

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Mensuração e gestão de risco nos mercados de capitais: um estudo da evolução dos modelos de gerenciamento de risco financeiro

Sandro Gonçalves

Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática, Estatística e Computação Aplicadas à Indústria (MECAI)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Sandro Gonçalves

Mensuração e gestão de risco nos mercados de capitais:
um estudo da evolução dos modelos de gerenciamento de
risco financeiro

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências
Matemáticas e de Computação – ICMC-USP,
como parte dos requisitos para obtenção do título
de Mestre – Mestrado Profissional em Matemática,
Estatística e Computação Aplicadas à Indústria.
EXEMPLAR DE DEFESA

Área de Concentração: Matemática, Estatística e
Computação

Orientador: Prof. Dr. Francisco Louzada Neto

USP – São Carlos
Julho de 2021

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

G643m Gonçalves, Sandro
 Mensuração e gestão de risco nos mercados de
 capitais: um estudo da evolução dos modelos de
 gerenciamento de risco financeiro / Sandro
 Gonçalves; orientador Francisco Louzada Neto. --
 São Carlos, 2021.
 76 p.

 Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação
 em Mestrado Profissional em Matemática, Estatística
 e Computação Aplicadas à Indústria) -- Instituto de
 Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade
 de São Paulo, 2021.

 1. Risco. I. Louzada Neto, Francisco , orient.
 II. Título.

Sandro Gonçalves

Measurement and risk management in the capital markets:
a study of the evolution of financial risk management models

Master dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Master – Professional Masters in Mathematics, Statistics and Computing Applied to Industry. *EXAMINATION BOARD PRESENTATION COPY*

Concentration Area: Mathematics, Statistics and Computing

Advisor: Prof. Dr. Francisco Louzada Neto

USP – São Carlos
July 2021

*Este trabalho é dedicado a meus filhos Yasmim, Benício e Ravi,
a quem espero inspirar a sempre buscar a realização de seus sonhos.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pela oportunidade e esperança.

Agradeço aos meus pais por minha formação como ser humano e pelos valores ensinados.

Agradeço a minha esposa por nunca ter me deixado desistir desta jornada.

Agradeço aos meus irmãos e sobrinhos pelo companherismo.

Agradeço a todo corpo docente do ICMC e colegas de turma.

Por fim, agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Francisco Louzada por ter aceitado me orientar.

*“Revelem-nos o que o futuro reserva,
para que possamos saber que vocês são deuses.”
(Isaías 41:23)*

RESUMO

GONÇALVES, S. **Mensuração e gestão de risco nos mercados de capitais: um estudo da evolução dos modelos de gerenciamento de risco financeiro**. 2021. 73 p. Dissertação (Mestrado – Mestrado Profissional em Matemática, Estatística e Computação Aplicadas à Indústria) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2021.

Nas últimas décadas o sistema financeiro global tem sido impactado por diversas crises que moldaram a maneira de perceber e mensurar o risco. Neste trabalho, o objetivo é analisar as teorias e modelos que contribuíram para o desenvolvimento da mensuração e gerenciamento de risco financeiro, contemplando sua evolução frente as mudanças no ambiente constantemente modificado por eventos de cauda. Como método foram utilizadas técnicas de pesquisa exploratória e descritiva. O trabalho permitiu observar que os modelos embora proporcionem certo grau de acurácia quando aplicados, ainda estão sujeitos a falhas e imprecisão.

Palavras-chave: Risco financeiros, volatilidade, retorno, crises.

ABSTRACT

GONÇALVES, S. **Measurement and risk management in the capital markets: a study of the evolution of financial risk management models.** 2021. 73 p. Dissertação (Mestrado – Mestrado Profissional em Matemática, Estatística e Computação Aplicadas à Indústria) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2021.

In the last few decades, the global financial system has been impacted by several crises that have shaped the way in which risk is perceived and measured. In this work, the objective is to analyze the theories and models that contributed to the development of the measurement and management of financial risk, contemplating its evolution in the face of changes in the environment constantly modified by tail events. As a method, exploratory and descriptive research techniques were used. The work allowed us to observe that the models, although providing a certain degree of accuracy when applied, are still subject to flaws and imprecision.

Keywords: Financial risk, volatility, return, crises.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Risco Total de um ativo	27
Figura 2 – Preço de fechamento do índice Ibovespa. Janeiro de 2014 à Dezembro de 2019.	28
Figura 3 – Retornos diários do índice Ibovespa	29
Figura 4 – Autocorrelações dos retornos	31
Figura 5 – Autocorrelação dos retornos ao quadrado	31
Figura 6 – Densidade dos retornos	32
Figura 7 – Gráfico quantil quantil da normal	32
Figura 8 – Fronteira Eficiente	48
Figura 9 – Fronteira Eficiente com inclusão de ativo livre de risco	49
Figura 10 – Linha de Mercado de Capitais	50
Figura 11 – Linha de Mercado de Títulos	51
Figura 12 – Conditional-Value-At-Risk	66

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Estatísticas da série de retorno do índice IBOVESPA	29
Tabela 2 – Teste Dickey Fuller Aumentado	30
Tabela 3 – Modelo GARCH para série de retorno do IBOVESPA	38

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	21
2	RISCO	25
2.1	Séries de tempo financeiras e retorno	26
2.1.1	<i>Retorno de um portfólio</i>	28
2.2	Fatos Estilizados	29
2.2.0.1	<i>Estacionariedade</i>	29
2.2.0.2	<i>Fraca dependência linear e dependência não linear</i>	30
2.2.0.3	<i>Caudas pesadas da distribuição</i>	30
2.3	Comportamento heterocedástico condicional	32
2.3.1	Modelo ARCH	33
2.3.1.1	<i>Propriedades da distribuição do modelo ARCH</i>	33
2.3.2	Modelo GARCH	35
2.3.2.1	<i>Propriedades da distribuição do modelo GARCH</i>	36
3	CRISES FINANCEIRAS	39
3.1	Tulipamania	40
3.2	Crise de 1929	40
3.3	Crise do petróleo	41
3.4	Crise de 1987	41
3.5	Crise do México	41
3.6	Crise asiática	41
3.7	Crise russa	42
3.8	Crise brasileira de 1998	42
3.9	Crise argentina	42
3.10	Crise do mercado imobiliário americano	42
3.11	Crise da zona do Euro	43
3.12	Crise do COVID-19	43
4	DESENVOLVIMENTO DA TEORIA DAS FINANÇAS	45
4.1	Moderna Teoria do Portfólio	45
4.1.0.1	<i>Variância de um portfólio</i>	46
4.1.0.2	<i>Otimização do portfólio</i>	47
4.2	Linha de Mercado de Capitais (LMC)	48

4.3	Capital Asset Pricing Model (CAPM)	50
4.4	Hipótese de Mercado Eficiente	52
4.5	Modelo de precificação de derivativos Black Scholes	53
4.5.1	<i>Derivativos</i>	54
4.5.2	<i>Precificação de opções</i>	54
4.5.2.1	<i>Delta Hedge</i>	55
4.5.3	<i>Modelo para o ativo</i>	56
4.5.3.1	<i>Processo de Wiener</i>	57
4.5.3.2	<i>Lema de Itô</i>	58
4.5.4	<i>O Modelo Black Scholes</i>	59
4.6	Value-At-Risk	61
4.6.1	<i>VaR não paramétrico</i>	62
4.6.2	<i>VaR Paramétrico</i>	63
4.6.3	<i>VaR por simulação</i>	64
4.7	Conditional Value - at - Risk (CVaR)	65
5	CONCLUSÃO	67
	REFERÊNCIAS	69

INTRODUÇÃO

A evolução da gestão de risco está intimamente relacionada a evolução do mercado financeiro. O mercado financeiro desempenha um papel importante para o crescimento econômico do país, possibilitando alocação eficiente de recursos entre os agentes econômicos, consolidando-se como uma alternativa de destinação de capitais para entes econômicos poupadores (superavitários) e de captação para as unidades econômicas tomadoras de recursos (deficitárias) (ANDREZO; LIMA, 2002). Sendo assim, o mercado financeiro atua como instrumento essencial para o desenvolvimento econômico, permitindo o financiamento de investimentos via emissão (subscrição) de títulos como ações, debêntures, entre outros, o que permite as empresas, sejam elas públicas ou privadas, financiar a implementação de projetos e expansão com capital de terceiros.

Para (LEVINE, 1997) a estrutura proporcionada pelas instituições do mercado financeiro desempenha cinco funções fundamentais. A primeira é de facilitar negociações, prover proteção, permitir a diversificação e conseqüentemente diluição de riscos; alocar recursos; monitorar gestores e exercer controle na administração da companhia; agregar poupanças individuais; facilitar intercâmbio de bens e serviços. Economistas consagrados como (SCHUMPETER, 2013) destacava que os serviços oferecidos pelos intermediários financeiros eram essenciais para as inovações tecnológicas. O Prêmio Nobel (HICKS *et al.*, 1969) demonstrou a ideia de que a Revolução Industrial foi "obrigada" a esperar pela revolução no mercado financeiro, apenas com o advento de mercados de capitais é que houve a possibilidade de se financiar investimentos de longa maturação e de capital intensivo com liquidez. Grande parte das inovações da primeira fase da Revolução Industrial já haviam sido inventadas há algum tempo, entretanto necessitavam de grande volume de capital de longo prazo para financiar tais projetos. Destaca-se ainda que o mercado financeiro permite a intervenção do governo na economia via emissão de títulos públicos, seja pela necessidade de financiamento de seus gastos, ou seja pela necessidade de implementação de política monetária.

Com o processo de globalização, acompanhou-se o aumento da demanda por produtos financeiros juntamente com o aumento da sofisticação bancária e a internacionalização das finanças, com isso, novas fontes de risco tem surgindo ao longo do tempo. A partir de então, eventos catastróficos econômicos passam a ter dimensões mundiais.

Mais precisamente, a elevação da instabilidade financeira ocorrida na década de 1980 em países desenvolvidos, fez emergir a necessidade de regulamentação nos mercados financeiros. Então, em julho de 1988, os bancos centrais dos países pertencentes ao grupo do G10, juntamente com Suíça e Luxemburgo, firmaram um acordo em que se comprometiam a tentar gerenciar riscos e em estabelecer requerimentos mínimos de capital a instituições bancárias dos países membros. Este compromisso é o conhecido como Acordo de Basileia. O objetivo específico do Acordo foi fomentar a robustez e estabilidade do sistema bancário, e dessa forma evitar que houvesse um "contágio" no sistema financeiro. O meio para se alcançar tal pretensão foi estabelecer que as exigências de capital próprio dos bancos deveriam perfazer no mínimo 8% do total de ativos da instituição, ponderados por seu risco, e em 1992 as medidas foram implantadas nos países membros. As autoridades monetárias brasileiras seguiram a recomendação sugeridas pelo Acordo, e em 1994 a Resolução nº 2.099, publicada pelo Banco Central do Brasil estabeleceu que as instituições bancárias atuante no mercado nacional deveriam constituir um Patrimônio Líquido em valor de no mínimo 8% de seus ativos ponderados pelos fatores de risco, decisão esta, em consonância com a admitida pelo Bank for International Settlements (BIS).

Entendendo que cada mercado possui suas características próprias, em 1995 o Comitê de Basileia para Supervisão Bancária propôs uma nova medida de alocação de capital para o risco financeiro, possibilitando a adoção de modelos internos, conhecidos como modelos proprietários. Ao longo dos anos, com sucessivas crises acontecendo ao redor do mundo, houve a necessidade de alterações significativas na regulamentação preconizada no Acordo, resultando no lançamento dos Acordos Basileia II e Basileia III. Esta contínua revisão e ajustes da regulação de capital de Basileia é uma evidência do enorme desafio em se estabelecer instrumentos de gerenciamento de risco que acompanhe a evolução nos produtos e mercados financeiros.

Diante da importância da estrutura do mercado de capitais para o desenvolvimento econômico, desenvolveu-se a Teoria das Finanças, um campo de estudos dentro da área da Economia, que se preocupa fundamentalmente em analisar o mercado de capitais no que concerne aos seus modelos e instrumentos de precificação de ativos. A essência da Teoria das Finanças é o exame da alocação mais eficiente dos recursos ao longo do tempo em um ambiente de incerteza. Nesse sentido, a Teoria das Finanças vem buscando permanentemente o desenvolvimento de instrumentos de gerenciamento de risco.

O marco inicial da Moderna Teoria das Finanças é atribuído ao clássico artigo de (MARKOWITZ, 1959), em que é demonstrado o procedimento para elaboração de uma "fronteira" de portfólios de maneira que cada uma delas possuísse o maior retorno esperado dado um certo nível de risco. Sua tese era considerada avançada para época e não havia capacidade computacional

para viabilizar sua aplicação, pois englobava teoria econômica, estatística e matemática.

Toda esta contextualização histórica revela o fato evidente de se compreender a geração e a dinâmica do risco. Assim sendo, a presente dissertação tem o objetivo de identificar as mais significativas contribuições ao desenvolvimento do estudo do risco financeiro. Portanto, este trabalho trata-se de uma pesquisa do tipo exploratória descritiva de caráter qualitativo e quantitativo. De acordo com (GIL, 2000), a pesquisa exploratória é desenvolvida com o intuito de se criar uma visão geral acerca de determinado fato, por essa característica, tal objetivo será alcançado através do uso de técnicas de pesquisa bibliográficas e análise histórico-temporal do desenvolvimento do estudo do risco financeiro com busca de trabalhos mais citados nas bases de dados ao que se refere às palavras-chaves risco financeiro, crises econômicas, volatilidade e retornos de ativos. Também serão apresentadas as demonstrações dos modelos matemáticos.

Esta abordagem foi escolhida, devido ao fato de um número crescente de profissionais e instituições que procuram compreender e aplicar os fundamentos teóricos para as previsões econômicas no comportamento do mercado financeiro, em um ambiente de *stress*, incerteza e constantes mudanças.

Neste capítulo, apresentou-se a motivação e justificativa para o desenvolvimento do trabalho.

No capítulo 2, definem-se conceitos fundamentais em avaliação de riscos financeiros que auxiliarão na delimitação da variável foco em análise de risco que é o retorno dos ativos financeiros e sua volatilidade incondicional e condicional. Também apresenta-se a conceituação formal de risco e suas derivações, que embora nem todas são objeto de estudo deste trabalho, exercem influência na determinação do risco financeiro.

No capítulo 3, descreve-se os principais eventos de crise que propiciaram o desenvolvimento e aplicação de novos instrumentos de gerenciamento de risco, discutindo suas causas, propagação e consequências.

No capítulo 4, analisa-se as principais contribuições para a Teoria das Finanças ao que concerne o desenvolvimento da gestão de risco financeiro. É abordada a Teoria Moderna do Portfólio, teoria seminal no campo de finanças que introduziu o binômio risco x retorno como forma de se avaliar o risco total de uma carteira levando em consideração a correlação entre os retornos dos ativos que a compõe. Em seguida, apresenta-se a contribuição de (TOBIN, 1958) que a partir do modelo de Markowitz, desenvolveu-lhe uma extensão, a Linha de Mercado de Capitais, em que é incluído ao modelo ativos livres de riscos. Em seguida, também tendo com base a teoria de Markowitz, demonstra-se a evolução da Teoria do Portfólio por meio da contribuição do *Capital Asset Pricing Model* (CAPM). Para época, os modelos de Markowitz exigiam uma capacidade computacional não ofertada no período, o que fez emergir estudos a respeito da dinâmica do preço de ativos, dentre eles, a reconhecida contribuição da Hipótese de Mercados Eficientes que lançou bases para explicar a formação dos preços de ativos. Em seguida, a análise

evidencia a contribuição do modelo de precificação de derivativos *Black Scholes* que surgiu para atender a necessidade de um mercado financeiro mais sofisticado que demandava minimização de risco dada a grande incerteza que se sobressaia no período. A crise dos *subprimes* em 2001 suscitou debate acerca da acurácia dos modelos utilizados pelas intuições, nesse contexto, o modelo *Value-at-Risk*, desenvolvido e implementado na instituição J.P. Morgan ganha ampla aceitação devido seu poder de resumir em um único número, o pior prejuízo financeiro esperado dado determinado grau de confiança. E por fim, verifica-se as propriedades do *Conditional Value - At - Risk*, que veio como uma alternativa ao *Value-at-Risk* por este ser uma medida de risco subaditiva.

Para finalizar, no capítulo 5 é apresentada as conclusões do trabalho.

Por último, apresenta-se as referências bibliográficas.

RISCO

De acordo com (BERNSTEIN, 1997), o primeiro a abordar o conceito de risco foi De Moivre, em sua publicação "*De Mensura Sortis*", de 1711: "A medida do risco de perda de uma quantia é o produto do montante colocado em jogo pela probabilidade de perda". Embora tal definição norteie nosso entendimento de risco até os dias atuais, é (KNIGHT, 2012) que amplia a visão sobre o tema ao propor uma distinção entre risco e incerteza. O autor defende o princípio que risco implica conhecimento com probabilidade mensurável, de outra forma, é um evento desconhecido ou incerto em sentido restrito. (KEYNES, 2017) adverte que a tentativa de prever acontecimentos futuros como forma de minimizar risco é uma tarefa precária "[...] nosso conhecimento dos fatores que regularão a renda de um investimento alguns anos mais tarde é, em geral, muito limitado e, com frequência, desprezível". Sobre o conceito de incerteza ele argumenta:

"Se falarmos com franqueza, temos que admitir que as bases do nosso conhecimento para calcular a renda provável dentro de dez anos de uma estrada de ferro, uma mina de cobre, uma fábrica de tecidos, a aceitação de um produto farmacêutico, um navio transatlântico ou um imóvel no centro comercial de Londres pouco significam e, às vezes, a nada levam. De fato, aqueles que tentam, com seriedade, fazer um cálculo desta natureza constituem uma pequena minoria, cuja conduta não chega a influenciar o mercado". (KEYNES, 2017).

(JORION, 1997) decompõe o risco financeiro em:

- **Risco de Mercado:** proveniente dos movimentos nos níveis ou nas volatilidades verificadas nos preços de ativos financeiros. O risco de mercado é frequentemente classificado em dois diferentes tipos: o **risco absoluto** mensurado pela perda potencial em moeda corrente; e o **risco relativo** que é relacionado a um *benckmarket*. O controle do risco de mercado

é efetuado por meio de controle de limites de nocionais, de exposição e também pelas medidas de VaR;

- **Risco de crédito:** surge quando as contrapartidas não desejam ou não são capazes de cumprir suas obrigações expressas em contrato. O risco pode ser tanto de perda de receitas não realizadas em razão de contratos não liquidados no vencimento, quanto risco de perda do valor total de uma transação (risco do principal). Ressalta-se, portanto, que perdas oriundas do risco de crédito podem vir a ocorrer mesmo antes da própria inadimplência. O controle do risco de crédito é feito por controle de limites de crédito sobre valores nocionais, exposições correntes e futuras;
- **Risco de liquidez:** verificado no instante que uma operação de mercado não pode ser efetuada aos preços de mercado vigentes, devido à elevada dimensão da posição quando confrontada ao volume realizado médio. O risco de liquidez pode ser gerenciado através de imposição de limites, por meio de diversificação ou aproximação por medida de VaR;
- **Risco operacional:** oriundo de erros humanos, defeitos técnicos ou acidentes. O risco operacional pode ter como consequência o risco de crédito e o risco de mercado;
- **Risco legal:** estão sujeitos a este tipo de risco transações que não podem ser amparadas pela lei.

Recentemente adota-se mais uma classe de risco, o **Risco socioambiental**. A definição dessa classe de risco encontra-se na Resolução 4327/14 do Banco Central, esclarecendo que se trata da possibilidade de ocorrência de perdas das instituições financeiras oriundas de choques socioambientais.

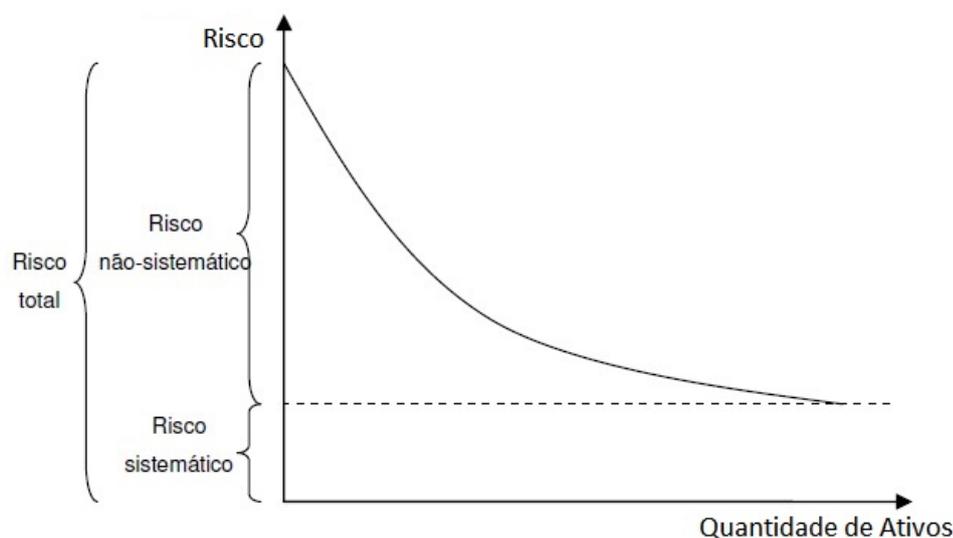
Estes riscos, como veremos, podem ser mitigados pela diversificação. São conhecidos na literatura como uma classe de "risco não-sistemático", e são gerados por eventos aleatórios que influenciam no valor do ativo.

Há também a classe de risco chamada "risco sistemático", que é o tipo de risco que nenhum mercado pode evitar. Tal risco está relacionado a choques econômicos, crises políticas, epidemias entre outros eventos de dimensões globais.

2.1 Séries de tempo financeiras e retorno

Os preços de ativos financeiros coletados ao longo de um período formam uma série de tempo financeira. Entretanto, séries de ativos financeiros são altamente correlacionados e a variância dos preços sofrem variação com o passar do tempo, em outras palavras, os preços dos ativos financeiros trata-se de variáveis estocásticas e não determinísticas. Por esse motivo, para a análise de risco, o nível de preço não carrega o mesmo poder de informação que uma série de retorno do ativo.

Figura 1 – Risco Total de um ativo



O retorno de um ativo é definido, segundo (MORETTIN, 2017), como uma porcentagem da mudança do preço expressa como uma fração de um preço inicial. (CAMPBELL *et al.*, 1997) fornece duas importantes razões para usar retornos dos ativos ao invés de seus preços. Primeiro, a maioria dos investidores, o retorno de um instrumento financeiro é um resumo completo e livre de escalas dentre todas as possíveis escolhas de ativos. Em segundo lugar, séries de retorno são eficientes de lidar quando comparados com séries de preços, por possuírem fundamentos estatísticos mais atraentes.

Sendo P_t o preço de um ativo no período t , a posse de tal ativo do período $t-1$ a t , o ativo varia de P_{t-1} a P_t .

Supondo que o período observado não houve pagamento de dividendos, então o retorno, ou taxa de retorno discreta de um período é definido como:

$$R_t = \left(\frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \right) = \frac{\Delta P_t}{P_{t-1}}. \quad (2.1)$$

De acordo com (JORION, 1997), quando trata-se de retornos em horizontes de tempo mais longo, é conveniente a utilização de taxa de retorno geométrica, ou taxa de retorno contínua, ou simplesmente log-retorno expressa em termos de logaritmo da razão de preço (sendo o logaritmo na base e):

$$r_t = \ln \left(\frac{P_t}{P_{t-1}} \right) = \ln(p_t) - \ln(p_{t-1}). \quad (2.2)$$

A variação mais comumente utilizada é a variação contínua, mas (ALEXANDER, 2005) ressalta que há duas perspectivas técnicas distintas. Uma que é a escola de precificação de derivativos que modela a variação de preço dos ativos em tempo contínuo. Por outro lado, há a escola de previsão estatística que modela a volatilidade em tempo discreto.

2.1.1 Retorno de um portfólio

O cálculo do retorno simples de um portfólio constituído de N ativos é obtido pela média ponderada dos retornos aritméticos dos ativos que o compõem, em que o peso de cada ativo é a porcentagem do valor do portfólio investido em tal ativo. Sendo p um portfólio ponderado w_i sobre o ativo i . Logo, o retorno de p no período t é:

$$R_{p,t} = \sum_{i=1}^N w_i R_{it}. \quad (2.3)$$

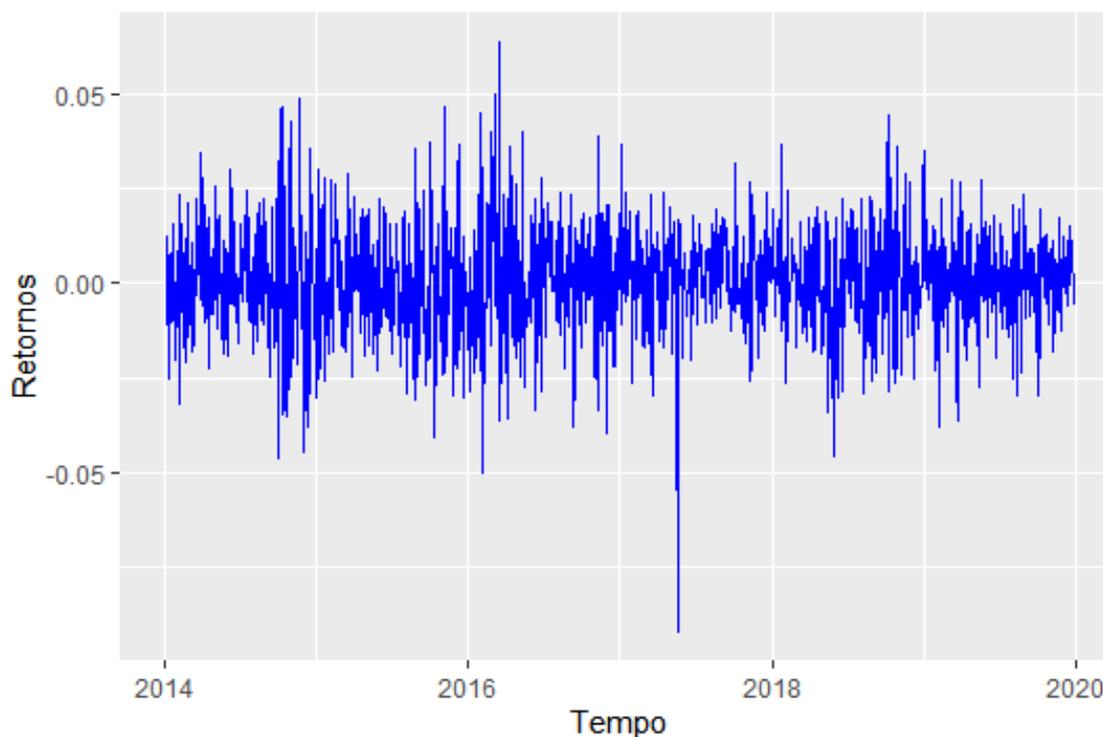
Figura 2 – Preço de fechamento do índice Ibovespa. Janeiro de 2014 à Dezembro de 2019.



Para ilustração do comportamento das séries financeiras, toma-se o índice IBOVESPA da data de 02 de janeiro de 2014 à 30 de dezembro de 2019, totalizando 1474 observações. As figuras 2 e 3 representam respectivamente o preço de fechamento e os retornos do índice, ambos em base diária.

A tabela 1 traz as principais estatísticas descritivas para a série de retorno do índice. Verifica-se excesso de curtose na amostra uma vez que o valor é superior a 3 (NETO, 2004),

Figura 3 – Retornos diários do índice Ibovespa



ou seja, a distribuição possui caudas pesadas. O coeficiente de assimetria negativo indica que a cauda esquerda da distribuição possui maior concentração de dados.

Tabela 1 – Estatísticas da série de retorno do índice IBOVESPA

Estatística	Valor
Média ($\times 10^{-4}$)	5,31
Mínimo	-0,09
Máximo	0,064
Variância ($\times 10^{-4}$)	2,88
Curtose	4,91
Assimetria	-0,12
Amostra	1474

2.2 Fatos Estilizados

(AIUBE, 2013) define fatos estilizados dos retornos como regularidades estatísticas observadas em um grande número de séries financeiras de retornos, a partir de estudos empíricos em diversos mercados.

2.2.0.1 Estacionariedade

De fato, propriedades estatísticas das séries de retornos que possuem a característica de serem invariantes no tempo são conhecidas como processo estacionário. Um processo é

estritamente estacionário se a distribuição conjunta de y_1, \dots, y_k é idêntica à distribuição conjunta de y_{1+k}, \dots, y_{t+k} para todo t , em que k é um número inteiro positivo.

Para (AIUBE, 2013) uma definição menos rigorosa de estacionariedade é denominada de estacionariedade de segunda ordem ou estacionariedade fraca. Um processo é dito estacionário de segunda ordem se a média e a variância de y_t são idênticas para qualquer t e a covariância é função apenas da defasagem, em outras palavras, $E(y_t) = \mu$ e $Cov(y_t, y_{t-k}) = \gamma_k$, como função de k .

Dividindo a amostra da série do índice IBOVESPA em duas subamostras de mesmo tamanho. A primeira subamostra contempla o período de 02 de janeiro de 2014 à 29 de dezembro de 2016, e a segunda subamostra inicia a partir desta data até o fim do período. A média para primeira subamostra é $\mu = 51940$ e desvio-padrão de $\sigma = 5352$. Para segunda amostra média de $\mu = 83497$ e $\sigma = 14299$. Tanto a média como o desvio-padrão das duas subamostras são muito diferentes, o que corrobora a análise gráfica da figura 2.

Quanto a série de retorno, utiliza-se o teste de Dickey-Fuller Aumentado para identificar presença de raiz unitária, para maiores detalhes veja (MUSHTAQ, 2011). Os resultados para as duas subamostras representados na tabela 2 evidenciam a estacionariedade das séries:

Tabela 2 – Teste Dickey Fuller Aumentado

Subamostra	Estatística	p-valor
Subamostra 1	-8.8375	0,01
Subamostra 2	-8.6987	0,01

2.2.0.2 Fraca dependência linear e dependência não linear

A série de retorno, de forma geral, possui pouca ou nenhuma autocorrelação, mas existe autocorrelação amostral significativa nos quadrados do retorno. Uma análise mais profunda pode ser realizada em (HANSEN; LUNDE, 2014).

A figura 4 demonstra a característica de não haver autocorrelação em todas as defasagens para a série de retorno do índice IBOVESPA analisada. Quanto aos retornos ao quadrado, a figura 5 confirma a hipótese de que há várias autocorrelações diferentes de zero.

(MATIAS; SILVA; VIEIRA, 2005) (CAMPOS, 2007)

2.2.0.3 Caudas pesadas da distribuição

A aferição do grau de leptocurtose pode ser realizado através do coeficiente de curtose, quadrado, (JONDEAU; ROCKINGER, 2003). Curtose de valor igual a 3 são esperadas para distribuições *i.i.d* com distribuição normal. Conforme resultado exposto na tabela 1, a série do índice IBOVESPA corrobora a hipótese de caudas pesadas ao apresentar curtose igual à 4,91.

A figura 6 é um comparativo entre uma estimação do núcleo dos retornos, representada pela linha azul, e uma estimação de densidade normal com média e desvio-padrão iguais a

Figura 4 – Autocorrelações dos retornos

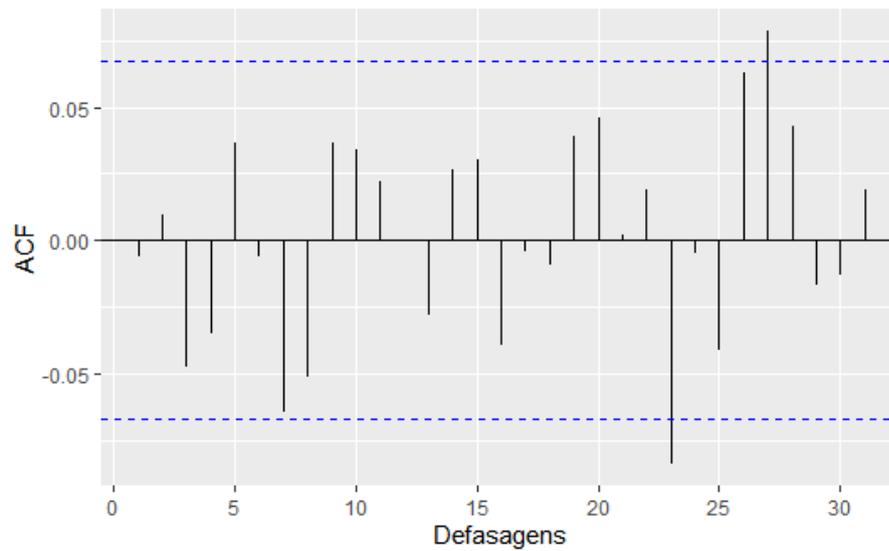
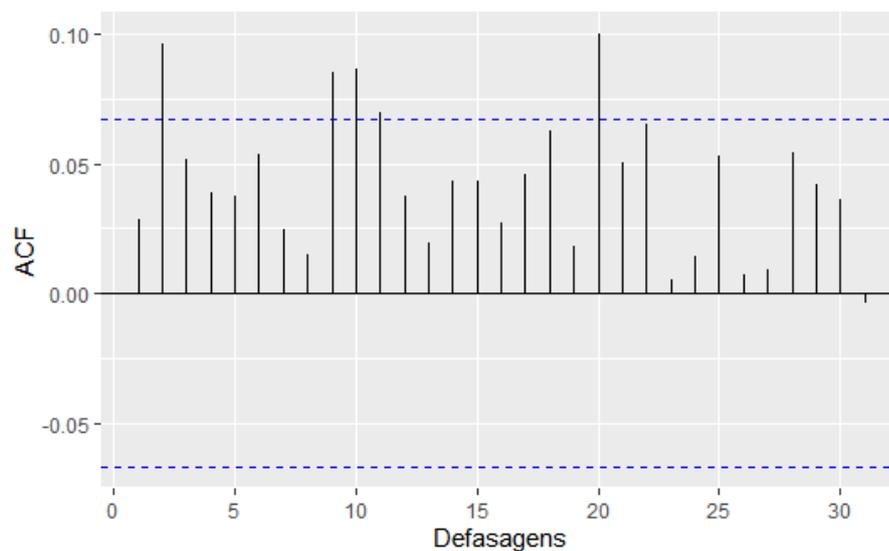


Figura 5 – Autocorrelação dos retornos ao quadrado



do retorno, representada pela linha tracejada vermelha. Tipicamente neste tipo de comparação, consegue-se observar claramente a dispersão dos retornos ao redor do pico zero, conforme demonstra (JOHANSEN; SORNETTE, 1998), porém as caudas ficam sobrepostas. Para observar a presença de caudas pesadas é recomendável a utilização do gráfico quantil-quantil da normal, ((CASTILLO-GUTIÉRREZ; AGUILERA, 2007)), conforme gráfico 7. Na figura, é possível observar a existência de caudas pesadas pelo fato dos pontos distanciarem da reta (linha vermelha) nas extremidades.

Figura 6 – Densidade dos retornos

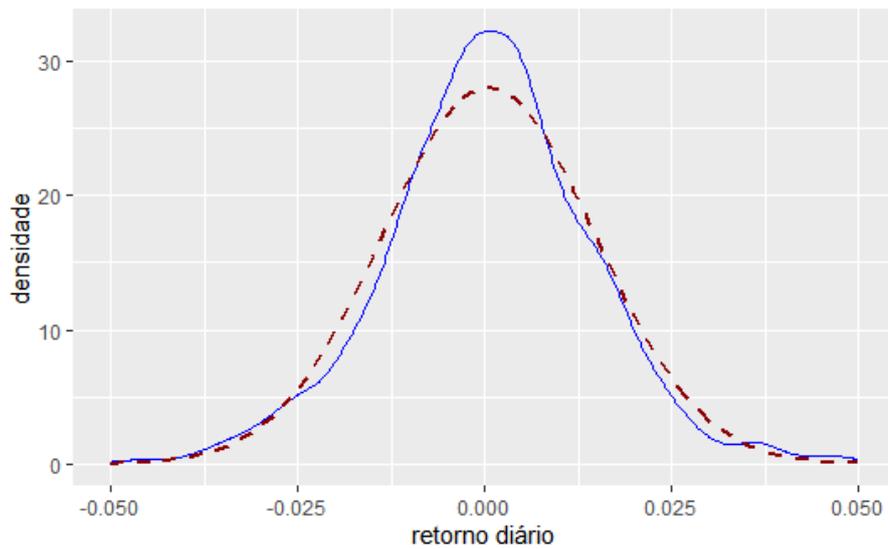
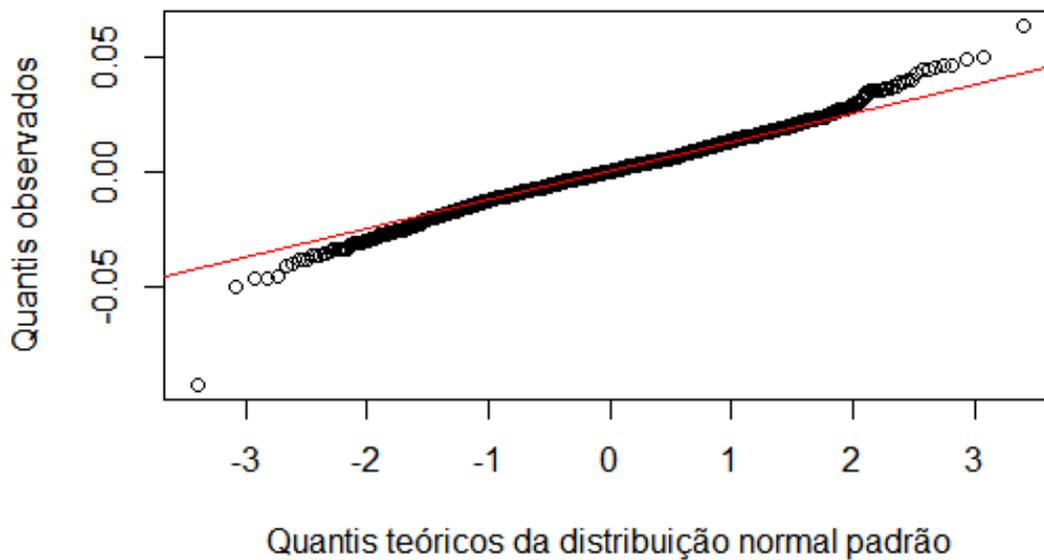


Figura 7 – Gráfico quantil quantil da normal



2.3 Comportamento heterocedástico condicional

A volatilidade em séries financeiras, como observado em (ANDERSEN; BOLLERSLEV, 1998), não são constantes ao longo do tempo. Isto confere aos retornos, um caráter heteroscedástico. Períodos de alta volatilidade são intercalados por períodos de baixa volatilidade. A variação da volatilidade é facilmente observada na figura 3. Esta propriedade é conhecida na literatura como agrupamento de volatilidade.

As características de volatilidade são incorporadas por modelos heterocedásticos condicionais ARCH (*Autoregressive Conditional Heterocedasticity*), proposto por (ENGLE, 1982) e posteriormente estendido por (BOLLERSLEV, 1986) para modelos GARCH (*Generalized Autoregressive Conditional Heterocedasticity*). Mais detalhes sobre modelos heterocedásticos veremos adiante.

2.3.1 Modelo ARCH

(ENGLE, 1982) em seu trabalho seminal, estimou a variância da inflação no Reino Unido. Como resultado, constatou a existência de variância condicional nas séries de retorno do índice de preços.

O modelo denominado ARCH (*Autoregressive Conditional Heterocedascity*), a variância da série ε no período t condicionada por seus valores passados, estabelece dependência com $\varepsilon_{t-1}^2, \dots, \varepsilon_{t-p}^2$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2 \\ \alpha_0 > 0, \alpha_1, \dots, \alpha_p &\geq 0 \quad \varepsilon|I_t \sim N(0, \sigma_t^2), \end{aligned} \quad (2.4)$$

em que σ_t^2 é a variância condicional de ε_t , α_0 uma constante, α_1 o coeficiente relacionado a $\varepsilon_{t-1}^2, \dots, p$.

Um movimento acentuado de preço em $t-1$ provoca impacto em $t-p$ e sobre o dia de hoje, aumentando a variância, uma vez que são impostas restrições aos parâmetros para que sejam positivos. Neste caso não importa a direção do movimento de preço, positivo ou negativo, haja visto na equação 2.5 que todos os retornos não esperados estão elevados ao quadrado.

2.3.1.1 Propriedades da distribuição do modelo ARCH

A estrutura do modelo ARCH é:

$$\begin{aligned} \alpha_t &= \sigma_t \varepsilon_t \\ \sigma^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 \alpha_{t-1}^2, \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde $\alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0, E(\alpha_t) = 0, Var(\alpha_t) = Var(\alpha_{t-1}) = E[\alpha_{t-1}^2], E(\varepsilon_t) = 0$ e $Var(\varepsilon_t) = E[\varepsilon_t^2] = 1$. Sendo que a média incondicional de α_t permanece 0 pois:

$$E(\alpha_t) = \sigma_t E(\varepsilon_t) = 0.$$

E, a variância incondicional de α_t pode ser encontrada por:

$$\begin{aligned}
\text{Var}(\alpha_t) &= E(\alpha_t^2) = E(\sigma_2^t \varepsilon_t^2) \\
&= E(\alpha_t^2) \times E(\varepsilon_t^2) \text{ pois so duas variveis iid} \\
&= E(\sigma_t^2) \text{ pois } \text{Var}(\varepsilon_t) = 1 \\
&= E(\alpha_0 + \alpha_1 \alpha_{t-1}^2) \\
&= \alpha_0 + \alpha_1 E(\alpha_{t-1}^2) \\
&= \alpha_0 + \alpha_1 \text{Var}(\alpha_t) \\
&= \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}.
\end{aligned}$$

Uma vez que a variância não pode ser negativa, necessariamente tem-se $0 \leq \alpha_1 \leq 1$.

Sabendo-se que de forma geral os retornos, conforme seus fatos estilizados, apresentam caudas pesadas:

$$\begin{aligned}
\frac{m_4}{m_2^2} &= \frac{E(\alpha_t - \bar{\alpha}_t)^4}{[E(\alpha_t - \bar{\alpha}_t)^2]^2} = 3 \\
E(\alpha_t^4) &= 3E(\alpha_t^2)^2, \text{ pois } \bar{\alpha}_t = 0 \\
&= 3E(\alpha_0 + \alpha_1 \alpha_{t-1}^2)^2 \\
&= 3E(\alpha_0^2 + 2\alpha_0 \alpha_1 \alpha_{t-1}^2 + \alpha_1^2 \alpha_{t-1}^4).
\end{aligned}$$

Se α_t é estacionário no quarto momento com $m_4 = E(\alpha_t^4) = E(\alpha_{t-1}^4)$ e $E(\alpha_t^2) = \text{Var}(\alpha_t)$, então:

$$\begin{aligned}
m_4 &= 3(\alpha_0^2 + 2\alpha_0 \alpha_1 \text{Var}(\alpha_t) + \alpha_1^2 m_4) \\
&= 3\alpha_0^2 + 6\alpha_0 \alpha_1 \left(\frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1} \right) + 3\alpha_1^2 m_4 \\
&= 3\alpha_0^2 \left(1 + \frac{2\alpha_1}{1 - \alpha_1} \right) + 3\alpha_1^2 m_4 \\
m_4 - 3\alpha_1^2 m_4 &= 3\alpha_0^2 + \frac{3\alpha_0^2}{1 - \alpha_1} \\
(1 - 3\alpha_1^2) m_4 &= \frac{(1 - \alpha_1)3\alpha_0^2 + 3\alpha_0^2(2\alpha_1)}{1 - \alpha_1} \\
m_4 &= \frac{3\alpha_0^2 - 3\alpha_0^2 \alpha_1 + 6\alpha_0^2 \alpha_1}{(1 - \alpha_1)(1 - 3\alpha_1^2)} \\
m_4 &= \frac{3\alpha_0^2(1 - \alpha_1)}{(1 - \alpha_1)(1 - 3\alpha_1^2)}.
\end{aligned}$$

Sendo positivo o quarto momento de α_t , isso implica que a condição $1 - 3\alpha_1^2 > 0$ deve ser satisfeita. Logo, $\alpha_1^2 < \frac{1}{3}$, unindo as duas condições, tem-se:

$$0 \leq \alpha_1^2 < \frac{1}{3}.$$

E finalmente, encontra-se a curtose incondicional de α_t :

$$\frac{E[\alpha_t^4]}{[Var(\alpha_t)]^2} = \frac{3\alpha_0^2(1+\alpha_1)}{(1-\alpha_1)(1-3\alpha_1^2)} \times \frac{(1-\alpha_1)^2}{\alpha_0^2} = \frac{3(1-\alpha_1^2)}{1-3\alpha_1^2} > 3.$$

Dessa forma, o excesso de curtose de α_t é positivo, possuindo cauda mais pesada em comparação a uma distribuição normal. Esta característica torna possível a modelagem e obtenção de informação de valores considerados extremos em uma série gaussiana.

([NEGUERUELA et al., 2016](#)) apresenta algumas limitações dos modelos ARCH:

1. A suposição do modelo é que tanto choques positivos quanto negativos impactam de forma similar na volatilidade, uma vez que o modelo é dependente do quadrado de choques anteriores. Empiricamente é aceito que ativos financeiros reagem de forma diferente à choques positivos ou negativos.
2. As definições do modelo ARCH impõe que seus parâmetros satisfaçam a um considerável número de restrições.
3. O modelo não permite identificar a fonte de variações em uma série de tempo financeira. Sua estrutura apenas fornece uma descrição da variância condicionada.
4. O modelo ARCH tem o viés de superestimar as previsões de volatilidade, uma vez que assimila de forma lenta a choques isolados.

O trabalho de Robert Engle foi de reconhecida relevância para teoria financeira, o que permitiu estabelecer uma nova disciplina na área de econometria. Tal contribuição rendeu-lhe o Prêmio Nobel de Economia em 2003. Para detalhes sobre a estimação do modelo ARCH veja ([BERA; HIGGINS, 1993](#)).

2.3.2 Modelo GARCH

Apesar da simplicidade do modelo ARCH, é comum em seu uso prático, sua estimação resultar em muitos parâmetros a fim de descrever de maneira precisa a volatilidade condicional. Em vista dessa característica, ([BOLLERSLEV, 1986](#)) introduziu a generalização do modelo de ARCH conhecido como GARCH (*Generalized Autoregressive Conditional Heterocedascity*) com o objetivo de obter um modelo mais parcimonioso e sem os problemas de estimação encontrados no modelo ARCH. Seja o modelo GARCH na forma da equação 2.5:

$$\begin{aligned} y_t &= h_t^{1/2} \varepsilon_t, \\ h_t &= \omega + \alpha y_{t-1}^2 + \beta h_{t-1}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

em que $\varpi > 0$ e $\beta \geq 0$ para assegurar que $h_t \geq 0$. O α corresponde a parcela do ARCH, ao passo que β representa o coeficiente da parcela GARCH.

Pode-se observar a equivalência do modelo GARCH com o modelo ARCH(∞) ao fazer substituições recursivas do termo h_{t-1} na equação 2.5.

Ao acrescentar y_t^2 em ambos os lados da expressão de h_t , tem-se:

$$\begin{aligned} y_t^2 &= \varpi + \alpha y_{t-1}^2 + \beta h_{t-1} - h_t + y_t^2, \\ &= \varpi + \alpha y_{t-1}^2 + \beta h_{t-1} + \mu_t, \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde:

$$\mu_t = y_t^2 - h_t.$$

e

$$\mu_{t-1} = y_{t-1}^2 - h_{t-1}.$$

As devidas substituições resultam em,

$$\begin{aligned} y_t^2 &= \varpi + \alpha y_{t-1}^2 + \beta (y_{t-1}^2 - \mu_{t-1}) + \mu_t \\ &= \varpi + (\alpha + \beta) y_{t-1}^2 - \beta \mu_{t-1} + \mu_t. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Então o modelo GARCH pode ser representado como um modelo ARMA(1, 1) que se respeitada a condição $\alpha + \beta < 1$ será estacionário de segunda ordem (ISSLER, 1991).

2.3.2.1 Propriedades da distribuição do modelo GARCH

Da mesma maneira como foi procedido com o modelo ARCH, apresenta-se a seguir, as propriedades da distribuição do modelo GARCH a partir da abordagem do coeficiente de curtose.

Em um modelo GARCH(p, q) em que p é a ordem dos retornos ao quadrado e q a ordem das variâncias condicionais passadas, os momentos condicionais de ordem $2k$ são proporções de h_t^k :

$$E(y_t^{2k} | I_{t-1}) = h_t^k E(\varepsilon_t^{2k}),$$

nota-se também que o coeficiente de curtose da distribuição condicional é proporcional ao coeficiente de curtose de ε_t . então, o coeficiente de curtose da distribuição incondicional é:

$$k_y = \frac{(y_t^4)}{\{Var(y_t)\}^2} = \frac{E\{E(y_t^4 | I_{t-1})\}}{\{E(y_t^2)\}^2} = \frac{E(hr^2)}{\{E(y_t^2)\}^2} k_\varepsilon,$$

onde $k_\varepsilon = E(\varepsilon_t^4)$ representa o coeficiente de curtose de ε_t .

Tomando o modelo GARCH(1,1)

$$\begin{aligned} y_t &= \varepsilon_t \sqrt{h_t}, \quad \varepsilon_t \sim NID(0, 1) \\ h_t &= \omega + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

a obtenção de k_y é função tanto da esperança do quarto momento incondicional quanto da esperança incondicional do retorno.

$$E(y_t^4) = E(\varepsilon_t^4)E(h_t^2). \quad (2.10)$$

Aplicando a decomposição de h_t^2

$$h_t^2 = \omega^2 + \alpha_1^2 y_{t-1}^4 + \beta_1^2 h_{t-1}^2 + 2\omega\alpha_1 y_{t-1}^2 + 2\omega\beta_1 h_{t-1} + 2\alpha_1\beta_1 y_{t-1}^2 h_{t-1}.$$

Considerando que:

$$y_{t-1}^2 = \varepsilon_{t-1}^2 h_{t-1}, \quad E(\varepsilon_{t-1}^2) = 1,$$

e

$$E(y_{t-1}^2) = E(h_{t-1}).$$

Segue que,

$$\begin{aligned} E(h_t^2) &= \omega^2 + \alpha_1^2 E(y_{t-1}^4) + \beta_1^2 E(h_{t-1}^2) + 2\omega\alpha_1 E(y_{t-1}^2) + 2\omega\beta_1 E(h_{t-1}) + 2\alpha_1\beta_1 E(\varepsilon_{t-1})^2 E(h_{t-1}^2) \\ &= \omega^2 + \alpha_1^2 E(y_{t-1}^4) + \beta_1^2 E(h_{t-1}^2) + 2\omega(\alpha_1 + \beta_1)E(y_{t-1}^2) + 2\alpha_1\beta_1 E(h_{t-1}^2) \\ &= \omega^2 + \alpha_1^2 E(y_{t-1}^4) + 2\omega(\alpha_1 + \beta_1)E(y_{t-1}^2) + (2\alpha_1\beta_1 + \beta_1^2)E(h_{t-1}^2). \end{aligned}$$

Fazendo a substituição de

$$E(y_t^2) = E(Y_{t-1}^2) = \omega / \{1 - (\alpha_1 + \beta_1)\},$$

e tomando o quarto momento do retorno como constante $E(y_t^4) = E(y_{t-1}^4) = \mu_4$ conforme equação 2.10

$$\mu_4 = k_\varepsilon \left\{ \omega^2 + \alpha_1^2 \mu_4 + 2\omega(\alpha_1 + \beta_1) \frac{\omega}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)} + (\beta_1^2 + 2\alpha_1\beta_1) \frac{\mu_4}{k_\varepsilon} \right\}.$$

Dessa forma,

$$\mu_4 = \frac{\omega^2(1 + \alpha_1 + \beta_1)}{(1 - k_\varepsilon \alpha_1^2 - \beta_1^2 - 2\alpha_1\beta_1)(1 - \alpha_1 - \beta_1)}.$$

E finalmente, obtém-se a curtose k_y igual a

$$\begin{aligned} k_y &= \frac{\omega^2(1 + \alpha_1 + \beta_1)}{(1 - k_\varepsilon \alpha_1^2 - \beta_1^2 - 2\alpha_1\beta_1)(1 - \alpha_1 - \beta_1)} \frac{(1 - \alpha_1 - \beta_1)^2}{\omega^2} \\ &= \frac{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 - \alpha_1^2(k_\varepsilon - 1)} k_\varepsilon, \end{aligned}$$

desde de que respeitada a restrição $\alpha_1^2 k_\varepsilon < 1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 + \alpha_1^2$, k_y será maior que k_ε . Dada essa condição, o modelo GARCH(1,1) possuirá caudas mais pesadas que a distribuição do erro ε_t . Seja k_y^* o excesso do coeficiente de curtose de y_t e ε_t em relação ao coeficiente da Distribuição Normal

$$k_y^* = k_y - 3 = \frac{6\alpha_1^2 + k_\varepsilon^* \{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 + 3\alpha_1^2\}}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 - 2\alpha_1^2 - k_\varepsilon^* \alpha_1^2},$$

portanto, o excesso de curtose de y_t cresce marginalmente com o aumento do excesso de curtose do erro ε_t .

Para estimação do modelo GARCH veja (BROOKS; BURKE; PERSAND, 2001).

Tabela 3 – Modelo GARCH para série de retorno do IBOVESPA

Coefficiente	Valor
Mu ($\times 10^{-4}$)	8,66
Omega ($\times 10^{-6}$)	4,36
Alpha 1 ($\times 10^{-2}$)	5,22
Beta 1 ($\times 10^{-1}$)	9,26

CRISES FINANCEIRAS

As crises financeiras sempre foram objeto de estudos nas diversas escolas de pensamento econômico desde sua concepção como ciência, como pode ser visto em (SMITH, 1996) que atribuía a causa aos "excessos de troca" seguido por um período de contração na oferta. Para (AMARAL, 2009) um episódio de crise é acompanhado por um sentimento coletivo de medo que amplia a extensão e consequência de suas reais fundamentações.

De acordo com (DORNBUSCH; PARK; CLAESSENS, 2000), o sentimento econômico que antecede uma crise em certo país, tem o potencial de conduzir os investidores a reestruturarem suas posições, realocando seus portfólios nos mais diversos mercados, sem no entanto, levar em consideração divergências entre os fundamentos macroeconômicos dos mercados envolvidos. Essa característica de transmissão de choques tem o potencial de originar o efeito contágio, ocasionado por fenômenos irracionais, como por exemplo pânico no mercado acionário, comportamentos de efeito manada, perda de credibilidade das instituições, elevação da aversão ao risco, entre outros impactos.

Segundo (ASCHINGER, 1997), todas as principais crises financeiras foram crises macroeconômicas especulativa, que são crises que envolvem muitos atores e se disseminam por toda economia e desenvolvem-se em uma série de estágios:

1. **Deslocamento:** O sistema macroeconômico é impactado por um choque exógeno.
2. **Desenvolvimento de um "boom":** Novos negócios são criados oportunidades de investimentos, fazendo com que a produção aumente e conseqüentemente inicia-se um ciclo de desenvolvimento.
3. **Início de especulação:** O expressivo nível de desenvolvimento é inflado pela expansão de crédito banário como também pela inovação em produtos financeiros. O equilíbrio entre oferta e demanda é deslocado tendo como resultado o aumento de preços.

4. **Especulação desestabilizadora:** Atraídos pelo aumento de preço, novos investidores entram em novas posições, fortalecendo o movimento de alta. O resultado é a intensificação do processo especulativo que leva à formação de uma "bolha especulativa".
5. **Euforia:** Netse estágio, o comportamento do mercado é dominado pela dinâmica social e não mais pelos fundamentos macroeconômicos.
6. **Pânico:** O aumento exponencial dos retornos caracteriza o período de "boom" e isto traz a instabilidade dos mercados. Neste momento, as expectativas dos agentes econômicos começam a deteriorar-se. Informações incompletas são suficientes para investidores desfazerem suas posições. Movimentos de "manada" causam forte desvalorizações dos papéis. A bolha especulativa então estoura. E finalmente, a crise provoca a convergência dos preços aos valores compatíveis com o "*valuation*" pré-crise.

A seguir, segue um breve resumo das principais crises financeiras e períodos turbulentos.

3.1 Tulipamania

Durante o século XVII, tulipas foram consideradas símbolos de *status* na sociedade da Holanda. Inicialmente as tulipas foram negociadas somente em mercados à vista na temporada de verão, porém a demanda por esse gênero fora de época propiciou sua comercialização em mercados futuros. Movimentos especulativos causaram elevação exagerada nos valores, passando de 1.500 guinéus para 7.500 guinéus, fazendo com que a crise irrompesse em janeiro de 1637 após os preços registrarem sua maior alta, culminando em fevereiro do mesmo ano com o colapso dos preços.

3.2 Crise de 1929

A crise de 1929, segundo (BERNANKE, 2013) foi a combinação de uma crise de superprodução com a formação de uma bolha especulativa. O evento deu fim a um período de grande expansão econômica dos Estados Unidos. Houve um elevado aumento de produção acompanhado de crescimento do crédito o que propiciou a explosão de consumo. Com crédito abundante, investidores tomaram empréstimos bancários para comprar ações de empresas alimentando mais o processo especulativo. Como o consumo interno não acompanhou o aumento da produtividade, verificou-se a presença de elevado excedente. O dia 28 de outubro de 1929 ficou conhecido como a "Segunda-Feira Negra", quando foi registrada queda de 12,82% no índice *Dow Jones*. Tal queda provocou o *crack* da Bolsa de Nova Iorque e causando uma profunda depressão econômica tanto nos Estados Unidos quanto no mundo.

3.3 Crise do petróleo

A crise do petróleo teve início quando estimativas de que o recurso natural renovável poderia se esgotar em décadas (MARQUES, 1989). Em função destas análises, o preço do petróleo passou por um período de fortes oscilações a partir da década de 1970, iniciando de forma definitiva cinco momentos de crise do produto. Em um período curto, de cinco meses, entre outubro do ano de 1973 e março de 1974, o valor do barril de petróleo registrou alta de 400%, causando impactos significativos nos fluxos de capitais dos Estados Unidos como também na Europa, além de desestabilizar a economia global.

3.4 Crise de 1987

De acordo com (MALLIARIS; URRUTIA, 1992), a crise de 1987 foi uma crise de euforia irracional. Após a recessão causada pela crise do petróleo, a economia americana passa por rápido crescimento, porém, com elevados déficits orçamentários e de conta corrente, evidenciando desequilíbrio nos fundamentos macroeconômicos.

O período proporcionou uma tendência de alta no mercado de ações, levando - o a níveis de superavaliação que combinado com a intensificação da utilização de derivativos, mostrou se potencializar os efeitos de alavancagem (GRIECO, 1999).

A especulação chega ao seu fim em 16 de outubro de 1987 quando ordens de vendas antecipadas causaram atraso na abertura do pregão na Bolsa de Nova Iorque. Em 19 de outubro o índice *Dow Jones* desvaloriza 22,6%.

3.5 Crise do México

O estopim foi a crise do déficit de balança de pagamentos ocorrida ao mesmo tempo que uma especulação financeira e fuga de capitais. A crise cambial e financeira do México atingiu seu ponto crítico em 1994, e ficou conhecida como "Efeito Tequila" devido sua repercussão mundial (PEÑA, 1997).

3.6 Crise asiática

A crise asiática de 1997 teve início em julho de 1997 na Tailândia quando os investidores tomaram conhecimento do elevado déficit em conta-corrente do país em um período que sua dívida externa crescia rapidamente (CANUTO, 2000). A bolsa da Tailândia desvalorizou 53% enquanto sua moeda desvalorizou 41%. Nas Filipinas a desvalorização cambial foi de 37% e de 36% em seu mercado acionário. O Banco Central da Malásia na tentativa de conter a maciça fuga de capitais, elevou a taxa de juros em 50%, o que provocou queda na bolsa de 39%. Na

Córea do Sul a crise atinge a Hambo Steel, umas das grandes *chaebols* coreana que decreta falência, a primeira em dez anos de uma grande empresa do país. A bolsa de Seul desvaloriza 56% e o won 35%. Hong Kong, pelo fato de ser um centro financeiro da Ásia, foi severamente atacada por especuladores. Como resultado o índice *Hang Seng* desvalorizou 46%.

3.7 Crise russa

Uma consequência da crise asiática foi a redução do crédito internacional e a queda nos preços de commodities. Com isso, a Rússia passa a ter dificuldades para pagar suas dívidas de curto prazo. Após tentativas sem sucesso de acalmar o mercado, como elevar suas taxas de juros de 50% ao ano para 150%, em 17 de agosto de 1998, o governo russo declarou o que ficou conhecido como "Moratória Russa" que culminou com a insolvência de um grande *hedge fund*, o Long Term Capital Management. (PINTO *et al.*, 2005). O rublo sofreu uma desvalorização real de 75%.

3.8 Crise brasileira de 1998

Foi a primeira grande crise sofrida pelo bloco do Mercosul. O Brasil adotava no período, o modelo de bandas como âncora cambial. As sucessivas crises do mercado internacional levaram à fuga de capitais em mercados emergentes, consequência disso foi o Brasil ter que abandonar a indexação de sua moeda em relação ao dólar (AVERBUG; GIAMBIAGI, 2000). No auge da crise o Real chegou a desvalorizar cerca de 80%. O Banco Central elevou a taxa de juros básica de 19% ao ano para cerca de 42,5% ao ano.

3.9 Crise argentina

A crise argentina teve seu período de propagação a partir dos anos de 1990, mas seu auge foi de 1999 à 2002, segundo (CARRIZOSA; LEIPZIGER; SHAH, 1996). Em 1991, a estabilidade macroeconômica é alcançada com a Lei da Convertibilidade, em que vinculava o peso ao dólar na paridade de 1:1. Após declarar moratória, o dólar chegou a ser cotado a \$3,90 pesos em 25 de março de 2002.

3.10 Crise do mercado imobiliário americano

Em setembro de 2007, deu início a uma crise que tornaria a maior crise enfrentada pelo mundo desde a Grande Depressão de 1929. Os conhecidos empréstimos hipotecários podres, também chamados de *subprime mortgage*, eram negociados de maneira alavancada. Tal exposição ao risco, levou a uma crise de crédito por meio da transferência desenfreada de CDS's (*Credit Default Swaps*) e CDO's (*Collateralized Debt Obligation*) para terceiros, transmitindo assim os

riscos para as contrapartes ([GONTIJO et al., 2008](#)). Um ano depois, em 5 de setembro de 2008 o banco Lehman Brothers (fundado em 1850) foi a falência, levando os índices de mercado ao seu pior resultado negativo desde o atentado de 11 de setembro de 2001.

3.11 Crise da zona do Euro

A crise da zona do Euro é melhor definida como uma crise de dívida pública europeia, que devido sua magnitude, foi uma crise financeira que atingiu diversos países da Zona do Euro, inviabilizando o pagamento ou a rolagem de sua dívida pública. A circulação de uma moeda única no bloco criou condições distintas em cada membro. Países membros do mercado comum não poderiam exercer seus instrumentos tradicionais para efetuar políticas econômicas, como a fiscal, monetária e cambial. Adicionalmente, também não puderam prosseguir com o financiamento de seus déficits por meio de emissão de dívida pública e tão pouco conseguiram elevar sua arrecadação. ([CHESNAIS, 2013](#))

3.12 Crise do COVID-19

A crise sanitária causada pelo vírus da COVID-19 transformou-se em uma crise econômica de proporções mundiais ([ZHANG; HU; JI, 2020](#)). Ao perceberem que as consequências geradas pelo COVID-19 não ficariam restritas aos arredores da cidade de Wuhan, os mercados financeiros realizaram uma queda acentuada. No total, mercados acionários globais desvalorizaram US \$ 6 trilhões entre o período de 23 a 28 de fevereiro de 2020, de acordo com a S&P Dow Jones Indices. No continente asiático, entre 20 de fevereiro e 19 de março, o índice Nikkei da bolsa de Tóquio caiu 29% (de 23.479 para 16.552), o índice KOSPI da bolsa da Coreia do Sul em consonância caiu 33% (de 2.195 para 1.457). A incerteza e temor chega ao mercado europeu onde se verifica no mesmo período uma desvalorização de 36,9% (de 13.664 para 8.855) no índice alemão DAX e de 36,4% no índice francês CAC 40. O mesmo ocorreu no principal índice mundial, S&P 500 que caiu 28% (de 3.373 para 2.409). Nos mercados emergentes, o capital, como de costume em momentos de grande incerteza, também procurou segurança durante o período de pandemia, o índice IBOVESPA desvalorizou 40% (de 114.586 para 68.332) e o índice Nifty da Índia caiu 31,6%, (de 12.080 para 8.263).

DESENVOLVIMENTO DA TEORIA DAS FINANÇAS

O século XX foi marcado por muitas transformações no cenário internacional, em especial ao fim da Segunda Guerra Mundial. O sistema monetário passou do padrão - ouro que era relativamente estável, com base em moeda completamente conversível, para um sistema instável, com incerteza e volatilidade, em que não há nenhum padrão mundial estabelecido. Em 1944, a Conferência de Bretton Woods, estabelece um novo padrão monetário, o dólar-ouro. Este padrão, sob hegemonia americana, vigorou até o início de 1970 quando os Estados Unidos declaram a inconvertibilidade de sua moeda em meio a um contexto de liberdade de capitais e regime de câmbio flutuante.

O conjunto de circunstâncias fez emergir a necessidade de desenvolvimento de metodologias que permitissem avaliar o risco ao qual o capital estava incorrendo. O retorno esperado de determinado ativo não era portanto, a única variável a ser maximizada.

4.1 Moderna Teoria do Portfólio

O marco inicial do uso do binômio risco-retorno como fator de escolha de ativos foi proposto por (MARKOWITZ, 1959), antes disso, o risco era tratado em termos qualitativos. Sua abordagem estabelece uma estratégia de alocação que objetiva maximizar o retorno dado um determinado nível de risco aceitável. Este método ficou conhecido como "**média-variância**" e todo seu arcabouço teórico como **Moderna Teoria do Portfólio**. Por este trabalho, em 1990, Markowitz foi laureado com o Prêmio Nobel de Economia.

Esta teoria definia a expectativa de retorno como a média histórica do retorno do ativo, e risco ou volatilidade como o desvio-padrão do referido retorno, portanto, para Moderna Teoria do Portfólio, a seleção de uma portfólio cpndidera os dois primeiros momentos da distribuição de retornos (média e variância). A combinação destes dois fatores resultaria em um modelo

matemático para otimização do portfólio. A otimização seria alcançada através da alocação de ativos cuja covariâncias fossem nulas, desta maneira os riscos dos ativos seriam dissipados no portfólio, compondo então, uma carteira de mínima-variância dado um retorno esperado. Isso porque, o cálculo do risco de um portfólio com dois ou mais ativos deve considerar não apenas a volatilidade medida pelo desvio-padrão e a ponderação de cada ativo no total do portfólio, mas também a covariância.

4.1.0.1 Variância de um portfólio

Supondo que o retorno de um portfólio é uma função linear da soma dos retornos de ativos individuais:

$$\sigma_p = w_a\sigma_a + \dots + w_n\sigma_n, \quad (4.1)$$

em que $\sum w_i = 1$.

Cálculo da variância de um portfólio composto por dois ativos:

$$\sigma_p^2 = \sigma_a^2 w_a^2 + \sigma_b^2 w_b^2 + 2w_a w_b Cov_{a,b}, \quad (4.2)$$

onde:

- σ_p^2 representa a variância do portfólio;
- σ_a^2 é a variância dos retornos do ativo a ;
- σ_b^2 é a variância do retorno do ativo b ;
- $Cov_{a,b}$ é a covariância entre os retornos dos ativos a e b ;
- w_a é a proporção do ativo a ;
- w_b é a proporção do ativo b .

Se o portfólio for composto por mais de dois ativos, é esperado que o efeito diversificação seja intensificado. O cálculo da variância do portfólio pode então ser mensurado estendendo a equação 4.2:

$$\sigma_p^2 = \sigma_a^2 w_a^2 + \sigma_b^2 w_b^2 + \sigma_c^2 w_c^2 + 2w_a w_b Cov_{a,b} + 2w_a w_c Cov_{a,c} + 2w_b w_c Cov_{b,c} + \dots + 2w_{n-1} w_n Cov_{n,n-1}. \quad (4.3)$$

De acordo com(ALEXANDER, 2005), é mais conveniente utilizar a notação matricial. Seja, $\mathbf{w}=(w_1,\dots,w_n)'$ os pesos do portfólio e $\mathbf{r}=(\sigma_1,\dots,\sigma_n)'$ os retornos dos ativos, dessa forma, a equação 4.1 pode ser reescrita:

$$\sigma_p = w_i' \sigma_i. \quad (4.4)$$

Seja V_σ a matriz de covariância dos retornos dos ativos. A equação 4.3 da variância de n ativos pode ser expressa como:

$$\sigma_p = w' V_\sigma w. \quad (4.5)$$

Assim, a variância de um portfólio é uma variável quadrática.

4.1.0.2 Otimização do portfólio

A composição ótima de ativos que minimiza o risco do portfólio seria definida pela participação ponderada de cada ativo. Este fato trouxe à tona os benefícios da diversificação de ativos. O modelo de média-variância de Markowitz é descrito a seguir:

$$\text{Minimizar } \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} w_i w_j. \quad (4.6)$$

sujeito à

$$\sum_{i=1}^N w_i \bar{r}_i = \mu \quad (4.7)$$

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1 \quad (4.8)$$

$$w_i \geq 0 \quad (4.9)$$

$$i= 1,2,3,\dots,N.$$

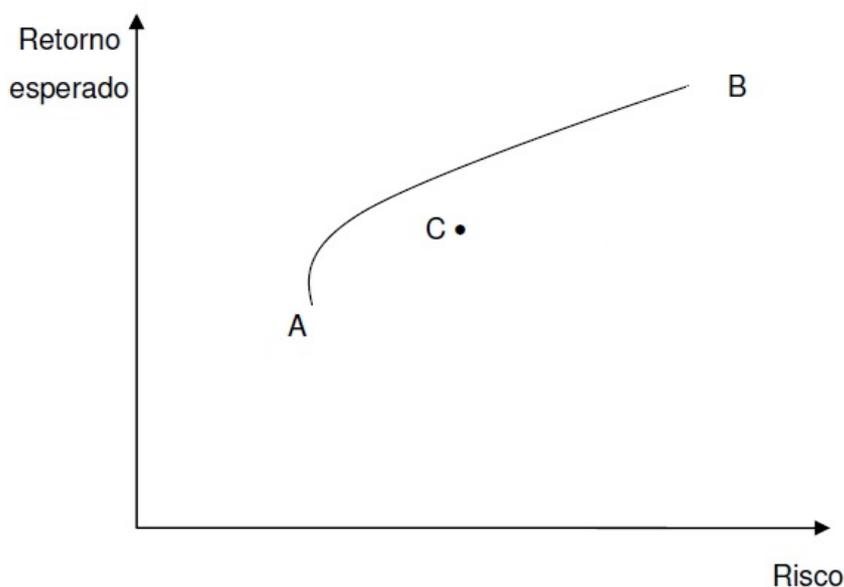
Onde:

- N = número de ativos que compõem o portfólio;
- w_i = proporção do capital aplicado no ativo i ;
- $\sigma_{i,j}$ = covariância entre os retornos dos ativos i e j ;
- \bar{r}_i = valor esperado dos retornos do ativo i ;
- μ = valor esperado do retorno do portfólio.

De acordo com a função objetivo do modelo, equação 4.6, um portfólio composto por dois ou mais ativos, deve apresentar um nível de risco inferior em relação ao ativo de menor risco, com retorno superior ao observado em tal ativo.

Se é possível combinar ativos para minimizar a variância, isso implica que para um determinado nível de risco, haverá um portfólio com maior retorno esperado quando comparado com todas as outras combinações, e também implica que, haverá um portfólio de menor risco entre todas as combinações, dado um nível de retorno esperado. O lugar geométrico onde se localizam estes portfólios, Markowitz denominou de fronteira eficiente.

Figura 8 – Fronteira Eficiente



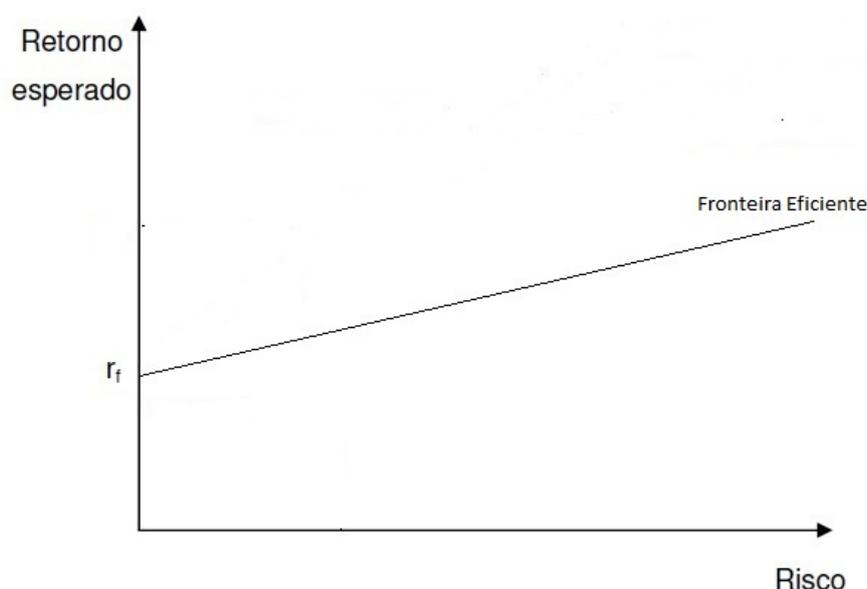
A figura 8 ilustra a fronteira eficiente. O portfólio A representa a escolha com menor risco, ou seja, o portfólio de variância mínima, e satisfaz a preferência de um investidor conservador, enquanto que o portfólio B seria a escolha de um investidor com maior propensão ao risco. O ponto C está situado dentro do conjunto de oportunidades, mas trata-se de um portfólio dominado, em outras palavras, há um portfólio entre A e B com o mesmo nível de risco porém com maior potencial de retorno, onde todas as possibilidades ativos de riscos.

4.2 Linha de Mercado de Capitais (LMC)

Seguindo a teoria do portfólio, (TOBIN, 1958) desenvolveu a partir do modelo de (MARKOWITZ, 1959), uma extensão incluindo ativos livres de riscos, como por exemplo títulos governamentais, com média r_f e variância zero, resultando desta combinação, uma fronteira eficiente em linha reta, conforme ilustrada na figura 9. A contribuição de (TOBIN, 1958) para o desenvolvimento da teoria do portfólio foi em atribuir um critério de seleção de ativos sem o conhecimento *a priori* da preferência do investidor quanto ao nível de risco. Este modelo de

otimização foi denominado de **teorema da separação**, e lhe rendeu também o Prêmio Nobel de Economia em 1981.

Figura 9 – Fronteira Eficiente com inclusão de ativo livre de risco



De acordo com (NETO, 2002), admitindo a possibilidade de um investidor captar determinado capital no mercado financeiro à taxa livre de risco, e aportar este capital em títulos com risco, e retorno superior, o passivo adquirido permite que a posição se desloque para à direita da reta, sem que haja entretanto, mudança em sua inclinação. Os portfólios situados sobre a LMC e à direita de P* (Portfólio de Mercado) são constituídas a partir da tomada de empréstimos a taxa r_f , ao passo que as carteiras situadas à esquerda de P* emprestam capital a mesma taxa r_f . O portfólio P* é definido como o portfólio de mercado, que consiste em um portfólio formado, em teoria, pela combinação em proporção exata de todos os ativos disponíveis. No Brasil, o portfólio de mercado é representado pela carteira de ações da B3 (Bolsa de Valores de São Paulo).

A inclinação da LMC é dada por:

$$\frac{\bar{r}_m - r_f}{\sigma_{rm}}, \quad (4.10)$$

onde:

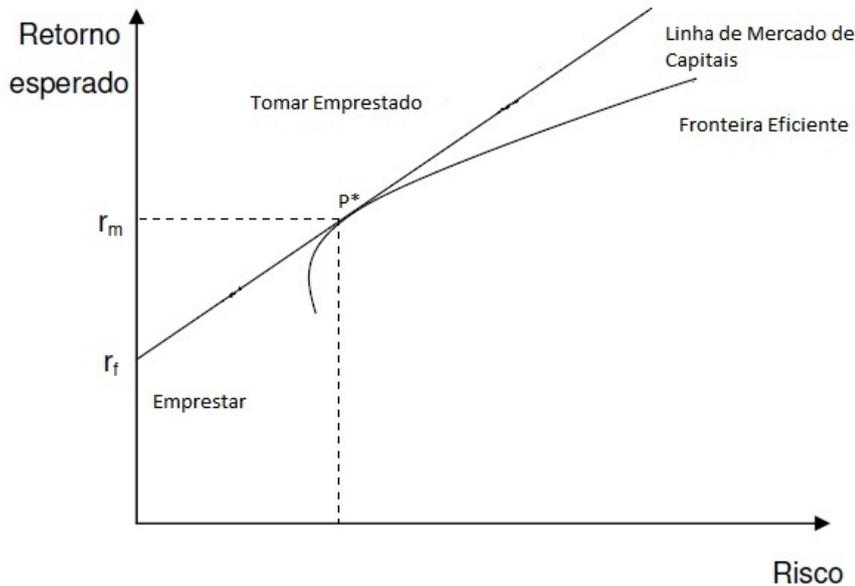
- \bar{r}_m é o retorno esperado do mercado;
- σ_{rm} é o risco do mercado.

O retorno esperado ao longo da LMC é dado pela expressão:

$$r_f + \left(\frac{\bar{r}_m - r_f}{\sigma_{rm}} \right) \sigma_p, \quad (4.11)$$

em que σ_p é o risco do portfólio p .

Figura 10 – Linha de Mercado de Capitais



4.3 Capital Asset Pricing Model (CAPM)

(SHARPE, 1963) e (LINTNER, 1965) desenvolveram independentemente um modelo de equação, com base no postulado por Markowitz, para determinar o retorno esperado de ativos. O modelo conhecido como *Capital Asset Pricing* (CAPM) foi elaborado tendo como variável dependente o retorno esperado pelo acionista, e a variável independente é representada pelo retorno do portfólio de mercado. A ideia básica do CAPM é de que há uma relação linear entre risco e retorno. A equação que descreve o CAPM pode ser representada da seguinte maneira:

$$\bar{R}_i = r_f + \beta_i(\bar{r}_m - r_f) \quad (4.12)$$

A equação diz que a taxa esperada de retorno de um ativo é igual a taxa livre de risco adicionada a um prêmio de risco proporcional ao β_i . Então se o $\beta_i = 1$, o retorno esperado tende a variar na mesma proporção que o retorno esperado do portfólio de mercado. Sendo o β_i maior do que 1, o retorno esperado do ativo tende a ser superior ao retorno do portfólio de mercado. O mesmo raciocínio vale para uma queda do mercado. Portanto, ativos com β_i maior do que 1 adicionam risco ao portfólio. O β_i é calculado pela seguinte fórmula:

$$\beta_i = \frac{Cov(r_i, r_m)}{\sigma^2(r_m)}, \quad (4.13)$$

onde $Cov(r_i, r_m)$ é a covariância entre os retornos do ativo i e o portfólio de mercado e o $\sigma^2(r_m)$ é a variância do mercado. A equação 4.12 é ilustrada graficamente na figura 11.

Pode-se observar que a linha que parte do intercepto r_f (taxa livre de risco) segue em movimento ascendente até r_m quando o $\beta = 1$. Essa reta é conhecida como **linha de mercado de títulos (SML)**. Esta linha reflete para cada nível de beta o retorno exigido pelo mercado, logo, a SML representa o *trade-off* entre risco-retorno.

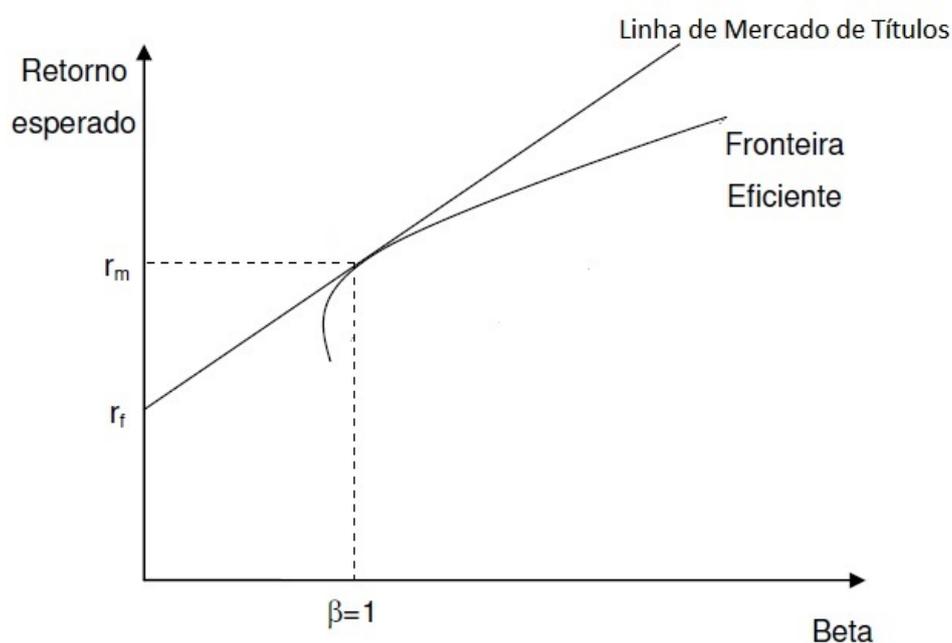
Porém, a linha de mercado de títulos não possui um comportamento estável ao longo do tempo. Sua inclinação e intercepto são influenciados pelas expectativas de inflação e o grau de aversão de risco do investidor.

Variações nas expectativas de inflação exerce impacto no prêmio de risco que por sua vez impacta na determinação da taxa livre de risco.

A análise da SML permite observar as preferências do investidor. De forma geral, um investidor exige maior retorno para maior nível de risco que será assumido. Assim, a inclinação da SML reflete o grau de aversão ao risco. Portanto, quanto maior a inclinação da SML, maior será o grau de aversão ao risco.

Por sua contribuição a Teoria do Portfólio, Sharpe dividiu o Prêmio Nobel de Economia com Markowitz em 1990.

Figura 11 – Linha de Mercado de Títulos



O modelo CAPM de forma geral depende de dados históricos para obter as estimativas de retorno exigido. No entanto, os betas, obtido de informações tanto de ativos quanto de índices de mercado, correm o risco de não refletir eficazmente a variação futura dos índices. Conseqüentemente, os retornos exigidos que são especificados pelo modelo, podem ser considerados como aproximações pouco precisas. Muito frequentemente, analistas realizam ajustes subjetivos aos betas estimados historicamente a fim de que reflitam as expectativas do futuro.

O CAPM fornece uma referência conceitual de grande utilidade para avaliação da relação entre risco e retorno, fato que auxilia o gestor a alcançar o objetivo de maximização de recursos.

4.4 Hipótese de Mercado Eficiente

Observa-se um esforço muito grande, seja na literatura acadêmica ou por praticantes do mercado, por estabelecer critérios pelos quais pudessem prever o comportamento dos ativos em diferentes mercados. (FAMA, 1960) propõe o conceito conhecido na teoria econômica como Hipótese de Mercados Eficientes (HME) para explicar a formação dos preços de ativos nos mercados financeiros, trabalho este que lhe rendeu o Prêmio Nobel de Economia em 2013. De acordo com essa hipótese, o mercado é dito eficiente quando há um grande número de investidores agindo racionalmente. Adicionalmente, o ativo transacionado neste mercado, refletiria de forma rápida toda e qualquer informação disponível que possa vir a alterar seu preço, dessa forma, ganhos fora do normal seriam impossíveis de ocorrer.

Para estruturar a Hipótese de Eficiência, (FAMA, 1960) estabelece três formas de eficiência:

- **Forma fraca:** Os preços refletem as informações públicas contidas nos preços passados dos ativos. Dessa maneira, retornos passados não são úteis em prever retornos futuros. Essa forma de eficiência implica portanto, a impossibilidade de modelagens econométricas de uma série de retorno utilizando modelos ARIMA de Box e Jenkins, logo, a série gerada exibiria um comportamento *white noise* em que verifica-se as autocorrelações de ordem p sendo estatisticamente nulas;
- **Forma semi forte:** Afirma que os preços refletem não apenas o comportamento observado no passado, mas responde instantaneamente a outras informações públicas;
- **Forma forte:** Um mercado com eficiência forte é aquele em que o preços dos ativos repercute tanto as informações públicas quanto as informações privilegiadas.

Segundo a Hipótese de Mercado Eficiente, o processo de retorno de um ativo pode ser descrito como:

$$r_t = \mu + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim (0, \sigma_t^2), \quad (4.14)$$

onde μ é a expectativa de r_t no período $t-1$, e ε_t reflete o retorno atribuído as notícias imprevisíveis que ocorrem entre $t-1$ e t . Portanto, ε_t é a inovação do processo. (FAN; YAO, 2017) traz três diferentes tipos de suposições sobre as inovações ε_t :

1. **Inovações de ruído branco:** ε_t são ruídos branco, denotados como $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_t^2)$.
A notação $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_t^2)$ denota que $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ formam uma processo de ruído branco

com $E\varepsilon_t = 0$ e variância $\text{var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$. Sobre esta suposição, $\text{Corr}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$ para todo $t \neq s$.

2. **Inovações de diferença Martingale:** ε_t forma uma sequência de diferença martingal no sentido que para qualquer t .

$$E(\varepsilon_t | r_{t-1}, r_{t-2}, \dots) = E(\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots) = 0. \quad (4.15)$$

Um dos mais frequentes formatos utilizados para inovações de diferença martingais é a forma:

$$\varepsilon_t = \sigma_t \eta_t, \quad (4.16)$$

onde $\eta_t \sim \text{IID}(0,1)$, e σ_t é um processo de volatilidade predicável, conhecido no período $t-1$, que satisfaz a condição:

$$E(\varepsilon_t | r_{t-1}, r_{t-2}, \dots) = \sigma_t.$$

3. **Inovações IID:** ε_t são independentes e identicamente distribuídas, denotada como $\varepsilon_t \sim \text{IID}(0, \sigma^2)$.

A suposição de inovações IID é a mais forte. Ela implica que as inovações são diferenças martingais. (AIUBE, 2013) traz a seguinte definição para um modelo martingal:

Definição: Seja $\{r_t\}_{t=1}^T$ um processo descrito pela variável aleatória r_t , dizemos que r_t é martingal com relação às informações por ele gerada se:

1. $E(|r_t|) < \infty$,
2. r_t contém todas as informações geradas pelo processo,
3. $E(r_t | r_{t-1}, r_{t-2}, \dots) = r_{t-1}$.

A condição (3) afirma que a previsão de r_t considerando as informações em $t-1$ é o seu valor em $t-1$, ou seja, r_{t-1} . Além disso, pode-se afirmar que $E(r_t - r_{t-1} | r_{t-1}) = 0$, logo, é comum chamá-lo de diferença martingal.

Para (GABRIEL; RIBEIRO; RIBEIRO, 2013) uma maneira de verificar se a HME é consistente com os dados empíricos é através da previsibilidade dos retornos.

4.5 Modelo de precificação de derivativos Black Scholes

A base fundamental na determinação do preço de derivativos de ações foi o trabalho de (BLACK; SCHOLES, 1973). O modelo desenvolvido por eles é conhecido como modelo de *Black & Scholes*. Nesta seção é demonstrado além do modelo, os principais aspectos dos derivativos e seu mecanismo operacional.

4.5.1 Derivativos

Derivativos são instrumentos financeiros cujo valor de negociação derivam (origem do nome "derivativos") de outros ativos, os ativos-objeto (MCCLINTOCK, 1996).

O surgimento desse tipo de instrumento financeiro teve origem na necessidade dos investidores em reduzir as incertezas típicas de certas atividades, como por exemplo, o preço do milho cultivado hoje mas que será negociado após sua colheita. Essa característica torna-se imprescindível para o moderno controle de risco. Os exemplos mais típicos de derivativos são os contratos futuros, opções e *swaps*. Opção é o derivativo sobre ações. Quanto as opções, há dois tipos básicos:

- *call* opção de compra
- *put* opção de venda

O comprador de uma opção de compra tem o direito de comprar um determinado ativo em uma certa data por um preço pré-determinado que é o preço de exercício da opção. O preço de uma *call* varia na mesma direção que a variação do ativo-objeto. Dada esta característica, sua aquisição visa à proteção contra alta de preço prevista em um certo horizonte de tempo.

O comprador de uma opção de venda tem o direito de vender um dado ativo em data futura por um preço pré-determinado. A função de uma *put* como instrumento financeiro é proteger o investidor de uma queda no preço do ativo. Desse modo, o preço de uma *put* tem variação inversa ao preço do ativo-objeto.

call e *put* podem ser divididas em:

- **Americanas:** permitem ao detentor comprar ou vender um ativo a qualquer momento até a maturidade do contrato.
- **Europeias:** conferem ao investidor o direito de realizar a compra ou venda de um determinado ativo em uma data acordada entre as partes distintas.

Existem registros históricos de negociação de opções na que ficou conhecida como "crise das tulipas" na Holanda, ocorrida no século XVII (KRUGMAN, 1995). No mercado deste gênero, ao invés negociar o próprio ativo, sou seja, a tulipa, comercializa-se opções de compra para garantir os estoques, mesmo em um mercado de preço em alta. Por outro lado, os cultivadores, compravam opção de venda como proteção para possíveis queda nos preços.

4.5.2 Precificação de opções

Para que um mercado funcione eficientemente é necessário que os diversos participantes possam selecionar o nível desejado de risco para cada transação, dessa forma, cada investidor

decide se evita o risco ou o assume. A importância do mercado de opção advém do fato de que o agente pode proteger seu lucro, ou limitar uma perda. Para atender a esses anseios, é necessário que o preços dos derivativos sejam precificados corretamente.

O objetivo da precificação de opções é encontrar um valor considerado como o "preço justo" para as opções. Foi São Tomás de Aquino na Idade Média, quem propagou a ideia de preço justo, um preço em que nenhuma das partes envolvidas obtém vantagem sobre o outro (AQUINAS, 1947 [1274]).

(BLACK; SCHOLES, 1973) abordaram o problema da precificação de opções partindo da ótica de que, considerando a opção um derivativo da ação, este instrumento deve ser utilizado para o propósito de *hedge*, e que se há uma forma de implementar sistematicamente *hedge* com opções, o preço atribuído a elas para esta finalidade é o seu "preço justo". A base desta afirmação contém um argumento de arbitragem: o preço justo da opção é aquele que garante a entrada em uma posição *hedgeada*, ou seja, uma posição que não oferece risco de mercado, de forma que o resultado ao longo do tempo seja sempre zero. Então, se o preço de cotação de uma opção é diferente deste, torna-se possível a elaboração de uma posição *hedgeada*, em outras palavras, sem riscos e com resultado diferente de zero.

O modelo Black e Scholes supõe a elaboração de um portfólio sem risco, formado por uma posição em alocada em ação em conjunto com uma posição alocada no derivativo. Sendo assim, não havendo condições de arbitragem entre mercados o retorno esperado do portfólio deverá ser a taxa de juro livre de risco (COSTA, 1998).

A ideia de se constituir um portfólio sem risco reside no fato de que tanto o preço da ação quanto o preço da opção são sensíveis a mesma fonte de incerteza, a variação no preço da ação.

Segundo (HULL, 2003) em qualquer período curto de tempo, o preço de uma opção de compra é perfeita e positivamente correlacionado com o preço da ação; e o preço de uma opção de venda é perfeita e negativamente correlacionado com o preço da ação. Em qualquer caso, um portfólio constituído por ação e opção, o ganho ou perda da ação é compensado pelo ganho ou perda da opção, tornando assim conhecido o retorno do portfólio, em um curto espaço de tempo. Esta composição é conhecida como *delta hedge*.

4.5.2.1 Delta Hedge

Para (COSTA, 1998) a essência do modelo Black Scholes é o método de *hedge*. Como visto anteriormente, o *hedge* em opções é constituído com uma posição no ativo e uma posição em opções. A relação entre a variação do preço da ação e o preço da opção não é constante. Tal relação é estabelecida pelo delta (Δ) de uma opção. Delta é a medida que diz qual a variação no preço de uma opção provocada por uma variação infinitesimal no preço da ação.

Exemplo, para efetuar o *hedge* de uma posição à vista deve-se vender $1/\Delta$ sobre esta

posição. assim, o *hedge* é garantido. Então, se uma opção de compra a ser utilizada para efetuar o *hedge* possui $\Delta = 0,5$ e a carteira é composta por 500 ações, deve-se vender $500 / 0,5 = 1.000$ unidades de *call*.

Em um cenário que a ação suba \$ 0,50 as posições no mercado à vista terão variação de \$250, enquanto que as posições em opção provocarão uma variação na mesma magnitude, $0,5 \times 0,5 \times 1.000 = \250 .

O ganho na ação é compensado pela perda na venda de *call* que é uma posição passiva. Entretanto, o valor do delta não é constante, quanto mais sobe o valor da ação, maior será o valor do delta de uma *call*, exigindo constante balanceamento no portfólio.

4.5.3 Modelo para o ativo

O preço de um ativo ao longo do tempo deve descrever uma trajetória aleatória, uma vez que o desenvolvimento do modelo está sob a hipótese de mercados eficiente. Ao assumir a veracidade da hipótese, admite-se que o preço do ativo segue uma processo de cadeia de Markov (BENINI *et al.*,). Como consequência decorre que o histórico de cotação está implícito no preço do ativo que nada revela sobre seu preço futuro e que o preço responde tempestivamente a novas informações. Assim sendo, o modelo supõe que o retorno dos ativos pode ser decomposto em uma parte determinística e outra parte estocástica derivada das variações aleatórias inerentes ao mercado de capitais.

Conjecturando que uma variação infinitesimal sobre o preço de um ativo em um intervalo de tempo dt , em que $S + dS$ representa um acréscimo em S , o retorno de um ativo é dado pela variação definida no preço vigente de mercado, logo a fração determinística é dada pelo *drift term* (BAKSHI; CAO; CHEN, 1997):

$$\mu dt, \quad (4.17)$$

em que μ é uma constante.

O incremento aleatório é gerado por:

$$\sigma dX_t. \quad (4.18)$$

As expressões 4.17 e 4.18 compõem a equação diferencial estocástica que descreve o retorno do ativo em um determinado período t :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \sigma dX_t + \mu dt. \quad (4.19)$$

Na situação em que μ é constante e $\sigma = 0$, o valor do ativo por ser expresso por seu

crescimento exponencial:

$$S = S_0 e^{\mu(t-t_0)}, \quad (4.20)$$

sendo S_0 o preço do ativo no período $t = t_0$ a expressão 4.20 denota que o retorno do ativo é determinístico.

Quanto ao elemento aleatório, este é dado pelo termo dX , denominado de Processo de Wiener ou também de Movimento Browniano (MACBETH; MERVILLE, 1979).

4.5.3.1 Processo de Wiener

O chamado processo de Wiener é uma classe de processo estocástico de Markov com utilização pela física para estudar o movimento realizado por uma partícula que submete-se a um montante elevado de choques moleculares.

Este é um processo estocástico em tempo contínuo com três propriedades fundamentais (MACBETH; MERVILLE, 1979):

1. É considerado processo de Markov, portanto o valor futuro de um ativo é função do preço corrente, entretanto não correlacionado com o histórico de preços passados.
2. As variações de preço não são dependentes. Isto significa que a taxa de variabilidade realizada em um intervalo de tempo é independente da variação ocorrida em qualquer outro período de tempo.
3. Os acréscimos seguem uma distribuição normal com parâmetros que dependem só do intervalo de tempo, ou seja, são estacionários.

Então, se z_t for um processo de Wiener, isto significa que uma eventual variação em z , Δz , no intervalo de tempo Δt , deve satisfazer as seguintes condições:

1. A relação estabelecida entre Δt e Δz será dada por $\Delta z = \varepsilon_t \sqrt{\Delta t}$, onde $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$
2. O termo aleatório ε_t não contém correlação, logo $E[\varepsilon_t \varepsilon_s] = 0$. Então tem-se que os valores de Δz para dois períodos de tempo distintos são independentes. Dessa maneira, z_t segue um processo de Markov com incrementos independentes.

A condição 1 traz evidências que $\Delta z \sim N(0, \Delta t)$ e conseqüentemente, a variância de um processo de Wiener progride linearmente com o horizonte de tempo. O processo de Wiener é, por isto, um processo não-estacionário e no longo prazo sua variância tende ao infinito. Por outro lado, quando Δt tende a zero, pode exprimir este incremento do processo de Wiener, dz , em tempo contínuo como:

$$dz = \varepsilon_t \sqrt{dt}.$$

Dado que $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$, então $E(dz) = 0$ e $Var(dz) = E[(dz)^2] = dt$.

A equação de Black Scholes pressupõe que os retornos percentuais dos ativos financeiros possuem propriedades estatísticas similar ao movimento browniano, que a taxa de oscilação e a volatilidade realizada do mercado são constantes.

A resolução de equações diferenciais estocásticas não podem ser efetuadas com técnicas tradicionais de integração, como por exemplo as somas de Riemann. Uma vez que as equações diferenciais estocásticas contém o elemento da aleatoriedade, então, não é possível deixar de lado as variações envolvidas em um processo estocástico. Foi Itô, em 1944, quem realizou um grande avanço em técnicas para solução de equações diferenciais estocásticas (SHIRYAEV, 1999)

4.5.3.2 Lema de Itô

O lema de Itô, na matemática, é uma identidade empregada no cálculo de Itô para encontrar o diferencial de uma função dependente do tempo de um processo estocástico (ITÔ, 1951). Este diferencial atua como a contraparte do cálculo estocástico da regra da cadeia.

Supomhamo-se que $f(S)$ seja uma função diferenciável em S . Uma variação infinitesimal em S devido dS provocará também uma variação em f . Logo, aplicando a expansão em série de Taylor tem-se:

$$df = \frac{df}{dS} dS + \frac{d^2f}{2dS^2} dS^2 + \frac{d^3f}{6dS^3} dS^3 + \dots \quad (4.21)$$

Antes de prosseguir com a expansão da série de Taylor devemos assumir que:

$$dX^2 = dt, \quad (4.22)$$

e é interessante ressaltar que a equação 4.19 será trabalhada em sua forma quadrática:

$$\begin{aligned} dS^2 &= (\sigma^2 S + \mu S dt)^2 \\ &= (\sigma S dX)^2 + 2\sigma S^2 \mu dt dX + (\mu S dt)^2. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Observando o comportamento assintótico dos termos da equação 4.23, nota-se que o primeiro termo tende a ser maior quanto menor for dt , dessa maneira, os demais termos podem ser ignorados. Dessa forma temos:

$$dS^2 = \sigma^2 S^2 dX^2. \quad (4.24)$$

Substituindo 4.22 em 4.24 tem-se:

$$dS^2 = \sigma^2 S^2 dt. \quad (4.25)$$

Retornando a expansão de Taylor em 4.21 e substituindo em 4.25

$$\begin{aligned} df &= \frac{df}{dS} (\sigma S dX + \mu S dt) + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{d^2 f}{dS^2} dt \\ &= dS \frac{df}{dS} dX + \left(\mu S \frac{df}{dS} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{d^2 f}{dS^2} \right) dt. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Chega-se a ao Lema de Itô aplicado a equação 4.19 tendo S como variável aleatória.

4.5.4 O Modelo Black Scholes

A formulação do modelo de Black e Scholes é feita sob as seguintes hipóteses básicas (HULL, 2003):

- a trajetória do preço da ação corresponde a um modelo lognormal de apreçamento;
- não há custos de transação ou impostos;
- não há distribuição de dividendos durante a vigência da opção;
- não há oportunidade de arbitragem;
- a compra e venda de títulos e ações é contínua;
- participantes do mercado podem tomar emprestado ou emprestar recursos à mesma taxa de juro livre de risco;
- a taxa de juro de curto prazo livre de risco é considerada constante.

Tomando μ e σ constantes na equação 4.19, a função f é o preço de compra de uma opção que por sua vez é sensível ao preço S e do tempo t . Então aplicando o Lema de Itô tem-se:

$$df = \sigma S \frac{\delta f}{\delta S} dX + \left(\mu S \frac{\delta f}{\delta S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\delta^2 f}{\delta S^2} + \frac{\delta f}{\delta t} \right) dt. \quad (4.27)$$

Sendo a ideia do Modelo Black Scholes a elaboração de um portfólio sem risco em que a incerteza está sobre a trajetória futura do preço do ativo e do derivativo, o valor do portfólio é dado por:

$$I = f - \Delta S. \quad (4.28)$$

Uma variação ΔI no valor do portfólio em um instante de tempo Δt é:

$$dI = df - \Delta dS$$

Agora, unindo as expressões 4.19, 4.27 e 4.28, conclui-se que I segue um passeio aleatório:

$$dI = \sigma S \left(\frac{\delta f}{\delta S} - \Delta \right) - dX + \left(\mu S \frac{\delta f}{\delta S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\delta^2 f}{\delta S^2} + \frac{\delta f}{\delta t} - \mu \Delta S \right) dt. \quad (4.29)$$

Tomando $\Delta = \frac{\delta f}{\delta S}$ elimina-se o termo dX da equação 4.29, ou seja, a aleatoriedade:

$$dI = \left(\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\delta^2 f}{\delta S^2} + \frac{\delta f}{\delta t} \right) dt. \quad (4.30)$$

Dado que um dos pressupostos do modelo Black Scholes é a não existência de custos de transação e nem de oportunidade de arbitragem, então quando se investe uma quantidade I em um ativo livre de risco r , o portfólio crescerá $rI dt$ no período de tempo dt . Então tem-se:

$$rI dt = \left(\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\delta^2 f}{\delta S^2} + \frac{\delta f}{\delta t} \right) dt. \quad (4.31)$$

Substituindo 4.28 e tomando $\Delta = \frac{\delta f}{\delta S}$ em 4.31, tem-se a equação Black Scholes para opções europeias:

$$\frac{\delta f}{\delta S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\delta^2 f}{\delta S^2} + rS \frac{\delta f}{\delta t} - rV = 0. \quad (4.32)$$

Quando σ e r são constantes, tem-se a seguinte solução para opções europeias que não pagam dividendos:

$$c = S_0 N(d_1) - X e^{-rT} N(d_2), \quad (4.33)$$

$$p = X e^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1), \quad (4.34)$$

onde

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/X) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad (4.35)$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/X) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}. \quad (4.36)$$

Nesta expressão, S é o preço do ativo, X é o preço de exercício da opção, T é a maturidade da opção, σ^2 é a taxa de variância do retorno da ação, \ln é o logaritmo natural, c é o preço da opção de compra e p é o preço da opção de venda e r é a taxa de juro livre de risco. A função $N(d)$ é a função de probabilidade cumulativa para uma variável padronizada normal.

O fator de importância que resulta do modelo de precificação de derivativos é o conhecido *risk-neutral valuation*. Este conceito pode ser expresso como: qualquer título cujo preço de outros títulos pode ser apreçado supondo-se que os investidores são indiferentes ao risco (HULL, 2003). Desse modo, as preferências de risco dos agentes econômicos não exercem influência sobre o valor do derivativo quando seu preço é expresso como uma função do preço do ativo-objeto. De fato, as equações 4.33 e 4.34 não incorporam o retorno esperado do ativo, μ .

O modelo não utiliza as características de caudas pesadas com agrupamento de volatilidade como proposto por (MANDELBROT, 1963).

Em 1997, Scholes e Merton receberam o prêmio Nobel de Economia pelo desenvolvimento do modelo de precificação.

4.6 Value-At-Risk

O *Value-at-Risk* (VaR), de acordo com (ALEXANDER, 2005) representou uma mudança na maneira como as instituições financeiras avaliam o risco. A atratividade do VaR como medida de risco, segundo (DUFFIE; PAN, 1997) deriva do fato de:

- Corresponder a uma quantia que pode ser perdida com alguma probabilidade escolhida;
- O VaR mensura o risco dos fatores de risco, bem como as sensibilidades dos fatores de risco;
- Pode ser comparado em diferentes mercados e diferentes exposições;
- É uma métrica universal que se aplica a todas as atividades e a todos os tipos de risco;
- Pode ser medido em qualquer nível, de uma negociação ou carteira individual, até uma única medida de VaR em toda a empresa, cobrindo todos os riscos na empresa como um todo.
- Quando agregado (para encontrar o VaR total de carteiras cada vez maiores) ou desagregado (para isolar os riscos de componentes correspondentes a tipos diferentes de fator de risco) leva em consideração as dependências entre os ativos ou carteiras constituintes.

(JORION, 1997) define o VaR como uma medida de risco expressa em unidade monetária que representa a maior perda possível em condições normais de mercado, tanto para um ativo quanto para um portfólio, tendo o intervalo de confiança e janela temporal previamente definidos.

Para ilustrar como o VaR fornece sua medida de risco suponha-se que um investidor tenha seu portfólio constituído de ações. O investidor poderá calcular seu prejuízo máximo esperado em um dia empregando um intervalo de confiança de 95%. Especificamente, ao fixar um horizonte de tempo t e um nível de significância estatística de $\alpha\%$ ($0 < \alpha < 1$), o VaR é a perda máxima esperada para um horizonte de tempo t e um nível de significância de $(1-\alpha)\%$. Então, o VaR estaria estimando qual o prejuízo máximo esperado que seu portfólio poderia incorrer em um horizonte de um dia. Tomando que o VaR hipotético para este investidor resulte em R\$10.000,00, interpreta-se que o prejuízo máximo previsto para um dia é R\$10.000,00 calculado a partir de um intervalo de confiança de 95%, em outras palavras, em 95% do tempo o prejuízo máximo esperado é de R\$10.000,00 e apenas 5% a probabilidade seria de um prejuízo maior.

Conceitua-se estatisticamente, de forma genérica, o VaR de um ativo ou portfólio no período t como (LINSMEIER; PEARSON, 2000):

$$Pr \{ \Delta \Pi_t \leq VaR_t \} = \alpha\%, \quad (4.37)$$

onde $\Delta \Pi_t$ representa a variação no ativo ou portfólio de preço Π_t .

Para obter a medida do VaR é necessário a geração de uma distribuição de probabilidade dos possíveis retornos dos ativos que compõem o portfólio. Com a distribuição, é possível determinar o intervalo de confiança e assim obter a medida. (JORION, 1997) resume desta maneira os passos necessários para sua obtenção:

1. marcar a mercado o portfólio atual (em unidades monetárias);
2. medir a variabilidade dos fatores de risco (volatilidade anual);
3. determinar o horizonte temporal;
4. determinar o nível de confiança;
5. reportar a pior perda.

Há três abordagens tradicionais para estimação do VaR: Não paramétrica, paramétrica e por simulação.

4.6.1 VaR não paramétrico

A estimação do VaR não paramétrico, também conhecido por Simulação Histórica é a abordagem considerada a mais direta e intuitiva de se obter o VaR. Pelo fato de não supor nenhuma afirmação sobre a distribuição de probabilidades de um determinado ativo, essa abordagem não-paramétrica compõe-se essencialmente em determinar o risco financeiro diretamente da distribuição empírica dos retornos passados por meio da extração do quantil correspondente

ao nível de significância % pré determinado. Assim, a fundamentação teórica da Simulação Histórica reside em utilizar a própria distribuição empírica dos retornos passados de um portfólio ou ativo, presumindo que esta incorpora a verdadeira distribuição de probabilidades futura.

O processo para realizar uma Simulação Histórica inicia com a divisão de toda a série dos retornos observados historicamente em um número igual de amostras de mesmo tamanho. Assim sendo, tomando uma série de retornos históricos de tamanho T com janela temporal de N , é possível elaborar $T-N+1$ amostras, de tal modo que duas amostras subsequentes tenha apenas uma observação em comum. O próximo passo é selecionar o quantil referente ao nível de significância de % desejado para cada uma das janelas temporais. Assim, de modo a obter a estimativa do risco de mercado para o próximo dia em um instante qualquer t , emprega-se o retorno de um ativo ou portfólio no período t e nos $N-1$ retornos que o antecedem. Portanto, a Simulação Histórica consiste em extrair percentis de uma amostra de retorno.

A título de ilustração, o VaR histórico da série de retorno do IBOVSPA apresentada neste trabalho, para uma janela que representa os últimos 252 dias da série, a um nível de significância de 1% representaria um retorno situado entre a segunda e terceira pior perda observada no período selecionado.

$$VaR(1\%) = \Pi_{t-1} 3,07\%.$$

Um ponto positivo para a abordagem de Simulação Histórica é que por se tratar de uma distribuição não paramétrica, não necessita de uma afirmação *a priori* a respeito da distribuição dos retornos. Além disso, pode, eventualmente, capturar relações não-lineares como assimetria e excesso de curtose. A desvantagem é que a abordagem ao assumir que o passado é uma *proxy* adequada do futuro, considera todas as observações tendo pesos iguais, o que não leva em conta o fato de observações distantes conterem informações que não são relevantes no presente, além de ignorar os *clusters* de volatilidade.

4.6.2 VaR Paramétrico

O VaR paramétrico é utilizado quando se tem uma crença sobre a distribuição dos retornos (DANIELSSON; VRIES, 2000). Para esses casos, o VaR é dado pela especificação de $f(\bullet)$:

$$Pr \{r_t \leq VaR_t^*\} = \int_{-\infty}^{VaR_t^*} f(r_t) dr_t = \alpha\%. \quad (4.38)$$

A premissa de que os retornos de ativos financeiros possuem distribuição normal é uso comum entre os profissionais de mercado financeiro. Em situações como está, a função de distribuição de probabilidade de $f(r_t)$ é dada por:

$$f(r_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[- \left(\frac{1}{2\sigma^2} \right) (r_t - \mu)^2 \right], \quad (4.39)$$

em que μ é a média dos retornos e o σ seu desvio padrão.

Tomando que a média dos retornos dos ativos é nula, pode-se obter o VaR com a seguinte expressão;

$$VaR(\alpha\%) = -\Pi_{t-1} Z_{1-\alpha\%} \hat{\sigma}, \quad (4.40)$$

em que $Z_{1-\alpha\%}$ representa o quantil de uma distribuição Normal. Dessa forma, uma janela amostral de T observações, o estimador incondicional do desvio-padrão $\hat{\sigma}_t$ é dado por:

$$\hat{\sigma}_t = \hat{\sigma} \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (r_t - \bar{r})^2}, \quad (4.41)$$

no qual:

$$\bar{r} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_t - \bar{r})^2. \quad (4.42)$$

Nota-se que a utilização de volatilidade incondicional para o cálculo do VaR não permite que as informações mais recentes sejam incorporadas com maior proporção a medida que T aumenta, uma vez que cada observação exerce o mesmo peso, em outras palavras, uma observação ocorrida a 180 dias traz a mesma significância de informação quanto a observação ocorrida ontem.

Contudo, a hipótese de que os retornos de ativos financeiros são independentes e identicamente distribuídos não são examinados empiricamente. Ao invés disso, como visto na seção 2.1 uma característica das séries de retorno é que elas são séries temporais heterocedástica e com dependência temporal. Assim sendo, a utilização da variância condicional no cálculo do VaR mostra-se mais adequada. Modelos de volatilidade condicional foram tratados na seção 2.3.

4.6.3 VaR por simulação

O VaR de um portfólio pode ser estimado através de diversas simulações do valor dos ativos que o compõem. Os cenários criados independem se originaram de simulações de Monte Carlo ou de simulações históricas. Uma vez que se crie um conjunto de cenários, é aplicado sobre eles, cálculos estatísticos. Por exemplo, para obter o VaR de 95% do portfólio, é estipulado o percentil de 5% de perdas ocorridas pela distribuição empírica. Sendo a técnica de simulação, uma técnica numérica, verifica-se um *trade-off* entre a quantidade de simulações desejadas e o custo computacional para obtê-lo. O VaR dessa forma é obtido em função do número de simulações empregado. Pode-se de qualquer forma estimar um intervalo de confiança para o VaR e aumentar o número de simulações e assim aumentar a precisão nos resultados.

4.7 Conditional Value - at - Risk (CVaR)

O VaR como medida de risco não é considerado uma medida de risco coerente por ser subaditivo (ACERBI, 2002), o que contradiz o princípio de diversificação da Moderna Teoria do Portfólio.

A noção de medida de risco coerente foi introduzida por (ARTZNER *et al.*, 1999). Uma medida de risco é definida coerente se atende os seguintes axiomas:

Seja χ um espaço linear de funções mensuráveis que delimita as variáveis aleatórias X e Y do espaço de probabilidade caracterizado por (Ω, Ψ, ρ) .

Definição: $\rho : \chi \rightarrow \Re$ é uma medida de risco coerente, caso satisfaça as seguintes propriedades:

1. Monotonicidade: Se os retornos no portfólio X são menores que os retornos no portfólio Y, então o risco no portfólio X é maior do que o portfólio Y:

$$X \leq Y, \rho(X) \leq \rho(Y), \forall X, Y \in \chi.$$

2. Subaditividade: Este axioma está relacionado à diversificação do portfólio. De acordo com seu princípio, a medida de risco total do portfólio é menor ou igual a soma dos riscos individuais dos ativos que compõem o portfólio:

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y), \forall X, Y \in \chi.$$

3. Positivamente homogêneo: Se a posição de um ativo é aumentada no portfólio, o risco do portfólio aumenta na mesma proporção:

$$\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X), \forall X \in \chi e \lambda > 0.$$

4. Invariância por translação: Se adicionar ou subtrair um determinada quantidade $|a|$ à variável X, a medida de risco aumenta ou diminui na magnitude de $|a|$. Tal situação pode ocorrer ao adicionar ao portfólio títulos de renda fixa ou montantes em dinheiro.

$$\rho(X + a) = \rho(X) + a, \forall X \in \chi e a \in \Re.$$

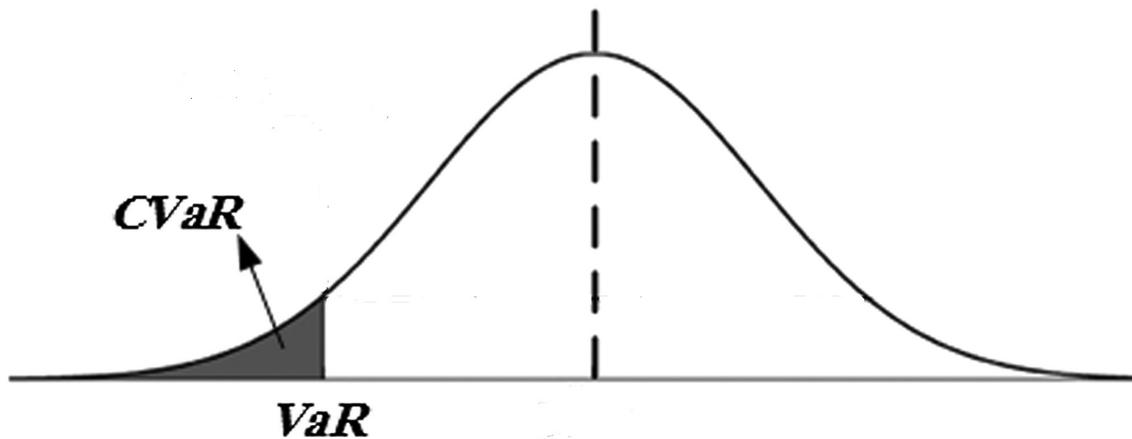
O Conditional Value At Risk (CVaR) é uma medida que indica a perda média que excede o VaR, em outras palavra, mensura o quanto elevado é, na média, a perda a que se está exposto um determinado ativo ou portfólio.

Matematicamente:

$$CVaR_{\alpha} = (1 - \alpha)^{-1} \int_{-x \geq VaR_{\alpha}(x)} -xp(x) \delta x. \quad (4.43)$$

Dada esta característica, o CVaR fornece informações sobre a distribuição da cauda. O CVaR é considerado uma medida de risco coerente. É empregado para mensurar perdas, e pode ser definido como o limite superior para a perda máxima aceitável em problemas de portfólio. Logo, o CVaR difere do VaR pelo fato de que este informa qual a perda mínima incorrida pelo portfólio nos $\alpha\%$ piores cenários, enquanto ele diz a perda média realizada pelo portfólio nos $\alpha\%$ piores cenários. Esta diferença é considerada um avanço do CVaR em relação ao VaR (RAYATI; GOODARZI; RANJBAR, 2019).

Figura 12 – Conditional-Value-At-Risk



CONCLUSÃO

O amplo desenvolvimento dos mercados financeiros globais em conjunto com a liberalização financeira tem tornado o sistema econômico cada vez mais complexo e com um número de fontes de incerteza cada vez mais elevado, levando a um aumento da volatilidade.

Em vista deste cenário, a análise e gerenciamento de risco por parte das instituições financeiras tem ocupado um papel relevante além de estar em um constante processo de evolução.

Este tema teve seu marco com o trabalho de Markowitz, considerado o fundador da moderna teoria do portfólio. A partir deste marco foram desenvolvidos modelos com o intuito de quantificar e analisar o risco de mercado em que os detentores de recursos estavam expostos. Nesta esteira surgiram modelos como CAPM, linha de mercado de capitais, modelo Balck & Scholes, Value-At-Risk e Conditional Value-At-Risk.

Neste trabalho procurou-se apresentar de forma concisa tais modelos. A escolha do tema foi determinada pela ausência de uma linha de pesquisa sistemática dentro do Instituto de Ciência Matemática e Computação da USP de São Carlos como também dada sua importância para o desenvolvimento econômico.

O trabalho permitiu observar que os modelos embora proporcionem certo grau de acurácia quando aplicados, ainda estão sujeitos a falhas e imprecisão. O objetivo precípua é mensurar os riscos financeiros, servindo como um "norte" aos gestores. Todavia, não devem ser tomados como verdade absoluta em relação ao futuro, haja vista que nas diversas crises ocorridas as perdas financeiras não foram evitadas. De fato pode-se verificar que as premissas adotadas pelos diversos modelos analisados são incompatíveis com o mundo real que é conduzido pela incerteza, e o que se objetiva com sua utilização é a minimização dos choques negativos e subsídio à tomada de decisão.

Outra conclusão que se desprende deste trabalho é que não há uniformidade na mensuração do risco entre os agentes de mercado. Aplicar uma ou outra metodologia exige conhecimento

sobre a dinâmica do mercado em que se está sendo analisando e todo seu contexto.

REFERÊNCIAS

- ACERBI, C. Spectral measures of risk: A coherent representation of subjective risk aversion. **Journal of Banking & Finance**, Elsevier, v. 26, n. 7, p. 1505–1518, 2002. Citado na página 65.
- AIUBE, F. **Modelos Quantitativos em Finanças com enfoque em commodities**. [S.l.]: Bookman Editora, 2013. Citado nas páginas 29, 30 e 53.
- ALEXANDER, C. **Modelos de mercado: um guia para a análise de informações financeiras**. [S.l.]: Bolsa de Mercadorias & Futuros, 2005. Citado nas páginas 28, 47 e 61.
- AMARAL, L. Crises financeiras: história e actualidade. **Relações Internacionais (R: I)**, Instituto Português de Relações Internacionais, n. 23, p. 119–138, 2009. Citado na página 39.
- ANDERSEN, T.; BOLLERSLEV, T. Answering the skeptics: Yes, standard volatility models do provide accurate forecasts. **International Economic Review**, v. 39, n. 4, p. 885–905, 1998. Citado na página 32.
- ANDREZO, A. F.; LIMA, I. S. Mercado financeiro: aspectos históricos e conceituais. 2002. Citado na página 21.
- AQUINAS, S. T. **Summa Theologica**. [S.l.]: "Benzinger Brothers", 1947 [1274]. Citado na página 55.
- ARTZNER, P.; DELBAEN, F.; EBER, J.-M.; HEATH, D. Coherent measures of risk. **Mathematical finance**, Wiley Online Library, v. 9, n. 3, p. 203–228, 1999. Citado na página 65.
- ASCHINGER, G. A natureza das crises financeiras. **Revista Reuna**, v. 1, n. 3, 1997. Citado na página 39.
- AVERBUG, A.; GIAMBIAGI, F. **A crise brasileira de 1998/1999: origens e conseqüências**. [S.l.]: BNDES, Area de Planejamento, Departamento Econômico-DEPEC, 2000. v. 77. Citado na página 42.
- BAKSHI, G.; CAO, C.; CHEN, Z. Empirical performance of alternative option pricing models. **The Journal of Finance**, v. 52, n. 5, p. 2003–2049, 1997. Citado na página 56.
- BENINI, L. C. *et al.* Modelo de precificação de ativos por cadeias de markov. Universidade Estadual Paulista (UNESP). Citado na página 56.
- BERA, A. K.; HIGGINS, M. L. Arch models: properties, estimation and testing. **Journal of economic surveys**, Wiley Online Library, v. 7, n. 4, p. 305–366, 1993. Citado na página 35.
- BERNANKE, B. S. **The Federal Reserve and the financial crisis**. [S.l.]: Princeton University Press, 2013. Citado na página 40.
- BERNSTEIN, P. **Desafio aos deuses: a fascinante história do risco**. [S.l.]: ELSEVIER/ALTA BOOKS, 1997. Citado na página 25.

- BLACK, F.; SCHOLES, M. The pricing of options and corporate liabilities. **Journal of Political Economy**, University of Chicago Press, v. 81, n. 3, p. 637–654, 1973. ISSN 00223808, 1537534X. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/1831029>>. Citado nas páginas 53 e 55.
- BOLLERSLEV, T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. **Journal of Econometrics**, v. 31, n. 3, p. 307–327, 1986. Citado nas páginas 33 e 35.
- BROOKS, C.; BURKE, S. P.; PERSAND, G. Benchmarks and the accuracy of garch model estimation. **International Journal of Forecasting**, Elsevier, v. 17, n. 1, p. 45–56, 2001. Citado na página 38.
- CAMPBELL, J. Y.; CHAMPBELL, J. J.; CAMPBELL, J. W.; LO, A. W.; LO, A. W.; MACKINLAY, A. C. **The econometrics of financial markets**. [S.l.]: princeton University press, 1997. Citado na página 27.
- CAMPOS, K. C. Análise da volatilidade de preços de produtos agropecuários no brasil. **Revista de Economia e Agronegócio**, v. 5, n. 3, 2007. Citado na página 30.
- CANUTO, O. A crise asiática e seus desdobramentos. **Econômica**, v. 2, n. 4, p. 25–60, 2000. Citado na página 41.
- CARRIZOSA, M.; LEIPZIGER, D. M.; SHAH, H. O efeito tequila e a reforma bancária argentina. **Finanças & Desenvolvimento**, v. 16, n. 1, p. 22–26, 1996. Citado na página 42.
- CASTILLO-GUTIÉRREZ, S.; AGUILERA, E. D. L. Qq plot normal. los puntos de posición gráfica. **Iniciación a la Investigación**, Universidad de Jaén, n. 2, p. 8, 2007. Citado na página 31.
- CHESNAIS, F. As raízes da crise econômica mundial. **Revista Em Pauta: teoria social e realidade contemporânea**, v. 11, n. 31, 2013. Citado na página 43.
- COSTA, C. L. d. Opções: operando a volatilidade. **São Paulo: Bolsa de Mercadorias & Futuros**, 1998. Citado na página 55.
- DANIELSSON, J.; VRIES, C. G. D. Value-at-risk and extreme returns. **Annales d'Economie et de Statistique**, JSTOR, p. 239–270, 2000. Citado na página 63.
- DORNBUSCH, R.; PARK, Y. C.; CLAESSENS, S. Contagion: Understanding how it spreads. **World Bank Research Observer**, v. 15, n. 2, p. 177–97, 2000. Citado na página 39.
- DUFFIE, D.; PAN, J. An overview of value at risk. **Journal of derivatives**, v. 4, n. 3, p. 7–49, 1997. Citado na página 61.
- ENGLE, R. F. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation. **Econometrica: Journal of the econometric society**, JSTOR, p. 987–1007, 1982. Citado na página 33.
- FAMA, E. F. **Efficient Markets Hypothesis**. Tese (Doutorado) — PhD Thesis, Ph. D. dissertation, University of Chicago Graduate School of . . . , 1960. Citado na página 52.
- FAN, J.; YAO, Q. **The Elements of Financial Econometrics**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2017. (The Elements of Financial Econometrics). Citado na página 52.

- GABRIEL, F. S.; RIBEIRO, R. B.; RIBEIRO, K. C. de S. Hipóteses de mercado eficiente: um estudo de eventos a partir da redução do ipi. **Revista de Gestão, Finanças e Contabilidade**, Universidade do Estado da Bahia, v. 3, n. 1, p. 36–52, 2013. Citado na página 53.
- GIL, A. C. **Técnicas de pesquisa em economia e elaboração de monografias**. [S.l.]: Atlas, 2000. Citado na página 23.
- GONTIJO, C. *et al.* Raízes da crise financeira dos derivativos subprime. **Belo Horizonte: UFMG/Cedeplar**, 2008. Citado na página 43.
- GRIECO, F. de A. **O comércio exterior e as crises financeiras**. [S.l.]: Aduaneiras, 1999. Citado na página 41.
- HANSEN, P. R.; LUNDE, A. Estimating the persistence and the autocorrelation function of a time series that is measured with error. **Econometric Theory**, JSTOR, p. 60–93, 2014. Citado na página 30.
- HICKS, J. *et al.* **A theory of economic history**. [S.l.]: Oxford University Press Oxford, 1969. v. 9. Citado na página 21.
- HULL, J. C. **Options futures and other derivatives**. [S.l.]: Pearson Education India, 2003. Citado nas páginas 55, 59 e 61.
- ISSLER, J. V. Inflation level and uncertainty: evidence using brazilian data. **Revista Brasileira de Economia**, v. 45, n. 3, p. 473–482, 1991. Citado na página 36.
- ITÔ, K. **On stochastic differential equations**. [S.l.]: American Mathematical Soc., 1951. Citado na página 58.
- JOHANSEN, A.; SORNETTE, D. Stock market crashes are outliers. **The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems**, Springer, v. 1, n. 2, p. 141–143, 1998. Citado na página 31.
- JONDEAU, E.; ROCKINGER, M. Conditional volatility, skewness, and kurtosis: existence, persistence, and comovements. **Journal of Economic Dynamics and Control**, v. 27, n. 10, p. 1699–1737, 2003. Citado na página 30.
- JORION, P. **Value at risk: the new benchmark for controlling market risk**. [S.l.]: Irwin Professional Pub., 1997. Citado nas páginas 25, 27, 61 e 62.
- KEYNES, J. **TEORIA GERAL DO EMPREGO, DO JURO E DA MOEDA**. [S.l.]: Saraiva Educação S.A., 2017. Citado na página 25.
- KNIGHT, F. H. **Risk, uncertainty and profit**. [S.l.]: Courier Corporation, 2012. Citado na página 25.
- KRUGMAN, P. Dutch tulips and emerging markets. **Foreign affairs**, JSTOR, p. 28–44, 1995. Citado na página 54.
- LEVINE, R. Financial sector development and economic growth. **Journal of Economic Literature**, v. 35, n. 2, 1997. Citado na página 21.
- LINSMEIER, T. J.; PEARSON, N. D. Value at risk. **Financial Analysts Journal**, Taylor & Francis, v. 56, n. 2, p. 47–67, 2000. Citado na página 62.

- LINTNER, J. Security prices, risk, and maximal gains from diversification. **The journal of finance**, Wiley Online Library, v. 20, n. 4, p. 587–615, 1965. Citado na página 50.
- MACBETH, J. D.; MERVILLE, L. J. An empirical examination of the black-scholes call option pricing model. **The Journal of Finance**, [American Finance Association, Wiley], v. 34, n. 5, p. 1173–1186, 1979. Citado na página 57.
- MALLIARIS, A.; URRUTIA, J. L. The international crash of october 1987: Causality tests. **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, v. 27, n. 3, p. 353–364, 1992. Citado na página 41.
- MANDELBROT, B. The variation of certain speculative prices. **The Journal of Business**, v. 36, 1963. Disponível em: <<https://EconPapers.repec.org/RePEc:ucp:jnlbus:v:36:y:1963:p:394>>. Citado na página 61.
- MARKOWITZ, H. **Portfolio selection: Efficient diversification of investments**. [S.l.]: John Wiley New York, 1959. v. 16. Citado nas páginas 22, 45 e 48.
- MARQUES, M. S. B. A política econômica após o primeiro choque do petróleo e seu impacto sobre as trajetórias da inflação e do hiato do produto. **Revista Brasileira de Economia**, v. 43, n. 2, p. 239–272, 1989. Citado na página 41.
- MATIAS, M. A.; SILVA, C. A. T.; VIEIRA, L. Análise de padrões de comportamento de preços com fins de projeção de receita: testes estatísticos em uma série temporal de preços da commodity cobre. **BBR-Brazilian Business Review**, FUCAPE Business School, v. 2, n. 2, p. 113–130, 2005. Citado na página 30.
- MCCLINTOCK, B. International financial instability and the financial derivatives market. **Journal of Economic Issues**, Taylor & Francis, v. 30, n. 1, p. 13–33, 1996. Citado na página 54.
- MORETTIN, P. A. **Econometria financeira: um curso em séries temporais financeiras**. [S.l.]: Editora Blucher, 2017. Citado na página 27.
- MUSHTAQ, R. Augmented dickey fuller test. 2011. Citado na página 30.
- NEGUERUELA, M. A. *et al.* Análisis de series temporales financieras. 2016. Citado na página 35.
- NETO, A. A. **Finanças corporativas e valor**. [S.l.]: Atlas Sao Paulo, 2002. Citado na página 49.
- NETO, P. V. Estatística descritiva: Conceitos básicos. **São Paulo**, 2004. Citado na página 28.
- PEÑA, S. L. México: a crise de 1995 em perspectiva histórica. **Economia e Sociedade**, v. 6, n. 2, p. 147–158, 1997. Citado na página 41.
- PINTO, B. J. M.; VILELA, T. M. de M.; LIMA, U. S. M. de *et al.* A crise financeira russa. **Economics Bulletin**, AccessEcon, v. 28, n. 3, p. A1, 2005. Citado na página 42.
- RAYATI, M.; GOODARZI, H.; RANJBAR, A. Optimal bidding strategy of coordinated wind power and gas turbine units in real-time market using conditional value at risk. **International Transactions on Electrical Energy Systems**, v. 29, n. 1, p. e2645, 2019. Citado na página 66.

SCHUMPETER, J. A. **Capitalism, socialism and democracy**. [S.l.]: routledge, 2013. Citado na página 21.

SHARPE, W. F. A simplified model for portfolio analysis. **Management science**, INFORMS, v. 9, n. 2, p. 277–293, 1963. Citado na página 50.

SHIRYAEV, A. N. **Essentials of stochastic finance: facts, models, theory**. [S.l.]: World scientific, 1999. v. 3. Citado na página 58.

SMITH, A. **A riqueza das nações: investigação sobre sua natureza e suas causas**. [S.l.]: Nova Cultural, 1996. (Os Economistas). Citado na página 39.

TOBIN, J. Liquidity preference as behavior towards risk. **The review of economic studies**, JSTOR, v. 25, n. 2, p. 65–86, 1958. Citado nas páginas 23 e 48.

ZHANG, D.; HU, M.; JI, Q. Financial markets under the global pandemic of covid-19. **Finance Research Letters**, Elsevier, v. 36, p. 101528, 2020. Citado na página 43.

