UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Sobre conjuntos infinitos da reta

Matheus Rodrigues Vendrusculo

Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura:______________________

Matheus Rodrigues Vendrusculo

Sobre conjuntos infinitos da reta

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientador: Prof. Dr. Paulo Leandro Dattori da Silva

USP – São Carlos
Agosto de 2021

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

V453s

Vendrusculo, Matheus Rodrigues
Sobre conjuntos infinitos da reta / Matheus Rodrigues Vendrusculo; orientador Paulo Leandro Dattori da Silva. -- São Carlos, 2021.
45 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2021.

1. Conjuntos numéricos. I. Silva, Paulo Leandro Dattori da, orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Matheus Rodrigues Vendrusculo

About infinite sets of the line

Master dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC- USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Mathematics Professional Master's Program. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Professional Master Degree Program in Mathematics in National Network

Advisor: Prof. Dr. Paulo Leandro Dattori da Silva

USP – São Carlos
August 2021

Agradecimentos

À minha família pelo apoio, em especial a minha mãe Sandra, pelo incentivo e principalmente pelos conselhos e palavras motivadoras.

Ao meu orientador Professor Doutor Paulo Dattori, pelo apoio, dedicação, confiança, persistência e pelos importantes ensinamentos que tornaram possível a conclusão desta dissertação.

A todos os colegas do curso de PROFMAT, o apoio de cada um foi fundamental.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro.

RESUMO

VENDRUSCULO, M. R. **Sobre conjuntos infinitos da reta**. 2021. 45p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2021.

Nesta dissertação são apresentadas algumas propriedades envolvendo conjuntos da reta numérica. Iremos tratar de conjuntos finitos, infinitos, enumeráveis e não enumeráveis, com o objetivo de auxiliar a compreensão dos conjuntos numéricos dos naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais tratados no ensino fundamental e médio. Apresentaremos resultados envolvendo tais conjuntos. Também trabalharemos com a medida de Lebesgue na reta. Teremos um capítulo voltado para esse tema e mostraremos como medir conjuntos utilizando uma medida. Como aplicação, vamos medir os racionais e os irracionais e comparar os tamanhos. Esse trabalho visa auxiliar um professor de matemática do ensino fundamental e médio a respeito de conjuntos numéricos.

Palavras-chave: Conjuntos Numéricos; Conjuntos Infinitos; Conjuntos Enumeráveis; Medida; Educação.

ABSTRACT

VENDRUSCULO, M. R. About infinite sets of the line. 2021. 45p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2021.

In this dissertation, some properties involving sets of the number line are presented. We will deal with finite, infinite, enumerable and non-countable sets, with the aim of helping to understand the natural, integer, rational, irrational and real numerical sets treated in elementary and high school. We will present results involving such sets. We will also work the Lebesgue measure on the straight line. We will have a chapter focused on this topic and we will show you how to measure sets using a measure. As an application, let´s measure rationals and irrationals and compare sizes. This work aims to help an elementary and high school mathematics teacher regarding numerical sets.

Keywords: Numerical sets; Infinite sets; Enumerable sets; Measure; Education.

Índice

Introdução

Durante toda a grade curricular de um aluno regular do ensino básico (fundamental e médio), o tema conjuntos numéricos está presente. Os números naturais é descoberto de forma instintiva através da contagem numérica, como por exemplo a contagem dos dedos das mãos e da idade. O primeiro contato com os números inteiros negativos, segundo a Base Nacional Comum Curricular - BNCC (ver[2]), são apresentados a partir do sétimo ano do ensino fundamental e estão relacionados com cálculos envolvendo saldos negativos, temperaturas e profundidade. Já os números racionais positivos são vistos desde o quarto ano do ensino fundamental, pela introdução das frações. Os números irracionais estão presentes desde o oitavo ano do fundamental, em que é apresentado o número π e as características de uma circunferência. Por fim, o conjunto dos números reais, em sua totalidade, é formalizado a partir do oitavo ano sendo a união dos racionais e irracionais.

As dificuldades de compreensão desses conjuntos, principalmente relacionados aos racionais, irracionais e reais são de comum acordo entre os educadores. O ensino de fração, de números irracionais tais como os números π, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, são tópicos em que os alunos apresentam dificuldades em aprender.

Um desses problemas diz respeito ao número de elementos que cada conjunto contém. É natural, aos estudantes, questionar qual conjunto tem mais elementos. Por exemplo, é sabido que os naturais está contido estritamente nos inteiros, então, é comum imaginarmos que o número de elementos dos inteiros é maior que o dos naturais, mesmo ambos sendo infinitos. Veremos neste trabalho que conseguimos parear esses elementos de $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ um a um e mostrar que ambos os conjuntos são "infinitos iguais".

Perguntar sobre o tamanho de conjuntos pode ser feito para outros conjuntos, por exemplo, o conjunto dos racionais tem mais elementos que o conjunto dos naturais ou inteiros? Um outro questionamento, feito por um estudante, poderia ser: ao retirar todos os pares do conjunto dos naturais, teremos um conjunto com menos elementos? Tais perguntas não são triviais de serem respondidas.

Para responder tais perguntas, estudaremos conjuntos infinitos e enumerabilidade; precisaremos compreender o que são esses conjuntos e como são apresentados.

Veremos que $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{N}$ são conjuntos infinitos, mas de mesmo infinito. Também, veremos que $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ é um infinito diferente de $\mathbb{Q}$; de fato, veremos que $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ são infinitos de mesmo tipo.

Parece, então, natural medir $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ e comparar seus tamanhos. Para isso estabeleceremos a medida de Lebesgue de um conjunto de $\mathbb{R}$.

Esperamos que este trabalho auxilie um professor durante a preparação de aulas sobre conjuntos numéricos.

Portanto, esse trabalho será dividido da seguinte forma:

O capítulo 1, baseado nos capítulos um e dois de [9]., tem como objetivo apresentar uma breve introdução aos conjuntos dos números naturais $\mathbb{N}$, inteiros $\mathbb{Z}$ e racionais $\mathbb{Q}$, dando um tratamento especial para esse último. Mostraremos que $\mathbb{Q}$ não é completo.

Já no capítulo 2, estudaremos conjuntos finitos, infinitos e enumerabilidade. Iremos definir cada um e mostraremos, na forma de exemplos, que os naturais, naturais pares, naturais ímpares, os inteiros e os racionais são "infinitos iguais", pois são conjuntos enumeráveis.

No capítulo 3, apresentaremos o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ e, mostraremos, que tal conjunto não é enumerável. Isso acontece, devido ao fato que, o conjunto dos números irracionais $\mathbb{I}$ não é enumerável. Logo, existem conjuntos com "infinitos diferentes"dos apresentados no capítulo anterior.

Por fim, o capítulo 4, introduz a medida de Lebesgue. Aprenderemos a medir conjuntos e discutiremos uma questão interessante: No intervalo [0,1], de medida 1, suponha ser possível separar todos os irracionais dos racionais, qual seria a medida de cada um desses conjuntos? Veremos que, nesta situação, os irracionais tem medida um enquanto os racionais tem medida zero. Em outras palavras, se pegarmos um número aleatório dentro desse intervalo, muito provavelmente, ele será irracional.

Capítulo

1

O conjunto dos números racionais.

Este capítulo é baseado nos capítulos 1 e 2 de [9].

O objetivo deste capítulo é apresentar um breve resumo dos conjuntos dos números naturais $\mathbb{N}$, inteiros $\mathbb{Z}$ e racionais $\mathbb{Q}$. Dando um destaque maior nos naturais e racionais.

Não é intuito deste texto apresentar as construções algébricas dos conjuntos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$.

De modo simples, vamos definir o referido conjunto da seguinte maneira:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, \dots\}.$$

A seguir, apresentamos uma propriedade importante do conjunto $\mathbb{N}$.

Propriedade. (Príncipio da boa ordenação) Todo subconjunto não vazio $A \subset \mathbb{N}$ possui um menor elemento, isto é, um elemento $n_0 \leq n$, para todo $n \in A$.

Demonstração: Afim de provarmos essa afirmação, para cada número $n \in \mathbb{N}$, chamemos de I_n o conjunto dos números naturais menor ou igual a n, ou seja, $I_n = \{p \in \mathbb{N} : p \leq n\}$. Se $1 \in A$ acabou, pois 1 será o menor elemento de A. Se $1 \notin A$, então consideremos o conjunto $X = \{n : I_n \subset \mathbb{N} - \mathbb{A}\}$. Temos que $X \neq \emptyset$, pois $I_1 \subset \mathbb{N} - \mathbb{A}$ logo $1 \in X$. Por outro lado, como $A \neq \emptyset$ isso implica que $X \neq \mathbb{N}$, existe $n \in X$ tal que $n + 1 \notin X$. Portanto $I_n = \{1, 2, 3, \dots, n\} \subset \mathbb{N} - \mathbb{A}$ e $I_{n+1} = \{1, 2, 3, \dots, n, n + 1\} \not\subset \mathbb{N} - \mathbb{A}$, isto é, $1, \dots, n \notin A$ e $n + 1 \in A$. Por fim, $n_o = n + 1$ é o menor elemento de A (pois os números naturais menores que $n + 1$ são $1, 2, \dots, n$).

$\square$

Observação: A partir do conjunto dos números naturais podemos definir o **conjunto dos números inteiros**, denotado por $\mathbb{Z}$, que é o único domínio bem ordenado (ver teorema 2.3 da seção 3.10 de [3]). Agora, a partir do conjunto dos inteiros podemos definir o **conjunto dos números racionais**, denotado por $\mathbb{Q}$, como sendo o corpo de frações de $\mathbb{Z}$ (ver capítulo 4 de [3]).

De modo simples, vamos descrever os conjuntos dos números inteiros e dos números racionais, respectivamente, da seguinte maneira:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

e

$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q};\ p, q \in \mathbb{Z} \text{ e } q \neq 0\}.$$

Pelo descrito acima $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Note que se podemos representar todos os elementos de $\mathbb{Q}$ em uma reta. Será que todos os pontos de tal reta são representantes de algum elemento de $\mathbb{Q}$? Veremos, na sessão 1.1, que a resposta é não.

A seguir, vamos apresentar algumas propriedades do conjunto $\mathbb{Q}$.

Propriedades:

(1) (Igualdade dos números racionais) Sejam $\frac{p}{q}$ e $\frac{r}{s}$ números racionais. Então, $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ se, e somente se, $p \times s = q \times r$.

(2) Todo número racional pode ser representado na forma $\frac{p}{q}$, sendo q um número natural.

(3) Todo número racional $\frac{p}{q} > 0$ pode ser escrito na forma $\frac{r}{s}$, sendo $\mathrm{mdc}(r, s) = 1$.

Demonstração de (3). De fato, se $s = \mathrm{mdc}(p, q)$, então existem inteiros x e y tais que $p = x \times s$, $q = y \times s$ e $\mathrm{mdc}(x, y) = 1$. Logo, $\frac{p}{q} = \frac{x \times s}{y \times s}$, pois $p \times y \times s = x \times s \times q$. □

O conjunto dos números racionais com as operações usuais de adição "+" e multiplicação ".", possui uma estrutura algébrica bem forte, a saber, $\mathbb{Q}$ é um corpo. De fato, definindo em $\mathbb{Q}$ soma e multiplicação (usuais) por

- dados dois números racionais $\frac{p}{q}$ e $\frac{r}{s}$, definimos a operação "adição" por:

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{(p \times s) + (q \times r)}{q \times s}$$

- dados dois números racionais $\frac{p}{q}$ e $\frac{r}{s}$, definimos a operação "multiplicação" por:

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{p \times r}{q \times s}.$$

Podemos verificar os nove itens abaixo.

(1) quaisquer que sejam $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$ tem-se $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right)$;

(2) quaisquer que sejam $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ tem-se $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$;

(3) $0 \in \mathbb{Q}$ é tal que $\frac{p}{q} + 0 = \frac{p}{q}$, seja qual for $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$;

(4) todo elemento $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ possui um simétrico $-\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ tal que $\frac{p}{q} + \left(-\frac{p}{q}\right) = 0$;

(5) dados quaisquer $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$ tem-se $\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right)$;

(6) sejam quais forem $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ tem-se $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$;

(7) $1 \in \mathbb{Q}$ é tal que $1 \neq 0$ e $\frac{p}{q} \cdot 1 = \frac{p}{q}$, qualquer que seja $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$;

(8) todo $\frac{p}{q} \neq 0$ em $\mathbb{Q}$ possui um inverso $\frac{q}{p}$ tal que $\frac{p}{q} \cdot \frac{q}{p} = 1$;

(9) dados quaisquer $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$ tem-se $\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}$.

Definição 1.1. *Dizemos que um corpo K é ordenado quando existe um subconjunto* K_+ *de* K*, chamado conjunto dos elementos positivos, satisfazendo as seguintes condições:*

P1 *Dados* $x, y \in K_+ \Rightarrow x + y \in K_+$ *e* $x \cdot y \in K_+$*, ou seja, a soma e o produto de elementos positivos são sempre positivos.*

P2 *Dado* $x \in K$ *apenas uma das seguintes situações ocorre:* $x = 0$ *ou* $x \in K_+$ *ou* $-x \in K_+$.

Exemplo 1.2. $\mathbb{Q}$ *é um corpo ordenado. De fato, o conjunto*

$$\mathbb{Q}_+ = \left\{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}; p, q \in \mathbb{N}\right\}$$

satisfaz as propriedades P1 *e* P2.

Em um corpo ordenado K temos a noção de ordem. Dados $x, y \in K, x \neq y$, denotamos $x < y$ para significar $y - x \in K_+$ e lê-se x menor do que y.
Analogamente, $y > x$ significa $y - x > K_+$ e lê-se y maior do que x.

Proposição 1.3. *Dados os números racionais* $\frac{p}{q}$ *e* $\frac{r}{s}$*, como* $q, s > 0$*, temos que*

$$\frac{r}{s} > \frac{p}{q} \Leftrightarrow rq > ps.$$

Demonstração: De fato,

$$\frac{r}{s} > \frac{p}{q} \Leftrightarrow \frac{rq-ps}{qs} = \frac{r}{s} - \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_+ \Leftrightarrow (rq-ps)qs \in \mathbb{N} \Leftrightarrow rq-ps > 0 \Leftrightarrow rq > ps.$$

□

Vamos, agora, estudar conjuntos limitados.

Definição 1.4. *Seja* $A \subset \mathbb{Q}$.

i) Dizemos que $r \in \mathbb{Q}$ *é cota superior de* A *se* $x \leq r$, *para todo* $x \in A$.

ii) Dizemos que $r \in \mathbb{Q}$ *é cota inferior de* A *se* $r \leq x$, *para todo* $x \in A$.

Definição 1.5. *Dizemos que um conjunto* $A \subset \mathbb{Q}$ *é limitado se existe* $r \in \mathbb{Q}$ *tal que* $-r \leq x \leq r$, *para todo* $x \in A$. *Em outras palavras,* $A \subset \mathbb{Q}$ *é limitado se* A *admite cota inferior e cota superior. Quando* A *admite cota superior ou cota inferior, dizemos que A é limitado superiormente ou inferiormente, respectivamente.*

Definição 1.6. *Seja* $A \subset \mathbb{Q}$ *limitado inferiormente. Dizemos que* α *é o ínfimo de* A *se* α *é a maior das cotas inferiores de* A.

Notação: $\alpha = \inf A$.

Definição 1.7. *Seja* $B \subset \mathbb{Q}$ *limitado superiormente. Dizemos que* β *é o supremo de* B *se* β *é a menor das cotas superiores de* B.

Notação: $\beta = \sup B$.

As definições acima sugerem a seguinte pergunta natural: será que sempre podemos obter o supremo e o ínfimo de conjuntos limitados de $\mathbb{Q}$?

Antes de responder a essa pergunta, vejamos um exemplo:

Exemplo 1.8. *Se* $\emptyset \neq X \subset \mathbb{Z}(\subset \mathbb{Q})$ *é limitado então existem* $a, b \in X$ *tais que* $a = \inf X$ *e* $b = \sup X$.
De fato, como $\emptyset \neq X \subset \mathbb{Z}$ *é limitado,* X *possui no máximo um número finito de elementos. Logo,* X *possui um maior elemento e um menor elemento. Denotemos* $b =$ *maior elemento de* X *e* $a =$ *menor elemento de* X. *Então,* $b = \sup X$ *e* $a = \inf X$.

Como consequência do exemplo acima, temos:

1. Para todo $\emptyset \neq X \subset \mathbb{Z}$ limitado superiormente existe $\sup X$.
2. Para todo $\emptyset \neq X \subset \mathbb{Z}$ limitado inferiormente existe $\inf X$.

Na próxima seção veremos que existe $X \subset \mathbb{Q}$ que não satisfaz as propriedades 1 e 2 acima.

1.1 A não completude de $\mathbb{Q}$.

O objetivo desta sessão é mostrar que em certo sentido, o conjunto dos números racionais, $\mathbb{Q}$, possui “buracos”. Então discutiremos a existência de um conjunto que contenha $\mathbb{Q}$ e que preencha esses “buracos”. O primeiro passo é mostrar que não existe $0 < \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, com $mdc(p,q) = 1$ tal que $\left(\dfrac{p}{q}\right)^2 = 2$; isto será consequência de dois resultados abaixo:

Afirmação 1: Se $n \in \mathbb{N}$ é par então n^2 é par.

De fato, se $n \in \mathbb{N}$ é par então existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $n = 2m$. Daí, $n^2 = 4m^2 = 2.2m^2$, com $2m^2 \in \mathbb{N}$. Portanto, n^2 é par.

Afirmação 2: Se $n \in \mathbb{N}$ é ímpar então n^2 é ímpar.

De fato, se $n \in \mathbb{N}$ é ímpar então existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $n = 2m+1$. Daí, $n^2 = (2m+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 2(2m^2 + 2m) + 1$, com $(2m^2 + 2m) \in \mathbb{N}$. Portanto, n é ímpar.

Das afirmações 1 e 2 segue:

Proposição 1.9. *Não existe* $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}_+$ *tal que* $\left(\dfrac{p}{q}\right)^2 = 2.$

Demonstração: Suponha, por absurdo, que existam $p, q \in \mathbb{N}$, com $mdc(p,q) = 1$, tais que $\left(\dfrac{p}{q}\right)^2 = 2$. Daí, $2 = \dfrac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow p^2$ é par. Então, pelas afirmações 1 e 2, p é par. Consequentemente, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $p = 2m$. Logo, $(2m)^2 = 2q^2 \Rightarrow 4m^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2m^2 \Rightarrow q^2$ é par. Então, pelas afirmações 1 e 2, q é par.

Como q é par e p é par temos que $1 = mdc(p,q) \geq 2$. Absurdo. $\square$

Sejam

$$X = \{x \in \mathbb{Q};\ x \geq 0 \ \text{ e } \ x^2 < 2\}$$

e

$$Y = \{y \in \mathbb{Q};\ y > 0 \ \text{ e } \ y^2 > 2\}.$$

Note que $Y \subset (0, +\infty)$. Além disso, se $x > 2$ então $x^2 > 4$; consequentemente $X \subset [0, 2]$.

Vamos mostrar que não existem $\sup X$ e $\inf Y$ em $\mathbb{Q}$. Para isso, precisamos de três resultados auxiliares.

Lema 1.10. X *não possui um maior elemento. Em outras palavras, não existe* $x_0 \in X$ *tal que* $x_0 \geq x, \forall x \in X$.

Demonstração: Para demonstrar o lema devemos, para cada $x \in X$, encontrar $x' \in X$, com $x < x'$. Agora, $x' > x$ significa que $x' = x + r$, para algum $0 < r \in \mathbb{Q}_+$.
Logo, para cada $x \in X$ basta mostrar que existe $0 < r \in \mathbb{Q}_+$ tal que $x + r \in X$.

Dado $x \in X$, para $0 < r < 1$ temos

$$(x+r)^2 = x^2 + 2xr + r^2 = x^2 + (2x+r)r < x^2 + (2x+1)r.$$

Daí, para cada $x \in X$ basta encontrar $0 < r < 1$ tal que $x^2 + (2x+1)r < 2$; equivalentemente, $0 < r < \dfrac{2-x^2}{2x+1}$.

Logo, para cada $x \in X$, tome $r \in \mathbb{Q}$ com $0 < r < \min\left\{1, \dfrac{2-x^2}{2x+1}\right\}$.

Daí, $r^2 < r$ e $r(2x+1) < 2 - x^2$; consequentemente,

$$(x+r)^2 = x^2 + 2xr + r^2 < x^2 + 2xr + r = x^2 + r(2x+1) < x^2 + 2 - x^2 = 2$$

e, portanto, $x + r \in X$. $\square$

Lema 1.11. *Y não possui um menor elemento. Em outras palavras, não existe* $y_0 \in Y$ *tal que* $y_0 \leq y$, $\forall y \in Y$.

Demonstração: Para demonstrar a afirmação devemos, para cada $y \in Y$, encontrar $y' \in Y$, com $y' < y$.

Note que $y' < y$ significa que $y' = y - r$, para algum $0 < r \in \mathbb{Q}$.

Logo, para cada $y \in Y$ devemos mostrar que existe $0 < r \in \mathbb{Q}$ tal que $y - r \in Y$ (isto é, $(y-r)^2 > 2$). Note que para $0 < r$ obtemos

$$(y-r)^2 = y^2 - 2yr + r^2 > y^2 - 2yr;$$

portanto, basta encontrar $0 < r$ tal que

$$y^2 - 2yr > 2;$$

isto é,

$$r < \frac{y^2-2}{2y}.$$

Logo, para cada $y \in Y$ tome $r \in \mathbb{Q}$, com $0 < r < \dfrac{y^2-2}{2y}$. Daí, $-2ry > 2 - y^2$ e, portanto,

$$(y-r)^2 = y^2 - 2yr + r^2 > y^2 - 2yr > y^2 + 2 - y^2 = 2.$$

$\square$

Observação 1.12. *Note que para encontrar* r *nas demonstrações dos lemas 1.10 e 1.11 usamos o seguinte fato: dados* $a, b \in \mathbb{Q}$ *com* $a < b$ *existe* $c \in \mathbb{Q}$ *tal que* $a < c < b$. *Tal c evidentemente existe e podemos tomar c, por exemplo, como:* $c = \dfrac{a+b}{2} \in \mathbb{Q}$.

Lema 1.13. *Se* $x \in X$ *e* $y \in Y$ *então* $x < y$.

Demonstração: Suponha, por absurdo, que existem $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$ tais que $x_0 \geq y_0$. Logo, temos $2 < {y_0}^2 = y_0 y_0 \leq x_0 x_0 = {x_0}^2$. Absurdo. □

Proposição 1.14. *Não existem* $\sup X$ *e* $\inf Y$.

Demonstração: Suponha, por absurdo, que existe $r = \sup X$. Pela tricotomia de $\mathbb{Q}$, existe apenas uma das três possibilidades listadas abaixo para r^2:

- $r^2 < 2$
- $r^2 > 2$
- $r^2 = 2$

Afirmamos que não podemos ter $r^2 < 2$. De fato, $r = \sup X$ implica $r \geq 0$. Porém, $r \geq 0$ e $r^2 < 2$ implica que $r \in X$; consequentemente, r é o maior elemento de X. Absurdo, pois pelo lema 1.10, X não possui maior elemento.

Agora, afirmamos que não podemos ter $r^2 > 2$. De fato, $r = \sup X$ implica que $r \geq 0$. Porém, $r \geq 0$ e $r^2 > 2$ e implica que $r \in Y$. Pelo lema 1.11, $\exists\, s \in \mathbb{Q}$ tal que $r - s \in Y$. Pelo lema 1.13, $r - s \geq x$, para todo $x \in X$. Absurdo, pois $r - s$ é cota superior de X e $r - s < r = \sup X$.

Portanto, $r^2 = 2$. Absurdo, pois não existe $r \in \mathbb{Q}$ com $r^2 = 2$ (ver proposição 2.1).

Analogamente, mostra-se que não existe $\inf Y$. □

No que segue veremos que existe um corpo ordenado que contém $\mathbb{Q}$, para o qual qualquer subconjunto limitado superiormente admite supremo.

Se K é corpo ordenado, então, identificando $1 \in \mathbb{N}$ com o neutro multiplicativo de K fica "natural" identificar $\mathbb{N}$ com um subconjunto de K; consequentemente, fica natural identificar $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ com subconjuntos de K. De fato, se K é corpo ordenado é possível considerar (ver, por exemplo, [3] e [8])

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset K.$$

A noção de supremo e ínfimo, trabalhado no capítulo anterior, se estende naturalmente para qualquer corpo ordenado K:

Definição 1.15. *Sejam K um corpo ordenado e* $A \subset K$.

i) Dizemos que $r \in K$ *é cota superior de* A *se* $x \leq r$, *para todo* $x \in A$.

ii) Dizemos que $r \in K$ *é cota inferior de* A *se* $r \leq x$, *para todo* $x \in A$.

Definição 1.16. *Dizemos que um conjunto* $A \subset K$ *é limitado se existe* $r \in K$ *tal que* $-r \leq x \leq r$*, para todo* $x \in A$*. Em outras palavras,* $A \subset K$ *é limitado se* A *admite cota inferior e cota superior. Quando* A *admite cota superior ou cota inferior, dizemos que A é limitado superiormente ou inferiormente, respectivamente.*

Definição 1.17. *Seja* $A \subset K$ *limitado inferiormente. Dizemos que* α *é o ínfimo de* A *se* α *é a maior das cotas inferiores de* A*.*

Notação: $\alpha = \inf A$.

Definição 1.18. *Seja* $B \subset K$ *limitado superiormente. Dizemos que* β *é o supremo de* B *se* β *é a menor das cotas superiores de* B*.*

Notação: $\beta = \sup B$.

Definição 1.19. *Dizemos que um corpo ordenado K é completo quando todo subconjunto não vazio limitado superiormente de* K *possui supremo em* K*.*

Exemplo 1.20. $\mathbb{Q}$ *não é completo.*

Observação: Vale ressaltar aqui que, no exemplo 1.20, $\mathbb{Q}$ é corpo e não é completo; isto é, existe $X \subset \mathbb{Q}$ limitado superiormente tal que não existe $\alpha \in \mathbb{Q}$ com $\alpha = \sup X$.

Por outro lado, dado K corpo ordenado com $\mathbb{Q} \subset K$ temos $X \subset \mathbb{Q} \subset K$ e podemos agora nos perguntar se existe $\alpha \in K$ com $\alpha = \sup X$ (isto é, supremo de X em K, ao invés de supremo de X em $\mathbb{Q}$).

Capítulo

2

Conjuntos finitos, infinitos e enumeráveis

Para complementar o capítulo 1, iremos ver alguns conceitos e definições envolvendo os conjuntos numéricos citados anteriormente. Mostraremos que tais conjuntos são infinitos enumeráveis e portanto terão consequências significativas.

Será que temos conjuntos que são mais infinitos que outros? Ou infinitos iguais? Será que conseguimos criar um critério de comparação de infinitos? Vamos lidar com tais questões ao longo deste capítulo.

2.1 Conjuntos finitos

Seja $I_n = \{1, 2, , \ldots, n\} \subset \mathbb{N}$.

Definição 2.1. *Dizemos que um conjunto* X *é finito quando:*

1. $X = \emptyset$
2. $X \neq \emptyset$ *e existe* $f : I_n \to X$ *bijeção, para algum* $n \in \mathbb{N}$

Nomenclatura:

- escrevendo $x_1 = f(1), x_2 = f(2), \ldots, x_n = f(n)$ temos $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$.
- f é chamada de contagem dos elementos de X.
- n é chamado de número de elementos de X.

Observação: Provaremos adiante que o número de elementos de um conjunto finito X não depende da contagem.

Lema 2.2. *Se existe uma bijeção $f : X \to Y$ então, dados $a \in X$ e $b \in Y$, existe também uma bijeção $g : X \to Y$ tal que $g(a) = b$.*

Demonstração: Dados $a \in X$ e $b \in Y$ temos dois casos:

- $f(a) = b$; neste caso podemos tomar $g = f$
- $f(a) \neq b$. Neste caso defina $h : Y \to Y$ dada por $h(f(a)) = b$, $h(b) = f(a)$ e $h(x) = x \quad \forall x \in Y_{|\{f(a),b\}}$.

  Evidentemente, h é uma bijeção.

  Defina $g : X \to Y$ por $g = h \circ f$. Temos que g é uma bijeção e $g(a) = h(f(a)) = b$.

$\square$

Teorema 2.3. *Se A é um subconjunto próprio de I_n, não pode existir uma bijeção $f : A \to I_n$.*

Demonstração: Seja $\mathbb{N}' = \{n \in \mathbb{N}; \text{existe } f : A \to I_n \text{ bijeção, sendo } A \subsetneq I_n\}$.

Suponha, por absurdo, que $\mathbb{N}' \neq \emptyset$. Sabemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}'$ menor elemento de $\mathbb{N}'$. Se $n_o \in A$ então (pelo lema anterior) existe $g : A \to I_{n_0}$ bijeção com $n_o = g(n_0)$. Neste caso $f : g_{|A-\{n_0\}} \to I_{n_{0-1}}$ é uma bijeção com $A - \{n_0\} \subset I_{n_{0-1}}$. Absurdo, pois $n_{0-1} \in \mathbb{N}'$ e n_0 é o menor elemento de $\mathbb{N}'$. Logo $n_o \notin A$.

Seja $f : A \to I_{n_0}$ bijeção e seja $a \in A$ tal que $f(a) = n_0$. Daí, $f_{|A-\{a\}} : A - \{a\} \to I_{n_0-1} =(I_{n_0} - \{n_0\})$ é bijeção. Além disso, de $n_0 \notin A$ e $A \subsetneq I_{n_0}$ temos $A \subsetneq(I_{n_0} - \{n_0\})= I_{n_0-1} \Rightarrow(A - \{a\})\subset I_{n_0-1}$. Logo, $n_0 - 1 \in \mathbb{N}'$. Absurdo.

Portanto $\mathbb{N}' = \emptyset$.

$\square$

Corolário 2.4. *Se $f : I_m \to X$ e $g : I_n \to X$ são bijeções então $m = n$.*

Demonstração: Temos que $f^{-1} \circ g : I_n \to I_m$ e $g^{-1} \circ f : I_m \to I_n$ são bijeções. Logo, pelo teorema 2.3 não podemos ter $I_n \subsetneq I_m$ ou $I_m \subsetneq I_n$.

Portanto $I_m = I_n$; isto é, $m = n$. $\square$

Corolário 2.5. *Seja X um conjunto finito. Uma aplicação $f : X \to X$ é uma função injetiva se, e somente se, é sobrejetiva.*

Demonstração: De X finito, existe uma bijeção $\varphi : I_n \rightarrow X$. Para algum $n \in \mathbb{N}$ a aplicação $f : X \rightarrow X$ é injetiva ou sobrejetiva se, e somente se, $\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi : I_n \rightarrow I_n$ o é. Logo podemos considerar $f : I_n \rightarrow I_n$. Se f for injetiva então tomando $A = f(I_n)$, teremos uma bijeção $f^{-1} : A \rightarrow I_n$. Pelo Teorema 2.3, $A = I_n$ e f é sobrejetiva. Reciprocamente, se f for sobrejetiva então, para cada $x \in I_n$, podemos escolher $y = g(x) \in I_n$ tal que $f(y) = x$. Isto define uma aplicação $g : I_n \rightarrow I_n$ tal que $f(g(x)) = x$ para todo $x \in I_n$. Então, g é injetiva e, pelo argumento acima, g é sobrejetiva. Assim, se $y_1, y_2 \in I_n$ forem tais que $f(y_1) = f(y_2)$ tomamos $x_1, x_2 \in I_n$ com $g(x_1) = y_1, g(x_2) = y_2$ e teremos $x_1 = f(g(x_1)) = f(y_1) = f(y_2) = f(g(x_2)) = x_2$; consequentemente $y_1 = g(x_1) = g(x_2) = y_2$ e, portanto, f é injetiva. □

Corolário 2.6. *Não pode existir uma bijeção entre um conjunto finito e uma parte própria desse conjunto.*

Demonstração: Sejam X finito e $Y \subset X$ uma parte própria de X. Existem $n \in \mathbb{N}$ e uma bijeção $\varphi : I_n \rightarrow X$. Então, o conjunto $A = \varphi^{-1}(Y)$ é uma parte própria de I_n. Vamos denotar de $\varphi_A : A \rightarrow Y$ a bijeção obtida por restrição de φ a A. Se existisse uma bijeção $f : Y \rightarrow X$, a composta $g = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi_A : A \rightarrow I_n$ seria também uma bijeção, contrariando o Teorema 2.3. □

Outro resultado importante é:

Teorema 2.7. *Todo subconjunto de um conjunto finito é finito.*

Demonstração:

Se $X = \emptyset$, então $Y \subset X$ implica $Y = \emptyset$, que é finito.

Para $X = \{x\}$ temos $Y \subset X$ implica que $Y = \emptyset$ ou $Y = X$; portanto, Y é finito.

Portanto, o teorema é valido quando X tem zero elementos e também se X tem apenas um elemento.

Vamos usar indução para provar o teorema. Suponhamos que o teorema seja válido quando X tem n elementos. Isto é, para qualquer X com n elementos e $Y \subset X$ então Y é finito. Vamos mostrar que ele é verdadeiro quando X tem $n + 1$ elementos.

Seja X finito com $n + 1$ elementos e seja $Y \subset X$.

Se $Y = X$ então Y finito.

Se $Y \neq X$ então existe $a \in X$ tal que $a \notin Y$. Logo $Y \subset X - \{a\}$, o qual é um conjunto com n elementos. Portanto, pela hipótese de indução, Y é finito. □

Corolário 2.8. *Dada* $f : X \rightarrow Y$, *se* Y *é finito e* f *é injetiva então* X *é finito; se* X *é finito e* f *é sobrejetiva então* Y *é finito.*

Demonstração: Sejam X e Y conjuntos, com Y finito e assuma que exista $f : X \rightarrow Y$ injetiva.

Então, $f : X \rightarrow f(X) \subset Y$ é bijeção e pelo teorema 2.7 $f(X)$ é finito; logo, X é finito.

Agora, sejam X e Y conjuntos, com X finito e assuma que exista $f : X \rightarrow Y$ sobrejetiva.

Para cada $y \in Y$ escolha $x_y \in X$ tal que $f(x_y) = y$. Defina

$$\begin{array}{rccl} g: & Y & \to & X \\ & y & \mapsto & g(y) = x_y \end{array}$$

Por construção, g é injetora; sendo X finito, segue do argumento acima que Y é finito.

□

Para nosso próximo resultado usaremos a seguinte definição:

Definição 2.9. *Dizemos que um subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é limitado quando $X = \emptyset$ ou existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $x \leq p$ para todo $x \in X$.*

Corolário 2.10. *Um subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é finito se, e somente se, é limitado.*

Demonstração: Seja $X = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{N}$ finito; tome $p = max\{x_1, \ldots, x_n\}$. Temos que $x \in X \Rightarrow x \leq p$; logo X é limitado. Reciprocamente, se $X \subset \mathbb{N}$ é limitado, isso implica que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $x \leq p$ para todo $x \in X$ então, $X \subset I_p$; logo, pelo Teorema 2.7 X é finito.

□

2.2 Conjuntos infinitos

Definição 2.11. *Dizemos que um conjunto é infinito quando não é finito. Assim, X é infinto quando não é vazio nem existe, seja qual for $n \in \mathbb{N}$, uma bijeção $f : I_n \to X$.*

Exemplo 2.12. *$\mathbb{N}$ é infinito, pois $\mathbb{N}$ não é limitado implicando, pelo corolário 2.10, que $\mathbb{N}$ é infinito.*

Teorema 2.13. *Se X é um conjunto infinito, então existe uma aplicação injetiva $f : \mathbb{N} \to X$.*

Demonstração:

Se $x \neq \emptyset$ implica que existe $x_1 \in X$. Defina $f(1) = x_1$. X infinito implica que existe $x_2 \in X - \{x_1\}$. Defina $f(2) = x_2$. Suponhamos definidos, como feito acima, $f(1), \ldots, f(n)$. X infinito implica que existe $x_{n+1} \in X - \{f(1), \ldots, f(n)\}$. Definia $f(n+1) = x_{n+1}$. Evidentemente, $f : \mathbb{N} \to X$ definida acima é injetiva por construção. □

Corolário 2.14. *Um conjunto X é infinito se, e somente se, existe uma bijeção $\varphi : X \to Y$ sobre um subconjunto próprio $Y \subset X$.*

Demonstração: Sejam X infinito e $f : \mathbb{N} \to X$ uma aplicação injetiva. Para cada $n \in \mathbb{N}$, denote $f(n) = x_n$. Consideremos o subconjunto próprio $Y = X - \{x_1\}$. Seja $\varphi : X \to Y$ dado por $\varphi(x) = x$ se x não é um dos x_n e $\varphi(x_n) = x_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$. Por construção, φ é bijeção entre X e seu conjunto próprio $\varphi(X) - \{x_1\}$.

Reciprocamente, pelo corolário 2.6, se existe uma bijeção de X sobre um seu subconjunto próprio então X é infinito. □

Exemplo 2.15. *Se* $\mathbb{N}_1 = \mathbb{N} - \{1\}$ *então* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\varphi(n) = n + 1$, *é uma bijeção de* $\mathbb{N}$ *sobre seu subconjunto* $\mathbb{N}_1 = \{2, 3, \ldots\}$. *Mais geralmente, fixando* $p \in \mathbb{N}$ *podemos considerar* $\mathbb{N}_p = \{p + 1, p + 2, \ldots\}$ *e definir a bijeção* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_p$, $\varphi(n) = n + p$.

Observação: Fenômenos desse tipo já tinham sido observados por Galileu, que foi o primeiro a notar que "há tantos números pares quantos números naturais", mostrando que se $P = \{2, 4, 6, \ldots\}$ é o conjunto dos números pares então $\varphi : \mathbb{N} \to P$, dada por $\varphi = 2n$, é uma bijeção. Evidentemente, se $I = \{1, 3, 5, \ldots\}$ é o conjunto dos números ímpares, então $\psi : \mathbb{N} \to I$, com $\psi(n) = 2n - 1$, também é uma bijeção. Nestes últimos exemplos, $\mathbb{N} - P = I$ e $\mathbb{N} - I = P$ são infinitos, enquanto $\mathbb{N} - \mathbb{N}_p = \{1, 2, \ldots, p\}$ é infinito.

2.3 Conjuntos Enumeráveis

Definição 2.16. *Dizemos que um conjunto* X *é enumerável quando:*

- *X é finito ou*
- *Existe* $f : \mathbb{N} \to X$ *bijeção. Neste caso* f *é chamada de enumeração dos elementos de* X*; escrevendo* $x_1 = f(1), \ldots, x_n = f(n)$, *temos* $X = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$

Alguns resultados importantes dessa definição são:

Exemplo 2.17. *O conjunto dos números naturais* $\mathbb{N}$ *é enumerável.*

Demonstração: Para isso basta tomar a função identidade $I : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que claramente é uma bijeção.

□

Exemplo 2.18. *Seja um conjunto* $A \subset \mathbb{N}$ *dado por* $A = \mathbb{N} - \{5\}$. *Então,* A *é enumerável.*

Demonstração: Considere a função $f : \mathbb{N} \to A$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} n; & 1 \leq n \leq 4 \\ n + 1; & n \geq 5 \end{cases}$$

Claramente f é bijetora e, portanto, o conjunto A é enumerável.

□

Exemplo 2.19. *Na verdade, podemos usar o argumento do exemplo anterior para mostrar que qualquer conjunto* $A \subset \mathbb{N}$ *definido por* $A = \mathbb{N} - \{n_0\}$*, para algum* $n_0 \in \mathbb{N}$*, é enumerável.*

Demonstração: Para isto, basta criar $f : \mathbb{N} \to A$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} n; & 1 \leq n \leq n_0 - 1 \\ n+1; & n \geq n_0 \end{cases}$$

Note que f é uma bijeção e portanto o conjunto A é enumerável. □

Os exemplos acima são casos particulares do seguinte:

Teorema 2.20. *Todo subconjunto* $X \subset \mathbb{N}$ *é enumerável.*

Demonstração:

Se X é finito então X é enumerável por definição.

Seja $X \neq \emptyset$ infinito e $X \subset \mathbb{N}$, então existe x_1 menor elemento de X.

Definimos $A_1 = X - \{n_1\}$. Temos que $A_1 \neq \emptyset$. Como $A_1 \subset \mathbb{N}$ então existe x_2 menor elemento de A_1.

Evidentemente $x_1 < x_2$.

Analogamente, como X é infinito, definimos $A_2 = X - \{x_1, x_2\}$. Temos que $A_2 \neq \emptyset$. Como $A_2 \subset \mathbb{N}$ então existe x_3 menor elemento de A_2.

Evidentemente $x_1 < x_2 < x_3$.

Suponha definidos $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n$.

Novamente como X é infinito, definimos $A_n = X - \{x_1, \ldots, x_n\}$. Temos que $A_n \neq \emptyset$ Afirmamos que $X = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$.

De fato se existir $x \in X - \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ então $x \in A_n$ para todo n. Daí, para cada $n \in \mathbb{N}$ temos que $x > x_{n+1} > x_1$, isto é, $\{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ é limitado, sendo assim um absurdo. Portanto $X = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ é infinito. □

Podemos generalizar o resultado anterior.

Teorema 2.21. *Seja* A *um conjunto enumerável e* $B \subset A$*. Então,* B *é enumerável.*

Demonstração: Se B é finito então B enumerável (pela própria definição de enumerável).

Seja B infinito. Como A é enumerável, então existe $f : \mathbb{N} \to A$ bijeção.

Tomamos $\mathbb{N}' = f^{-1}(B)$.

Definimos, agora, a função restrição $g = f_{|_{\mathbb{N}}} : \mathbb{N}' \to B$.

Por construção g é bijetora.

Temos que, pelo teorema 2.20, $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ é enumerável.

Daí, existe uma função $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}'$ bijetora.

A ilustração fica:

$$\mathbb{N} \overset{h}{\to} \mathbb{N}' \overset{g}{\to} B$$

Considere, então, $F = g \circ h : \mathbb{N} \to B$. Claramente F é uma bijeção, pois a composta de funções bijetoras é uma função bijetora.

Portanto, B é enumerável. □

Corolário 2.22. *Seja* $f : X \to Y$ *injetiva. Se* Y *é enumerável então* X *também é.*

Demonstração: De Y enumerável, existe $\varphi : Y \to \mathbb{N}$ bijeção. Então $\varphi \circ f : X \to \mathbb{N}$ é uma função injetora; portanto, $\varphi \circ f : X \to (\varphi \circ f)(X) \subset \mathbb{N}$ é bijeção. Como $(\varphi \circ f)(X) \subset \mathbb{N}$ temos $(\varphi \circ f)(X)$ enumerável e, portanto, existe $g : (\varphi \circ f)(X) \to \mathbb{N}$ bijeção. Daí, $g \circ \varphi \circ f : X \to \mathbb{N}$ é bijeção e, portanto, X é enumerável.

□

Corolário 2.23. *Seja* $f : X \to Y$ *sobrejetiva. Se* X *é enumerável então* Y *também é.*

Demonstração: Para cada $y \in Y$ podemos escolher $x_y = g(y) \in X$ tal que $f(x_y) = y$. Isto define uma aplicação $g : Y \to X$ tal que $f(g(y)) = y$ para todo $y \in Y$. Segue-se daí que g é injetiva. Pelo corolário anterior, Y é enumerável.

□

Corolário 2.24. *O produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis é um conjunto enumerável.*

Demonstração: Com efeito se X e Y são enumeráveis então existem sobrejeções $f : \mathbb{N} \to X$ e $g : \mathbb{N} \to Y$; logo, $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to X \times Y$, dada por $\varphi(m, n) = (f(m), g(n))$ é sobrejetiva. Portanto, basta provar que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável. Para isso, consideremos a aplicação $\phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, dada por $\phi(m, n) = 2^m.3^n$. Pela unicidade da decomposição de um número natural em fatores primos, ϕ é injetiva. Segue-se do corolário 2.22 que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável.

□

Corolário 2.25. *A reunião de uma família enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável.*

Demonstração: Sejam $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ enumeráveis. Então, existem sobrejeções $f_1 : \mathbb{N} \to X_1, \ldots, f_n : \mathbb{N} \to X_n, \ldots$. Tomando $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$, definimos a sobrejeção $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to X$ pondo $f(m, n) = f_n(m)$. O caso de uma reunião finita $X_1 \cup \ldots \cup X_n$ reduz-se ao anterior, pois podemos escrever $X = X_1 \cup \ldots \cup X_n \cup X_n \cup \ldots$.

□

A demonstração do teorema 2.21 indica que o enumerável é o "menor"dos infinitos. De fato, repetindo a demonstração tem-se que:

Proposição 2.26. *Todo conjunto infinito contém um subconjunto infinito enumerável.*

Demonstração:

Seja A um conjunto infinito. Como $A \neq \emptyset$, então, existe $x_1 \in A$.

Novamente de A infinito, temos $A - \{x_1\} \neq \emptyset$; então, existe $x_2 \in A - \{x_1\}$.

Tomemos $A - \{x_1, x_2\} \neq \emptyset$; então, existe $x_3 \in A - \{x_1, x_2\}$.

Fazendo esse processo n vezes obtemos $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\} \in A$, com $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$.

Mas, A infinito implica $A - \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\} \neq \emptyset$; então, existe $x_{n+1} \in A - \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$.

Portanto, por construção e recorrência, o conjunto $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots\} \subset A$ é infinito e enumerável. □

2.4 Exemplos e aplicacões de conjuntos enumeráveis.

A ideia dessa seção é elucidar a compreensão de conjuntos enumeráveis. Para isso será apresentado exemplos que consideramos importantes para um professor de ensino fundamental e médio poder se aprofundar.

Iremos também tentar responder a algumas perguntas feitas no início desse capítulo.

Exemplo 2.27. *O conjunto* $P = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ *dos números pares é enumerável.*

Demonstração: Construindo a função $f : \mathbb{N} \to P$ dada por $f(n) = 2n$, precisamos mostrar que tal função é bijetora. De fato, se $f(n_0) = f(n_1)$ então $2n_0 = 2n_1$ implicando que $n_0 = n_1$ e, portanto, f é injetora. Agora, seja $y_0 \in P$, temos que $y_0 = 2n$ e $n = \frac{y_0}{2}$ para algum $n \in \mathbb{N}$, portanto, f é sobrejetora. □

Do exemplo anterior, podemos concluir, de forma grosseira, que o conjunto dos números pares e o conjunto dos números naturais são "infinitos iguais". Isso não é intuitivo, pois seria natural pensar que ao tirar todos os números ímpares o conjunto dos pares seria menor que o conjunto dos naturais. Vejamos mais um exemplo.

Exemplo 2.28. *O conjunto* $I = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$ *dos números ímpares positivos é enumerável.*

Demonstração: Seja a função $g : \mathbb{N} \to I$ dada por $g(n) = 2n - 1$. Vamos mostrar que g é bijetora. De fato, se $g(n_0) = g(n_1)$ então $2n_0 - 1 = 2n_1 - 1$, implicando que $n_0 = n_1$ e, portanto, g é injetora. Agora, seja $y_o \in I$, temos que $y_o = 2n - 1$ para algum n. Portanto, g é sobrejetora.

□

Podemos então concluir que o conjunto dos ímpares e o conjunto dos números naturais são "infinitos iguais". Na verdade, veremos mais adiante que todos os conjuntos enumeráveis são "infinitos iguais". O exemplo a seguir diz respeito aos números inteiros.

Exemplo 2.29. *O cojunto* $\mathbb{Z}$ *dos números inteiros é enumerável.*

Demonstração: De fato, podemos construir uma função que leva $\mathbb{N}$ em $\mathbb{Z}$ associando os números naturais aos inteiros na seguinte ordem:

$$0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ 4,\ -4,\ 5,\ -5, \ldots$$

Defina

$$h : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$$
$$h(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}; \text{ se n é par} \\ -\frac{n-1}{2}; \text{ se n é ímpar} \end{cases}$$

Podemos verificar que essa função é bijetora e, portanto, $\mathbb{Z}$ é enumerável.

□

Novamente temos uma conclusão não intuitiva, de que o conjunto dos inteiros e o conjunto dos naturais são "infinitos iguais".

Exemplo 2.30. *O conjunto* $\mathbb{Q}$ *dos números racionais é enumerável.*

Temos duas demonstrações que valem a pena apresentar aqui. A primeira, retirada de [4], é construindo tal função e a segunda é usando as propriedades e teoremas já feitos neste capítulo. Vamos a elas.

Demonstração 1: Mostremos primeiro que o conjunto dos racionais positivos é enumerável. Olhe o quadro a seguir:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
\frac{1}{1} & \rightarrow & \frac{1}{2} & & \frac{1}{3} & \rightarrow & \frac{1}{4} & & \frac{1}{5} & \rightarrow & \cdots \\
& \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & \\
\frac{2}{1} & & \frac{2}{2} & & \frac{2}{3} & & \frac{2}{4} & & \frac{2}{5} & & \cdots \\
& \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & \\
\frac{3}{1} & & \frac{3}{2} & & \frac{3}{3} & & \frac{3}{4} & & \frac{3}{5} & & \cdots \\
& \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & \\
\frac{4}{1} & & \frac{4}{2} & & \frac{4}{3} & & \frac{4}{4} & & \frac{4}{5} & & \cdots \\
& \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & \\
\frac{5}{1} & & \frac{5}{2} & & \frac{5}{3} & & \frac{5}{4} & & \frac{5}{5} & & \cdots \\
& \swarrow & & & & & & & & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}
$$

Observe que todos os números da forma $\frac{p}{q}$ com $p, q \in \mathbb{N}$ e $q \neq 0$ aparecerão no quadro acima. Se o percorrermos seguindo as setas teremos uma ordenação desse conjunto, o que vale dizer, a função f será $f(n) = n$-ésimo elemento que encontraremos seguindo as setas. Assim, mostramos que o conjunto $\mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q} \ : \ x > 0\}$ é enumerável. Basta fazer o mesmo procedimento e teremos que $\mathbb{Q}^- = \{x \in \mathbb{Q} \ : \ x < 0\}$ é enumerável.

Como $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^- + \{0\}$ e união de conjuntos enumeráveis é um conjunto enumerável temos que $\mathbb{Q}$ é enumerável.

$\square$

Demonstração 2: Seja $x \in \mathbb{Q}$. Então, $x = \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$.

Seja $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \rightarrow \mathbb{Q}$ que, a cada par (p, q) associa o número $x = \frac{p}{q}$.

É claro que f é uma função.

E pelo corolário 2.24 temos que o domínio de f é um conjunto enumerável, pois $\mathbb{Z}$ é enumerável e $\mathbb{Z}^* \subset \mathbb{Z}$ é enumerável.

Por construção, f é sobrejetiva.

Como a imagem de um conjunto enumerável ou é um conjunto finito, ou é um conjunto infinito enumerável, basta mostramos que a imagem de f não é finita. (Note que f não é injetora, já que, por exemplo, $f(1, 2) = f(2, 4) = f(3, 6)$.

Mas a imagem de f contém todos os números inteiros, pois, se $n \in \mathbb{Z}$ então $n = f(n, 1)$.

Portanto, segue do corolário 2.23 que $\mathbb{Q}$ é enumerável.

$\square$

Observação: Terminamos esse capítulo mostrando que os racionais é um infinito igual aos naturais e aos inteiros. Vamos discutir, nos próximos capítulos, se existem outros tipos de infinitos.

CAPÍTULO

3

O conjunto dos números reais e sua não enumerabilidade.

Continuando o que foi feito no capítulo 1 e 2, mostraremos que o conjunto dos números reais é completo e não enumerável, implicando em um conjunto infinito diferente dos citados anteriormente.

Este capítulo trata do corpo ordenado completo que contém $\mathbb{Q}$.

Adotaremos aqui o axioma fundamental da Análise Matemática (ver [6]).

Axioma: Existe um corpo ordenado completo, $\mathbb{R}$, chamado corpo dos números reais.

Em particular, $X = \{x \in \mathbb{Q} \, ; \, 0 < x \text{ e } x^2 < 2\}$ é limitado superiormente e, portanto, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha = \sup X$. Como visto no capítulo 1, $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

Observação 3.1. *Como mencionado em* [1] - *seção 3.3, quaisquer dois corpos ordenados completos são isomorfos. Portanto, podemos considerar que tal* $\mathbb{R}$ *do axioma é único.*

Recordando: Como visto no capítulo anterior. Um subconjunto $Y \subset \mathbb{R}$ é enumerável se existe uma função $f : \mathbb{N} \to Y$ bijetora.

Como veremos nesse capítulo, $\mathbb{R}$ não é enumerável. Como $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ e $\mathbb{Q}$ é enumerável temos que $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ não é enumerável, conforme corolário 2.25.

O conjunto $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ é chamado de conjunto dos números irracionais.

De maneira informal podemos dar a seguinte interpretação para o fato de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ não ser enumerável: existem mais números irracionais do que números racionais.

Então, quem são os irracionais? É fácil encontrar irracionais?

Antes de responder, vejamos alguns exemplos.

Denotemos $\sqrt{2}$ o número real tal que $(\sqrt{2})^2 = 2$. Pela proposição 2.1, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

A seguir, apresentaremos um número infinito enumerável de exemplos de números irracionais. Antes provaremos uma proposição que será muito útil.

Proposição 3.2. *Sejam* $p, m \in \mathbb{N}$ *tais que* $\mathrm{mdc}(p, m) = 1$. *Se* $n \in \mathbb{N}$ *e* $p|mn$ *então* $p|n$.

Demonstração: Se $p|mn$, então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $mn = pk$.

Agora, se $\mathrm{mdc}(p, m) = 1$ então, segue do algoritmo de Euclides (ver [3]), que existem $a, b \in \mathbb{N}$ tais que

$$bp - am = 1.$$

Multiplicando por n ambos os lados da igualdade acima, obtemos

$$n = nbp - nam.$$

Substituindo mn por pk nesta última igualdade, obtemos

$$n = nbp - apk = p(nb - ak).$$

Portanto, $p|n$. □

Corolário 3.3. *Se* p *é primo e* $p|mn$ *então* $p|m$ *ou* $p|n$.

Demonstração: Se $p|m$ o resultado é trivial. Suponha, então, que p não divide m. Daí, como p é primo temos que $\mathrm{mdc}(p, m) = 1$. Basta, então, aplicar a proposição acima. □

Observação 3.4. *Para mais resultados de divisibilidade ver, por exemplo, [5].*

Proposição 3.5. *Se* $p \in \mathbb{N}$ *é um número primo, então* $\sqrt{p}$ *é irracional.*

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que $\sqrt{p} \in \mathbb{Q}$. Então, existem $m, n \in \mathbb{N}$, com $\mathrm{mdc}(m, n) = 1$, tais que $\sqrt{p} = \dfrac{m}{n}$. Segue que $p = \dfrac{m^2}{n^2}$ e, então, $m^2 = pn^2$. Isto implica que m^2 é um múltiplo de p, ou seja, $p|m^2$. Portanto, pela proposição 3.2, $p|m$, pois p é primo.

Logo, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $m = kp$ e, por conseguinte, $m^2 = k^2p^2$.

Sendo $m^2 = pn^2$ e substituindo m^2 por k^2p^2, temos $k^2p^2 = pn^2$. Logo, pela Lei do corte, $k^2p = n^2$; consequentemente, $p|n^2$. Portanto, novamente pela proposição 3.2, $p|n$.

Como $\mathrm{mdc}(m, n) = 1$, $p|m$ e $p|n$ temos que $p = 1$. Absurdo, pois p é primo.

Portanto, $\sqrt{p} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. □

Os exemplos de números irracionais dados acima são obtidos usando "apenas" argumentos de Álgebra.

3.1 $\mathbb{R}$ é não enumerável

Aqui apresentaremos a prova que $\mathbb{R}$ é não enumerável.

Começamos com o teorema dos intervalos encaixados.

Teorema 3.6. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $I_n = [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ intervalo fechado. Suponha que $I_n \supset I_{n+1}$, para todo n. Então, $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$.*

Demonstração. Por hipótese temos

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$$

o que implica

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1.$$

Logo, os conjuntos $A = \{a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$ e $B = \{b_1, \ldots, b_n, \ldots\}$ são limitados. Além disso, cada a_n é cota inferior de B e cada b_n é cota superior de A.

Seja $c = \sup A$. Temos $a_n \leq c$ e $c \leq b_n$, para todo n (definição de supremo). Daí,

$$c \in [a_n, b_n], \forall n;$$

isto é,

$$c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n.$$

$\square$

Teorema 3.7. *Não existe função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sobrejetora. Em particular, $\mathbb{R}$ é não enumerável.*

Demonstração. Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ uma função. Observe que $f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots$ são todos números reais.

Escolha $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$ de forma que $f(1) < a_1 < b_1$. Defina $I_1 = [a_1, b_1]$; temos que $f(1) \notin I_1$.

Se $f(2) \notin I_1$ definimos $I_2 = I_1$. Caso contrário, temos $a_1 \leq f(2) \leq b_1$, com $a_1 < f(2)$ ou então $f(2) < b_1$ (pois $a_1 < b_1$).

Vamos considerar dois casos:

Primeiro caso: $a_1 < f(2)$.

Neste caso, considere $a_2 = a_1$ e $b_2 = \dfrac{a_1 + f(2)}{2}$. Denote $I_2 = [a_2, b_2]$; temos que $f(2) \notin I_2$.

Segundo caso: $a_1 = f(2) < b_1$.

Neste caso, considere $a_2 = \dfrac{f(2) + b_1}{2}$ e $b_2 = b_1$. Denote $I_2 = [a_2, b_2]$; temos que $f(2) \notin I_2$.

Uma vez obtidos I_1 e I_2, note que $f(1) \notin I_1$, $f(2) \notin I_2$ e $I_1 \supset I_2$.

Suponhamos já obtidos $I_1, \ldots, I_n$, com $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n$ e $f(1) \notin I_1$, $f(2) \notin I_2$, ..., $f(n) \notin I_n$.

Se $f(n+1) \notin I_n$ definimos $I_{n+1} = I_n$. Caso contrário, temos $a_n \leq f(n+1) \leq b_n$, com $a_n < f(n+1)$ ou então $f(n+1) < b_n$ (pois $a_n < b_n$).

Novamente, vamos considerar dois casos:

Primeiro caso: $a_n < f(n+1)$.

Neste caso, considere $a_{n+1} = a_n$ e $b_{n+1} = \dfrac{a_n + f(n+1)}{2}$. Denote $I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}]$; temos que $f(n+1) \notin I_{n+1}$.

Segundo caso: $a_n = f(n+1) < b_n$.

Neste caso, considere $a_{n+1} = \dfrac{f(n+1) + b_n}{2}$ e $b_{n+1} = b_n$. Denote $I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}]$; temos que $f(n+1) \notin I_{n+1}$.

Repetindo o argumento para cada $n \in \mathbb{N}$ obtemos intervalos fechados $I_1, \ldots, I_n, \ldots$, com $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$; além disso, para cada n, $f(n) \notin I_n$.

Pelo teorema dos intervalos encaixados, existe $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$; consequentemente, $c \neq f(n)$ para todo n. Portanto, f não é sobrejetora. $\square$

Como a união de dois conjuntos enumeráveis é também enumerável, obtemos a seguinte consequência:

Corolário 3.8. *O conjunto* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *é não enumerável.*

Corolário 3.9. *O intervalo* $I = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$ *é não enumerável.*

Demonstração. Sendo $\mathbb{R}$ não enumarável, basta mostrar que existe bijeção entre I e $\mathbb{R}$. Afirmamos que a função $\varphi : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ dada por

$$\varphi(x) = \frac{x}{|x| + 1}$$

é uma bijeção. De fato, a função φ tem inversa $\psi : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\psi(y) = \frac{y}{1 - |y|}.$$

$\square$

Observação 3.10. *O resultado acima também nos permite concluir que* $J = [-1, 1]$ *é não enumerável.*

Observação 3.11. *Pode-se mostrar que para quaisquer* $a, b \in \mathbb{R}$*, com* $a < b$*, o intervalo* $I = (a, b)$ *é não enumerável.*

Como aplicação do discutido acima, temos:

Exemplo 3.12. *Para quaisquer* $a, b \in \mathbb{R}$*, com* $a < b$*, o intervalo* $I = (a, b)$ *contém números racionais e números irracionais.*

Solução: Sabemos que $I \not\subset \mathbb{Q}$, pois caso contrário I seria enumerável; logo, existe $c \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap I$.

Falta mostra que $\mathbb{Q} \cap I \neq \emptyset$.

Sejam $a', b' \in \mathbb{R}$ tais que $a < a' < b' < b$. Daí, $[a', b'] \subset I$.

Se a' ou b' é um número racional então $\mathbb{Q} \cap I \neq \emptyset$.

Assuma então que $a', b' \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Tome $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < b' - a'$ (o qual existe, pois $\mathbb{R}$ é arquimediano).

Podemos escrever $\mathbb{R}$ da seguinte forma:

$$\mathbb{R} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \left[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}\right].$$

Logo, existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $a' \in \left[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}\right]$. Como a' é um número irracional (por hipótese) temos

$$\frac{m}{n} < a' < \frac{m+1}{n}. \tag{3.13}$$

Afirmamos que $\frac{m+1}{n} < b'$. De fato, como por (3.13)

$$\frac{m+1}{n} - a' < \frac{m+1}{n} - \frac{m}{n} = \frac{1}{n}$$

temos

$$\frac{1}{n} < b' - a' = b' - \frac{m+1}{n} + \frac{m+1}{n} - a' < b' - \frac{m+1}{n} + \frac{1}{n}$$

o que implica

$$0 < b' - \frac{m+1}{n}; \quad \text{isto é,} \quad b > \frac{m+1}{n}.$$

Portanto, $\frac{m+1}{n} \in (a', b') \subset I$; isto é, $\mathbb{Q} \cap I \neq \emptyset$.

$\square$

Capítulo

4

Medida de Lebesgue.

Nos capítulos anteriores vimos que $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ com $\mathbb{Q}$ enumerável e $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ não enumerável. Daí, concluímos que $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ é um conjunto infinito diferente do infinito de $\mathbb{Q}$; de fato um infinito maior. Nos parece então natural medir $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ para entender quão maior é $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ de $\mathbb{Q}$.

Uma pergunta natural a ser feita é: será possível medir um conjunto? Nesse capítulo iremos definir medida de um conjunto de $\mathbb{R}$ e veremos alguns resultados interessantes. Vamos a definição.

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Definimos o comprimento de I como sendo o módulo da diferença entre seus extremos. Por exemplo,

Exemplo 4.1. $I = [2,3] \Rightarrow$ *comprimento de* $I = 3 - 2 = 1$.

Seja $\mathcal{A} \doteq \{I \in \mathbb{R}; I \text{ é intervalo}\}$ e $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ o conjunto de todos os subconjuntos de $\mathbb{R}$, chamado de "partes de $\mathbb{R}$". Podemos então definir

$$\begin{array}{rccl} \ell: & \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}) & \to & [0,+\infty] \\ & I & \to & \ell(I) \doteq \text{ comprimento de } I \end{array}$$

Vamos estender a noção de comprimento para conjuntos mais gerais. Gostaríamos de encontrar uma função conjunto

$$m : \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$$

que satisfaça as seguintes propriedades:

1. $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$.
2. $m(I) = \ell(I)$ sempre que I intervalo.
3. $\{E_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ sequência disjunta $\Rightarrow m(\bigcup_{j=1}^{n} E_j) = \sum_{j=1}^{n} m(Ej)$.

Caso não seja possível, gostaríamos então de obter uma tal função m para o "maior"$\mathcal{A}$ possível.

Vamos a uma tentativa.

Para cada $A \subset \mathbb{R}$ seja $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma cobertura de intervalos abertos de A, isto é,

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \quad \text{e } I_n \text{ é um intervalo aberto para cada } n.$$

Definimos

$$m^*(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} I_n \ : \ A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \text{e } I_n \text{ intervalo aberto}\right\}.$$

Segue que $m^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ e:

- $m^*(\emptyset) = 0$.
- $A \subset B \Rightarrow m^*(A) \leq m^*(B)$.
- $m^*(\{a\}) = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$.

Proposição 4.2. *Seja* $I \subset \mathbb{R}$, *intervalo. Então,* $m^*(I) = \ell(I)$.

Demonstração:

<u>**1º caso:**</u> $I = [a, b],\ a, b \in \mathbb{R}$.

Seja $I_n = \left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right)$. Logo. $I \subset I_n$ e, por definição de ínfimo,

$$m^*(I) \leq \ell(I_n) = b + \frac{1}{n} - a + \frac{1}{n} = b - a + \frac{2}{n}.$$

Fazendo $n \to \infty$, temos que

$$m^*(I) \leq b - a = \ell(I). \tag{4.3}$$

Falta mostrar que $\ell(I) \geq m^*(I)$.

Seja $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ coleção de intervalos abertos tal que $I \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$.

Segue de resultados de topologia na reta, estudados em [7], que existem $I_{n_1}, \ldots, I_{n_j}$ tal que $I \subset \bigcup_{\xi=1}^{j} I_{n_\xi}$.

Denotemos $I_{n_\xi}{=}I^*_\xi$.

Como $I \subset \bigcup_{\xi=1}^{j} I^*_\xi$ então existe $I^*_{\xi_1} = (a_1, b_1)$ tal que $a_1 < a < b_1$.

Se $b_1 < b$ então existe $I^*_{\xi_2} = (a_2, b_2)$ tal que $a_2 < b_1 < b_2$.

Se $b_2 < b$ então existe $I^*_{\xi_3} = (a_3, b_3)$ tal que $a_3 < b_2 < b_3$.

Repetindo o processo obtemos que

$$I^*_{\xi_j} = (a_j, b_j), \quad j = 1, \ldots, N$$

tal que

- $a_j < b_{j-1}$ para $j = 1, \ldots, N$.
- $a_1 < a < b_1$.
- $a_N < b < b_N$.
- $I \subset \bigcup_{j=1}^{N} I^*_{\xi_j}$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) \geq \sum_{j=1}^{N} \ell(I^*_{\xi_j})$.

Agora,

$$\sum_{j=1}^{N} \ell(I^*_{b_j}) = \sum_{j=1}^{N} (b_j - a_j) =$$

$$= b_N - a_N + b_{N-1} - a_{N-1} + \ldots + b_1 - a_1 =$$

$$= b_N + (b_{N-1} - a_N) + \ldots + (b_1 - a_2) - a_1 > b_N - a_1 > b - a.$$

Logo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) > b - a,$$

portanto, usando a noção de ínfimo temos

$$m^*(I) \geq b - a. \tag{4.4}$$

De (4.3) e (4.4) temos que

$$m^*(I) = \ell(I) \quad \text{quando } I = [a, b].$$

<u>**2º caso:**</u> I intervalo qualquer finito.

Dado $\epsilon > 0$ existe $J \subset I$ intervalo fechado tal que

$$\ell(J) > \ell(I) - \epsilon.$$

Daí,

$$\ell(I) - \epsilon < \ell(J) = m^*(J) \leq m^*(I) \leq m^*(I^*) = \ell(I^*) = \ell(I);$$

isto é,

$$\ell(I) - \epsilon < m^*(I) \leq \ell(I).$$

Fazendo $\epsilon \to 0$ temos que

$$m^*(I) = \ell(I).$$

<u>**3º caso:**</u> I intervalo infinito.

Dado $N > 0$ existe $J_N \subset I$ intervalo fechado tal que $\ell(J_N) = N$.

Daí,

$$m^*(I) \geq m^*(J_N) = \ell(J_N) = N, \qquad \forall N > 0;$$

logo,

$$m^*(I) = +\infty = \ell(I).$$

□

Proposição 4.5. *Seja* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de subconjuntos de* $\mathbb{R}$. *Então,*

$$m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n).$$

Demonstração:

<u>1º caso:</u> $m^*(A_n) = +\infty$ para algum n. Nesse caso a demonstração é trivial.

<u>2º caso:</u> $m^*(A_n) < +\infty$ para todo n.

Daí, como $m^*(A_n) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_j^n)\right\}$, dado $\epsilon > 0$ existe $\{I_j^n\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_j^n) < m^*(A_n) + \frac{\epsilon}{2^n}.$$

Como $\{I_j^n\}_{j,n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de intervalos abertos e $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{j,n} I_j^n$, temos que

$$m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_j^n)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty}(m^*(A_n) + \frac{\epsilon}{2^n}) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n) + \epsilon\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n) + \epsilon 1 = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n) + \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ é qualquer e usando a noção de ínfimo, obtemos:

$$m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n).$$

□

Corolário 4.6. *Seja* $A \subset \mathbb{R}$. *Se A é enumerável então* $m^*(A) = 0$.

Demonstração:

A enumerável implica que $A = \{r_1, \ldots, r_n, \ldots\}$, com $r_n \in \mathbb{R}$ para todo n.

Daí,

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{r_n\}$$

e

$$m^*(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(\{r_n\}) = 0.$$

□

Corolário 4.7. *O conjunto [0,1] é não enumerável.*

Demonstração: Temos que $m^*[0, 1] = 1 \neq 0$.

□

Proposição 4.8. *Dados* $A \subset \mathbb{R}$ *e* $\epsilon > 0$ *existe* U *união de intervalos abertos de* $\mathbb{R}$ *e existe* G *intersecção enumerável de reunião enumerável de intervalos abertos de* $\mathbb{R}$ *tais que*

1. $A \subset U$ *e* $m^*(U) \leq m^*(A) + \epsilon$
2. $A \subset G$ *e* $m^*(G) = m^*(A)$.

Demonstração:

1. Pela definição de m^* e noção de ínfimo.
2. Para cada $j \in \mathbb{Z}_+$, por 1, existe U_j união enumerável de intervalos abertos de $\mathbb{R}$ tal que $m^*(U_j) \leq m^*(A) + \dfrac{1}{j}$. Tome $U = \bigcap_{j=1}^{\infty} U_j$. Temos que,

$$m^*(A) \leq m^*(U) \leq m^*(U_j) \leq m^*(A) + \frac{1}{j},$$

fazendo $j \to \infty$ implica

$$m^*(U) = m^*(A).$$

□

4.1 Conjuntos Mensuráveis e Medida de Lebesgue.

Definição 4.9. *Um conjunto* $E \subset \mathbb{R}$ *é mensurável se para cada* $A \subset \mathbb{R}$ *vale:*

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c).$$

Observação:

1. Note que sempre vale

$$m^*(A) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c);$$

   logo E mensurável $\Leftrightarrow$

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c).$$

2. E mensurável $\Rightarrow E^c$ mensurável.
3. $\emptyset$ e $\mathbb{R}$ são mensuráveis.

Lema 4.10. *Se* $m^*(E) = 0$ *então E é mensurável.*

Demonstração:

Seja $A \subset \mathbb{R}$. Temos: $A \cap E \subset E$. Daí,

$$m^*(A \cap E) \leq m^*(E) = 0 \Rightarrow m^*(A \cap E) = 0.$$

Como $A \cap E^c \subset A$ temos,

$$m^*(A \cap E^c) \leq m^*(A).$$

Portanto $m^*(A) \geq m^*(A \cap E^c) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$.

□

Lema 4.11. E_1 *e* E_2 *são mensuráveis então* $E_1 \cup E_2$ *mensurável.*

Demonstração:

Seja $A \subset \mathbb{R}$. Queremos verificar que

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) + m^*(A \cap (E_1 \cup E_2)^c).$$

Recorde que $(E_1 \cup E_2)^c = E_1^c \cap E_2^c$.

De E_2 mensurável temos

$$m^*(A \cap E_1^c) = m^*(A \cap E_1^c \cap E_2) + m^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c). \tag{4.12}$$

Note que

$$A \cap (E_1 \cup E_2) = A \cap (E_1 \cup (E_2 \cap E_1^c)) = (A \cap E_1) \cup (A \cap E_2 \cap E_1^c);$$

daí,

$$m^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) \leq m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_2 \cap E_1^c) \tag{4.13}$$

De 4.12 e 4.13 temos

$$m^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) + m^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c) \leq$$

$$m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_1^c) + m^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c)$$

$$= m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_1^c) = m^*(A).$$

Portanto, $E_1 \cup E_2$ é mensurável. □

Definição 4.14. *Seja X um conjunto. Um subconjunto $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ é uma álgebra de conjunto se*

1. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$.
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$.

Seja $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ o conjunto dos subconjuntos mensuráveis de $\mathbb{R}$.

Pelo feito acima, obtemos:

Teorema 4.15. *$\mathcal{M}$ é uma álgebra.*

Observação: Note que

- $A, B \in \mathcal{M} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{M}$, pois $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$.
- $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{M} \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{M}$ e $\bigcap_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{M}$.

Lema 4.16. *Seja* $A \subset \mathbb{R}$ *e sejam* $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{M}$ *com* $E_i \cap E_j = \emptyset$ *se* $i \neq j$. *Então,*

$$m^*(A \cap (\cup_{j=1}^{n} E_j)) = \sum_{j=1}^{n} m^*(A \cap E_j).$$

Demonstração:

Vamos usar indução.

- $n = 1$ então é válido.
- Assuma que vale para $E_1, \dots, E_{n-1}$.
  De $E_n \in \mathcal{M}$ temos

$$m^*(A \cap (\cup_{j=1}^{n} E_j) = m^*(A \cap (\cup_{j=1}^{n} E_j) \cap E_n) + m^*(A \cap (\cup_{j=1}^{n} E_j) \cap E_n^c).$$

Como

$$A \cap (\cup_{j=1}^{n} E_j) \cap E_n = (\cup_{j=1}^{n} (A \cap E_j)) \cap E_n = A \cap E_n, \quad \text{pois } E_j \cap E_i = \emptyset \text{ se } i \neq j,$$

e

$$A \cap (\cup_{j=1}^{n} E_j) \cap E_n^c = (\cup_{j=1}^{n} (A \cap E_j)) \cap E_n^c = \cup_{j=1}^{n} (A \cap E_j \cap E_n^c) = \cup_{j=1}^{n-1} (A \cap E_j),$$

pois $E_j \cap E_i = \emptyset$ se $i \neq j$, logo

$$m^*(A \cap (\cup_{j=1}^{n} E_j) \cap E_n) + m^*(A \cap (\cup_{j=1}^{n} E_j) \cap E_n^c)$$

$$= m^*(A \cap E_n) + m^*(A \cap (\cup_{j=1}^{n-1} E_j))$$

$$= m^*(A \cap E_n) + \sum_{j=1}^{n-1} m^*(A \cap E_j) = \sum_{j=1}^{n} m^*(A \cap E_n).$$

□

Definição 4.17. *Seja X um conjunto e* $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$. *Dizemos que* $\mathcal{A}$ *é uma* σ*-álgebra se:*

1. $\mathcal{A}$ é álgebra.

2. $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$.

Observação: Seja $\mathcal{A}$ σ-álgebra. Então,

$$\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}.$$

Lema 4.18. *Seja* $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$*. Existe* $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset M$ *como* $B_i \cap B_j = \emptyset$ *tal que* $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$.

Teorema 4.19. $\mathcal{M}$ *é* σ*-álgebra.*

Demonstração:

Já sabemos que $\mathcal{M}$ é álgebra. Falta mostrar que se $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ então $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{M}$.

Seja $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ e seja $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$.

Pelo exercício anterior, $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} \tilde{E}_j$, sendo $\{\tilde{E}\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ e $\tilde{E}_i \neq \tilde{E}_j$ se $i \neq j$.

Defina $F_n = \bigcup_{j=1}^{n} \tilde{E}_j$. Note que $F_n \in \mathcal{M}$.

Daí, $F_n \subset E \Rightarrow E^c \subset F_n^c$.

Para cada $A \subset \mathbb{R}$, temos

$$m^*(A) = m^*(A \cap F_n) + m^*(A \cap F_n^c) \geq$$

$$\geq m^*(A \cap F_n) + m^*(A \cap E^c) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} m^*(A \cap \tilde{E}_j) + m^*(A \cap E^c).$$

(como $A \cap F_n = A \cap (\cup_{j=1}^{n} \tilde{E}_j)$ e pelo lema 4.16)

Fazendo $n \to \infty$

$$m^*(A) \geq \sum_{j=1}^{n} m^*(A \cap \tilde{E}_j) + m^*(A \cap E^c) \geq$$

$$\geq m^*(A \cap (\cup_{j=1}^{\infty} \tilde{E}_j)) + m^*(A \cap E^c) =$$

(como $\cup_{j=1}^{\infty} E_j^* = E$)

$$= m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$$

Logo,

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{M}.$$

Portanto, $\mathcal{M}$ é σ-álgebra.

□

Lema 4.20. *Para todo* $a \in \mathbb{R}, (a, +\infty) \in \mathcal{M}$.

Demonstração:

Seja $A \subset \mathbb{R}$.

Defina $A_1 = A \cap (a, +\infty)$ e $A_2 = A \cap (-\infty, a]$.

Lembrando que $(-\infty, a] = (a, +\infty)^c$.

Devemos mostrar que

$$m^*(A_1) + m^*(A_2) \leq m^*(A).$$

1º caso: $m^*(A) = \infty$. Nesse caso é trivial.

2º caso: $m^*(A) < \infty$.

Neste caso dado $\epsilon > 0$ existe $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, onde I_n são intervalos abertos de $\mathbb{R}$, tal que

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \quad \textbf{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) \leq m^*(A) + \epsilon.$$

Defina

$$I_n' = I_n \cap (a, +\infty) \quad \textbf{e} \quad I"_n = I_n \cap (-\infty, a].$$

Note que I_n' e $I"_n$ são intervalos ou $\emptyset$ e $\ell(I_n) = \ell(I_n') + \ell(I"_n) = m^*(I_n) + m^*(I"_n)$.

Além disso, $A_1 \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n'$ e $A_2 \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I"_n$.

Daí, temos

- $m^*(A_1) \leq m^*(\cup_{n=1}^{\infty} I`_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(I_n')$.
- $m^*(A_2) \leq m^*(\cup_{n=1}^{\infty} I``_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(I"_n)$.

implicando que

$$m^*(A_1) + m^*(A_2) \leq \sum_{n=1}^{\infty} (m^*(I_n') + m^*(I"_n)) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} m^*(I_n) \leq m^*(A) + \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ é qualquer, fazendo $\epsilon \to 0$, temos

$$m^*(A_1) + m^*(A_2) \leq m^*(A).$$

□

Teorema 4.21. *Seja* $I \subset \mathbb{R}$ *intervalo. Então,* $I \in \mathcal{M}$.

Demonstração:

Para todo $a \in \mathbb{R}$, $(a, +\infty) \in \mathcal{M}$.

Daí,

- $(-\infty, a] = (a, +\infty)^c \in \mathcal{M}$.
- $(-\infty, a) = \cup_{n=1}^{\infty}(-\infty, a - \frac{1}{n}] \in \mathcal{M}$.
- $(a, b) = (-\infty, b) \cap (a, +\infty) \in \mathcal{M}$.
- $(a, b] = (-\infty, b] \cap (a, +\infty)$.
- $[a, b) = (-\infty, b) \cap [a, +\infty)$.
- $[a, b] = (-\infty, b] \cap [a, +\infty)$.

$\square$

A restrição

$$\begin{array}{rcll} m = m^*_{|\mathcal{M}} : & \mathcal{M} & \rightarrow & [0, +\infty] \\ & E & \rightarrow & m(E) = \ m^*(E). \end{array}$$

é chamada **medida de Lebesgue**.

Proposição 4.22. *Seja* $\{E_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$. *Então,* $m(\cup_{j=1}^{\infty} E_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m(E_j)$. *Além disso, se* $E_j \cap E_i = \emptyset$ *para* $i \neq j$ *então*

$$m(\cup_{j=1}^{\infty}) = \sum_{j=1}^{\infty} m(E_j).$$

Demonstração:

Pela proposição 4.5 temos

$$m(\cup_{j=1}^{\infty} E_j) = m^*(\cup_{j=1}^{\infty} E_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m^*(E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} m(E_j).$$

Seja $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{M}$ tal que $E_i \cap E_j = \emptyset$ se $i \neq j$.

Então, pelo lema 4.16,

$$m(\cup_{j=1}^{n} E_j) = m^*(\cup_{j=1}^{n} E_j) = \sum_{j=1}^{n} m^*(E_j) = \sum_{j=1}^{n} m(E_j).$$

Seja $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ tal que $E_j \cap E_i = \emptyset$ se $i \neq j$.

Temos:

$$\cup_{j=1}^{\infty} E_j \supset \cup_{j=1}^{n} E_j \Rightarrow m(\cup_{j=1}^{\infty} E_j) \geq m(\cup_{j=1}^{n} E_j) = \sum_{j=1}^{n} m(E_j).$$

implicando que

$$m(\cup_{j=1}^{\infty} E_j) \geq \sum_{j=1}^{\infty} m(E_j).$$

□

4.2 Conclusão

Seja $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$.

Sejam $A = I \cap \mathbb{Q}$ e $B = I \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$.

Temos,

$[0,1] = A \cup B$, com $A \cap B = \emptyset$.

Daí,

$1 = m([0,1]) = m(A \cup B) = m(A) + m(B)$.

Note que $A \subset \mathbb{Q}$ e, consequentemente, A é enumerável. Logo, $m(A) = 0$.

Portanto, $m(B) = 1$ e $m(A) = 0$; isto é, a medida do conjunto formado por todos os números irracionais em [0,1] é igual ao comprimento do intervalo [0,1]; por outro lado a medida do conjunto formado por todos os números racionais é igual a zero. Concluímos então que se pegarmos um número aleatório desse intervalo, ele quase certamente será irracional.

Evidentemente, a mesma conclusão vale para qualquer intervalo $I : m(I \cap \mathbb{Q}) = 0$ e $m(I \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q})) = m(I)$.

Além disso, temos que $m(\mathbb{Q}) = 0$ e $m(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = m(\mathbb{R}) = \infty$.

Em outras palavras, podemos intuir que quase todos os números reais são números irracionais (segundo a medida de Lebesgue).

Referências Bibliográficas

[1] ÁVILA, G., Análise para a Licenciatura, 3ª edição, São Paulo: Blucher, 2006.

[2] BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.

[3] EVARISTO, J. e PERDIGÃO, E., *Introdução a Álgebra Abstrata*, Alagoas: Edufal, 2002.

[4] FIGUEIREDO, D.G., *Números Irracionais e transcendentes*, Sociedade Brasileira de Matemática, Brasília, 1985.

[5] HEFEZ, A., *Elementos de aritmética*, 2ª Edição, Rio de Janeiro: SBM, 2011.

[6] LIMA, E.L., *Curso de Análise*, vol. 1, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro - RJ, 1976.

[7] ROYDEN, HL. Real Analysis. 3rd ed. New York: Macmillan Company, 1988.

[8] RUDIN, W., *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, 1976.

[9] SPOLAOR, S. L. G., *Números Irracionais.* Orientador: Paulo Leando Dattori da Silva. 2013. 41 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade de São Paulo, São Carlos, 2013.