$2,1661 \cdot 10^{-2}$	$4,9 \cdot 10^{-5}$
4	$4,1017 \cdot 10^{-3}$	$4,1438 \cdot 10^{-3}$	$2,3 \cdot 10^{-5}$
5	$6,5111 \cdot 10^{-4}$	$6,7100 \cdot 10^{-4}$	$9,1 \cdot 10^{-6}$
6	$8,8945 \cdot 10^{-5}$	$8,9200 \cdot 10^{-5}$	$3,2 \cdot 10^{-6}$
7	$1,0670 \cdot 10^{-5}$	$1,1800 \cdot 10^{-5}$	$1,1 \cdot 10^{-6}$
8	$1,1413 \cdot 10^{-6}$	$1,7000 \cdot 10^{-6}$	$4,6 \cdot 10^{-7}$

Tabela 16: Simulação com $N = 10\,000$ pontos sobre $M = 1\,000$ mapas distintos em $d = 3$ dimensões com condições periódicas de contorno. Os valores da primeira coluna foram calculados a partir da Eq. 6.1.

t	Analítico	Média	Erro-padrão
0	$5,5773 \cdot 10^{-1}$	$5,5765 \cdot 10^{-1}$	$1,5 \cdot 10^{-4}$
1	$3,0665 \cdot 10^{-1}$	$3,0579 \cdot 10^{-1}$	$9,9 \cdot 10^{-5}$
2	$1,0379 \cdot 10^{-1}$	$1,0394 \cdot 10^{-1}$	$8,7 \cdot 10^{-5}$
3	$2,5778 \cdot 10^{-2}$	$2,6255 \cdot 10^{-2}$	$5,6 \cdot 10^{-5}$
4	$5,0834 \cdot 10^{-3}$	$5,3256 \cdot 10^{-3}$	$2,5 \cdot 10^{-5}$
5	$8,3315 \cdot 10^{-4}$	$8,9810 \cdot 10^{-4}$	$1,1 \cdot 10^{-5}$
6	$1,1696 \cdot 10^{-4}$	$1,2750 \cdot 10^{-4}$	$4,0 \cdot 10^{-6}$
7	$1,4369 \cdot 10^{-5}$	$1,6800 \cdot 10^{-5}$	$1,5 \cdot 10^{-6}$
8	$1,5698 \cdot 10^{-6}$	$1,7000 \cdot 10^{-6}$	$4,1 \cdot 10^{-7}$
9	$1,5445 \cdot 10^{-7}$	$2,0000 \cdot 10^{-7}$	$1,4 \cdot 10^{-7}$

Tabela 17: Simulação com $N = 10\,000$ pontos sobre $M = 1\,000$ mapas distintos em $d = 5$ dimensões com condições periódicas de contorno. Os valores da primeira coluna foram calculados a partir da Eq. 6.1.

t	Analítico	Média	Erro-padrão
0	$5,3115 \cdot 10^{-1}$	$5,3108 \cdot 10^{-1}$	$1,6 \cdot 10^{-4}$
1	$3,1919 \cdot 10^{-1}$	$3,1798 \cdot 10^{-1}$	$1,1 \cdot 10^{-4}$
2	$1,1344 \cdot 10^{-1}$	$1,1391 \cdot 10^{-1}$	$9,7 \cdot 10^{-5}$
3	$2,9156 \cdot 10^{-2}$	$2,9692 \cdot 10^{-2}$	$5,8 \cdot 10^{-5}$
4	$5,9042 \cdot 10^{-3}$	$6,1160 \cdot 10^{-3}$	$2,9 \cdot 10^{-5}$
5	$9,8901 \cdot 10^{-4}$	$1,0544 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{-5}$
6	$1,4143 \cdot 10^{-4}$	$1,5170 \cdot 10^{-4}$	$4,4 \cdot 10^{-6}$
7	$1,7657 \cdot 10^{-5}$	$2,0100 \cdot 10^{-5}$	$1,6 \cdot 10^{-6}$
8	$1,9568 \cdot 10^{-6}$	$1,8000 \cdot 10^{-6}$	$4,2 \cdot 10^{-7}$
9	$1,9502 \cdot 10^{-7}$	$3,0000 \cdot 10^{-7}$	$2,2 \cdot 10^{-7}$

Tabela 18: Simulação com $N = 10\,000$ pontos sobre $M = 1\,000$ mapas distintos em $d = 8$ dimensões com condições periódicas de contorno. Os valores da primeira coluna foram calculados a partir da Eq. 6.1.

t	Analítico	Média	Erro-padrão
0	$5,1485 \cdot 10^{-1}$	$5,1506 \cdot 10^{-1}$	$1,5 \cdot 10^{-4}$
1	$3,2667 \cdot 10^{-1}$	$3,2550 \cdot 10^{-1}$	$1,0 \cdot 10^{-4}$
2	$1,1946 \cdot 10^{-1}$	$1,1983 \cdot 10^{-1}$	$1,0 \cdot 10^{-4}$
3	$3,1313 \cdot 10^{-2}$	$3,1736 \cdot 10^{-2}$	$6,3 \cdot 10^{-5}$
4	$6,4381 \cdot 10^{-3}$	$6,5736 \cdot 10^{-3}$	$3,1 \cdot 10^{-5}$
5	$1,0919 \cdot 10^{-3}$	$1,1117 \cdot 10^{-3}$	$1,3 \cdot 10^{-5}$
6	$1,5780 \cdot 10^{-4}$	$1,6630 \cdot 10^{-4}$	$4,6 \cdot 10^{-6}$
7	$1,9881 \cdot 10^{-5}$	$2,3600 \cdot 10^{-5}$	$1,8 \cdot 10^{-6}$
8	$2,2211 \cdot 10^{-6}$	$2,3000 \cdot 10^{-6}$	$6,4 \cdot 10^{-7}$
9	$2,2296 \cdot 10^{-7}$	$2,0000 \cdot 10^{-7}$	$1,4 \cdot 10^{-7}$
10	$2,0323 \cdot 10^{-8}$	$1,0000 \cdot 10^{-7}$	$1,0 \cdot 10^{-7}$

Tabela 19: Simulação com $N = 10\,000$ pontos sobre $M = 1\,000$ mapas distintos em $d = 12$ dimensões com condições periódicas de contorno. Os valores da primeira coluna foram calculados a partir da Eq. 6.1.

n_e	Analítico	Média	Erro-padrão
1	$5,0000 \cdot 10^{-2}$	$5,0019 \cdot 10^{-2}$	$8,3 \cdot 10^{-5}$
2	$9,5000 \cdot 10^{-2}$	$9,5022 \cdot 10^{-2}$	$1,3 \cdot 10^{-4}$
3	$1,2825 \cdot 10^{-1}$	$1,2834 \cdot 10^{-1}$	$1,7 \cdot 10^{-4}$
4	$1,4535 \cdot 10^{-1}$	$1,4543 \cdot 10^{-1}$	$1,9 \cdot 10^{-4}$
5	$1,4535 \cdot 10^{-1}$	$1,4535 \cdot 10^{-1}$	$1,9 \cdot 10^{-4}$
6	$1,3082 \cdot 10^{-1}$	$1,3080 \cdot 10^{-1}$	$1,8 \cdot 10^{-4}$
7	$1,0683 \cdot 10^{-1}$	$1,0678 \cdot 10^{-1}$	$1,6 \cdot 10^{-4}$
8	$7,9361 \cdot 10^{-2}$	$7,9284 \cdot 10^{-2}$	$1,4 \cdot 10^{-4}$
9	$5,3569 \cdot 10^{-2}$	$5,3546 \cdot 10^{-2}$	$1,1 \cdot 10^{-4}$
10	$3,2736 \cdot 10^{-2}$	$3,2711 \cdot 10^{-2}$	$8,5 \cdot 10^{-5}$
11	$1,8005 \cdot 10^{-2}$	$1,7995 \cdot 10^{-2}$	$6,1 \cdot 10^{-5}$
12	$8,8388 \cdot 10^{-3}$	$8,8378 \cdot 10^{-3}$	$4,2 \cdot 10^{-5}$
13	$3,8302 \cdot 10^{-3}$	$3,8282 \cdot 10^{-3}$	$2,7 \cdot 10^{-5}$
14	$1,4437 \cdot 10^{-3}$	$1,4416 \cdot 10^{-3}$	$1,6 \cdot 10^{-5}$
15	$4,6404 \cdot 10^{-4}$	$4,6432 \cdot 10^{-4}$	$8,9 \cdot 10^{-6}$
16	$1,2374 \cdot 10^{-4}$	$1,2240 \cdot 10^{-4}$	$4,3 \cdot 10^{-6}$
17	$2,6296 \cdot 10^{-5}$	$2,6410 \cdot 10^{-5}$	$2,1 \cdot 10^{-6}$
18	$4,1764 \cdot 10^{-6}$	$4,4000 \cdot 10^{-6}$	$8,8 \cdot 10^{-7}$
19	$4,4084 \cdot 10^{-7}$	$5,8000 \cdot 10^{-7}$	$5,2 \cdot 10^{-7}$
20	$2,3202 \cdot 10^{-8}$	$2,5000 \cdot 10^{-8}$	$4,1 \cdot 10^{-8}$

Tabela 20: Simulação $N = 20$ pontos sobre $M = 10\,000\,000$ mapas distintos no modelo de mapeamento aleatório. Os valores da primeira coluna foram calculados a partir da Eq. 7.4.

APÊNDICE C – Código-Fonte do Programa de Simulação Numérica

Neste capítulo, são listadas as rotinas do programa de simulação numérica utilizado na comprovação dos resultados analíticos obtidos.

C.1 Primeira Parte: Geração da Tabela de Vizinhança

A primeira parte do programa é responsável geração das tabelas de vizinhança. O programa principal `GeraTab` lê o arquivo de parâmetros e, de acordo com o modelo a ser simulado, passa esses parâmetros à subrotina `Euclides`, `RandLink` ou `RandMap`.

```

program GeraTab
  implicit none
  !parametros
  integer*4 m      !numero de mapas a serem gerados
  integer*4 n      !numero de sitios por mapa
  integer*2 mi     !memoria
  integer  semente !inicializa o gerador de numeros aleatorios
  integer  modelo  !0 = euclideano, 1 = random link, 2 = random map
  integer*2 dim    !dimensionalidade
  logical  cpc     !condicao periodica de contorno
  !variaveis locais
  character nome_arq !nome do arquivo de parametros
  integer*4 h      !indice de loop
  !le o arquivo de parametros
  write(*, *) 'nome do arquivo:'
  read(*, *) nome_arq

```

```
open(0, file=nome_arq//'.par')
read(0, *) m
read(0, *) n
read(0, *) mi
read(0, *) semente
read(0, *) modelo
if(modelo .eq. 0) then
  read(0, *) dim
  read(0, *) cpc
end if
close(0)
!processamento
if(mi .ge. n) then
  write(*, *) 'mi deve ser menor que n'
  stop
end if
open(1, file='.\mapa\\'//nome_arq//'.map')
do h = 1, m
  write(*, *) 'gerando mapa #', h
  select case(modelo)
    case(0)
      call Euclides(n, mi, semente, dim, cpc)
    case(1)
      call RandLink(n, mi, semente)
    case(2)
      call RandMap(n, mi, semente)
  end select
end do
close(1)
write(*, *) 'fim de execucao'
stop

end program GeraTab
```

C.1.1 Modelo Euclideano

Esta subrotina gera as tabelas de vizinhança para o modelo euclideano.

```

subroutine Euclides(n, mi, semente, dim, cpc)
  implicit none
  !variaveis de entrada
  integer*4 n      !numero de sitios
  integer*2 mi     !memoria
  integer  semente !inicializa gerador de numeros aleatorios
  integer*2 dim    !dimensionalidade
  logical  cpc     !condicao periodica de contorno
  !variaveis locais
  integer*4 i, j      !indices de loop
  integer*2 k         !indice de loop
  integer*4 sit_prox  !variavel auxiliar
  real      coord(1:n, 1:dim) !coord(sitio, dim) = coordenadas do sitio
  real      dist(1:n)    !dist(sitio) = distancia do sitio
  real      ran2         !gerador de numeros aleatorios
  real      dx, y, dim1, dim2, menor_dist !variaveis auxiliares
  !processamento
  dim1 = dim+1
  dim2 = dim+2
  !escolhe aleatoriamente as coordenadas
  do i = 1, n
    do k = 1, dim
      coord(i, k) = ran2(semente)
    end do
  end do
  do i = 1, n
    !constroi o vetor de distancias
    do j = 1, n
      if(j .eq. i) then
        dist(j) = dim2 !nao calcula a distancia do sitio j a ele mesmo
      else
        y = 0
        do k = 1, dim
          dx = abs(coord(i, k) - coord(j, k))
          if(cpc) dx = min(dx, 1-dx)
        end do
      end if
    end do
  end do
end subroutine

```

```

        y = y + dx*dx
    end do
    dist(j) = y
end if
end do
!constroi a matriz de vizinhanca
write(1, *) i !grava no arquivo o vizinho de ordem 0
do k = 1, mi
    menor_dist = dim1
    !determina o vizinho de ordem k
    do j = 1, n
        if(dist(j) .lt. menor_dist) then
            sit_prox = j
            menor_dist = dist(j)
        end if
    end do
    write(1, *) sit_prox
    dist(sit_prox) = dim2
end do
end do
return

end subroutine Euclides

```

C.1.2 Modelo de Distâncias Aleatórias

Esta subrotina gera as tabelas de vizinhança para o modelo de ligações aleatórias.

```

subroutine RandLink(n, mi, semente)
    implicit none
    !variaveis de entrada
    integer*4 n          !# de sitios
    integer*2 mi        !memoria
    integer  semente !inicializa gerador de #s aleatorios
    !variaveis locais
    integer*4 i, j      !indices de loop
    integer*2 k         !indice de loop
    integer*4 sit_prox  !variavel auxiliar
    real      dist(1:n, 1:n) !dist(sitio, sitio) = distancia entre os sitios
    real      ran2      !gerador de #s aleatorios

```



```

real      y, menor_dist  !variaveis auxiliares
!processamento
do i = 1, n
  dist(i, i) = 3  !distancias da diagonal da matriz
  !escolhe aleatoriamente as distancias
  do j = i+1, n
    y = ran2(semente)
    dist(i, j) = y
    dist(j, i) = y
  end do
  !constroi a matriz de vizinhanca
  write(1, *) i !grava no arquivo o vizinho de ordem 0
  do k = 1, mi
    menor_dist = 2
    !determina o vizinho de ordem k
    do j = 1, n
      if(dist(i, j) .lt. menor_dist) then
        sit_prox = j
        menor_dist = dist(i, j)
      end if
    end do
    write(1, *) sit_prox
    dist(i, sit_prox) = 3
  end do
end do
return

end subroutine RandLink

```

C.1.3 Modelo de Mapeamento Aleatório

Esta subrotina gera as tabelas de vizinhança para o modelo de mapeamento aleatório.

```

subroutine RandMap(n, mi, semente)
  implicit none
  !variaveis de entrada
  integer*4 n      !# de sitios
  integer*2 mi     !memoria
  integer  semente !inicializa gerador de #s aleatorios

```

```
!variaveis locais
integer*4 i, j      !indices de loop
integer*2 k        !indice de loop
integer*4 sit_prox  !variavel auxiliar
real          dist(1:n) !dist(sitio) = distancia entre os sitios
real          ran2    !gerador de #s aleatorios
real          menor_dist !variaveis auxiliares
!processamento
do i = 1, n
  !escolhe aleatoriamente as distancias
  do j = 1, n
    dist(j) = ran2(semente)
  end do
  !constroi a matriz de vizinhanca
  do k = 0, mi
    menor_dist = 2
    !determina o vizinho de ordem k
    do j = 1, n
      if(dist(j) .lt. menor_dist) then
        sit_prox = j
        menor_dist = dist(j)
      end if
    end do
    write(1, *) sit_prox
    dist(sit_prox) = 3
  end do
end do
return

end subroutine RandMap
```

C.2 Segunda Parte: Caminhada do Turista e Tratamento Estatístico

A segunda parte do programa lê as tabelas de vizinhança geradas pela primeira parte, realiza as caminhadas e calcula as estatísticas de interesse.

```
program Conjunta
  implicit none
  !parametros
  integer*4 m_g      !numero de mapas gerados
  integer*4 m        !numero de mapas a serem usados
  integer*4 n        !numero de sitios
  integer*2 mi_g     !memoria gerada
  integer*2 mi       !memoria usada
  integer  semente  !inicializa gerador de numeros aleatorios
  integer  modelo   !0 = euclideano, 1 = random link, 2 = random map
  integer*2 dim     !dimensionalidade
  logical  cpc      !condicao periodica de contorno
  !variaveis locais
  character nome_arq !nome do arquivo de parametros
  !leitura do arquivo de parametros
  write(*, *) 'nome do arquivo:'
  read(*, *) nome_arq
  open(0, file=nome_arq//'.par')
  read(0, *) m_g
  read(0, *) n
  read(0, *) mi_g
  read(0, *) semente
  read(0, *) modelo
  if(modelo .eq. 0) then
    read(0, *) dim
    read(0, *) cpc
  end if
  close(0)
  !solicitacao de parametros ao usuario
  write(*, *) 'numero de mapas gerados = ', m_g
  write(*, *) 'memoria gerada = ', mi_g
```

```

write(*, *) 'numero de mapas a serem usados:'
read(*, *) m
if(m .gt. m_g) then
    write(*, *) 'numero indisponivel de mapas'
    stop
end if
write(*, *) 'memoria a ser usada usada:'
read(*, *) mi
if(mi .gt. mi_g) then
    write(*, *) 'memoria indisponivel'
    stop
end if
!processamento
call Caminhada(nome_arq, m, n, mi_g, mi, semente, modelo, dim, cpc)
write(*, *) 'fim de execucao'
stop
end program Conjunta

```

```

subroutine Caminhada(nome_arq, m, n, mi_g, mi, semente, modelo, dim, cpc)
    implicit none
    !variaveis de entrada
    character nome_arq*1 !nome do arquivo de parametros
    integer*4 m          !numero de mapas a serem usados
    integer*4 n          !numero de sitios
    integer*2 mi_g      !memoria gerada
    integer*2 mi        !memoria a ser usada
    integer semente     !inicializa gerador de numeros aleatorios
    integer modelo      !0 = euclideano, 1 = random link, 2 = random map
    integer*2 dim       !dimensionalidade
    logical cpc        !condicao periodica de contorno
    !variaveis locais
    integer*4 viz(1:n, 0:mi) !viz(sitio, k) = k-esimo vizinho mais proximo
    integer*4 traj(1:n)    !traj(passo) = trajetoria
    integer*2 ult_vis(1:n) !ultima visita
    integer*2 tau          !memoria (tau = mi-1)

```

```
integer*2 tam_traj           !tamanho da trajetoria
integer*2 periodo           !tamanho do periodo de uma caminhada
integer*2 transiente        !tamanho do transiente de uma caminhada
integer*4 distr(0:n, mi+1:n) !distribuicao conjunta
integer*4 soma(0:n, mi+1:n) !somas das frequencias
integer*8 soma2(0:n, mi+1:n) !somas dos quadrados das frequencias
integer*4 h, i, j           !indices de loop
integer*2 k                 !indice de loop
integer*8 s                 !variavel auxiliar
integer*4 sitio_atual, prox_sit !variaveis auxiliares
integer*2 ult_visita, delta  !variaveis auxiliares
logical  entrou_num_atrat    !variavel auxiliar
real     media, erro        !media e erro-padrao
!processamento
tau = mi-1
do i = 0, 2*n
  do j = mi+1, 2*n
    soma(i, j) = 0
    soma2(i, j) = 0
  end do
end do
open(1, file='.\mapa\ \'//nome_arq//'.map')
do h = 1, m
  do i = 0, 2*n
    do j = mi+1, 2*n
      distr(i, j) = 0
    end do
  end do
  write(*, *) 'percorrendo mapa #', h
  !leitura do arquivo de mapa
  do i = 1, n
    do k = 0, mi_g
      read(1, *) sitio_atual
      if(k .le. mi) then
        viz(i, k) = sitio_atual
      end if
    end do
  end do
end do
!partida de cada sitio do mapa
```

```

do i = 1, n
  do j = 1, n
    traj(j) = 0
    ult_vis(j) = -n !nenhum sitio foi visitado ainda
  end do
  j = 1          ! +-----+
  traj(1) = i    ! | primeiro sitio da trajetoria |
  ult_vis(i) = 1 ! +-----+
  sitio_atual = i
  !percorre a trajetoria
do
  j = j+1
  !determina o proximo sitio
do k = 0, mi
  prox_sit = viz(sitio_atual, k)
  ult_visita = ult_vis(prox_sit)
  delta = j-ult_visita
  !verifica se prox_sit nao foi visitado nos ultimos mi passos
  if(delta .gt. mi) exit
end do
!vai para o proximo sitio
sitio_atual = prox_sit
traj(j) = sitio_atual
ult_vis(sitio_atual) = j
!verifica se esta' num atrator
if(ult_visita .gt. tau) then
  entrou_num_atrat = .true.
  do k = 1, tau
    if(traj(j-k) .ne. traj(ult_visita-k)) then
      entrou_num_atrat = .false.
      exit
    end if
  end do
  if(entrou_num_atrat) then
    !se estiver, termina a caminhada
    periodo = delta
    tam_traj = j
    exit
  end if
end if
end if

```

```
end do
!determina o tempo de transiente
transiente = 0
do k = tam_traj-periodo, 1, -1
  if(traj(k) .ne. traj(k+periodo)) then
    transiente = k
    exit
  end if
end do
!estatisticas de um mapa
distr(transiente, periodo) = distr(transiente, periodo) + 1
end do
!estatisticas de varios mapas
do i = 0, 2*n
  do j = mi+1, 2*n
    s = distr(i, j)
    soma(i, j) = soma(i, j) + s
    soma2(i, j) = soma2(i, j) + s*s
  end do
end do
end do
close(1)
!criacao do relatorio
open(2, file=nome_arq//'.rel')
write(2, *) '***** parametros *****'
write(2, *) '# de mapas:', m
write(2, *) '# de sitios:', n
write(2, *) '# memoria (mi):', mi
write(2, *) 'semente:', semente
select case(modelo)
  case(0)
    write(2, *) 'modelo: Euclides'
  case(1)
    write(2, *) 'modelo: Random Link'
  case(2)
    write(2, *) 'modelo: Random Map'
end select
if(modelo .eq. 0) then
  write(2, *) 'dimensionalidade:', dim
  write(2, *) 'condicao periodica de contorno:', cpc
```

```
end if
write(2, *)
write(2, *) 'distribuicao conjunta de transientes e periodos'
write(2, *)
write(2, *) ' t      p      media      erro-padrao'
write(2, *) '-----  -----  -----',
do i = 0, 2*n
  do j = mi+1, 2*n
    s = soma(i, j)
    !escreve no relatorio apenas as linhas com ocorrencias
    if(s .ne. 0) then
      media = real(s)/(n*m)
      erro = sqrt(abs(real(soma2(i, j))/(n**2*m) - media**2)/(m-1))
      write(2, fmt='(i3, i5, f20.15, f19.15)') i, j, media, erro
    end if
  end do
end do
end do
close(2)

end subroutine Caminhada
```


Referências

- [1] D. S. Fisher, “Random walks in random environments,” *Phys. Rev. A*, vol. 30, pp. 960–964, August 1984.
- [2] G. T. Barkema, P. Biswas, and H. van Beijeren, “Diffusion with random distribution of static traps,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 87, p. art. no. 170601, 22 October 2001.
- [3] G. F. Lima, A. S. Martinez, and O. Kinouchi, “Deterministic walks in random media,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 87, p. 010603, June 2001.
- [4] H. E. Stanley and S. V. Buldyrev, “Statistical physics - the salesman and the tourist,” *Nature (London)*, vol. 413, pp. 373–374, 27 September 2001.
- [5] O. Kinouchi, A. S. Martinez, G. F. Lima, G. M. Lourenço, and S. Risau-Gusman, “Deterministic walks in random networks: an application to thesaurus graphs,” *Physica A*, vol. 315, pp. 665–676, December 2002.
- [6] D. Boyer, O. Miramontes, G. Ramos-Fernández, J. L. Mateos, and G. Cocho, “Modeling the searching behavior of social monkeys,” *Physica A*, vol. 342, pp. 329–335, 2004.
- [7] S. Risau-Gusman, A. S. Martinez, and O. Kinouchi, “Escaping from cycles through a glass transition,” *Phys. Rev. E*, vol. 68, p. Art. No. 016104 Part 2, July 2003.
- [8] A. S. Martinez, O. Kinouchi, and S. Risau-Gusman, “Exploratory behavior, trap models and glass transitions,” *Phys. Rev. E*, vol. 69, p. Art. No. 017101 Part 2, January 2004.
- [9] O. Kinouchi, A. S. Martinez, G. F. Lima, and S. Risau-Gusman, “Comportamento exploratório do turista,” in *Tendências da Física Estatística no Brasil*, (São Paulo), pp. 171–174, Tânia Tomé, Editora Livraria da Física, 2003.
- [10] S. A. Kauffman, “Metabolic stability and epigenesis in randomly constructed genetic nets,” *J. Teor. Biol.*, vol. 22, p. 437, 1969.
- [11] G. F. de Lima, *Caminhadas determinísticas em meios desordenados: problema da caminhada do turista*. PhD thesis, Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto - SP, Junho 2002.
- [12] B. Derrida and H. Flyvbjerg, “The random map model - a disordered model with deterministic dynamics,” *Journal de Physique (Paris)*, vol. 48, pp. 971–978, June 1987.
- [13] B. Harris, “Probability-distributions related to random mappings,” *Ann. Math. Stat.*, vol. 31, no. 4, pp. 1045–1062, 1960.

-
- [14] M. Abramowitz and I. Stegun, eds., *Handbook of Mathematical Functions*. New York: Dover Publications, 1972.
- [15] T. F. Cox, “Reflexive nearest neighbours,” *Biometrics*, vol. 37, pp. 367–369, June 1981.
- [16] M. F. Dacey, “Proportion of reflexive n th-order neighbours in a spatial distribution,” *Geographical Analysis*, vol. 1, pp. 385–388, 1969.
- [17] P. J. Clark, “Grouping in spatial distributions,” *Science*, vol. 123, pp. 373–374, September 1956.
- [18] P. J. Clark and F. C. Evans, “On some aspects of spatial pattern in biological populations,” *Science*, vol. 121, pp. 397–398, March 1955.
- [19] M. M. and G. Parisi, “Mean-field equations for the matching and travelling salesman problem,” *Europhys. Lett.* 2, pp. 913–918, 12 1986.
- [20] A. G. Percus and O. C. Martin, “The stochastic traveling salesman problem: finite size scaling and the cavity prediction,” *J. Stat. Phys.*, vol. 94, pp. 739–758, March 1999.
- [21] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, and W. T. Vetterling, *Numerical Recipes: The Art of Science Computing*. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.
- [22] S. C. Chapman, G. Rowlands, and N. W. Watkins, “Extremum statistics: a framework for data analysis,” *Nonlinear Processes in Geophysics*, vol. 9, no. 5-6, pp. 409–418, 2002. cond-mat/0106015.
- [23] P. L. de Oliveira Costa Neto and M. Cymbalista, *Probabilidades*. São Paulo: Editora Edgard Blucher, 1974.