

Emílio Frari Galera

Física da psicofísica:
Uma abordagem mecanística à lei de Stevens

RIBEIRÃO PRETO - SP
2019

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FFCLRP - DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA APLICADA À
MEDICINA E BIOLOGIA

Física da psicofísica:
Uma abordagem mecanística à lei de Stevens

Versão corrigida

Emílio Frari Galera

Dissertação apresentada à Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto da USP, como parte das exigências para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de concentração: Física dos sistemas complexos.

Orientador: Osame Kinouchi Filho

RIBEIRÃO PRETO - SP

2019

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Galera, Emílio Frari

Física da psicofísica: Uma abordagem mecanística à lei de Stevens./ Emílio Frari Galera; orientador: Osame Kinouchi Filho. Ribeirão preto, 2019.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada à Medicina e Biologia) - Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto da Universidade de São Paulo.

1. Neurociência Computacional 2. Redes Neurais 3. Psicofísica 4. Criticalidade

Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer ao prof. Osame Kinouchi Filho por me receber como seu aluno, pela paciência, pelas ideias e conversas.

Gostaria de agradecer também ao prof. Alexandre Souto Martinez, Gilberto Nakamura, Guilherme Contesini, José Renato Alcarás e Maurício Girardi-Schappo pelas conversas e dicas de artigos e livros que me ajudaram muito.

Aos meus pais e à minha irmã pelo apoio financeiro e por sempre estarem presentes, principalmente nos momentos mais difíceis.

À minha esposa Tauana, por sempre aturar minhas reclamações. Ao meu filho Gael, pelas conversas e sua curiosidade incrível e a minha filha Cora por ser o bebê mais fofo do universo.

A presente dissertação foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Este trabalho também foi produzido como parte das atividades do Centro de Pesquisa, Inovação e Disseminação para Neuromatemática (grant #2013/ 07699-0, FAPESP).

Também foram usados equipamentos do Laboratório de Física Estatística e Biologia Computacional (FEBiC) cedidos pelo NAP-USP CNAIPS - The Center for Natural and Artificial Information Processing Systems.

*There are some oddities in the
perspective with which we see the world.*

Douglas Adams

Resumo

GALERA, E. F. **Física da psicofísica: Uma abordagem mecanística à lei de Stevens** 85 p. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto, Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto, 2019.

Interagimos com o ambiente através de nossos sentidos. A amplitude dos estímulos que carregam informações podem variar em ordens de magnitude e ainda assim, somos capazes de percebê-los e processá-los de forma automática, diferentemente de equipamentos eletrônicos, digitais ou analógicos, que necessitam de ajustes de escala para detectar estímulos em diversas ordens de grandeza. Por exemplo, conseguimos escutar desde o som de um alfinete caindo no chão quanto o motor de um avião a jato enquanto decola, sem precisarmos ajustar a sensibilidade de nossos ouvidos. De acordo com a Psicofísica, o que torna possível nossa flexibilidade ao lidar com alguns tipos de estímulos é uma relação não linear entre o estímulo e nossa resposta, conhecida como lei de potência de Stevens. Estudamos, neste projeto, uma rede bidimensional em camadas de neurônios simplificados do tipo integra-dispara estocásticos. Para isso, partimos de uma análise de campo médio. Validamos os resultados analíticos através de simulações do modelo em uma rede tipo grafo completo e em uma rede com topologia dinâmica (*annealed*). Em seguida, caracterizamos o comportamento do modelo em uma rede bidimensional medindo o ponto de transição de fase e três expoentes críticos. Mostramos que este sistema produz a Lei de Stevens da Psicofísica como um fenômeno emergente onde a resposta do sistema a estímulos externos é máxima e obedece uma lei de potência no ponto crítico de uma transição de fase. Assim, no espírito da Física Estatística, temos um modelo microscópico que explica uma lei macroscópica. Mostramos também a importância da topologia da rede e como a sua resposta melhora quando estendemos o modelo para duas camadas de elementos.

Palavras-chave: 1. Neurociência Computacional 2. Redes Neurais 3. Psicofísica 4. Criticalidade

Abstract

GALERA, E. F. **Physics of psychophysics: A mechanistic approach to Stevens's law** 85 p. Dissertation (M.Sc) - Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto, Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto, 2019.

We interact with our environment through our senses. Intensity of stimulus which carry information vary many orders of magnitude, still we are capable of sensing and processing them in an automated fashion. Contrary to electronic devices, digital or analog, that need their scales adjusted to detect a wide range of stimulus intensity. For instance, we can hear the sound a falling pin makes when it hits the ground as well as the engine of a jet plane while it's taking off, without having to adjust the sensitivity of our ears. According to psychophysics, our flexibility in dealing with some types of stimulus comes from a non-linear relation between stimulus and response, known as Stevens power law. In this project we studied a two dimensional layered network of stochastic integrate and fire neurons. For such, we begin with a mean field analysis. Validation of the analytical results was made through simulations of the neuron model in a fully connected network and in a network with dynamical topology (annealed). A characterization of the model in a two dimensional network was made by measuring the critical point of the system as well as three critical exponents. We showed that the system, network plus neuron model, produces the Stevens power law as an emergent phenomenon, where the system's response to external stimulus is maximum and obeys a power law at the critical point of a phase transition. In the light of Statistical Physics, we have a microscopic model which explains a macroscopic law. We also show the importance of the network's topology to the response and how it can be further enhanced extending the model to two layers of elements.

Key-words: 1. Computational Neuroscience 2. Neuronal Networks 3. Psychophysics 4. Criticality

Lista de figuras

2.1	Função $\Phi(V)$ para diversos valores de Γ e $\theta = 0.5$	7
2.2	Exemplo de uma rede, nós em vermelho e arestas em azul.	8
2.3	Exemplo de uma rede completa com N elementos, cada nó está conectado a todos os $N - 1$ vizinhos.	9
2.4	Exemplo de uma rede <i>annealed</i> . Note que, neste exemplo, a cada passo de tempo o elemento de índice i faz quatro conexões aleatórias.	10
2.5	Exemplo de uma rede bidimensional com 25 elementos	11
2.6	Exemplo do comportamento esperado nos dois tipos de transições de fase. Notemos que este exemplo não representa nenhum sistema físico, é apenas um esquema ilustrativo, e os parâmetros de ordem e de controle (ρ e x respectivamente) são fictícios. A) Transição de primeira ordem: é possível observar claramente uma descontinuidade no ponto de transição, marcado por pontos vermelhos. B) Transição de segunda ordem, é possível notar uma mudança de comportamento no parâmetro de ordem no ponto vermelho, porém agora essa mudança ocorre de maneira contínua, o ponto de transição neste caso é chamado de <i>ponto crítico</i> . As figuras C) e D) mostram o comportamento das derivadas do parâmetro de ordem ρ	14
2.7	Exemplo de como são selecionados os pontos $r_{0.1}$ e $r_{0.9}$. Os pontos em vermelho correspondem as coordenadas $(r_{0.1}, \rho_{0.1})$ e $(r_{0.9}, \rho_{0.9})$	22
3.1	Curvas geradas com $\Gamma = 1$, $I = 0$ e $\theta = 0$. Comparação entre $\rho(w)$ obtido através da solução numérica (linha cheia) das equações (3.3 – 3.5) e $\rho(w)$ dado pela aproximação na região crítica (pontos), equação (3.22), para diferentes valores de μ . (a) $\mu = 0.1$, (b) $\mu = 0.4$ e (c) $\mu = 0.8$	32
4.1	Amostras da atividade na rede tipo grafo completo nos três regimes. (a) subcrítico $w = 0.9$, (b) crítico $w = w_C = 1.0$ e (c) supercrítico $w = 1.1$. . .	34
4.2	Curvas (a) $\rho \times w$ e (b) $\chi \times w$ para diversos tamanhos de rede.	35

4.3	Simulação do modelo GGL em uma topologia de rede completa com 65536 neurônios, equações (2.1) e (2.6), pontos em azul. Caso analítico em vermelho, equação (3.29).	36
4.4	Curvas $\rho \times w$ para um sistema de $N = 16.384$ neurônios para diversos valores de numero de vizinhos K , equação (2.7).	37
4.5	Exemplos de como obter o valor $w_C(K)$ através da segunda derivada do parâmetro de ordem $\rho(w K)$	38
4.6	Curvas de correção para o caso da rede <i>annealed</i> com número de vizinhos k diferentes, <i>fitting</i> em vermelho.	39
4.7	Colapso de curvas, $\rho \times w/w_C(K)$ para diferentes tamanhos de conjuntos de conexões aleatórias K	40
4.8	Curvas para os parâmetros de ordem $\rho(w L)$ e $\chi(w L)$, (a) e (b) respectivamente. As linhas vermelha e cinza foram ajustadas com os expoentes obtidos através das simulações. Parâmetros $\Gamma = 1.0$, $\mu = 0.0$, $I = 0.0$ e $\theta = 0.0$	41
4.9	Curvas para os parâmetros de ordem $\rho(L w)$ e $\chi(L w)$ em função do tamanho característico da rede.	42
4.10	Colapso de dados para as curvas $\rho(L)$ e $\chi(L)$	44
4.11	Resposta da primeira camada a estímulos externos para diferentes tamanhos de rede nos três regimes, (a) subcrítico $w = 1.6$, (b) crítico $w_C = 1.74$ e (c) supercrítico $w = 1.9$	46
4.12	Atividade ρ da primeira camada em função da taxa de estímulos externos r para uma rede 256×256 , a curva em vermelho mostra um comportamento de lei de potencia com $m < 1$ para resposta da rede.	47
4.13	Faixa dinâmica da primeira camada para diferentes tamanhos de rede.	48
4.14	Resposta da segunda camada a estímulos externos para diferentes tamanhos de rede nos três regimes, (a) subcrítico $w = 1.6$, (b) crítico $w_C = 1.74$ e (c) supercrítico $w = 1.9$	49
4.15	Faixa dinâmica para redes de diferentes tamanhos na segunda camada.	50
4.16	Resposta da segunda camada para diferentes conectividades nos três regimes, (a) subcrítico $w = 1.6$, (b) crítico $w^* = 1.75$ e (c) supercrítico $w = 1.9$, para uma rede de tamanho 256×256	51
4.17	Faixa dinâmica da segunda camada para diferentes conectividades e tamanhos fixos. (a) 32×32 , (b) 128×64 e (c) 256×256	52

4.18	Resposta de uma rede formada por duas camadas de tamanho 256×256 com 10% dos elementos da primeira camada conectados com a segunda para os casos em que $\rho \propto r^m$ em cada camada. Primeira camada (pontos em laranja, $m = 0.254$) e segunda camada (pontos em azul, $m_2 = 0.0776$).	53
5.1	Gráficos à esquerda: faixa dinâmica pequena de neurônios sensoriais olfativos (OSN, curvas a esquerda) centradas em diferentes concentrações de odorante. O gráfico à direita mostra o efeito de se somar as curvas de cada neurônio, soma que seria feita nos glomérulos olfatórios. Figura adaptada de [1]	55
5.2	Faixa dinâmica para uma rede bidimensional simples (256×256 elementos), curva em azul. Faixa dinâmica para a segunda camada de um sistema bidimensional com duas camadas (64×64 na segunda camada) e conectividade de 10% dos elementos entre a primeira e a segunda, curva em laranja.	57
A.1	Distribuição de fontes luminosas na Terra (artificiais e naturais – incêndios florestais). Note que existem regiões de vários tamanhos que não possuem cidades luminosas o suficiente para aparecerem na foto. Fonte: NASA/NOAA, url: https://www.nasa.gov/topics/earth/earthday/gall_earth_night.html	63
A.2	De cima para baixo, esquerda a direita, processos de colonização com $\beta = 0, 5, 10, 15, 20$ e 25 . Em $t = 0$ temos apenas um nó colonizado em $i = 50, j = 50$ para uma rede 100×100 . Note a formação de grandes buracos vazios conforme β aumenta. Nossa proposta é que a Terra se situa em um desses grandes buracos.	65

Siglas

DP Percolação direcionada (Directed Percolation). 19

SOC Criticalidade auto organizada (Self-organized criticality). 1

Lista de símbolos

β	Expoente crítico associado ao parâmetro de ordem ρ
χ	Susceptibilidade
Δ	Faixa dinâmica
δ_t	Intervalo de tempo
δ_ρ	Diferença entre valores médios da atividade da rede que correspondem ao maior e menor estímulo
Δ_{w_C}	Diferença entre o pesos sinápticos críticos para o caso analítico
η_k	Fração de neurônios com idade disparo k
Γ	Ganho neural
γ	Expoente crítico associado a susceptibilidade χ
λ	Expoente crítico (definição)
$\lambda(r)$	Processo de Poisson
$\langle X \rangle$	Valor médio de uma variável genérica
\mathcal{G}	Energia livre de Gibbs
\mathcal{Z}	Função partição de Gibbs
μ	Termo de vazamento
ν	Expoente crítico associado ao comprimento de correlação ξ
\bar{w}	Parâmetro de controle reduzido do modelo GL
Φ	Função disparo
ρ	Variável intensiva usada como parâmetro de ordem

ρ^\pm	Bifurcação da atividade média no caso analítico
ρ_x	Atividade da rede correspondente a $x\%$ de δ_ρ
ρ_0	Menor valor da atividade média da rede correspondente ao menor estímulo apresentado
ρ_{max}	Maior valor da atividade média da rede correspondente ao maior estímulo apresentado
σ	Expoente crítico associado ao tamanho de <i>clusters</i>
τ	temperatura reduzida
Θ	Função Heaviside
θ	Potencial limite
\tilde{w}	Peso sináptico cuja resposta da primeira camada da rede a estímulos segue uma lei de potência
\vec{J}	Vetor de forças generalizadas
\vec{x}	Vetor de deslocamento generalizado
ξ	Comprimento de correlação
$\{\sigma\}$	Microestado de um sistema
E	Função energia do sistema
e	Número de Euler
f	Parâmetro de ordem hipotético
G_χ	Função de escala para a susceptibilidade
G_ρ	Função de escala para o parâmetro de ordem
I	Intensidade de estímulo
I_i	Estímulo externo
K	Tamanho de conjunto de conexões (<i>fittting</i> no caso da rede <i>annead</i>)
K_B	Constante de Boltzmann
K_i	Conjunto de elementos que conectam com i

L	Tamanho característico da rede
m	Expoente de Stevens
$m_{10\%}$	Expoente para lei de potência para um sistema com 10% de conexão entre primeira e segunda camada
$m_{25\%}$	Expoente para lei de potência para um sistema com 25% de conexão entre primeira e segunda camada
$m_{50\%}$	Expoente para lei de potência para um sistema com 50% de conexão entre primeira e segunda camada
N	Número de elementos no sistema
P	Probabilidade
$p(V)[t]$	Fração de neurônios que possuem potencial de membrana no intervalo $[V, V + dV]$ no instante t
p_σ	Probabilidade de ocorrência do microestado σ
r	Taxa de disparo do processo de Poisson
$r_{0.1}$	Taxa de estímulo que evoca uma resposta 10% de δ_ρ
$r_{0.9}$	Taxa de estímulo que evoca uma resposta 90% de δ_ρ
S	Resposta da lei de potência de Stevens
T	Temperatura
t	Tempo
T_C	Temperatura crítica
t_f	Tempo final
t_i	Tempo inicial
U_k	Potencial de membrana dos neurônios do grupo η_k
V_i	Potencial de membrana do neurônio i
w	Peso sináptico médio
w^*	Peso sináptico cuja resposta da segunda camada da rede a estímulos segue uma lei de potência

w_C Peso médio crítico das sinapses

$w_C(K)$ Peso sináptico crítico para um conjunto de conexões de tamanho K

w_{ij} Peso da sinapse que liga o neurônio pré-sináptico i e o neurônio pós-sináptico j

X_i Estado do neurônio de índice i

X_σ Valor da variável genérica com o sistema no microestado σ

Z Função partição

Sumário

Lista de figuras

Siglas

Lista de símbolos

1	Introdução	1
2	Metodologia	5
2.1	O modelo de neurônio	5
2.2	Redes de neurônios	8
2.2.1	Rede completa	9
2.2.2	Rede aleatória <i>annealed</i>	9
2.2.3	Rede bidimensional	10
2.3	Física Estatística	12
2.3.1	Transições de fase em sistemas no equilíbrio termodinâmico	12
2.3.2	Classe de universalidade de percolação direcionada	18
2.4	Leis de potência e Psicofísica	20
2.5	Simulações computacionais	23
2.5.1	Simulações de rede completa	25
2.5.2	Simulações de rede <i>annealed</i>	25
2.5.3	Simulações de rede bidimensional	25
2.5.4	Simulações da rede bidimensional em camadas	26
3	Cálculos numéricos e analíticos	27
3.1	Aproximação de campo médio	28
3.2	Aproximação no ponto crítico	29
3.3	Caso analítico: $\mu = 0$	31

4	Resultados de simulação	
	computacional	34
4.1	Rede de grafo completo	34
4.2	Rede <i>annealed</i>	36
4.3	Rede bidimensional	39
4.4	Psicofísica e faixa dinâmica de intensidade de estí-mulos	45
4.4.1	Psicofísica neural na primeira camada	45
4.4.2	Psicofísica neural da segunda camada	47
5	Discussão	54
6	Conclusões e Perspectivas	59
A	Percolação por invasão e o Paradoxo de Fermi	62
	Referências Bibliográficas	67

Capítulo 1

Introdução

Neurônios são as unidades básicas de processamento do sistema nervoso. São elementos altamente não lineares cuja função básica consiste em integrar sinais, seja de outros neurônios ou estímulos externos. Estes integradores, quando colocados para interagir em grandes números uns com os outros, apresentam propriedades coletivas emergentes: o comportamento resultante do sistema não é uma simples superposição linear dos elementos básicos, neste caso, neurônios.

Propriedades coletivas emergentes são fenômenos presentes em diversas áreas, e normalmente são estudadas através de ferramentas de física estatística e teoria de sistemas dinâmicos. Sua aplicação para se compreender a dinâmica de sistemas cerebrais é ainda relativamente recente [2, 3].

Em um trabalho seminal de 1982, Hopfield [4] mostrou que propriedades computacionais coletivas naturalmente emergem em uma rede de neurônios binários (apenas dois estados, disparo ou silêncio). No caso, a rede apresenta estados coletivos de memória (representada por estados atratores da rede) e a característica de recuperar memórias a partir de informações parciais.

Em 1987, Bak, Tang e Wiesenfeld [5] propuseram que sistemas dinâmicos com muitos graus de liberdade naturalmente se auto organizam em estados críticos (*self-organized criticality* ou SOC). O modelo de pilha de areia introduzido por eles se tornou um paradigma para aplicações nas mais diversas áreas de pesquisa onde sinais de criticalidade (avalanches invariantes de escala, relações de escala entre expoentes críticos etc.) se fazem presente.

Tão cedo quanto 1991, físicos tentaram aplicar o conceito de SOC para redes neuronais. Miranda & Herrmann propõem um modelo de rede neural inspirado em Hopfield na forma de uma pilha de areia frustrada, com sinapses inibitórias e excitatórias [6]. Em um resumo estendido surpreendentemente moderno (neurônios mais complexos que integra-e-dispara) Makarenkov & Kirillov apresentam o trabalho *Self-organized criticality in neural networks* [7]. Isto ocorre doze anos antes das primeiras evidências experimentais de avalanches neuronais [8].

Em 1995, Herz & Hopfield [9] notaram que modelos de elementos integra-dispara

usados para modelagem de terremotos são matematicamente equivalentes a modelos de neurônios de redes neuronais. Conjecturaram se haveria a possibilidade de SOC aparecer em tais redes, mas não desenvolveram tal conjectura. Também em 1995, Usher *et al.* [10] propuseram um modelo com SOC para explicar ruído $1/f$ neuronal. Este talvez seja o primeiro modelo consistente de avalanches neuronais, proposto em uma época em que não havia nenhuma evidência experimental de que tais avalanches existissem em tecidos biológicos. Ainda em 1995, Bottani [11] também mostrou que redes de elementos acoplados por pulsos, similares a redes neuronais, poderiam apresentar comportamento tipo SOC. A relação entre sincronização e SOC em redes neuronais também foi estudada por Chen *et al.* em 1995 [12]. Tais comportamentos também foram examinados e revistos por Pérez *et al.* em 1996 [13]. Bak & Chialvo mostraram que uma rede de neurônios guiada por reforço negativo das sinapses apresenta SOC, devido a isso o sistema é capaz de aprender e se adaptar de maneira muito eficiente [14, 15].

Podemos encarar tais modelos iniciais como grandes sucessos em predição em biologia a partir de modelos teóricos de Física Estatística. Infelizmente, tais trabalhos foram ignorados na época.

A ideia do cérebro crítico encontrou suporte experimental em 2003 com o trabalho de Beggs & Plenz [8] que mediram a atividade neural em culturas de córtex de ratos. Os autores mostraram que as avalanches de atividade neural seguem uma lei de potência por duas ordens de magnitude. Para algumas revisões sobre o assunto sugerimos [2, 16, 17]. Apesar de não haver um consenso na academia sobre a ideia do cérebro crítico [18], podemos dizer que ela é uma ideia que vale a pena ser explorada [19, 20, 21, 22].

O cérebro humano possui bilhões de neurônios e cada um deles faz milhares de conexões. Esse sistema altamente complexo nos dá a habilidade de interagirmos com nosso ambiente. Dentro da psicologia a área que estuda essa interação chama-se psicofísica. A psicofísica usualmente faz uma abordagem *top-down* para descrever a interação entre estímulo e representação. Ou seja, algum tipo de estímulo é apresentado ao sujeito, uma resposta é coletada e uma inferência sobre a representação interna do estímulo é feita. Nessa abordagem o que ocorre com o estímulo a nível de interação entre neurônios é deixada como uma caixa preta.

Copelli e colegas [23] mostraram que as leis de Stevens e Weber-Fechner na psicofísica podem ser interpretadas como funções de transferência de um meio excitável. No caso os autores mostraram que conectar elementos excitáveis faz com que a resposta do sistema siga uma função logarítmica (lei de Weber-Fechner) em alguns casos e uma função de potência (lei de Stevens) para outros. Em 2006 Kinouchi & Copelli [20] propõem um modelo mecanístico para as leis psicofísicas usando ideias da Mecânica Estatística. Os autores mostraram que um sistema de elementos excitáveis e interagentes próximo de

uma transição de fase de segunda ordem consegue responder a estímulos de maneira muito eficiente e ainda, a resposta deste sistema segue uma lei de potência similar à lei de Stevens na psicofísica. Utilizando o modelo de Kinouchi & Copelli [20], Martinez [24] mostrou que acoplar duas redes aleatórias de neurônios faz com que a faixa dinâmica e sensibilidade da segunda rede sejam muito maiores que um simples sistema com uma única camada. E ainda, a autora mostrou que a resposta da segunda camada segue uma lei de potência do tipo $f_2(x) \propto x^{m^2}$; onde f_2 representa a resposta da segunda camada, x o estímulo em questão e m um expoente que pode ser associado a expoentes críticos da termodinâmica.

A abordagem da mecânica estatística, do tipo *bottom-up*, é exatamente oposta à psicofísica, preocupando-se com as bases neuronais das leis psicofísicas. Neste caso o sistema é conhecido e sua resposta a estímulos externos é estudado usando-se simulações computacionais.

Neste projeto estudamos uma rede bidimensional (com uma ou duas camadas) com neurônios integra-e-dispara estocásticos. O modelo de neurônio utilizado foi proposto inicialmente por Gerstner [25], estudado com mais rigor por Galves e Löcherbach [26] e simplificado por Brochini *et al.* [27]. Utilizamos uma linha de estudo similar a [28, 29] para investigar como este modelo de neurônio se comporta em uma rede bidimensional em camadas.

Inicialmente utilizamos uma aproximação de campo médio para obter resultados analíticos. Com a aproximação conseguimos avaliar os tipos de transições de fase que o modelo apresenta, quais parâmetros as controlam e qual a classe de universalidade do modelo. Para validar os resultados analíticos realizamos simulações com neurônios estocásticos em duas topologias diferentes, uma rede completa e uma rede com conexões dinâmicas (topologia *annealed*). Estudando a transição de fase absorvente, determinamos como uma rede bidimensional de neurônios estocásticos se comporta medindo o ponto crítico desse sistema e seus expoentes críticos.

Com o sistema bidimensional bem caracterizado acoplamos duas redes bidimensionais para formar um sistema em camadas e realizamos uma espécie de experimento psicofísico, onde estimulamos a primeira camada do sistema e coletamos respostas da primeira e segunda camadas nos três regimes conhecidos, subcrítico, crítico e supercrítico. Neste caso, obtemos as leis de Stevens, os expoentes psicofísicos de Stevens e a faixa dinâmica de trabalho de tais sistemas. Encontramos que a rede quadrada com duas camadas pode ter uma faixa dinâmica de mais de 40dB em contraste com 20dB de uma rede aleatória. Isso acontece porque o expoente de Stevens da rede quadrada em camadas é bem menor que o da rede aleatória.

Nossos resultados para a faixa dinâmica e sensibilidade de um sistema em camadas

são compatíveis com os obtidos por Martinez [24]. Apesar de usarmos uma topologia bidimensional para as camadas e um modelo diferente para neurônios, o sistema responde a estímulos com uma lei de potência tanto para primeira quanto para a segunda camada. Em particular, a segunda camada segue uma lei de potência $f_2(x) \propto x^{m^2}$, onde o expoente m da rede bidimensional também pode ser associado a expoentes críticos da termodinâmica.

Vale observar que nesta dissertação não estudaremos o processo de auto-organização da rede para a região crítica como é feito em [30, 31, 32, 28, 33, 29], que envolve a transformação de parâmetros do modelo em variáveis dinâmicas adaptativas lentas. Nossos resultados se referem ao modelo estático, sem dinâmica nas sinapses ou nos ganhos neuronais. Devido a problemas delicados na caracterização do modelo estático (determinação de ponto de transição e expoentes críticos), típicos de topologias d -dimensionais, o modelo com sinapses dinâmicas será estudado em outra oportunidade.

Metodologia

2.1 O modelo de neurônio

Neurônios são as células fundamentais do sistema nervoso. São responsáveis por receber estímulos do ambiente e pela forma como respondemos a eles. Mais do que isso, a interação entre neurônios permite que muitas espécies de animais sejam capazes de interações entre indivíduos que vão além da mera sobrevivência devido a respostas a um ambiente imprevisível, muitos animais apresentam comportamento social. A unidade fundamental que permite essa gama de funcionalidade do sistema nervoso é o neurônio.

Um neurônio consiste em basicamente três partes, dendritos, corpo celular e axônio. Os dendritos são normalmente responsáveis por receber sinais de outros neurônios, eles tem um papel fundamental em integrar os sinais recebidos. O axônio é a estrutura responsável por gerar e transmitir sinais de um neurônio aos dendritos de muitos outros. No corpo celular de um neurônio estão estruturas responsáveis por mantê-lo vivo e permitir seu funcionamento adequado, como o núcleo e estruturas capazes de sintetizar proteínas.

Neurônios enviam e recebem sinais uns dos outros através de potenciais de ação. A diferença de potencial entre o meio intracelular e o meio extracelular de um neurônio é mantida relativamente fixa. Isso ocorre devido a diferentes concentrações iônicas entre os meios (alta concentração de sódio e baixa concentração de potássio no meio extracelular, baixa concentração de sódio e alta concentração de potássio no meio intracelular). Um potencial de ação consiste em um fluxo abrupto de íons através da membrana, mediado por canais iônicos seletivos sensíveis à diferença de potencial entre os meios. Desse fluxo resulta uma mudança igualmente abrupta na diferença de potencial entre os meios, que é o que chamamos de potencial de ação. Até onde sabemos o processamento e transmissão de informação no sistema nervoso ocorre através do potencial de ação [34].

Em neurociência teórica existem modelos biologicamente motivados que tentam simular o comportamento do neurônio através de equações diferenciais acopladas inspiradas na dinâmica de canais iônicos (modelos baseados em condutâncias). Tais modelos, porém, são computacionalmente custosos e possuem muitos parâmetros para serem estudados. Os

modelos conhecidos como neurônios integra e dispara são consideravelmente mais simples e fáceis de simular, e são apropriados para o estudo de propriedades coletivas [35].

Utilizamos um modelo de neurônio tipo integra e dispara proposto inicialmente por Gerstner em 1991 [25, 36], generalizado por Galves e Löcherbach [26] e simplificado por Brochini *et al.*, que chamaremos de modelo GGL [27, 28]. O modelo GGL consiste em um mapa de tempo discreto [37], inspirado em neurônios integra-e-dispara com vazamento (Leaky Integrate-and-Fire ou LIF) [38, 39], onde o potencial de membrana de cada neurônio evolui na forma:

$$V_i[t + 1] = \begin{cases} 0 & \text{se } X_i[t] = 1 \\ \mu V_i[t] + I_i[t] + \frac{1}{|K_i|} \sum_{j \in K_i} w_{ij} X_j[t] & \text{se } X_i[t] = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Se um neurônio dispara, sinalizado por $X_i[t] = 1$, seu potencial de membrana vai para 0, um valor arbitrário de *reset*. Caso o neurônio não dispare $X_i[t] = 0$, o potencial de membrana evolui conforme a segunda equação de (2.1). O modelo incorpora um termo de vazamento μ , onde $\mu \in [0, 1]$. Esse termo controla quanto o neurônio perde de potencial a cada passo de tempo, além de poder ser considerado como um termo de memória do neurônio sobre seus estados anteriores. Ele controla também como o potencial de membrana decai para o valor assintótico (arbitrário) de potencial $V_{\text{reset}} = 0$ na ausência total de estímulos.

A somatória da segunda equação (2.1) determina como cada neurônio i interage com o conjunto K_i de seus vizinhos. A variável Booleana $X_j[t]$ é o estado do neurônio pré-sináptico j que se conecta com o neurônio pós-sináptico i . O peso da sinapse entre os neurônios i e j é representado por w_{ij} . O termo $|K_i|$ normaliza a atividade que i soma da rede baseado no número de elementos com quem i se conecta, ou seja é o número total de elementos que interagem com i . O termo $I_i[t]$ representa estímulos externos adicionados ao elemento i .

Como dissemos, o estado de cada neurônio (disparo ou silêncio) é definido pela variável $X_i[t] \in \{0, 1\}$, e é a dinâmica dessa variável que diferencia o modelo GGL de outros modelos integra e dispara. Aqui, um neurônio disparar ou não é um evento probabilístico, o modelo é intrinsecamente estocástico, sem a necessidade de incorporar ruídos externos para tal finalidade. A probabilidade de um neurônio disparar é dada por

$$P(X_i[t + 1] = 1 \mid X_i[t] = 0) = \Phi(V_i[t + 1]), \quad (2.2)$$

$$P(X_i[t + 1] = 1 \mid X_i[t] = 1) = 0. \quad (2.3)$$

Notemos que um período refratário, de um passo de tempo, já é incorporado neste modelo e que é $V[t + 1]$ e não $V[t]$ que influencia o disparo no tempo $t + 1$.

Por motivos biológicos, a função $\Phi(V)$ deve ser monótona crescente com apenas um máximo na primeira derivada e deve possuir limites $\Phi(-\infty) = 0$ e $\Phi(+\infty) = 1$ [27]. Durante este projeto usamos Φ descrito por

$$\Phi(V) = \frac{(V - \theta)\Gamma}{1 + (V - \theta)\Gamma} \Theta(V - \theta), \quad (2.4)$$

onde θ é um valor de limiar tal que para qualquer potencial de membrana menor que θ a probabilidade do neurônio disparar é zero. O parâmetro Γ , chamado de ganho neuronal, controla a derivada da equação (2.4) perto de zero e biologicamente está relacionado com as propriedades de excitabilidade do segmento inicial do axônio (*Axonal Initial Segment* ou AIS), onde os disparos se iniciam, ver figura (2.1) [27]. A função $\Theta(x)$ em 2.4 é a função de *Heaviside*:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < 0 \\ 1 & \text{if } x > 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

Notemos que o valor de $\Theta(0)$ não muda o valor de $\Phi(V = \theta) = 0$, e podemos usar qualquer convenção para o mesmo, por exemplo $\Theta(0) = 1/2$ ou $\Theta(0) = 1$. O uso a função (2.4) simplifica os resultados analíticos para o caso de campo médio que será discutido no próximo capítulo.

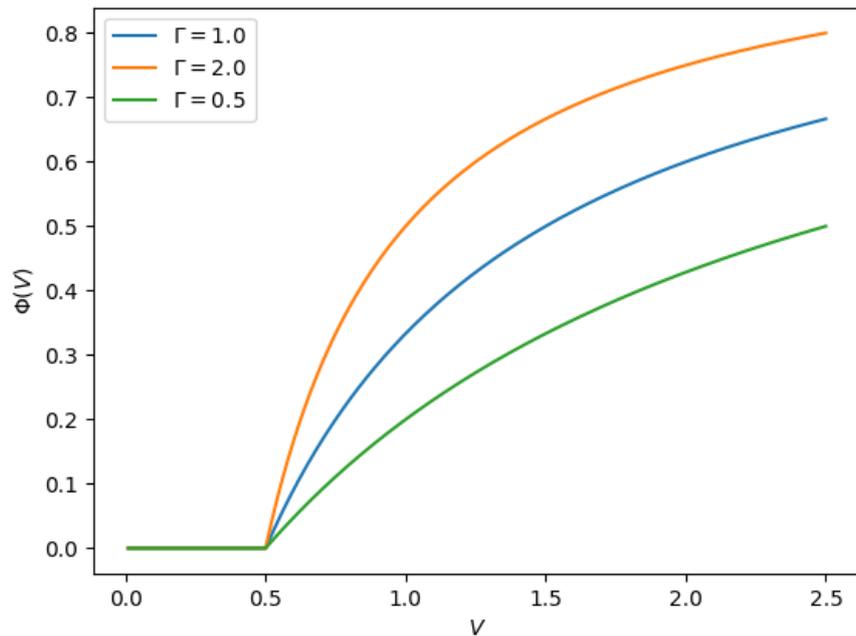


Figura 2.1: Função $\Phi(V)$ para diversos valores de Γ e $\theta = 0.5$.

2.2 Redes de neurônios

Redes são estruturas abstratas usadas para representar objetos e relações entre eles [40]. Tal representação é feita através de nós (ou nodos, ou vértices) e arestas (ou *links*), ver figura (2.2). Sistemas neurais são compostos por muitos neurônios que interagem entre si por sinapses. Assim, uma maneira de representa-los é através de redes onde cada neurônio é um nó na rede e cada sinapse é uma aresta entre dois neurônios. Notemos que, neste caso estamos considerando uma rede não direcionada e simétrica $w_{ij} = w_{ji}$, figura (2.2).

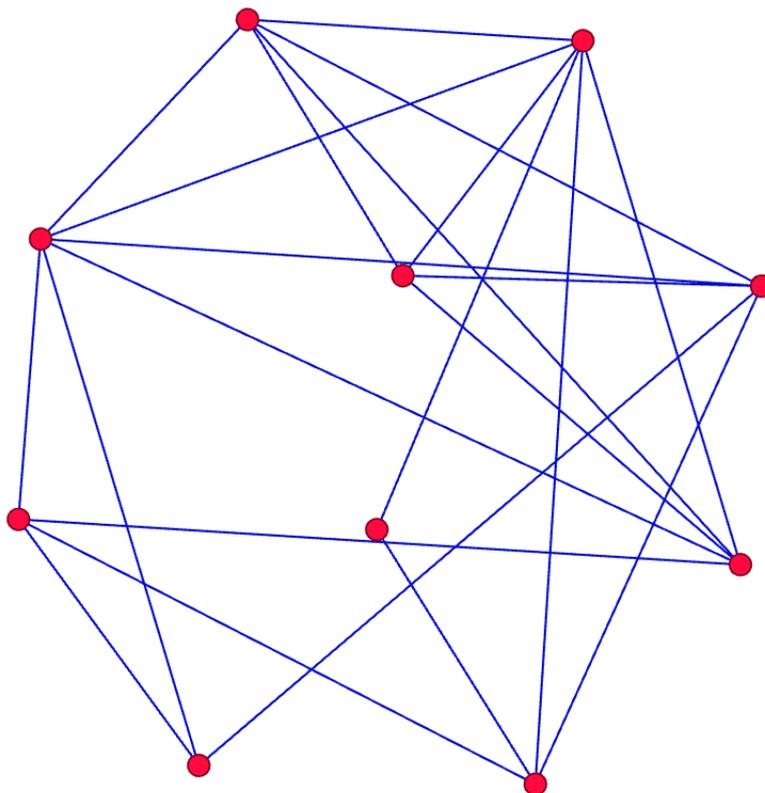


Figura 2.2: Exemplo de uma rede, nós em vermelho e arestas em azul.

No nosso modelo, a transmissão de sinal entre dois neurônios é instantânea (ou melhor, é da escala do período refratário $\Delta t = 1$ ms) e não fazemos distinção entre sinapses químicas ou elétricas. O modelo também não leva em conta a plasticidade sináptica portanto o valor de w_{ij} é fixo. Apesar dessas simplificações afastarem nosso modelo de um sistema neural biológico, o comportamento do sistema como um todo, rede mais neurônios, apresenta características que podem auxiliar na compreensão de um sistema sensorial real.

Quando tratamos de redes, a forma como os objetos interagem, ou seja, a distribuição de arestas entre os nós, define a topologia da rede. Neste projeto consideramos três topologias diferentes: rede completa, rede aleatória *annealed* e rede bidimensional.

2.2.1 Rede completa

Na topologia de rede completa (ou *all-to-all*), temos que cada elemento da rede se conecta com todos os outros elementos, ver figura (2.3).

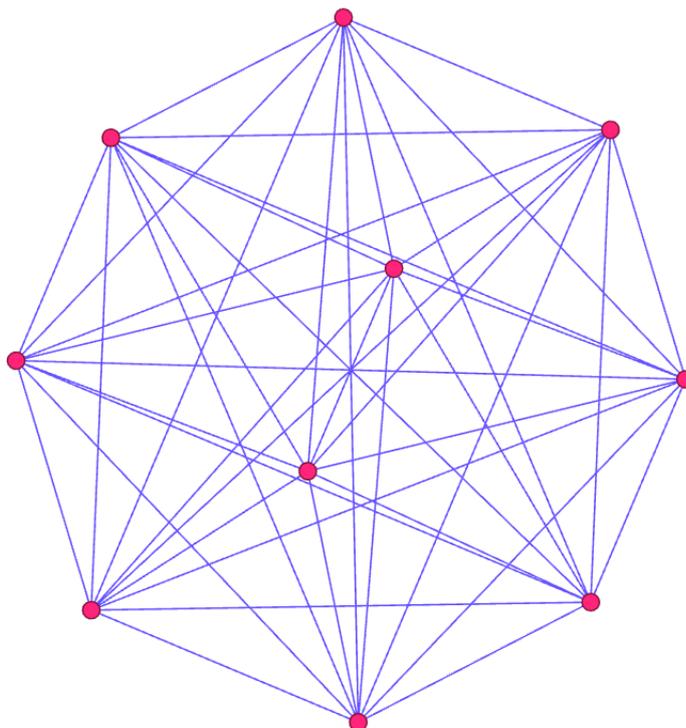


Figura 2.3: Exemplo de uma rede completa com N elementos, cada nó está conectado a todos os $N - 1$ vizinhos.

Isso significa que, na somatória da segunda equação (2.1), o conjunto de elementos K_i fica definido como

$$K_i = \{1, 2, 3, \dots, N\} - \{i\}, \quad (2.6)$$

A equação (2.6) denota um conjunto definido por todos os índices de neurônios menos o índice do neurônio i , e cada neurônio tem $N - 1$ sinapses. A topologia de rede completa é importante pois permite testar os resultados analíticos obtidos através da aproximação de campo médio, que descreve bem uma rede completa no limite termodinâmico $N \rightarrow \infty$.

2.2.2 Rede aleatória *annealed*

Em uma rede aleatória, cada elemento se conecta a um conjunto K_i escolhido de forma probabilística. Por exemplo, podemos escolher formar um link w_{ij} com probabilidade p fixa, evitando repetições (rede aleatória de Erdős-Rényi). Em uma variante mais fácil de construir, cada neurônio tem exatamente K neurônios pós-sinápticos (ou *outgoing links*)

sorteados com probabilidade $p = K/N$ (de forma que o número de neurônios pré-sinápticos segue uma distribuição Binomial com média $pN = K$ e variância $p(1-p) = K(1-K)/N^2$).

Nesses exemplos, é usual que as ligações não variem com o tempo, o que é chamado de caso temperado (ou *quenched*). Alternativamente, poderíamos re-sortear os vizinhos a cada passo de tempo, o que é chamado de caso recozido (ou *annealed*). O caso quenched produz certos efeitos sutis na determinação do ponto crítico [33]. Assim, preferimos neste trabalho estudar apenas o caso da rede aleatória annealed, ver figura (2.4).

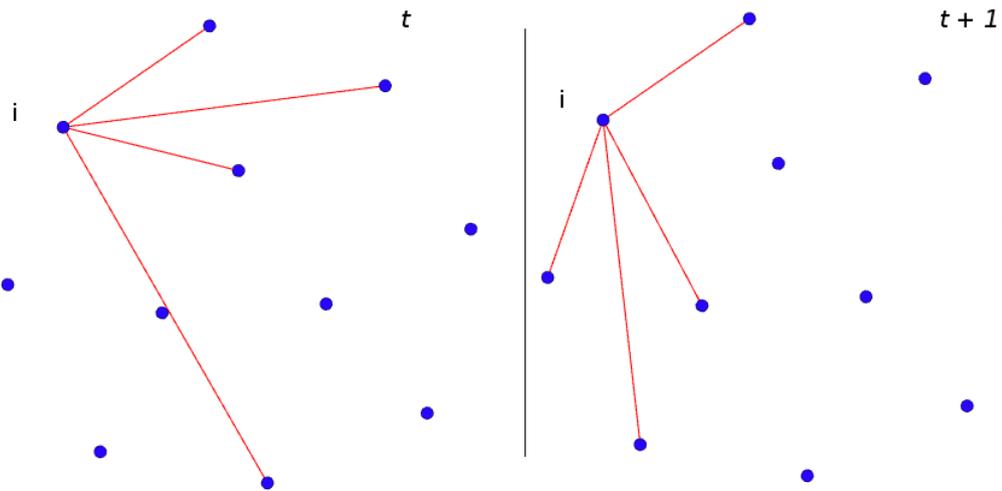


Figura 2.4: Exemplo de uma rede *annealed*. Note que, neste exemplo, a cada passo de tempo o elemento de índice i faz quatro conexões aleatórias.

Em termos do modelo GGL, isso significa que o conjunto de conexões de cada neurônio possui um tamanho K fixo mas as conexões variam aleatoriamente com o tempo. Matematicamente temos que,

$$K_i[t] = \{j_1, j_2, \dots, j_K\}. \quad (2.7)$$

Notemos que a equação (2.7) representa apenas o conjunto de conexões ativas no passo de tempo t . Estamos considerando que $i \notin K_i[t]$ e que o neurônio i não se conecta duas vezes ou mais ao mesmo neurônio j no mesmo passo de tempo t .

Gerar um conjunto $\{j_1, j_2, \dots, j_K\}$ a cada passo de tempo para cada neurônio da rede pode ser computacionalmente custoso. Propomos o uso de uma adaptação do algoritmo de embaralhamento de *Fisher & Yates* [41].

2.2.3 Rede bidimensional

A topologia de rede bidimensional difere das duas anteriores devido a sua dimensionalidade espacial $d = 2$.

Podemos definir formalmente a rede bidimensional de neurônios GGL como uma matriz $I \times J$ de I linhas e J colunas onde cada elemento de índice ij dessa matriz representa um

neurônio e se conecta com seus quatro vizinhos mais próximos. Assim, a equação (2.1) pode ser redefinida como

$$V_{ij}[t+1] = \begin{cases} 0 & \text{se } X_{ij}[t] = 1, \\ \mu V_{ij}[t] + I_{ij}[t] + \frac{1}{|K_{ij}|} \sum_{k \in K_{ij}} w_k X_k[t] & \text{se } X_{ij}[t] = 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

onde o conjunto K_{ij} é definido como

$$K_{ij} = \{(i+1, j); (i-1, j); (i, j+1); (i, j-1)\}. \quad (2.9)$$

Um exemplo de uma rede bidimensional pode ser visto na figura (2.5).

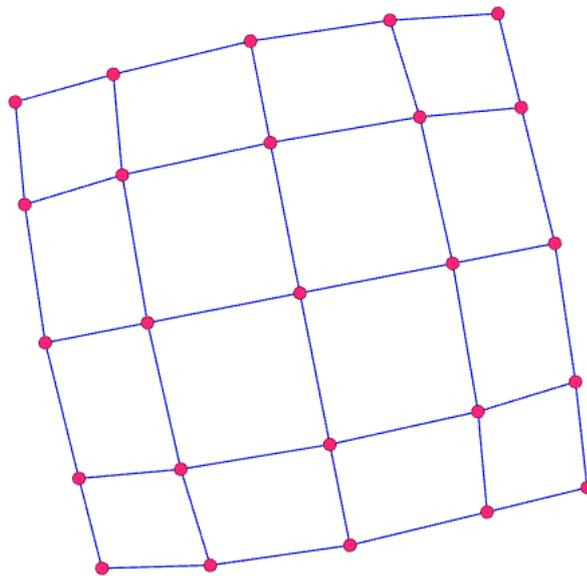


Figura 2.5: Exemplo de uma rede bidimensional com 25 elementos

Notemos que, na figura (2.5), os neurônios das bordas e quinas da rede não possuem um padrão de conexão definido pela equação (2.9). Esse tipo de *defeito* na estrutura da rede introduz efeitos de borda que alteram os resultados de simulações. Para eliminar o efeito de bordas, introduzimos condições periódicas de contorno na equação (2.9). Assim, dado um neurônio ij da rede bidimensional, se $(i \pm 1, j) \notin \mathbb{Z}^2 \rightarrow (i \pm 1, j) \equiv (i \mp I, j)$ e se $(i, j \pm 1) \notin \mathbb{Z}^2 \rightarrow (i, j \pm 1) \equiv (i, j \mp J)$. Dessa maneira, todos os neurônios possuem quatro conexões e a estrutura bidimensional da rede é preservada nas bordas e quinas.

As condições periódicas de contorno minimizam mas não resolvem totalmente os efeitos de tamanho finito N , ou seja, os resultados de simulação ainda dependerão de N . Assim, sempre é necessário fazer um estudo do sistema em função de seu tamanho e tentar extrapolar os resultados para o limite $N \rightarrow \infty$, o que é chamado de *finite size scaling*.

O sistema bidimensional de neurônios GGL pode ser estendido para um modelo em camadas. Considerando um novo índice $\sigma \in \mathbb{N}^+$ para designar camadas, é possível introduzir interação entre elas através do *input* do modelo, assim para cada camada a equação

(2.8) fica:

$$V_{ij}^\sigma[t+1] = \begin{cases} 0 & \text{se } X_{ij}^\sigma[t] = 1 \\ \mu V_{ij}^\sigma[t] + I_{ij}^\sigma[t] + \alpha_{ij} X_{ij}^{\sigma'} + \frac{1}{|K_{ij}^\sigma|} \sum_{k \in K_{ij}^\sigma} w_k X_k^\sigma[t] & \text{se } X_{ij}^\sigma[t] = 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

onde o conjunto K_{ij}^σ é a interação entre os quatro vizinhos mais próximos do elemento ij dentro da camada σ , definido na equação (2.9). O novo termo $\alpha X_{ij}^{\sigma'}$ é uma conexão entre os elementos ij das camadas σ e σ' , e α_{ij} é a matriz de conexão entre camadas. Dessa forma, podemos acoplar muitas camadas sem alterar a estrutura bidimensional individual de cada uma.

2.3 Física Estatística

2.3.1 Transições de fase em sistemas no equilíbrio termodinâmico

A física estatística consiste em uma abordagem probabilística para descrever propriedades macroscópicas de sistemas com muitos graus de liberdade [42]. Esta área fundamental da física explica as propriedades macroscópicas de sistemas através de seus microestados. Por exemplo, como surge pressão, temperatura e calor específico em um gás a partir de uma coleção de moléculas?

Um exemplo de sistema com muitos graus de liberdade é um gás ideal formado por muitas partículas, de tipos diferentes ou não, que interagem entre si devido à repulsão de curto alcance gerando choques elásticos. Neste caso, cada partícula possui três coordenadas espaciais e três coordenadas de momentos lineares, com energia puramente cinética (translacional). Se as partículas são moléculas, poderemos ter também coordenadas angulares e interatômicas, ou seja, estados rotacionais, vibracionais e de energia potencial interna.

Outro exemplo é um pedaço de matéria com propriedades magnéticas. Neste caso os átomos não podem caminhar livremente pelo material, mas cada um possui um *spin* que pode apontar para diversas direções e está sujeito a interações com outros *spins*, mediadas por efeitos quânticos conhecidos como interações de trocas (*exchange interactions*) [43].

Finalmente, mais próximo de nosso estudo, podemos ter uma rede de neurônios onde cada neurônio pode emitir um potencial de ação ou ficar em silêncio dependendo da interação com outros neurônios da rede. Todos esses casos são sistemas macroscópicos constituídos por elementos microscópicos que interagem entre si e dão origem a comportamentos coletivos, desde médias triviais no gás ideal (pressão, temperatura) até genuínos fenômenos não-lineares (transições de fase).

Na descrição dos sistemas acima, e de todos os outros com muitos graus de liberdade, são essenciais as ideias de micro e macro estados. Um microestado é definido pelo conjunto dos estados de todos os graus de liberdade individuais. Por exemplo, no caso de um material magnético onde cada átomo do material pode ter *spin* $\sigma = \pm 1$, podemos definir um microestado através do conjunto dos *spins* de todos os átomos que compõe a amostra, $\{\sigma\} = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N\}$. Já um macroestado está relacionado com propriedades macroscópicas do sistema, no caso do material magnético, a magnetização média $m = \langle \sigma \rangle$. Notemos que um macroestado pode estar associado a muitos microestados diferentes, desde que a quantidade média observável, e outros vínculos observados, seja preservada.

Praticamente todos os sistemas que ocorrem na natureza são sistemas abertos acoplados a reservatórios externos. Tal que trocas de energia, partículas e outras quantidades conservadas entre reservatórios e sistema levam a correntes através do sistema que guiam a evolução temporal do mesmo. Tais correntes se manifestam a nível microscópico como uma quebra de *balanço detalhado*, significando que entre dois microestados adjacentes existe uma corrente de probabilidade diferente de zero [44]. A quebra de balanço detalhado define a diferença entre sistemas em equilíbrio e sistemas fora de equilíbrio.

Ambos sistemas, em equilíbrio e fora de equilíbrio, podem ser descritos por variáveis ou observáveis (macroestados). Tais variáveis descrevem o comportamento do sistema como um todo e caracterizam as transições de fases dos mesmos. Uma fase pode ser definida como a região no espaço de parâmetros onde todas as variáveis macroscópicas que descrevem o sistema são essencialmente homogêneas. Quando o sistema passa de uma fase a outra algumas variáveis e suas derivadas apresentam descontinuidades. Chamamos de parâmetros de ordem as variáveis que são afetadas pela transição de fase e de parâmetros de controle aquelas com controlam esse processo.

As transições de fase podem ser agrupadas essencialmente em dois tipos:

- Transições de primeira ordem, caracterizada por uma descontinuidade de algum parâmetro de ordem, presença de calor latente e região de coexistência de fases em torno do ponto de transição;
- Transições de segunda ordem, onde o parâmetro de ordem varia continuamente entre as duas fases, mas suas derivadas apresentam algum tipo de descontinuidade, figura (2.6).

Embora essa classificação não seja rigorosa e esteja um pouco datada [44], no nosso estudo ela ainda é útil pois apenas esses tipos de transição ocorrem em nosso modelo. Uma classificação mais atualizada pode ser encontrada em [45]. Nesta classificação, transições de segunda ordem são caracterizadas pela divergência da susceptibilidade, comprimento de correlação infinito e decaimento de correlações na forma de leis de potências.

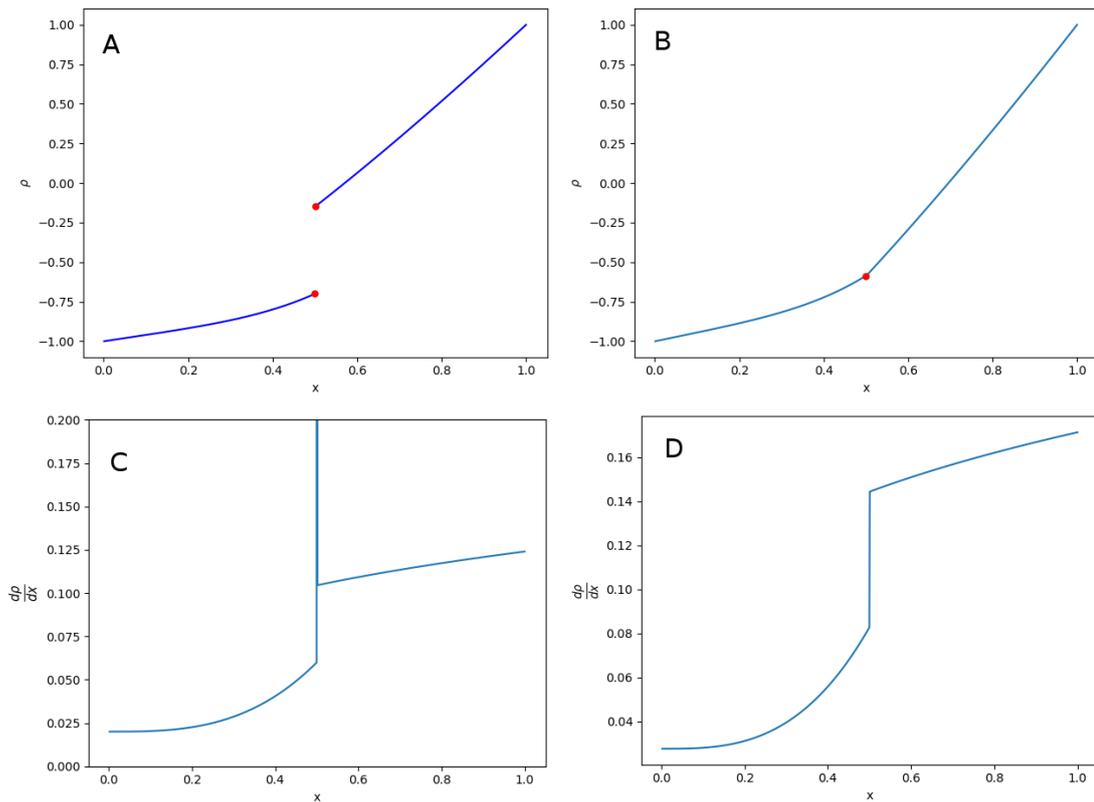


Figura 2.6: Exemplo do comportamento esperado nos dois tipos de transições de fase. Notemos que este exemplo não representa nenhum sistema físico, é apenas um esquema ilustrativo, e os parâmetros de ordem e de controle (ρ e x respectivamente) são fictícios. A) Transição de primeira ordem: é possível observar claramente uma descontinuidade no ponto de transição, marcado por pontos vermelhos. B) Transição de segunda ordem, é possível notar uma mudança de comportamento no parâmetro de ordem no ponto vermelho, porém agora essa mudança ocorre de maneira contínua, o ponto de transição neste caso é chamado de *ponto crítico*. As figuras C) e D) mostram o comportamento das derivadas do parâmetro de ordem ρ .

Diversos sistemas físicos que apresentam transições de segunda ordem podem ser agrupados por compartilharem propriedades de simetria. Esse tipo de agrupamento é a definição de *classe de universalidade* [44]. É esperado que sistemas pertencentes à mesma classe de universalidade apresentem o mesmo comportamento crítico. Ou seja, próximo ao ponto crítico, alguns parâmetros de ordem e grandezas relacionadas (susceptibilidade, comprimentos de correlação etc.) podem ser aproximados por leis de potência do tipo $y_m(x) \propto (x - x_c)^{\alpha_m}$ onde os diversos expoentes α_m são os mesmos para os sistemas pertencentes à uma mesma classe, mesmo que os detalhes dos elementos e da dinâmica microscópica sejam bastante diferentes.

Tanto sistemas em equilíbrio quanto fora de equilíbrio podem apresentar fenômenos críticos, no entanto apenas sistemas em equilíbrio possuem um formalismo plenamente desenvolvido que permite descrever o comportamento de variáveis do sistema através de seus microestados. Sistemas fora do equilíbrio ainda não possuem um formalismo canônico [44], no entanto podemos usar alguns resultados do formalismo de sistemas em equilíbrio para auxiliar na descrição de sistemas fora de equilíbrio.

Quando um sistema se encontra em equilíbrio suas variáveis são fixadas através de vínculos entre o sistema e reservatórios externos. Dessa maneira, a probabilidade de que o sistema esteja em um microestado $\{\sigma\}$ é dada através da estatística de *Maxwell-Boltzmann*,

$$p_\sigma \propto \exp\left(-\frac{E(\{\sigma\})}{k_B T}\right), \quad (2.11)$$

onde $E(\{\sigma\})$ é uma função de energia, k_B é a constante de *Boltzmann* e T é a temperatura. A equação (2.11) pode ser generalizada para qualquer sistema em equilíbrio [46].

É possível obter o valor médio $\langle X \rangle$ das variáveis de um sistema em equilíbrio através da equação (2.11), da seguinte maneira:

$$\langle X \rangle = \frac{\sum_\sigma X_\sigma \exp\left(-\frac{E(\{\sigma\})}{k_B T}\right)}{Z}, \quad (2.12)$$

onde definimos a *função de partição* Z como:

$$Z = \sum_\sigma \exp\left(-\frac{E(\{\sigma\})}{k_B T}\right). \quad (2.13)$$

Observando a equação (2.12), se a função de energia depende de alguma maneira direta ou indireta de X_σ , é possível ver que o valor médio $\langle X \rangle$ está relacionado com alguma derivada parcial da função partição. Em particular, um estado de equilíbrio pode ser

definido como o mínimo de uma função de energia, usualmente a *energia livre*,

$$\mathcal{G}(N, T; \vec{J}) = -k_B T \ln \mathcal{Z}, \quad (2.14)$$

onde N é o número de partículas, T a temperatura, \vec{J} é um vetor onde cada elemento representa uma força generalizada externa aplicada ao sistema e \mathcal{Z} a função partição de Gibbs, definida por:

$$\mathcal{Z}(N, T; \vec{J}) = \sum_{\{\sigma\}, \{x\}} \exp \left(\frac{\vec{J} \cdot \vec{X} - E(\{\sigma\})}{k_B T} \right). \quad (2.15)$$

Cada elemento J_q de $\vec{J} = \{J_q\}$ possui um deslocamento correspondente X_q . Os pares J_q e X_q correspondem a pares conjugados onde os deslocamentos generalizados X_q mudam em resposta a forças generalizadas J_q . Assim, é possível determinar o valor médio das variáveis do sistema através das equações (2.14) e (2.15):

$$X_q = -\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial J_q} = k_B T \frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial J_q}. \quad (2.16)$$

Vamos supor um sistema em equilíbrio que apresente comportamento crítico. Se uma força generalizada de apenas um componente é aplicada no sistema $\vec{J} = J\hat{q}$, tal que essa força possua apenas um deslocamento correspondente X , teremos:

$$\langle X \rangle(T, J) = -\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial J}. \quad (2.17)$$

Neste caso, a transição de segunda ordem se dá com uma descontinuidade na primeira derivada de $\langle X \rangle$ ou na segunda derivada da energia livre de Gibbs. Das equações (2.16) e (2.17), temos que:

$$\frac{\partial \langle X \rangle}{\partial J} = -\frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial J^2} = k_B T \frac{\partial}{\partial J} \left(\frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial J} \right), \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial \langle X \rangle}{\partial J} = k_B T \frac{\partial}{\partial J} \left(\frac{1}{\mathcal{Z}} \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial J} \right), \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \langle X \rangle}{\partial J} = k_B T \left[\frac{1}{\mathcal{Z}} \frac{\partial^2 \mathcal{Z}}{\partial J^2} - \left(\frac{1}{\mathcal{Z}} \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial J} \right)^2 \right]. \quad (2.20)$$

Analisando a equação (2.20), vemos que o termo à esquerda corresponde a definição de *susceptibilidade*. Os dois termos na direita estão relacionados respectivamente com o segundo e primeiro momento da distribuição de X :

$$\frac{1}{\mathcal{Z}} \frac{\partial^2 \mathcal{Z}}{\partial J^2} = \frac{\langle X^2 \rangle}{(k_B T)^2}, \quad (2.21)$$

$$\left(\frac{1}{\mathcal{Z}} \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial J} \right)^2 = \frac{\langle X \rangle^2}{(k_B T)^2}. \quad (2.22)$$

Assim, é possível reescrever a equação (2.20), com o auxílio das (2.21) e (2.22), como:

$$\frac{\partial \langle X \rangle}{\partial J} = \frac{1}{k_B T} [\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2]. \quad (2.23)$$

Podemos introduzir as variáveis intensivas ρ e χ :

$$\rho = \frac{1}{N} \langle X \rangle, \quad (2.24)$$

$$\chi = \frac{1}{N^2} \frac{\partial \langle X \rangle}{\partial J}. \quad (2.25)$$

A equação para susceptibilidade (2.23) em termos das novas variáveis (2.24) e (2.25), fica:

$$\chi = \frac{1}{k_B T} [\langle \rho^2 \rangle - \langle \rho \rangle^2]. \quad (2.26)$$

A variável ρ pode ser usada como parâmetro de ordem, e nela é possível ver a transição de segunda ordem. A susceptibilidade, de acordo com as equações (2.26) e (2.25), mostra a descontinuidade da transição e é simplesmente uma medida da flutuação (variância) de ρ .

Podemos definir formalmente um expoente crítico como:

$$\lambda = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\ln \rho(\tau)}{\ln \tau}, \quad (2.27)$$

onde ρ representa um parâmetro de ordem hipotético e τ representa o parâmetro de controle reduzido:

$$\tau = \frac{T_C - T}{T_C}. \quad (2.28)$$

Normalmente, representamos a relação entre o parâmetro de ordem e seu expoente na região crítica por $\rho(\lambda) \sim \tau^\lambda$, no entanto a relação $\rho(\lambda) = A\tau^\lambda$ raramente é válida. Geralmente, existem termos de correção de forma que uma representação mais apropriada seria:

$$\rho(\tau) = A\tau^\beta (1 + B\tau^y + \dots). \quad (2.29)$$

Usando a definição do expoente crítico (2.27) e a equação (2.29) vemos que $\lambda = \beta$. Os termos de correção na equação (2.29) podem ser desconsiderados se o parâmetro de controle está suficientemente próximo do ponto crítico. Assim, suficientemente próximo do ponto crítico $T \sim T_C$, e na ausência de qualquer força (campo) externa $J = 0$, temos que ρ deve se comportar como:

$$\rho(\tau, J = 0) \sim |\tau|^\beta, \quad (2.30)$$

onde β é o expoente crítico associado a $\rho(\tau, J = 0)$. Outros expoentes críticos e seus respectivos parâmetros de ordem são:

$$\chi(\tau, J = 0) \sim |\tau|^{-\gamma}, \quad (2.31)$$

$$\xi(\tau, J = 0) \sim |\tau|^{-\nu}, \quad (2.32)$$

onde ξ é o comprimento de correlação no sistema.

Da literatura sabemos que existem relações bem definidas para alguns expoentes de sistemas críticos em equilíbrio, como as relações de *Rushbrooke*, *Widom*, *Fisher* e *Josephson* [44]. Assim, conhecendo apenas alguns expoentes é possível determinar os outros através de relações de escala.

As equações (2.31) e (2.32) mostram o comportamento da susceptibilidade e comprimento de correlação na região crítica. As equações (2.30) a (2.32) mostram o comportamento esperado de uma transição de segunda ordem quando $T \rightarrow T_C$:

$$\rho \rightarrow 0, \quad (2.33)$$

$$\chi \rightarrow \infty, \quad (2.34)$$

$$\xi \rightarrow \infty. \quad (2.35)$$

A divergência do comprimento de correlação mostra a ausência de escala característica no sistema durante a transição.

2.3.2 Classe de universalidade de percolação direcionada

O laborioso trabalho de descrever transições de fase de segunda ordem em sistemas em equilíbrio parece em vão quando tratamos de sistemas fora de equilíbrio. Tais sistemas não obedecem ao balanço detalhado e portanto não podemos usar a equação (2.11) para descrever a densidade de probabilidade de microestados. Não é possível definir uma função de energia livre. No entanto, podemos extrair características comuns entre os dois tipos de sistemas.

Tanto sistemas em equilíbrio quanto fora de equilíbrio podem apresentar transições de primeira e segunda ordem, e ser agrupados em classes de universalidade. Os parâmetros de ordem ρ , χ e ξ devem se comportar da mesma maneira para transições de segunda ordem em sistemas fora de equilíbrio. Os parâmetros de ordem ρ e χ , como definidos nas equações (2.24), (2.25) e (2.26), são facilmente medidos em simulações de sistemas fora do equilíbrio.

Uma descrição analítica dos parâmetros de ordem ρ e χ em sistemas fora de equilíbrio só é possível conhecendo uma *equação mestra* que descreva a evolução temporal da dis-

tribuição de probabilidade de microestados. As vezes é possível obter uma equação de *Langevin* para algum parâmetro diretamente [44].

Transições de fase de segunda ordem em sistemas fora de equilíbrio ocorrem normalmente entre duas fases: Uma ativa e uma da qual o sistema não consegue sair caso caia nela, normalmente um estado absorvente. Este tipo de transição também recebe o nome de transições de fase absorventes (do inglês, *absorbing phase transitions*). A classe de universalidade mais comum para este tipo de transição é a classe DP, do inglês *Directed Percolation*.

Janssen & Grassberger [47, 48] formularam uma conjectura para verificar se um sistema pertence a ela. Um sistema pertence à classe DP se:

1. a transição for caracterizada por um único parâmetro de ordem não negativo ρ ,
2. o sistema apresentar uma transição contínua entre uma fase ativa $\rho > 0$ e um estado de absorção $\rho = 0$ único,
3. a dinâmica dos elementos que constitui o sistema for de curto alcance,
4. o sistema não possuir características especiais como, simetrias não convencionais, leis de conservação, ou *quenched randomness* (parâmetros aleatórios que não variam no tempo).

Na rede de neurônios GGL, o parâmetro de ordem ρ é dado pela média dos neurônios ativos no tempo t ,

$$\rho[t] = \frac{1}{N} \sum_i X_i[t] \quad (2.36)$$

que pode ser calculado a partir de

$$\rho[t] = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(V) p(V)[t] dV. \quad (2.37)$$

onde $p(V)[t] dV$ é a fração de neurônios com potencial de membrana no intervalo $[V, V + dV]$ no tempo t e $\Phi(V)$ é a probabilidade de um neurônio disparar com potencial de membrana V dada pela equação (2.4).

A priori, podemos ver que, para qualquer topologia, a rede de neurônios GGL satisfaz completamente os quatro itens da conjectura de Janssen & Grassberger. Note que na equação (2.1), considerando um sistema sem estímulo externo $I_i[t] = 0$, se o potencial de membrana de todos o elementos é zero, a rede de neurônios GGL cai em um estado absorvente e será impossível sair dele sem a adição de algum estímulo. As equações (2.36) e (2.37) definem um parâmetro de ordem único e não negativo. E o sistema não possui as características especiais citadas no item 4.

Assim, podemos trabalhar com a hipótese de que o sistema considerado neste trabalho, rede quadrada com neurônios GGL, pertence à classe de universalidade DP. Veremos no capítulo de Resultados que isso é de fato verdade.

2.4 Leis de potência e Psicofísica

A psicofísica é a área da psicologia que tem como objetivo quantificar a experiência da percepção entendendo a relação que há entre o estímulo físico, representação interna e resposta neural. Com tal finalidade, a psicofísica faz uso de técnicas de escalonamento para medir intensidades percebidas, magnitudes de estímulos físicos diferentes ou ainda, a relação entre diferentes tipos de estímulos no espaço da percepção como função de variações dos estímulos físicos [49]. Na psicofísica neural, busca-se estudar os correlatos neuronais dessas grandezas macroscópicas, ou seja, nosso trabalho está dentro do campo da psicofísica neural [50, 51].

Todo estímulo sensorial possui uma representação interna em nosso cérebro. O objetivo das técnicas de escalonamento na psicofísica consiste em encontrar uma relação entre propriedades do estímulo físico e qualidades ou intensidades perceptuais. Experimentos em psicofísica normalmente envolvem a variação de um estímulo físico em uma ou mais dimensões e medir a resposta do sujeito [50]. A relação entre estímulo e resposta é utilizada para inferir sobre a representação interna do estímulo. Por exemplo, supondo que o estímulo em questão seja o som, uma variação unidimensional seria variar apenas uma dimensão do estímulo, como a intensidade ou a frequência. Já uma variação multidimensional poderia ser uma combinação entre intensidade e frequência ao mesmo tempo. A resposta de sujeitos pode ser medida de diferentes maneiras, como estimação de magnitude, produção de magnitude, julgamentos de similaridade e dissimilaridade, entre outros [50].

Em psicofísica, é muito comum experimentos que variam estímulos ao longo de uma única dimensão. Escalonamento deste tipo de experimento tem como função medir alguma quantidade subjetiva, induzida pela mudança do estímulo físico. As formas mais comuns de se medir respostas devido a variações unidimensionais de estímulos são estimativas de magnitude e produção de magnitude. No primeiro caso, uma escala é apresentada ao sujeito junto com os estímulos correspondentes aos extremos da escala, normalmente 0 e 10. O sujeito deve então classificar novos estímulos apresentados a ele baseado na escala sugerida.

No caso de produção de magnitude, o sujeito é apresentado de início aos dois estímulos extremos, e ele deve então classificar qual dos novos estímulos apresentados satisfaz alguma característica pré-definida. Por exemplo, um sujeito é apresentado a dois estímulos de

luminosidade de intensidades diferentes, ele deve então dizer qual dos novos estímulos representa uma intensidade média entre os extremos.

Produção de magnitude e estimativa de magnitude possuem uma relação funcional bem conhecida entre variação de estímulo e resposta. A relação mais conhecida deste tipo de experimento é chamada de lei de potência de *Stevens*:

$$S(I) = CI^m. \quad (2.38)$$

Na lei de potência de Stevens, o parâmetro I representa a intensidade do estímulo, m um expoente ajustado, C um fator de escala e $S(I)$ é a resposta obtida. A equação (2.38) mostra que é possível ter três tipos de relação estímulo-resposta de acordo com o expoente m . Para $m < 1$ temos uma escala compressiva: nesta escala quanto maior é o estímulo maior será a diferença entre estímulos necessária para produzir uma resposta.

O caso oposto ocorre quando $m > 1$: neste caso, quanto maior o estímulo, menor é a diferença entre estímulos necessária para produzir uma resposta. Para $m = 1$ temos o caso linear, onde a diferença entre estímulos para produzir uma resposta é constante e não dependente da intensidade do estímulo. Exemplos típicos de estímulos representados com uma escala compressiva são intensidade sonora e de luminosidade e, para escalas expansivas ($m > 1$), sabor e estímulos nocivos como dor [50].

Notemos que a Psicofísica consiste em uma abordagem *top-down*: estímulos são apresentados ao sujeito, uma resposta (subjetiva) é coletada e uma inferência a respeito da representação interna é feita. Nesses experimentos clássicos, o que ocorre no cérebro no nível neural é inacessível.

Em 2006, Kinouchi e Coppel [20] mostraram que a sensibilidade e a faixa dinâmica de uma rede de neurônios formais (automata celulares) é máxima no ponto crítico de uma transição de fase de segunda ordem na classe DP. Os autores usaram a atividade média da rede ρ para mapear sua resposta a estímulos aleatórios que possuem uma distribuição de probabilidade tipo Poisson. As células eram forçadas a disparar por estímulo externo com probabilidade $p = 1 - \exp(-r\delta t)$, onde r é a taxa com que ocorre um disparo aleatório e $\delta t = 1$ ms um pequeno intervalo de tempo arbitrário. No ponto crítico, a atividade média da rede ρ consegue mapear estímulos muito pequenos e, ao mesmo tempo, estímulos ordens de magnitude maiores, e segue uma lei na forma de potência muito similar à lei de Stevens $\rho(r) \propto r^m$ com o expoente compressivo $m < 1$. Um resultado novo é que também se obtém um nível de saturação para essa lei de potência, $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = \rho_{\max}$, em pleno acordo com os experimentos.

A faixa dinâmica de trabalho é uma medida que relaciona o menor estímulo e o maior estímulo que a rede consegue mapear,

$$\Delta = 10 \log \left(\frac{r_{0.9}}{r_{0.1}} \right), \quad (2.39)$$

onde $\Delta(w)$, que depende do acoplamento médio na rede (subcrítico, crítico e supercrítico) é o valor da faixa dinâmica e $[r_{0.1}, r_{0.9}]$ são os valores da taxa de estímulos que correspondem à resposta da rede $[\rho_{0.1}, \rho_{0.9}]$. Os valores ρ_x são obtidos através da função

$$\rho_x = \rho_0 + x(\rho_{max} - \rho_0), \quad (2.40)$$

onde os valores ρ_0 e ρ_{max} são as menores e maiores respostas possíveis no sistema.

Por exemplo, no estado subcrítico, $\rho_0 = 0$, mas no estado supercrítico, temos $\rho_0(w) > 0$. Assim, se considerarmos a variação total de resposta $\delta_\rho = \rho_{max} - \rho_0$ do sistema, o valor $\rho_{0.1}$ equivale a descartar estímulos que evocam uma resposta menor que 10% de δ_ρ . Analogamente, $\rho_{0.9}$ equivale a descartar estímulos que evocam uma resposta maior que 90% de δ_ρ , pois tal está muito próxima da saturação e a resposta da rede não discrimina bem a intensidade dos estímulos, ver figura (2.7).

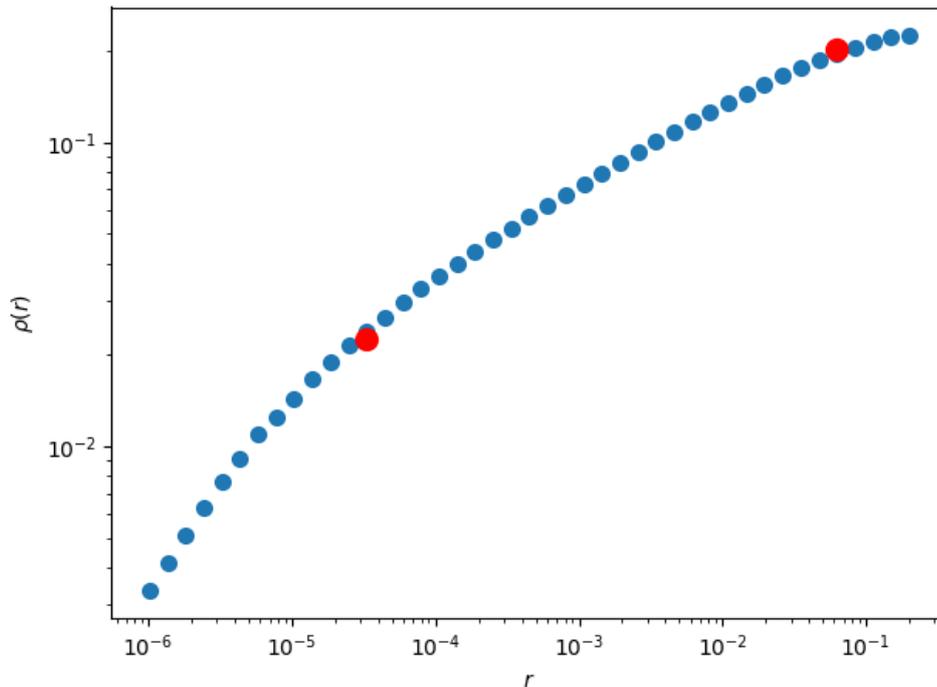


Figura 2.7: Exemplo de como são selecionados os pontos $r_{0.1}$ e $r_{0.9}$. Os pontos em vermelho correspondem as coordenadas $(r_{0.1}, \rho_{0.1})$ e $(r_{0.9}, \rho_{0.9})$.

A teoria de Kinouchi & Copelli [20] é uma teoria microscópica, mecanística, da lei macroscópica de Stevens, no espírito da Física Estatística. Podemos relacionar o expoente da lei de Stevens, equação (2.38), diretamente com o comportamento esperado para o parâmetro de ordem de um sistema que apresenta estado crítico.

Da literatura, sabemos que o parâmetro de ordem de sistemas termodinâmicos próximo de uma transição de fase absorvente na presença de um campo externo deve escalar com $\rho \propto h^{\beta/\sigma} = h^{1/\delta_n}$ [44], onde h representa um campo externo pequeno, σ o expoente crítico

associado ao tamanho médio de *clusters* e β o expoente crítico associado ao parâmetro de ordem descrito na equação (2.30). Em nosso sistema r faz o papel de campo externo, assim podemos identificar o expoente m de Stevens em termos dos expoentes β e σ :

$$m = \frac{\beta}{\sigma} = \frac{1}{\delta_h}. \quad (2.41)$$

Cabe aqui uma importante observação a respeito da equação (2.41). O expoente $1/\delta_h$ é definido no limite assintótico $h \rightarrow 0$; nosso expoente m é obtido para uma grande faixa da taxa de estímulos $r \in \{10^{-6}, 10^{-1}\}$. Apenas para valores de r acima de 10^{-1} a equação (2.41) não é válida. Os resultados obtidos neste trabalho estão de acordo com [20, 24] que fazem a mesma associação entre expoentes.

Kinouchi & Copelli examinaram uma rede aleatória de automata celulares com K vizinhos, obtendo expoentes de campo médio $\beta = 1$ e $\sigma = 2$, ou seja, $\delta_h = 2$. Neste caso, $m = 1/2$, ou seja, obtemos uma lei compressiva com larga faixa dinâmica. Em nosso trabalho, mostraremos que em uma rede bidimensional, m é ainda menor, e se conectarmos duas camadas por uma fração de sinapses, o efeito é ainda maior, gerando uma enorme faixa dinâmica.

O feito que duas camadas tem sobre o expoente m pode ser entendido da seguinte maneira [24]. Para a primeira camada esperamos que, de acordo com a equação (2.41), a atividade média da rede escale com $\rho_1 \propto r^m$. Para a segunda camada esperamos $\rho_2 \propto r^{m^2}$. Se considerarmos que a segunda camada usa como estímulo a atividade da primeira, esperamos que $\rho_2 \propto \rho_1^m$. Portanto $\rho_2 \propto r^{m^2}$, assim encontramos o expoente de Stevens da segunda camada:

$$m_2 = m^2. \quad (2.42)$$

2.5 Simulações computacionais

Todas as simulações foram realizadas em *C++* e análise de dados em *Python*. Usamos a atividade média da rede ρ como parâmetro de ordem e o peso sináptico médio w como parâmetro de controle. Iniciamos todas as simulações com as mesmas condições iniciais, visto que as mesmas não alteram o estado estacionário do sistema.

No capítulo seguinte apresentaremos uma aproximação de campo médio e mostraremos formalmente a razão da escolha dessas variáveis como parâmetros de ordem e controle. Mostraremos também que as condições para que o modelo GGL apresente uma transição de fase absorvente de segunda ordem implicam em $I = 0$ e $\theta = 0$, ou pelo menos $I - \theta = 0$. Para outros valores, teremos uma transição de primeira ordem.

Assim, todas as simulações foram realizadas com $I = \theta = 0$. Neste caso, o único parâmetro relevante é Γw em vez de Γ e w separadamente. Assim, sem perda de generalidade, usamos nas simulações sempre $\Gamma = 1$. Finalmente, mostraremos que $\mu > 0$ não muda a classe de universalidade da transição, logo estudaremos apenas o caso $\mu = 0$.

Em todas as simulações, estaremos interessados essencialmente em medir como o parâmetro de ordem varia em relação ao parâmetro de controle $\rho(w)$. Na medida de faixa dinâmica, estaremos interessados em medir como o parâmetro de ordem varia em função de estímulos externos, ou seja, $\rho(r|w)$, onde r será um parâmetro (taxa de Poisson) relacionado com o *input* externo à rede, que não deve ser confundido com I .

Todas as simulações duraram 100.000 iterações. Uma iteração consiste na atualização dos potenciais de ação do modelo, de acordo com as equações adequadas à topologia em questão, e na atualização dos disparos dos neurônios. Em cada simulação coletamos dados da atividade da rede para cada iteração. Para evitar estados transientes do sistema, descartamos as 10.000 primeiras iterações de cada simulação. Os casos subcrítico e supercrítico possuem transientes curtos, já o estado crítico possui o maior transiente entre os três estados. Dessa maneira o descarte de 10.000 garante que o sistema estará no estado estacionário para os três estados durante as medidas.

Definimos as medidas em simulação da atividade da rede ρ e susceptibilidade χ como,

$$\rho = \frac{1}{t_f - t_i} \sum_{t=t_i}^{t_f} \rho[t], \quad (2.43)$$

$$\chi = \frac{1}{t_f - t_i} \sum_{t=t_i}^{t_f} (\rho[t] - \rho)^2 = \sigma^2. \quad (2.44)$$

Nas equações (2.43) e (2.44), a medida instantânea da atividade da rede $\rho[t]$ é obtida pela equação (2.36). Cada simulação foi refeita 10 vezes, assim a medida final de ρ e χ é dada por

$$\rho = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} \rho_i \pm \sigma_\rho, \quad (2.45)$$

$$\chi = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} \chi_i \pm \sigma_\chi. \quad (2.46)$$

Notemos que ρ_i e χ_i nas equações (2.45) e (2.46) são medidas obtidas pelas equações (2.43) e (2.44) para uma repetição (ou *run*) da simulação. O erro de cada medida é o desvio padrão para um dado conjunto de repetições.

2.5.1 Simulações de rede completa

Simulamos uma rede tipo grafo completo de neurônios GGL através da equação do modelo (2.1) com um conjunto de conexões definido pela equação (2.6). Em cada simulação, fizemos uma varredura no parâmetro de controle w entre 0.1 e 2.0 com um incremento de $\delta_w = 0.1$ para redes com diversos tamanhos. Utilizamos as equações (2.43) a (2.46) para construir gráficos de $\rho(w|N) \times w$ e $\chi(w|N) \times w$.

2.5.2 Simulações de rede *annealed*

Para construir o sistema com topologia *annealed* de neurônios GGL, utilizamos a equação de modelo (2.1) e o conjunto de conexões definido pela equação (2.7). Neste caso, em cada simulação fizemos uma varredura no parâmetro de controle w entre 0.25 e 2.0 com um incremento de $\delta_w = 0.05$ para conjuntos de vizinhos aleatórios de tamanhos diferentes, iniciamos com $K = 2$ até $K = 64$ com um incremento $\delta_k = 2$. O tamanho N do sistema foi mantido fixo. Utilizamos a equação (2.43) para construir gráficos de $\rho(w|K) \times w$ para diferentes tamanhos de conjuntos de conexões.

2.5.3 Simulações de rede bidimensional

Construímos o sistema bidimensional através da equação de modelo (2.8) e do conjunto de conexões definido na equação (2.9) incluindo condições periódicas de contorno. Caracterizamos a rede bidimensional de neurônios GGL medindo o ponto crítico da transição de fase e os expoentes críticos relevantes.

Primeiramente, medimos o ponto crítico do sistema, para isso realizamos simulações onde em cada uma é feita uma varredura no parâmetro de controle w entre 0.1 e 2.0 com um incremento de $\delta_w = 0.1$. Com isso identificamos a região do parâmetro de controle onde ocorre a transição, $w_C \in [1.7, 1.8]$. Realizamos novas simulações dentro do intervalo obtido, dessa vez utilizamos como incremento $\delta_w = 0.01$, com isso conseguimos determinar melhor a região onde ocorre a transição, $w_C \in [1.73, 1.75]$. Uma última bateria de simulações foi feita com um incremento $\delta_w = 0.001$ dentro deste intervalo para determinar o ponto crítico w_C . Todas as varreduras no parâmetro de controle foram feitas para redes com diversos tamanhos. Utilizamos as equações (2.43) a (2.46) para construir gráficos de $\rho(w|N) \times w$ e $\chi(w|N) \times w$ para sistemas com tamanhos diferentes.

Para medir os expoentes críticos, utilizamos uma técnica conhecida como escalonamento de tamanho finito (*finite size scaling*) que será apresentada no capítulo de resultados na sessão sobre a rede bidimensional. Essencialmente, utilizamos os mesmos dados para as curvas $\rho(w|N) \times w$ e $\chi(w|N) \times w$, porém construímos curvas do tipo $\rho(L|w) \times L$ e $\chi(L|w) \times L$, onde $L = \sqrt{N}$ é o tamanho característico da rede quadrada.

2.5.4 Simulações da rede bidimensional em camadas

Utilizamos a equação de modelo (2.10) e o padrão de conexões definido na equação (2.9) com condições de contorno periódicas para formar um sistema bidimensional com duas camadas. Realizamos uma espécie de experimento psicofísico onde estimulamos os neurônios da primeira camada do sistema com um processo de Poisson,

$$P(X_{ij}[t] = 1 | X_{ij}[t] = 0) = \lambda(r) = 1 - e^{-r\delta t}, \quad (2.47)$$

onde r é a taxa que controla a probabilidade de um elemento disparar devido à equação (2.47) e δt é nosso passo de tempo discreto (equivalente a 1 ms). Ou seja, a cada iteração do sistema, os neurônios da primeira camada podem disparar devido à influência dos vizinhos laterais ou devido a equação (2.47).

Em cada simulação, realizamos uma varredura da taxa de disparo do processo de Poisson r de 10^{-6} a 10^{-1} . Fizemos a varredura em r para redes com tamanhos N e pesos sinápticos w diferentes. Medimos a atividade da rede em cada uma das duas camadas e utilizamos a equação (2.43) em cada camada para construir curvas $\rho(r|w, N) \times r$. Medimos a faixa dinâmica de cada camada através das equações (2.39) e (2.40).

Capítulo 3

Cálculos numéricos e analíticos

O objetivo desta pesquisa foi investigar como uma rede bidimensional de neurônios GGL responde a estímulos externos e estender este estudo para um modelo bidimensional com duas camadas. Para isso, é preciso conhecer o sistema em questão: a rede de neurônios GGL é um sistema fora ou em equilíbrio? A qual classe de universalidade ele pertence? Quais os parâmetros de ordem e expoentes críticos relevantes? Alterar a topologia da rede altera alguma das questões anteriores?

Uma primeira análise pode ser feita observando a evolução temporal de uma rede de neurônios GGL. Um microestado da rede, em um dado tempo t , é definido por $\{X[t]; V[t]\} = \{X_1[t], \dots, X_N[t]; V_1[t], \dots, V_N[t]\}$. Dessa maneira a evolução temporal do sistema fica $\{X[t]; V[t]\} \rightarrow \{X[t+1]; V[t+1]\}$. Note que, devido ao período refratário de cada elemento, equação (2.2), o microestado $\{X[t]; V[t]\}$ fica inacessível pelo microestado $\{X[t+1]; V[t+1]\}$. Ou seja dada a transição $\{X[t]; V[t]\} \rightarrow \{X[t+1]; V[t+1]\}$, a transição de volta não é possível $\{X[t]; V[t]\} \leftarrow \{X[t+1]; V[t+1]\}$. Esse tipo de irreversibilidade microscópica mostra uma quebra de balanço detalhado e portanto a rede de neurônios GGL é um sistema fora de equilíbrio.

Seguimos com uma análise de campo médio onde é possível obter resultados analíticos e definir o parâmetro de ordem e de controle. Apresentamos também as condições necessárias para que o sistema de neurônios GGL apresente uma transição de fase de segunda ordem.

Em seguida comparamos os resultados analíticos com os resultados de simulações da rede de elementos GGL em duas topologias, rede completa e rede annealed. Após será apresentada a caracterização da rede bidimensional, com medidas de expoentes críticos e do ponto crítico. Finalmente, apresentamos os resultados de medidas da faixa dinâmica para o caso da rede bidimensional e bidimensional em camadas.

3.1 Aproximação de campo médio

Considerando a equação (2.1), a aproximação de campo médio consiste em fazer alguma aproximação referente a interação dos elementos que leve em conta características macroscópicas do sistema [44]. No caso, substituiremos o estado $X_j[t]$ por seu valor médio $\rho[t]$. Também assumiremos que a distribuição de pesos sinápticos $\{w_{ij}\}$ possui média w e variância finita, que se torna irrelevante no limite termodinâmico [28], ou simplesmente assumimos uma rede uniforme $w_{ij} = w$. Isso leva a uma aproximação da somatória da equação (2.1)

$$\frac{1}{|K_i|} \sum_{j \in K_i} w_{ij} X_j[t] \approx w \rho[t]. \quad (3.1)$$

Com essa aproximação, podemos reescrever a equação (2.1) como

$$V_i[t+1] = \begin{cases} 0 & \text{se } X_i[t] = 1, \\ \mu V_i[t] + I_i[t] + w \rho[t] & \text{se } X_i[t] = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Também vamos assumir que $I_i[t] = I$ constante e que todos os neurônios da rede já tenham disparado pelo menos uma vez. Dessa maneira, todos os neurônios que disparam juntos evoluem da mesma forma e possuem o mesmo potencial de membrana, de acordo com a equação (3.2). Isso permite que os neurônios sejam agrupados de acordo com sua idade de disparo (com índice k) por seus potenciais de membrana $U_k[t]$. A fração $\eta_k[t]$ se refere a todos os neurônios que dispararam entre os tempos $t-k-1$ e $t-k$, ou seja, não dispararam há k passos de tempo.

Como dissemos, se todos os neurônios dispararam pelo menos uma vez, a função $p(V)[t]$ será composta por impulsos de Dirac com altura $\eta_k[t]$. Com as equações (3.2), (2.37) escrita em termos dos grupos $\eta_k[t]$, e com as definições de $\eta_k[t]$ e $U_k[t]$, encontramos as equações que governam a evolução temporal da atividade da rede $\rho[t]$:

$$\eta_0[t+1] = \rho[t] = \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k[t] \Phi(U_k[t]), \quad (3.3)$$

$$\eta_k[t+1] = (1 - \phi(U_{k-1}[t])) \eta_{k-1}[t], \quad (3.4)$$

$$U_k[t+1] = \mu U_{k-1}[t] + I + w \rho[t]. \quad (3.5)$$

Em um estado estacionário, as equações (3.3) a (3.5) não dependem mais do tempo e

podem ser simplificadas:

$$U_0 = 0, \quad (3.6)$$

$$U_k = \mu U_{k-1} + I + w\rho, \quad (3.7)$$

$$\rho = \eta_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k \Phi(U_k), \quad (3.8)$$

$$\eta_k = (1 - \phi(U_{k-1})) \eta_{k-1}. \quad (3.9)$$

As equações (3.6) a (3.9) podem ser facilmente resolvidas numericamente. Dentro do caso estacionário, apresentamos resultados para uma aproximação da atividade da rede ρ próxima do ponto crítico e o caso totalmente analítico (quando $\mu = 0$).

3.2 Aproximação no ponto crítico

Para que ocorra uma transição de fase absorvente o sistema não pode receber estímulos externos $I = 0$, pois isso faria com que ele nunca chagasse no estado absorvente e não seria possível observar a transição. Consideramos também $\theta = 0$ na equação (2.4) para $\phi(V)$, pois θ faz o sistema passar por uma transição de primeira ordem [28].

Podemos expandir a equação (3.8) com as equações (3.9) e (3.7) com $I = 0$,

$$\rho = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_{k-1} (1 - \Phi(U_{k-1})) \Phi(\mu U_{k-1} + w\rho). \quad (3.10)$$

Note que próximo do ponto crítico, como estamos considerando uma transição entre um estado absorvente $\rho_0 = 0$ e um estado ativo $\rho^+ > 0$, o valor de ρ deve ser próximo de zero na vizinhança da transição. Na equação (3.7), com $I = 0$, isso significa que os termos U_k serão pequenos. Podemos aproximar a função $\Phi(U_k)$ por

$$\Phi(U_k) = \frac{\Gamma U_k}{1 + \Gamma U_k} \approx \Gamma U_k - \Gamma^2 U_k^2. \quad (3.11)$$

Inserindo a aproximação de $\Phi(U_k)$ na equação (3.10), temos

$$\rho = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_{k-1} (1 - \Gamma U_{k-1} + \Gamma^2 U_{k-1}^2) (\Gamma \mu U_{k-1} + \Gamma w\rho - \Gamma^2 (\mu U_{k-1} + w\rho)^2). \quad (3.12)$$

É possível reorganizar a equação (3.12) em termos da aproximação (3.11):

$$\begin{aligned} \rho \approx & \Gamma w\rho (1 - \Gamma w\rho) \sum_{k=1}^{\infty} \eta_{k-1} + (\mu - 2\Gamma \mu w\rho - \Gamma w\rho + \Gamma^2 w^2 \rho^2) \sum_{k=1}^{\infty} \eta_{k-1} \Phi(U_{k-1}) \\ & - \Gamma \mu^2 \sum_{k=1}^{\infty} \eta_{k-1} U_{k-1} \Phi(U_{k-1}). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Os termos com potencias de U_k maiores que 2 e não agrupáveis para formar a equação (3.11) são desprezíveis.

Da equação (3.13), temos que $\sum_{k=1}^{\infty} \eta_{k-1} = 1$, ou seja a soma de todos os grupos de neurônios com todas as idades de disparo k não pode ser maior que o número de neurônios da rede. A segunda somatória da equação (3.13) é apenas a definição de ρ , equação (3.8), com o índice deslocado.

Descartando todos os termos com potencias em ρ maiores que 2, a equação (3.13) fica:

$$\rho \approx \rho(\Gamma w + \mu) + \rho^2(-\Gamma^2 w^2 - 2\Gamma w \mu - \Gamma w) - \Gamma \mu^2 \sum_{k=1}^{\infty} \eta_{k-1} U_{k-1} \Phi(U_{k-1}). \quad (3.14)$$

Para avaliar o ultimo termo da equação (3.14), note que a equação recursiva (3.7) pode ser reescrita como uma série geométrica parcial:

$$U_k = w \rho \sum_{j=0}^{k-1} \mu^j = w \rho \frac{1 - \mu^k}{1 - \mu}. \quad (3.15)$$

A somatória da equação (3.14) fica,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \eta_{k-1} U_{k-1} \Phi(U_{k-1}) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_{k-1} \Phi(U_{k-1}) w \rho \frac{1 - \mu^{k-1}}{1 - \mu}. \quad (3.16)$$

A equação (3.16) pode ser reorganizada como :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \eta_{k-1} \Phi(U_{k-1}) w \rho \frac{1 - \mu^{k-1}}{1 - \mu} &= \frac{w \rho}{1 - \mu} \sum_{k=1}^{\infty} \eta_{k-1} \Phi(U_{k-1}) (1 - \mu^{k-1}) \\ &= \frac{w \rho}{1 - \mu} \left(\rho - \sum_{k=1}^{\infty} \eta_{k-1} \Phi(U_{k-1}) \mu^{k-1} \right). \end{aligned}$$

A última soma da equação acima pode ser descartada por possuir apenas termos em ρ^3 e maiores [28], de forma que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \eta_{k-1} \Phi(U_{k-1}) w \rho \frac{1 - \mu^{k-1}}{1 - \mu} \approx \frac{w \rho^2}{1 - \mu}. \quad (3.17)$$

Juntando as equações (3.17) e (3.14), temos que:

$$\begin{aligned} \rho &\approx \rho(\Gamma w + \mu) + \rho^2(-\Gamma^2 w^2 - 2\Gamma w \mu - \Gamma w) - \frac{\Gamma \mu^2 w \rho^2}{1 - \mu}, \\ \rho(\Gamma w + \mu - 1) + \rho^2(-\Gamma^2 w^2 - 2\Gamma w \mu - \Gamma w) - \frac{\Gamma \mu^2 w \rho^2}{1 - \mu} &\approx 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Da equação (3.18) é possível ver que uma das soluções é $\rho = 0$, essa solução corresponde a um estado absorvente. A outra solução da equação (3.18) é:

$$\rho(w|\mu) \approx \frac{\Gamma w + \mu - 1}{\Gamma w (\Gamma w + 2\mu + 1 + \mu^2 / (1 - \mu))}. \quad (3.19)$$

A equação (3.19) corresponde a um estado ativo, que vai para zero no ponto crítico, $\Gamma w_C + \mu - 1 = 0$, ou seja:

$$w_C = \frac{1 - \mu}{\Gamma}. \quad (3.20)$$

Da equação acima temos que w_C corresponde ao valor crítico do peso médio das sinapses em que ocorre a transição. Note que as variáveis Γ e w são variáveis adjuntas, ou seja, poderíamos ter trabalhado com w fixo e variado Γ , de modo que $\Gamma_C = (1 - \mu)/w$.

A equação (3.19) pode ser reescrita como:

$$\rho(w|\mu) \approx \frac{1}{1 + \Gamma w + 2\mu + \mu^2/(1 - \mu)} \frac{w - w_C}{w}. \quad (3.21)$$

Inserindo a aproximação $\Gamma w = 1 - \mu$ na equação (3.21), temos finalmente:

$$\rho(w|\mu) \approx \frac{1}{2 + \mu + \mu^2/(1 - \mu)} \frac{w - w_C}{w}. \quad (3.22)$$

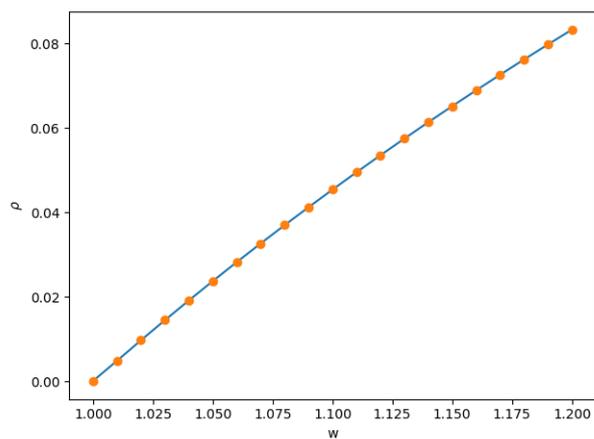
Podemos comparar as soluções numéricas das equações (3.3), (3.4) e (3.5) com a aproximação de $\rho(w|\mu)$ próximo do ponto crítico, equação (3.22), ver figura (3.1).

Podemos ver na figura (3.1) que, conforme aumentamos μ , a aproximação se distancia mais da solução numérica. Apesar disso, suficientemente próximo do ponto crítico a aproximação é bastante boa. Vale a pena observar também que a equação (3.20) é excelente para prever o ponto crítico no caso da aproximação de campo médio.

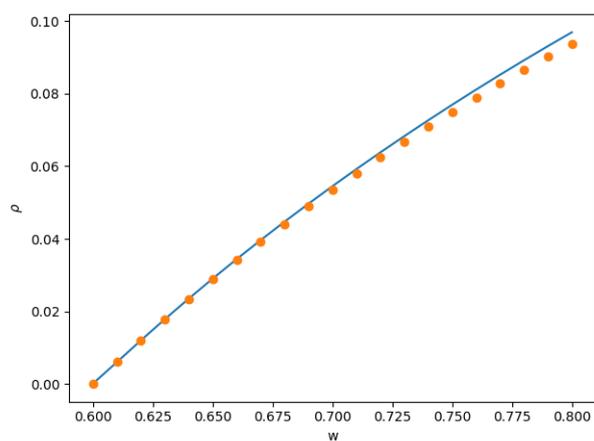
A aproximação da atividade da rede ρ nos mostra que, para o caso de campo médio com $I = 0$ e $\theta = 0$, o sistema passa por uma transição de fase absorvente de segunda ordem. Concluimos também que o parâmetro ρ funciona como parâmetro de ordem do modelo e que tanto Γ como w podem ser usados como parâmetros de controle, equação (3.20). Podemos ver também que o parâmetro μ apenas desloca o ponto crítico mas não altera o expoente β da curva de ρ , equação (3.22). Voltando à conjectura de Janssen & Grassberger do capítulo anterior, mostramos as condições para que a rede de neurônios GGL apresente uma transição de fase entre um único estado absorvente e uma fase ativa. Mostramos que a transição é caracterizada por apenas um parâmetro de ordem não negativo. Não foi introduzida nenhuma característica especial para a aproximação, como simetrias ou leis de conservação. Podemos assim conjecturar que a rede de neurônios GGL pertence à classe de universalidade DP.

3.3 Caso analítico: $\mu = 0$

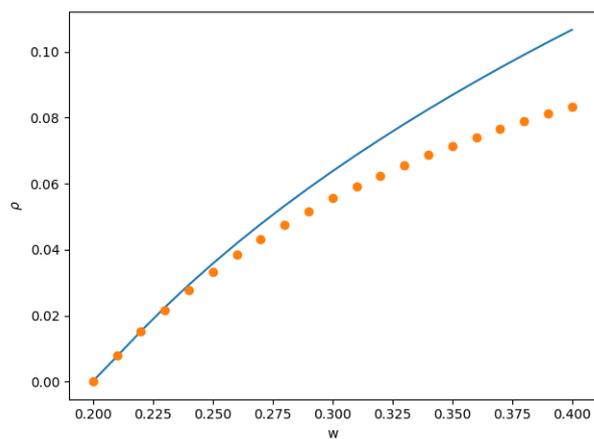
No caso $\mu = 0$, podemos obter resultados analíticos. Como ainda estamos no estado estacionário, isso significa que a equação (2.37) para $p(V)$ será formada por apenas dois picos, η_0 e η_1 , com potenciais de membrana situados em $U_0 = 0$ e $U_1 = I + w\rho$. Assim, a



(a)



(b)



(c)

Figura 3.1: Curvas geradas com $\Gamma = 1$, $I = 0$ e $\theta = 0$. Comparação entre $\rho(w)$ obtido através da solução numérica (linha cheia) das equações (3.3 – 3.5) e $\rho(w)$ dado pela aproximação na região crítica (pontos), equação (3.22), para diferentes valores de μ . (a) $\mu = 0.1$, (b) $\mu = 0.4$ e (c) $\mu = 0.8$.

equação (3.8) pode ser escrita como

$$\rho = \eta_0 \Phi(U_0) + \eta_1 \Phi(U_1). \quad (3.23)$$

Por normalização, temos $\eta_0 = \rho$ e $\eta_1 = 1 - \eta_0 = 1 - \rho$. Considerando que $\Phi(U_0 = 0) = 0$, temos

$$\rho = (1 - \rho) \Phi(I + w\rho). \quad (3.24)$$

Substituindo $\Phi(I + w\rho)$ pela equação (2.4), obtemos

$$\rho = (1 - \rho) \frac{\Gamma(I + w\rho - \theta)}{1 + \Gamma(I + w\rho - \theta)} \Theta(I + w\rho - \theta).$$

Vemos que, devido à função $\Theta(x)$, podemos ter um estado absorvente $\rho = 0$ caso $I < \theta$. Se $I + w\rho - \theta > 0$, temos outras duas soluções dadas pelas raízes de:

$$2\Gamma w\rho^2 - (\Gamma w + 2\Gamma(\theta - I) - 1)\rho + \Gamma(\theta - I) = 0. \quad (3.25)$$

Assim, temos uma transição de primeira ordem caracterizada pela bifurcação tipo sela-nó dada pelo aparecimento das duas raízes da equação (3.25):

$$\rho^\pm = \frac{\Gamma(w - 2\theta - 2I) - 1 \pm \sqrt{\Delta}}{4\Gamma w}, \quad (3.26)$$

$$\Delta = (\Gamma(w + 2\theta - 2I) - 1)^2 + 8\Gamma^2 w(\theta - I). \quad (3.27)$$

O ponto de bifurcação pode ser determinado pela condição $\Delta = 0$, mas essa transição de primeira ordem não será estudada nesta dissertação.

No caso limite $\theta, I \rightarrow 0$, ou no caso particular $I = \theta$, temos que a solução ρ^- coalesce com o estado absorvente ρ_0 :

$$\rho^\pm = \begin{cases} + : \frac{\Gamma w - 1}{2\Gamma w} \\ - : 0 \end{cases}. \quad (3.28)$$

É possível identificar o ponto crítico desse caso da mesma maneira que foi feita para a equação (3.20),

$$\begin{aligned} \Gamma w &= 1, & w_C &= \frac{1}{\Gamma}, \\ \rho^+ &= \frac{1}{2} \frac{w - w_C}{w}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

A equação (3.29) é um caso particular da equação (3.22) com $\mu = 0$.

É possível ver que tanto a equação (3.21) quanto (3.29) possuem um formato $\rho \propto |\bar{w}|^\beta$, onde $|\bar{w}| = |(w - w_C)/w|$. O parâmetro $|\bar{w}|$ é o parâmetro de controle reduzido da rede de neurônios GGL. Observando as equações (3.21) e (3.29), vemos que o expoente β associado a ρ no ponto crítico é 1, que é o valor esperado para este expoente em sistemas acima da dimensão crítica pertencentes a classe de universalidade DP [44, 47].

Resultados de simulação computacional

4.1 Rede de grafo completo

Apresentamos resultados para simulações do sistema de neurônios GGL em uma rede de grafo completo ($K = N - 1$ vizinhos). Temos abaixo uma amostra do sistema nos três regimes: subcrítico, crítico e supercrítico, figura (4.1).

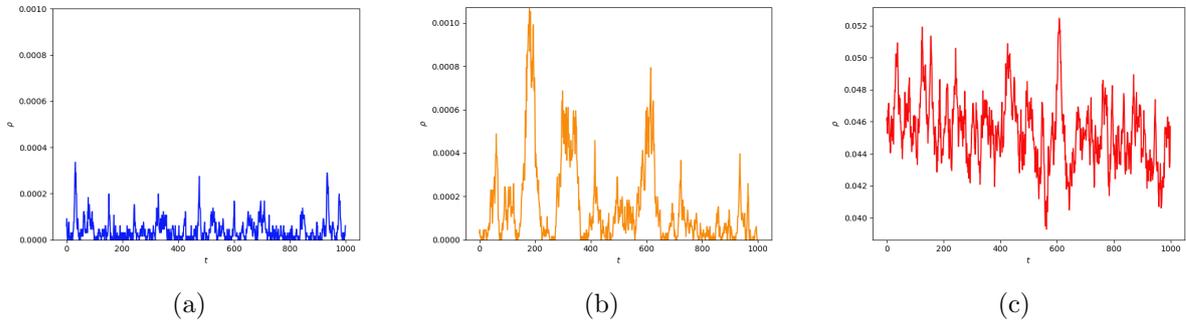
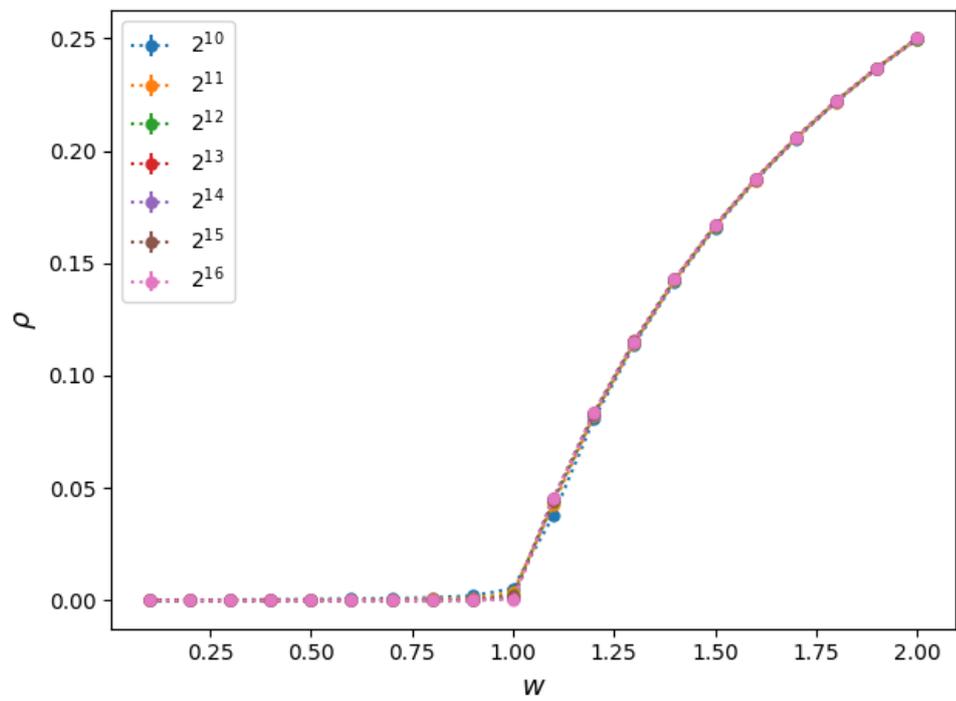


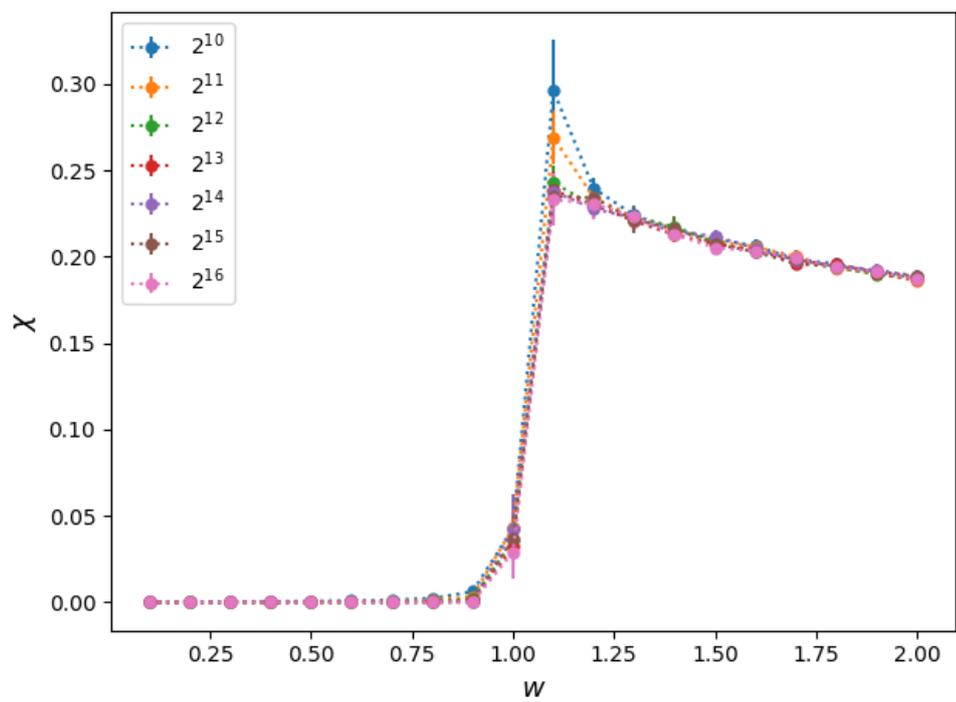
Figura 4.1: Amostras da atividade na rede tipo grafo completo nos três regimes. (a) subcrítico $w = 0.9$, (b) crítico $w = w_C = 1.0$ e (c) supercrítico $w = 1.1$.

Notemos que, para N finito, a rede sempre pode cair no estado absorvente (mesmo no caso supercrítico). Neste caso, seguindo o procedimento usual em estudos de dinâmica de avalanches, um elemento é ativado de maneira aleatória para reativar a rede.

Assim, com as equações (2.45) a (2.46), construímos as curvas $\rho \times w$ e $\chi \times w$ para os diferentes tamanhos de rede. Podemos comparar as curvas da figura (4.2) com as curvas analíticas obtidas através das equações (3.21) e (3.29). Vemos da figura (4.3) que a aproximação de campo médio é excelente quando tratamos da topologia de rede completa.



(a)



(b)

Figura 4.2: Curvas (a) $\rho \times w$ e (b) $\chi \times w$ para diversos tamanhos de rede.

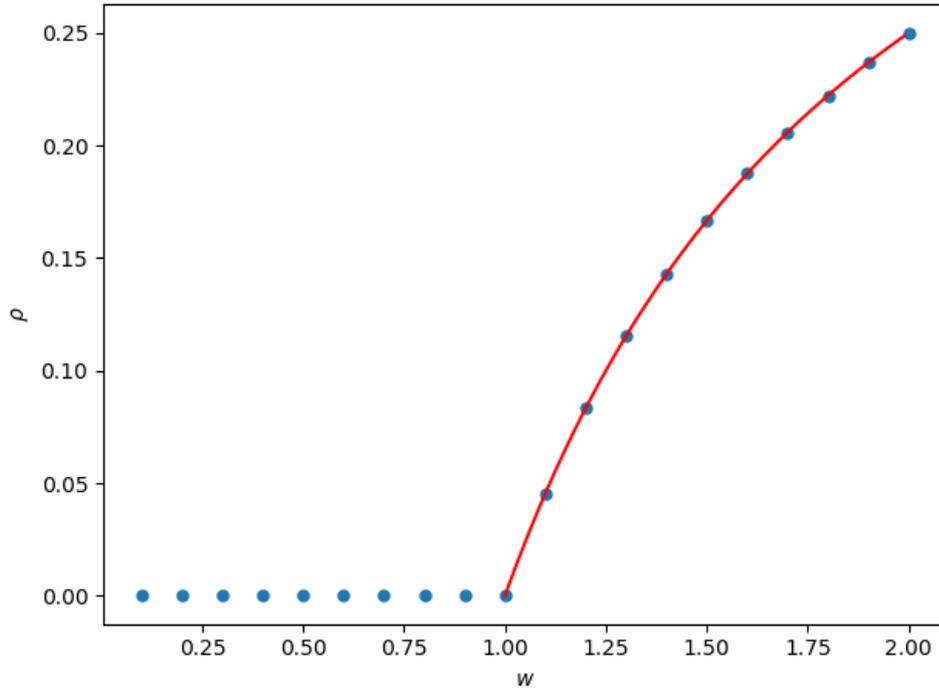


Figura 4.3: Simulação do modelo GGL em uma topologia de rede completa com 65536 neurônios, equações (2.1) e (2.6), pontos em azul. Caso analítico em vermelho, equação (3.29).

4.2 Rede *annealed*

Sabemos da literatura que alterar a dimensionalidade de um sistema não necessariamente altera sua classe de universalidade, mas abaixo de uma certa dimensão crítica os expoentes críticos mudam [44, 47, 48]. Para a classe DP, a dimensão crítica é $d_c = 4$. Sistemas acima desta dimensão são bem representados pela aproximação de campo médio, como é o caso do modelo GGL interagindo em uma rede completa. Sistemas abaixo da dimensão crítica possuem expoentes que normalmente não podem ser obtidos de forma analítica.

Em uma topologia hipercúbica, o número de primeiros vizinhos é dado pela dimensão da rede na forma $K = 2d$: no caso bidimensional, cada elemento possui $K = 4$ conexões, no caso de uma rede em três dimensões cada elemento possui $K = 6$ conexões etc. Supondo que nosso sistema é da classe DP, concluímos que para redes hipercúbicas com $d \geq 4$ o sistema GGL deve se comportar de acordo com as equações de campo médio.

O que ocorre quando temos um número fixo de conexões por neurônio, porém sem a estrutura espacial de uma rede hipercúbica? Este é o caso de uma rede com K sinapses de longa distância, que como discutido na Metodologia, podem ser ligações *annealed* ou *quenched*. No caso *quenched*, as ligações de longa distância são sorteadas no início da simulação e fixadas. No caso *annealed*, que iremos estudar, a cada passo de tempo sorteamos as K ligações, com o cuidado de evitar auto-ligações e ligações repetidas.

Seguimos um modelo de simulações similar ao da sessão anterior porém, em vez de simular a rede com muitos tamanhos N diferentes, utilizamos um tamanho fixo $N = 16384$ e realizamos simulações com conjuntos de conexões aleatórias de tamanhos diferentes K , equação (2.7). Assim, obtivemos curvas $\rho(w|K) \times w$. Note que, na figura (4.4), as curvas

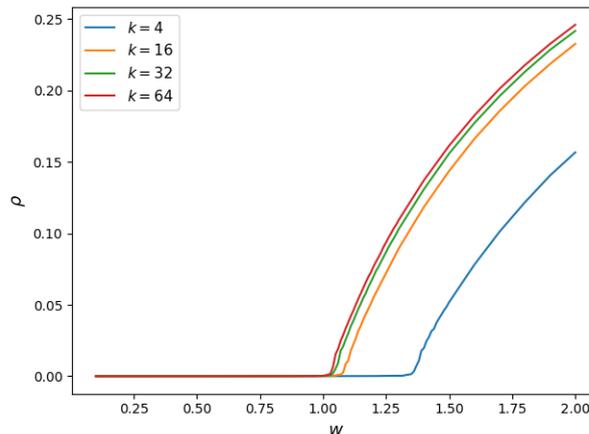


Figura 4.4: Curvas $\rho \times w$ para um sistema de $N = 16.384$ neurônios para diversos valores de numero de vizinhos K , equação (2.7).

mostram que o sistema ainda apresenta uma transição de fase absorvente, porém o ponto crítico depende do número médio de conexões K que os neurônios fazem.

Obtivemos os pontos críticos $w_c(K)$ para os diferentes valores de K através da segunda derivada da atividade da rede ρ em relação ao peso sináptico w . A segunda derivada da atividade apresenta um pico na transição, ver figura (4.5). Construímos uma curva $w_c(K) \times K$ para determinar qual é a relação funcional entre o tamanho do conjunto de vizinhos aleatórios e o deslocamento do ponto crítico em relação ao resultado de campo médio, ver figura (4.6). Definimos $\Delta w_c(K) = w_c(K) - w_c$ onde o valor $w_c = 1$ é o valor do ponto crítico de campo médio. A curva de ajuste, em vermelho, mostra uma relação do tipo:

$$\Delta w_c(K) = a + \frac{b}{K}, \quad (4.1)$$

com $a \approx 0.0024$ e $b \approx 1.278$. Isso fornece:

$$w_c(K) = 1.0024 + 1.278/K. \quad (4.2)$$

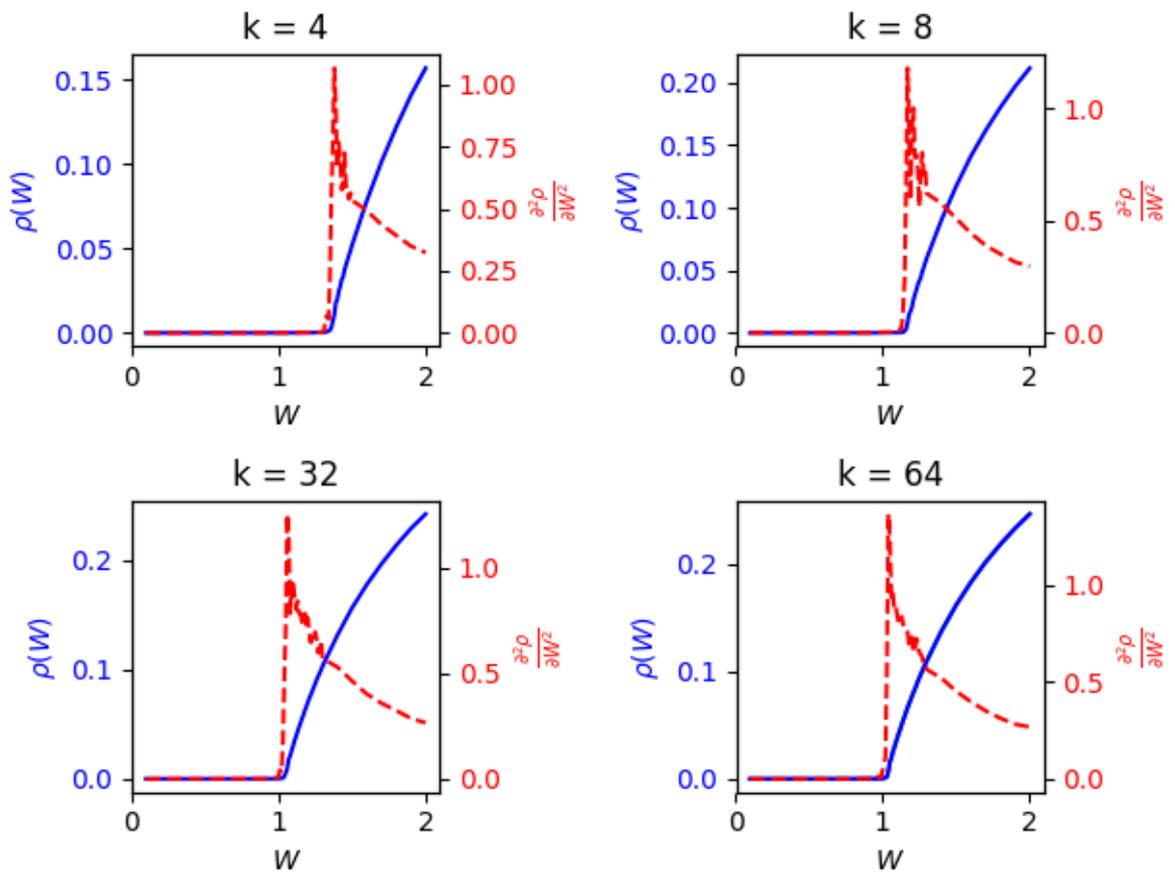


Figura 4.5: Exemplos de como obter o valor $w_C(K)$ através da segunda derivada do parâmetro de ordem $\rho(w|K)$.

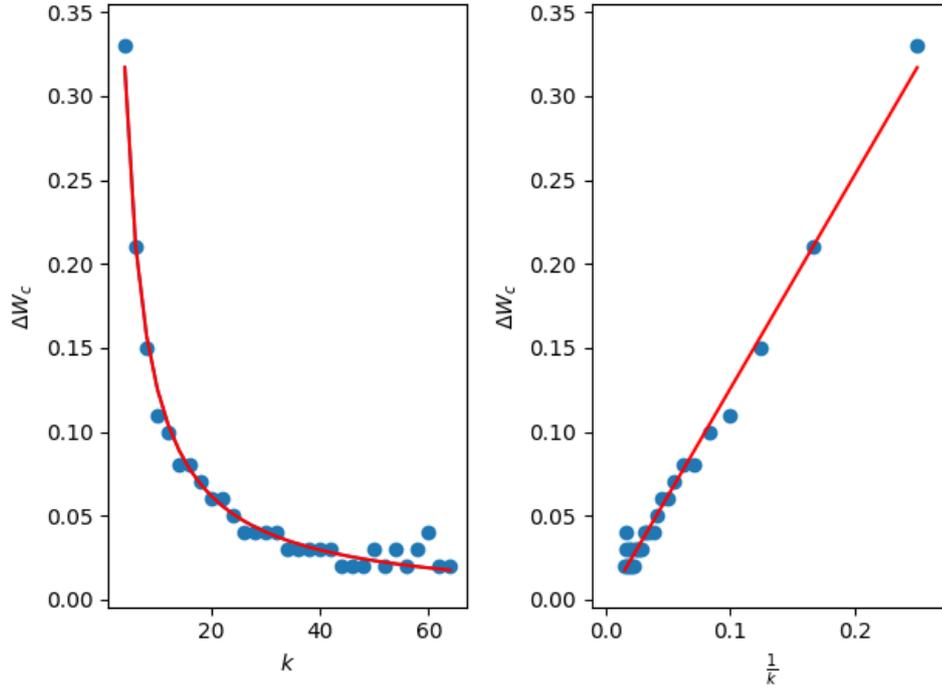


Figura 4.6: Curvas de correção para o caso da rede *annealed* com número de vizinhos k diferentes, *fitting* em vermelho.

Através da equação (4.2), podemos fazer o colapso de todas das curvas com diferentes valores de K . Fazemos isso reescalando o eixo da abcissa para cada curva da figura (4.4) por $w' = w/w_C(K)$, obtendo finalmente

$$\rho(w|K) = \rho(w') = \frac{1}{2} \frac{w - w_C(K)}{w} = \frac{1}{2} \frac{w' - 1}{w'}. \quad (4.3)$$

Podemos observar que o colapso das curvas, figura (4.7), cai sobre a solução da aproximação de campo médio onde a atividade da rede ρ pode ser descrita pela equação (3.29), ou seja, de novo temos $\beta = 1$ para qualquer valor de K .

4.3 Rede bidimensional

A rede bidimensional de neurônios GGL é um sistema que está abaixo da dimensão crítica, o que dificulta a determinação de expoentes, que deverão ser diferentes dos de campo médio. No entanto, este sistema ainda apresenta uma transição de fase absorvente nas condições descritas na sessão (3.1), o que sugere que o sistema é da classe DP com $d = 2$.

Utilizamos as equações (2.45) e (2.46) para medir $\rho(w)$ e $\chi(w)$ em função de w para diferentes valores de N . Dos gráficos da figura (4.8) observamos que na região de transição o comportamento do sistema depende fortemente de seu tamanho.

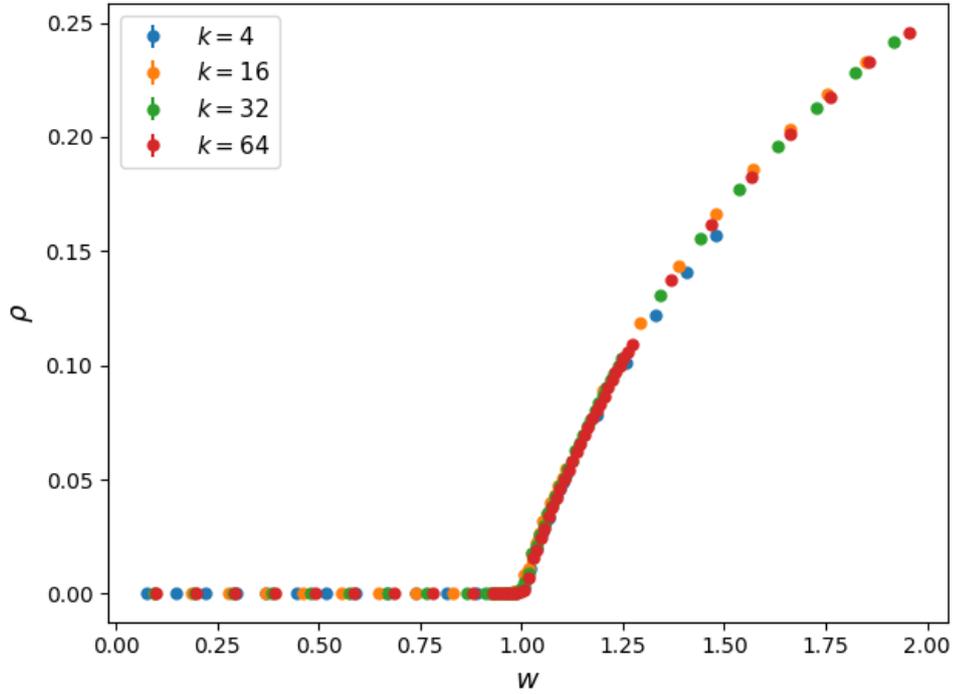


Figura 4.7: Colapso de curvas, $\rho \times w/w_C(K)$ para diferentes tamanhos de conjuntos de conexões aleatórias K .

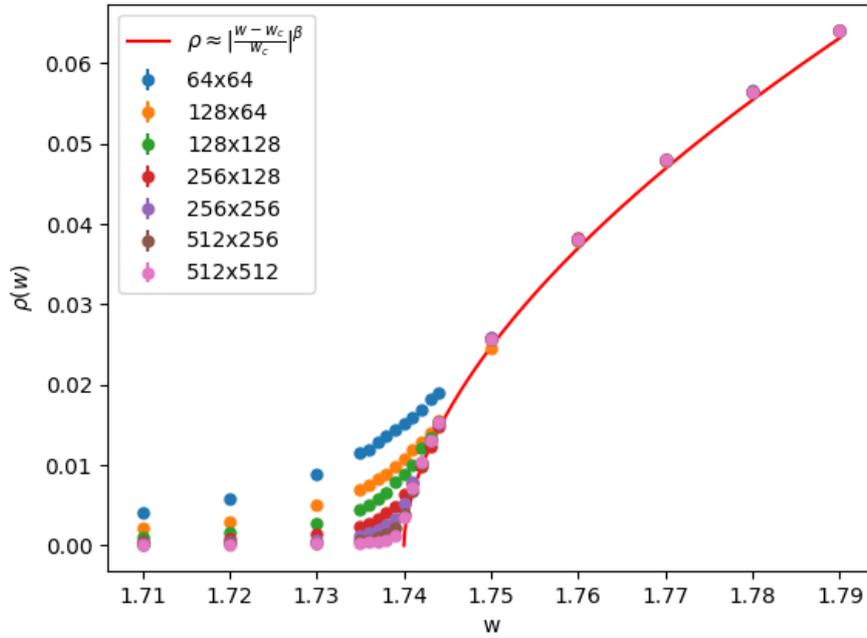
Devido a essa dependência, para medir o ponto crítico e os expoentes β , γ e ν utilizamos uma técnica conhecida como escalonamento de tamanho finito, do inglês *finite size scaling* [44, 52]. Essa técnica consiste em levar em consideração o tamanho do sistema para escalonar os parâmetros de ordem de forma a lidar com seus valores assintóticos quando $w \rightarrow w_C$, equações (2.33) e (2.34). Os parâmetros de ordem reescalonados ficam:

$$\begin{aligned}\rho(\bar{w}; L) &= L^{-\frac{\beta}{\nu}} G_\rho(L^{\frac{1}{\nu}} |\bar{w}|) \\ \chi(\bar{w}; L) &= L^{\frac{\gamma}{\nu}} G_\chi(L^{\frac{1}{\nu}} |\bar{w}|)\end{aligned}\tag{4.4}$$

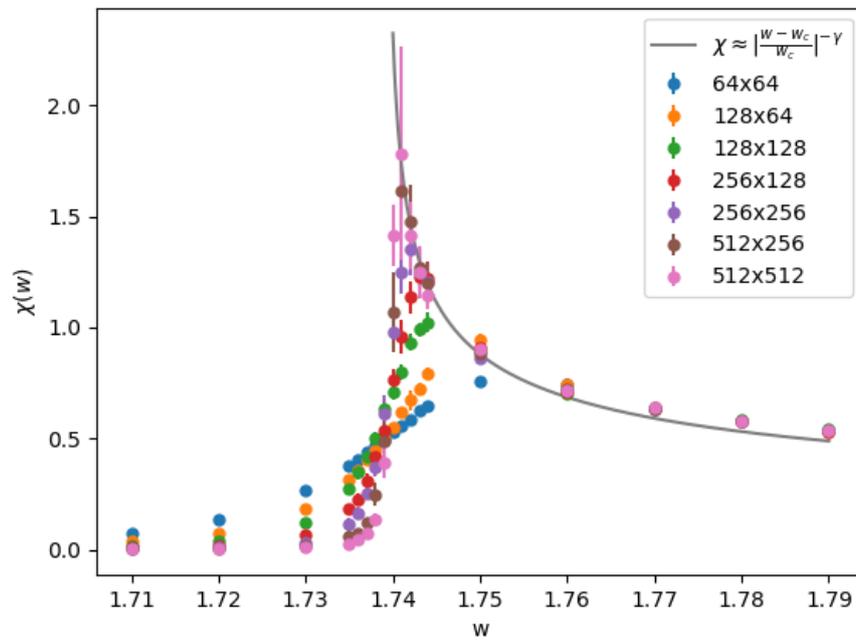
Na equação (4.4), $L = \sqrt{N}$ é o tamanho característico de uma rede bidimensional, as funções G_ρ e G_χ são as funções de escala que dependem de L e do parâmetro de controle reduzido \bar{w} .

É possível obter as razões β/ν e γ/ν das equações (4.4). Para isso, note a relação entre a equação (4.4) e a figura (4.9). Na figura, cada curva nos gráficos representam $\rho(L|\tilde{w})$ e $\chi(L|\tilde{w})$, onde \tilde{w} é um valor candidato para w_C que estamos querendo medir. Ou seja, observamos como os parâmetros de ordem variam em função de L para diferentes valores de \tilde{w} para ver para qual valor de $\tilde{w} = w_C$ as leis de potência das relações de escala são satisfeitas.

Observando a figura (4.9) e as equações (4.4), podemos ver que quando $\bar{w} \neq 0$, ou seja, $\tilde{w} \neq w_C$, conforme o tamanho L do sistema muda, os valores das funções G_ρ e G_χ .

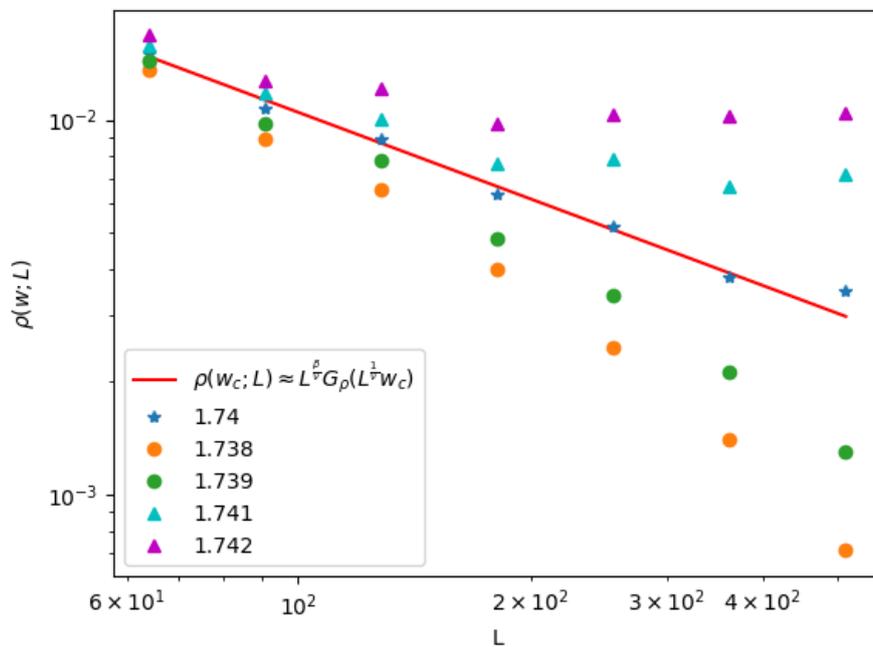


(a)

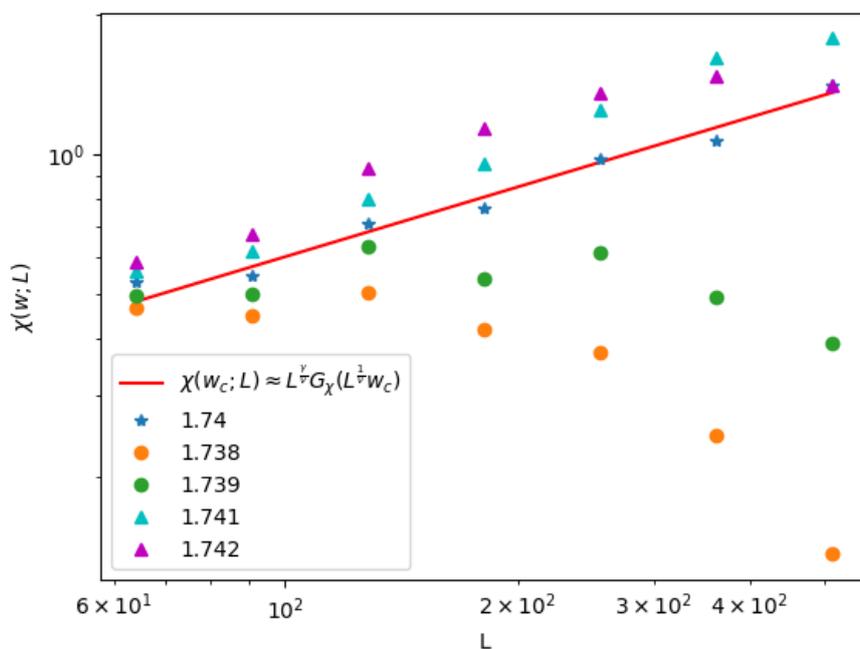


(b)

Figura 4.8: Curvas para os parâmetros de ordem $\rho(w|L)$ e $\chi(w|L)$, (a) e (b) respectivamente. As linhas vermelha e cinza foram ajustadas com os expoentes obtidos através das simulações. Parâmetros $\Gamma = 1.0$, $\mu = 0.0$, $I = 0.0$ e $\theta = 0.0$



(a)



(b)

Figura 4.9: Curvas para os parâmetros de ordem $\rho(L|w)$ e $\chi(L|w)$ em função do tamanho característico da rede.

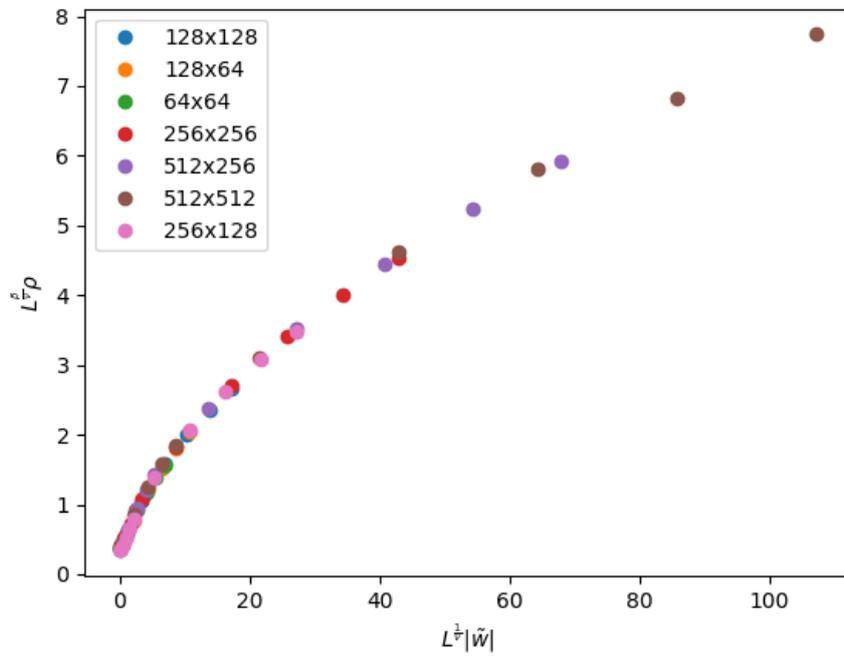
Somente quando $\bar{w} = 0$ as funções de escala se tornam invariantes com o tamanho do sistema e os parâmetros de ordem se comportam como leis de potência:

$$\begin{aligned}\rho(0; L) &= L^{-\frac{\beta}{\nu}} G_\rho(0) \\ \chi(0; L) &= L^{\frac{\gamma}{\nu}} G_\chi(0)\end{aligned}\tag{4.5}$$

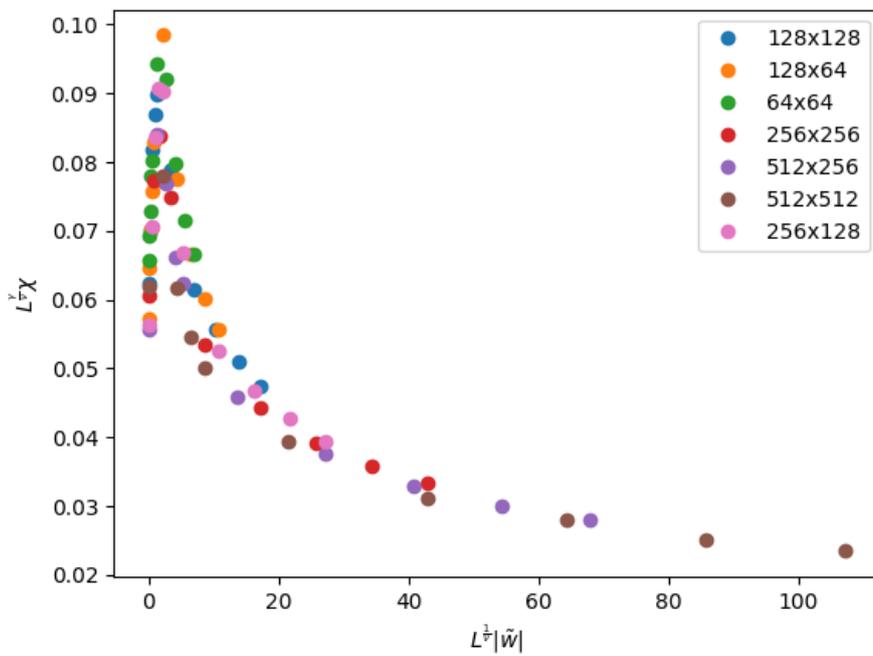
Medimos as razões β/ν e γ/ν e o ponto crítico da transição através das equações (4.5). Para medir individualmente cada expoente, partimos do valor de β para sistemas DP bidimensionais obtido na literatura [53]. Para a rede bidimensional de neurônios GGL, obtivemos $w_C = 1.7398 \pm 0.0003$, $\beta = 0.583 \pm 0.003$, $\gamma = 0.380 \pm 0.028$ e $\nu = 0.758 \pm 0.035$. Os erros dados não são erros estatísticos (cuja estimação necessitaria de muito maior trabalho computacional) mas apenas os erros do processo de ajuste de curvas. A curva contínua vermelha na figura (4.8) foi traçada com o expoente β obtido por S. Lubeck [53] e a curva correspondente para susceptibilidade foi traçada com o expoente γ obtido através de simulações.

Uma maneira de confirmar os resultado é através das funções de escala G_ρ e G_χ , equações (4.4). Plotando curvas para diferentes tamanhos de rede com $L^{\beta/\nu} \rho(\bar{w}; L)$ e $L^{-\gamma/\nu} \chi(\bar{w}; L)$ nos eixos y e $L^{1/\nu} |\bar{w}|$ nos eixos x podemos verificar a validade dos expoentes obtidos. Com os expoentes corretos todas as curvas colapsam em uma. O colapso de dados da figura (4.10) mostra como são as funções $G_\rho(L^{1/\nu} |\bar{w}|)$ e $G_\chi(L^{1/\nu} |\bar{w}|)$.

Assim, precisamos reconhecer que não usamos o método do *finite size scaling* para medir de forma independente w_C e β (pois medimos apenas a razão β/ν). Em conjunção com relações de escala entre expoentes e usando mais precisão nas simulações (com custo computacional considerável), poderíamos ter feito isso, mas não era o nosso objetivo. O que fizemos foi mostrar que o valor tabelado $\beta = 0.583 \dots$ para DP $d = 2$ é inteiramente compatível com nossos resultados.



(a)



(b)

Figura 4.10: Colapso de dados para as curvas $\rho(L)$ e $\chi(L)$.

4.4 Psicofísica e faixa dinâmica de intensidade de estímulos

Nesta seção, apresentamos resultados para um “experimento” psicofísico com uma abordagem *bottom-up*. Partimos de uma rede bidimensional com duas camadas de neurônios GGL, duas redes $N \times M$ acopladas de acordo com a equação (2.10), repetida aqui:

$$V_{ij}^\sigma[t+1] = \begin{cases} 0 & \text{se } X_{ij}^\sigma[t] = 1 \\ \mu V_{ij}^\sigma[t] + I_{ij}^\sigma[t] + \alpha_{ij} X_{ij}^{\sigma'} + \frac{1}{|K_{ij}^\sigma|} \sum_{k \in K_{ij}^\sigma} w_k X_k^\sigma[t] & \text{se } X_{ij}^\sigma[t] = 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

Testamos a influência da conectividade entre as duas camadas, $\sigma = 1, 2$, para três casos, no primeiro apenas 10% dos elementos da primeira camada se conectam com a segunda, no segundo caso 25% e no terceiro 50%.

4.4.1 Psicofísica neural na primeira camada

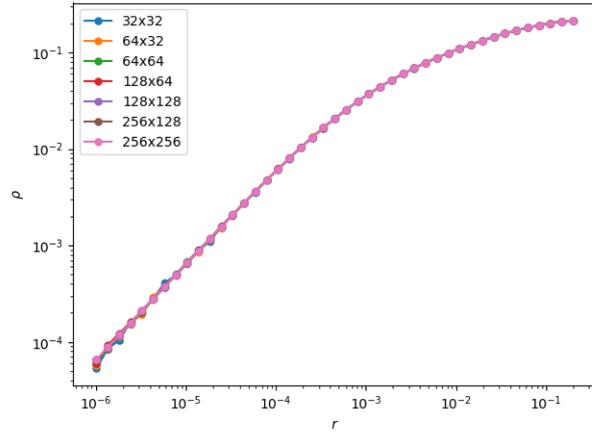
A camada $\sigma = 1$ é a que recebe os estímulos, e nela podemos testar qual o efeito do tamanho da rede $N \times M$ sobre a resposta a estímulos diferentes para os três regimes deste sistema, subcrítico, crítico e supercrítico.

Na figura (4.11a) vemos que a resposta da rede é muito menor que no caso crítico, sendo proporcional à taxa r (Lei de Stevens linear) e independe do tamanho $N \times M$.

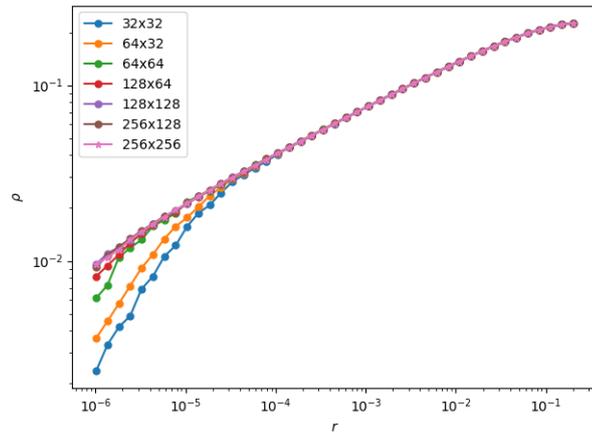
Nos gráficos da figura (4.11b e c), vemos que o tamanho da rede influencia a resposta nos casos crítico e supercrítico. Isso ocorre pois para valores de r muito pequenos a rede pode ficar muitos passos de tempo sem receber (ou perceber) estímulos. Para ilustrar isso, considere $r = 10^{-6}$, de modo que a probabilidade de um elemento da primeira camada disparar devido ao processo de Poisson (2.47) é $P(X_{ij}[t] = 1 | X_{ij}[t] = 0) \approx 10^{-6}$. Assim, para que em média pelo menos um neurônio dispare em cada passo de tempo por input externo, a rede deve ter no mínimo 10^6 neurônios.

Podemos ver no gráfico (4.11b) que, quando o sistema se encontra no ponto crítico, a resposta ρ se assemelha a uma lei de potência $\rho \propto r^m$ com $m < 1$. Esse regime, similar a uma lei de Stevens compressiva, aumenta para sinais menores conforme o tamanho da rede cresce.

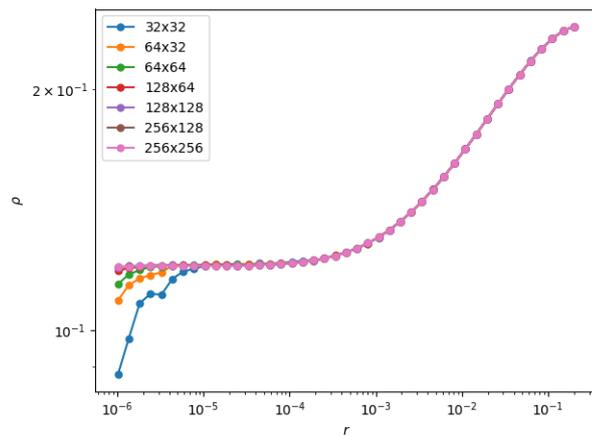
Devido ao efeito de tamanho finito descrito acima, o caso onde a resposta da rede melhor se assemelha a uma lei de potência ocorre para um valor ligeiramente acima do valor de w_C na transição de fase. Chamados esse peso sináptico de \tilde{w} . O expoente da curva em vermelho da figura (4.12) foi medido através de um ajuste para a função $\rho(r) = ar^m$, $m = 0.254 \pm 0.002$ para $\tilde{w} = 1.742$. A curva de resposta para o valor crítico de peso sináptico $w_C = 1.74$ possui um expoente $m = 0.265 \pm 0.008$.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.11: Resposta da primeira camada a estímulos externos para diferentes tamanhos de rede nos três regimes, (a) subcrítico $w = 1.6$, (b) crítico $w_C = 1.74$ e (c) supercrítico $w = 1.9$.

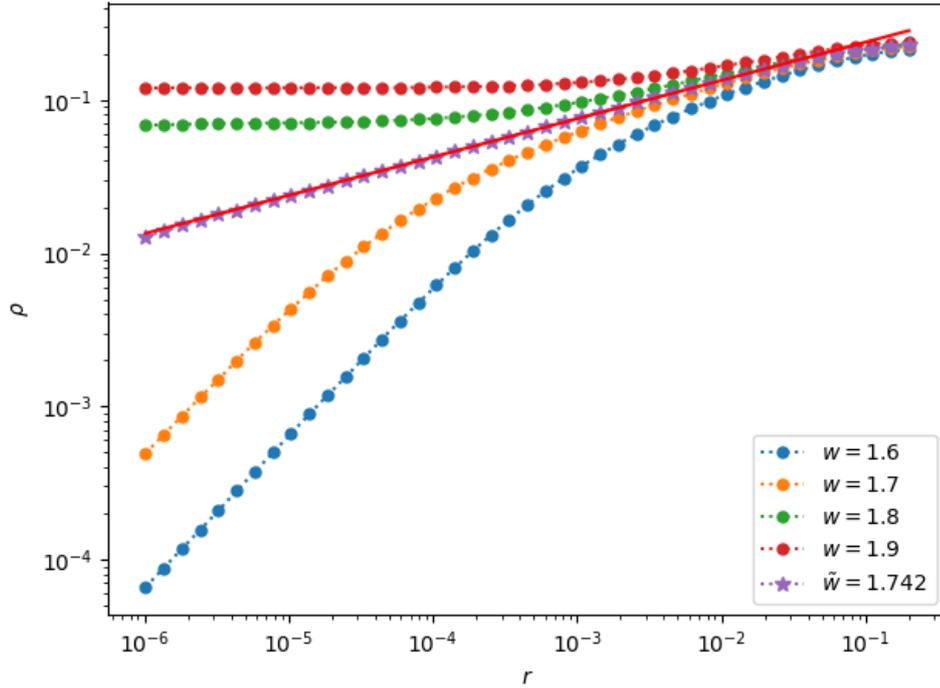


Figura 4.12: Atividade ρ da primeira camada em função da taxa de estímulos externos r para uma rede 256×256 , a curva em vermelho mostra um comportamento de lei de potencia com $m < 1$ para resposta da rede.

Podemos utilizar a medida de faixa dinâmica definida pela equação (2.39) para determinar a relação que há entre w e a resposta da rede. A figura (4.13) mostra nitidamente que a faixa dinâmica é maximizada na criticalidade e que este efeito depende do tamanho da rede.

4.4.2 Psicofísica neural da segunda camada

A segunda camada recebe o estímulo externo apenas através da primeira camada através das conexões α_{ij} . Testamos como ela responde a estes estímulos e como a conectividade entre as duas camadas influencia sua resposta.

É possível notar, das figuras (4.14b e c), que a segunda camada também é afetada pelo efeito de tamanho finito da rede. A resposta da segunda camada no ponto crítico w_C não é exatamente uma lei de potência, o peso sináptico w para qual a resposta mais se assemelha a uma lei de potência do tipo $\rho \propto r^m$ é um valor ligeiramente acima de w_C . Chamamos esse valor de w^* .

O efeito do tamanho da segunda camada pode ser mais facilmente visualizado através da medida da faixa dinâmica, ver figura (4.15). Comparando as figuras (4.13) e (4.15), podemos ver que a faixa dinâmica máxima da segunda camada é sempre maior que a da primeira, para qualquer tamanho de rede.

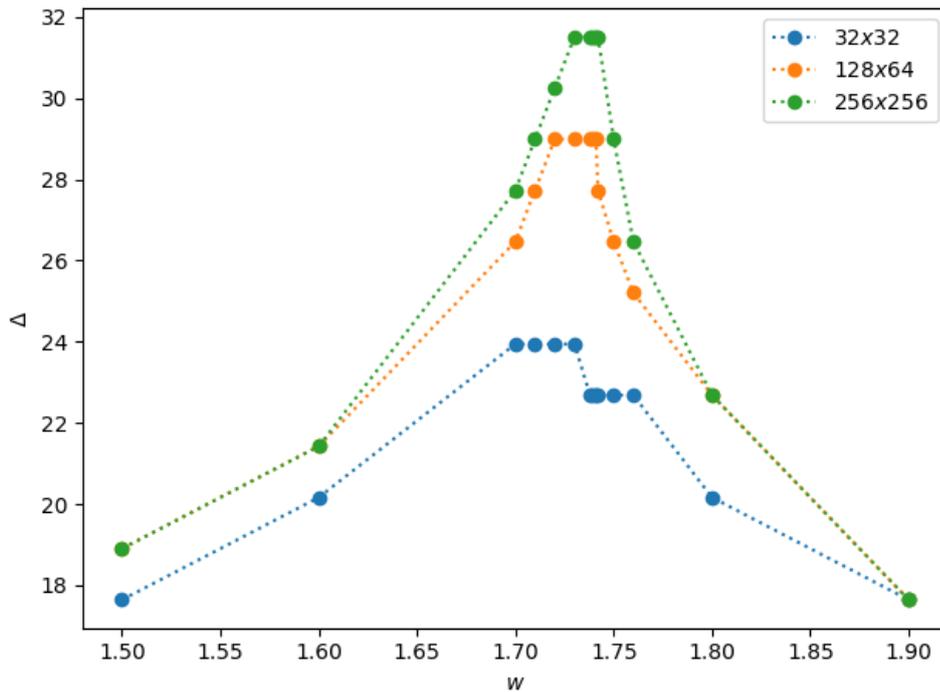
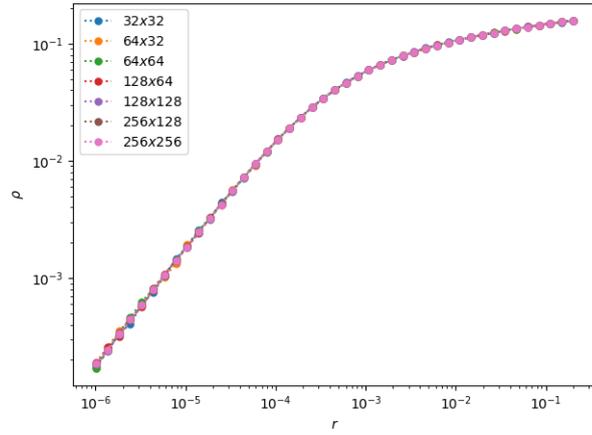


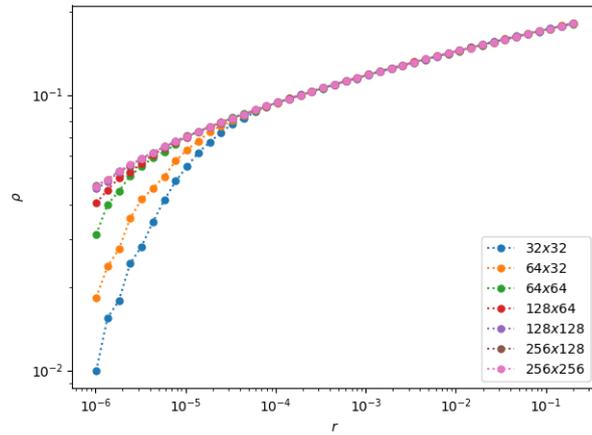
Figura 4.13: Faixa dinâmica da primeira camada para diferentes tamanhos de rede.

Veremos agora como a conectividade entre camadas altera a resposta da segunda camada em relação a estímulos apresentados à primeira. Na figura (4.16), o valor de w para a qual a resposta da segunda camada segue a lei de potência $\rho \propto r^m$ é $w^* = 1.75$. Este valor é maior que w_C e \tilde{w} . Os expoentes das curvas contínuas em vermelho do gráfico (b) da figura (4.16) são $m_{10\%} = 0.0776 \pm 0.0003$, $m_{25\%} = 0.0870 \pm 0.0004$ e $m_{50\%} = 0.0942 \pm 0.0006$. Apesar da diferença, não conseguimos detectar diferenças na faixa dinâmica para um mesmo tamanho de rede, figura (4.17).

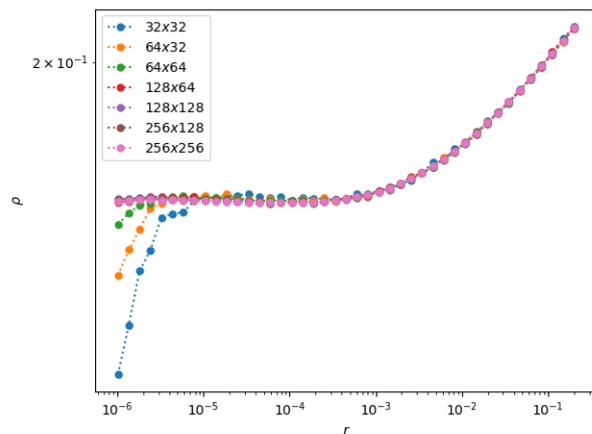
Finalmente, podemos comparar diretamente as respostas da primeira e segunda camada nos pontos $\tilde{w} = 1.742$ (para a primeira camada) e $w^* = 1.750$ (para a segunda camada), ver figura (4.18).



(a)



(b)



(c)

Figura 4.14: Resposta da segunda camada a estímulos externos para diferentes tamanhos de rede nos três regimes, (a) subcrítico $w = 1.6$, (b) crítico $w_C = 1.74$ e (c) supercrítico $w = 1.9$.

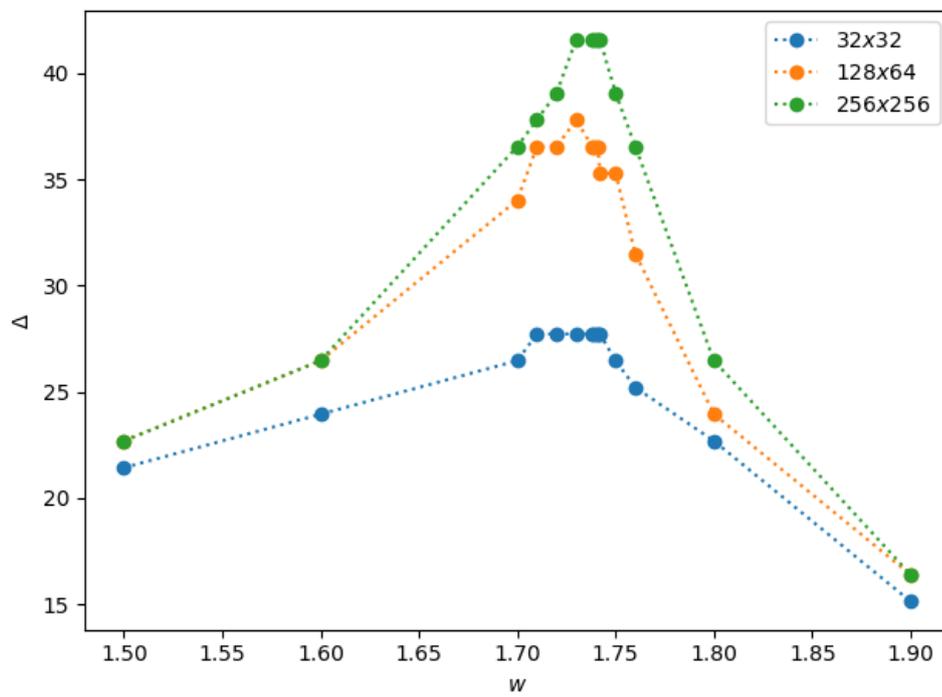
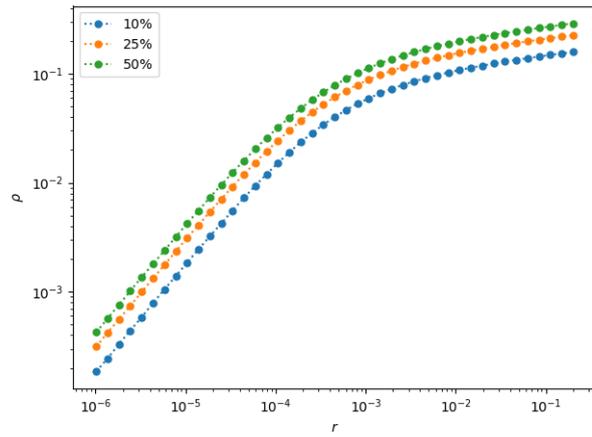
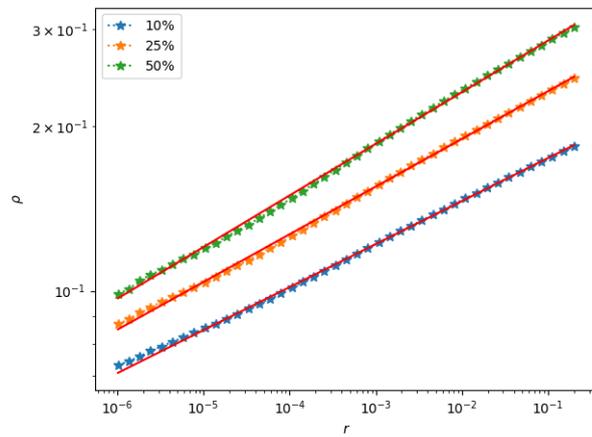


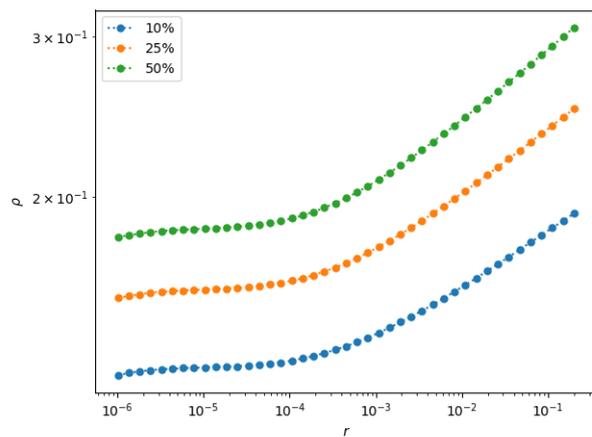
Figura 4.15: Faixa dinâmica para redes de diferentes tamanhos na segunda camada.



(a)

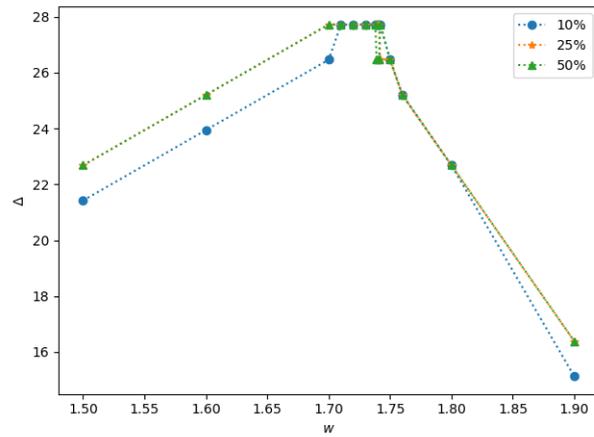


(b)

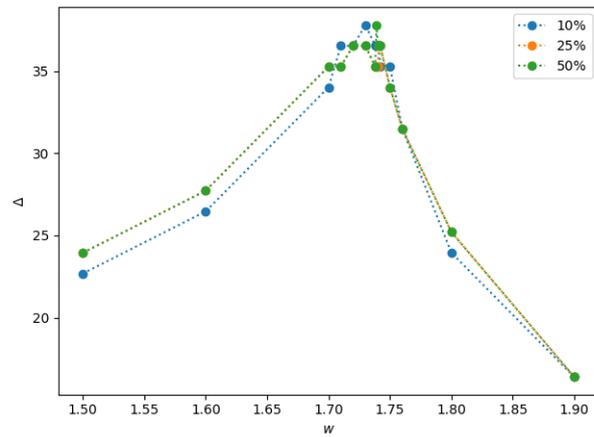


(c)

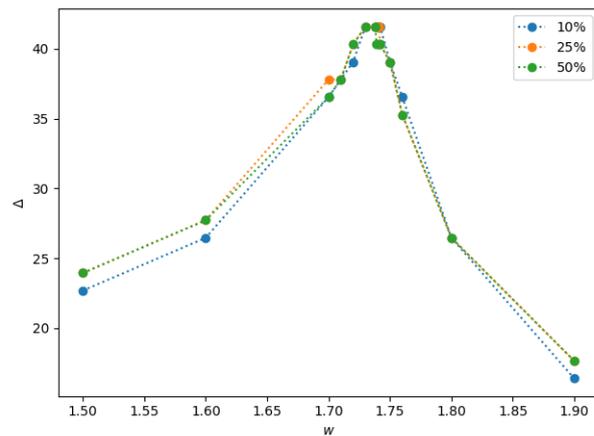
Figura 4.16: Resposta da segunda camada para diferentes conectividades nos três regimes, (a) subcrítico $w = 1.6$, (b) crítico $w^* = 1.75$ e (c) supercrítico $w = 1.9$, para uma rede de tamanho 256×256 .



(a)



(b)



(c)

Figura 4.17: Faixa dinâmica da segunda camada para diferentes conectividades e tamanhos fixos. (a) 32×32 , (b) 128×64 e (c) 256×256 .

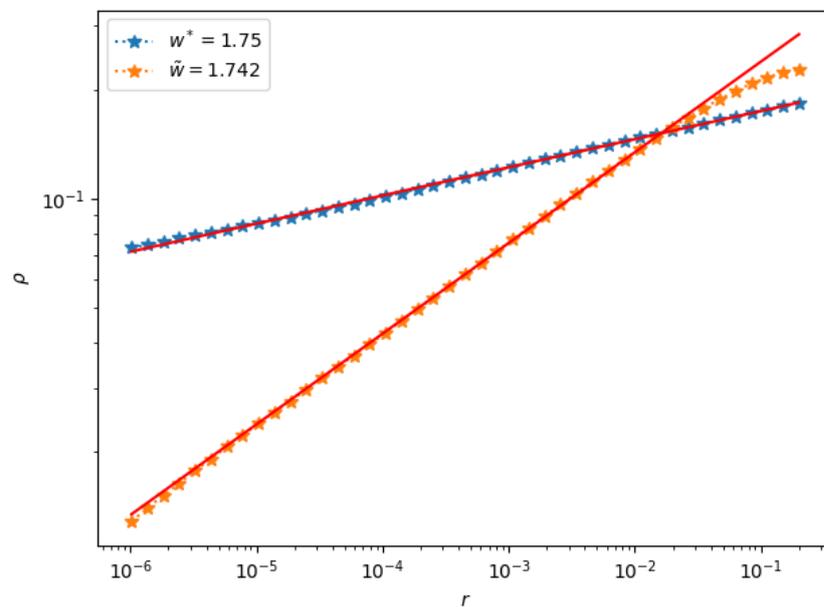


Figura 4.18: Resposta de uma rede formada por duas camadas de tamanho 256×256 com 10% dos elementos da primeira camada conectados com a segunda para os casos em que $\rho \propto r^m$ em cada camada. Primeira camada (pontos em laranja, $m = 0.254$) e segunda camada (pontos em azul, $m_2 = 0.0776$).

Discussão

Vivemos em um mundo onde estímulos variam em muitas ordens de magnitude. Evoluímos para lidar com nosso ambiente, mas como fazemos isso? Estudos em psicofísica conseguem estabelecer uma relação entre estímulo e percepção sem assumir detalhes a respeito da estrutura do cérebro. E, ainda, através do estudo da percepção de estímulos físicos diferentes é possível estabelecer relações entre percepções distintas [54]. Mesmo sem entender os detalhes microscópicos do cérebro, é possível construir modelos de percepção através de experimentos psicofísicos [55].

A representação de estímulos físicos começa com um pré-processamento na periferia do sistema sensorial [56]. Existe, porém, um paradoxo: as células sensoriais da periferia possuem uma faixa dinâmica estreita e saturam facilmente, enquanto que a percepção total possui uma faixa dinâmica larga. Uma ideia antiga, de livro-texto, é que células sensoriais de diferentes sensibilidades são recrutadas conforme a intensidade do estímulo aumenta. Essa é a chamada “Teoria do Recrutamento”, ver figura (5.1).

Um exemplo moderno de teoria do recrutamento é o modelo de Cleland & Linster [57, 1] para o sistema olfatório. Esses autores propõem que neurônios sensoriais do epitélio olfativo possuem uma pequena faixa dinâmica com sensibilidade mínima que depende da concentração de odorante. Dessa maneira, uma grande faixa dinâmica pode ser obtida pela soma de várias faixas pequenas com picos de sensibilidade para concentrações diferentes.

Apesar de simples e atrativa, a teoria de recrutamento possui uma falha. A sensibilidade de um neurônio olfatório à concentração de um odorante depende do número de receptores em sua superfície. Para que seja possível a percepção de um odorante em uma vasta gama de concentrações, um número igualmente grande de densidade de receptores é necessário. No entanto, a densidade de receptores nos neurônios varia menos que duas vezes no epitélio [57].

Como alternativa à teoria do recrutamento, Kinouchi, Copelli e colaboradores [23, 58] mostraram que a faixa dinâmica e sensibilidade de um sistema formado por elementos excitáveis, modelados por autômatos celulares, aumenta quando conexões entre elementos é introduzida. A simplicidade do modelo utilizado mostra que não é necessário introduzir

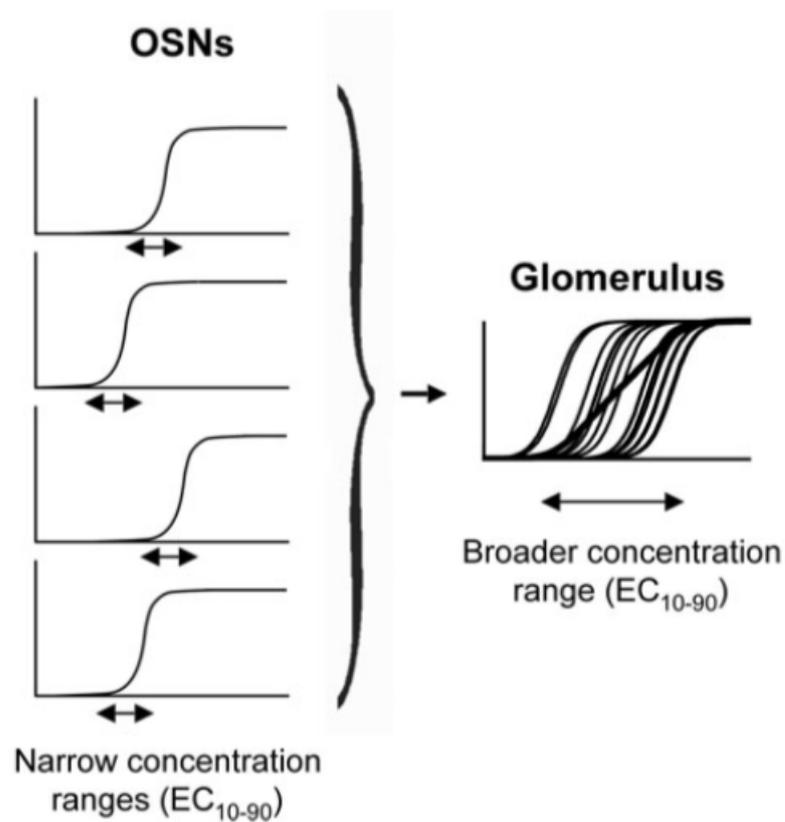


Figura 5.1: Gráficos à esquerda: faixa dinâmica pequena de neurônios sensoriais olfativos (OSN, curvas a esquerda) centradas em diferentes concentrações de odorante. O gráfico à direita mostra o efeito de se somar as curvas de cada neurônio, soma que seria feita nos glomérulos olfatórios. Figura adaptada de [1]

características particulares aos neurônios, como a densidade de receptores. Mesmo uma rede de neurônios idênticos pode ter faixa dinâmica larga. A ideia de que meios excitáveis possuem faixa dinâmica estendida é corroborada por experimentos que mostram que bloquear sinapses elétricas na retina de ratos diminui consideravelmente a faixa dinâmica do sistema [59]. Estudos computacionais com *gaps junctions* na retina em modelos biofísicos também corroboram essa ideia [60].

Além de acoplamento, a topologia e o tamanho influenciam na sensibilidade e faixa dinâmica de sistemas excitáveis [61, 62, 63, 64]. Ou seja, é possível obter uma variedade de expoentes psicofísicos, o que não está claro no caso da teoria do recrutamento.

Em 2006, Kinouchi & Copelli [20] mostraram que uma rede aleatória de elementos excitáveis possui faixa dinâmica e sensibilidade máximas no ponto crítico de uma transição de fase absorvente. Ou seja, este trabalho mostrou não apenas que meios excitáveis têm faixa dinâmica estendida, como nos trabalhos anteriores, mas também que tal faixa dinâmica é otimizada na região crítica. Evidências experimentais para essa ideia logo surgiram na literatura [65, 66, 67].

O trabalho de Kinouchi & Copelli propõe uma possível origem para os expoentes compressivos na lei de potência de Stevens, obtendo $m = 1/2$ para a rede aleatória. Recentemente, Martinez [24] mostrou que, em duas redes aleatórias acopladas com geometria de input-output similar à nossa, se obtém $m_2 = m^2 = 1/4$. Isso é análogo ao nosso resultado, pois obtivemos $m^2 = 0.265^2 = 0.0702$ que está bastante próximo de $m_2 = m_{10\%} = 0.0776$. Assim, o acoplamento entre redes de diversas topologias é um possível mecanismo para se produzir expoentes de Stevens de diferentes valores como aqueles encontrados na Psicofísica, onde a aproximação $m_\sigma = m^\sigma$ é provavelmente válida para $\sigma > 2$.

Neste trabalho, mostramos que o expoente de resposta depende fortemente da dimensionalidade da rede, não apenas do regime em que a rede se encontra. Uma camada de rede bidimensional possui uma faixa dinâmica e sensibilidade bem maiores que o caso da rede aleatória com o mesmo número de elementos. Mostramos também que duas redes bidimensionais interagindo para formar um modelo em camadas melhora consideravelmente a resposta da rede para a segunda camada em relação à primeira. Para ilustrar a importância do ganho do modelo em camadas, considere a figura (5.2).

A figura (5.2) mostra a faixa dinâmica de um sistema de duas camadas bidimensionais de mesmo tamanho $64 \times 64 = 8192$ elementos, e a faixa dinâmica de um sistema de uma única camada de tamanho $256 \times 256 = 65536$ elementos. Quando temos um sistema em camadas é possível atingir uma faixa dinâmica e sensibilidade maiores usando sistemas muito menores, no caso oito vezes menor.

As simulações para o modelo em camadas nos mostram que o regime do sistema onde a resposta da rede segue uma lei de potência do tipo $\rho \propto r^m$ ocorre para valores

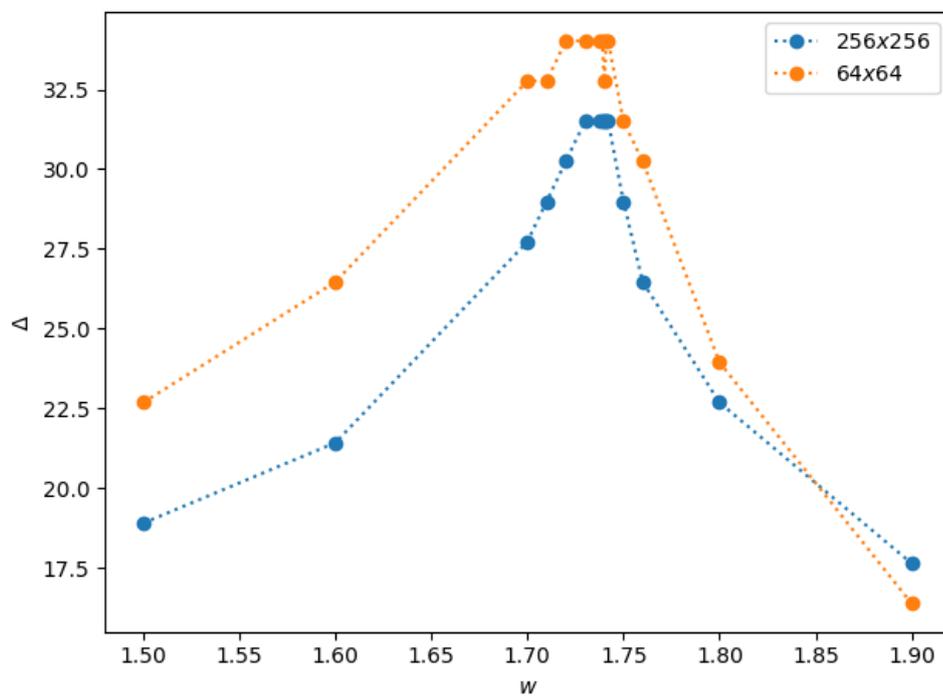


Figura 5.2: Faixa dinâmica para uma rede bidimensional simples (256×256 elementos), curva em azul. Faixa dinâmica para a segunda camada de um sistema bidimensional com duas camadas (64×64 na segunda camada) e conectividade de 10% dos elementos entre a primeira e a segunda, curva em laranja.

ligeiramente maiores que w_C , tanto para primeira camada quanto para segunda. Apesar do efeito de tamanho finito possivelmente ser responsável por isso, talvez existam outros fatores. Para a primeira camada, o tempo de simulação pode ser um fator importante pois a rede bidimensional possui um transiente excessivamente longo em comparação com o caso da rede completa. Aparentemente a rede quadrada necessita de um tempo maior de exposição a um estímulo para que toda a rede possa responder. Já no caso da segunda camada, além do transiente, temos o problema da conectividade. A maneira de conectar camadas foi feita para não alterar a topologia da segunda camada, evitando mudar o ponto de transição e os expoentes relevantes.

O sistema estudado neste trabalho consegue descrever experimentos psicofísicos de produção e estimativa de magnitude, para estímulos unidimensionais de intensidade. Conseguimos mostrar que redes que operam em regimes subcrítico descrevem leis de potência aproximadamente lineares $m \approx 1$ e redes que operam próximo de uma transição de fase absorvente descrevem leis de potência compressivas $m < 1$. Neste regime, a lei de potência é válida para estímulos que variam em muitas ordens de magnitude. No entanto, não encontramos um regime capaz de descrever leis de potência expansivas ($m > 1$).

Conclusões e Perspectivas

Observamos que os resultados analíticos, obtidos com a aproximação de campo médio, concordam com as simulações de rede completa. Esta aproximação serviu como ponto de partida para o estudo do sistema bidimensional de neurônios GL. Apesar do ponto crítico da transição e seus expoentes mudarem para o caso bidimensional, conseguimos identificar os parâmetros de ordem ρ e de controle w de maneira analítica, identificamos também quais as condições para que este sistema passe por uma transição de fase absorvente. Até onde sabemos, este tipo de sistema apresenta transições de fase absorvente para qualquer topologia desde que a conjectura de Janssen & Grassberger [47] seja satisfeita.

Estudamos o caso da rede *annealed* pois nele a atividade que cada neurônio soma em um passo de tempo, equação (2.1), é em média o valor da atividade da rede $\rho[t]$ naquele instante. Com isso esperávamos que um sistema com a topologia de rede *annealed* desse resultados idênticos a aproximação de campo médio. Suponha um caso em que cada neurônio faz $K = 4$ conexões aleatórias a cada passo de tempo: observando a equação do modelo (2.1), a somatória que cada neurônio pode ter, assumindo que todos os pesos sinápticos w_{ij} sejam iguais, é $\{0, 0.25, 0.5, 0.75, 1\}$. Em média, os os neurônios sumam a atividade da rede, igual ao caso de campo médio.

Nossa suposição estava parcialmente correta. Como observamos, o expoente crítico $\beta(k)$ associado ao parâmetro de ordem ρ não se altera em relação ao valor esperado pela aproximação. No entanto, o ponto crítico $w_c(k)$ depende do número de conexões k que os neurônios fazem. Encontramos essa dependência e conseguimos realizar um colapso de dados. Para entender porque isso ocorre, imagine que cada neurônio é um observador da rede. Nesta interpretação, quando um neurônio soma atividade da rede é equivalente a dizer que ele faz uma medida da atividade ρ_{ij} com erro σ_{ij} de uma população que possui medida real ρ . Quanto maior o tamanho da amostra da população, mais próximo de ρ a medida individual ρ_{ij} será, e ainda os erros entre as medidas $\Delta_\sigma = \sigma_{ij} - \sigma_{i'j'}$ serão cada vez menores. É a discrepância entre as medidas de neurônios, que ocorre devido a uma amostra pequena, que leva ao deslocamento do ponto crítico. O motivo original de se examinar essa topologia *annealed* foi para validar os programas utilizados para simulações.

A dependência do ponto crítico $w_c(k)$ com o número de conexões neste caso é algo novo que não esperávamos encontrar, pois o mesmo não ocorre em modelos com automata celulares [20, 32].

Quando caracterizamos a rede bidimensional, medimos as razões β/ν e γ/ν e o ponto crítico de maneira indireta através da técnica de escalonamento de tamanho finito. Para medir individualmente cada expoente partimos do valor de β obtido por S. Lübeck [53] para sistemas bidimensionais. Usamos este valor pois assumimos que a rede bidimensional de neurônios GL pertence a classe de universalidade DP devido à conjectura de Janssen & Grassberger. A definição do parâmetro de ordem ρ e seu correspondente expoente β é exatamente a mesma para nosso sistema e para o sistema de Percolação Direcionada que dá nome a esta classe de universalidade. Observamos, porém, que poderíamos ter utilizado escalonamento de tamanho finito para medir diretamente o expoente ν relacionado ao comprimento de correlação do sistema [44, 68] e através dele poderíamos obter β e γ de forma independente.

Com a rede bidimensional completamente caracterizada, acoplamos duas redes bidimensionais com conectividade entre camadas diferentes para estudar como o novo sistema responde a estímulos externos na forma de um processo de Poisson com taxa r , imitando fótons ou estímulos chegando em um modelo de retina ou epitélio sensorial com duas camadas de células. Este seria uma espécie de experimento psicofísico com uma abordagem *bottom-up* (psicofísica neural), onde partimos de um sistema com elementos neuronais, topologia de rede e comportamento crítico conhecidos.

Observamos que, quando o sistema em camadas se encontra em um regime subcrítico, sua resposta segue uma lei de potência $\rho \propto r^m$ com $m \approx 1$ para as duas camadas da rede. Próximo da região crítica as respostas das duas camadas também seguem uma lei de potência, porém o valor do peso sináptico é ligeiramente maior que $w_C = 1.74$: para a primeira camada temos $\tilde{w} = 1.742$ e para a segunda $w^* = 1.75$.

Para a primeira camada, temos $m = 0.254 \pm 0.02$. O valor esperado, utilizando a equação (2.41) e os expoentes β e σ obtidos por S. Lübeck [53], seria $m^* = 0.268 \pm 0.012$, de modo que nosso expoente é compatível com DP em duas dimensões. No caso da segunda camada, obtivemos $m_2(10\%) = 0.0776 \pm 0.0003$, $m_2(25\%) = 0.0870 \pm 0.0004$ e $m_2(50\%) = 0.0942 \pm 0.0006$ para as diferentes conectividades entre camadas. De novo, os erros se referem ao processo de fitting, que em geral são pequenos, não são erros estatísticos.

O valor em condições ideais para o expoente da segunda camada, equação (2.42), seria $m_2 = m^2 = 0.0702 \pm 0.0063$. Tais valores baixos para o expoente m_2 são muito interessantes, pois tais expoentes são fortemente compressivos e podem aproximar em certo regime a lei de Weber-Fechner $S = C \log r$ para valores intermediários de r .

Quanto às perspectivas de trabalhos futuros, pretendemos examinar melhor as pro-

priedades dessa rede na presença do termo de vazamento $\mu > 0$, inputs externos constantes $I > 0$ e limiar de disparo $\theta > 0$. Quando $\theta > I$, encontraremos transições de fase de primeira ordem [69] e não são claras as consequências psicofísicas das mesmas.

Nosso cérebro é capaz de responder de maneira muito rápida e eficiente a mudanças no ambiente. Essa capacidade de se adaptar é uma característica de nossos sistemas sensoriais, porém em nosso modelo existe a necessidade de um ajuste fino dos parâmetros $w(\Gamma, \mu)$ para que o sistema seja mantido em um estado crítico w_C . Assim, o próximo passo é estudar mecanismos homeostáticos para $w_{ij}[t]$ suficientes para auto-organizar nossa rede no regime crítico, o que já foi feito com sucesso para o grafo completo com elementos GGL [27, 28, 29, 69] e redes aleatórias de autômatos celulares com K vizinhos [32, 33].

Assim, pretendemos estudar o comportamento de auto-organização na criticalidade da rede na presença de sinapses adaptativas $W_{ij}[t]$ [30, 31], ganhos neuronais adaptativos $\Gamma[t]$ [27, 28, 29] e limiares de disparo adaptativos $\theta[t]$ [69]. Também estudaremos a psicofísica da faixa dinâmica nestes casos de auto-organização crítica.

Capítulo A

Percolação por invasão e o Paradoxo de Fermi

Neste anexo descrevemos um artigo publicado durante nosso mestrado que também envolve ideias de criticalidade e auto-organização.

Ao longo de toda a história da humanidade, e mesmo hoje, existiram grupos humanos isolados. Tais grupos, dotados de culturas, religiões e costumes distintos, passaram séculos sem entrar em contato com outras sociedades que, de sua perspectiva, era possível afirmar que seriam os únicos seres humanos na terra.

Com o passar do tempo as sociedades humanas foram ficando cada vez mais conectadas. Seja por expansão de impérios, interesses comerciais ou outros, as civilizações estavam cada vez mais cientes umas das outras. A tecnologia e as barreiras ambientais tiveram uma importância fundamental nesse processo de globalização. A última grande barreira que enfrentamos na nossa expansão pelo planeta foram os oceanos, e foi necessário um enorme avanço tecnológico para passarmos por ela.

Atualmente todas as civilizações tecnológicas estão conectadas e temos acesso a praticamente todo o planeta. Mesmo assim, a difusão das sociedades humanas, por exemplo em cidades, é bastante complexa: são habitats locais onde fatores históricos de colonização, condições ambientais e mesmo o acaso determinaram este processo, ver figura (A.1). A colonização humana claramente não foi um simples processo de difusão uniforme, mas apresentou uma estrutura hierárquica de regiões vazias de vários tamanhos, similar a uma estrutura fractal. Esse tipo de colonização pode fornecer uma possível resposta para o assim chamado Paradoxo de Fermi. Este paradoxo aborda a aparente contradição entre a probabilidade alta de surgimento de vida e a falta de evidências para vida inteligente fora da terra [70].

O Paradoxo de Fermi é formado por alguns pontos fundamentais: Existem bilhões de estrelas em nossa galáxia, alguns bilhões dessas estrelas são similares ao nosso sol, dessas estrelas similares muitas são bilhões de anos mais velhas que nosso sistema solar. Com



Figura A.1: Distribuição de fontes luminosas na Terra (artificiais e naturais – incêndios florestais). Note que existem regiões de vários tamanhos que não possuem cidades luminosas o suficiente para aparecerem na foto. Fonte: NASA/NOAA, url: https://www.nasa.gov/topics/earth/earthday/gall_earth_night.html

uma probabilidade alta, muitas dessas estrelas possuem planetas similares ao nosso. Sendo assim, existe uma alta probabilidade de que vida, pelo menos microbiana, tenha surgido. A partir daí, não existem barreiras claras para a emergência de vida complexa e mesmo inteligente, apenas especulações sobre possíveis filtros para tanto [70]. Mas o paradoxo se baseia na ideia de que, entre todas as civilizações que possivelmente surgiram, pelo menos uma (e é necessário apenas uma) desenvolveu tecnologia para viagens inter-estelares, tecnologia essa que estamos desenvolvendo agora. Mesmo com um desenvolvimento tecnológico lento, é possível calcular que poucos milhões de anos são necessários para essa única civilização colonizar nossa galáxia, assumindo um processo de difusão simples. Este tempo de milhões de anos é ordens de magnitude menor que a idade das estrelas de segunda geração de nossa galáxia (aquelas com planetas rochosos), que seria de dez bilhões de anos.

Pensando em como barreiras ambientais e a tecnologia tem um papel fundamental para um processo de colonização (conceituado aqui como um tipo de crescimento de aglomerado ou *cluster growth*), criamos um modelo de percolação por invasão generalizado com o qual propomos uma solução para o Paradoxo de Fermi. Essa proposta é uma realização mais concreta da proposta inicial de Landis [71, 70] sobre colonização por percolação como resposta ao Paradoxo de Fermi. Ver também [72, 73].

O modelo consiste em uma rede bidimensional onde cada sítio representa uma região

no espaço interestelar. Cada sítio recebe um número $E_{ij} \in [0, 1]$ que representa o quão facilmente colonizável é uma dada região no espaço, ou seja, representa a dificuldade de se encontrar um planeta habitável, ou Terraformar um, dentro do espaço ij . Quanto menor E_{ij} , mais fácil é colonizar a região ij .

Cada sítio da rede representa uma área de $D \times D$ anos-luz e cada um pode estar ocupado $S_{ij} = 1$ ou não ocupado $S_{ij} = 0$. O processo de colonização ocorre entre vizinhos mais próximos (vizinhança de von Neumann). Escolhemos que a probabilidade de que um sítio ocupado colonize algum vizinho vazio é,

$$P(S_{ij}[t + 1] = 1 \mid S_{ij}[t] = 0) = e^{-\beta E_{ij}}, \quad (\text{A.1})$$

Notemos que o critério βE_{ij} simula um processo de colonização inteligente, não apenas uma difusão simples: a probabilidade exponencial da equação (A.1) faz com que regiões no espaço com barreiras pequenas sejam colonizadas primeiro. O parâmetro livre β está associado com a dificuldade de se colonizar uma região e seu inverso $T = 1/\beta$ pode ser tomado como representando o nível tecnológico da civilização. No presente modelo usamos uma escala de tempo onde o nível tecnológico não depende do tempo, $T(t) = T$, mas esta restrição pode ser retirada mais tarde.

No início de cada simulação, apenas o sítio central da rede está ocupado, a simulação dura até que algum sítio da borda do sistema seja colonizado, ou seja, houve percolação do sítio central até a borda. Assim, o modelo representa o aglomerado civilizatório percolativo de uma única civilização original em vez de muitas civilizações coexistentes. Esta restrição também poderá ser retirada no futuro.

Podemos ver na figura (A.2) o efeito que o parâmetro livre β tem sobre o processo de colonização.

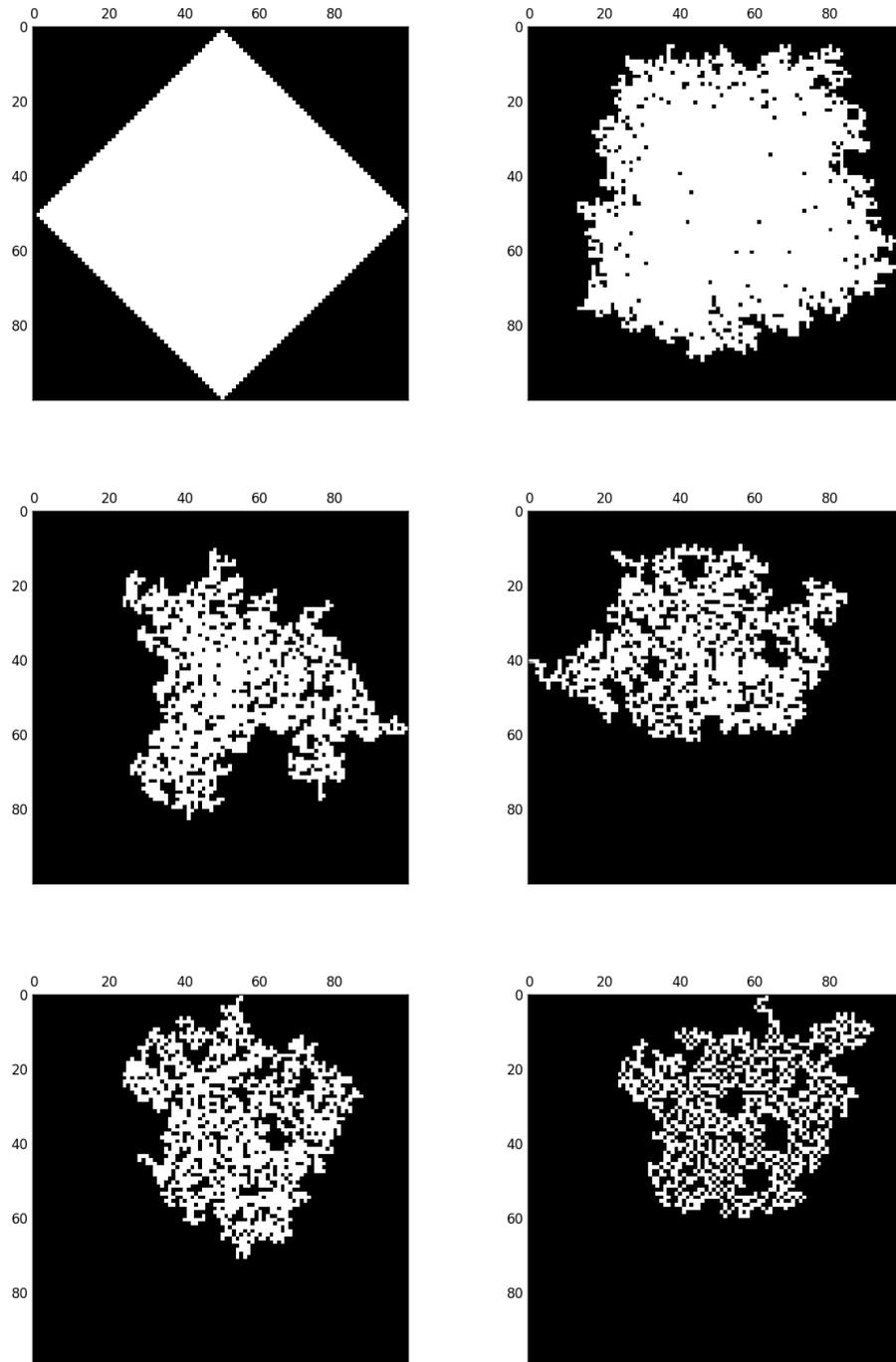


Figura A.2: De cima para baixo, esquerda a direita, processos de colonização com $\beta = 0, 5, 10, 15, 20$ e 25 . Em $t = 0$ temos apenas um nó colonizado em $i = 50, j = 50$ para uma rede 100×100 . Note a formação de grandes buracos vazios conforme β aumenta. Nossa proposta é que a Terra se situa em um desses grandes buracos.

Publicamos nossos resultados sobre o modelo de percolação generalizada e uma discussão sobre o Paradoxo de Fermi em [74]. O artigo foi citado, junto com Landis [71], no

livro de revisão de Webb [70] como a solução de Percolação para o Paradoxo de Fermi. Nosso artigo também consta na Wikipedia inglesa e portuguesa.

Para que o Paradoxo de Fermi seja de fato um paradoxo é necessário assumir que a Terra se situa em uma região típica da Galáxia, em princípio acessível pela pressuposta civilização galáctica. No entanto, talvez sejamos tão exóticos quanto um oásis no meio do deserto, e isto explicaria o Paradoxo. Considere a última simulação da figura (A.2): mesmo que nossa galáxia seja repleta de vida, se estivermos em um local atípico, dentro de um grande espaço vazio produzido por esse processo de colonização quasi-fractal, não iremos encontrar vida inteligente e as possíveis outras formas de vida também não iram nos encontrar.

Percolação por Invasão [75] foi o primeiro modelo a apresentar criticalidade auto-organizada, publicada em 1983 (quatro anos antes do artigo clássico de Bak, Tang e Wisenfeld [5]) e é baseada em uma dinâmica extremal. Este modelo simula como dois líquidos imiscíveis competem por espaço em um meio poroso. A cada passo de tempo, somente um poro é invadido na interface entre os dois líquidos, aquele que possui a menor resistência para invasão. Nosso modelo de percolação por invasão generalizada equivale ao modelo original no limite $\beta \rightarrow \infty$. No caso de β finito, encontramos que o sistema se auto-organiza em um estado *quasi*-crítico (levemente super-crítico) com formação de regiões vazias (buracos) de diversos os tamanhos, que seguem aproximadamente uma lei de potência.

Notamos também que, quando $t \rightarrow \infty$, os buracos vão sendo lentamente preenchidos, numa escala longa de tempo que definiria um processo de envelhecimento. Esse processo de envelhecimento ainda precisa ser melhor estudado.

Referências Bibliográficas

- [1] T A Cleland and C Linster. Computation in the Olfactory System. *Chem. Senses*, 30(9):801–813, 2005.
- [2] D R Chialvo. Emergent complex neural dynamics. *Nat. Phys.*, 6:744–750, 2010.
- [3] M A Muñoz. Colloquium: Criticality and dynamical scaling in living systems. *Rev. Mod. Phys.*, 90:031001, 2017.
- [4] J J Hopfield. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. *Proc. Natl. Acad. Sci*, 79(8):2554–2558, 1982.
- [5] P Bak, C Tang, and K Wiesenfeld. Self-organized criticality: An explanation of the 1/f noise. *Phys. Rev. Lett.*, 59:381–384, 1987.
- [6] E N Miranda and H J Herrmann. Self-organized criticality with disorder and frustration. *Physica A*, 175(3):339–344, 1991.
- [7] V I Makarenkov and A B Kirillov. Self-organized criticality in neural networks. In *Applications of Artificial Neural Networks II*, volume 1469. International Society for Optics and Photonics, 1991.
- [8] J M Beggs and D Plenz. Neuronal avalanches in neocortical circuits. *J. Neurosci.*, 23(35):11167–11177, 2003.
- [9] A V M Herz and J J Hopfield. Earthquake cycles and neural reverberations: Collective oscillations in systems with pulse-coupled threshold elements. *Phys. Rev. Lett.*, 75:1222–1225, 1995.
- [10] M Usher, M Stemmler, and Z Olami. Dynamic pattern formation leads to 1 f noise in neural populations. *Phys. Rev. Lett.*, 74(2):326–329, 1995.
- [11] S Bottani. Pulse-coupled relaxation oscillators: from biological synchronization to self-organized criticality. *Phys. Rev. Lett.*, 74(21):4189–4192, 1995.

- [12] D Chen, S Wu, A Guo, and Z R Yang. Self-organized criticality in a cellular automaton model of pulse-coupled integrate-and-fire neurons. *J. Phys. A*, 28(18):5177–5182, 1995.
- [13] C J Pérez, A Corral, A Díaz-Guilera, K Christensen, and A Arenas. On self-organized criticality and synchronization in lattice models of coupled dynamical systems. *Int. J. Mod. Phys. B*, 10(10):1111–1151, 1996.
- [14] P Bak and D R Chialvo. Adaptive learning by extremal dynamics and negative feedback. *Phys. Rev. E*, 63:031912, 2001.
- [15] D R Chialvo and P Bak. Learning from mistakes. *Neuroscience*, 90(4):1137 – 1148, 1999.
- [16] J Hesse and T Gross. Self-organized criticality as a fundamental property of neural systems. *Front. Neurosci.*, 8:166, 2014.
- [17] D Marković and C Gros. Power laws and self-organized criticality in theory and nature. *Phys. Rep.*, 536(2):41–74, 2014.
- [18] J Beggs and N Timme. Being critical of criticality in the brain. *Front. Physiol.*, 3:163, 2012.
- [19] N Bertschinger and T Natschläger. Real-time computation at the edge of chaos in recurrent neural networks. *Neural. Comput.*, 16(7):1413–1436, 2004.
- [20] O Kinouchi and M Copelli. Optimal dynamical range of excitable networks at criticality. *Nat. Phys.*, 2:348–351, 2006.
- [21] C Haldeman and J M Beggs. Critical branching captures activity in living neural networks and maximizes the number of metastable states. *Phys. Rev. Lett.*, 94:058101, 2005.
- [22] H Yang, W L Shew, R Roy, and D Plenz. Maximal variability of phase synchrony in cortical networks with neuronal avalanches. *J. Neurosci.*, 32(3):1061–1072, 2012.
- [23] M Copelli, A C Roque, R F Oliveira, and O Kinouchi. Physics of psychophysics: Stevens and weber-fechner laws are transfer functions of excitable media. *Phys. Rev. E*, 65:60901 – 60905, 2002.
- [24] L A B Martinez. Transição de fase em redes neuronais com camadas. Master’s thesis, Universidade Federal de Santa Catarina, 2018.

- [25] W Gerstner. Associative memory in a network of biological neurons. In *Advances in Neural Information Processing Systems*, pages 84–90, 1991.
- [26] A Galves and E Löcherbach. Infinite systems of interacting chains with memory of variable length—a stochastic model for biological neural nets. *J. Stat. Phys.*, 151(5):896–921, 2013.
- [27] L Brochini, A A Costa, M Abadi, A C Roque, J Stolfi, and O Kinouchi. Phase transitions and self-organized criticality in networks of stochastic spiking neurons. *Sci. Rep.*, 6:35831, 2016.
- [28] A A Costa, L Brochini, and O Kinouchi. Self-organized supercriticality and oscillations in networks of stochastic spiking neurons. *Entropy*, 19:399, 2017.
- [29] O Kinouchi, L Brochini, A A Costa, Campos J G F, and M Copelli. Stochastic oscillations and dragon king avalanches in self-organized quasi-critical systems. *Sci. Rep.*, 9:3874, 2019.
- [30] A Levina, J M Herrmann, and T Geisel. Dynamical synapses causing self-organized criticality in neural networks. *Nat. Phys.*, 3(12):857–860, 2007.
- [31] J A Bonachela, S Franciscis, J J Torres, and M A Muñoz. Self-organization without conservation: are neuronal avalanches generically critical? *J. Stat. Mech.*, 2010(02):P02015, 2010.
- [32] A A Costa, M Copelli, and O Kinouchi. Can dynamical synapses produce true self-organized criticality? *J. Stat. Mech.*, 2015(6):P06004, 2015.
- [33] J G F Campos, A A Costa, M Copelli, and O Kinouchi. Correlations induced by depressing synapses in critically self-organized networks with quenched dynamics. *Phys. Rev. E*, 95:042303, 2017.
- [34] M Bear, B Connors, and M Paradiso. *Neuroscience: Exploring the brain: Fourth edition*. Wolters Kluwer, 01 2015.
- [35] W Gerstner, W M Kistler, R Naud, and L Paninski. *Neuronal Dynamics: From Single Neurons to Networks and Models of Cognition*. Cambridge University Press, 2014.
- [36] W Gerstner and L J van Hemmen. Associative memory in a network of ‘spiking’neurons. *Network: Computation in Neural Systems*, 3(2):139–164, 1992.
- [37] M Girardi-Schappo, M H R Tragtenberg, and O Kinouchi. A brief history of excitable map-based neurons and neural networks. *J. Neurosci. Meth.*, 220(2):116–130, 2013.

- [38] H Soula, G Beslon, and O Mazet. Spontaneous dynamics of asymmetric random recurrent spiking neural networks. *Neural Comput.*, 18(1):60–79, 2006.
- [39] B Cessac. A discrete time neural network model with spiking neurons. *J. Math. Biol.*, 56(3):311–345, 2008.
- [40] Mark Newman. *Networks*. Oxford university press, 2018.
- [41] R A Fisher and F Yates. *Statistical tables for biological, agricultural and medical research*. Edinburgh: Oliver and Boyd, 1948.
- [42] M Kardar. *Statistical Physics of Particles*. Cambridge University Press, 2007.
- [43] E Coronado, B S Tsukerblat, and R Georges. *Exchange Interactions I: Mechanisms*. Springer Netherlands, Dordrecht, 1996.
- [44] M Henkel, H Hinrichsen, and L Sven. *Non-Equilibrium Phase Transitions*. Springer Netherlands, 2008.
- [45] G Jaeger. The ehrenfest classification of phase transitions: Introduction and evolution. *Arch. Hist. Exact. Sci.*, 53(1):51–81, 1998.
- [46] E T Jaynes. Information theory and statistical mechanics. *Phys. Rev.*, 106:620–630, 1957.
- [47] H K Janssen. On the nonequilibrium phase transition in reaction-diffusion systems with an absorbing stationary state. *Z. Phys. B*, 42(2):151–154, 1981.
- [48] P Grassberger. On phase transitions in schlögl’s second model. *Z. Phys. B*, 47(4):365–374, 1982.
- [49] Z L Lu and B Doshier. *Visual Psychophysics: From Laboratory to Theory*. The MIT Press. MIT Press, 2013.
- [50] S S Stevens. On the psychophysical law. *Psychol. Rev.*, 64(3):153–181, 1957.
- [51] K O Johnson, S S Hsiao, and T Yoshioka. Neural coding and the basic law of psychophysics. *Neuroscientist*, 8(2):111–121, 2002.
- [52] M Girardi-Schappo. *Transições de Fase em Modelos do Cérebro: Uma Abordagem Computacional*. PhD thesis, Universidade Federal de Santa Catarina, 2016.
- [53] S Lübeck and R D Willmann. Scaling behavior of the directed percolation universality class. *Nucl. Phys. B.*, 718:341–361, 2005.

- [54] D H Krantz. A theory of magnitude estimation and cross-modality matching. *J. Math. Psychol.*, 9(2):168 – 199, 1972.
- [55] C Micheyl, C Kaernbach, and L Demany. An evaluation of psychophysical models of auditory change perception. *Psychol. Rev.*, 115(4):1069–1083, 2008.
- [56] D Purves, G J Augustine, D Fitzpatrick, W C Hall, A S LaMantia, J O McNamara, and S M Williams. *Neuroscience*. Sinauer Associates, 2004.
- [57] T A Cleland and C Linster. Concentration tuning mediated by spare receptor capacity in olfactory sensory neurons: A theoretical study. *Neural Comput.*, 11(7):1673–1690, 1999.
- [58] M Copelli, R F Oliveira, A C Roque, and O Kinouchi. Signal compression in the sensory periphery. *Neurocomputing*, 65-66:691 – 696, 2005.
- [59] M Deans, B Volgyi, D A Goodenough, S Bloomfield, and D Paul. Connexin36 is essential for transmission of rod-mediated visual signals in the mammalian retina. *Neuron*, 36:703–12, 12 2002.
- [60] R Publio, R F Oliveira, and A C Roque. A computational study on the role of gap junctions and rod ih conductance in the enhancement of the dynamic range of the retina. *PLoS One*, 4(9):e6970, 2009.
- [61] M Copelli and O Kinouchi. Intensity coding in two-dimensional excitable neural networks. *Physica A Stat. Mech. Appl.*, 349(3):431 – 442, 2005.
- [62] V R V Assis and M Copelli. Dynamic range of hypercubic stochastic excitable media. *Phys. Rev. E*, 77:011923 – 011930, 2008.
- [63] Leonardo L Gollo, Osame Kinouchi, and Mauro Copelli. Active dendrites enhance neuronal dynamic range. *PLoS Comput. Biol.*, 5(6):e1000402, 2009.
- [64] D B Larremore, W L Shew, and J G Restrepo. Predicting criticality and dynamic range in complex networks: effects of topology. *Physical Rev. Lett.*, 106(5):058101, 2011.
- [65] Woodrow L Shew and Dietmar Plenz. The functional benefits of criticality in the cortex. *The Neuroscientist*, 19(1):88–100, 2013.
- [66] Shree Hari Gautam, Thanh T Hoang, Kylie McClanahan, Stephen K Grady, and Woodrow L Shew. Maximizing sensory dynamic range by tuning the cortical state to criticality. *PLoS Comput. Bio.*, 11(12):e1004576, 2015.

- [67] L Cocchi, L L Gollo, A Zalesky, and M Breakspear. Criticality in the brain: A synthesis of neurobiology, models and cognition. *Prog. Neurobio.*, 158:132–152, 2017.
- [68] J Marro and R Dickman. *Nonequilibrium Phase Transitions in Lattice Models*. Collection Alea-Saclay: Monographs and Texts in Statistical Physics. Cambridge University Press, 1999.
- [69] M Girardi-Schappo, L Brochini, A A Costa, T T A Carvalho, and O Kinouchi. Self-organized critical balanced networks: a unified framework. *arXiv preprint arXiv:1906.05624*, 2019.
- [70] S Webb. *If the universe is teeming with aliens... where is everybody?: seventy-five solutions to the fermi paradox and the problem of extraterrestrial life*. Springer, 2015.
- [71] G A Landis. The fermi paradox: an approach based on percolation theory. *J. Br. Interplanet. Soc.*, 51:163–166, 1998.
- [72] T W Hair and A D Hedman. Spatial dispersion of interstellar civilizations: a probabilistic site percolation model in three dimensions. *Int. J. Astrobio.*, 12(1):45–52, 2013.
- [73] M Lingam. Interstellar travel and galactic colonization: Insights from percolation theory and the yule process. *Astrobiology*, 16(6):418–426, 2016.
- [74] E F Galera, G R Galanti, and O Kinouchi. Invasion percolation solves fermi paradox but challenges seti projects. *Int. J. Astrobiology*, pages 1–7, 2018.
- [75] D Wilkinson and J F Willemsen. Invasion percolation: a new form of percolation theory. *J. Phys. A*, 16(14):3365–3376, 1983.