

JOSÉ RENATO ALCARÁS

Metamateriais acústicos: campos internos e teoria de espalhamento

Tese apresentada à Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto da Universidade de São Paulo como parte das exigências para a obtenção do título de Doutor em Ciências.

Área de Concentração:

Física Aplicada à Medicina e Biologia.

Orientador:

Alexandre Souto Martinez.

Versão corrigida

Versão original disponível na FFCLRP-USP

Ribeirão Preto

2023

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

FICHA CATALOGRÁFICA

Alcarás, José Renato

Metamateriais acústicos: campos internos e teoria de espalhamento / José Renato Alcarás; orientador: Alexandre Souto Martinez. - - Ribeirão Preto, 2023.

45 f. : il.

Tese (Doutorado) - - Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto, Universidade de São Paulo, 2023.

Inclui Bibliografia.

1. Metamateriais acústicos 2. Espalhamento acústico 3. Campos internos

Dedico esse estudo aos meus queridos pais.

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Alexandre Souto Martinez, pela orientação e incondicional apoio, suporte e crítica ao longo do desenvolvimento desse estudo.

Ao meu ex-orientador de Iniciação Científica, Prof. Dr. Marcelo Mulato, pela amizade e apoio ao desenvolvimento científico.

Aos meus colegas de laboratório, bem como aos amigos presentes no Departamento de Física, pelo constante apoio, companhia e sugestões feitas nos últimos dois anos.

Aos professores do Programa de Física Aplicada à Medicina e Biologia, pelo estímulo ao pensamento crítico e orientação ao longo das disciplinas cursadas.

A todo o Departamento de Física, pelos suporte dado à pesquisa.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), pelo apoio financeiro.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

ALCARÁS, J. R. **Metamateriais acústicos: campos internos e teoria de espalhamento.** 2023. 45 f. Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada à Medicina e Biologia) - Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto, Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto, 2023.

As propriedades de meios contínuos são de grande interesse das ciências e engenharias por permitirem o desenvolvimento de materiais com propriedades ótimas no desempenho de determinadas funções. Nesse sentido, metamateriais são aqueles que, em uma escala microscópica, possuem geometrias e configurações não encontradas na natureza espontaneamente, porém, em uma escala macroscópica, apresentam-se como materiais contínuos com propriedades físicas não convencionais, como índices de refração negativos e anomalias em coeficientes de absorção. Para propriedades acústicas, as investigações de materiais podem ser conduzidas das mais diversas formas. Entre elas, destaca-se o uso da teoria de espalhamento como metodologia para tratar da interação da onda acústica com os materiais. Buscando compreender esse tipo de interação, bem como fazer uso de parâmetros da literatura ainda não aplicados na caracterização de materiais acústicos, essa tese propõe-se a investigar os campos acústicos no interior de centros espalhadores fluidos e viscoelásticos, e tratar de cenários aplicáveis para a engenharia de metamateriais. É um estudo de base, majoritariamente analítico, que se sustenta na proposta de fornecer um arcabouço de trabalho para desenvolvimentos aplicáveis com diferentes fluidos e materiais viscoelásticos. Nas investigações, observaram-se regimes de ressonâncias entre as ondas incidentes e os objetos espalhadores para geometrias esféricas e cilíndricas de meios fluidos, o que caracteriza-se pelo armadilhamento de números inteiros de comprimentos de onda no interior do objeto. Foram considerados exemplos de espalhamento simples em cenários envolvendo fluidos e materiais viscoelásticos, especialmente os que são tratados pelo modelo de Kelvin-Voigt, e comparadas as principais diferenças entre esses meios no que diz respeito à propagação de ondas acústicas. Foram definidas e investigadas, principalmente, as médias temporais da energia acústica e da densidade de momento de spin acústico depositados durante a interação de ondas planas incidentes nesses materiais. Conclui-se, por esse estudo, que as grandezas internas ao centro espalhador consideradas podem ser úteis no desenvolvimentos de materiais e metamateriais, e espera-se que, como perspectiva de continuação do estudo, as análises aqui discutidas possam ser investigadas experimentalmente e ainda mais a fundo por uma perspectiva numérica.

Palavras-chave: 1. Metamateriais acústicos 2. Espalhamento acústico 3. Campos internos

Abstract

ALCARÁS, J. R. **Acoustic metamaterials: internal fields and scattering theory**. 2023. 45 f. Thesis (Ph.D. - Postgraduate program in Physics Applied to Medicine and Biology) - Faculty of Philosophy, Sciences and Letters, University of São Paulo, Ribeirão Preto, 2023.

Continuous media properties are of great interest to science and engineering as they allow the development of materials with optimal properties to perform certain applications. In this sense, metamaterials are those that, on a microscopic scale, have geometries and configurations that are not spontaneously found in nature, however, on a macroscopic scale, present themselves as continuous materials with unconventional properties, such as negative refractive indices and absorption coefficients anomalies. For acoustic properties, material investigations can be conducted in many different ways. Among them, the use of scattering theory stands out as a methodology to deal with the interaction of the acoustic wave with the materials. Seeking to understand this type of interaction, as well as making use of literature parameters not yet applied in the characterization of acoustic materials, this thesis proposes to investigate the acoustic fields inside fluid and viscoelastic scattering centers, and to deal with applicable scenarios for the metamaterial engineering. It is a basis study, mostly analytical, which is based on the proposal to provide a working framework for applicable developments with different fluids and viscoelastic materials. In the investigations, resonance regimes were observed between the incident waves and the scattering objects for spherical and cylindrical geometries of fluid media, which are characterized by the trapping of integer numbers of wavelengths inside the object. Examples of single scattering in scenarios involving fluids and viscoelastic materials were considered, especially those treated by the Kelvin-Voigt model, and the main differences between these media were compared with regard to the propagation of acoustic waves. Mainly, the time averages of acoustic energy and acoustic spin density deposited during the interaction of incident plane waves on these materials were defined and investigated. It is concluded from this study that the internal quantities to the scattering center considered can be useful in the development of materials and metamaterials, and it is expected that, as a perspective for the continuation of the study, the analyzes discussed here can be investigated experimentally and even further in depth from a numerical perspective.

Key-words: 1. Acoustic metamaterials 2. Acoustic scattering 3. Internal fields

Lista de Figuras

- 3.1 Ilustração de uma situação de ressonância em um cenário de espalhamento envolvendo fluidos newtonianos, esquematizada com a visualização das frentes de onda representadas pelas barras contínuas. Uma onda incidente, ao penetrar no centro espalhador, pode sofrer armadilhamento em seu interior, como ilustrado. Note a diferença nos comprimentos de onda das ondas incidente, interna e espalhada. 20
- 3.2 Diagrama representando o fenômeno de espalhamento simples de uma onda plana, viajando no sentido crescente do eixo z , por uma esfera em um cenário fluido-fluido. A onda incidente viaja em um fluido newtoniano caracterizado por sua densidade ρ_0 e compressibilidade β_0 , com comprimento de onda λ_0 e encontra, em seu caminho, uma esfera fluida, de raio a , com densidade ρ_1 e compressibilidade β_1 , pela qual será espalhada. 23
- 3.3 Representação esquemática do sistema de coordenadas esférico. 24
- 3.4 Integral $I_\ell^{(S)}(mx_1)$ em função do parâmetro de tamanho $x_0 = k_0a$ para $\ell = 1, 2, 3, 4$. Note que, a medida que ℓ cresce, os picos mais altos diminuem. Além disso, $|I_\ell^{(S)}(mx_0)| \ll 1$ a medida em que x_0 cresce. Para esse cálculo numérico, foi considerado $m = 1522/343$, exemplo de uma esfera de ar imersa no oceano. 28
- 3.5 Médias temporais das energias potenciais e cinéticas em função do parâmetro de tamanho $x_0 = k_0a$ para uma esfera de ar imersa no oceano. À esquerda: limite de pequenas esferas (também chamado de limite de Rayleigh), $0 \leq x_0 \leq 0.1$; à direita: região $0.1 \leq x_0 \leq 10$. Note que, no limite de Rayleigh, a energia potencial é maior do que a energia cinética e que $\langle W_K \rangle \rightarrow \langle W_P \rangle$ conforme x_0 cresce. 29

- 3.6 Médias temporais das energias potenciais e cinéticas em função do parâmetro de tamanho $x_0 = k_0 a$ para uma esfera de ar imersa no oceano. À esquerda: limite de pequenas esferas, $0 \leq x_0 \leq 0.1$; à direita: região $0.1 \leq x_0 \leq 10$. Note que, no limite de Rayleigh, a energia potencial é maior do que a energia cinética e que $\langle W_K \rangle \rightarrow \langle W_P \rangle$ conforme x_0 cresce. Diferentemente do exemplo anterior, não são verificados comportamentos ressonantes para essa combinação de meios. 30
- 3.7 Médias temporais das energias potenciais e cinéticas em função do parâmetro de tamanho $x_0 = k_0 a$ para uma esfera de ar imersa no oceano. À esquerda: limite de pequenas esferas, $0 \leq x_0 \leq 0.1$; à direita: região $0.1 \leq x_0 \leq 10$. Note que, no limite de Rayleigh, a energia potencial é maior do que a energia cinética e que $\langle W_K \rangle \rightarrow \langle W_P \rangle$ conforme x_0 cresce. Note que, novamente, como as densidades dos meios são muito próximas, há o surgimento de ressonâncias. . . . 31
- 3.8 Diagrama representando o fenômeno de espalhamento simples de uma onda plana, viajando no sentido crescente do eixo x , por um cilindro em um cenário fluido-fluido. A onda incidente viaja em um fluido newtoniano caracterizado por sua densidade ρ_0 e compressibilidade β_0 , com comprimento de onda λ_0 e encontra, em seu caminho, um cilindro fluido, de raio a e comprimento $L \gg a$, com densidade ρ_1 e compressibilidade β_1 , pelo qual será espalhada. 33
- 3.9 Representação esquemática do sistema de coordenadas cilíndrico. . . . 33
- 3.10 Integral $I_\ell^{(C)}(mx_0)$ em função do parâmetro de tamanho $x_0 = k_0 a$ para $\ell = 1, 2, 3, 4$. Note que os picos mais altos de $I_\ell^{(C)}$ caem a medida que ℓ cresce. Além disso, $|I_\ell^{(C)}(x_1)| \ll 1$ quando x_0 cresce. Foi considerado $m = 1522/343$, em que trata-se do espalhamento por um cilindro de ar imerso no oceano. 36

- 3.11 Médias temporais das energias potenciais e cinéticas em função do parâmetro de tamanho $x_0 = k_0 a$ para um cilindro longo de ar imersa no oceano. À esquerda: limite de cilindros finos (limite de Rayleigh), $0 \leq x_0 \leq 0.1$; à direita: região $0.1 \leq x_0 \leq 10$. Note que, no limite de Rayleigh, a energia potencial é maior do que a energia cinética e que $\langle W_K \rangle \rightarrow \langle W_P \rangle$ conforme x_0 cresce. 36
- 3.12 Médias temporais das energias potenciais e cinéticas em função do parâmetro de tamanho $x_0 = k_0 a$ para um cilindro longo de petróleo imerso no oceano. À esquerda: limite de cilindros finos (limite de Rayleigh), $0 \leq x_0 \leq 0.1$; à direita: região $0.1 \leq x_0 \leq 10$. Note que, no limite de Rayleigh, a energia potencial é maior do que a energia cinética e que $\langle W_K \rangle \rightarrow \langle W_P \rangle$ conforme x_0 cresce. Diferentemente da combinação de meios anterior, nesse caso não são observadas ressonâncias no centro espalhador. 38
- 3.13 Comparativo das energias potenciais adimensionais para esfera e cilindro (objetos de ar imersos na água do mar). Note a diferença de fase entre esferas e cilindros, corroborando o resultado esperado pela análise das funções de Bessel envolvidas. 39
- 3.14 Diagrama representando o fenômeno de espalhamento simples de uma onda plana, viajando no sentido crescente do eixo z , por uma casca esférica em um cenário fluido-fluido. A onda incidente viaja em um fluido newtoniano caracterizado por sua densidade ρ_0 e compressibilidade β_0 , com comprimento de onda λ_0 e encontra, em seu caminho, uma casca esférica, de raio interno a e externo b , com densidade ρ_1 e compressibilidade β_1 no núcleo, ρ_2 e β_2 na casca, pela qual será espalhada. 40
- 4.1 Diagrama representando o vetor deslocamento \vec{u} com relação à posição de um ponto no interior de um corpo elástico antes, \vec{r} , e depois, \vec{r}' , de uma deformação. 48

- 4.2 Ilustração da deformação de um corpo elástico e como mudam as distâncias que medem dois pontos antes e depois da deformação. A forma tracejada representa o corpo antes da deformação, enquanto a densa representa ele depois. Dois pontos, que antes da deformação distavam $d\ell$ passam a distar $d\ell'$ 49
- 4.3 Representação em forma de circuito mecânico de um sólido sujeito a uma tensão σ modelado por Kelvin-Voigt. Nesse modelo, a mola é responsável pela resposta elástica, enquanto o pistão é responsável pela resposta viscosa. 52
- 4.4 Representação em forma de circuito mecânico de um sólido sujeito a uma tensão σ no modelo de Maxwell. Nele, assim como com Kelvin-Voigt, a mola é responsável pela resposta elástica, enquanto o pistão é responsável pela resposta viscosa, mas a mudança na associação trás diferenças para os tipos de respostas. 53
- 4.5 Representação em forma de circuito mecânico de um sólido sujeito a uma tensão σ nos modelos de Burgers (esquerda) e Wiechert (direita). Note que os modelos de Maxwell e Burgers são casos particulares do modelo de Wiechert. 53
- 4.6 Representação em forma de circuito mecânico de um sólido sujeito a uma tensão σ no modelo de Zener. 54

Sumário

Lista de Figuras	xi
1 Introdução	1
2 Energia e momento transferidos em fluidos	5
2.1 Formalismo	6
2.2 Média temporal da densidade de energia, $\langle w \rangle$	8
2.3 Média temporal da densidade de momento cinético, $\langle \vec{\Pi} \rangle$	9
2.4 Média temporal das densidades de momentos angulares, $\langle \vec{\ell} \rangle$ e $\langle \vec{s} \rangle$	10
2.5 Média temporal da densidade de momento canônico, $\langle \vec{P} \rangle$	11
2.6 Propriedades dinâmicas na forma integral	13
2.7 Comparações com o Eletromagnetismo Clássico	14
3 Espalhamento fluido-fluido	15
3.1 Potencial escalar: equação de onda	16
3.2 Problema de espalhamento	19
3.3 Espalhamento por uma esfera	23
3.4 Espalhamento por um cilindro	32
3.5 Comparação entre esferas e cilindros	38
3.6 Espalhamento por uma casca esférica	39
4 Sólidos elásticos e viscoelásticos	47
4.1 Corpos elásticos	48
4.2 Modelos viscoelásticos	52
4.3 Modelo de Kelvin-Voigt	54
4.4 Espalhamento por uma esfera viscoelástica	57

5	Conclusões e perspectivas	63
	Apêndice 1 - Limites de pequenos e grandes centros espalhadores	67
1.1	Pequenas esferas	67
1.2	Grandes esferas	67
1.3	Pequenos cilindros	68
1.4	Grandes cilindros	68
	Referências	69

Introdução

A manipulação de ondas pelo uso de materiais é uma tarefa observada na natureza com frequência, especialmente para ondas eletromagnéticas: as lentes biológicas presentes nas estruturas visuais de diferentes animais são exemplos de materiais capazes de manipular a luz visível para convenientes geometrias. Para ondas acústicas, o mesmo pode ser observado em algumas organelas de certos peixes, usadas com o intuito de focalizar o som para sua ecolocalização [1].

Nesse sentido, as pesquisas de novos materiais que possuam propriedades diferentes dos naturais são tópicos em voga na comunidade científica [2–4]. Os metamateriais, em específico, são materiais artificiais desenvolvidos com a manipulação microscópica de estruturas que, no *bulk*, comportam-se como materiais contínuos com propriedades não convencionais [1].

O estudo de ondas manipuláveis por estruturas periódicas iniciou-se há décadas [5, 6], e a engenharia de cristais fotônicos [7] e fonônicos [8] trouxe luz para o tratamento de metamateriais nessa manipulação. Na acústica, em particular, o primeiro metamaterial constituía-se de esferas envoltas em borracha, buscando produzir estruturas localmente ressonantes muito abaixo do comprimento da onda incidente [1, 9].

Nesse estudo, investigamos materiais acústicos que possam, eventualmente, ser utilizados no desenvolvimento e aplicação de metamateriais com diferentes propriedades físicas, como módulos de *bulk* negativos [10] e atenuadores sonoros construídos a partir de estruturas não convencionais [11–13]. Além dessas propriedades, os materiais investigados podem, futuramente, ser usados como controladores acústicos, como proposto pela Ref. [14]. Para essa investigação, fazemos o uso da teoria

de espalhamento como metodologia, em que ondas viajantes são desviadas de sua trajetória inicial [15]. Esse processo de desvio é possivelmente acompanhado pela absorção parcial da onda no interior do centro espalhador. Na prática, é de grande interesse o entendimento dos materiais usados como espalhadores, para que otimizem a absorção ou o espalhamento [16, 17].

Problemas de espalhamento são usados nas mais diferentes áreas da Física: Eletromagnetismo, Acústica, Mecânicas Clássica e Quântica são alguns dos ramos que investigam dinâmicas de espalhamento [18]. A versatilidade desses problemas, tanto no caso direto quanto no inverso, dá a esse tratamento vastas aplicações. O problema direto é aquele em que prediz-se o comportamento do campo espalhado pelas configurações do campo incidente e da estrutura espalhadora; o problema inverso trata, como o nome sugere, dos campos incidente e espalhado na predição do centro espalhador [19].

Na acústica, o problema direto de espalhamento foi investigado pela primeira vez na década de 1950 por Anderson [20], tratando do espalhamento do som por esferas fluidas. A partir dele, espalhadores sólidos [21], cascas - os chamados sistemas *core-shell*- elásticas [22, 23], cilindros fluidos [24] e materiais viscoelásticos [25] foram alguns dos tópicos investigados, além de muitas outras estruturas [26, 27]. Além desses cenários, contextos com aplicações relevantes foram estudados envolvendo regimes ressonantes em materiais elásticos [28–30] e viscoelásticos [31].

O tratamento formal de ondas acústicas, nesse contexto, depende da natureza do meio considerado. Elas comportam-se de formas distintas em fluidos, sólidos elásticos e sólidos rígidos. Em fluidos, as ondas acústicas são definidas como ondas de pressão longitudinais, descritas via um campo escalar [32]. Objetos elásticos requerem o uso da teoria da elasticidade [15] para a descrição e formalização de deformações e tensões no material, para a final obtenção de potenciais que descrevem a onda acústica. Em sólidos no geral, as ondas acústicas podem possuir módulos transversais de vibração, chamados de ondas de cisalhamento. Em sólidos rígidos, em virtude da estrutura de redes de átomos e estruturas cristalinas, é mais comum e conveniente o tratamento formal via fônons, isto é, quantizações da rede cristalina.

No que diz respeito a problemas de espalhamento de ondas acústica, cenários chamados “fluido-fluido”, ou seja, aqueles em que os meios circundante e interno

ao centro espalhador são fluidos, possuem vastas aplicações. Problemas envolvendo bolhas, como bolhas de água imersas em óleo [33, 34], ou de óleo em água [35] são modeláveis por essa dinâmica. Além disso, certos silicones emborrachados imersos em água também são tratáveis nesse modelo [36, 37], pois nesse cenário, a componente de cisalhamento das ondas acústicas no silicone é desprezível se comparada à componente longitudinal.

É com essa base que intuímos, nessa tese, propor a descrição de materiais usados em cenários de espalhamento por grandezas calculáveis por meio de seus campos internos, transferidos durante o espalhamento. As grandezas escolhidas aqui são a energia transferida e a densidade de momento angular de spin acústico transferido durante o processo de espalhamento. As investigações foram consideradas para diferentes estruturas de espalhamento simples: esfera, cilindro e *core-shell* fluidos; e esfera viscoelástica. Com isso, buscamos propriedades dessas grandezas utilizáveis na otimização do isolamento ou propagação acústica.

Essa monografia está organizada da seguinte forma: no Capítulo 2, lidamos com as definições das principais grandezas de interesse no estudo, as médias temporais de energia e momento transferidos durante os processos de espalhamento. Definimos, com base nas equações de conservação e na literatura, as grandezas dinâmicas envolvidas na propagação acústica e comparamos aos resultados similares do Eletromagnetismo Clássico, traçando um paralelo entre os campos dessas áreas. No Capítulo 3, descrevemos cenários de espalhamento do tipo fluido-fluido, isto é, em que o centro espalhador e o meio que o circunda são ambos fluidos newtonianos. Lidamos com o formalismo para o tratamento desse problema, com as principais grandezas usadas nas descrições matemáticas dos entes físicos envolvidos na propagação do som em fluidos e, então, tratamos do espalhamento simples por uma esfera, por um cilindro e por uma casca esférica. Calculamos, analiticamente para todos os casos, a média temporal da energia e da densidade de momento angular de spin depositadas durante a interação e investigamos a existência de ressonâncias para os dois primeiros com o auxílio de cálculos numéricos. O Capítulo 4 preocupa-se com o estudo da propagação de ondas acústicas em materiais elásticos e viscoelásticos, definindo as grandezas que são usadas nesses meios para descrever tensões e deformações. Calculamos, reproduzindo resultados da literatura, as equações de

Helmholtz para potenciais escalares usados para descrever as ondas acústicas em meios viscoelásticos, lidando de forma específica com o modelo de Kelvin-Voigt e sua versão fracionária. Por fim, discutimos o que a literatura da área trás no que diz respeito à quantidade de energia associada a materiais viscoelásticos. O Capítulo 5 conclui o estudo, trazendo luz às principais contribuições desse estudo para a comunidade científica da área, bem como as perspectivas que tais resultados possibilitam para o futuro.

Energia e momento transferidos em fluidos

Na dinâmica de fenômenos de espalhamento de ondas, diversas grandezas podem ser usadas no estudo da interação. Historicamente [20, 21, 38–40], seções de choque são usadas para estudar as radiações envolvidas no espalhamento, bem como na predição dos comportamentos das ondas. Elas são, no entanto, grandezas majoritariamente determinadas pelo campo de radiação espalhado, de modo a não serem práticas na caracterização direta do centro espalhador.

Com isso em mente, esse capítulo preocupa-se com a definição formal de duas grandezas físicas envolvidas no espalhamento, obtidas por meio do campo de radiação transferido no processo de espalhamento de uma onda acústica viajando, a priori, em um fluido newtoniano, e sendo espalhada por um objeto composto também por um fluido de mesma natureza. Inicialmente, define-se o formalismo de ondas acústicas em fluidos a ser usado no estudo, com as variáveis e parâmetros envolvidos nos problemas. Então, tratam-se das grandezas físicas de interesse nesse estudo: a primeira delas, a média temporal da energia transferida, é definida usando o formalismo da dinâmica de fluidos; a segunda, a média temporal da densidade de spin acústico transferido, é trazida para a luz com a definição das médias temporais dos momentos angulares transferidos no processo de interação. Por fim, traça-se um paralelo entre Acústica e Eletromagnetismo no que diz respeito às grandezas consideradas, justificando-se a aparição ou omissão de termos de acordo com a área.

2.1 Formalismo

Considere um fluido denso e compressível, caracterizado por sua densidade de massa ρ e compressibilidade $\beta = 1/B$ (B é o módulo de massa do fluido). Um fluido é dito newtoniano quando seu módulo de massa pode ser expresso por $B = \rho c^2$, em que c é a velocidade de uma onda acústica que viaja nele.

Nesse fluido, considere a propagação de uma onda acústica de velocidade c . Nesse cenário, essa onda é descrita por dois campos: um campo de pressão, escalar, denotado por $p(\vec{r}, t)$ (aqui, \vec{r} denota o vetor posição e t é a variável real usada para o tempo); e um campo de velocidades, vetorial, denotado por $\vec{v}(\vec{r}, t)$. Fisicamente, o campo $p(\vec{r}, t)$ é a diferença de pressão induzida no meio pela passagem da frente de onda, enquanto o campo vetorial $\vec{v}(\vec{r}, t)$ é a mudança na velocidade de grupo média das partículas que constituem o fluido. Formalmente, ao considerar que cada partícula que constitui o fluido tem massa m_i e velocidade $\vec{v}_i(\vec{r}, t)$, em um volume \mathcal{V} suficientemente pequeno para englobar uma coleção de N partículas, mas muito menor do que o volume total do recipiente ocupado por esse fluido, a velocidade de grupo $\vec{v}(\vec{r}, t)$ é definida por

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\rho \mathcal{V}} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i(\vec{r}, t). \quad (2.1)$$

Leis de conservação de energia e momento do fluido, bem como as leis da termodinâmica para o processo de propagação sonora, são capazes de relacionar os campos $p(\vec{r}, t)$ e $\vec{v}(\vec{r}, t)$. Para isso, considera-se que o processo de transporte da onda acústica é, termodinamicamente, adiabático, isto é, ocorre tão rapidamente que não existem trocas de calor com o meio. Isso resulta nas relações

$$\nabla \cdot \vec{v} = -\beta \frac{\partial p}{\partial t}; \quad (2.2a)$$

$$\nabla p = -\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}. \quad (2.2b)$$

Além delas, uma terceira relação pode ser produzida ao tomar o divergente do produto $p\vec{v}$, resultando em uma equação similar ao teorema de Poynting para o Eletromagnetismo [41],

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\beta |p(\vec{r}, t)|^2}{2} + \frac{p |\vec{v}(\vec{r}, t)|^2}{2} \right] + \nabla \cdot [p(\vec{r}, t)\vec{v}(\vec{r}, t)] = 0, \quad (2.3)$$

onde as dependências de p e \vec{v} em \vec{r} e t foram deixadas explícitas para evidenciar que a Eq. (2.3) é válida para qualquer forma dos campos considerados. O termo dentro do primeiro colchete é definido como a densidade de energia acústica do campo (simbolizada por w), enquanto o termo no segundo colchete é a densidade de fluxo de energia, ou c^2 vezes a densidade de momento cinético da onda (simbolizado por $\vec{\Pi}$). Nesse sentido, a Eq. (2.3) é uma espécie de lei de conservação de energias na forma diferencial.

Buscando lidar com aplicações realistas, porém de suficiente simplicidade analítica, a dependência temporal das ondas acústicas foi escolhida como harmônica monocromática, de frequência ω . Trata-se de um cenário em que o controle da fonte emissora permite que uma única frequência de radiação seja emitida. Esse processo transforma os campos de pressão e de velocidade de acordo com as seguintes relações:

$$p(\vec{r}, t) \longrightarrow \text{Re} \left[p(\vec{r}) e^{-i\omega t} \right]; \quad (2.4a)$$

$$\vec{v}(\vec{r}, t) \longrightarrow \text{Re} \left[\vec{v}(\vec{r}) e^{-i\omega t} \right], \quad (2.4b)$$

em que “ i ” denota a unidade imaginária e os campos $p(\vec{r})$ e $\vec{v}(\vec{r})$ são campos complexos usados na descrição da geometria espacial da onda. Essa hipótese simplifica as Eqs. (2.2) para

$$\nabla \cdot \vec{v} = i\beta\omega p; \quad (2.5a)$$

$$\nabla p = i\rho\omega\vec{v}, \quad (2.5b)$$

em que as dependências explícitas de p e \vec{v} no vetor posição foram omitidas. Ao considerar ondas planas (o que faremos em alguns capítulos ao longo desse estudo), $\nabla \rightarrow i\vec{k}$ e $\omega^2 = k^2 c^2 = k^2 / (\rho\beta)$, o que resulta em $\vec{k} \times \vec{v} = \vec{0}$, resultado característico para essa geometria de frente de onda.

As principais propriedades dinâmicas de campos acústicos são energia, momento e momento angular. Nas seções seguintes, iremos lidar com cada uma dessas propriedades, obtendo fórmulas usadas para suas determinações.

2.2 Média temporal da densidade de energia, $\langle w \rangle$

Considerando um campo acústico arbitrário, descrito por $p(\vec{r}, t)$ e $\vec{v}(\vec{r}, t)$, a densidade de energia acústica w é, de acordo com a Eq. (2.2),

$$w = \frac{1}{2} [\beta |p(\vec{r}, t)|^2 + \rho |\vec{v}(\vec{r}, t)|^2]. \quad (2.6)$$

Como foi considerado anteriormente, ao lidar com ondas harmônicas monocromáticas de frequência angular ω , é possível determinar uma média temporal da densidade de energia, denotada por $\langle w \rangle$, calculada por

$$\begin{aligned} \langle w \rangle &= \frac{1}{2\tau} \int_0^\tau \left\{ \beta \text{Re} [p(\vec{r})e^{-i\omega t}]^2 + \rho \text{Re} [\vec{v}(\vec{r})e^{-i\omega t}]^2 \right\} dt, \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \beta \langle \text{Re} [p(\vec{r})e^{-i\omega t}]^2 \rangle + \rho \langle \text{Re} [\vec{v}(\vec{r})e^{-i\omega t}]^2 \rangle \right\}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

em que os *brackets* $\langle \rangle$ serão usados, nesse estudo, para denotar a integral referente à média temporal. Explicitamente, para uma função $f(t)$, a notação $\langle f(t) \rangle$ simboliza

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t) dt. \quad (2.8)$$

Para o cálculo dessas integrais, note que para $z, y \in \mathbb{C}$, $\text{Re}[zy] = \text{Re}[z]\text{Re}[y] - \text{Im}[z]\text{Im}[y]$. Portanto, podemos calcular a parte real da componente de pressão como

$$\begin{aligned} \text{Re} [p(\vec{r})e^{-i\omega t}]^2 &= \{ \text{Re} [p(\vec{r})] \cos(\omega t) + \text{Im} [p(\vec{r})] \sin(\omega t) \}^2 \\ &= \text{Re} [p(\vec{r})]^2 \cos^2(\omega t) + \text{Im} [p(\vec{r})]^2 \sin^2(\omega t) + \\ &\quad + 2\text{Re} [p(\vec{r})] \text{Im} [p(\vec{r})] \cos(\omega t) \sin(\omega t). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Com isso, tomar a média temporal resulta em

$$\begin{aligned} \langle \text{Re} [p(\vec{r})e^{-i\omega t}]^2 \rangle &= \text{Re} [p(\vec{r})]^2 \langle \cos^2(\omega t) \rangle + \text{Im} [p(\vec{r})]^2 \langle \sin^2(\omega t) \rangle + \\ &\quad + 2\text{Re} [p(\vec{r})] \text{Im} [p(\vec{r})] \langle \cos(\omega t) \sin(\omega t) \rangle, \end{aligned} \quad (2.10)$$

de modo que as integrais, agora, são suficientemente simples para serem resolvidas. Elas produzem $\langle \cos^2(\omega t) \rangle = \langle \sin^2(\omega t) \rangle = 1/2$ e $\langle \cos(\omega t) \sin(\omega t) \rangle = 0$. Portanto,

$$\langle \text{Re} [p(\vec{r})e^{-i\omega t}]^2 \rangle = \frac{1}{2} |p(\vec{r})|^2. \quad (2.11)$$

Com a mesma estratégia, obtém-se

$$\langle \text{Re} [\vec{v}(\vec{r})e^{-i\omega t}]^2 \rangle = \frac{1}{2} |\vec{v}(\vec{r})|^2, \quad (2.12)$$

o que resulta na média temporal da densidade de energia acústica como

$$\langle w \rangle = \frac{1}{4} [\beta |p(\vec{r})|^2 + \rho |\vec{v}(\vec{r})|^2]. \quad (2.13)$$

2.3 Média temporal da densidade de momento cinético, $\langle \vec{\Pi} \rangle$

Para um campo acústico arbitrário, descrito pelo campo de pressão $p(\vec{r}, t)$ e pelo campo de velocidades $\vec{v}(\vec{r}, t)$, a densidade de momento cinético, $\vec{\Pi}$, vezes o quadrado da velocidade do som é, de acordo com a Eq. (2.2),

$$c^2 \vec{\Pi} = p(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t). \quad (2.14)$$

É importante ressaltar que $c^2 \vec{\Pi}$ é a densidade de fluxo de energia, de acordo com a equação de conservação, Eq. (2.2). A tomada da média temporal de $\vec{\Pi}$ é feita, nesse estudo, mediante a consideração da dependência temporal harmônica monocromática dos campos. Com isso, a média temporal da densidade de momento cinético, denotada por $\langle \vec{\Pi} \rangle$, é

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{c^2 \tau} \int_0^\tau \left\{ \text{Re} [p(\vec{r}) e^{-i\omega t}] \text{Re} [\vec{v}(\vec{r}) e^{-i\omega t}] \right\} dt. \quad (2.15)$$

Para o cálculo dessa integral, devemos separar as partes reais e imaginárias das variáveis complexas envolvidas em cada colchete, de acordo com $\text{Re}[zy] = \text{Re}[z]\text{Re}[y] - \text{Im}[z]\text{Im}[y]$, para $z, y \in \mathbb{C}$. Esse processo produz termos que têm $\sin^2(\omega t)$, $\cos^2(\omega t)$ ou $\sin(\omega t) \cos(\omega t)$. Os dois primeiros produzem integrais não nulas, enquanto os termos mistos (pela ortogonalidade das funções seno e cosseno) resultam em integrais iguais a zero. Portanto, restam apenas os termos quadrados, que produzem

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{c^2} \left\{ \text{Re} [p(\vec{r})] \text{Re} [\vec{v}(\vec{r})] \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \cos^2(\omega t) dt + \text{Im} [p(\vec{r})] \text{Im} [\vec{v}(\vec{r})] \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \sin^2(\omega t) dt \right\}, \quad (2.16)$$

na qual ambas as integrais produzem o mesmo fator 1/2. Portanto,

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2c^2} \{ \text{Re} [p(\vec{r})] \text{Re} [\vec{v}(\vec{r})] + \text{Im} [p(\vec{r})] \text{Im} [\vec{v}(\vec{r})] \}. \quad (2.17)$$

Note que $\text{Re} [p(\vec{r})] = \text{Re} [p^*(\vec{r})]$, onde $p^*(\vec{r})$ denota o complexo conjugado de $p(\vec{r})$; e $\text{Im} [p(\vec{r})] = -\text{Im} [p^*(\vec{r})]$. Logo, é possível reescrever a Eq. (2.17) como

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2c^2} \{ \text{Re} [p^*(\vec{r})] \text{Re} [\vec{v}(\vec{r})] - \text{Im} [p^*(\vec{r})] \text{Im} [\vec{v}(\vec{r})] \}, \quad (2.18)$$

que pode ser compactado, produzindo a expressão para a média temporal do momento cinético acústico em um fluido,

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2c^2} \text{Re} [p^*(\vec{r}) \vec{v}(\vec{r})]. \quad (2.19)$$

2.4 Média temporal das densidades de momentos angulares, $\langle \vec{\ell} \rangle$ e $\langle \vec{s} \rangle$

Considere a média temporal da densidade de momento cinético, $\langle \vec{\Pi} \rangle$, de uma onda acústica harmônica monocromática, viajando em um fluido caracterizado por sua densidade ρ , com velocidade c e frequência angular ω , apresentada na Eq. (2.19). Para uma onda harmônica de frequência angular ω , a Eq. (2.5a) permite escrever o campo de pressão em função do campo de velocidades como

$$p(\vec{r}) = -\frac{i\rho c^2}{\omega} \nabla \cdot \vec{v}(\vec{r}), \quad (2.20)$$

de modo que $p^*(\vec{r})$ pode ser reescrito na Eq. (2.19), omitindo as dependências em \vec{r} para descarregar a notação, produzindo

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2c^2} \text{Re} \left[\frac{i\rho c^2}{\omega} (\nabla \cdot \vec{v}^*) \vec{v} \right], \quad (2.21)$$

ou, ainda,

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{\rho}{2\omega} \text{Im} [(\nabla \cdot \vec{v}) \vec{v}^*]. \quad (2.22)$$

Fazendo, agora, uso da identidade vetorial

$$\begin{aligned} \text{Im} [\nabla \times (\vec{v}^* \times \vec{v})] &= \text{Im} [\vec{v}^* (\nabla \cdot \vec{v})] - \text{Im} [\vec{v} (\nabla \cdot \vec{v}^*)] + \text{Im} [(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}^*] - \text{Im} [(\vec{v}^* \cdot \nabla) \vec{v}] \\ &= 2\text{Im} [\vec{v}^* (\nabla \cdot \vec{v})] + 2\text{Im} [(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}^*] \\ &= 2\text{Im} [\vec{v}^* (\nabla \cdot \vec{v})] - 2\text{Im} [(\vec{v}^* \cdot \nabla) \vec{v}], \end{aligned} \quad (2.23)$$

podemos separar a porção imaginária da Eq. (2.22) em duas partes,

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \underbrace{\frac{\rho}{2\omega} \text{Im} [(\vec{v}^* \cdot \nabla) \vec{v}]}_{=\langle \vec{\Pi}_o \rangle} + \underbrace{\frac{\rho}{4\omega} \text{Im} [\nabla \times (\vec{v}^* \times \vec{v})]}_{=\langle \vec{\Pi}_s \rangle}. \quad (2.24)$$

As quantidades $\langle \vec{\Pi}_o \rangle$ e $\langle \vec{\Pi}_s \rangle$ são usadas, respectivamente, para calcular as médias temporais das densidades de momento angular orbital e de spin. A expressão da média temporal da densidade de momento angular orbital é dada por

$$\langle \vec{\ell} \rangle = \vec{r} \times \langle \vec{\Pi}_o \rangle, \quad (2.25)$$

enquanto a média temporal da densidade de momento angular de spin é

$$\langle \vec{s} \rangle = \vec{r} \times \langle \vec{\Pi}_s \rangle. \quad (2.26)$$

É útil, nesse estudo, explicitar $\langle \vec{s} \rangle$ em termos dos campos p e \vec{v} . Para isso, fazemos

$$\begin{aligned} \langle \vec{s} \rangle &= \vec{r} \times \langle \vec{\Pi}_s \rangle \\ &= \frac{\rho}{2\omega} \vec{r} \times \left\{ \frac{1}{2} \text{Im} [\nabla \times (\vec{v}^* \times \vec{v})] \right\} \\ &= \frac{\rho}{2\omega} \text{Im} [\vec{v}^* \times \vec{v}]. \end{aligned} \quad (2.27)$$

2.5 Média temporal da densidade de momento canônico, $\langle \vec{P} \rangle$

Fazendo uso de um formalismo próximo ao da mecânica quântica, é possível calcular o valor esperado do operador momento $\vec{P} = -i\nabla$ para a onda acústica. Isso produz, para uma onda acústica harmônica monocromática de frequência angular ω , viajando por um fluido newtoniano de densidade ρ e compressibilidade β , a média temporal da densidade de momento canônico da forma [42]

$$\langle \vec{P} \rangle = \frac{1}{4\omega} \text{Im} [\beta p^* \nabla p + \rho \vec{v}^* \cdot (\nabla) \vec{v}], \quad (2.28)$$

onde as dependências de $p = p(\vec{r})$ e $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$ foram omitidas para descarregar a notação, e o produto $\vec{v}^* \cdot (\nabla) \vec{v} = (\vec{v}^* \cdot \nabla) \vec{v}$ é o vetor cujas coordenadas são calculadas por $[\vec{v}^* \cdot (\nabla) \vec{v}]_i = \sum_j v_j^* \nabla_i v_j$.

Iremos, agora, determinar a relação entre $\langle \vec{P} \rangle$, $\langle \vec{\Pi} \rangle$ e $\langle \vec{s} \rangle$ em ondas acústicas (no meio fluido considerado). Para tal, tomamos o rotacional de $\langle \vec{s} \rangle$:

$$\begin{aligned} \nabla \times \langle \vec{s} \rangle &= \frac{\rho}{2\omega} \nabla \times \text{Im} [\vec{v}^* \times \vec{v}] \\ &= \frac{\rho}{2\omega} \text{Im} [\nabla \times (\vec{v}^* \times \vec{v})], \end{aligned} \quad (2.29)$$

e usando a identidade vetorial

$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} (\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B} (\nabla \cdot \vec{A}) + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B}, \quad (2.30)$$

obtem-se

$$\nabla \times \langle \vec{s} \rangle = \frac{\rho}{2\omega} \text{Im} [\vec{v}^* (\nabla \cdot \vec{v}) - \vec{v} (\nabla \cdot \vec{v}^*) + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}^* - (\vec{v}^* \cdot \nabla) \vec{v}]. \quad (2.31)$$

Reescrevendo o divergente do campo de velocidades em termos da pressão pela Eq. (2.5a), temos

$$\nabla \times \langle \vec{s} \rangle = \frac{\rho}{2\omega} \text{Im} [i\omega\beta (p\vec{v}^* + p^*\vec{v}) + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}^* - (\vec{v}^* \cdot \nabla) \vec{v}]. \quad (2.32)$$

Usando propriedades de números complexos, somos capazes de reescrever os termos na equação. Primeiramente, note que

$$p\vec{v}^* - p^*\vec{v} = 2\text{Re}[p^*\vec{v}]; \quad (2.33)$$

além disso,

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}^* - (\vec{v}^* \cdot \nabla) \vec{v} = -2i\text{Im}[(\vec{v}^* \cdot \nabla) \vec{v}]. \quad (2.34)$$

Unindo Eqs. (2.33) e (2.34) à Eq. (2.32),

$$\nabla \times \langle \vec{s} \rangle = \frac{\rho}{2\omega} \text{Im} \{ i [2\omega\beta \text{Re}(p^*\vec{v}) - 2\text{Im}[(\vec{v}^* \cdot \nabla) \vec{v}]] \}, \quad (2.35)$$

que pode, então, ser reescrita pela propriedade $\text{Im}[iz] = \text{Re}[z]$, para $z \in \mathbb{C}$,

$$\nabla \times \langle \vec{s} \rangle = \frac{\rho}{2\omega} \text{Re} \{ 2\omega\beta \text{Re}[p^*\vec{v}] - 2\text{Im}[(\vec{v}^* \cdot \nabla) \vec{v}] \}. \quad (2.36)$$

Note, agora, que todos os argumentos da função externa Re da Eq. (2.36) são reais. Portanto, não é necessário tomar a parte real desse argumento, produzindo

$$\begin{aligned} \nabla \times \langle \vec{s} \rangle &= \frac{\rho}{2\omega} \{ 2\omega\beta \text{Re}[p^*\vec{v}] - 2\text{Im}[(\vec{v}^* \cdot \nabla) \vec{v}] \} \\ &= \beta\rho \text{Re}[p^*\vec{v}] - \frac{\rho}{\omega} \text{Im}[(\vec{v}^* \cdot \nabla) \vec{v}]. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Como $\beta\rho = c^{-2}$, o primeiro termo do lado direito da Eq. (2.37) pode ser identificado como $2\langle \vec{\Pi} \rangle$, produzindo (adicionando e subtraindo $2\langle \vec{\Pi} \rangle$ para fins calculatórios):

$$\begin{aligned} \nabla \times \langle \vec{s} \rangle &= 4\langle \vec{\Pi} \rangle - \frac{\rho}{\omega} \text{Im}[(\vec{v}^* \cdot \nabla) \vec{v}] - 2\langle \vec{\Pi} \rangle \\ &= 4\langle \vec{\Pi} \rangle - \frac{\rho}{\omega} \text{Im}[(\vec{v}^* \cdot \nabla) \vec{v}] - \beta\rho \text{Re}[p^*\vec{v}]. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Usando a Eq. (2.5b) para escrever o campo $\vec{v} = (i\omega\rho)^{-1}\nabla p$, obtemos

$$\begin{aligned} \nabla \times \langle \vec{s} \rangle &= 4\langle \vec{\Pi} \rangle - \frac{\rho}{\omega} \text{Im}[(\vec{v}^* \cdot \nabla) \vec{v}] - \beta\rho \text{Re} \left[\frac{p^*\nabla p}{i\omega\rho} \right] \\ &= 4\langle \vec{\Pi} \rangle - \frac{1}{\omega} \{ \text{Im}[\rho(\vec{v}^* \cdot \nabla) \vec{v}] - \beta \text{Re}[ip^*\nabla p] \} \\ &= 4\langle \vec{\Pi} \rangle - \frac{1}{\omega} \text{Im}[\beta p^*\nabla p + \rho(\vec{v}^* \cdot \nabla) \vec{v}] \\ &= 4\langle \vec{\Pi} \rangle - 4\langle \vec{P} \rangle. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Dessa forma, a média temporal da densidade de momento cinético pode ser expressa como a soma da média temporal da densidade de momento canônico e um quarto do rotacional da média temporal da densidade de momento de spin,

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \langle \vec{P} \rangle + \frac{1}{4} \nabla \times \langle \vec{s} \rangle. \quad (2.40)$$

Essa relação é próxima à do Eletromagnetismo que envolve o vetor de Poynting, momento canônico e momento total de spin [41], mas naquele caso, o fator que acompanha o rotacional do spin é $1/2$ ao invés de $1/4$. Trata-se de um fato direto da não contribuição do campo escalar de pressão no cálculo do momento angular de spin para ondas acústicas.

2.6 Propriedades dinâmicas na forma integral

Nessa seção, utilizamos das fórmulas estudadas nas seções anteriores para determinar formas integrais analíticas para as médias temporais das densidades de momento cinético, momento canônico e momento angular de spin. Para isso, considere a Eq. (2.27). Como, da Eq. (2.5b), $\vec{v} = (i\omega\rho)^{-1}\nabla p$, escrevemos

$$\langle \vec{s} \rangle = \frac{1}{2\rho\omega^3} \text{Im} [\nabla p^* \times \nabla p]. \quad (2.41)$$

Note que $\nabla p^* \times \nabla p = \nabla \times (p^* \nabla p)$, pois $\nabla \times (\nabla p) = \vec{0}$. Portanto,

$$\langle \vec{s} \rangle = \frac{1}{2\rho\omega^3} \nabla \times \text{Im} [p^* \nabla p], \quad (2.42)$$

o que implica que $\langle \vec{s} \rangle$ é um campo solenoidal, o qual (de acordo com o teorema de Green), possui integral nula num volume tal que p vá a zero nas bordas (de maneira geral, qualquer volume fechado com pressão que decaia suficientemente rápido). Portanto, em volumes \mathcal{V} desse tipo,

$$\int_{\mathcal{V}} \langle \vec{s} \rangle dV = \vec{0}. \quad (2.43)$$

Isso implica que as formas integrais dos momentos cinético e canônico são iguais,

$$\int_{\mathcal{V}} \langle \vec{\Pi} \rangle dV = \int_{\mathcal{V}} \langle \vec{P} \rangle dV, \quad (2.44)$$

e, para os momentos angulares integrais,

$$\int_{\mathcal{V}} \vec{r} \times \langle \vec{\Pi} \rangle dV = \int_{\mathcal{V}} \vec{r} \times \langle \vec{P} \rangle dV, \quad (2.45)$$

em que $\langle \vec{L} \rangle = \vec{r} \times \langle \vec{P} \rangle$ é a média temporal do momento angular orbital e $\langle \vec{M} \rangle = \vec{r} \times \langle \vec{\Pi} \rangle$ é a média temporal do momento angular total. Ou seja, em uma onda acústica que viaja por um fluido newtoniano, não há outra componente de momento angular total que não seja orbital num volume em que os campos de pressão decaiam

suficientemente rápido nas suas fronteiras. No entanto, em materiais feitos de forma a não anularem o campo de pressão nas bordas, os efeitos do spin acústico podem não ser negligenciáveis.

2.7 Comparações com o Eletromagnetismo Clássico

Com os resultados apresentados até aqui, compilados de diversas referências [42–45], construímos uma tabela de comparação entre ondas harmônicas (de frequência ω) acústicas e eletromagnéticas. As ondas acústicas viajam por um fluido (isotrópico) compressível e homogêneo descrito por sua compressibilidade β e densidade ρ ; as ondas eletromagnéticas viajam em um meio isotrópico e homogêneo de permissividade elétrica ε e permeabilidade magnética μ . Todos os momentos, na tabela, são densidades de momento. As quantidades integrais são calculadas em volumes tais que os campos se esvançam em suas fronteiras.

	Acústica	Eletromagnetismo
Campos	Velocidade \vec{v} , pressão p	elétrico \vec{E} , magnético \vec{H}
Restrições	$\nabla \times \vec{v} = \vec{0}$	$\nabla \cdot \vec{E} = 0, \nabla \times \vec{H} = \vec{0}$
Densidade de energia $\langle w \rangle$	$\frac{1}{4} (\beta p ^2 + \rho \vec{v} ^2)$	$\frac{1}{4} (\varepsilon \vec{E} ^2 + \mu \vec{H} ^2)$
Momento canônico $\langle \vec{P} \rangle$	$\frac{1}{4\omega} \text{Im} [\beta p^* \nabla p + \rho \vec{v}^* \cdot (\nabla) \vec{v}]$	$\frac{1}{4\omega} \text{Im} [\varepsilon \vec{E}^* \cdot (\nabla) \vec{E} + \mu \vec{H}^* \cdot (\nabla) \vec{H}]$
Momento cinético $\langle \vec{\Pi} \rangle$	$\frac{1}{2c^2} \text{Re} [p^* \vec{v}] = \langle \vec{P} \rangle + \frac{1}{4} \nabla \times \langle \vec{s} \rangle$	$\frac{1}{2c^2} \text{Re} [\vec{E}^* \times \vec{H}] = \langle \vec{P} \rangle + \frac{1}{2} \nabla \times \langle \vec{s} \rangle$
M. A. de spin $\langle \vec{s} \rangle$	$\frac{1}{2\omega} \text{Im} [\rho \vec{v}^* \times \vec{v}]$	$\frac{1}{4\omega} \text{Im} [\varepsilon \vec{E}^* \times \vec{E} + \mu \vec{H}^* \times \vec{H}]$
M. A. orbital $\langle \vec{L} \rangle$	$\vec{r} \times \langle \vec{P} \rangle$	$\vec{r} \times \langle \vec{P} \rangle$
Integrais de M. A. de spin	$\int \langle \vec{s} \rangle dV = \vec{0}$	$\int \langle \vec{s} \rangle dV \neq \vec{0}$

Nesse paralelo, note que o campo de velocidades acústico relaciona-se ao campo elétrico, enquanto o campo de pressão relaciona-se ao campo magnético. As diferenças mais importantes entre as colunas são os fatores 1/4 e 1/2 na relação entre os momentos, decorrente da não contribuição do campo escalar de pressão na determinação do momento de spin; além disso, no Eletromagnetismo, a integral da densidade de momento angular de spin é não nula no tipo de volume considerado, enquanto a natureza solenoidal do campo acústico reduz essa integral a zero sempre que o volume de integração é tal que o campo de pressão se esvança em suas fronteiras.

Espalhamento fluido-fluido

Uma vez propriamente definidas as grandezas de interesse nesse estudo, a saber as médias temporais das densidades de energia e momento angular de spin transferidas durante um processo de espalhamento, resta-nos a seguir com o tratamento dos cenários de espalhamento. Majoritariamente dois tipos de interações foram estudadas: uma dinâmica fluido-fluido, isto é, o centro espalhador e o meio que o circunda são ambos fluidos newtonianos; e uma dinâmica fluido-viscoelástico, em que o meio circundante permanece sendo um fluido newtoniano, mas o centro espalhador é um objeto viscoelástico.

Nesse capítulo, trata-se da primeira das dinâmicas. Ela pode ser usada em problemas que modelam bolhas, como bolhas de água em óleo (ou vice-versa), ou modelos simplificados de organelas em meios celulares. Além disso, alguns tipos de silicone emborrachados, quando imersos em água, também podem ser tratados nessa dinâmica, pois a componente de cisalhamento das ondas de som no silicone é desprezível em contraste à componente longitudinal [36, 37].

Esse capítulo inicia-se com a dedução da equação de onda para o potencial escalar a ser utilizado na descrição da onda acústica harmônica considerada. Posteriormente, descreve-se o problema de espalhamento, com as condições de contorno às quais o potencial deve estar sujeito nas fronteiras do centro espalhador. No que segue, trata-se o espalhamento por uma esfera, calculando-se analiticamente as grandezas dinâmicas de interesse no estudo. O mesmo segue para um cilindro longo (se comparado a seu raio). Nesses dois problemas, observa-se um resultado surpreendente: a existência de ressonâncias energéticas (combinações entre dimensões do centro espalhador e comprimento da onda incidente que otimizam a transferência de

energia) em limites de pequenas esferas e cilindros. Comparam-se esferas e cilindros fluidos pelo uso de grandezas adimensionais, evidenciando a falta de fase entre os picos de ressonância observados. Por fim, trata-se do problema *core-shell* esférico, isto é, uma casca fluida.

3.1 Potencial escalar: equação de onda

Lidar com o campo de pressão p e de velocidades \vec{v} é um privilégio da análise de cenários fluidos. Em sólidos elásticos e viscoelásticos, componentes de cisalhamento das ondas acústicas tornam o tratamento por essas grandezas impossível, havendo a necessidade da mudança do formalismo para levar em conta as tensões e deformações do material em questão.

No entanto, é possível conduzir uma mudança nas grandezas consideradas, para que ao tratar de problemas sólidos, outras similares possam ser tratadas. Isso é feito pela determinação do potencial escalar $\varphi(\vec{r})$, usado na descrição da onda acústica. No caso de ondas em fluidos, um único potencial é necessário para que a mudança seja bem sucedida e consigamos calcular uma equação de Helmholtz para a qual φ seja solução (resultado da equação de onda para dependências temporais harmônicas). Veremos, no próximo capítulo, que no caso viscoelástico, são necessários três potenciais para descrever ondas acústicas. Isso decorre da complexidade no comportamento do objeto viscoelástico em contraste ao fluido na passagem da frente de onda.

Para determinar o potencial escalar φ , faremos uso de uma expansão em séries perturbativas em termos de potências de um parâmetro de ordem. Tradicionalmente [46], escolhe-se o número de Mach como grandeza física para esse parâmetro, definido pela razão $M = v/c$, em que v é o módulo da velocidade de grupo média que as moléculas do fluido adquirem com a passagem da frente de onda, e c a velocidade longitudinal da onda acústica. Como $v \ll c$, $M \ll 1$.

Considere, portanto, um fluido newtoniano inicialmente não perturbado, de pressão p_0 e densidade ρ_0 , o meio pelo qual uma onda acústica viaja. Ao passar pelo fluido, ela altera a pressão e a densidade para p e ρ , respectivamente. A hipótese central desse formalismo é que a passagem da onda seja adiabática, ou seja, ocorra de forma tão rápida que nenhuma troca de calor com o meio seja possível. Nesse sentido,

é possível supor que as variações $p - p_0$ e $\rho - \rho_0$ sejam suficientemente pequenas para que uma aproximação linear em uma série perturbativa seja suficientemente eficaz para descrever essas variáveis. Usando o número de Mach para essa análise perturbativa, temos

$$p - p_0 = Mp^{(1)}; \quad (3.1a)$$

$$\rho - \rho_0 = M\rho^{(1)}; \quad (3.1b)$$

$$\vec{v} = M\vec{v}^{(1)}, \quad (3.1c)$$

em que os índices (1) denotam a ordem da perturbação.

Com essa aproximação, já somos capazes de expressar um potencial escalar para descrever os campos. Para isso, considere a equação de conservação de momento antes da aproximação,

$$\partial_t(\rho_0\vec{v}) + \nabla p + \nabla \cdot (\rho_0\vec{v} \wedge \vec{v}) = \vec{0}, \quad (3.2)$$

na qual $\vec{v} \wedge \vec{v}$ denota o produto tensorial entre os vetores \vec{v} . Ao realizar a aproximação linear, o termo que envolve o produto tensorial passa a ter ordem de M^2 , podendo ser desconsiderado em comparação aos demais, resultando em

$$\rho_0\partial_t\vec{v}^{(1)} + \nabla p^{(1)} = \vec{0}. \quad (3.3)$$

Note que, ao tomar o rotacional da Eq. (3.3), vemos que a primeira ordem da aproximação do campo de velocidades é irrotacional. Isso implica que ele pode ser escrito como uma função escalar $\psi(\vec{r}, t)$, produzindo uma relação constitutiva da forma

$$\vec{v}^{(1)} = \nabla\psi, \quad (3.4)$$

em que a dependência em \vec{r} e t foram omitidas. Esse potencial, por ser constitutivo do campo de velocidades, é definido como o potencial de velocidade da onda acústica.

A relação constitutiva de p com ψ é obtida substituindo a Eq. (3.4) na Eq. (3.3) e comutando os operadores de posição e tempo. Isso produz

$$\nabla \left(\rho_0\partial_t\psi + p^{(1)} \right) = \vec{0}, \quad (3.5)$$

implicando que o termo entre parêntesis é uma constante. Como o primeiro termo da perturbação já é uma diferença de pressões, podemos absorver a constante em

questão para obter a relação constitutiva de p e ψ ,

$$p^{(1)} = -\rho_0 \partial_t \psi, \quad (3.6)$$

em que, novamente, as dependências em \vec{r} e t foram omitidas. A equação de onda para $\psi(\vec{r}, t)$ é determinada usando a equação de conservação de massa na forma diferencial,

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \vec{J}_p = 0, \quad (3.7)$$

em que $\vec{J}_p = \rho \vec{v}$ é a densidade de momento do fluido. Usando as equações constitutivas, Eqs. (3.4) e (3.6), na Eq. (3.7), obtém-se a equação de onda para ψ , com $c = \partial p / \partial \rho$:

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \quad (3.8)$$

Com isso, o potencial de velocidade pode ser usado para descrever a onda acústica. Na prática, como lidamos aqui com ondas harmônicas no tempo, de frequência angular ω , podemos escrever

$$\psi(\vec{r}, t) = \varphi(\vec{r}) e^{-i\omega t}, \quad (3.9)$$

na qual $\omega = 2\pi f$ (para a frequência linear da onda f) e $\varphi(\vec{r})$ denota o potencial escalar que detém a forma estacionária da onda. Essa será a função potencial usada para descrever a onda acústica. Substituindo a Eq. (3.9) na Eq. (3.8), vemos que o potencial $\varphi(\vec{r})$ é solução da equação de Helmholtz,

$$(\nabla^2 + k^2) \varphi(\vec{r}) = 0, \quad (3.10)$$

em que $k = \omega/c$ é o número de onda da propagação em questão. Essa equação possui soluções bem estabelecidas na literatura [47]. No caso esférico, essas soluções podem ser dadas em termos das funções reais j_ℓ e y_ℓ ,

$$\varphi(kr, \cos \theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} [a_{\ell m} j_\ell(kr) + b_{\ell m} y_\ell(kr)] Y_\ell^m(\cos \theta, \phi), \quad (3.11)$$

ou das combinações complexas $h_\ell^{(1)}$ e $h_\ell^{(2)}$,

$$\varphi(kr, \cos \theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} [s_{\ell m} h_\ell^{(1)}(kr) + c_{\ell m} h_\ell^{(2)}(kr)] Y_\ell^m(\cos \theta, \phi), \quad (3.12)$$

nas quais $a_{\ell m}$, $b_{\ell m}$, $s_{\ell m}$ e $c_{\ell m}$ são os coeficientes de expansão da onda, determinados pela geometria da onda escolhida; $j_\ell(x)$ é a função de Bessel esférica no argumento

x ; $y_\ell(x)$ é a função de Neumann esférica no argumento x ; as funções $h_\ell^{(1)}(x)$ e $h_\ell^{(2)}(x)$ são, respectivamente, as funções de Hankel esféricas de primeiro e segundo tipo no argumento x ; e $Y_\ell^m(\cos \theta, \phi)$ são os harmônicos esféricos. Para cilindros longos (sem a dependência em z), trocam-se as funções esféricas por cilíndricas e os harmônicos esféricos por funções cosseno, isto é, para as funções de Bessel e Neumann,

$$\varphi(s, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \epsilon_\ell [A_\ell J_\ell(ks) + B_\ell N_\ell(ks)] \cos(\ell\phi); \quad (3.13)$$

e, para as funções de Hankel,

$$\varphi(s, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \epsilon_\ell [S_\ell H_\ell^{(1)}(ks) + C_\ell H_\ell^{(2)}(ks)] \cos(\ell\phi); \quad (3.14)$$

em que os coeficientes foram trocados para A_ℓ, B_ℓ, S_ℓ e C_ℓ ; $N(x)$ denota a função de Neumann cilíndrica no argumento x (foi trocada a notação usual da letra Y para evitar confusão com a notação dos harmônicos esféricos); e ϵ_ℓ denota o fator de Neumann ($\epsilon_0 = 1$, $\epsilon_\ell = 2$ se $\ell \geq 1$).

3.2 Problema de espalhamento

A teoria de espalhamento funciona, para esse estudo, como uma metodologia por meio da qual somos capazes de determinar os campos de radiação acústica em diferentes materiais. Isso decorre da estrutura de fenômenos de espalhamento, onde a caracterização dos meios envolvidos e das superfícies de contato entre esses meios são capazes de fornecer informações acerca das ondas envolvidas no processo.

Nesse sentido, tratar do problema direto de espalhamento simples, isto é, aquele em que se conhece a natureza da onda incidente e do centro espalhador, bem como as condições de contorno satisfeitas pelas ondas, é capaz de determinar completamente a natureza da onda em todas as regiões do espaço. O termo “simples” faz referência à existência de um único centro espalhador, responsável pela alteração na trajetória da onda viajante inicial. Durante o processo, parte da onda incidente é redirecionada no meio externo, caracterizando o espalhamento, e parte da onda é absorvida pelo centro espalhador, caracterizando um processo de absorção que ocorre concomitantemente ao espalhamento.

Com isso, diversas grandezas emergem dessa análise. As de interesse do campo espalhado, como a potência da radiação espalhada e as seções de choque de

espalhamento, são vastamente analisadas na literatura [48–51], uma vez que medidas experimentais são mais naturalmente conduzidas por meio dos campos espalhados, e estão majoritariamente envolvidas com problemas de espalhamento inverso, aquele em que a natureza do centro espalhador é determinada pela relação entre campos incidente e espalhado. As grandezas que interessam-se nos campos internos ao centro espalhador, no entanto, são pouco investigadas, apesar de poderem ser usadas na caracterização de materiais escolhidos como centros espalhadores. Nelas, nosso interesse prioritário reside em duas propriedades dinâmicas dos campos acústicos: a energia depositada e o momento angular de spin.

Especificamente, a média temporal da energia acústica depositada durante o processo de espalhamento, cujo meio de determinação analítico é dado pela Eq. (2.13) explicitada no capítulo anterior nesse cenário fluido-fluido, pode ser usada como parâmetro para caracterizar a interação entre ondas acústicas e diferentes geometrias de centros espalhadores. Em particular, nos motivamos à conduzir esse estudo buscando a existência de ressonâncias no interior do centro espalhador, isto é, combinações entre o comprimento da onda incidente e das dimensões do centro espalhador que maximizem ou minimizem esse depósito. Essas ressonâncias podem ser vistas como armadilhamentos de múltiplos inteiros de comprimentos de onda no interior do centro espalhador, como ilustrado na figura a seguir.

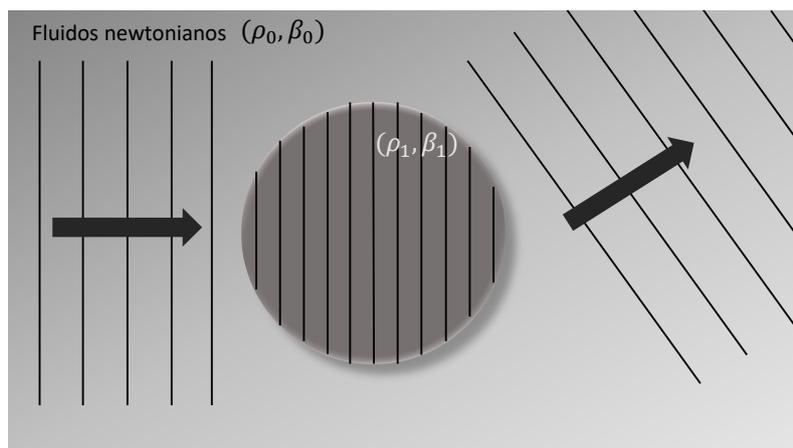


Figura 3.1: Ilustração de uma situação de ressonância em um cenário de espalhamento envolvendo fluidos newtonianos, esquematizada com a visualização das frentes de onda representadas pelas barras contínuas. Uma onda incidente, ao penetrar no centro espalhador, pode sofrer armadilhamento em seu interior, como ilustrado. Note a diferença nos comprimentos de onda das ondas incidente, interna e espalhada.

Essa propriedade pode ser utilizada na construção de materiais que busquem armazenar ou espalhar o som de maneira ótima. Um exemplo aplicável seria no uso de pulsos de ultrassom na destruição de bolhas de água geradas como subproduto da reação de baterias eletrolíticas a base de óleo, que atrapalham seu rendimento. A determinação das dimensões das bolhas seria usada na calibração da frequência do pulso, otimizando o comprimento de onda do pulso de interação, para que muita energia fosse depositada, ocasionando uma eventual ruptura das bolhas e dispersão do fluido.

A média temporal da densidade de spin acústico depositada, em contrapartida, deve ser usada no intuito da produção de torques não convencionais no centro espalhador. Em Acústica, a definição de spin se contrasta ao spin eletromagnético e da Mecânica Quântica, pois esses últimos relacionam-se a interações entre partículas ou ondas e campos magnéticos, enquanto na Acústica, o spin relaciona-se a giros locais dos campos de velocidade média de grupo das moléculas que compõem o fluido, como evidenciado pela Eq. (2.27).

Nesse sentido, campos acústicos incidentes que não possuam momento angular de spin intrínsecos, como ondas planas, são esperados não transferirem nenhum momento para os campos internos, resultado que será verificado nas seções que seguem. Já campos de spin não nulos, como feixes de Bessel de várias ordens, são capazes de depositar spin e, dessa forma, induzir giros locais. Globalmente, para um centro espalhador homogêneo, espera-se que o torque induzido por essa transferência seja nulo, visto que o campo $\langle \vec{s} \rangle$ é um campo solenoidal e, com isso, tem integral igual a zero em um volume fechado, como mostrado na Eq. (2.43).

No entanto, metamateriais podem ser confeccionados de forma não homogênea, produzindo regiões que otimizem o armadilhamento da densidade de spin acústico em certas regiões e, com isso, serem induzidos a torques globais pela resultante não nula da densidade de spin transferido. Esperamos que os resultados apresentados nessa tese sejam úteis para a determinação analítica dessas quantidades, e temos por perspectiva de continuação no estudo justamente tratar de metamateriais da literatura com o tratamento apresentado aqui.

Formalizando o problema de espalhamento a ser tratado, consideramos um fluido newtoniano compressível não perturbado, caracterizado por sua densidade de

massa ρ_0 e compressibilidade β_0 , no qual viaja uma frente de onda acústica, harmônica e monocromática de frequência angular ω , descrita pelo potencial escalar $\varphi_{in}(\vec{r})$ (em que o índice in denota a onda incidente). A frequência da onda acústica é definida pela fonte que a emite, e não é alterada durante o processo de espalhamento. Com isso, as relações constitutivas expressas nas Eqs. (3.4) e (3.6) permitem calcular $p(\vec{r}, t)$ e $\vec{v}(\vec{r}, t)$, de modo que ao lidar com $\varphi(\vec{r})$, consideramos um problema independente do tempo e, com isso, analiticamente mais simples de ser resolvido.

Posicionamos um objeto, centralizado na origem dos centros coordenados, de dimensões finitas (nesse estudo, consideramos uma esfera de raio a , um cilindro de raio a e comprimento $L \gg a$ com eixo do cilindro coincidente ao eixo z das coordenadas cartesianas, e uma casca esférica de raio interno a e raio externo b). Esse corpo é tomado como fluido, de densidade $\rho_1 \neq \rho_0$ e compressibilidade $\beta_1 \neq \beta_0$. A alteração no tipo de fluido muda a velocidade da onda acústica que penetra no objeto (e seu número de onda, para que ω permaneça constante). Em seu interior, a onda acústica passa a ser descrita pelo potencial $\varphi_1(\vec{r})$.

Ao sair do centro espalhador, a onda acústica volta a ter a mesma velocidade (e número de onda) que a onda incidente, mas muda sua forma, em virtude da interação com o objeto. Dessa forma, ela passa a ser descrita pelo potencial $\varphi_{sc}(\vec{r})$, em que sc refere-se ao termo *scattered*, do inglês “espalhado”. A completa postulação do problema é dada com as condições de contorno às quais a onda acústica deve estar sujeita na superfície do centro espalhador. No cenário da esfera ou do cilindro longo (com a onda incidindo pela lateral do cilindro) de raio a , temos [52]

$$-\rho_0(\varphi_{in} + \varphi_{sc})|_{r=a} = -\rho_1\varphi_1|_{r=a}; \quad (3.15a)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(\varphi_{in} + \varphi_{sc})_{r=a} = \frac{\partial}{\partial r}(\varphi_1)_{r=a}, \quad (3.15b)$$

de modo que essas condições são adaptáveis ao caso da casca esférica. A importância dessas condições reside na garantia da continuidade dos campos de pressão e de velocidade na interface entre os fluidos.

Determinada a forma do campo no interior do centro espalhador, $\varphi_1(\vec{r})$, calculamos a média temporal da energia acústica depositada durante a interação, bem como a média temporal do momento angular de spin acústico depositado. Para isso, integramos a Eq. (2.13) no volume \mathcal{V} do centro espalhador, usamos as relações constitutivas para velocidade e pressão, Eqs. (3.4) e (3.6), e separamos a energia

transferida em uma porção potencial e uma cinética, expressas por

$$\langle W_P \rangle = \frac{\rho_1}{4} \int_{\mathcal{V}} k_1^2 |\varphi_1(\vec{r})|^2 dV; \quad (3.16a)$$

$$\langle W_K \rangle = \frac{\rho_1}{4} \int_{\mathcal{V}} |\nabla \varphi_1(\vec{r})|^2 dV. \quad (3.16b)$$

A solução dessas integrais depende da geometria do problema. Iremos, portanto, considerar um a um nas próximas seções.

3.3 Espalhamento por uma esfera

Usando o formalismo descrito na seção anterior, consideramos um fluido newtoniano não perturbado, de densidade de massa ρ_0 e compressibilidade β_0 , como palco para a viagem de uma onda acústica plana incidente, descrita pelo potencial escalar $\varphi_1(\vec{r})$, que viaja na direção do eixo z . Dispõe-se de uma esfera fluida de raio a , com densidade $\rho_1 \neq \rho_0$ e compressibilidade $\beta_1 \neq \beta_0$, posicionada de forma a seu centro coincidir com o centro do sistema cartesiano de coordenadas, conforme ilustra a figura a seguir.

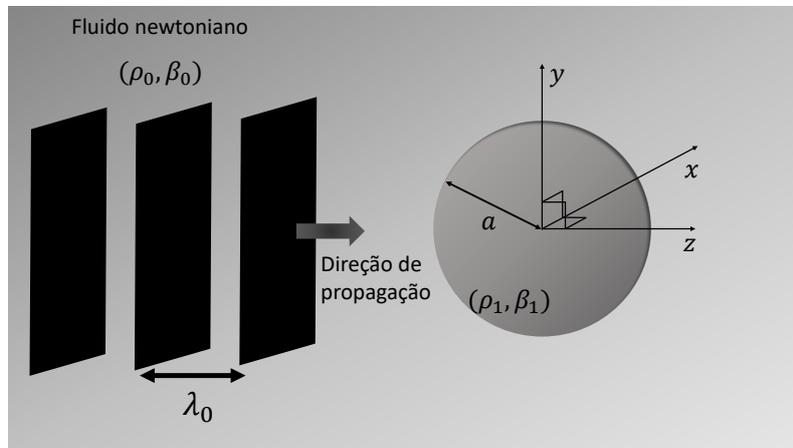


Figura 3.2: Diagrama representando o fenômeno de espalhamento simples de uma onda plana, viajando no sentido crescente do eixo z , por uma esfera em um cenário fluido-fluido. A onda incidente viaja em um fluido newtoniano caracterizado por sua densidade ρ_0 e compressibilidade β_0 , com comprimento de onda λ_0 e encontra, em seu caminho, uma esfera fluida, de raio a , com densidade ρ_1 e compressibilidade β_1 , pela qual será espalhada.

Nesse sentido, escolhe-se a geometria plana para a onda incidente pois diversas geometrias de feixe podem ser expressas como superposições de ondas planas, ponderadas por amplitudes convenientes. Pela geometria esférica do problema, a trinca de coordenadas de posição mais conveniente para os cálculos é a dada pelas

coordenadas esféricas, (r, θ, ϕ) , em que r mede a distância do ponto ao centro do sistema coordenado, θ é o ângulo zenital (medido a partir do eixo z até o eixo ligando o ponto de interesse ao centro do sistema) e ϕ é o ângulo azimutal (definido entre o eixo x positivo e o segmento que liga o centro das coordenadas e a projeção do ponto de interesse no plano xy), conforme ilustrado pela figura abaixo.

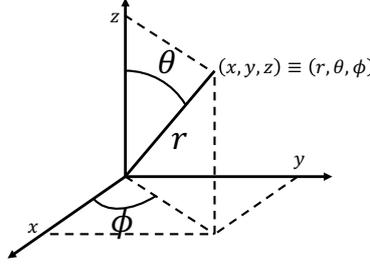


Figura 3.3: Representação esquemática do sistema de coordenadas esférico.

A consideração da onda incidente como plana pode ser expressa no potencial incidente por [21],

$$\varphi_{in}(k_0 r, \cos \theta) = Ae^{ik_0 z} = A \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1)(i)^\ell j_\ell(k_0 r) P_\ell(\cos \theta), \quad (3.17)$$

em que a dependência com ϕ é anulada pela simetria azimutal do problema esférico, $P_\ell(\cos \theta)$ são os polinômios de Legendre de ordem ℓ na variável $\cos \theta$, e $A \in \mathbb{C}$ é a amplitude da onda.

No centro espalhador, uma esfera fluida de raio a e densidade de massa $\rho_1 \neq \rho_0$ centrada na origem do sistema de coordenadas, com a onda incidente descrita pela Eq. (3.17), a onda interna à esfera é

$$\varphi_1(k_1 r, \cos \theta) = A \sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell (2\ell + 1)(i)^\ell j_\ell(k_1 r) P_\ell(\cos \theta), \quad (3.18)$$

em que b_ℓ são os coeficientes de onda parciais internas. À onda espalhada, supõe-se seu esvanecimento a medida em que $r \rightarrow \infty$, e que nenhuma parte dela seja refletida, a chamada condição de Sommerfeld [53],

$$\lim_{k_0 r \rightarrow \infty} k_0 r (\partial_r - ik_0) \varphi_{sc} = 0, \quad (3.19)$$

de modo que, com essa hipótese, a dependência radial é convenientemente escolhida como uma função de Hankel esférica do primeiro tipo, $h_\ell^{(1)}(k_0 r)$. Assim, a onda

espalhada é escrita como

$$\varphi_{sc}(k_0 r, \cos \theta) = A \sum_{\ell=0}^{\infty} s_{\ell} (2\ell + 1) (i)^{\ell} h_{\ell}^{(1)}(k_0 r) P_{\ell}(\cos \theta), \quad (3.20)$$

em que s_{ℓ} são os coeficientes espalhamento das ondas parciais. Resolver o problema de espalhamento resume-se em explicitar as formas dos coeficientes internos b_{ℓ} e espalhados s_{ℓ} fazendo uso das condições de contorno, as Eqs. (3.15).

As seguintes notações são adotadas, a fim de simplificar os cálculos: primeiramente, definem-se os parâmetros de tamanho x_0 e x_1 como, respectivamente, $x_0 = k_0 a$ e $x_1 = k_1 a = m x_0$, com $m = c_0/c_1$; além disso, define-se $\tilde{m} = (\rho_0 k_1)/(\rho_1 k_0)$. Para descarregar a notação, considere que desse ponto em diante no texto, as funções de Hankel tratadas são do primeiro tipo, para que possa ser feita a omissão do índice (1) em todas elas. Com isso, as condições de contorno das Eqs. (3.15) ficam

$$\rho_0 j_{\ell}(x_0) + \rho_0 s_{\ell} h_{\ell}(x_0) = \rho_1 b_{\ell} j_{\ell}(x_1); \quad (3.21a)$$

$$k_0 j'_{\ell}(x_0) + k_0 s_{\ell} h'_{\ell}(x_0) = k_1 b_{\ell} j'_{\ell}(x_1), \quad (3.21b)$$

onde as plicas representam a derivação das funções com relação às suas únicas variáveis. Resolvendo para os coeficientes de espalhamento, obtemos

$$s_{\ell} = \frac{\tilde{m} j_{\ell}(x_0) j'_{\ell}(x_1) - j_{\ell}(x_1) j'_{\ell}(x_0)}{j_{\ell}(x_1) h'_{\ell}(x_0) - \tilde{m} j'_{\ell}(x_1) h_{\ell}(x_0)}. \quad (3.22)$$

Para diferentes valores de ℓ , uma análise numérica mostra que, como função do parâmetro de tamanho x_0 , $|s_{\ell}| \leq 1 \forall x_0 \geq 0$, quaisquer que sejam os meios considerados.

Resolvendo para os coeficientes internos, obtemos

$$b_{\ell} = \left(\frac{\tilde{m}}{m} \right) \left[\frac{j_{\ell}(x_0) h'_{\ell}(x_0) - j'_{\ell}(x_0) h_{\ell}(x_0)}{j_{\ell}(x_1) h'_{\ell}(x_0) - \tilde{m} j'_{\ell}(x_1) h_{\ell}(x_0)} \right]. \quad (3.23)$$

Em contraste aos coeficientes de espalhamento, a relação entre as velocidades longitudinais do som c_0 e c_1 é um fator determinante no comportamento dos coeficientes internos a medida em que $x_0 \rightarrow 0$. Para investigar esse comportamento, analisamos o limite dos coeficientes internos quando $x_0 \rightarrow 0$, revelando que

$$\lim_{x_0 \rightarrow 0} b_{\ell} = \left(\frac{\tilde{m}}{m} \right) \left(\frac{1}{m^{\ell}} \right) \left[\frac{2\ell + 1}{\ell \tilde{m}/m + \ell + 1} \right]. \quad (3.24)$$

Como $m = c_0/c_1$, esse limite tem resultados diferentes caso $m > 1$ ou $m < 1$. Se $m > 1$, ou seja, $c_0 > c_1$ (a onda viaja mais rapidamente fora do que dentro do meio espalhador), $b_{\ell} \rightarrow 0$ a medida que $x_0 \rightarrow 0$ e $\ell \rightarrow \infty$, e o maior valor absoluto dos

coeficientes internos quando $x_0 \rightarrow 0$ é $|b_0| = \tilde{m}/m$. Em contrapartida, se $m < 1$, ou seja, $c_0 < c_1$ (a onda viaja mais rapidamente no interior do centro espalhador do que fora dele), o limite converge a valores finitos a medida que $x_0 \rightarrow 0$, e esses valores crescem a medida que $\ell \rightarrow \infty$. Essa aparente “divergência” nos coeficientes, no entanto, não apresenta um problema na convergência da série para $\varphi_1(\vec{r})$, já que para pequenos argumentos x_0 , a velocidade com que os coeficientes divergem a medida que ℓ cresce é menor do que a velocidade com que as potências de x_0 vão a zero (isso é perceptível pelo tipo da divergência na Eq. (3.24)).

Com os coeficientes internos explicitados e analisados, façamos o cálculo da média temporal da energia acústica depositada no processo de espalhamento, com o uso da Eq. (3.16). Para a energia potencial, explicitamos, primeiramente,

$$|\varphi_1|^2 = |A|^2 \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} b_{\ell} b_n^* (2\ell + 1)(2n + 1) (i)^{\ell} (-i)^m j_{\ell}(k_1 r) j_m^*(k_1 r) P_{\ell}(\cos \theta) P_m^*(\cos \theta), \quad (3.25)$$

expressão que, ao ser integrada, terá sua forma bastante simplificada, em virtude da natureza real das funções de Bessel esféricas e dos polinômios de Legendre, bem como da ortogonalidade dos polinômios $P_{\ell}(\cos \theta)$, expressa por [47]

$$\int_{-1}^1 P_{\ell}(\cos \theta) P_n(\cos \theta) d(\cos \theta) = \frac{\delta_{\ell,n}}{\ell + 1/2}, \quad (3.26)$$

em que $\delta_{\ell,n}$ é a delta de Kronecker. Calculando, explicitamente, $\langle W_P \rangle$, obtemos

$$\frac{4f_0}{r_1 |A|^2} \langle W_P \rangle = x_1^3 \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) |b_{\ell}|^2 \left[j_{\ell}^2(x_1) - j_{\ell-1}(x_1) j_{\ell+1}(x_1) \right], \quad (3.27)$$

em que f_0 é a frequência linear da onda incidente (ou seja, $\omega/(2\pi)$) e $r_1 = \rho_1 c_1$ é a impedância acústica do meio 1. Escolhemos essa forma de representar a energia pois $(4f_0 \langle W_P \rangle) / (r_1 |A|^2)$ é uma grandeza adimensional (para verificar tal fato, perceba que a amplitude complexa A possui unidades de comprimento ao quadrado dividido por tempo, observável pela definição do potencial de velocidade na Eq. (3.4)). A adimensionalidade dessa forma permite comparar os resultados entre as diferentes geometrias calculadas no estudo.

Note que, apesar de não estar explícito na Eq. (3.27), os coeficientes $|b_{\ell}|$ são funções de m , \tilde{m} e x_0 , o que permite analisar a média temporal da energia potencial depositada durante o espalhamento em função de diversas combinações de meio e do parâmetro de tamanho x_0 (uma vez que $x_1 = mx_0$). Além disso, é importante

ressaltar a interpretação física dessa grandeza, uma vez que a divisão feita com o intuito de simplificar os cálculos permite, ainda, que interprete-se fisicamente seu significado. Uma vez que a passagem da frente de onda cesse, a energia potencial transferida durante o processo de espalhamento pode ser convertida em outros tipos de energia no sistema, como mecânica ou térmica. Ela funciona como uma espécie de energia armazenada durante o espalhamento, a ser convertida depois de seu término.

A energia cinética, em contraste à analiticidade de todas as integrais envolvidas no caso potencial, possui uma integral em seu resultado que, apesar de convergente, não produz uma função da física matemática tradicional. De fato, pode-se fazer o uso de programas computacionais como o Mathematica para lidar com tal integral e observar que trata-se de uma integral que converge para uma função hipergeométrica. Numericamente, não é conveniente lidar com essa função ao realizar os cálculos para as energias, de modo que uma solução numérica da integral em questão é mais eficiente. Em virtude disso, denotando essa integral como $I_\ell^{(S)}(x_1)$, em que (S) indica que ela será referente ao problema da esfera (do inglês, *sphere*), ela tem a forma

$$I_\ell^{(S)}(x_1) = \int_0^{x_1} \left[(2\ell + 1)j_\ell^2(x) - 2xj_\ell(x)j_{\ell+1}(x) \right] dx, \quad (3.28)$$

de modo que a média temporal da energia cinética transferida é

$$\frac{4f_0}{r_1|A|^2} \langle W_K \rangle = x_1^3 \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1)|b_\ell|^2 \left[\frac{2\ell I_\ell^{(S)}(x_1)}{x_1^3} + j_{\ell+1}^2(x_1) - j_\ell(x_1)j_{\ell+2}(x_1) \right]. \quad (3.29)$$

O comportamento da integral da Eq. (3.28) para os valores de $\ell = 1, 2, 3, 4$, em função do parâmetro de tamanho x_0 pode ser observado na figura a seguir. O termo $\ell = 0$ foi omitido pois a integral similar a essa para a geometria cilíndrica só converge para $\ell \geq 1$, portanto $\ell = 0$ é um caso específico da esfera, que tem forma analítica fechada, $I_0^{(S)}(x_1) = \sin^2(x_1)/x_1$.

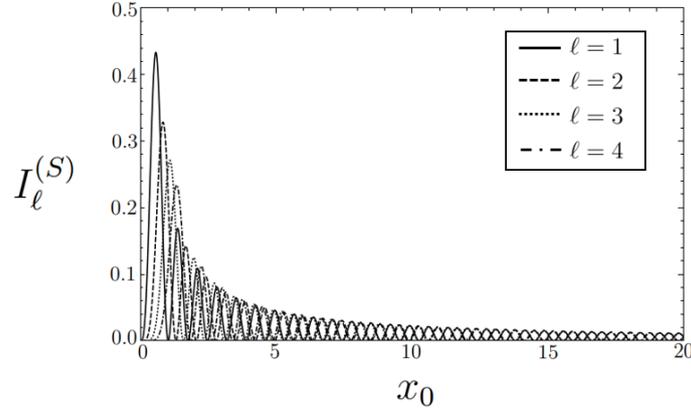


Figura 3.4: Integral $I_\ell^{(S)}(mx_1)$ em função do parâmetro de tamanho $x_0 = k_0a$ para $\ell = 1, 2, 3, 4$. Note que, a medida que ℓ cresce, os picos mais altos diminuem. Além disso, $|I_\ell^{(S)}(mx_0)| \ll 1$ a medida em que x_0 cresce. Para esse cálculo numérico, foi considerado $m = 1522/343$, exemplo de uma esfera de ar imersa no oceano.

A medida que ℓ cresce, os picos mais altos de $I_\ell^{(S)}$ caem e deslocam-se para a direita. O programa Mathematica foi usado a fim de observar graficamente os resultados das Eqs. (3.27) e (3.29) em função do parâmetro de tamanho x_0 , a fim de procurar comportamentos ressonantes. Em todos os cenários observados, a magnitude da energia potencial verificou-se maior do que a da energia cinética, especialmente no limite de pequenas esferas. Em um primeiro momento, esse limite foi utilizado para verificar a acurácia do cálculo numérico, mas como observamos a seguir, em alguns casos, um pico de ressonância é observado, surpreendentemente, nesse regime.

Primeiramente, consideramos uma bolha de ar (meio 1, $\rho_1 = 1.205 \text{ kg/m}^3$ e $c_1 = 343 \text{ m/s}$) imersa na água do mar (meio 0, $\rho_0 = 1024 \text{ kg/m}^3$ e $c_0 = 1522 \text{ m/s}$). A figura a seguir mostra a média temporal das energias potencial e cinética depositada durante a interação em função do parâmetro de tamanho x_0 (também adimensional). Escolhe-se x_0 como parâmetro (ao invés de x_1 , por exemplo) pois é mais fácil, experimentalmente, controlar k_0 com a frequência da onda incidente. As somas numéricas foram truncadas para $\ell_{max} = 3 + [x_0^{(max)} + 4.05x_0^{(max)1/3}]$, de acordo com referências de somas de seções de choque [54], em que $x_0^{(max)}$ é o valor máximo considerado na análise (nos gráficos mostrados aqui, $x_0^{(max)} = 10$).

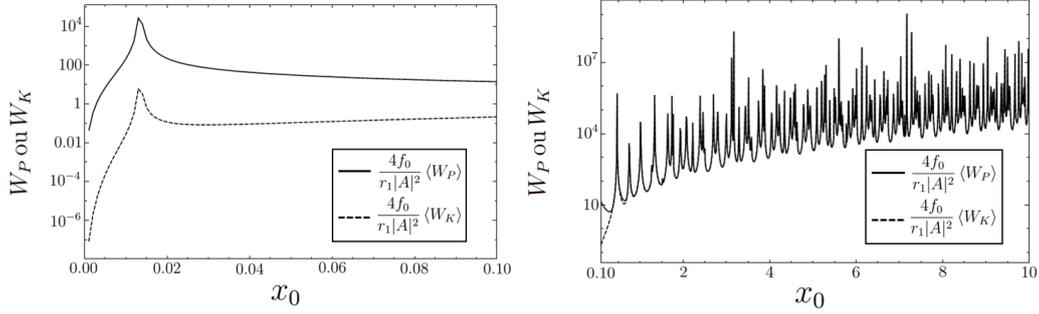


Figura 3.5: Médias temporais das energias potenciais e cinéticas em função do parâmetro de tamanho $x_0 = k_0a$ para uma esfera de ar imersa no oceano. À esquerda: limite de pequenas esferas (também chamado de limite de Rayleigh), $0 \leq x_0 \leq 0.1$; à direita: região $0.1 \leq x_0 \leq 10$. Note que, no limite de Rayleigh, a energia potencial é maior do que a energia cinética e que $\langle W_K \rangle \rightarrow \langle W_P \rangle$ conforme x_0 cresce.

Observando o gráfico à direita, note a existência de ressonâncias tanto para a energia cinética quanto para a potencial, isto é, existem valores de x_0 (combinações de números de onda da onda incidente e do raio da partícula espalhadora) que maximizam ou minimizam a quantidade de energia depositada. Os picos e vales das duas energias coincidem, isto é, as esferas que maximizam (ou minimizam) energias potenciais também maximizam (ou minimizam) energias cinéticas. No gráfico à esquerda, observa-se a presença de um desses picos de ressonância. Note que o cálculo numérico de ambos os gráficos foi feito com as séries expressas nas Eqs. (3.27) e (3.29).

Buscando analisar esse limite, calculamos os limites de pequenas esferas dessas equações, também chamado de limite de Rayleigh. As expressões são calculadas fazendo uso das expressões assintóticas das funções envolvidas, listadas no Apêndice 1. Os cálculos produzem

$$\frac{4f_0}{r_1|A|^2} \langle W_P \rangle^{Rayleigh} = \frac{2m^3 x_0^3}{3} \left[\frac{\tilde{m}}{m} \left(\frac{1 - x_0^2/3}{1 - \tilde{m}m x_0^2/3} \right) \right]^2; \quad (3.30a)$$

$$\frac{4f_0}{r_1|A|^2} \langle W_K \rangle^{Rayleigh} = \frac{2m^5 x_0^5}{45} \left[\frac{\tilde{m}}{m} \left(\frac{1 - x_0^2/3}{1 - \tilde{m}m x_0^2/3} \right) \right]^2. \quad (3.30b)$$

A ressonância que se destaca no gráfico da esquerda pode ser calculada por meio dos zeros dos denominadoras das Eqs. (3.30). Eles são obtidos, com os parâmetros do caso acima, quando

$$x_0^* = \sqrt{3/(\tilde{m}m)} = 0.014, \quad (3.31)$$

o que encaixa exatamente na divergência observada. Além disso, a medida que x_0

crece, $\langle W_K \rangle \rightarrow \langle W_P \rangle$. Numericamente, verifica-se esse fato ao analisar a razão $\langle W_P \rangle / \langle W_K \rangle$, que tende a 1 a medida que $x_0 \rightarrow \infty$. Uma justificativa para esse fato reside em $|I_\ell^{(S)}(mx_0)| \rightarrow 0$ conforme $x_0 \rightarrow \infty$ e, com isso,

$$\frac{4f_0}{r_1|A|^2} \langle W_K \rangle^{grande} \approx x_1^3 \sum_{\ell=0} (2\ell + 1) |b_\ell|^2 \left[j_{\ell+1}^2(x_1) - j_\ell(x_1) j_{\ell+2}(x_1) \right], \quad (3.32)$$

uma relação bastante similar a $\langle W_P \rangle$ quando $\ell + 1 = \ell'$. A convergência analítica de $\langle W_K \rangle$ a $\langle W_P \rangle$ envolve, no entanto, uma análise que ultrapassa as parcelas somadas, e não foi feita nesse estudo.

A existência desse pico de ressonância é surpreendente, pois trata-se de um regime onde o comprimento da onda incidente é muito maior do que a dimensão do centro espalhador. Portanto, não esperaria-se que houvesse a possibilidade de armazenamento da energia por essa esfera. No entanto, essa ressonância não é trivialmente observada para qualquer combinação de meios. A fim de ilustrar esse fato, buscamos outro cenário exemplo: uma bolha de petróleo (meio 1, $\rho_1 = 711 \text{ kg/m}^3$ e $c_1 = 1330 \text{ m/s}$) imersa no oceano (meio 0, $\rho_0 = 1024 \text{ kg/m}^3$ e $c_0 = 1522 \text{ m/s}$). As médias temporais das energias em função do parâmetro de tamanho x_0 estão dispostas a seguir.

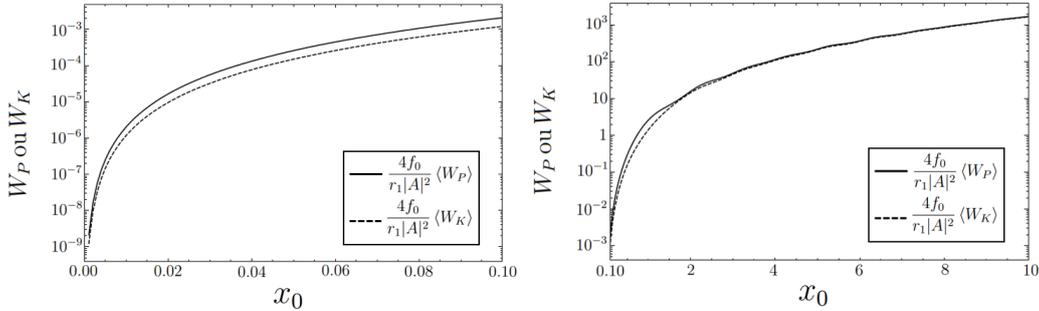


Figura 3.6: Médias temporais das energias potenciais e cinéticas em função do parâmetro de tamanho $x_0 = k_0 a$ para uma esfera de ar imersa no oceano. À esquerda: limite de pequenas esferas, $0 \leq x_0 \leq 0.1$; à direita: região $0.1 \leq x_0 \leq 10$. Note que, no limite de Rayleigh, a energia potencial é maior do que a energia cinética e que $\langle W_K \rangle \rightarrow \langle W_P \rangle$ conforme x_0 cresce. Diferentemente do exemplo anterior, não são verificados comportamentos ressonantes para essa combinação de meios.

Esses dois comportamentos ilustram o que foi observado ao varrer o espaço de parâmetros ρ_0, ρ_1, c_0 e c_1 . Os dados mostram que bruscas diferenças entre os meios induziam a presença de ressonâncias, enquanto meios muito similares entre si nas densidades não apresentavam armadilhamentos. Outro exemplo considerado

para validar essas observações foi a análise de uma bolha de água (meio 1, $\rho_1 = 1000 \text{ kg/m}^3$ e $c_1 = 343 \text{ m/s}$) em óleo do tipo castor (meio 0, $\rho_0 = 952 \text{ kg/m}^3$ e $c_0 = 1474 \text{ m/s}$), útil na aplicação de baterias ou motores a base de óleo, onde alguma falha induz a produção de água em seu interior.

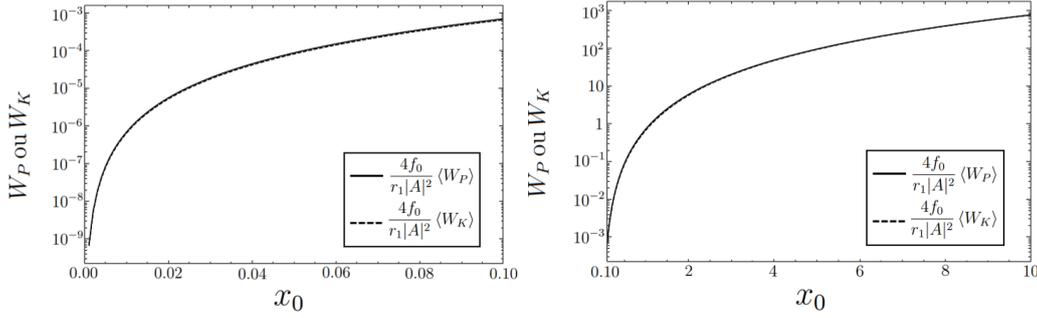


Figura 3.7: Médias temporais das energias potenciais e cinéticas em função do parâmetro de tamanho $x_0 = k_0 a$ para uma esfera de ar imersa no oceano. À esquerda: limite de pequenas esferas, $0 \leq x_0 \leq 0.1$; à direita: região $0.1 \leq x_0 \leq 10$. Note que, no limite de Rayleigh, a energia potencial é maior do que a energia cinética e que $\langle W_K \rangle \rightarrow \langle W_P \rangle$ conforme x_0 cresce. Note que, novamente, como as densidades dos meios são muito próximas, há o surgimento de ressonâncias.

Perceba que, nesse último exemplo, as densidades dos dois meios são muito próximas, mas as velocidades do som são bastante distintas entre os eles. Esses resultados instigam a hipótese aqui proposta, atualmente submetida como resultado desse estudo para publicação científica em revista internacional, que meios de estados físicos diferentes, em que o meio menos denso é o centro espalhador, há a formação de ressonâncias. Buscamos analogias desses comportamentos para o caso cilíndrico, tratado na próxima seção.

A transferência da média temporal da densidade de spin acústico durante o processo também foi investigada. A média temporal do spin acústico total depositado, certamente, é zero, pois a integração é feita num volume finito, com campos acústicos bem comportados, em que a natureza solenoidal da densidade de spin assume um papel importante.

O comportamento do spin total, no entanto, não necessariamente implica que a densidade seja nula, isto é, em um primeiro momento, pode-se supor que exista uma densidade não nula de spins acústicos que, ao serem integrados no volume da esfera, resultariam em zero. Para verificar tal hipótese, fizemos uso da Eq. (2.27), juntamente do campo de velocidades da onda incidente e interna ao centro espalhador, obtidas pelos potenciais das Eqs. (3.17) e (3.18) e a relação constitutiva

da velocidade, Eq. (3.4).

Para a onda incidente plana, $\langle \vec{s} \rangle = \vec{0}$, pois trata-se de um produto vetorial entre dois vetores paralelos. No caso da onda no interior do centro espalhador, em virtude da relação constitutiva da velocidade, os mesmos termos da onda incidente acabam sendo multiplicados e anulados, produzindo também uma densidade de spin nula no interior do centro espalhador. Esses resultados corroboram a expectativa de que não é gerado nenhuma vorticidade com o espalhamento de uma onda plana.

Esses cálculos foram também feitos para as geometrias que seguem, e produziram o mesmo resultado, então não serão discutidos novamente nesse estudo. Uma discussão válida, levantada na Ref. [42], é a que diz respeito sobre feixes incidentes que não sejam planos, como, por exemplo, feixes de Bessel de ordem ℓ . Nesses feixes, o próprio campo possui $\langle \vec{s} \rangle \neq \vec{0}$, algo esperado pela sua geometria espacial. Certamente, em um problema de espalhamento desse feixe por uma esfera ou outra geometria de centro espalhador, poderia haver densidade de spin transferido. Essa análise, em detalhes, é uma perspectiva de trabalho futuro como continuação do estudo aqui apresentado.

3.4 Espalhamento por um cilindro

A geometria cilíndrica, assim como a esférica, apresenta diversas aplicações e produz resultados tão instigantes quanto a simetria esférica. Longos fios de petróleo vazando do fundo do oceano até a superfície podem ser modelados por cilindros longos de fluidos imersos em outro fluido. Outro cenário onde o espalhamento por cilindros pode ser útil é no uso de revestimentos de borracha usados no isolamento acústico de submarinos.

Consideramos, assim como no caso anterior, um fluido newtoniano caracterizado por sua densidade ρ_0 e compressibilidade β_0 quando não perturbado, em que viaja uma onda acústica plana, de dependência harmônica monocromática com o tempo (frequência angular ω) viajando na direção crescente do eixo x . Supomos a existência de um cilindro fluido de comprimento L e raio a , com densidade $\rho_1 \neq \rho_0$, centralizado na origem do sistema de coordenadas, com eixo central coincidente ao eixo z das coordenadas cartesianas, como ilustra a figura a seguir.

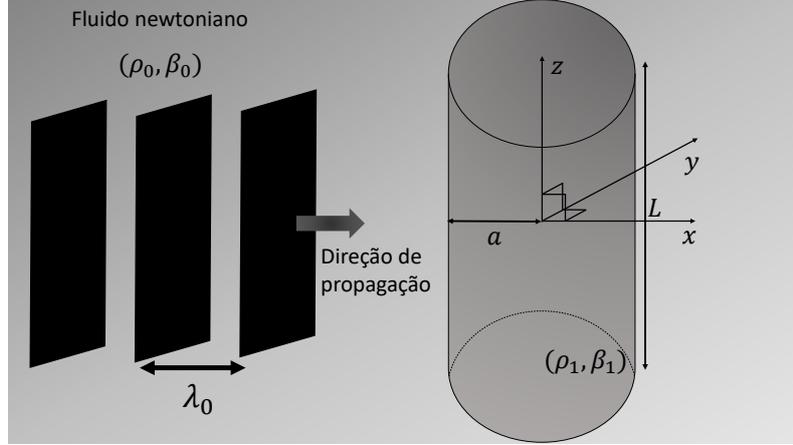


Figura 3.8: Diagrama representando o fenômeno de espalhamento simples de uma onda plana, viajando no sentido crescente do eixo x , por um cilindro em um cenário fluido-fluido. A onda incidente viaja em um fluido newtoniano caracterizado por sua densidade ρ_0 e compressibilidade β_0 , com comprimento de onda λ_0 e encontra, em seu caminho, um cilindro fluido, de raio a e comprimento $L \gg a$, com densidade ρ_1 e compressibilidade β_1 , pelo qual será espalhada.

Supõe-se, por simplicidade, que o comprimento L do cilindro seja muito maior do que o comprimento da onda incidente, λ_0 , e muito maior do que o raio do cilindro, a . Nessas condições, o problema possui simetria no eixo z e, com isso, as coordenadas cilíndricas são as mais convenientes para a sua descrição. Nessas coordenadas, considera-se a descrição de um ponto P no espaço pela trinca (s, ϕ, z) , onde s mede a distância da projeção de P no plano xy até a origem, ϕ é o ângulo azimutal (assim como nas coordenadas esféricas) e z mede a altura do ponto em relação ao plano xy , conforme ilustrado.

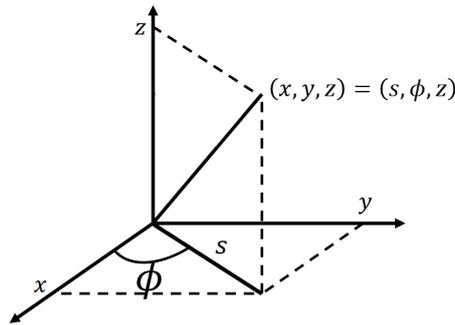


Figura 3.9: Representação esquemática do sistema de coordenadas cilíndrico.

Nessas condições, a onda incidente é descrita pelo potencial $\varphi_{in}(k_0 s, \phi)$ dado por

$$\varphi(k_0 s, \phi) = A \sum_{\ell=0}^{\infty} \epsilon_{\ell} (-i)^{\ell} J_{\ell}(k_0 s) \cos(\ell \phi), \quad (3.33)$$

em que ϵ_ℓ denota o fator de Neumann ($\epsilon_0 = 1$, $\epsilon_\ell = 2$ se $\ell \geq 1$) e $J_\ell(x)$ é a função de Bessel (cilíndrica), de ordem ℓ na variável x .

A hipótese de que $L \gg a$ ajuda com a simplicidade do problema: exclui-se, com ela, a necessidade em lidar com os efeitos de borda provocados pelas tampas do cilindro. A onda no interior do cilindro espalhador, descrita por $\varphi_1(k_1 s, \phi)$, tem a forma

$$\varphi_1(k_1 s, \phi) = A \sum_{\ell=0}^{\infty} B_{\ell\epsilon_\ell} (-i)^\ell J_\ell(k_1 s) \cos(\ell\phi), \quad (3.34)$$

em que B_ℓ são os coeficientes internos das ondas parciais. Como há mudança de meios, o número de onda k_0 da onda incidente muda para o número de onda k_1 no interior do centro espalhador, assim como ocorre no caso esférico. A onda espalhada, voltando ao meio original, em virtude da condição de Sommerfeld, tem dependência radial dada pelas funções de Hankel (cilíndricas) do primeiro tipo, $H_\ell^{(1)}(k_0 s)$, de modo que

$$\varphi_{sc}(k_0 s, \phi) = A \sum_{\ell=0}^{\infty} S_{\ell\epsilon_\ell} (-i)^\ell H_\ell^{(1)}(k_0 s) \cos(\ell\phi), \quad (3.35)$$

em que S_ℓ denotam os coeficientes de espalhamento das ondas parciais. Similarmente ao caso esférico, as condições de contorno, Eqs. (3.15), determinam completamente os coeficientes B_ℓ e S_ℓ . Elas são consideradas de modo a ignorar o espalhamento da onda incidente pelas tampas do cilindro.

Com a notação similar à esfera (com os parâmetros x_0, x_1, m e \tilde{m} definidos na seção anterior), as condições de contorno tornam-se

$$\rho_0 J_\ell(x_0) + \rho_0 S_\ell H_\ell(x_0) = \rho_1 B_\ell J_\ell(x_1); \quad (3.36a)$$

$$k_0 J'_\ell(x_0) + k_0 S_\ell H'_\ell(x_0) = k_1 B_\ell J'_\ell(x_1), \quad (3.36b)$$

com as plicas denotando, novamente, as derivadas com relação à variável da função. Resolvendo para os coeficientes de espalhamento, obtemos

$$S_\ell = \frac{\tilde{m} J_\ell(x_0) J_\ell(x_1) - J_\ell(x_1) J'_\ell(x_0)}{J_\ell(x_1) H'_\ell(x_0) - \tilde{m} J'_\ell(x_1) H_\ell(x_0)}. \quad (3.37)$$

Analogamente ao caso esférico, $|S_\ell| \leq 1 \forall x_0 \geq 0$, qualquer que seja a relação entre os meios 0 e 1.

Resolvendo as Eqs. (3.36) para os coeficientes internos, temos

$$B_\ell = \left(\frac{\tilde{m}}{m} \right) \left[\frac{J_\ell(x_0) H'_\ell(x_0) - J'_\ell(x_0) H_\ell(x_0)}{J_\ell(x_1) H'_\ell(x_0) - \tilde{m} J'_\ell(x_1) H_\ell(x_0)} \right]. \quad (3.38)$$

Nos coeficientes internos, as relações entre densidades e velocidades de propagação das ondas importam na determinação de seu comportamento a medida em que $x_0 \rightarrow 0$. O Apêndice 1 mostra os detalhes nas expansões das funções esféricas e cilíndricas para pequenos e grandes argumentos, auxiliando nos cálculos dos limites de interesse. Para o caso em que $\ell = 0$,

$$\lim_{x_0 \rightarrow 0} B_0 = \frac{\tilde{m}}{m}, \quad (3.39)$$

e, para $\ell \geq 1$,

$$\lim_{x_0 \rightarrow 0} B_\ell = \left(\frac{\tilde{m}}{m}\right) \left(\frac{1}{m^\ell}\right) \left[\frac{2}{\tilde{m}/m + 1}\right]. \quad (3.40)$$

Caso $m > 1$, ou seja, $c_0 > c_1$ (a onda viaja mais rapidamente fora do cilindro), o limite vai a zero a medida que $x_0 \rightarrow 0$ e $\ell \rightarrow \infty$, isto é, a medida que ℓ cresce, os coeficientes convergem mais rapidamente para zero na origem, e o maior pico de $|B_\ell|$ é $|B_0| = \tilde{m}/m$. Caso $m < 1$, ou seja, $c_0 < c_1$ (a onda viaja mais rapidamente dentro do cilindro), o limite converge a valores finitos quando $x_0 \rightarrow 0$, mas esses valores crescem a medida que $\ell \rightarrow \infty$. Analogamente ao caso esférico, esse comportamento não causa divergências na série para o potencial acústico φ_1 .

A média temporal da energia acústica, para esse caso, é calculada da mesma forma que no caso esférico, com as integrais das porções cinética e potencial das densidades de energia da Eq. (3.16), integradas no volume do cilindro. A parte potencial é composta por integrais de convergência suficientemente simples para funções tradicionais da física matemática, produzindo

$$\frac{4c_1}{r_1 L |A|^2} \langle W_P \rangle = x_1^2 \sum_{\ell=0}^{\infty} \epsilon_\ell |B_\ell|^2 \left[J_\ell^2(x_1) - J_{\ell-1}(x_1) J_{\ell+1}(x_1) \right]. \quad (3.41)$$

A escolha de $(4c_1 \langle W_P \rangle) / (r_1 L |A|^2)$ foi, novamente, feita com o intuito de adimensionalizar a grandeza, tornando-a mais fácil de ser comparada à energia de esferas.

A média temporal da energia cinética depositada na interação tem, em sua estrutura, uma integral que converge para funções não convencionais da física matemática. Pela facilidade ao lidar com essa integral numericamente ao invés de nos preocuparmos com funções hipergeométricas, definimos a integral $I_\ell^{(C)}(x_1)$ (convergente para $\ell \geq 1$) por

$$I_\ell^{(C)}(x_1) = \int_0^{x_1} \left[\ell \left(2\epsilon_\ell^{-1} + 1 \right) \frac{J_\ell^2(x)}{x} - 4\epsilon_\ell^{-1} J_\ell(x) J_{\ell+1}(x) \right] dx, \quad (3.42)$$

de modo que a média temporal da energia cinética depositada é

$$\frac{4c_1}{r_1 L |A|^2} \langle W_K \rangle = x_1^2 \sum_{\ell=0}^{\infty} \epsilon_{\ell} |B_{\ell}|^2 \left[\frac{\ell \epsilon_{\ell} I_{\ell}^{(C)}(x_1)}{x_1^2} + J_{\ell+1}^2(x_1) - J_{\ell}(x_1) J_{\ell+2}(x_1) \right], \quad (3.43)$$

o que implica que não existe problema de convergência para $\ell = 0$ de $I_{\ell}^{(C)}$, pois $I_0^{(C)}$ é multiplicada por 0 na soma. O comportamento de $I_{\ell}^{(C)}(mx_0)$ é mostrado na figura a seguir, em função do parâmetro de tamanho x_0 .

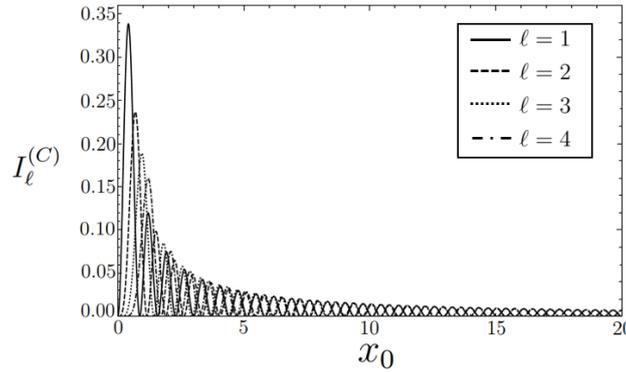


Figura 3.10: Integral $I_{\ell}^{(C)}(mx_0)$ em função do parâmetro de tamanho $x_0 = k_0 a$ para $\ell = 1, 2, 3, 4$. Note que os picos mais altos de $I_{\ell}^{(C)}$ caem a medida que ℓ cresce. Além disso, $|I_{\ell}^{(C)}(x_1)| \ll 1$ quando x_0 cresce. Foi considerado $m = 1522/343$, em que trata-se do espalhamento por um cilindro de ar imerso no oceano.

As combinações investigadas aqui foram similares àsquelas vistas para esferas. Inicialmente, uma coluna de ar cilíndrica imersa no oceano, assim como no caso esférico, apresentou padrões de ressonância, ilustrados na figura a seguir.

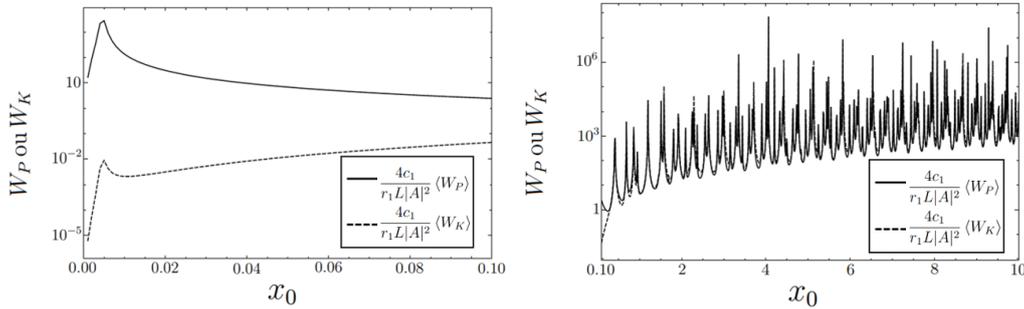


Figura 3.11: Médias temporais das energias potenciais e cinéticas em função do parâmetro de tamanho $x_0 = k_0 a$ para um cilindro longo de ar imersa no oceano. À esquerda: limite de cilindros finos (limite de Rayleigh), $0 \leq x_0 \leq 0.1$; à direita: região $0.1 \leq x_0 \leq 10$. Note que, no limite de Rayleigh, a energia potencial é maior do que a energia cinética e que $\langle W_K \rangle \rightarrow \langle W_P \rangle$ conforme x_0 cresce.

Observamos que existem combinações entre comprimentos da onda incidente e raio do cilindro que maximizam ou minimizam o armadilhamento de energia nos

cilindros. Curiosamente, o limite de cilindros finos produz

$$\frac{4c_1}{r_1 L |A|^2} \langle W_P \rangle^{Rayleigh} = m^2 x_0^2 \left\{ \left(\frac{\tilde{m}}{m} \right) \left[\frac{x_0^2 \ln(x_0) + 2}{m x_0^2 \ln(x_0) + 2} \right] \right\}^2; \quad (3.44a)$$

$$\frac{4c_1}{r_1 L |A|^2} \langle W_K \rangle^{Rayleigh} = \frac{m^4 x_0^4}{8} \left\{ \left(\frac{\tilde{m}}{m} \right) \left[\frac{x_0^2 \ln(x_0) + 2}{m x_0^2 \ln(x_0) + 2} \right] \right\}^2, \quad (3.44b)$$

que só são matematicamente válidos no intervalo $(0, 0.002)$ para essa combinação de meios. Isso faz com que o zero do denominador das Eqs. (3.44) (0.61 nesse exemplo) localize-se fora dessa região de validade. Dessa forma, em cilindros, o primeiro pico de ressonância observado não pode ser obtido analiticamente.

Há, ainda, a convergência de $\langle W_K \rangle \rightarrow \langle W_P \rangle$ a medida que x_0 cresce. Esse resultado é validado pelo comportamento das integrais $|I_\ell^{(C)}(m x_0)| \ll 1$ a medida que $x_0 \rightarrow \infty$, de modo que

$$\frac{4c_1}{r_1 L |A|^2} \langle W_K \rangle^{grande} \approx x_1^2 \sum_{\ell=0}^{\infty} \epsilon_\ell |B_\ell|^2 \left[J_{\ell+1}^2(x_1) - J_\ell(x_1) J_{\ell+2}(x_1) \right], \quad (3.45)$$

relação essa bastante similar a $\langle W_P \rangle$ quando $\ell + 1 = \ell'$, alterando-se os índices dos coeficientes internos. Aqui não será feita uma análise minuciosa por trás dessa convergência.

O comportamento ressonante, assim como na geometria esférica, é observado apenas nos casos em que há diferenças muito bruscas nas densidades dos meios. O próximo exemplo ilustra as médias temporais de energias potencial no caso em que o cilindro espalhador é uma coluna de petróleo imersa no oceano, em que não há ressonâncias dos campos acústicos.

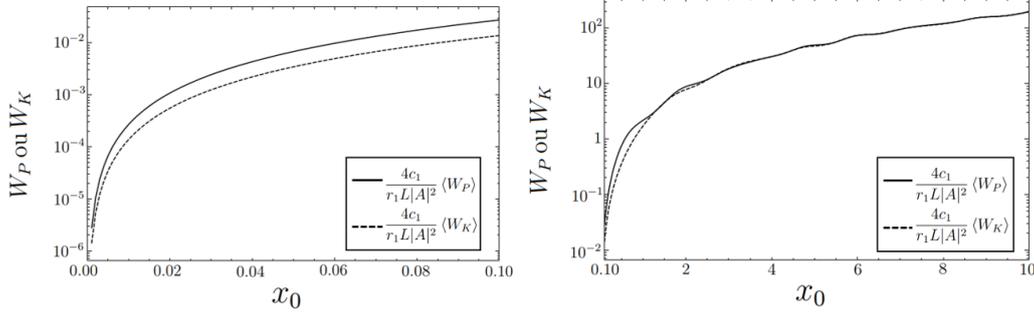


Figura 3.12: Médias temporais das energias potenciais e cinéticas em função do parâmetro de tamanho $x_0 = k_0 a$ para um cilindro longo de petróleo imerso no oceano. À esquerda: limite de cilindros finos (limite de Rayleigh), $0 \leq x_0 \leq 0.1$; à direita: região $0.1 \leq x_0 \leq 10$. Note que, no limite de Rayleigh, a energia potencial é maior do que a energia cinética e que $\langle W_K \rangle \rightarrow \langle W_P \rangle$ conforme x_0 cresce. Diferentemente da combinação de meios anterior, nesse caso não são observadas ressonâncias no centro espalhador.

3.5 Comparação entre esferas e cilindros

Existem semelhanças notáveis entre as fórmulas das médias temporais das energias para esferas, dadas pelas Eqs. (3.27) e (3.29), e para os cilindros, das Eqs. (3.41) e (3.43), respectivamente. Especificamente, as fórmulas são muito parecidas ao se trocar as funções esféricas pelas cilíndricas. Isso sugere uma relação entre as energias esféricas e cilíndricas em suas formas adimensionais.

Buscando verificar tal relação, consideramos a expressão que relaciona as funções de Bessel esféricas e cilíndricas, da Ref. [47],

$$j_\ell(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{\ell+\frac{1}{2}}(x). \quad (3.46)$$

Ela indica que existe uma diferença de fase entre as funções esféricas e cilíndricas. Espera-se, portanto, que haja uma diferença de fase entre os picos de ressonância das esferas e cilindros, onde uma função atinge seu máximo, a outra deve atingir seu mínimo, e vice-versa (isso se a combinação linear da série não destruir a coerência de fase de cada onda parcial). A figura a seguir mostra essa comparação para as médias temporais da energia potencial adimensional para esferas e cilindros, numa combinação de meios em que há a possibilidade de ressonâncias.

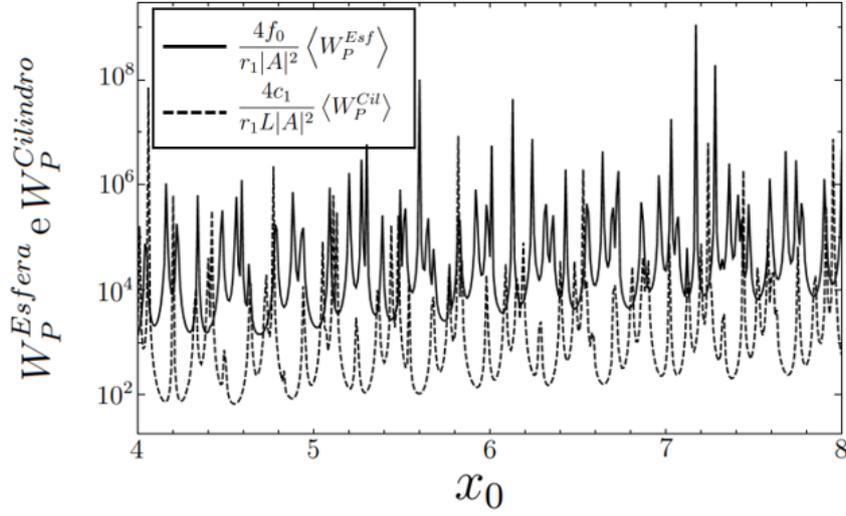


Figura 3.13: Comparativo das energias potenciais adimensionais para esfera e cilindro (objetos de ar imersos na água do mar). Note a diferença de fase entre esferas e cilindros, corroborando o resultado esperado pela análise das funções de Bessel envolvidas.

3.6 Espalhamento por uma casca esférica

A última geometria considerada nesse estudo é aquela onde uma casca esférica é usada como centro espalhador. Nesse caso, podemos considerar aplicações como envólucros para cápsulas submarinas ou de medicamentos na corrente sanguínea. A casca em questão é considerada de raio externo b e raio interno a , composta por dois fluidos: o primeiro, denotado pelo índice 1, ocupa o interior da casca (região $0 \leq r < a$), de densidade ρ_1 ; o segundo, denotado pelo índice 2, ocupa a própria casca (região $a < r < b$), de densidade ρ_2 . Por fim, o meio inicial (e o posterior ao espalhamento), indexado pelo número 0, ocupa todo o exterior da casca (região $r > b$) e tem densidade ρ_0 . Um diagrama do problema é ilustrado na figura a seguir.

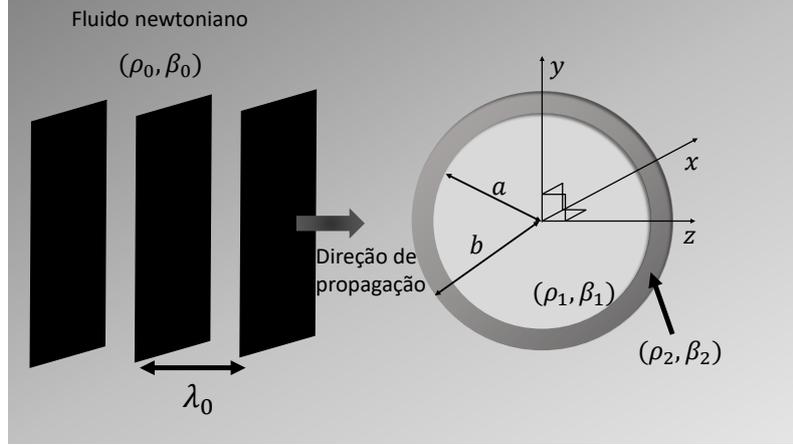


Figura 3.14: Diagrama representando o fenômeno de espalhamento simples de uma onda plana, viajando no sentido crescente do eixo z , por uma casca esférica em um cenário fluido-fluido. A onda incidente viaja em um fluido newtoniano caracterizado por sua densidade ρ_0 e compressibilidade β_0 , com comprimento de onda λ_0 e encontra, em seu caminho, uma casca esférica, de raio interno a e externo b , com densidade ρ_1 e compressibilidade β_1 no núcleo, ρ_2 e β_2 na casca, pela qual será espalhada.

A casca está centralizada na origem do sistema coordenado, e faremos uso da geometria esférica para a descrição do problema. Supomos uma onda incidente plana e monocromática no tempo, de frequência angular ω , descrita pelo potencial escalar $\varphi_{in}(k_0r, \cos \theta)$ da forma

$$\varphi_{in}(k_0r, \cos \theta) = Ae^{ik_0z} = A \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1)(i)^\ell j_\ell(k_0r) P_\ell(\cos \theta), \quad (3.47)$$

similar à onda incidente no caso da esfera densa. No interior do centro espalhador, duas ondas são necessárias na descrição do campo de radiação acústica, uma para o núcleo da casca, e outra para a casca em si. Usando os índices propostos, os potenciais internos podem ser expressos por

$$\varphi_1(k_1r, \cos \theta) = A \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1)(i)^\ell b_\ell j_\ell(k_1r) P_\ell(\cos \theta); \quad (3.48a)$$

$$\varphi_2(k_2r, \cos \theta) = A \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1)(i)^\ell [c_\ell j_\ell(k_2r) + d_\ell y_\ell(k_2r)] P_\ell(\cos \theta). \quad (3.48b)$$

Nessa notação, os coeficientes b_ℓ fazem referência ao campo no núcleo, enquanto c_ℓ e d_ℓ fazem referência à casca. A onda espalhada, assim como no caso esférico, fica expressa por

$$\varphi_{sc}(k_0r, \cos \theta) = A \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1)(i)^\ell s_\ell h_\ell^{(1)}(k_0r) P_\ell(\cos \theta), \quad (3.49)$$

onde a dependência radial foi escolhida, pela condição de Sommerfeld, como a função de Hankel esférica de primeiro tipo. As condições de contorno, expressas pelas Eqs. (3.15), precisam ser adaptadas para as duas interfaces em questão. Adotando o índice f para “fora” e d para “dentro”, com o raio r avaliado no raio de cada interface, elas tornam-se

$$-\rho_f \varphi_f = -\rho_d \varphi_d; \quad (3.50a)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \varphi_f = \frac{\partial}{\partial r} \varphi_d. \quad (3.50b)$$

Para a interface entre os meios 0 e 2 (meio exterior e meio da casca), com $r = b$,

$$-\rho_0(\varphi_{in} + \varphi_{sc}) = -\rho_2 \varphi_2; \quad (3.51a)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(\varphi_{in} + \varphi_{sc}) = \frac{\partial}{\partial r}(\varphi_2). \quad (3.51b)$$

Para a interface entre os meios 2 e 1 (meio da casca e núcleo da casca), com $r = a$,

$$-\rho_2 \varphi_2 = -\rho_1 \varphi_1; \quad (3.52a)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(\varphi_2) = \frac{\partial}{\partial r}(\varphi_1). \quad (3.52b)$$

Aplicando as funções φ para cada condição de contorno, obtemos

$$\rho_0 [j_\ell(y_0) + s_\ell h_\ell(y_0)] = \rho_2 [c_\ell j_\ell(y_2) + d_\ell y_\ell(y_2)]; \quad (3.53a)$$

$$k_0 [j'_\ell(y_0) + s_\ell h'_\ell(y_0)] = k_2 [c_\ell j'_\ell(y_2) + d_\ell y'_\ell(y_2)]; \quad (3.53b)$$

$$\rho_2 [c_\ell j_\ell(x_2) + d_\ell y_\ell(x_2)] = \rho_1 b_\ell j_\ell(x_1); \quad (3.53c)$$

$$k_2 [c_\ell j'_\ell(x_2) + d_\ell y'_\ell(x_2)] = k_1 b_\ell j'_\ell(x_1). \quad (3.53d)$$

Aqui, assim como nos casos esférico e cilíndrico, adotamos uma notação compactada: $x_0 = k_0 a$, $x_1 = k_1 a$, $x_2 = k_2 a$, $y_0 = k_0 b$, $y_1 = k_1 b$ e $y_2 = k_2 b$. As plicas denotam derivadas com relação ao argumento das funções. Podemos construir um sistema linear para os coeficientes b_ℓ , c_ℓ , d_ℓ e s_ℓ , da forma

$$\left\{ \begin{array}{l} 0.b_\ell - \rho_2 j_\ell(y_2) c_\ell - \rho_2 y_\ell(y_2) d_\ell + \rho_0 h_\ell(y_0) s_\ell = -\rho_0 j_\ell(y_0) \\ 0.b_\ell - k_2 j'_\ell(y_2) c_\ell - k_2 y'_\ell(y_2) d_\ell + k_0 h'_\ell(y_0) s_\ell = -k_0 j'_\ell(y_0) \\ -\rho_1 j_\ell(x_1) b_\ell + \rho_2 j_\ell(x_2) c_\ell + \rho_2 y_\ell(x_2) d_\ell + 0.s_\ell = 0 \\ -k_1 j'_\ell(x_1) b_\ell + k_2 j'_\ell(x_2) c_\ell + k_2 y'_\ell(x_2) d_\ell + 0.s_\ell = 0 \end{array} \right. \quad (3.54)$$

Matricialmente, o sistema é

$$\begin{bmatrix} 0 & -\rho_2 j_\ell(y_2) & -\rho_2 y_\ell(y_2) & \rho_0 h_\ell(y_0) \\ 0 & -k_2 j'_\ell(y_2) & -k_2 y'_\ell(y_2) & k_0 h'_\ell(y_0) \\ -\rho_1 j_\ell(x_1) & \rho_2 j_\ell(x_2) & \rho_2 y_\ell(x_2) & 0 \\ -k_1 j'_\ell(x_1) & k_2 j'_\ell(x_2) & k_2 y'_\ell(x_2) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_\ell \\ c_\ell \\ d_\ell \\ s_\ell \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho_0 j_\ell(y_0) \\ -k_0 j'_\ell(y_0) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

É um sistema linear bastante grande, e numericamente custoso de ser calculado. Aqui, nos resumiremos a explicitar sua solução analítica, dada mediante as seguintes definições:

$$A = -\rho_2 j_\ell(y_2); \quad (3.56a)$$

$$B = -\rho_2 y_\ell(y_2); \quad (3.56b)$$

$$F = \rho_0 h_\ell(y_0); \quad (3.56c)$$

$$G = -k_2 j'_\ell(y_2); \quad (3.56d)$$

$$H = -k_2 y'_\ell(y_2); \quad (3.56e)$$

$$J = k_0 h'_\ell(y_0); \quad (3.56f)$$

$$L = -\rho_1 j_\ell(x_1); \quad (3.56g)$$

$$M = \rho_2 j_\ell(x_2); \quad (3.56h)$$

$$P = \rho_2 y_\ell(x_2); \quad (3.56i)$$

$$Q = -k_1 j'_\ell(x_1); \quad (3.56j)$$

$$R = k_2 j'_\ell(x_2); \quad (3.56k)$$

$$S = k_2 y'_\ell(x_2); \quad (3.56l)$$

$$T = -\rho_0 j_\ell(y_0); \quad (3.56m)$$

$$U = -k_0 j'_\ell(y_0), \quad (3.56n)$$

para que o sistema se torne

$$\begin{bmatrix} 0 & A & B & F \\ 0 & G & H & J \\ L & M & P & 0 \\ Q & R & S & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_\ell \\ c_\ell \\ d_\ell \\ s_\ell \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \\ U \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

Resolvendo o sistema, cada um dos coeficientes tem a seguinte forma:

$$b_\ell = \frac{-JPRT + JMST + FPRU - FMSU}{FHMQ - BJMQ - FGPQ + AJPQ - FHLR + BJLK + FGLS - AJLS} \quad (3.58a)$$

$$c_\ell = \frac{JPQT - JLST - FPQU + FLSU}{FHMQ - BJMQ - FGPQ + AJPQ - FHLR + BJLR + FGLS - AJLS} \quad (3.58b)$$

$$d_\ell = \frac{-JMQT + JLRT + FMQU - FLRU}{FHMQ - BJMQ - FGPQ + AJPQ - FHLR + BJLR + FGLS - AJLS} \quad (3.58c)$$

$$s_\ell = \frac{HMQT - GPQT - HLRT + GLST - BMQU + APQU + BLRU - ALSU}{FHMQ - BJMQ - FGPQ + AJPQ - FHLR + BJLK + FGLS - AJLS} \quad (3.58d)$$

Essas expressões não foram analisadas numericamente, mas foram consideradas para a análise da quantidade de energia depositada. Note, como fato importante, que todos os coeficientes compartilham dos mesmos denominadores, isto é, as possíveis ressonâncias são compartilhadas entre os meios envolvidos.

A energia depositada no caroço é dada pelas relações já calculadas no núcleo, dadas nas Eqs. (3.27) e (3.29), restando, apenas, o cálculo da média temporal da energia acústica depositada na casca. Para isso, consideramos o campo acústico φ_2 e calculamos as integrais na casca. Explicitamente, para a energia potencial, temos

$$\begin{aligned} \langle W_P \rangle = & \frac{k_2^2 \rho_2}{4} |A|^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d(\cos \theta) \int_a^b r^2 dr \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(2\ell+1) (-i)^n (i)^\ell \times \\ & \times [c_n^* j_n(k_2 r) + d_n^* y_n(k_2 r)] [c_\ell j_\ell(k_2 r) + d_\ell y_\ell(k_2 r)] P_n^*(\cos \theta) P_\ell(\cos \theta), \end{aligned} \quad (3.59)$$

em que tanto $j_\ell(x)$ quanto $y_\ell(x)$ são funções que, ao tomarem argumentos positivos, produzem imagens reais. A integração em ϕ resulta em 2π , enquanto a integral em θ , graças à ortogonalidade dos polinômios de Legendre, produz uma delta de Kronecker vezes $2/(2\ell+1)$. Ainda, pela propriedade dos números complexos $z, y \in \mathbb{C}$ em que $z^* y + z y^* = 2\text{Re}[z^* y]$, podemos reescrever essa expressão como

$$\begin{aligned} \langle W_P \rangle = & \pi k_2^2 \rho_2 |A|^2 \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \left\{ |c_\ell|^2 \int_a^b r^2 j_\ell^2(k_2 r) dr + |d_\ell|^2 \int_a^b r^2 y_\ell^2(k_2 r) dr + \right. \\ & \left. + 2\text{Re}[c_\ell^* d_\ell] \int_a^b r^2 j_\ell(k_2 r) y_\ell(k_2 r) dr \right\}, \end{aligned} \quad (3.60)$$

em que as integrais envolvidas são todas analíticas (no sentido de convergirem para funções tradicionais da física matemática). Elas têm as formas

$$\int x^2 j_\ell^2(x) dx = \frac{x^3}{2} [j_\ell^2(x) - j_{\ell+1}(x)j_{\ell-1}(x)]; \quad (3.61a)$$

$$\int x^2 y_\ell^2(x) dx = \frac{x^3}{2} [y_\ell^2(x) - y_{\ell+1}(x)y_{\ell-1}(x)]; \quad (3.61b)$$

$$\int x^2 j_\ell(x)y_\ell(x) dx = \frac{x^3}{4} [2j_\ell(x)y_\ell(x) - j_{\ell+1}(x)y_{\ell-1}(x) - j_{\ell-1}(x)y_{\ell+1}(x)]. \quad (3.61c)$$

Para qualquer par de funções ϑ e ς ,

$$\int x^2 \vartheta_\ell(x)\varsigma_\ell(x) dx = \frac{x^3}{4} [2\vartheta_\ell(x)\varsigma_\ell(x) - \vartheta_{\ell+1}(x)\varsigma_{\ell-1}(x) - \vartheta_{\ell-1}(x)\varsigma_{\ell+1}(x)], \quad (3.62)$$

resultando em

$$\int_a^b r^2 j_\ell^2(k_2 r) dr = \frac{1}{2} \left\{ b^3 [j_\ell^2(k_2 b) - j_{\ell+1}(k_2 b)j_{\ell-1}(k_2 b)] - a^3 [j_\ell^2(k_2 a) - j_{\ell+1}(k_2 a)j_{\ell-1}(k_2 a)] \right\}; \quad (3.63a)$$

$$\int_a^b r^2 y_\ell^2(k_2 r) dr = \frac{1}{2} \left\{ b^3 [y_\ell^2(k_2 b) - y_{\ell+1}(k_2 b)y_{\ell-1}(k_2 b)] - a^3 [y_\ell^2(k_2 a) - y_{\ell+1}(k_2 a)y_{\ell-1}(k_2 a)] \right\}, \quad (3.63b)$$

e, por fim,

$$\begin{aligned} \int_a^b r^2 j_\ell(k_2 r)y_\ell(k_2 r) dr = \frac{1}{4} \{ & b^3 [2j_\ell(k_2 b)y_\ell(k_2 b) - j_{\ell+1}(k_2 b)y_{\ell-1}(k_2 b) - j_{\ell-1}(k_2 b)y_{\ell+1}(k_2 b)] \\ & - a^3 [2j_\ell(k_2 a)y_\ell(k_2 a) - j_{\ell+1}(k_2 a)y_{\ell-1}(k_2 a) - j_{\ell-1}(k_2 a)y_{\ell+1}(k_2 a)] \}. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Para exibir o resultado de forma esteticamente mais similar às outras geometrias, a média temporal da energia cinética é escrita como

$$\begin{aligned} \frac{4f_0}{r_2|A|^2} W_P = 2k_2^3 \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) \times \\ \left\{ \frac{|c_\ell|^2}{2} F_{jj}(k_2, a, b) + \frac{|d_\ell|^2}{2} F_{yy}(k_2, a, b) + \frac{\text{Re}[c_\ell^* d_\ell]}{2} F_{jy}(k_2, a, b) \right\}, \end{aligned} \quad (3.65)$$

em que

$$\begin{aligned} F_{jy} = \frac{1}{4} \{ & b^3 [2j_\ell(k_2 b)y_\ell(k_2 b) - j_{\ell+1}(k_2 b)y_{\ell-1}(k_2 b) - j_{\ell-1}(k_2 b)y_{\ell+1}(k_2 b)] \\ & - a^3 [2j_\ell(k_2 a)y_\ell(k_2 a) - j_{\ell+1}(k_2 a)y_{\ell-1}(k_2 a) - j_{\ell-1}(k_2 a)y_{\ell+1}(k_2 a)] \}, \end{aligned} \quad (3.66)$$

que foi escolhida para sintetizar a notação.

Para o caso da energia cinética, uma das integrais envolvidas não é analítica, de modo que a média temporal da energia cinética depositada na casca é expressa

por

$$\frac{4f_0}{r_2|A|^2}W_K = 2k_2^3 \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) \times \left\{ \begin{aligned} &k_2^2 \int_a^b [c_\ell^* j'_\ell(k_2 r) + d_\ell^* y'_\ell(k_2 r)] [c_\ell j'_\ell(k_2 r) + d_\ell y'_\ell(k_2 r)] r^2 dr \\ &\ell(\ell + 1) \int_a^b [c_\ell^* j_\ell(k_2 r) + d_\ell^* y_\ell(k_2 r)] [c_\ell j_\ell(k_2 r) + d_\ell y_\ell(k_2 r)] dr \end{aligned} \right\}. \quad (3.67)$$

Esses resultados, expressos aqui analiticamente, são uma perspectiva de continuação desse estudo, numa investigação numérica em busca de regimes de ressonância que possam emergir nas cascas. A maior complexidade das fórmulas envolvidas foi o fator limitante para essa geometria.

Sólidos elásticos e viscoelásticos

Sólidos, ao serem o meio de transporte de ondas acústicas, contrastam-se aos fluidos pela presença de componentes transversais das ondas acústicas, em adição à componente longitudinal. Como consequência direta, maior robustez matemática é envolvida no tratamento analítico dos campos de radiação acústica. Por exemplo, não é mais possível associar uma pressão escalar à onda acústica, de modo que a análise feita nos capítulos anteriores para potenciais e energias perde parte de sua aplicabilidade. No entanto, também é possível descrever os campos no interior de sólidos por meio de potenciais escalares, que diferem dos potenciais em fluidos por estarem associados aos tensores de tensão e deformação dos sólidos, em comparação aos campos de pressão e velocidade dos fluidos.

Nesse capítulo, introduzimos a propagação de ondas acústicas em meios elásticos e viscoelásticos. Usando a teoria da elasticidade [15], definimos grandezas relevantes nessa análise, como tensões e deformações em corpos elásticos (e suas extensões a corpos viscoelásticos). Mostramos, com base na literatura da área [46], como os tensores são capazes de expressar potenciais que satisfazem equações de Helmholtz para materiais viscoelásticos. Descrevem-se, matematicamente, diversos modelos viscoelásticos conhecidos e, em particular, analisa-se o modelo de Kelvin-Voigt fracionário na descrição formal do espalhamento de uma onda acústica por uma esfera viscoelástica. Por fim, traçam-se paralelos entre as definições de energia e momento para sólidos dessas naturezas e fluidos, tratados anteriormente.

4.1 Corpos elásticos

A teoria da elasticidade define objetos elásticos como aqueles que, após sofrerem uma deformação, são capazes de retornar ao seu estado inicial (não deformado) [15]. A formalização dos conceitos de tensão e deformação envolve formalismos matemáticos bastante rigorosos, que serão tratados nessa seção.

Consideramos, inicialmente, um corpo elástico antes de ser deformado, localizado espacialmente em um volume \mathcal{V} , cujos pontos em seu interior são descritos pelo vetor posição $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ em algum sistema de coordenadas dado pela trinca (x_1, x_2, x_3) . A deformação do objeto leva o ponto previamente localizado por \vec{r} para a posição localizada por $\vec{r}' = (x'_1, x'_2, x'_3)$, de modo que o vetor deslocamento é definido por

$$\vec{u} = \vec{r}' - \vec{r}, \quad (4.1)$$

e ilustrado na figura a seguir.

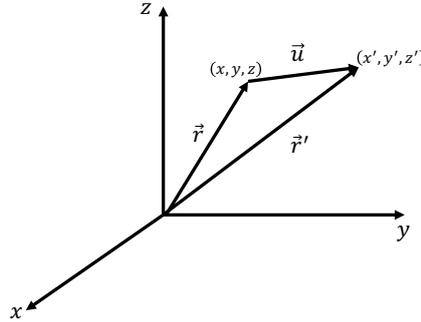


Figura 4.1: Diagrama representando o vetor deslocamento \vec{u} com relação à posição de um ponto no interior de um corpo elástico antes, \vec{r} , e depois, \vec{r}' , de uma deformação.

A deformação implica, de modo geral, na mudança das distâncias entre dois pontos. Anterior à deformação, dois pontos suficientemente próximos do corpo que distavam $d\ell = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}$, após a deformação, passam a distar $d\ell \rightarrow d\ell' = \sqrt{dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2}$, onde $dx'_i = dx_i + du'_i$, $i = 1, 2, 3$ caracterizam as diferenças nas i -ésimas coordenadas após a deformação. O diferencial du_i , do vetor deslocamento, mede justamente essas deformações. Ele pode ser expresso por

$$du_i = \sum_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k, \quad (4.2)$$

obtível pela regra da cadeia para uma função de múltiplas variáveis.

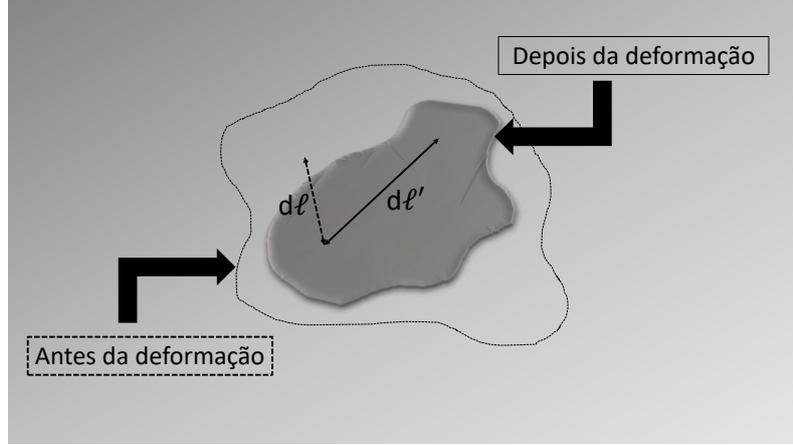


Figura 4.2: Ilustração da deformação de um corpo elástico e como mudam as distâncias que medem dois pontos antes e depois da deformação. A forma tracejada representa o corpo antes da deformação, enquanto a densa representa ele depois. Dois pontos, que antes da deformação distavam $d\ell$ passam a distar $d\ell'$.

Essa expressão permite escrever, explicitamente, a relação entre a distância após a deformação, $d\ell'$, e antes da deformação, $d\ell$. Para isso, considere

$$\begin{aligned} d\ell'^2 &= \sum_i dx_i^2 = \sum_i (dx_i + du_i)^2 \\ &= d\ell^2 + \sum_{i,k} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) dx_i dx_k + \sum_{i,k,m} \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_k} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right) dx_k dx_i, \end{aligned} \quad (4.3)$$

de modo que o tensor de deformações, ϵ_{ik} , é definido como

$$\epsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \sum_m \frac{\partial u_m}{\partial x_k} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right), \quad (4.4)$$

para que a relação entre $d\ell'$ e $d\ell$ torne-se

$$d\ell'^2 = d\ell^2 + 2 \sum_{i,k} \epsilon_{ik} dx_i dx_k. \quad (4.5)$$

O tensor de deformações compacta, em si, diversas informações sobre o corpo elástico. Inicialmente, perceba que

$$\epsilon_{ik} = \epsilon_{ki}, \quad (4.6)$$

isto é, o tensor é simétrico. Além disso, para um espaço vetorial de dimensão finita N (no caso, $\dim[\mathbb{R}^3] = N = 3$), ele possui uma representação matricial quadrada, de ordem $N \times N$, e, pela simetria da Eq. (4.6), pode ser diagonalizável. Isso significa que existe um conjunto de autovetores, associados a autovalores $\epsilon^{(1)}, \epsilon^{(2)}, \dots, \epsilon^{(N)}$,

para os quais a matriz de ϵ_{ik} é diagonal, da forma

$$\epsilon_{ik} = \begin{bmatrix} \epsilon^{(1)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \epsilon^{(2)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon^{(3)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \epsilon^{(N)} \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

de modo que, na direção de seus autovetores,

$$d\ell'^2 = (1 + 2\epsilon^{(1)}) dx_1^2 + (1 + 2\epsilon^{(2)}) dx_2^2 + (1 + 2\epsilon^{(3)}) dx_3^2, \quad (4.8)$$

isto é, o i -ésimo autovalor mede a variação relativa na distância entre dois pontos na direção do i -ésimo autovalor, pois

$$\frac{dx'_i - dx_i}{dx_i} = \sqrt{1 + 2\epsilon^{(i)}} \approx \epsilon^{(i)}. \quad (4.9)$$

Outra propriedade do tensor de deformações pode ser obtida considerando pequenas deformações, em que o termo composto pelo produto de derivadas da Eq. (4.4) tem ordem consideravelmente menor do que os termos lineares, isto é, o tensor de deformações escreve-se como

$$\epsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right). \quad (4.10)$$

Nesse caso, podemos considerar deformações volumétricas e, seguindo os passos expressos nas Refs. [15, 55], obtemos a variação absoluta de um volume $dV \rightarrow dV'$ na deformação pelo traço de ϵ_{ik} ,

$$\frac{dV' - dV}{dV} = \text{tr}(\epsilon_{ik}). \quad (4.11)$$

Uma vez generalizada a ideia de deformações em corpos elásticos, faz-se necessária a generalização do conceito de força, que agirá como fonte geradora das deformações. Para isso, consideramos que um corpo elástico é tal que qualquer deformação induz, em seu interior, uma coleção de forças internas que buscam retornar o corpo ao seu estado de equilíbrio. Essas forças internas de caráter restaurativo são de ação próxima, ou seja, agem apenas nas vizinhanças das deformações locais. Define-se como $\vec{f}(\vec{r})$ a força por unidade de volume que atua num ponto do corpo localizado pelo vetor \vec{r} . A força total em um volume suficientemente pequeno no interior desse corpo, de volume V_0 , é dada pela integral volumétrica de \vec{f} em V_0 .

Considerando as forças de curto alcance, podemos simplificar a análise da integral volumétrica por uma integral superficial que delimita o volume de interesse. Nessa simplificação, usando o teorema de Gauss, cada componente de \vec{f} , indexadas por i , deve ser posta na forma de um divergente,

$$\vec{f}_i = \sum_k \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}, \quad (4.12)$$

para que a integral no volume V_0 torne-se a integral sobre a superfície S_0 que o envolve, pelo teorema de Gauss,

$$\int_{V_0} \mathbf{f}_i dV = \int_{V_0} \sum_k \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} dV = \oint_{S_0} \sum_k \sigma_{ik} d\mathbf{S}_k, \quad (4.13)$$

em que $d\mathbf{S}_k$ é o elemento de superfície na k -ésima direção, apontando para fora do volume fechado.

O tensor σ_{ik} faz o papel de tensor a partir de cujo divergente determinam-se as densidades de forças e, por isso, é definido como tensor de tensões. Fisicamente, na representação matricial de σ_{ik} , o elemento na entrada ik corresponde à i -ésima componente da força por unidade de área perpendicular ao eixo que aponta na k -ésima direção.

Corpos elásticos e viscoelásticos diferem, justamente, pela relação entre os tensores de tensão, σ , e deformação, ϵ . Um corpo isotropico elástico possui, por exemplo, uma lei de Hooke generalizada como essa relação,

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}, \quad (4.14)$$

em que C_{ijkl} é um tensor de quarta ordem, simétrico (pela isotropia), que generaliza uma constante da mola na lei de Hooke convencional. Ele recebe o nome de tensor do módulo da elasticidade. A Eq. (4.14) permite que se determinem potenciais escalares para a descrição de ondas que viagem harmonicamente no interior de meios elásticos [56]. Nessa determinação, três equações de Helmholtz são produzidas: uma que caracteriza uma porção longitudinal da onda, associada ao número de onda longitudinal, k_L ; e duas que caracterizam as porções transversais da onda, associadas aos números de onda k_{S1} e k_{S2} .

Nesse estudo, não investigamos em detalhes nenhum exemplo de problemas de espalhamento por corpos elásticos. No entanto, as definições presentes nessa seção foram usadas para o tratamento de modelos viscoelásticos, em particular para o modelo de Kelvin-Voigt fracionário.

4.2 Modelos viscoelásticos

De forma similar a corpos elásticos, corpos viscoelásticos também possuem a propriedade de retornarem ao seu estado inicial depois de terem sido deformados, porém esse retorno leva mais tempo do que num corpo puramente elástico, havendo uma espécie de resistência à restauração. Daí o nome “viscoelástico”, por possuírem comportamentos elásticos e viscosos concomitantes em suas dinâmicas de deformação. Eles são encontrados frequentemente na natureza, como em células biológicas [57–59] e na modelagem de polímeros [60–62].

O tipo de modelo viscoelástico usado na descrição do corpo é escolhido de acordo com as diferentes combinações entre as respostas elásticas e viscosas. O modelo de Kelvin-Voigt, por exemplo, destaca-se por sua suficiente simplicidade matemática e grande aplicabilidade [63, 64]. Esse modelo é produzido ao considerar que entre dois pontos de tensão do corpo, associam-se em paralelo um pistão (que produz o comportamento viscoso) e uma mola (que produz o comportamento elástico).

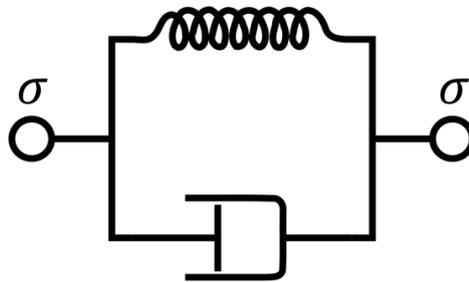


Figura 4.3: Representação em forma de circuito mecânico de um sólido sujeito a uma tensão σ modelado por Kelvin-Voigt. Nesse modelo, a mola é responsável pela resposta elástica, enquanto o pistão é responsável pela resposta viscosa.

Nele, a tensão σ relaciona-se à deformação ϵ pela equação tensorial

$$\sigma = C\epsilon + \eta\partial_t\epsilon, \quad (4.15)$$

na qual η é a viscosidade do material. Esse modelo capta, com bastante acurácia, o processo de deformação do corpo ao longo do tempo para diversos materiais, mas o processo de retorno do corpo ao seu estado inicial não é descrito eficientemente por ele [65].

O modelo de Maxwell, em contraste ao de Kelvin-Voigt, associa entre dois pontos de tensão no corpo uma mole e um pistão em série, como mostra a figura a seguir.



Figura 4.4: Representação em forma de circuito mecânico de um sólido sujeito a uma tensão σ no modelo de Maxwell. Nele, assim como com Kelvin-Voigt, a mola é responsável pela resposta elástica, enquanto o pistão é responsável pela resposta viscosa, mas a mudança na associação trás diferenças para os tipos de respostas.

Essa distribuição produz uma relação entre tensão e deformação da forma

$$\sigma + \eta \partial_t \sigma = C \eta \partial_t \epsilon. \quad (4.16)$$

Nesse modelo, um material que esteja sujeito a deformações constantes relaxa gradualmente suas tensões, enquanto aquele que está sujeito a tensões constantes sofre uma rápida deformação (pela porção elástica) e, posteriormente, uma deformação mais lenta pela porção viscosa. Associações desse modelo produzem o modelo de Burgers, em que dois sistemas de Maxwell são associados em paralelo; e o modelo de Wiechert, em que existe a associação em paralelo de $N > 2$ modelos de Maxwell.

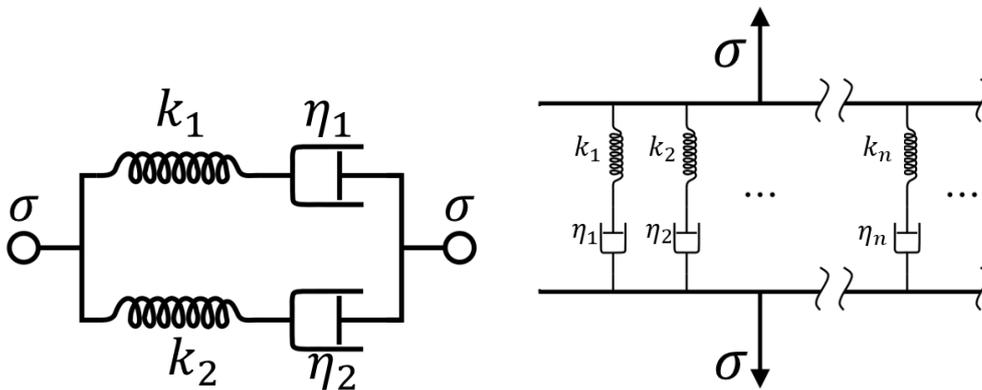


Figura 4.5: Representação em forma de circuito mecânico de um sólido sujeito a uma tensão σ nos modelos de Burgers (esquerda) e Wiechert (direita). Note que os modelos de Maxwell e Burgers são casos particulares do modelo de Wiechert.

Por fim, o modelo de Zener (ou modelo linear) combina os modelos de Kelvin Voigt e Maxwell ao tratar de corpos que sofrem rápidas deformações sob tensão constante, e possuem respostas assintóticas mais lentas do que nos demais modelo.

Nele, um pistão e uma mola de constante C^1 em paralelo são ligados em série com uma mola de constante C^2 , como ilustra a figura a seguir.

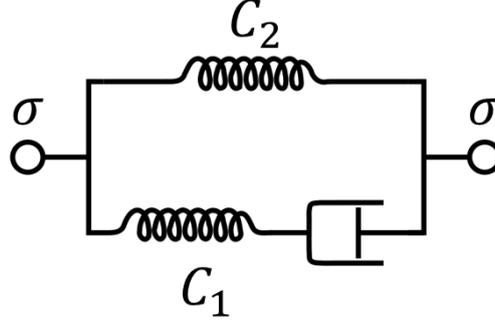


Figura 4.6: Representação em forma de circuito mecânico de um sólido sujeito a uma tensão σ no modelo de Zener.

Nesse estudo, investigamos em mais detalhes o modelo de Kelvin Voigt e uma variação dele, o modelo fracionário, com base nas Refs. [46, 66–68]. Usamos uma esfera descrita pelo modelo de Kelvin Voigt fracionário como centro espalhador de uma onda acústica que, anteriormente, viajava em um fluido newtoniano e investigamos como define-se a energia depositada na interação.

4.3 Modelo de Kelvin-Voigt

No modelo de Kelvin-Voigt, como descrito na seção anterior, a relação entre os tensores de tensão e deformação é dada pela Eq. (4.15). Explicitando os índices relevantes e adotando $B = \eta$, escreve-se

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl} + B_{ijkl}\frac{\partial\epsilon_{kl}}{\partial t}. \quad (4.17)$$

Os tensores C_{ijkl} e B_{ijkl} podem ser reescritos, por serem isotrópicos, de acordo com a Ref. [], como

$$\begin{aligned} C_{ijkl} &= \lambda_e \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu_e (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \kappa_e (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}), \\ B_{ijkl} &= \lambda_v \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu_v (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \kappa_v (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}); \end{aligned} \quad (4.18)$$

em que os índices $_e$ e $_v$ são referentes, respectivamente, a respostas elásticas e viscosas do meio. Assim, podemos reescrever os termos da Eq. (4.17), com as propriedades das deltas de Kronecker, como

$$\sigma_{ij} = \lambda_e \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2\mu_e \epsilon_{ij} + \lambda_v \delta_{ij} \partial_t \epsilon_{kk} + 2\mu_v \partial_t \epsilon_{ij}, \quad (4.19)$$

na qual as constantes λ referem-se aos coeficientes longitudinal, enquanto as constantes μ referem-se aos coeficientes de cisalhamento. Em seguida, supõe-se que a deformação considerada é pequena o suficiente para que o tensor de deformações possa ser expresso pela Eq. (4.10), e que a equação de conservação de momentos para um sólido viscoelástico, em componentes,

$$\rho_1 \partial_t^2 u_i = \partial_{x_j} \sigma_{ji}, \quad (4.20)$$

seja válida para o transporte da onda acústica, obtém-se, vetorialmente,

$$\rho_1 \partial_t^2 \vec{u} = (\lambda_e + \mu_e) \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) + \mu_e \nabla^2 \vec{u} + (\lambda_v + \mu_v) \nabla (\nabla \cdot \partial_t \vec{u}) + \mu_v \nabla^2 \partial_t \vec{u}, \quad (4.21)$$

reescrita pela relação $\nabla^2 \vec{u} = \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) - \nabla \times \nabla \times \vec{u}$,

$$\partial_t^2 \vec{u} = \underbrace{\frac{(\lambda_e + 2\mu_e)}{\rho_1}}_{=c_L^2} \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) - \underbrace{\frac{\mu_e}{\rho_1}}_{=c_S^2} \nabla \times \nabla \times \vec{u} + \underbrace{\frac{(\lambda_v + 2\mu_v)}{\rho_1}}_{=c_L^2 \tau_L} \nabla (\nabla \cdot \partial_t \vec{u}) - \underbrace{\frac{\mu_v}{\rho_1}}_{c_S^2 \tau_S} \nabla \times \nabla \times \partial_t \vec{u}. \quad (4.22)$$

Nesse ponto, definem-se as velocidades do som e tempos de relaxação longitudinais e de cisalhamento, conforme indicado na Eq. (4.22), produzindo

$$\partial_t^2 \vec{u} = c_L^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - c_S^2 \nabla \times \nabla \times \vec{u} + \tau_L c_L^2 \nabla (\nabla \cdot \partial_t \vec{u}) - \tau_S c_S^2 \nabla \times \nabla \times \partial_t \vec{u}. \quad (4.23)$$

Considerando a viagem de uma onda harmônica no tempo, de frequência angular ω , o teorema da decomposição de Hemiholtz [69] permite expressar \vec{u} em termos de um potencial escalar φ_L e um potencial vetor \vec{A} como

$$\vec{u} = (\nabla \varphi_L + \nabla \times \vec{A}) e^{-i\omega t}; \quad \nabla \cdot \vec{A} = 0. \quad (4.24)$$

Essa decomposição, juntamente da representação do campo não divergente \vec{A} usando dois potenciais escalares de Debye [70], $\varphi_{S,1}$ e $\varphi_{S,2}$:

$$\vec{A} = \vec{\mathcal{L}} \varphi_{S,1} + \nabla \times \vec{\mathcal{L}} \varphi_{S,2}, \quad (4.25)$$

em que $\vec{\mathcal{L}}$ é o operador momento angular usual, $\vec{\mathcal{L}} = -i\vec{r} \times \nabla$. Todos esses resultados compilados produzem, graças à comutabilidade dos operadores [55], equações de Helmholtz para os três potenciais escalares, da forma

$$(\nabla^2 + k_L^2) \varphi_L = 0; \quad (4.26a)$$

$$(\nabla^2 + k_S^2) \varphi_{S,1} = 0; \quad (4.26b)$$

$$(\nabla^2 + k_S^2) \varphi_{S,2} = 0; \quad (4.26c)$$

mediante a definição

$$k_j = \frac{\omega}{c_j} \frac{1}{\sqrt{1 - i\omega\tau_j}}; \quad j = \text{S ou L.} \quad (4.27)$$

Com isso, são os potenciais φ_L , $\varphi_{S,1}$ e $\varphi_{S,2}$ que descrevem uma onda acústica viajando em um material viscoelástico. Esses potenciais são usados, de maneira não trivial, para calcular o vetor deslocamento imposto pela passagem da frente de onda.

Como reproduzido aqui, esse modelo não é capaz de refletir uma propriedade importante do coeficiente de absorção do sólido viscoelástico. Na definição da Eq. (4.27), há um termo análogo ao índice de refração complexo, que pode ser denotado por $n_c(\omega\tau_j)$, onde j pode ser a componente longitudinal L ou de cisalhamento S:

$$n_c(\omega\tau_j) = \frac{1}{\sqrt{1 - i\omega\tau_j}}. \quad (4.28)$$

Esse índice de refração pode ser reescrito como $n_c = n_R + i\tilde{\alpha}$, com n_R sendo sua porção real, e $\tilde{\alpha}$ a imaginária. A porção imaginária relaciona-se ao coeficiente de absorção adimensional do material, α , calculável pelo quadrado da relação de dispersão juntamente com a Eq. (4.28), juntamente da aproximação conservativa de pequenez de Szabo [71], para obter

$$\alpha_j = \alpha_0\omega, \quad (4.29)$$

onde α_0 contém as dependências do material de α_j . Esse resultado, no entanto, não reflete a lei de potências com a frequência, que deve ser satisfeita para materiais viscoelásticos [71],

$$\alpha_j = \alpha_0\omega^y, \quad (4.30)$$

verificada experimentalmente, em que $0 < y < 2$, de acordo com o material. Esse problema pode ser resolvido ao supor que a derivada temporal do modelo de Kelvin-Voigt possa ser fracionária, de ordem ν , no sentido da derivação fracionária de Caputo [72], que escreve-se para uma função $f(t)$ como

$$\mathfrak{F}[\partial_t^\nu f(t)] = (-i\omega)^\nu \mathfrak{F}[f(t)], \quad (4.31)$$

em que $\mathfrak{F}[g(t)] = G(\omega)$ denota a transformada de Fourier de uma função $g(t)$. Explicitamente,

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\partial_t^\nu f(t)] e^{-i\omega t} dt = (-i\omega)^\nu F(\omega). \quad (4.32)$$

Essa definição altera as passagens propostas anteriormente, com redefinições dos tempos de relaxação longitudinal e de cisalhamento, da forma

$$\tau_L = \left(\frac{\lambda_v + 2\mu_v}{\rho_1 c_L^2} \right)^{\frac{1}{\nu}}; \quad (4.33a)$$

$$\tau_S = \left(\frac{\mu_v}{\rho_1 c_S^2} \right)^{\frac{1}{\nu}}; \quad (4.33b)$$

que, combinadas com

$$\partial_t^\nu e^{-i\omega t} = (-i\omega)^\nu e^{-i\omega t}, \quad (4.34)$$

resultado da Eq. (4.32) com $f(t) = e^{-i\omega t}$, produzem as equações de Helmholtz

$$(\nabla^2 + k_\ell^2) \varphi_L = 0; \quad (4.35a)$$

$$(\nabla^2 + k_s^2) \varphi_{s,1} = 0; \quad (4.35b)$$

$$(\nabla^2 + k_s^2) \varphi_{s,2} = 0. \quad (4.35c)$$

Essas novas descrições adaptam a relação de dispersão para

$$k_j^2 = \left(\frac{\omega}{c_j} \right)^2 \left(\frac{1}{1 + (-i\omega\tau_j)^\nu} \right), \quad (4.36)$$

com j , novamente, podendo assumir o papel longitudinal, L, ou de cisalhamento, S. A nova potência ν introduzida na relação de dispersão em virtude da derivação fracionária corrige o resultado para o coeficiente de absorção, para que ele se encaixe melhor com o resultado empírico,

$$\alpha_j = \alpha_0 \omega^\nu, \quad (4.37)$$

com $\nu = y$ recuperando o resultado esperado.

4.4 Espalhamento por uma esfera viscoelástica

Consideramos uma onda acústica plana, viajando em um fluido newtoniano descrito por sua densidade ρ e compressibilidade β quando não perturbado, de dependência harmônica no tempo, com frequência angular ω (os índices para ρ e β , nesse caso, não são necessários, pois esse fluido é o único ente que depende desses parâmetros). Tratamos, aqui, do espalhamento dessa onda por uma esfera viscoelástica densa, centralizada na origem do sistema de coordenadas, caracterizada pelas grandezas descritas na seção anterior (velocidades do som longitudinal, de cisalhamento,

tempos de relaxamento longitudinal e de cisalhamento). Em virtude da geometria esférica do problema, o formalismo analítico é tratado com maior facilidade fazendo uso de coordenadas esféricas. A onda incidente, por simplicidade analítica, é considerada muito longe da esfera, ou seja, $kr \gg 1$, de modo que podemos expressá-la pelo potencial

$$\varphi_{in}(kr, \cos \theta, \phi) \sim \frac{1}{kr} \sum_{\ell, m} a_{\ell m} \sin \left(kr - \frac{\ell \pi}{2} \right) Y_{\ell}^m(\cos \theta, \phi); \quad (4.38)$$

em que o símbolo “ \sim ” denota “é assintótico a”; a dependência radial na função seno decorre do comportamento assintótico da função de Bessel esférica para argumentos grandes (para todas as expansões, verificar o Apêndice 1); k é o número da onda no meio fluido; $a_{\ell, m}$ são os coeficientes que medem as amplitudes das ondas parciais; e Y_{ℓ}^m denotam os harmônicos esféricos. A onda espalhada, na mesma hipótese de ser suposta muito longe do centro espalhador ($kr \gg 1$), é expressa por meio do potencial

$$\varphi_{sc}(kr, \cos \theta, \phi) \sim -\frac{ie^{ikr}}{kr} \sum_{\ell, m} i^{-\ell} s_{\ell} a_{\ell m} Y_{\ell}^m(\cos \theta, \phi), \quad (4.39)$$

no qual surgem os coeficientes espalhados s_{ℓ} , a serem determinados na solução do problema de espalhamento. Para os campos internos ao centro espalhador, três potenciais escalares são necessários, conforme foi descrito na seção anterior. Eles possuem as seguintes expressões:

$$\varphi_{\ell}(k_L r, \cos \theta, \phi) = \sum_{\ell, m} b_{\ell} a_{\ell m} j_{\ell}(k_L r) Y_{\ell}^m(\cos \theta, \phi); \quad (4.40a)$$

$$\varphi_{S,1}(k_S r, \cos \theta, \phi) = \sum_{\ell, m} c_{\ell} a_{\ell m} j_{\ell}(k_S r) Y_{\ell}^m(\cos \theta, \phi); \quad (4.40b)$$

$$\varphi_{S,2}(k_S r, \cos \theta, \phi) = \sum_{\ell, m} d_{\ell} a_{\ell m} j_{\ell}(k_S r) Y_{\ell}^m(\cos \theta, \phi), \quad (4.40c)$$

nas quais os coeficientes b_{ℓ} , c_{ℓ} e d_{ℓ} são coeficientes internos, respectivamente, da onda longitudinal e das duas ondas de cisalhamento; j_{ℓ} são as funções de Bessel esféricas; k_L e k_S são os números de onda, respectivamente, longitudinal e de cisalhamento.

O problema de espalhamento é completamente determinado pelas condições de contorno. Nesse caso, elas diferem um pouco do caso fluido-fluido, mas possuem a mesma motivação: garantir continuidade dos campos nas interfaces, bem como estabelecer limites para os comportamentos das tensões e deformações induzidos

pela passagem da frente de onda. Elas são as seguintes:

$$u_r(a, \theta, \phi) = \frac{i}{\omega} \frac{\partial}{\partial r} [\varphi_{in}(r, \theta, \phi) + \varphi_{sc}(r, \theta, \phi)]_{r=a}; \quad (4.41a)$$

$$\sigma_{rr}(a, \theta, \phi) = -i\rho_0\omega [\varphi_{in}(a, \theta, \phi) + \varphi_{sc}(a, \theta, \phi)]; \quad (4.41b)$$

$$\sigma_{r\theta}(a, \theta, \phi) = 0; \quad (4.41c)$$

$$\sigma_{r\phi}(a, \theta, \phi) = 0. \quad (4.41d)$$

A Eq. (4.41a) garante que o deslocamento radial da partícula deve ser igual ao deslocamento radial do fluido na superfície da interface; a Eq. (4.41b) prevê que a pressão do fluido na superfície de contato deve ser devida unicamente à componente radial das tensões da esfera; as Eqs. (4.41c) e (4.41d) são garantias para que a partícula esférica não gire com a passagem da frente de onda.

Resolvendo o problema de espalhamento de forma similar ao feito nas Refs. [46, 55], usam-se as condições de contorno para construir um sistema linear para os coeficientes b_ℓ, c_ℓ, d_ℓ e s_ℓ . Com a notação $x_L = k_L a$, $x_S = k_S a$ e $x_0 = ka$, temos, para a primeira condição de contorno, Eq. (4.41a),

$$\overbrace{\left[-i \left(\frac{x_0}{\omega} \right) h_\ell^{(1)}(x_0) \right]}^{\alpha_{11}} s_\ell + \underbrace{[x_L j'_\ell(x_L)]}_{\alpha_{12}} b_\ell + \overbrace{[\ell(\ell+1)j_\ell(x_S)]}_{\alpha_{13}} c_\ell = \underbrace{\frac{x_0}{\omega} j'_\ell(x_0)}_{\beta_1}; \quad (4.42)$$

em que os termos α_{11}, α_{12} e α_{13} são os coeficientes de s_ℓ, b_ℓ e c_ℓ , respectivamente, e β_1 é uma constante que irá compor o vetor constante à direita da igualdade na equação matricial do sistema linear. A segunda condição de contorno, Eq. (4.41b), produz

$$\overbrace{\left[\frac{i\rho_0 x_S^2}{\omega\rho_1} h_\ell^{(1)}(x_0) \right]}^{\alpha_{21}} s_\ell + \underbrace{\left\{ [2\ell(\ell+1) - x_S^2] j_\ell(x_L) - 4x_L j'_\ell(x_L) \right\}}_{\alpha_{22}} b_\ell + \underbrace{\left\{ 2\ell(\ell+1) [x_S j'_\ell(x_S) - j_\ell(x_S)] \right\}}_{\alpha_{23}} c_\ell = - \overbrace{\frac{i\rho_0 x_S^2}{\omega\rho_1} j_\ell(x_0)}^{\beta_2}; \quad (4.43)$$

de modo que essa torna-se a segunda equação do sistema linear, com a forma

$$\alpha_{21}s_\ell + \alpha_{22}b_\ell + \alpha_{23}c_\ell = \beta_2. \quad (4.44)$$

As condições das Eqs. (4.41c) e (4.41d), combinadas, implicam em $d_\ell = 0 \forall \ell \geq 0$ e

$$\overbrace{\{2[j_\ell(x_L) - x_L j'_\ell(x_L)]\}}^{\alpha_{32}} b_\ell + \underbrace{\{2x_S j'_\ell(x_S) + [x_S^2 - 2\ell(\ell + 1) + 2] j_\ell(x_S)\}}_{\alpha_{33}} c_\ell = \overbrace{0}^{\beta_3}, \quad (4.45)$$

produzindo um sistema linear com três incógnitas e três equações que, matricialmente, escreve-se como

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_\ell \\ b_\ell \\ c_\ell \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (4.46)$$

ou como uma equação matricial da forma

$$\alpha \vec{v} = \vec{\beta}, \quad (4.47)$$

em que a matriz α tem seus coeficientes expressos nas Eqs. (4.42), (4.43) e (4.45).

Essa equação resolve completamente o problema de espalhamento, uma vez que o sistema possui solução com a garantia da existência da inversa da matriz α . Apesar de não trivial, os resultados aqui revisitados da literatura podem ser usados para o cálculo da energia depositada durante o processo de interação.

Diferentemente do caso de fluidos, em que as equações de conservação são suficientemente simples para serem trabalhadas, o caso viscoelástico trás consigo complexidades analíticas que fogem ao escopo desse estudo. No entanto, uma revisão bibliográfica no assunto foi conduzida [73–75], e, com base especialmente na Ref. [73], discute-se a respeito da unicidade e existência de um conceito de energia livre com base nos princípios termodinâmicos de um sistema viscoelástico.

Nessa discussão, Breuer e Onat [74] determinaram que a equação constitutiva da viscoelasticidade, uma forma modificada da Eq. (4.17) adaptada para servir a diferentes modelos viscoelásticos, não é suficiente para caracterizar completamente uma energia livre. Para materiais viscoelásticos lineares (como são os casos dos modelados por Kelvin-Voigt, seja ou não fracionário), existe um problema de não-unicidade nas definições dessa energia [74, 75]. De forma geral, a energia armazenada em um material viscoelástico não pode ser caracterizada apenas com base em equações constitutivas [73].

Com isso, as energias são caracterizadas, usualmente, por leis integrais que envolvem tensões ou deformações. Como diferentes modelos viscoelásticos impõem

diferentes relações entre tensões e deformações, tais análises não serão conduzidas aqui. Para detalhes mais técnicos, sugerimos as Refs. [73–77].

Conclusões e perspectivas

Nesse estudo, buscamos caracterizar as interações entre ondas acústicas e diferentes tipos de materiais ao analisar seus campos internos em cenários de espalhamento. O objetivo primordial foi o de construir um estudo de base para que aplicações a metamateriais acústicos possam ser desenvolvidas no futuro, estruturadas sobre as análises das energias e momentos depositados em centros espalhadores discutidos aqui. Inicialmente, formalizamos a proposta ao definir as grandezas de interesse na descrição da dinâmica de ondas acústicas em meios fluidos. Para isso, fizemos uma vasta revisão bibliográfica no que diz respeito à física da propagação de ondas em fluidos e explicitamos, por meio de princípios básicos de conservação, as expressões analíticas para as médias temporais de diferentes grandezas dinâmicas, como a densidade de energia, momento cinético, momento canônico e momento angular de spin. A energia e o momento angular de spin tornaram-se, pela possibilidade de aplicação e tratamento analítico, os focos do estudo. Um paralelo foi traçado aos resultados eletromagnéticos da propagação de ondas, mostrando que a não participação do campo de pressão ao determinar a densidade de spin acústico causa a alteração em um fator $1/2$ na expressão da relação entre os momentos da onda. Além disso, notou-se a natureza solenoidal dessa densidade, o que ocasiona spin total nulo em volumes finitos e limitados de fluidos em que a variação de pressão vá a zero na superfície. Com essa formalização, fizemos uso da teoria de espalhamento como metodologia para determinar as expressões das ondas acústicas envolvidas em diferentes geometrias e combinações de meios. Ao longo do estudo, investigamos cenários fluido-fluido com centro espalhador de geometria esférica, cilíndrica e de casca esférica. Para os dois primeiros, fizemos uso de cálculos numéricos

para explicitar a existência de regimes de ressonância no interior do centro espalhador, isto é, a existência de combinações entre comprimento da onda incidente e dimensões do centro espalhador que otimizam a quantidade de energia transferida na interação. Verificamos que as ressonâncias aconteciam apenas em combinações de meios específicas, em que as densidades entre os meios fossem muito diferentes, e que a velocidade da onda fosse menor no centro espalhador. Interpretamos esses resultados de duas formas: a primeira era que a mudança brusca de meios faria com que muita energia se dissipasse ao entrar em contato com o centro espalhador; a segunda, que caso a onda “acelerasse” ao entrar no centro espalhador, ela não seria facilmente armazenada em seu interior. Esses resultados mostraram-se presentes tanto em esferas quanto em cilindros.

Além disso, mostramos, como resultado novo na literatura e, atualmente, submetido para publicação científica, que existe um pico de ressonância no regime de Rayleigh, um resultado não esperado por conta da relação entre as dimensões do comprimento da onda incidente e do raio do centro espalhador. No caso da esfera, fomos capazes de calcular analiticamente o valor da combinação para a qual ocorre a ressonância. Nesse sentido, buscamos aplicações como as propostas pela Ref. [78] na inativação de estruturas virais com a aplicação ressonante de ultrassom. Esperamos também, com esses resultados, ser capazes de fornecer um ponto de partida na construção de materiais que otimizem o armazenamento de som, ou seu transporte. A deposição de spin também foi investigada para ondas planas, que inerentemente não possuem spin associado, e como essa dinâmica mudaria para feixes de Bessel, por exemplo. Com isso, uma primeira perspectiva de estudo decorrente desse aqui apresentado é a análise de feixes de Bessel como ondas incidentes nas geometrias de espalhamento tratadas, buscando a deposição ótima da densidade de spin, em busca de combinações ressonantes para essa grandeza.

Para cascas esféricas, em virtude da grande complexidade envolvida nas expressões, nos limitamos a resolver o problema analiticamente, sem conduzir análises numéricas dos resultados, sendo essa a segunda perspectiva de trabalhos futuros que esse estudo fornece: uma varredura de combinações entre meios e dimensões do centro espalhador, feita numericamente, capaz de determinar regimes ressonantes restritos à casca ou ao núcleo do sistema.

Por fim, fizemos uma revisão no problema de espalhamento de ondas acústicas viajantes em meios fluidos por uma esfera viscoelástica tratada pelo modelo de Kelvin-Voigt fracionário. Para isso, definimos as grandezas físicas de interesse num problema envolvendo meios elásticos e viscoelásticos, bem como os campos usados nas descrições da onda acústica. Introduzimos e distinguimos diferentes modelos viscoelásticos, com foco maior no modelo de Kelvin-Voigt, deduzindo de que forma podemos tratar uma onda acústica nesse meio. Discutimos, ainda, as diferentes definições de energia presentes na literatura para materiais viscoelásticos, especialmente nos problemas de unicidade de definição de uma energia livre. Com base nesses resultados, uma terceira perspectiva proveniente desse estudo é a investigação dos coeficientes internos aos materiais viscoelásticos no processo de espalhamento, uma vez resolvido o sistema aqui revisado.

Limites de pequenos e grandes centros espalhadores

1.1 Pequenas esferas

As fórmulas das funções tradicionais para $x \ll 1$ são [47]

$$j_\ell(x) \approx \frac{x^\ell}{(2\ell + 1)!!}; \quad (1.1a)$$

$$j'_\ell(x) \approx \frac{-x^{\ell+1} + \ell(2\ell + 3)x^{\ell-1}}{(2\ell + 3)!!} = \left(\frac{\ell}{x} - \frac{x}{2\ell + 3} \right) j_\ell(x) \quad (1.1b)$$

$$h_\ell(x) \approx -\frac{i(2\ell - 1)!!}{x^{\ell+1}}; \quad (1.1c)$$

$$h'_\ell(x) \approx \frac{i(\ell + 1)(2\ell - 1)!!}{x^{\ell+2}} = -\frac{\ell + 1}{x} h_\ell(x); \quad (1.1d)$$

1.2 Grandes esferas

Nesse caso, as fórmulas das funções tradicionais para $x \gg 1$ são [47]

$$j_\ell(x) \approx \frac{\sin(x - \ell\pi/2)}{x}; \quad (1.2a)$$

$$j'_\ell(x) \approx \frac{x \cos(x - \ell\pi/2) - \sin(x - \ell\pi/2)}{x^2}; \quad (1.2b)$$

$$h_\ell(x) \approx \frac{-ie^{i(x - \ell\pi/2)}}{x}; \quad (1.2c)$$

$$h'_\ell(x) \approx \left(\frac{x - i}{x^2} \right) e^{i(x - \ell\pi/2)}; \quad (1.2d)$$

Produzindo a seguinte forma para os coeficientes internos:

$$\lim_{x_0 \rightarrow \infty} b_\ell = \frac{\tilde{m} [x_0 e^{-i(x_0 - \ell\pi/2)} - 2 \sin(x_0 - \ell\pi/2)]}{\tilde{m} x_0 \cos(mx_0 - \ell\pi/2) - (1 + \tilde{m}/m) \sin(mx_0 - \ell\pi/2) - ix_0 \sin(mx_0 - \ell\pi/2)}. \quad (1.3)$$

1.3 Pequenos cilindros

As fórmulas das funções tradicionais para $x \ll 1$ são [47]

$$J_\ell(x) \approx \frac{(x/2)^\ell}{\ell!}; \quad (1.4a)$$

$$J'_\ell(x) \approx \frac{-x^{\ell+1} + 2\ell(\ell+1)x^{\ell-1}}{2^{\ell+1}(\ell+1)!}; \quad (1.4b)$$

$$H_0(x) \approx \frac{2i}{\pi} \ln(x); \quad (1.4c)$$

$$H_\ell(x) \approx \left[\frac{(\ell-1)!}{i\pi} \right] \left(\frac{2}{x} \right)^\ell, \ell > 0; \quad (1.4d)$$

$$H'_\ell(x) \approx \frac{i2^\ell \ell!}{\pi x^{\ell+1}}, \ell \geq 0; \quad (1.4e)$$

1.4 Grandes cilindros

As fórmulas das funções tradicionais para $x \gg 1$ são [47]

$$J_\ell(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left(x - \frac{\ell\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right); \quad (1.5a)$$

$$J'_\ell(x) \approx -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\left(\frac{1}{2x} \right) \cos \left(x - \frac{\ell\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(x - \frac{\ell\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right]; \quad (1.5b)$$

$$H_\ell(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp \left[i \left(x - \frac{\ell\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right]; \quad (1.5c)$$

$$H'_\ell(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(i - \frac{1}{2x} \right) \exp \left[i \left(x - \frac{\ell\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right]. \quad (1.5d)$$

Elas produzem a seguinte forma para os coeficientes internos:

$$\lim_{x_0 \rightarrow \infty} B_\ell = \left(\frac{\tilde{m}\sqrt{m}}{m} \right) \left[\frac{\sin(X_0) + i \cos(X_0)}{\tilde{m} \sin(mX_0) + i \cos(mX_0) + \frac{\cos(mX_0)}{2x_0} \left(\frac{\tilde{m}}{m} - 1 \right)} \right], \quad (1.6)$$

onde $X_0 = [x_0 - (\ell\pi)/2 - \pi/4]$ e $mX_0 = [mx_0 - (\ell\pi)/2 - \pi/4]$ são usados para descarregar a notação.

Referências¹

- [1] S. A. Cummer, J. Christensen e A. Alù, “Controlling sound with acoustic metamaterials”, *Nature Reviews Materials*, vol. 1, no. 3, pp. 1–13, 2016. 1
- [2] I. Staude e J. Schilling, “Metamaterial-inspired silicon nanophotonics”, *Nature Photonics*, vol. 11, no. 5, pp. 274–284, 2017. 1
- [3] T. Chen, M. Pauly e P. M. Reis, “A reprogrammable mechanical metamaterial with stable memory”, *Nature*, vol. 589, no. 7842, pp. 386–390, 2021.
- [4] F. Zangeneh-Nejad e R. Fleury, “Active times for acoustic metamaterials”, *Reviews in Physics*, vol. 4, p. 100031, 2019. 1
- [5] L. Brillouin e M. Parodi, “Wave propagation in periodic structures, international series in pure and applied physics”, éd: *McGraw-Hill, New York*, 1946. 1
- [6] L. Brillouin, *Wave propagation in periodic structures: electric filters and crystal lattices*, vol. 2. Dover publications, 1953. 1
- [7] E. Yablonovitch, “Inhibited spontaneous emission in solid-state physics and electronics”, *Physical review letters*, vol. 58, no. 20, p. 2059, 1987. 1
- [8] M. I. Hussein, M. J. Leamy e M. Ruzzene, “Dynamics of phononic materials and structures: Historical origins, recent progress, and future outlook”, *Applied Mechanics Reviews*, vol. 66, no. 4, 2014. 1
- [9] Z. Liu, X. Zhang, Y. Mao, Y. Zhu, Z. Yang, C. T. Chan e P. Sheng, “Locally resonant sonic materials”, *science*, vol. 289, no. 5485, pp. 1734–1736, 2000. 1

¹De acordo com o estilo LMSC (baseado no estilo IEEE Transactions - Electrical and Electronics Engineers).

-
- [10] S. H. Lee, C. M. Park, Y. M. Seo, Z. G. Wang e C. K. Kim, “Acoustic metamaterial with negative modulus”, *Journal of Physics: Condensed Matter*, vol. 21, no. 17, p. 175704, 2009. 1
- [11] Z. Yang, H. Dai, N. Chan, G. Ma e P. Sheng, “Acoustic metamaterial panels for sound attenuation in the 50–1000 hz regime”, *Applied Physics Letters*, vol. 96, no. 4, p. 041906, 2010. 1
- [12] N. Sui, X. Yan, T.-Y. Huang, J. Xu, F.-G. Yuan e Y. Jing, “A lightweight yet sound-proof honeycomb acoustic metamaterial”, *Applied Physics Letters*, vol. 106, no. 17, p. 171905, 2015.
- [13] H. Huang e C. Sun, “Wave attenuation mechanism in an acoustic metamaterial with negative effective mass density”, *New Journal of Physics*, vol. 11, no. 1, p. 013003, 2009. 1
- [14] S. A. Cummer, J. Christensen e A. Alù, “Controlling sound with acoustic metamaterials”, *Nature Reviews Materials*, vol. 1, no. 3, pp. 1–13, 2016. 1
- [15] L. D. Landau e E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics (Course of theoretical physics, v.6)*. Pergamon Press, Oxford, 1987. 2, 47, 48, 50
- [16] N. I. Landy, S. Sajuyigbe, J. J. Mock, D. R. Smith e W. J. Padilla, “Perfect metamaterial absorber”, *Physical review letters*, vol. 100, no. 20, p. 207402, 2008. 2
- [17] P. Moitra, B. A. Slovick, W. Li, I. I. Kravchencko, D. P. Briggs, S. Krishnamurthy e J. Valentine, “Large-scale all-dielectric metamaterial perfect reflectors”, *ACS Photonics*, vol. 2, no. 6, pp. 692–698, 2015. 2
- [18] R. G. Newton, *Scattering theory of waves and particles*. Springer Science & Business Media, 2013. 2
- [19] G. Gaunard e M. Werby, “Acoustic resonance scattering by submerged elastic shells”, 1990. 2
- [20] V. C. Anderson, “Sound scattering from a fluid sphere”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 22, no. 4, pp. 426–431, 1950. 2, 5

-
- [21] J. J. Faran Jr, “Sound scattering by solid cylinders and spheres”, *The Journal of the acoustical society of America*, vol. 23, no. 4, pp. 405–418, 1951. 2, 5, 24
- [22] M. C. Junger, “Sound scattering by thin elastic shells”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 24, no. 4, pp. 366–373, 1952. 2
- [23] G. S. Sammelmann, D. H. Trivett e R. H. Hackman, “The acoustic scattering by a submerged, spherical shell. i: The bifurcation of the dispersion curve for the spherical antisymmetric lamb wave”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 85, no. 1, pp. 114–124, 1989. 2
- [24] T. K. Stanton, “Sound scattering by cylinders of finite length. i. fluid cylinders”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 83, no. 1, pp. 55–63, 1988. 2
- [25] S. M. Ivansson, “Sound absorption by viscoelastic coatings with periodically distributed cavities”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 119, no. 6, pp. 3558–3567, 2006. 2
- [26] R. Doolittle e H. Überall, “Sound scattering by elastic cylindrical shells”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 39, no. 2, pp. 272–275, 1966. 2
- [27] R. Doolittle, H. Überall e P. Uginčius, “Sound scattering by elastic cylinders”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 43, no. 1, pp. 1–14, 1968. 2
- [28] G. C. Gaunaurd, “Elastic and acoustic resonance wave scattering”, 1989. 2
- [29] D. Brill e G. Gaunaurd, “Resonance theory of elastic waves ultrasonically scattered from an elastic sphere”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 81, no. 1, pp. 1–21, 1987.
- [30] G. Gaunaurd e M. Werby, “Acoustic resonance scattering by submerged elastic shells”, 1990. 2
- [31] V. Ayres e G. Gaunaurd, “Acoustic resonance scattering by viscoelastic objects”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 81, no. 2, pp. 301–311, 1987. 2

- [32] P. M. Morse e K. U. Ingard, *Theoretical acoustics*. Princeton University Press, 1987. 2
- [33] M. G. Niasar, H. Edin, X. Wang e R. Clemence, “Partial discharge characteristics due to air and water vapor bubbles in oil”, in *International Symposium on High Voltage Engineering*, 2011. 3
- [34] R. F. Tabor, C. Wu, H. Lockie, R. Manica, D. Y. Chan, F. Grieser e R. R. Dagastine, “Homo-and hetero-interactions between air bubbles and oil droplets measured by atomic force microscopy”, *Soft Matter*, vol. 7, no. 19, pp. 8977–8983, 2011. 3
- [35] E. Ruckenstein, “Nanodispersions of bubbles and oil drops in water”, *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*, vol. 423, pp. 112–114, 2013. 3
- [36] C. Davis, L. Dragonette e L. Flax, “Acoustic scattering from silicone rubber cylinders and spheres”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 63, no. 6, pp. 1694–1698, 1978. 3, 15
- [37] A. M. Gunderson, T. D. Daniel, P. L. Marston e M. J. Isakson, “Observation and modeling of acoustic scattering from a rubber spherical shell”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 143, no. 5, pp. 3036–3046, 2018. 3, 15
- [38] S. Rao, D. Wilton e A. Glisson, “Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape”, *IEEE Transactions on antennas and propagation*, vol. 30, no. 3, pp. 409–418, 1982. 5
- [39] L. P. Bayvel, *Electromagnetic scattering and its applications*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [40] D. Deirmendjian, “Electromagnetic scattering on spherical polydispersions”, tech. rep., Rand Corp Santa Monica CA, 1969. 5
- [41] J. A. Stratton, *Electromagnetic theory*, vol. 33. John Wiley & Sons, 2007. 6, 13
- [42] K. Y. Bliokh e F. Nori, “Spin and orbital angular momenta of acoustic beams”, *Physical Review B*, vol. 99, no. 17, p. 174310, 2019. 11, 14, 32

- [43] C. Shi, R. Zhao, Y. Long, S. Yang, Y. Wang, H. Chen, J. Ren e X. Zhang, “Observation of acoustic spin”, *National science review*, 2019.
- [44] J. H. Lopes, E. B. Lima, J. P. Leão-Neto e G. T. Silva, “Acoustic spin transfer to a subwavelength spheroidal particle”, *Physical Review E*, vol. 101, no. 4, p. 043102, 2020.
- [45] P. L. Marston, “Radiation force of a helicoidal bessel beam on a sphere”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 125, no. 6, pp. 3539–3547, 2009. 14
- [46] J. P. Leão-Neto, *Força e torque de radiação sobre uma partícula viscoelástica em um fluido ideal*. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Física., 2015. 16, 47, 54, 59
- [47] M. Abramowitz e I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables*, vol. 55. Courier Corporation, 1965. 18, 26, 38, 67, 68
- [48] M. Snee e W. Ubachs, “Direct measurement of the rayleigh scattering cross section in various gases”, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, vol. 92, no. 3, pp. 293–310, 2005. 20
- [49] H. Schrötter e H. Klöckner, “Raman scattering cross sections in gases and liquids”, *Raman spectroscopy of gases and liquids*, pp. 123–166, 1979.
- [50] L. Brillouin, “The scattering cross section of spheres for electromagnetic waves”, *Journal of Applied Physics*, vol. 20, no. 11, pp. 1110–1125, 1949.
- [51] S. Tougaard, “Universality classes of inelastic electron scattering cross-sections”, *Surface and Interface Analysis: An International Journal devoted to the development and application of techniques for the analysis of surfaces, interfaces and thin films*, vol. 25, no. 3, pp. 137–154, 1997. 20
- [52] K. Sage, J. George e H. Überall, “Multipole resonances in sound scattering from gas bubbles in a liquid”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 65, no. 6, pp. 1413–1422, 1979. 22

- [53] A. D. Pierce, *Acoustics. An Introduction to its physical principles and applications*. Acoustical Society of America, 1994. 24
- [54] S. G. Kargl e P. L. Marston, “Ray synthesis of the form function for backscattering from an elastic spherical shell: Leaky lamb waves and longitudinal resonances”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 89, no. 6, pp. 2545–2558, 1991. 28
- [55] J. R. Alcarás, “Espalhamento de ondas acústicas e análise de campos internos de materiais viscoelásticos”, 2018. 50, 55, 59
- [56] F. G. Mitri, “Generalized theory of resonance excitation by sound scattering from an elastic spherical shell in a nonviscous fluid”, *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, vol. 59, no. 8, pp. 1781–1790, 2012. 51
- [57] Y. Jamali, M. Azimi e M. R. Mofrad, “A sub-cellular viscoelastic model for cell population mechanics”, *PLoS One*, vol. 5, no. 8, p. e12097, 2010. 52
- [58] Y. M. Efremov, T. Okajima e A. Raman, “Measuring viscoelasticity of soft biological samples using atomic force microscopy”, *Soft matter*, vol. 16, no. 1, pp. 64–81, 2020.
- [59] H. Karcher, J. Lammerding, H. Huang, R. T. Lee, R. D. Kamm e M. R. Kaazempur-Mofrad, “A three-dimensional viscoelastic model for cell deformation with experimental verification”, *Biophysical journal*, vol. 85, no. 5, pp. 3336–3349, 2003. 52
- [60] H. Watanabe, “Viscoelasticity and dynamics of entangled polymers”, *Progress in Polymer Science*, vol. 24, no. 9, pp. 1253–1403, 1999. 52
- [61] D. B. Adolf, R. S. Chambers e J. M. Caruthers, “Extensive validation of a thermodynamically consistent, nonlinear viscoelastic model for glassy polymers”, *Polymer*, vol. 45, no. 13, pp. 4599–4621, 2004.
- [62] C. Duty, C. Ajinjeru, V. Kishore, B. Compton, N. Hmeidat, X. Chen, P. Liu, A. A. Hassen, J. Lindahl e V. Kunc, “What makes a material printable? a viscoelastic model for extrusion-based 3d printing of polymers”, *Journal of Manufacturing Processes*, vol. 35, pp. 526–537, 2018. 52

- [63] Y. Lei, S. Adhikari e M. Friswell, “Vibration of nonlocal kelvin–voigt viscoelastic damped timoshenko beams”, *International Journal of Engineering Science*, vol. 66, pp. 1–13, 2013. 52
- [64] G. Pezzinga, B. Brunone e S. Meniconi, “Relevance of pipe period on kelvin–voigt viscoelastic parameters: 1d and 2d inverse transient analysis”, *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 142, no. 12, p. 04016063, 2016. 52
- [65] R. I. Tanner, *Engineering rheology*, vol. 52. OUP Oxford, 2000. 52
- [66] J. P. Leão-Neto e G. T. Silva, “Acoustic radiation force and torque exerted on a small viscoelastic particle in an ideal fluid”, *Ultrasonics*, vol. 71, pp. 1–11, 2016. 54
- [67] F. Mainardi, *Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity: an introduction to mathematical models*. World Scientific, 2010.
- [68] B. E. Treeby e B. Cox, “Modeling power law absorption and dispersion in viscoelastic solids using a split-field and the fractional laplacian”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 136, no. 4, pp. 1499–1510, 2014. 54
- [69] G. Hirasaki e J. Hellums, “Boundary conditions on the vector and scalar potentials in viscous three-dimensional hydrodynamics”, *Quarterly of Applied Mathematics*, vol. 28, no. 2, pp. 293–296, 1970. 55
- [70] C. Gray e B. Nickel, “Debye potential representation of vector fields”, *American Journal of Physics*, vol. 46, no. 7, pp. 735–736, 1978. 55
- [71] T. L. Szabo, “Time domain wave equations for lossy media obeying a frequency power law”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 96, no. 1, pp. 491–500, 1994. 56
- [72] W. Chen e S. Holm, “Modified szabo’s wave equation models for lossy media obeying frequency power law”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 114, no. 5, pp. 2570–2574, 2003. 56
- [73] R. Miranda Guedes, “Mathematical analysis of energies for viscoelastic materials and energy based failure criteria for creep loading”, *Mechanics of Time-Dependent Materials*, vol. 8, no. 2, pp. 169–192, 2004. 60, 61

-
- [74] S. Breuer e E. T. Onat, “On the determination of free energy in linear viscoelastic solids”, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, vol. 15, no. 2, pp. 184–191, 1964. 60
- [75] M. Fabrizio e A. Morro, *Mathematical problems in linear viscoelasticity*. SIAM, 1992. 60
- [76] M. E. Gurtin e W. J. Hrusa, “On energies for nonlinear viscoelastic materials of single-integral type”, *Quarterly of applied mathematics*, vol. 46, no. 2, pp. 381–392, 1988.
- [77] G. Gentili, “Maximum recoverable work, minimum free energy and state space in linear viscoelasticity”, *Quarterly of Applied Mathematics*, vol. 60, no. 1, pp. 153–182, 2002. 61
- [78] T. Wierzbicki, W. Li, Y. Liu e J. Zhu, “Effect of receptors on the resonant and transient harmonic vibrations of coronavirus”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 150, p. 104369, 2021. 64