

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE FILOSOFIA, CIÊNCIAS E LETRAS DE RIBEIRÃO PRETO
PROGRAMA DE FÍSICA APLICADA À MEDICINA E BIOLOGIA

**Dilema do Prisioneiro Evolucionário Darwiniano e
Pavloviano no Autômato Celular Unidimensional: uma
nova representação e exploração exaustiva do
espaço de parâmetros**

Marcelo Alves Pereira

Ribeirão Preto
2008

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE FILOSOFIA, CIÊNCIAS E LETRAS DE RIBEIRÃO PRETO
PROGRAMA DE FÍSICA APLICADA À MEDICINA E BIOLOGIA

**Dilema do Prisioneiro Evolucionário Darwiniano e
Pavloviano no Autômato Celular Unidimensional: uma
nova representação e exploração exaustiva do
espaço de parâmetros**

Marcelo Alves Pereira

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada à Medicina e Biologia da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto da Universidade de São Paulo como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Física Aplicada à Medicina e Biologia.

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Souto Martinez

Ribeirão Preto, Março de 2008.

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE DOCUMENTO, POR MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Pereira, M A

Dilema do Prisioneiro Evolucionário Darwiniano e Pavloviano no Autômato Celular Unidimensional: uma nova representação e exploração exaustiva do espaço de parâmetros / Marcelo Alves Pereira; orientador Prof. Dr. Alexandre Souto Martinez.

– Ribeirão Preto/SP, 2008.

151 f.

Dissertação (Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada à Medicina e Biologia) – Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto da Universidade de São Paulo.

Dilema do Prisioneiro Iterado, Teoria dos Jogos, Emergência do estado de cooperação, Estratégias Evolucionária Darwiniana, Estratégias Evolucionária Pavloviana, Modelagem baseada em agentes, Autômato Celular, Caos espaço-temporal, Sociofísica, Econofísica.

Banca Examinadora:

Dedicatória

Dedico esta dissertação aos meus queridos pais, Sidnei Alves Pereira e Rosa Maria Cacciolari Alves Pereira, por sempre me incentivarem e apoiarem na busca de minhas metas.

À minha querida irmã Mônica Alves Pereira e meu sobrinho Leonardo que ainda está em seu ventre.

Agradecimentos

Meus mais profundos agradecimentos ao meu orientador, Prof. Dr. Alexandre Souto Martinez, pela valiosa orientação, compreensão, tolerância e inestimável amizade. Seus ensinamentos e comportamento ético e profissional foram fundamentais para a criação de uma boa relação para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos amigos Bruno Fraccini Pastorello, Khallil Taverna Chaim, Daniel Nardini Queiroz Pergher, José Luiz Liberato, André Salles Cunha Peres, Tenyson Will de Lemos, Wagner Fonzi, Juliana Constantino Cunha e Tatiana Iuriko Kawasaki Nakabayashi pelo incentivo, apoio e colaboração.

Aos amigos e companheiros diários de laboratório Brenno Caetano Troca Cabella, Rodrigo da Silva Gonzalez, César Augusto Sangalleti Terçariol, Felipe de Moura Kiipper, Wilnice Tavares Reis Oliveira, pela oportunidade de troca de experiências e de conhecimento e pelas colaborações.

Aos Professores Doutores Marcelo Mulato, Nelson Augusto Alves, Ubiraci Pereira da Costa Neves, José Roberto Drugowich de Felício e Draulio Barros de Araújo pelo incentivo e amizade.

Ao amigo Aquino de Lauri Espíndola pela colaboração.

Aos funcionários do Departamento de Física e Matemática Adriano de Jesus Holanda, Fábio José Moretti, Nilza Marina Leone Marino, Rita de Cassia Ribeiro e Sonia Aparecida Nali de Paula pela presteza.

Ao Departamento de Física e Matemática pelo suporte ao trabalho.

À CAPES pelo apoio financeiro.

“Você pode descobrir mais a respeito de uma pessoa em uma hora de jogo do que em um ano de conversa.”

Platão de Atenas (428/27–347 a.C.), filósofo grego.

Resumo

PEREIRA, M A. **Dilema do Prisioneiro Evolucionário Darwiniano e Pavloviano no Autômato Celular Unidimensional: uma nova representação e exploração exaustiva do espaço de parâmetros.** Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto, Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto, 2008.

O Dilema do Prisioneiro (DP) é o jogo mais proeminente da Teoria dos Jogos devido à emergência da cooperação entre jogadores egoístas. O comportamento de cada jogador depende da estratégia que ele adotada e do seu ganho, que é determinado em função dos parâmetros do DP (T , R , P e S) e do número z de vizinhos com que ele joga. Portanto, a estrutura espacial dos jogadores não é relevante. Em nosso trabalho, utilizamos um autômato celular unidimensional onde cada jogador pode cooperar ou desertar ao interagir, simetricamente, com seus z vizinhos mais próximos. O sistema proposto nos permitiu realizar um estudo exaustivo do espaço de parâmetros para as estratégias evolucionárias Darwiniana (EED) e a Pavloviana (EEP) e compara-las. A geometria unidimensional nos possibilita obter os mesmos resultados dos sistemas em dimensionalidade arbitrária d , além de apresentar várias vantagens em relação a elas. No sistema que propomos os efeitos de borda são menores, exige menos tempo para a execução das simulações numéricas, permite variar o valor de z e é fácil obter uma representação visual da evolução temporal do sistema. Tal visualização simplifica a compreensão das interações entre os jogadores, pois surgem padrões nos agrupamentos de cooperadores/desertores, semelhantes aos pertencentes às classes dos autômatos celulares elementares. O estudo destes padrões nos permite compreender simplesmente a emergência da cooperação ou deserção nos sistemas. A evolução temporal do sistema que adota a EED gera um diagrama de fases muito rico com a presença das fases cooperadora, desertora e caótica. Já para a EEP, obtivemos um novo resultado analítico para as transições de fase, que neste caso são: cooperadora e *quasi*-regular. O estudo numérico exaustivo determinou as regiões do espaço de parâmetros onde acontecem cada uma das fases, e os efeitos da auto-interação podendo assim validar os resultados teóricos. O estudo do caso particular $T = 1$, tradicionalmente considerado como trivial, mostrou que ele apresenta comportamentos inusitados. Nossa principal contribuição para o estudo do DP é a obtenção de um novo paradigma. A geometria unidimensional com interação de vizinhos simétricos permitiu a visualização da evolução de padrões de cooperadores e desertores, o cálculo analítico de T_c para a EEP e o estudo de $T = 1$ para tais sistemas.

Palavras-chave: Dilema do Prisioneiro Iterado, Teoria dos Jogos, Emergência do estado de cooperação, Estratégias Evolucionária Darwiniana, Estratégias Evolucionária Pavloviana, Modelagem baseada em agentes, Autômato Celular, Caos espaço-temporal, Sociofísica, Econofísica.

Abstract

PEREIRA, M A. **Darwinian and Pavlovian Evolutionary Prisoner Dilemma in the One-Dimensional Cellular Automata: a new representation and exhaustive exploration of parameter space.** Dissertation (Master) – Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto, Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto, 2008.

The Prisoner Dilemma (PD) is the most prominent game of the Game Theory due to emergence of the cooperation between selfish players. The behavior of each player depends on his/her strategy and the payoff, which is determined in function of the PD parameters (T , R , P and S) and by the number z of neighbors with whom he/she plays. Therefore, the spatial structure of the players does not matter. In our work, we have used a one-dimensional cellular automaton where each player can cooperate or defect when interacting, symmetrically, with his/her z nearest neighbors. The considered system allowed us to carry out an exhaustive exploration of the parameters space for the Darwinian Evolutionary Strategy (EED) and Pavlovian (EEP) and compares them. One-dimensional geometry makes possible to us get the same results of the systems in arbitrary d dimensional networks, besides, it presents some advantages. For the system that we proposed compared to the others dimensional networks, the boundary effects are less present, it needs less time for run the numerical simulations, it allows to vary the z value and is easier to get the visual representation of the system temporal evolution. Such visualization simplifies the understanding of the interactions between the players, therefore patterns appear in the clusters of cooperator/defectors, and these patterns belong to the elementary cellular automata classes. The study of these patterns allows them to understand in an easy way the emergence of the cooperation or defection in the systems. The temporal evolution of the system that adopts the EED yields a very rich phases diagram with the presence of cooperative, defective and chaotic phases. By the other hand, for the EEP, we have got a new analytical result for the phase transitions that in this case are: *quasi*-regular and cooperative. The exhaustive exploration study determines the regions on the parameters space where happen each phases occurs, and the effect of the self-interaction and thus validate the theoretical results. The study of the particular case $T = 1$, traditionally considered as trivial one, showed that it presents unusual behaviors, that we will present. Our main contribution for the study of the DP is the attainment of a new paradigm. One-dimensional geometry with interaction of symmetrical neighbors allowed to visualizes the evolution of cooperators and defectors patterns, the analytical result for T_c for the EEP and the study of $T = 1$ for such systems.

Keywords: Iterated Prisoner's Dilemma, Game Theory, Cooperation emergence, Darwinian Evolutionary Strategy, Pavlovian Evolutionary Strategy, Agent based modelling, Cellular automata, Spatio-temporal chaos, Sociophysics, Econophysics.

Sumário

Dedicatória	p. vii
Agradecimentos	p. ix
Resumo	p. xiii
Abstract	p. xv
Lista de Siglas	p. v
Lista de Símbolos	p. vii
1 Introdução	p. 1
1.1 Teoria dos Jogos e o Dilema do Prisioneiro	p. 1
1.2 Simulação Numérica de Modelos Teóricos	p. 2
1.3 Nossos Resultados no Dilema do Prisioneiro no Autômato Celular	p. 2
1.4 Organização da Dissertação	p. 4
2 Teoria dos Jogos: Dilema do Prisioneiro	p. 7
2.1 Teoria dos Jogos	p. 7
2.1.1 Jogos Cooperativos e Não-Cooperativos	p. 8
2.1.2 Jogos de Soma Zero ou Variável	p. 8
2.2 Dilema do Prisioneiro	p. 9
2.2.1 Dilema do Prisioneiro Não-Iterado (DPNI): dois jogadores e uma rodada única	p. 11

2.2.2	Dilema do Prisioneiro Iterado (DPI): dois jogadores e muitas rodadas	p. 12
2.2.3	Dilema do Prisioneiro Espacial (DPE): muitos jogadores em uma estrutura espacial e muitas rodadas	p. 13
3	Modelo computacional	p. 17
3.1	Autômato Celular	p. 17
3.2	Dinâmica do Sistema e Estratégias	p. 19
3.3	Ganhos dos jogadores, Atualização de seus Estado e Tentação Crítica	p. 20
3.3.1	Estratégia Evolucionária Darwiniana	p. 21
3.3.2	Estratégia Evolucionária Pavloviana	p. 24
4	Resultados das Simulações Numéricas	p. 27
4.1	Estratégia Evolucionária Darwiniana	p. 28
4.1.1	Padrões temporais formados pelos agrupamentos de cooperadores ou desertores	p. 28
4.1.2	Regimes transiente e estacionário: exploração exaustiva do espaço de parâmetros	p. 39
4.2	Estratégia Evolucionária Pavloviana	p. 54
4.2.1	Padrões temporais formados pelos agrupamentos de cooperadores ou desertores	p. 56
4.2.2	Regimes transiente e estacionário: exploração exaustiva do espaço de parâmetros	p. 69
4.3	Caso particular: $T = 1$	p. 74
4.3.1	Regime estacionário: Estratégia Evolucionária Darwiniana	p. 75
4.3.2	Regime estacionário: Estratégia Evolucionária Pavloviana	p. 76
5	Conclusões e Perspectivas	p. 83
	Apêndice A – Diagramas de fase: EED	p. 87

<i>Sumário</i>	iii
Apêndice B – Diagramas de fase: EEP	p. 117
Apêndice C – Trabalhos aceitos para publicação	p. 147
Referências	p. 149

Lista de Siglas

CPC Condição Periódica de Contorno

DFM Departamento de Física e Matemática

DP Dilema do Prisioneiro

DPNI Dilema do Prisioneiro Não-Iterado

DPE Dilema do Prisioneiro Espacial

DPI Dilema do Prisioneiro Iterado

EED Estratégia Evolucionária Darwiniana

EEE Estratégia Evolucionária Estável

EEP Estratégia Evolucionária Pavloviana

FAMB Física Aplicada à Medicina e Biologia

FFCLRP Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto

TFT *Tit-For-Tat* (olho por olho, dente por dente)

TJE Teoria dos Jogos Evolucionários

USP Universidade de São Paulo

Lista de Símbolos

C jogador no estado cooperador

D jogador no estado desertor

t tempo (rodadas)

L tamanho da rede do autômato celular

z conectividade da rede (número de vizinhos)

\mathcal{V}_i vizinhança do i -ésimo jogador

T tentação (“temptation”)

R recompensa (“reward”)

P punição (“punishment”)

S “tolo” (“sucker”)

T_c tentação crítica

S_k jogadores que utilizam a estratégia k

$V(S_m|S_n)$ é o ganho esperado de jogadores que utilizam a estratégia S_m , interagindo com aqueles que utilizam S_n

θ_i estado do jogador i

ρ_c proporção de cooperadores em relação ao número total de jogadores

ρ_d proporção de desertores em relação ao número total de jogadores

ρ_{total} proporção total de jogadores

ρ_0 proporção inicial de cooperadores

$\rho_c(t, T, \rho_0, z)$ proporção de cooperadores em função do tempo, tentação, proporção inicial de cooperadores e conectividade

$\rho_\infty(T, \rho_0, z)$ proporção estacionária de cooperadores em função da tentação, proporção inicial de cooperadores e conectividade

SD desvio-padrão da proporção estacionária de cooperadores

1 Introdução

Começamos fazendo uma breve apresentação de alguns conceitos que serão necessários na compreensão desta dissertação. Iniciamos com uma introdução sobre a Teoria dos Jogos e, em particular, sobre o Dilema do Prisioneiro. Em seguida, fazemos algumas considerações sobre as simulações numéricas de modelos teóricos. Apresentamos, então, nossos principais resultados e terminamos mostrando como eles serão apresentados nesta dissertação.

1.1 Teoria dos Jogos e o Dilema do Prisioneiro

A *Teoria dos Jogos Evolucionários* (TJE) em populações revela transições de fase críticas que se enquadram em classes de universalidade de percolação direta de redes quadradas. Observam-se também transições do tipo campo médio em redes de mundo-pequeno e grafos regulares. O jogo mais proeminente na Teoria dos Jogos, devido à emergência de cooperação entre jogadores racionais competitivos e egoístas, é o *Dilema do Prisioneiro* (DP).

No DP, dois prisioneiros podem cooperar (cooperador) ou desertar (desertor). Quando há cooperação mútua, cada um recebe como pena 1 ano de prisão, se houver deserção mútua, a pena é de 3 anos. Caso haja um desertor e um cooperador, o desertor fica livre e o prisioneiro que cooperou recebe a pena de 5 anos. Assim, para que um jogador obtenha o ganho máximo, a liberdade, o outro receberá a pena máxima de 5 anos. Se ambos tentarem buscar o ganho máximo, desertando, receberão a pena de 3 anos que é pior do que a pena de 1 ano, se ambos cooperassem.

Quando o DP é jogado repetidamente, tem-se o *Dilema do Prisioneiro Iterado* (DPI). Nowak & May [1, 2] adicionaram ao DP a estrutura espacial, criando o *Dilema do Prisioneiro Espacial* (DPE). No DPE, os jogadores estão localizados nos sítios de uma rede quadrada e jogam com os jogadores adjacentes. Eles atualizam seus estados copiando o estado do vizinho que teve o maior ganho, ação conhecida como *Estratégia Evolucionária Darwiniana* (EED). Outra estratégia que pode ser utilizada é a *Estratégia Evolucionária Pavloviana* (EEP). Nesta

última, o jogador considera apenas o próprio ganho, ou seja, só mudará seu estado caso sua ambição seja maior que seu ganho.

Há várias situações de conflito que podem ser modeladas usando o DP [3]. Na vida real, o conflito aparece quando tentar atingir uma meta individual é incompatível com a meta coletiva. Como o DP representa uma situação de conflito entre duas pessoas, é possível tentar modelar a vida real com este jogo, como por exemplo, na Política (Sociofísica) [4], Economia (Econofísica) [5, 6], na Biologia, etc. Em Economia, o DP representa as situações nas quais a disputa entre agentes econômicos acaba em tragédia como a dos comuns, apresentada por Hardin [7]. Na Biologia alguns exemplos são: mirmecofilia [8], inspeção de predador em peixes [9, 10, 11, 12, 13, 14], troca de ovos em hermafroditas simultâneos [15, 16], compartilhamento de sangue entre morcegos hematófagos [17] e altruísmo recíproco em primatas [18].

1.2 Simulação Numérica de Modelos Teóricos

A utilização das técnicas computacionais, entre elas as de simulações numéricas, tem servido como ferramentas fundamentais no desenvolvimento da pesquisa sobre as transições de fases. Isso se tornou possível graças à alta velocidade de processamento e a facilidade de acesso aos computadores. Este avanço computacional permitiu que as simulações numéricas passassem a fazer parte do cotidiano da pesquisa em mecânica estatística e em outras áreas de pesquisa e desenvolvimento tecnológico.

Entre outras razões, as simulações numéricas são vantajosas por permitir o total controle dos parâmetros e condições envolvidos nos experimentos, o que, em geral, não é possível em sistemas reais. Por isso, os resultados provenientes de tais simulações numéricas podem servir como base para validação de resultados experimentais e/ou teóricos.

1.3 Nossos Resultados no Dilema do Prisioneiro no Autômato Celular

O Dilema do Prisioneiro Iterado (DPI) já foi estudado em diversas topologias tais como as redes regulares [1, 2], grafos [19] e, também, em redes complexas, como grafos aleatórios [20], redes *sem-escala* [21] e redes do tipo *mundo pequeno* [22]. É interessante observar que em sistemas unidimensionais o DPI não foi anteriormente abordado devido a sua aparente simplicidade [20]. Em sua implementação mais simples, o caso unidimensional, cada jogador interagiria somente com os dois primeiros vizinhos, o que não é suficiente para o surgimento da coopera-

ção como Estratégia Evolucionária Estável (EEE). Além da topologia, a conectividade [20] e a mobilidade [23] dos jogadores também têm sido consideradas, pois têm um papel importante na dinâmica da proporção de cooperadores no sistema.

Quando se observa a dinâmica do jogo proposto por Nowak & May [1], os padrões complexos que emergem não são explicados de forma esclarecedora nem qualitativa nem quantitativamente. Por utilizar uma rede quadrada e por causa das condições periódicas de contorno¹, não fica claro como ocorre a disputa entre os agrupamentos de cooperadores e de desertores que se formam durante o jogo.

Um *Autômato Celular* é um modelo discreto utilizado em computação, matemática, e biologia teórica, que é formado por uma rede infinita e regular de qualquer dimensão (finita), e os nós da rede são células. Cada célula pode estar em um número finito de estados, que mudam de acordo com regras deterministas. O tempo também é considerado com uma variável discreta, e o estado de uma célula no instante t depende de seu estado no instante anterior ($t - 1$) e do estado das células de sua vizinhança. A vizinhança corresponde a uma determinada seleção de células próximas (pode incluir a própria célula). Todas as células evoluem segundo a mesma regra para atualização de seus estados. A regra é baseada nos valores das células vizinhas. Após atualizar toda a população de células, gera-se uma nova população.

Nesta dissertação, nós apresentamos uma nova abordagem para o DPI utilizando uma rede unidimensional, com conectividade (número de vizinhos) variável. Além de propor a nova topologia, fizemos também a exploração exaustiva do espaço de parâmetros. As motivações para a utilização da geometria unidimensional foram: a facilidade na implementação do código computacional, a maior rapidez computacional para executar as simulações numéricas, a redução dos efeitos de borda e a possibilidade de representar o histórico da evolução do sistema em duas dimensões, sendo uma delas temporal. Além disso, buscamos verificar se a ausência das estruturas espaciais, que segundo Nowak & May [1, 2] eram as responsáveis pela manutenção da cooperação, causaria mudanças na emergência da cooperação. Além disso, compreender o surgimento dos padrões espaciais mencionados anteriormente. Verificamos também, o comportamento do sistema para outras vizinhanças além dos primeiros e segundos vizinhos, pois o autômato celular unidimensional pode representar redes regulares de qualquer dimensionalidade e suas respectivas vizinhanças [24].

No autômato celular unidimensional é mais simples compreender a maneira como ocorre a oscilação na proporção de cooperadores [24]. Durante a evolução temporal formam-se agrupa-

¹Condição periódica de contorno: aplicam-se condições aos jogadores da borda da rede para que eles tenham a mesma conectividade dos demais jogadores, apesar de não possuírem o mesmo número de vizinhos. Equivale a dizer que o modelo é definido em uma rede infinita, mas com a rede repetida indefinidas vezes.

mentos de cooperadores/desertores. Assim, é importante compreender a dinâmica de mudança de estado. Essas interações são responsáveis pela oscilação na proporção de cooperadores, já observadas em diversos estudos [1, 2, 25].

Outro resultado importante, devido à utilização do autômato celular unidimensional é o surgimento de padrões similares àqueles observados na teoria de autômato celular [26]. Com isso, há a possibilidade de entender mais facilmente a regra de interação local, produzindo uma nova perspectiva no estudo do DP.

No estudo exaustivo do espaço de parâmetros além da determinação das fases do sistema, encontramos um resultado interessante para o caso particular onde a tentação para a deserção é a mínima possível ($T = 1$), que era considerado trivial, mas apresenta um comportamento interessante.

1.4 Organização da Dissertação

A dissertação está organizada como segue: no Capítulo 2 faremos uma breve revisão da literatura a respeito de Teoria dos Jogos. Introduzimos o Dilema do Prisioneiro e os principais estudos sobre o tema. No Capítulo 3 apresentamos o novo modelo computacional que foi desenvolvido por nós e utilizado nas simulações numéricas tanto para a EED quanto para EEP. Mostramos também o cálculo analítico dos valores de tentação crítica onde ocorrem as transições de fase para a EEP. No Capítulo 4 apresentamos os resultados com os padrões dos agrupamentos de cooperadores e desertores para as EED e EEP e a exploração exaustiva do espaço de parâmetros (tentação para a deserção: T , proporção inicial de cooperadores: ρ_0 e conectividade da rede: z). Para validar os códigos numéricos que desenvolvemos, primeiramente reproduzimos os resultados encontrados por Nowak & May [1, 2] para o conjunto de parâmetros utilizados por eles em seus estudos. Em seguida, apresentamos um estudo original mostrando os padrões de agrupamentos dos jogadores no autômato celular unidimensional [24] o que permite representá-los em função do tempo em uma figura bidimensional. Isto nos permite manter a história do sistema, o que não era possível de ser feito com uma imagem bidimensional nos estudos anteriores. Outro resultado original é a exploração exaustiva do espaço de parâmetros [27] que confirma a diferença decorrente da presença ou ausência da auto-interação mostrada por Soares & Martinez [28]. Também é mostrado que para alta conectividade ($z \gg 1$) a auto-interação deixa de ter um aspecto fundamental no resultado final. Abordamos também o caso particular de tentação para a deserção mínima, que era considerado como um caso trivial, que no entanto, apresentou resultados bastante interessantes. No Capítulo 5, apresentamos nossas

conclusões e algumas sugestões para trabalhos futuros.

Nos Apêndices A e B apresentamos os gráficos dos resultados do estudo exaustivo quando o sistema utiliza a EED e EEP, respectivamente. No Apêndice C os trabalhos que já foram aceitos para publicação.

2 *Teoria dos Jogos: Dilema do Prisioneiro*

Os jogos entretêm a humanidade desde as primeiras civilizações. A atividade lúdica também serve como representação de batalhas, ou escolhas que as pessoas fazem em sua vida diária. No jogo, a vitória ou a derrota podem depender de escolhas acertadas no início da partida. Para melhor apreciar estas características dos jogos, faremos a seguir uma breve introdução desta teoria, considerando um jogo em particular, o Dilema do Prisioneiro.

2.1 Teoria dos Jogos

Até meados do século XX, os jogos não eram considerados como um tema de estudos mais aprofundados, apesar de suas importantes características. Em 1944, o matemático húngaro John Von Neumann (1903-1957) [29] consolidou as bases da *Teoria dos Jogos*, baseando-se no conceito de *utilidade*. O principal propósito dessa teoria é determinar uma estratégia para obter o ganho máximo nas situações em que vários jogadores racionais têm o mesmo objetivo. Com esta teoria é possível criar e estudar situações de conflito, através do controle dos parâmetros pertinentes ao problema. A formalização matemática desta teoria simplificou a relação entre os agentes “racionais” envolvidos, sejam eles humanos ou não-humanos, permitindo analisar seu comportamento.

O conceito fundamental de utilidade, no qual se baseou Neumann, foi exposto por Bentham pela primeira vez no primeiro capítulo do livro *Introduction to the Principles of Morals and Legislation* (“Introdução aos princípios da moral e legislação”) [30], da seguinte forma:

Por princípio de utilidade, entendemos o princípio segundo o qual toda ação, qualquer que seja, deve ser aprovada ou rejeitada em função de sua tendência de aumentar ou reduzir o bem-estar das partes afetadas pela ação.

(...)

Designamos por utilidade a tendência de alguma coisa em alcançar o bem-estar, o bem,

o belo, a felicidade, as vantagens, etc. O conceito de utilidade não deve ser reduzido ao sentido corrente de modo de vida com um fim imediato.

2.1.1 Jogos Cooperativos e Não-Cooperativos

Os jogos estão divididos em duas categorias: os *cooperativos*, são aqueles em que é permitida a comunicação entre os jogadores, antes de decidirem qual estratégia utilizarão durante o jogo, e os *não-cooperativos*, não permitem essa comunicação.

Durante a comunicação, podem surgir acordos que maximizem o ganho de ambos os jogadores. No entanto, a comunicação tem que ser precisa, sem erros e sem custo aos jogadores, isto é, o uso dela não implica em mudanças na tabela de ganhos. Apesar de parecer bastante vantajosa, a comunicação tem seu lado negativo: pode criar coalizões, ameaças e blefes. Estas características perturbam a obtenção dos resultados máximos por uma das partes.

Nos jogos *não-cooperativos*, podem ocorrer sinalizações ou convenções que coordenem as ações dos jogadores. Estes eventos são baseados no conhecimento comum partilhado pela cultura, convívio social ou capacidade cognitiva dos jogadores.

2.1.2 Jogos de Soma Zero ou Variável

Entre os jogos não-cooperativos, há uma categoria de confrontos que é definida como *estritamente competitiva*. São situações extremas nas quais para um jogador ganhar, o outro tem que, necessariamente, perder, ou então, ambos os jogadores terminam o jogo sem nenhum ganho, daí o nome *jogos de soma zero*, por exemplo: pôquer e xadrez. Neste tipo de jogo não existe a possibilidade de cooperação entre dois jogadores egoístas, pois seus interesses são totalmente opostos. Entretanto, se houver mais de dois jogadores, podem se formar coalizões, e os jogos passam a serem considerados cooperativos. Mesmo nesse caso, a soma dos resultados de todos os jogadores envolvidos na interação é sempre igual à zero.

John von Neumann e Oskar Morgenstern esgotaram a análise de jogos de soma zero no livro *Theory of Games and Economic Behavior* [29]. É interessante observar que, antes dos trabalhos de John Nash [31, 32], até mesmo os jogos de soma diferente de zero foram tratados como os de soma zero. Isto era feito, pela simples adição de um jogador, que assumiria as perdas do ganho total dos outros jogadores.

Todavia, nos jogos que não são estritamente competitivos, é possível aos jogadores optarem por posições intermediárias, que não estão em total oposição entre eles. Ou seja, um jogador

pode optar por obter um resultado que o favoreça, sem necessariamente causar prejuízo ao outro. Isto não é possível em jogos de soma zero de duas pessoas. É interessante enfatizar que jogos de soma *variável* (ou diferente de zero), ao serem repetidos, podem promover a cooperação, sem a presença de qualquer comunicação prévia.

Diferentemente dos jogos de soma zero, nos quais é possível obter uma solução direta utilizando as estratégias *minimax*¹, ou *maximin*², nos de soma variável, surgem aspectos de competição e cooperação que dificultam muito a determinação de uma solução que seja válida para todos os casos, ou seja, uma *estratégia dominante*.

A inclusão do conceito de equilíbrio torna a Teoria dos Jogos pertinente aos jogos de soma variável. Em Economia, o conceito de *equilíbrio* foi apresentado pelo economista francês Antoine Augustin Cournot (1801-1877). Em suas análises sobre os casos de duopólio³, Cournot formalizou uma versão restrita do conceito de equilíbrio, onde as empresas competem em quantidades e não em preços. A produção total determina o preço de mercado.

Em 1950, John Nash [31, 32], formalizou o conceito de *ponto de equilíbrio*, a partir da generalização da solução *maximin* de jogos não-cooperativos com jogadores e soma variável. Essa generalização fez a Teoria dos Jogos não se restringir somente à análise de jogos de soma zero cooperativos com dois jogadores. Segundo Nash, um ponto de equilíbrio (ou *equilíbrio de Nash*), é o conjunto de resultados opostos que maximiza os ganhos de cada jogador em face da melhor estratégia do outro, ou seja, o encontro das estratégias ótimas de cada jogador com as dos adversários. É uma combinação das estratégias dos jogadores na qual nenhum jogador pode ao mudar de estratégia, aumentar seus ganhos sem alterar também o ganho de seu adversário. Mas isso não implica que a situação resultante das decisões conjuntas dos jogadores seja a melhor possível. Contudo, a dominância e a perfeição deste ponto de equilíbrio espantam a todos que se defrontam com este quadro pela primeira vez.

2.2 Dilema do Prisioneiro

No princípio da Teoria dos Jogos consideravam-se apenas os jogos de *estratégia mista*⁴ com soma zero. O mais popular dentre eles é, certamente, o *Dilema do Prisioneiro* (DP). Em 1950,

¹Minimax: é um método para minimizar a perda máxima possível.

²Maximin: é um método para maximizar o mínimo ganho possível.

³Duopólio: situação de mercado na qual, duas empresas promovem o domínio da oferta de determinados produtos e/ou serviços.

⁴Diz-se que um jogo utiliza estratégia mista quando o jogador precisa fazer uma combinação de estratégias, que diminua os riscos de perdas, ou promova outro ponto de equilíbrio que não pode ser alcançado apenas com o recurso de estratégias puras ou estritas (aquelas que são listadas nas tabelas de ganho).

Albert W. Tucker para tornar as idéias de Flood e Dresher [33] acessíveis durante um seminário na Universidade de Stanford [34], formalizou o “Dilema do Prisioneiro” determinando o tempo de pena dos prisioneiros e batizando-o com esse nome.

Tucker apresentou o DP como a situação vivida por dois prisioneiros, suspeitos de um crime grave, mas que foram presos por um crime leve. Sob interrogatório, eles precisam fazer uma escolha, sem saber o que o outro irá fazer. Quando são interrogados, separadamente, o investigador oferece a cada um as opções de entregar o comparsa (desertar - D), dando indícios para incriminá-lo pelo crime grave, ou ficar calado (cooperar - C). Caso um dos suspeitos denuncie e o outro fique calado, o denunciante obtém a liberdade, por colaborar com a justiça, enquanto seu colega teria de cumprir a pena máxima. Se ambos permanecerem em silêncio, pegam a sentença mais branda referente ao crime leve que os levava à prisão em flagrante. Entretanto, se houver delação mútua, ambos são punidos com uma mesma condenação, menor do que a máxima, mas maior do que a pena leve.

Formalizando essa situação com os ganhos de cada jogador, temos as seguintes possibilidades: se ambos cooperarem, recebem R (recompensa); se ambos desertarem, recebem P (punição); se tiverem atitudes antagônicas, o cooperador recebe S (“tolo”, do inglês *sucker*) e o desertor recebe T (tentação). A Tab. 2.1 mostra os ganhos do DP:

		Jogador B	
		Coopera	Deserta
Jogador A	Coopera	(R,R)	(S,T)
	Deserta	(T,S)	(P,P)

Tabela 2.1: Ganhos no Dilema do Prisioneiro. No par ordenado o primeiro valor é referente ao ganho do jogador A e o segundo referente ao do jogador B . Os parâmetros são: T (tentação), R (recompensa), P (punição), S (“tolo”).

Para que exista o conflito, estes parâmetros estão sujeitos às condições [35]:

- i. $T > R > P > S$, o desertor ganha mais que o cooperador ao jogar com ele;
- ii. $R > P$, o ganho para a cooperação mútua é superior ao ganho da deserção mútua; e
- iii. $R > (T + S)/2$, dois jogadores que alternam entre cooperação e deserção tem um ganho menor do que se cooperassem sucessivamente.

Apesar de simples em sua concepção o DP, permite interpretações complexas, servindo como ferramenta em vários campos da ciência. Algumas das razões de sua popularidade são:

- entre 78 tipos de jogos de 2 indivíduos [36], que tem um resultado estável, o DP é o único jogo que tem um resultado deficiente, isto é, o ganho dos jogadores é menor que o ganho ótimo para os dois jogadores;
- a estrutura do DP contém a essência de muitas situações de conflito da vida real. Muitos destes conflitos podem ser descritos por situações em que alcançar os objetivos pessoais é incompatível com objetivos coletivos. Cada jogador é tentado a procurar seu ganho próprio por competição, mas se ambos os jogadores competem, ambos perdem, enquanto que, se ambos estão dispostos a confiar um no outro e cooperam, ambos lucram;
- Axelrod [37, 38, 35, 39] promoveu um torneio de computadores jogando o DP em busca de uma estratégia que prevalecesse (obtivesse a maior média de ganho ao longo do jogo) quando confrontada com outras estratégias entre elas, a aleatória;
- Nowak & May [1, 2] demonstraram a emergência de cooperação no DP entre jogadores racionais egoístas, sem memória das jogadas anteriores, quando arranjados em uma estrutura espacial (rede bidimensional).

Um dos fatores mais importantes que pode ser modificado é a estratégia do jogador. O estudo da mudança de estratégias é um dos melhores modos de responder a questões sobre a resolução ou não do conflito, a maximização dos ganhos dos jogadores e assuntos similares que têm importantes conseqüências na vida real [40].

2.2.1 Dilema do Prisioneiro Não-Iterado (DPNI): dois jogadores e uma rodada única

No DPNI, os jogadores se encontram e jogam somente uma vez. Por isso, a única estratégia que prevalece é a da deserção mútua, uma vez que, independente da reação do outro, o melhor que cada um faria por si mesmo é delatar o crime grave, ao invés de se expor ao risco de cumprir a pena máxima. Em outras palavras, essa estratégia assegura que o jogador não obtenha o pior resultado (S), além de ser a única maneira de conseguir o ganho máximo (T).

Esta situação, todavia, cria um dilema para jogadores inteligentes, os quais sabem que a cooperação mútua resulta em um resultado melhor para ambos os jogadores. A melhor escolha seria que ambos os jogadores cooperassem. Esta estratégia evitaria o ponto de equilíbrio (P, P) (Equilíbrio de Nash) que ambos encontrariam se jogassem de forma racional, optando pela deserção. Se optassem por cooperar atingiriam para o ponto de equilíbrio (R, R). A cooperação mútua proporciona um ganho maior do que a deserção mútua, porém, como não há garantias

de que o outro prisioneiro optará por cooperar, a deserção se torna a estratégia dominante. A questão, então, é determinar sob quais condições a cooperação emerge neste jogo.

2.2.2 Dilema do Prisioneiro Iterado (DPI): dois jogadores e muitas rodadas

No DPI, os jogadores se encontram e interagem da mesma forma que no DPNI, repetindo os encontros indefinidas vezes. No DPNI, tinha-se como estratégia dominante a deserção mútua, previsão esta, contradita por uma experiência feita no laboratório da corporação estadunidense Rand. Este experimento teve o intuito de testar se pessoas de “carne e osso”, ao invés dos agentes racionais teóricos, seriam capazes de encontrar as estratégias em equilíbrio previstas pela teoria, usando-se o DPI. Por cem vezes, realizaram-se testes com a participação do matemático John Williams, chefe de departamento da Rand, e do economista Armen A. Alchian, da UCLA, que jogaram o DP entre si [41]. Entretanto, ao invés de buscarem suas estratégias dominantes e encontrarem um ponto de equilíbrio, eles optaram por cooperar mais vezes ao invés de trair um ao outro.

Isto mostrou a existência de algum problema na concepção de racionalidade, pois, em vez de buscar resultados mais favoráveis para si, os jogadores tendiam a escolher a cooperação para maximizar seus ganhos, sem buscar aparentemente o equilíbrio de Nash. Devido à existência do reencontro, a melhor escolha neste caso, não é necessariamente a deserção, pois existe a possibilidade de retaliação, o que inibe a deserção, sendo conveniente apenas retaliar uma jogada não-cooperativa.

O torneio de computadores promovido por Axelrod [37, 38, 35, 39] popularizou o DPI. No primeiro torneio, entre as 15 estratégias que interagiram entre si jogando o DP durante 200 jogadas, procurou-se aquela que obtivesse a maior média de ganho ao longo do jogo. A estratégia *tit-for-tat* (TFT), conhecida também como a lei do talião (olho-por-olho, dente-por-dente), foi a vencedora, mesmo sendo muito simples em sua dinâmica (coopera na primeira jogada e repete a ação de seu oponente na iteração anterior), e por ter a memória de uma única iteração. Se os dois jogadores utilizarem a mesma estratégia, a partir do momento em que um deles coopera, o outro também o fará. Foi utilizando esta estratégia que o regime de cooperação emergiu naturalmente de um modelo teórico como estratégia estável em um processo evolutivo. A partir daí, a estratégia do TFT passou a se apresentar como uma estratégia extremamente estável e robusta.

Porém, Boyd & Lorberbaum [42] demonstraram que nenhuma estratégia determinista é estável no DPI. Segundo eles, uma estratégia comum na população (S_e) é robusta se, para qualquer

estratégia invasora dada (S_i), têm-se $V(S_e|S_e) \geq V(S_i|S_e)$, onde $V(S_m|S_n)$ é o ganho esperado de jogadores que utilizam a estratégia S_m , interagindo com aqueles que utilizam S_n . Neste trabalho, eles mostraram que a estabilidade coletiva não implica em estabilidade evolucionária.

Por exemplo, considere dois jogadores jogando DPI com a estratégia TFT. O ganho de ambos os jogadores, e do sistema, é maior quando todos optam pela cooperação. No entanto, se por um erro um dos jogadores desertar, o outro imediatamente o retalia, levando o sistema à situação onde todos desertam e o ganho coletivo é menor. Em ambientes instáveis, outras estratégias podem ser mais robustas, como por exemplo, a Pavloviana [2], na qual o jogador não muda seu estado enquanto estiver ganhando.

2.2.3 Dilema do Prisioneiro Espacial (DPE): muitos jogadores em uma estrutura espacial e muitas rodadas

Em 1992, Nowak & May [1, 2] mostraram como a cooperação pode emergir em um grupo de jogadores competitivos, sem memória das jogadas anteriores, na presença de uma estrutura espacial, o chamado *Dilema do Prisioneiro Espacial* (DPE). Eles consideraram jogadores posicionados em uma rede quadrada (bidimensional), que podem cooperar ou desertar, com interação entre primeiros e segundos vizinhos e, também, auto-interação (c.f. Fig. 2.1).

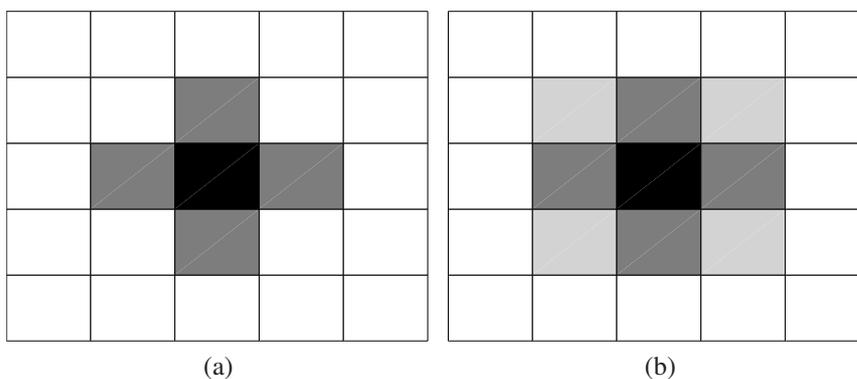


Figura 2.1: Rede quadrada onde em cada célula se encontra um jogador. Em preto o jogador central, em cinza escuro os primeiros vizinhos e cinza claro os segundos vizinhos. (a) vizinhança de von Neumann, o jogador central interage com quatro vizinhos, os chamados primeiros vizinhos. (b) vizinhança de Moore, o jogador central interage com oito vizinhos, os primeiros e segundos vizinhos.

Na rodada inicial, a proporção ρ_0 de jogadores é escolhida aleatoriamente, a partir de uma distribuição uniforme, e são definidos como cooperadores. Em seguida, cada jogador interage com seus vizinhos e com ele mesmo (auto-interação) usando as regras do DP. Em cada rodada, o ganho do jogador é a soma dos ganhos que ele obtém de suas interações com os vizinhos. O estado da próxima geração é definido pela Estratégia Evolucionária Darwiniana (EED), em

que se copia (replica) o estado do vizinho que obteve o maior ganho, caso seja diferente de seu estado atual. Este processo é repetido sucessivamente modificando a proporção de cooperação na rede.

Quando adotamos: $R = 1$, $P = S = 0$, temos os ganhos utilizados por Nowak & May [1], onde T é o único parâmetro livre, c.f. Tab. 2.2.

		Jogador B	
		Coopera	Deserta
Jogador A	Coopera	(1,1)	(0,T)
	Deserta	(T,0)	(0,0)

Tabela 2.2: Valores de ganhos utilizados por Nowak & May [1].

Os resultados variam de acordo com os valores de T , sendo que valores maiores causam a deserção generalizada na população. A deserção não é a única estratégia evolucionária estável, resultando em três regimes principais em função de T :

- para $T \sim 1$, os valores assintóticos da proporção de cooperadores ρ_c são estacionários e correspondem a uma maioria de cooperadores;
- para valores $1 < T < 2$, ρ_c não é estacionário e o sistema é fortemente sensível à condição inicial (região caótica);
- para $T \sim 2$, os valores assintóticos da proporção de cooperadores ρ_c se tornam estacionários novamente, correspondendo a uma maioria de desertores.

É interessante notar que com essas simples regras, para um dado intervalo de T , padrões espaciais complexos aparecem, com cooperadores e desertores coexistindo. Durante a evolução temporal do DPE, os cooperadores e desertores se organizam em agrupamentos. Chamaremos de *fronteira* o limite entre os agrupamentos de cooperadores e desertores, e de *bordas* os extremos da rede.

A evolução temporal destes agrupamentos forma padrões espaciais determinísticos e apresentam, inclusive, regime caótico em que, a proporção de cooperadores e desertores oscila indefinidamente. Quando os jogadores interagem somente com seus primeiros vizinhos (ver 2.1a, os agrupamentos de cooperadores que se formam têm fronteiras bastante rugosas (ver Fig. 2.2a), mas se as interações com os segundos vizinhos forem adicionadas (ver Fig. 2.1b, a vizinhança corresponde às possíveis movimentações da peça do rei no jogo de *Xadrez*) os agrupamentos de cooperadores formam padrões com fronteiras mais suaves (Fig. 2.2b).

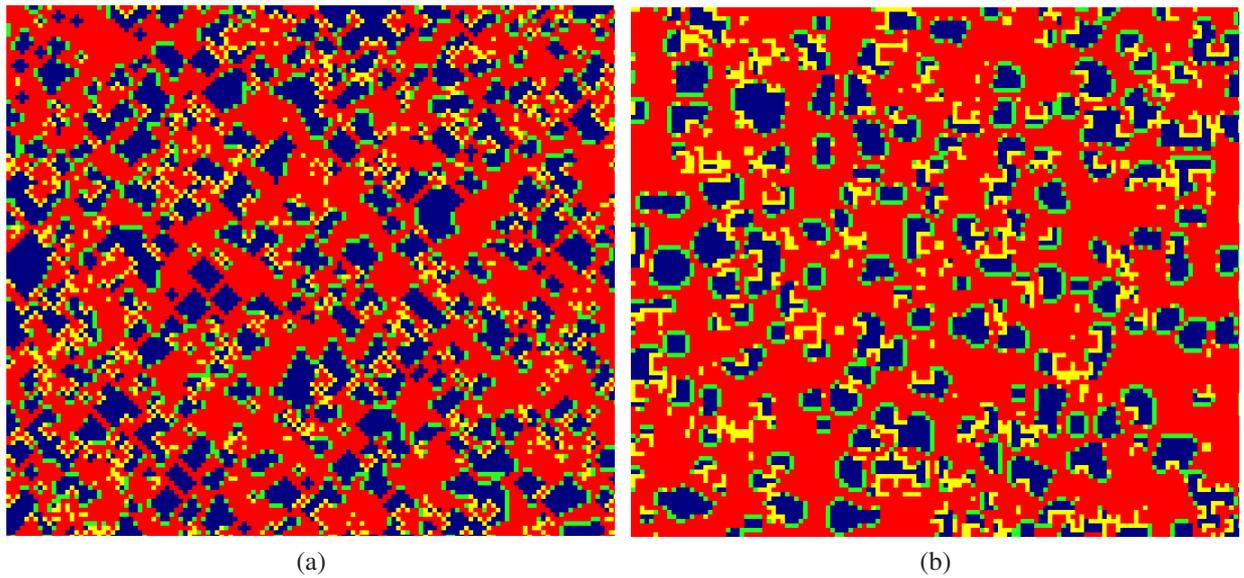


Figura 2.2: Rede quadrada (100×100) onde em cada célula se encontra um jogador que joga o Dilema do Prisioneiro com seus vizinhos. São claras as fronteiras entre os agrupamentos de cooperadores e desertores, onde ocorrem as mudanças de estado dos jogadores. Convenção de cores: azul (cinza escuro): cooperadores; vermelho (cinza médio): desertores; verde (cinza claro): cooperador no instante atual que era desertor no instante anterior; amarelo (cinza mais claro): desertor no instante atual que era cooperador no instante anterior. (a) Cada jogador interage com 4 vizinhos formando fronteiras rugosas. (b) Cada jogador interage com 8 vizinhos formando fronteiras suaves.

Nowak & May [1] obtiveram a evolução da cooperação facilitada pela auto-interação que sempre gera um resultado positivo dentro de agrupamentos cooperativos, estabilizando as ilhas de cooperadores na população. Soares & Martinez [28] demonstraram que o regime transiente sofre alterações na ausência da auto-interação, mas que o regime estacionário não apresenta mudanças significativas.

A dinâmica das fronteiras dos agrupamentos de cooperadores nos interessa no estudo da evolução dos padrões dos agrupamentos e da proporção de cooperadores. A mudança de estado dos jogadores nas fronteiras dos agrupamentos causa o comportamento oscilatório na proporção de cooperadores. Para compreender as mudanças de estado sugerimos a utilização da geometria unidimensional que permite a visualização da evolução temporal destas fronteiras, mostraremos o modelo computacional que utilizamos no próximo Capítulo.

3 *Modelo computacional*

Em nosso trabalho utilizamos um autômato celular em uma rede unidimensional, permitindo a cada jogador interagir com um número arbitrário z de vizinhos mais próximos. A seguir descrevemos as principais características deste modelo computacional e do programa desenvolvido para a análise do *Dilema do Prisioneiro Iterado no Autômato Celular Unidimensional*.

O programa utilizado para o estudo do Dilema do Prisioneiro Iterado no Autômato Celular Unidimensional foi desenvolvido em linguagem C++ e utilizou-se o compilador g++ (*Linux*). As simulações foram rodadas no cluster Pinguim¹ formado por 25 nós com sistema operacional *Linux*, com máquinas de configurações variadas. Para a análise gráfica foi utilizado o software *Matlab*[®].

3.1 Autômato Celular

Considere um autômato celular unidimensional com L células, onde cada célula representa um *jogador* com dois estados possíveis: $\theta = 0$ para desertor ou $\theta = 1$ para cooperador, c.f. Fig. 3.1.

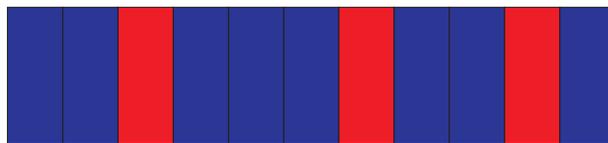


Figura 3.1: Autômato celular na rede unidimensional com $L = 11$ jogadores. Célula em azul (cinza escuro) cooperador e em vermelho (cinza médio) desertor.

O autômato que consideramos não tem células vazias, assim $\rho_{total}(t) = \rho_c(t) + \rho_d(t) = 1$, onde $\rho_c(t)$ é a proporção de cooperadores que pode ser determinada por:

$$\rho_c(t) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \theta_i(t), \quad (3.1)$$

¹<http://pinguim.ffclrp.usp.br/ganglia>

e $\rho_d(t)$ é a proporção de desertores,

$$\rho_d(t) = 1 - \rho_c(t). \quad (3.2)$$

A proporção inicial de cooperadores, $\rho_c(0) \equiv \rho_0$, $0 \leq \rho_0 \leq 1$, é um importante parâmetro no problema. A posição de cada um dos $L\rho_0$ cooperadores no autômato é definida de forma aleatória, a partir de uma distribuição uniforme. Como veremos no decorrer deste trabalho, a configuração inicial dos $L\rho_0$ cooperadores é a única variável estocástica no modelo.

Conectividade

Considere o i -ésimo jogador no autômato celular unidimensional. Sua conectividade, vizinhança, ou número de coordenação da rede é dado por $z = (1, 2, \dots, L)$. Se z for par, há $\alpha = z/2$ jogadores adjacentes à direita e outros $\alpha = z/2$ à esquerda do i -ésimo jogador, que interagem com ele, Fig. 3.2a. Se z for ímpar, cada lado tem $\alpha = (z - 1)/2$ jogadores e o jogador i interage com seu próprio estado (*auto-interação*), ver Fig. 3.2b [24, 27]. Nowak & May [2] argumentam que a auto-interação faz sentido, por exemplo, se vários animais (uma família) ou moléculas podem ocupar uma única célula. Portanto, a *auto-interação* corresponde à interação *intra-grupo*.

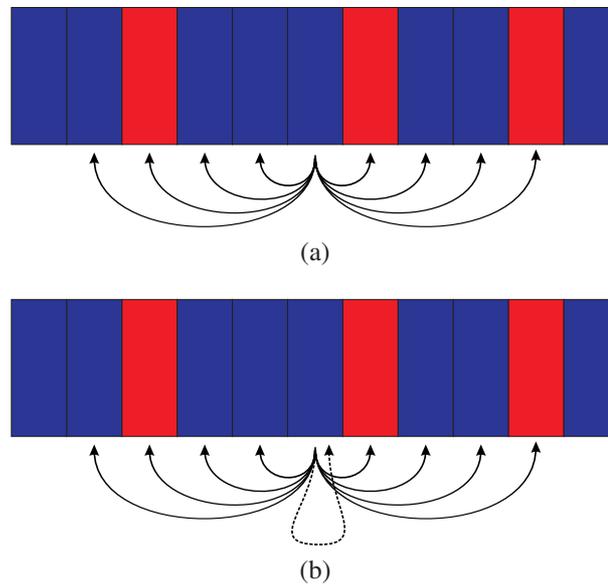


Figura 3.2: Autômato celular na rede unidimensional com $L = 11$. O jogador central (origem das setas) interage com os vizinhos indicados pelas setas. A conectividade vale: (a) $z = 8$ (sem auto-interação). (b) $z = 9$ (com auto-interação).

Utilizando a topologia unidimensional é possível variar a conectividade z da rede para qualquer valor no intervalo $[1, L]$. Isto não é possível em uma rede quadrada, pois está limitada pela vizinhança de von Neumann e Moore. Em uma rede quadrada a vizinhança de von Neumann, $z = 4$, apenas os quatro primeiros vizinhos (os jogadores à esquerda e à direita, e acima e abaixo)

interagem com o jogador central, como mostrado na Fig. 3.3a. Na vizinhança de Moore, $z = 8$, além da vizinhança de von Neumann o jogador central também interage com os segundos vizinhos, isto é, os jogadores das diagonais, equivalente aos movimentos possíveis da peça do rei no jogo de Xadrez, como na Fig. 3.3b. Estas vizinhanças podem ser consideradas em uma rede unidimensional onde $z = \{4; 5\}$ corresponde à vizinhança de von Neumann (sem e com auto-interação) e $z = \{8; 9\}$ corresponde à vizinhança de Moore (sem e com auto-interação).

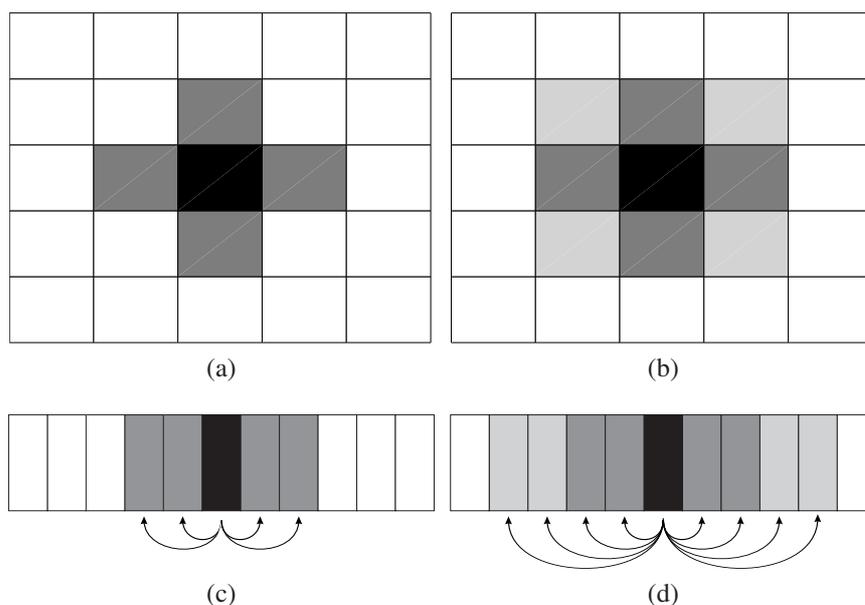


Figura 3.3: Representação na rede quadrada das vizinhanças: (a) de von Neumann, $z = 4$ (sem auto-interação) e (b) Moore, $z = 8$ (sem auto-interação). E suas respectivas representações na rede unidimensional: (c) para $z = 4$ (sem auto-interação), e (d) para $z = 8$ (sem auto-interação). Cores: preto: jogador central; cinza escuro: primeiros vizinhos e cinza claro: segundos vizinhos.

Utilizamos a condição periódica de contorno (CPC), ligando as extremidades da rede, podendo assim, ser considerada uma fita fechada. Isso é necessário para que os jogadores das extremidades da rede tenham a mesma conectividade dos demais. Como a rede é unidimensional, o efeito de borda é menor do que o observado em redes d dimensionais, pois há um número menor de jogadores com vizinhança reduzida (jogadores das bordas da rede).

3.2 Dinâmica do Sistema e Estratégias

A evolução temporal do sistema é completamente determinista. Todos os L jogadores jogam com suas respectivas vizinhanças \mathcal{V}_i e atualizam seus estados. *Jogada* é a ação de jogar com toda a vizinhança, e o conjunto de ações: todos os jogadores efetuarem suas jogadas e atualizarem seus estados, constituem uma *rodada*. Assim, definimos uma rodada como uma unidade

de tempo. Após tempo suficiente, o sistema atinge o regime estacionário, onde a proporção de cooperadores ρ_∞ .

As atualizações de estado dos jogadores dependem da estratégia adotada, a saber: *Estratégia Evolucionária Darwiniana* (EED) [1] e *Estratégia Evolucionária Pavloviana* (EEP) [43]. Na EED, o jogador mais adaptado, ou seja, aquele que obteve o maior ganho, é replicado pelos vizinhos. Em outras palavras, seu estado é copiado pelos outros. Na EEP, o jogador adota a tática “*em time que está ganhando não se mexe*”, isto é, se o jogador ganhar não muda de estado, se perder, muda. Neste contexto, mudar de estado significa passar de cooperador a desertor ou *vice-versa*.

3.3 Ganhos dos jogadores, Atualização de seus Estado e Tentação Crítica

Com a finalidade de estudar a evolução do sistema sob as Estratégias Evolucionárias: Darwiniana e Pavloviana, consideramos o ganho de cada jogador por interação (Hamiltoniano de dois spins) e o ganho total por jogada generalizados. No cálculo do ganho são utilizados os parâmetros T , R , P e S que variam de acordo com a estratégia adotada. Até onde sabemos, esta é a primeira vez que esta abordagem analítica dos ganhos é explicitamente escrita.

Considere dois jogadores i e j jogando o DP no autômato. O jogador i tem um ganho devido à sua interação com o jogador j dado por:

$$g_{\theta_i, \theta_j} = T[(1 - \theta_i)\theta_j] + R[\theta_i\theta_j] + P[(1 - \theta_i)(1 - \theta_j)] + S[(1 - \theta_j)\theta_i], \quad (3.3)$$

onde θ_k , é o estado do jogador k , onde $\theta_k = 0$ é um desertor e $\theta_k = 1$ cooperador, com $k = \{1; 2; \dots; z\}$.

De forma mais geral, o ganho total, G_i , do i -ésimo jogador vale:

$$G_i = \sum_{\mathcal{V}_i} g_{\theta_i, \theta_j}, \quad (3.4)$$

onde \mathcal{V}_i é a vizinhança do jogador i . Vale ressaltar que, apenas se z for ímpar, há a componente extra no ganho g_{θ_i, θ_i} devido à auto-interação.

Da Eq. 3.3, temos que o ganho do jogador i devido à sua interação com um único jogador cooperador ($\theta_j = 1$) é dado por:

$$g_{\theta_i, \theta_j=1} = T(1 - \theta_i) + R\theta_i, \quad (3.5)$$

e o ganho da interação com um jogador desertor ($\theta_j = 0$) por:

$$g_{\theta_i, \theta_j=0} = P(1 - \theta_i) + S\theta_i. \quad (3.6)$$

O ganho do jogador i devido às interações com c_i cooperadores de sua vizinhança \mathcal{V}'_i é:

$$G_i^{(c_i)}(\theta_i) = [T(1 - \theta_i) + R\theta_i]c_i, \quad (3.7)$$

e com os d_i desertores:

$$G_i^{(d_i)}(\theta_i) = [P(1 - \theta_i) + S\theta_i]d_i. \quad (3.8)$$

A soma dos ganhos das interações com toda a vizinhança \mathcal{V}'_i dará o ganho total do i -ésimo jogador.

$$\begin{aligned} G_i^{\mathcal{V}'_i}(\theta_i) &= G_i^{(c_i)}(\theta_i) + G_i^{(d_i)}(\theta_i), \\ &= [T(1 - \theta_i) + R\theta_i]c_i + [P(1 - \theta_i) + S\theta_i]d_i. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Como o número de cooperadores e de desertores numa dada vizinhança é complementar, temos que $d = z - c$. Assim, a Eq. 3.9, se torna:

$$\begin{aligned} G_i^{\mathcal{V}'_i}(\theta_i) &= [T(1 - \theta_i) + R\theta_i]c_i + [P(1 - \theta_i) + S\theta_i](z - c_i), \\ &= Tc_i + P(z - c_i) + [(R - T)c_i + (S - P)(z - c_i)]\theta_i. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Portanto, o ganho do jogador i , que joga com z vizinhos, dos quais c_i são cooperadores e os demais são desertores, é dado por:

$$G_i^{\mathcal{V}'_i}(\theta_i) = \begin{cases} Tc_i + P(z - c_i) & \text{se } \theta_i = 0 \text{ (desertor),} \\ Rc_i + S(z - c_i) & \text{se } \theta_i = 1 \text{ (cooperador).} \end{cases} \quad (3.11)$$

Agora determinaremos estes ganhos para as EED e EEP e os valores de tentação crítica, isto é, o valor de tentação que proporciona um ganho tal, que faça o jogador mudar de estado, logo este valor muda de uma estratégia para outra.

3.3.1 Estratégia Evolucionária Darwiniana

Nowak & May [1] utilizaram o conjunto de parâmetros $R = 1$, $P = S = 0$, deixando apenas um parâmetro livre, a tentação T . Estes valores são diferentes dos definidos originalmente por Tucker [33] ($T = 5$, $R = 3$, $P = 1$, $S = 0$). As condições ($T > R > P > S$) e ($T + S < 2R$) foram relaxadas ($P = S$, e quando $T = 2$, $T + S = 2R$) sem nenhum prejuízo das características de con-

flito do DP, sendo conhecido como Dilema do Prisioneiro Fraco. Devido a estas modificações, $1 \leq T \leq 2$ garante as condições de conflito.

Substituindo estes parâmetros na Eq. 3.3, temos o ganho por jogada na EED:

$$g_{\theta_i, \theta_j} = T(1 - \theta_i)\theta_j + \theta_i\theta_j. \quad (3.12)$$

Um resultado similar foi obtido por Durán & Mulet [20]: $g_{\theta_i, \theta_j} = T(1 - \theta_i\theta_j)\theta_j + \theta_i\theta_j$. A diferença entre o nosso resultado e o de Duran & Mulet é a presença do termo θ_j multiplicando θ_i , o que não modifica os resultados. Apesar das equações serem equivalentes, a nossa é mais simples, pois remove um termo desnecessário.

Das Eqs. 3.7 e 3.8, substituindo os parâmetros adotados na EED, temos que o ganho do jogador i por jogar com os c_i cooperadores de sua vizinhança é:

$$G_i^{(c_i)}(\theta_i) = [T - (T - 1)\theta_i]c_i. \quad (3.13)$$

E, por sua vez, o ganho por interagir com os d_i desertores de sua vizinhança é:

$$G_i^{(d_i)}(\theta_i) = 0. \quad (3.14)$$

Ou seja, independentemente do estado do jogador i , a interação com jogador(es) no estado desertor, não altera o seu ganho total, como se ele não interagisse com aquele(s) jogador(es) desertor(es). Isto é decorrente da escolha dos parâmetros, pois na EED $P = S = 0$, conseqüentemente, jogar contra um desertor produz um ganho nulo.

Dado que o ganho é $G_i^{\mathcal{V}_i}(\theta_i) = G_i^{(c_i)}(\theta_i) + G_i^{(d_i)}(\theta_i)$, substituindo os valores de $G_i^{(c_i)}(\theta_i)$ e $G_i^{(d_i)}(\theta_i)$, Eqs. 3.13 e 3.14, temos:

$$G_i^{\mathcal{V}_i}(\theta_i) = [T - (T - 1)\theta_i]c_i. \quad (3.15)$$

Este resultado também pode ser obtido substituindo-se os parâmetros na Eq. 3.10. No entanto, refizemos estes passos para mostrar explicitamente os ganhos das interações com c_i cooperadores e d_i desertores e, também, para mostrar algumas relações úteis [20] que seguem imediatamente da Eq. 3.13. Sejam elas:

- o ganho para um cooperador que joga com c_i cooperadores é $G_i^{(c_i)}(\theta_i = 1) = c_i$, enquanto que,
- um desertor que joga com c_i cooperadores tem um ganho igual à $G_i^{(c_i)}(\theta_i = 0) = c_i T$.

Para $T > 1$:

- $G_i^{(c_i)}(\theta_i = 0) > G_i^{(c_i)}(\theta_i = 1)$ e
- $G_i^{(c)}(\theta) \geq G_i^{(c-1)}(\theta)$.

Assim, na EED, o ganho de cada jogador é sempre maior ou igual à zero, $G_i \geq 0$. Após todos os jogadores calcularem seus ganhos, começa o processo de atualização dos estados. Para isso, cada jogador i compara seu ganho G_i onde G_k , com G_k é o ganho do seu k -ésimo vizinho, com $k \in \mathcal{V} = \{1; 2; \dots; z\}$. Todo jogador faz essa comparação começando pelo jogador mais à esquerda e indo para a direita. Se $G_i < G_k$, o jogador i replica o estado do jogador k , caso contrário, permanece como está.

As transições de fase de $\rho_\infty(T)$ ocorrem quando o valor do parâmetro tentação passa por valores limites T_c . Na região de conflito, $1 < T < 2$, estas transições são definidas por [20]:

$$T_c(n, m) = \frac{z - n}{z - n - m}. \quad (3.16)$$

Que pode ser reescrita:

$$T_c(n, m) = \frac{1}{1 - \frac{m}{z-n}}, \quad (3.17)$$

onde ($0 \leq n < z$) e ($1 \leq m \leq \text{int}[(z - n - 1)/2]$) são inteiros². Por exemplo, os valores de T_c para $z = 8$ são $T_c = (8/7, 8/6, 8/5, 8/4)$.

Suponha o caso de um jogador cooperador e outro desertor, jogando com $z = 8$ vizinhos para $R = 1$ e $T = 1,50$. Este exemplo está mostrado na Tab. 3.1, onde mostramos:

- os ganhos $G_i^{\mathcal{V}_i}(\theta_i)$ de suas interações com as possíveis composições de sua vizinhança \mathcal{V} ;
- a diferença $\Delta = G_i^{\mathcal{V}_i}(\theta_i = 0) - G_i^{\mathcal{V}_i}(\theta_i = 1)$ entre seus ganhos ao jogar com uma mesma composição da vizinhança;
- a razão $\Gamma = G_i^{\mathcal{V}_i}(\theta = 0)/G_i^{\mathcal{V}_i}(\theta = 1)$ entre seus ganhos.

Notamos na Tab. 3.1 que a diferença Δ entre os ganhos de desertores e cooperadores segue a relação $\Delta = (T - R)c_i$. A razão Γ entre os ganhos é constante e obedece à $\Gamma = T/R$ para $c_i > 0$.

²A função $\text{int}(x)$ é o maior número inteiro menor ou igual a x , para x positivo.

\mathcal{V}_i	0C, 8D	1C, 7D	2C, 6D	3C, 5D	4C, 4D	5C, 3D	6C, 2D	7C, 1D	8C, 0D
$G_i^{\mathcal{V}_i}(\theta_i = 0)$ (desertor)	0T 0	1T 1,5	2T 3	3T 4,5	4T 6	5T 7,5	6T 9	7T 10,5	8T 12
$G_i^{\mathcal{V}_i}(\theta_i = 1)$ (cooperador)	0R 0	1R 1	2R 2	3R 3	4R 4	5R 5	6R 6	7R 7	8R 8
Δ	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
Γ	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5

Tabela 3.1: Ganhos de um jogador $G_i^{\mathcal{V}_i}(\theta_i)$ para o estado desertor (D, $\theta = 0$) e cooperador (C, $\theta = 1$), de acordo com sua vizinhança, em um sistema que utiliza Estratégia Evolucionária Darwiniana. Diferença entre o ganho do desertor e do cooperador [$\Delta = G_i^{\mathcal{V}_i}(0) - G_i^{\mathcal{V}_i}(1)$]. Razão entre os ganhos do desertor e do cooperador [$\Gamma = G_i^{\mathcal{V}_i}(0)/G_i^{\mathcal{V}_i}(1)$]. Os parâmetros utilizados desta tabela são $R = 1$ e $T = 1,5$.

3.3.2 Estratégia Evolucionária Pavloviana

Para a Estratégia Evolucionária Pavloviana, os parâmetros utilizados são $P = -R$ e $S = -T$, que substituindo na Eq. 3.11, nos dará:

$$G_i^{\mathcal{V}_i}(\theta_i) = \begin{cases} Tc_i - R(z - c_i) & \text{se } \theta_i = 0 \text{ (desertor),} \\ Rc_i - T(z - c_i) & \text{se } \theta_i = 1 \text{ (cooperador).} \end{cases} \quad (3.18)$$

Para o sistema utilizando a EEP, o ganho de cada jogador pode ser positivo ou negativo, $-zT < G_i^{\mathcal{V}_i} < zT$ (casos extremos, $c_i = 0$ e $c_i = z$ da Eq. 3.18). Cada jogador i irá avaliar seu ganho $G_i^{\mathcal{V}_i}$. Se $G_i^{\mathcal{V}_i} > 0$, o jogador i mantém seu estado atual; se $G_i^{\mathcal{V}_i} \leq 0$, o jogador i muda seu estado atual.

Portanto, para que um jogador i mude seu estado, de cooperador para desertor ou *vice-versa*, é necessário que seu ganho seja nulo ou negativo, isto é,

$$G_i^{\mathcal{V}_i}(\theta_i) \leq 0. \quad (3.19)$$

Aplicando essa condição nas equações de ganho da Eq. 3.18, temos:

$$G_i^{\mathcal{V}_i}(\theta_i) = \begin{cases} c_iT - (z - c_i)R \leq 0 & \text{se } \theta_i = 0 \text{ (desertor),} \\ c_iR - (z - c_i)T \leq 0 & \text{se } \theta_i = 1 \text{ (cooperador).} \end{cases} \quad (3.20)$$

Assim sendo, para que um desertor ($\theta = 0$) não mude seu estado, T tem que ser no mínimo:

$$\begin{aligned} c_iT_c - (z - c_i)R &= 0 \\ T_c &= \frac{z - c_i}{c_i}R, \end{aligned} \quad (3.21)$$

e no caso de um cooperador ($\theta = 1$):

$$\begin{aligned} c_i R - (z - c_i) T_c &= 0 \\ T_c &= \frac{c_i}{z - c_i} R. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Generalizando as Eqs. 3.21 e 3.22, obtemos o valor de tentação crítica, ou seja, aquele em que o jogador muda de estado, dada a sua vizinhança \mathcal{V}_i :

$$T_c^{\mathcal{V}_i} = \left(\frac{z - c_i}{c_i} \right)^{(-1)^\theta} R. \quad (3.23)$$

Uma característica interessante observada para T_c na EEP é sua dependência do estado do jogador. No entanto, os valores para desertores e cooperadores são os mesmos, mas aparecem em ordem invertida. Portanto, basta calcular um conjunto de valores de T_c para o sistema. Por exemplo, os valores de T_c para $z = 8$ são $T_c = \{0; 1/7; 1/3; 3/5; 1; 5/3; 3; 7; \infty\}$.

Para exemplificar vejamos a Tab. 3.2 que é equivalente à Tab. 3.1, mas agora para um sistema que adota a EEP.

\mathcal{V}_i	0C, 8D	1C, 7D	2C, 6D	3C, 5D	4C, 4D	5C, 3D	6C, 2D	7C, 1D	8C, 0D
$G_i^{\mathcal{V}_i}(\theta_i = 0)$ (desertor)	$0T - 8R$ -8	$1T - 7R$ -5,5	$2T - 6R$ -3	$3T - 5R$ -0,5	$4T - 4R$ 2	$5T - 3R$ 4,5	$6T - 2R$ 7	$7T - 1R$ 9,5	$8T - 0R$ 12
$G_i^{\mathcal{V}_i}(\theta_i = 1)$ (cooperador)	$0R - 8T$ -12	$1R - 7T$ -9,5	$2R - 6T$ -7	$3R - 5T$ -4,5	$4R - 4T$ -2	$5R - 3T$ 0,5	$6R - 2T$ 3	$7R - 1T$ 5,5	$8R - 0T$ 8
Δ	4	4	4	4	4	4	4	4	4
Γ	2/3	11/19	3/7	1/9	-1	9	7/3	19/11	3/2

Tabela 3.2: Equivalência com a Tab. 3.1, mas para um sistema que utiliza a Estratégia Evolucionária Pavloviana. Diferença entre o ganho do desertor e do cooperador [$\Delta = G_i^{\mathcal{V}_i}(0) - G_i^{\mathcal{V}_i}(1)$]. Razão entre os ganhos do desertor e do cooperador [$\Gamma = G_i^{\mathcal{V}_i}(0)/G_i^{\mathcal{V}_i}(1)$]. Os parâmetros utilizados são $R = 1$ e $T = 1,5$.

Na Tab. 3.2 vemos que a diferença entre os ganhos de desertores e cooperadores é constante e igual à $\Delta = (T - R)z$. Por sua vez, a razão entre os ganhos é igual à $\Gamma = [c_i(T + R) - zR]/[c_i(T + R) - zT]$. O valor da razão Γ diminui até atingir um valor mínimo, que depende do conjunto de parâmetros adotados, depois deste ponto o valor de Γ volta a crescer.

4 *Resultados de Simulações Numéricas sobre o Dilema do Prisioneiro no Autômato Celular Unidimensional*

Neste capítulo consideramos simulações numéricas para estudar os regimes transiente e estacionário do Dilema do Prisioneiro Iterado no Autômato Celular Unidimensional. Utilizamos um autômato celular unidimensional com $L = 10^3$ células, jogando por um tempo $t = 10^3$ rodadas. Para a análise dos padrões de agrupamentos de cooperadores e desertores, utilizou-se $L = 500$ e $t = 300$. Cada célula é um jogador, que interage com z vizinhos adjacentes, onde $2 < z < 30$. Nos estudos preliminares para definir o tamanho da cadeia que seria utilizada, testamos $L = 10^3$ e $L = 10^4$. Os resultados mostraram que $L = 10^3$ é grande o suficiente, e não apresenta efeitos de tamanho finito perceptíveis (com relação à $L = 10^4$).

Inicialmente, $L\rho_0$ células são definidas como ocupadas por cooperadores e as restantes ocupadas por desertores. O parâmetro ρ_0 varia no intervalo $0, 1 \leq \rho_0 \leq 0,9$ em passos $\Delta\rho_0 = 0,1$. Os valores extremos, $\rho_0 = 0$ e $\rho_0 = 1$, têm soluções triviais que dependem da estratégia evolucionária adotada.

Quando se utiliza a Estratégia Evolucionária Darwiniana (EED) em uma população de cooperadores (desertores) não é possível emergir um desertor (cooperador), porque os jogadores podem apenas replicar os estados de seus vizinhos. As mutações não são permitidas em nosso modelo, isto é, o ruído do sistema é nulo [44]. Por estas razões, $\rho_\infty(T; \rho_0 = 0; z) = 0$ e $\rho_\infty(T; \rho_0 = 1; z) = 1$.

Na Estratégia Evolucionária Pavloviana (EEP), em uma população totalmente cooperadora ($\rho_0 = 1$), todos os jogadores terão um ganho positivo e nenhum jogador mudará seu estado, portanto $\rho_\infty(T; \rho_0 = 1; z) = 1$. Caso a população fosse toda desertora ($\rho_0 = 0$), o ganho de todos os jogadores na primeira rodada seria negativo. Como na EED, a atualização do estado de cada jogador depende do ganho individual, todos mudariam seus estados para cooperadores, indo para a situação apresentada anteriormente e conseqüentemente, $\rho_\infty(T, \rho_0 = 0, z) = 1$.

O parâmetro T varia no intervalo $1 \leq T \leq 2$ em passos $\Delta T = 0,01$. Para evitar a dependência da configuração inicial na proporção estacionária de cooperadores, $\rho_\infty = \langle \rho_\infty(T, \rho_0, z) \rangle$ é a média de 10^3 configurações iniciais dos $L\rho_0$ cooperadores.

A seguir apresentamos os resultados de nossas simulações numéricas. Primeiramente analisamos os sistemas que utilizam a EED e em seguida a os que utilizam a EEP. Apresentamos os padrões formados pelos agrupamentos de cooperadores/desertores. Exploramos exaustivamente o espaço de parâmetros, analisando a proporção estacionária de cooperadores. Finalmente, analisamos o caso particular $T = 1$, frequentemente considerado trivial, mas que apresenta peculiaridades.

4.1 Estratégia Evolucionária Darwiniana

De maneira geral, os resultados da evolução temporal da proporção de cooperadores são muito similares àqueles obtidos para jogadores situados nos sítios de redes regulares. No entanto, no caso unidimensional, é possível explicar simplificadaamente o processo de invasão dos agrupamentos de cooperadores/desertores e as oscilações presentes no regime estacionário observadas nos trabalhos pioneiros de Nowak & May [1, 2]. Além de explicar estes fenômenos, também é possível guardar o histórico do sistema em uma imagem estática, impossível em um sistema bidimensional, por exemplo.

Os padrões formados pelos agrupamentos de cooperadores/desertores que emergem no sistema são decorrentes das interações locais dos jogadores. Nessa evolução temporal existe o regime transiente e o regime estacionário. Quando o sistema utiliza a EED as diferenças entre os ganhos dos jogadores nas fronteiras entre os agrupamentos de cooperadores e desertores são fundamentais para determinar a dinâmica do sistema [24].

4.1.1 Padrões temporais formados pelos agrupamentos de cooperadores ou desertores

Em todas as figuras dos padrões de agrupamentos de cooperadores e desertores que serão apresentadas, temos a evolução temporal dos estados dos jogadores que estão situados nas células do autômato celular unidimensional. Estes jogadores interagem entre si jogando o DP usando a EED. Nesta representação, ver Fig. 4.3, por exemplo, o tempo evolui de cima para baixo e cada linha vertical mostra a evolução do estado de um jogador. A convenção de cores segue o padrão utilizado por Nowak & May [1, 2], a saber: azul (cinza escuro): cooperadores; vermelho (cinza médio): desertores; verde (cinza claro): cooperador no instante atual que

era desertor no instante anterior; amarelo (cinza mais claro): desertor no instante atual que era cooperador no instante anterior.

Na Fig. 4.1 a evolução temporal da proporção de cooperadores, $\rho_c(t)$, é mostrada para $z = 9$, com auto-interação, e para $z = 8$, sem auto-interação. Podemos ver que nos instantes iniciais, $\rho_c(t)$ cai abruptamente, aumentando nos passos seguintes e, finalmente, oscila ao redor de um valor estacionário médio. Este valor é a proporção de cooperadores no regime estacionário, ρ_∞ , chamada de proporção estacionária de cooperadores.

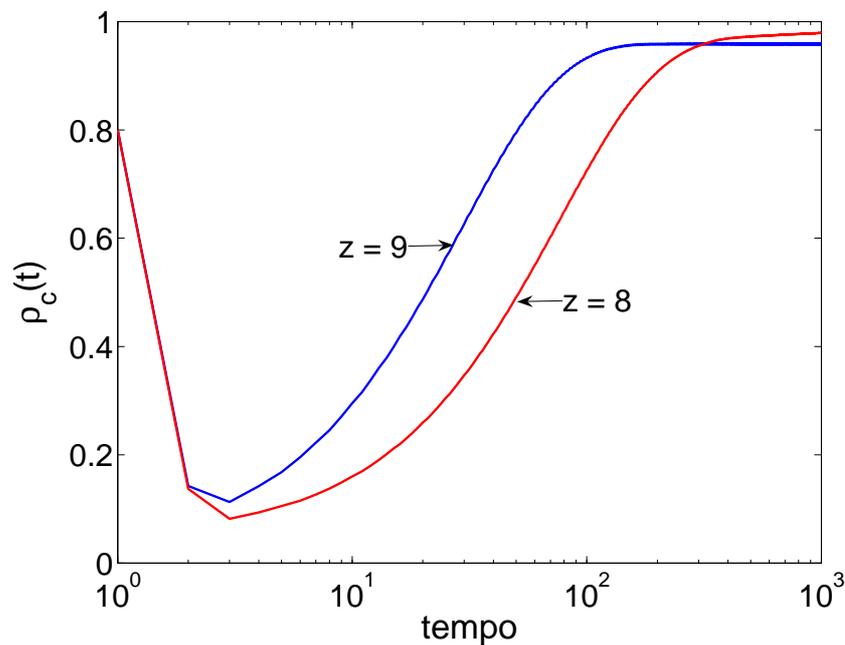


Figura 4.1: Evolução temporal da proporção de cooperadores em um autômato unidimensional de tamanho $L = 10^3$ utilizando a EED. Os parâmetros utilizados nestas simulações numéricas foram: $\rho_0 = 0,9$, $T = 1,60$, $z = 9$ (com auto-interação) e $z = 8$ (sem auto-interação) com 1000 configurações iniciais diferentes.

Quando o sistema utiliza a EED, a proporção de cooperadores em função do tempo apresenta diferentes comportamentos no regime transiente, ilustrados na Fig. 4.2. Durante o regime transiente, a proporção de cooperadores ρ_c pode apresentar os seguintes comportamentos:

- i. se mantém próxima à proporção inicial de cooperadores;
- ii. aumenta nos instantes iniciais e entra no regime estacionário;
- iii. diminui nos instantes iniciais e entra no regime estacionário;
- iv. diminui nos primeiros instantes, depois aumenta nos passos seguintes e entra no regime estacionário.

Na literatura sobre o DP [1], o regime transiente do sistema é um pouco diferente do que obtivemos. Nos primeiros instantes, $\rho_c(t)$ diminui, semelhante ao nosso sistema, porém, nos instantes seguintes, $\rho_c(t)$ aumenta atingindo valores superiores aos nossos. Entretanto, $\rho_c(t)$ não se mantém nesse valor, voltando a cair, para finalmente entrar num regime estacionário, com um valor de ρ_∞ semelhante ao nosso. Isto indica que a extrapolação de ρ_∞ , observada no sistema bidimensional, é consequência das fortes flutuações dos agrupamentos de cooperadores/desertores, que são mais prováveis em sistema de dimensionalidade mais alta. Em nosso caso, o sistema converge mais rápido para o regime estacionário do que, por exemplo, na rede quadrada.

Em resumo, devido às interações locais, cinco cenários surgem como resultados para o sistema:

- i. os agrupamentos de desertores crescem até a extinção total dos cooperadores, determinando a *fase totalmente desertora*, $\rho_\infty = 0$;
- ii. os agrupamentos de desertores crescem e dominam o sistema, mas os cooperadores não são extintos, resultando na *fase desertora*, $0 < \rho_\infty < 0,5$;
- iii. os agrupamentos desertores são invadidos pelos cooperadores resultando na *fase cooperadora*, $\rho_\infty > 0,5$;
- iv. os agrupamentos de cooperadores crescem até a extinção total dos desertores, determinando a *fase totalmente cooperadora*, $\rho_\infty = 1,0$;
- v. o regime estacionário é sensível da configuração inicial dos cooperadores, podendo ter qualquer valor $0 < \rho_\infty < 1$. O sistema é sensível às condições iniciais, não é possível definir a fase do sistema nem como cooperadora nem desertora, pois uma pequena mudança na configuração inicial do sistema modifica drasticamente ρ_∞ , levando o sistema de ρ_∞ com maioria de cooperadores para maioria de desertores. Neste caso temos o sistema na *fase caótica*.

As fases totalmente cooperadora ou desertora são subfases da cooperadora e desertora, respectivamente, então temos três regimes estacionários principais e muitas subfases.

Para compreender o regime transiente do sistema, considere o caso mais geral, em que a proporção de cooperadores cai no instante inicial e depois aumenta. Em $t = 1$, a proporção de cooperadores diminui, porque os desertores têm um ganho maior, devido à possibilidade de explorarem os cooperadores. Os jogadores explorados (cooperadores) replicam o estado

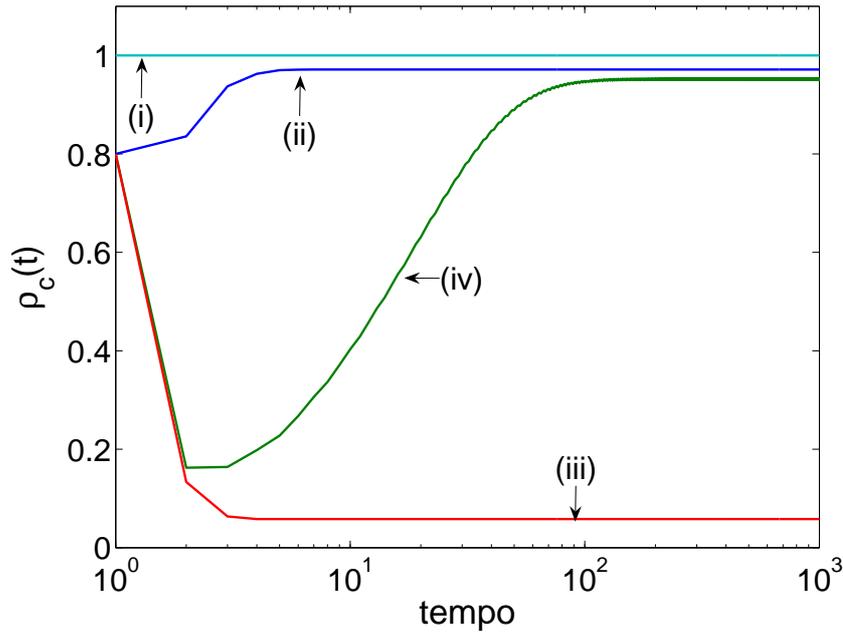


Figura 4.2: Possíveis formas de atingir o regime estacionário. Os parâmetros utilizados nestas simulações numéricas foram: $L = 1000$, $z = 9$ (com auto-interação) e para: (i) $\rho_0 = 1,0$ e $T = 1,50$, (ii) $\rho_0 = 0,8$ e $T = 1,00$, (iii) $\rho_0 = 0,8$ e $T = 2,00$, (iv) $\rho_0 = 0,8$ e $T = 1,50$.

dos “vencedores”, neste caso os desertores. Por isso, estes cooperadores que foram explorados tornam-se desertores, conseqüentemente, a proporção de desertores aumenta. Surgem, assim, os agrupamentos de cooperadores/desertores e as fronteiras entre eles. Note que estes agrupamentos de desertores são muito inconvenientes para os seus membros, pois o ganho de cada jogador pode ser menor que o ganho obtido por jogadores de agrupamentos cooperadores, como mostram as relações $G_i^{(c_i)}(\theta_i = 0) > G_i^{(c_i)}(\theta_i = 1)$ e $G_i^{(c)}(\theta_i) \geq G_i^{(c-1)}(\theta_i)$. Esta situação é conhecida como “A Tragédia dos Comuns” (*The Tragedy of the Commons*) [7]. Deste modo, os agrupamentos de cooperadores têm um ganho maior sendo replicados pelos desertores, o que fazendo com que a proporção de cooperadores volte a crescer.

Podem surgir situações diferentes da anterior, como por exemplo, os jogadores do agrupamento desertor, que estão próximos às fronteiras, exploram os vizinhos cooperadores e têm um ganho maior que os desertores do interior do seu próprio agrupamento. No caso do agrupamento cooperador, os jogadores que estão nas fronteiras, são explorados pelos vizinhos desertores. Por isso, têm um ganho menor que os cooperadores do interior do agrupamento cooperador. Se o ganho do desertor da fronteira for maior que o ganho do cooperador do interior do agrupamento, os cooperadores da fronteira, que interagiram com ambos, irão replicar o estado dos desertores, e assim, o agrupamento de desertores cresce. Dessa forma, surgem as invasões dos agrupamentos cooperadores.

Se o ganho do cooperador ainda for maior que o do desertor, ele pode manter seu estado.

Assim, pode ocorrer a manutenção dos agrupamentos de cooperadores, ou ainda a invasão dos agrupamentos desertores. Como no interior dos agrupamentos os jogadores têm o mesmo ganho, eles não mudam seus estados, pois na EED os jogadores só replicam o estado de vizinhos que têm um ganho superior ao seu. Portanto, a atividade no autômato celular ocorre nas fronteiras dos agrupamentos de cooperadores/desertores devido à conectividade dos jogadores. O autômato celular que propusemos facilita a compreensão e visualização deste fenômeno.

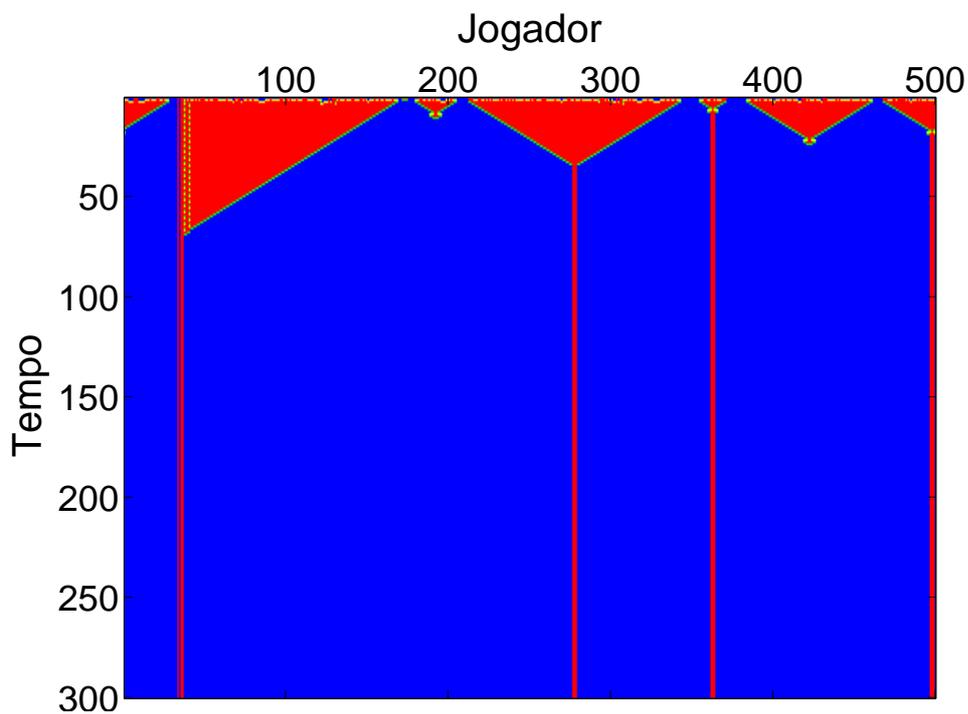
Na representação dos autômatos celulares (ver Fig. 4.3 como exemplo), nos passos iniciais, os agrupamentos de cooperadores/desertores se organizam em formas como triângulos retângulos, isósceles e escalenos. A Fig. 4.3a e 4.3b mostram alguns exemplos da dinâmica de formação de triângulos de cooperadores e desertores. As bases destes triângulos são os agrupamentos iniciais de cooperadores/desertores, e as inclinações dos lados dos triângulos dependem dos parâmetros utilizados na simulação numérica.

Acompanhando a evolução temporal do sistema, ou seja, seguindo de cima para baixo nesta representação, vamos em direção a uma das pontas dos triângulos. Na ponta inferior do triângulo pode haver a extinção dos cooperadores/desertores que estavam em seu interior ou podem surgir estruturas persistentes: os *fingers* e os *gliders*. Estas estruturas também podem ser originadas nos primeiros agrupamentos que surgem no sistema.

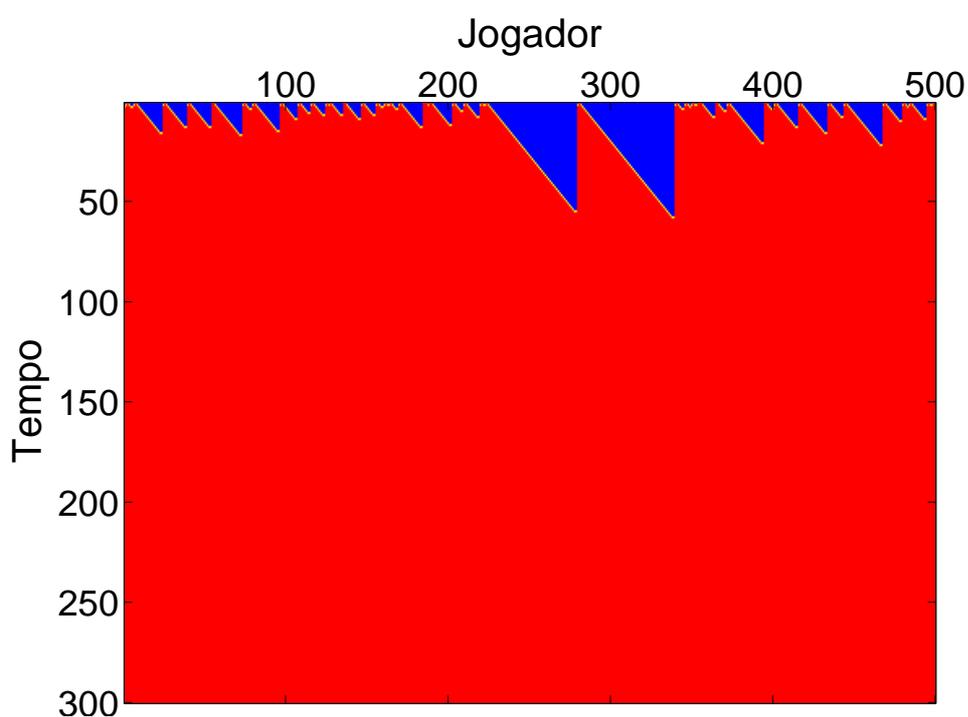
Um *finger* é um padrão (forma geométrica repetitiva dos estados dos jogadores) que se estende através do sistema como uma linha reta. Sua borda pode ser lisa ou rugosa. Chamaremos de *finger* rugoso aquele que possui em sua fronteira formas geométricas diversas e o que não apresenta essas formas é um *finger* liso. As bordas rugosas, como um dente-de-serra, por exemplo, apresentam características importantes como periodicidade e simetria em relação ao jogador central do *finger*.

O *glider* foi originalmente descrito no algoritmo do “Jogo da Vida” (“*Game de Life*”) [45], onde ele representava uma nave que viajava diagonalmente pelo sistema. Ele é um padrão que viaja através do sistema e pode colidir com outros padrões e pode ser usado para transmitir informação através de longas distâncias [26], por exemplo.

Nas Figs. 4.4, 4.5 e 4.6, temos exemplos da formação de *fingers* e *gliders*, respectivamente. A origem de um *finger*, um *glider* e também a inclinação do *glider*, dependem do número de cooperadores/desertores em sua origem e dos parâmetros T e z . Por exemplo, na Fig. 4.4, com os parâmetros utilizados no sistema, quando um triângulo termina em uma ponta com dois jogadores desertores (2D), forma-se um *finger* serrilhado com o padrão $2D \rightarrow 12D \rightarrow 8D \rightarrow 4D \rightarrow 14D \rightarrow 10D \rightarrow 6D \rightarrow 2D$ e assim por diante. Mas, se o triângulo terminar em uma ponta com três desertores (3D), forma-se um padrão transiente $3D \rightarrow 13D \rightarrow 11D \rightarrow 7D$ e em



(a)



(b)

Figura 4.3: Os parâmetros utilizados nestas simulações numéricas foram $L = 500$, $t = 300$. Ilustração da formação de: (a) triângulos retângulos e isósceles de desertores com extinção dos desertores. Com $T = 1,50$, $\rho_0 = 0,7$, e $z = 7$ (com auto-interação). (b) triângulos retângulos de cooperadores. Note que a inclinação da hipotenusa é na direção contrária a inclinação obtida nos triângulos retângulos de desertores. Com $T = 2,00$, $\rho_0 = 0,9$, e $z = 2$ (sem auto-interação).

seguida origina-se um *finger* liso com sete desertores ($7D$). Isto não ocorre apenas nas pontas dos triângulos, acontece também nos agrupamentos com 2 e 3 desertores nos instantes iniciais, como vemos próximo ao jogador 230 e 400, respectivamente. Na Fig. 4.5, na ponta do triângulo de desertores ocorre um padrão transitente $2D \rightarrow 20D \rightarrow 12D \rightarrow 4D \rightarrow 22D \rightarrow 14D$ e depois se forma o padrão periódico $6D \rightarrow 24D \rightarrow 16D \rightarrow 8D \rightarrow 6D$ e assim por diante. E na Fig. 4.6, na ponta do triângulo de desertores forma-se um *glider* que apresenta um padrão transitente começando com muitos jogadores, e depois atinge um padrão periódico.

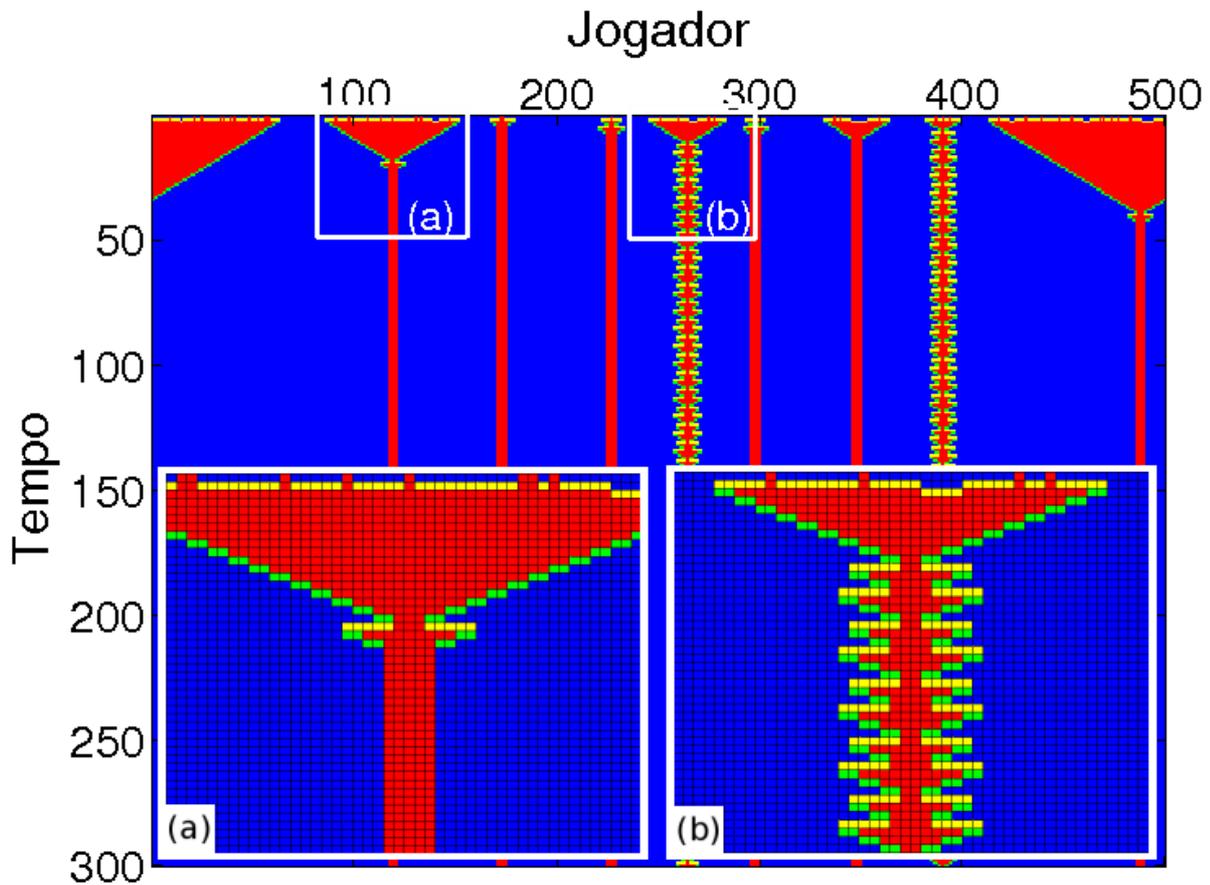


Figura 4.4: Ilustração da formação e evolução de *fingers* lisos e serrilhados de desertores. Os parâmetros utilizados nesta simulação numérica foram: $L = 500$, $t = 300$, $T = 1,50$, $\rho_0 = 0,9$, e $z = 10$ (sem auto-interação). Quadro interno (a): ampliação da região (a), mostrando a formação de um *finger* liso. Quadro interno (b): ampliação da região (b), mostrando a formação de um *finger* serrilhado.

A propagação de alguns *gliders* pode ser observada nas Figs. 4.7, 4.8, e 4.9, onde observamos que os *gliders* podem se propagar continuamente, como na ampliação da Fig. 4.7, ou descontinuamente, como mostrado nas ampliações das Figs. 4.8a e 4.8b. Além disso, na Fig. 4.9a, vemos *gliders* cooperadores que viajam dentro do triângulo de desertores. Quando o valor de z aumenta, a inclinação do *glider* e a também a separação entre os jogadores pertencentes ao *glider* descontínuo, o que fica claro quando comparamos as imagens das Figs. 4.8a e 4.8b.

Podem ocorrer intersecções entre os padrões dos agrupamentos, por exemplo: *glider-finger*.

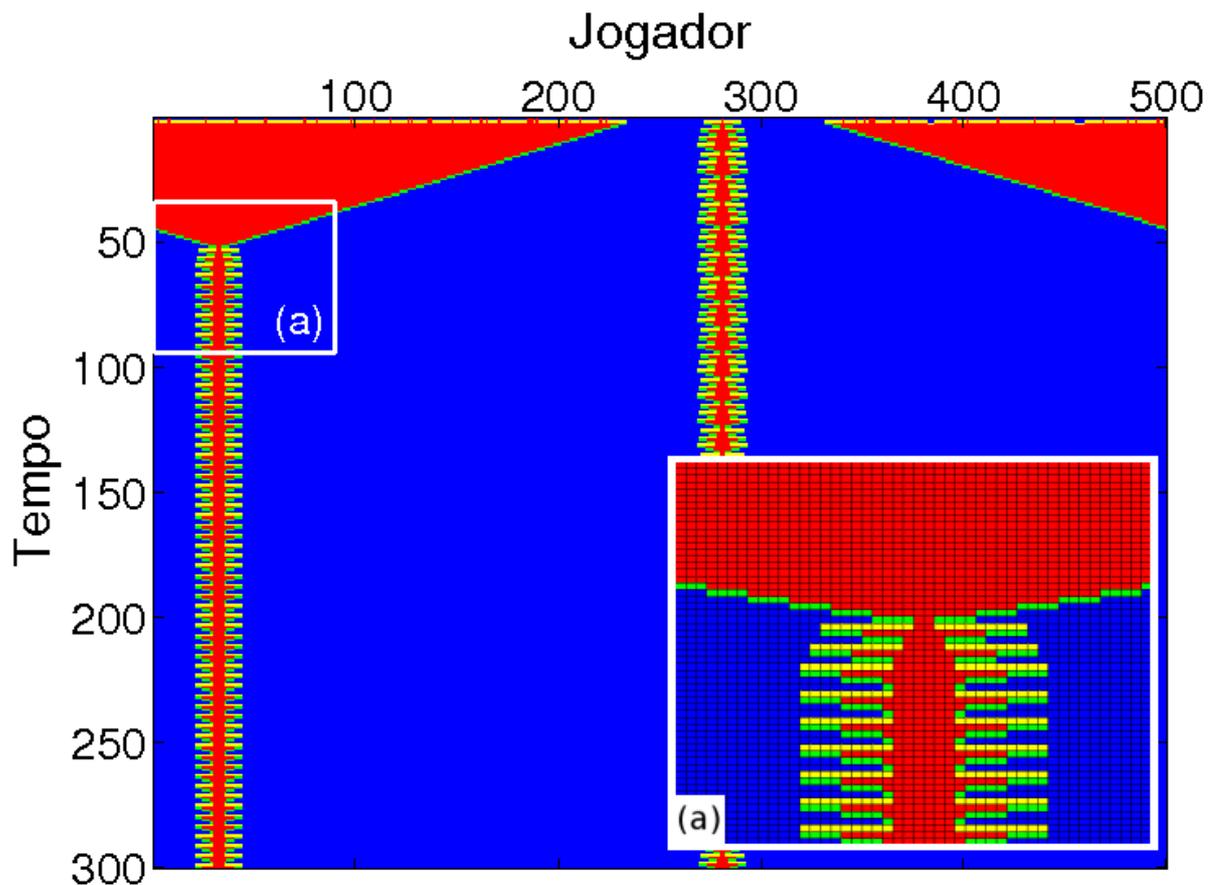


Figura 4.5: Ilustração da formação e evolução de um *finger* serrilhado de desertores que começa com poucos jogadores e se agrupa com outros na sua evolução. Os parâmetros utilizados nesta simulação numérica foram: $L = 500$, $t = 300$, $T = 1,60$, $\rho_0 = 0,9$, e $z = 19$ (com auto-interação). Quadro interno (a): ampliação da região (a).

Fingers não colidem com *fingers* pois eles evoluem paralelamente uns aos outros. O mesmo ocorre para a inexistência de colisões *glider-glider*. Observamos as colisões de *glider-finger* nas Figs. 4.10c, 4.10d, 4.11a e 4.11b. Quando um *glider* colide com outro padrão há vários resultados possíveis:

- i. ele pode ser absorvido pelo *finger* (Figs. 4.10c e 4.11a). Neste caso, o *finger* emergente sofre um pequeno deslocamento e pode manter suas características como tipo de borda (lisa ou rugosa) e número de jogadores no padrão;
- ii. ele absorve o outro padrão (Figs. 4.10d e 4.11b). Quando o *glider* absorve o *finger*, o *glider* remanescente sofre um pequeno deslocamento, mas mantém sua inclinação original;
- iii. ambos são aniquilados (Fig. 4.12).

Nas Figs. 4.10a e 4.10b, temos a ampliação das pontas dos triângulos onde podemos verificar que a diferença determinante na origem de um *finger* ou de um *glider* é o número de

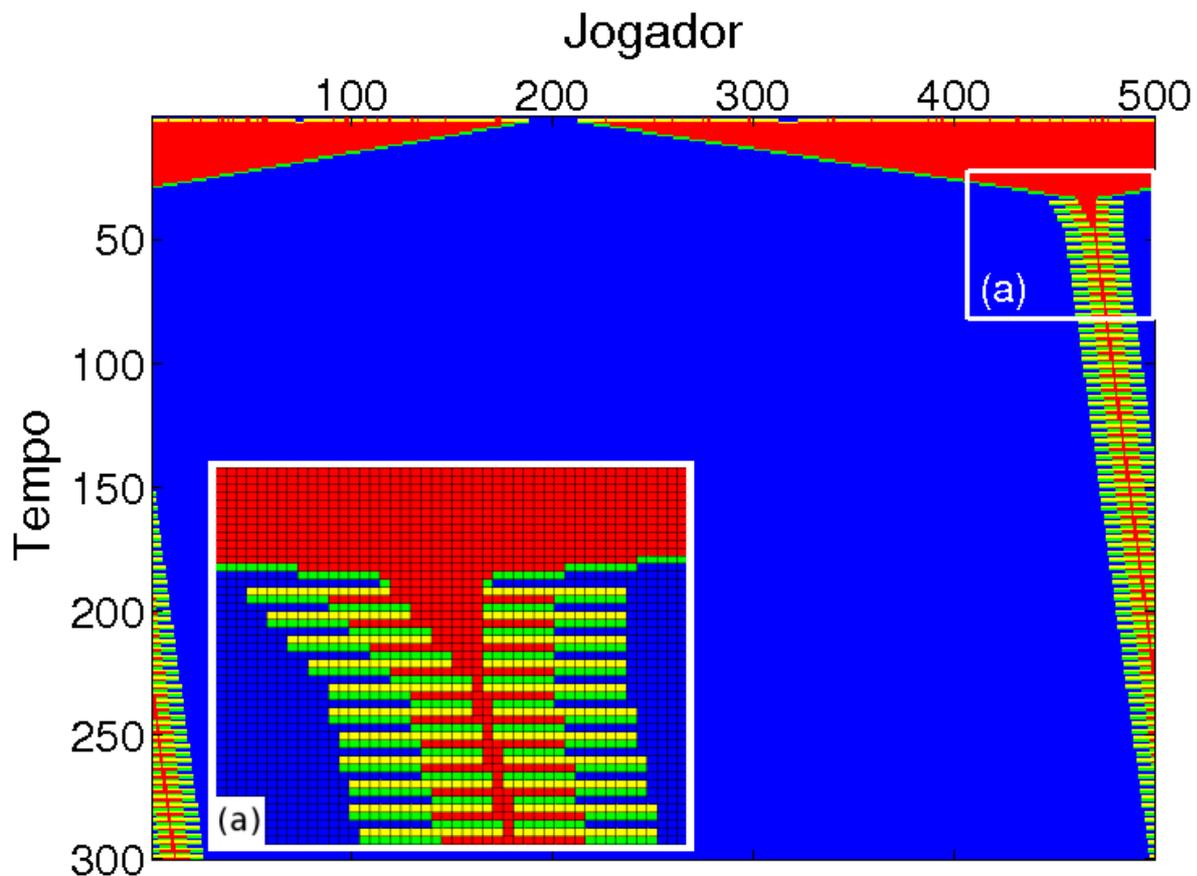


Figura 4.6: Ilustração da formação e propagação de um *glider* que começa com muitos jogadores e tem esse agrupamento diminuído na sua evolução. Os parâmetros utilizados nesta simulação numérica foram: $L = 500$, $t = 300$, $T = 1,50$, $\rho_0 = 0,9$, e $z = 29$ (com auto-interação). Quadro interno (a): ampliação da região (a).

desertores nesta ponta, sendo $3D$ e $4D$, respectivamente. Nas Figs. 4.10a e 4.10b, temos a ampliação das colisões. Quando os padrões se interferem, formam um pequeno triângulo que têm as mesmas características dos triângulos formados nos instantes iniciais, ou seja, podem gerar *fingers*, *gliders* ou aniquilar os cooperadores/desertores dos padrões envolvidos, como por exemplo na Fig. 4.12.

Os *gliders* desertores são inclinados da esquerda para a direita, pois o estado dos jogadores é atualizado da esquerda para a direita. Se a atualização de estados fosse feita da direita para esquerda a inclinação dos *gliders* seria invertida, podendo ser verificado experimentalmente como mostrado na Fig. 4.13.

As simulações numéricas do DP mostraram, que em geral os padrões dos agrupamentos de cooperadores/desertores formados dependem da configuração inicial dos jogadores, e dos parâmetros adotados no sistema. A tentação T e o tamanho da vizinhança z atuam em conjunto na definição da inclinação dos lados dos triângulos e dos *gliders* e determinam se os *gliders*

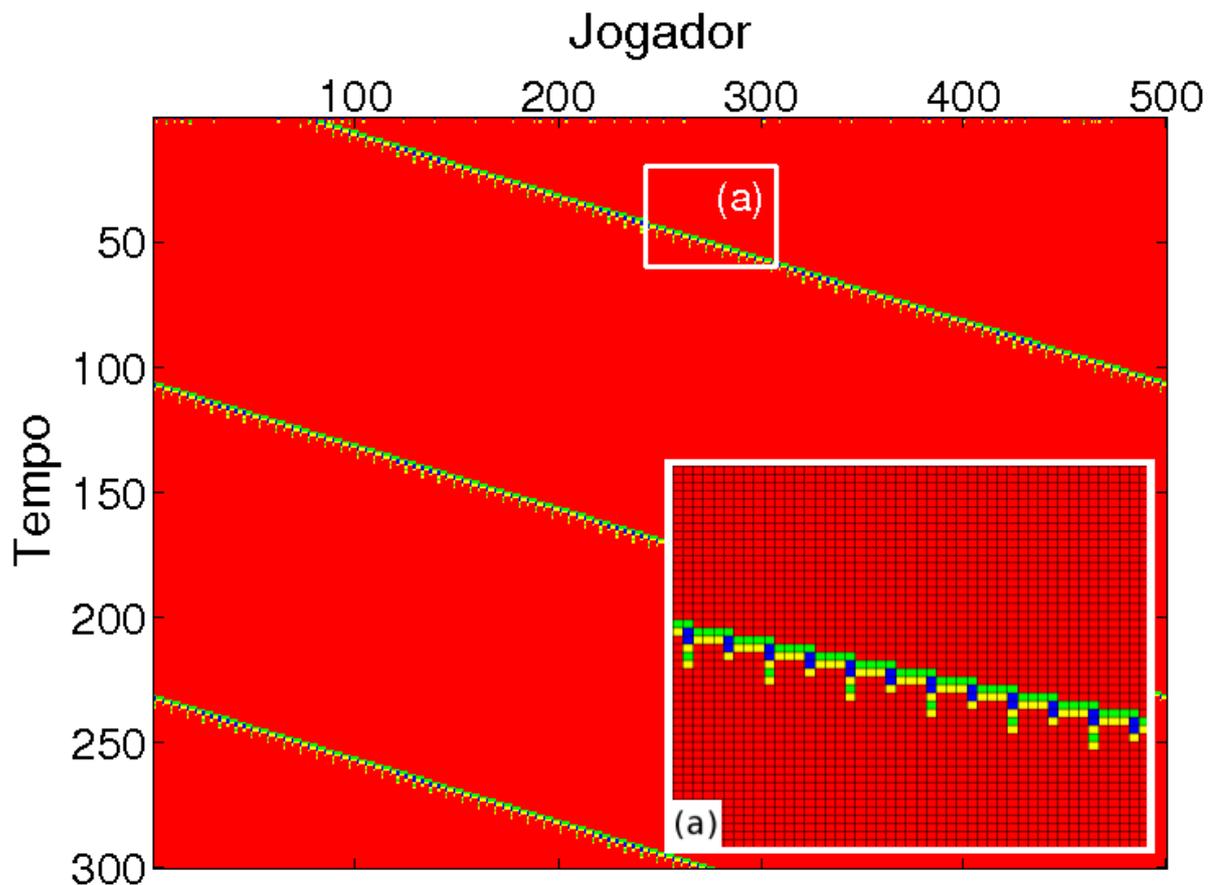


Figura 4.7: Ilustração da formação e evolução de *glider* cooperador contínuo. Os parâmetros utilizados nesta simulação numérica foram: $L = 500$, $t = 300$, $T = 1,20$, $\rho_0 = 0,1$, e $z = 9$ (com auto-interação). Quadro interno (a): ampliação da região (a).

serão contínuos ou descontínuos.

Entretanto, para uma dada configuração dos $L\rho_0$ cooperadores e um valor fixo de z , há intervalos nos quais, mesmo variando os valores de T , os padrões que se formam não mudam. Nestes intervalos, apenas os ganhos dos jogadores se alteram, resultado razoável, se tivermos em mente os intervalos entre os valores de transição T_c . Esta característica pode ser observada pelos padrões dos agrupamentos de cooperadores/desertores de uma dada configuração inicial, com ρ_0 e z , mas para diferentes valores de T , como mostrado nas Figs. 4.14 e 4.15.

Da mesma forma há intervalos de valores de T em que os padrões dos agrupamentos de cooperadores não mudam, há intervalos nos quais, para o mesmo valor de T , ρ_0 e z , ao mudar a configuração inicial dos cooperadores, os resultados são completamente diferentes. Estas mudanças acontecem tanto no regime transiente quanto no estacionário. Abordaremos esse fenômeno em mais detalhes na Seção 4.1.2, onde tratamos o regime estacionário do sistema.

O comportamento oscilatório de ρ_∞ pode agora ser facilmente compreendido observando-

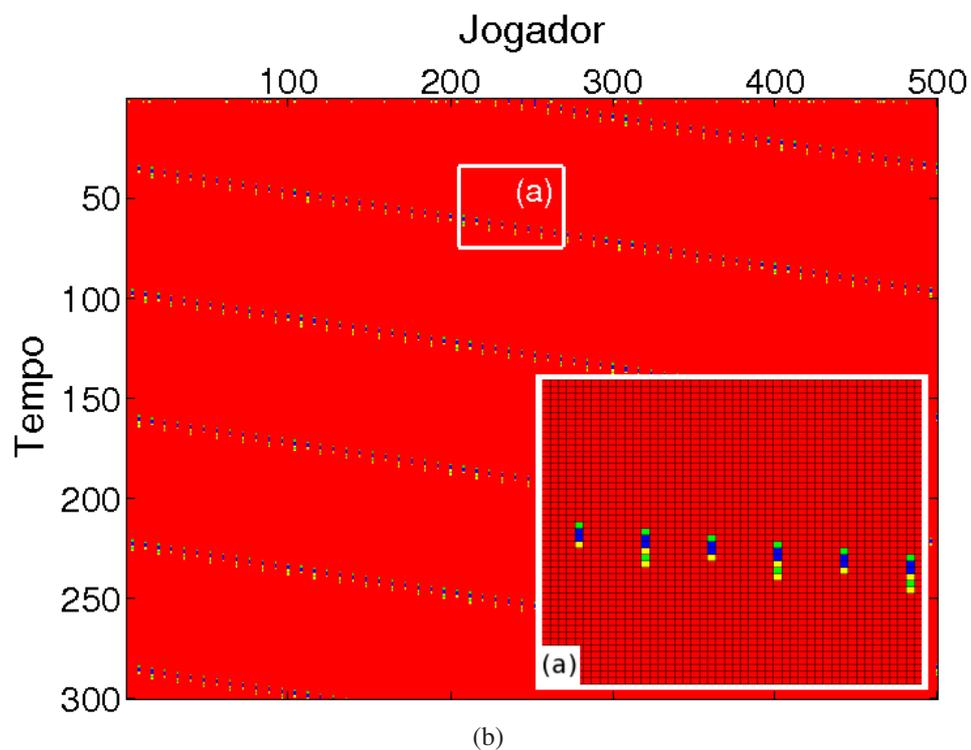
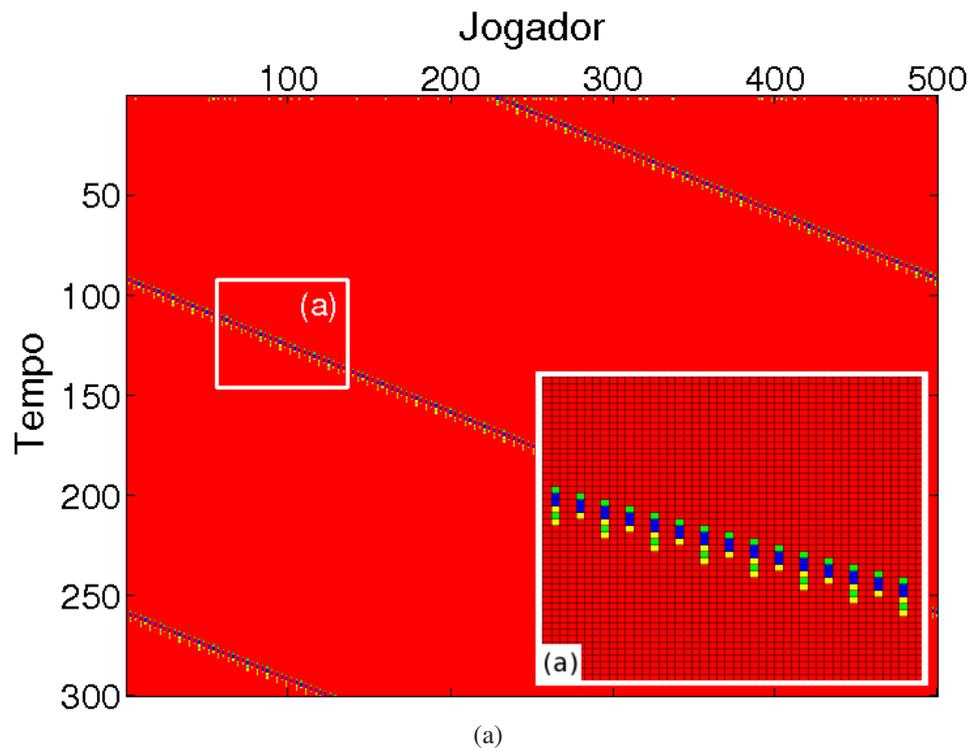


Figura 4.8: Ilustração da formação e evolução de *glider* cooperador que viaja descontinuamente no autômato. Os parâmetros utilizados nestas simulações numéricas foram $L = 500$, $t = 300$ e: (a) $T = 1,50$, $\rho_0 = 0,1$, e $z = 7$ (com auto-interação). Quadro interno (a): ampliação da região (a). (b) $T = 1,50$, $\rho_0 = 0,1$, e $z = 17$ (com auto-interação). Quadro interno (a): ampliação da região (a).

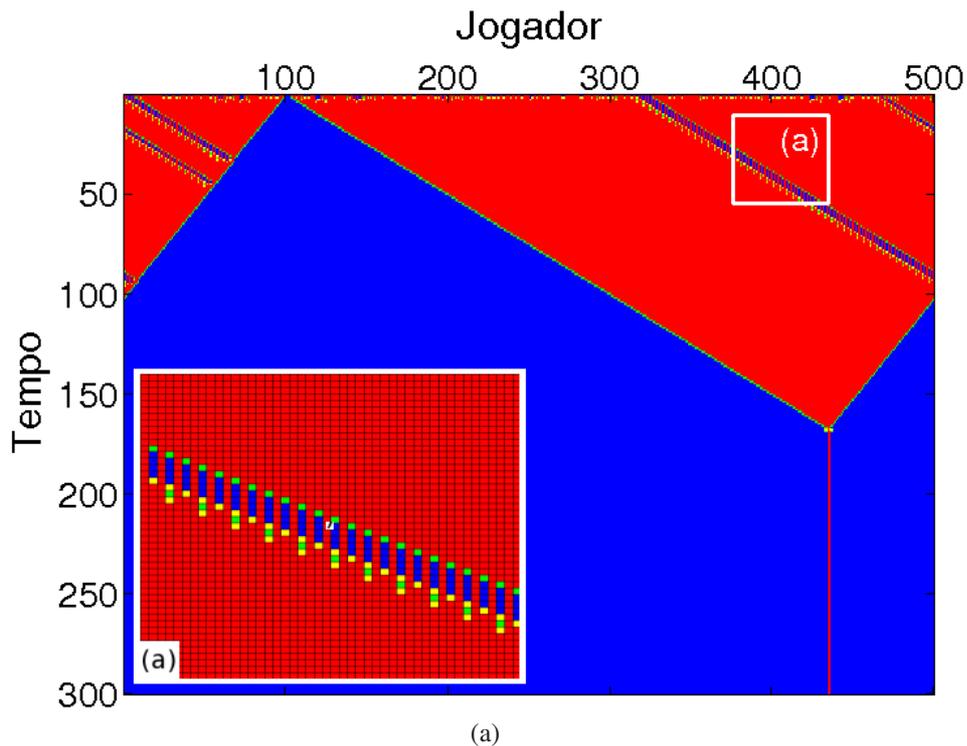


Figura 4.9: Ilustração da formação e evolução de *gliders* de cooperadores que viajam descontinuamente dentro de triângulos de desertores. Os parâmetros utilizados nesta simulação numérica foram $L = 500$, $t = 300$, $T = 1,50$, $\rho_0 = 0,3$, e $z = 5$ (com auto-interação). (a) Ampliação da região marcada.

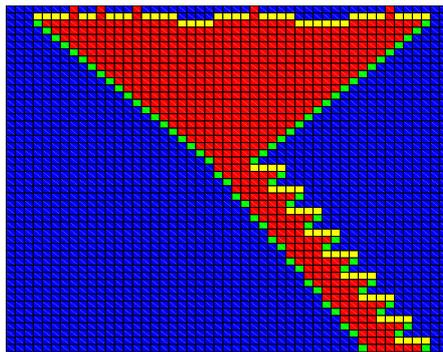
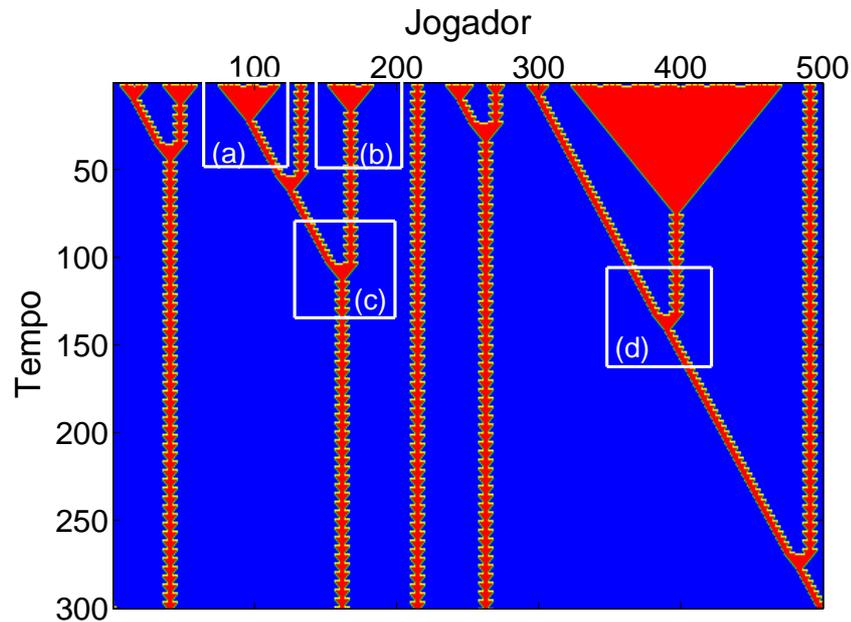
se os padrões periódicos que surgiram devido às interações locais dos jogadores. Nos trabalhos anteriores, estas flutuações eram atribuídas às oscilações dos padrões espaciais. Finalmente, nós enfatizamos que os padrões dos agrupamentos de cooperadores/desertores obtidos no autômato celular unidimensional jogando o DP pertencem às classes 1, 2 e 4 das classes¹ propostas por Wolfram [26] em seu trabalho com autômatos celulares elementares.

4.1.2 Regimes transiente e estacionário: exploração exaustiva do espaço de parâmetros

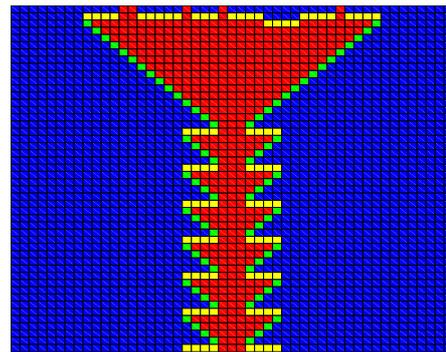
Na Seção 4.1.1, mostramos como os padrões dos agrupamentos determinam a proporção de cooperadores, nos regimes transiente e estacionário. Agora, analisaremos o comportamento do

¹Há quatro classes qualitativas básicas de comportamento que caracterizam empiricamente o autômato celular, as quais geram diferentes resultados.

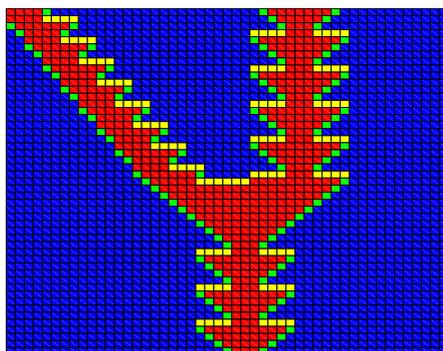
- Classe 1, resulta em um estado homogêneo, todas as células ficam no mesmo estado;
- Classe 2, resulta em um conjunto de estruturas estáveis ou periódicas que são separadas e simples;
- Classe 3, resulta na formação de padrões caóticos;
- Classe 4, resulta em estruturas complexas, algumas vezes de vida longa.



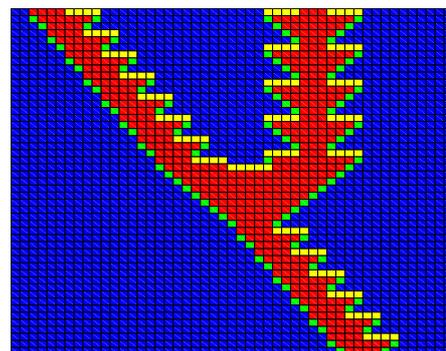
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 4.10: Ilustração da formação e evolução de *fingers* serrilhados e *gliders* e suas colisões. Os parâmetros utilizados nesta simulação numérica foram: $L = 500$, $t = 300$, $T = 1,60$, $\rho_0 = 0,9$, e $z = 8$ (sem auto-interação). Colisão: *finger* serrilhado absorve o *glider* e resulta em um *finger* serrilhado (a) *Finger* serrilhado de desertores originado da ponta de um triângulo. (b) *Glider* de desertores, originado da ponta de um triângulo. (c) Colisão: *glider* é absorvido pelo *finger* serrilhado. (d) Colisão: *glider* absorve o *finger* serrilhado.

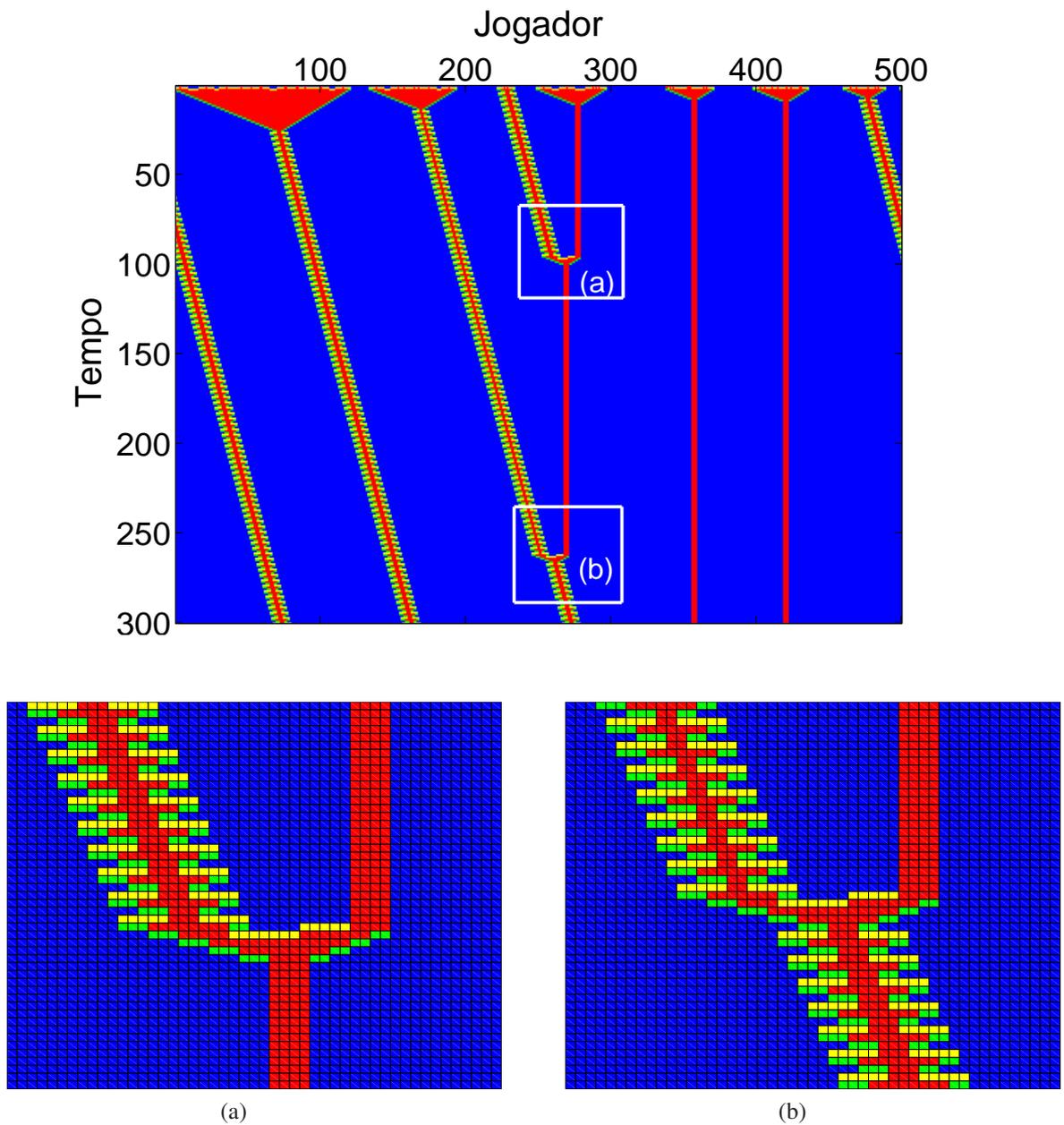


Figura 4.11: Ilustração da formação e evolução de *finger* liso e *gliders* e suas colisões. Ampliação das regiões marcadas acima: (d) colisão: *finger* liso absorve o *glider* e resulta em *finger* liso; (e) colisão: *glider* absorve o *finger* liso. Os parâmetros utilizados nesta simulação numérica foram: $L = 500$, $t = 300$, $T = 1,40$, $\rho_0 = 0,9$, e $z = 10$ (sem auto-interação).

regime estacionário utilizando o valor da proporção estacionária de cooperadores, $\rho_\infty(T, \rho_0, z)$ em todo o espaço de parâmetros, T , ρ_0 e z .

Mostramos que o sistema pode apresentar três fases básicas: cooperadora, desertora e caótica. Como ρ_∞ pode assumir qualquer valor no intervalo $[0, 1]$, essas fases podem apresentar muitas subfases.

Apresentamos $\rho_\infty(T, \rho_0, z)$, como superfícies, onde a altura é o valor de ρ_∞ e os eixos que

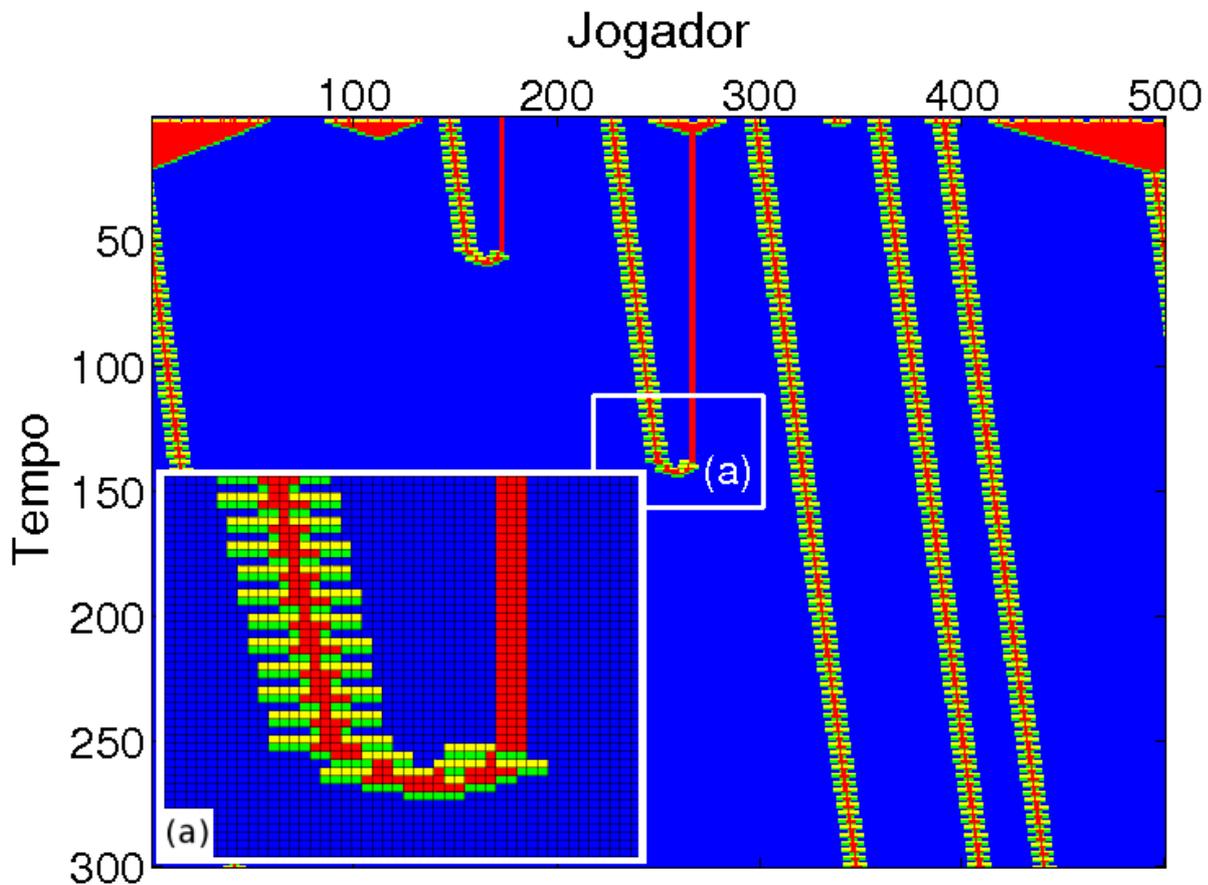


Figura 4.12: Ilustração da formação e evolução de *finger* liso e *gliders* e suas colisões. Ampliação das regiões marcadas acima: (a) ampliação, colisão: *finger* liso colide com o *glider* e ocorre a extinção dos padrões. Os parâmetros utilizados nesta simulação numérica foram: $L = 500$, $t = 300$, $T = 1, 20$, $\rho_0 = 0,9$, e $z = 10$ (sem auto-interação).

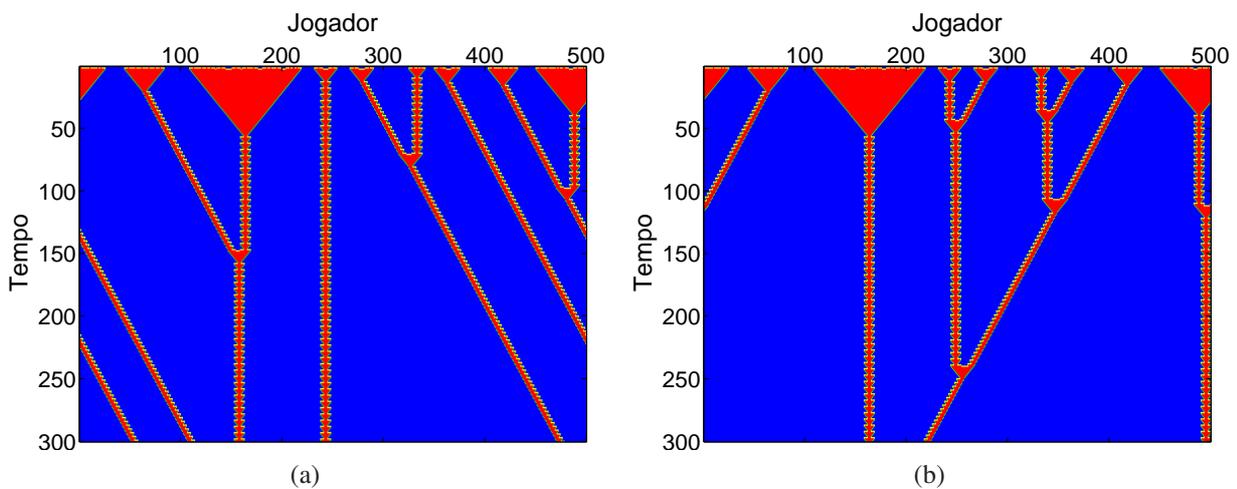


Figura 4.13: Ilustração de diferentes atualizações da evolução do jogo do Dilema do Prisioneiro em uma rede unidimensional. Os parâmetros utilizados nesta simulação numérica foram: $L = 500$, $t = 300$, $T = 1, 60$, $\rho_0 = 0,9$, e $z = 8$ (sem auto-interação). (a) Atualização dos estados dos jogadores feita da esquerda para a direita. (b) Atualização dos estados dos jogadores feita da direita para a esquerda.

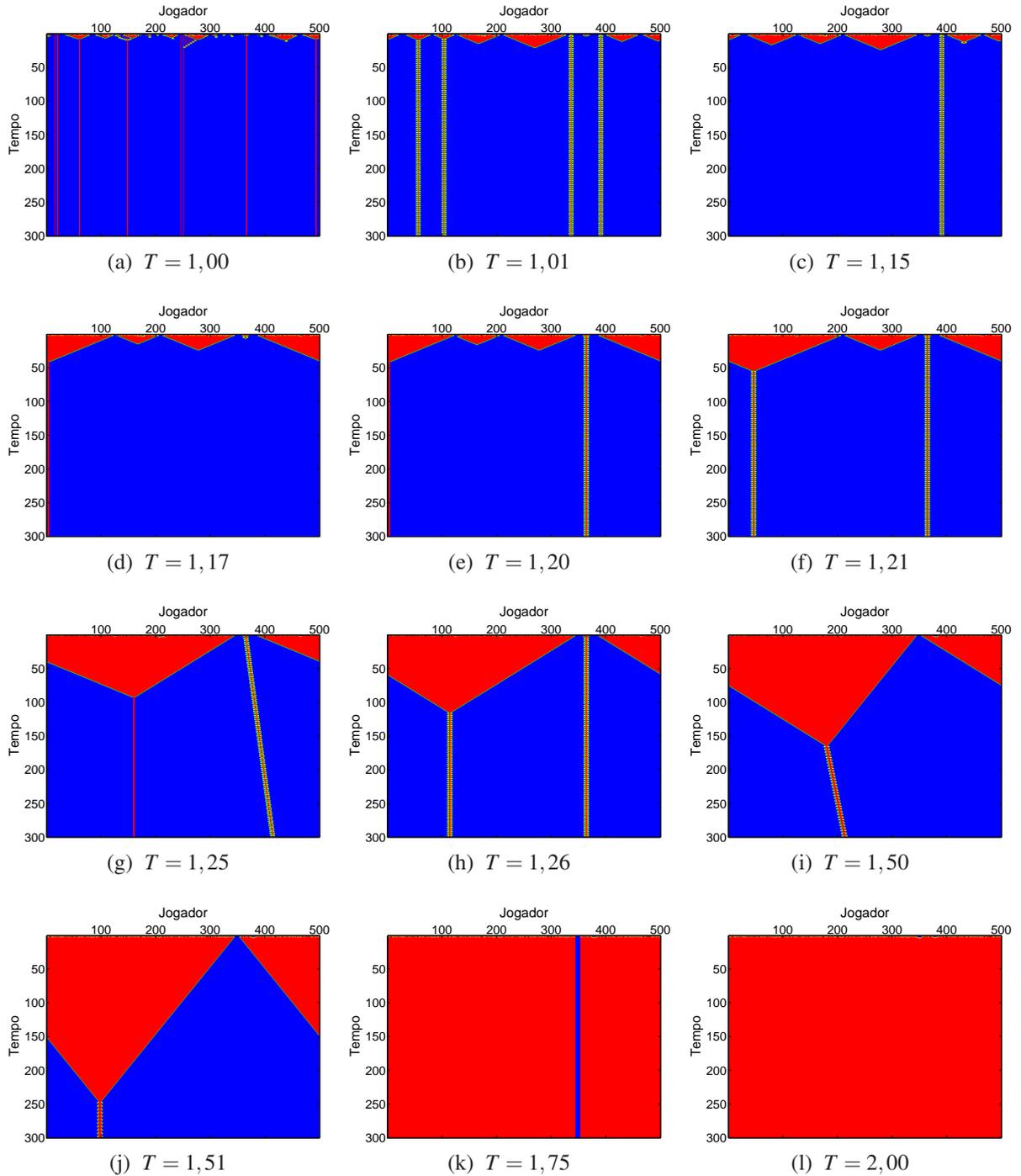


Figura 4.14: Série de simulações numéricas que mostram como a variação da tentação T modifica os padrões dos agrupamentos de desertores presentes. Nos intervalos entre os valores especificados de T não ocorrem modificações dos padrões. Os parâmetros utilizados nesta simulação numérica foram: $L = 500$, $t = 300$, $\rho_0 = 0,7$, e $z = 8$ (sem auto-interação).

formam a base são T e ρ_0 . O valor de $\rho_\infty(T, \rho_0, z)$ é o valor médio de 1000 configurações iniciais diferentes, e o desvio-padrão SD de ρ_∞ também será analisado. Esta superfície é o diagrama de fases do sistema. Da Fig. A.1 a A.29 (Apêndice A) mostramos uma série de superfícies de ρ_∞ para $z = \{2; 3; \dots; 30\}$. Lembramos que o jogador realiza a auto-interação apenas para

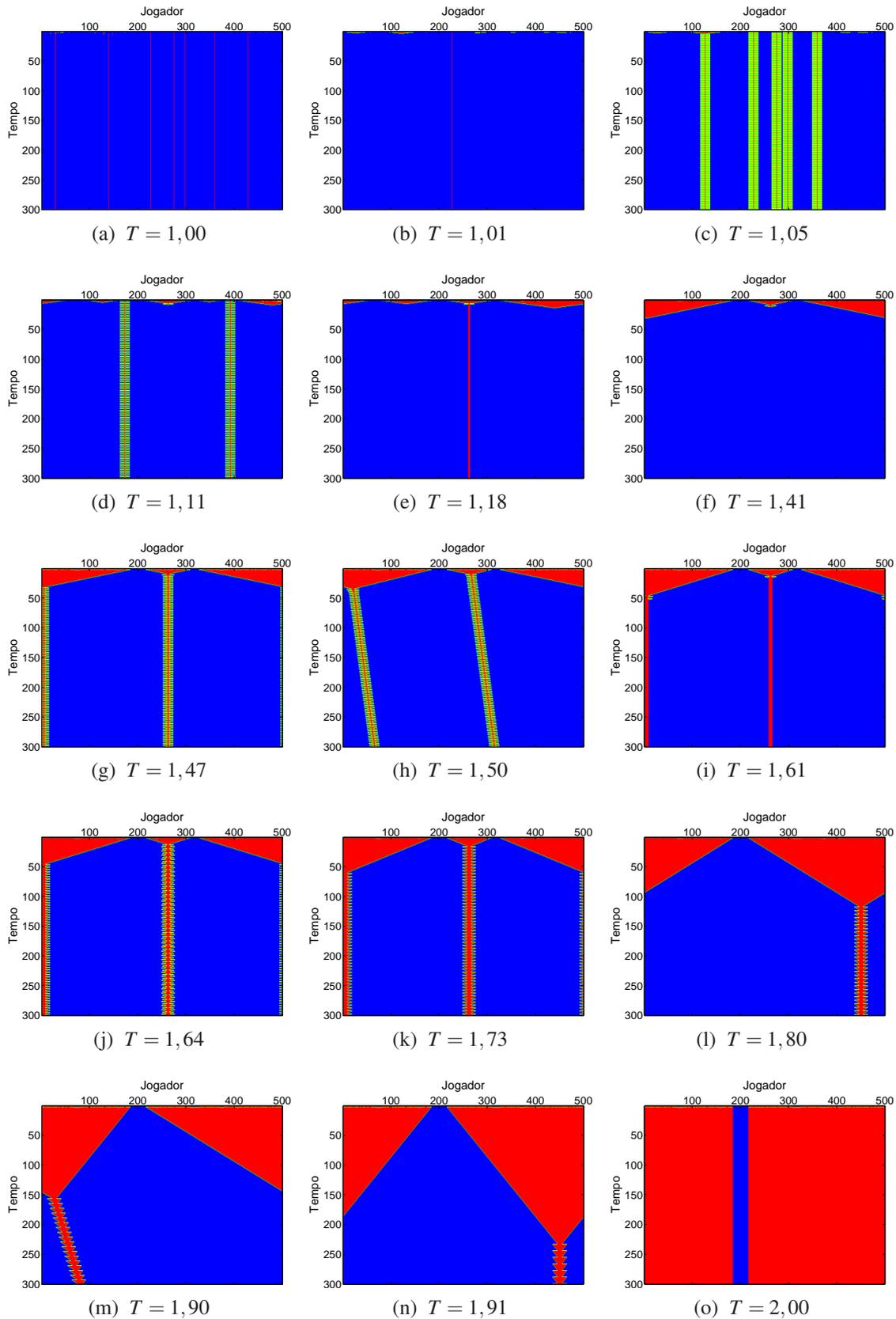


Figura 4.15: Série de simulações numéricas que mostram como a variação da tentação T modifica os padrões dos agrupamentos de desertores presentes. Nos intervalos entre os valores especificados de T não ocorrem modificações dos padrões. Os parâmetros utilizados nesta simulação numérica foram: $L = 500$, $t = 300$, $\rho_0 = 0,9$, e $z = 10$ (sem auto-interação).

z ímpar. Ainda no Apêndice A, da Fig. A.1b e A.1c até A.29b e A.29c, temos as superfícies do desvio-padrão SD de ρ_∞ . Estas superfícies são mostradas por dois ângulos para evitar a presença de pontos cegos nas superfícies.

Observando a seqüência das figuras anteriores, temos que:

- com a presença da auto-interação, a região em que o sistema apresenta um comportamento cooperativo ($\rho_\infty \sim 1$) é maior. Isto significa que a cooperação prevalece quando a auto-interação é incluída, em especial, enquanto $z < 18$;
- à medida que z aumenta, as superfícies convergem para a mesma forma, tanto para z par quanto ímpar, exceto a região $1 < T < 1,2$ e $0,2 < \rho_0 < 0,8$;
- a região $1 < T < 1,5$ e $0,5 < \rho_0 < 1,0$ apresenta $\rho_\infty \sim 1$, para $3 < z < 9$ e $z = 11$; A cooperação prevalece no sistema sob estas condições;
- a região $1,5 < T < 2$ e $0 < \rho_0 < 0,5$ apresenta $\rho_\infty \sim 0$, para $z = \{2; 4; 6\}$ e $8 < z < 30$, a deserção prevalece no sistema nestes intervalos;
- a região $1 < T < 1,5$ e $0 < \rho_0 < 0,5$ apresenta $\rho_\infty \sim 0$, para $12 < z < 30$ com z par, se z for ímpar existe uma região de comportamento peculiar;
- a presença de “vales” (depressões relativas) de ρ_∞ ocorre para $\rho_0 \sim 0,9$, para $3 < z < 20$;
- $z = 2$ apresenta um comportamento simples, onde a cooperação surge apenas para $1 < T < 2$ e $0,8 < \rho_0 < 1,0$ e, basicamente, os jogadores não mudam de estado.

Em relação às superfícies de desvio-padrão, para $z = 2$ (Figs. A.1b e A.1c) e $z = 3$ (Figs. A.2b e A.2c), o desvio-padrão é praticamente nulo, $SD \sim 0$. Em todas as superfícies de SD para $4 \leq z < 30$ existem regiões que apresentam $SD \sim 0,5$ que variam em tamanho e posição no espaço de parâmetros. O desvio-padrão $SD \sim 0,5$ está presente na fase caótica do sistema, que é muito sensível à configuração inicial dos cooperadores.

Na Fig. A.8a, ρ_∞ apresenta uma descontinuidade em $T \sim 1,7$, o que não é observado na Fig. A.7a. Nas Figs. A.7b e A.7c, os valores significativos de desvio-padrão, $SD \sim 0,5$, ocupam uma região maior do que a observada nas Figs. A.8b e A.8c. Quando z aumenta, o mesmo ocorre com o número de transições T_c e seus valores se modificam (Eq. 3.16 da Ref. [20]). Conseqüentemente, a distribuição das fases no diagrama se altera, como podemos observar nas superfícies de ρ_∞ e SD .

Apesar de $\rho_\infty(T, \rho, z)$ convergir para os mesmos valores quando z aumenta, para $z = 30$ (Fig. A.29a), uma pequena diferença ainda existe na região $0 < \rho_0 < 0,3$ e $1 < T < 1,4$ se

comparado com $z = 29$ (Fig. A.28a), o mesmo pode ser observado para o desvio-padrão nestas regiões nas Figs. A.29b, A.29c e A.28b, A.28c. Um valor de desvio-padrão elevado demonstra que se trata de uma região em que temos a fase caótica, o que justifica as diferenças em ρ_∞ de uma superfície para outra.

A projeção da superfície $\rho_\infty(T, \rho_0, z)$ no plano $\rho_\infty T$ mostra, para cada valor de z , ρ_∞ em função de T para diferentes valores de ρ_0 . Na Fig. 4.16, estão os gráficos para $z = \{2; 4; 8; 16; 28; 30\}$ e na Fig. 4.17, para $z = \{3; 5; 9; 19; 27; 29\}$. Em cada gráfico temos as projeções para $\rho_0 = \{0; 0,1; \dots; 0,9; 1,0\}$.

Estes gráficos validam as relações dadas pela Eq. 3.16, pois quando o sistema passa pelos valores de T_c , ρ_∞ sofre alterações. Nos gráficos, os valores de T_c estão marcados pelas linhas verticais tracejadas. Por exemplo, na Fig. 4.17c ($z = 9$, $n = 0$ e $m = 4$), com auto-interação, as transições em ρ_∞ podem ser vistas quando o parâmetro T passa pelos limiares de tentação crítica, T_c . Para $z = 9$, a região caótica está no intervalo $9/5 < T < 2$, e a região de deserção começa em $T = 2$. Enquanto que, na Fig. 4.16c ($z = 8$, $n = 1$ e $m = 3$) não há a auto-interação, a região de caótica está no intervalo $8/5 < T < 5/3$, próximo ao meio da região de conflito $1 < T < 2$.

Agora, uma análise do comportamento de ρ_∞ em função de T para z par (sem auto-interação) (Fig. 4.16) nos dá que para:

- $z = 2$ (Fig. 4.16a), para $0,1 \leq \rho_0 \leq 0,9$, ρ_∞ diminui em $T = 1,01$, depois se mantém constante no intervalo $1,01 \leq T \leq 1,99$, quando $\rho_\infty \sim 0$;
- $z = 4$ (Fig. 4.16b), para $0,1 \leq \rho_0 \leq 0,9$, ρ_∞ diminui em $T = 1,01$ depois se mantém constante no intervalo $1,01 \leq T < 1,33$, sofrendo uma leve queda ao passar pelo T_c . Em $T = 1,50$, ρ_∞ apresenta uma forte queda para todos os valores de ρ_0 . Para $0,1 < \rho_0 < 0,4$, ρ_∞ oscila ao redor do valor médio, em $1,0 < T < 1,5$;
- $z = 8$ (Fig. 4.16c), para $\rho_0 > 0,6$ mantém $\rho_\infty > 0,7$ e à medida que T aumenta, ρ_∞ diminui, para $0,1 \leq \rho_0 \leq 0,3$, em $T \sim 1,00$, $\rho_\infty \sim 0$;
- $z = 16$ (Fig. 4.16d), apenas para $\rho_0 = 0,9$ apresenta $\rho_\infty > 0,9$ em $1,00 \leq T \leq 1,88$; Para $0,1 \leq \rho_0 \leq 0,8$, temos $\rho_\infty < 0,5$ em $1,33 \leq T \leq 2$;
- $z = 28$ (Fig. 4.16e), exceto para $\rho_0 = 0,9$, que ρ_∞ diminui no intervalo $1,07 \leq T \leq 1,92$ onde converge $\rho_\infty \sim 0$, para $0,1 \leq \rho_0 \leq 0,8$, $\rho_\infty \sim 0$ desde $T = 1,16$;
- $z = 30$ (Fig. 4.16f), ρ_∞ é muito similar a $z = 28$, a diferença que se observa é que

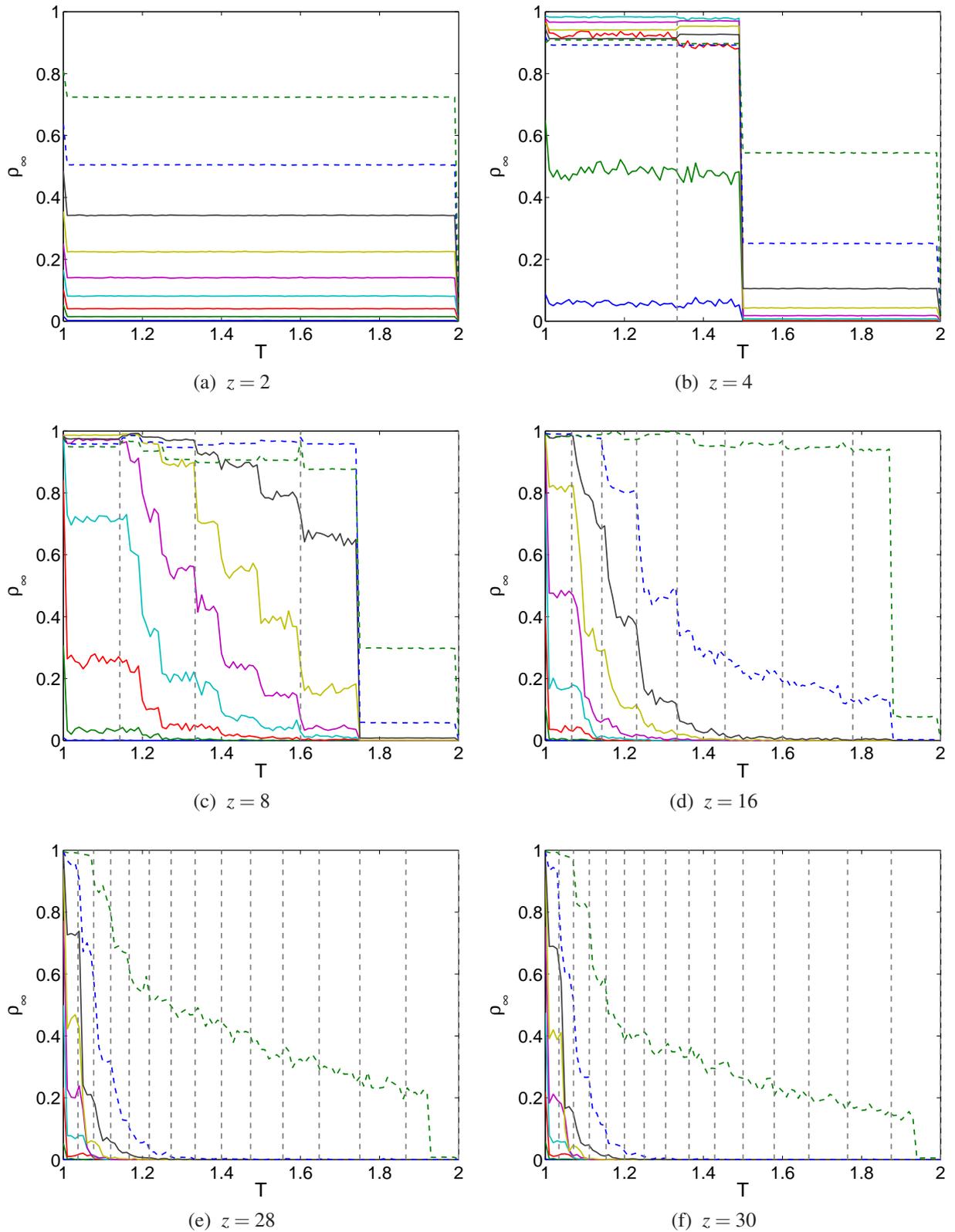


Figura 4.16: Proporção estacionária de cooperadores (ρ_∞) em função do valor de tentação T de deserção dos jogadores, para $z = \{2; 4; 8; 16; 28; 30\}$. As linhas verticais tracejadas marcam os valores de T_c dadas pela Eq. 3.16. Azul: $\rho_0 = 0,1$, verde: $\rho_0 = 0,2$, vermelho: $\rho_0 = 0,3$, cian: $\rho_0 = 0,4$, magenta: $\rho_0 = 0,5$, amarelo: $\rho_0 = 0,6$, preto: $\rho_0 = 0,7$, azul tracejado: $\rho_0 = 0,8$, verde tracejado: $\rho_0 = 0,9$. $z = \{3; 5; 9; 19; 27; 29\}$

$\rho_\infty(T, \rho_0 = 0,9, z = 30) < \rho_\infty(T, \rho_0 = 0,9, z = 28)$. Isto mostra a convergência de ρ_∞ para a fase desertora em sistemas com conectividade alta.

O comportamento de ρ_∞ em função de T para z ímpar (com auto-interação) (Fig. 4.17) nos mostra que, para:

- $z = 3$ (Fig. 4.17a), para $0,1 \leq \rho_0 \leq 0,9$, ρ_∞ aumenta em $T = 1,01$, depois se mantém constante no intervalo $1,01 \leq T \leq 1,49$. Para $T = 1,5$, as curvas apresentam um comportamento semelhante: aumentam seu valor para $\rho_\infty \sim 1$ e em $T = 1,51$, têm um valor inferior ao anterior à subida de cada curva, isto é $\rho_\infty(T = 1,51, \rho_0, z = 3) < \rho_\infty(T = 1,49, \rho_0, z = 3)$. Em $T = 2,0$, todas as curvas convergem para $\rho_\infty \sim 0$;
- $z = 5$ (Fig. 4.17b), para $\rho_0 = 0,1$, ρ_∞ diminui em $T = 1,01$ e passa a oscilar em torno de $\rho_\infty \sim 0,8$. Ao passar por $T = 1,5$, há uma queda $\rho_\infty \sim 0,05$. Para $0,2 \leq \rho_0 \leq 0,9$, ρ_∞ aumenta em $T = 1,01$, depois se mantém constante no intervalo $1,01 \leq T \leq 1,24$. Em $T = 1,25$, acontece o mesmo que em $T = 1,50$, para $z = 3$: $\rho_\infty(T = 1,25, \rho_0, z = 5) \sim 1$ e $\rho_\infty(T = 1,26, \rho_0, z = 5) < \rho_\infty(T = 1,24, \rho_0, z = 5)$. Quando $T = 1,5$, ρ_∞ apresenta aumentos ou diminuições pequenos, mas diferentes para cada curva e as curvas $0,2 \leq \rho_0 \leq 0,4$ passam a apresentar o comportamento oscilatório. Quando passam por $T_c = 1,67$, todas as curvas sofrem uma leve diminuição de ρ_∞ ;
- $z = 9$ (Fig. 4.17c), é semelhante ao relatado para $z = 8$. No entanto, os valores de T em que acontecem a diminuição de ρ_∞ é diferente para cada curva. A diferença fundamental é $\rho_\infty(T; \rho_0; z = 9) > \rho_\infty(T; \rho_0; z = 8)$, ou seja, a cooperação persiste para valores de T maiores;
- $z = 19$ (Fig. 4.17d), apenas para $\rho_0 = 0,9$ apresenta $\rho_\infty > 0,9$ em $1,00 \leq T \leq 1,99$. Para $0,1 \leq \rho_0 \leq 0,8$ $\rho_\infty < 0,5$ em $1,0 \leq T \leq 1,30$;
- $z = 27$ (Fig. 4.17e), exceto para $\rho_0 = 0,9$, que ρ_∞ diminui no $1,12 \leq T \leq 1,99$ onde converge $\rho_\infty \sim 0$. Para $0,1 \leq \rho_0 \leq 0,8$, $\rho_\infty \sim 0$ desde $T = 1,17$;
- $z = 29$ (Fig. 4.17f), ρ_∞ é muito similar a $z = 27$, a diferença que se observa é que $\rho_\infty(T; \rho_0 = 0,9; z = 29) < \rho_\infty(T; \rho_0 = 0,9; z = 27)$. Podemos fazer a mesma observação que foi feita para $z = \{28; 30\}$ de que os sistemas convergem para os mesmo comportamentos quando a conectividade é alta, $z \gg 1$.

Mostramos nas Figs. 4.16 e 4.17 que a dependência de ρ_∞ com a proporção inicial de cooperadores, ρ_0 , que geralmente é desconsiderada, apesar de não ser fundamental no problema,

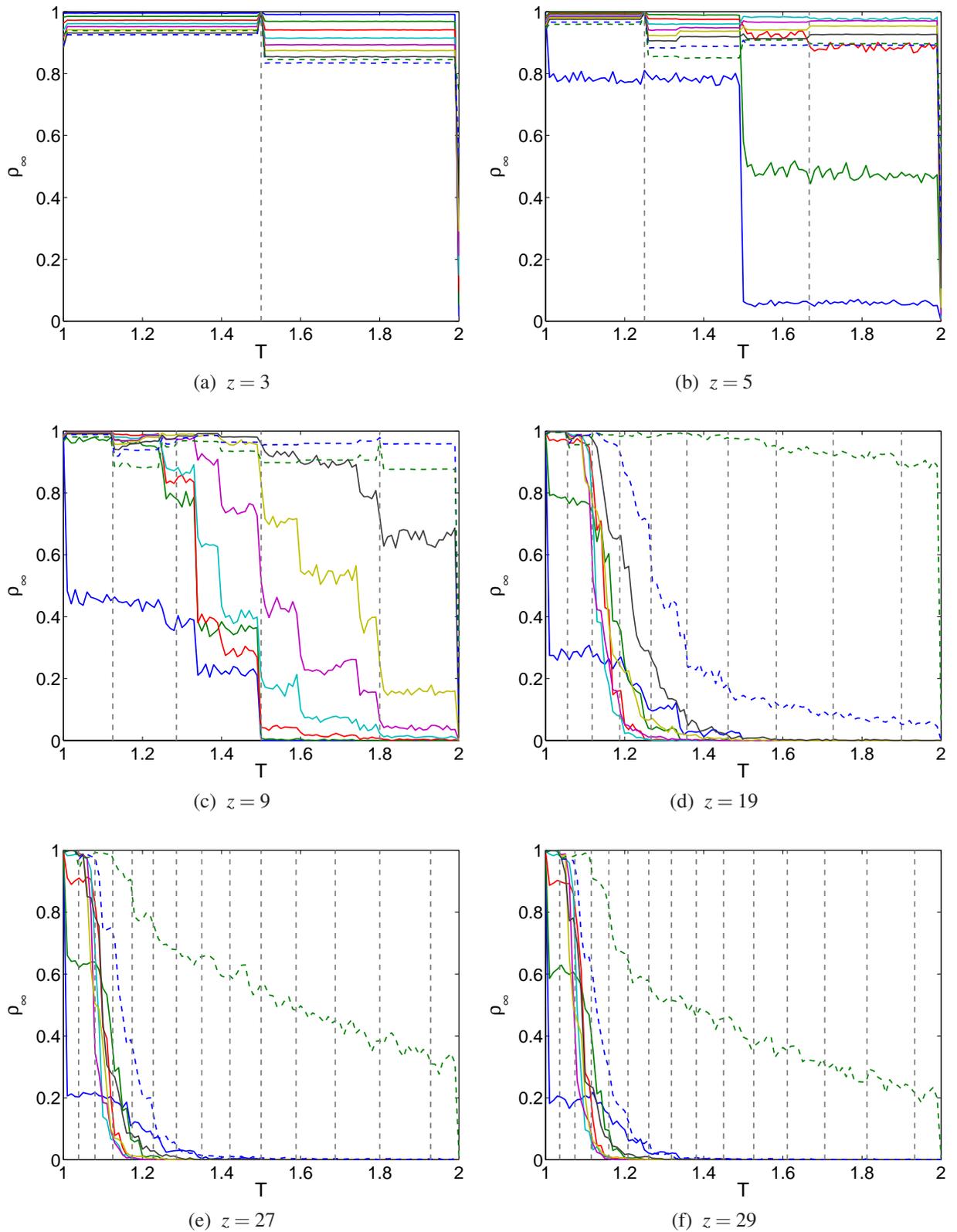


Figura 4.17: Proporção estacionária de cooperadores (ρ_∞) em função do valor de tentação de deserção dos jogadores (T), para $z = \{3; 5; 9; 19; 27; 29\}$. As linhas verticais tracejadas marcam os valores de T_c dados pela Eq. 3.16. Azul: $\rho_0 = 0, 1$, verde: $\rho_0 = 0, 2$, vermelho: $\rho_0 = 0, 3$, cyan: $\rho_0 = 0, 4$, magenta: $\rho_0 = 0, 5$, amarelo: $\rho_0 = 0, 6$, preto: $\rho_0 = 0, 7$, azul tracejado: $\rho_0 = 0, 8$, verde tracejado: $\rho_0 = 0, 9$.

também não deve ser desprezada. Tentamos obter um escalonamento das curvas, mas elas não apresentaram uma lei de escala simples. Valores de z mais altos provocam a diminuição da cooperação. No entanto, a intensidade da diminuição de ρ_∞ depende da paridade de z , ou seja, da presença ou ausência da auto-interação entre os jogadores. Dado um valor de z , as curvas de ρ_∞ se comportam de maneira semelhante para os diferentes valores de ρ_0 , mas podem surgir peculiaridades para os valores extremos. A principal diferença observada para os diferentes valores de ρ_0 é a intensidade com que as mudanças em ρ_∞ ocorrem, por exemplo, quando as diferentes curvas passam pelos valores de transição da tentação T_c , observa-se uma queda diferente para cada ρ_0 (ver Fig. 4.17a).

A projeção da superfície $\rho_\infty(T, \rho_0, z)$ no plano $\rho_\infty\rho_0$ mostra ρ_∞ em função de ρ_0 para diferentes valores de T , em cada valor de z . Na Fig. 4.18, estão esses gráficos para $z = \{2; 4; 8; 16; 28; 30\}$ e na 4.19, para $z = \{3; 5; 9; 19; 27; 29\}$. Em cada gráfico temos as projeções para $T = \{1,0; 1,1; \dots; 1,9; 2,0\}$.

O comportamento de ρ_∞ em função de ρ_0 para z par (sem auto-interação) (Fig. 4.16) nos mostra que, para:

- $z = 2$ (Fig. 4.18a), para $1,00 \leq T \leq 1,90$, ρ_∞ cresce no intervalo $0 \leq \rho_0 \leq 1$, convergindo para $\rho_\infty(T, \rho_0 = 1, z) = 1$ (caso trivial). Mas, para $T = 2,00$, ρ_∞ segue em $\rho_\infty = 0$ e só atinge $\rho_\infty = 1$ no caso trivial $\rho_\infty(T, 1, z) = 1$;
- $z = 4$ (Fig. 4.18b), para $1,00 < T < 1,40$, ρ_∞ aumenta para $\rho_\infty \sim 1$ no intervalo $0,2 < \rho_0 < 0,4$, depois decresce para $\rho_\infty \sim 0,9$ em $0,4 < \rho_0 < 0,9$. Surge uma “vale” em $\rho_0 = 0,9$ e atinge $\rho_\infty = 1$ no caso trivial $\rho_\infty(T, 1, z) = 1$. Para $1,40 < T < 2,00$, ρ_∞ cresce no intervalo $0 \leq \rho_0 \leq 1$, convergindo para $\rho_\infty = 1$;
- $z = 8$ (Fig. 4.18c), para $1,00 < T < 1,70$, ρ_∞ aumenta para $\rho_\infty \sim 1$ no intervalo $0,1 > \rho_0 > 0,8$, depois decresce para $\rho_\infty \sim 0,9$ em $0,8 < \rho_0 < 0,9$, formando a depressão observada para $z = 4$. Para $T = 2,00$ o comportamento de ρ_∞ é o mesmo observado para $z = 4$;
- $z = 16$ (Fig. 4.18d), para $1,10 < T < 1,80$, ρ_∞ aumenta para $\rho_\infty \sim 1$ no intervalo $0,6 > \rho_0 > 0,9$, o sistema não apresenta mais a depressão relativa observada para z menores. Para $T = 1,00$, ρ_∞ aumenta em $\rho_0 = 0,4$ e para $T = 2,00$ idem à situação de $z = 8$;
- $z = 28$ (Fig. 4.18e), para $1,10 < T < 1,90$, ρ_∞ aumenta para $\rho_\infty \sim 1$ no intervalo $0,8 > \rho_0 > 0,9$. Para $T = 1,00$ e $T = 2,00$ idem à situação de $z = 16$;

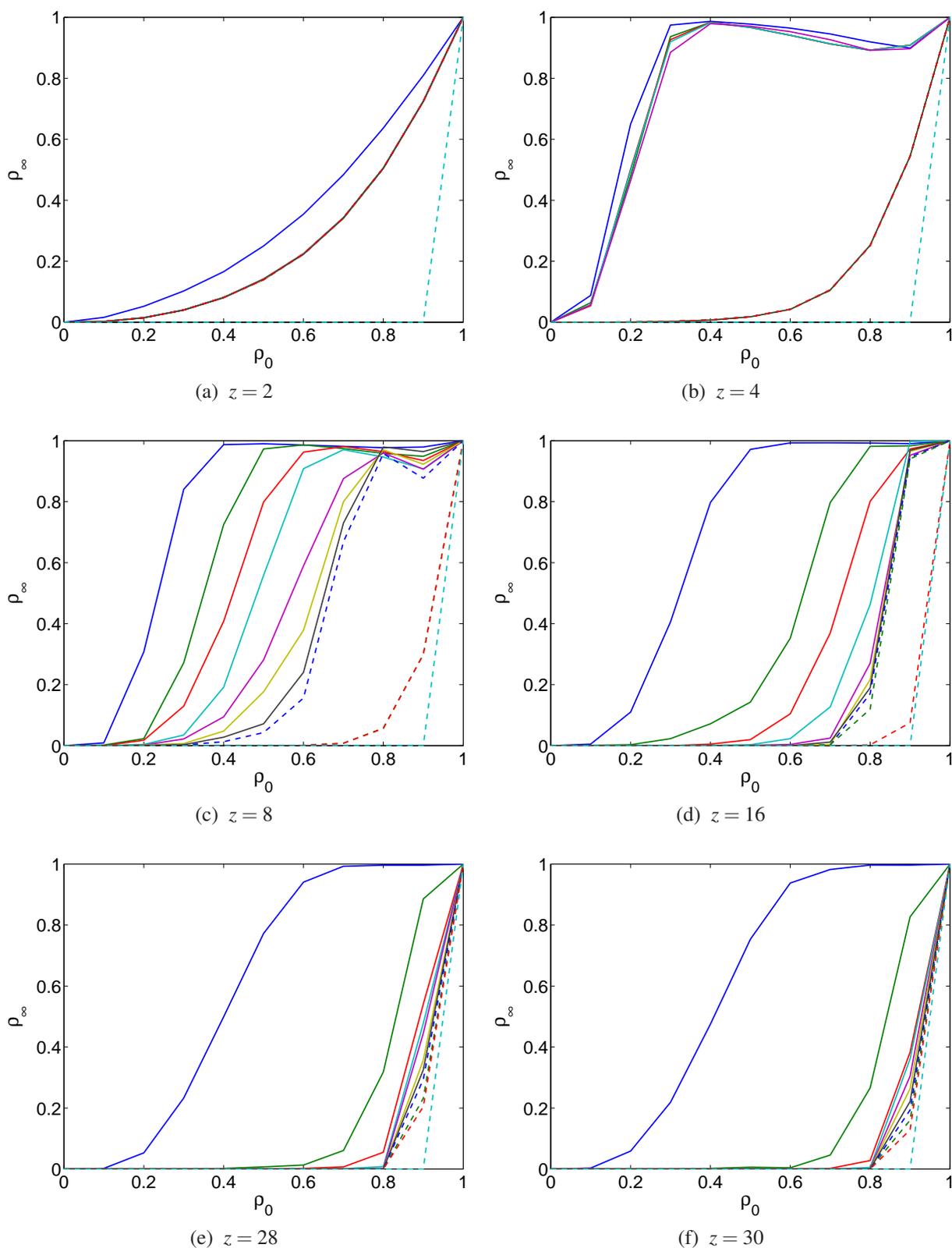


Figura 4.18: Proporção estacionária de cooperadores (ρ_∞) em função da proporção inicial de cooperadores (ρ_0) para $z = \{2; 4; 8; 16; 28; 30\}$. As linhas verticais tracejadas marcam os valores de T_c dadas pela Eq. 3.16. Azul: $T = 1,00$, verde: $T = 1,10$, vermelho: $T = 1,20$, cian: $T = 1,30$, magenta: $T = 1,40$, amarelo: $T = 1,50$, preto: $T = 1,60$, azul tracejado: $T = 1,70$, verde tracejado: $T = 1,80$, vermelho tracejado: $T = 1,90$, cian tracejado: $T = 2,00$.

- $z = 30$ (Fig. 4.18f), ρ_∞ é muito similar ao observado para $z = 28$, o que mostra a convergência dos diagramas de fase quando os sistemas têm $z \gg 1$.

O comportamento de ρ_∞ em função de ρ_0 para z ímpar (com auto-interação) (Fig. 4.17):

- $z = 3$ (Fig. 4.19a), para $1,00 \leq T \leq 1,90$, ρ_∞ sai do caso trivial $\rho_\infty(T, 0, z) = 0$ e tem um crescimento súbito, indo para $\rho_\infty \sim 1$ em $\rho_0 = 0,1$. Em seguida, decresce para $\rho_\infty > 0,8$ em $0,1 < \rho_0 < 0,9$, e volta a crescer a partir de $\rho_0 = 0,9$ convergindo para $\rho_\infty(T, \rho_0 = 1, z) = 1$ (caso trivial), formando uma depressão relativa. Para $T = 2,00$, ρ_∞ cresce em $0 < \rho_0 < 1$;
- $z = 5$ (Fig. 4.19b), ρ_∞ aumenta $\rho_\infty \sim 1$ no intervalo $0,1 < \rho_0 < 0,4$, depois decresce em direção ao “vale” de $\rho_0 = 0,9$. Para $T = 2,00$, ρ_∞ cresce em $0,4 < \rho_0 < 1$;
- $z = 9$ (Fig. 4.19c), ρ_∞ tem um comportamento similar ao caso com $z = 5$, mas ocorre uma distribuição do valor de ρ_0 em que ρ_∞ aumenta. O “vale” em $\rho_0 = 0,9$ ainda aparece. Surge um comportamento anômalo não-monótono no crescimento de ρ_∞ em $0,2 < \rho_0 < 0,4$ para $1,2 < T < 1,5$. Para $T = 2,00$, ρ_∞ cresce em $0,7 < \rho_0 < 1$;
- $z = 19$ (Fig. 4.18d), para $1,30 < T < 1,90$, ρ_∞ aumenta para $\rho_\infty \sim 1$ no intervalo $0,7 > \rho_0 > 0,9$. Continua presente o comportamento anômalo em $0,1 < \rho_0 < 0,4$ para $1,1 < T < 1,3$. Para $T = 1,00$, $\rho_\infty \sim 1$ em $\rho_0 = 0,1$. Para $T = 2,00$, ρ_∞ cresce em $0,8 < \rho_0 < 1$;
- $z = 27$ (Fig. 4.19e), para $1,20 < T < 1,90$, ρ_∞ aumenta para $\rho_\infty \sim 1$ no intervalo $0,8 > \rho_0 > 1,0$. Ainda existe o comportamento anômalo em $0,1 < \rho_0 < 0,4$ para $1,1 < T < 1,3$. Agora não há mais a depressão relativa observada para z menores. Para $T = 1,00$ e $T = 2,00$ idem à situação de $z = 19$;
- $z = 29$ (Fig. 4.19f), o comportamento de ρ_∞ é muito similar ao caso de $z = 28$, o que mostra a convergência dos diagramas de fase quando os sistemas têm $z \gg 1$. E no comportamento anômalo o pico de ρ_∞ tem o mesmo comportamento observado em $z = 28$.

O comportamento anômalo não-monótono de ρ_∞ para $1,1 < T < 1,5$ presente nas Figs. 4.19, em $0,1 < \rho_0 < 0,4$, varia em função do valor de z . Este comportamento é consequência do grande desvio-padrão que podemos observar nestas regiões, onde há a ocorrência da fase caótica do sistema.

Os “vales” (depressões relativas), que ocorrem em $\rho_0 \sim 0,9$, são consequência da dinâmica do sistema, pois os agrupamentos de desertores são muito pequenos em comparação aos de cooperadores. Assim os desertores exploram os agrupamentos cooperadores, mas não conseguem

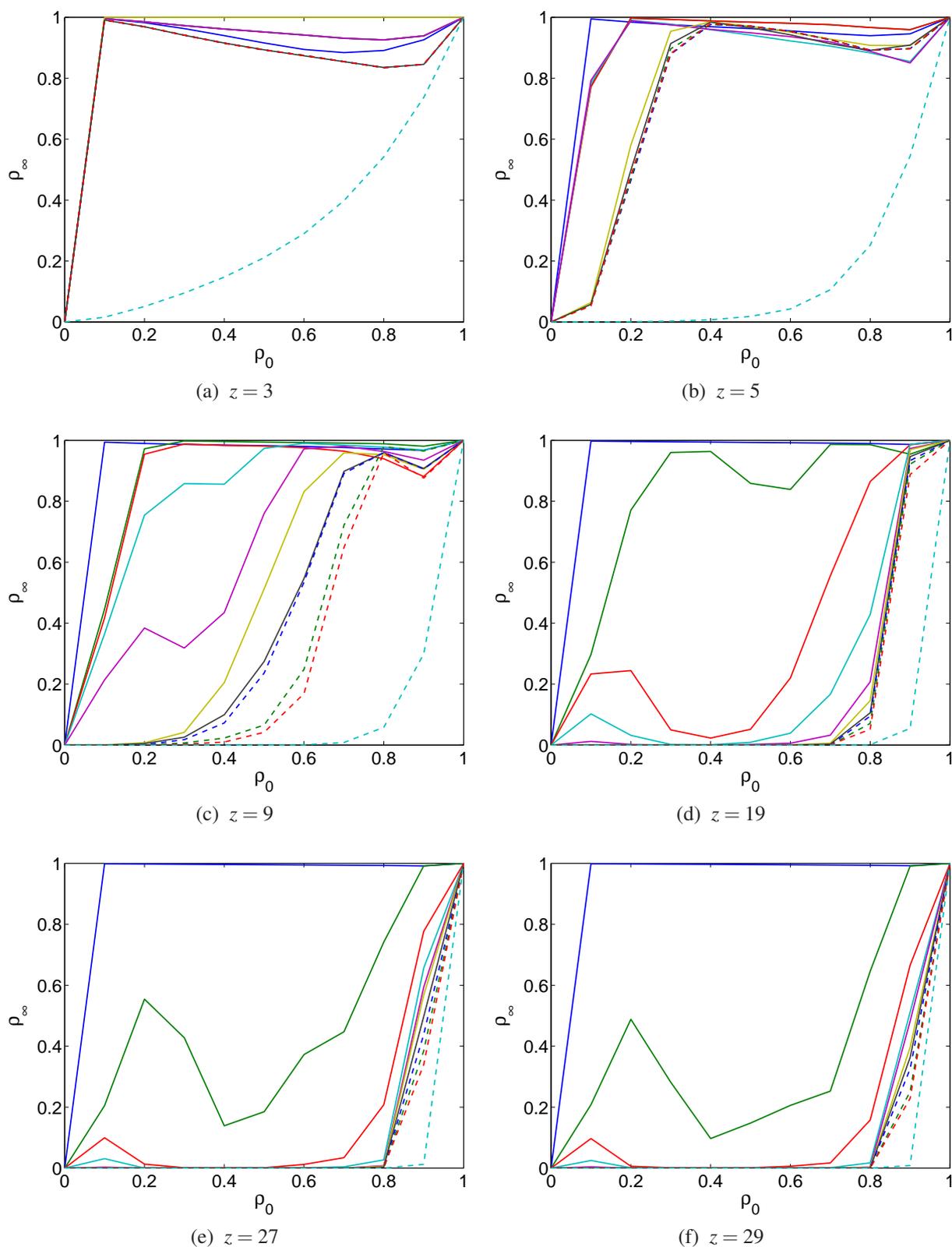


Figura 4.19: Proporção estacionária de cooperadores (ρ_∞) em função da proporção inicial de cooperadores (ρ_0) para $z = \{3; 5; 9; 19; 27; 29\}$. As linhas verticais tracejadas marcam os valores de T_c dadas pela Eq. 3.16. Azul: $T = 1,00$, verde: $T = 1,10$, vermelho: $T = 1,20$, cyan: $T = 1,30$, magenta: $T = 1,40$, amarelo: $T = 1,50$, preto: $T = 1,60$, azul tracejado: $T = 1,70$, verde tracejado: $T = 1,80$, vermelho tracejado: $T = 1,90$, cyan tracejado: $T = 2,00$.

invadi-los. Considere os jogadores i , j e k , sendo i desertor e os outros cooperadores. Quando a relação entre os ganhos destes jogadores for: $G_k^{V_k}(\theta_k = 1) > G_i^{V_i=0}(\theta_i) > G_j^{V_j}(\theta_j = 1)$, e o jogador j interagir com os jogadores i e k , nenhum deles mudará seu estado. Por isso, se existirem muitos agrupamentos de desertores em que ocorra essa situação, ρ_∞ é menor do que quando em situações em que não se formam esses pequenos agrupamentos de desertores. Um exemplo, desses agrupamentos é os *fingers* e o *gliders* vistos na Seção 4.1.1.

Comparando as Figs. 4.18 e 4.19, observa-se que o valor de ρ_∞ no intervalo $0 < \rho_0 < 0,6$ para $z < 19$ é maior para os sistemas com z ímpar do que o observado para z par, ou seja, é maior quando os jogadores realizam a auto-interação. A auto-interação também aumenta a emergência de cooperação ($\rho_\infty \sim 1$) para valores menores de ρ_0 para a mesma T , quando comparamos um sistema sem e com auto-interação, Figs. 4.18c e 4.19c, respectivamente.

Tomamos a projeção no plano $T\rho_0$ da superfície $\rho_\infty(T, \rho_0, z)$ em $\rho_\infty = 0,5$ para observar a convergência de ρ_∞ em função de z . Na Fig. 4.20 apresentamos estes contornos para z par (Fig. 4.20a), z ímpar (Fig. 4.20b) e $z \gg 1$ (Fig. 4.20c).

Para $z < 20$, a paridade produz diferenças marcantes nos contornos, como pode ser observado comparando-se as Figs. 4.20a e 4.20b. Quando $z > 20$, os contornos convergem para a mesma forma independentemente da paridade de z , como mostrado na Fig. 4.20c. A diferença marcante que se observa entre os contornos de z par e ímpar para $z \gg 1$ é a região entre $1 < T < 1,1$ e $0,1 < \rho_0 < 0,8$, onde, para z ímpar, $\rho_\infty > 0,5$. Se observarmos o desvio-padrão nesta região para esses valores de z (Figs. A.24b, A.24c, A.26b, A.26c, A.28b, A.28c), observamos que os valores de desvio-padrão são bastante grandes ($SD \sim 0,5$), o que explica as diferenças encontradas nos contornos.

4.2 Estratégia Evolucionária Pavloviana

A Estratégia Evolucionária Pavloviana (EEP) pode ser analisada sob o ponto de vista de atitudes de reforço positivo² e punição. Também incentiva o jogador quando ele obtém o nível de ambição determinado e o pune caso contrário, para provocar mudanças. Esta estratégia se mostrou bastante robusta em ambientes com:

- presença de ruído, isto é, existe uma probabilidade p , não nula, de um jogador mudar seu estado, independentemente da estratégia utilizada;
- presença de estratégias enganadoras ou aproveitadoras;

²Reforço negativo: remove uma punição quando se obtém o nível de ambição.

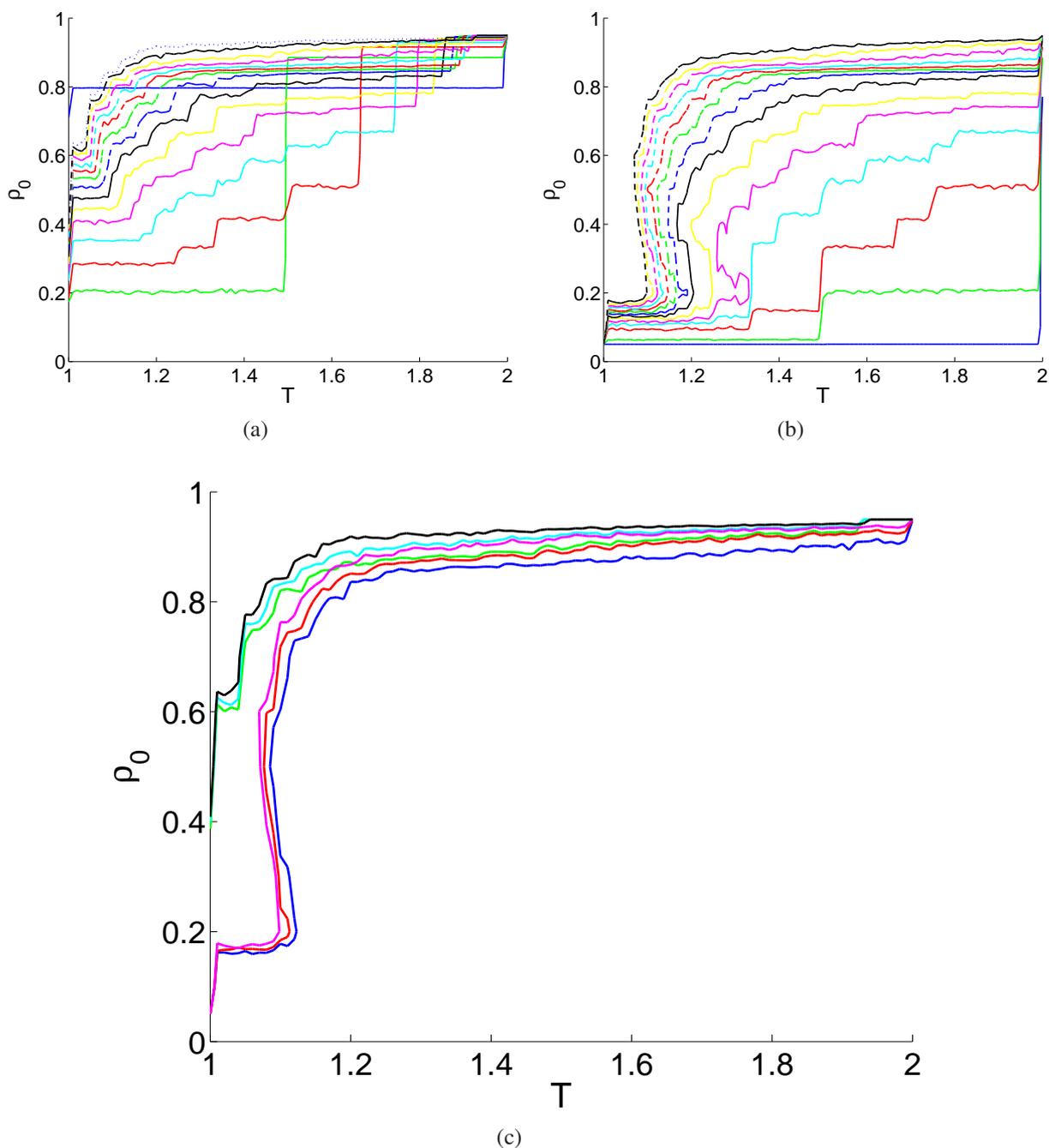


Figura 4.20: Projeção no plano $T\rho_0$ (espaço de parâmetros) de $\rho_\infty(T, \rho_0, z)$ em $\rho_\infty = 0,5$, mostra a convergência dos diagramas de fase, onde: (a) z par (sem auto-interação). Azul: $z = 2$, verde: $z = 4$, vermelho: $z = 6$, cyan: $z = 8$, magenta: $z = 10$, amarelo: $z = 12$, preto: $z = 14$, azul tracejado: $z = 16$, verde tracejado: $z = 18$, vermelho tracejado: $z = 20$, cyan tracejado: $z = 22$, magenta tracejado: $z = 24$, amarelo tracejado: $z = 26$, preto tracejado: $z = 28$, azul pontilhado: $z = 30$. (b) z ímpar (com auto-interação). Azul: $z = 3$, verde: $z = 5$, vermelho: $z = 7$, cyan: $z = 9$, magenta: $z = 11$, amarelo: $z = 13$, preto: $z = 15$, azul tracejado: $z = 17$, verde tracejado: $z = 19$, vermelho tracejado: $z = 21$, cyan tracejado: $z = 23$, magenta tracejado: $z = 25$, amarelo tracejado: $z = 27$, preto tracejado: $z = 29$. (c) $z \gg 1$. Azul: $z = 25$, verde: $z = 26$, vermelho: $z = 7$, cyan: $z = 28$, magenta: $z = 29$, preto: $z = 30$.

- competição pela sobrevivência, em jogos co-evolucionários.

As principais características da EEP são:

- é implacável, não se preocupa em perdoar uma deserção;
- explora estratégias altruístas enquanto não é punida com uma deserção;
- pode corrigir erros ocasionais, o que não acontece no *tit-for-tat*, por exemplo; e
- sua principal fraqueza: pode ser explorada por estratégias desertoras.

Os padrões dos agrupamentos de cooperadores/desertores que surgem de suas interações locais são muito diferentes dos observados para sistemas que utilizam a EED. Como os jogadores utilizam seu próprio ganho como referência para decidir sua mudança de estado, não há a preocupação com as fronteiras entre os agrupamentos, nas quais o efeito coletivo tem um papel importante na EED. Por isso, quando se utiliza a EEP, se a tragédia dos comuns surgir, ela não durará muitas rodadas, pois não há a necessidade de coordenação das ações dos jogadores para a mudança de estados e para melhorar o ganho coletivo.

4.2.1 Padrões temporais formados pelos agrupamentos de cooperadores ou desertores

As características das figuras dos padrões de agrupamentos de cooperadores e desertores são as mesmas das figuras da Seção 4.1.1. Mas agora o sistema utiliza a Estratégia Evolucionária Pavloviana.

Na Fig. 4.21 é mostrada a evolução temporal da proporção de cooperadores, $\rho_c(t)$, para $z = 9$, com auto-interação, e para $z = 8$, sem auto-interação. Nos instantes iniciais, $\rho_c(t)$ cai pouco, se comparado ao que ocorre na EED. Depois da queda, $\rho_c(t, T, \rho, z)$ oscila e finalmente atinge o regime estacionário, com ρ_∞ um pouco maior do que ρ_0 . Observamos também que as curvas para $z = 8$ e $z = 9$ se sobrepõem, ou seja, para este conjunto de parâmetros a auto-interação é indiferente, o que nem sempre ocorre, pois para outros valores de T , elas não são idênticas.

Os padrões de agrupamentos formados com a EEP são mais complexos dos que os observados nos sistemas que utilizam a EED. Aqui não há o comportamento de grupo, que torna as oscilações de ρ_∞ em função de t mais suaves, mas surge o papel do comportamento individual definido pelo ambiente em que o jogador se encontra, que é mais abrupto do que o coletivo.

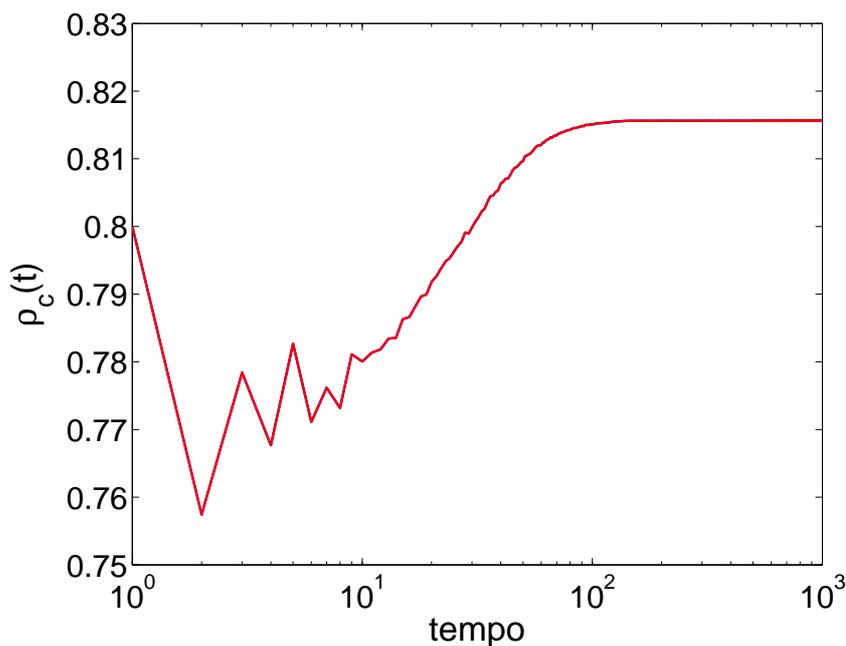


Figura 4.21: Evolução temporal da proporção de cooperadores em um autômato unidimensional de tamanho $L = 1000$ utilizando a EEP. Os parâmetros utilizados nestas simulações numéricas foram: $\rho_0 = 0,9$, $T = 1,60$, $z = 9$ (com auto-interação) e $z = 8$ (sem auto-interação) com 1000 configurações iniciais diferentes.

Em todos os padrões de agrupamentos de cooperadores e desertores, observamos que vizinhanças compostas apenas por cooperadores se comportam visando manter a cooperação entre eles. Mas, a manutenção desta cooperação permanece apenas quando o grupo de cooperadores tem tamanho suficientemente grande para manter positivo o ganho de seus integrantes. Quando isso ocorre, os integrantes do agrupamento podem ser explorados pelos vizinhos e ainda assim não mudam seu estado, pois, apesar de pequeno, seu ganho é positivo. Por outro lado, se um agrupamento de desertores for grande o suficiente para produzir ganhos negativos aos seus integrantes, ele não será estável, pois, os jogadores que obtiverem ganhos negativos mudarão seus estados para cooperadores. Dessa forma, o fenômeno da tragédia dos comuns não se torna um inconveniente para os jogadores, como no caso do uso da EED, uma vez que ela não persiste por muitas rodadas.

A Tab. 3.2 mostra os ganhos para diferentes estados das vizinhanças. Nela observamos que há combinações de vizinhança que geram ganhos positivos e negativos para o jogador. É simples calcular o tamanho máximo de agrupamentos desertores e mínimo de cooperadores, que podem se manter juntos durante a evolução do sistema, ou seja, são estáveis. No caso de um agrupamento de cooperadores, um jogador i , não muda seu estado, se em sua vizinhança \mathcal{V}_i existir, com no mínimo, c_{\min} jogadores cooperadores, para que seu ganho seja positivo $G_i^{c_{\min}}(\theta_i = 1) > 0$,

portanto:

$$\begin{aligned} c_{\min} &> z \left(\frac{T}{T+R} \right) e \\ c_{\min} &> z \left(\frac{1}{1+R/T} \right). \end{aligned} \quad (4.1)$$

A situação se inverte no caso de um agrupamento desertor, onde um jogador i , deve ter em sua vizinhança \mathcal{V}_i , no máximo, d_{\max} jogadores desertores, para que $G_i^{d_{\max}}(\theta_i = 0) > 0$, logo:

$$\begin{aligned} d_{\max} &< z \left(\frac{T}{T+R} \right) e \\ d_{\max} &< z \left(\frac{1}{1+R/T} \right). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Assim os *fingers* de desertores têm, no máximo, d_{\max} jogadores e os de cooperadores, no mínimo, c_{\min} . Os *fingers* que emergem no sistema que utiliza EEP podem ser simples, como os lisos visto na EED, ou complexos. Nos *fingers* complexos, a exemplo dos serrilhados, existe simetria em relação ao jogador central e periodicidade dos padrões de estados dos jogadores (c.f. Figs. 4.25 e 4.26).

Para $z = 2$, os *fingers* formados por até dois jogadores (c.f. Fig. 4.23) são sempre lisos e contínuos. Enquanto em um sistema utilizando EED, os padrões emergem a partir dos agrupamentos, ou da tentativa de invasão, no que adota a EEP surgem agrupamentos de cooperadores que se mantêm e agrupamentos de desertores que se desestabilizam rapidamente em algumas rodadas.

Na ampliação da Fig. 4.23 vemos que o *finger* complexo com 3 (três) jogadores tem o padrão³: {D **D** D → D C D} e o com 13 (treze) jogadores o padrão: {D D D C D D D C D D D C D → D C D D D C D D D C D D D}. O padrão de 13 jogadores é uma composição formada pela alternância, com sobreposição das extremidades, dos padrões de 3 jogadores (ver Fig. 4.22). Ou seja, os padrões {D **D** D} e {D C D}, se somam e o terceiro jogador de um padrão é o primeiro do padrão seguinte. Existem outras combinações formadas pela adição de padrões com sobreposição dos extremos.

Na ampliação da Fig. 4.24, além dos *fingers* simples com no máximo 12 (doze) desertores, surge o *finger* complexo com o padrão: {6D 3C **4D** 3C 6D → 6D 3D **4C** 3D 6D}. Outro *finger* complexo é mostrado na ampliação da Fig. 4.26, desconsiderando os quatro desertores das fronteiras que não mudam seus estados, temos o padrão: {2C 2D 4C **2D** 4C 2D 2C → 2C 2D 2C **6D** 2C 2D 2C → 6D **6C** 6D → 4D 2C **6D** 2C 4D → 2D 2C **10D** 2C 2D → 2C 2D **10C** 2D

³O jogador destacado em negrito está no centro do padrão considerado.

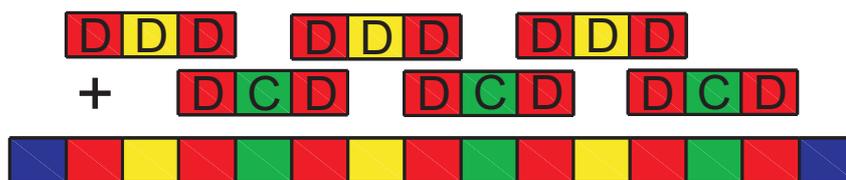


Figura 4.22: Formação de um padrão composto, a partir de padrões elementares.

2C }. Nas ampliações da Fig. 4.25, os *fingers* que emergem têm o padrão: 4.25a: {3D D 3C 3D C 3D → 3D C 3D 3C D 3D} e 4.25b: desconsiderando os dois desertores das fronteiras que não mudam seus estados: {C D 2C **D** 2C D C → C D C **3D** C D C → 3D **3C** 3D → 2D C **3D** C 2D → D C D **3C** D C D → D C **5D** C D → C D **5C** D C }.

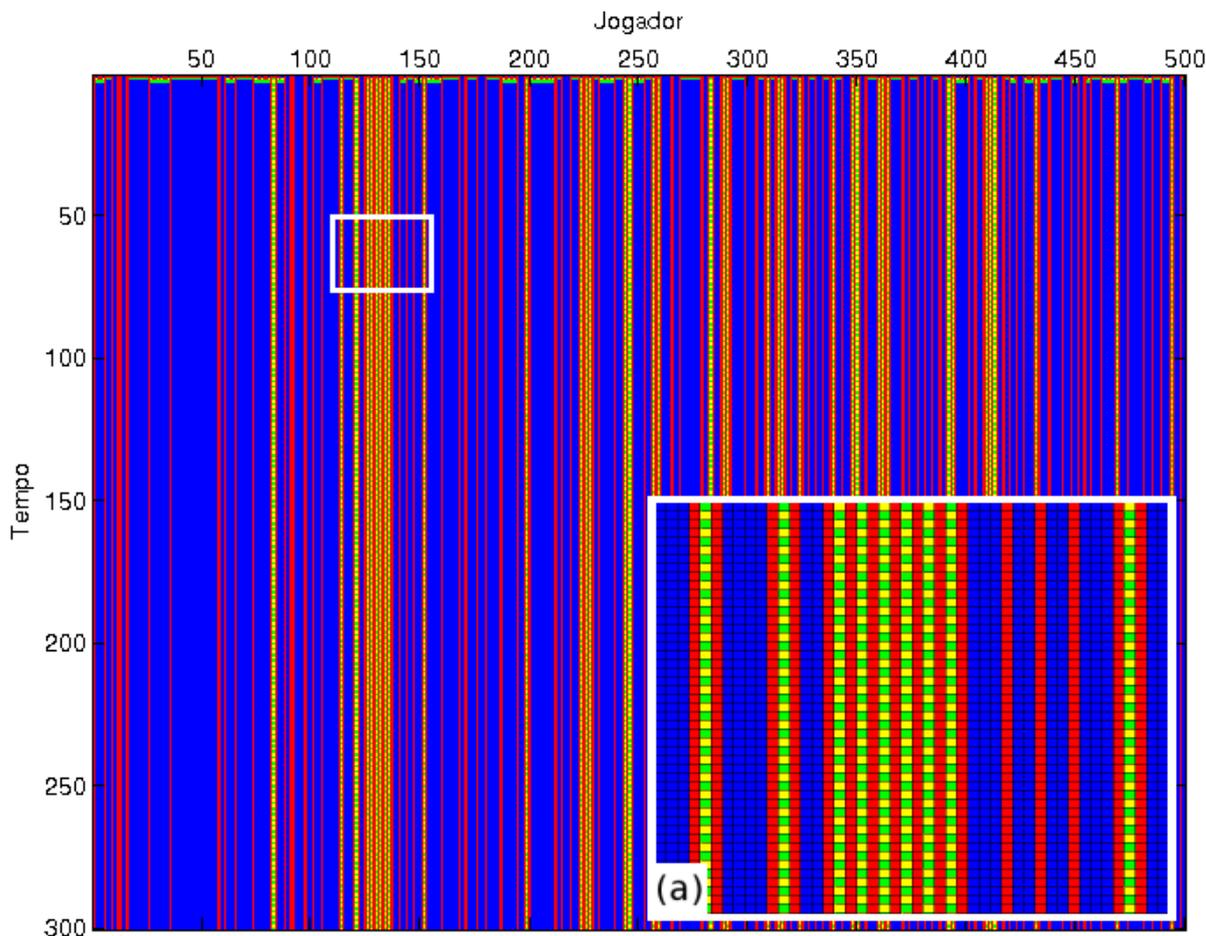


Figura 4.23: Ilustração da formação e evolução de *fingers* lisos e complexos. Os parâmetros desta simulação são: $L = 500$, $tempo = 300$, $T = 2,00$, $\rho_0 = 0,3$, e $z = 3$ (com auto-interação). (a) Ampliação do quadro.

A intersecção dos padrões de agrupamentos gera estruturas muito interessantes, como exemplo, a Fig. 4.27 ilustra a presença dos *gliders*⁴ que interagem entre eles mesmos e com *fingers*.

⁴No sistema que utiliza a EED, o lado da inclinação dos *gliders* era determinado pelo sentido em que é feita a atualização dos estados dos jogadores. Mas, se o sistema adota a EEP, os *gliders* podem se propagar tanto da

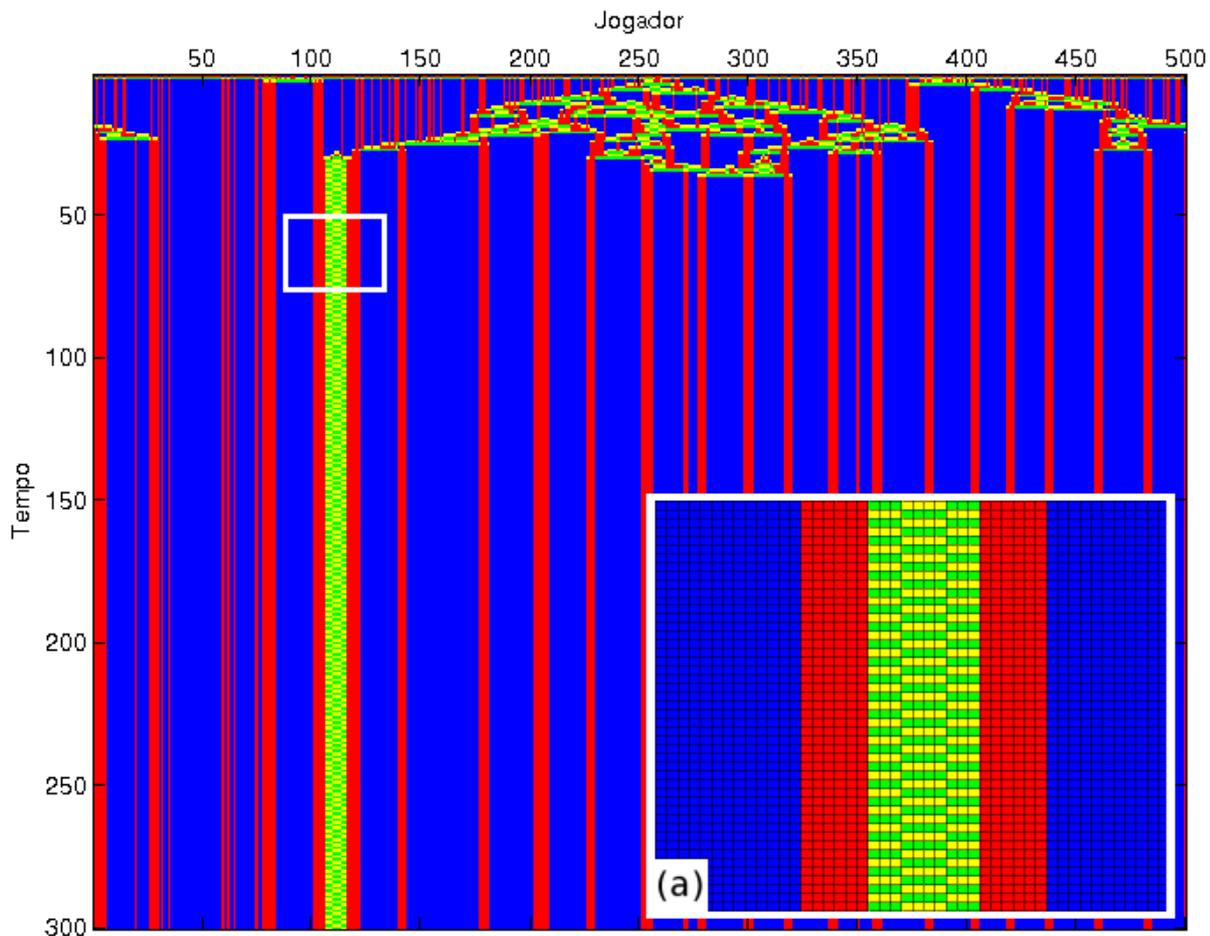


Figura 4.24: Ilustração da formação e evolução de *fingers* lisos e complexos. Os parâmetros desta simulação são: $L = 500$, $tempo = 300$, $T = 1,30$, $\rho_0 = 0,3$, e $z = 22$ (sem auto-interação). (a) ampliação do quadro.

Estas interações podem gerar *fingers* lisos (Fig. 4.27a-4.27d) e complexos (Fig. 4.27c).

O tempo necessário para que estas interações terminem, poucas ou muitas rodadas, depende do conjunto de parâmetros utilizado (c.f. Figs. 4.27b e 4.27d). Nestes sistemas, o regime transiente é o intervalo no qual ocorrem as interações entre os padrões. Quando o sistema atinge o regime estacionário, o que se observa são as interações entre os padrões de agrupamentos e suas vizinhanças, ou os padrões periódicos dos *fingers* complexos. Entretanto, as interações entre os padrões de agrupamentos podem se prolongar indefinidamente. Dizemos, então, que o sistema está no regime *quasi*-regular, que é estacionário, mas há um número muito grande de jogadores que mudam seus estados. No regime *quasi*-regular a proporção estacionária de cooperadores oscila ao redor de $\rho_\infty \sim 0,5$.

Podemos compreender o regime *quasi*-regular pelo comportamento dos agrupamentos de cooperadores ou desertores. Se os desertores de um dado agrupamento obtiverem ganho ne-

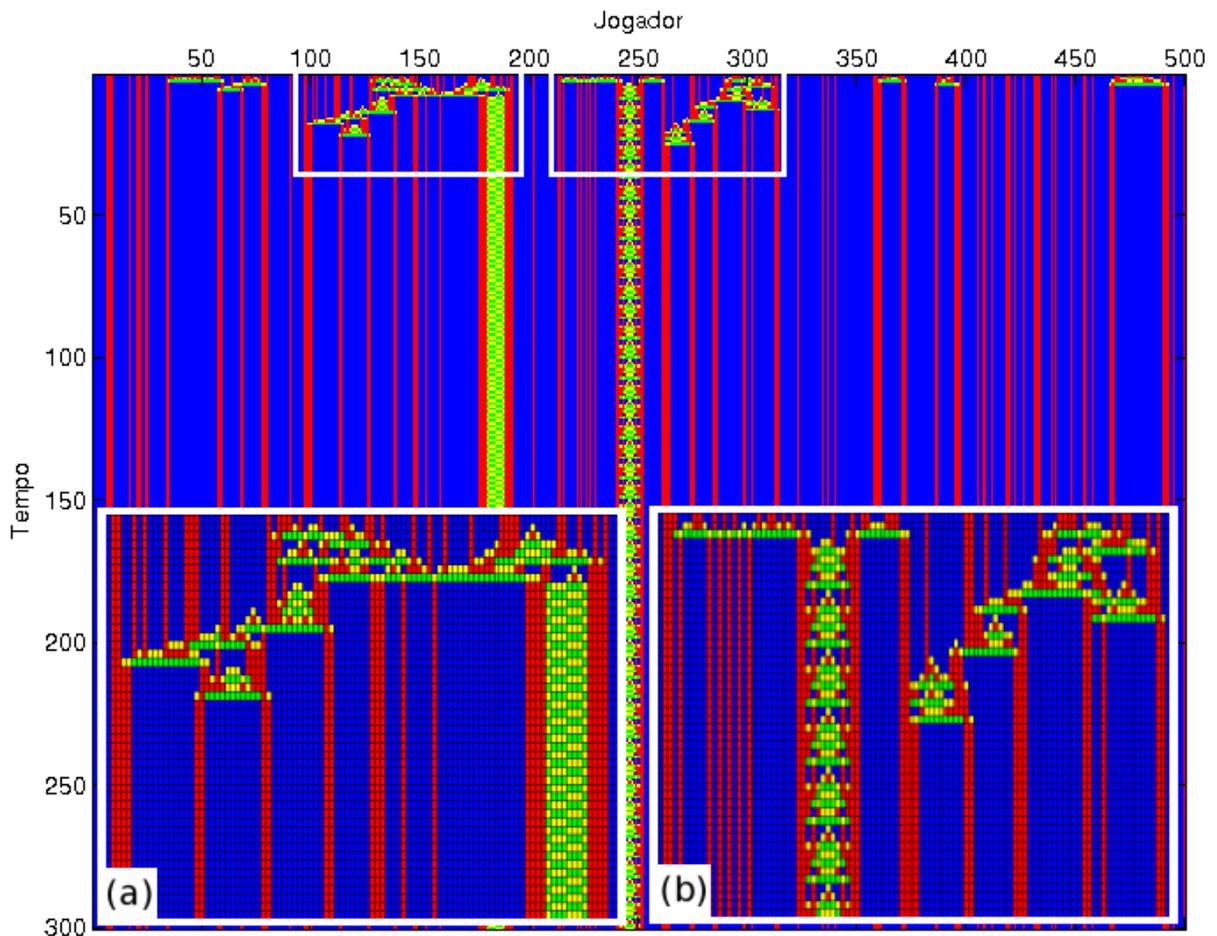


Figura 4.25: Ilustração da formação e evolução de *fingers* lisos e complexos. Os parâmetros desta simulação são: $L = 500$, $tempo = 300$, $T = 1, 10$, $\rho_0 = 0,7$, e $z = 12$ (sem auto-interação). (a) e (b) ampliação dos quadros (a) e (b), respectivamente.

gativo no instante t , todos em sincronia, mudam seus estados para cooperadores. Se esta ação estiver sincronizada entre os diferentes agrupamentos, a cooperação pode emergir. Porém, se eles estiverem fora de sincronia, um agrupamento faz essa mudança no instante t e os agrupamentos vizinhos no instante $(t + 1)$. A partir disso, ocorre uma alternância nas mudanças de estados dos agrupamentos, havendo um balanço no número de cooperadores que mudam seus estados para desertores e *vice-versa*.

Nas Figs. 4.28 a 4.30, mostramos alguns casos em que não ocorre a sincronização dos agrupamentos para emergir a cooperação, surgindo o regime estacionário *quasi*-regular. Os triângulos presentes são conseqüências deste fenômeno de sincronização. As bases desses triângulos são agrupamentos de desertores que mudaram seus estados para cooperadores no mesmo instante t . Vemos que, nos instantes iniciais surgem triângulos maiores, devido à proporção inicial de cooperadores mais alta, $\rho_0 = 0,9$. Surge também outro padrão triangular, mas seu interior não é composto apenas por cooperadores ou desertores, mas por *fingers* de cooperado-

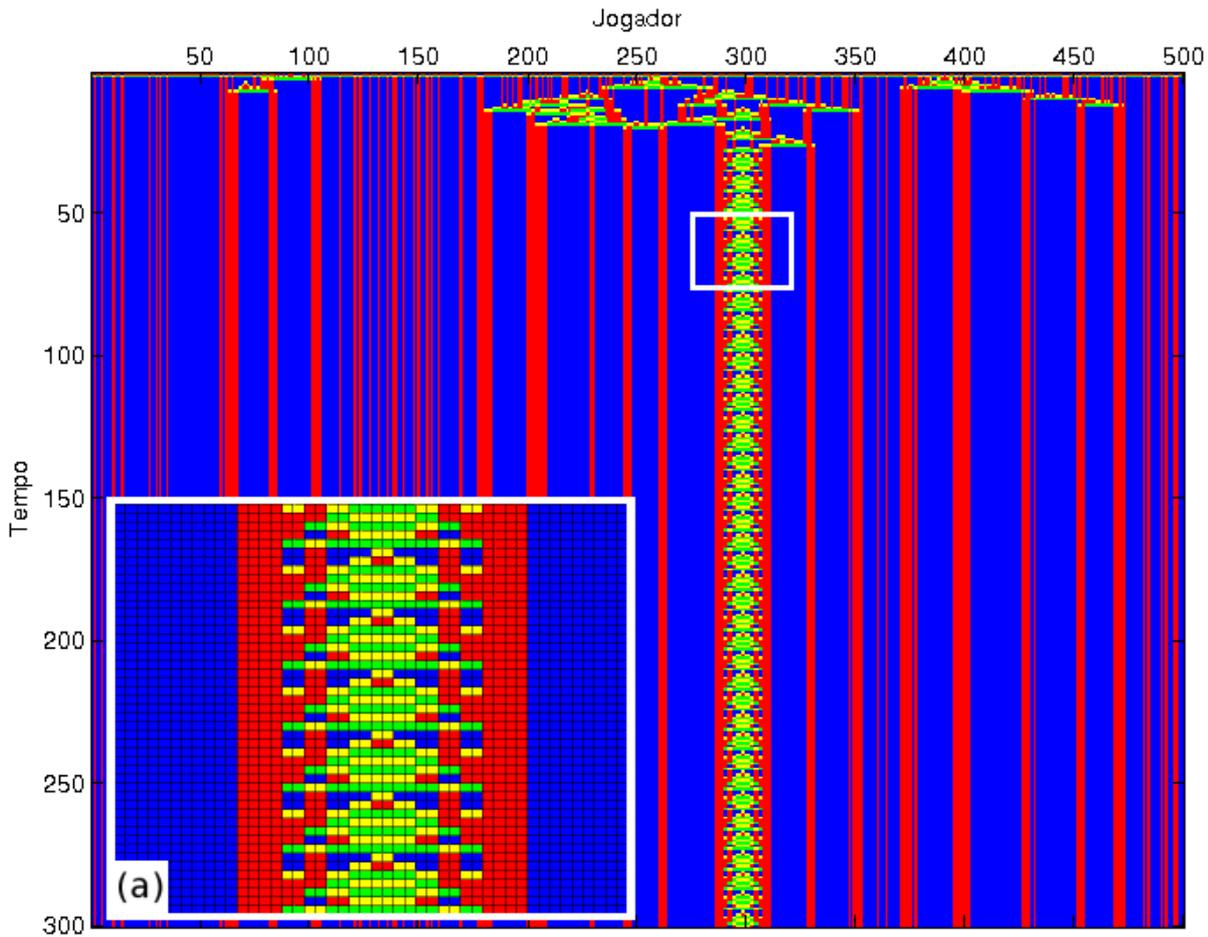


Figura 4.26: Ilustração da formação e evolução de *fingers* lisos e complexos. Os parâmetros desta simulação são: $L = 500$, $tempo = 300$, $T = 1,30$, $\rho_0 = 0,3$, e $z = 25$ (com auto-interação). (a) Ampliação do quadro.

res e desertores. Este padrão é um triângulo com seus lados indefinidos, que chamaremos de *pseudo-triângulos*. Observamos esse padrão na Fig. 4.28a no tempo $t = 140$ próximo ao jogador 420.

Na Fig. 4.28b, observamos o aumento do tamanho dos agrupamentos de cooperadores, isto é consequência do valor de z ser maior para esse sistema, mas o regime do sistema ainda é *quasi-regular*. Nos sistemas apresentados na Fig. 4.28, temos $\rho_\infty \sim 0,5$, e muitos jogadores mudam de estado a cada rodada.

Na Fig. 4.29, vemos que alguns agrupamentos de desertores são suficientes para levar o sistema para o regime *quasi-regular*. Na Fig. 4.29a, vemos a ampliação de um desses agrupamentos de desertores. E a Fig. 4.29b, ilustra um pseudo-triângulo que se forma em $t = 260$ com jogadores próximos ao jogador 160.

Na Fig. 4.30, observamos o regime transiente seguido do regime *quasi-regular*, que apresenta periodicidade. A Fig. 4.30a, ilustra um sistema que apresenta um período de transiente

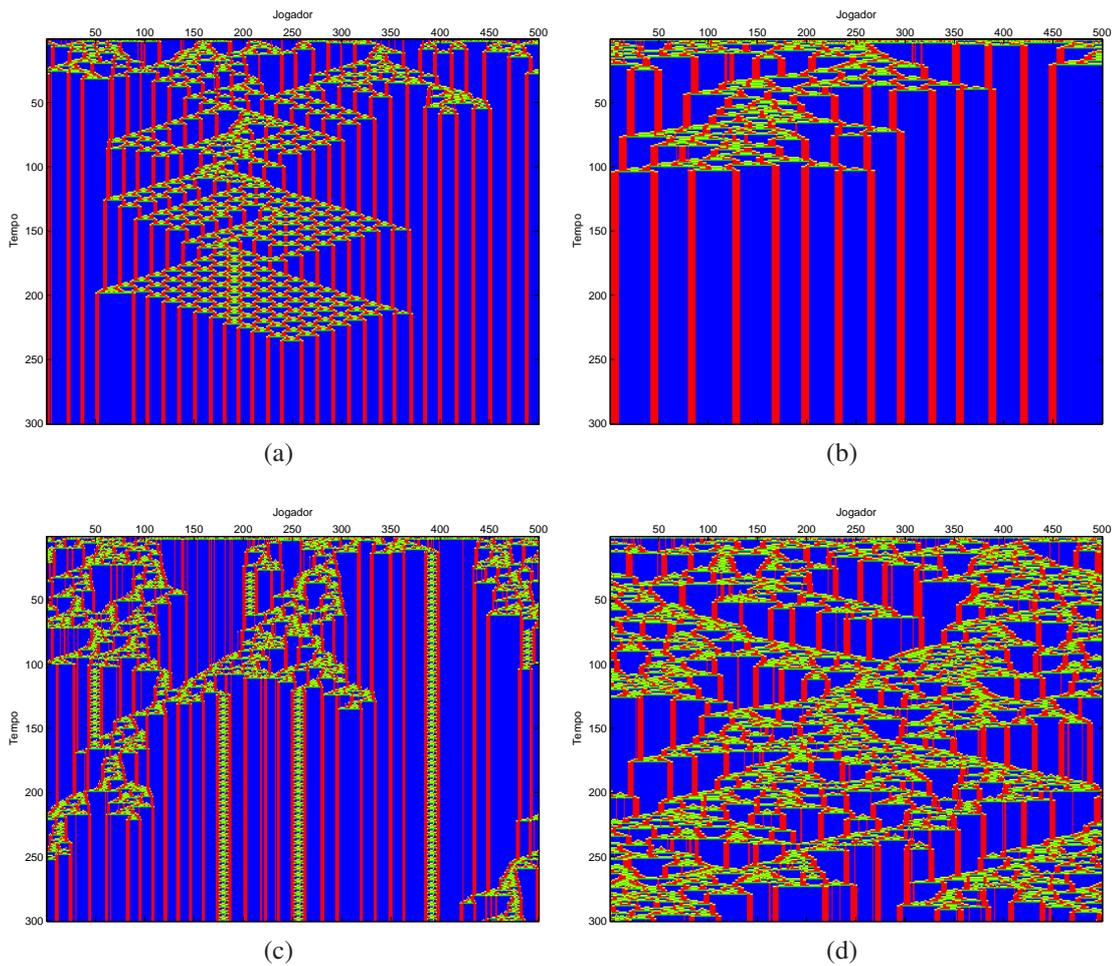
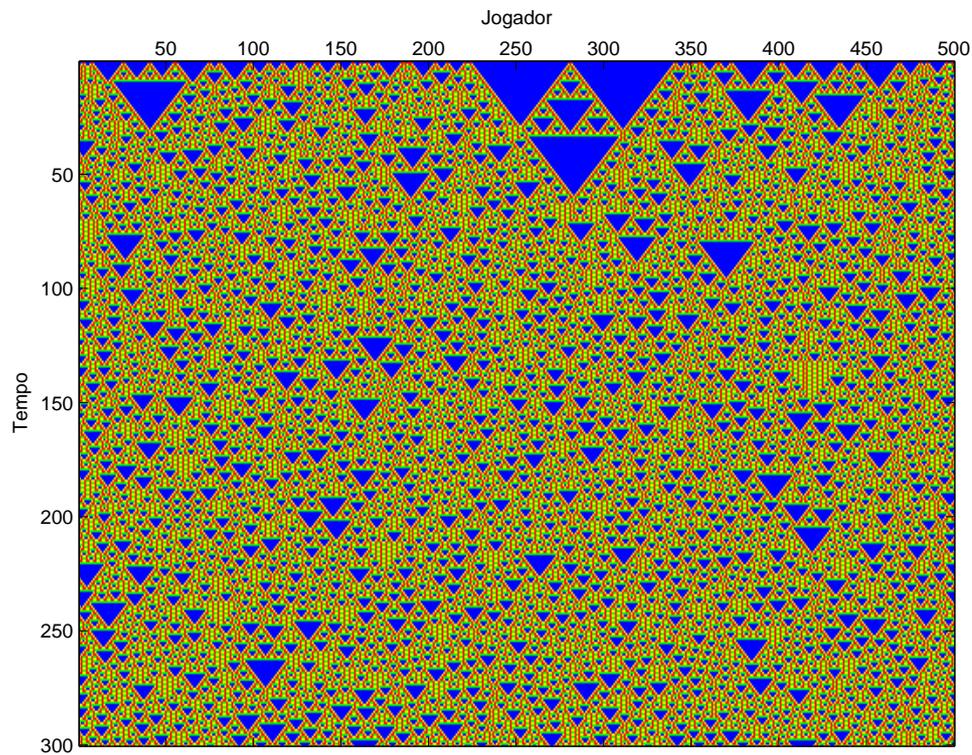


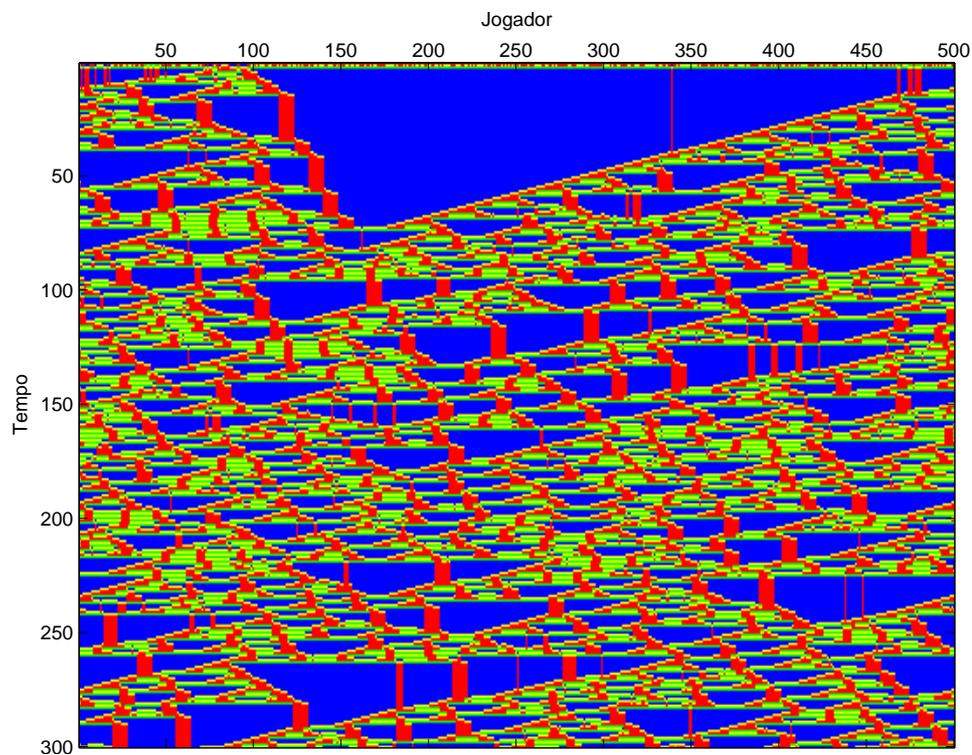
Figura 4.27: Ilustração das intersecções de *gliders* com *fingers* e outros *gliders*. Os parâmetros destas simulações são: $L = 500$, $tempo = 300$ e em (a) $T = 1,40$, $\rho_0 = 0,7$, e $z = 14$ (sem auto-interação); (b) $T = 1,70$, $\rho_0 = 0,3$, e $z = 26$ (sem auto-interação); (c) $T = 1,40$, $\rho_0 = 0,5$, e $z = 12$ (sem auto-interação); e (d) $T = 1,40$, $\rho_0 = 0,3$, e $z = 24$ (sem auto-interação).

maior do que o presente na Fig. 4.30b, onde há o surgimento de vários pseudo-triângulos. Em geral, os padrões dos agrupamentos de cooperadores apresentam as mesmas formas, com tamanhos diferentes, de acordo com os parâmetros adotados.

Assim como acontece na EED, há intervalos de T em que não ocorrem mudanças para um sistema com a mesma configuração inicial da configuração da distribuição inicial dos cooperadores e com ρ_0 e z fixos. Na Fig. 4.31, considerando $z = 8$ podemos observar que quando o sistema passa pelos valores de tentação crítica, $T_c = \{1; 5/3\}$, os padrões apresentam uma pequena diferença. De $T = 1$ para $T = 1,01$, há o aumento no número de padrões nos instantes iniciais. Porém, quando o sistema passa pela transição $T_c = 5/3$, passa a apresentar o regime *quasi*-regular. A proporção estacionária de cooperadores também se altera, mas trataremos disso com mais detalhes na Seção 4.2.2.

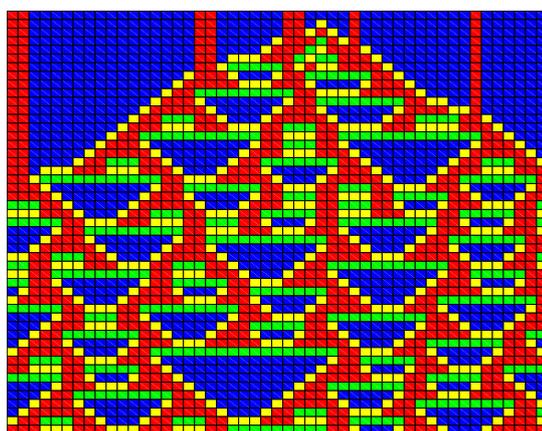
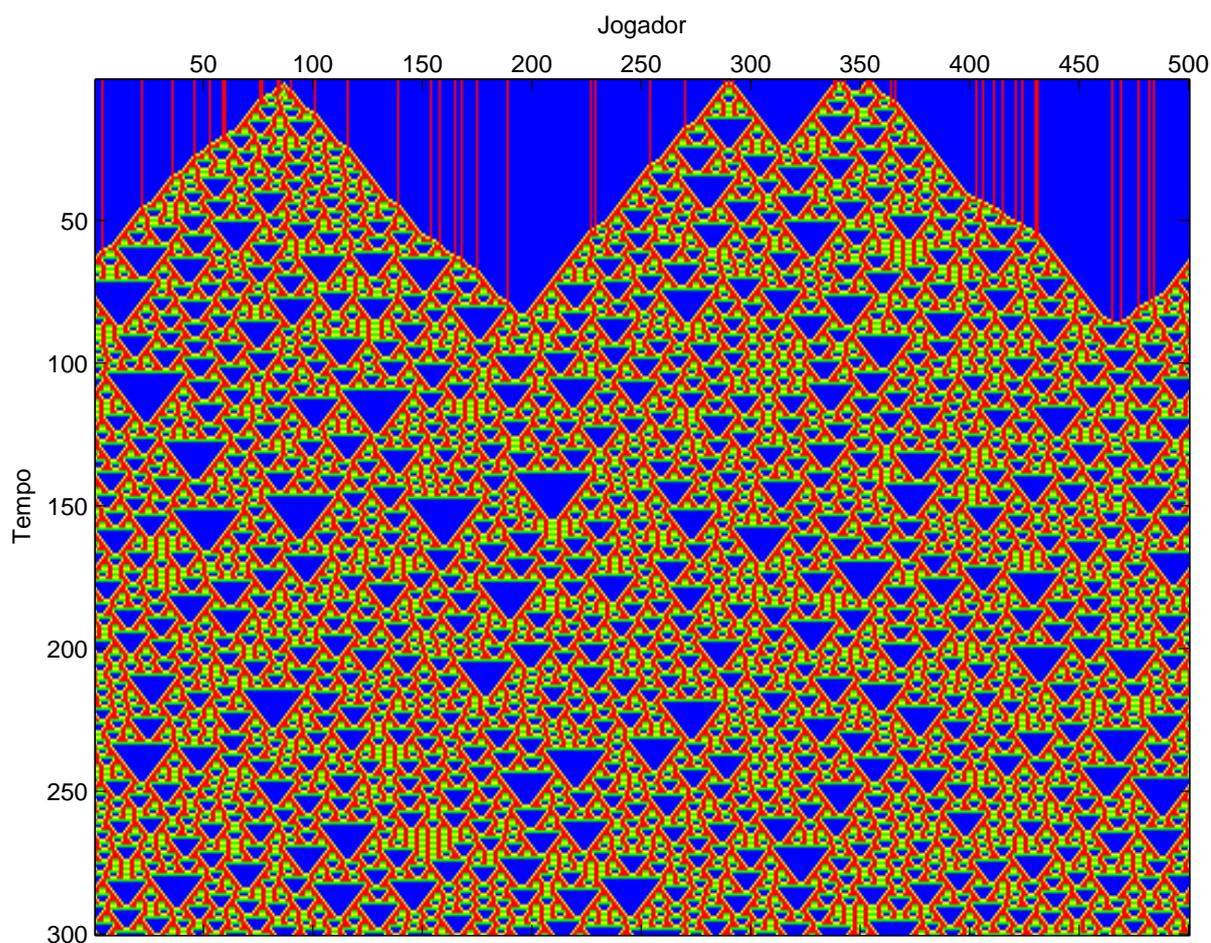


(a)

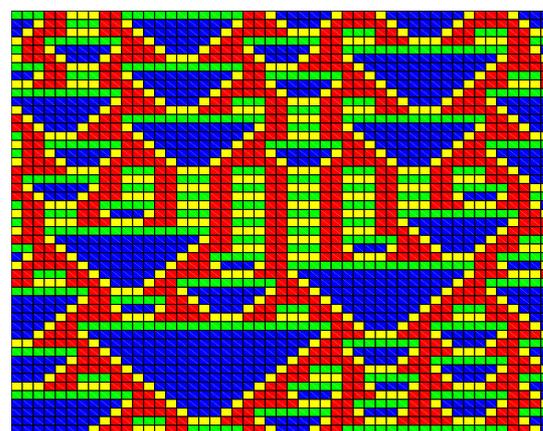


(b)

Figura 4.28: Ilustração da formação e evolução do regime *quasi*-regular. Os parâmetros destas simulações são: $L = 500$, $tempo = 300$ e em (a) $T = 1, 10$, $\rho_0 = 0,9$, e $z = 2$ (sem auto-interação); e (b) $T = 1, 90$, $\rho_0 = 0,5$, e $z = 29$ (com auto-interação).



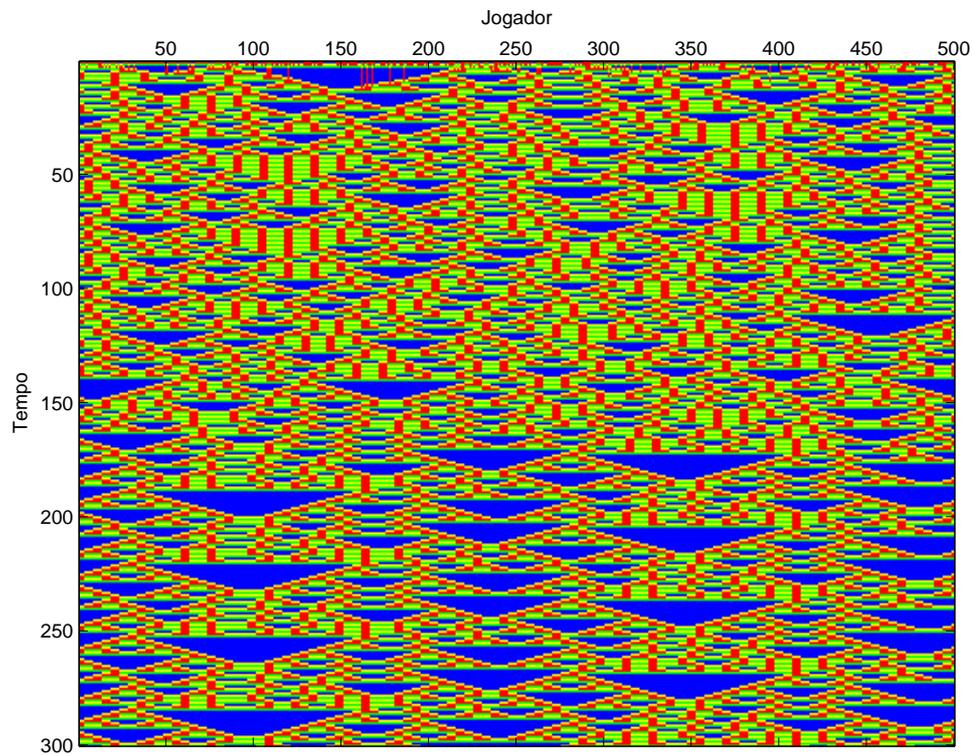
(a)



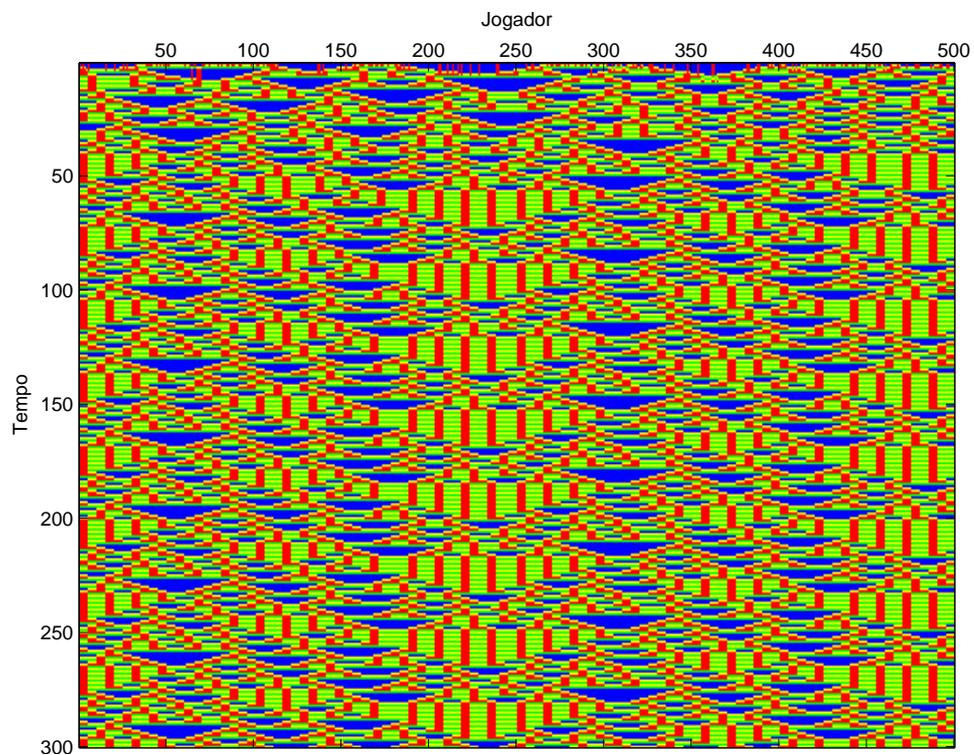
(b)

Figura 4.29: Ilustração da formação e evolução do regime *quasi*-regular. Os parâmetros desta simulação são: $L = 500$, $tempo = 300$, $T = 2,00$, $\rho_0 = 0,9$, e $z = 6$ (sem auto-interação). (a) ampliação da região para $t \sim 1$ nos jogadores próximos ao jogador 90; (b) ampliação da região para $t = 260$ nos jogadores próximos ao jogador 160.

Na Fig. 4.32, com $z = 9$ os valores de $T_c = \{5/4; 2\}$, apesar das pequenas mudanças nos padrões, o regime estacionário na fase cooperadora é o resultante em ambos, sem



(a)



(b)

Figura 4.30: Ilustração da formação e evolução do regime *quasi*-regular. Os parâmetros destas simulações são: $L = 500$, $tempo = 300$ e em (a) $T = 1,90$, $\rho_0 = 0,3$, e $z = 26$ (sem auto-interação); e (b) $T = 1,90$, $\rho_0 = 0,7$, e $z = 28$ (sem auto-interação).

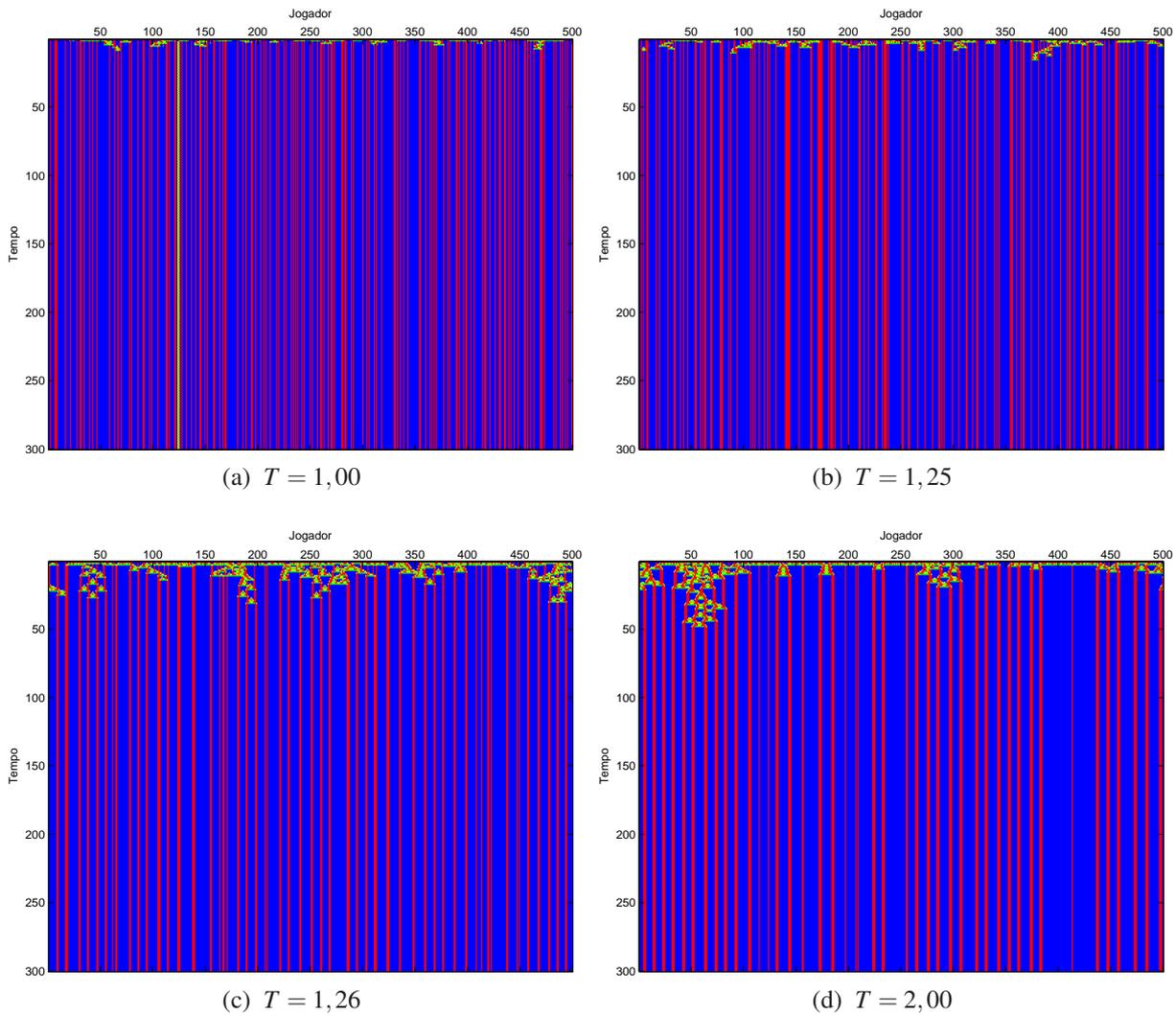


Figura 4.32: Série de simulações numéricas que mostram como a variação da tentação T modifica os padrões dos agrupamentos de desertores presentes. Nos intervalos entre os valores especificados de T não ocorrem modificações dos padrões. Os parâmetros destas simulações são: $L = 500$, $tempo = 300$, $\rho_0 = 0,5$, e $z = 9$ (com auto-interação). Para: (a) $T = 1,00$; (b) $T = 1,25$; (c) $T = 1,26$; e (d) $T = 2,00$.

transiente, estacionário e *quasi*-regular, dependem dos parâmetros do sistema, embora não haja a sensibilidade à variação da configuração inicial (fase caótica) observada na EED. Quando variamos T temos modificações no tempo do regime transiente e os padrões formados se alteram à medida que T passa pelos valores de T_c . No regime estacionário, há diferenças quanto ao valor de ρ_∞ e no regime *quasi*-regular, o sistema pode apresentar um regime transiente e atingir o regime estacionário com oscilações periódicas em ρ_∞ .

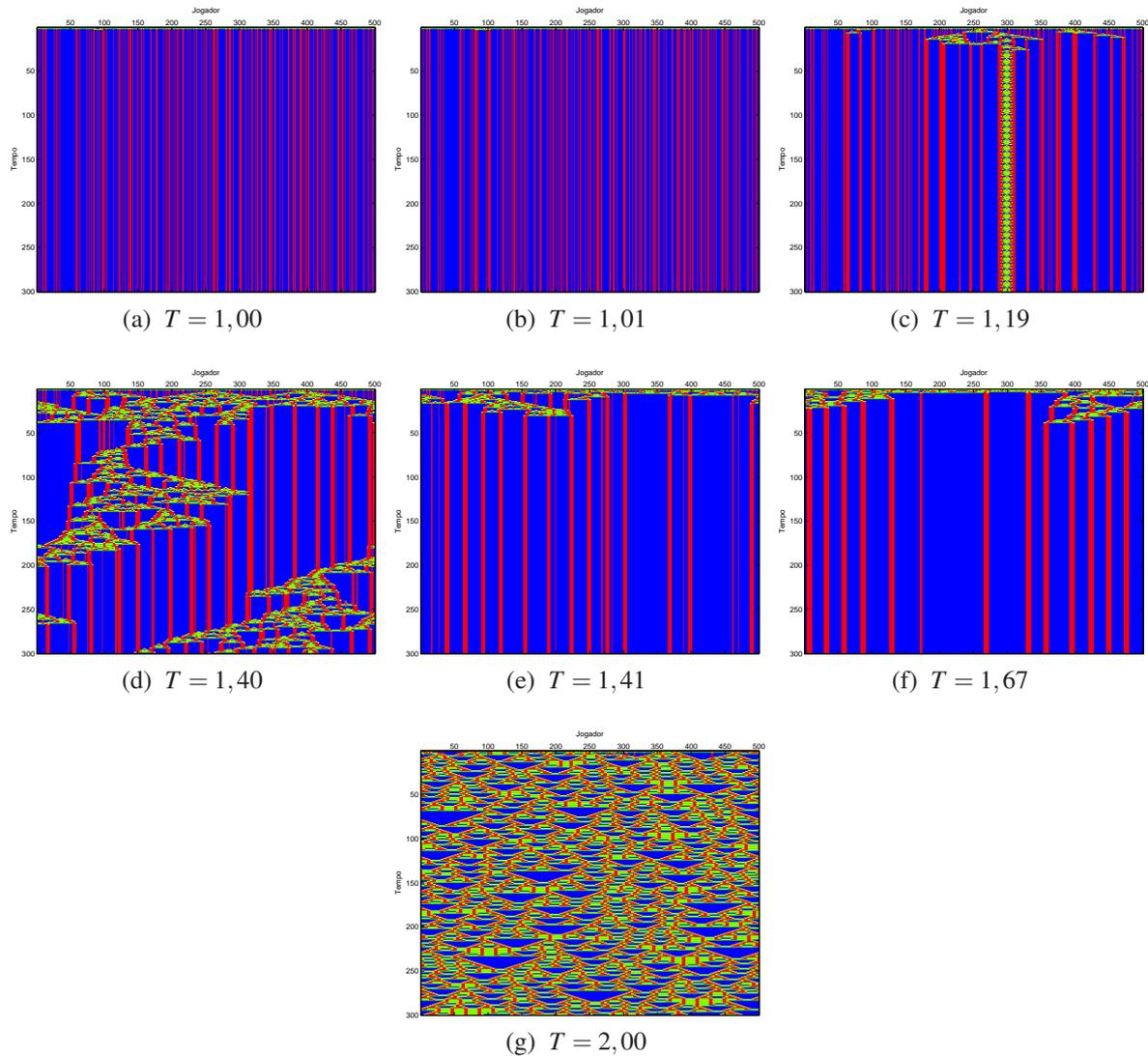


Figura 4.33: Série de simulações numéricas que mostram como a variação da tentação T modifica os padrões dos agrupamentos de desertores presentes. Nos intervalos entre os valores especificados de T não ocorrem modificações dos padrões. Os parâmetros destas simulações são: $L = 500$, $tempo = 300$, $\rho_0 = 0,3$, e $z = 24$ (sem auto-interação). Para: (a) $T = 1,00$; (b) $T = 1,01$; (c) $T = 1,19$; (d) $T = 1,40$; (e) $T = 1,41$; (f) $T = 1,67$; e (g) $T = 2,00$.

4.2.2 Regimes transiente e estacionário: exploração exaustiva do espaço de parâmetros

Para a EEP, diferentemente do que acontece na EED, não há regiões de T e ρ_0 em que mudanças na configuração inicial dos cooperadores alteram significativamente os resultados estacionários. As características das fases dos sistemas não são semelhantes às do EED, pois não existem as fases desertora e caótica, mas surge uma fase que chamamos de *quasi*-regular. A desertora não está presente pois o agrupamento de desertores produz um ganho negativo e pela EEP, os jogadores mudam de estado quando isso acontece. A ausência da fase caótica

fica evidente pela observação das superfícies de desvio-padrão, onde $SD \sim 0$ em quase todo o espaço de parâmetros. O intervalo $1,0 \leq T \leq 2,0$ gera o conflito, mas este intervalo pode ser ampliado para explorar os demais valores de tentação crítica, que encontramos pela Eq. 3.23. Não utilizamos um intervalo maior de T porque quisemos comparar a mesma região do espaço de parâmetros para os sistemas que utilizam a EED e a EEP.

Utilizamos a representação em superfícies para ρ_∞ no diagrama de fases. As Figs. de B.1 a B.29 mostram uma série de superfícies de ρ_∞ para $z = \{2; 30\}$, lembramos que para z ímpar ocorre auto-interação e z par, não há auto-interação. Da Fig. B.1b até B.29b, temos as superfícies do desvio-padrão para as respectivas superfícies de ρ_∞ . Aqui não há a necessidade de mostrar as superfícies por dois ângulos, porque as regiões com desvio-padrão não nulos são pequenas e não produzem pontos cegos em sua visualização. Há poucas regiões onde o desvio-padrão $SD > 0$.

Observamos na seqüência das superfícies mencionadas:

- os diagramas de fases são muito diferentes dos obtidos com a EED e mais simples;
- as diferenças devidas à presença ou não da auto-interação são perceptíveis para $z < 20$, acima desse valor as diferenças básicas são mudanças nas transições de fase em função do valor de T ;
- existe simetria de ρ_∞ em relação à proporção inicial de cooperadores $\rho_0 = 0,5$, isto é, $\rho_\infty(T, [\rho_0 = 1/2 + \alpha], z) = \rho_\infty(T, [\rho_0 = 1/2 - \alpha], z)$ com $0 < \alpha < 0,5$.

Os diagramas de fase apresentam quedas abruptas quando o sistema passa pelos valores de transição T_c , mas o sistema não vai para a fase desertora, e sim para $\rho_\infty \sim 0,5$. Os valores $\rho_\infty < 0,5$ ocorrem em poucas regiões, assim a fase desertora quase não aparece. Quando $z \gg 1$ a superfície do diagrama de fases dos sistemas convergem para o mesmo formato. Apesar disso, os valores de transição ainda se deslocam quando alteramos z no sistema.

Apresentamos as mesmas projeções que mostramos na Seção 4.1.2. A projeção da superfície $\rho_\infty(T, \rho_0, z)$ no plano $\rho_\infty T$ mostra, para cada valor de z , ρ_∞ em função de T para diferentes valores de ρ_0 . Na Fig. 4.34, estão os gráficos para $z = \{2; 4; 8; 16; 28; 30\}$ e na Fig. 4.35, para $z = \{3; 5; 9; 19; 27; 29\}$. Em cada gráfico temos as projeções para $\rho_0 = \{0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9\}$, omitimos $0 < \rho_0 < 0,5$ devido à simetria em relação $\rho_0 = 0,5$ observada nas superfícies.

As transições em ρ_∞ podem ser vistas quando o parâmetro T passa pelos limiares de tentação crítica, T_c dados pela nossa Eq. 3.23. Nos gráficos os valores de T_c estão marcados pelas

linhas verticais tracejadas. Por exemplo, na Fig. 4.35c, $z = 9$, há auto-interação e $T_c = \{5/4; 2\}$. Enquanto que, na Fig. 4.34c $z = 8$, não há auto-interação e $T_c = 5/3$.

O comportamento de ρ_∞ em função de T para z par (sem auto-interação) (Fig. 4.34):

- $z = 2$ (Fig. 4.34a), para $0,5 \leq \rho_0 \leq 0,9$, ρ_∞ diminui em $T = 1,01$, depois se mantém constante no intervalo $1,01 \leq T \leq 2,00$;
- $z = 4$ (Fig. 4.34b), ρ_∞ se comporta da mesma maneira que para $z = 4$, a única diferença perceptível é que $\rho_\infty(T = 1,01, \rho_0, z = 4) < \rho_\infty(T = 1,00, \rho_0, z = 4)$.
- $z = 8$ (Fig. 4.34c), para $0,5 \leq \rho_0 \leq 0,7$, $\rho_\infty \sim 0,8$ e para $0,8 \leq \rho_0 \leq 0,9$, $\rho_\infty \sim 0,9$. Em $T = 5/3$, $0,5 \leq \rho_0 \leq 0,9$, $\rho_\infty \sim 0,5$;
- $z = 16$ (Fig. 4.34d), para $0,5 \leq \rho_0 \leq 0,7$, $0,75 < \rho_\infty < 0,8$ e para $0,8 \leq \rho_0 \leq 0,9$, $\rho_\infty \sim 0,9$. Em $T = 9/7$, $0,1 \leq \rho_0 \leq 0,7$, tem uma leve mudança $0,78 < \rho_\infty < 0,83$. Em $T = 10/6$, $0,1 \leq \rho_0 \leq 0,7$, diminui para $\rho_\infty \sim 0,5$ e para $0,8 \leq \rho_0 \leq 0,9$, diminui para $\rho_\infty \sim 0,65$, e tem um comportamento oscilatório;
- $z = 28$ (Fig. 4.34e), para $0,5 \leq \rho_0 \leq 0,7$, $\rho_\infty \sim 0,7$ e para $\rho_0 = 0,8$, $\rho_\infty \sim 0,8$ e $\rho_0 = 0,9$, $\rho_\infty \sim 0,9$. Em $T = \{15/13; 4/3; 17/11\}$, as curvas apresentam uma leve mudança em ρ_∞ . Em $T = 9/5$, as curvas apresentam uma queda mais acentuada de ρ_∞ e passa a ter um comportamento oscilatório;
- $z = 30$ (Fig. 4.34f), em $T = \{8/7; 17/13; 3/2; 19/11\}$, as curvas apresentam uma leve mudança em ρ_∞ . Em $T = 2$, as curvas apresentam uma queda mais acentuada de $\rho_\infty \sim 0,5$. Comparando o comportamento de ρ_∞ para $z = 28$ e $z = 30$, notamos as mesmas características, mas deslocados, em função do valor de tentativa crítica T_c .

O comportamento de ρ_∞ em função de T para z ímpar (com auto-interação) (Fig. 4.35):

- $z = 3$ (Fig. 4.35a), para $0,5 \leq \rho_0 \leq 0,9$, se mantém constante $\rho_\infty > 0,9$ no intervalo $1,00 \leq T \leq 1,99$. Em $T = 2$, as curvas convergem para $\rho_\infty \sim 0,5$.
- $z = 5$ (Fig. 4.35b), para $0,5 < \rho_0 < 0,9$, $\rho_\infty > 0,8$ em $1,00 < T < 1,50$. Ao passar por $T = 1,50$, as curvas convergem para $\rho_\infty \sim 0,5$;
- $z = 9$ (Fig. 4.35c), para $0,5 < \rho_0 < 0,8$, $0,7 < \rho_\infty < 0,85$ em $1,00 < T < 1,25$. Ao cruzar $T = 1,25$, há um aumento para $0,75 < \rho_\infty < 0,85$ e ρ_∞ se mantém constante até $T = 1,99$. Em $T = 2$, as curvas convergem para $\rho_\infty \sim 0,5$;

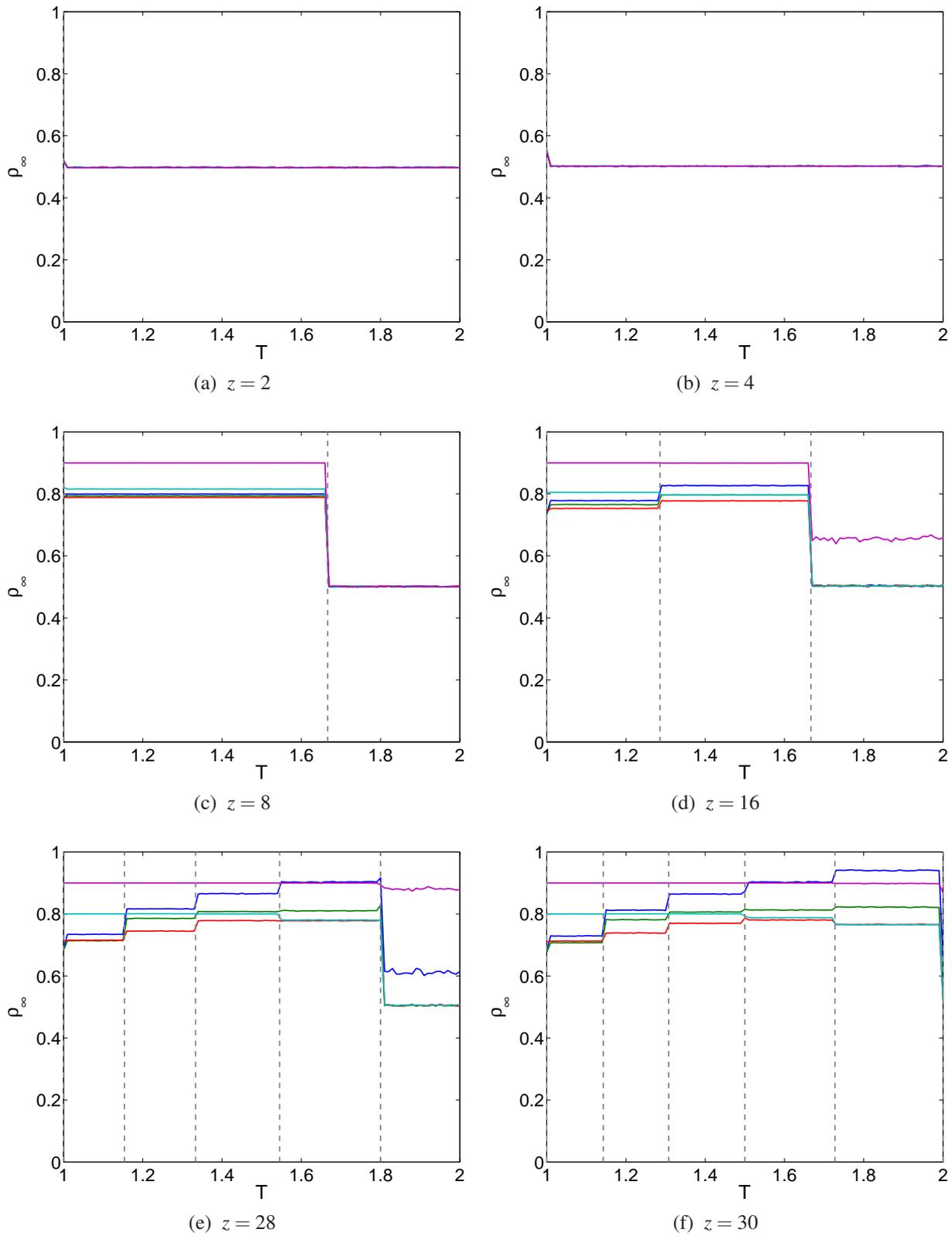


Figura 4.34: Proporção estacionária de cooperadores (ρ_∞) em função do valor de tentação T de deserção dos jogadores, para $z = \{2; 4; 8; 16; 28; 30\}$. As linhas verticais tracejadas marcam os valores de T_c dadas pela Eq. 3.16. Azul: $\rho_0 = 0,1$; verde: $\rho_0 = 0,2$; vermelho: $\rho_0 = 0,3$; cian: $\rho_0 = 0,4$; magenta: $\rho_0 = 0,5$.

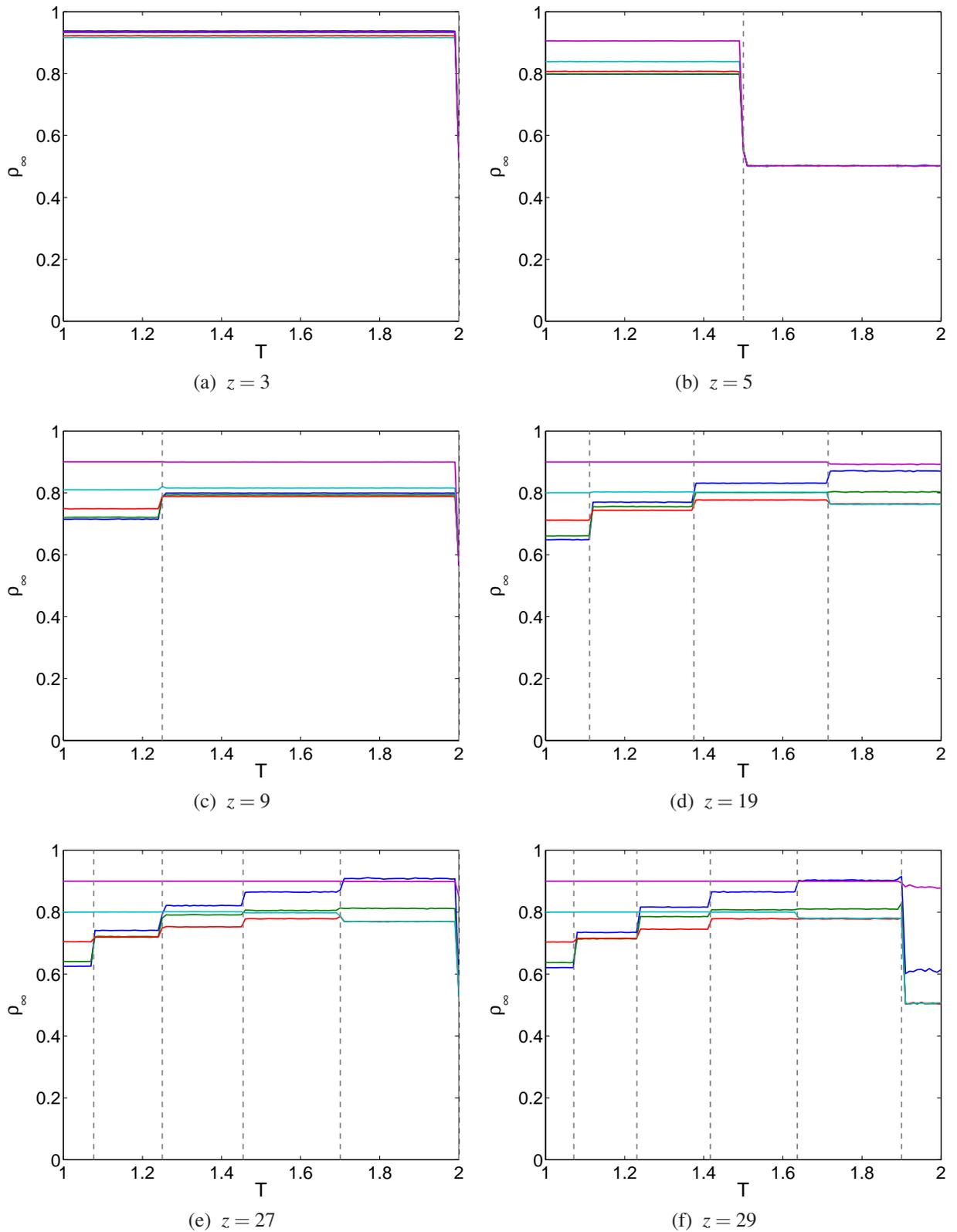


Figura 4.35: Proporção estacionária de cooperadores (ρ_∞) em função do valor de tentação de deserção dos jogadores (T), para $z = \{3; 5; 9; 19; 27; 29\}$. As linhas verticais tracejadas marcam os valores de T_c dados pela Eq. 3.16. Azul: $\rho_0 = 0,1$; verde: $\rho_0 = 0,2$; vermelho: $\rho_0 = 0,3$; cyan: $\rho_0 = 0,4$; magenta: $\rho_0 = 0,5$.

- $z = 19$ (Fig. 4.35d), os valores de $\rho_\infty > 0,65$ para $0,5 \leq \rho_0 \leq 0,9$, o valor de ρ_∞ se modifica quando passa pelos valores de transição $T_c = \{10/9; 11/8; 12/7; 13/6\}$;
- $z = 27$ (Fig. 4.35e), os valores de $\rho_\infty > 0,65$ para $0,5 \leq \rho_0 \leq 0,9$, os valor de ρ_∞ se modifica quando passa pelos valores de transição $T_c = \{14/13; 15/12; 16/11; 17/10\}$. Em $T = 2$, as curvas convergem para $\rho_\infty \sim 0,5$;
- $z = 29$ (Fig. 4.35f), ρ_∞ é muito similar a $z = 27$. Em $T = 2$, as curvas convergem para $\rho_\infty \sim 0,5$. Podemos considerar a mesma observação feita para $z = \{28; 30\}$ de que os sistemas apresentam para o mesmo comportamento quando a conectividade é alta, $z \gg 1$.

As Figs. 4.34 e 4.35 mostram que a dependência de ρ_∞ com a proporção inicial de cooperadores é menor que a observada com a EED. Houve um aumento na proporção de cooperadores, ao invés da deserção generalizada que obtivemos na EED. O valor de z aumenta o número e modifica os valores de transição críticos T_c e quando o sistema passa por essas transições pode ocorrer o aumento ou a diminuição de ρ_∞ .

Omitimos as projeções de ρ_∞ no plano $\rho_\infty\rho_0$, pois as superfícies são muito regulares e essas projeções não acrescentam informações além das observadas nas superfícies. Por exemplo, observamos nessas superfícies a simetria de ρ_∞ ao redor de $\rho_0 = 0,5$, que pode ser compreendida quando relembramos os casos triviais: $\rho_\infty(T; \rho_0 = 0; z) = \rho_\infty(T; \rho_0 = 1; z)$. O mecanismo que produz a simetria é consequência da EEP, pois para $\rho_0 = \beta$, a proporção de r jogadores terá ganho positivo e $(1 - r)$ ganho negativo, se $\rho_0 = 1 - \beta$, $1 - r$ jogadores terão ganho positivo e r ganho negativo, gerando a simetria. O corte no plano $T\rho_0$ da superfície $\rho_\infty(T, \rho_0, z)$ em $\rho_\infty = 0,5$ não é de fácil compreensão como os que surgem utilizando a EED, pois as áreas em que ocorre o regime *quase*-regular ficam em uma região central do diagrama de fases, cercada por regiões da fase cooperadora. Por isso não apresentamos estes gráficos.

4.3 Caso particular: $T = 1$

Pode parecer sem significado considerar $T = 1,00$, já que cooperador e desertor têm o mesmo ganho quando um joga contra o outro. Entretanto, o ganho total de cada jogador depende de todas suas interações, e portanto da combinação de jogadores em sua vizinhança. Por exemplo, se o jogador pertence a um agrupamento cooperativo ele tem um ganho maior que o de um jogador pertencente a um agrupamento desertor [27].

Mostraremos os resultados da exploração exhaustiva de $\rho_\infty(T = 1, \rho_0, z)$ para sistemas que

utilizam a EED e EEP. Os padrões de agrupamentos que surgem são combinações dos apresentados para as respectivas estratégias e não serão mostrados novamente.

4.3.1 Regime estacionário: Estratégia Evolucionária Darwiniana

Quando utilizamos a EED, para $T = 1$, na fronteira dos agrupamentos ocorre a invasão dos agrupamentos de desertores pelos cooperadores e vice-versa. A fase cooperadora se destaca para $T = 1$, surpreendendo àqueles que consideraram apenas o ganho da interação por par ao invés do ganho total do jogador. Se os jogadores não mudassem seus estados e mantivessem sua distribuição inicial de cooperadores e desertores, ou seja $\rho(t = \infty; T = 1; \rho_0; z) = \rho(t = 0; T = 1; \rho_0; z)$, a superfície esperada seria um plano de $\rho_\infty = 0$ até $\rho_\infty = 1$ para todos os valores de z .

Apresentamos as superfícies de $\rho_\infty(T = 1; \rho_0; z)$, e também as do desvio-padrão de ρ_∞ , SD . As Figs. 4.36 a 4.37 mostram as superfícies de ρ_∞ para $z = \{2; 30\}$ par (sem auto-interação) e ímpar (com auto-interação), respectivamente.

As Figs. 4.36a e 4.37a mostram que há a emergência de cooperação. Portanto, os jogadores não mantiveram seus estados iniciais durante a evolução do sistema. A Fig. 4.36b, 4.36c e 4.37b, 4.37c mostram que há a fase caótica.

A projeção da superfície $\rho_\infty(T = 1; \rho_0; z)$ no plano $\rho_\infty\rho_0$ mostra ρ_∞ em função de ρ_0 para diferentes valores de z . Na Fig. 4.38a, estão as projeções para $z = \{2; 4; 8; 16; 28; 30\}$ e na Fig. 4.38b, para $z = \{3; 5; 9; 19; 27; 29\}$.

Na Fig. 4.38a, ρ_∞ pode estar abaixo ou acima do valor “esperado”, para $\rho_0 < 0,4$ ρ_∞ é menor do que o esperado. Os cooperadores quando jogam com desertores têm ganho nulo, então seu ganho total fica menor que o dos desertores e mudam seu estado para desertores. Como ρ_0 é pequeno, esta situação ocorre com maior frequência, por isso temos uma redução em ρ_∞ . Quando $\rho_0 > 0,4$ temos o inverso, como muitos jogadores desertores jogam entre si, o ganho deles acaba sendo menor que o dos cooperadores e eles mudam seus estados para cooperadores emergindo a cooperação.

Para z ímpar, Fig. 4.38b, a cooperação aparece desde $\rho_0 \geq 0,1$, pois quando se forma um pequeno agrupamento de cooperadores eles têm um ganho maior que o dos desertores e dominam o sistema produzindo a cooperação. Um cooperador que joga contra ele mesmo tem pelo menos um ganho positivo, que pode ser maior do que o dos desertores que o exploram. Assim eles são copiados e a cooperação emerge.

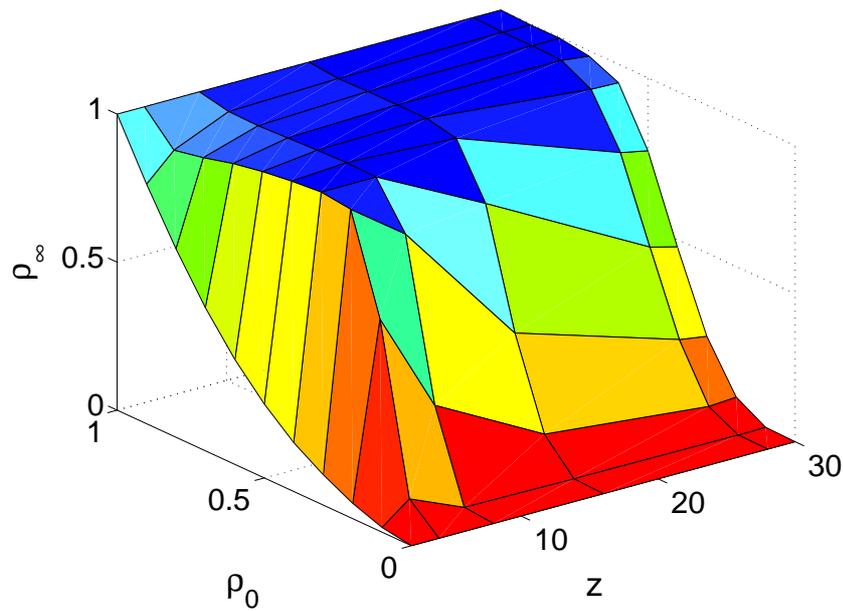
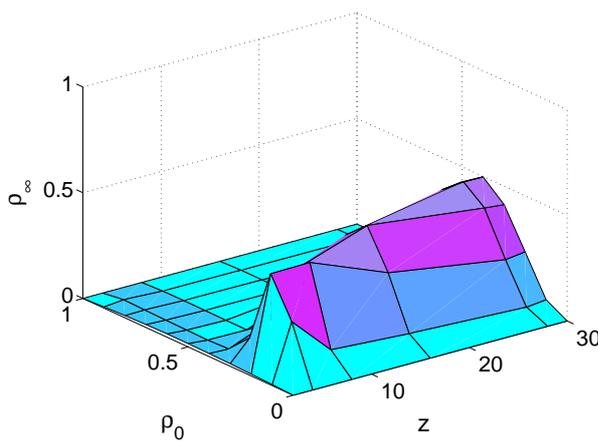
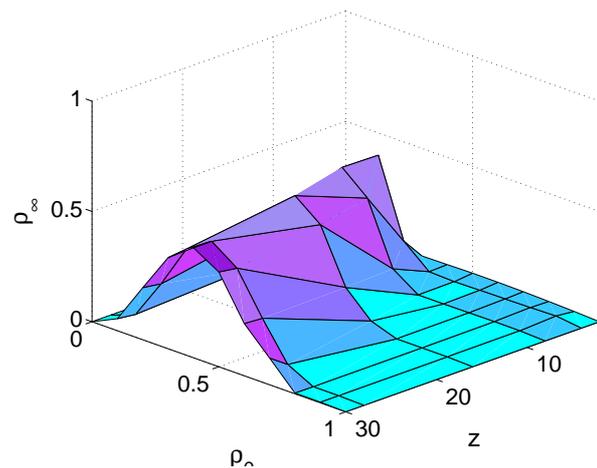
(a) z par.(b) Desvio padrão, vista 1. Para z par.(c) Desvio padrão, vista 2. Para z par.

Figura 4.36: Diagrama de fases, ρ_∞ (proporção estacionária de cooperadores) em função de T (tentação), ρ_0 (proporção inicial de cooperadores) e z (conectividade do sistema) traçado como uma superfície. Nesta simulação $T = 1,00$.

4.3.2 Regime estacionário: Estratégia Evolucionária Pavloviana

Para a EEP, o ganho de dois desertores ao jogarem entre si, é negativo, o que já seria suficiente para que ambos mudassem seus estados, mas eles ainda podem explorar os cooperadores. Se não há cooperadores o suficiente para tornar seus ganhos positivos, eles mudam para cooperadores, fazendo emergir a cooperação.

As Figs. de 4.39 a 4.40 mostram as superfícies de ρ_∞ para $z = \{2; 30\}$ par (sem auto-interação) e ímpar (com auto-interação), respectivamente.

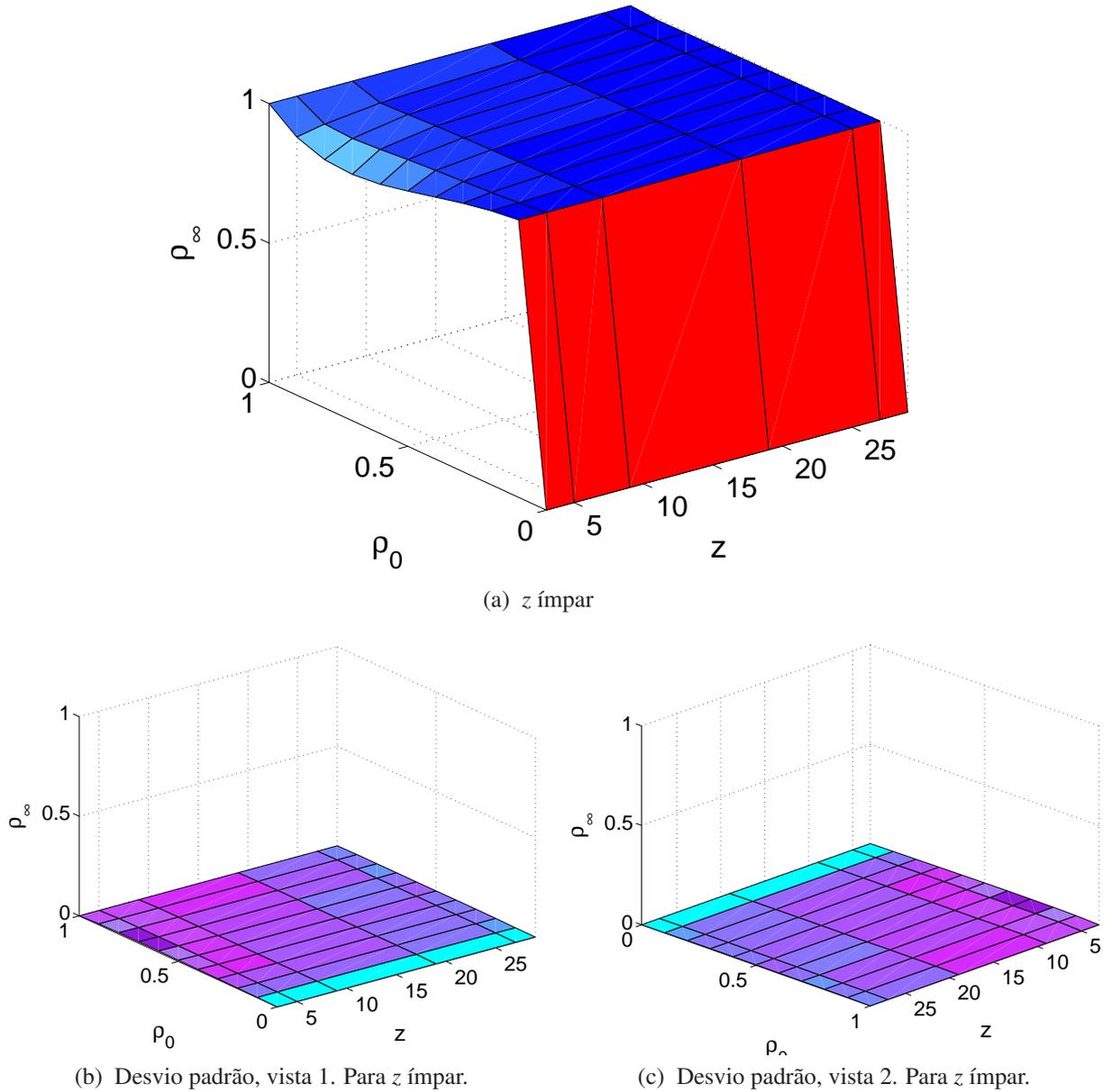


Figura 4.37: Diagrama de fase, ρ_∞ (proporção estacionária de cooperadores) em função de ρ_0 (proporção inicial de cooperadores) e z (conectividade do sistema) traçado como uma superfície. Nesta simulação $T = 1,00$.

As Figs. 4.39a e 4.40a mostram que há a emergência de cooperação para todos os valores de z e de ρ_0 , o pior caso é para $z = 2$ onde $\rho_\infty \sim 0,5$, e aparece a simetria de ρ_∞ em relação à $\rho_0 = 0,5$. Para a EEP, com o aumento de z , ρ_∞ diminui,

A projeção da superfície $\rho_\infty(T = 1; \rho_0; z)$ no plano $\rho_\infty\rho_0$ mostra ρ_∞ em função de ρ_0 para diferentes valores de z . Na Fig. 4.41a, estão as projeções para $z = \{2; 4; 8; 16; 28; 30\}$ e na Fig. 4.41b, para $z = \{3; 5; 9; 19; 27; 29\}$.

Com os gráficos apresentados, fica claro observar que o caso $T = 1$ não é um caso trivial quando os jogadores jogam com mais de um vizinho. Caso o sistema utilize a EED, podem

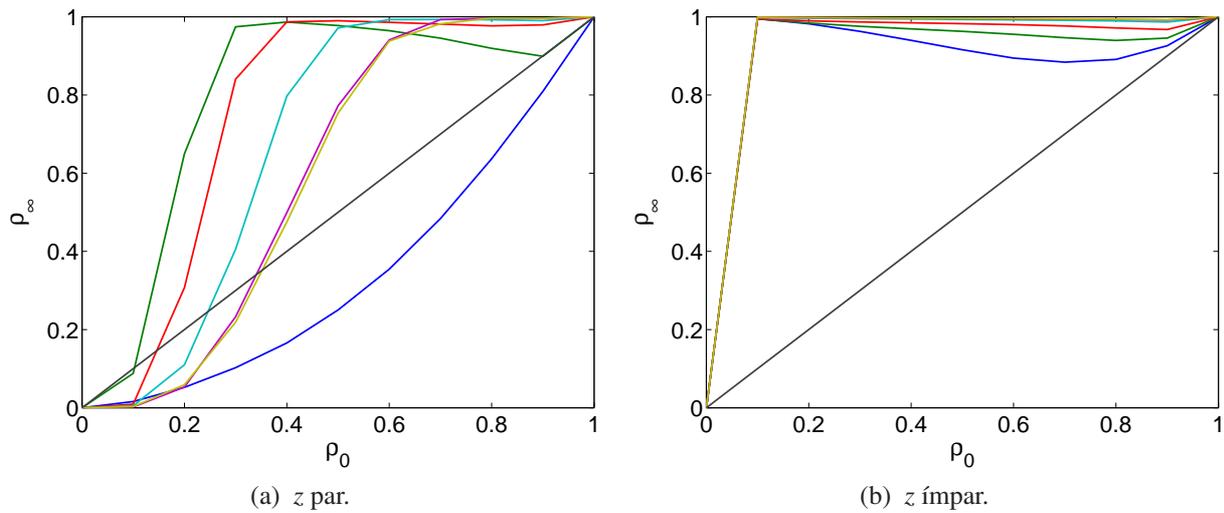


Figura 4.38: Projeção de ρ_∞ (proporção estacionária de cooperadores) no plano $\rho_\infty\rho_0$ para o sistema que utiliza EED. Nesta simulação $T = 1,00$ e (a) Azul: $z = 2$, verde: $z = 4$, vermelho: $z = 8$, cyan: $z = 16$, magenta: $z = 28$, amarelo: $z = 30$, preto: resultado esperado se os jogadores não mudassem seus estados. (b) Azul: $z = 3$, verde: $z = 5$, vermelho: $z = 9$, cyan: $z = 19$, magenta: $z = 27$, amarelo: $z = 29$, preto: resultado esperado se os jogadores não mudassem seus estados.

surgir as fases: cooperadora, desertora e caótica. Com esta estratégia o aumento de z mantém a cooperação ($\rho_\infty \sim 1$) na região para $\rho > 0,5$ para z par e em $\rho > 0$ para z ímpar, e utilizando a EEP quando z aumenta $\rho_\infty(T = 1; \rho; z \gg 1)$, que é converge para uma forma para z par e outra para ímpar.

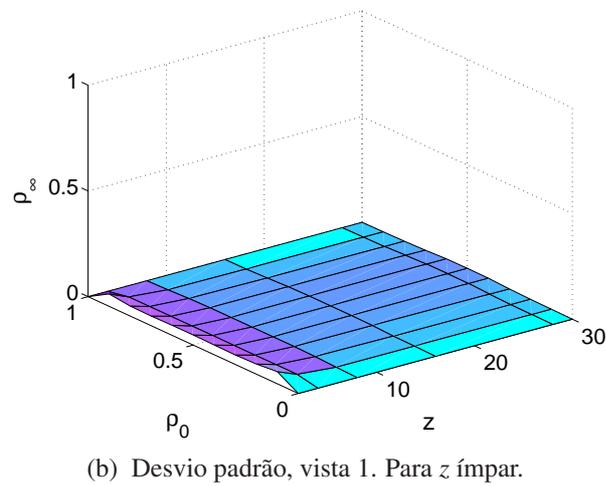
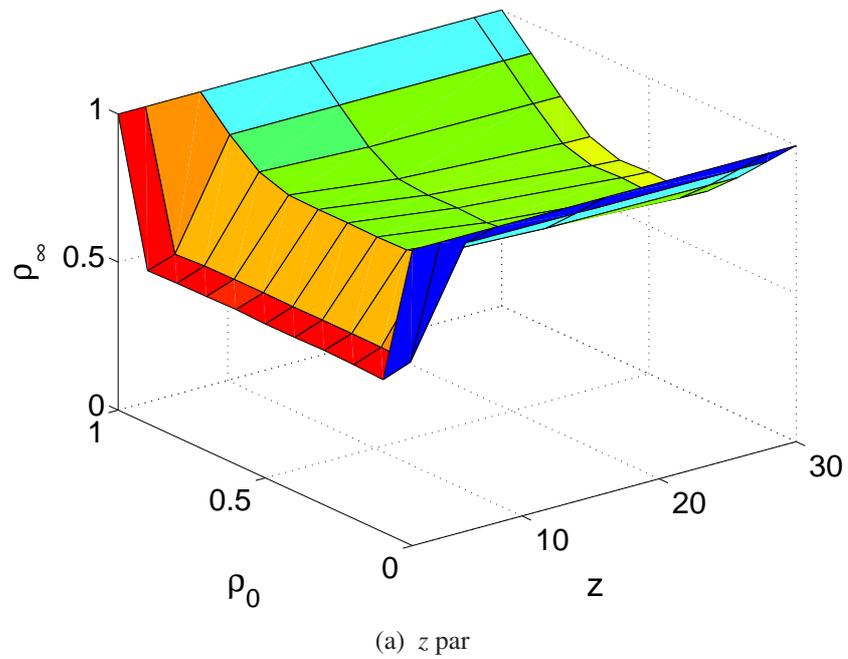


Figura 4.39: Diagrama de fase, ρ_∞ (proporção estacionária de cooperadores) em função de T (tentação), ρ_0 (proporção inicial de cooperadores) e z (conectividade do sistema) traçado como uma superfície. Nesta simulação $T = 1$.

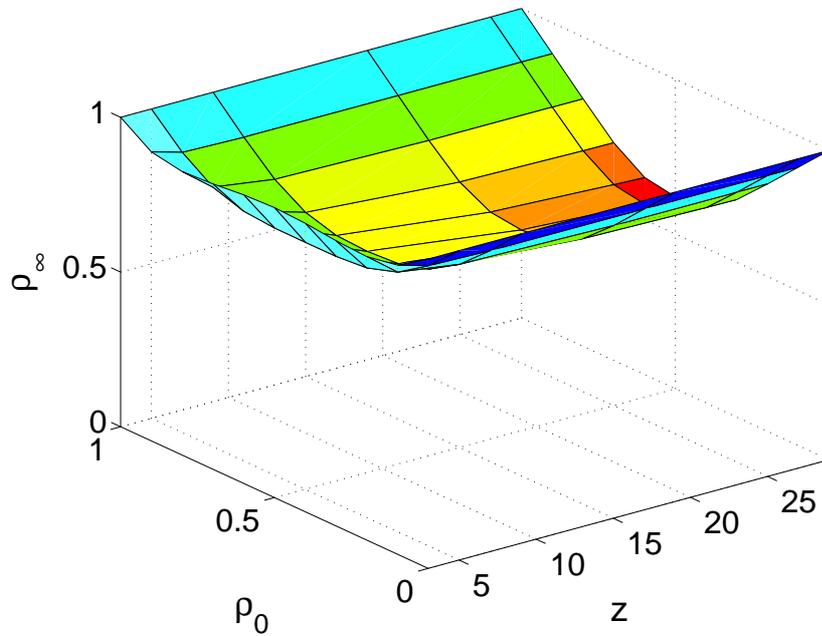
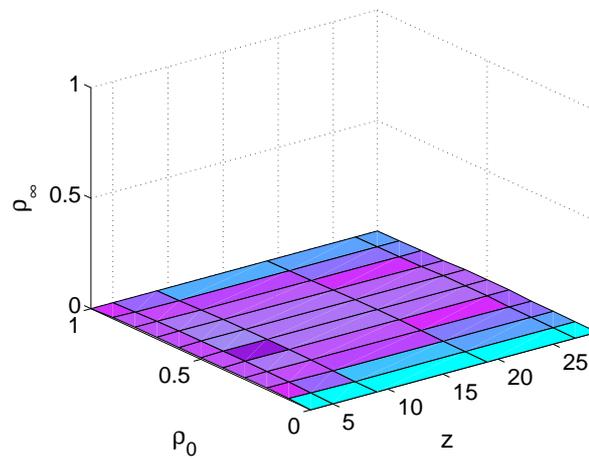
(a) z ímpar(b) Desvio padrão, vista 1. Para z ímpar.

Figura 4.40: Diagrama de fase, ρ_∞ (proporção estacionária de cooperadores) em função de T (tentação), ρ_0 (proporção inicial de cooperadores) e z (conectividade do sistema) traçado como uma superfície. Nesta simulação $T = 1$.

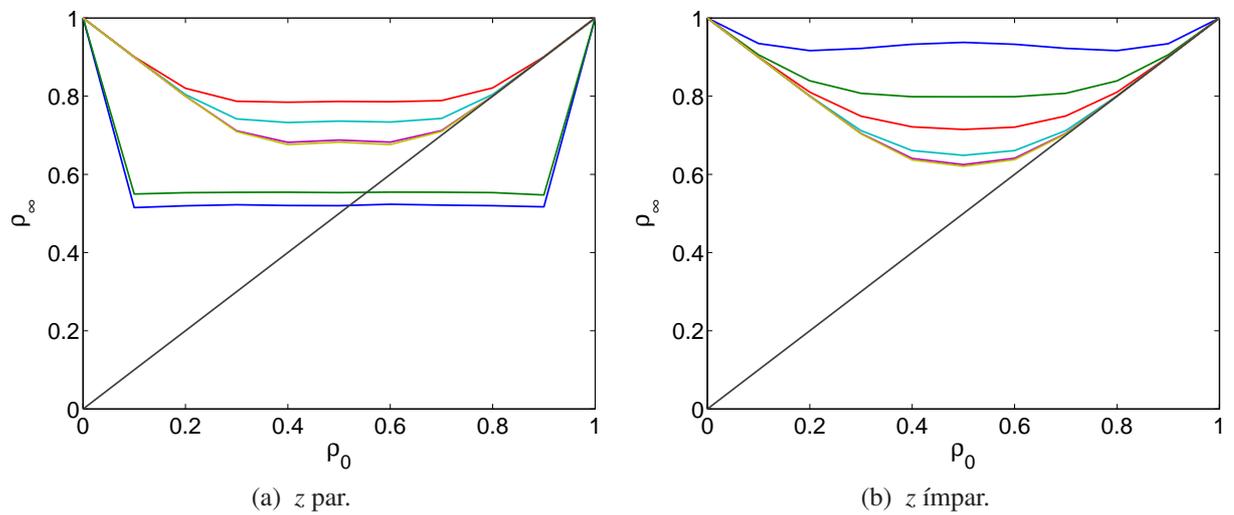


Figura 4.41: Projeção de ρ_∞ (proporção estacionária de cooperadores) no plano $\rho_\infty\rho_0$ para o sistema que utiliza a EEP. Nesta simulação $T = 1,00$ e (a) Azul: $z = 2$, verde: $z = 4$, vermelho: $z = 8$, cyan: $z = 16$, magenta: $z = 28$, amarelo: $z = 30$, preto: resultado esperado se os jogadores não mudassem seus estados. (b) Azul: $z = 3$, verde: $z = 5$, vermelho: $z = 9$, cyan: $z = 19$, magenta: $z = 27$, amarelo: $z = 29$, preto: resultado esperado se os jogadores não mudassem seus estados.

5 *Conclusões e Perspectivas*

Nosso trabalho esteve focado na exploração do DP com os seguintes objetivos: compreensão das interações entre os jogadores, exploração do espaço de parâmetros e observação das mudanças decorrentes do uso de diferentes estratégias. Para isso, utilizamos uma rede unidimensional com conectividade variável, onde cada célula é um jogador que joga o DP com seus vizinhos e atualiza seus estados seguindo a EED ou a EEP. Nessas condições fizemos a varredura do espaço de parâmetros do sistema.

No Capítulo 2 fizemos uma breve revisão sobre a Teoria dos Jogos e apresentamos os conceitos necessários para a compreensão dos jogos. Em seguida, explicamos o Dilema do Prisioneiro e exploramos as suas características, mostrando o estágio atual do estudo desse tema e suas vertentes.

No Capítulo 3 explicamos o modelo computacional que utilizamos em nossas simulações numéricas e as estratégias Estratégia Evolucionária Darwiniana e Pavloviana. Mostramos o autômato celular unidimensional e a composição das vizinhanças de cada jogador. Calculamos seus ganhos e a dinâmica de atualização dos estados dos jogadores, de acordo com a estratégia empregada.

Obtivemos o valor analítico de T_c para a EEP, o que até onde sabemos este valor ainda não havia sido calculado, os resultados numéricos confirmaram a existência das transições de fase previstas analiticamente. Ressaltamos que desconhecemos outros trabalhos que tenham utilizado o autômato celular unidimensional com vizinhança variável e qualquer estudo exaustivo do espaço de parâmetros.

No Capítulo 4 mostramos todos os resultados obtidos para nosso modelo computacional. A geometria unidimensional possibilita a visualização do histórico da evolução temporal das interações no sistema em uma imagem bidimensional, o que não é possível em uma rede quadrada, por exemplo. Esta geometria traz também as seguintes vantagens:

- sua implementação computacional é mais simples;

- diminui os efeitos de borda, pois só possui duas bordas, e, portanto menos jogadores com vizinhança reduzida do que existem em outras dimensionalidades;
- o tempo necessário para executar as simulações numéricas é menor.

Para validar nossos resultados verificamos sua equivalência com os trabalhos pioneiros de Nowak & May [1, 2] sobre o DP em redes bidimensionais. Os resultados apresentam as mesmas propriedades observadas por eles: existência das fases cooperadora, desertora e caótica, dependentes do valor da tentação de desertar; e os valores de ρ_∞ são similares aos deles.

Também confirmamos os resultados apresentados no trabalho de Soares & Martinez [28]: o regime transiente do sistema é diferente se há a inclusão da auto-interação de quando esta está ausente. Observamos que além do regime transiente, a auto-interação também pode alterar o regime estacionário em outras regiões do espaço de parâmetros. Em nosso sistema, a convergência da proporção de cooperadores para o regime estacionário é mais rápida do que a de redes regulares arbitrárias. E não ocorre a extrapolação do valor estacionário durante o regime transiente observada nas redes de maior dimensionalidade.

A utilização da rede unidimensional nos possibilitou armazenar a evolução temporal dos estados dos jogadores, e assim visualizar de modo simples a formação de padrões nos agrupamentos de cooperadores/desertores. A formação dos padrões dos agrupamentos de cooperadores/desertores e suas características são determinadas pelo(a):

- estratégia que o sistema adota (EED ou EEP);
- conjunto de parâmetros do sistema: T , ρ_0 e z ;
- configuração inicial dos cooperadores.

Estes padrões são os *fingers* (lisos, rugosos, complexos), *gliders* (contínuos e descontínuos) e as interações entres eles. Estes padrões podem apresentar periodicidade e simetria em relação ao jogador que está no centro do agrupamento. A periodicidade e as interações entre eles explicam simplesmente as oscilações em $\rho_c(t, T, \rho_0, z)$.

A tentação T e o tamanho da vizinhança z atuam em conjunto na definição da inclinação dos lados dos triângulos e dos *gliders* e se os *gliders* serão contínuos ou descontínuos. A direção de propagação dos *gliders*, no sistema que utiliza a EED, é definida pelo modo como é feita a atualização dos estados dos jogadores, e com a EEP, pode ter qualquer direção, pois depende apenas da configuração da vizinhança daquele *glider*.

O tamanho dos padrões triangulares depende do tamanho do seu agrupamento inicial e dos parâmetros do sistema. Calculamos os tamanhos máximo e mínimo dos agrupamentos de desertores e cooperadores para a EEP. Lembramos que os padrões dos agrupamentos de cooperadores/desertores obtidos no autômato celular unidimensional jogando o DP pertencem às classes 1, 2, 3 e 4 das classes qualitativas definidas por Wolfram [26].

No sistema que utiliza a EED, os agrupamentos de cooperadores e desertores têm toda sua dinâmica de mudança de estados concentrada nas fronteiras entre os agrupamentos. Ali, os ganhos dos jogadores são diferentes e como eles copiam o estado daquele jogador que obteve o maior ganho em sua vizinhança, podem mudar de estado [24]. E se utiliza a EEP, os jogadores mudam seus estados independentemente do lugar que ocupam no agrupamento, basta que obtenham um ganho negativo na rodada. A compreensão destas interações elucidada o processo de invasão, dos agrupamentos de cooperadores pelos desertores e *vice-versa*. No sistema que utiliza a EED, esse processo tem início nos pontos extremos dos agrupamentos de cooperadores/desertores.

A exploração exaustiva mostrou as regiões em que ocorrem, com a EED, as fases cooperadora, desertora e caótica. A fase cooperadora se caracteriza pela maioria dos jogadores no estado cooperador, a desertora, no estado desertor e a caótica, pela sensibilidade do regime estacionário à configuração inicial dos cooperadores na rede.

Utilizando a EED, o aumento de z causa o aumento da fase desertora, e independentemente da presença ou ausência de auto-interação, as regiões que cada fase ocupa no espaço de parâmetros convergem. Com a EEP a fase desertora não aparece, por isso a Tragédia dos Comuns não tem papel importante como na EED. Quando $\rho_\infty \sim 0,5$ e o sistema oscila entre a maioria de cooperadores e desertores no decorrer da evolução temporal, temos o chamado regime *quasi-regular*, e chamamos as regiões que apresentam esse comportamento de fase *quasi-regular*.

Verificamos as transições de fases observadas por Durán & Mulet [20] e as que calculamos para o sistema adotando a EEP, com os resultados numéricos confirmando a existência destas transições. Para a EEP, quando o sistema passa pelos valores de tentação crítica, ele sofre uma alteração no seu valor de ρ_∞ , mas essas transições são bem definidas. Já na EED, as regiões de T próximas a T_c apresentam a fase caótica, então, além da variação em ρ_∞ há o desvio-padrão considerável, $SD \sim 0,5$.

A exploração exaustiva também apresentou um resultado surpreendente: para $T = 1$, o sistema não é estático e trivial como afirmaram Durán & Mulet [20]. Ele apresentou as mesmas características observadas para os demais valores de tentação, isso porque o ganho total do jogador depende de todas as suas interações e não apenas do valor do ganho por interação.

Para trabalhos futuros utilizando o autômato celular unidimensional com z variável, podemos explorar:

- para o sistema utilizando a EEP, a região de $T > 2$ para observar as transições de fase mostradas pelo nosso cálculo analítico da tentação crítica;
- $\rho_{total} \neq 1$, a rede não preenchida totalmente para estudar o efeito de agrupamentos isolados, como se fossem membros de uma ilha que interagem com os de outras ilhas;
- acrescentar mobilidade aos jogadores;
- adição de novas estratégias;
- coevolução de estratégias, ou seja, competição de jogadores com diferentes estratégias.

Comparando os resultados obtidos com a EED e a EEP, concluímos que o ganho da população é maior quando os jogadores se preocupam apenas com o próprio ganho. Se os jogadores copiam a ação adotada pelo jogador que obteve o maior ganho, independentemente de qual é esta ação, eles podem piorar a situação de todo o grupo. Assim, a comparação e conseqüentemente, a cobiça pelo maior resultado, pode causar a ruína de todos. Na situação em que não há como coordenar as jogadas dos jogadores, o melhor seria que todos buscassem ter um ganho positivo, mesmo que este não seja o máximo possível. Desta forma poderiam maximizar o ganho da população com um todo.

***APÊNDICE A – Diagramas de fase para o Dilema
do Prisioneiro no Autômato Celular
utilizando a Estratégia
Evolucionária Darwiniana***

Neste Apêndice apresentamos as superfícies da proporção estacionária de cooperadores para o DP no autômato celular unidimensional que utiliza a EED.

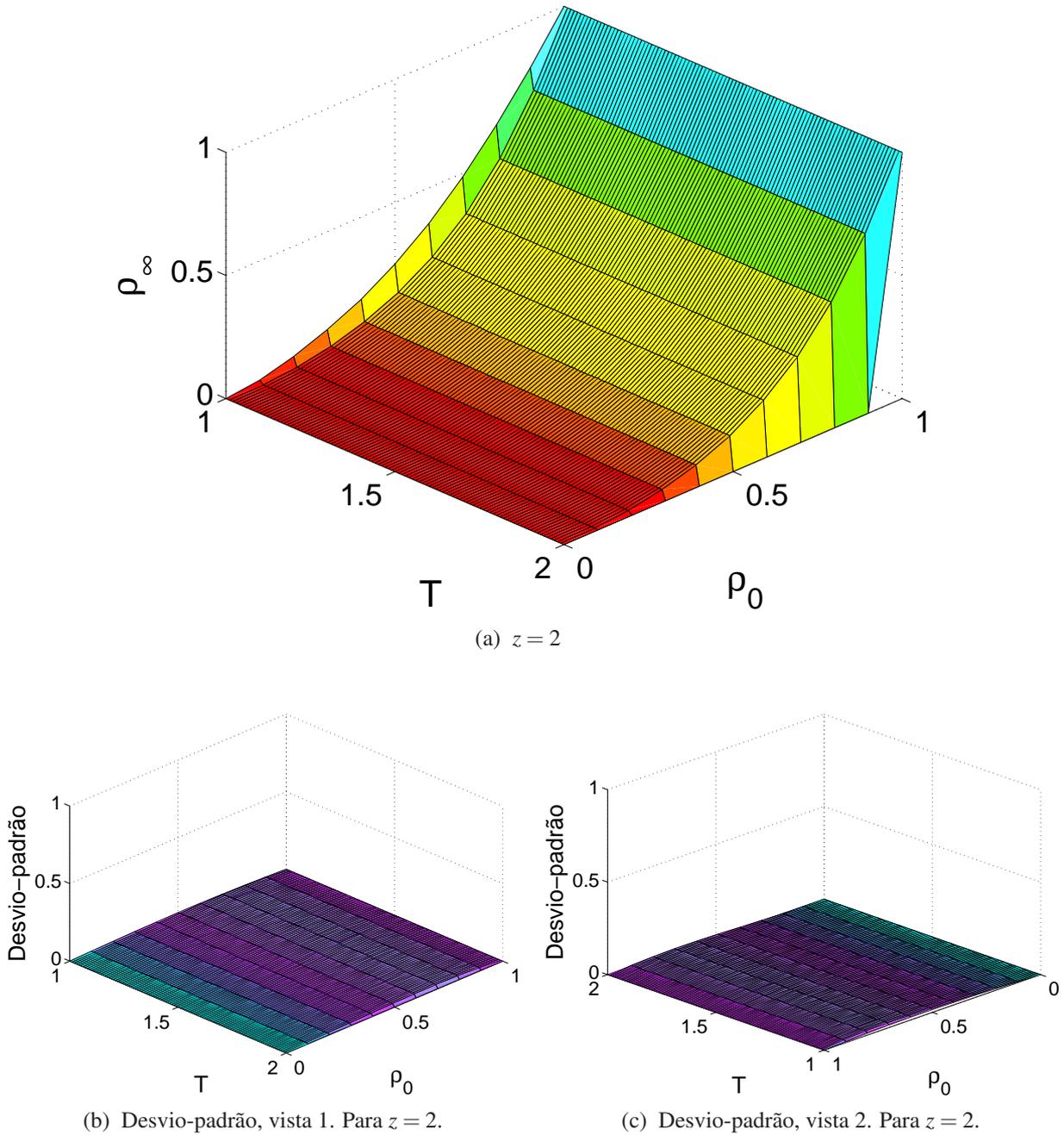
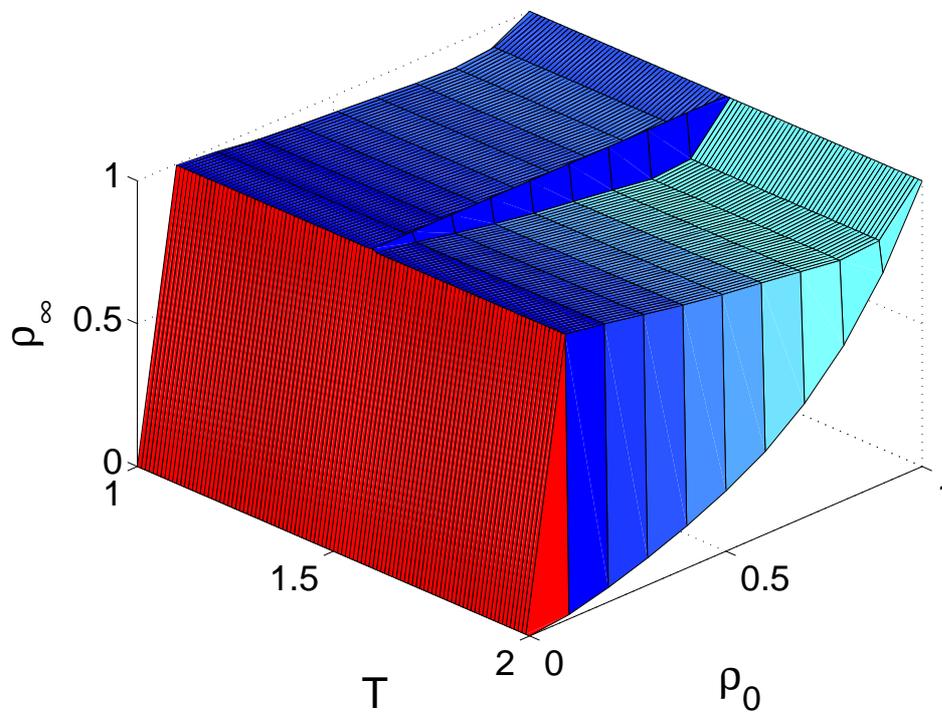
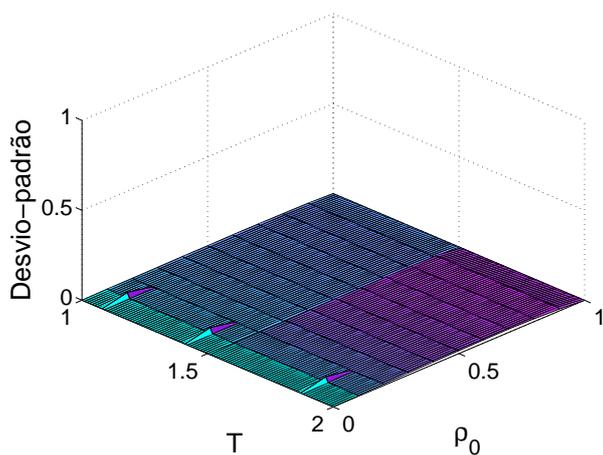


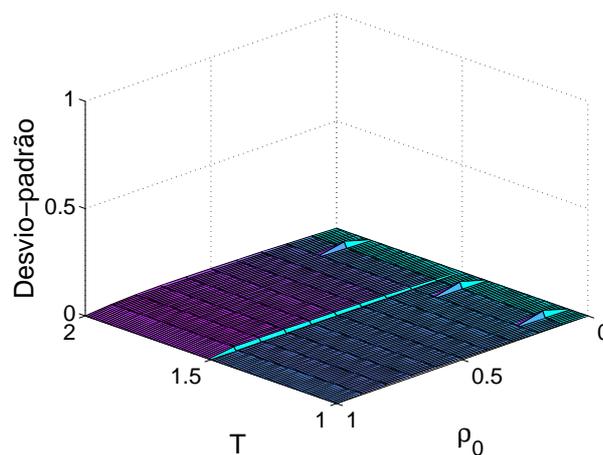
Figura A.1: Diagrama de fase, ρ_∞ (proporção estacionária de cooperadores) em função de T (tentação), ρ_0 (proporção inicial de cooperadores) e T (tentação) traçado como superfície. Nesta simulação $z = 2$ (sem auto-interação).



(a) $z = 3$



(b) Desvio-padrão, vista 1. Para $z = 3$.



(c) Desvio-padrão, vista 2. Para $z = 3$.

Figura A.2: Diagrama de fase, ρ_∞ (proporção estacionária de cooperadores) em função de T (tentação), ρ_0 (proporção inicial de cooperadores) e T (tentação) traçado como superfície. Nesta simulação $z = 3$ (com auto-interação).

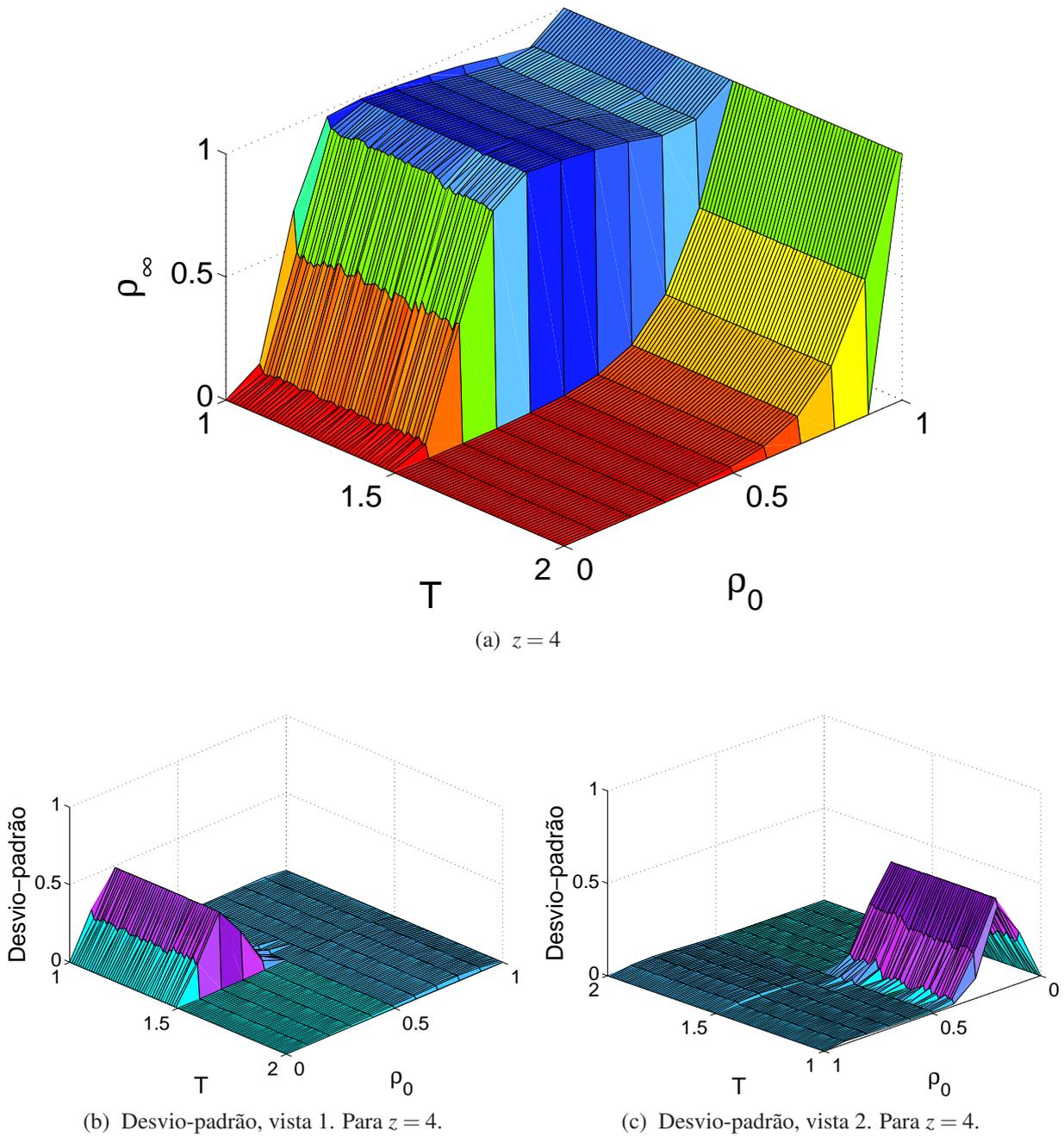
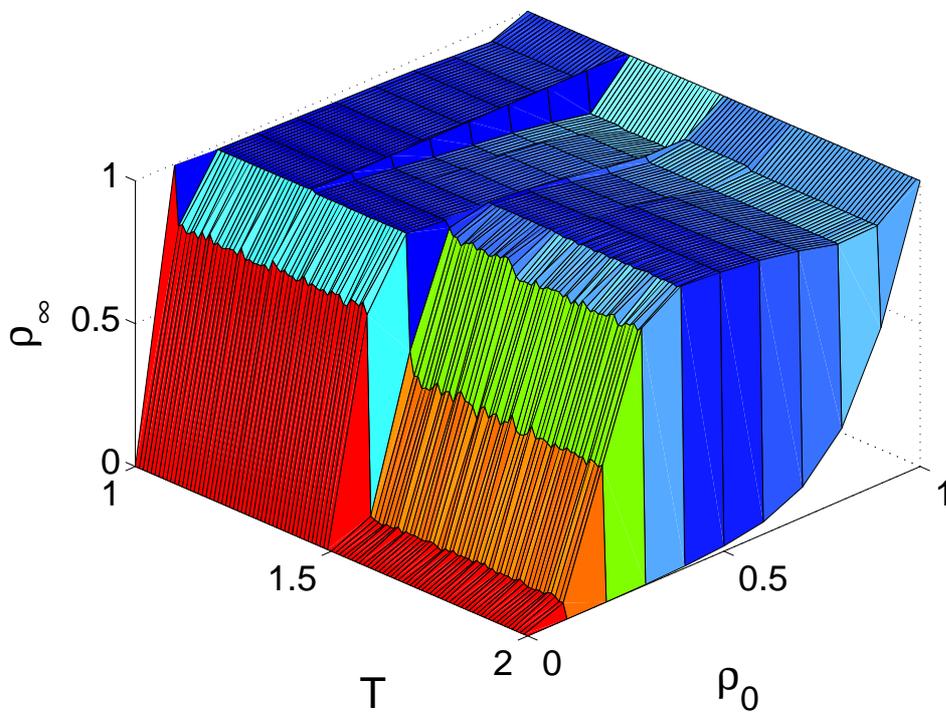
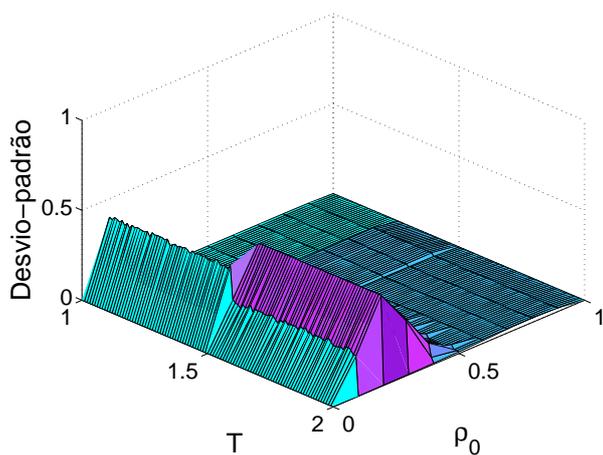


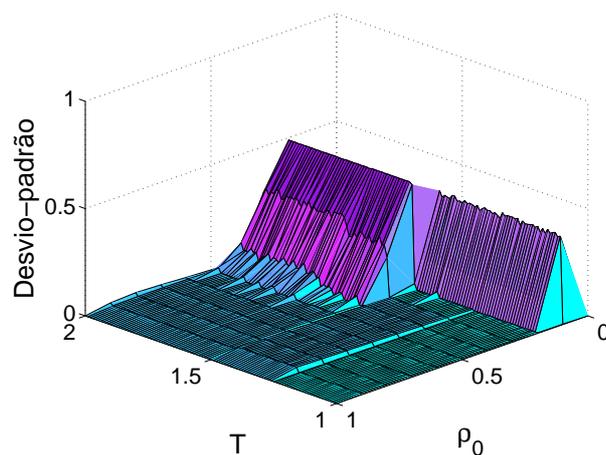
Figura A.3: Diagrama de fase, ρ_∞ (proporção estacionária de cooperadores) em função de T (tentação), ρ_0 (proporção inicial de cooperadores) e T (tentação) traçado como superfície. Nesta simulação $z = 4$ (sem auto-interação).



(a) $z = 5$



(b) Desvio-padrão, vista 1. Para $z = 5$.



(c) Desvio-padrão, vista 2. Para $z = 5$.

Figura A.4: Diagrama de fase, ρ_∞ (proporção estacionária de cooperadores) em função de T (tentação), ρ_0 (proporção inicial de cooperadores) e T (tentação) traçado como superfície. Nesta simulação $z = 5$ (com auto-interação).

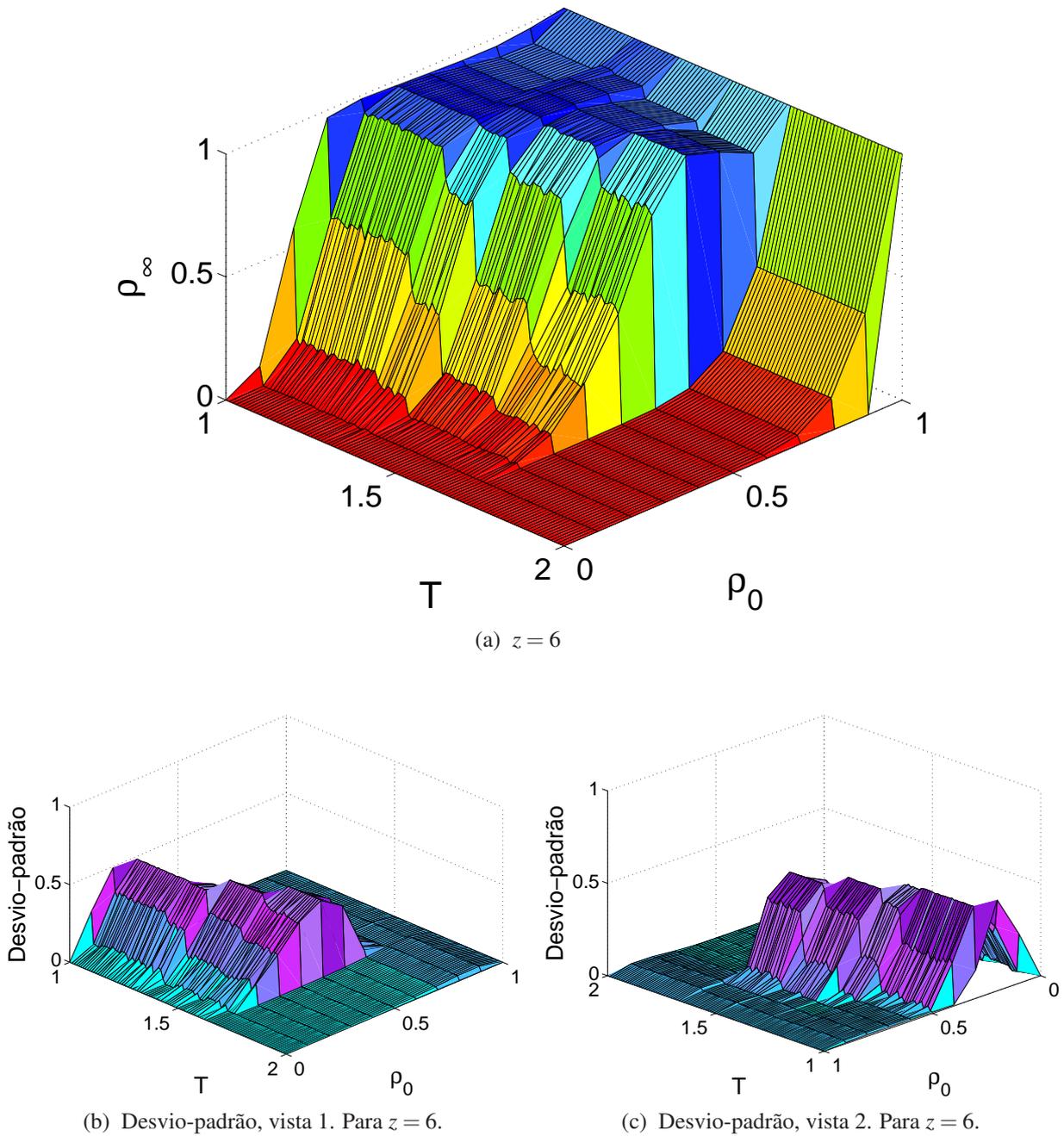
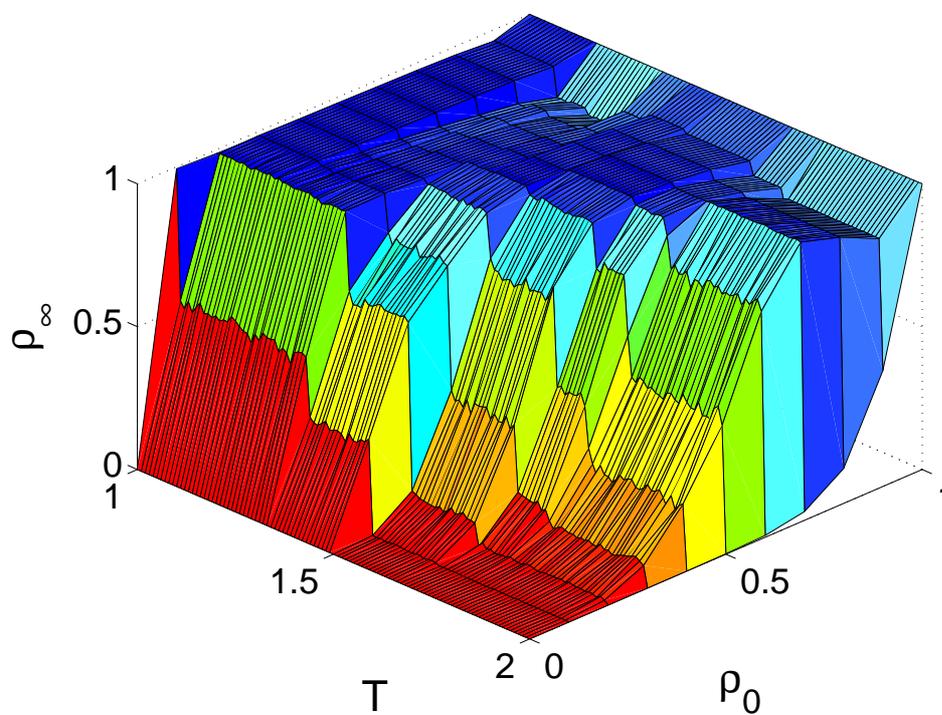
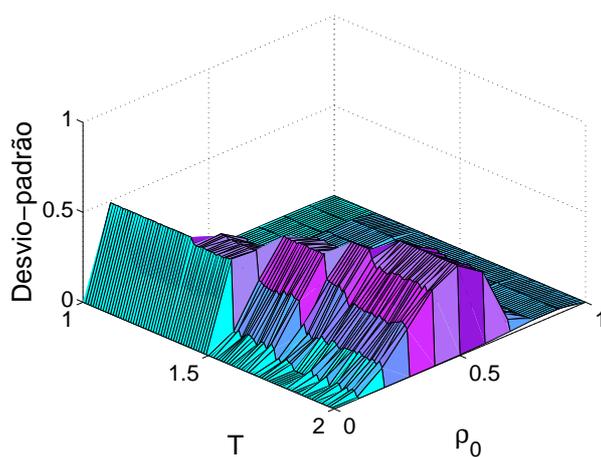


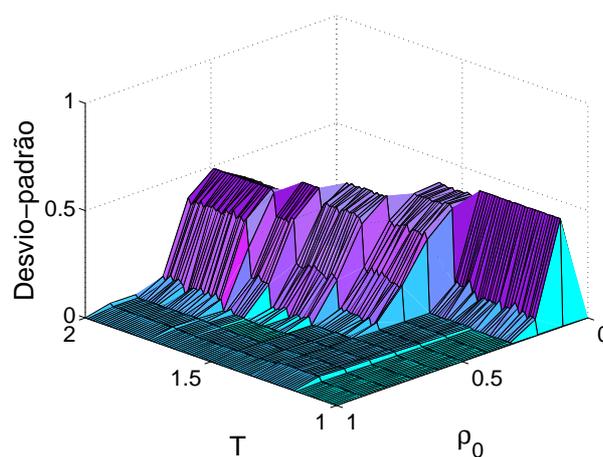
Figura A.5: Diagrama de fase, ρ_∞ (proporção estacionária de cooperadores) em função de T (tentação), ρ_0 (proporção inicial de cooperadores) e T (tentação) traçado como superfície. Nesta simulação $z = 6$ (sem auto-interação).



(a) $z = 7$



(b) Desvio-padrão, vista 1. Para $z = 7$.



(c) Desvio-padrão, vista 2. Para $z = 7$.

Figura A.6: Diagrama de fase, ρ_∞ (proporção estacionária de cooperadores) em função de T (tentação), ρ_0 (proporção inicial de cooperadores) e T (tentação) traçado como superfície. Nesta simulação $z = 7$ (com auto-interação).

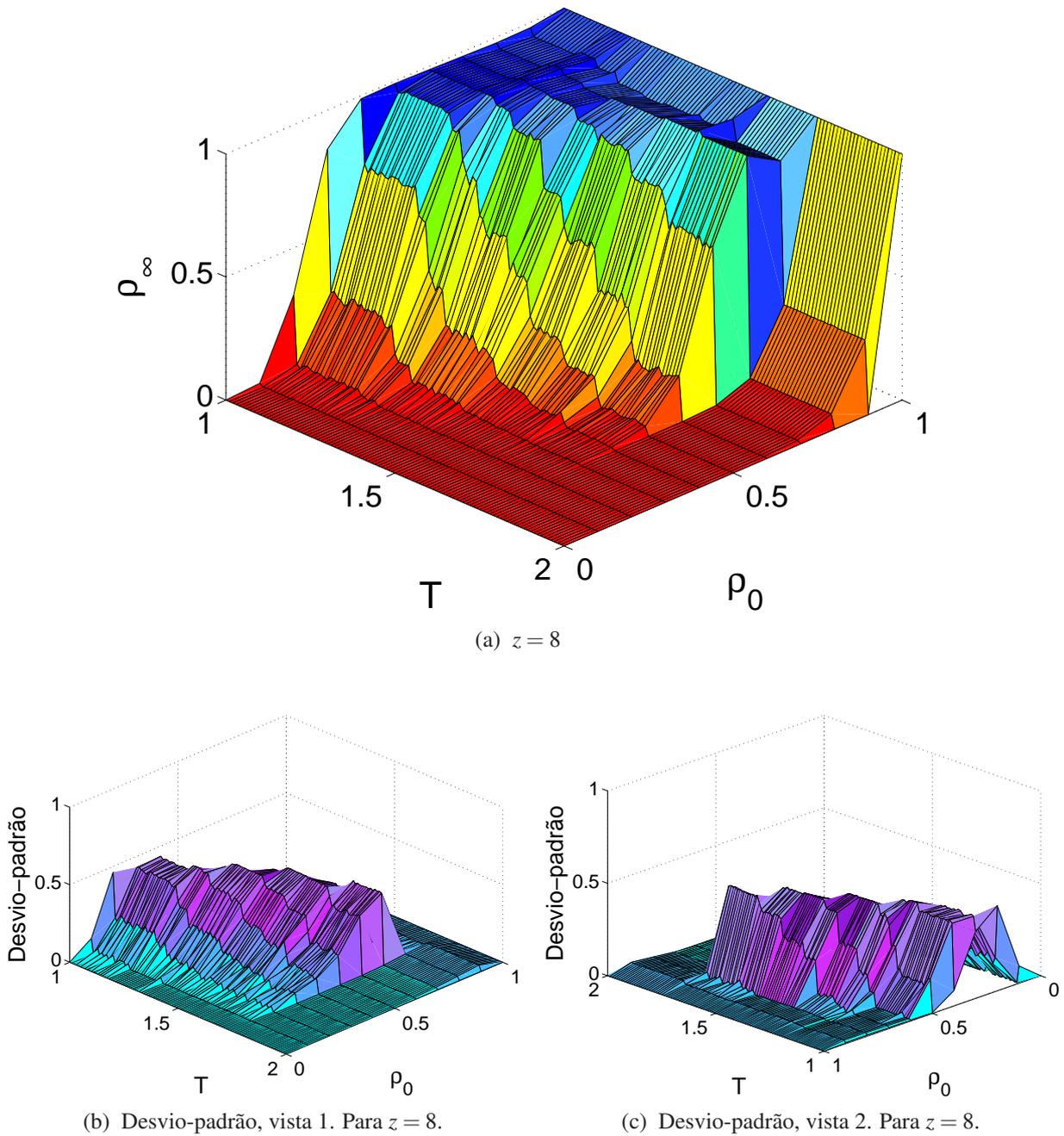
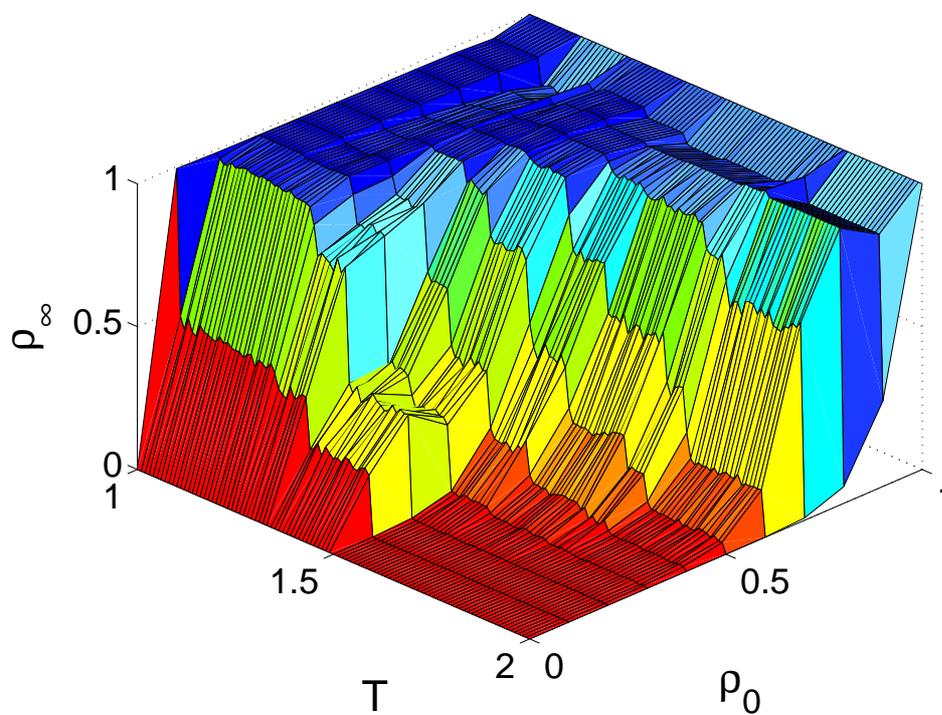
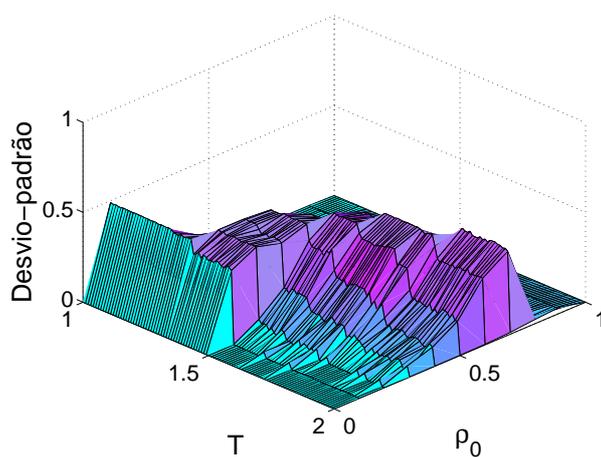


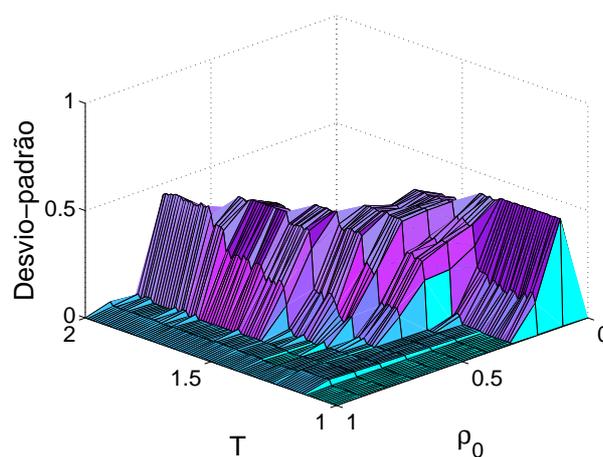
Figura A.7: Diagrama de fase, ρ_∞ (proporção estacionária de cooperadores) em função de T (tentação), ρ_0 (proporção inicial de cooperadores) e T (tentação) traçado como superfície. Nesta simulação $z = 8$ (sem auto-interação).



(a) $z = 9$



(b) Desvio-padrão, vista 1. Para $z = 9$.



(c) Desvio-padrão, vista 2. Para $z = 9$.

Figura A.8: Diagrama de fase, ρ_∞ (proporção estacionária de cooperadores) em função de T (tentação), ρ_0 (proporção inicial de cooperadores) e T (tentação) traçado como superfície. Nesta simulação $z = 9$ (com auto-interação).

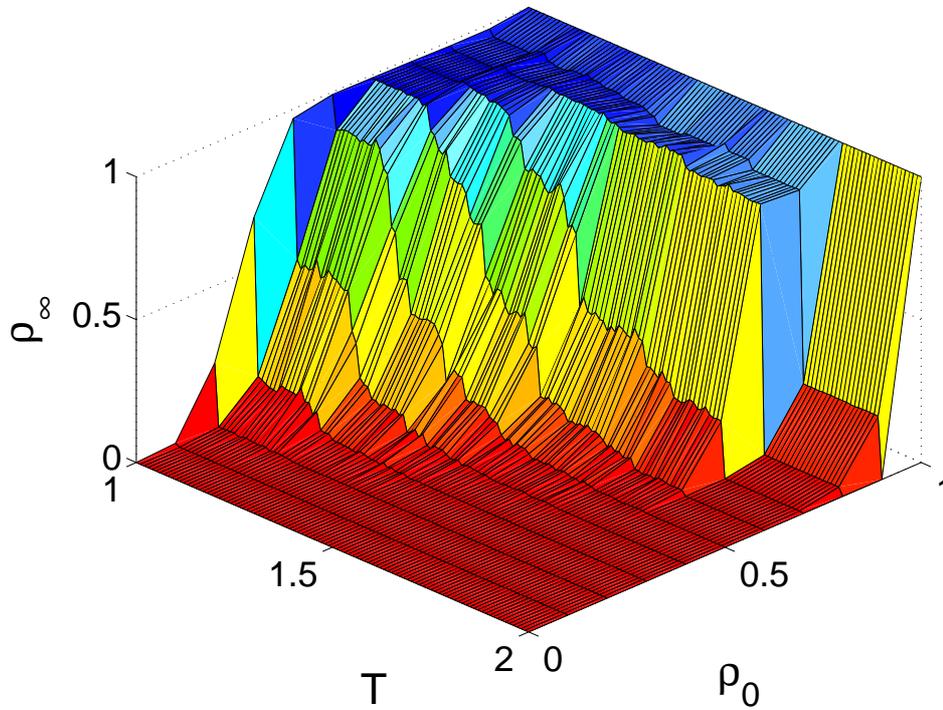
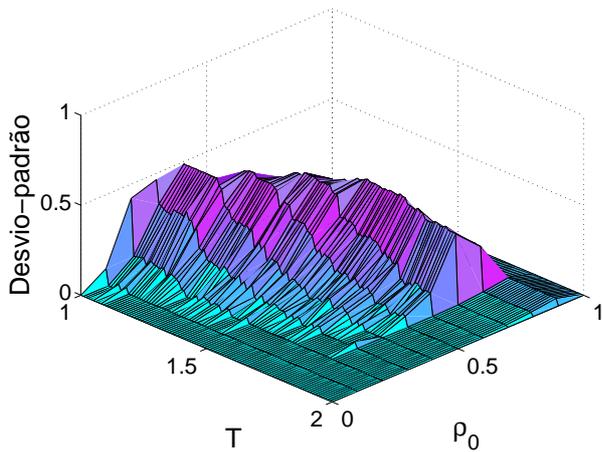
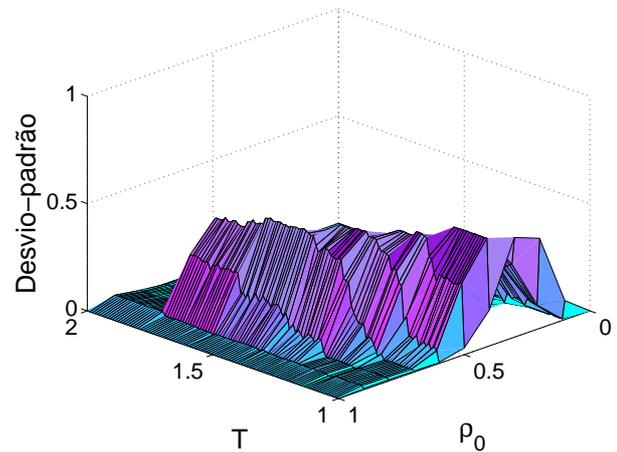
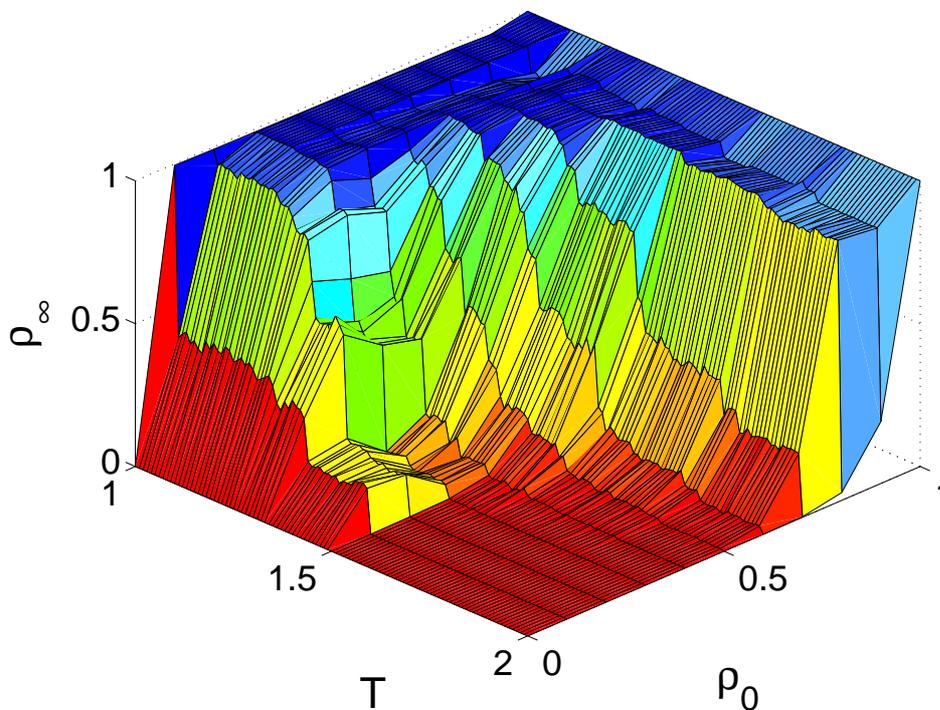
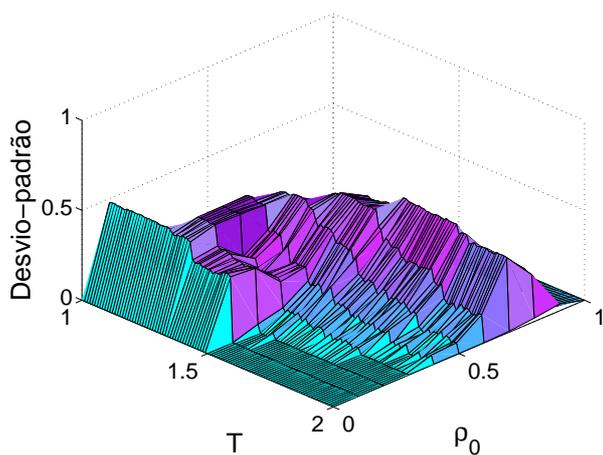
(a) $z = 10$ (b) Desvio-padrão, vista 1. Para $z = 10$.(c) Desvio-padrão, vista 2. Para $z = 10$.

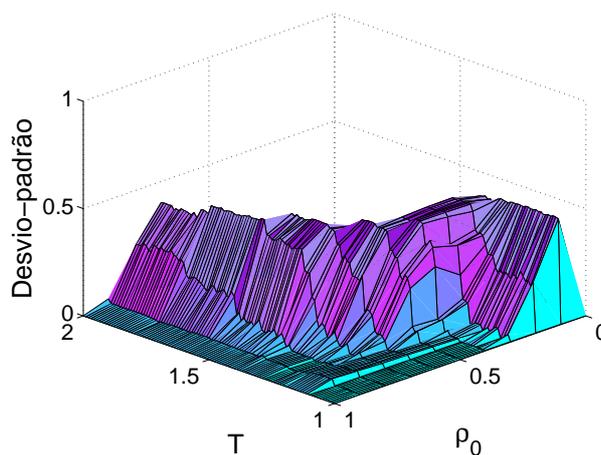
Figura A.9: Diagrama de fase, ρ_∞ (proporção estacionária de cooperadores) em função de T (tentação), ρ_0 (proporção inicial de cooperadores) e T (tentação) traçado como superfície. Nesta simulação $z = 10$ (sem auto-interação).



(a) $z = 11$



(b) Desvio-padrão, vista 1. Para $z = 11$.



(c) Desvio-padrão, vista 2. Para $z = 11$.

Figura A.10: Diagrama de fase, ρ_∞ (proporção estacionária de cooperadores) em função de T (tentação), ρ_0 (proporção inicial de cooperadores) e T (tentação) traçado como superfície. Nesta simulação $z = 11$ (com auto-interação).

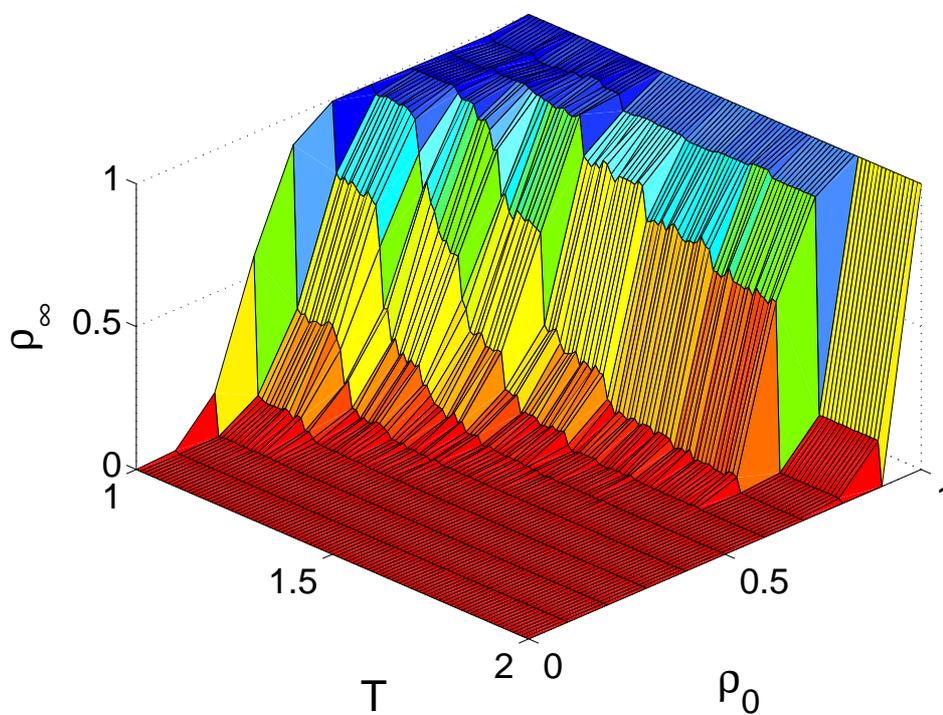
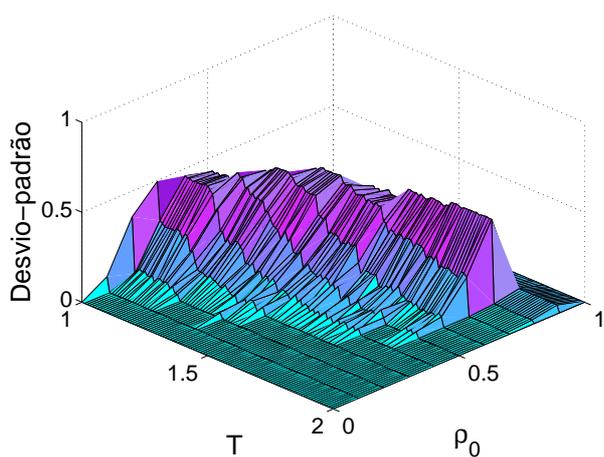
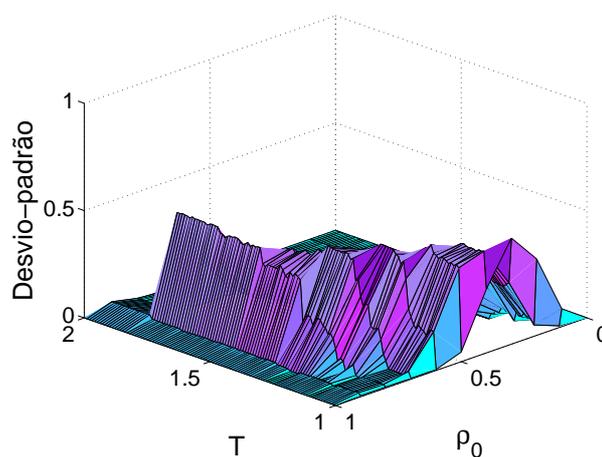
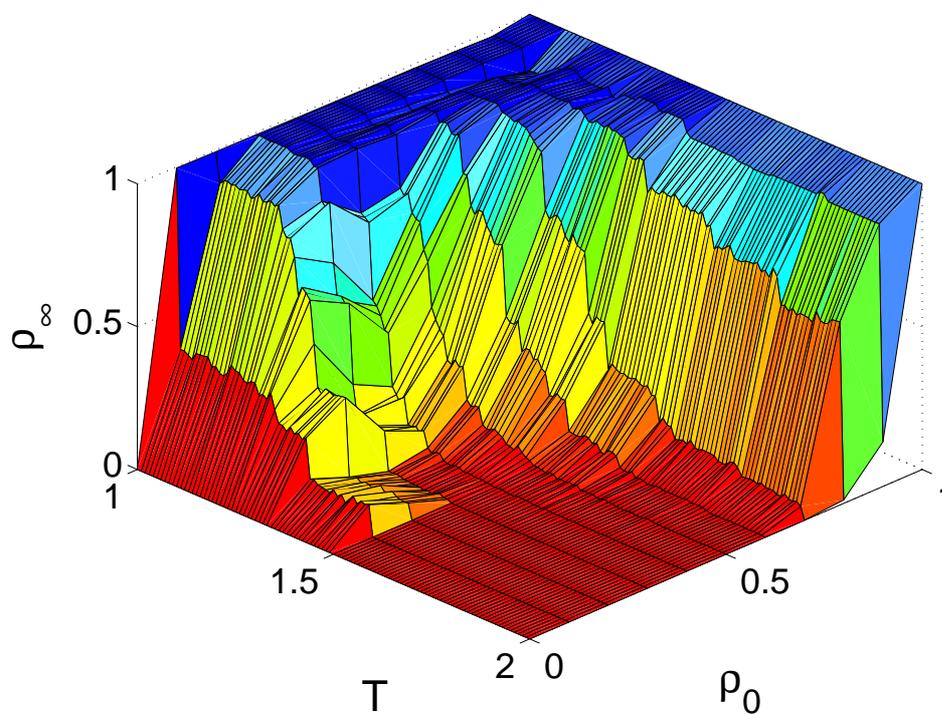
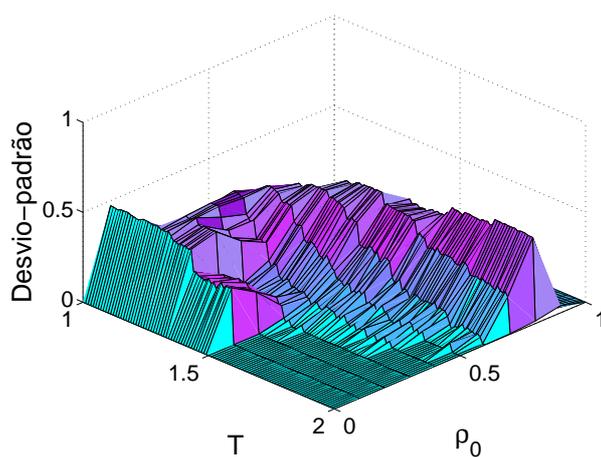
(a) $z = 12$ (b) Desvio-padrão, vista 1. Para $z = 12$.(c) Desvio-padrão, vista 2. Para $z = 12$.

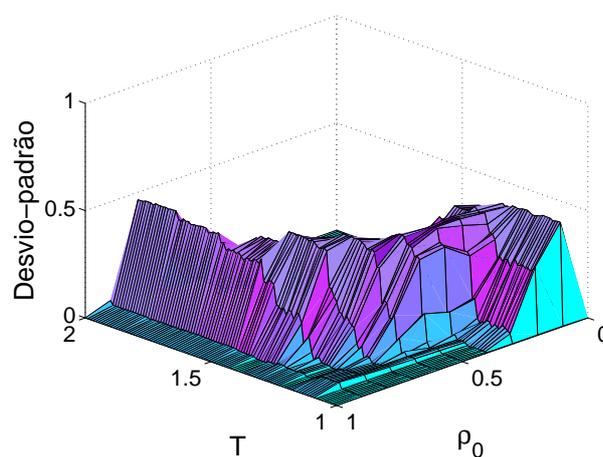
Figura A.11: Diagrama de fase, ρ_∞ (proporção estacionária de cooperadores) em função de T (tentação), ρ_0 (proporção inicial de cooperadores) e T (tentação) traçado como superfície. Nesta simulação $z = 12$ (sem auto-interação).



(a) $z = 13$



(b) Desvio-padrão, vista 1. Para $z = 13$.



(c) Desvio-padrão, vista 2. Para $z = 13$.

Figura A.12: Diagrama de fase, ρ_∞ (proporção estacionária de cooperadores) em função de T (tentação), ρ_0 (proporção inicial de cooperadores) e T (tentação) traçado como superfície. Nesta simulação $z = 13$ (com auto-interação).

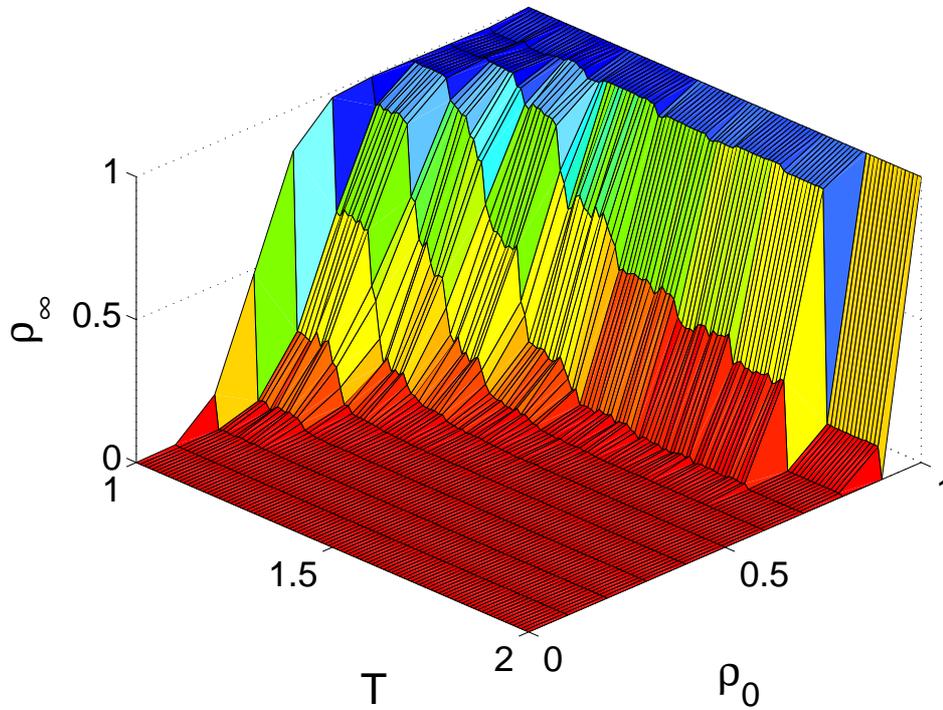
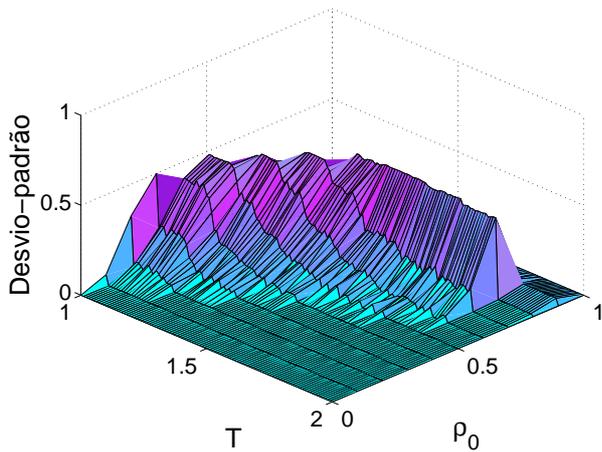
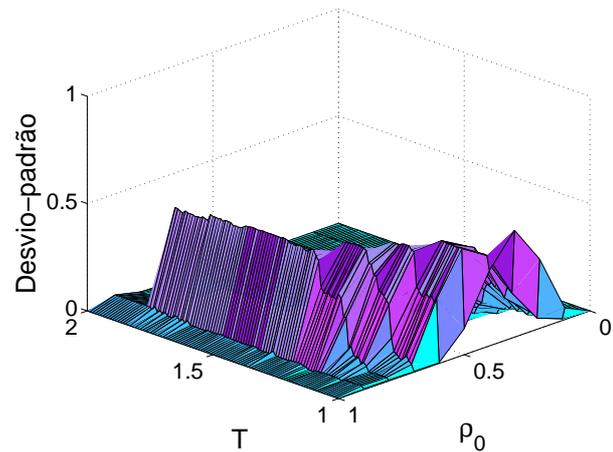
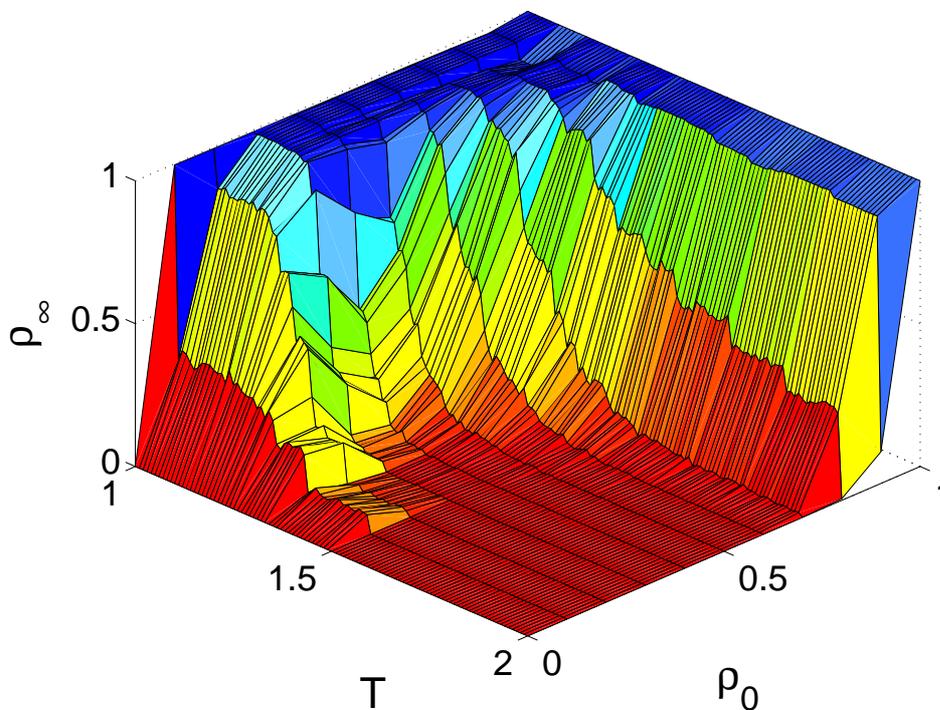
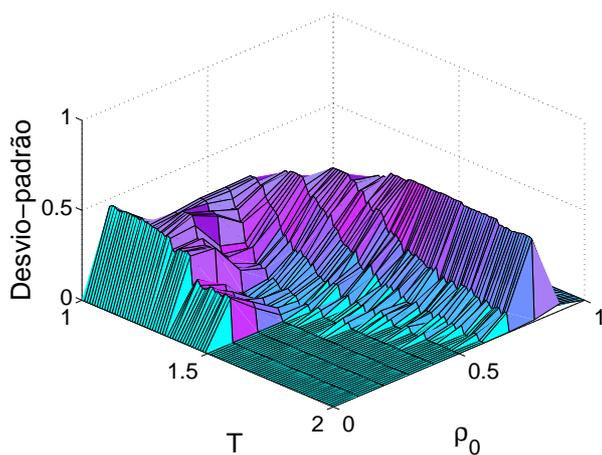
(a) $z = 14$ (b) Desvio-padrão, vista 1. Para $z = 14$.(c) Desvio-padrão, vista 2. Para $z = 14$.

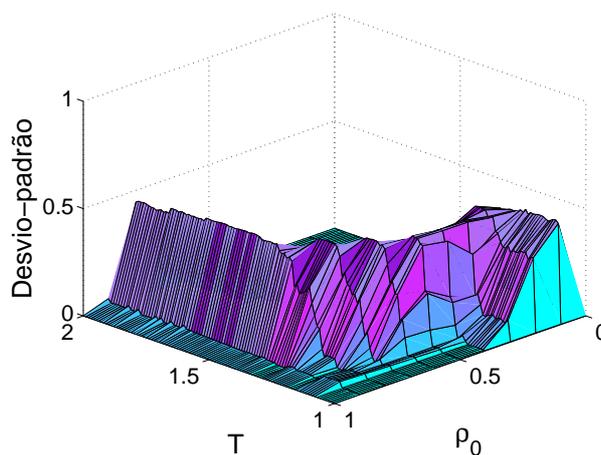
Figura A.13: Diagrama de fase, ρ_∞ (proporção estacionária de cooperadores) em função de T (tentação), ρ_0 (proporção inicial de cooperadores) e T (tentação) traçado como superfície. Nesta simulação $z = 14$ (sem auto-interação).



(a) $z = 15$



(b) Desvio-padrão, vista 1. Para $z = 15$.



(c) Desvio-padrão, vista 2. Para $z = 15$.

Figura A.14: Diagrama de fase, ρ_∞ (proporção estacionária de cooperadores) em função de T (tentação), ρ_0 (proporção inicial de cooperadores) e T (tentação) traçado como superfície. Nesta simulação $z = 15$ (com auto-interação).

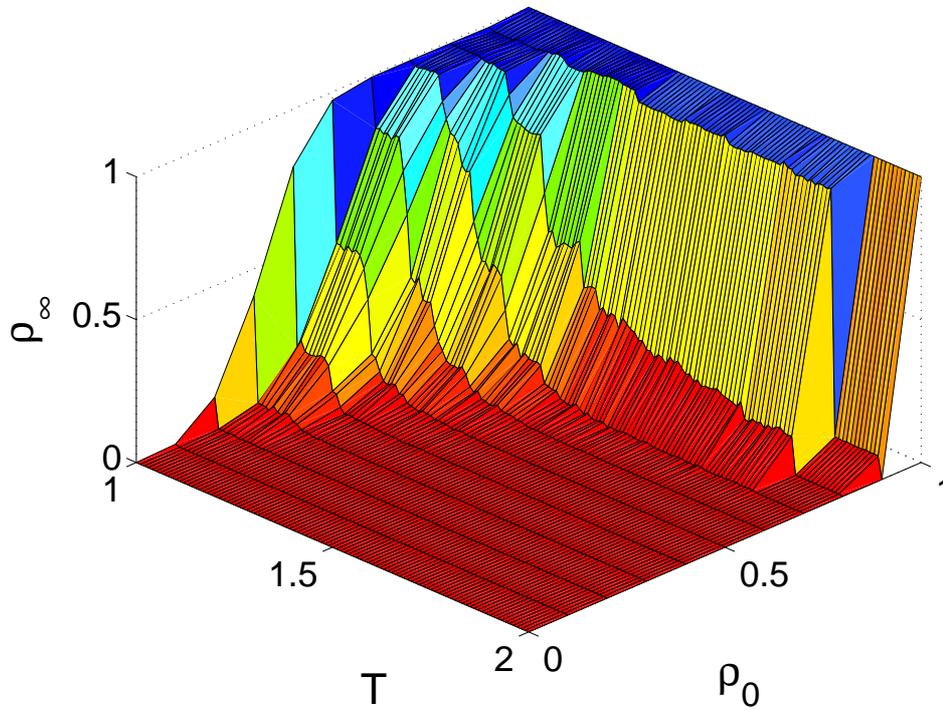
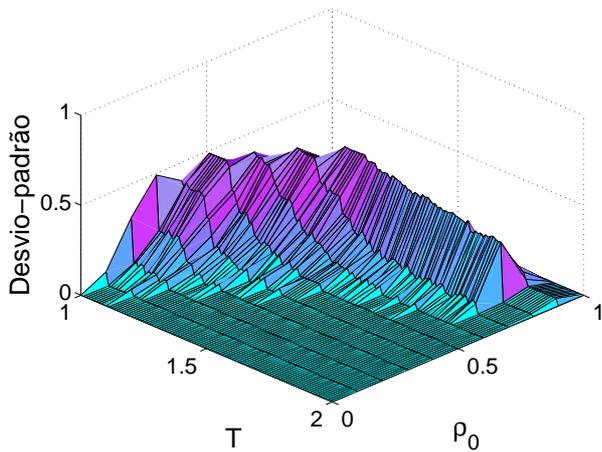
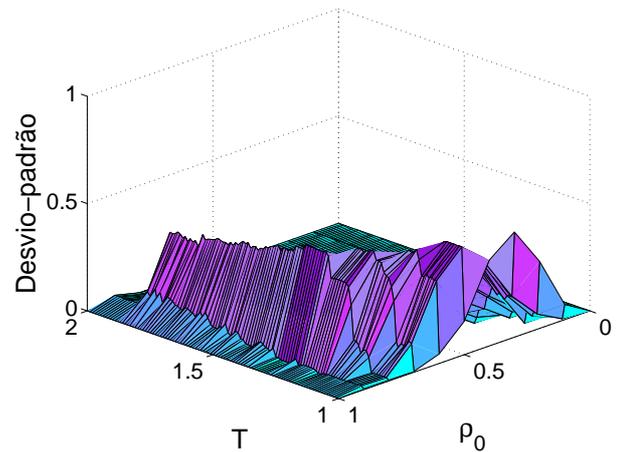
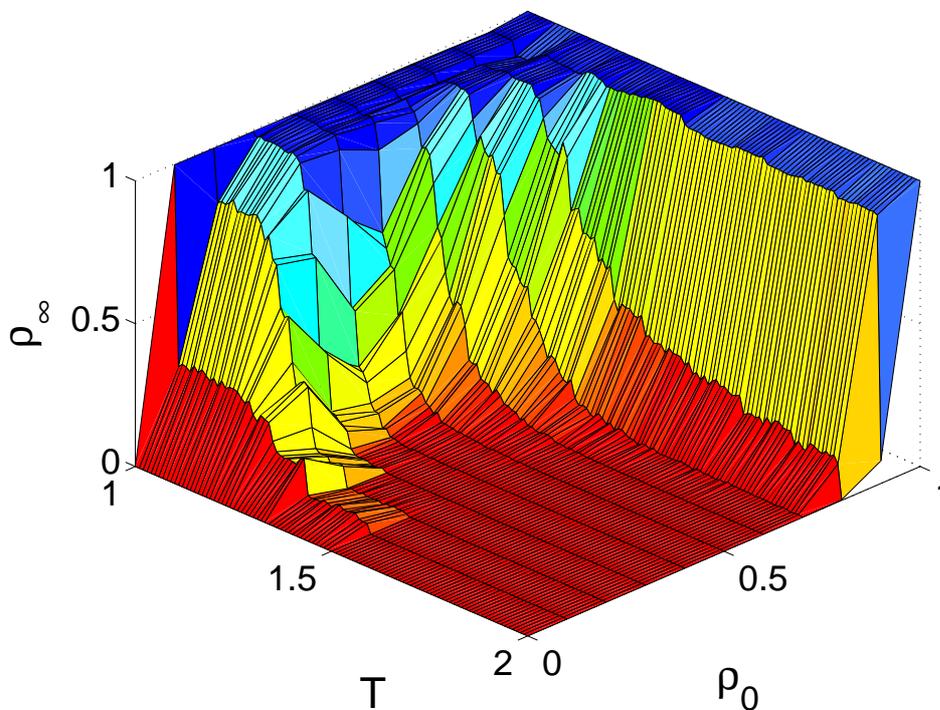
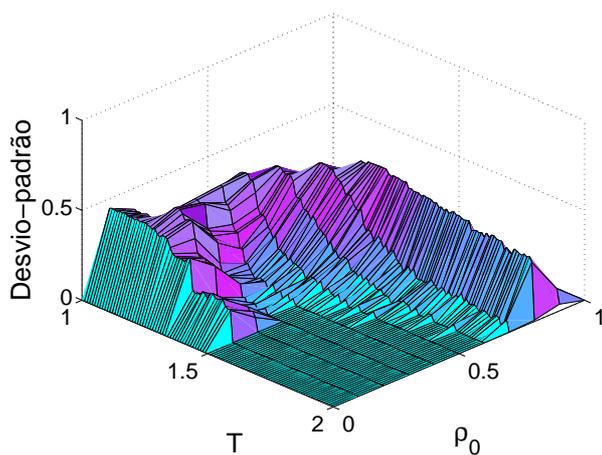
(a) $z = 16$ (b) Desvio-padrão, vista 1. Para $z = 16$.(c) Desvio-padrão, vista 2. Para $z = 16$.

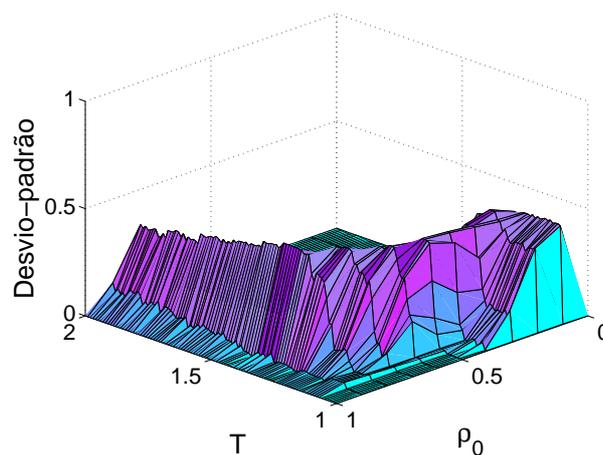
Figura A.15: Diagrama de fase, ρ_∞ (proporção estacionária de cooperadores) em função de T (tentação), ρ_0 (proporção inicial de cooperadores) e T (tentação) traçado como superfície. Nesta simulação $z = 16$ (sem auto-interação).



(a) $z = 17$



(b) Desvio-padrão, vista 1. Para $z = 17$.



(c) Desvio-padrão, vista 2. Para $z = 17$.

Figura A.16: Diagrama de fase, ρ_∞ (proporção estacionária de cooperadores) em função de T (tentação), ρ_0 (proporção inicial de cooperadores) e T (tentação) traçado como superfície. Nesta simulação $z = 17$ (com auto-interação).

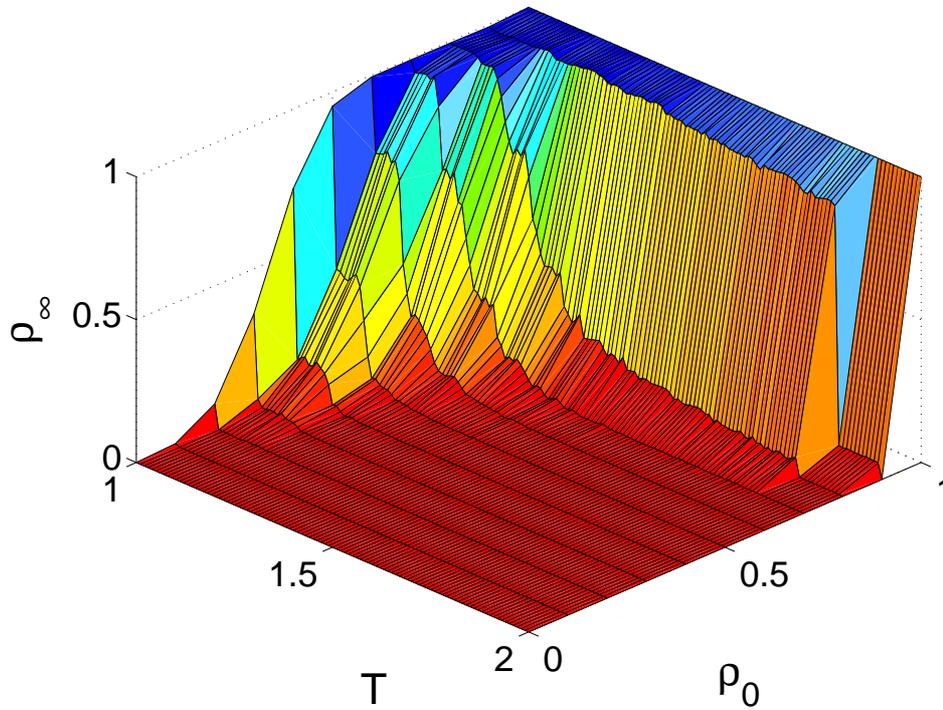
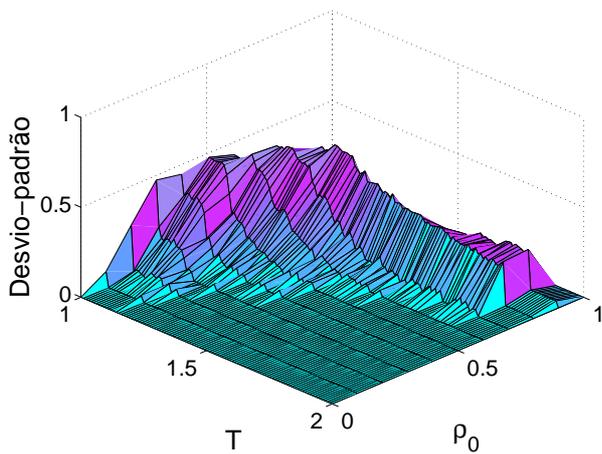
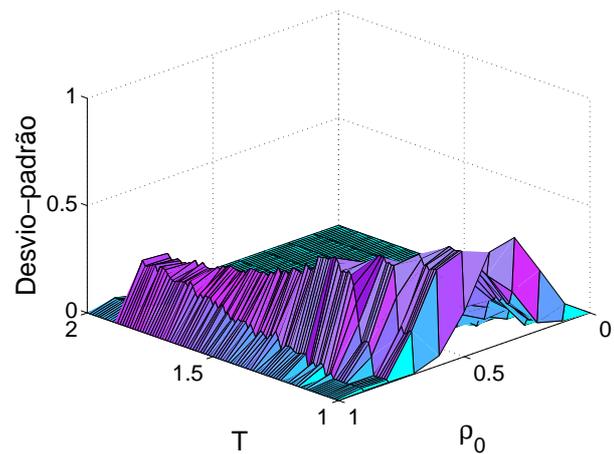
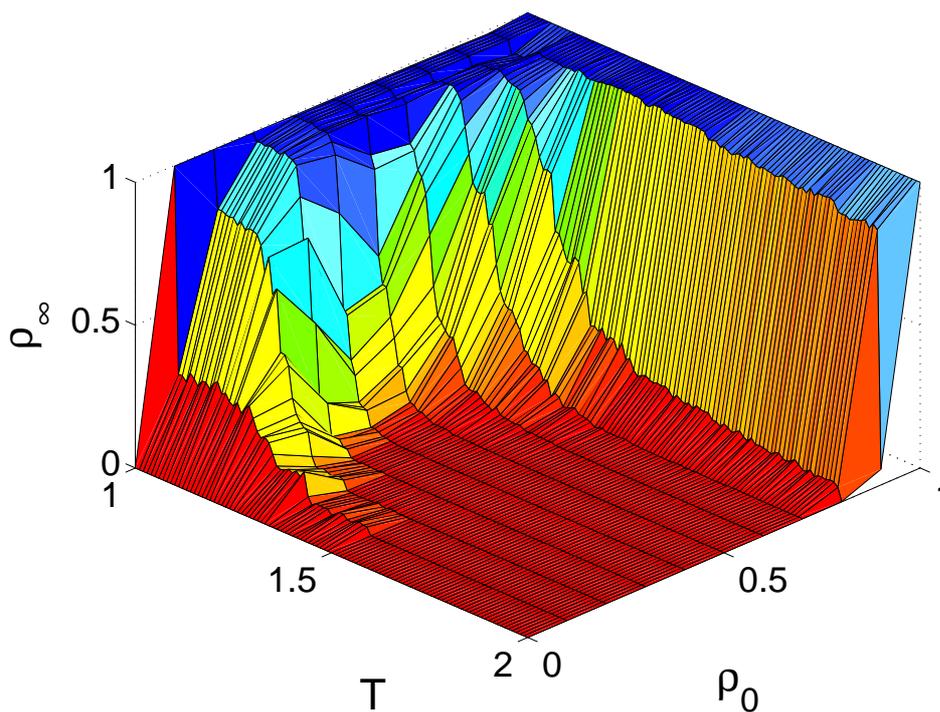
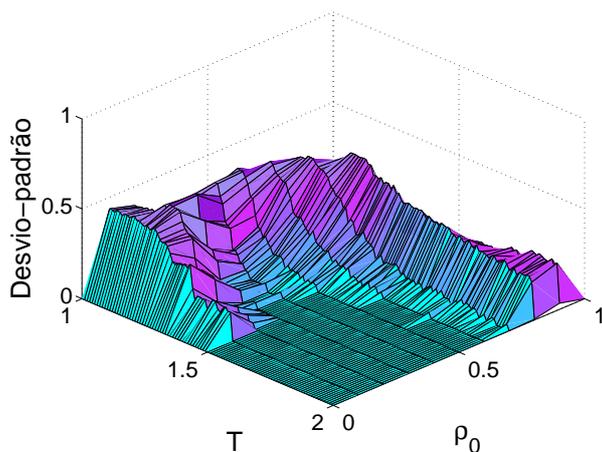
(a) $z = 18$ (b) Desvio-padrão, vista 1. Para $z = 18$.(c) Desvio-padrão, vista 2. Para $z = 18$.

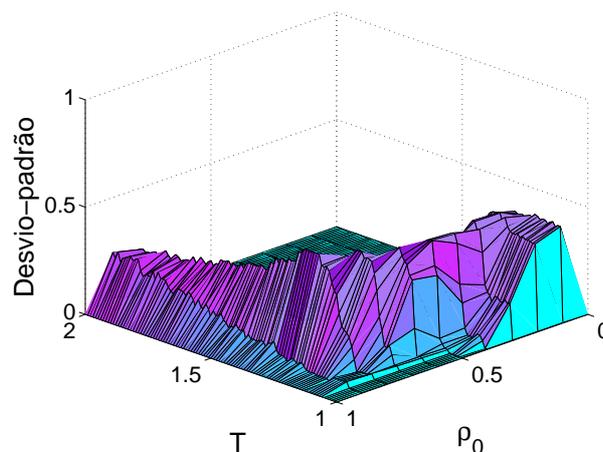
Figura A.17: Diagrama de fase, ρ_∞ (proporção estacionária de cooperadores) em função de T (tentação), ρ_0 (proporção inicial de cooperadores) e T (tentação) traçado como superfície. Nesta simulação $z = 18$ (sem auto-interação).



(a) $z = 19$



(b) Desvio-padrão, vista 1. Para $z = 19$.



(c) Desvio-padrão, vista 2. Para $z = 19$.

Figura A.18: Diagrama de fase, ρ_∞ (proporção estacionária de cooperadores) em função de T (tentação), ρ_0 (proporção inicial de cooperadores) e T (tentação) traçado como superfície. Nesta simulação $z = 19$ (com auto-interação).

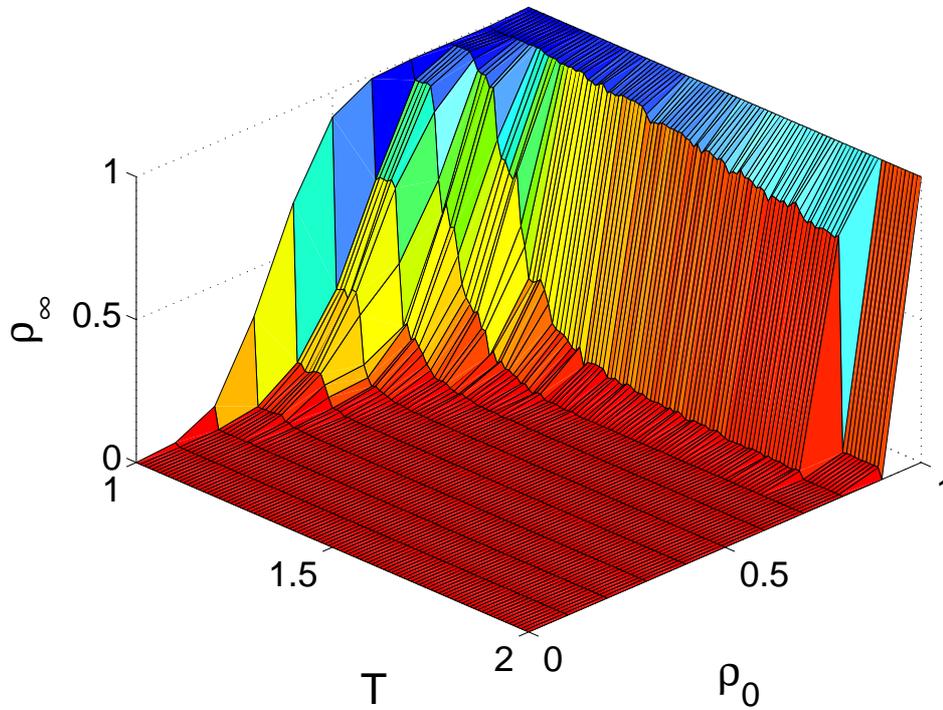
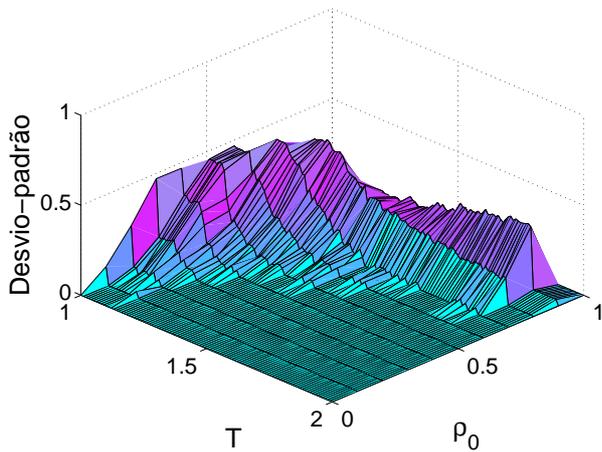
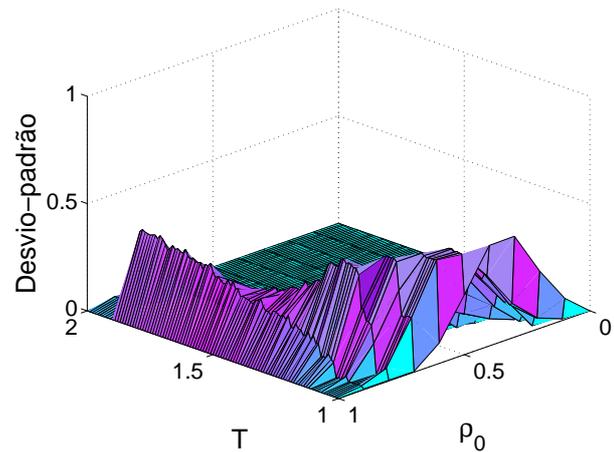
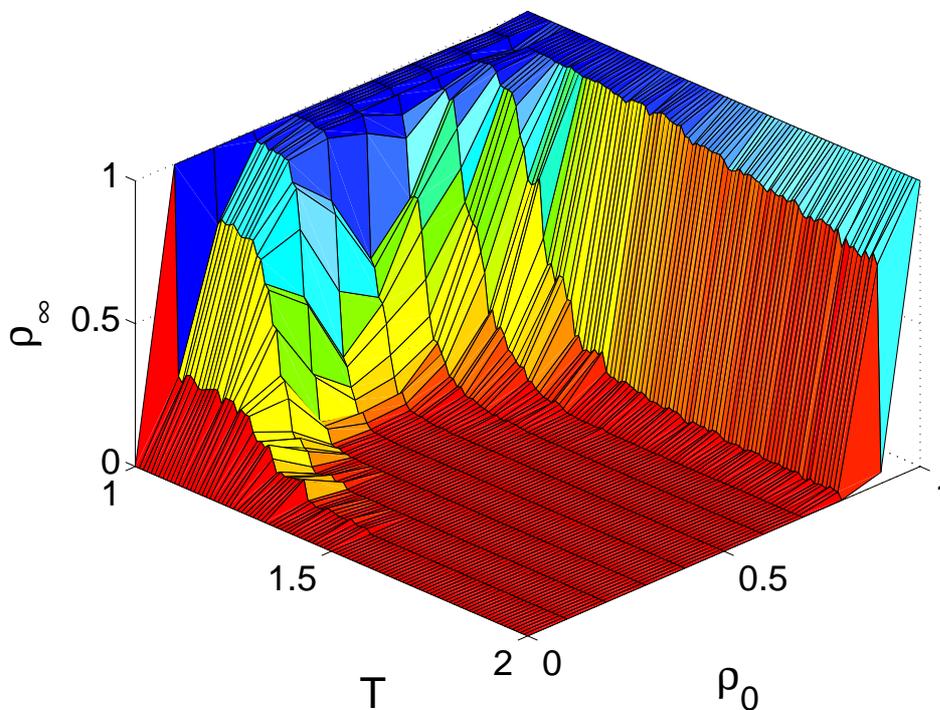
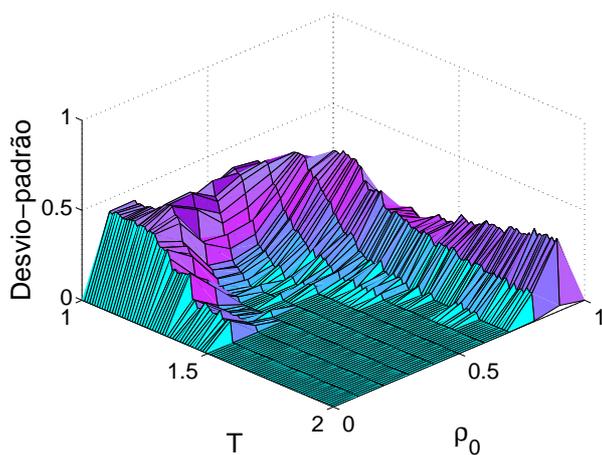
(a) $z = 20$ (b) Desvio-padrão, vista 1. Para $z = 20$.(c) Desvio-padrão, vista 2. Para $z = 20$.

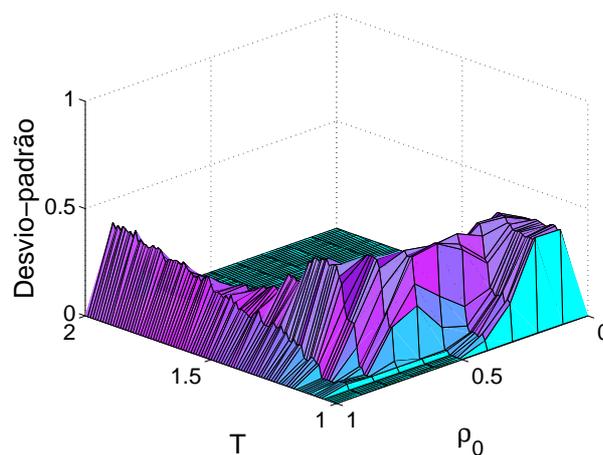
Figura A.19: Diagrama de fase, ρ_∞ (proporção estacionária de cooperadores) em função de T (tentação), ρ_0 (proporção inicial de cooperadores) e T (tentação) traçado como superfície. Nesta simulação $z = 20$ (sem auto-interação).



(a) $z = 21$



(b) Desvio-padrão, vista 1. Para $z = 21$.



(c) Desvio-padrão, vista 2. Para $z = 21$.

Figura A.20: Diagrama de fase, ρ_∞ (proporção estacionária de cooperadores) em função de T (tentação), ρ_0 (proporção inicial de cooperadores) e T (tentação) traçado como superfície. Nesta simulação $z = 21$ (com auto-interação).

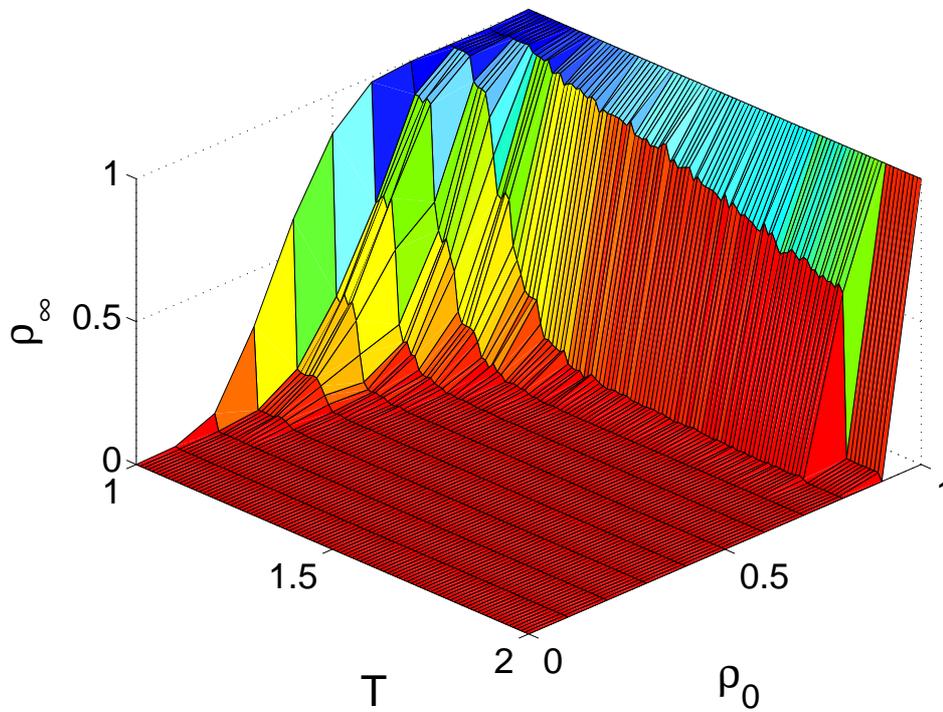
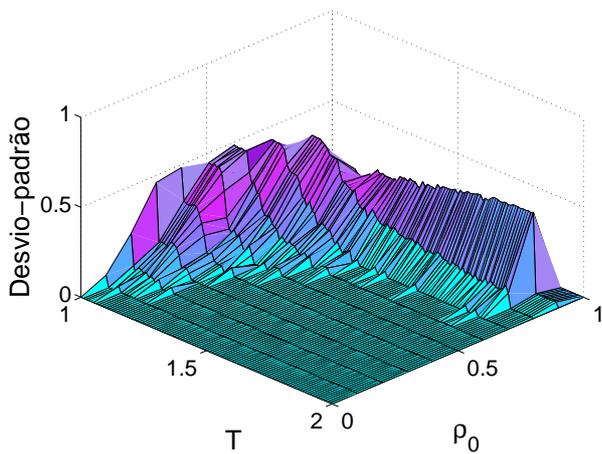
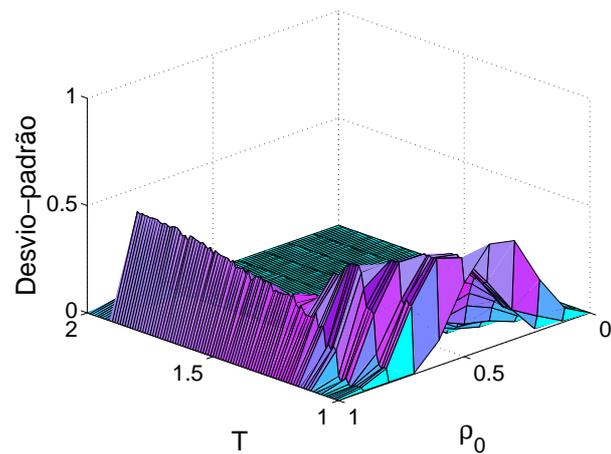
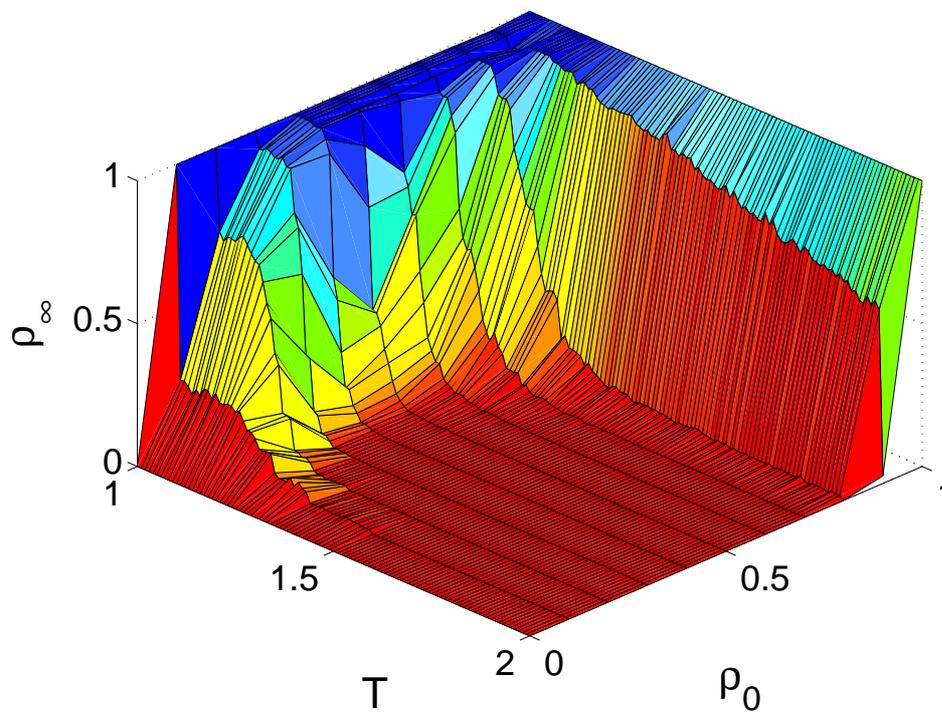
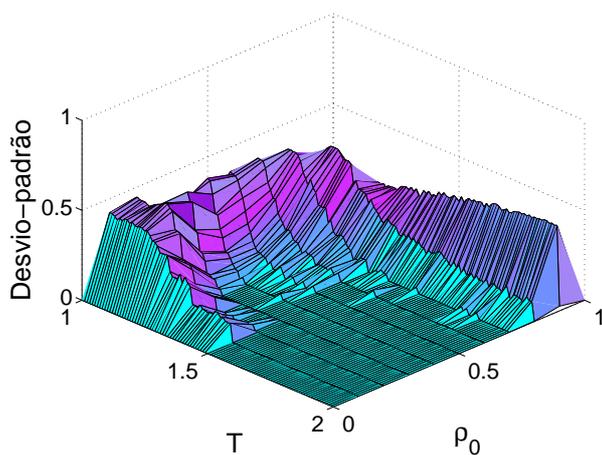
(a) $z = 22$ (b) Desvio-padrão, vista 1. Para $z = 22$.(c) Desvio-padrão, vista 2. Para $z = 22$.

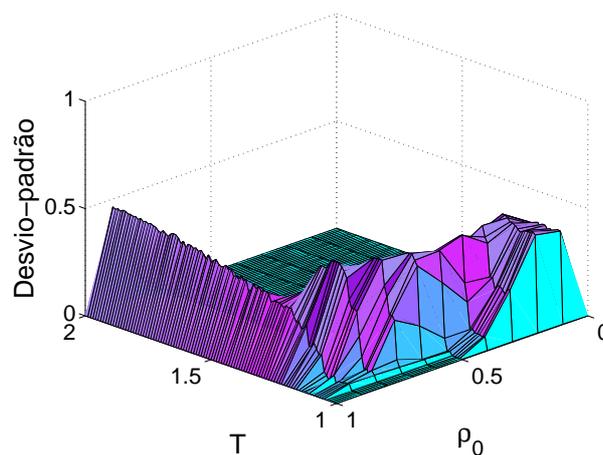
Figura A.21: Diagrama de fase, ρ_∞ (proporção estacionária de cooperadores) em função de T (tentação), ρ_0 (proporção inicial de cooperadores) e T (tentação) traçado como superfície. Nesta simulação $z = 22$ (sem auto-interação).



(a) $z = 23$



(b) Desvio-padrão, vista 1. Para $z = 23$.



(c) Desvio-padrão, vista 2. Para $z = 23$.

Figura A.22: Diagrama de fase, ρ_∞ (proporção estacionária de cooperadores) em função de T (tentação), ρ_0 (proporção inicial de cooperadores) e T (tentação) traçado como superfície. Nesta simulação $z = 23$ (com auto-interação).

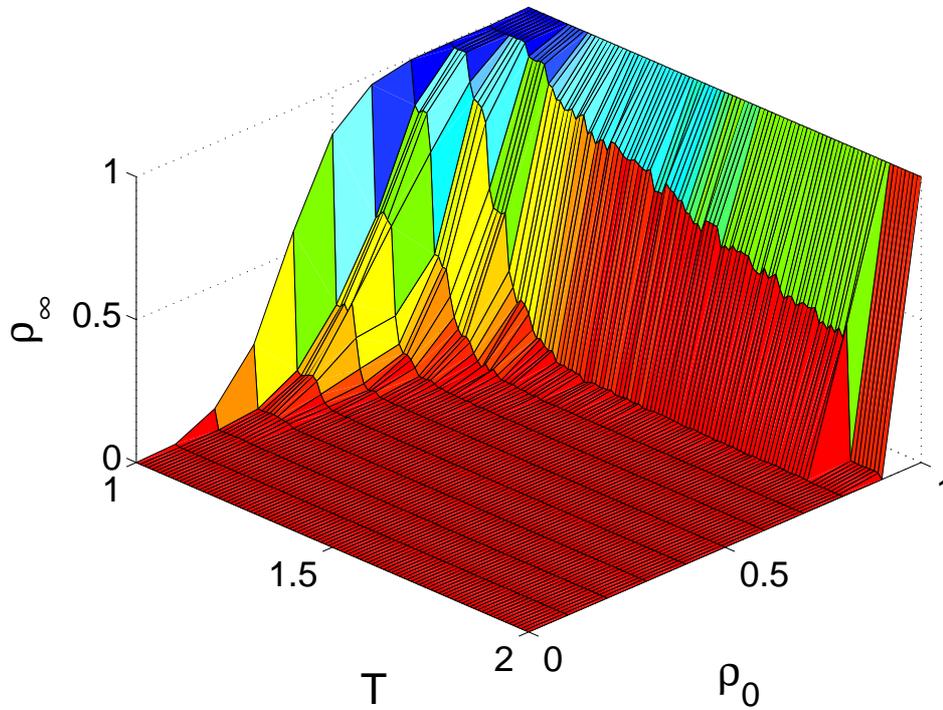
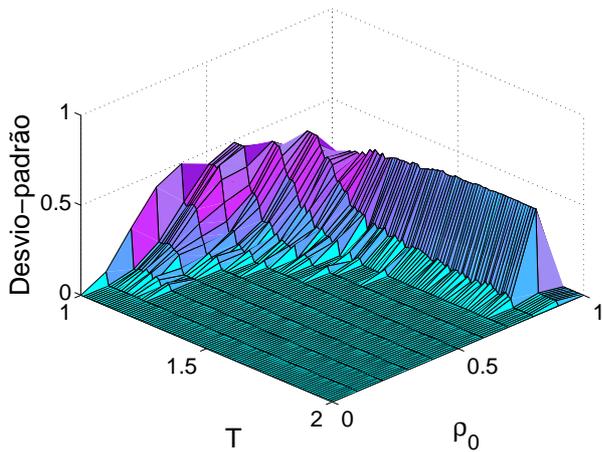
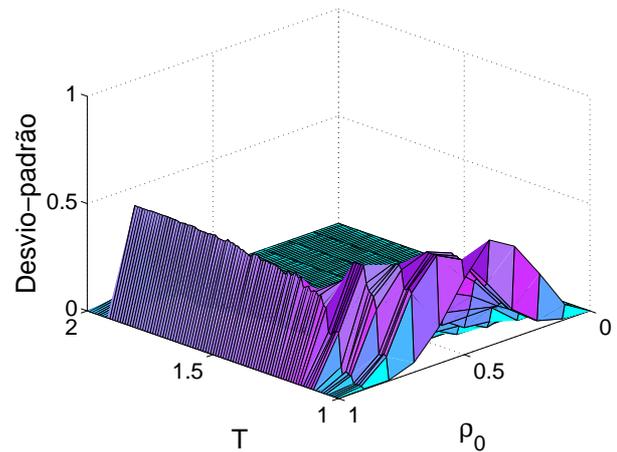
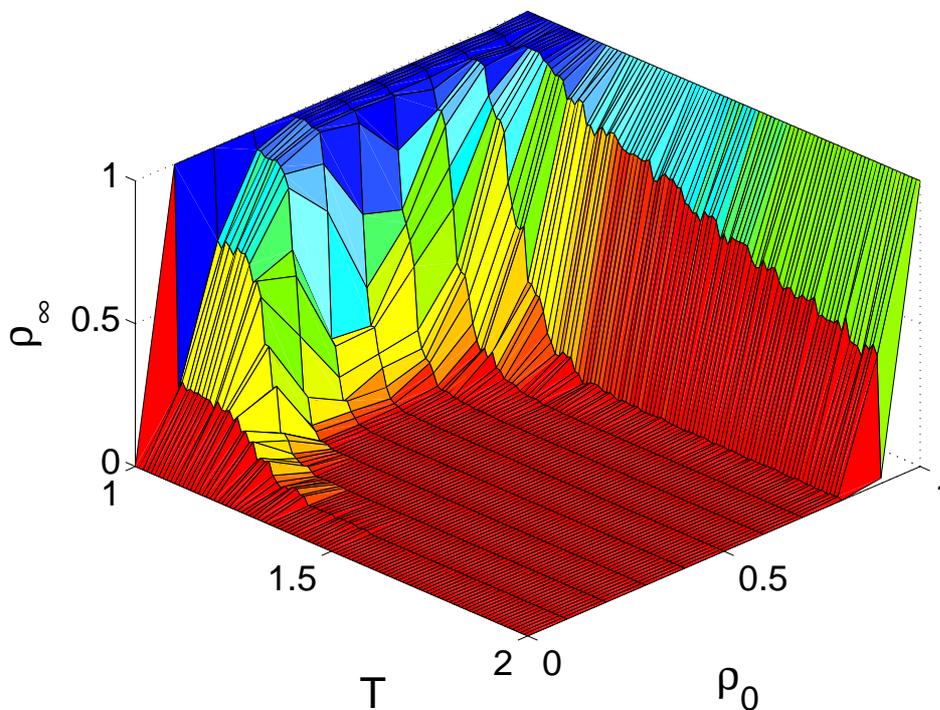
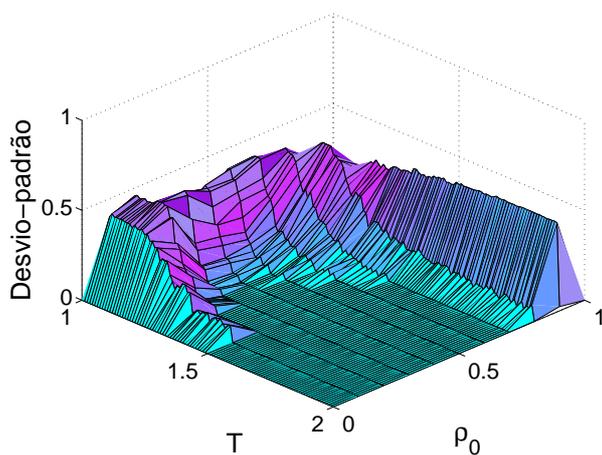
(a) $z = 24$ (b) Desvio-padrão, vista 1. Para $z = 24$.(c) Desvio-padrão, vista 2. Para $z = 24$.

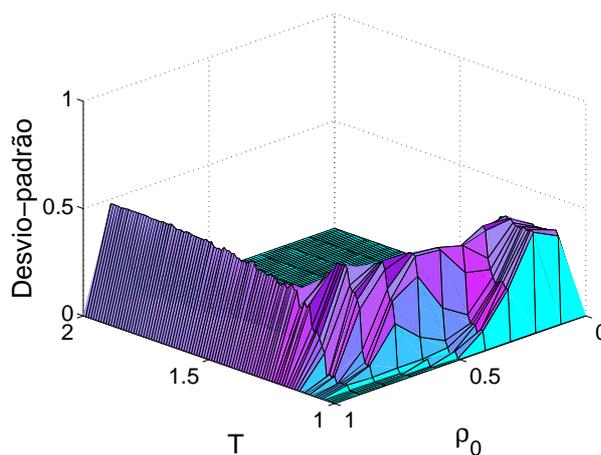
Figura A.23: Diagrama de fase, ρ_∞ (proporção estacionária de cooperadores) em função de T (tentação), ρ_0 (proporção inicial de cooperadores) e T (tentação) traçado como superfície. Nesta simulação $z = 24$ (sem auto-interação).



(a) $z = 25$



(b) Desvio-padrão, vista 1. Para $z = 25$.



(c) Desvio-padrão, vista 2. Para $z = 25$.

Figura A.24: Diagrama de fase, ρ_∞ (proporção estacionária de cooperadores) em função de T (tentação), ρ_0 (proporção inicial de cooperadores) e T (tentação) traçado como superfície. Nesta simulação $z = 25$ (com auto-interação).

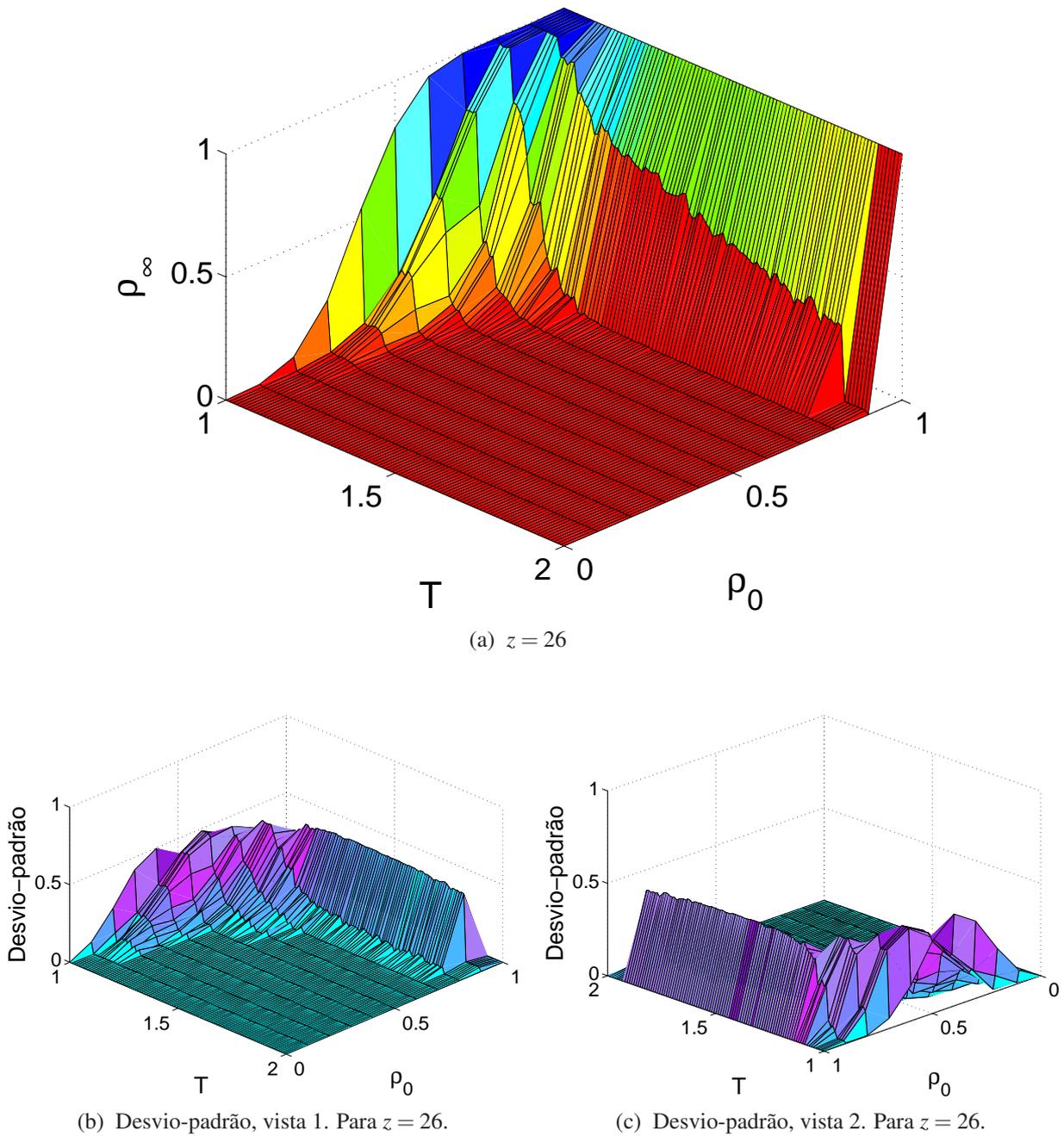
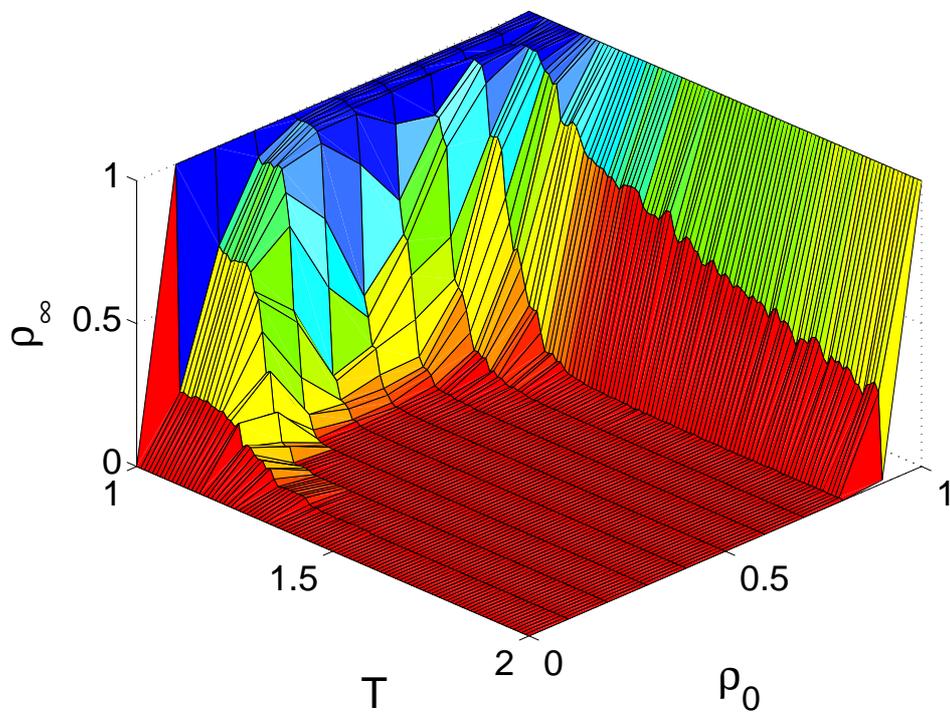
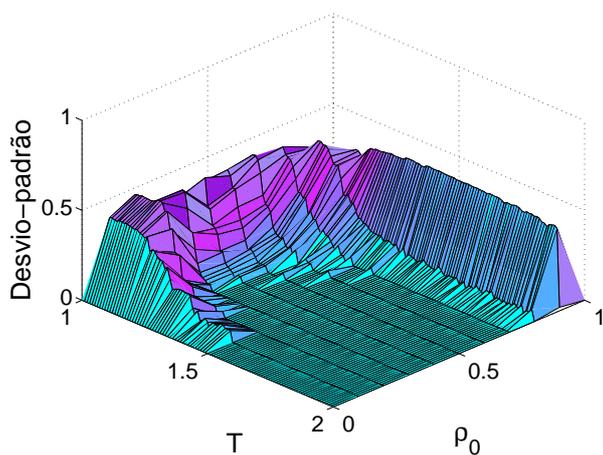


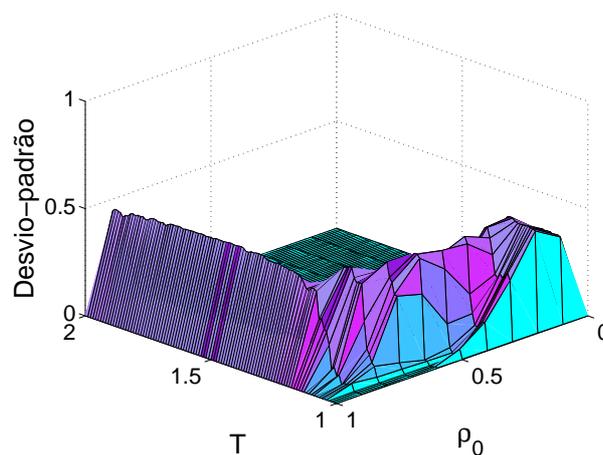
Figura A.25: Diagrama de fase, ρ_∞ (proporção estacionária de cooperadores) em função de T (tentação), ρ_0 (proporção inicial de cooperadores) e T (tentação) traçado como superfície. Nesta simulação $z = 26$ (sem auto-interação).



(a) $z = 27$



(b) Desvio-padrão, vista 1. Para $z = 27$.



(c) Desvio-padrão, vista 2. Para $z = 27$.

Figura A.26: Diagrama de fase, ρ_∞ (proporção estacionária de cooperadores) em função de T (tentação), ρ_0 (proporção inicial de cooperadores) e T (tentação) traçado como superfície. Nesta simulação $z = 27$ (com auto-interação).

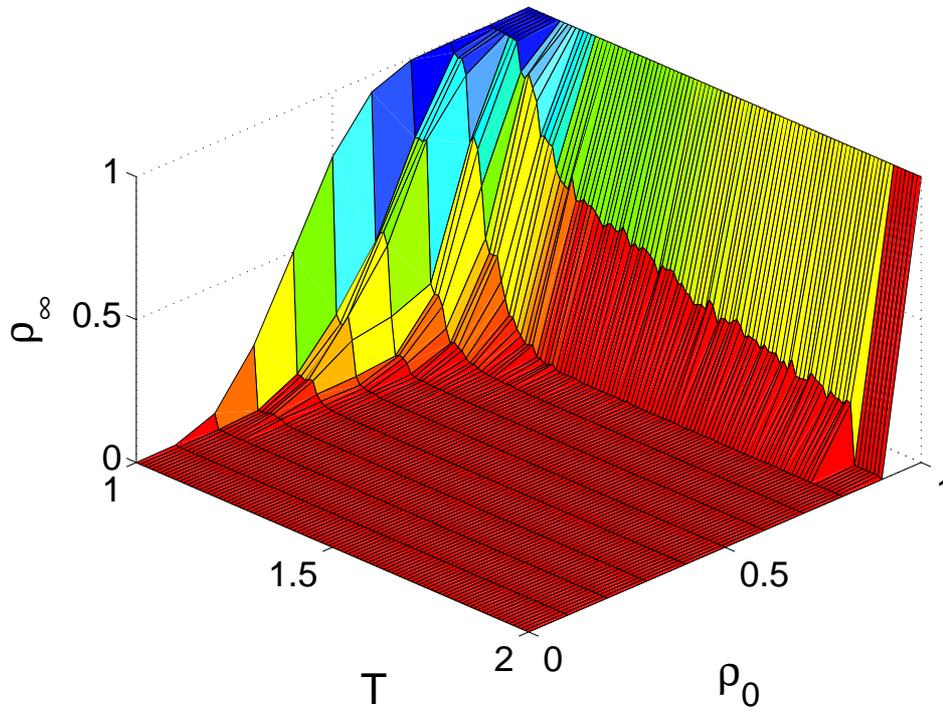
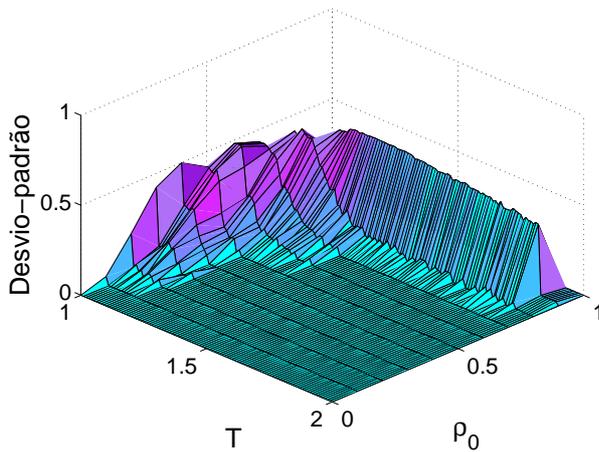
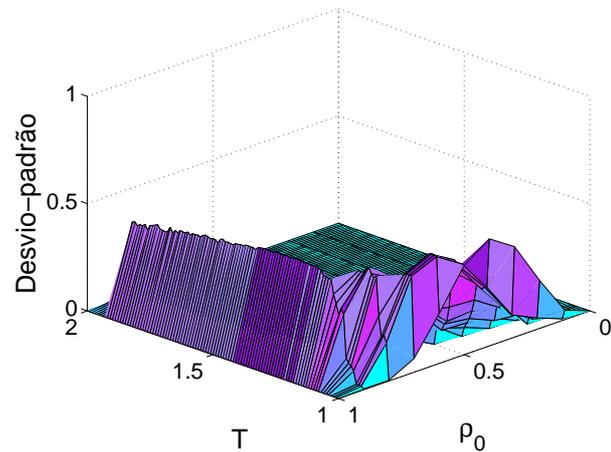
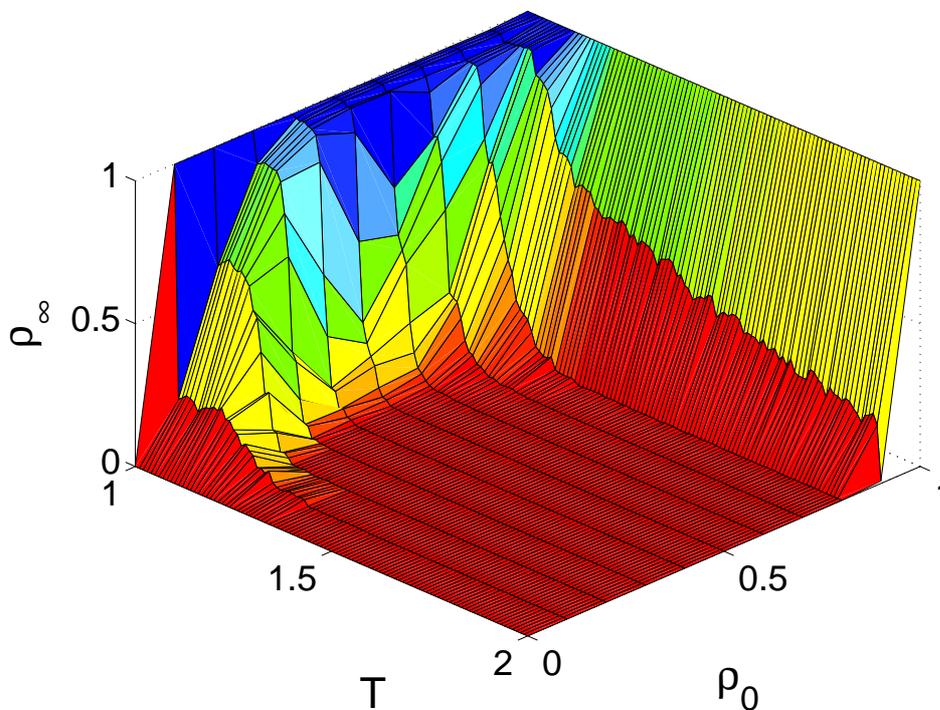
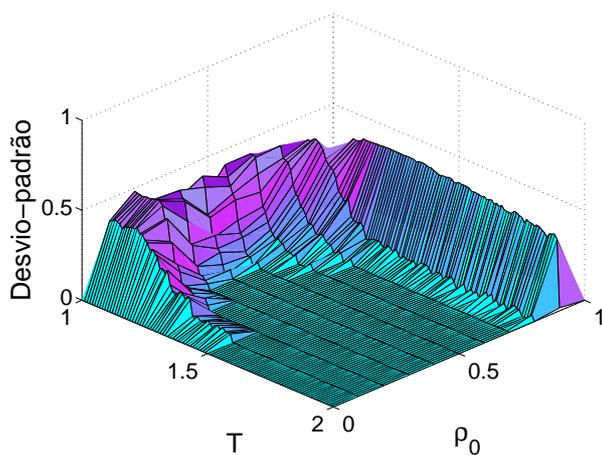
(a) $z = 28$ (b) Desvio-padrão, vista 1. Para $z = 28$.(c) Desvio-padrão, vista 2. Para $z = 28$.

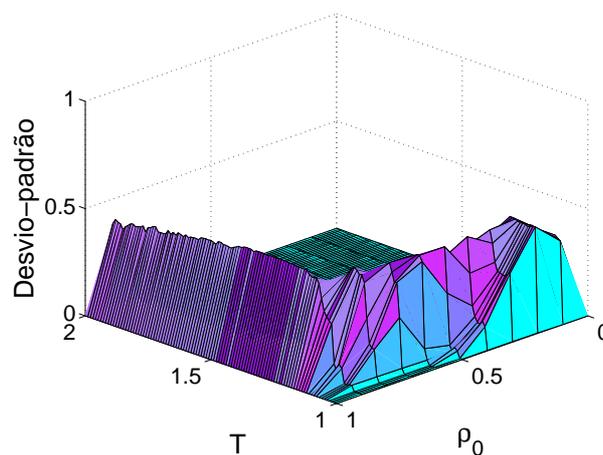
Figura A.27: Diagrama de fase, ρ_∞ (proporção estacionária de cooperadores) em função de T (tentação), ρ_0 (proporção inicial de cooperadores) e T (tentação) traçado como superfície. Nesta simulação $z = 28$ (sem auto-interação).



(a) $z = 29$



(b) Desvio-padrão, vista 1. Para $z = 29$.



(c) Desvio-padrão, vista 2. Para $z = 29$.

Figura A.28: Diagrama de fase, ρ_∞ (proporção estacionária de cooperadores) em função de T (tentação), ρ_0 (proporção inicial de cooperadores) e T (tentação) traçado como superfície. Nesta simulação $z = 29$ (com auto-interação).

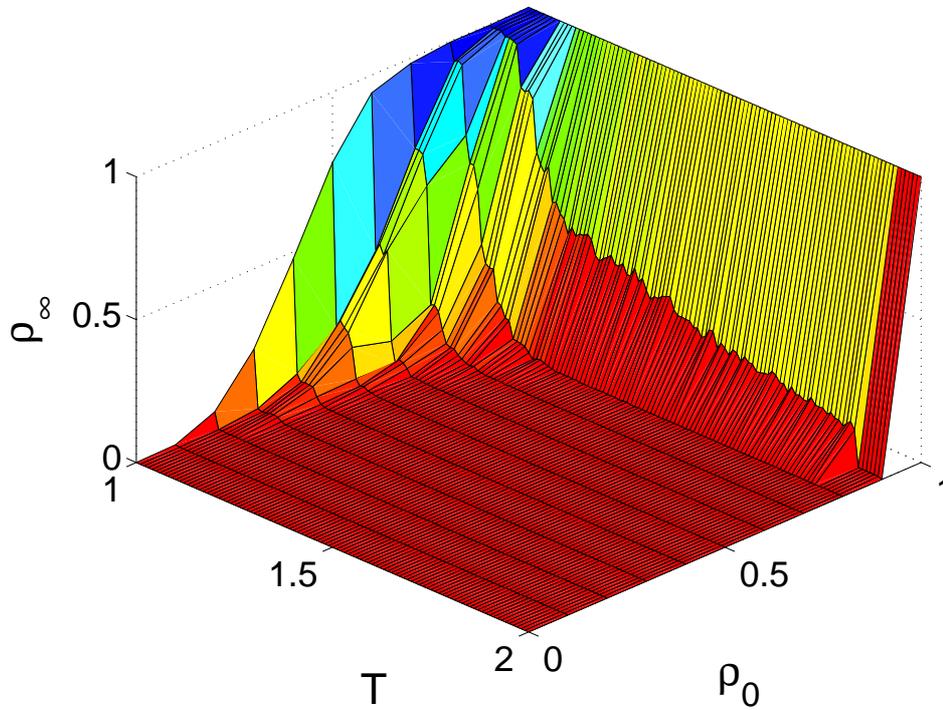
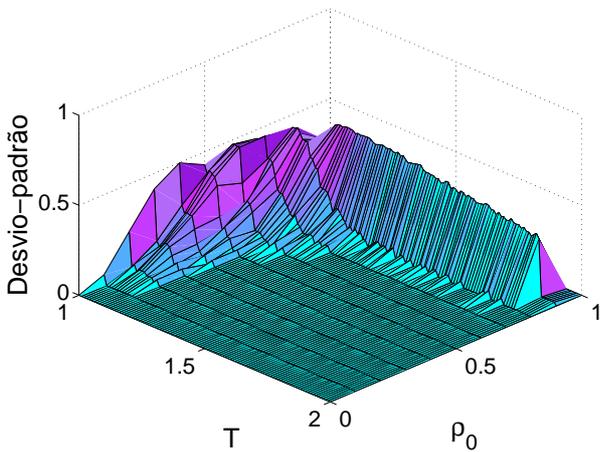
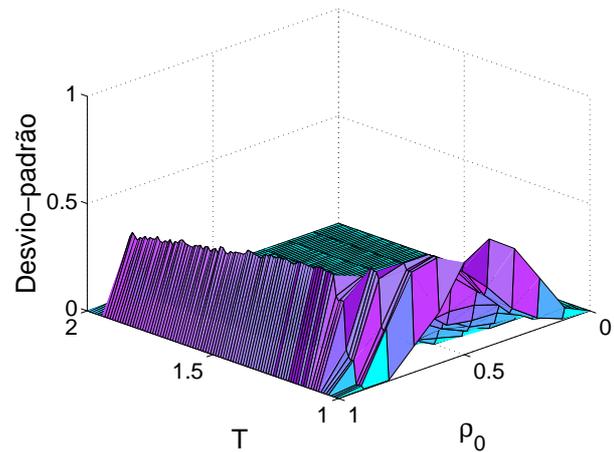
(a) $z = 30$ (b) Desvio-padrão, vista 1. Para $z = 30$.(c) Desvio-padrão, vista 2. Para $z = 30$.

Figura A.29: Diagrama de fase, ρ_∞ (proporção estacionária de cooperadores) em função de T (tentação), ρ_0 (proporção inicial de cooperadores) e T (tentação) traçado como superfície. Nesta simulação $z = 30$ (sem auto-interação).

***APÊNDICE B – Diagramas de fase para o Dilema
do Prisioneiro no Autômato Celular
utilizando a Estratégia
Evolucionária Pavloviana***

Neste Apêndice apresentamos as superfícies da proporção estacionária de cooperadores para o DP no autômato celular unidimensional que utiliza a EEP.

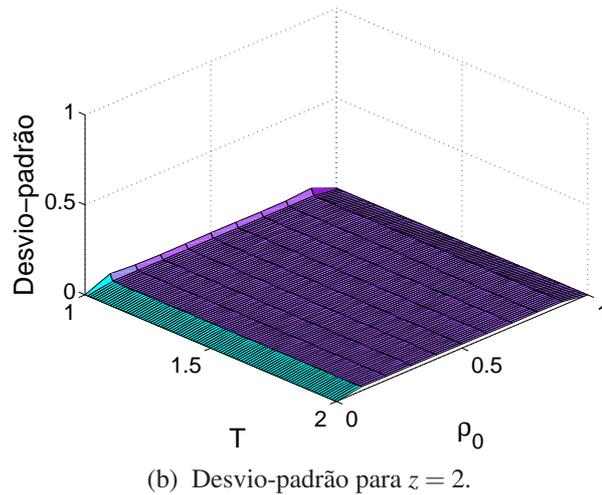
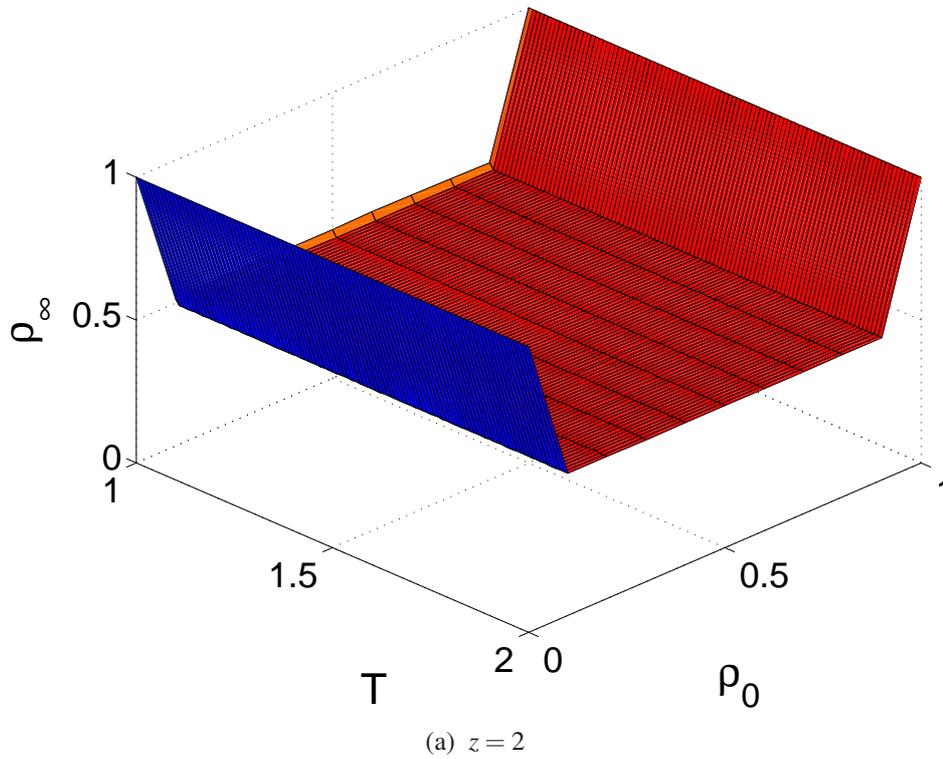
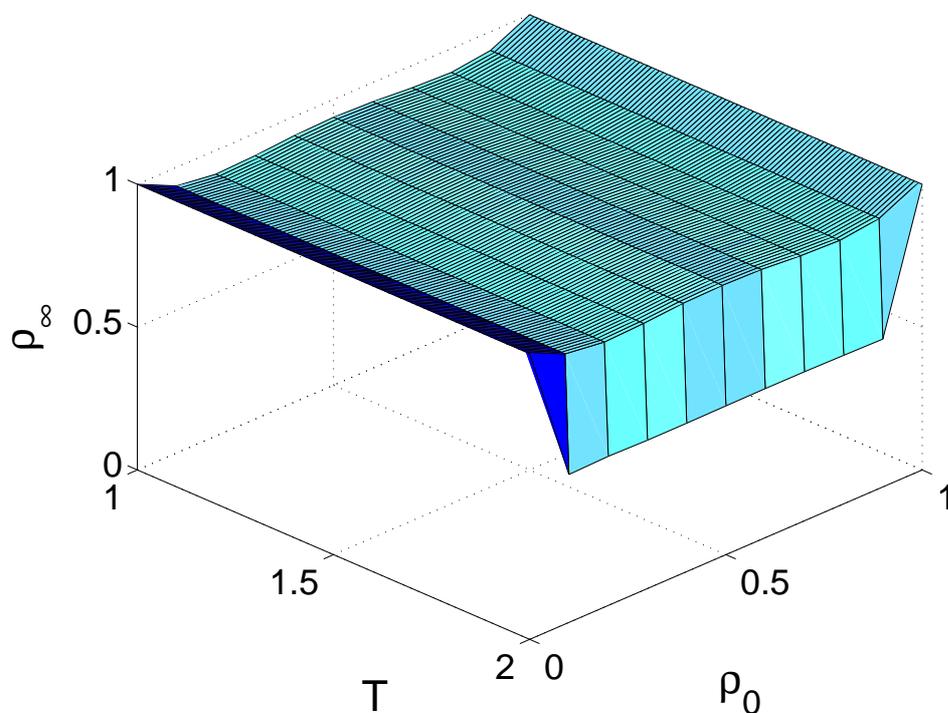
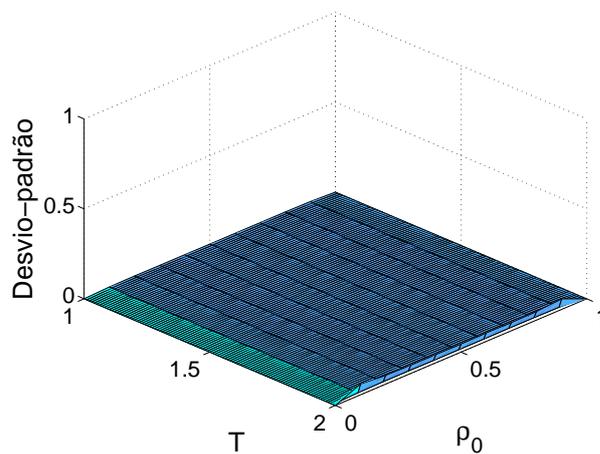


Figura B.1: Diagrama de fase, ρ_∞ (proporção estacionária de cooperadores) em função de T (tentação), ρ_0 (proporção inicial de cooperadores) e T (tentação) traçado como superfície. Nesta simulação $z = 2$ (sem auto-interação).



(a) $z = 3$



(b) Desvio-padrão para $z = 3$.

Figura B.2: Diagrama de fase, ρ_∞ (proporção estacionária de cooperadores) em função de T (tentação), ρ_0 (proporção inicial de cooperadores) e T (tentação) traçado como superfície. Nesta simulação $z = 3$ (com auto-interação).

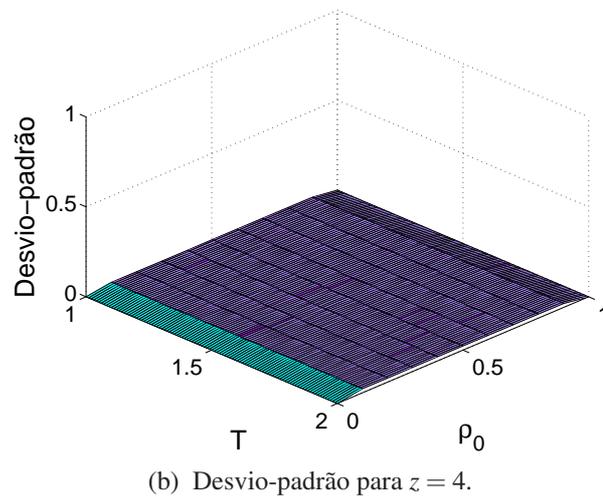
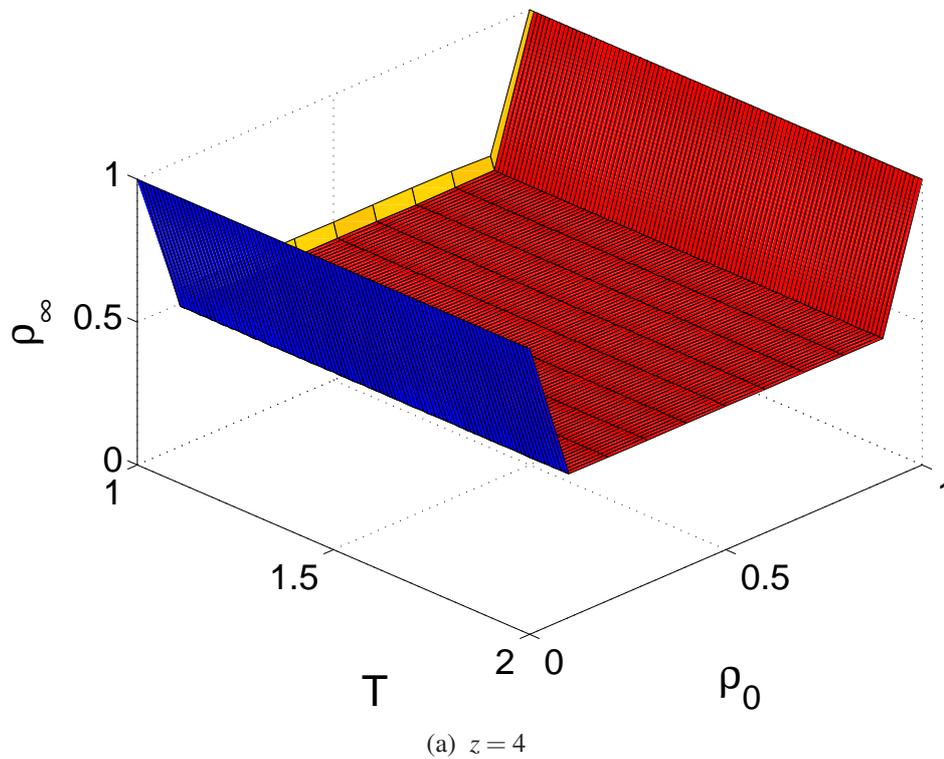
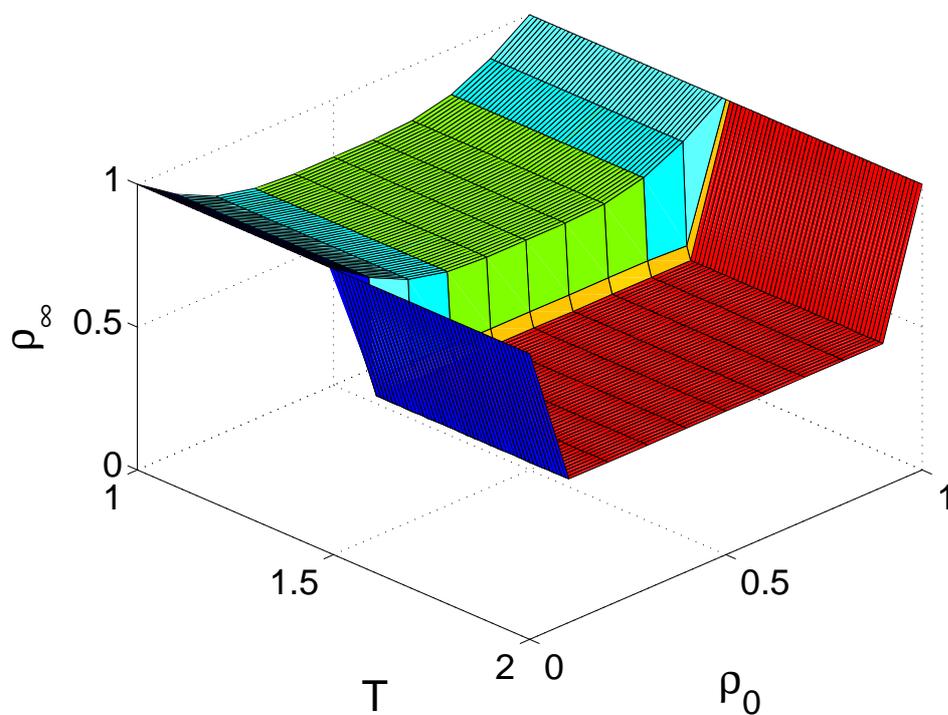
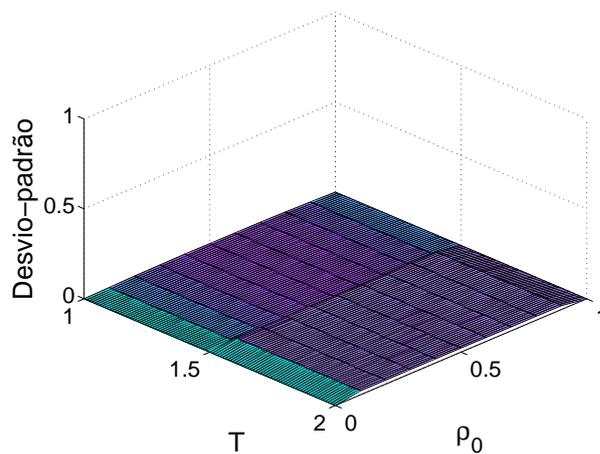


Figura B.3: Diagrama de fase, ρ_∞ (proporção estacionária de cooperadores) em função de T (tentação), ρ_0 (proporção inicial de cooperadores) e T (tentação) traçado como superfície. Nesta simulação $z = 4$ (sem auto-interação).



(a) $z = 5$



(b) Desvio-padrão para $z = 5$.

Figura B.4: Diagrama de fase, ρ_∞ (proporção estacionária de cooperadores) em função de T (tentação), ρ_0 (proporção inicial de cooperadores) e T (tentação) traçado como superfície. Nesta simulação $z = 5$ (com auto-interação).

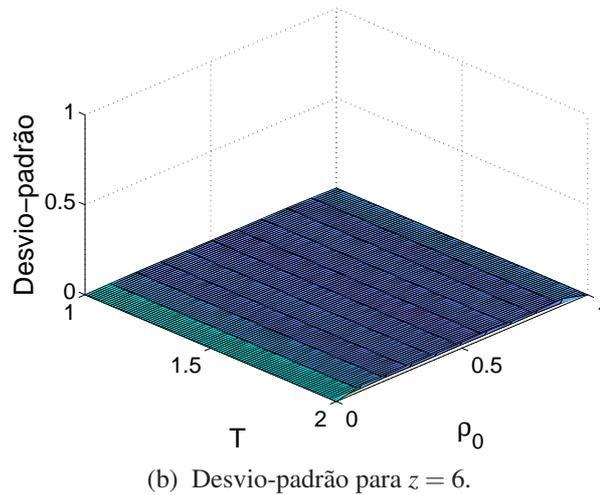
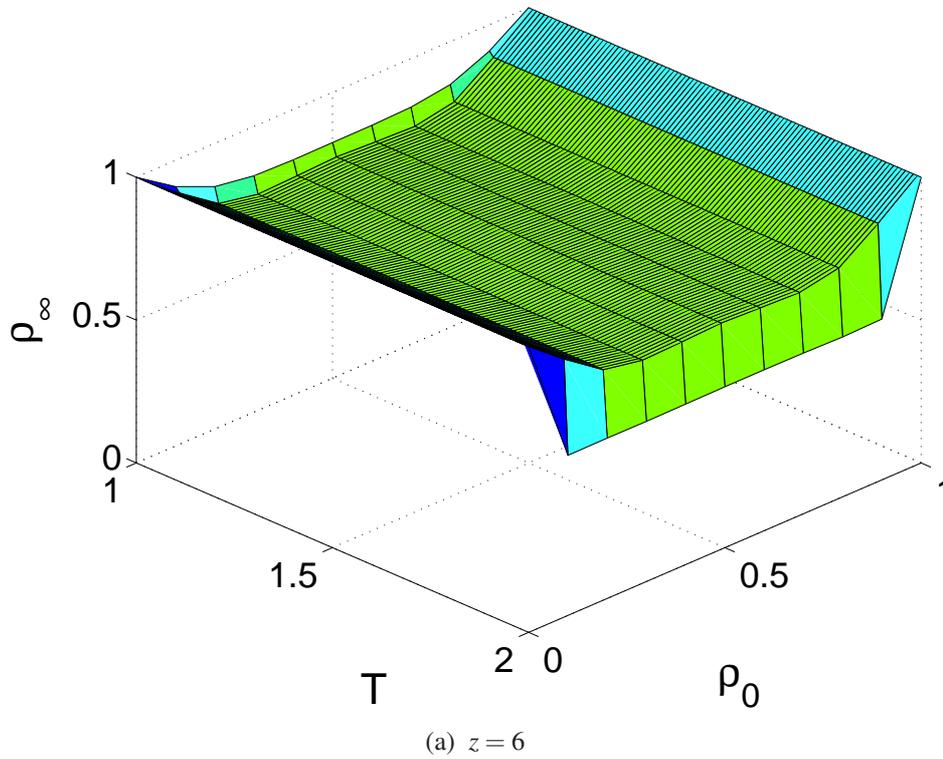
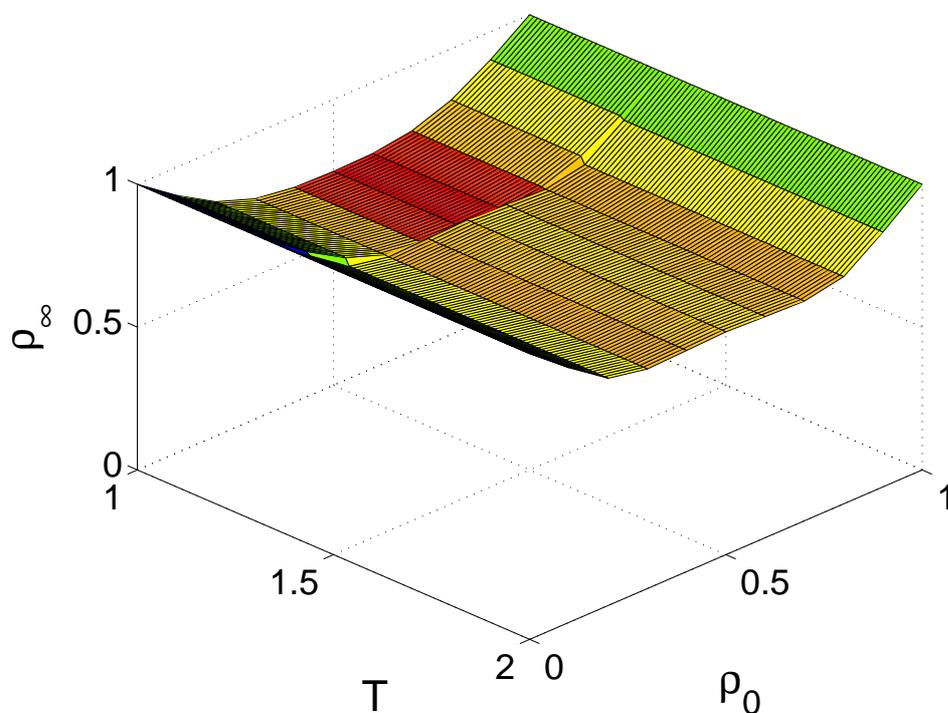
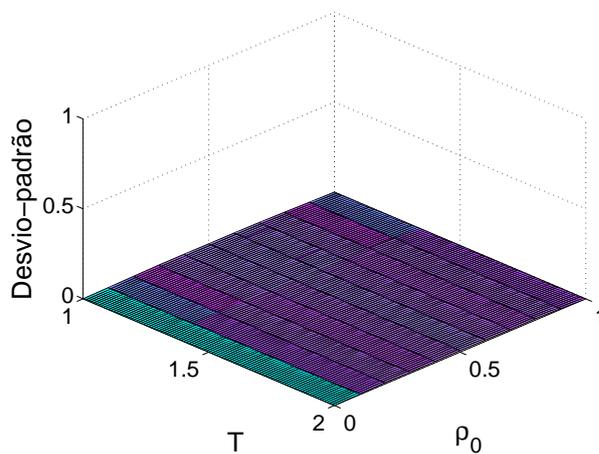


Figura B.5: Diagrama de fase, ρ_∞ (proporção estacionária de cooperadores) em função de T (tentação), ρ_0 (proporção inicial de cooperadores) e T (tentação) traçado como superfície. Nesta simulação $z = 6$ (sem auto-interação).



(a) $z = 7$



(b) Desvio-padrão para $z = 7$.

Figura B.6: Diagrama de fase, ρ_∞ (proporção estacionária de cooperadores) em função de T (tentação), ρ_0 (proporção inicial de cooperadores) e T (tentação) traçado como superfície. Nesta simulação $z = 7$ (com auto-interação).

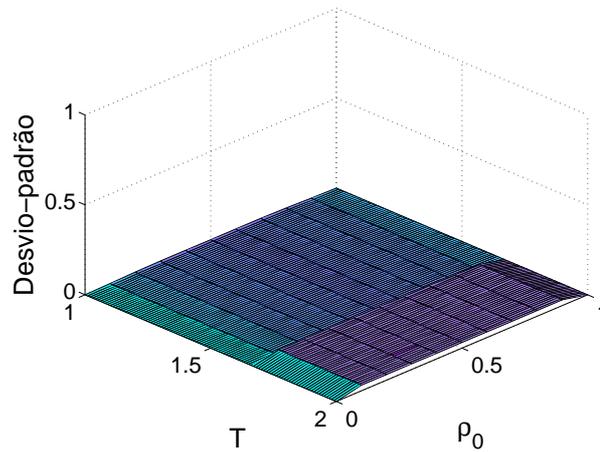
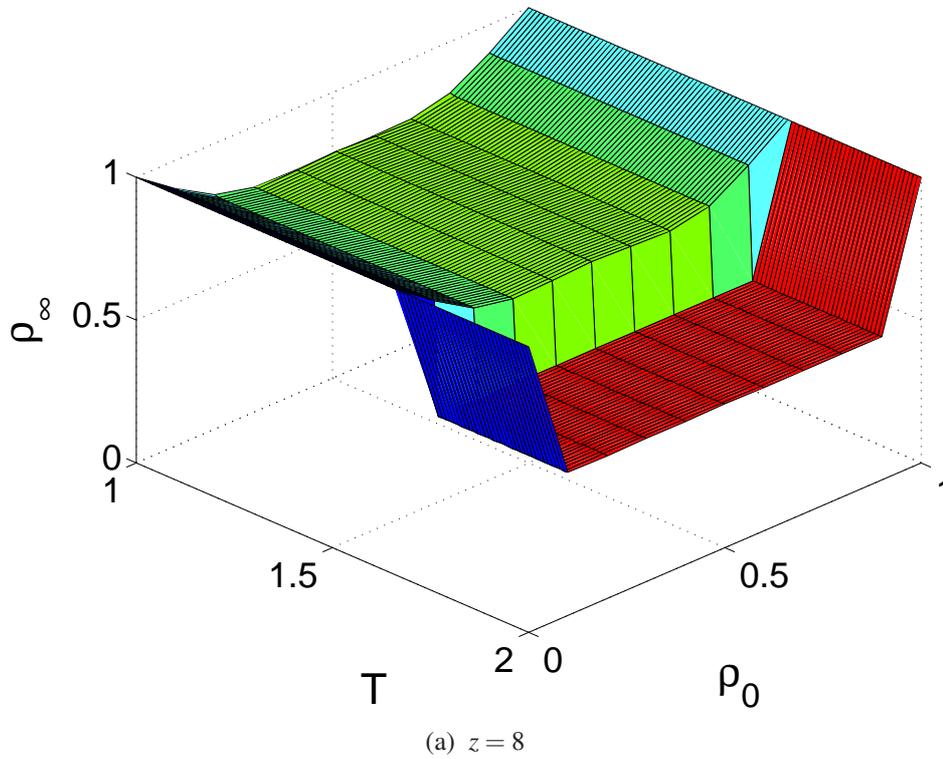


Figura B.7: Diagrama de fase, ρ_∞ (proporção estacionária de cooperadores) em função de T (tentação), ρ_0 (proporção inicial de cooperadores) e T (tentação) traçado como superfície. Nesta simulação $z = 8$ (sem auto-interação).

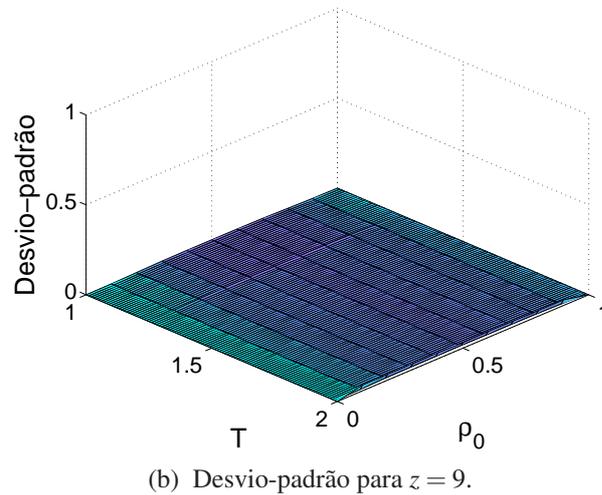
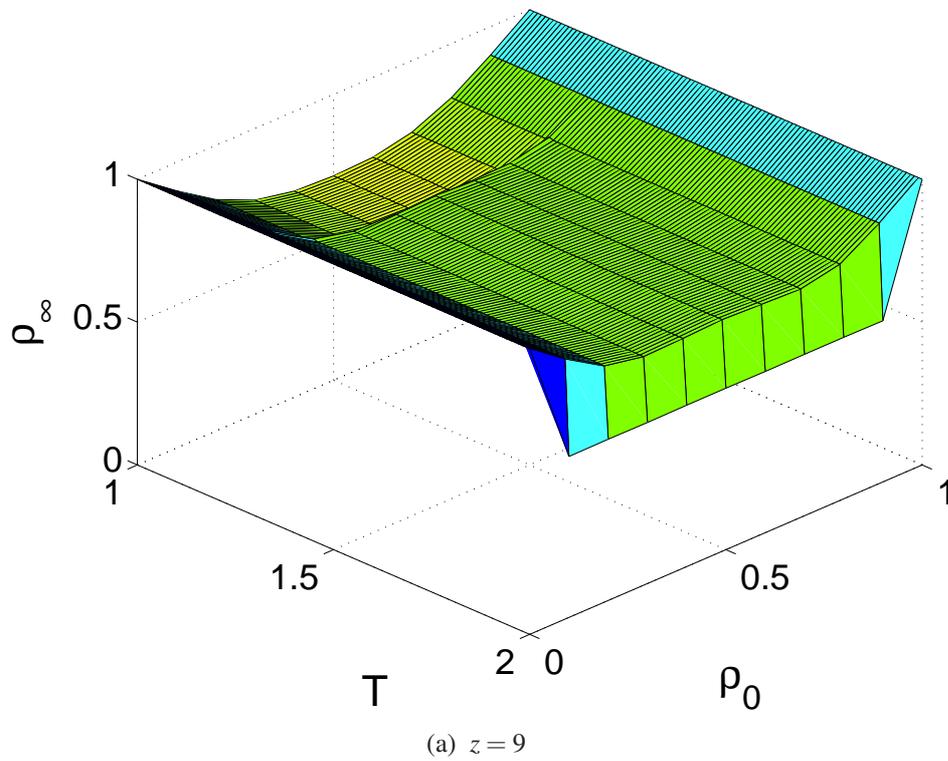


Figura B.8: Diagrama de fase, ρ_∞ (proporção estacionária de cooperadores) em função de T (tentação), ρ_0 (proporção inicial de cooperadores) e T (tentação) traçado como superfície. Nesta simulação $z = 9$ (com auto-interação).

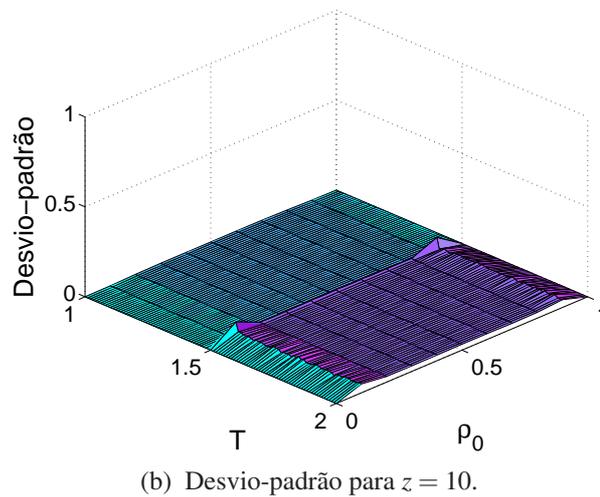
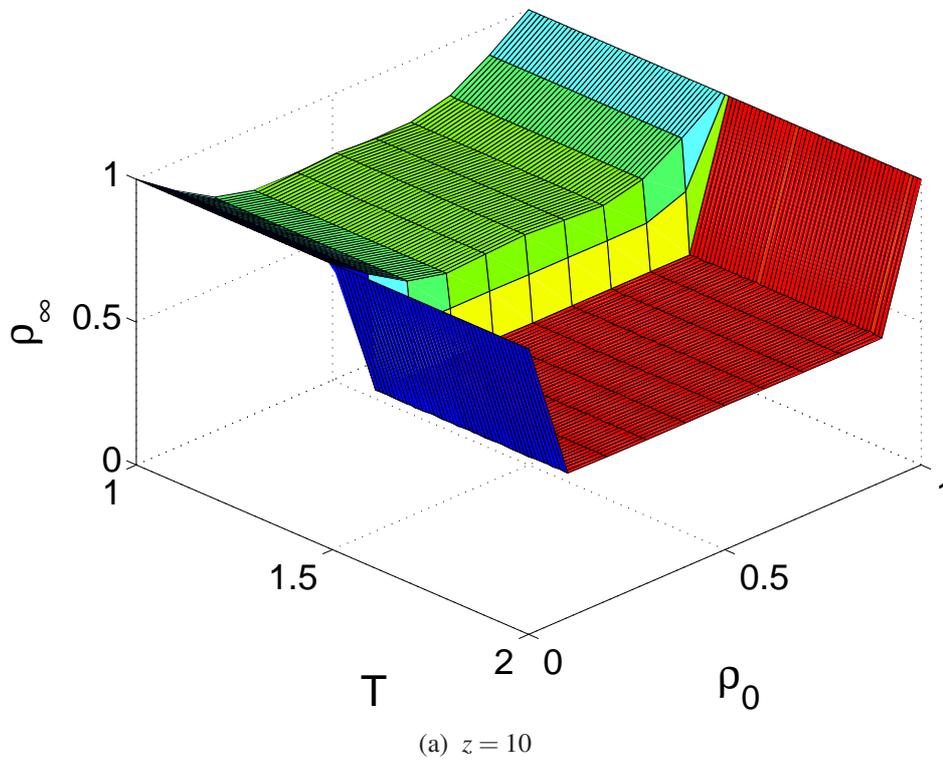
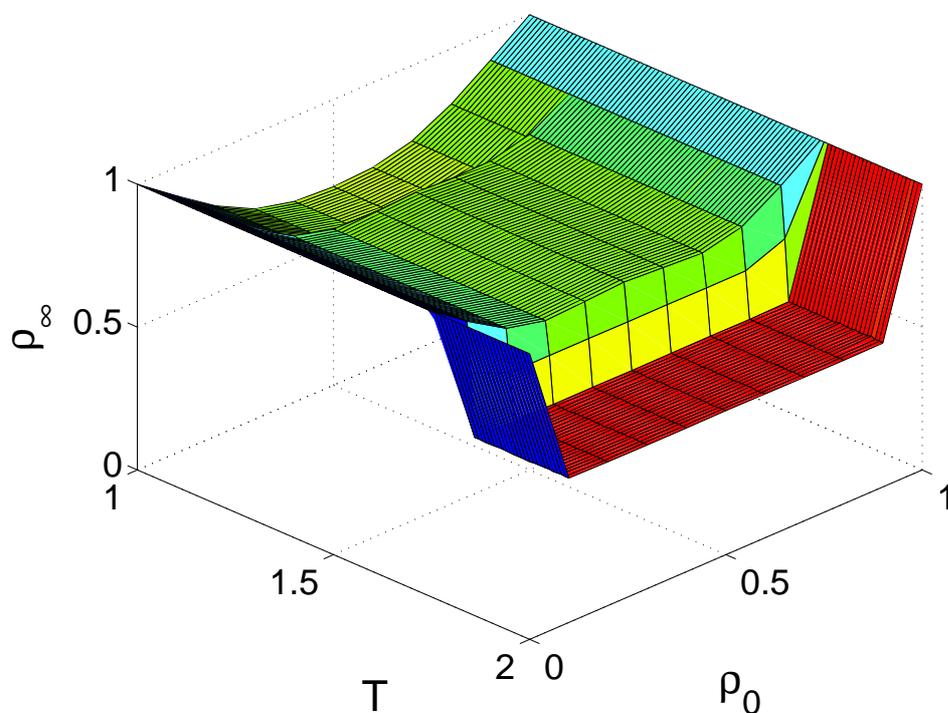
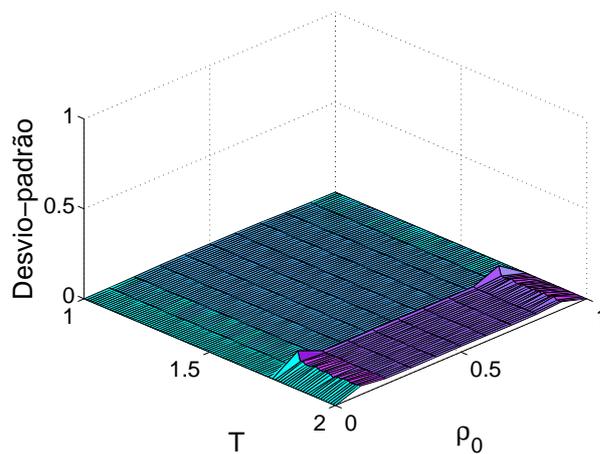


Figura B.9: Diagrama de fase, ρ_∞ (proporção estacionária de cooperadores) em função de T (tentação), ρ_0 (proporção inicial de cooperadores) e T (tentação) traçado como superfície. Nesta simulação $z = 10$ (sem auto-interação).



(a) $z = 11$



(b) Desvio-padrão para $z = 11$.

Figura B.10: Diagrama de fase, ρ_∞ (proporção estacionária de cooperadores) em função de T (tentação), ρ_0 (proporção inicial de cooperadores) e T (tentação) traçado como superfície. Nesta simulação $z = 11$ (com auto-interação).

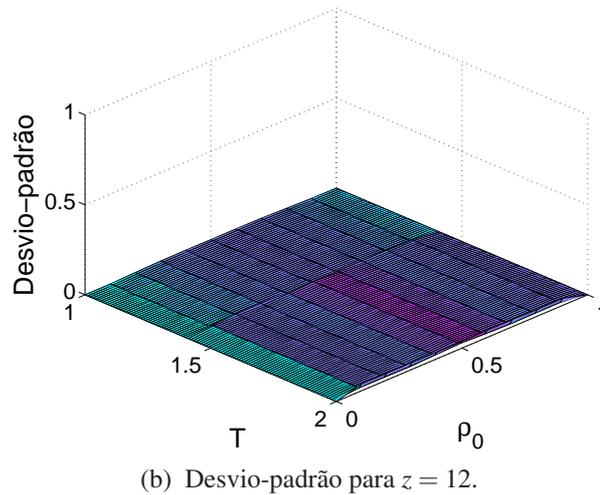
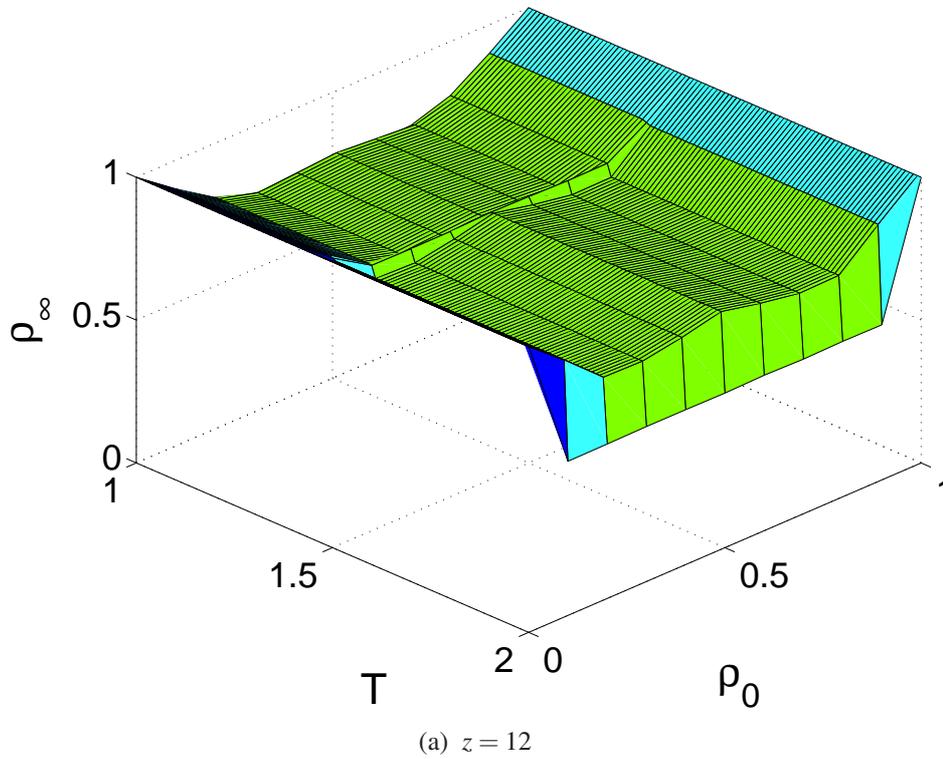


Figura B.11: Diagrama de fase, ρ_∞ (proporção estacionária de cooperadores) em função de T (tentação), ρ_0 (proporção inicial de cooperadores) e T (tentação) traçado como superfície. Nesta simulação $z = 12$ (sem auto-interação).

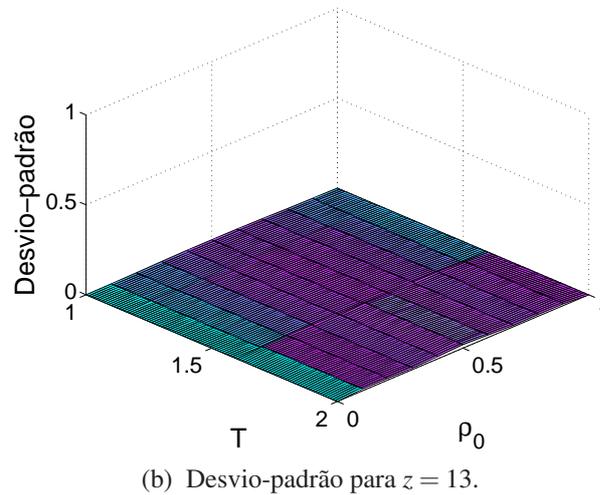
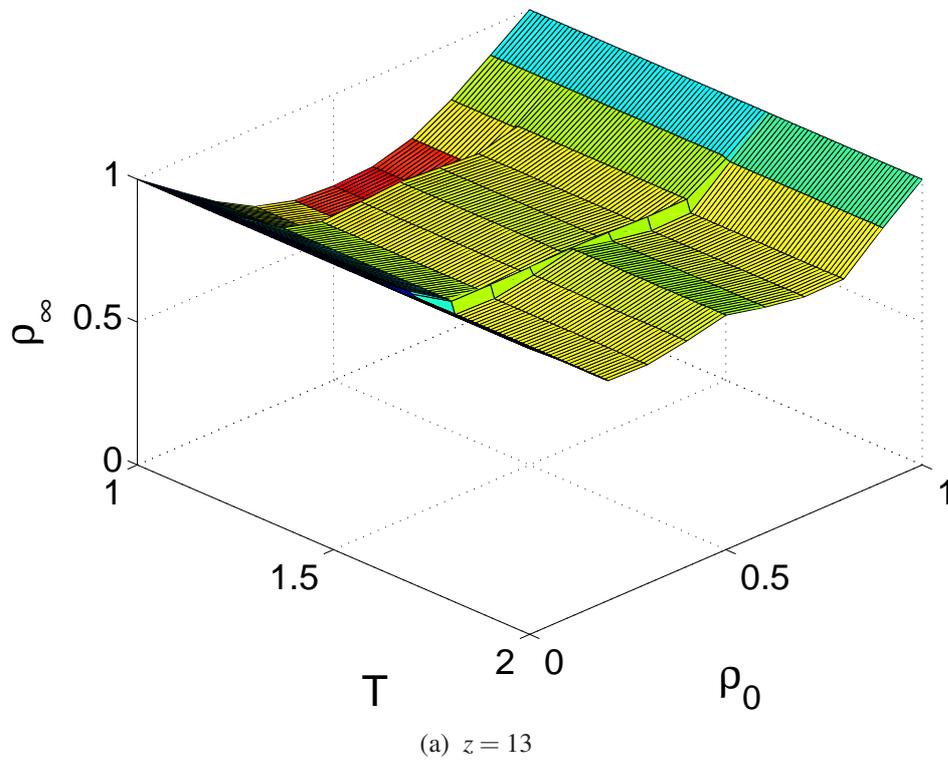


Figura B.12: Diagrama de fase, ρ_∞ (proporção estacionária de cooperadores) em função de T (tentação), ρ_0 (proporção inicial de cooperadores) e T (tentação) traçado como superfície. Nesta simulação $z = 13$ (com auto-interação).

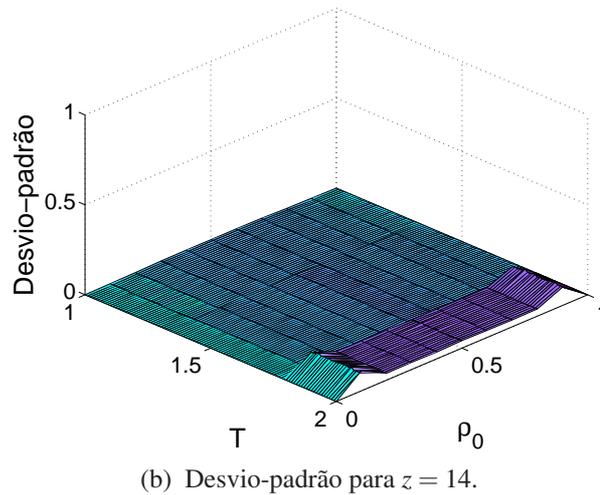
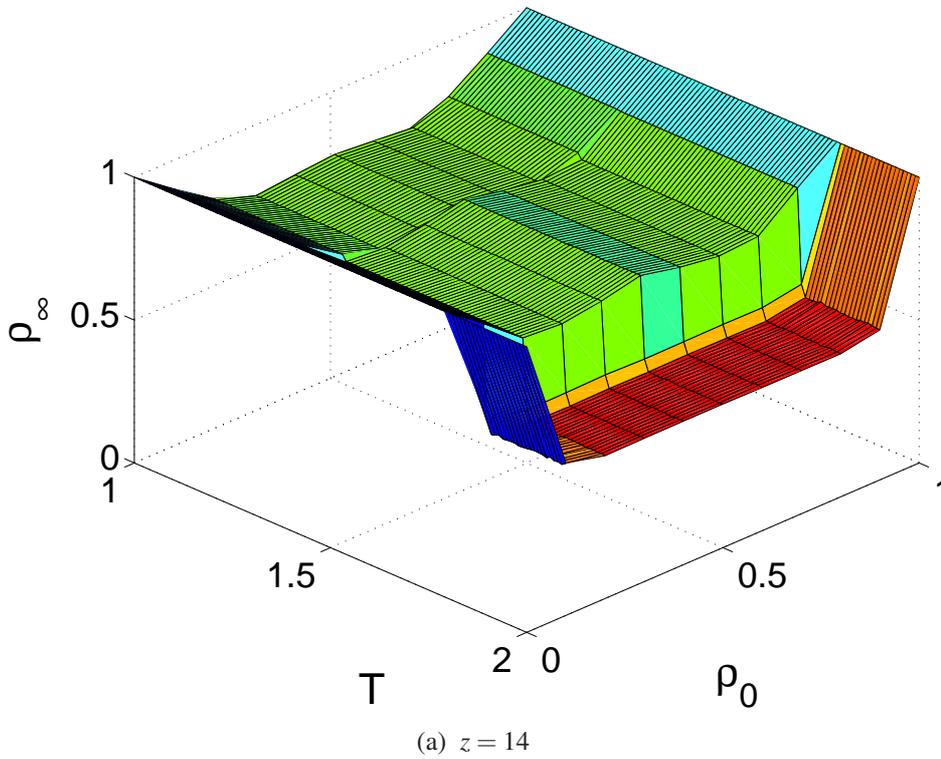
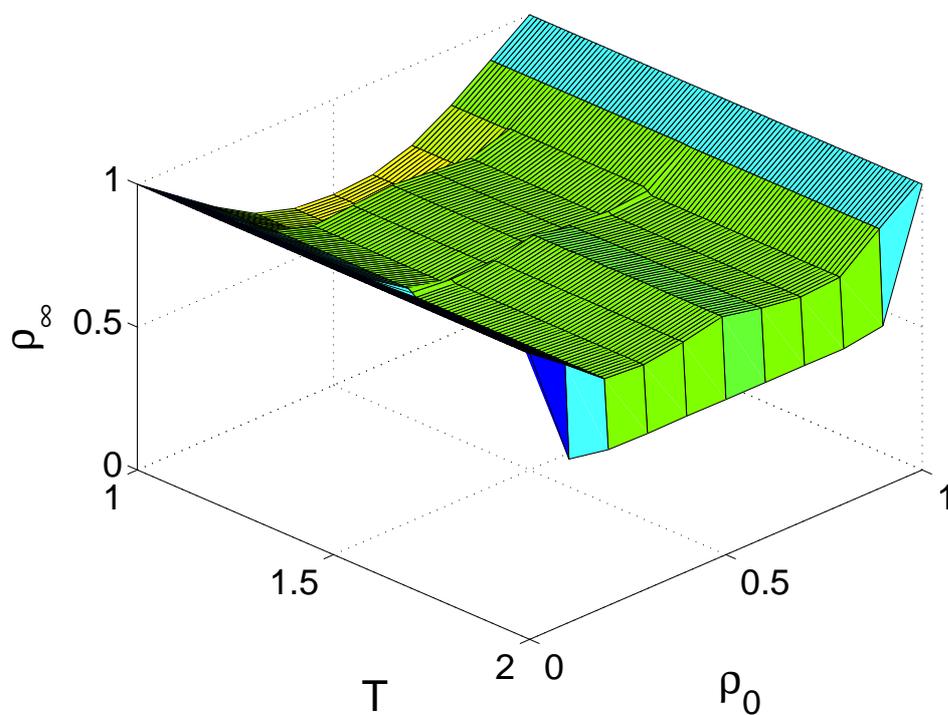
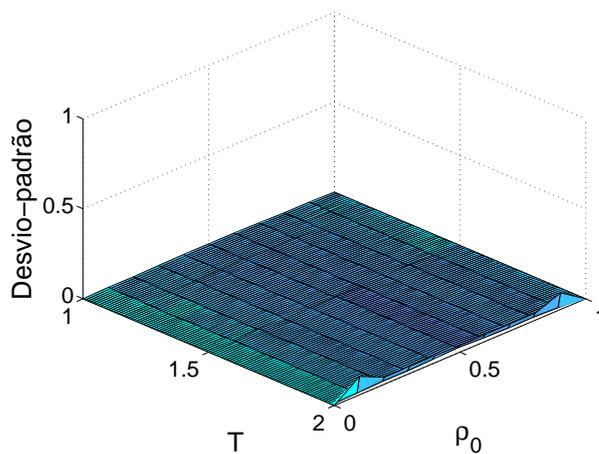


Figura B.13: Diagrama de fase, ρ_∞ (proporção estacionária de cooperadores) em função de T (tentação), ρ_0 (proporção inicial de cooperadores) e T (tentação) traçado como superfície. Nesta simulação $z = 14$ (sem auto-interação).



(a) $z = 15$



(b) Desvio-padrão para $z = 15$.

Figura B.14: Diagrama de fase, ρ_∞ (proporção estacionária de cooperadores) em função de T (tentação), ρ_0 (proporção inicial de cooperadores) e T (tentação) traçado como superfície. Nesta simulação $z = 15$ (com auto-interação).

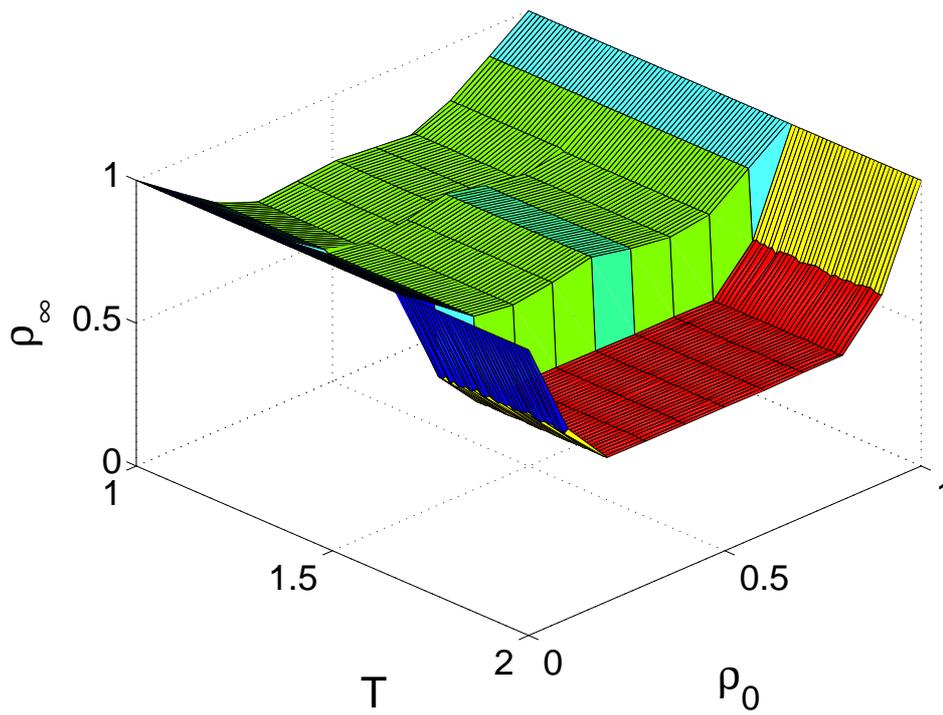
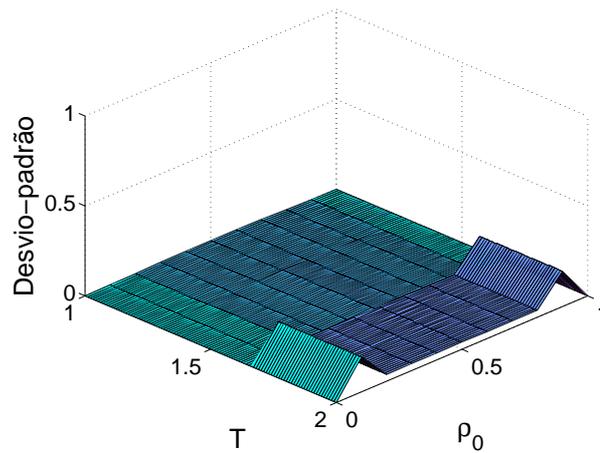
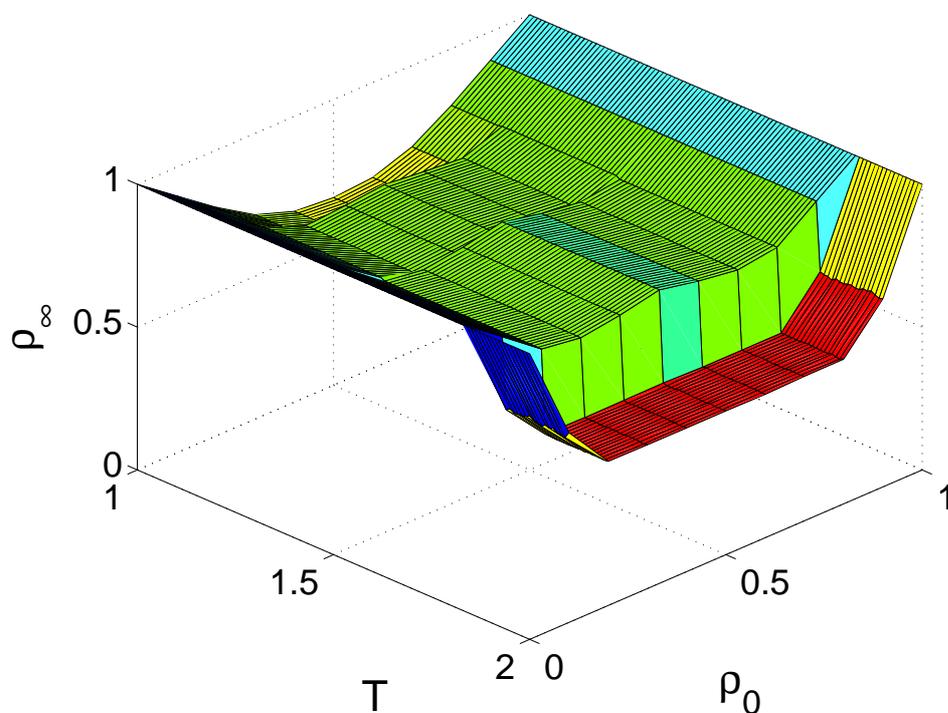
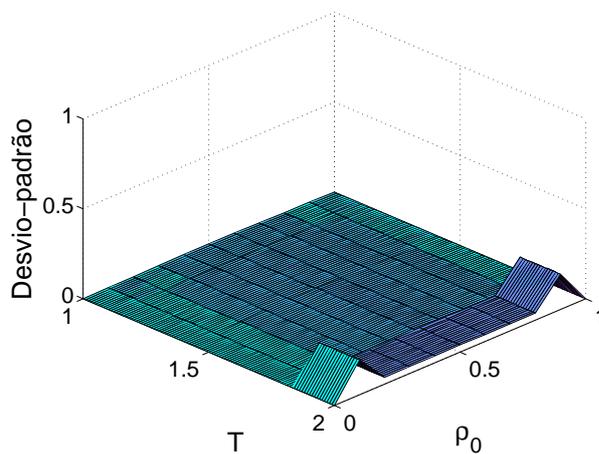
(a) $z = 16$ (b) Desvio-padrão para $z = 16$.

Figura B.15: Diagrama de fase, ρ_∞ (proporção estacionária de cooperadores) em função de T (tentação), ρ_0 (proporção inicial de cooperadores) e T (tentação) traçado como superfície. Nesta simulação $z = 16$ (sem auto-interação).



(a) $z = 17$



(b) Desvio-padrão para $z = 17$.

Figura B.16: Diagrama de fase, ρ_∞ (proporção estacionária de cooperadores) em função de T (tentação), ρ_0 (proporção inicial de cooperadores) e T (tentação) traçado como superfície. Nesta simulação $z = 17$ (com auto-interação).

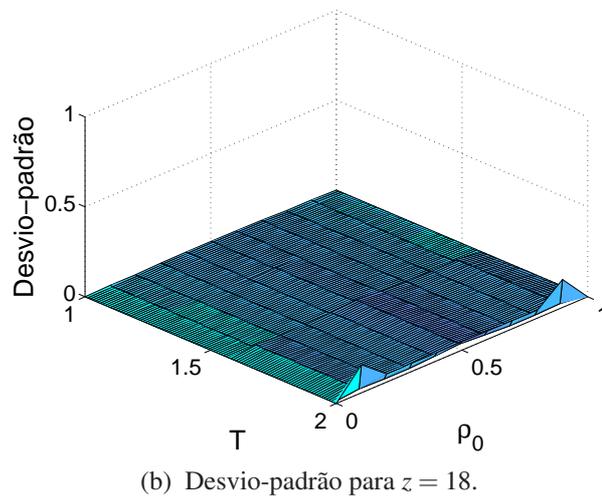
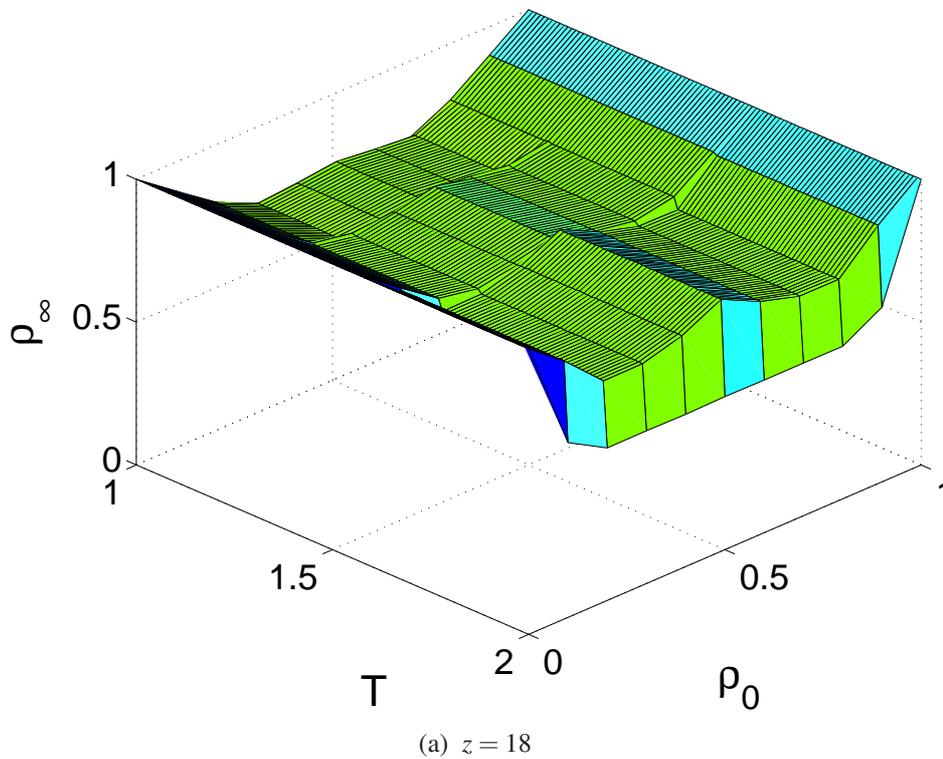
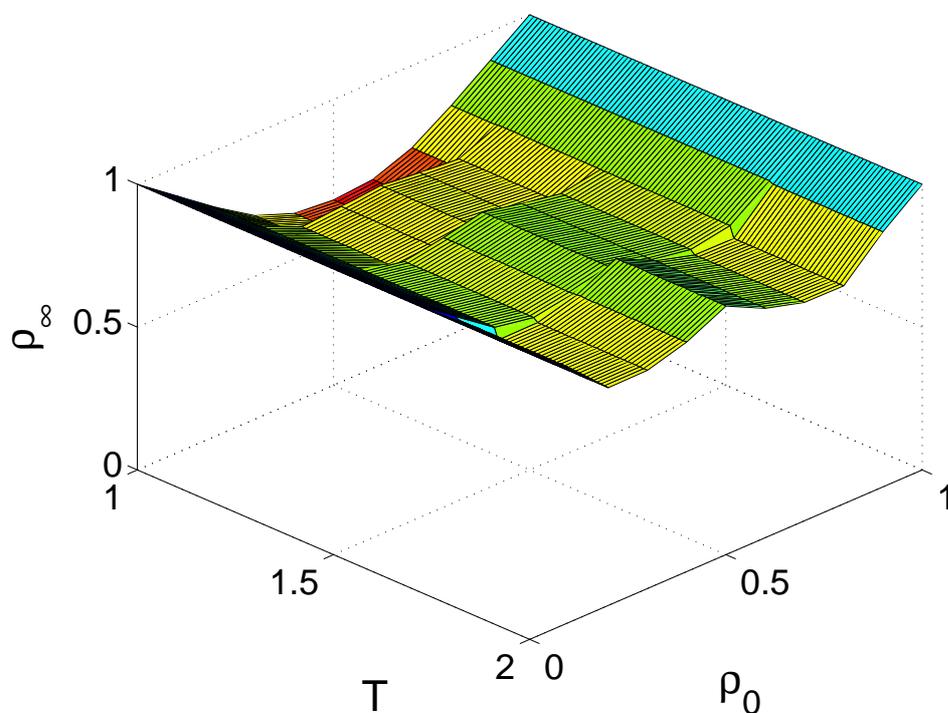
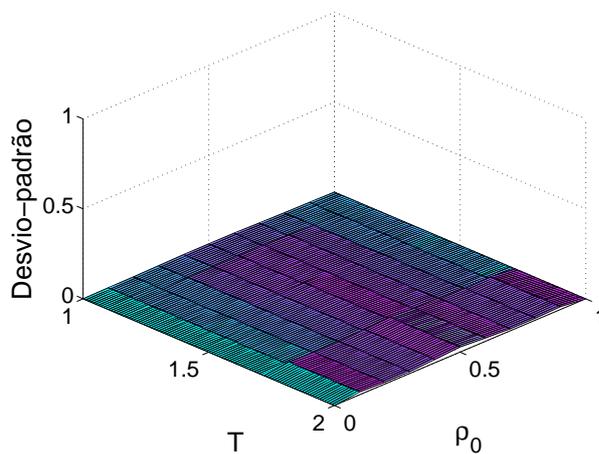


Figura B.17: Diagrama de fase, ρ_∞ (proporção estacionária de cooperadores) em função de T (tentação), ρ_0 (proporção inicial de cooperadores) e T (tentação) traçado como superfície. Nesta simulação $z = 18$ (sem auto-interação).



(a) $z = 19$



(b) Desvio-padrão para $z = 19$.

Figura B.18: Diagrama de fase, ρ_∞ (proporção estacionária de cooperadores) em função de T (tentação), ρ_0 (proporção inicial de cooperadores) e T (tentação) traçado como superfície. Nesta simulação $z = 19$ (com auto-interação).

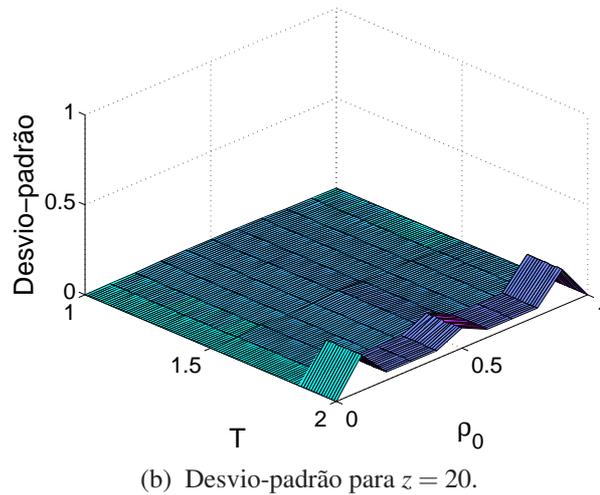
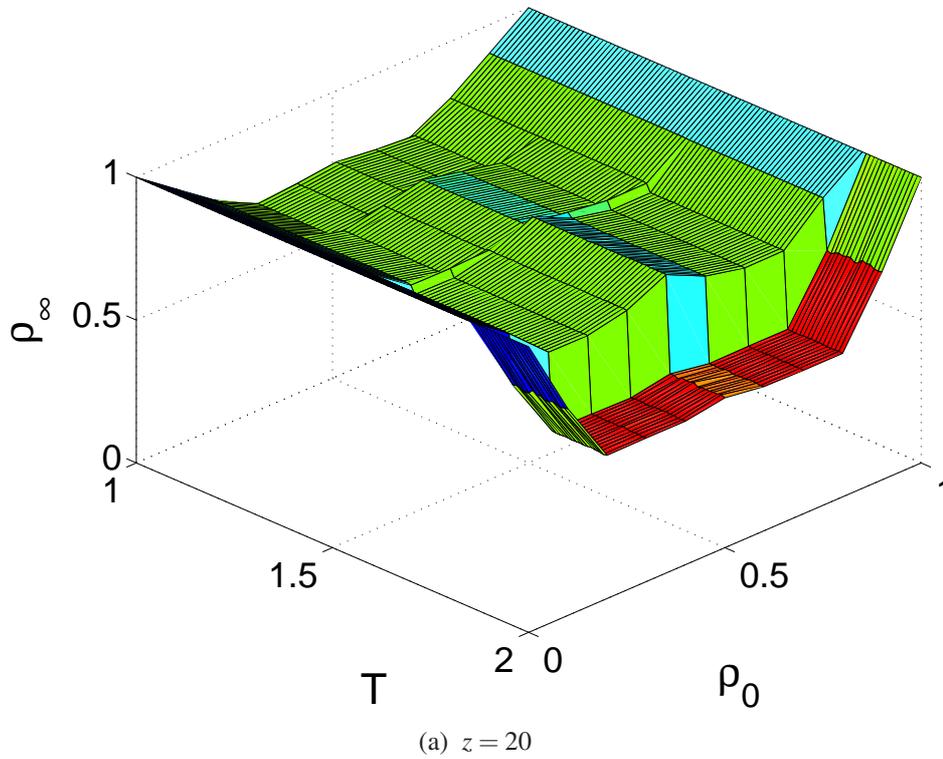


Figura B.19: Diagrama de fase, ρ_∞ (proporção estacionária de cooperadores) em função de T (tentação), ρ_0 (proporção inicial de cooperadores) e T (tentação) traçado como superfície. Nesta simulação $z = 20$ (sem auto-interação).

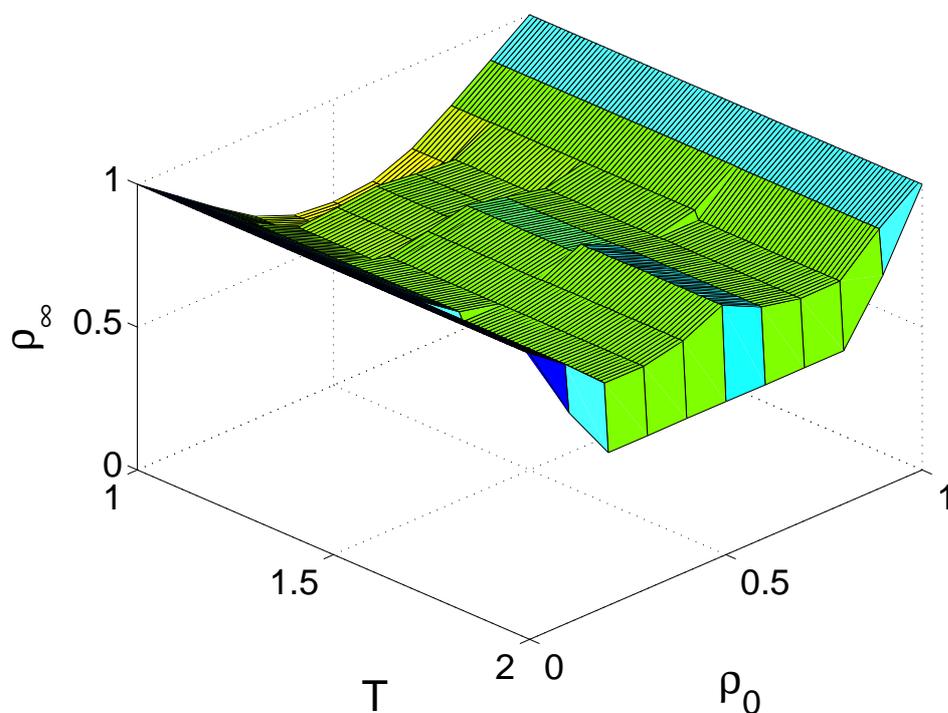
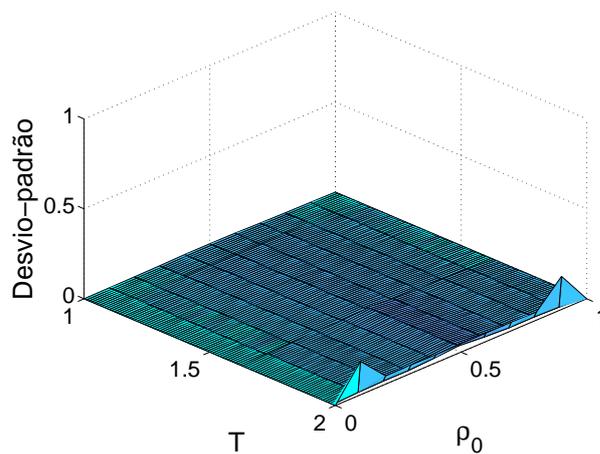
(a) $z = 21$ (b) Desvio-padrão para $z = 21$.

Figura B.20: Diagrama de fase, ρ^∞ (proporção estacionária de cooperadores) em função de T (tentação), ρ_0 (proporção inicial de cooperadores) e T (tentação) traçado como superfície. Nesta simulação $z = 21$ (com auto-interação).

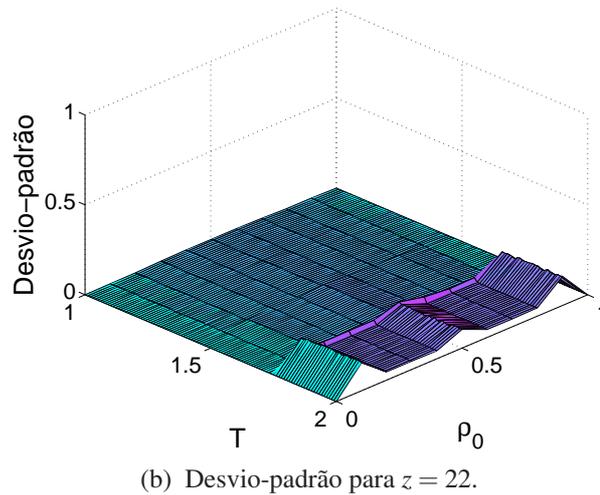
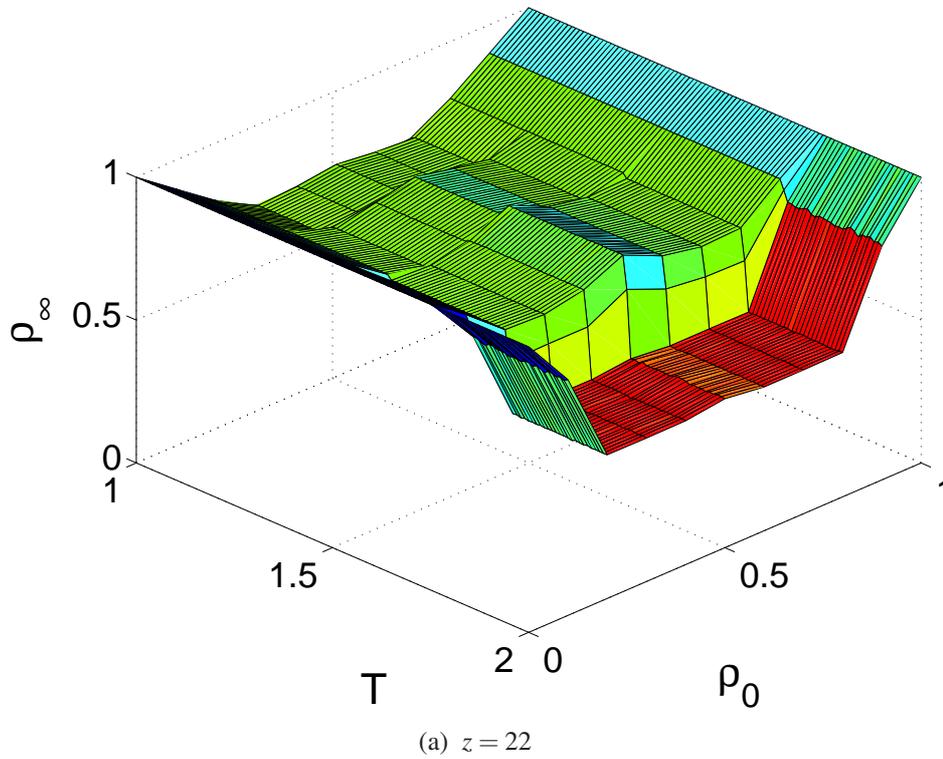


Figura B.21: Diagrama de fase, ρ_∞ (proporção estacionária de cooperadores) em função de T (tentação), ρ_0 (proporção inicial de cooperadores) e T (tentação) traçado como superfície. Nesta simulação $z = 22$ (sem auto-interação).

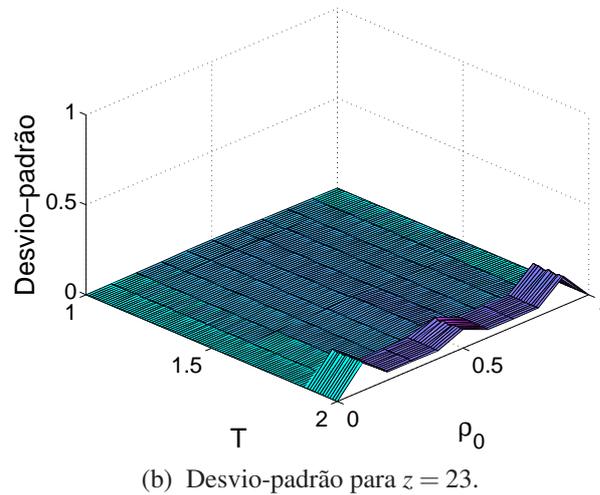
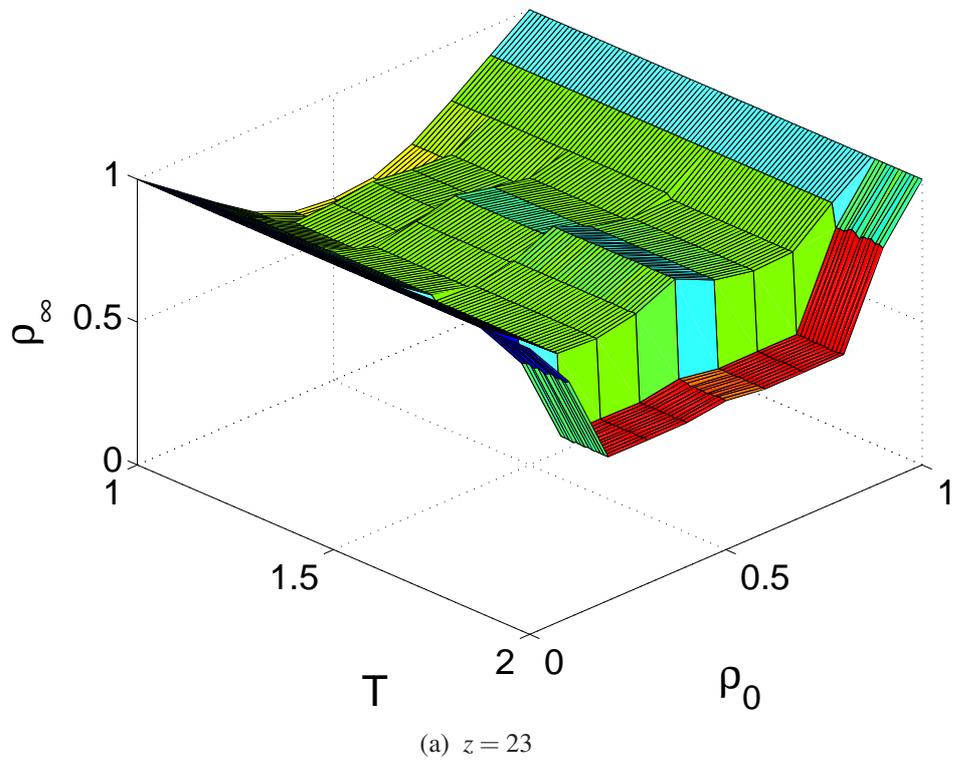


Figura B.22: Diagrama de fase, ρ_∞ (proporção estacionária de cooperadores) em função de T (tentação), ρ_0 (proporção inicial de cooperadores) e T (tentação) traçado como superfície. Nesta simulação $z = 23$ (com auto-interação).

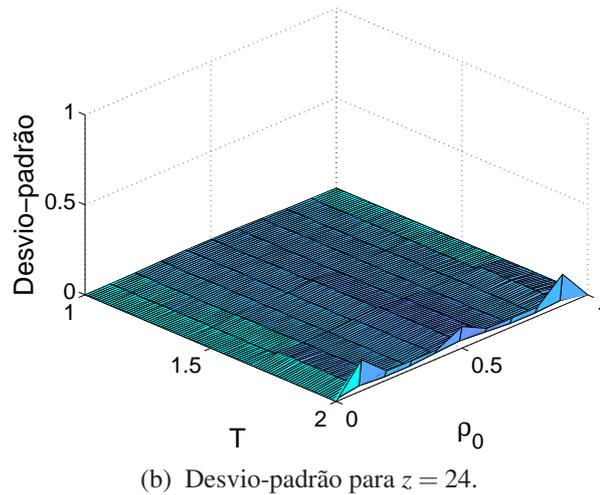
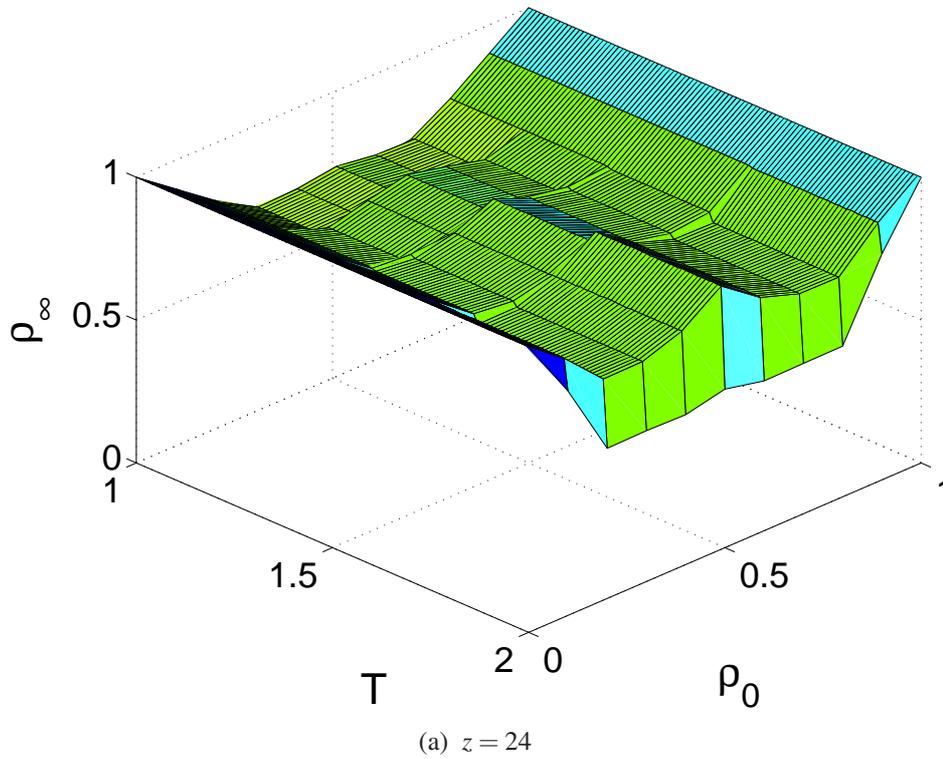
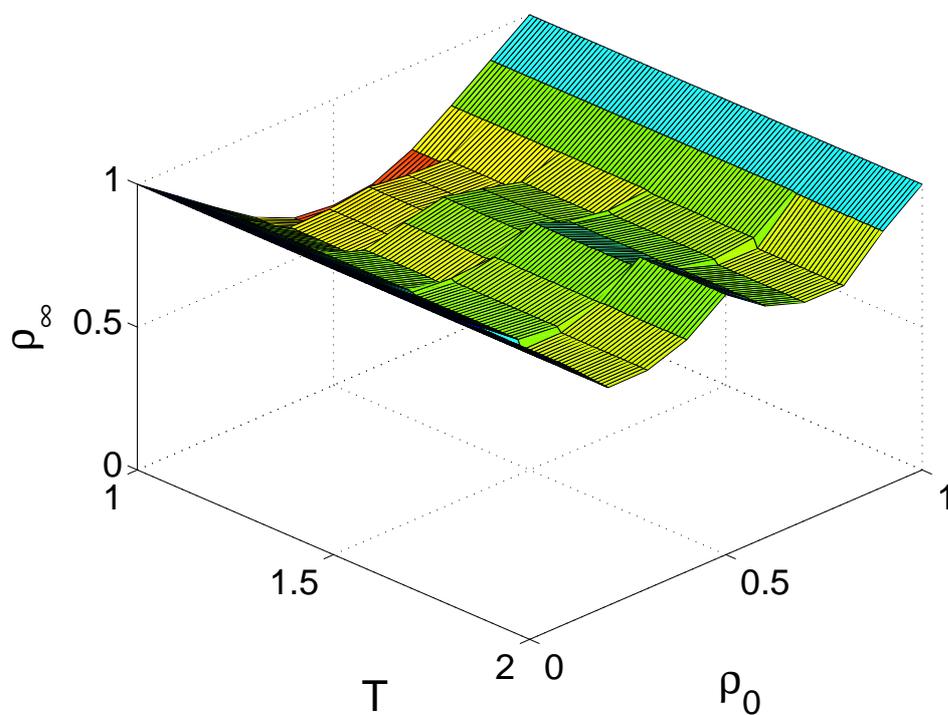
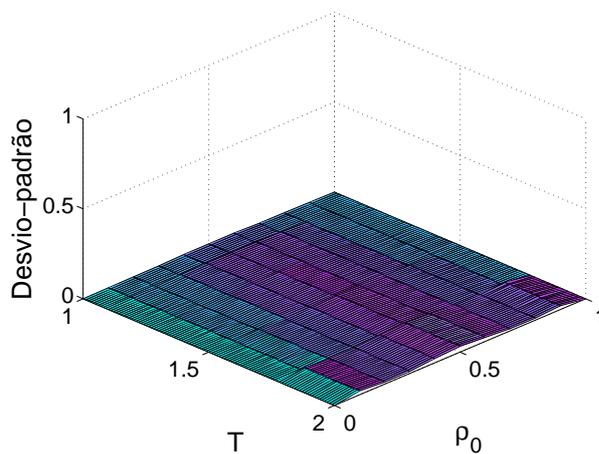


Figura B.23: Diagrama de fase, ρ_∞ (proporção estacionária de cooperadores) em função de T (tentação), ρ_0 (proporção inicial de cooperadores) e T (tentação) traçado como superfície. Nesta simulação $z = 24$ (sem auto-interação).



(a) $z = 25$



(b) Desvio-padrão para $z = 25$.

Figura B.24: Diagrama de fase, ρ_∞ (proporção estacionária de cooperadores) em função de T (tentação), ρ_0 (proporção inicial de cooperadores) e T (tentação) traçado como superfície. Nesta simulação $z = 25$ (com auto-interação).

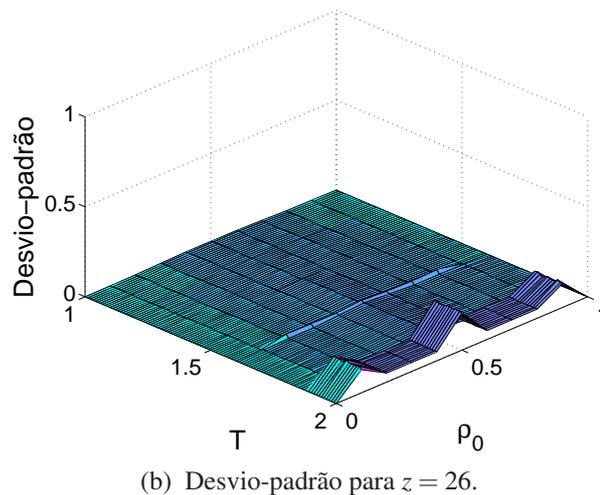
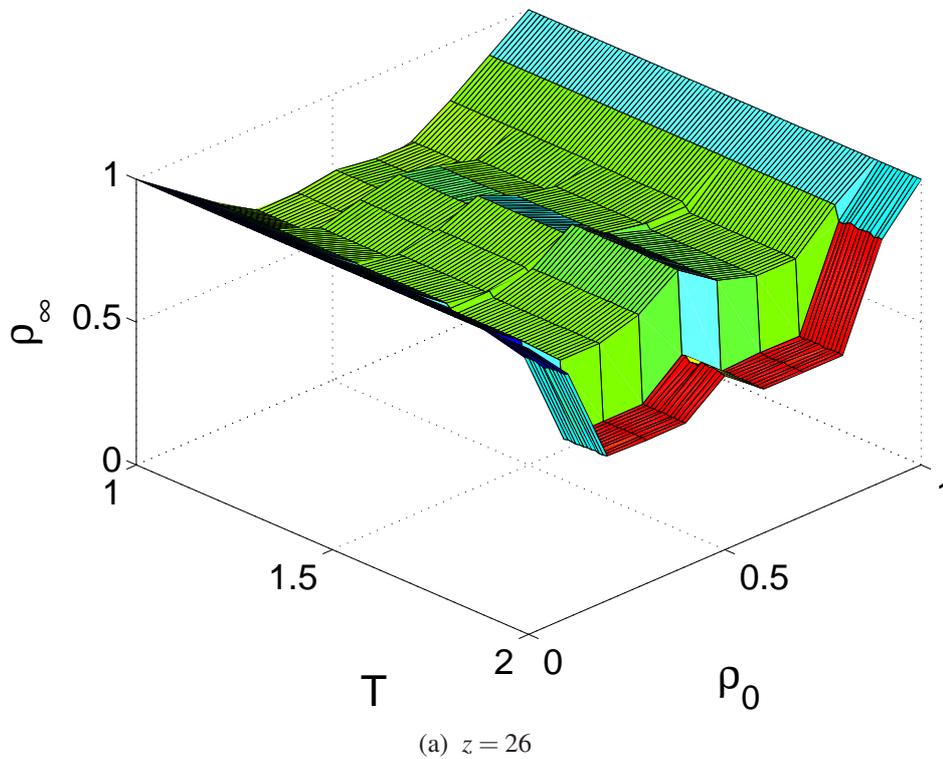
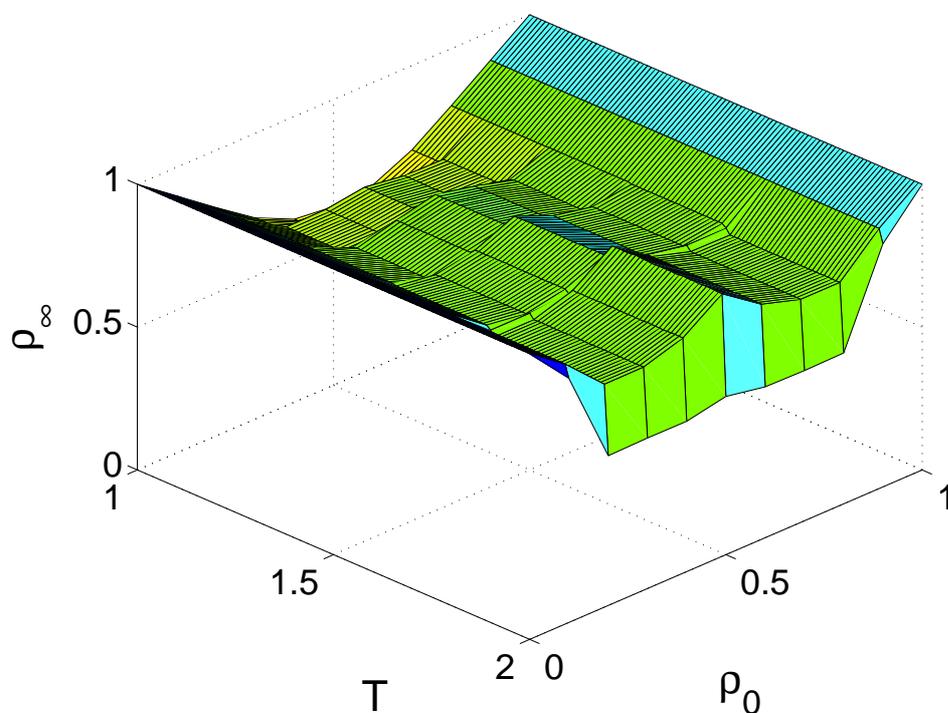
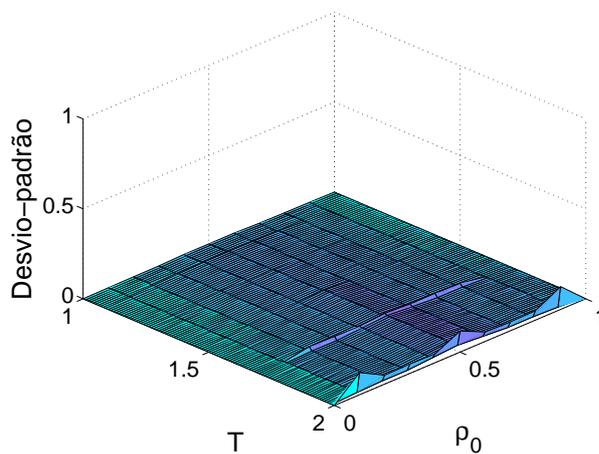


Figura B.25: Diagrama de fase, ρ_∞ (proporção estacionária de cooperadores) em função de T (tentação), ρ_0 (proporção inicial de cooperadores) e T (tentação) traçado como superfície. Nesta simulação $z = 26$ (sem auto-interação).



(a) $z = 27$



(b) Desvio-padrão para $z = 27$.

Figura B.26: Diagrama de fase, ρ_∞ (proporção estacionária de cooperadores) em função de T (tentação), ρ_0 (proporção inicial de cooperadores) e T (tentação) traçado como superfície. Nesta simulação $z = 27$ (com auto-interação).

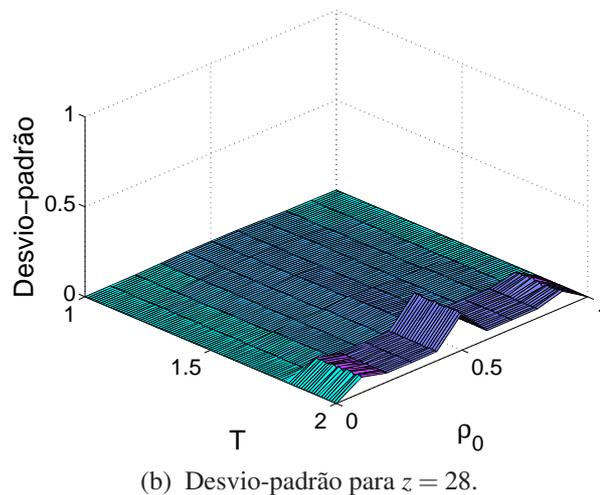
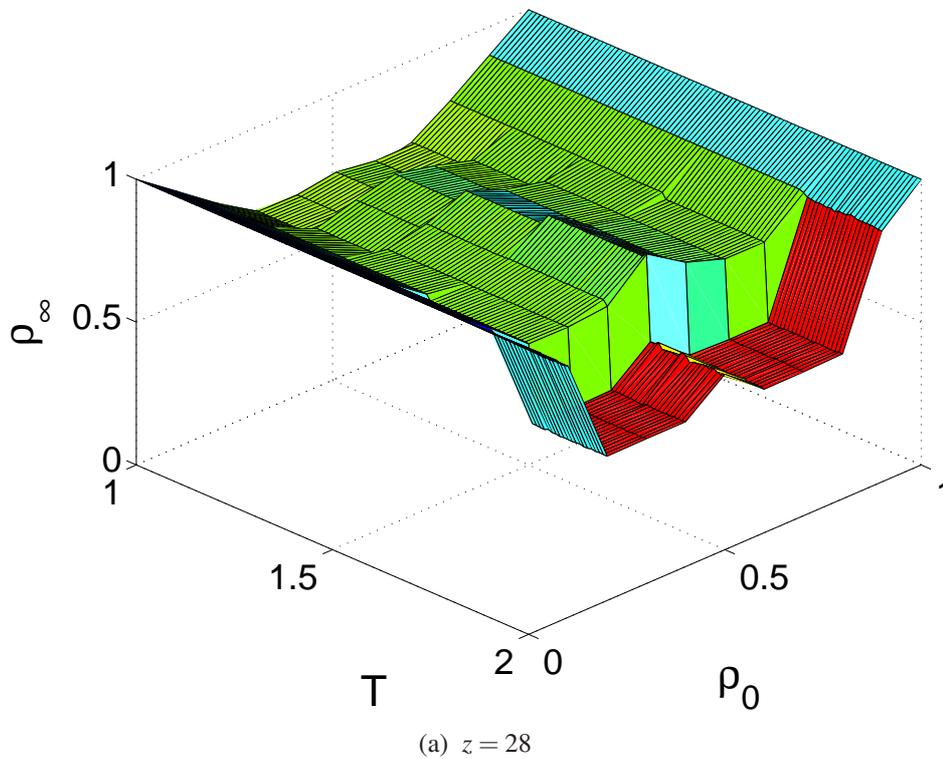
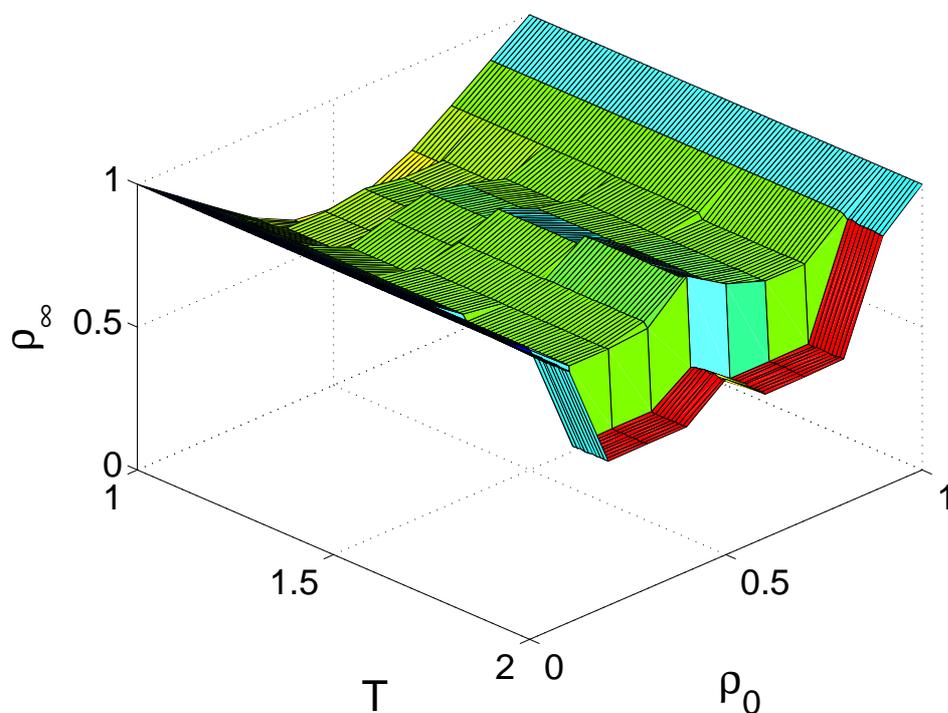
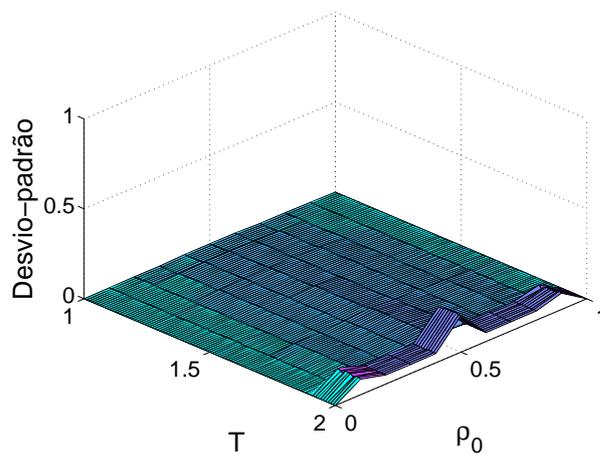


Figura B.27: Diagrama de fase, ρ_∞ (proporção estacionária de cooperadores) em função de T (tentação), ρ_0 (proporção inicial de cooperadores) e T (tentação) traçado como superfície. Nesta simulação $z = 28$ (sem auto-interação).



(a) $z = 29$



(b) Desvio-padrão para $z = 29$.

Figura B.28: Diagrama de fase, ρ_∞ (proporção estacionária de cooperadores) em função de T (tentação), ρ_0 (proporção inicial de cooperadores) e T (tentação) traçado como superfície. Nesta simulação $z = 29$ (com auto-interação).

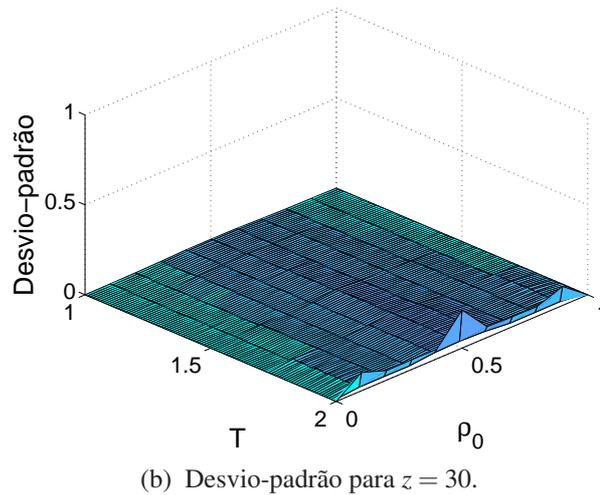
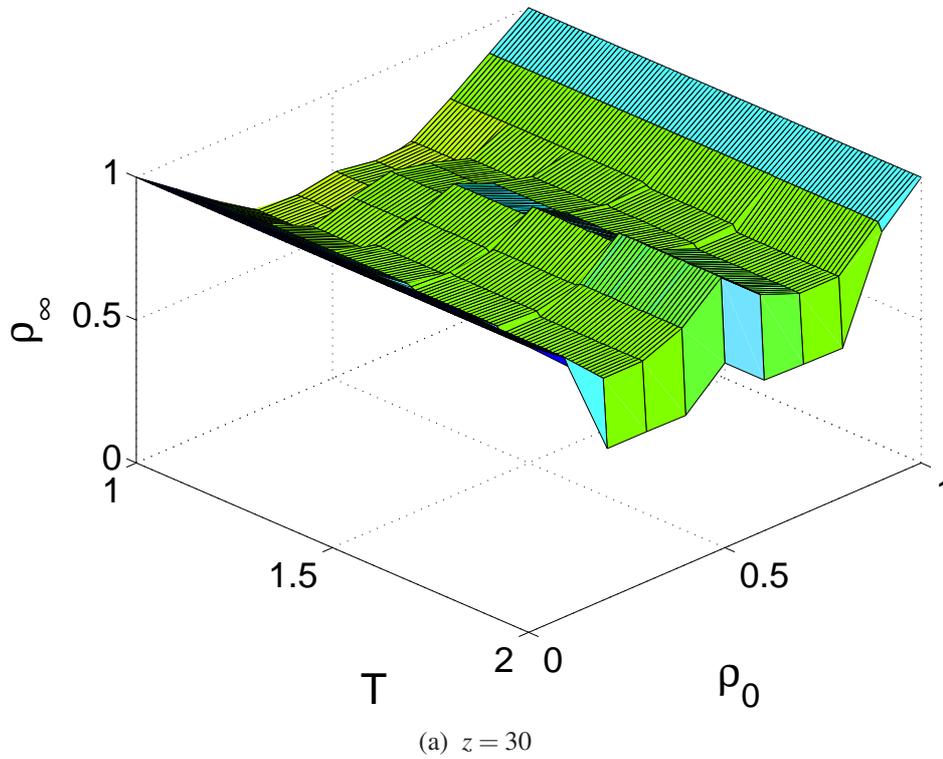


Figura B.29: Diagrama de fase, ρ_∞ (proporção estacionária de cooperadores) em função de T (tentação), ρ_0 (proporção inicial de cooperadores) e T (tentação) traçado como superfície. Nesta simulação $z = 30$ (sem auto-interação).

APÊNDICE C – Trabalhos aceitos para publicação

Neste Apêndice apresentamos os trabalhos [27, 24] que foram aceitos para publicação:

- *Prisoner's Dilemma in one-dimensional cellular automata: visualization of evolutionary patterns*, autores: M. A. Pereira, A. S. Martinez e A. L. Espíndola, no *International Journal of Modern Physics C*, onde mostramos a dinâmica de formação dos agrupamentos de cooperadores e como sua evolução temporal gera os padrões dos agrupamentos de cooperadores/desertores com seu comportamento oscilatório.
- *Exhaustive exploration of Prisoner's Dilemma parameter space in one-dimensional cellular automata*, autores: M. A. Pereira, A. S. Martinez e A. L. Espíndola, no *Brazilian Journal of Physics*, onde apresentamos os resultados da exploração exaustiva do espaço de parâmetros e mostramos a dependência da proporção estacionária de cooperadores com a paridade de z .

PRISONER'S DILEMMA IN ONE-DIMENSIONAL CELLULAR AUTOMATA: VISUALIZATION OF EVOLUTIONARY PATTERNS

MARCELO ALVES PEREIRA* and ALEXANDRE SOUTO MARTINEZ†

*Departamento de Física e Matemática
Faculdade de Filosofia Ciências e Letras de Ribeirão Preto
Universidade de São Paulo, Av. Bandeirantes, 3900, 14040-901
Ribeirão Preto, SP, Brazil
*marceloapereira@usp.br
†asmartinez@usp.br*

AQUINO LAURI ESPÍNDOLA

*Departamento de Física e Matemática
Faculdade de Filosofia Ciências e Letras de Ribeirão Preto &
Departamento de Medicina Social
Faculdade de Medicina de Ribeirão Preto, Universidade de São Paulo
Av. Bandeirantes, 3900, 14049-900, Ribeirão Preto, SP, Brazil
aquinoespindola@usp.br*

Received 26 August 2007
Revised 18 September 2007

The spatial Prisoner's Dilemma is a prototype model to show the emergence of cooperation in very competitive environments. It considers players, at sites of lattices, that can either cooperate or defect when playing the Prisoner's Dilemma with z other players. This model presents a rich phase diagram. Here we consider players in cells of one-dimensional cellular automata. Each player interacts with z other players. This geometry allows us to vary, in a simple manner, the number of neighbors ranging from one up to the lattice size, including self-interaction. This approach has multiple advantages. It is simple to implement numerically and we are able to retrieve all the results found in the previously considered lattices, with a faster convergence to stationary values. More remarkable, it permits us to keep track of the spatio-temporal evolution of each player of the automaton, giving rise to interesting patterns. These patterns allow the interpretation of cooperation/defection clusters as particles, which can be absorbed and collided among themselves. The presented approach represents a new paradigm to study the emergence and maintenance of cooperation in the spatial Prisoner's Dilemma.

Keywords: Prisoner's Dilemma; game theory; evolutionary dynamics; computational modeling; sociophysics.

PACS Nos.: 02.50.Le, 07.05.Tp.

1. Introduction

Games have been a source of amusement to mankind since the emergence of the first civilizations. Besides amusement, they are a branch of mathematics known as game theory, consolidated by J. von Neumann.¹ The main purpose of such theory is the determination of strategies to get the maximum returns in situations where multiple rational players have the same aim. The most prominent game, due to the emergence of cooperation among competitive rational players, is the *Prisoner's Dilemma* (PD), originally framed by M. Flood and M. Dresher in 1950.² Formalization of the game, with prison sentence payoffs and the name "Prisoner's Dilemma", is due to A. W. Tucker, when he wanted to make the ideas of Flood and Dresher more accessible to an audience at Stanford University in the same year.³

There are several problems that can be modeled using the PD game. In real life, there are many situations of conflict, i.e., where one person trying to reach his/her personal aim is incompatible with collective aims. Because PD is a conflict situation between two players, it is possible to make an analogy between the game and real life, e.g., in politics (sociophysics),⁴ economics (econophysics),^{5,6} and biology.⁷

In the classical version of PD, two players can either cooperate or defect. Under mutual cooperation players get a payoff R (reward), otherwise if they are defectors, the payoff is P (punishment). When a player cooperates and the other defects, they get S (sucker) and T (temptation), respectively. These payoff values must satisfy the inequalities: $T > R > P > S$ and $T + S < 2R$. The former relationship assures the existence of the dilemma, whereas the latter prevents a couple of players who alternate between cooperation and defection, from getting the same payoff or a payoff that is higher than a cooperative couple payoff.

In a single round game, the best choice for a rational player is to defect. Defection assures the largest payoff regardless of the other player's decision (Nash equilibrium). In successive rounds, one has the Iterated Prisoner Dilemma (IPD). In this case, the best choice is not necessarily defection; it is convenient only to retaliate a previous non-cooperative play. The IPD game became popular from the computer tournament proposed by Axelrod.^{8,9} This tournament intended to compare the strategies. It turned out that a simple strategy, with only one time step memory, called tit-for-tat (TFT), was by far the most stable one.

Nowak and May¹⁰ have shown the emergence of cooperation between players with strategies with no memory, in the presence of spatial structure. This version of the game is known as Spatial Prisoner's Dilemma (SPD). This is a simple, purely deterministic and spatial version of the classical PD, but it may generate chaotically changing spatial-temporal patterns, where cooperators and defectors coexist, with cooperator proportion oscillating indefinitely. This effect is present when each player interacts with its nearest neighbors. Adding interaction with the next nearest neighbors (corresponding to the chess king's move) the spatial patterns are smoother. The outcome is the final proportion of cooperators and defectors, and in the chaotic phase, it depends on the initial configuration and on the magnitude of

the parameter T . The spatial structure is the factor that explains the maintenance of cooperation.¹⁰ Here, cooperative/defective clusters are formed and evolve dynamically. The invasions of cooperative clusters by defectors, and vice versa, occur on the borders of the clusters. For this reason it is important to understand border effects. Furthermore, connectivity among players also plays an important role in the dynamics of the clusters.¹¹

The Prisoner's Dilemma has been studied in lattices with different topologies such as square lattice,¹⁰ graphs,¹² and also in complex networks as random graphs,¹¹ scale-free networks,¹³ and small-world networks.¹⁴ However, in the simplest lattice topology, i.e., a one-dimensional lattice, studies have not been carried out, possibly due to its apparent simplicity and also because of simple behavior when only next nearest neighbors are considered. Beyond topologies, the mobility of players can also be considered.¹⁵

Here we study the PD using the one-dimensional lattice with a variable number of interacting neighbors. This geometry allows us to vary, in a simple manner, the number of neighbors ranging from one, up to the lattice size. In this lattice, the cooperative/defective clusters are localized. It is simpler to understand the invasions, which can occur only on the two borders of the one-dimensional cooperative/defective clusters. The computational implementation of PD in the one-dimensional case is simpler than in a square or honeycomb lattices for instance, and it requires less computational time to process the numerical code.

Another relevant result of the PD implementation in one-dimensional automata is the emergence of patterns similar to those observed in the cellular automata theory.¹⁶ There is also the possibility of understanding the role of local interaction easily, furnishing a new perspective in the study of the PD. There are four basic qualitative classes of behavior that empirically characterize the cellular automata, whose time evolution generates different outcomes. Class 1, leads to a homogeneous state where all the cells get the same state. Class 2, leads to a set of stable or periodic structures that are separated and simple. Class 3, leads to the formation of chaotic pattern. Class 4, leads to complex structures, sometimes long-lived.¹⁶

In this paper, we present the IPD in cellular automata, where the number of interactions among the players can vary. After introducing the model in Sec. 2, we show its equivalence with previous models. Furthermore, we explore the fact that we are able to keep track of time evolution to study the invasion dynamics of cooperative clusters by defectors. The found patterns are presented in Sec. 3. Final remarks are presented in Sec. 4.

2. The Model

In our model, we consider cellular automata in a one-dimensional lattice, with L cells. Each cell (grid position) corresponds to one player with two possible states: $\theta = 1$ for cooperator and $\theta = 0$ for defector. The automata have no empty cells, so

cooperators and defectors have the proportions $\rho_c(t) = (1/L) \sum_{i=1}^L \theta_i(t)$ and $\rho_d(t)$, respectively, which implies $\rho_c(t) + \rho_d(t) = 1$.

The initial proportion of cooperators, $\rho_c(0) \equiv \rho_0$, with $0 < \rho_0 < 1$, is an important parameter in the problem. The distribution of these ρ_0 cooperators in the lattice is random with a uniform distribution. This initial distribution is the only stochastic variable in the model.

The number of players that interact with player i is given by $z = (1, 2, \dots, L)$. The neighborhood z can be *symmetric* or *asymmetric*. For a *symmetric* neighborhood, if z is even, there are $\alpha = z/2$ adjacent interacting players to the right-hand side and α to the left-hand side of the player i . If z is odd, each side has $\alpha = (z-1)/2$ players and player i interacts against his/her own state (self-interaction). For an *asymmetric* neighborhood, if z is even, there are α_r adjacent interacting players to the right-hand side and α_l to the left-hand side of the player i , where $\alpha_r + \alpha_l = z$. If z is odd, moreover the α_r and α_l neighbors, the player i interacts against his/her own state (self-interaction), where $\alpha_r + \alpha_l = z - 1$. Nowak and May¹⁷ argue that the self-interaction makes sense if several animals (a family) or molecules occupy a single patch. Most of the studies do not show clearly how self-interaction works. Despite the fact that the short time and asymptotic behavior of ρ_c are similar with or without self-interaction, the intermediate temporal behavior is different as shown in Ref. 18.

The player's conflict between cooperation or defection, is well defined by the payoff parameters. Nowak and May¹⁰ used modified Tucker's values, i.e., $R = 1$ and $S = P = 0$, leaving only one free parameter, the temptation T . The conditions $T > R > P > S$ and $T + S < 2R$ are relaxed ($P = S$, and when $T = 2$, $T + S = 2R$) without any harm. Due to these new values, the conflict range is set to $1 < T < 2$. The macroscopic regimes also depend on the z values.

Consider the players i and j playing the PD in the cellular automata. Player i has a payoff due the interaction with player j given by

$$g_{\theta_i, \theta_j} = \theta_i \theta_j + T(1 - \theta_i \theta_j) \theta_j. \quad (1)$$

The total payoff, P_i , of the player i is:

$$P_i = \sum_{j=1}^z g_{\theta_i, \theta_j}. \quad (2)$$

We stress that the model dynamics is totally deterministic. Starting from the left-hand side to the opposite one, player i will compare P_i to P_k , where P_k is the payoff of the k -th neighbor, where $k = (1, 2, \dots, z)$. As mentioned before, only if z is odd there will be an extra payoff component g_{θ_i, θ_i} due to self-interaction. During the payoff comparison process, two situations can occur:

- (i) if $P_i \geq \max(P_k)$, player i will keep the current state; or
- (ii) $P_i < \max(P_k)$, then player i will adopt the state of the player j , which is the one with highest payoff in the k set.

The states of the players are updated synchronously until the system reaches a stationary or a dynamical equilibrium state. The process described here is known as Darwinian evolutionary strategy. There are also other evolutionary strategies that can be adopted, such as Pavlovian.²⁰

Notice the dependence of $\rho_c(t, T, \rho_0, z)$ on time, temptation, initial proportion of cooperators, and number of interacting players. The dependence of ρ_c as function of ρ_0 is frequently neglected. The dependence on z is also neglected due to fixed lattice restriction. When system reaches a steady state, the asymptotic proportion of cooperators, $\rho_\infty(T, \rho_0, z)$, represents the final phase of the system for the set of parameters (T, ρ_0, z) . According to Ref. 10, three different qualitative regimes are well defined, as functions of T , for the system with $z = 9$. For lower [upper] values of T , $1 < T < 4/3$ [$3/2 < T < 2$], the asymptotic values for the proportion of cooperators, ρ_∞ is stationary or slightly periodical and is a majority ($\rho_\infty > 0.5$) [minority ($\rho_\infty < 0.5$)]. For intermediate values of T , ($4/3 < T < 3/2$), $\rho_\infty(T)$ is non-stationary, even rendering spatial-temporal chaos because of its strong dependence on the initial configurations.¹⁰

The strong dependence of ρ_∞ on z can be understood by observing the microscopic states and counting the number interacting cooperators in the neighborhood c of a given player, where $0 \leq c \leq z$. From Eq. (1) one can see that when player i interacts with c_i cooperators of the neighborhood of z players, his/her payoff is:¹¹

$$P_i^{(c_i)}(\theta_i) = [T - (T - 1)\theta_i]c_i. \quad (3)$$

Some useful relations follow immediately from Eq. (3): for a cooperator $P_i^{(c_i)}(1) = c$, whereas for a defector $P_i^{(c_i)}(0) = cT$. For $T > 1$, $P_i^{(c_i)}(0) > P_i^{(c_i)}(1)$ and $P_i^{(c)}(\theta) \geq P_i^{(c-1)}(\theta)$. Transitions in $\rho_\infty(T)$ occur when temptation on the border of the cooperative cluster cross a threshold value. In the conflict range, these transitions, $1 < T < 2$, are controlled by:¹¹

$$T_c(n, m) = \frac{z - n}{z - n - m}, \quad (4)$$

where $0 \leq n < z$ and $1 \leq m \leq \text{int}[(z - n - 1)/2]$ are integers.

3. Results

In our simulations, we have used one-dimensional cellular automata with $L = 1000$ cells in which $L\rho_0$ are cooperators and the remaining cells are set as defectors. To avoid dependence on the initial configurations, the values of the asymptotic proportion of cooperators, ρ_∞ , are mean values of ensembles of 1000 realizations. The comparison between preliminary results obtained with $L = 1000$ and $L = 10000$ has shown that $L = 1000$ is sufficiently large to study the behavior of ρ_c . From now on, all the results of ρ_∞ correspond to simulations performed in cellular automata with $L = 1000$.

In general, the results are quite similar to those obtained with square lattices, but in the one-dimensional case it is possible to explain, in a simple way, the invasion

process and the periodic oscillation that occurs in the steady state, as well as to keep track of the system history. The patterns existing between the cooperative/defective clusters are consequences of the local interaction of the players. Therefore, observing the time evolution, we can understand the effects of local interactions. Thus, in the following, we will qualitatively describe the way in which the interactions generate the patterns.

In the first time step, $t = 0$, the states of the players are set. In $t = 1$, the proportion of cooperators decreases, because defectors have higher payoffs, caused by exploiting cooperators. Exploited players (cooperators) replicate the winners' behavior, in this case, defectors. Thus, these exploited cooperators become defectors; consequently the proportion of defectors increases. These defectors form defective clusters, creating a border between cooperative and defective clusters. Notice that these defective clusters are very inconvenient for their members, because the payoff of each player can be lower than the payoff obtained by the players in cooperative clusters due to the relations $P_i^{(c_i)}(0) > P_i^{(c_i)}(1)$ and $P_i^{(c)}(\theta) \geq P_i^{(c-1)}(\theta)$, from Eq. (3). This situation is known as The Tragedy of the Commons.²¹ If the defectors on the cooperative/defective border have a higher (lower) payoff than the cooperators, then cooperators (defectors) will switch their states to defectors (cooperators) and the defective cluster grows (diminishes): in evolutionary terms this means that defectors (cooperators) are being replicated. This is the way that invasions of clusters take place. Due to the connectivity of the players on the border of cooperative/defective clusters the activity of automata occurs on the borders.

In Fig. 1 the time evolution of the proportion of cooperators, $\rho_c(t)$, is plotted for $z = 9$, with self-interaction, and for $z = 8$, without self-interaction. One sees

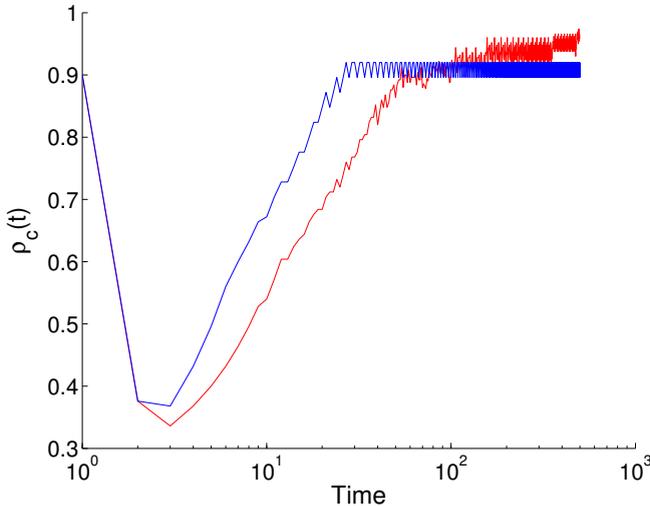


Fig. 1. Time evolution of the proportion of cooperators in one-dimensional cellular automata for z symmetry. $\rho_0 = 0.9$, $T = 1.60$, $z = 9$ (with self-interaction) and $z = 8$ (without self-interaction).

that in the initial time steps, $\rho_c(t)$ decays abruptly, increases quickly in the next steps, and finally oscillates around a fixed mean equilibrium value.

In the literature¹⁰ about PD this behavior is similar, but when $\rho_c(t)$ increases there is an overshooting and then it decreases to the fixed mean equilibrium value. This indicates that the observed overshoots in the previous systems are due to strong fluctuations of the cooperative/defective clusters that are more susceptible to occur in higher dimensional systems. In our case, the system converges faster to the asymptotic regime than in square lattice PD for instance.

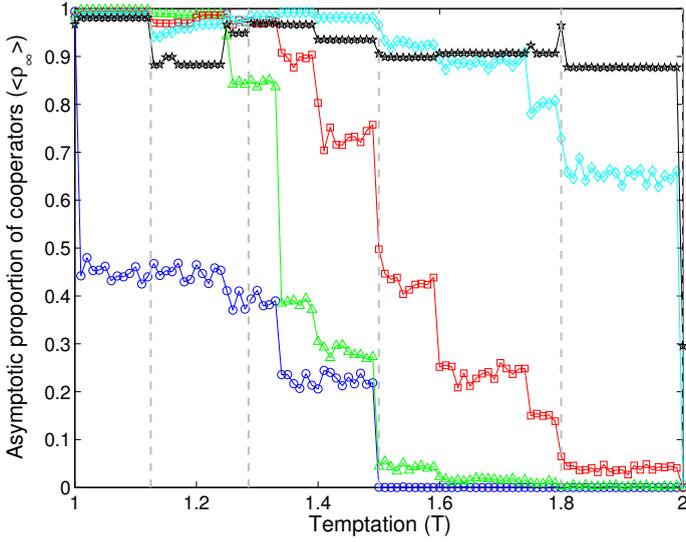
In Figs. 2(a) and 2(b), one checks the relation given by Eq. (4). For instance, in Fig. 2(a) ($z = 9$, $n = 0$ and $m = 4$) there is self-interaction. The transitions in ρ_∞ can be seen when the parameter T passes through the thresholds of a critical temptation, T_c . For $z = 9$, the coexistence region of cooperation/defection is in the range $9/5 < T < 2$, and the defection region starts at $T = 2$. Otherwise, if the players do not self-interact [see Fig. 2(b)] ($z = 8$, $n = 1$ and $m = 3$), the region of coexistence of cooperation/defection is in the range $8/5 < T < 5/3$, i.e., close to the middle of the conflict region $1 < T < 2$. The inclusion of self-interaction implies higher ρ_∞ values, which means that cooperation prevails when self-interaction is included. Neglecting self-interaction, ρ_∞ reaches lower values, but steady state and transient regimes are not drastically modified, which validates the results of Ref. 18.

In the initial steps after the formation of cooperative/defective clusters, they form patterns like triangles. Figures 3, 4(a), 5, 6(a), and 7(a) show some examples of the dynamics of pattern formation. The bases of these triangles are the initial cooperative/defective clusters, and the triangles' slopes depend on the parameters set in the simulation. As time evolves, these triangles becomes narrower, and the cooperators/defectors inside them can eventually be extinguished. If the cooperators/defectors do not extinguish, they can generate more persistent structures: the fingers and the gliders.

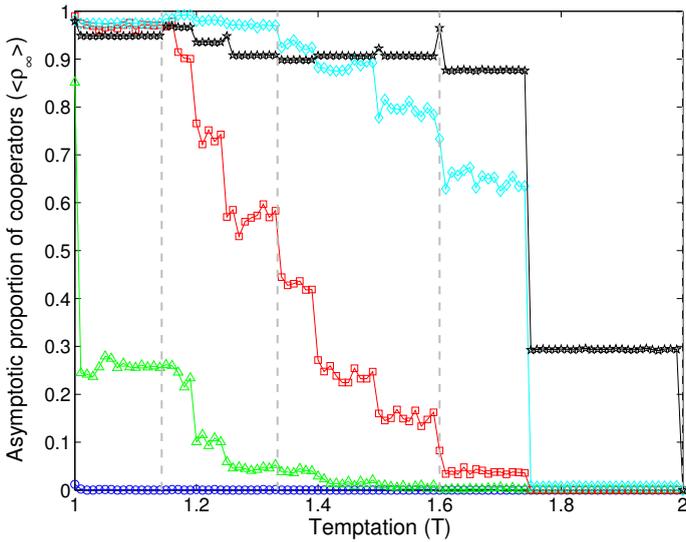
A finger is a pattern that extends itself across the system as a straight line originating from the end of the triangle. Its edge may be flat or rough. Rough edges can be complex, a saw-tooth for example, presenting important features such as periodicity and reflection.

In its turn, a glider is a pattern that travels across the system and it can collide with other patterns. It can also be used to transmit information over long distances.¹⁶ It seems a sloped finger, and was originally described in the Life Game,²² where it represented a spaceship that travels diagonally.

The origin of the finger, glider, and also the gliders' slope, depends on the number of defectors in their origin, being essentially determined by z and T . Some gliders can be observed in Figs. 3, 4(a), 5, 6(a), and 7(a). Notice that gliders can coexist with triangles as shown in Fig. 3. In this figure one can also see cooperator gliders that travel inside the defector triangles, but in the mirrored direction of defector gliders. Also, observe that a glider can either propagate continuously in spatio-temporal evolution or by jumps as shown in Fig. 4(b), that



(a)



(b)

Fig. 2. Asymptotic proportion of cooperators (ρ_∞) as function of temptation (T) for z symmetry. Vertical dashed lines denote transition values, T_c . (a) System with $z = 9$ (with self-interaction). (b) System with $z = 8$ (without self-interaction). Stars: $\rho_0 = 0.9$. Diamonds: $\rho_0 = 0.7$. Squares: $\rho_0 = 0.5$. Triangles: $\rho_0 = 0.3$. Circles: $\rho_0 = 0.1$.

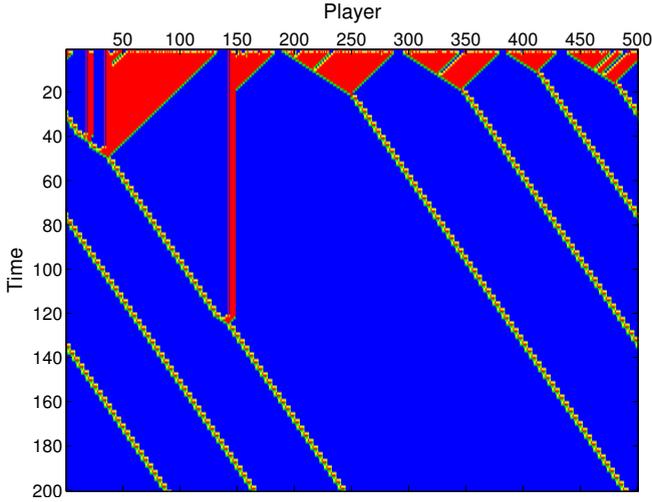


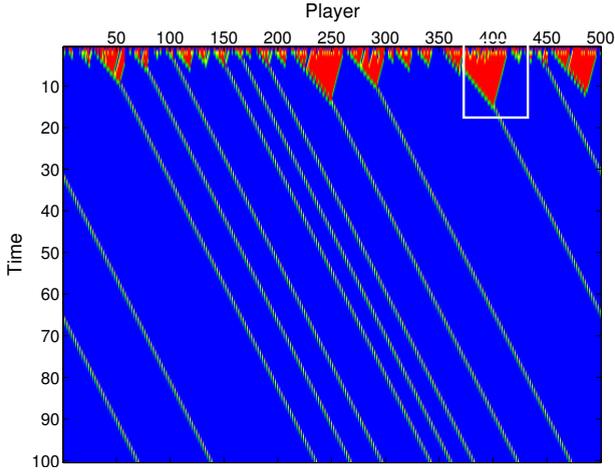
Fig. 3. Time evolution of the PD in one-dimensional cellular automata for z *asymmetry*. Time evolves from top to bottom. Each vertical line is the evolution of the states of the player i . Blue (dark gray): cooperators. Red (medium gray): defectors. Green (light gray): currently cooperators that were defectors in the previous time step. Yellow (lighter gray): currently defectors that were cooperators in the previous time step. The parameters in this simulation are $L = 500$, time = 500, $T = 1.40$, $\rho_0 = 0.7$, and $z = 7$ (with self-interaction).

is, a magnification of the area marked by a square in Fig. 4(a). The propagation of jumps occurs only for the *asymmetric* neighborhood; the *symmetric* neighborhood generates continuous patterns.

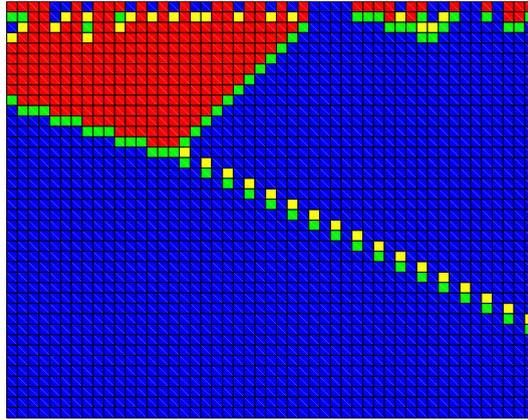
There are several types of intersections among these patterns. For instance, we mention collisions: glider–triangle, glider–finger and glider–glider. Fingers do not collide with fingers because they evolve parallel to each other. Glider–glider collision is present only in the *asymmetric* neighborhood; for the *symmetric* neighborhood the gliders have the same slope, so they do not collide. Observe the collisions of glider–triangle in Fig. 3 around player 50, time 50; glider–finger in [Figs. 6(b)3]; and glider–glider in Fig. 7(b). When a glider collides with another pattern there are several possible outcomes:

- (i) it can be absorbed [Fig. 6(b)3],
- (ii) it absorbs the other pattern [Fig. 6(b)4],
- (iii) it interacts with the pattern yielding a different pattern from the original ones,
or
- (iv) they are annihilated (Fig. 7).

If the glider is absorbed, or it absorbs the other pattern, the emergent pattern can keep its original direction or drift if it is a finger; or it can keep or change its original slope if it is a glider.



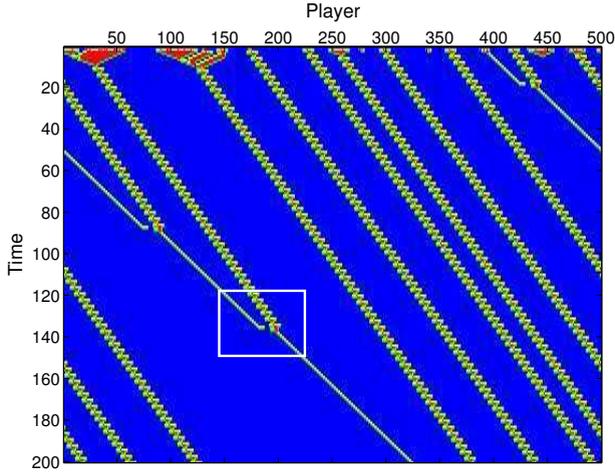
(a)



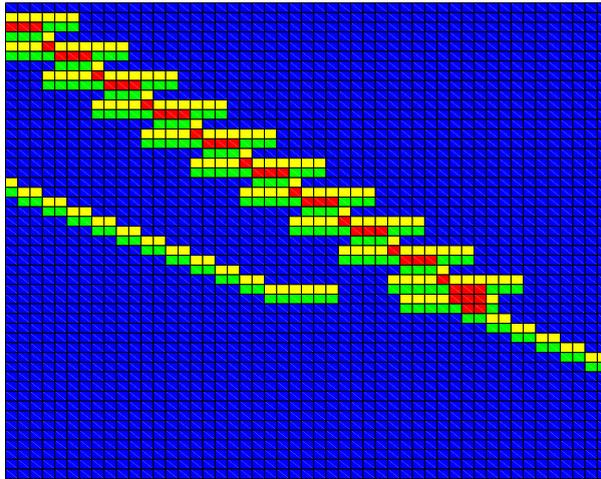
(b)

Fig. 4. (a) Time evolution of the PD in one-dimensional cellular automata for *z asymmetry*. Time evolves from top to bottom. Each vertical line is the evolution of the states of the player *i*. Blue (dark gray): cooperators. Red (medium gray): defectors. Green (light gray): currently cooperators that were defectors in the previous time step. Yellow (lighter gray): currently defectors that were cooperators in the previous time step. (b) Magnification of the regions marked above shows a glider that travels in jumps. The parameters in this simulation are $L = 500$, $T = 1.20$, $\rho_0 = 0.5$, and $z = 5$ (with self-interaction).

The glider can also interact with other patterns without collision among them, in the case of the *asymmetric* neighborhood. This is the case of a long range interaction around it. Figure 5(b) exemplifies the long range interaction of two gliders. The defective gliders drift to the right-hand side because player states are updated from the left to the right-hand side. If they were updated on the other side the drift would be to the left-hand side.



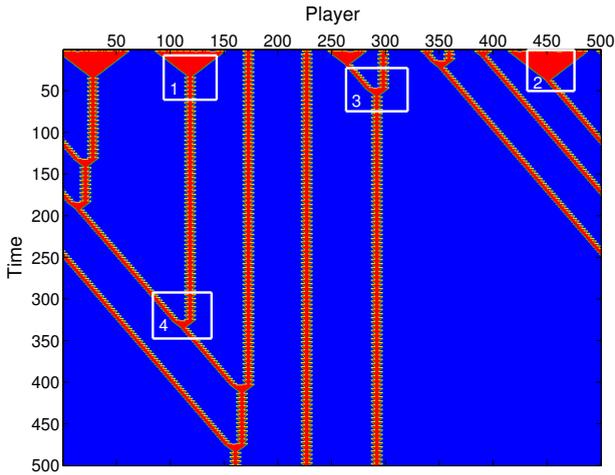
(a)



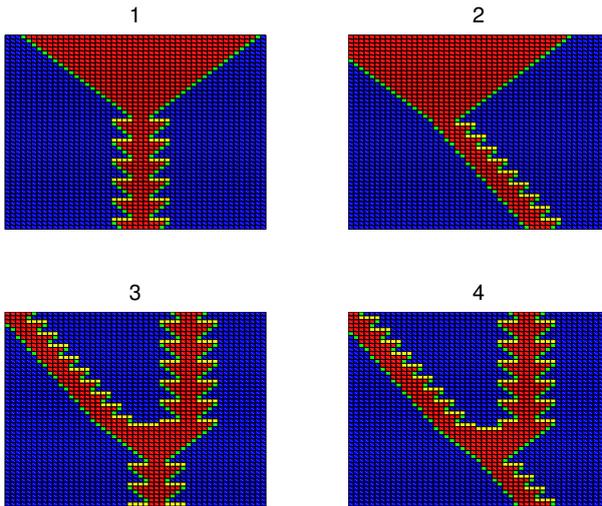
(b)

Fig. 5. (a) Time evolution of the PD in one-dimensional cellular automata for z asymmetry. Time evolves from top to bottom. Each vertical line is the evolution of the states of the player i . Blue (dark gray): cooperators. Red (medium gray): defectors. Green (light gray): currently cooperators that were defectors in the previous time step. Yellow (lighter gray): currently defectors that were cooperators in the previous time step. (b) Magnification of the region marked above shows the long range interaction of the glider. The parameters in this simulation are $L = 500$, time = 500, $T = 1.20$, $\rho_0 = 0.9$, and $z = 11$ (with self-interaction).

In brief, three scenarios come out as result of these local interactions. Firstly, defective clusters grow until complete extinction of cooperators, reaching a defective phase, $\rho_\infty = 0$. Secondly, defective clusters grow and dominate the system, but cooperators are not extinguished, resulting in a defective phase, $0 < \rho_\infty < 0.5$, as

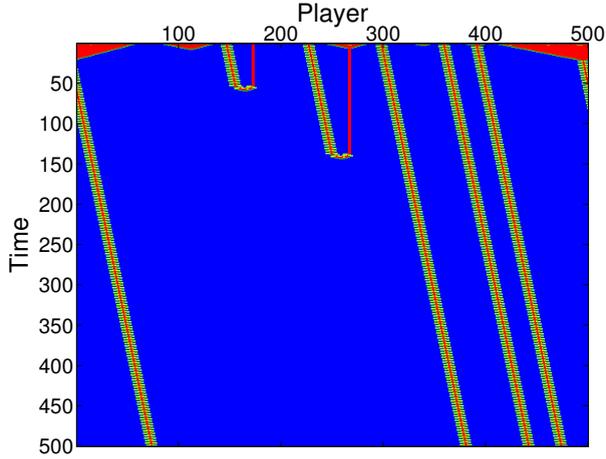


(a)

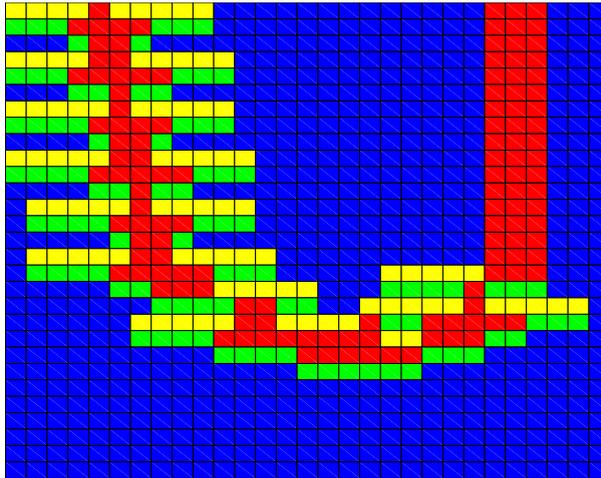


(b)

Fig. 6. (a) Time evolution of the PD in one-dimensional cellular automata for z symmetry. Time evolves from top to bottom. Each vertical line is the evolution of the states of the player i . Blue (dark gray): cooperators. Red (medium gray): defectors. Green (light gray): currently cooperators that were defectors in the previous time step. Yellow (lighter gray): currently defectors that were cooperators in the previous time step. (b) Magnification of the regions marked above. (1) Finger originating from the end of triangle; (2) glider originating from the end of triangle; (3) collision, where the finger absorbs the glider; (4) collision, where the glider absorbs the finger. The parameters in this simulation are $L = 500$, time = 500, $T = 1.60$, $\rho_0 = 0.9$, and $z = 8$ (without self-interaction).



(a)



(b)

Fig. 7. (a) Time evolution of the PD in one-dimensional cellular automata for z symmetry. Time evolves from top to bottom. Each vertical line is the evolution of the states of the player i . Blue (dark gray): cooperators. Red (medium gray): defectors. Green (light gray): currently cooperators that were defectors in the previous time step. Yellow (lighter gray): currently defectors that were cooperators in the previous time step. (b) Magnification of the region marked above shows the annihilation of two colliding gliders. The parameters in this simulation are $L = 500$, time = 500, $T = 1.20$, $\rho_0 = 0.9$, and $z = 10$ (without self-interaction).

well. And finally, the defective clusters are invaded by cooperators, resulting in a cooperative phase, $\rho_\infty > 0.5$.

Numerical simulations of the PD have shown that in principle, patterns change if the initial configuration of the system is modified. But this does not necessarily occur when the parameters are modified. For a given configuration of ρ_0 and a fixed z there are ranges of T where the patterns do not change. In these ranges, only the players' payoffs are modified, which is expected if we remind the regions between the transitions values, T_c . Moreover, there are also regimes where only one parameter dominates the whole dynamic, like in the case of high values of z (> 20). The oscillating behavior of ρ_∞ can now be easily understood watching the saw-tooth in the patterns that emerge. In previous works, this fluctuation was attributed to spatial pattern oscillations. Finally we point out that the patterns obtained in the PD in the one-dimensional cellular automata belong to classes 1, 2 and 4 of the classes proposed in Ref. 16.

4. Conclusion

The one-dimensional cellular automata, with each cell being a player that plays the Prisoner's Dilemma with his/her z neighboring cells (including self-interaction for odd values of z), is interesting in several aspects. It allows us to retrieve all the previous results obtained for regular lattices in d dimensions. Since in regular lattices the process of invasion of a cooperative (defective) cluster by defectors (cooperators) occurs in the corner players (the ones with the least cooperative neighbors), spatial geometry allows large fluctuations leading to bumps (overshoots) in transient times. In our system, these bumps (overshoots) do not occur. The invasion process occurs at most in two sites (extremes of the cooperative/defective cluster). Convergence to stationary values is faster in the one-dimensional automata than in an arbitrary regular lattice. The other advantage of the proposed one-dimensional automata is that one can keep track of player history. Following the players' behaviors along time gives rise to several interesting patterns, such as gliders and fingers. The thickness and slope of these structures are essentially given by z and T . Cooperative and defective clusters can now be interpreted as particles that interact with one another, where they can be extinguished or coexist. Comprehension of the collision processes furnishes a new approach to characterize the rich phase diagram of Spatial Prisoner's Dilemma.

Acknowledgments

M. A. Pereira would like to thank CAPES for the fellowship. A. L. Espíndola would like to thank CNPq (06/60333-0) for the fellowship and FAPESP and MCT/CNPq Fundo Setorial de Infra-Estrutura for financial support. A. S. Martinez acknowledges the agencies CNPq (305527/2004-5) and FAPESP (2005/02408-0) for support.

References

1. J. von Neumann and O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior* (Princeton University Press, New York, 1947).
2. M. Dresher, *The Mathematics of Games of Strategy: Theory and Applications* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1961).
3. W. Poundstone, *Prisoner's Dilemma* (Doubleday, New York, 1992).
4. D. Stauffer, *Physica A* **336**, 1–5 (2004).
5. J. P. Bouchaud, *Physica A* **313**, 238–251 (2002).
6. C. Anteneodo, C. Tsallis and A. S. Martinez, *Europhys. Lett.* **59**(5), 635–641 (2002).
7. P. E. Turner and L. Chao, *Nature* **398**, 441–443 (1999).
8. R. Axelrod and W. D. Hamilton, *Science* **211**, 1390–1396 (1981).
9. R. Axelrod, *The Evolution of Cooperation* (Basic Books, New York, 1984).
10. M. A. Nowak and R. M. May, *Nature* **359**, 826–829 (1992).
11. O. Durán and R. Mulet, *Physica D* **208**, 257–265 (2005).
12. E. Lieberman, C. Hauert and M. A. Nowak, *Nature* **433**, 312–316 (2005).
13. Z. Wu, J. Guan, X. Xu and Y. Wang, *Physica A* **379**, 672–680 (2007).
14. G. Abramson and M. Kuperman, *Phys. Rev. E* **63**, 030901 (2001).
15. M. H. Vainstein, A. T. C. Silva and J. J. Arenzon, *J. Theor. Biol.* **244**(4), 722–728 (2007).
16. S. Wolfram, *Science* **9**, 2–21 (1983).
17. M. A. Nowak and R. M. May, *Int. J. Bifurcat. Chaos* **3**, 35–78 (1993).
18. R. O. S. Soares and A. S. Martinez, *Physica A* **369**, 823–829 (2006).
19. D. Alves *et al.*, *Phys. Rev. E* **63**, 011911 (2000).
20. H. Fort and S. Viola, *J. Stat. Mech.-Theor. Exper.* **1**, P01010 (2005).
21. G. Hardin, *Science* **162**, 1243–1248 (1968).
22. M. Gardner, *Sci. Am.* **223**, 120 (1970).

Exhaustive Exploration of Prisoner's Dilemma Parameter Space in One-Dimensional Cellular Automata

Marcelo Alves Pereira[†], Alexandre Souto Martinez[‡]
 Departamento de Física e Matemática - FFCLRP - USP
 Av. Bandeirantes, 3900, 14040-901
 Ribeirão Preto, SP, Brazil
[†] marceloapereira@usp.br
[‡] asmartinez@usp.br

Aquino Lauri Espíndola
 Departamento de Medicina Social - FMRP - USP
 Departamento de Física e Matemática - FFCLRP - USP
 Av. Bandeirantes, 3900, 14040-901
 Ribeirão Preto, SP, Brazil
 aquinoespindola@usp.br

Received on 29 October, 2007

The Prisoner's Dilemma (PD) is one of the most popular games of the Game Theory due to the emergence of cooperation among competitive rational players. In this paper, we present the PD played in cells of one-dimension cellular automata, where the number of possible neighbors that each cell interacts, z , can vary. This makes possible to retrieve results obtained previously in regular lattices. Exhaustive exploration of the parameters space is presented. We show that the final state of the system is governed mainly by the number of neighbors z and there is a drastic difference if it is even or odd.

Keywords: Prisoner Dilemma; Emergence of Cooperation; Game Theory; One-dimensional cellular automata; Non-equilibrium phase transition

I. INTRODUCTION

Due to the emergence of cooperation between competitive rational players [1–4], the *Prisoner's Dilemma* (PD) [5, 6] is one of the most popular games of the Game Theory [7]. When it is played repeatedly, one has the Iterated Prisoner's Dilemma [8, 9]. If the PD is played in a group of players with spatial structure, this version is known as Spatial Prisoner's Dilemma (SPD) [10]. These spatial structures may generate chaotically changing spatio-temporal patterns. Cooperators and defectors coexist, and cooperator proportion oscillates indefinitely. This occurs when each player interacts with the nearest neighbors, for instance, in a square lattice. Moreover, adding the interaction with the next nearest neighbors (corresponding to the chess king possible moves) the spatial patterns are smoother. During the game, cooperators and defectors organize themselves in clusters. The most interesting dynamics occurs on the borders of these clusters, causing the oscillating behavior of the proportion of cooperators.

The final proportion of cooperators and defectors in the chaotic phase depends on the initial configuration and the magnitude of the parameter T (temptation). Moreover, the connectivity among players also plays an important role in the dynamics of the clusters [11]. Studies about PD had been carried out in different topologies such as square lattice [10], graphs [12] and also in complex networks as random graphs [11], scale-free networks [13], small-world networks [14]. We have used the simplest lattice topology, i.e. one-dimensional lattice to represent regular lattices at any dimensionality [15]. The computational implementation of PD in the one-dimensional case is simpler than in other topologies,

and it requires less computational time to run the numerical codes. In one-dimensional cellular automata, it is simpler to understand the way that oscillations in the cooperator proportion take place [15]. Beyond the topologies, it is also possible to consider the mobility of players [16].

In this paper we present an exhaustive exploration of the parameter space for the IPD in the one-dimensional cellular automata with a variable number of interacting neighbors. After introducing the model in Section II, we show the results in Section III. Final remarks are presented in the Section IV.

II. THE MODEL

Consider a cellular automaton in a one-dimensional lattice, with L cells, where each cell represents one player, who has two possible states: $\theta = 1$ ($\theta = 0$) for cooperator (defector). The automaton has no empty cells, so the cooperator proportions, $\rho_c(t)$, and defectors, $\rho_d(t)$, leads to $\rho_c(t) + \rho_d(t) = 1$. The initial proportion of cooperators, $\rho_c(0) = \rho_0$, $0 \leq \rho_0 \leq 1$, is an important parameter. The state of $L\rho_0$ players, which are chosen randomly by a uniform distribution, are set as cooperators and the remaining ones are set as defectors. The neighborhood of the i -th player is defined by $z = (1, 2, \dots, L)$. If z is even, there are $\alpha = z/2$ adjacent interacting players to the right and to the left hand side of this player. If z is odd, each side has $\alpha = (z-1)/2$ players and player i interacts with his/her own state (self-interaction) [15, 19, 20]. In addition to ρ_0 and z the other free parameter in this model is the temptation T in the conflict range $1 \leq T \leq 2$.

Consider two players i and j playing the PD. The payoff

of player i due to interaction with player j is given by $g_{\theta_i, \theta_j} = \theta_i \theta_j + T(1 - \theta_i \theta_j) \theta_j$, where θ_j is the state of player j , with $j = (1, 2, \dots, L)$. The total payoff, P_i , of player i is: $P_i = \sum_{\mathcal{V}_i} g_{\theta_i, \theta_j}$, where \mathcal{V}_i is the neighborhood of the i -th agent. Since the payoff of each player depends on z , the macroscopic regime, ρ_c , also depends on it. Player i will compare P_i to P_k , where P_k is the payoff of $k = (1, 2, \dots, z)$ set of players. If $P_i < P_k$, player i copies the state of the player with the highest payoff, otherwise player i does not change his/her current state. The dynamics of the model is totally deterministic. This strategy of copying the state of the neighbor that had the highest payoff is the Darwinian Evolutionary Strategy. Others evolutionary strategies can be adopted, like the Pavlovian one [21]. The states of the players are updated synchronously and they play until the system reaches a stationary or dynamical equilibrium regime.

The cooperator proportion, $\rho_c(t, T, \rho_0, z)$, depends on time, temptation, initial proportion of cooperators, and the number of interacting players. The dependence of ρ_c as a function of ρ_0 and z is commonly neglected, possibly due to the fixed lattice restriction in a d -dimensional space.

The asymptotic cooperator proportion, $\rho_\infty(T, \rho_0, z)$, is obtained when the system reaches the steady state, which represents the final phase for the set of parameters (T, ρ_0, z) . The dependence of ρ_∞ on z can be understood due to the number of interacting cooperators, c , with $0 \leq c \leq z$, in the neighborhood of each player. When player i interacts with c_i cooperators out of z neighbors, his/her payoff is [11, 19]: $P_i^{(c_i)}(\theta_i) = [T - (T - 1)\theta_i]c_i$. Some useful relations follow immediately: for a cooperator $P_i^{(c_i)}(1) = c$, while for a defector $P_i^{(c_i)}(0) = cT$. For $T > 1$, $P_i^{(c_i)}(0) > P_i^{(c_i)}(1)$ and $P_i^{(c)}(\theta) \geq P_i^{(c-1)}(\theta)$. Transitions in $\rho_\infty(T)$ occur when temptation crosses threshold values. In the conflict range, $1 < T < 2$, these transitions are controlled by [11]: $T_c(n, m) = (z - n)/(z - n - m)$, where $0 \leq n < z$ and $1 \leq m \leq \text{int}[(z - n - 1)/2]$ are integers.

III. RESULTS

We have used a one-dimensional cellular automaton with $L = 1,000$ cells, with $L\rho_0$ cells set as cooperators and the remaining ones as defectors. The asymptotic cooperator proportion, ρ_∞ , is obtained from the mean values of an ensemble of 1,000 configurations for the same initial parameters. The parameter T increases in steps $\Delta T = 0.01$ in the range $1 < T < 2$ and ρ_0 increases in steps $\Delta \rho_0 = 0.1$ and the intermediate values are linearly interpolated.

It could seem meaningless to consider $T = 1.00$, as the cooperators and defectors have the same payoff, when one plays against the other. However, the total payoff of each player depends on the neighborhood, then, if the player belongs to a cooperative cluster he/she has a higher payoff than the player from a defective one. In the cooperative/defective clusters border, the differences among payoffs are essential to determine the system dynamics [15].

Results for $\rho_0 = 0$ and $\rho_0 = 1$ are the trivial cases due to the Darwinian Evolutionary Strategy. In a population of co-

operators (defectors) it is not possible to emerge a defector (cooperator), because the players only can copy the states of their neighbors. Mutations are not allowed in our model, i.e. the noise of the system is null [22].

Our results are equivalent to those obtained in the square lattices, which are briefly reviewed in the following. Consider four scenarios. First, defectors can dominate the system and determine the complete extinction of cooperators, leading the system to a defective phase ($\rho_\infty = 0$). Second, defectors can increase and domain the system, but cooperators are not extinguished, resulting in a defective phase as well ($0 < \rho_\infty < 0.5$). Third, cooperators may domain the system forming a cooperative phase ($0.5 < \rho_\infty < 1.0$). And finally, cooperators can extinguish the defectors determining a cooperative phase ($\rho_\infty = 1.0$).

Figures 1a and 1b show the surface of ρ_∞ plotted as a function of T and ρ_0 , for $z = 8$ (without self-interaction) and $z = 9$ (with self-interaction), respectively. Differences between the presence/absence of self-interaction are clear. The region of low values of T and high values of ρ_0 is a cooperative phase. The region of high values of T and low values of ρ_0 is a defective phase. The other two regions, low T and low ρ_0 or high T and high ρ_0 , the value of ρ_∞ is different and depends strongly whether z is even or odd. The valleys for $\rho_0 \sim 0.9$ are due to the system dynamics. For higher values of ρ_0 , the defective clusters formed are tiny in comparison to the cooperative ones. These defectors exploit their cooperator neighbors, but they neither do not invade the cooperative cluster nor are extinguished by the cooperative neighborhood during time evolution.

Another visualization of ρ_∞ for $z = 8$ is given in Figures 2a and 2b, and for $z = 9$ in Figures 2c and 2d. It is equivalent to observe the phase diagram plotted as surface in Figures 1a and 1b from the top view. The images 2b and 2d are the standard deviation of ρ_∞ due to statistics to avoid the initial configuration dependence. Figures 2b and 2d, show very high values of standard deviation. In these regions, small changes in the initial configuration drastically modify ρ_∞ from a cooperative phase, $\rho_\infty > 0.5$, to a defective phase, $\rho_\infty < 0.5$. Thus, in this region, it is not possible to define the system as cooperative or defective, and this region is considered as the coexistence of cooperative/defective phases. In other words, the chaotic phase. The inclusion of self-interaction implies in larger cooperation area in the phase diagram as shown in Figures 2a and 2c. This means that cooperation prevails when self-interaction is included. In Figure 2a, ρ_∞ drops abruptly for $T > 1.7$, this rapid decay does not occur in Figure 2c, because self-interaction shifts T_c to higher values. In Figure 2d, the higher values of standard deviation fulfill a larger area, especially for $T > 1.7$, for the same reasons. When T_c is shifted, a region that should be cooperative, when the self-interaction is present, becomes defective in the absence of the self-interaction.

The slice $\rho_\infty \rho_0$ of Figure 1 shows ρ_∞ as a function of ρ_0 . The curves are plotted for $T = (2.0, 1.8, 1.6, 1.4, 1.2, 1.0)$, in Figures 3a for $z = 8$, and Figure 3b for $z = 9$. The value of ρ_∞ increases in presence of self-interaction in the region $0 < \rho_0 < 0.4$, for $1.0 < T < 1.4$. Self-interaction also shifts the

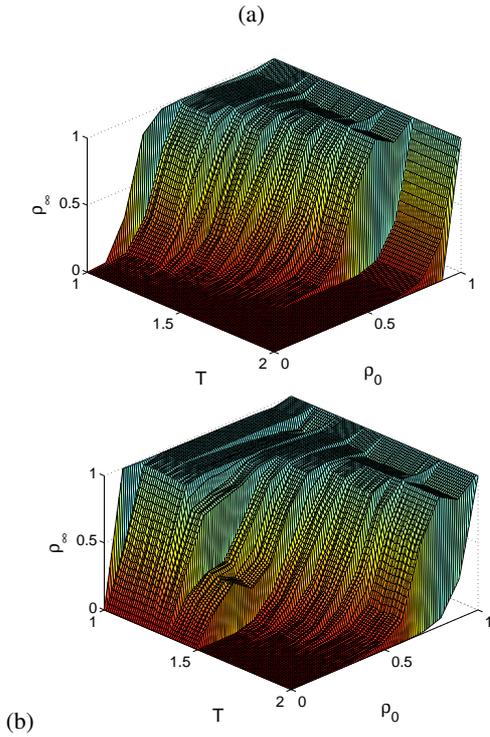


FIG. 1: Phase diagram, ρ_∞ (asymptotic proportion of cooperators) as function of T (temptation), ρ_0 (initial proportion of cooperators) and z (number of interacting players of each player) plotted as a surface. (a) $z = 8$ (without self-interaction); (b) $z = 9$ (with self-interaction).

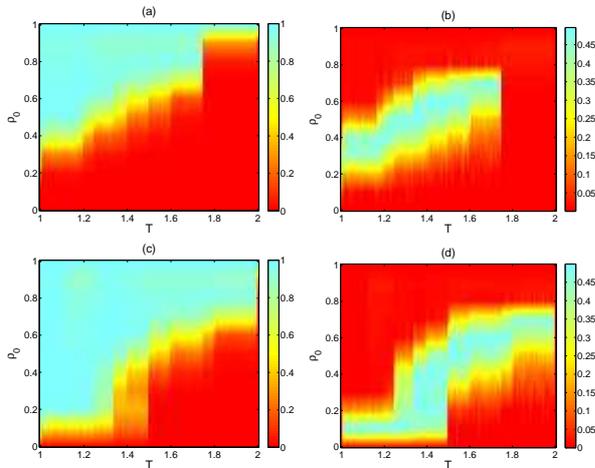


FIG. 2: (a) Top view of Figure 1a, ρ_∞ as function of T and ρ_0 for $z = 8$ (without self-interaction); (b) standard deviation of ρ_∞ as function of T and ρ_0 for $z = 8$ (without self-interaction); (c) Top view of Figure 1b, ρ_∞ as function of T and ρ_0 for $z = 9$ (with self-interaction); (d) standard deviation of ρ_∞ as function of T and ρ_0 for $z = 9$ (with self-interaction).

emergence of cooperation to lower values of ρ_0 , when compared to a system without self-interaction. In Table I, one sees the values of ρ_0 , where $\rho_\infty > 0.5$ occurs for the first time for different values of T . Notice the strong difference concerning the parity of z .

T	$z = 8$	$z = 9$
1.0	0.3	0.1
1.2	0.5	0.2
1.4	0.6	0.5
1.6	0.7	0.6
1.8	1.0	0.7
2.0	1.0	1.0

TABLE I: Values of ρ_0 , when occurs $\rho_\infty > 0.5$ for the first time, for different values of T , for a system with $z = 8$ (without self-interaction) and $z = 9$ (with self-interaction).

The ρ_∞ non-monotonous behavior for intermediate values of ρ_0 presented in Figures 1 and 3, in the region $1.3 < T < 1.5$ and $0 < \rho_0 < 0.5$ are due to the coexistence phases. In this region, the standard deviation of ρ_∞ is higher than in the remaining regions.

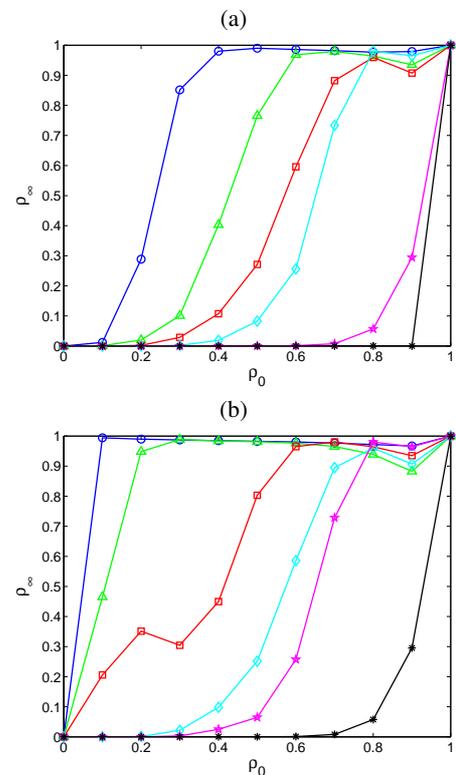


FIG. 3: Slice of the plane $\rho_\infty(T, \rho_0, z)\rho_0$ of the surfaces. Asymptotic proportion of cooperators (ρ_∞) as function of initial proportion of cooperators (ρ_0) for (a) $z = 8$ (without self-interaction) and (b) $z = 9$ (with self-interaction). Asterisks: $T = 2.0$; Stars: $T = 1.8$; Diamonds: $T = 1.6$; Squares: $T = 1.4$; Triangles: $T = 1.2$; Circles: $T = 1.0$.

To observe the behavior of ρ_∞ , when z increases, see the surfaces of ρ_∞ for $z = 20$, in Figures 4a, and $z = 19$, Figure 4b. Comparing Figures 1a and 1b, one observes that if z is increased, the surfaces become more similar.

Figures 5a and 5c are the top view of the ρ_∞ surfaces for $z = 20$ and $z = 19$, respectively. They show the convergence of ρ_∞ for even and odd z . Figures 5b and 5d are the ρ_∞ stan-

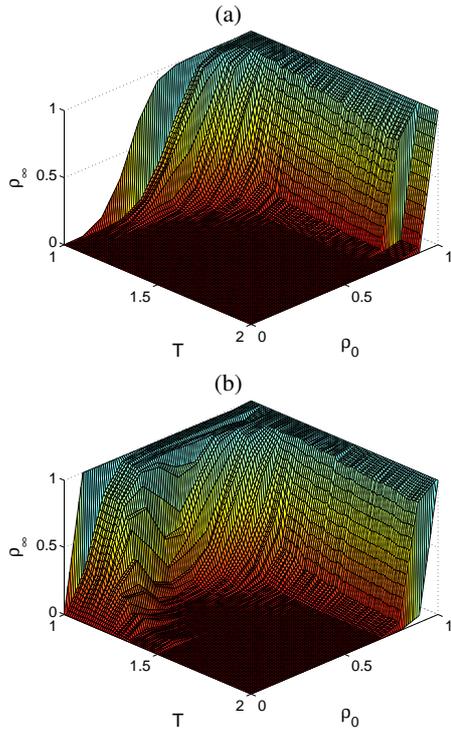


FIG. 4: Phase diagram, ρ_∞ (asymptotic proportion of cooperators) as function of T (temptation), ρ_0 (initial proportion of cooperators) and z (number of interacting players of each player) plotted as a surface. (a) $z = 20$ (without self-interaction); (b) $z = 19$ (with self-interaction).

standard deviation for $z = 20$ and $z = 19$, respectively. A relevant difference between even and odd z is that the cooperative phase persists for $T < 1.1$ in the range of $0.1 < \rho_0 < 0.5$ in the presence of self-interaction (see Figure 5c). If self-interaction is present the shift in T_c to higher values remains in higher values of z .

A slice of the plane $T\rho_0$ of the ρ_∞ surface in Figures 1a and 1b at $\rho_\infty = 0.5$, may represent a phase diagram. In Figures 6a and 6c, the contours separate the cooperative/defective phases, i.e. the phase-diagram. Figures 6b and 6d are the contours that take into account the standard deviation. Since there is the phase coexistence, these contours separate the cooperative/coexistence/defective phases.

In Figures 7a and 7b, there are the contours of the cooperative/defective phase for different z values. When z increases the contours converge to the same pattern independently if z is even or odd as shown in Figure 6c and 6d. For small z values, the z parity generates remarkable differences in the contours, if z increases, the contours converge and present a similar form and the phase coexistence region is narrower than for small z values.

IV. CONCLUSION

The Prisoner's Dilemma in the one-dimensional cellular automata yields results according to the results obtained previ-

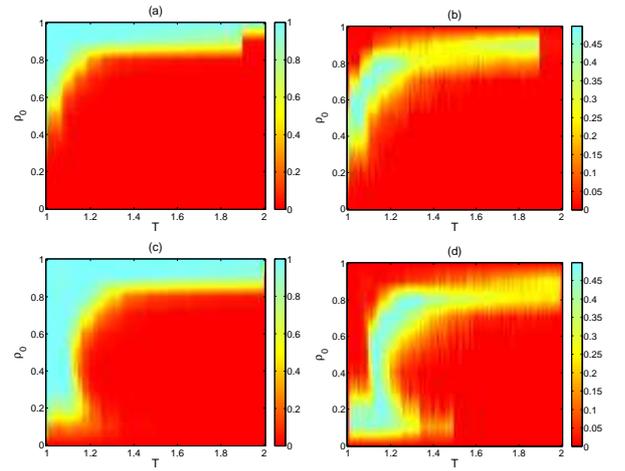


FIG. 5: (a) Top view of Figure 4a, ρ_∞ as function of T and ρ_0 for $z = 20$ (without self-interaction); (b) standard deviation of ρ_∞ as function of T and ρ_0 for $z = 20$ (without self-interaction); (c) Top view of Figure 4b, ρ_∞ as function of T and ρ_0 for $z = 19$ (with self-interaction); (d) standard deviation of ρ_∞ as function of T and ρ_0 for $z = 19$ (with self-interaction).

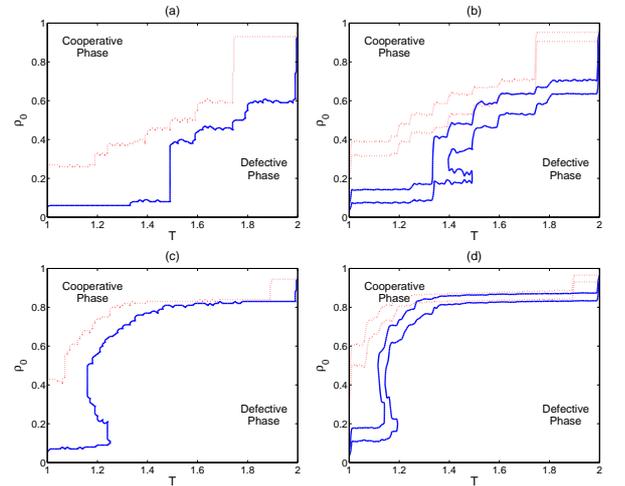


FIG. 6: Phase diagram of ρ_∞ in the parameter space. (a) $z = 8$ and $z = 9$, contours of the cooperative/defective phase; (b) $z = 8$ and $z = 9$, contours of the cooperative/coexistence/defective phase; (c) $z = 20$ and $z = 19$, contours of the cooperative/defective phase; (d) $z = 20$ and $z = 19$, contours of the cooperative/coexistence/defective phase. The coexistence phase the phase is the space between the first and the second contours of the same z .

ously for regular lattices in d dimensions. The exhaustive exploration of the parameter space allows us to observe that the parameter z plays the main role in the dynamics. For low z values, the influence of self-interaction is remarkable. Some studies about the PD with variable coordination number, i.e. the neighborhood size z , have been carried out. However, these studies adopt lattice topologies that are different from the one-dimensional lattice used here, e.g. square lattice [25], complex networks as random graphs [11], scale-free networks [25, 26], small-world networks [14]. Another difference in

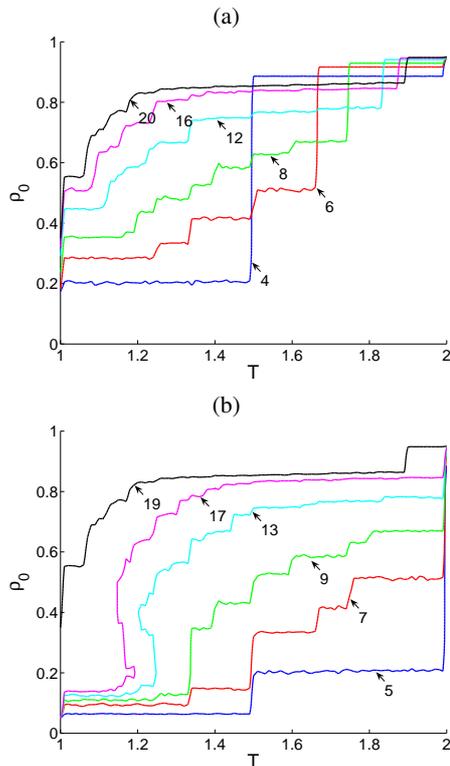


FIG. 7: Phase diagram of ρ_∞ in the parameter space. (a) contours of the cooperative/defective phase for even $z = (4, 6, 8, 12, 16, 20)$ (without self-interaction); (b) contours of the cooperative/defective phase for odd $z = (5, 7, 9, 13, 17, 19)$ (with self-interaction). Notice the difference due to the parity of z is not so important for $z \gg 1$

comparison to these studies is that the state update of the players is asynchronous [25, 26], but in our case is synchronous. Despite these differences, the main features due to the z variation remain, such as the dependence on the asymptotic cooperator proportion on the neighborhood size. Our results are similar to those obtained by Durán and Mulet [11] considering the neighborhood with self-interaction (odd z). Comparing our results to those found in the literature, it is possible to see that the way the connection among the players is settled plays another important role in this problem independently of the space dimensionality or network structure.

For intermediate values of T and ρ_0 the chaotic phase occurs. In the chaotic phase the outcome ρ_∞ can belong to the cooperative or defective phase due to only a small change in the initial distribution of the cooperators.

Acknowledgments

M. A. P. would like to thank CAPES for the fellowship. A. S. M. acknowledges the agencies CNPq (305527/2004-5) and FAPESP (2005/02408-0) for support. A. L. E. would like to thank CNPq for the fellowship and FAPESP and MCT/CNPq Fundo Setorial de Infra-Estrutura (06/60333-0) for the financial support.

-
- [1] D. Stauffer *Physica A* **336**, 1 (2004).
 [2] J. P. Bouchaud *Physica A* **313**, 238 (2002).
 [3] C. Anteneodo, C. Tsallis, and A. S. Martinez *Europhys. Lett.* **59** 5, 635 (2002).
 [4] P. E. Turner, L. Chao *Nature* **398**, 441 (1999).
 [5] M. Dresner, *The Mathematics of Games of Strategy: Theory and Applications* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1961).
 [6] W. Poundstone, *Prisoner's Dilemma* (Doubleday, New York, 1992).
 [7] J. Neumann and O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior* (Princeton University Press, New York, 1947).
 [8] R. Axelrod and W. D. Hamilton, *Science* **211**, 1390 (1981).
 [9] R. Axelrod, *The evolution of cooperation* (Basic Books, New York, 1984).
 [10] M. A. Nowak and R. M. May, *Nature* **359**, 826 (1992).
 [11] O. Durán and R. Mulet, *Physica D* **208**, 257 (2005).
 [12] E. Lieberman, C. Hauert, and M. A. Nowak, *Nature* **433**, 312 (2005).
 [13] Z. Wu, J. Guan, X. Xu, and Y. Wang, *Physica A* **379**, 672 (2007).
 [14] G. Abramson and M. Kuperman, *Phys. Rev. E* **63**, 030901 (2001).
 [15] M. A. Pereira, A. S. Martinez, and A. L. Espíndola, arXiv:0708.3520v1 [physics.comp-ph] to appear in *Int. J. of Modern Phys. C*.
 [16] M. H. Vainstein, A. T. C. Silva, and J. J. Arenzon *J. Theor. Biol.* **244** (4), 722 (2007).
 [17] S. Wolfram, *Science* **9**, 2 (1983).
 [18] M. A. Nowak and R. M. May, *Int. J. Bifurcat. Chaos* **3**, 35 (1993).
 [19] R. O. S. Soares and A. S. Martinez, *Physica A* **369**, 823 (2006).
 [20] D. Alves, P. R. A. Campos, A. T. C. Silva, and J. F. Fontanari, *Phys. Rev. E* **63**, 011911 (2000).
 [21] H. Fort, S. Viola *J. Stat. Mech.* **1**, P01010 (2005).
 [22] A. Mukherji, V. Rajan, and J. R. Slagle, *Nature* **379**, 125 (1996).
 [23] G. Hardin *Science* **162**, 1243 (1968).
 [24] M. Gardner *Scientific American* **223**, 120 (1970).
 [25] M. Ifti, T. Killingback, and M. Doebeli *J. Theor. Biol.* **231**, 97 (2004).
 [26] F. C. Santos and J. M. Pacheco *Phys. Rev. Lett.* **95**, 098104 (2005).

Referências

- [1] M. A. Nowak and R. May, “Evolutionary games and spatial chaos,” *Nature*, vol. 359, pp. 826–829, 1992.
- [2] M. A. Nowak and R. M. May, “The spatial dilemmas of evolution,” *Int. J. Bifurcat. Chaos*, vol. 3, pp. 35–78, 1993.
- [3] B. Brembs, “Chaos, cheating and cooperation: potential solutions to the prisoner’s dilemma,” *Oikos*, vol. 76, pp. 14–24, 1996.
- [4] D. Stauffer, “Introduction to statistical physics outside physics,” *Physica A*, vol. 336, pp. 1–5, 2004.
- [5] J. P. Bouchaud, “An introduction to statistical finance,” *Physica A*, vol. 313, pp. 238–251, 2002.
- [6] C. Anteneodo, C. Tsallis, and A. S. Martinez, “Risk aversion in economic transactions,” *Europhys. Lett.*, vol. 59, no. 5, pp. 635–641, 2002.
- [7] G. Hardin, “The tragedy of the commons,” *Science*, vol. 162, pp. 1243–1248, 1968.
- [8] O. Leimar and A. H. Axén, “Strategic behavior in an interespecific mutualism: interactions between lycaenid larvae and ants,” *Anim. Behav.*, vol. 46, pp. 1177–1182, 1993.
- [9] M. Milinski, “On cooperation in sticklebacks,” *Anim. Behav.*, vol. 40, pp. 1190–1191, 1990.
- [10] J. C. Reboreda and A. Kacelnik, “On cooperation, tit-for-tat and mirrors,” *Anim. Behav.*, vol. 40, pp. 1188–1189, 1990.
- [11] L. A. Dugatkin, “Dynamics of the tit for tat strategy during predator inspection in the guppy (*Poecilia reticulata*),” *Behav. Ecol. Sociobiol.*, vol. 29, pp. 127–132, 1991.
- [12] L. A. Dugatkin, “Predator inspection, tit-for-tat and shoaling: a comment on masters & waite,” *Anim. Behav.*, vol. 41, pp. 898–899, 1991.
- [13] L. A. Dugatkin and M. Alfieri, “Guppies and the tit for tat strategy: preference based on past interaction,” *Behav. Ecol. Sociobiol.*, vol. 28, pp. 243–246, 1991.
- [14] G. F. Turner and R. L. Robinson, “Milinski’s tit-for-tat hypothesis: do fish preferentially inspect in pairs?,” *Anim. Behav.*, vol. 43, pp. 677–678, 1992.
- [15] E. A. Fischer, “Egg trading in the chalk bass, *serranus-tortugarum*, a simultaneous hermaphrodite,” *J. Comp. Ethol.*, vol. 66, no. 2, pp. 143–151.

- [16] R. C. Connor, “Egg-trading in simultaneous hermaphrodites: an alternative to tit-for-tat,” *J. Evol. Biol.*, vol. 5, pp. 523–528, 1992.
- [17] G. S. Wilkinson, “Reciprocal food sharing in the vampire bat,” *Nature*, vol. 308, pp. 181–184, 1984.
- [18] C. Packer, “Reciprocal altruism in papio anubis..,” *Nature*, vol. 265, pp. 441–443, 1977.
- [19] E. Lieberman, C. Hauert, and M. A. Nowak, “A strategy of win-stay and lose-shift that outperforms tit-for-tat in the prisoner’s dilemma game,” *Nature*, vol. 433, pp. 312–316, 2005.
- [20] O. Durán and R. Mulet, “Evolutionary prisoner’s dilemma in random graphs,” *Physica D*, vol. 208, pp. 257–265, 2005.
- [21] Z. Wu, J. Guan, X. Xu, and Y. Wang, “Evolutionary prisoner’s dilemma game on barabási–albert scale-free networks,” *Physica A*, vol. 379, pp. 672–680, 2007.
- [22] G. Abramson and M. Kuperman, “Social games in a social network,” *Phys. Rev. E*, vol. 63, no. 030901, 2001.
- [23] M. H. Vainstein, A. T. C. Silva, and J. J. Arenzon, “Does mobility decrease cooperation?,” *J. Theor. Biol.*, vol. 244, no. 4, pp. 722–728, 2007.
- [24] M. A. Pereira, A. S. Martinez, and A. L. Espíndola, “Prisoner’s dilemma in one-dimensional cellular automata: visualization of evolutionary patterns,” *Int. J. of Modern Phys. C*, 2008. arXiv:0708.3520v1 [physics.comp-ph].
- [25] M. A. Nowak and K. Sigmund, “A strategy of win-stay, lose-shift that outperforms tit-for-tat in the prisoner’s dilemma game,” *Nature*, vol. 364, pp. 56–58, 1993.
- [26] S. Wolfram, “Cellular automata,” *Science*, vol. 9, pp. 2–21, 1983.
- [27] M. A. Pereira, A. S. Martinez, and A. L. Espíndola, “Exhaustive exploration of prisoner’s dilemma parameter space in one-dimensional cellular automata,” *Braz. J. of Phys.*, 2008. arXiv:.
- [28] R. O. S. Soares and A. S. Martinez, “The geometrical patterns of cooperation evolution in the spatial prisoner’s dilemma: An intra-group model,” *Physica A*, vol. 369, pp. 823–829, 2006.
- [29] J. Neumann and O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*. New York: Princeton University Press, 1947.
- [30] J. Bentham, *An Introduction to the Principles of Morals and Legislation*. Oxford: Oxford University Press, 1996.
- [31] J. F. Nash, “Equilibrium points in n-person games,” *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A.*, vol. 36, no. 1, pp. 48–49, 1950.
- [32] J. Nash, “Non-cooperative games,” *Ann. Math.*, vol. 54, no. 2, pp. 286–295, 1951.
- [33] M. Dresher, *The Mathematics of Games of Strategy: Theory and Applications*. Englewood Cliffs and NJ: Prentice-Hall, 1961.

- [34] W. Poundstone, *Prisoner's Dilemma*. New York: Doubleday, 1992.
- [35] R. Axelrod and W. D. Hamilton, "The evolution of cooperation," *Science*, vol. 211, pp. 1390–1396, 1981.
- [36] S. Oskamp and C. Kleinke, "Amount of reward as a variable in the prisoner's dilemma game," *J. Personality and Social Psychology*, vol. 16, pp. 133–40, 1970.
- [37] R. Axelrod, "Effective choice in the prisoner's dilemma," *J. Confl. Resolut.*, vol. 24, pp. 3–25, 1980.
- [38] R. Axelrod, "More effective choice in the prisoner's dilemma," *J. Confl. Resolut.*, vol. 24, pp. 379–403, 1980.
- [39] R. Axelrod, *The evolution of cooperation*. New York: Basic Books, 1984.
- [40] S. Oskamp, "Effects of programmed strategies on cooperation in the prisoner's dilemma and other mixed-motive games," *J. Conflict Resolution*, vol. 15, pp. 225–259, 1971.
- [41] L. B. Lave, "An empirical description of the prisoner's dilemma game," *Support RAND Research*.
- [42] R. Boyd and J. P. Lorberbaum, "No pure strategy is evolutionary stable in the prisoner's dilemma game," *Nature*, vol. 327, pp. 58–59, 1987.
- [43] H. Fort and S. Viola, "Spatial patterns and scale freedom in prisoner's dilemma cellular automata with pavlovian strategies," *J. Stat. Mech.-Theory Exp.*, vol. 1, p. P01010, 2005.
- [44] A. Mukherji, V. Rajan, and J. R. S. JR, "Robustness of cooperation," *Nature*, vol. 379, pp. 125–126, 1996.
- [45] M. Gardner, "Fantastic combinations of john conways new solitaire game life," *Sci. Am.*, vol. 223, pp. 120–&, 1970.