

Emílio Frari Galera

Física da psicofísica

RIBEIRÃO PRETO - SP

2019

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
FFCLRP - DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA APLICADA À  
MEDICINA E BIOLOGIA

Física da psicofísica

Emílio Frari Galera

Dissertação apresentada à Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto da USP, como parte das exigências para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de concentração: Física dos sistemas complexos.

Orientador: Osame Kinouchi Filho

RIBEIRÃO PRETO - SP

2019

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Galera, Emílio Frari

Física da psicofísica./ Emílio Frari Galera; orientador: Osame Kinouchi Filho. Ribeirão preto, 2019.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada à Medicina e Biologia) - Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto da Universidade de São Paulo.

1. sistemas críticos 2. psicofísica



# Agradecimentos

Primeiramente gostaria de agradecer o prof. Osame Kinouchi Filho por me receber como seu aluno, pela paciência, pelas ideias e conversas.

Aos meus pais e minha irmã pelo apoio financeiro e por sempre estarem presentes, principalmente nos momentos mais difíceis.

A minha esposa Tauana e meus filhos, Gael e Cora.

Gostaria de agradecer também ao prof. Alexandre Souto Martinez, Gilberto Nakamura, Guilherme Contesini, José Renato Alcarás e Maurício Schappo.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

*There are some oddities in the  
perspective with which we see the world.*

**Douglas Adams**

## Resumo

GALERA, E. F. **Física da psicofísica** 85 p. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto, Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto, 2019.

Interagimos com o ambiente e uns aos outros através de nossos sentidos. Os estímulos que carregam informações podem variar em ordens de magnitude e ainda assim, somos capazes de percebê-los e processá-los de forma automática, diferentemente de equipamentos eletrônicos, digitais ou analógicos, que necessitam de ajustes de escala para detectar estímulos em diversas ordens de grandeza. Por exemplo, conseguimos escutar desde o som de um alfinete caindo no chão quanto o motor de um avião a jato enquanto decola, sem precisarmos ajustar a escala de nossos ouvidos. De acordo com a Psicofísica, o que torna possível nossa flexibilidade ao lidar com alguns tipos de estímulos físicos é uma relação não linear entre o estímulo e nossa resposta, conhecida como lei de potência de Stevens. Estudamos, neste projeto, uma rede bidimensional em camadas de neurônios simplificados do tipo integra-dispara estocásticos. Para isso, partimos de uma análise de campo médio, validamos os resultados analíticos através de simulações do modelo em uma rede tipo grafo completo e em uma rede com topologia dinâmica (*annealed*). Em seguida, caracterizamos o comportamento do modelo em uma rede bidimensional medindo seus expoentes críticos relevantes. Mostramos que este sistema produz a Lei de Stevens da Psicofísica como um fenômeno emergente onde a resposta do sistema a estímulos externos é máxima e obedece uma lei de potência no ponto crítico de uma transição de fase. Assim, no espírito da Física Estatística, temos um modelo microscópico que explica uma lei macroscópica. Mostramos também a importância da topologia da rede e como a sua resposta melhora quando estendemos o modelo para duas camadas de elementos.

**Palavras-chave:** 1. sistemas críticos 2. psicofísica





## Abstract

GALERA, E. F. **Physics of psychophysics** 85 p. Dissertation (M.Sc) - Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto, Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto, 2019.

We interact between our self's and the environment through our senses. The stimulus, which carry information, can usually span many orders of magnitude, even so we are capable of sensing and processing them in an automated fashion. Contrary to electronic devices, digital or analog, that need their scales adjusted to detect a wide range of stimulus intensity. For instance, we can hear the sound a falling pin makes when it hits the ground as well as the engine of a jet plane while it's taking off, without having to adjust the scale of your ears. According to psychophysics, our flexibility in dealing with some types of physical stimulus comes from a non-linear relation between stimulus and response, known as Stevens power law. In this project we studied a two dimensional layered network of stochastic integrate and fire neurons. For such, we begin with a mean field analysis, validation of the analytical results where made through simulations of the neuron model in a complete network and in a network with dynamical topology (annealed). A characterization of the model in a two dimensional network was made by measuring the critical point of the system as well as it's relevant critical exponents. We showed that the system, network plus neuron model, produces the Stevens power law as an emergent phenomenon, where the system's response to external stimulus is maximum and obeys a power law at the critical point of a phase transition. In the light of Statistical Physics, we have a microscopic model which explains a macroscopic law. We also show the importance of the network's topology to the response and how it can be further enhanced extending the model to two layers of elements.

**Key-words:** 1. critical systems 2. psychophysics



# Lista de figuras

2.1	Função $\Phi(V)$ para diversos valores de $\Gamma$ e $V_T = 0.5$ . . . . .	6
2.2	Exemplo de uma rede, nós em vermelho e arestas em azul. . . . .	7
2.3	Exemplo de uma rede completa, cada nó está conectado a todos os outros nós. . . . .	8
2.4	Exemplo de uma rede <i>annealed</i> . Note que, neste exemplo, a cada passo de tempo apenas quatro conexões aleatórias do elemento de índice $i$ estão ativas (conexões ativas em vermelho). . . . .	9
2.5	Exemplo de uma rede bidimensional com 25 elementos . . . . .	11
2.6	Exemplo do comportamento esperado nos dois tipos de transições de fase, note que este exemplo não representa nenhum modelo físico, é apenas um esquema ilustrativo, os parâmetros de ordem e de controle ( $\rho$ e $x$ respectivamente) são fictícios. A) Transição de primeira ordem, é possível observar claramente uma descontinuidade no ponto de transição, marcado por pontos vermelhos. Esse tipo de descontinuidade marca a quebra de uniformidade. B) Transição de segunda ordem, é possível notar uma mudança de comportamento no parâmetro de ordem no ponto vermelho, porém agora essa mudança ocorre de maneira contínua, o ponto de transição neste caso é chamado de <i>ponto crítico</i> . As figuras C) e D) mostram o comportamento das derivadas do parâmetro de ordem $\rho$ . . . . .	14
2.7	Exemplo de como são selecionados os pontos $r_{0.1}$ e $r_{0.9}$ . Os pontos em vermelho correspondem as coordenadas $(r_{0.1}, \rho_{0.1})$ e $(r_{0.9}, \rho_{0.9})$ . . . . .	22
3.1	Curvas geradas com $\Gamma = 1.0$ , $I = 0$ e $V_T = 0$ . Comparação entre $\rho$ obtido através da solução numérica (linha cheia) das equações (3.3 - 3.5) e $\rho$ dado pela aproximação na região crítica (pontos), equação (3.24), para diferentes valores de $\mu$ . (a) $\mu = 0.1$ , (b) $\mu = 0.4$ e (c) $\mu = 0.8$ . . . . .	31
4.1	Amostras da atividade na rede tipo grafo completo nos três regimes. (a) subcrítico $w = 0.9$ , (b) crítico $w_C = 1.0$ e (c) supercrítico $w = 1.1$ . . . . .	34
4.2	Curvas (a) $\rho \times w$ e (b) $\chi \times w$ para diversos tamanhos de rede. . . . .	35

4.3	Simulação do modelo GL em uma topologia de rede completa com 65536 neurônios, equações (2.1) e (2.5), pontos em azul. Caso analítico em vermelho, equação (3.30). . . . .	35
4.4	Curvas $\rho \times w$ para um sistema de 32768 neurônios para diversos conjuntos $k$ (2.6) de tamanhos diferentes. . . . .	36
4.5	Exemplos de como obter o valor $w_C(k)$ através da segunda derivada do parâmetro de ordem $\rho$ para casos de conjuntos de conexões dinâmicas de tamanhos diferentes. . . . .	37
4.6	Curvas de correção para o caso da rede <i>annealed</i> com número de vizinhos $k$ diferentes, <i>fitting</i> em vermelho. . . . .	37
4.7	Colapso de curvas, $\rho \times w/w_C(k)$ para diferentes tamanhos de conjuntos de conexões aleatórias $k$ . . . . .	38
4.8	Curvas para os parâmetros de ordem $\rho$ e $\chi$ , (a) e (b) respectivamente. As linhas vermelha e cinza foram ajustadas com os expoentes obtidos através das simulações. Parâmetros $\Gamma = 1.0$ , $\mu = 0.0$ , $I = 0.0$ e $V_T = 0.0$ . . . . .	39
4.9	Curvas para os parâmetros de ordem $\rho$ e $\chi$ em função do tamanho característico da rede. . . . .	39
4.10	Colapso de dados para as curvas $\rho$ e $\chi$ . . . . .	40
4.11	Resposta da primeira camada a estímulos externos para diferentes tamanhos de rede nos três regimes, (a) subcrítico $w = 1.6$ , (b) crítico $w_C = 1.74$ e (c) supercrítico $w = 1.9$ . . . . .	41
4.12	Atividade $\rho$ da primeira camada em função da taxa de estímulos externos $r$ para uma rede $256 \times 256$ , a curva em vermelho mostra um comportamento de lei de potencia para resposta da rede. . . . .	42
4.13	Faixa dinâmica da primeira camada para diferentes tamanhos de rede. . . . .	42
4.14	Resposta da segunda camada a estímulos externos para diferentes tamanhos de rede nos três regimes, (a) subcrítico $w = 1.6$ , (b) crítico $w_C = 1.74$ e (c) supercrítico $w = 1.9$ . . . . .	43
4.15	Faixa dinâmica para redes de diferentes tamanhos na segunda camada. . . . .	43
4.16	Resposta da segunda camada para diferentes conectividades nos três regimes, (a) subcrítico $w = 1.76$ , (b) crítico $w^* = 1.75$ e (c) supercrítico $w = 1.9$ , para uma rede de tamanho $256 \times 256$ . . . . .	44
4.17	Faixa dinâmica da segunda camada para diferentes conectividades e tamanhos fixos. (a) $32 \times 32$ , (b) $128 \times 64$ e (c) $256 \times 256$ . . . . .	44

4.18	Resposta de uma rede formada por duas camadas de tamanho $256 \times 256$ com 10% dos elementos da primeira camada conectados com a segunda para os casos em que $\rho \propto r^m$ em cada camada. Primeira camada (pontos em laranja) e segunda camada (pontos em azul). . . . .	45
6.1	Faixa dinâmica para uma rede bidimensional simples, curva em azul. Faixa dinâmica para a segunda camada de um sistema bidimensional com duas camadas e conectividade de 10% dos elementos, curva em laranja. . . . .	49
A.1	Distribuição de cidades na terra. Note que existem regiões de vários tamanhos que não possuem cidades tecnológicas. Fonte: NASA/NOAA, url: <a href="https://www.nasa.gov/topics/earth/earthday/gall_earth_night.html">https://www.nasa.gov/topics/earth/earthday/gall_earth_night.html</a>	54
A.2	De cima para baixo, esquerda a direita, processos de colonização com $\beta = 0, 5, 10, 15, 20$ e $25$ . Em $t = 0$ temos apenas um nó colonizado em $i = 50, j = 50$ para uma rede $100 \times 100$ . Note a formação de <i>clusters</i> de espaço vazio conforme $\beta$ aumenta. . . . .	56



# Siglas

**DP** Percolação direcionada (Directed Percolation). 18

**GL** Galves e Löcherbach. 5

**JND** Diferença mínima perceptível (just-noticeable difference). 50

**SOC** Criticalidade auto organizada (Self-organized criticality). 1





# Lista de símbolos

$\beta$	Expoente crítico associado ao parâmetro de ordem $\rho$
$\chi$	Susceptibilidade
$\Delta$	Faixa dinâmica
$\delta_t$	Intervalo de tempo
$\delta_\rho$	Diferença entre valores médios da atividade da rede que correspondem ao maior e menor estímulo
$\Delta_{w_C}$	Diferença entre o pesos sinápticos críticos para o caso analítico
$\eta_k$	Fração de neurônios com idade disparo $k$
$\Gamma$	Ganho neural
$\gamma$	Expoente crítico associado a susceptibilidade $\chi$
$\lambda$	Expoente crítico (definição)
$\lambda(r)$	Processo de Poisson
$\langle X \rangle$	Valor médio de uma variável genérica
$\mathcal{G}$	Energia livre de Gibbs
$\mathcal{Z}$	Função partição de Gibbs
$\mu$	Termo de vazamento
$\nu$	Expoente crítico associado ao comprimento de correlação $\xi$
$\bar{w}$	Parâmetro de controle reduzido do modelo GL
$\Phi$	Função disparo
$\rho$	Variável intensiva usada como parâmetro de ordem

$\rho^\pm$	Bifurcação da atividade média no caso analítico
$\rho_x$	Atividade da rede correspondente a $x\%$ de $\delta_\rho$
$\rho_0$	Menor valor da atividade média da rede correspondente ao menor estímulo apresentado
$\rho_{max}$	Maior valor da atividade média da rede correspondente ao maior estímulo apresentado
$\sigma$	Expoente crítico associado ao tamanho de <i>clusters</i>
$\tau$	temperatura reduzida
$\Theta$	Função Heaviside
$\tilde{w}$	Peso sináptico cuja resposta da primeira camada da rede a estímulos segue uma lei de potência
$\vec{J}$	Vetor de forças generalizadas
$\vec{x}$	Vetor de deslocamento generalizado
$\xi$	Comprimento de correlação
$\{\sigma\}$	Microestado de um sistema
$E$	Função energia do sistema
$e$	Número de Euler
$f$	Parâmetro de ordem hipotético
$G_\chi$	Função de escala para a susceptibilidade
$G_\rho$	Função de escala para o parâmetro de ordem
$I$	Intensidade de estímulo
$I_i$	Estímulo externo
$k$	Tamanho de conjunto de conexões ( <i>fitting</i> no caso da rede <i>anneal</i> )
$K_B$	Constante de Boltzmann
$K_i$	Conjunto de elementos que conectam com $i$
$L$	Tamanho característico da rede

$m$	Expoente de Stevens
$m_{10\%}$	Expoente para lei de potência para um sistema com 10% de conexão entre primeira e segunda camada
$m_{25\%}$	Expoente para lei de potência para um sistema com 25% de conexão entre primeira e segunda camada
$m_{50\%}$	Expoente para lei de potência para um sistema com 50% de conexão entre primeira e segunda camada
$N$	Número de elementos no sistema
$P$	Probabilidade
$p(V)[t]$	Fração de neurônios que possuem potencial de membrana no intervalo $[V, V + dV]$ no instante $t$
$p_\sigma$	Probabilidade de ocorrência do microestado $\sigma$
$r$	Taxa de disparo do processo de Poisson
$r_{0.1}$	Taxa de estímulo que evoca uma resposta 10% de $\delta_\rho$
$r_{0.9}$	Taxa de estímulo que evoca uma resposta 90% de $\delta_\rho$
$S$	Resposta da lei de potência de Stevens
$T$	Temperatura
$t$	Tempo
$T_C$	Temperatura crítica
$t_f$	Tempo final
$t_i$	Tempo inicial
$U_k$	Potencial de membrana dos neurônios do grupo $\eta_k$
$V_i$	Potencial de membrana do neurônio $i$
$V_T$	Potencial limite
$w$	Peso sináptico médio
$w^*$	Peso sináptico cuja resposta da segunda camada da rede a estímulos segue uma lei de potência

$w_C$     Peso médio crítico das sinapses

$w_C(k)$     Peso sináptico crítico para um conjunto de conexões de tamanho  $k$

$w_{ij}$     Peso da sinapse que liga o neurônio pré-sináptico  $i$  e o neurônio pós-sináptico  $j$

$X_i$     Estado do neurônio de índice  $i$

$X_\sigma$     Valor da variável genérica com o sistema no microestado  $\sigma$

$Z$     Função partição



# Sumário

Lista de figuras

Siglas

Lista de símbolos

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Fundamentos teóricos e simulações</b>	<b>4</b>
2.1	O modelo de neurônio . . . . .	4
2.2	Redes de neurônios . . . . .	6
2.2.1	Rede completa . . . . .	7
2.2.2	Rede <i>annealed</i> . . . . .	8
2.2.3	Rede bidimensional . . . . .	9
2.3	Física Estatística . . . . .	11
2.4	Leis de potência e Psicofísica . . . . .	19
2.5	Simulações . . . . .	22
2.5.1	Simulações de rede completa . . . . .	23
2.5.2	Simulações de rede <i>annealed</i> . . . . .	24
2.5.3	Simulações de rede bidimensional . . . . .	24
2.5.4	Simulações da rede bidimensional em camadas . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Campo médio</b>	<b>26</b>
3.1	Aproximação de campo médio . . . . .	26
3.2	Aproximação no ponto crítico . . . . .	28
3.3	Caso analítico . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Resultados</b>	<b>34</b>
4.1	Rede de grafo completo . . . . .	34
4.2	Rede <i>annealed</i> . . . . .	36
4.3	Rede bidimensional . . . . .	38

4.4	Psicofísica e faixa dinâmica de intensidade de estímulos . . . . .	40
4.4.1	Psicofísica neural na primeira camada . . . . .	41
4.4.2	Psicofísica neural da segunda camada . . . . .	42
<b>5</b>	<b>Conclusões e Perspectivas</b>	<b>46</b>
<b>6</b>	<b>Discussão</b>	<b>49</b>
<b>A</b>	<b>Anexo: Percolação e o paradoxo de Fermi</b>	<b>53</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>58</b>





## Capítulo 1

# Introdução

Neurônios são as unidades básicas de processamento do sistema nervoso. São elementos altamente não lineares cuja função básica consiste em integrar sinais, seja de outros neurônios ou estímulos externos. Estes integradores, quando colocados para interagir em grandes números uns com os outros, apresentam propriedades coletivas emergentes: o comportamento resultante do sistema não é uma simples superposição linear dos elementos básicos, neste caso, neurônios.

Propriedades coletivas emergentes são fenômenos presentes em diversas áreas, e normalmente são estudadas através de ferramentas de física estatística e teoria de sistemas dinâmicos. Sua aplicação para se compreender a dinâmica de sistemas cerebrais é ainda relativamente recente [1, 2].

Em um trabalho seminal de 1982, Hopfield [3] mostrou que propriedades computacionais coletivas naturalmente emergem em uma rede de neurônios binários (apenas dois estados, disparo ou silêncio). No caso, a rede apresenta estados coletivos de memória (representada por estados atratores da rede) e a característica de recuperar memórias a partir de informações parciais.

Em 1987, Bak, Tang e Wiesenfeld [4] propuseram que sistemas dinâmicos com muitos graus de liberdade naturalmente se auto organizam em estados críticos (*self-organized criticality* ou SOC). O modelo de pilha de areia introduzido por eles se tornou um paradigma para aplicações nas mais diversas áreas de pesquisa onde sinais de criticalidade (avalanches invariantes de escala, relações de escala entre expoentes críticos etc.) se fazem presente.

Tão cedo quanto 1991, físicos tentaram aplicar o conceito de SOC para redes neuronais. Miranda & Herrmann propõe um modelo de rede neural inspirado em Hopfield na forma de uma pilha de areia frustrada, com sinapses inibitórias e excitatórias [5]. Em um resumo estendido surpreendentemente moderno (neurônios mais complexos que integra-e-dispara) Makarenkov & Kirillov apresentam o trabalho *Self-organized criticality in neural networks* [6]. Isto ocorre doze anos antes das primeiras evidências experimentais de avalanches neuronais [7].

Em 1995, Herz & Hopfield [8] notaram que modelos de elementos integra-dispara

usados para modelagem de terremotos são matematicamente equivalentes a modelos de neurônios de redes neuronais. Conjeturaram se haveria a possibilidade de SOC aparecer em tais redes, mas não desenvolveram tal conjectura. Também em 1995, Usher *et al.* [9] propuseram um modelo com SOC para explicar ruído  $1/f$  neuronal. Este talvez seja o primeiro modelo consistente de avalanches neuronais, proposto em uma época em que não havia nenhuma evidência experimental de que tais avalanches existissem em tecidos biológicos. Ainda em 1995, Bottani [10] também mostrou que redes de elementos acoplados por pulsos, similares a redes neuronais, poderiam apresentar comportamento tipo SOC. A relação entre sincronização e SOC em redes neuronais também foi estudada por Chen *et al.* em 1995 [11]. Tais comportamentos também foram examinados e revistos por Pérez *et al.* em 1996 [12]. Bak & Chialvo mostraram que uma rede de neurônios guiada por reforço negativo das sinapses apresenta SOC, devido a isso o sistema é capaz de aprender e se adaptar de maneira muito eficiente [13, 14].

Podemos encarar tais modelos iniciais como grandes sucessos em predição em biologia a partir de modelos teóricos de Física Estatística. Infelizmente, tais trabalhos foram ignorados na época.

A ideia do cérebro crítico encontrou suporte experimental em 2003 com o trabalho de Beggs & Plenz [7] que mediram a atividade neural em culturas de córtex de ratos, mostraram que as avalanches de atividade neural seguem uma lei de potência, característica de fenômenos críticos. Para algumas revisões literárias [1, 15, 16]. Apesar de não haver um consenso na academia sobre a ideia do cérebro crítico [17], podemos dizer que ela é uma ideia que vale a pena ser explorada [18, 19, 20, 21].

O cérebro humano possui bilhões de neurônios e cada um deles pode fazer milhares de conexões. Esse sistema altamente complexo nos dá a habilidade de interagirmos com nosso ambiente. Dentro da psicologia a área que estuda essa interação chama-se psicofísica. A psicofísica usualmente faz uma abordagem *top-down* para descrever a interação entre estímulo e representação. Ou seja, algum tipo de estímulo é apresentado ao sujeito, uma resposta é coletada e uma inferência sobre a representação interna do estímulo é feita. Nessa abordagem o que ocorre com o estímulo a nível de interação entre neurônios é deixada como uma caixa preta.

Copelli e colegas [22] mostraram que as leis de Stevens e Weber-Fechner na psicofísica podem ser interpretadas como funções de transferência de um meio excitável, no caso os autores mostraram que conectar elementos excitáveis faz com que a resposta do sistema siga uma função logarítmica (lei de Weber-Fechner) em alguns casos e uma função de potência (lei de Stevens) para outros. Em 2006 Kinouchi & Copelli [19] propõem um modelo mecanístico para as leis psicofísicas usando ideias da Física e Estatística. Os autores mostraram que um sistema de elementos excitáveis e interagentes próximo de

uma transição de fase de segunda ordem consegue responder a estímulos de maneira muito eficiente e ainda, a resposta deste sistema segue uma lei de potência similar à lei de Stevens na psicofísica. A abordagem da mecânica estatística do tipo botton-up, exatamente oposta à psicofísica, preocupando-se com as bases neuronais das leis psicofísicas. Neste caso o sistema é bem definido e sua resposta a estímulos externos é estudado usando-se simulações computacionais.

Neste projetos estudamos uma rede bidimensional (com uma ou duas camadas) com neurônios integra e dispara estocásticos. O modelo de neurônio utilizado foi proposto inicialmente por Gerstner [23], estudado com mais rigor por Galves e Löcherbach [24] e simplificado por Brochini *et al.* [25]. Utilizamos uma linha de estudo similar a [26, 27] para investigar como este modelo de neurônio se comporta em uma rede bidimensional em camadas.

Inicialmente utilizamos uma aproximação de campo médio para obter resultados analíticos. Com a aproximação de campo médio conseguimos avaliar que tipo de transição de fase esse modelo apresenta, quais os parâmetros que controlam essa transição e a qual classe de universalidade este modelo pertence. Para validar os resultados analíticos realizamos simulações com nerônios estocásticos em duas topologias diferentes, uma rede completa e uma rede bidimensional (com uma e duas camadas). Estudando a transição de fase absorvente, determinamos como uma rede bidimensional de neurônios estocásticos se comporta medindo o ponto crítico desse sistema e seus expoentes críticos relevantes.

Com o sistema bidimensional bem caracterizado acoplamos duas redes bidimensionais para formar um sistema em camadas e realizamos uma espécie de experimento psicofísico, onde estimulamos a primeira camada do sistema e coletamos respostas da primeira e segunda camadas nos três regimes conhecidos, subcrítico, crítico e supercrítico. Neste caso, obtemos as leis de Stevens, os expoentes psicofísicos de Stevens e a faixa dinâmica de trabalho de tais sistemas. Encontramos que a rede quadrada com duas camadas pode ter uma faixa dinâmica de mais de 40dB em contraste com 20dB de uma rede aleatória. Isso acontece porque o expoente de Stevens da rede quadrada em camadas é bem menor que o da rede aleatória.

Vale observar que nesta dissertação não estudaremos o processo de auto-organização da rede para a região crítica como é feito em [28, 29, 30, 26, 31, 27], que envolve a transformação de parâmetros do modelo em variáveis dinâmicas adaptativas lentas. Nossos resultados se referem ao modelo estático, sem dinâmica nas sinapses ou nos ganhos neuronais. Devido a problemas delicados na caracterização do modelo estático (determinação de ponto de transição e expoentes críticos), típicos de topologias d-dimensionais, o modelo com sinapses dinâmicas será estudado em outra oportunidade.

# Fundamentos teóricos e simulações

## 2.1 O modelo de neurônio

Neurônios são as células fundamentais do sistema nervoso. São responsáveis por receber estímulos do ambiente e pela forma como respondemos a eles. Mais do que isso, a interação entre neurônios permite que muitas espécies de animais sejam capazes de interações entre indivíduos que vão além da mera sobrevivência devido a respostas a um ambiente imprevisível, muitos animais apresentam comportamento social. A unidade fundamental que permite essa gama de funcionalidade do sistema nervoso é o neurônio.

Um neurônio consiste em basicamente três partes, dendritos, corpo celular e axônio. Os dendritos são normalmente responsáveis por receber sinais de outros neurônios, eles tem um papel fundamental em integrar os sinais recebidos. O axônio é a estrutura responsável por gerar e transmitir um sinal de um neurônio aos dendritos de muitos outros. No corpo celular de um neurônio estão estruturas responsáveis por mantê-lo vivo e permitir seu funcionamento adequado, como o núcleo e estruturas capazes de sintetizar proteínas.

Neurônios enviam e recebem sinais uns dos outros através de potenciais de ação. A diferença de potencial entre o meio intracelular e o meio extracelular de um neurônio é mantida relativamente fixa, devido a diferentes concentrações iônicas entre os meios (alta concentração de sódio e baixa concentração de potássio no meio extracelular, baixa concentração de sódio e alta concentração de potássio no meio intracelular). Um potencial de ação consiste em um fluxo abrupto de íons através da membrana mediado por canais iônicos seletivos sensíveis a diferença de potencial entre os meios, desse fluxo resulta uma mudança igualmente abrupta na diferença de potencial entre os meios, que é o que chamamos de potencial de ação. Até onde sabemos o processamento e transmissão de informação no sistema nervoso ocorre através do potencial de ação [32].

Em neurociência teórica existem modelos biologicamente motivados que tentam simular o comportamento do neurônio através de complexas equações diferenciais inspiradas na dinâmica de canais iônicos, porém tais modelos são computacionalmente custosos e possuem muitos parâmetros para serem estudados. Os modelos conhecidos como integra

e dispara são consideravelmente mais simples e fácil de simular, apesar de sua simplicidade são excelentes para o estudo de propriedades coletivas emergentes [33].

Utilizamos um modelo de neurônio proposto por Gerstner em 1992 [23], eneralixado por Galves e Löcherbach [24] e simplificado por Brochini *et al.*, que chamaremos de modelo GL [25, 26]. O modelo GL consiste em um mapa de tempo discreto [34], inspirado em neurônios integra-e-dispara com vazamento (Leaky Integrate-and-Fire ou LIF) [35, 36], onde o potencial de membrana de cada neurônio evolui na forma:

$$V_i[t + 1] = \begin{cases} 0 & \text{if } X_i[t] = 1 \\ \mu V_i[t] + I_i[t] + \frac{1}{|K_i|} \sum_{j \in K_i} w_{ij} X_j[t] & \text{if } X_i[t] = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Se um neurônio dispara, sinalizado por  $X_i[t] = 1$ , seu potencial de membrana vai para 0, um valor arbitrário de *reset*. Caso o neurônio não dispare  $X_i[t] = 0$ , o potencial de membrana segue a segunda equação de (2.1). O modelo incorpora um termo de vazamento através de  $\mu$ , onde  $\mu \in [0, 1]$ , esse termo controla quanto o neurônio perde de potencial a cada passo de tempo, além de poder ser considerado como um termo de memória do neurônio sobre seus estados anteriores, ele controla também como o potencial de membrana decai para o valor assintótico de potencial 0 na ausência total de estímulos.

A somatória da segunda equação (2.1) determina como cada neurônio interage com os outros.  $K_i$  é o conjunto de neurônios que se conectam com o neurônio  $i$  e  $X_j[t]$  é o estado do neurônio  $j$  que se conecta com  $i$ . O peso da sinapse entre os neurônios  $i$  e  $j$  é representado por  $w_{ij}$ . O termo  $|K_i|$  normaliza a atividade que  $i$  soma da rede baseado no número de elementos com quem  $i$  se conecta, ou seja é o número absoluto de elementos que interagem com  $i$ . O ultimo termo  $I_i[t]$  representa estímulos externos adicionados ao elemento  $i$ .

O estado de cada neurônio, disparo ou silêncio, é definido pela variável  $X_i[t]$ , onde  $X_i[t] \in \{0, 1\}$ , é essa variável também que diferencia o modelo GL de outros modelos integra e dispara. Aqui um neurônio disparar ou não é um evento probabilístico, assim o modelo torna-se intrinsecamente estocástico, sem a necessidade de incorporar ruídos externos para tal finalidade. Sem mais demora, a probabilidade de um neurônio disparar é dada por,

$$\begin{aligned} P(X_i[t] = 1 \mid X_i[t - 1] = 0) &= \Phi(V_i[t]) \\ P(X_i[t] = 1 \mid X_i[t - 1] = 1) &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

note que um período refratário, de um passo de tempo, já é incorporado neste modelo. A função  $\Phi(V)$  deve ser monotonicamente crescente com apenas um máximo na primeira derivada e deve possuir limites  $\Phi(-\infty) = 0$  e  $\Phi(+\infty) = 1$  [25]. Durante este projeto

usamos  $\Phi$  descrito pela equação (2.3), onde  $V_T$  é um valor limite tal que para qualquer potencial de membrana menor que  $V_T$  a chance do neurônio disparar é zero. O parâmetro  $\Gamma$ , chamado de ganho neuronal, controla como a equação (2.3) sai de zero e possivelmente está ligado com o seguimento inicial do axônio [25], figura (2.1). O uso desta função simplifica os resultados analíticos para o caso de campo médio que será discutido no próximo capítulo.

$$\Phi(V) = \frac{\Gamma(V - V_T)}{1 + \Gamma(V - V_T)} \Theta(V - V_T) \quad (2.3)$$

A função  $\Theta$  em 2.3 é a função de *Heaviside* deslocada, comumente conhecida como função degrau, equação (2.4).

$$\Theta(V) = \begin{cases} 0 & \text{if } V < 0 \\ 1 & \text{if } V > 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

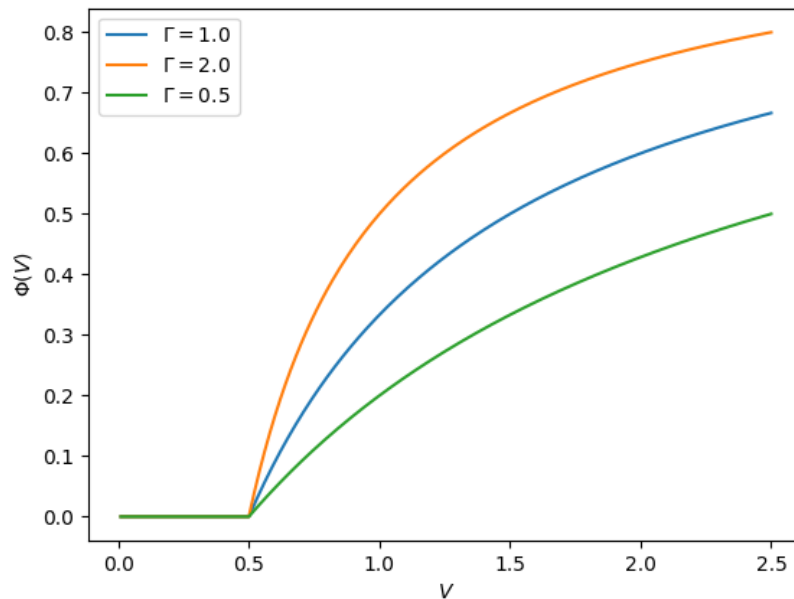


Figura 2.1: Função  $\Phi(V)$  para diversos valores de  $\Gamma$  e  $V_T = 0.5$ .

## 2.2 Redes de neurônios

Redes são estruturas abstratas usadas para representar objetos e as relações entre eles, tal representação é feita através de nós e arestas, figura (2.2). Sistemas neurais são compostos por muitos neurônios que interagem entre si e apresentam comportamentos, a nível de sistema, que são irreduzíveis ao elemento mais básico, fenômeno conhecido

como complexidade emergente. Uma maneira de representar sistemas neurais é através de redes, neste trabalho consideramos cada neurônio como sendo um nó na rede e cada aresta como uma sinapse entre dois neurônios. Note que neste caso, como na figura (2.2), estamos considerando uma rede não direcionada, ou seja, uma sinapse entre um elemento  $i$  e outro  $j$  manda tanto sinal de  $i$  para  $j$  quanto de  $j$  para  $i$ . A transmissão de sinal entre dois neurônios é instantânea e não fazemos distinção entre sinapses químicas ou elétricas. Isso se reflete na equação (2.1) da seguinte maneira, o peso de uma sinapse entre dois neurônios quaisquer  $w_{ij}$  é simétrico  $w_{ij} = w_{ji}$  e se um neurônio  $j$  conectado a  $i$  dispara,  $i$  soma o disparo de  $j$  no mesmo passo de tempo. O modelo também não leva em conta a plasticidade sináptica, o valor de  $w_{ij}$  é fixo. Apesar dessas simplificações afastarem nosso modelo de um sistema neural biológico, o comportamento do sistema como um todo, rede mais neurônios, apresenta características que podem auxiliar na compreensão de um sistema real.

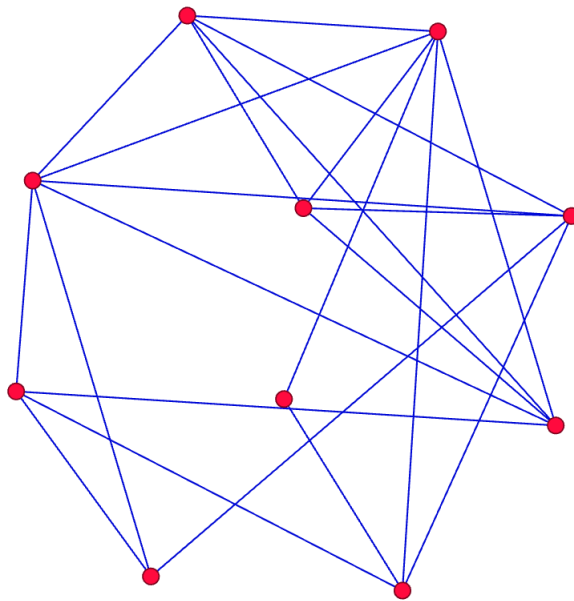


Figura 2.2: Exemplo de uma rede, nós em vermelho e arestas em azul.

Quando tratamos de redes, a forma como os objetos interagem, ou seja, a distribuição de arestas entre os nós é definida pela topologia da rede. Neste projeto consideramos três tipos diferentes de topologias.

### 2.2.1 Rede completa

Na topologia de rede completa temos que cada elemento da rede se conecta com todos os outros elementos, figura (2.3).

Em nosso modelo de neurônio isso significa que, na somatória da segunda equação

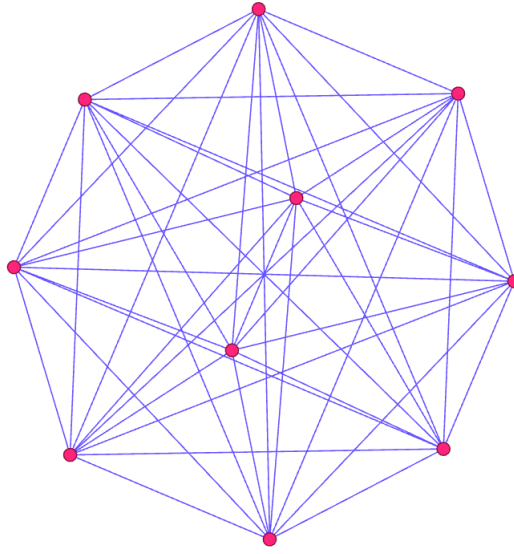


Figura 2.3: Exemplo de uma rede completa, cada nó está conectado a todos os outros nós.

(2.1) o conjunto de elementos  $K_i$  fica definido como, supondo uma rede com  $N$  neurônios,

$$K_i = \{1, 2, 3, \dots, N\} - \{i\}, \quad (2.5)$$

a equação (2.5) denota um conjunto definido por todos os índices de neurônios menos o índice do neurônio  $i$ , cada neurônio tem  $N - 1$  sinapses. A topologia de rede completa é importante pois permite testar os resultados analíticos obtidos através da aproximação de campo médio, que será descrito no próximo capítulo.

## 2.2.2 Rede *annealed*

A topologia *annealed* é um caso particular da topologia de rede completa. Neste caso, estamos lidando com uma rede dinâmica, onde cada neurônio ainda se conecta com todos os outros elementos, igual a rede completa, mas a cada passo de tempo apenas um número fixo  $|K_i| < N - 1$  de conexões estão ativas, figura 2.4.

Em termos do modelo GL, equação (2.1), isso significa que o conjunto de conexões de cada neurônio possui um tamanho  $|K_i|$  fixo e as conexões variam aleatoriamente com o tempo. Matematicamente temos que,

$$K_i[t] = \{j_1, j_2, \dots, j_{|K_i|}\} \quad (2.6)$$

note que, a equação (2.6) representa apenas o conjunto de conexões da rede completa ativas no passo de tempo  $t$ , isso implica que  $i \notin K_i[t]$  e que o neurônio  $i$  não se conecta duas vezes ou mais ao mesmo neurônio  $j$  no mesmo passo de tempo  $t$ .



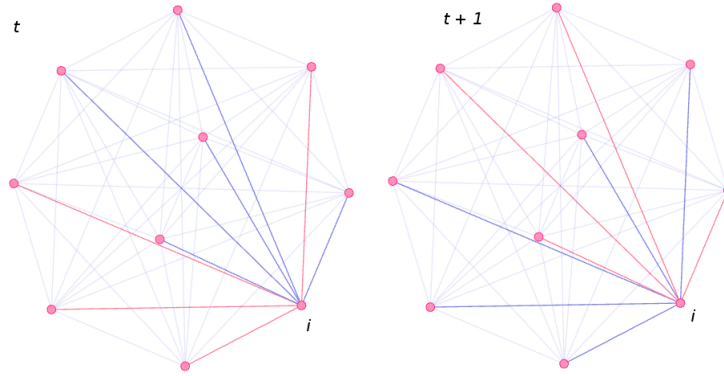


Figura 2.4: Exemplo de uma rede *annealed*. Note que, neste exemplo, a cada passo de tempo apenas quatro conexões aleatórias do elemento de índice  $i$  estão ativas (conexões ativas em vermelho).

Gerar um conjunto  $\{j_1, j_2, \dots, j_{|K_i|}\}$  a cada passo de tempo para cada neurônio da rede pode ser computacionalmente custoso, propomos o uso de uma adaptação do algoritmo de embaralhamento de *Fisher & Yates* [37]. O algoritmo abaixo descreve o processo de gerar um conjunto  $K_i[t]$  com  $|K_i|$  elementos únicos para um passo de tempo.

```

int modKi ← input /* modKi ≤ N − 1 */
int k ← 0
lista elementosI ← {0, 1, 2, ⋯, i − 1, i + 1, ⋯, N − 1} /*lista de elementos únicos*/

lista conn ← {∅}
int head ← índice do ultimo elemento da lista elementosI
int idx ← 0
for k = 1 to modKi do
    idx ← RandomInt(0, head)
    conn ← inserir elementosI[idx]
    (elementosI[idx], elementosI[head]) ← (elementosI[head], elementosI[idx])
    -- head
end for

```

O algoritmo considera índices de neurônios indo de 0 a  $N - 1$ , isso ocorre pois muitas linguagens de programação enumeram listas e vetores de 0 a  $N - 1$ , onde  $N$  é o tamanho do vetor. Carregar um *offset* de 1 durante as simulações pode ser desastroso.

### 2.2.3 Rede bidimensional

A topologia de rede bidimensional difere das duas anteriores devido a relevância de sua estrutura espacial. Por exemplo, imagine que você está em uma cidade inteiramente

estruturada em quarteirões, que possa ser representada por uma matriz  $N \times M$ . Caso queira ir de um lado a outro da cidade, pelo menor caminho possível, você passaria por  $LM$  metros, onde  $L$  é o comprimento de um quarteirão e  $M$  o número de quarteirões de um lado ao outro da cidade.

Agora imagine que você tem a sua disposição um gerador de portais para qualquer lugar da cidade (caso da rede completa) ou um gerador de portais dinâmico que abre e fecha portais aleatoriamente ao longo do tempo (caso da rede *annealed*). No primeiro caso a menor distância entre um lado e outro da cidade é apenas  $L$  e no segundo a distância média está entre  $L \leq d \leq LM$ , dependendo do número de portais gerados em uma janela de tempo. Note que tanto na rede completa quanto na rede *annealed* a estrutura da cidade não importa, já no caso da rede bidimensional existe uma escala de espaço e tempo, respectivamente o tamanho do quarteirão e o tempo que se leva para anda-lo.

Essa escala de tempo e espaço é muito importante, pois em algumas situações, dois eventos que ocorrem a uma distância maior que o comprimento de um quarteirão estarão correlacionados. Isso mostra a presença de escalas no sistema que diferem da escala estrutural da cidade.

Podemos definir formalmente a rede bidimensional de neurônios GL como uma matriz  $I \times J$  de  $I$  linhas e  $J$  colunas onde cada elemento de índice  $ij$  dessa matriz representa um neurônio e se conecta com seus quatro vizinhos mais próximos. Assim, a equação (2.1) pode ser redefinida,

$$V_{ij}[t+1] = \begin{cases} 0 & \text{if } X_{ij}[t] = 1 \\ \mu V_{ij}[t] + I_{ij}[t] + \frac{1}{|K_{ij}|} \sum_{k \in K_{ij}} w_k X_k[t] & \text{if } X_{ij}[t] = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

onde o conjunto  $K_{ij}$  é definido como,

$$K_{ij} = \{(i+1, j); (i-1, j); (i, j+1); (i, j-1)\}. \quad (2.8)$$

Um exemplo de uma rede bidimensional pode ser visto na figura (2.5).

Note que na figura (2.5) os neurônios das bordas e quinas da rede não possuem um padrão de conexão definido pela equação (2.8), esse tipo de *defeito* na estrutura da rede introduz efeitos de borda que alteram os resultados de simulações. Para eliminar o efeito de bordas, introduzimos condições periódicas de contorno na equação (2.8). Assim, dado um neurônio  $ij$  da rede bidimensional se  $(i \pm 1, j) \notin \rightarrow (i \mp I, j)$  e  $(i, j \pm 1) \notin \rightarrow (i, j \mp J)$ . Dessa maneira todos os neurônios possuem quatro conexões e a estrutura bidimensional da rede é preservada nas bordas e quinas.

O sistema bidimensional de neurônios GL pode ser estendido para um modelo em camadas. Considere um novo índice  $\sigma \in \mathbb{N}^+$  para designar camadas, é possível introduzir

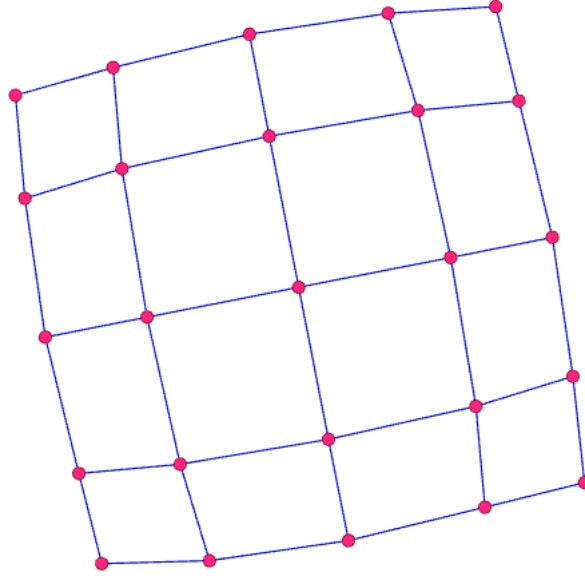


Figura 2.5: Exemplo de uma rede bidimensional com 25 elementos

interação entre elas através do *input* do modelo, assim para cada camada a equação (2.7) fica,

$$V_{ij}^{\sigma}[t+1] = \begin{cases} 0 & \text{if } X_{ij}^{\sigma}[t] = 1 \\ \mu V_{ij}^{\sigma}[t] + I_{ij}^{\sigma}[t] + \alpha X_{ij}^{\sigma'} + \frac{1}{|K_{ij}^{\sigma}|} \sum_{k \in K_{ij}^{\sigma}} w_k X_k^{\sigma}[t] & \text{if } X_{ij}^{\sigma}[t] = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

onde o novo conjunto  $K_{ij}^{\sigma}$  é a interação entre os quatro vizinhos mais próximos do elemento  $ij$  dentro da mesma camada, definido na equação (2.8). O novo termo  $\alpha X_{ij}^{\sigma'}$  é uma conexão entre os elementos  $ij$  das camadas  $\sigma$  e  $\sigma'$ , o parâmetro  $\alpha$  é a intensidade da conexão entre camadas. Dessa forma podemos acoplar muitas camadas sem alterar a estrutura bidimensional individual de cada uma.

## 2.3 Física Estatística

A física estatística consiste em uma abordagem probabilística para descrever propriedades macroscópicas de sistemas com muitos graus de liberdade [38]. Esta área fundamental da física explica as propriedades macroscópicas de sistemas através de seus microestados. Por exemplo, como surge pressão, densidade e calor específico em um gás a partir de uma coleção de moléculas?

Sistemas com muitos graus de liberdade são aqueles constituídos por muitos elementos interagentes. Por exemplo, um gás ideal formado por muitas partículas de tipos diferentes ou não, que interagem entre si devido de repulsão gerando choques elásticos. Neste caso

cada partícula possui três coordenadas espaciais e três coordenadas de momentos lineares, e sua energia puramente cinética (translacional). Se as partículas são moléculas, poderemos ter também coordenadas angulares e interatômicas, ou seja, estados rotacionais, vibracionais e energia potencia interna.

Outo exemplo é um pedaço de matéria com propriedades magnéticas. Neste caso os átomos não podem caminhar livremente pelo material, mas cada um possui um *spin* que pode apontar para diversas direções e está sujeito a interações com outros *spins*, mediadas por efeitos quânticos conhecidos como *exchange interactions* [39].

Finalmente, mais próximo de nosso estudo, podemos ter uma rede de neurônios onde cada neurônio pode emitir um potencial de ação ou ficar em silêncio dependendo da interação com outros neurônios da rede. Todos esses casos são sistemas macroscópicos constituídos por elementos microscópicos que interagem entre si e dão origem a comportamentos coletivos, desde médias triviais no gás ideal (pressão, temperatura) até genuínos fenômenos não-lineares (transições de fase).

Na descrição dos sistemas acima, e todos os outros com muitos graus de liberdade, são essenciais as ideias de micro e macro estados. Um microestado é definido pelo conjunto dos estados de todos os graus de liberdade individuais. Por exemplo, no caso de um material magnético onde cada átomo do material pode ter *spin*  $\sigma = \pm 1$ , podemos definir um microestado através dos *spins* de todos os átomos que compõe a amostra  $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N\}$ . Já um macroestado é alguma quantidade observável macroscopicamente, no caso do material magnético, a magnetização média. Note que um macroestado pode estar associado a muitos microestados diferentes, desde que a quantidade média observável, e outros vínculos observados, seja preservada.

Praticamente todos os sistemas que ocorrem na natureza são sistemas abertos acoplados a reservatórios externos, tal que trocas de energia, partículas e outras quantidades conservadas entre reservatório e sistema levam a correntes através do sistema que guiam a evolução temporal do mesmo. Tais correntes se manifestam a nível microscópico como uma quebra de *balanço detalhado*, significando que entre dois microestados adjacentes existe uma corrente de probabilidade diferente de zero [40]. A quebra de balanço detalhado define a diferença entre sistemas em equilíbrio e sistemas fora de equilíbrio. No primeiro caso, não existe quebra de balanço detalhado e todos os microestados acessíveis são equiprováveis (hipótese ergódica), já no segundo caso, os microestados acessíveis não são equiprováveis e dependem do tempo, que se torna um importante grau de liberdade.

Ambos sistemas, em equilíbrio e fora de equilíbrio, podem ser descritos por variáveis ou observáveis (macroestados), tais variáveis descrevem o comportamento do sistema como um todo e caracterizam as transições de fases dos mesmos. Uma fase pode ser definida como a região no espaço onde todas as variáveis macroscópicas que descrevem o sistema

são essencialmente uniformes. Quando o sistema passa de uma fase a outra há uma quebra de uniformidade, caracterizada pela descontinuidade de algumas variáveis e suas derivadas. Nem todas as variáveis que descrevem o sistema apresentam uma quebra de uniformidade: às que apresentamos chamamos de parâmetros de ordem e as variáveis que controlam esse processo damos o nome de parâmetros de controle.

As transições de fase podem ser agrupadas essencialmente em dois tipos, transições de primeira ordem, caracterizada por uma descontinuidade de algum parâmetro de ordem (e região de coexistência de fases em torno do ponto de transição) e transições de segunda ordem, onde o parâmetro de ordem varia continuamente entre as duas fases, mas suas derivadas apresentam algum tipo de descontinuidade, figura (2.6). Embora essa classificação não seja rigorosa e esteja um pouco datada [40], no nosso estudo ela ainda é útil pois apenas esses tipos de transição ocorrem em nosso modelo. Uma classificação mais atualizada pode ser encontrada em [41]. Nesta classificação transições de segunda ordem são caracterizadas pela divergência da susceptibilidade, comprimento de correlação infinito e decaimento de correlações na forma de leis de potências.

Diversos sistemas físicos que apresentam transições de segunda ordem podem ser agrupados por compartilharem propriedades de simetria. Esse tipo de agrupamento é a definição de *classe de universalidade* [40]. É esperado que sistemas pertencentes à mesma classe de universalidade apresentem o mesmo comportamento crítico. Ou seja, próximo ao ponto crítico da transição alguns parâmetros de ordem e grandezas relacionadas (susceptibilidade, comprimentos de correlação etc.) podem ser aproximados por leis de potência do tipo  $x^\alpha$  onde os diversos expoentes  $\alpha$  são os mesmos para os sistemas pertencentes a uma mesma classe, mesmo que os detalhes da dinâmica microscópica sejam diferentes.

Tanto sistemas em equilíbrio quanto fora de equilíbrio podem apresentar fenômenos críticos, no entanto apenas sistemas em equilíbrio possuem um formalismo que permite descrever o comportamento de variáveis do sistema através de seus microestados. Sistemas fora do equilíbrio ainda não possuem um formalismo canônico [40], no entanto podemos usar alguns resultados do formalismo de sistemas em equilíbrio para auxiliar na descrição de sistemas fora de equilíbrio.

O ponto fundamental na descrição de sistemas em equilíbrio é a hipótese ergódica. Assumi-la significa aceitar que todos os microestados acessíveis de um sistema são equiprováveis. A probabilidade de que o sistema esteja em um microestado  $\{\sigma\}$  é dada através da estatística de *Boltzmann*,

$$p_\sigma \propto e^{-\frac{E(\{\sigma\})}{k_B T}} \quad (2.10)$$

onde  $E(\{\sigma\})$  é uma função de energia,  $k_B$  é a constante de *Boltzmann* e  $T$  é a temperatura. A equação (2.10) vem diretamente da termodinâmica, e ela pode ser generalizada para

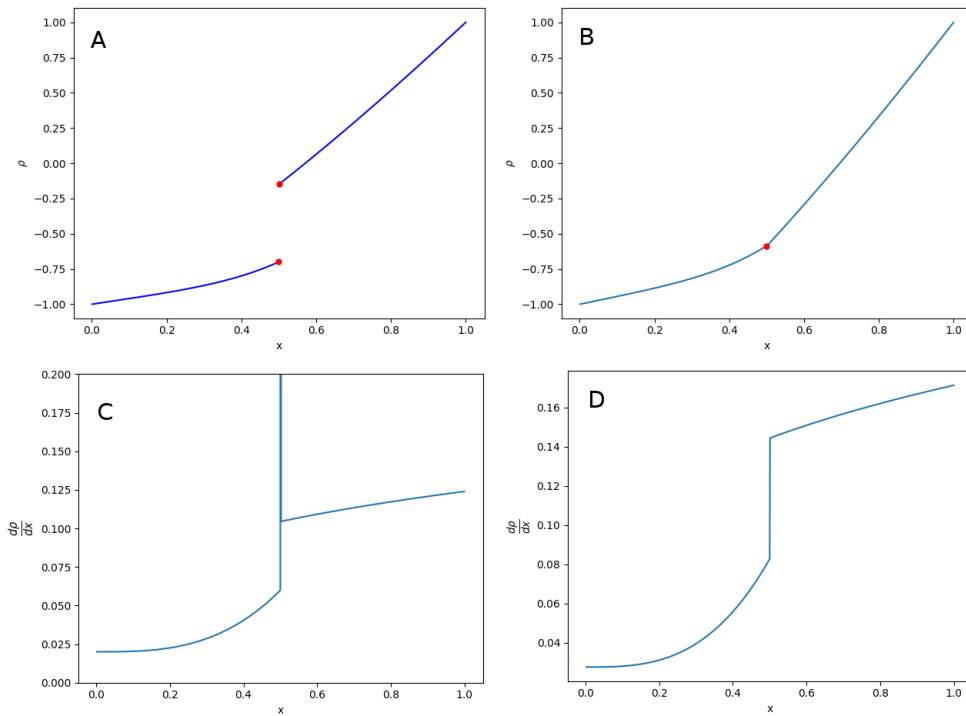


Figura 2.6: Exemplo do comportamento esperado nos dois tipos de transições de fase, note que este exemplo não representa nenhum modelo físico, é apenas um esquema ilustrativo, os parâmetros de ordem e de controle ( $\rho$  e  $x$  respectivamente) são fictícios. A) Transição de primeira ordem, é possível observar claramente uma descontinuidade no ponto de transição, marcado por pontos vermelhos. Esse tipo de descontinuidade marca a quebra de uniformidade. B) Transição de segunda ordem, é possível notar uma mudança de comportamento no parâmetro de ordem no ponto vermelho, porém agora essa mudança ocorre de maneira contínua, o ponto de transição neste caso é chamado de *ponto crítico*. As figuras C) e D) mostram o comportamento das derivadas do parâmetro de ordem  $\rho$ .

qualquer sistema em equilíbrio [42], porém usaremos a notação usual de termodinâmica.

A equação (2.10) pode ser estendida para se obter o valor médio das variáveis de um sistema em equilíbrio da seguinte maneira.

$$\langle X \rangle = \frac{\sum_{\sigma} X_{\sigma} e^{-\frac{E(\{\sigma\})}{k_B T}}}{\sum_{\sigma} e^{-\frac{E(\{\sigma\})}{k_B T}}} \quad (2.11)$$

A quantidade  $\langle X \rangle$  representa o valor médio da variável  $X$ . Definimos a função partição a partir do denominador da equação (2.11) como:

$$Z = \sum_{\sigma} e^{-\frac{E(\{\sigma\})}{k_B T}}. \quad (2.12)$$

Usando a função partição o valor médio de uma variável fica:

$$\langle X \rangle = \frac{\sum_{\sigma} X_{\sigma} e^{-\frac{E(\{\sigma\})}{k_B T}}}{Z}. \quad (2.13)$$

Observando a equação (2.13), se a função de energia depende de alguma maneira direta ou indireta de  $X_{\sigma}$ , é possível ver que o valor médio  $\langle X \rangle$  está relacionado com alguma derivada parcial da função partição.

Em particular, para sistemas em equilíbrio, um estado de equilíbrio pode ser definido como o mínimo de uma função de energia, usualmente a *energia livre de Gibbs*,

$$\mathcal{G}(N, T; \vec{J}) = -k_B T \ln \mathcal{Z} \quad (2.14)$$

onde  $N$  é o número de partículas,  $T$  a temperatura,  $\vec{J}$  é um vetor onde cada elemento representa uma força generalizada externa aplicada ao sistema e  $\mathcal{Z}$  a função partição de Gibbs, definida por:

$$\mathcal{Z}(N, T; \vec{J}) = \sum_{\{\sigma\}, \{x\}} e^{-\frac{\vec{J} \cdot \vec{x} - E(\{\sigma\})}{k_B T}}. \quad (2.15)$$

Cada elemento  $J_i$  de  $\vec{J}$  possui um deslocamento correspondente  $x_i$ . Os pares  $J_i$  e  $x_i$  correspondem a pares de estímulo e resposta onde os deslocamentos são variáveis do sistema que variam em resposta a uma força generalizada aplicada  $J_i$ . Assim, é possível determinar o valor das variáveis do sistema através das equações (2.14) e (2.15):

$$x_i = -\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial J_i} = k_B T \frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial J_i}. \quad (2.16)$$

A equação (2.16) estabelece uma relação direta entre variáveis do sistema  $x_i$  e os microestados do sistema em equilíbrio em questão através da energia livre de Gibbs.

Vamos supor um sistema em equilíbrio que apresente comportamento crítico. Se uma força generalizada de apenas um componente é aplicada no sistema  $\vec{J} \rightarrow J$ , tal que essa força possua apenas um deslocamento correspondente  $X$ , teremos:

$$\langle X \rangle(T, J) = -\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial J}. \quad (2.17)$$

Neste caso a transição de segunda ordem se dá com uma descontinuidade na primeira derivada de  $\langle X \rangle$  ou na segunda derivada da energia livre de Gibbs. Das equações (2.16) e (2.17) temos que:

$$\frac{\partial \langle X \rangle}{\partial J} = -\frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial J^2} = K_B T \frac{\partial}{\partial J} \left( \frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial J} \right) \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial \langle X \rangle}{\partial J} = K_B T \frac{\partial}{\partial J} \left( \frac{1}{\mathcal{Z}} \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial J} \right) \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \langle X \rangle}{\partial J} = K_B T \left[ \frac{1}{\mathcal{Z}} \frac{\partial^2 \mathcal{Z}}{\partial J^2} - \left( \frac{1}{\mathcal{Z}} \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial J} \right)^2 \right]. \quad (2.20)$$

Analisando termo a termo a equação (2.20), vemos que o primeiro termo a esquerda corresponde a definição de *susceptibilidade*. Os dois termos entre colchetes estão relacionados respectivamente com o segundo e primeiro momento da distribuição de  $X$ ,

$$\frac{1}{\mathcal{Z}} \frac{\partial^2 \mathcal{Z}}{\partial J^2} = \frac{\langle X^2 \rangle}{(K_B T)^2} \quad (2.21)$$

$$\left( \frac{1}{\mathcal{Z}} \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial J} \right)^2 = \frac{\langle X \rangle^2}{(K_B T)^2}. \quad (2.22)$$

Assim, é possível reescrever a equação (2.20), com o auxílio das (2.21) e (2.22) como:

$$\frac{\partial \langle X \rangle}{\partial J} = \frac{1}{K_B T} [\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2]. \quad (2.23)$$

Podemos introduzir as variáveis intensivas  $\rho$  e  $\chi$ :

$$\rho = \frac{\langle X \rangle}{N}, \quad (2.24)$$

$$\chi = \frac{1}{N} \frac{\partial \langle X \rangle}{\partial J}. \quad (2.25)$$

A equação para susceptibilidade (2.23) em termos das novas variáveis (2.24) e (2.25), fica:

$$\chi = \frac{N}{K_B T} [\langle \rho^2 \rangle - \langle \rho \rangle^2]. \quad (2.26)$$

A variável  $\rho$  pode ser usada como parâmetro de ordem, e nela é possível ver a transição de segunda ordem. A susceptibilidade, de acordo com as equações (2.26) e (2.25), mostra



a descontinuidade da transição e é simplesmente uma medida da flutuação (variância) de  $\rho$ .

Podemos definir formalmente um expoente crítico como:

$$\lambda = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\ln \rho(\tau)}{\ln \tau}, \quad (2.27)$$

onde  $\rho$  representa um parâmetro de ordem hipotético e  $\tau$  representa o parâmetro de controle reduzido:

$$\tau = \frac{T_C - T}{T_C}. \quad (2.28)$$

Normalmente representamos a relação entre o parâmetro de ordem e seu expoente na região crítica por  $\rho(\lambda) \sim \tau^\lambda$ , no entanto a relação  $\rho(\lambda) = A\tau^\lambda$  é raramente válida. Geralmente existem termos de correção de forma que uma representação mais apropriada seria:

$$\rho(\tau) = A\tau^\beta (1 + B\tau^\gamma + \dots). \quad (2.29)$$

Usando a definição do expoente crítico (2.27) e a equação (2.29) é possível obter  $\lambda = \beta$ . Os termos de correção na equação (2.29) podem ser desconsiderados se o parâmetro de controle está suficientemente próximo do ponto crítico. Assim, suficientemente próximo do ponto crítico  $T \sim T_C$ , e na ausência de qualquer força (campo) externa  $J = 0$ , temos que  $\rho$  deve se comportar como:

$$\rho(\tau, 0) \sim |\tau|^\beta, \quad (2.30)$$

onde  $\beta$  é o expoente crítico associado a  $\rho(\tau, J = 0)$ . Outros expoentes críticos e seus respectivos parâmetros de ordem são:

$$\chi(\tau, 0) \sim |\tau|^{-\gamma} \quad (2.31)$$

$$\xi(\tau, 0) \sim |\tau|^{-\nu}. \quad (2.32)$$

onde  $\xi$  é o comprimento de correlação no sistema.

Da literatura sabemos que existem relações bem definidas para alguns expoentes de sistemas críticos em equilíbrio, como as relações de *Rushbrooke*, *Widom*, *Fisher* e *Josephson* [40], no entanto elas não necessariamente são válidas para sistemas fora de equilíbrio.

As equações (2.31) e (2.32) mostram o comportamento da susceptibilidade e comprimento de correlação na região crítica. As equações (2.30) a (2.32) mostram o comportamento esperado de uma transição de segunda ordem quando  $T \rightarrow T_C$ ,

$$\rho \rightarrow 0 \quad (2.33)$$

$$\chi \rightarrow \infty \tag{2.34}$$

$$\xi \rightarrow \infty. \tag{2.35}$$

A divergência do comprimento de correlação e da susceptibilidade mostram uma ausência de escala característica do sistema durante a transição.

O laborioso trabalho de descrever transições de fase de segunda ordem em sistemas em equilíbrio parece em vão quando tratamos de sistemas fora de equilíbrio. Tais sistemas não obedecem ao balanço detalhado e portanto não é possível assumir a hipótese ergódica. Isso significa que não é possível definir a energia livre de Gibbs. No entanto, podemos extrair características comuns entre os dois tipos de sistemas.

Tanto sistemas em equilíbrio quanto fora de equilíbrio podem apresentar transições de primeira e segunda ordem, e ser agrupados em classes de universalidade. Os parâmetros de ordem  $\rho$ ,  $\chi$  e  $\xi$  devem se comportar da mesma maneira para transições de segunda ordem em sistemas fora de equilíbrio. Os parâmetros de ordem  $\rho$  e  $\chi$ , como definidos nas equações (2.24), (2.25) e (2.26), são facilmente medidos em simulações de sistemas fora do equilíbrio.

Uma descrição analítica dos parâmetros de ordem  $\rho$  e  $\chi$  em sistemas fora de equilíbrio só é possível conhecendo uma *equação mestra* que descreva a evolução temporal da distribuição de probabilidade de microestados. As vezes é possível obter uma equação de *Langevin* para algum parâmetro diretamente [40].

Transições de fase de segunda ordem em sistemas fora de equilíbrio ocorrem normalmente entre duas fases, uma ativa e uma absorvente (ou vácuo) da qual o sistema não consegue sair caso caia nela. Este tipo de transição também recebe o nome de transições de fase absorventes (do inglês, *absorbing phase transitions*). A classe de universalidade mais comum para este tipo de transição é a classe DP, do inglês *Directed Percolation*.

A classe DP é a mais importante nos sistemas que apresentam transições de fase absorventes. Janssen & Grassberger formularam uma conjectura para verificar se um sistema pertence a ela [43, 44]. Um sistema pertence à classe DP se:

1. a transição for caracterizada por um único parâmetro de ordem não negativo  $\rho$ ,
2. o sistema apresentar uma transição contínua entre uma fase ativa  $\rho > 0$  e um estado de absorção  $\rho = 0$  único,
3. a dinâmica dos elementos que constitui o sistema for de curto alcance,
4. o sistema não possuir características especiais como, simetrias não convencionais, leis de conservação, ou *quenched randomness* (parâmetros aleatórios que não variam

no tempo).

Na rede de neurônios GL, o parâmetro de ordem  $\rho$  é dado pela soma de todos os neurônios ativos no tempo  $t$ ,

$$\rho[t] = \frac{1}{N} \sum_i X_i[t] \quad (2.36)$$

ou em um formalismo mais familiar para mecânica estatística,

$$\rho[t] = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(V) p(V)[t] dV. \quad (2.37)$$

onde  $p(V)[t]dV$  é a fração de neurônios com potencial de membrana no intervalo  $[V, V + dV]$  no tempo  $t$  e  $\Phi(V)$  é a probabilidade de um neurônio disparar com potencial de membrana  $V$ , equação (2.3).

A priori podemos ver que, para qualquer topologia, a rede de neurônios GL satisfaz parcialmente o segundo item da conjectura de Janssen e Grassberger e completamente o primeiro e terceiro. Note que na equação (2.1), considerando um sistema sem estímulo externo  $I_i[t] = 0$ , se o potencial de membrana de todos os elementos é zero, a rede de neurônios GL estará em um estado absorvente e será impossível sair dele sem a adição de algum estímulo. As equações (2.36) e (2.37) definem um parâmetro de ordem único e não negativo, o parâmetro  $\chi$  é apenas a variância de  $\rho$ . A dinâmica de elementos do modelo GL levam em conta apenas interações entre elementos diretamente conectados ou seja, interações de curto alcance.

Logo, podemos trabalhar com a hipótese de que o sistema considerado neste trabalho, rede quadrada com neurônios GL, pertence à classe de universalidade DP. Veremos no capítulo sobre a aproximação de campo médio que isso é de fato verdade.

## 2.4 Leis de potência e Psicofísica

A psicofísica é a área da psicologia que tem como objetivo quantificar a experiência da percepção entendendo a relação que há entre o estímulo físico, representação interna e resposta neural. Com tal finalidade, a psicofísica faz uso de técnicas de escalonamento para medir intensidades percebidas, magnitudes de estímulos físicos diferentes ou ainda, a relação entre diferentes tipos de estímulos no espaço da percepção como função de variações dos estímulos físicos [45]. Na psicofísica neural, busca-se estudar os correlatos neuronais dessas grandezas macroscópicas, ou seja, nosso trabalho está dentro do campo da psicofísica neural [46, 47].

Todo estímulo sensorial possui uma representação interna em nosso cérebro. O objetivo das técnicas de escalonamento na psicofísica consiste em encontrar uma relação

entre propriedades do estímulo físico e qualidades ou intensidades perceptuais. Experimentos em psicofísica normalmente envolvem a variação de um estímulo físico em uma ou mais dimensões e medir a resposta do sujeito [46]. A relação entre estímulo e resposta é utilizada para inferir sobre a representação interna do estímulo. Por exemplo, supondo que o estímulo em questão seja o som, uma variação unidimensional seria variar apenas uma dimensão do estímulo, como a intensidade ou a frequência. Já uma variação multidimensional poderia ser uma combinação entre intensidade e frequência ao mesmo tempo. A resposta de sujeitos pode ser medida de diferentes maneiras, como estimativa de magnitude, produção de magnitude, julgamentos de similaridade e dissimilaridade, entre outros [46].

Em psicofísica, é muito comum experimentos que variam estímulos ao longo de uma única dimensão. Escalonamento deste tipo de experimento tem como função medir alguma quantidade subjetiva, induzida pela mudança do estímulo físico. As formas mais comuns de se medir respostas devido a variações unidimensionais de estímulos são estimativas de magnitude e produção de magnitude. No primeiro caso, uma escala é apresentada ao sujeito junto com os estímulos correspondentes aos extremos da escala, normalmente 0 e 10. O sujeito deve então classificar novos estímulos apresentados a ele baseado na escala sugerida.

No caso de produção de magnitude, o sujeito é apresentado de início aos dois estímulos extremos, e ele deve então classificar qual dos novos estímulos apresentados satisfaz alguma característica pré-definida. Por exemplo, um sujeito é apresentado a dois estímulos de luminosidade de intensidades diferentes, ele deve então dizer qual dos novos estímulos representa uma intensidade média entre os extremos.

Produção de magnitude e estimativa de magnitude possuem uma relação funcional bem conhecida entre variação de estímulo e resposta. A relação mais conhecida deste tipo de experimento é chamada de lei de potência de *Stevens*:

$$S(I) \propto I^m. \quad (2.38)$$

Na lei de potência de Stevens, o parâmetro  $I$  representa a intensidade do estímulo,  $m$  um expoente ajustado,  $\alpha$  um fator de escala e  $S(I)$  é a resposta obtida. A equação (2.38) mostra que é possível ter três tipos de relação estímulo-resposta de acordo com o expoente  $m$ . Para  $m < 1$  temos uma escala compressiva: nesta escala quanto maior é o estímulo maior será a diferença entre estímulos necessária para produzir uma resposta.

O caso oposto ocorre quando  $m > 1$ : neste caso, quanto maior o estímulo, menor é a diferença entre estímulos necessária para produzir uma resposta. Para  $m = 1$  temos o caso linear, onde a diferença entre estímulos para produzir uma resposta é constante e não

dependente da intensidade do estímulo. Exemplos típicos de estímulos representados com uma escala compressiva são intensidade sonora e luminosidade e para escalas expansivas ( $m > 1$ ) sabor e estímulos nocivos, como dor [46].

Notemos que a Psicofísica consiste em uma abordagem *top-down*: estímulos são apresentados ao sujeito, uma resposta é coletada e uma inferência a respeito da representação interna é feita. Nesses experimentos clássicos, o que ocorre no cérebro no nível neural é deixado como uma caixa preta.

Em 2006, Kinouchi e Coppel [19] mostraram que a sensibilidade e a faixa dinâmica de uma rede de neurônios formais (automata celulares) interagentes é máxima no ponto crítico de uma transição de fase de segunda ordem. Os autores usaram a atividade média da rede  $\rho$  para mapear sua resposta a estímulos aleatórios que possuem uma distribuição de probabilidade tipo Poisson  $1 - \exp(-r\delta t)$ , onde  $r$  é a taxa com que ocorre um disparo aleatório e  $\delta t$  um pequeno intervalo de tempo arbitrário (1 ms). No ponto crítico, a atividade média da rede  $\rho$  consegue mapear estímulos muito pequenos e, ao mesmo tempo, estímulos ordens de magnitude maiores, e segue uma lei na forma de potencia muito similar à lei de Stevens  $\rho(r) \propto r^m$  com o expoente compressivo  $m < 1$ . Um resultado novo é que também se obtém um nível de saturação para essa lei de potência,  $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = \rho_{\max}$ , em pleno acordo com os experimentos.

A faixa dinâmica de trabalho é uma medida que relaciona o menor estímulo e o maior estímulo que a rede consegue mapear,

$$\Delta = 10 \log \left( \frac{r_{0.9}}{r_{0.1}} \right). \quad (2.39)$$

onde  $\Delta$  é o valor da faixa dinâmica e  $[r_{0.1}, r_{0.9}]$  são os valores da taxa de estímulos que correspondem à resposta da rede  $[\rho_{0.1}, \rho_{0.9}]$ . Os valores  $\rho_x$  são obtidos através da função:

$$\rho_x = \rho_0 + x(\rho_{\max} - \rho_0). \quad (2.40)$$

onde os valores  $\rho_0$  e  $\rho_{\max}$  são as menores e maiores respostas possíveis no sistema.

Por exemplo, no estado subcrítico,  $\rho_0 = 0$ , mas no estado supercrítico, temos  $\rho_0 = \rho_{ho(w)} > 0$ . Assim, se considerarmos a variação total de resposta  $\delta_\rho = \rho_{\max} - \rho_0$  do sistema, o valor  $\rho_{0.1}$  equivale a descartar estímulos que evocam uma resposta menor que 10% de  $\delta_\rho$ . Analogamente,  $\rho_{0.9}$  equivale a descartar estímulos que evocam uma resposta maior que 90% de  $\delta_\rho$ , pois tal está muito próxima da saturação e a resposta da rede não discrimina bem a intensidade dos estímulos, ver figura (2.7).

A teoria de Kinouchi & Copelli [19] é uma teoria microscópica, mecanística, da lei macroscópica de Stevens, no espírito da Física Estatística. Podemos relacionar o expoente da lei de Stevens, equação (2.38), diretamente com o comportamento esperado para o parâmetro de ordem de um sistema que apresenta estado crítico.

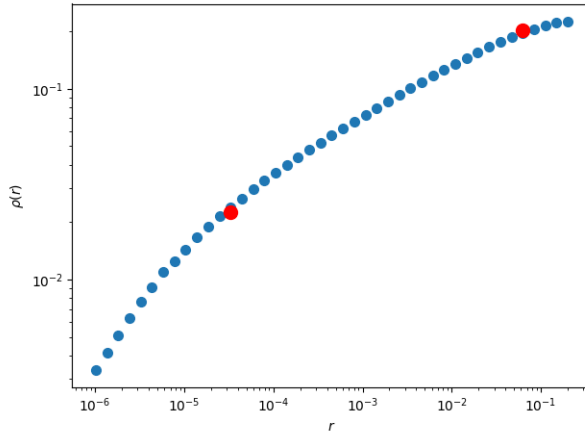


Figura 2.7: Exemplo de como são selecionados os pontos  $r_{0.1}$  e  $r_{0.9}$ . Os pontos em vermelho correspondem as coordenadas  $(r_{0.1}, \rho_{0.1})$  e  $(r_{0.9}, \rho_{0.9})$ .

Da literatura, sabemos que o parâmetro de ordem de sistemas termodinâmicos próximo de uma transição de fase absorvente na presença de um campo externo deve escalar com  $\rho \propto h^{\beta/\sigma}$  [40], onde  $h$  representa um campo externo pequeno,  $\sigma$  o expoente crítico associado ao tamanho médio de *clusters* e  $\beta$  o expoente crítico associado ao parâmetro de ordem descrito na equação (2.30). Em nosso sistema  $r$  faz o papel de campo externo, assim podemos identificar o expoente  $m$  de Stevens em termos dos expoentes  $\beta$  e  $\sigma$ :

$$m = \frac{\beta}{\sigma}. \quad (2.41)$$

Kinouchi & Copelli examinaram uma rede aleatória de automata celulares com  $K$  vizinhos, obtendo expoentes de campo médio  $\beta = 1$  e  $\sigma = 2$ . Neste caso,  $m = 1/2$ , ou seja, obtemos uma lei compressiva com larga faixa dinâmica. Em nosso trabalho, mostraremos que em uma rede bidimensional,  $m$  é ainda menor, e se justapormos duas camadas conectadas por uma fração de sinapses, o efeito é ainda maior, gerando uma enorme faixa dinâmica.

## 2.5 Simulações

Todas as simulações foram realizadas em *C++* e análise de dados em *Python*. Usamos a atividade média da rede  $\rho$  como parâmetro de ordem e o peso sináptico médio  $w$  como parâmetro de controle.

No capítulo seguinte apresentamos uma aproximação de campo médio e mostramos formalmente a razão da escolha dessas variáveis como parâmetros de ordem e controle. Mostramos também as condições para que o modelo GL apresente uma transição de fase absorvente. Todas as simulações foram realizadas com  $\mu = 0$ ,  $I = 0$ ,  $V_T = 0$

e  $\Gamma = 1.0$ . Visto que o modelo apresenta vários parâmetros explora-los, apenas com simulações, dificilmente traria resultados interessantes.

Em todas as simulações estamos interessados essencialmente em medir como o parâmetro de ordem varia em relação ao parâmetro de controle. Com exceção da medida de faixa dinâmica, neste caso estamos interessados em medir como o parâmetro de ordem varia em função de estímulos externos. Todas as simulações duraram 100000 iterações. Uma iteração consiste na atualização dos potenciais de ação do modelo, de acordo com as equações adequadas a topologia em questão, e na atualização dos disparos dos neurônios. Em cada simulação coletamos dados da atividade da rede para cada iteração. Para evitar estados transientes do sistema nas medidas descartamos as 10000 primeiras iterações de cada simulação.

Definimos as medidas em simulação da atividade da rede  $\rho$  e susceptibilidade  $\chi$  como,

$$\rho = \frac{1}{t_f - t_i} \sum_{t=t_i}^{t_f} \rho[t], \quad (2.42)$$

$$\chi = N \frac{1}{t_f - t_i} \sum_{t=t_i}^{t_f} (\rho[t] - \rho)^2 = N\sigma^2. \quad (2.43)$$

Nas equações (2.42) e (2.43) a medida instantânea da atividade da rede  $\rho[t]$  é obtida pela equação (2.36) Cada simulação foi refeita 10 vezes, assim a medida final de  $\rho$  e  $\chi$ ,

$$\rho = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} \rho_i \pm \sigma_\rho, \quad (2.44)$$

$$\chi = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} \chi_i \pm \sigma_\chi. \quad (2.45)$$

Note que  $\rho_i$  e  $\chi_i$  nas equações (2.44) e (2.45) são medidas obtidas pelas equações (2.42) e (2.43) para uma repetição de uma simulação. O erro de cada medida é o desvio padrão para um dado conjunto de simulações.

### 2.5.1 Simulações de rede completa

Simulamos uma rede tipo grafo completo de neurônios GL através da equação de modelo (2.1) com um conjunto de conexões definido pela equação (2.5). Em cada simulação fizemos uma varredura no parâmetro de controle controle  $w$  entre 0.1 e 2.0 com um incremento de  $\delta_w = 0.1$  para redes com diversos tamanhos diferentes.

Utilizamos as equações (2.42) a (2.45) para construir gráficos de  $\rho_N(w) \times w$  e  $\chi_N(w) \times w$  para sistemas com tamanhos diferentes,  $N$  é o número de neurônios do sistema.

### 2.5.2 Simulações de rede *annealed*

Para construir o sistema com topologia *annealed* de neurônios GL utilizamos a equação de modelo (2.1) e o conjunto de conexões definido pela equação (2.6). Neste caso em cada simulação fizemos uma varredura no parâmetro de controle  $w$  entre 0.25 e 2.0 com um incremento de  $\delta_w = 0.05$  para conjuntos de vizinhos aleatórios de tamanhos diferentes, iniciamos com  $|K_i| = 2$  até  $|K_i| = 64$  com um incremento  $\delta_k = 2$ , o tamanho do sistema foi mantido fixo.

Utilizamos a equação (2.42) para construir gráficos de  $\rho_k(w) \times w$  para diferentes tamanhos de conjuntos de conexões.

### 2.5.3 Simulações de rede bidimensional

Construímos o sistema bidimensional através da equação de modelo (2.7) e do conjunto de conexões definido na equação (2.8) incluindo condições periódicas de contorno. Caracterizamos a rede bidimensional de neurônios GL medindo o ponto crítico da transição de fase e os expoentes críticos relevantes.

Primeiramente medimos o ponto crítico do sistema, para isso realizamos simulações onde em cada uma é feita uma varredura no parâmetro de controle  $w$  entre 0.1 e 2.0 com um incremento de  $\delta_w = 0.1$ . Com isso identificamos a região do parâmetro de controle onde ocorre a transição,  $w_C \in [1.7, 1.8]$ . Realizamos novas simulações dentro do intervalo obtido, dessa vez utilizamos como incremento  $\delta_w = 0.01$ , com isso conseguimos melhorar a região onde ocorre a transição,  $w_C \in [1.73, 1.75]$ . Uma ultima bateria de simulações foi feita com um incremento  $\delta_w = 0.001$  dentro do ultimo intervalo para determinar o ponto crítico  $w_C$ . Todas as varreduras no parâmetro de controle foram feitas para redes com diversos tamanhos.

Utilizamos as equações (2.42) a (2.45) para construir gráficos de  $\rho_N(w) \times w$  e  $\chi_N(w) \times w$  para sistemas com tamanhos diferentes.

Para medir os expoentes críticos desse sistema utilizamos uma técnica conhecida como escalonamento de tamanho finito que será apresentada no capítulo de resultados na sessão sobre a rede bidimensional. Essencialmente utilizamos os mesmos dados para as curvas  $\rho_N(w) \times w$  e  $\chi_N(w) \times w$ , porém construímos curvas do tipo  $\rho_w(L) \times L$  e  $\chi_w(L) \times L$ , onde  $L = \sqrt{N}$  é o tamanho característico da rede.

### 2.5.4 Simulações da rede bidimensional em camadas

Utilizamos a equação de modelo (2.9) e o padrão de conexões definido na equação (2.8) com condições de contorno periódicas para formar um sistema bidimensional com duas ca-



madras. Realizamos uma espécie de experimento psicofísico onde estimulamos os neurônios da primeira camada do sistema com um processo de Poisson,

$$P(X_{ij}[t] = 1 | X_{ij}[t] = 0) = \lambda(r) = 1 - e^{-r\delta t}. \quad (2.46)$$

Onde  $r$  é a taxa de disparo que controla a probabilidade de um elemento disparar devido a equação (2.46) e  $\delta t$  é um intervalo muito pequeno em relação ao tempo de simulação, no caso é apenas um passo de tempo. Ou seja, a cada iteração do sistema cada neurônio da primeira camada pode disparar devido a dinâmica do modelo ou devido a equação (2.46).

Em cada simulação realizamos uma varredura da taxa de disparo do processo de Poisson  $r$  de  $10^{-6}$  a  $10^{-1}$ . Fizemos a varredura em  $r$  para redes com tamanhos e pesos sinápticos diferentes. Medimos a atividade da rede em cada uma das duas camadas e utilizamos a equação (2.42) em cada camada para construir curvas  $\rho_{N,w}(r) \times r$ .

Medimos a faixa dinâmica de cada camada através das equações (2.39) e (2.40).

## Capítulo 3

# Campo médio

O objetivo deste projeto foi investigar como uma rede bidimensional de neurônios GL responde a estímulos externos e estender este estudo para um modelo bidimensional em duas camadas. Para isso é preciso conhecer o sistema em questão. A rede de neurônios GL é um sistema fora ou em equilíbrio? A qual classe de universalidade ele pertence? Quais os parâmetros de ordem e expoentes críticos relevantes? Alterar a topologia da rede altera alguma das questões anteriores?

Uma primeira análise pode ser feita observando que, em um dado tempo  $t$ , se o sistema se encontra em um microestado  $\{X[t]\} = \{X_1[t], X_2[t], \dots, X_N[t]\}$ , no próximo instante  $t + 1$  os microestados acessíveis não serão equiprováveis. Para ilustrar isso, considera o sistema mais simples possível, dois neurônios interagindo. Se em um dado instante de tempo o sistema se encontra no microestado  $\{X[t]\} = \{1, 0\}$ , os possíveis microestados acessíveis no próximo instante são  $\{X[t + 1]\} = \{0, 1\}$  e  $\{X[t + 1]\} = \{0, 0\}$ . De acordo com as equações (2.1) e (2.3), na ausência de estímulo externo ( $I_i[t] = 0$ ) e considerando  $\mu = 0$ , as probabilidades de ocorrência dos dois possíveis microestados são, respectivamente  $\Phi(w_{12})$  e  $1 - \Phi(w_{12})$ . Essas probabilidades não necessariamente são iguais e portanto vemos que a rede de dois elementos GL não está em equilíbrio, o mesmo será verdade para uma rede com  $N$  elementos.

Seguimos com uma análise de campo médio onde é possível obter resultados analíticos e definir o parâmetro de ordem e de controle. Apresentamos também as condições necessárias para que o sistema de neurônios GL apresente uma transição de fase de segunda ordem.

## 3.1 Aproximação de campo médio

Considere a equação (2.1), a aproximação de campo médio consiste em fazer alguma aproximação referente a interação dos elementos que leve em conta características macroscópicas do sistema [40]. No caso, assumimos que a distribuição de pesos sinápticos  $\{w_{ij}\}$  possui média  $w$ , variância finita e desconsideramos correlação entre pares [26]. Isso leva a uma

aproximação da somatória da equação (2.1),

$$\frac{1}{|K_i|} \sum_{j \in K_i} w_{ij} X_j[t] \approx w\rho[t], \quad (3.1)$$

onde  $\rho[t]$  é a atividade da rede dada pela equação (2.36) e  $|K_i| = N - 1$ .

Com essa aproximação podemos reescrever a equação (2.1),

$$V_i[t + 1] = \begin{cases} 0 & \text{if } X_i[t] = 1 \\ \mu V_i[t] + I_i[t] + w\rho[t] & \text{if } X_i[t] = 0 \end{cases}. \quad (3.2)$$

Supondo que todos os neurônios da rede já tenham disparado pelo menos uma vez e que  $I_i[t] = I$  para qualquer neurônio  $i$ . Dessa maneira todos os neurônios que dispararam juntos evoluem da mesma forma e possuíram o mesmo potencial de membrana, de acordo com a equação (3.2). Isso permite que os neurônios sejam agrupados de acordo com sua idade de disparo  $\eta_k[t]$  e por seus potenciais de membrana  $U_k[t]$ . O grupo  $\eta_k[t]$  é a fração de todos os neurônios que dispararam entre os tempos  $t - k - 1$  e  $t - k$ , ou seja não dispararam a  $k$  passos de tempo. O potencial  $U_k[t]$  é o potencial de membrana de todos os neurônios do grupo  $\eta_k[t]$ .

Uma das maneiras de definir o parâmetro  $\rho$  no sistema GL foi através da equação (2.37), note que se todos os neurônios tenham disparado pelo menos uma vez a função  $p(V)[t]$  será composta pelos componentes  $\eta_k[t]$ .

Com as equações (3.2), (2.37) escrita em termos dos grupos  $\eta_k[t]$  e com as definições de  $\eta_k[t]$  e  $U_k[t]$ , encontramos as equações que governam a evolução temporal da atividade da rede  $\rho[t]$ ,

$$\rho[t] = \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k[t] \Phi(U_k[t]), \quad (3.3)$$

$$\eta_k[t + 1] = (1 - \phi(U_{k-1}[t])) \eta_{k-1}[t], \quad (3.4)$$

$$U_k[t + 1] = \mu U_{k-1}[t] + I + w\rho[t]. \quad (3.5)$$

Em um estado estacionário as equações (3.3) a (3.5) não dependem mais do tempo e podem ser simplificadas,

$$U_0 = 0, \quad (3.6)$$

$$U_k = \mu U_{k-1} + I + w\rho, \quad (3.7)$$

$$\rho = \eta_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k \Phi(U_k), \quad (3.8)$$

$$\eta_k = (1 - \phi(U_{k-1}))\eta_{k-1}. \quad (3.9)$$

$$(3.10)$$

As equações (3.3) a (3.5) e (3.8) a (3.7) podem ser resolvidas numericamente. Dentro do caso estacionário, apresentamos resultados para uma aproximação da atividade da rede  $\rho$  próxima do ponto crítico do sistema e um caso analítico.

## 3.2 Aproximação no ponto crítico

Para que ocorra uma transição de fase absorvente o sistema não pode receber estímulos externos, isso faria com que ele nunca chagasse no estado absorvente e não seria possível observar a transição. Consideramos também  $V_T = 0$  na equação (2.3) para  $\phi(V)$ , pois  $V_T$  faz o sistema passar por uma transição de primeira ordem [26].

Podemos expandir a equação (3.8) com as equações (3.9) e (3.7) com  $I = 0$ ,

$$\rho = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_{k-1} (1 - \Phi(U_{k-1})) \Phi(\mu U_{k-1} + w\rho). \quad (3.11)$$

Note que próximo do ponto crítico, como estamos considerando uma transição entre um estado absorvente  $\rho = 0$  e um estado ativo  $\rho > 0$ , o valor de  $\rho$  deve ser próximo de zero na vizinhança da transição. Na equação (3.7) com  $I = 0$  isso significa que os termos  $U_k$  serão pequenos. Podemos aproximar a função  $\Phi(U_k)$ ,

$$\Phi(U_k) = \frac{\Gamma U_k}{1 + \Gamma U_k} \approx \Gamma U_k - \Gamma^2 U_k^2. \quad (3.12)$$

Inserindo a aproximação de  $\Phi(U_k)$  na equação (3.11) temos,

$$\rho = \sum_{k=0}^{\infty} \eta_{k-1} (1 - \Gamma U_{k-1} + \Gamma^2 U_{k-1}^2) (\Gamma \mu U_{k-1} + \Gamma w\rho - \Gamma^2 (\mu U_{k-1} + w\rho)^2). \quad (3.13)$$

É possível reorganizar a equação (3.13) em termos da aproximação (3.12),

$$\begin{aligned} \rho \approx \Gamma w \rho (1 - \Gamma w \rho) \sum_{k=1}^{\infty} \eta_{k-1} + (\mu - 2\Gamma \mu w \rho - \Gamma w \rho + \Gamma^2 w^2 \rho^2) \sum_{k=1}^{\infty} \eta_{k-1} \Phi(U_{k-1}) \\ - \Gamma \mu^2 \sum_{k=1}^{\infty} \eta_{k-1} U_{k-1} \Phi(U_{k-1}). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Os termos com potencias de  $U_k$  maiores que 2 e não agrupáveis para formar a equação (3.12) são desprezíveis.

Da equação (3.14) temos que  $\sum_{k=1}^{\infty} \eta_{k-1} = 1$ , ou seja a soma de todos os grupos de neurônios com todas as idades de disparo  $k$  não pode ser maior que o número de neurônios da rede. A segunda somatória da equação (3.14) é apenas a definição de  $\rho$ , equação (3.8), com o índice deslocado.

Descartando todos os termos com potencias em  $\rho$  maiores que 2 a equação (3.14) fica,

$$\rho \approx \rho(\Gamma w + \mu) + \rho^2(-\Gamma^2 w^2 - 2\Gamma w \mu - \Gamma w) - \Gamma \mu^2 \sum_{k=1}^{\infty} \eta_{k-1} U_{k-1} \Phi(U_{k-1}). \quad (3.15)$$

Para avaliar o ultimo termo da equação (3.15) note que a equação recursiva (3.7) pode ser reescrita como uma série geométrica parcial,

$$U_k = w \rho \sum_{j=0}^{k-1} \mu^j = w \rho \frac{1 - \mu^k}{1 - \mu}. \quad (3.16)$$

A somatória da equação (3.15) fica,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \eta_{k-1} U_{k-1} \Phi(U_{k-1}) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_{k-1} \Phi(U_{k-1}) w \rho \frac{1 - \mu^{k-1}}{1 - \mu}. \quad (3.17)$$

A equação (3.17) pode ser reorganizada,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \eta_{k-1} \Phi(U_{k-1}) w \rho \frac{1 - \mu^{k-1}}{1 - \mu} &= \frac{w \rho}{1 - \mu} \sum_{k=1}^{\infty} \eta_{k-1} \Phi(U_{k-1}) (1 - \mu^{k-1}) \\ &= \frac{w \rho}{1 - \mu} \left( \rho - \sum_{k=1}^{\infty} \eta_{k-1} \Phi(U_{k-1}) \mu^{k-1} \right). \end{aligned}$$

A ultima soma da equação acima pode ser descartada por possuir apenas termos em  $\rho^3$  e maiores [26],

$$\sum_{k=1}^{\infty} \eta_{k-1} \Phi(U_{k-1}) w \rho \frac{1 - \mu^{k-1}}{1 - \mu} \approx \frac{w \rho^2}{1 - \mu}. \quad (3.18)$$

Juntando as equações (3.18) e (3.15) temos,

$$\begin{aligned}\rho &\approx \rho(\Gamma w + \mu) + \rho^2(-\Gamma^2 w^2 - 2\Gamma w\mu - \Gamma w) - \frac{\Gamma\mu^2 w\rho^2}{1 - \mu}, \\ \rho(\Gamma w + \mu - 1) + \rho^2(-\Gamma^2 w^2 - 2\Gamma w\mu - \Gamma w) - \frac{\Gamma\mu^2 w\rho^2}{1 - \mu} &\approx 0.\end{aligned}\quad (3.19)$$

Da equação (3.19) é possível ver que uma das soluções é  $\rho = 0$ , essa solução corresponde a um estado absorvente. A outra solução da equação (3.19),

$$\rho = \frac{\Gamma w + \mu - 1}{\Gamma w(\Gamma w + 2\mu + 1 + \mu^2/(1 - \mu))}.\quad (3.20)$$

A equação (3.20) corresponde a um estado ativo. Como estamos considerando uma aproximação na vizinhança do ponto crítico, o valor de  $\rho$  deve ser muito pequeno próximo dele,

$$\Gamma w \approx 1 - \mu,\quad (3.21)$$

de forma que, exatamente no ponto crítico da transição de fase absorvente,

$$\begin{aligned}\Gamma w_C &= 1 - \mu, \\ w_c &= \frac{1 - \mu}{\Gamma}.\end{aligned}\quad (3.22)$$

Da equação acima temos que  $w_C$  corresponde ao valor crítico do peso médio das sinapses em que ocorre a transição. Note que as variáveis  $\Gamma$  e  $w$  são variáveis adjuntas. A equação (3.20) pode ser reescrita,

$$\rho = \frac{1}{1 + \Gamma w + 2\mu + \mu^2/(1 - \mu)} \frac{w - w_C}{w}.\quad (3.23)$$

Inserindo a aproximação (3.21) na equação (3.23) temos,

$$\rho \approx \frac{1}{2 + \mu + \mu^2/(1 - \mu)} \frac{w - w_C}{w}.\quad (3.24)$$

Podemos comparar as soluções numéricas das equações (3.3), (3.4) e (3.5) com a aproximação de  $\rho$  próximo do ponto crítico, equação (3.24), figura (3.1).

Podemos ver na figura (3.1) que conforme aumentamos  $\mu$  a aproximação se distancia mais da solução numérica. Apesar disso, suficientemente próximo do ponto crítico e para baixos valores de  $\mu$  a aproximação é válida, vale a pena observar também que a equação (3.22) é excelente para prever o ponto crítico no caso da aproximação de campo médio.

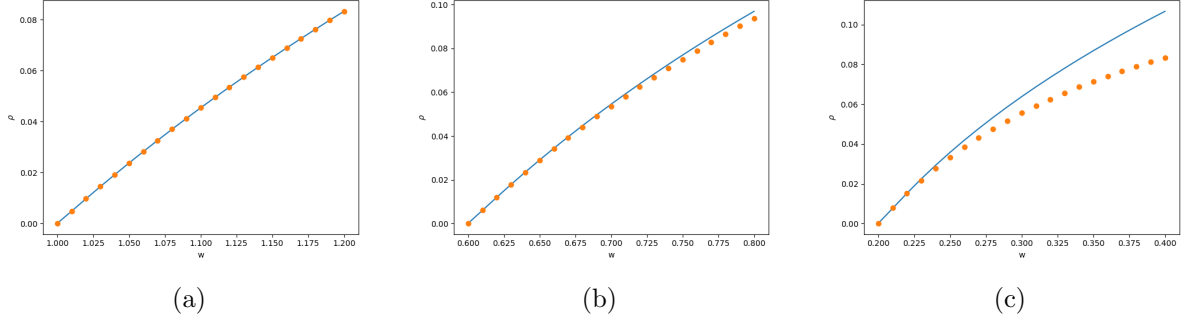


Figura 3.1: Curvas geradas com  $\Gamma = 1.0$ ,  $I = 0$  e  $V_T = 0$ . Comparação entre  $\rho$  obtido através da solução numérica (linha cheia) das equações (3.3 - 3.5) e  $\rho$  dado pela aproximação na região crítica (pontos), equação (3.24), para diferentes valores de  $\mu$ . (a)  $\mu = 0.1$ , (b)  $\mu = 0.4$  e (c)  $\mu = 0.8$ .

A aproximação da atividade da rede  $\rho$  nos mostra que, para o caso de campo médio com  $I = 0$  e  $V_T = 0$ , o sistema passa por uma transição de fase absorvente. Concluimos também que o parâmetro  $\rho$  funciona como parâmetro de ordem do modelo e que tanto  $\Gamma$  como  $w$  podem ser usados como parâmetro de controle, equação (3.22). Podemos ver também que o parâmetro  $\mu$  apenas desloca o ponto crítico e não altera o formato da curva de  $\rho$ , equação (3.24). Durante este trabalho  $w$  foi escolhido como parâmetro de controle.

Voltando a conjectura de Janssen & Grassberger do capítulo anterior, mostramos as condições para que a rede de neurônios GL apresente uma transição de fase entre um estado único absorvente e uma fase ativa flutuante. Mostramos que a transição é caracterizada por apenas um parâmetro de ordem não negativo. A interação suposta na aproximação de campo médio é de curto alcance, cada neurônio percebe todos os outros como um vizinho próximo. Não foi introduzida nenhuma característica especial para a aproximação, como simetrias ou leis de conservação. Podemos concluir que a rede de neurônios GL pertence a classe de universalidade DP.

### 3.3 Caso analítico

Para o caso analítico consideramos apenas que  $\mu = 0$  na equação (3.7),

$$U_k = I + w\rho.$$

Como ainda estamos no caso estacionário, isso significa que a equação (2.37) para  $p(V)$  será formada por apenas dois picos,  $\eta_0$  e  $\eta_1$  com potenciais de membrana correspondentes  $U_0 = 0$  e  $U_1 = I + w\rho$ .

Assim a equação (3.8) pode ser escrita como,

$$\rho = \eta_0 \Phi(U_0) + \eta_1 \Phi(U_1), \quad (3.25)$$

como  $\rho = \eta_0$  e temos apenas dois grupos de neurônios  $\eta_k$ , então  $\eta_1 = 1 - \eta_0 = 1 - \rho$ . Considerando que  $\Phi(U_0) = 0$ ,

$$\rho = (1 - \rho) \Phi(I + w\rho), \quad (3.26)$$

substituindo  $\Phi(I + w\rho)$  pela equação (2.3),

$$\rho = (1 - \rho) \frac{\Gamma(I + w\rho - V_T)}{1 + \Gamma(I + w\rho - V_T)},$$

$$2\Gamma w\rho^2 - (\Gamma w + 2\Gamma(V_T - I) - 1)\rho + \Gamma(V_T - I) = 0. \quad (3.27)$$

Analisando a equação acima vemos que o estado absorvente, caracterizado por  $\rho = 0$ , não é uma solução, ou seja o sistema não passa mais por uma transição de segunda ordem. O sistema passa por uma transição de primeira ordem caracterizada pela bifurcação dada pelas duas raízes da equação (3.27),

$$\rho^\pm = \frac{\Gamma(w - 2V_T - 2I) - 1 \pm \sqrt{\Delta}}{4\Gamma w}, \quad (3.28)$$

$$\Delta = (\Gamma(w + 2V_T - 2I) - 1)^2 + 8\Gamma^2 w(V_T - I).$$

No caso limite  $V_T, I \rightarrow 0$  temos que,

$$\rho^\pm = \begin{cases} + : \frac{\Gamma w - 1}{2\Gamma w} \\ - : 0 \end{cases}. \quad (3.29)$$

O estado absorvente é recuperado com  $\rho^-$ . É possível identificar o ponto crítico desse caso da mesma maneira que foi feita pra equação (3.21) e (3.22),

$$\Gamma w \approx 1$$

$$w_C = \frac{1}{\Gamma}$$

$$\rho^+ = \frac{1}{2} \frac{w - w_C}{w}. \quad (3.30)$$

A equação (3.30) é um caso particular da equação (3.24) com  $\mu = 0$ .



É possível ver que tanto a equação (3.23) quanto (3.30) possuem um formato  $\rho \propto |\bar{w}|^\beta$ , onde  $|\bar{w}| = |(w - w_C)/w|$ . O parâmetro  $|\bar{w}|$  é o parâmetro de controle reduzido escolhido para rede de neurônios GL. Observando as equações (3.23) e (3.30) vemos que o expoente  $\beta$  associado a  $\rho$  no ponto crítico é 1, que corresponde ao valor esperado para este expoente em sistemas acima da dimensão crítica pertencentes a classe de universalidade DP [40, 43].

# Resultados

## 4.1 Rede de grafo completo

Apresentamos resultados para simulações do sistema de neurônios GL em uma rede de grafo completo ( $K = N - 1$  vizinhos). Temos abaixo uma amostra do sistema nos três regimes, subcrítico, crítico e supercrítico, figura (4.1).

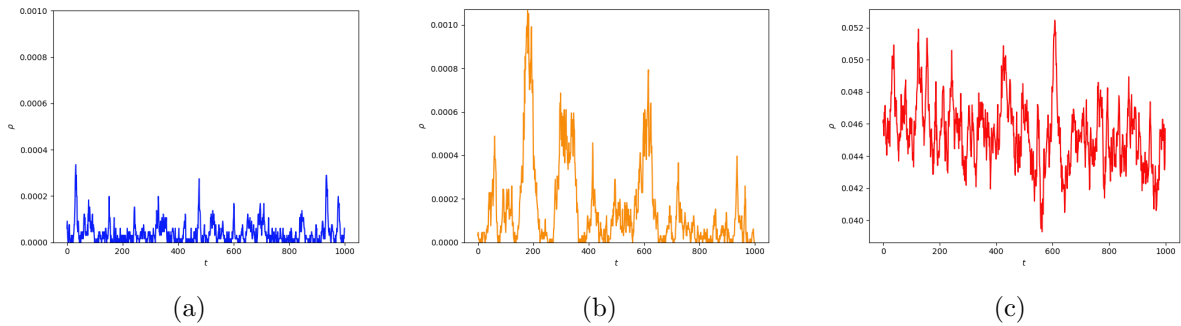


Figura 4.1: Amostras da atividade na rede tipo grafo completo nos três regimes. (a) subcrítico  $w = 0.9$ , (b) crítico  $w_C = 1.0$  e (c) supercrítico  $w = 1.1$ .

Note que nos casos subcrítico e crítico a rede sempre atinge o estado absorvente, independentemente do estado inicial. Neste caso, seguindo o procedimento usual em estudos de dinâmica de avalanches, um elemento é ativado de maneira aleatória para reativar a rede.

Assim, com as equações (2.44) a (2.45), construímos as curvas  $\rho \times w$  e  $\chi \times w$  para os diferentes tamanhos de rede. Podemos comparar as curvas da figura (4.2) com as curvas analíticas obtidas através das equações (3.23) e (3.30). Vemos da figura (4.3) que a aproximação de campo médio é excelente quando tratamos da topologia de rede completa.

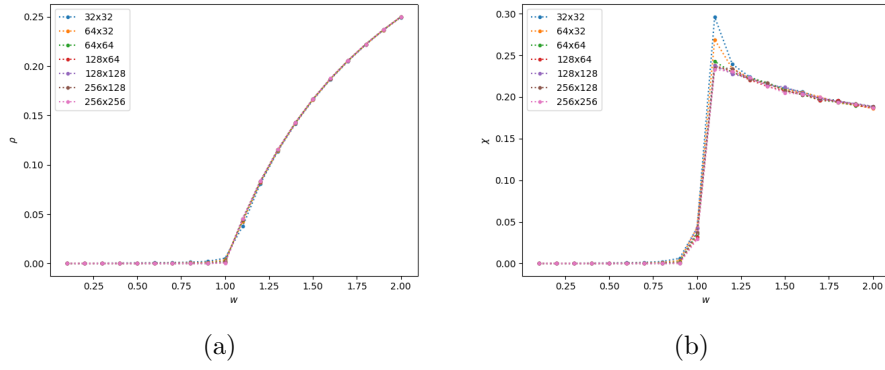


Figura 4.2: Curvas (a)  $\rho \times w$  e (b)  $\chi \times w$  para diversos tamanhos de rede.

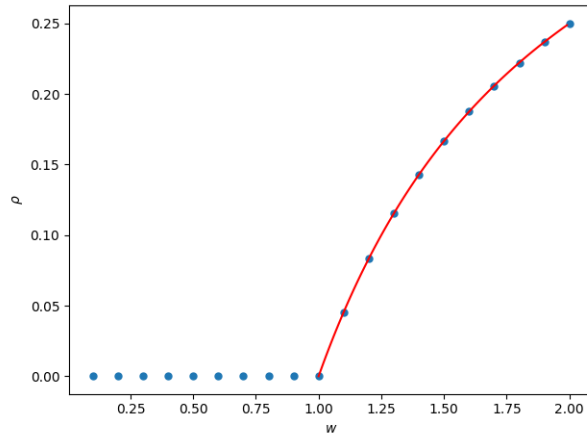


Figura 4.3: Simulação do modelo GL em uma topologia de rede completa com 65536 neurônios, equações (2.1) e (2.5), pontos em azul. Caso analítico em vermelho, equação (3.30).

## 4.2 Rede *annealed*

Sabemos da literatura que alterar a dimensionalidade de um sistema não necessariamente altera sua classe de universalidade, mas abaixo de uma certa dimensão crítica os expoentes críticos mudam [40, 43, 44]. Para a classe DP, a dimensão crítica é  $d_c = 4$ . Sistemas acima desta dimensão são bem representados pela aproximação de campo médio, como é o caso do modelo GL interagindo em uma rede completa. Sistemas abaixo da dimensão crítica possuem expoentes que normalmente não podem ser obtidos de forma analítica.

Em uma topologia hipercúbica, como é o caso da rede bidimensional, definido pela equação (2.8), o número de primeiros vizinhos é dado pela dimensão da rede. No caso bidimensional, cada elemento possui  $k = 4$  conexões, no caso de uma rede em três dimensões cada elemento possui  $k = 6$  conexões. Supondo que nosso sistema é da classe DP, concluímos que para redes hipercúbicas com  $d \geq 4$  o sistema GL deve se comportar de acordo com as equações de campo médio.

O que ocorre quando temos um número fixo de conexões por neurônio, porém sem a estrutura espacial de uma rede hipercúbica? Este é o caso de uma rede com  $K$  sinapses de longa distância, que podem ser ligações *annealed* ou *quenched*. No caso quenched, as ligações de longa distância são sorteadas no início da simulação e fixadas. No caso annealed, que iremos estudar, a cada passo de tempo sorteamos as  $K$  ligações, com o cuidado de evitar auto-ligações e ligações repetidas.

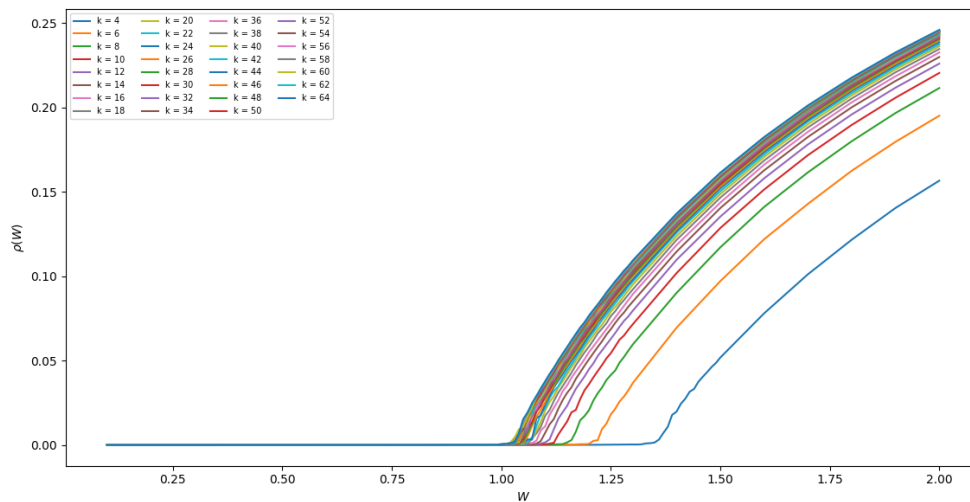


Figura 4.4: Curvas  $\rho \times w$  para um sistema de 32768 neurônios para diversos conjuntos  $k$  (2.6) de tamanhos diferentes.

Note que, na figura (4.4), as curvas mostram que o sistema ainda apresenta uma transição de fase absorvente, porém o ponto crítico depende do número médio de conexões

$k$  que os neurônios fazem.

Obtivemos os pontos críticos para os diferentes valores de  $k$  através da segunda derivada da atividade da rede  $\rho$  em relação ao peso sináptico  $w$ . A segunda derivada da atividade apresenta um pico na transição, ver figura (4.5).

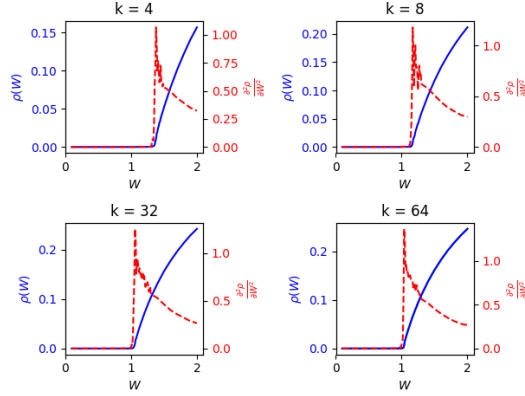


Figura 4.5: Exemplos de como obter o valor  $w_C(k)$  através da segunda derivada do parâmetro de ordem  $\rho$  para casos de conjuntos de conexões dinâmicas de tamanhos diferentes.

Construímos uma curva  $w_C(k) \times k$  para determinar qual é a relação funcional entre o tamanho do conjunto de vizinhos aleatórios e o deslocamento do ponto crítico em relação ao caso de campo médio, ver figura (4.6).

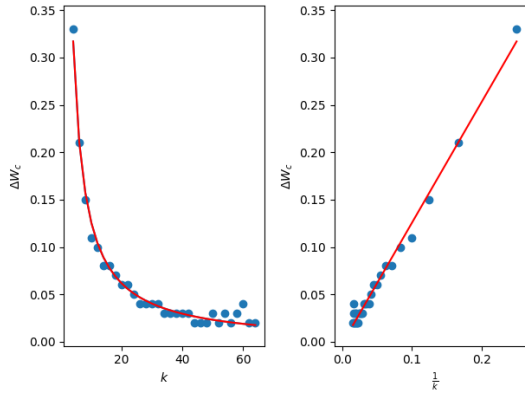


Figura 4.6: Curvas de correção para o caso da rede *annealed* com número de vizinhos  $k$  diferentes, *fitting* em vermelho.

$\Delta w_C(k) = w_C(k) - w_C$  onde o valor  $w_C = 1$  é o valor do ponto crítico no caso de campo médio. A curva de ajuste, em vermelho, mostra uma relação do tipo,

$$\Delta w_C(k) = a + \frac{b}{k}, \quad (4.1)$$

com  $a \approx 0.0024$  e  $b \approx 1.278$ .

Através da equação (4.1) podemos fazer o colapso de todas das curvas com diferentes valores de  $k$ . Fazemos isso reescalando o eixo da abcissa para cada curva da figura (4.4) por  $w/w_C(k)$ .

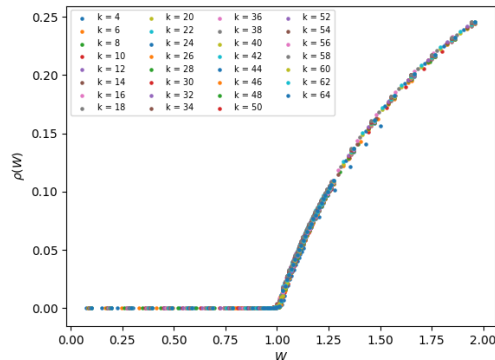


Figura 4.7: Colapso de curvas,  $\rho \times w/w_C(k)$  para diferentes tamanhos de conjuntos de conexões aleatórias  $k$ .

Podemos observar que o colapso das curvas, figura (4.7), cai sobre o caso da aproximação de campo médio onde a atividade da rede  $\rho$  pode ser descrita pela equação (3.30).

### 4.3 Rede bidimensional

A rede bidimensional de neurônios GL é um sistema que pertence a classe de universalidade DP e está abaixo da dimensão crítica. No entanto, este sistema ainda apresenta uma transição de fase absorvente nas condições descritas na sessão (3.1). Tanto os expoentes quando o ponto crítico devem mudar em relação aos resultados da aproximação de campo médio. Não encontramos uma solução analítica para este sistema, portanto a caracterização da rede bidimensional foi feita apenas através de simulações.

Utilizamos as equações (2.44) e (2.45) para medir  $\rho$  e  $\chi$  com diferentes valores de  $w$ .

Dos gráficos da figura (4.8) observamos que na região de transição o comportamento do sistema depende de seu tamanho. Devido a essa dependência, para medir o ponto crítico e os expoentes  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\nu$  utilizamos uma técnica conhecida como escalonamento de tamanho finito, do inglês *finite size scaling* [40, 48]. Essa técnica consiste em levar em consideração o tamanho do sistema para escalonar os parâmetros de ordem de forma a lidar com seus valores assintóticos quando  $w \rightarrow w_C$ , equações (2.33) e (2.34). Os parâmetros de ordem reescalados ficam:

$$\begin{aligned} \rho(\bar{w}; L) &= L^{-\frac{\beta}{\nu}} G_\rho(L^{\frac{1}{\nu}} |\bar{w}|) \\ \chi(\bar{w}; L) &= L^{\frac{\gamma}{\nu}} G_\chi(L^{\frac{1}{\nu}} |\bar{w}|). \end{aligned} \tag{4.2}$$

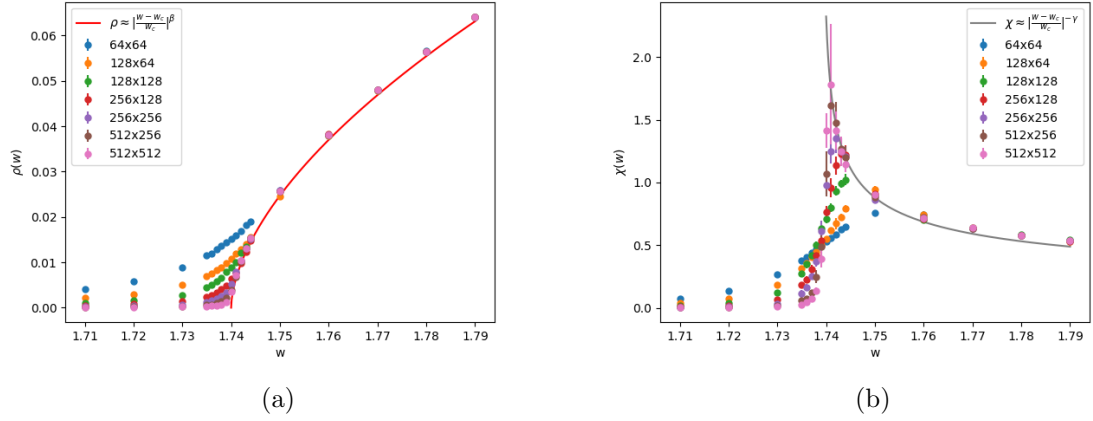


Figura 4.8: Curvas para os parâmetros de ordem  $\rho$  e  $\chi$ , (a) e (b) respectivamente. As linhas vermelha e cinza foram ajustadas com os expoentes obtidos através das simulações. Parâmetros  $\Gamma = 1.0$ ,  $\mu = 0.0$ ,  $I = 0.0$  e  $V_T = 0.0$

Na equação (4.2),  $L = \sqrt{N}$  é o tamanho característico de uma rede bidimensional, as funções  $G_\rho$  e  $G_\chi$  são as funções de escala que dependem de  $L$  e do parâmetro de controle reduzido  $\bar{w}$ .

É possível obter as razões  $\beta/\nu$  e  $\gamma/\nu$  das equações (4.2). Para isso, note a relação entre a equação (4.2) e a figura (4.8). Na figura, cada curva nos gráficos representam  $\rho(\tilde{w}; L)$  e  $\chi(\tilde{w}; L)$  com um  $L$  fixo, plotamos os mesmos dados porém agrupando-os pelo valor de  $w$ , ou seja observamos como os parâmetros de ordem variam em função do tamanho da rede para diferentes valores de  $w$ .

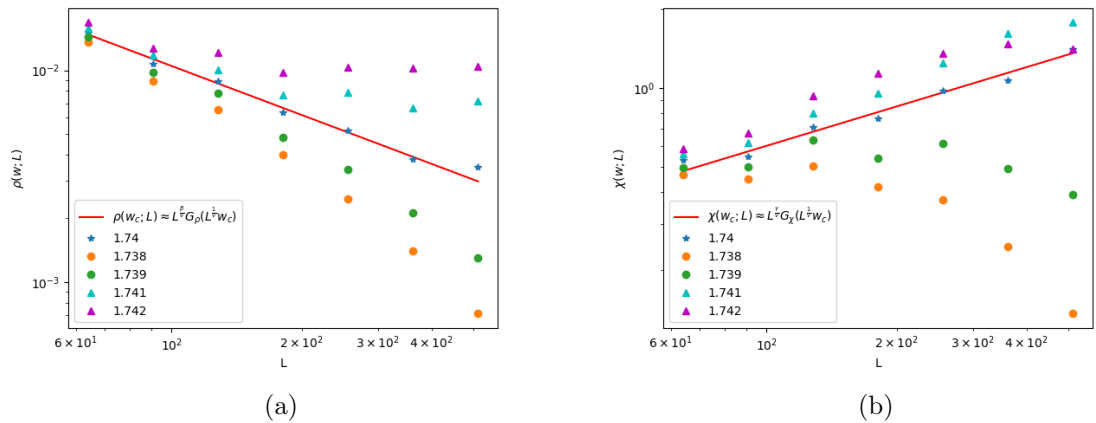


Figura 4.9: Curvas para os parâmetros de ordem  $\rho$  e  $\chi$  em função do tamanho característico da rede.

Observando a figura (4.9) e as equações (4.2), podemos ver que quando  $\bar{w} \neq 0$ , conforme o tamanho do sistema muda, os valores das funções  $G_\rho$  e  $G_\chi$  também mudam.

Somente quando  $\bar{w} = 0$  as funções de escala se tornam invariantes com o tamanho do sistema e os parâmetros de ordem se comportam como leis de potência:

$$\begin{aligned}\rho(0; L) &= L^{-\frac{\beta}{\nu}} G_\rho(0) \\ \chi(0; L) &= L^{\frac{\gamma}{\nu}} G_\chi(0).\end{aligned}\tag{4.3}$$

Medimos as razões  $\beta/\nu$  e  $\gamma/\nu$  e o ponto crítico da transição através das equações (4.3). Para medir individualmente cada expoente partimos do valor de  $\beta$  para sistemas DP bidimensionais obtido na literatura [49]. Para a rede bidimensional de neurônios GL, temos  $w_C = 1.7398 \pm 0.0003$ ,  $\beta = 0.583 \pm 0.003$ ,  $\gamma = 0.380 \pm 0.028$  e  $\nu = 0.758 \pm 0.035$ . Os erros dados não são erros estatísticos (cuja estimação necessitaria de muito maior trabalho computacional) mas apenas erros do processo de ajuste de curvas. A curva contínua vermelha na figura (4.8) foi traçada com o expoente  $\beta$  obtido por S. Lubeck [49] e a curva correspondente para susceptibilidade foi traçada com o expoente  $\gamma$  obtido através de simulações.

Uma maneira de confirmar os resultado é através das funções de escala  $G_\rho$  e  $G_\chi$ , equações (4.2). Plotando curvas para diferentes tamanhos de rede com  $L^{\beta/\nu} \rho(\bar{w}; L)$  e  $L^{-\gamma/\nu} \chi(\bar{w}; L)$  nos eixos  $y$  e  $L^{1/\nu} |\bar{w}|$  nos eixos  $x$  podemos verificar a validade dos expoentes obtidos. Com os expoentes corretos todas as curvas colapsam em uma. O colapso de dados da figura (4.10) mostra como são as funções  $G_\rho(L^{1/\nu} |\bar{w}|)$  e  $G_\chi(L^{1/\nu} |\bar{w}|)$ .

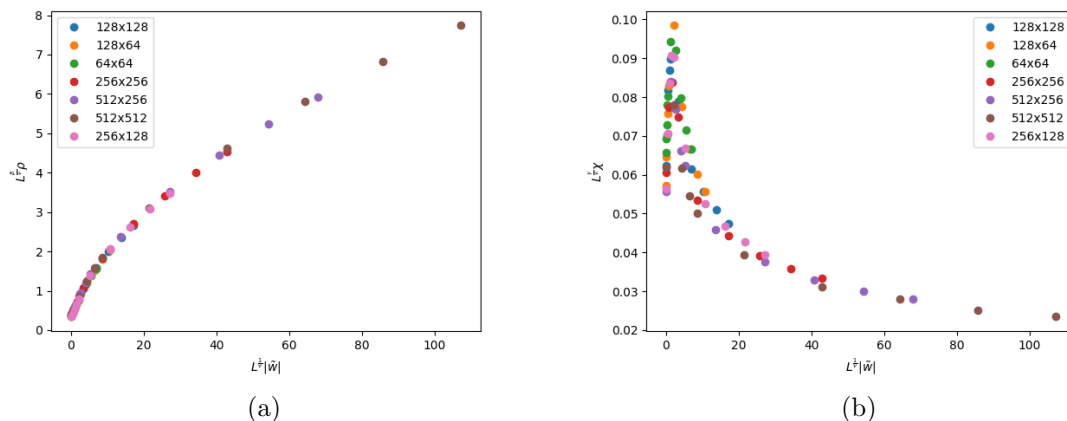


Figura 4.10: Colapso de dados para as curvas  $\rho$  e  $\chi$ .

## 4.4 Psicofísica e faixa dinâmica de intensidade de estímulos

Nesta sessão apresentamos resultados para um "experimento" psicofísico com uma abordagem *bottom-up*. Partimos de uma rede bidimensional com duas camadas de neurônios



GL, duas redes  $N \times M$  acopladas de acordo com a equação (2.9).

Testamos a influência da conectividade entre as duas camadas para três casos, no primeiro apenas 10% dos elementos da primeira camada se conectam com a segunda, no segundo caso 25% e no terceiro 50%.

#### 4.4.1 Psicofísica neural na primeira camada

A primeira camada é a que recebe os estímulos, e nela podemos testar qual o efeito do tamanho da rede  $N \times M$  sobre a resposta a estímulos diferentes para os três regimes deste sistema, subcrítico, crítico e supercrítico.

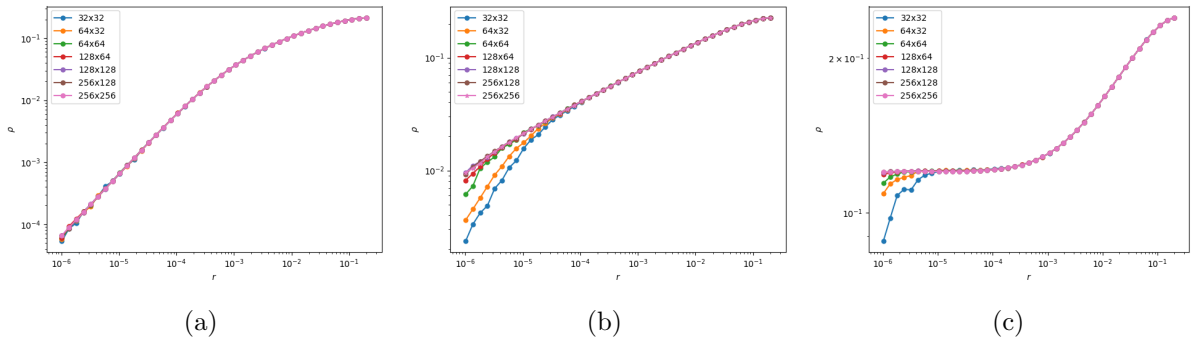


Figura 4.11: Resposta da primeira camada a estímulos externos para diferentes tamanhos de rede nos três regimes, (a) subcrítico  $w = 1.6$ , (b) crítico  $w_C = 1.74$  e (c) supercrítico  $w = 1.9$ .

Podemos ver dos gráficos da figura (4.11) que o tamanho da rede influencia a resposta nos casos crítico e supercrítico. Isso ocorre pois para valores de  $r$  muito pequenos a rede pode ficar muitos passos de tempo sem receber (ou perceber) estímulos. Para ilustrar isso considere  $r = 10^{-6}$ , a probabilidade de um elemento da primeira camada disparar devido ao processo de Poisson (2.46) é  $P(X_{ij}[t] = 1 | X_{ij}[t] = 0) \approx 10^{-6}$ . Assim, para que em média pelo menos um neurônio dispare por passo de tempo, a rede deve ter no mínimo  $10^6$  neurônios, ou seja redes pequenas passam muito tempo sem responder a pequenos estímulos. Esse efeito de redes pequenas (ou efeito de tamanho finito) atrapalha as medidas.

Podemos ver no segundo gráfico da figura (4.11) que, quando o sistema se encontra no ponto crítico da transição de fase, a resposta  $\rho$  se assemelha a uma lei de potência,  $\rho \propto r^m$ . Esse regime, similar a uma lei de Stevens aumenta conforme o tamanho da rede cresce.

Devido ao efeito de tamanho finito descrito acima, o caso onde a resposta da rede melhor se assemelha a uma lei de potência ocorre para um valor ligeiramente acima do valor de  $w_C$  na transição de fase. O expoente da curva em vermelho da figura (4.12) foi medido através de um ajuste para a função  $\rho(r) = ar^m$ ,  $m = 0.254 \pm 0.002$  para  $\tilde{w} = 1.742$ .

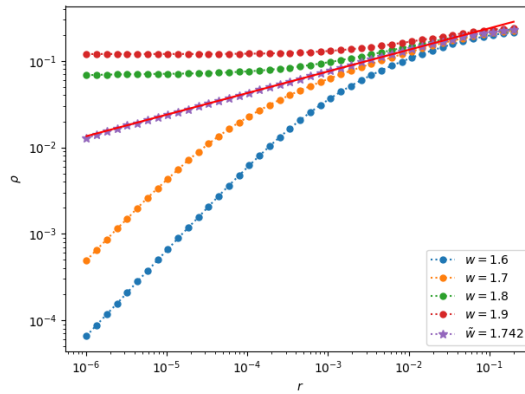


Figura 4.12: Atividade  $\rho$  da primeira camada em função da taxa de estímulos externos  $r$  para uma rede  $256 \times 256$ , a curva em vermelho mostra um comportamento de lei de potencia para resposta da rede.

A curva de resposta para o valor crítico de peso sináptico  $w_C = 1.74$  possui um expoente  $m = 0.265 \pm 0.008$ .

Podemos agrupar todas as curvas de resposta da primeira camada, para os diferentes pesos sinápticos  $w$ , e utilizar a medida descrita pela equação (2.39) para determinar a relação que há entre  $w$  e a resposta da rede para diferentes estímulos. A figura (4.13) mostra nitidamente o efeito que o tamanho da rede tem sobre sua sensibilidade a estímulos.

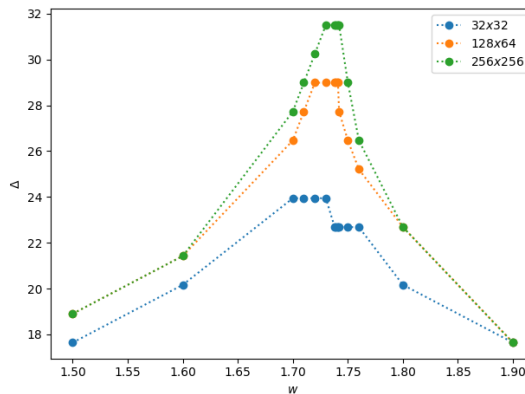


Figura 4.13: Faixa dinâmica da primeira camada para diferentes tamanhos de rede.

#### 4.4.2 Psicofísica neural da segunda camada

A segunda camada recebe o estímulo externo apenas através da primeira camada. Testamos como ela responde a estes estímulos e como a conectividade entre as duas camadas influencia sua resposta.

É possível notar, dos gráficos (b) e (c) da figura (4.14), que a segunda camada também é afetada pelo efeito de tamanho finito da rede. A resposta da segunda camada no ponto

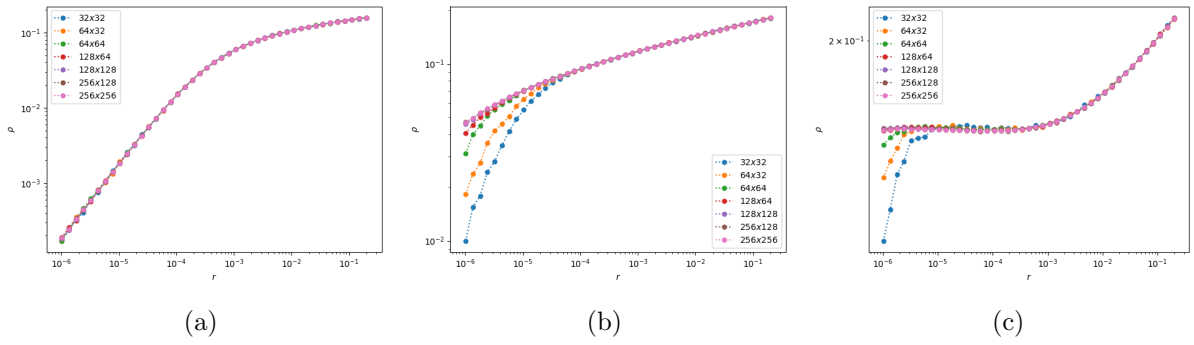


Figura 4.14: Resposta da segunda camada a estímulos externos para diferentes tamanhos de rede nos três regimes, (a) subcrítico  $w = 1.6$ , (b) crítico  $w_C = 1.74$  e (c) supercrítico  $w = 1.9$ .

crítico  $w_C$  não é exatamente uma lei de potência, o peso sináptico  $w$  para qual a resposta mais se assemelha a uma lei de potência do tipo  $\rho \propto r^m$  é um valor ligeiramente acima de  $w_C$ .

O efeito do tamanho da segunda camada pode ser mais facilmente visualizado através da medida da faixa dinâmica, equação (2.39). Para redes de tamanhos diferentes, ver figura (4.15). Comparando as figuras (4.13) e (4.15), vemos que as respostas das duas camadas são afetadas devido ao tamanho da rede. Podemos também ver que a faixa dinâmica máxima da segunda camada é maior para qualquer tamanho de rede.

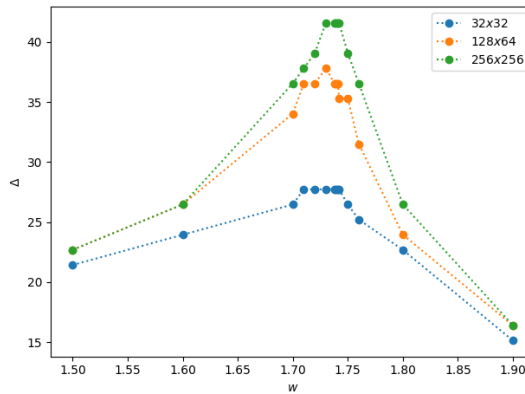


Figura 4.15: Faixa dinâmica para redes de diferentes tamanhos na segunda camada.

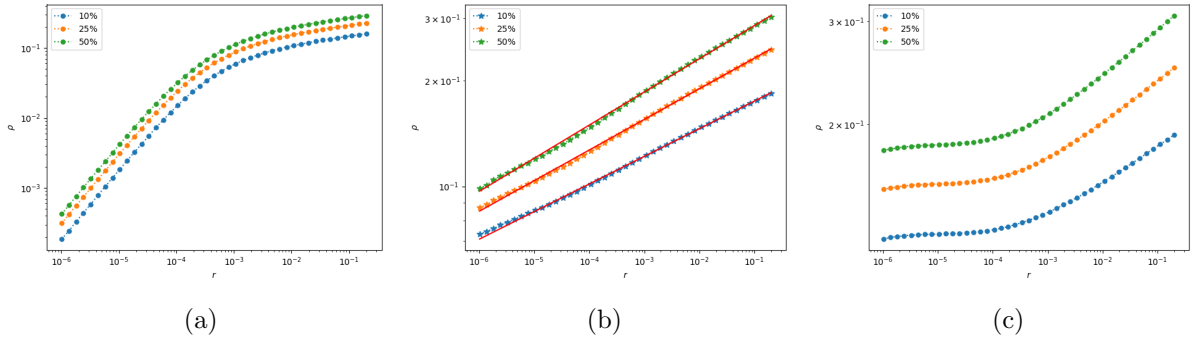


Figura 4.16: Resposta da segunda camada para diferentes conectividades nos três regimes, (a) subcrítico  $w = 1.76$ , (b) crítico  $w^* = 1.75$  e (c) supercrítico  $w = 1.9$ , para uma rede de tamanho  $256 \times 256$ .

Veremos agora como a conectividade, entre camadas, altera a resposta da segunda camada em relação a estímulos apresentados a primeira. Na figura (4.16), o valor de  $w$  para a qual a resposta da segunda camada segue a lei de potência  $\rho \propto r^m$  é  $w^* = 1.75$ . Este valor é maior que  $w_C$  e  $\tilde{w}$ . Os expoentes das curvas contínuas em vermelho do gráfico (b) da figura (4.16) são  $m_{10\%} = 0.0776 \pm 0.0003$ ,  $m_{25\%} = 0.0870 \pm 0.0004$  e  $m_{50\%} = 0.0942 \pm 0.0006$ . Apesar da diferença, não conseguimos detectar diferenças na faixa dinâmica para um mesmo tamanho de rede, figura (4.17).

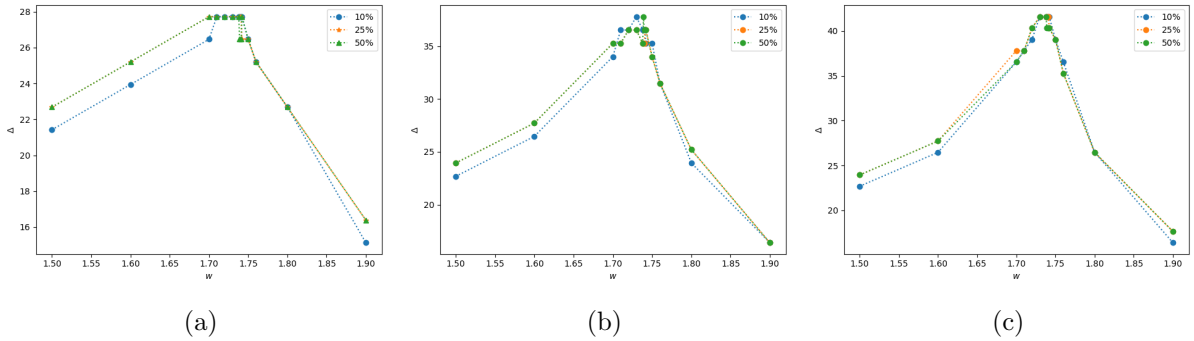


Figura 4.17: Faixa dinâmica da segunda camada para diferentes conectividades e tamanhos fixos. (a)  $32 \times 32$ , (b)  $128 \times 64$  e (c)  $256 \times 256$ .

Finalmente, podemos comparar diretamente as respostas da primeira e segunda camada nos pontos  $\tilde{w}$  e  $w^*$ , ver figura (4.18).

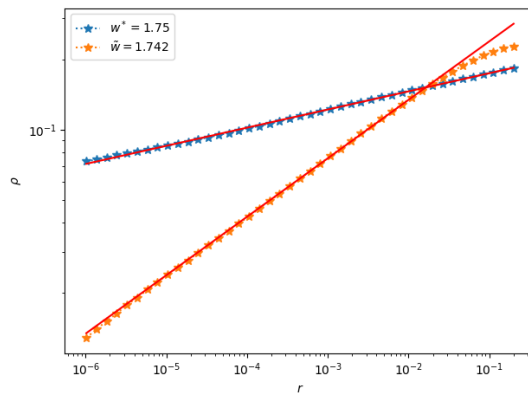


Figura 4.18: Resposta de uma rede formada por duas camadas de tamanho  $256 \times 256$  com 10% dos elementos da primeira camada conectados com a segunda para os casos em que  $\rho \propto r^m$  em cada camada. Primeira camada (pontos em laranja) e segunda camada (pontos em azul).

## Conclusões e Perspectivas

Observamos que os resultados analíticos, obtidos com a aproximação de campo médio, concordam com as simulações de rede completa. Esta aproximação serviu como ponto de partida para o estudo do sistema bidimensional de neurônios GL. Apesar do ponto crítico da transição e seus expoentes mudarem para o caso bidimensional, conseguimos identificar os parâmetros de ordem  $\rho$  e de controle  $w$  de maneira analítica, identificamos também quais as condições para que este sistema passe por uma transição de fase absorvente. Até onde sabemos, este tipo de sistema apresenta transições de fase absorvente para qualquer topologia desde que a conjectura de Janssen & Grassberger [43] seja satisfeita.

Estudamos o caso da rede *annealed* pois nele a atividade que cada neurônio soma em um passo de tempo, equação (2.1), é em média o valor da atividade da rede  $\rho[t]$  naquele instante. Com isso esperávamos que um sistema com a topologia de rede *annealed* desse resultados idênticos a aproximação de campo médio. Suponha um caso em que cada neurônio faz  $k = 4$  conexões aleatórias a cada passo de tempo: observando a equação do modelo (2.1), a somatória que cada neurônio pode ter, assumindo que todos os pesos sinápticos  $w_{ij}$  sejam iguais, é  $\{0, 0.25, 0.5, 0.75, 1\}$ . Em média, os os neurônios sumam a atividade da rede, igual ao caso de campo médio.

Nossa suposição estava parcialmente correta. Como observamos, o expoente crítico  $\beta(k)$  associado ao parâmetro de ordem  $\rho$  não se altera em relação ao valor esperado pela aproximação. No entanto, o ponto crítico  $w_c(k)$  depende do número de conexões  $k$  que os neurônios fazem. Encontramos essa dependência e conseguimos realizar um colapso de dados. Para entender porque isso ocorre, imagine que cada neurônio é um observador da rede. Nesta interpretação, quando um neurônio soma atividade da rede é equivalente a dizer que ele faz uma medida da atividade  $\rho_{ij}$  com erro  $\sigma_{ij}$  de uma população que possui medida real  $\rho$ . Quanto maior o tamanho da amostra da população, mais próximo de  $\rho$  a medida individual  $\rho_{ij}$  será, e ainda os erros entre as medidas  $\Delta_\sigma = \sigma_{ij} - \sigma_{i'j'}$  serão cada vez menores. É a discrepância entre as medidas de neurônios, que ocorre devido a uma amostra pequena, que leva ao deslocamento do ponto crítico. O motivo original de se examinar essa topologia *annealed* foi para validar os programas utilizados para simulações.

A dependência do ponto crítico  $w_c(k)$  com o número de conexões neste caso é algo novo que não esperávamos encontrar, pois o mesmo não ocorre em modelos com automata celulares [19, 30].

Quando caracterizamos a rede bidimensional, medimos as razões  $\beta/\nu$  e  $\gamma/\nu$  e o ponto crítico de maneira indireta através da técnica de escalonamento de tamanho finito. Para medir individualmente cada expoente partimos do valor de  $\beta$  obtido por S. Lübeck [49] para sistemas bidimensionais. Usamos este valor pois assumimos que a rede bidimensional de neurônios GL pertence a classe de universalidade DP devido à conjectura de Janssen & Grassberger. A definição do parâmetro de ordem  $\rho$  e seu correspondente expoente  $\beta$  é exatamente a mesma para nosso sistema e para o sistema de Percolação Direcionada que dá nome a esta classe de universalidade. Observamos, porém, que poderíamos ter utilizado escalonamento de tamanho finito para medir diretamente o expoente  $\nu$  relacionado ao comprimento de correlação do sistema [40, 50] e através dele poderíamos obter  $\beta$  e  $\gamma$  de forma independente.

Com a rede bidimensional completamente caracterizada, acoplamos duas redes bidimensionais com conectividade entre camadas diferentes para estudar como o novo sistema responde a estímulos externos na forma de um processo de Poisson com taxa  $r$ , imitando fótons ou estímulos chegando em um modelo de retina ou epitélio sensorial com duas camadas de células. Este seria uma espécie de experimento psicofísico com uma abordagem *bottom-up* (psicofísica neural), onde partimos de um sistema com elementos neuronais, topologia de rede e comportamento crítico conhecidos.

Observamos que, quando o sistema em camadas se encontra em um regime subcrítico, sua resposta segue uma lei de potência  $\rho \propto r^m$  com  $m \approx 1$  para as duas camadas da rede. Próximo da região crítica as respostas das duas camadas também seguem uma lei de potência, porém o valor do peso sináptico é ligeiramente maior que  $w_C = 1.74$ : para a primeira camada temos  $\tilde{w} = 1.742$  e para a segunda  $w^* = 1.75$ .

Para a primeira camada, temos  $m = 0.254 \pm 0.02$ . O valor esperado, utilizando a equação (2.41) e os expoentes  $\beta$  e  $\sigma$  obtidos por S. Lübeck [49], seria  $m^* = 0.268 \pm 0.012$ , de modo que nosso expoente é compatível com DP em duas dimensões. No caso da segunda camada, obtivemos  $m_2(10\%) = 0.0776 \pm 0.0003$ ,  $m_2(25\%) = 0.0870 \pm 0.0004$  e  $m_2(50\%) = 0.0942 \pm 0.0006$  para as diferentes conectividades entre camadas. De novo, os erros se referem ao processo de fitting, que em geral são pequenos, não são erros estatísticos.

O valor esperado para  $m_2$  neste caso pode ser obtido observando-se que, para a primeira camada  $\rho_1 \propto r^m$ . A segunda camada recebe estímulos da primeira, então no caso ideal poderíamos esperar que a segunda camada possua uma resposta do tipo  $\rho_2 \propto (\rho_1^m)^m = r_2^m$  com  $m_2 = m^2$ . Dessa maneira, o valor em condições ideais para o expoente da segunda

camada seria  $m_2 = m^2 = 0.0717 \pm 0.0063$ . Tais valores baixos para o expoente  $m_2$  é muito interessante, pois tais expoentes são fortemente compressivos e podem aproximar em certo regime a lei de Weber-Fechner  $S = \lim_{m_2 \rightarrow 0} Cr^{m_2} \approx C \log r$  para valores intermediários de  $r$ .

Quanto à perspectivas de trabalhos futuros, pretendemos examinar melhor as propriedades dessa rede na presença de termo de vazamento  $\mu > 0$ , inputs externos  $I > 0$  e limiar de disparo  $V_T > 0$ . Neste caso, encontraremos transições de fase de primeira ordem e não é claro as consequências psicofísicas das mesmas.

Nosso cérebro é capaz de responder de maneira muito rápida e eficiente a mudanças no ambiente. Essa capacidade de se adaptar é uma característica de sistemas sensoriais, porém normalmente existe a necessidade de um ajuste fino dos parâmetros do nosso sistema para que este seja mantido em um estado crítico. Especificamente, redes neurais não possuem um agente externo que faça esse ajuste, assim pretendemos estudar mecanismos homeostáticos suficientes para auto-organizar nossa rede no regime crítico.

Assim, também pretendemos estudar o comportamento de auto-organização na criticidade da rede na presença de sinapses adaptativas  $W_{ij}[t]$  [28, 29], ganhos neuronais adaptativos  $\Gamma[t]$  [25, 26, 27] e limiares de disparo adaptativos  $V_T[t]$  [51]. Também estudaremos a psicofísica da faixa dinâmica nestes casos de auto-organização crítica.



## Capítulo 6

# Discussão

Em 2006 Kinouchi & Copelli mostraram que um sistema fora de equilíbrio formado por uma rede aleatória de elementos excitáveis possui faixa dinâmica e sensibilidade máximas no ponto de uma transição de fase absorvente. Este trabalho mostrou como um sistema formado por muitos elementos, que individualmente possuem uma pequena faixa dinâmica e saturam facilmente, consegue responder a estímulos que abrangem muitas ordens de grandeza. Ou seja, o sistema como um todo apresenta uma grande faixa dinâmica e sensibilidade [19].

O trabalho de Kinouchi & Copelli mostra uma possível origem para os expoentes compressivos na lei de potência de Stevens. Neste trabalho mostramos que o expoente de resposta depende também da estrutura da rede, não apenas do regime em que a rede se encontra. Uma camada de rede bidimensional possui uma faixa dinâmica e sensibilidade maiores que o caso da rede aleatória com o mesmo número de elementos. Mostramos também que duas redes bidimensionais interagindo para formar um modelo de camadas melhora consideravelmente a resposta da rede para a segunda camada em relação a primeira. Para ilustrar a importância do ganho do modelo em camadas considere a figura (6.1).

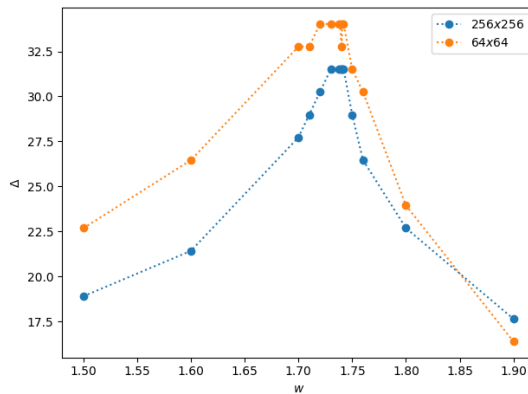


Figura 6.1: Faixa dinâmica para uma rede bidimensional simples, curva em azul. Faixa dinâmica para a segunda camada de um sistema bidimensional com duas camadas e conectividade de 10% dos elementos, curva em laranja.

A figura (6.1) mostra a faixa dinâmica de um sistema de duas camadas bidimensionais de mesmo tamanho  $64 \times 64$ , 8192 elementos, e a faixa dinâmica de um sistema de uma única camada de tamanho  $256 \times 256$ , 65536 elementos. Quando temos um sistema em camadas é possível atingir uma faixa dinâmica e sensibilidade maiores para sistemas muito menores, no caso 8 vezes menor.

As simulações para o modelo em camadas nos mostra que o regime do sistema onde a resposta da rede segue uma lei de potência do tipo  $\rho \propto r^m$  ocorre para valores ligeiramente maiores que  $w_C$ , tanto para primeira camada quanto para segunda. Para a primeira camada isso provavelmente ocorre devido ao tempo de simulação, a rede bidimensional possui um período transiente excessivamente longo em comparação com o caso da rede completa, talvez esse sistema necessite de um tempo maior de exposição a um estímulo para que toda a rede possa responder. Já no caso da segunda camada além do tempo temos o problema da conectividade. A maneira de conectar camadas foi feita para evitar de se alterar a topologia da segunda camada, altera-la significa alterar o ponto de transição e os expoentes relevantes. Aparentemente a forma como as camadas se conectam altera a topologia da segunda camada.

O sistema descrito neste trabalho consegue descrever experimentos psicofísicos de produção e estimativa de magnitude, para estímulos unidimensionais de intensidade. Conseguimos mostrar que redes que operam em regimes subcrítico descrevem leis de potência aproximadamente lineares  $m \approx 1$  e redes que operam próximo de uma transição de fase absorvente descrevem leis de potência compressivas  $m < 1$ , neste regime a lei de potência é válida para estímulos que variam em muitas ordens de magnitude. No entanto, não encontramos um regime capaz de descrever leis de potência expansivas  $m > 1$ .

Em seu livro *Rápido e Devagar* [52] Daniel Kahneman aborda o problema de como lidamos com riscos. Segundo Kahneman, nós temos uma tendência de superestimar eventos que tem uma probabilidade pequena ocorrer, como ganhar na loteria, e superestimar o risco de eventos que tem uma probabilidade muito grande de ocorrer, como trocar uma aposta quase certa de ganhar muito dinheiro por uma certeza de ganhar uma quantia inferior. Ao que parece, avaliamos riscos de maneira não linear, e ainda, somos muito mais sensíveis a mudanças de probabilidades pequenas do que grandes.

Na psicofísica, uma das maneiras de se medir respostas a estímulos é através da medida de diferença mínima perceptível, do inglês *just-noticeable difference* JND. Essa medida representa a variação mínima que um estímulo deve ter para produzir uma variação de resposta no sujeito. De maneira similar a produção de magnitude, medidas de JND seguem uma lei de potência em função da variação de estímulos. A análise de Kahneman sobre como avaliamos riscos sugere que o risco se comporta como uma medida de JND e a probabilidade de algo ocorrer seria o estímulo. Em nosso modelo os expoentes dessas leis

de potência estão relacionados com transições de fases de sistemas interagentes, talvez a maneira como lidamos com riscos seja uma evidência de que pelo menos partes de nosso córtex opere próximo de um regime crítico.



## Capítulo A

# Anexo: Percolação e o paradoxo de Fermi

A dois mil anos atrás existiam diversas civilizações humanas isoladas. Tais civilizações, dotadas de culturas, religiões e costumes distintos, passaram tantos anos sem entrar em contato com outros grupos de humanos que, de sua perspectiva, era possível afirmar que eram os únicos humanos na terra.

Com o passar do tempo as sociedades humanas foram ficando cada vês mais conectadas. Seja por expansão de impérios, interesses comerciais ou outros, as civilizações estavam cada vez mais cientes umas das outras. A tecnologia e as barreiras ambientais tiveram uma importância fundamental na dinâmica humana.

A ultima grande barreira que enfrentamos na nossa expansão pelo planeta foram os oceanos, foi necessário um enorme avanço tecnológico para passarmos por ela.

Atualmente todas as civilizações tecnológicas estão conectadas e temos acesso a praticamente todo o planeta, podemos dizer que vivemos como uma grande sociedade tecnológica. Mesmo assim vivemos agrupados em locais onde as condições ambientais são favoráveis a nossa espécie, figura (A.1).

A colonização humana claramente não foi um simples processo de difusão uniforme, mas apresentou uma estrutura hierárquica de regiões vazias de vários tamanhos, similar a uma estrutura fractal. Esse tipo de colonização contradiz o paradoxo de Fermi. Este paradoxo aborda a aparente contradição entre a probabilidade alta de surgimento de vida e a falta de evidencias para vida inteligente fora da terra.

O paradoxo de Fermi é formado por alguns pontos fundamentais: Existem bilhões de estrelas em nossa galáxia, alguns bilhões dessas estrelas são similares ao nosso sol, dessas estrelas similares muitas são bilhões de anos mais velhas que nosso sistema solar. Com uma probabilidade alta, muitas dessas estrelas possuem planetas similares ao nosso, se nosso planeta for um caso típico, existe uma alta probabilidade de que vida inteligente tenha surgido. Algumas civilizações desses planetas podem ter desenvolvido tecnologia para viagens inter-esterares, tecnologia essa que estamos desenvolvendo agora. Mesmo



Figura A.1: Distribuição de cidades na terra. Note que existem regiões de vários tamanhos que não possuem cidades tecnológicas. Fonte: NASA/NOAA, url: [https://www.nasa.gov/topics/earth/earthday/gall\\_earth\\_night.html](https://www.nasa.gov/topics/earth/earthday/gall_earth_night.html)

com um desenvolvimento tecnológico lento, poucos milhões de anos são necessários para atravessar nossa galáxia.

Pensando no paradoxo de Fermi e em como barreiras ambientais e a tecnologia tem um papel fundamental em como uma espécie coloniza um ambiente, criamos um modelo de percolação por invasão generalizado com o qual propomos uma solução para o paradoxo de Fermi.

O modelo consiste em uma rede bidimensional onde cada nó representa uma região no espaço. Cada nó recebe um número  $E_{ij} \in [0, 1]$  que representa o quão habitável é uma dada região no espaço. A intensão deste número é representar a dificuldade de se encontrar um planeta habitável dentro do espaço  $ij$ , quanto menor  $E_{ij}$  mais fácil é colonizar a região  $ij$ .

Cada nó da rede representa uma área de  $D \times D$  anos luz e cada um pode estar ocupado  $S_{ij} = 1$  ou não ocupado  $S_{ij} = 0$ . O processo de colonização ocorre entre vizinhos mais próximos. A probabilidade de que um nó ocupado colonize algum vizinho vazio é,

$$P(S_{ij}[t + 1] = 1 \mid S_{ij}[t] = 0) = e^{-\beta E_{ij}}, \quad (\text{A.1})$$

note que o critério de colonização  $\beta E_{ij}$  simula um processo de colonização inteligente, não apenas uma difusão simples. A probabilidade exponencial da equação (A.1) faz com que apenas regiões no espaço com barreiras pequenas sejam colonizadas. O parâmetro livre  $\beta$  está associado com a dificuldade de se colonizar uma região.

No início de cada simulação apenas o nó central da rede está ocupado, a simulação dura até que algum nó da borda do sistema seja colonizado.

Podemos ver na figura (A.2) o efeito que o parâmetro livre  $\beta$  tem sobre o processo de colonização.

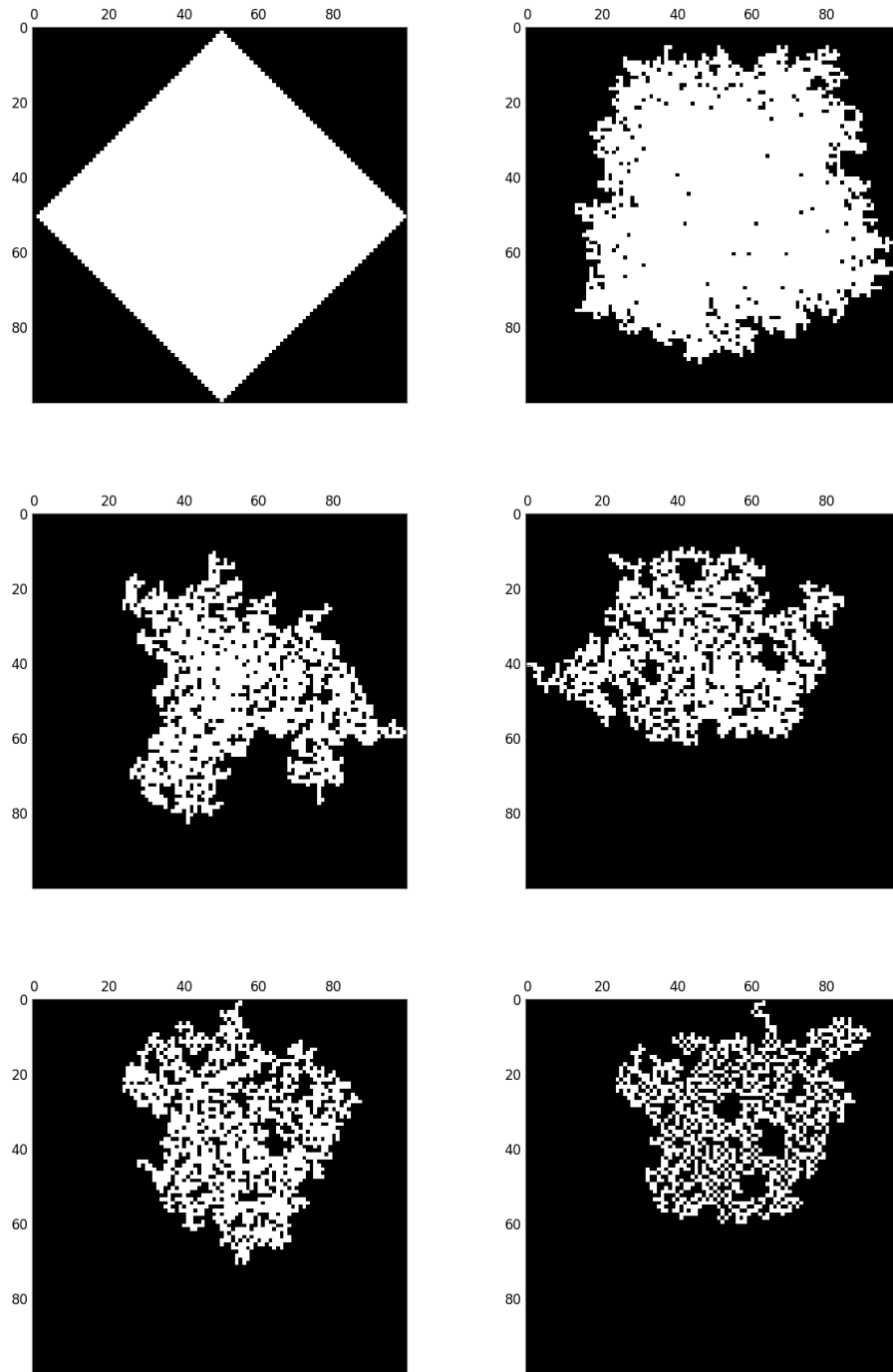


Figura A.2: De cima para baixo, esquerda a direita, processos de colonização com  $\beta = 0, 5, 10, 15, 20$  e  $25$ . Em  $t = 0$  temos apenas um nó colonizado em  $i = 50, j = 50$  para uma rede  $100 \times 100$ . Note a formação de *clusters* de espaço vazio conforme  $\beta$  aumenta.

Publicamos nossos resultados sobre o modelo de percolação generalizada e uma discussão sobre o paradoxo de Fermi [53]. Em resumo, para que o paradoxo de Fermi seja de fato um paradoxo é necessário assumir que a terra é um lugar típico. No entanto, talvez



sejamos tão exóticos quanto um oásis no meio do deserto. Considere a última simulação da figura (A.2), mesmo que nossa galáxia seja repleta de vida, se estivermos em um local atípico, dentro de um *cluster* de espaço vazio, não iremos encontrar vida inteligente e as possíveis outras formas de vida também não iram nos encontrar.

Percolação por invasão [54] foi o primeiro modelo a apresentar SOC. Este modelo usa um tipo de dinâmica extremal para simular como dois líquidos insolúveis competem por espaço em um meio poroso, a cada passo de tempo somente um poro é invadido na interface entre os dois líquidos, aquele que possui a menor resistência. Nosso modelo de percolação por invasão generalizada cai sobre o modelo original no caso limite  $\beta \rightarrow \infty$ . No caso de  $\beta$  finito encontramos que o sistema se auto organiza em um estado *quasi* crítico com formação de clusters de diversos os tamanhos quando  $t \rightarrow \infty$ , clusters limitados pelo tamanho da rede.

Uma importante vantagem de nosso modelo se dá na formação de tais clusters, no modelo original para que um cluster seja formado é necessário que um dos fluídos aprisione o outro na rede, não deixando que o fluido aprisionado tenha acesso a algum tipo de escoamento. O aprisionamento de fluido, ou formação de cluster, não é algo natural do modelo original e precisa ser implementado à parte, a interface entre fluídos aprisionados não devem participar da dinâmica extremal ou os clusters somem. Modelar o aprisionamento de líquidos dessa maneira não é muito realista, em nosso modelo os clusters (neste caso de espaço vazio, mas o raciocínio é o mesmo para líquidos) são formados como um resultado natural da dinâmica, mesmo que eles sejam passíveis de um fenômeno de envelhecimento que pode diminuir seu tamanho conforme o tempo de simulação aumente é ainda uma forma mais realista de formação de clusters.

# Referências Bibliográficas

- [1] D R Chialvo. Emergent complex neural dynamics. *Nat. Phys.*, 6, 2010.
- [2] M A Muñoz. Colloquium: Criticality and dynamical scaling in living systems. *Rev. Mod. Phys.*, 90, 2017.
- [3] J J Hopfield. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. *Proc. Natl. Acad. Sci*, 79(8):2554–2558, 1982.
- [4] P Bak, C Tang, and K Wiesenfeld. Self-organized criticality: An explanation of the 1/f noise. *Phys. Rev. Lett.*, 59, 1987.
- [5] E N Miranda and H J Herrmann. Self-organized criticality with disorder and frustration. *Physica A*, 175(3), 1991.
- [6] V I Makarenkov and A B Kirillov. Self-organized criticality in neural networks. In *Applications of Artificial Neural Networks II*, volume 1469. International Society for Optics and Photonics, 1991.
- [7] J M Beggs and D Plenz. Neuronal avalanches in neocortical circuits. *J. Neurosci.*, 23(35), 2003.
- [8] A V M Herz and J J Hopfield. Earthquake cycles and neural reverberations: Collective oscillations in systems with pulse-coupled threshold elements. *Phys. Rev. Lett.*, 75, 1995.
- [9] M Usher, M Stemmler, and Z Olami. Dynamic pattern formation leads to 1 f noise in neural populations. *Phys. Rev. Lett.*, 74(2):326, 1995.
- [10] S Bottani. Pulse-coupled relaxation oscillators: from biological synchronization to self-organized criticality. *Phys. Rev. Lett.*, 74(21), 1995.
- [11] D Chen, S Wu, A Guo, and Z R Yang. Self-organized criticality in a cellular automaton model of pulse-coupled integrate-and-fire neurons. *J. Phys. A*, 28(18), 1995.

- [12] C J Pérez, A Corral, A Díaz-Guilera, K Christensen, and A Arenas. On self-organized criticality and synchronization in lattice models of coupled dynamical systems. *Int. J. Mod. Phys. B*, 10(10), 1996.
- [13] P Bak and D R Chialvo. Adaptive learning by extremal dynamics and negative feedback. *Phys. Rev. E*, 63, 2001.
- [14] D R Chialvo and P Bak. Learning from mistakes. *Neuroscience*, 90(4), 1999.
- [15] J Hesse and T Gross. Self-organized criticality as a fundamental property of neural systems. *Front. Neurosci.*, 8, 2014.
- [16] D Marković and C Gros. Power laws and self-organized criticality in theory and nature. *Phys. Rep.*, 536(2), 2014.
- [17] J Beggs and N Timme. Being critical of criticality in the brain. *Front. Physiol.*, 3, 2012.
- [18] N Bertschinger and T Natschläger. Real-time computation at the edge of chaos in recurrent neural networks. *Neural. Comput.*, 16(7), 2004.
- [19] O Kinouchi and M Copelli. Optimal dynamical range of excitable networks at criticality. *Nat. Phys.*, 2, 2006.
- [20] C Haldeman and J M Beggs. Critical branching captures activity in living neural networks and maximizes the number of metastable states. *Phys. Rev. Lett.*, 94, 2005.
- [21] H Yang, W L Shew, R Roy, and D Plenz. Maximal variability of phase synchrony in cortical networks with neuronal avalanches. *J. Neurosci.*, 32(3), 2012.
- [22] M Copelli, A C Roque, R F Oliveira, and O Kinouchi. Physics of psychophysics: Stevens and weber-fechner laws are transfer functions of excitable media. *Phys. Rev. E*, 65, 2002.
- [23] W Gerstner. Associative memory in a network of biological neurons. In *Advances in Neural Information Processing Systems*, 1991.
- [24] A Galves and E Löcherbach. Infinite systems of interacting chains with memory of variable length—a stochastic model for biological neural nets. *J. Stat. Phys.*, 151(5), 2013.
- [25] L Brochini, A A Costa, M Abadi, A C Roque, J Stolfi, and O Kinouchi. Phase transitions and self-organized criticality in networks of stochastic spiking neurons. *Sci. Rep.*, 2016.

- [26] A A Costa, L Brochini, and O Kinouchi. Self-organized supercriticality and oscillations in networks of stochastic spiking neurons. *Entropy*, 19, 2017.
- [27] O Kinouchi, L Brochini, A A Costa, Campos J G F, and M Copelli. Stochastic oscillations and dragon king avalanches in self-organized quasi-critical systems. *Sci. Rep.*, 9, 2019.
- [28] A Levina, J M Herrmann, and T Geisel. Dynamical synapses causing self-organized criticality in neural networks. *Nat. Phys.*, 3(12), 2007.
- [29] J A Bonachela, S Franciscis, J J Torres, and M A Muñoz. Self-organization without conservation: are neuronal avalanches generically critical? *J. Stat. Mech.*, 2010(02), 2010.
- [30] A A Costa, M Copelli, and O Kinouchi. Can dynamical synapses produce true self-organized criticality? *J. Stat. Mech.*, 2015(6), 2015.
- [31] J G F Campos, A A Costa, M Copelli, and O Kinouchi. Correlations induced by depressing synapses in critically self-organized networks with quenched dynamics. *Phys. Rev. E*, 95, 2017.
- [32] M Bear, B Connors, and M Paradiso. *Neuroscience: Exploring the brain: Fourth edition*. Wolters Kluwer, 01 2015.
- [33] W Gerstner, W M Kistler, R Naud, and L Paninski. *Neuronal Dynamics: From Single Neurons to Networks and Models of Cognition*. Cambridge University Press, 2014.
- [34] M Girardi-Schappo, M H R Tragtenberg, and O Kinouchi. A brief history of excitable map-based neurons and neural networks. *J. Neurosci. Meth.*, 220(2):116–130, 2013.
- [35] Hédi Soula, Guillaume Beslon, and Olivier Mazet. Spontaneous dynamics of asymmetric random recurrent spiking neural networks. *Neural Comput.*, 18(1):60–79, 2006.
- [36] Bruno Cessac. A discrete time neural network model with spiking neurons. *Journal of Mathematical Biology*, 56(3):311–345, 2008.
- [37] R A Fisher and F Yates. *Statistical tables for biological, agricultural and medical research*. Edinburgh: Oliver and Boyd, 1948.
- [38] M Kardar. *Statistical Physics of Particles*. Cambridge University Press, 2007.

- [39] E Coronado, B S Tsukerblat, and R Georges. *Exchange Interactions I: Mechanisms*. Springer Netherlands, Dordrecht, 1996.
- [40] M Henkel, H Hinrichsen, and L Sven. *Non-Equilibrium Phase Transitions*. Springer Netherlands, 2008.
- [41] G Jaeger. The ehrenfest classification of phase transitions: Introduction and evolution. *Arch. Hist. Exact. Sci.*, 53(1), 1998.
- [42] E T Jaynes. Information theory and statistical mechanics. *Phys. Rev.*, 106, 1957.
- [43] H K Janssen. On the nonequilibrium phase transition in reaction-diffusion systems with an absorbing stationary state. *Z. Phys. B*, 42(2), 1981.
- [44] P Grassberger. On phase transitions in schlögl’s second model. *Z. Phys. B*, 47(4), 1982.
- [45] Z L Lu and B Doshier. *Visual Psychophysics: From Laboratory to Theory*. The MIT Press. MIT Press, 2013.
- [46] S S Stevens. On the psychophysical law. *Psychol. Rev.*, 64(3), 1957.
- [47] K O Johnson, S S Hsiao, and T Yoshioka. Neural coding and the basic law of psychophysics. *Neuroscientist*, 8(2), 2002.
- [48] M Girardi-Schappo. *Transições de Fase em Modelos do Cérebro: Uma Abordagem Computacional*. PhD thesis, Universidade Federal de Santa Catarina, 2016.
- [49] S Lübeck and R D Willmann. Scaling behavior of the directed percolation universality class. *Nucl. Phys. B.*, 718, 2005.
- [50] J Marro and R Dickman. *Nonequilibrium Phase Transitions in Lattice Models*. Collection Alea-Saclay: Monographs and Texts in Statistical Physics. Cambridge University Press, 1999.
- [51] M Girardi-Schappo, L Brochini, A A Costa, T T A Carvalho, and O Kinouchi. Self-organized critical balanced networks: a unified framework. *arXiv preprint arXiv:1906.05624*, 2019.
- [52] D Kahneman. *Thinking, fast and slow*. Farrar, Straus and Giroux, 2011.
- [53] E F Galera, G R Galanti, and O Kinouchi. Invasion percolation solves fermi paradox but challenges seti projects. *Int. J. Astrobiology*, 2018.

- [54] D Wilkinson and J F Willemsen. Invasion percolation: a new form of percolation theory. *J. Phys. A*, 16(14), 1983.