UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

# Os pilares da educação da UNESCO para o professor de matemática

**Thiago Santana Rodrigues**

Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

**Thiago Santana Rodrigues**

# Os pilares da educação da UNESCO para o professor de matemática

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. *VERSÃČO REVISADA*

Área de Concentração: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientadora: Profa. Dra. Rosana Retsos Signorelli Vargas

**USP – São Carlos**
**Dezembro de 2022**

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

S232p

Santana Rodrigues, Thiago
Os pilares da educação da UNESCO para o professor de matemática / Thiago Santana Rodrigues; orientador Rosana Retsos Signorelli Vargas. -- São Carlos, 2022.
116 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2022.

1. Trabalho colaborativo entre professores.. 2. Professor pesquisador.. 3. Pilares da educação para a UNESCO.. 4. Mentalidade de crescimento.. I. Retsos Signorelli Vargas, Rosana, orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

**Thiago Santana Rodrigues**

# UNESCO's pillars of education for the mathematics teacher

Masters dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Mathematics Professional Master's Program. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Professional Master Degree Program in Mathematics in National Network

Advisor: Profa. Dra. Rosana Retsos Signorelli Vargas

**USP – São Carlos**
**December 2022**

*Este trabalho é dedicado aos professores, em especial aos de matemática, coordenadores e demais gestores educacionais.*

# AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Ao meu irmão Bruno Santana Rodrigues que sempre teve uma grande sede de conhecimento em diversas áreas de conhecimento, que eu sempre sonhava em ter e hoje acho que estou dando bons passos nessa direção. A minha esposa, Pauline, que pode compreender os diversos momentos que precisei abrir mão do nosso tempo juntos para estudar e por sempre acreditar em mim, até quando eu não acreditava. Não posso deixar de agradecer a equipe maravilhosa da biblioteca que atua/atuou na biblioteca da escola que trabalho Valéria, Marcela, Sônia, Alessandra e mais recentemente a Talita que apoiaram várias buscas bibliográficas antes mesmo de pensar na dissertação. Pelos comentários pertinentes nas atividades que pude receber dos meus amigos-educadores Marcus Vinicius, Alax Pereira e Andréia Cascardo, além dos amigos que o programa do PROFMAT me trouxe e me ajudaram nessa jornada tão desafiadora em conjunto com a minha orientadora que possibilitou muitas conversas para refletir e aprimorar o trabalho.

*“O diálogo cria base para colaboração".” (Paulo Freire)*

# RESUMO

RODRIGUES, T. S. **Os pilares da educação da UNESCO para o professor de matemática**. 2022. 115 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2022.

Este trabalho visa apresentar a perspectiva esperada de um professor de matemática do século XXI que deseja se desenvolver de maneira competente de forma contínua sob o olhar da UNESCO, objetivando responder às seguintes perguntas: Como os saberes do professor de matemática se relacionam com os pilares educacionais da UNESCO? Como esses pilares podem ser desenvolvidos nos discentes na aula de matemática? Adotou-se uma pesquisa bibliográfica relacionando o professor pesquisador, mentalidade de crescimento e o trabalho colaborativo entre professores com os pilares da educação da UNESCO. Ademais, foram propostas atividades de matemática que inspiram a colaboração dos alunos, e a revisão teórica de conceitos relacionados com essas atividades.

**Palavras-chave:** Trabalho colaborativo entre professores, Professor pesquisador, pilares da educação para a UNESCO, mentalidade de crescimento.

# ABSTRACT

RODRIGUES, T. S. **UNESCO's pillars of education for the mathematics teacher**. 2022. 115 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2022.

This work aims to present the expected perspective of a mathematics teacher of the 21st century who wishes to continuously develop himself competently under the eyes of UNESCO, aiming to answer the following questions: How does the knowledge of the mathematics teacher relate to the educational pillars from UNESCO? How can these pillars be developed in students in math class? A bibliographical research was adopted relating the researcher teacher, growth mindset and the collaborative work between teachers with the pillars of UNESCO education. Furthermore, mathematical activities that inspire student collaboration were proposed, as well as a theoretical review of concepts related to these activities.

**Keywords:** Collaborative work between teachers, Researcher Professor,pillars of education for UNESCO, growth mindset.

# LISTA DE ILUSTRAÇÕES

# SUMÁRIO

# CAPÍTULO 1

# INTRODUÇÃO

A educação básica do século XXI tem sido tratada como muito próxima da educação do século XVIII considerando o professor como o perito em aula, período que houve o inicio da democratização do ensino na Europa (AMADO, 2007).

Para SANTOS, SILVEIRA e TASCHETTO (2021) o aparecimento da COVID-19 transformou as práticas educacionais quando as escolas foram fechadas, mas não significa que estas práticas foram boas e nem que permaneceram/permanecerão com a volta das aulas presenciais e por isso, não será abordado possíveis mudanças após esse período das escolas fechadas. Trata-se neste trabalho sobre alguns caminhos que foram iniciados no fim do século XX e outros que começaram mais recentemente.

Na história brasileira, a educação tem sido influenciada de muitas formas, por exemplo: os Planos Nacionais curriculares (PCNs), Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e diversos documentos da Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura (UNESCO), alguns destes documentos inclusive sendo referenciados na BNCC e nos PCNs. Segundo Tricate (2020) o Programa de Escolas Associadas a UNESCO (PEA) possuía 569 escolas em todo o país no ano de 2020, sendo a segunda maior rede de escolas associadas do Mundo. Para pertencer a esta rede "é fundamental que as escolas tenham presente em seus projetos os 4 pilares da Educação"(SCHLINDWEIN, 2019). Desta forma, este trabalho destacará os pilares da educação da UNESCO que foi elaborado pela Comissão Internacional sobre Educação para o Século XXI e publicado no livro “Educação, um tesouro a descobrir"escrito pelo presidente desta comissão, Jacques Lucien Jean Delors. Assim DELORS *et al.* (1998) apresenta os pilares da educação para a UNESCO :

> "...aprender a conhecer, isto é adquirir os instrumentos da compreensão; aprender a fazer, para poder agir sobre o meio envolvente; aprender a viver juntos, a fim de participar e cooperar com os outros em todas as atividades humanas; finalmente aprender a ser, via essencial que integra as três precedentes. É claro que estas quatro vias do saber constituem

> apenas uma, dado que exitem entre elas múltiplos pontos de contato, de relacionamento e de permuta."

As escolas que dizem desenvolver alunos com base nos valores da UNESCO desenvolvem seus profissionais nestes valores? É possível desenvolver pessoas sem tê-los? Por isso, partir-se-á da proposta do professor se desenvolver em conjunto com os seus alunos no exercício da docência. Paralelamente, é preciso favorecer a formação continuada com viés na colaboração entre docentes que muitas vezes precisam vivenciar alguns conceitos mais do que só conhecer a teoria[1], a fim de viabilizar uma mudança na sua didática. Para nos aprofundarmos nessas reflexões, na Seção 2.1 trazemos a ideia de docente competente baseada em Demo (1997) e a relacionamos com os pilares da UNESCO DELORS *et al.* (1998).

Além disso, para uma compreensão mais ampla sobre os pilares educacionais, discutimos na Seção 2.2, o tema trabalho colaborativo do professor, tanto com os seus pares, quanto para o desenvolvimento de seus alunos, com uma proposta de mudança no seu aprender a conviver, utilizando uma comunicação que agregue tais pilares à luz de Dweck (2019) (abordagem mais geral) e Boaler (2018) (no contexto do ensino de matemática) que são apresentados na Seção 2.3.

Na seção 2.4, damos destaque ao tema formação de professores, algumas dificuldades e a necessidade da "escola"favorecer o desenvolvimento contínuo do seu grupo de professores.

Nos capítulos 3 e 4 abordamos o ensino de Matemática com propostas inseridas no contexto dos pilares da UNESCO. No capítulo 3, apresentamos alguns conteúdos de análise combinatória, geometria plana e geometria analítica necessários para o entendimento e desenvolvimento das atividades sugeridas no capítulo 4.

E por fim, no capítulo 4, trazemos exemplos de atividades de Matemática concretas e factíveis que foram planejadas com o objetivo de trabalhar os conteúdos juntamente com os pilares da educação e dar uma ideia clara da abordagem mais ampla que propomos neste trabalho que possibilite a pesquisa, a criatividade, o trabalho colaborativo em todo processo de ensino-aprendizagem tanto do professor quanto do aluno.

[1] Que pode nem ser conhecida e que em algum momento não será conhecida (PERRENOUD, 2001)

# CAPÍTULO 2

# DESENVOLVIMENTO

A construção/aperfeiçoamento de professores que possuam familiaridade com os pilares da UNESCO não é um processo trivial (DELORS *et al.*, 1998) e por isso será tratado em etapas. Apresentando inicialmente sobre o professor competente e posteriormente sobre temas que possam interferir neste desenvolvimento.

## 2.1 Professor competente

A fim de ter uma clareza no conceito de professor competente, este trabalho se norteia na referência Pedro Demo "Educar pela pesquisa" de 1997.

As virtudes desejadas para um professor competente são:

> - participar do mundo da cultura, sobretudo pela leitura assídua [1]; não se trata apenas de "erudição", mas de amealhar e reconstruir conhecimento em contato dinâmico com fontes culturais mais importantes;
> -participar do mundo da informação e da comunicação, para garantir sua contemporaneidade e trazer para a escola o exemplo do interesse pela inovação e pelas motivações modernas que tanto afetam os alunos;
> - atualizar-se permanentemente em sua disciplina, no campo pedagógico e didático acompanhando com dedicação as evoluções teóricas e práticas;
> - pesquisar[2], para efetivar o questionamento reconstrutivo sobretudo como atitude cotidiana;
> - elaborar/formular com mão própria, para ser capaz de proposta criativa sempre renovada, unindo teoria e prática;
> - cuidar da propedêutica, para saber pensar e aprender a aprender;
> -meter-se na instrumentação eletrônica, tanto para familiarizar-se com as

[1] Essas leituras devem ser direcionadas sobretudo a área educativa e/ou curricular.

[2] O autor defende que cada o professor deve ter um tema predileto para pesquisar, devendo partindo do que se tem disponível e das práticas própria ou alheias. Para isso o professor deverá levantar uma hipótese de trabalho, para delimitar bem o tema, definir a base teórica utilizada e verificação da sua hipótese.

> possibilidades institucionais, quanto sobretudo para alimentar didáticas reconstrutivas."(DEMO, 1997)

Na relação do aprender a conhecer, dos pilares da Unesco, e as virtudes dada por Demo (1997) a participação do mundo da cultura é um processo que o professor iniciou antes mesmo de ingressar na carreira, mas precisa se manter e é aí que surge o grande desafio. A construção do conhecimento se dá neste contato dinâmico da contemporaneidade comum aos seus alunos, aos da sua geração e da geração que o formou. Ainda nesse dinamismo se inclui a continuação da atualização dos saberes pedagógicos, que em algum momento serão insuficientes (PERRENOUD, 2001).

A atualização de saberes pode necessitar de alguns recursos financeiros e como a categoria de professores brasileiros de modo geral apresenta dificuldades financeiras (BARBOSA, 2011) é preciso reivindicar aos poderes públicos que possam aumentar os recursos destinados a remuneração dos professores, como também possam manter fontes para suprir a necessidade do professor para pesquisar, formular, além de participar de cursos de formação mais longos. Segundo Perrenoud (2001) "nas séries mais adiantadas ... os professores sentem-se mais vinculados ao conteúdo disciplinar" mas a formação do professor não se deve limitar a estes conceitos e nem acreditar que a formação se dá por uma lista de aquisições.

O processo de manter uma comunidade de professores atualizados só é possível com uma leitura assídua. Para isso, é necessário uma boa biblioteca, física e online, sobretudo pública, além de acesso a uma internet de qualidade fatores esses cruciais para o êxito nessa formação permanente (DEMO, 1997). Ainda que estes suportes sejam supridos é necessário favorecer um tempo de estudo na carga horária do docente, pois seu tempo para isso é escasso.

A formação continuada do professor se dá de muitas maneiras e um professor competente[3] necessita ter uma boa rede de apoio de conhecimento. Para Charlier (2001) os tipos de equipe de professores interferem diretamente nesse desenvolvimento, não bastando apenas dividi-los em grupos. O fato de estarem agrupados e não trabalharem com um mesmo objetivo tornará esse grupo uma pseudo-equipe. Para Charlier (2001) uma equipe necessita de objetivos comuns, podendo se dividir em equipes *"lato sensu"* que são compostas por professores que se limitam a intercalar pontos de vista, já nas equipes *"stricto sensu"* os professores coordenam suas práticas tornando a reflexão sobre a prática mais consistente, pois a percepção se dará em discentes diferentes, pela menor autonomia tal configuração acaba tendo maior resistência enquanto nas equipes *"lato sensu"* por manter um alto nível de autonomia tende a ter uma menor resistência (CHARLIER, 2001), e por já favorecer o grupo ser mais reflexivo sobre a prática (SCHöN, 2000), pode ser uma opção inicial de trabalho em equipe.

Na participação do mundo da informação e da comunicação, ter pares bem formados irá colaborar. A possibilidade de indicar leituras já é algo que valoriza o grupo, em especial para os

[3] Na concepção apresentada por Demo (1997)

professores de matemática que são literalmente treinados, na maioria das matérias, a dominar conteúdos sem qualquer questionamento reconstrutivo Demo (1997, p.79,80) e, por não terem experienciado o questionamento reconstrutivo de forma significativa na disciplinas específicas não tem conhecimento de pesquisa e formulação própria.

O hábito de pesquisar sobre seu tema *"predileto"* de forma frequente possibilita o avanço para a elaboração própria, mas é preciso ter paciência e persistência. No começo, a pesquisa pode iniciar de uma reprodução, mas não deve permanecer como uma cópia, ou não está aprendendo a aprender (DEMO, 1997). Por ser mais gradual essa sugestão poderá favorecer o avanço na formação do professor de matemática.

Essa persistência dita por Demo (1997) se relaciona com pilar da UNESCO, para que se adquira o "aprender a fazer" (DELORS *et al.*, 1998). É preciso começar a fazer e ir evoluindo com o fazer, acrescentando ainda que esse fazer com excelência pode ser acelerado quando combinado com "aprender a conviver", em especial com os professores que permanecem em equipes que tem a intenção de obter um conhecimento permanentemente atualizado (equipe "strictu sensu") (CHARLIER, 2001).

Acompanhar revistas, mesmo que eletrônicas, e a leitura de dissertações são ótimas formas de manter o professor atualizado nas evoluções teóricas e práticas. O professor criativo pode ter acesso a kit(s) prontos como ponto de partida, mas deve aprimorar e até propor seu próprio texto, seu próprio experimento, e assim por diante.

Como comentado acima, o foco deste trabalho está no professor, mais especificamente no professor de matemática, tanto na sua prática quanto na sua formação continuada. Para Prada (2007) apesar de alguns municípios terem legislado para garantir a formação continuada dos professores, na prática a qualidade e a oferta não satisfazem os envolvidos. Assim, o professor de matemática tende a não conhecer novas propostas que atendam sua real necessidade (FREITAS, 2018), por isso Santos (2002) afirma que "o pensamento tradicional e o posicionamento didático mecanicista e tecnicista permaneceu no Brasil por muitas décadas e ainda está presente nas práticas pedagógicas em muitas escolas". A formação autônoma dos professores e a reelaboração contínua de novos saberes, serão favorecidas pela reelaboração de seus saberes junto com seus pares (PIMENTA, 2000). Desta forma, podemos citar dois problemas das aulas de matemática: apenas transmissão de conhecimento do professor aos alunos e não ter e/ou não manter os professores de matemática realizando pesquisas, o que leva os alunos não realizarem pesquisas também. A pesquisa não pode ser uma exclusividade dos alunos de pós graduação, mas ser uma atividade frequente na vida do professor e de seus alunos.

Para Demo (1997) a educação pela pesquisa necessita que o professor seja um pesquisador adotando o princípio científico e educativo e a manuseie com frequência, entendendo que faz parte do seu processo de formação. É necessário mudar a definição do professor como especialista em aula, pois essa ideia está baseada em algo estagnado e repetitivo, para Penin (1994) a aula que apenas repassa conhecimento atrapalha o aluno, vira treinamento. A elaboração própria é uma segunda etapa desta construção e permanente reconstrução. Para que seja possível elaborar/formular com a própria mão é necessário ter contato com produções anteriores e de forma diversa a fim de estimular sua criatividade. Além disso, a atividade pode ser pensada em grupo, assim todos terão maior segurança na elaboração da mesma. Na seção 2.4, trataremos de alguns materiais de apoio aos professores.

O professor não necessita ser um pesquisador "profissional", mas educar pela pesquisa. Demo (1997) apresenta quatro pressupostos básicos para educar pela pesquisa :

> " - a convicção de que a educação pela pesquisa é a especificidade mais própria da educação escolar e acadêmica;
> - o reconhecimento de que o questionamento reconstrutivo com qualidade formal e política é o cerne do processo de pesquisa;
> - a necessidade de fazer da pesquisa uma atitude cotidiana no professor e no aluno;
> - e a definição de educação como processo de formação da competência histórica humana".

Para o rompimento da condição de servir ao interesse de alguém ou grupo sem consciência, é necessário compreender que se está nessa situação, para então contestá-la, tornando esse questionamento o caminho para a mudança. Nesse contexto do olhar atento, a educação e a pesquisa coincidem, mesmo que não possamos reduzir uma à outra. O questionamento reconstrutivo é bem característico do processo emancipatório, e a educação fazendo parte desse processo.

A atividade de questionamento reconstrutivo é parte das habilidades que o professor precisa despertar no seu fazer docente. Ser e tornar seus alunos pesquisadores, tornando assim um objetivo "aprender a ser" e desenvolver isso em seus discentes.

O questionamento reconstrutivo trará a pesquisa , a teorização de prática e a autocrítica permanente, aproximará ou se afastará do projeto político pedagógico da escola. Fazendo-o refletir sobre a elaboração do próprio projeto político para a (re)construção da sua proposta didática, como pretende avaliar seus alunos, como relacionar sua disciplina com a cidadania e até refletir sobre sua visão pedagógica. Ainda é necessário pontuar que a visão pedagógica pode realizar desde pequenas mudanças até mudanças radicais à medida que se aprofunda. É preciso ter cuidado para não confundir criatividade com ausência de teoria, pois existem teorias contraditórias. A reflexão sobre o projeto politico pedagógico próprio sendo uma prática do grupo trará um "novo"projeto político pedagógico, pois atenderá a visão pedagógica do grupo.

Para tornar ainda mais evidente a construção de um profissional pela pesquisa apresentamos os cinco desafios da pesquisa para o professor, apresentado por Demo (1997), com fim eminentemente educativo:

> "1. (Re)construir projeto pedagógico próprio
> 2. (Re)construir textos científicos próprios

3. (Re)fazer material didático próprio
4. Inovar a prática didática
5. Recuperar constantemente a competência”(DEMO, 1997)

## 2.2 Trabalho colaborativo entre professores

Dos desafios listados por Demo (1997) para um professor pesquisador, a recuperação constante da competência é um dos maiores. Para compreender essa busca constante de aperfeiçoamento será usada como referência o novo conceito sobre educação: a educação que concilia a competição que estimula, a solidariedade que une e a cooperação que reforça. A Comissão Internacional sobre Educação para o século XXI financiada pela UNESCO foi levada a retomar e atualizar o conceito de educação devido às grandes turbulências do século XX [4] que causaram uma pressão de competição, fazendo com que as pessoas esqueçam de possibilitar que cada ser humano possa realizar sua própria oportunidade, dificultando assim o trabalho colaborativo entre os professores (DELORS *et al.*, 1998).

O relatório da comissão destaca, em especial, o desejo utópico da sociedade educativa que adquire, atualiza e utiliza o conhecimento, uma sociedade que pretende se desenvolver de forma responsável e com a participação de todos, incentivando a iniciativa do trabalho em equipe (DELORS *et al.*, 1998). Desta forma, o trabalho colaborativo entre os professores e seus pares, e a colaboração entre os alunos é uma estratégia educacional viável se utilizada de acordo com sua realidade. Para atender todas as missões da educação do século XXI a escola precisa organizar-se em torno dos quatro pilares da educação (aprender a conhecer, aprender a fazer, aprender a conviver juntos e aprender a ser).

O objetivo da educação está posto, assim é preciso de tempo e interesse para atender essas demandas existentes. Por isso, não se pode negligenciar a formação dos jovens e nem tão pouco a dos professores (DELORS *et al.*, 1998). É preciso estimular a colaboração tanto dos professores quanto dos alunos. Muitas vezes o trabalho do coordenador acaba por focar na interação dos professores com os alunos e não desenvolve o sentimento colaborativo na prática docente. Tornando a colaboração um hábito entre os professores, umas das consequências naturais será a expansão da ação colaborativa entre os discentes e entre docente e discente, pelas atividades desenvolvidas pelo grupo docente.

Focando mais especificamente no professor de matemática, Saraiva e Ponte (2003) comentam que uma equipe colaborativa acaba por desafiar os professores a explorarem as aplicações, a modelação matemática e as investigações, por atribuírem valor às mesmas.

Para compreender o desenvolvimento profissional dos professores é necessário saber que envolve competências lectivas e não lectivas, que podem favorecer a sua organização no ambiente escolar (PONTE, 1997) ademais, de acordo com Day (1999), todas as experiências de

[4] Neste período destaco a 1ª e 2ª Guerras Mundias e a Guerra Fria

aprendizagem, sejam elas naturais, planejadas ou conscientes lhe trazem benefícios diretos ou indiretos, e por isso, corroboram para a qualidade do seu desempenho junto aos alunos.

Para ocorrer uma transformação no comportamento do professor, seja ele por ambiente colaborativo ou não, é preciso entender como ocorrem as mudanças. Segundo Day (1999) é o professor que se desenvolve, acontece de forma ativa. A mudança precisa ser internalizada ou será apenas temporária, e precisa incluir a transformação de valores, atitudes, emoções e percepções que orientam sua prática. A mudança é um processo, e precisa ser entendida como tal. Saraiva e Ponte (2003) dizem que a pressão dos colegas pode condicionar sua prática a pratica do grupo, mesmo que esse professor já tenha feito uma mudança pessoal. Serrazina (1998) apresenta outro possível obstáculo, o conhecimento do professor sobre os conteúdos matemáticos a serem ensinados. Para obter a confiança é fundamental que o docente consolide seu conhecimento na matemática e na didática. Aponta-se a discussão com os pares sobre aulas como uma possibilidade para vencer o obstáculo da má formação matemática, além de capacitações recorrentes que não será nosso foco.

A reflexão, em especial sobre as aulas, pode dar uma contribuição importantíssima para o processo de mudança do professor. Para Christiansen B. (1986) as reflexões permitem alterações das crenças, conhecimentos, expectativas e previsões. O processo de reflexão pode legitimar uma teoria pois, segundo Kelchtermans (1995), a legitimidade de uma teoria é confirmada quando se verifica que esta funciona na prática.

Perceba que até aqui foi apontado que as reflexões sobre a prática e a colaboração com os pares são fundamentais para o processo de mudança. Ainda que para Saraiva e Ponte (2003) é preciso ter consciência que nenhuma mudança acontece com a mesma velocidade que é desejada, mas é preciso ter um começo. Com a equipe engajada, o processo de entrosamento dos alunos será facilitado por muitos professores. É preciso que o local de trabalho seja também um ambiente de estudo e de conversas entre os pares com contextos semelhantes e/ou diferentes farão com que os professores melhorem sua prática.

A reflexão do professor sobre a sua prática pode não ser suficiente para uma avaliação real. Ainda que o *feedback* possa ser dado pela comunidade de alunos, este pode não ser fidedigno, pois estes podem ser coagidos a se manifestar de forma tendenciosa por medo de interferência das suas notas na disciplina do docente. O possível retorno deste público é suficiente para uma melhora das práticas na sala de aula? Os discentes teriam essa competência?

A opinião dos pares nas conversas em grupo nas reuniões de professores é uma possibilidade de momento a receber algum *feedback* com uma perspectiva pedagógica, mesmo que essa devolutiva seja anterior ou posterior a atividade, sem ter a vivência real, já irá colaborar para uma reflexão do docente. Segundo Paulo (2014) no quinto artigo apresenta sobre as demandas dos coordenadores assistirem as aulas dos professores para acompanhar e avaliar os processos de ensinar e aprender, bem como o desempenho de professores, mas acaba por ser uma "tentativa de prática", digo tentativa pois muitas vezes não acontece na prática, ou acontecem muito esporadicamente, por conta de outras demandas dadas ao coordenador. Apesar do possível incomodo por parte dos professores o próprio sindicato dos professores legitima a observação das aulas com base na mesma resolução (PAULO, ).

Há ainda a formação de alguns locais que vem trabalhando com professores tutores. São professores mais experientes na rede e que já compreendem a sua proposta, indicados preferencialmente pela gestão que já acompanhou sua prática, que refletem junto com seu tutorado sobre sua prática, mas não se limitando a isso, podendo indicar possíveis materiais de estudo, cursos e outros. A ideia a longo prazo é que o tutorado adquira autonomia com o passar do tempo (MORAN, 2019).

As interações sendo mais comuns, é necessário ter uma atenção especial na forma de direcionar a fala e de se expressar. O estudo de KEPNER (1986) apresenta exemplos da falha na comunicação e como isso pode ser prejudicial para a relação entre as pessoas. Sendo assim, é preciso ter cuidado na interação com os professores, em especial, no primeiro momento onde está se estabelecendo uma relação de confiança entre pares e/ou coordenador.

O docente aos poucos irá adquirir um grupo de profissionais que lhe transmitem segurança para conversar em momento de dúvidas de seu componente específico ou de estruturação de aula e esse contato contínuo colabora para a construção da pesquisa própria, formando sua própria equipe, seja "lato senso"ou "strictu senso". Caso esse grupo esteja na equipe atual de trabalho, haverá a vantagem de já conhecerem a comunidade que será aplicada e o quanto os alunos já internalizaram o raciocínio de colaboração.

Um conjunto de medidas podem ser aplicadas para facilitar a "montagem"dessas equipes. Apesar de algumas irem surgindo de forma mais natural, seja por conta de terem ou estarem trabalhando juntos, seja por terem se conhecido em cursos de formação (aperfeiçoamento, graduação, pós-graduação,...), existe a possibilidade ainda pouco explorada das vídeo-conferências entre profissionais da mesma rede de ensino. Como em algumas redes de ensino, parte da carga horária tem sido cumprida na unidade escolar para elaboração/correção de atividades sendo este horário estabelecido previamente, é possível verificar docentes que teriam horário comum e favorecer a formação de uma equipe.

## 2.3 Mentalidade de crescimento/mentalidade de matemática

O trabalho colaborativo é aconselhável para que se amplie o número de professores que tenham as virtudes desejadas para um professor competente pelos parâmetros de Demo (1997), mas não se pode limitar a isto. É preciso que o professor tenha a gana de aprender a aprender, sendo importante a percepção sobre a forma de aprender, que são os focos dos estudos de Dweck (2019) e Boaler (2018). O conceito de mentalidade de crescimento é baseado na crença de que o trabalho árduo possibilita o aumento da inteligência e o conceito da mentalidade fixa considera que você pode aprender coisas novas, porém não é possível mudar seu nível básico de inteligência. É preciso salientar que, para Boaler (2018) a mentalidade fixa também pode ser alterada, pois o fato de acreditarem que podem avançar em níveis mais altos possibilita que isso aconteça.

Boaler (2018) apresenta um diálogo seu com Carol Dweck sobre o grande impacto da mudança da mentalidade fixa para a de mentalidade de crescimento, quando atrelada com a matemática. Sendo o professor de matemática uma das pessoas que mais favorece o contato da disciplina com os cidadãos que frequentam a escola, ele precisa ter consciência que, ao se deparar com estudantes com mentalidade fixa frente às suas capacidades na disciplina, deve favorecer para que haja uma mudança, mesmo que essa tarefa não seja tão simples. A fala do professor tem grande importância para os estudantes, de modo que as mensagens enviadas a eles também acontecem de formas indiretas relativas ao ensino da disciplina, dentre elas, o retorno que recebem e a forma que são agrupados (KEPNER, 1986). Algumas características ajudam na identificação destes estudantes, é comum desistirem com facilidade, que, em alguns momentos, pode ser entendido como indisciplina, entendem *feedback* como crítica pessoal, alegam ter chegado no seu limite de possibilidade, dentre outras situações.

Tobias (1978) comenta sobre inúmeros livros dedicados à ansiedade diante da matemática e as possíveis formas de superá-la. A crença de que para ter um conhecimento significativo na matemática é necessário ter um "dom" acaba por fazer com que os alunos que não vão bem nessa disciplina acreditem que não são inteligentes e que não possam se desenvolver e serem bem sucedidas na vida.

Boaler (2014) ainda acrescenta que para os alunos com mentalidade de crescimento encarar trabalhos difíceis e se deparar com os erros apenas torna a matemática mais desafiante e interessante, enquanto os alunos de mentalidade fixa temem essas atividades desafiadoras por poderem ser considerados como não inteligentes ao cometerem erros.

Os estudos realizados por Moser (2011) focam na atividade cerebral, em especial no que diz respeito ao funcionamento após o erro. Eles apontam que existem duas formas diferentes do cérebro responder ao erro. A primeira delas é chamada de negatividade relacionada ao erro (NRE) que configura o conflito entre a resposta errada e a correta, esteja a pessoa ciente disso ou não. A segunda delas é um sinal cerebral que reflete atenção consciente pelo erro (Pe). Uma das aferições foi que a atividade cerebral era maior no grupo de pessoas que tinham mentalidade de crescimento.

A crença a respeito do erro ser negativo precisa ser desmistificada, ela pode ser um precursor de uma ideia criativa. Peter Seller, criador da "Pantera cor de rosa", resumiu os hábitos das pessoas bem sucedidas em:

- Sentem-se confortáveis com seus erros.

- Experimentam ideias aparentemente extravagantes
- Estão abertas a experiências diferentes
- Brincam com ideias sem julgá-las
- Estão dispostas a irem contra ideias condicionais
- Persistem apesar das dificuldades

Perceba que as características apontadas são encontradas nas pessoas que possuem a mentalidade de crescimento. A forma "positiva" de lidar com o erro precisa ser uma mentalidade predominante na escola, e para que isso aconteça, essa cultura escolar precisa ser do grupo de pessoas que frequentam essa comunidade.

Este trabalho parte da iniciativa de tratar os professores como indispensáveis para a implementação dessa cultura da mentalidade de crescimento. Para (KEPNER, 1986), o engajamento pode se tornar mais expressivo se atingir as pessoas significativas dentro da organização. Assim, o trabalho da gestão escolar é primordial para essa transição de mentalidade por parte do grupo docente e do grupo de estudantes. À medida que os professores recebem a avaliação da gestão escolar apontando fatos de forma objetiva sobre sua prática, nas conversas com os pares nas reuniões pedagógicas, a internalização dos conceitos de mentalidade de crescimento tendem a ser maiores.

Os erros por parte dos professores são inevitáveis, inclusive os professores de matemática, e por isso é fundamental a mentalidade de crescimento tanto dos gestores, quanto dos docentes e discentes. O processo de estar aberto para novas experiências e lidar com as dificuldades destas práticas é primordial. Para Beguoci (2017) o cuidado com o uso de imperativos na comunicação com o docente, a fala direcionada a fatos e o apontamento de sugestões favorecerá a compreensão do que pode ser melhorado

Algumas disciplinas possuem uma atualização mais significativa no material didático com o passar dos anos, sendo mudado/acrescentado outros conteúdos. Um exemplo disso é a disciplina de história, que na década de 80 não falaria sobre os governos da década de 90 e posteriores, e que hoje já possuem até capítulos em materiais didáticos. A renovação no material didático de matemática acontece de maneira mais discreta, na forma de como introduzir conceitos, exemplos e formas de colocar em prática. Até por isso é necessário que a conversa entre pares seja ainda mais frequente, para que essa prática seja possível se atualizar e não ficando restrito apenas no livro tratado como referência.

Segundo Boaler (2018), a matemática quando ensinada de forma aberta e criativa, preocupada com a aprendizagem e crescimento, onde os erros são encorajados, possibilitam a ocorrência de coisas incríveis. O mito da matemática exigir rapidez também colabora para que alguns alunos não acreditem no seu potencial matemático apenas por serem mais lentos, mesmo que sejam mais profundos (BOALER, 2002). Outro motivo do desinteresse dos estudantes está na ausência, ou baixo uso dos conceitos matemáticos em situações problemas, tornando o uso muito isolado em fatos matemáticos e os alunos que são "*experts*" nesses fatos ainda acabam por serem mais valorizados (BOALER, 2018).

## 2.4 Formação de professores

Para falarmos da formação dos professores é necessário, antes, refletir sobre as três ferramentas que transformaram a educação, cada uma em seu tempo. Antes da chegada da escrita, a "formação" se dava por meio da oralidade. Com a escrita ganhamos um certo dinamismo com a possibilidade de alguns registros, porém limitados a locais que precisavam ter condições climáticas, e não era transportável, somente pelas pessoas e enquanto possuíssem memória. A criação do livro possibilitou o transporte de ideias para locais mais afastados e/ou num espaço de tempo diferente, com isso quem transportava o saber não necessariamente precisaria ter conhecimento sobre tal. Com o avanço da tecnologia e do mundo digital com uma atualização frenética, a comunicação está em todo lugar, não necessita intermediação além da tecnologia (SERRES, 2015). É nesta situação que vive o professor do século XXI, mesmo que a escola tenha outro ritmo de transformação (CORTELLA, 2015). Para se adequar e para tornar sua comunidade escolar apta para o futuro, será necessário que este professor se atualize.

Nesse contexto surge em 2014 o Plano Nacional de Educação (PNE), que apresenta diversas metas para evoluir na qualidade educacional. Para Mainardes (2014) existem algumas metas que são mais desafiadoras, uma delas é exatamente a formação de professores, afirmando que com o PNE de 2014 é a primeira vez que existe um esforço, por meio de uma lei, para enfrentar os desafios da área da educação com a participação da União. Dentro deste plano destaca-se a meta 16 que diz que 50 % dos professores da educação básica devem ter pós graduação, isso em 2024. Segundo Educação (2020) o Brasil tem por volta de 43,3% dos professores com pós-graduação e o número de professores com acesso a formação continuada está em 39,9%. Estes resultados mostram que a meta "mais desafiante"parece que vem atingindo o objetivo.

Demo (1997) aponta que o professor não carece ser um pesquisador na perspectiva acadêmica, configurando em necessariamente cursos de pós-graduação. Entretanto, é importante indicar que o professor necessita conhecer alguns mecanismos de pesquisa. A licenciatura em matemática vem sofrendo alterações na sua carga horária para favorecer as práticas de ensino, mas como estão ocorrendo estas formações para a prática de ensino? A pesquisa do professor está no conhecer o conteúdo a ser ensinado ou verificar e atualizar suas práticas de pesquisas de produções já realizadas?

Dentro da carga horária da graduação em licenciatura em matemática pouco tempo é destinado frente a atividade de pesquisa acadêmica, basta verificar a carga horária destinada para disciplinas cujo o ensino não esteja pautado em exercícios. Isto desfavorece que estes futuros professores de matemática tenham uma baixa experiência com esse tipo de formação. Segundo Charlier (2001) os saberes procedimentais vem tendo um maior espaço de formação na universidade, não só, mas sendo mais valorizada. Tornando o conhecimento em ação um dos focos, a perspectiva é que a "experiência seja mais densa e mais instrutiva, menos errática, relacionando as lições da experiência e os saberes de senso comum com os eruditos"(CHARLIER, 2001).

Mainardes (2014) pontua que existem questões importantes que não costumam ser mencionadas na valorização do professor e destaca o apoio profissional, pois é preciso que o docente se sinta fortalecido para atuar. Uma possibilidade para que haja esse fortalecimento é favorecer a comunicação no ambiente de trabalho com os pares, no que tange o trabalho pedagógico, para que possa refletir e até ter feedback do seu trabalho. Segundo KEPNER (1986) a eficiência de um grupo se dá com o ensino de forma comum e de forma contínua, dito ensino de forma comum em algumas variáveis, como por exemplo objetivo principal da instituição. Para situações com profissionais novos em uma comunidade ou rede poderia existir tutores pedagógicos com atuação mais frequente como relatado por FURTADO (2012). O gestor pedagógico nem sempre irá dispor de tempo para atender todos esses profissionais, a participação dos pares nesse processo seria de grande valia para os dois profissionais. Vale destacar que ambos devem ser da mesma área de atuação. Esse acolhimento e aproximação fortalece o elo entre a comunidade de professores e favorece um trabalho conjunto em um longo prazo. Fato esse que favoreceria o desenvolvimento dos pilares educacionais da UNESCO neste profissional, pois com o acolhimento do grupo docente o aprender a conviver juntos com seus pares seria estimulado desde o inicio, já o regime de tutoria propriamente colaboraria com saber fazer na sala de aula e com os pares, e o aprender a conhecer por conta das reuniões colaborativas. Conforme dito anteriormente, o desenvolvimento destes 3 saberes forma o aprender a ser.

Segundo Cortella (2015) uma boa escola é aquela que cria/possibilita uma rede de comunicação entre os professores e não apenas para os alunos, pois juntas podem formar um projeto pedagógico integrativo. Quando a escola se limita à rede dos alunos, o processo de mudança da escola costuma ocorrer de maneira mais lenta. Acrescenta-se ainda que os projetos mais inteligentes são os multigeracionais pois existe a ousadia do jovem, sem medo de errar, e a paciência do mais experiente. Perceba que a definição de boa escola segundo Cortella (2015) se relaciona diretamente com os pilares educacionais da UNESCO, só que aplicado para os professores e alunos.

A formação continuada do professor precisa estar em sua rotina escolar. Uma proposta para ser implementada é colocar o professor para vivenciar situações que o grupo docente gostaria que os alunos fossem sujeitos, a construção de pesquisas sendo em grupo e individual, sobretudo aprender a conviver com o erro de forma a evoluir com ele. Sendo priorizado o momento de reunião pedagógica ou de preparação pedagógica (hoje realizada de forma individual) virando rotina do trabalho na escola tornando-se uma comunidade que compartilha.

CAPÍTULO

# 3

# TEMAS MATEMÁTICOS

Neste capítulo apresentaremos conteúdos matemáticos que se relacionam de alguma maneira com as atividades sugeridas no capítulo 4. A atividade "Formação de palavras", disponível em 4.1 é uma proposta de como trabalhar conceitos de análise combinatória e por isso trazemos, em 3.1, o desenvolvimento dos saberes matemáticos utilizados nessa atividade. A construção da atividade "Planejamento financeiro", disponível em 4.2, foi organizada de forma que além de utilizar as quatro operações matemáticas básicas, a saber, soma, subtração, multiplicação e divisão, também aborda juros compostos, os quais dedicamos uma seção em 3.2.1. A aplicação da atividade "Carnaval", disponível em 4.3, utiliza diversos conceitos da geometria plana e analítica, por isso, tratamos do recorte destes grandes temas que podem ser interessantes para o professor explorar e aprofundar ou apenas refletir durante a realização desta atividade.

## 3.1 Análise combinatória

O ensino de análise combinatória tem seu início na educação básica, no ensino fundamental. Assuntos como princípio multiplicativo e árvore das possibilidades são explorados, mas grande parte da sua ementa está no ensino médio. Sendo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) do ensino médio uma das referências para os conhecimentos de matemática, é necessário destacar os argumentos apresentados para a relevância deste tema (SILVA, 2016). No PCN destaca-se que o processo de saber fazer matemática e o saber pensar matematicamente perpassam por situações problemas em diversos contextos. A análise combinatória acaba se desenvolvendo na resolução de problemas, cuja a argumentação demonstra o real domínio de ambos os saberes. (BRASIL, 2000)

Uma perspectiva mais atual de ensino no Brasil é dada pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018) e na unidade de conhecimento da probabilidade inclui-se a análise combinatória. Para BRASIL (2018), no ensino médio, a área de matemática e suas tecnologias devem ampliar a relação com os problemas, não bastando apenas resolvê-los, mas também formulá-los, e no estudo de análise combinatória existe uma vantagem em relação a outros objetos de conhecimento, visto que pequenas alterações no enunciado podem tornar o exercício significativamente diferente.

Para tratar da análise combinatória é necessário compreender que as situações que serão discutidas são pensadas para contagem de casos que possuem determinada característica fixada por um contexto. Assim, os alunos podem justificar e ter sua própria representação de uma mesma situação problema. O docente deve facilitar esta troca para permitir uma melhor flexibilidade e fluidez.

Considerando ainda a vantagem de tratar a análise por problemas temos que ideias fundamentais como a variação e constância aparecem tanto na comparação dos tipos de agrupamentos quanto em problemas parecidos e nas pequenas variações sugeridas "naturalmente", seja pelo professor e/ou alunos. Em alguns problemas é comum a confusão da ordem dos elementos ser importante ou não para responder o que foi perguntado. Por isso, apresentar uma variação que interfira nesse quesito é recomendável.

Na atividade apresentada em 4.1 as perguntas durante sua realização serão tão importantes quanto as realizadas de forma sistematizada e na reflexão (3ª etapa). A atividade consiste na formação de palavras utilizando algumas letras dadas. Abaixo dessas letras existe uma ordenação das palavras em número de caracteres e em ordem alfabética. Desta forma é esperado que perguntas como a quantidade de anagramas existentes entre as palavras já encontradas sejam propostas, pois isso facilitará o encontro das palavras ainda desconhecidas no jogo, que podem fazer parte do vocabulário ou não.

Para apresentar os conceitos relacionados com a atividade proposta contidos nesta área de conhecimento iremos nos valer das definições contidas em livros didáticos, em especial o "Matemática discreta" [1] da coleção PROFMAT escrita por Augusto César Morgado e Paulo Cezar Pinto Carvalho.

### *3.1.1 Princípio multiplicativo*

**Definição 1.** Entende-se por princípio multiplicativo [2] que se há x modos de tomar uma decisão $D_1$ e, tomada a decisão $D_1$ , há y modos de tomar a decisão $D_2$ , então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões $D_1$ e $D_2$ é $x \cdot y$.

**Exemplo 1.** Com 5 homens e 5 mulheres, de quantos modos se pode formar um casal?

$D_1$:Escolha do homem (5 modos).

$D_2$:Escolha da mulher (5 modos).

Há $5 \cdot 5 = 25$ modos de formar casal.

[1] (MORGADO, 2017).
[2] Também conhecido por princípio fundamental da contagem (P.F.C.)

### 3.1.2 Permutação simples

**Definição 2.** O conjunto de ordenações possíveis que podemos formar com n objetos [3] é chamado de permutação simples ($P_n$).

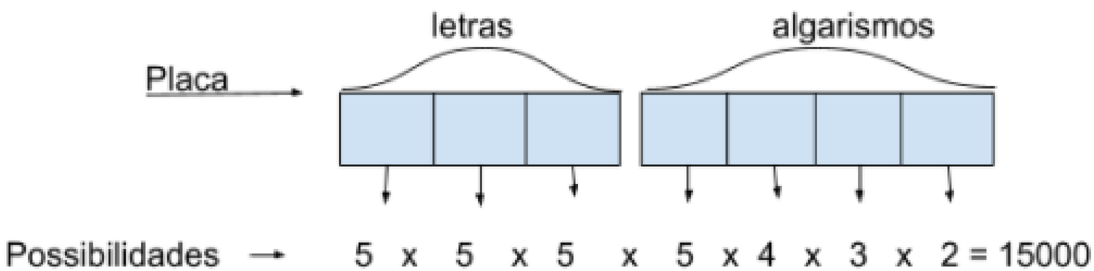
**Proposição 1.** O número de ordenações em fila de n objetos distintos é dado por $P_n = n!$.

*Demonstração.* Pelo princípio fundamental da contagem, a decisão do objeto que ocupará o primeiro lugar, poderá ser feita de n modos; a decisão do objeto que ocupará o segundo lugar poderá ser feita de n-1 modos; a decisão do objeto que ocupará o terceiro lugar poderá ser feita de n-2 modos; e assim sucessivamente até que a decisão do objeto que ocupará o último lugar poderá ser feita de 1 modo.

Assim a resposta é $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 1$ = n! [4]. Desta forma, o número de permutações simples de n objetos distintos é $P_n$ =n!. □

**Exemplo 2.** Quantas placas de licença de automóveis podem ser formadas por 3 letras e 4 algarismos sendo as letras apenas vogais e sendo os algarismos pares distintos?
Formar uma placa é uma ação composta de 7 etapas conforme indicamos no esquema a seguir:

Figura 1 – Resolução




Fonte: Elaborada pelo autor.

Observe que as letras devem ser vogais (a,e,i,o,u) podendo ser repetidas; assim há 5 possibilidades para cada letra. Os algarismos (0,2,4,6,8) devem ser distintos; por isso há 5 possibilidades para decidir o primeiro deles, 4 possibilidades para o segundo, 3 para o terceiro e 2 para o último. O número de placas que podemos formar nestas condições é $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$; logo 15000 placas.

[3] Utiliza-se objetos, pois se considera elementos diferentes
[4] Na linguagem matemática o símbolo n! significa que os números naturais menores que n e maiores que zero serão multiplicados. No caso de 0! = 1! = 1.

### 3.1.3 Permutação com repetição

**Definição 3.** Denominamos permutação com repetição ($P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k}$) quando temos n elementos dos quais $n_1$ são repetidos de um tipo, $n_2$ são repetidos de outro tipo, $n_3$ são repetidos de outro tipo e assim por diante[5].

**Proposição 2.** O número de ordenações em fila de n elementos dos quais $n_1$ são repetidos de um tipo, $n_2$ são repetidos de outro tipo, $n_3$ são repetidos de outro tipo e assim por diante, é dada por $P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdots n_k!}$ com $n_1 + n_2 + .. + n_k$ = n.

*Demonstração.* Considere que uma permutação com repetição tenha um elemento A que seja repetido $n_1$ vezes. Ao observarmos uma formação específica, se permutarmos apenas o elemento A obteremos a mesma sequência. Desta forma, se tomarmos um agrupamento de n elementos distintos bastará dividirmos por $n_1!$ pois se aplicaria para as demais formações. Analogamente, para os demais elementos o raciocínio será o mesmo, desta forma o número de permutações ($P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k}$) que podemos formar é dado por:

$$P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdots n_k!} \text{ com } n_1 + n_2 + .. + n_k = \text{n}. \qquad \square$$

**Exemplo 3.** Quantos são os anagramas da palavra CANDIDATA?

Temos 9 letras, sendo 3 A,2D, 1C ,1N , 1I, 1T.

O número de anagramas é:

$$P_9^{3,2} = \frac{9!}{3! \cdot 2!} = 30240.$$

### 3.1.4 Arranjo simples

**Definição 4.** Denomina-se arranjo simples a ordenação de n elementos distintos ($A_{n,p}$) quando tomados p a p às sucessões formadas de p termos distintos entre os n elementos dados.[6]

**Proposição 3.** O número de ordenações em fila de p termos distintos dados n elementos distintos é $A_{n,p} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.

*Demonstração.* Por serem sucessivos e partindo do princípio multiplicativo observamos que a decisão do objeto que ocupará o primeiro lugar pode ser feita de n modos; a decisão do objeto que ocupará o segundo lugar pode ser feita de n-1 modos; a decisão do objeto que ocupará o terceiro lugar pode ser feita de n-2 modos, e assim sucessivamente até que a decisão do objeto que ocupará o último lugar poderá ser feita de n-p+1 modos.

[5] Definição retirada de Machado (1986)
[6] Definição retirada de Machado (1986)

Assim a resposta é $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-p+1)$. Para facilitar o registro podemos multiplicar e dividir por (n-p)! obtendo assim $\dfrac{n(n-1).(n-2)...(n-p+1).(n-p)!}{(n-p)!} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$. Assim, o número de arranjos simples de n objetos distintos tomados p a p é $A_{n,p} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$

. □

**Exemplo 4.** Quantos anagramas com exatamente 3 letras podem ser formados com as letras QUADRO?

Percebemos que se trata de um arranjo pois a ordem dos elementos é importante, os elementos são diferentes e não podem se repetir.

Para decisão do primeiro elemento temos 5 opções.

Para decisão do segundo elemento temos 4 opções.

Para decisão do terceiro elemento temos 3 opções.

Assim pelo princípio multiplicativo temos $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot = 60$

### 3.1.5 Combinação simples

**Definição 5.** A combinação simples ($C_{n,p}$) é composta por cada seleção de p objetos dados n objetos. Podemos representar o número de combinações simples de classe p de n elementos por $C_{n,p}$ ou $\binom{n}{p}$ ou $C_n^p$.

**Proposição 4.** O número de agrupamentos de n objetos selecionados p objetos é $C_{n},_{p} = A_{n,p} \cdot \dfrac{1}{p!} = \dfrac{n!}{(n-p)! \cdot p!}$.

*Demonstração.* É possível considerar um arranjo de n elementos tomados p a p como o produto da combinação de n elementos tomados p a p e a permutação simples destes p objetos, visto que a escolha dos objetos é uma decisão e a organização é uma segunda decisão, assim justifica-se o produto pelo princípio multiplicativo. Obtemos então $A_{n},_{p} = C_{n,p} \cdot P_n$.

Realizando o produto em ambos os membros por $\dfrac{1}{P_n}$ concluímos que:

$$C_{n},_{p} = A_{n,p} \cdot \frac{1}{p!} = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!}.$$

□

**Exemplo 5.** Com 5 homens e 4 mulheres, quantas comissões de 5 pessoas, com exatamente 3 homens podem ser formadas?

Para formar a comissão devemos decidir quais serão os 3 homens e quais serão as 2 mulheres.
Há $C_{5,3} \cdot C_{4,2} = 10 \cdot 6 = 60$

## 3.2 Matemática financeira

Para a contextualização da matemática teórica que será explorada na atividade apresentada em 4.2 faremos uma breve apresentação da concepção de educação financeira. Para SAITO (2007) a educação financeira deve possibilitar que os indivíduos possam tomar decisões fundamentadas e seguras sobre as finanças.

A matemática financeira proposta na escola precisa ser ensinada como algo presente na vida do aluno para gerar uma aprendizagem significativa (SILVA, 2015). No início da escolarização a matemática financeira tem sido motivadora para os alunos, pois nas séries iniciais o cálculo do troco em situações cotidianas serve como uma primeira interação, mas é preciso dar continuidade nos anos seguintes.

A atividade sugerida em 4.2 para planejamento familiar traz uma proposta que organiza o processo financeiro da transição para a vida adulta. Apesar de a princípio ser dirigida ao 6º ano, é possível acrescentar variações de maior complexidade à atividade para que possamos abordar outros assuntos relevantes. Traremos neste trabalho uma complementação com juros compostos que é mais adequada para séries superiores ao 8ºano, pois nesta fase estes objetos de conhecimento são mais familiares.

O estudo dos juros compostos pode ser explorado tanto na situação que simula o prêmio da loteria investido na poupança e outros, quanto na situação em que uma família utiliza o cartão de crédito e não consegue pagar uma fatura.

### 3.2.1 *Juros compostos*

Para abordar os juros compostos é possível pensar que a cada mês existe uma taxa de crescimento constante e por isso pode ser como uma progressão geométrica (P.G.). Alguém que dispõe de um capital C (chamado de principal), empresta-o à outrem por certo período de tempo, e após esse período, recebe o seu capital C de volta, acrescido de uma remuneração J pelo empréstimo. Essa remuneração é chamada de juro. A soma C+J é chamada de montante e será representada por M. A razão $i = \dfrac{J}{C}$ que é a taxa de crescimento do capital, será sempre referida a um período da operação e é chamada de taxa de juros.

**Teorema 1.** No regime de juros compostos de taxa i, um principal $C_0$ transforma-se, depois de n períodos de tempo, em um montante $C_n = C_0 \cdot (1+i)^n$.

*Demonstração.* Precisamos relembrar que a lei de formação da P.G. é $a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$ ou $a_n = a_0 \cdot q^n$.

Os valores do capital crescem a uma taxa constante e, portanto, formam uma progressão geométrica de razão 1+i. □

**Exemplo 6.** Pedro investe 150 reais a juros de 12% ao mês. Qual será o montante de Pedro três meses depois?

Na construção pelo raciocínio da progressão geométrica: $150; 150 \cdot (1,12); 150 \cdot (1,12)^2; 150 \cdot (1,12)^3$.

Pela formulação apresentada no teorema: $C_3 = C_0 \cdot (1+0,12)^3 = 210,74$ reais.

## 3.3 Geometria

O contato com a Geometria com intencionalidade educativa é iniciado desde o começo da escolarização que passou a ser obrigatória para crianças pequenas[7] a partir de 2009 (BRASIL, 2009), o que não exclui uma apresentação anterior. Dentre as habilidades apresentadas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), uma que merece um destaque especial é a EI03TS02 : Expressar-se livremente por meio de desenho, pintura, colagem, dobradura e escultura, criando produções bidimensionais e tridimensionais.

Como a Geometria é uma unidade temática da BNCC que visa desenvolver o pensamento geométrico através da elaboração de conjecturas, investigações de propriedades e de argumentos geométricos convincentes, propomos uma atividade para favorecer tal desenvolvimento em 4.3.

Em suma, a atividade 4.3 consiste na elaboração de uma máscara de carnaval. Para tal construção serão necessários conhecimentos de formas geométricas, posições relativas e instrumentos (régua, compasso e transferidor). A escolha de conteúdos apresentados nesta seção estão relacionadas a algumas necessidades relacionadas a construção dos roteiros das máscaras. Os conceitos relacionados a ângulos e polígonos serão fundamentais para distinguir os polígonos relacionados na construção. As regiões abertas da máscara, olhos, nariz e boca, podem ser medidas por unidades de áreas e também são tratadas na atividade 4.2 no tamanho das habitações. Sendo o plano cartesiano uma possibilidade para relativizar as posições dos traços na máscara é importante que se tenha clareza no conceito de distância entre objetos que não sejam apenas 2 pontos e por isso precisaremos apresentar pelo menos parte da teoria relacionada a vetores.

Para este momento iremos focar nos saberes teóricos que se relacionam com essa atividade. Será utilizado na maior parte do tempo como referência desta parte o livro “Geometria” de Antônio Caminha Muniz Neto da Coleção PROFMAT[8].

### 3.3.1 Conceitos geométricos básicos

Neste primeiro estudo da geometria é necessário compreender que ponto, reta e plano são conceitos primitivos, ou seja, que eximem as definições formais. Tradicionalmente são usadas letras latinas maiúsculas para ponto e letras latinas minúsculas para reta.

[7] Crianças de 4anos a 5 anos e 11 meses.
[8] (NETO, 2016)

A geometria que é tratada neste trabalho é a euclidiana, e esta apresenta alguns postulados, são eles:

**I Postulado:** Pode-se traçar uma única reta ligando quaisquer dois pontos.

**II Postulado:** Pode-se continuar (de uma maneira única) qualquer reta finita continuamente em uma reta.

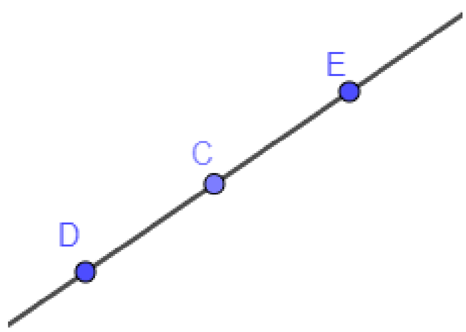
**III Postulado:** Pode-se traçar uma circunferência com qualquer centro e com qualquer raio.

**IV Postulado:** Todos os ângulos retos são congruentes.

**V Postulado:** Se uma reta, ao cortar outras duas, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então estas duas retas encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos.

Dados um ponto P e uma reta r pertencentes a um mesmo plano só existem duas possibilidades: ou o ponto P pertence à reta r ou não; caso pertença escrevemos P $\in$ r e caso não pertença P $\notin$ r. Será assumido que podemos traçar uma única reta (r) dados dois pontos A e B distintos, obtendo assim a porção da reta r situada de A a B como um segmento de reta $\overline{AB}$ e a distância entre A e B denotada como d(A, B). Considere um ponto C em uma reta r de modo a dividi-la em duas partes, sendo elas as semirretas de origem em C. Escolhendo os pontos D e E em cada uma dessas partes, obtemos as semirretas $\vec{CD}$ e $\vec{CE}$ com origem em C, ilustrado na figura 2.

Figura 2 – Ponto dividindo em duas semirretas




Fonte: Elaborada pelo autor.

Dados um ponto O e um segmento de reta r (raio), o conjunto de pontos P do plano que estão à distância r de O, ou seja, $\overline{OP}$ = r é chamada de **circunferência** de centro O e raio r. Para tal construção será necessário o auxílio do compasso. Uma **corda** é um segmento que une dois pontos quaisquer da circunferência; um **diâmetro** é uma corda que passa pelo centro da circunferência. Todo diâmetro divide a circunferência em duas partes iguais, denominadas semicírculos. A porção da circunferência que é delimitada por dois de seus pontos é chamada de **arco**. Por existir dois arcos delimitados por dois pontos em um circulo para se evitar uma ambiguidade entre qual arco está se referindo é necessário definir em arco menor ou arco maior, ou ainda informar um ponto entre os dois pontos que esteja na circunferência.

Uma região $R$ do plano é dita **convexa** quando, para todos os pontos $A,B \in R$, tivermos $\overline{AB} \subset R$. Caso contrário, diremos que $R$ é uma região **não convexa**. Desta forma, uma reta contida num plano divide-o em duas regiões convexas: os semiplanos delimitados por r. Considerando os pontos $A$ e $B$, um em cada um dos semiplanos em que r divide o plano, tem-se sempre $\overline{AB} \cap r \neq \emptyset$.

Dadas, no plano, duas semirretas $\vec{OA}$ e $\vec{OB}$, um ângulo (ou região angular) de vértice O e lados $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ é uma das duas regiões do plano limitadas pelas semiretas $\vec{OA}$ e $\vec{OB}$. Um ângulo pode ser convexo ou não convexo. Denotamos um ângulo de lados $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ escrevendo $\angle AOB$ cujo contexto deixará claro se está se referindo ao ângulo convexo ou ao não convexo. Para simplificar a notação muitas vezes são utilizadas letras gregas minúsculas.

Para associar a todo ângulo uma medida da região do plano que ele ocupa divida um circulo T de centro O em 360 arcos iguais e tome pontos X e Y, extremos de um desses 360 arcos iguais. Dizemos que a medida do ângulo $X\hat{O}Y$ é de 1 grau, denotado $1^o$, e escrevemos $X\hat{O}Y = 1^o$. No caso das semirretas com mesma origem sejam opostas, situadas na mesma reta, teremos um ângulo de $180^o$ ou ângulo raso. Para a maioria das situações usa-se ângulos menores que $180^o$, assim quando indicar $\angle AOB$ estar-se-á indicando o ângulo convexo $\angle AOB$, isto é, $0^o < A\hat{O}B \leq 180^o$. Diremos que um ângulo $A\hat{O}B$ é agudo quando $0^o < A\hat{O}B < 90^o$; reto quando $A\hat{O}B = 90^o$ e obtuso quando $90^o < A\hat{O}B < 180^o$.

#### 3.3.1.1 Posição relativa entre retas

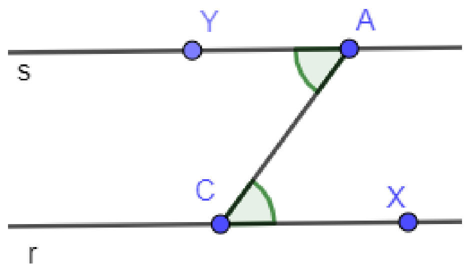
Dadas duas retas no plano, tem-se somente três possibilidades para as mesmas: ou elas tem um ponto em comum ou não tem nenhum ponto em comum ou elas tem todos pontos comuns; no primeiro caso, as retas são ditas **concorrentes**; no segundo, as retas são **paralelas**; no terceiro caso, as retas são **coincidentes**.

Dados uma reta r e um ponto A não pertencente a r, pode-se obter uma reta paralela a r que passa por A com o auxílio de régua e compasso, ilustrada na figura 3. A descrição dos passos é a seguinte:

- Tome os pontos C e X sobre a reta r e una A e C.
- Construa um ângulo $\angle CAY$ tal que $C\hat{A}Y = A\hat{C}X$. É necessário que X e Y estejam situados em semiplanos opostos em relação à reta $\overleftrightarrow{AC}$.
- A reta $s = \overleftrightarrow{AY}$ é paralela à reta $\overleftrightarrow{AC}$.

Este trabalho trata da geometria euclidiana, assim pelo quinto postulado da geometria euclidiana temos que essa reta paralela é única.

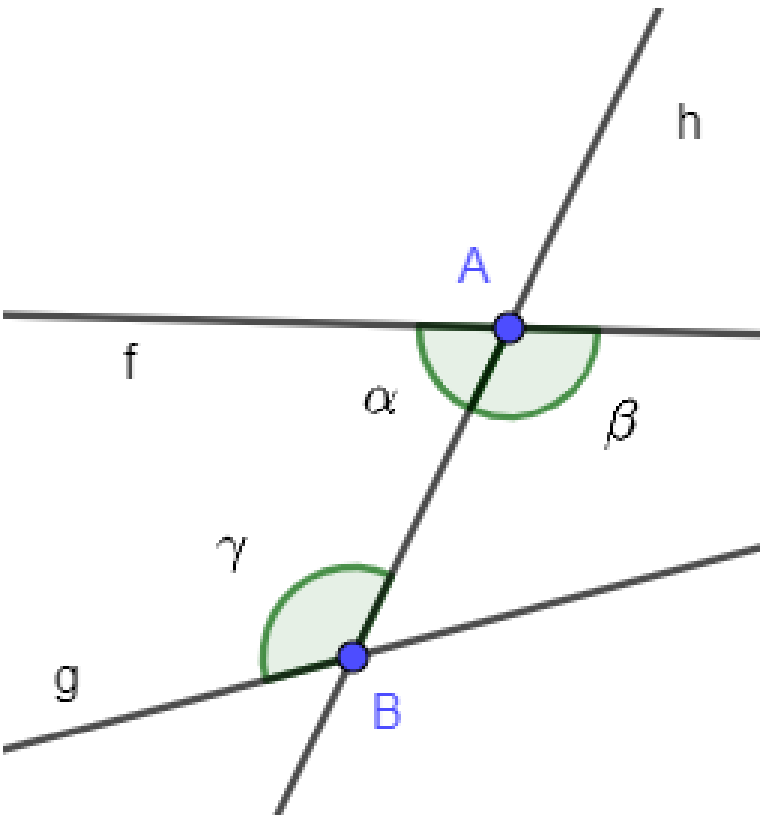
Figura 3 – Construindo uma paralela por um ponto




Fonte: Elaborada pelo autor.

Suponha que são dadas no plano as retas f,g e h, com h intersectando f e g nos pontos A e B, respectivamente.

Figura 4 – Retas e transversal




Fonte: Elaborada pelo autor.

Nas notações da figura 4, os ângulos $\beta$ e $\gamma$ são ditos **alternos internos**, ao passo que os ângulos $\alpha$ e $\gamma$ são **colaterais internos**. Com a nomenclatura acima e o critério para o paralelismo de duas retas, pode-se afirmar que:

**Corolário 1.** Com as notações da figura 4 , temos $f \parallel g \Leftrightarrow \beta = \gamma \Leftrightarrow \alpha + \gamma = 180°$.

*Demonstração.* Inicialmente, note que, $\alpha+\beta=180^\circ$, temos que $\beta=\gamma \Leftrightarrow \alpha+\gamma=180^\circ$. Portanto, basta provar que $f \parallel g \Leftrightarrow \beta=\gamma$.

Já provamos na construção da reta paralela, que $\beta=\gamma \Rightarrow f \parallel g$, de modo que basta provar a implicação contrária. Suponha, pois, que $f \parallel g$. Então, pelo quinto postulado, f é a única reta paralela a g e passando por A, de sorte que pode ser construída conforme prescrito acima. Logo segue da construção descrita naquele exemplo que $\beta=\gamma$. □

Três pontos não colineares formam um triângulo. Nesse caso, a região triangular correspondente é a região limitada do plano, delimitada pelos segmento que unem os três pontos dois a dois. Sendo A,B e C tais pontos, diremos que A,B e C são os vértices do triângulo ABC, diz-se que os segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}$ e $\overline{CA}$ são os lados o triângulo e que os ângulos $\hat{A}$ = B$\hat{A}$C, $\hat{B}$ = C$\hat{B}$A e $\hat{C}$ = A$\hat{C}$B são os ângulos internos do triângulo.

O triângulo é um caso particular de polígono e por isso apresenta-se a definição de polígono:

**Definição 6.** Sejam n $\geq$ 3 um natural e $A_1, A_2, ....A_n$ pontos distintos do plano. Diz-se que $A_1A_2...A_n$ é um polígono (convexo) se, para $1 \leq i \leq n$, a reta $A_iA_{i+1}$ não contém nenhum outro ponto $A_j$, mas deixa todos eles em um mesmo semiplano, dentre os que ela determina (aqui e no que segue $A_0 = A_n$ ; $A_{n+1} = A_1$ e $A_{n+2} = A_2$).

Os pontos $A_1, A_2, ..., A_n$ são os vértices do polígono, os segmentos $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_{n-1}A_n, A_nA_1$ são o lados do polígono. A região poligonal correspondente ao polígono $A_1A_2...A_n$ é a região limitada do plano , delimitadas pelos segmentos $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_{n-1}A_n, A_nA_1$.

Em geral, diz-se que um polígono $A_1A_2...A_n$ é um n-ágono, em referência a seu número n de lados. Contudo, são consagrados pelo uso os nomes quadriláteros para n = 4, pentágono para $n=5$, hexágono para $n=6$, heptágono para $n=7$, octógono para $n=8$, decágono para $n=10$.

#### 3.3.1.2 Soma dos ângulos internos de um polígono

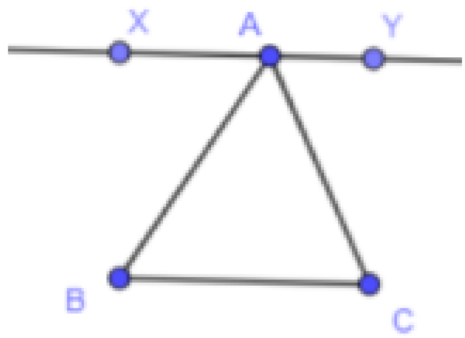
**Triângulos**

Pelo Corolário 1 é possível ter a seguinte proposição:

**Proposição 5.** A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°.

*Demonstração.* Sejam ABC um triângulo qualquer e XY a reta paralela a BC passando por A. Pelo corolário 1 e de acordo com a Figura 5 abaixo, temos que $\hat{B}=B\hat{A}X$ e $\hat{C}=C\hat{A}Y$, de sorte que

Figura 5 – Soma dos ângulos internos de um triângulo




Fonte: Elaborada pelo autor.

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A}$ + BÂX + CÂY = 180º.

□

Soma dos ângulos internos de polígono qualquer

**Teorema 2.** A soma dos ângulos internos de um polígono convexo de $n$ lados é igual a $180 \cdot (n-2)$.

*Demonstração.* Considere que os vértices do polígono são $A_1, A_2, ..., A_n$. Ao traçarmos todas as diagonais que partem do vértice $A_1$, teremos n-3 diagonais pois $A_1A_2$ e $A_nA_1$ são lados. Foram formados n-2 triângulos cujos os vértices são $A_1, A_x$ e $A_{x+1}$, com $\{x \in \mathbb{N}/\,[2; n-1]\}$. Perceba que os ângulos internos destes triângulos ou tem um dos ângulos internos igual ao do polígono, no caso $x = 2$ ou $x = n-1$, ou são parte dos ângulos internos do polígono que adicionado com o ângulo adjacente que pertence ao próximo triângulo ($A_1A_{x+1}A_{x+2}$) formará o ângulo do vértice $A_{x+1}$ e assim sucessivamente até que chegue ao vértice $A_{n-1}$. O ângulo interno do vértice $A_1$ será obtido pela soma dos ângulos $A_3A_1A_2, A_4A_1A_3, ..., A_nA_1A_{n-1}$. Sendo assim a soma dos ângulos internos de um polígono é equivalente a soma dos ângulos internos de $n-2$ triângulos e como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º, temos que para um polígono de n lados a soma dos ângulos internos é $180 \cdot (n-2)$. □

### 3.3.2 Classificação de alguns quadriláteros

- □ Um quadrilátero convexo é um paralelogramo se possuir lados opostos paralelos.
- □ Um quadrilátero convexo é um trapézio se possuir um par de lados opostos paralelos. Os lados paralelos são ditos suas bases, sendo o maior deles a base maior e o menor deles a base menor.
- □ Um quadrilátero convexo é um retângulo se todos os ângulos internos forem congruentes.

☐ Um quadrilátero é um losango se todos os seus lados forem congruentes.

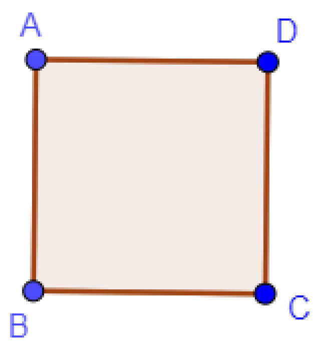
☐ Um quadrilátero é um quadrado quando for simultaneamente retângulo e losango.

### 3.3.3 Áreas

Nesta seção optou-se por apresentar a teoria sem o uso de cálculo diferencial e integral por favorecer o docente na sua prática no ensino básico. Assim para que o conceito de área para polígonos tenha utilidade, postula-se que as seguintes propriedades sejam válidas:

1. Polígonos congruentes têm áreas iguais.
2. Se um polígono convexo é particionado em um número finito de outros polígonos convexos, então a área do polígono maior é a soma das áreas dos polígonos menores.
3. Se um polígono (maior) contém outro (menor) em seu interior, então a área do polígono maior é maior que a área do polígono menor.
4. - A área de um quadrado de lado 1 cm é igual a 1 $cm^2$, ilustrado na figura 6.

Figura 6 – Quadrado




Fonte: Elaborada pelo autor.

**Proposição 6.** A área de um quadrado de lado $n$, com $n \in \mathbb{N}$ é $A_n = n^2$.

*Demonstração.* Sendo válidos os postulados acima, particionando um quadrado de lado n $\in$ N em $n^2$ quadrados de lado 1 cada. Denotando a área do quadrado maior por $A_n$, devemos ter $A_n$ igual à soma das áreas desses $n^2$ quadrados de lado 1, de maneira que $A_n = n^2$. ☐

**Proposição 7.** A área de um quadrado de lado $\frac{m}{n}$ com $m,n \in \mathbb{N}$ [9], possui área $A_{m/n} = (\dfrac{m}{n})^2$.

[9] Não será apresentada a construção no conjunto dos $\mathbb{R}_+^*$ pois precisaria demonstrar para os irracionais que não se relacionam com os objetos de conhecimento dos anos iniciais do ensino fundamental II que são o alvo da atividade 4.3

*Demonstração.* Considere um quadrado de lado $\frac{m}{n}$, com m,n $\in \mathbb{N}$, e área $A_{m/n}$. Arranje $n^2$ cópia do mesmo, empilhando n quadrados de lado $\frac{m}{n}$ por fila, em n filas, formando assim um quadrado de lado $\frac{m}{n} \cdot n = m$. Tal quadrado maior terá área $m^2$, por outro lado, como ele está particionado em $n^2$ quadrados, cada um dos quais de lado $\frac{m}{n}$, sua área é igual à soma das áreas desses $n^2$ quadrados, ou seja,

$$m^2 = n^2 \cdot A_{m/n}$$

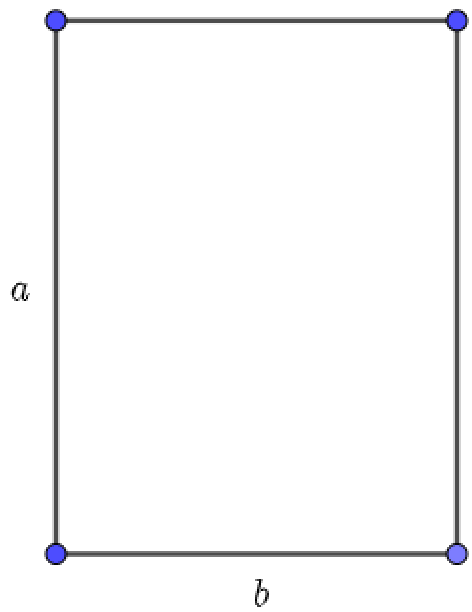
Portanto,

$$A_{m/n} = \frac{m^2}{n^2} = (\frac{m}{n})^2.$$ □

#### 3.3.3.1 Retângulo

**Proposição 8.** A área de um retângulo de lados a e b é igual $a \cdot b$, ilustrado na figura 7.

Figura 7 – Retângulo de lados $a$ e $b$




Fonte: Elaborada pelo autor.

*Demonstração.* Iniciando com um retângulo de lado a,b $\in \mathbb{N}$, particionando-o em $a \cdot b$ quadrados de lado 1 para mostrar que sua área é $a \cdot b$. Em seguida, tomamos um retângulo de lados $\frac{m_1}{n_1}$ e $\frac{m_2}{n_2}$, com $m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, e com $n_1 n_2$ cópias do mesmo, montamos um retângulo de lados $m_1$ e $m_2$. Somando áreas iguais, concluímos que a área do retângulo dado originalmente é igual a

$$\frac{m_1 m_2}{n_1 n_2} = \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2}.$$

Assim temos que a área do retângulo é igual ao produto de seus lados. □

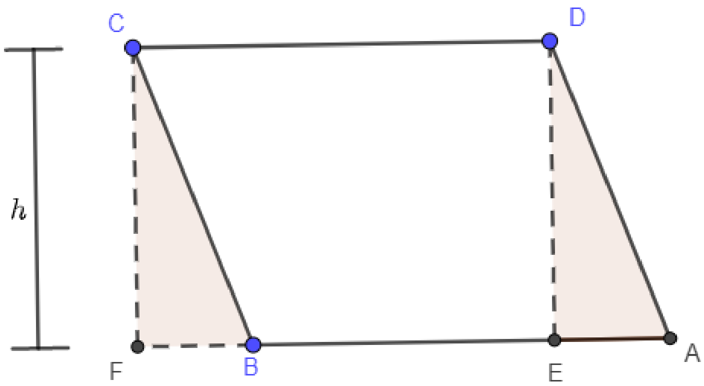
#### 3.3.3.2 Paralelogramo

Para calcular a área de um paralelogramo como corolário do apresentado acima será fixado um lado do paralelogramo, o qual chama-se de base, diz-se que a distância entre ele e seu lado paralelo é a altura do paralelogramo (relativa à base fixada).

**Proposição 9.** A área de um paralelogramo de base $a$ e altura $h$ é igual a $a \cdot h$.

*Demonstração.* Seja ABCD um paralelogramo de diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ (conforme figura), e E e F respectivamente os pés das perpendiculares baixadas de D e C à reta AB.

Figura 8 – Área do paralelogramo




Fonte: Elaborada pelo autor.

Ademais, suponha sem perda de generalidade, que E $\in AB$. É imediato verificar que os triângulos ADE e BCF são congruentes pelo caso CH (cateto/hipotenusa), de modo que $\overline{AE} = \overline{BF}$ e pelo postulado 1 temos $A_{(ADE)} = A_{(BCF)}$. Então

$A_{(ABCD)} = A_{(ADE)} + A_{(BEDC)}$

$A_{(ABCD)} = A_{(BCF)} + A_{(BEDC)}$

$A_{(ABCD)} = A_{(CDEF)}$

Por outro lado $A_{(CDEF)}$ é um retângulo de altura h e base

$\overline{EF} = \overline{EB} + \overline{BF} = \overline{EB} + \overline{AE} = \overline{AB} = a.$

Portanto, segue que $A_{(ABCD)} = A_{(EFCD)} = a \cdot h.$ □

#### 3.3.3.3 Triângulo

**Proposição 10.** Seja ABC um triângulo de lados $\overline{AB} = c, \overline{AC} = b$ e $\overline{BC}$ = a, e altura $h_a$, $h_b$ e $h_c$, respectivamente relativas aos lados a, b e c, ilustrado na figura 9. Então

$$A_{(ABC)} = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}.$$

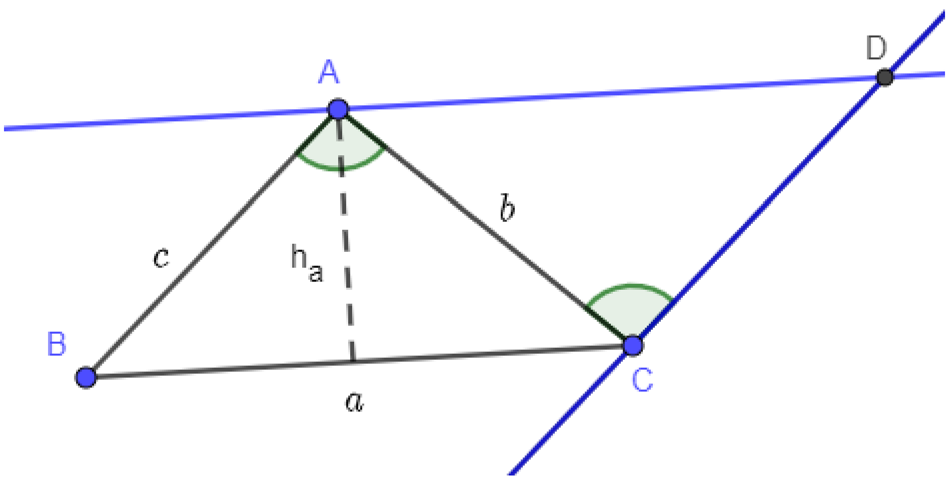
**Observação 1.** Em particular, $a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c$.

*Demonstração.* Seja S = $A_{(ABC)}$ e $D$ a intersecção da paralela a BC por A com a paralela a $AB$ por $C$. Então $ABC \equiv CDA$ por ALA (uma vez que B$\hat{A}$C = D$\hat{C}$A, AC é lado comum e B$\hat{C}$A = D$\hat{A}$C, de sorte que $A_{(ABC)} = A_{(CDA)}$ pelo postulado 1). Mas, como ABCD é um paralelogramo de base $a$ e altura $h_a$, segue da proposição anterior que

$$2\text{S} = A_{(ABC)} + A_{(CDA)} = A_{(ABCD)} = a \cdot h_a$$

Portanto $A_{(ABC)} = S = \dfrac{a \cdot h_a}{2}$, ilustrado na figura 9, e as outra duas igualdades podem ser obtidas de modo análogo □

Figura 9 – Área do triângulo




Fonte: Elaborada pelo autor.

#### 3.3.3.4 Trapézio

**Proposição 11.** Se ABCD é um trapézio de bases $\overline{AB} = a$, $\overline{CD} = b$ altura $h$, então

$$A_{(ABCD)} = \frac{(a+b) \cdot h}{2}.$$

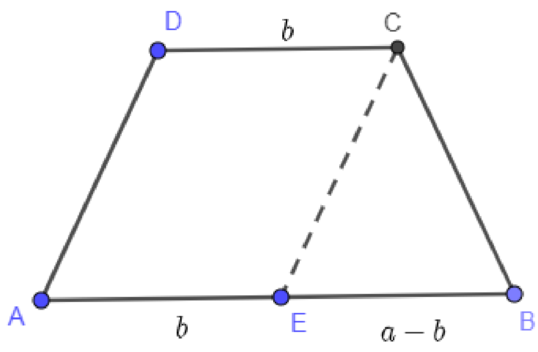
*Demonstração.* Suponha, sem perda de generalidade , que $a > b$ (figura). Se E $\in AB$ for tal que $\overline{AE} = b$, então o quadrilátero $AECD$ tem dois lados paralelos e iguais, de modo que é um paralelogramo.

Como $\overline{BE} = a - b$, temos

$$A_{(ABCD)} = A_{(AECD)} + A_{(EBC)}$$

$$A_{(ABCD)} = b \cdot h + \frac{(a-b) \cdot h}{2} = \frac{(a+b) \cdot h}{2}.$$ □

Figura 10 – Área do trapézio




Fonte: Elaborada pelo autor.

#### 3.3.3.5 Losango

**Proposição 12.** Se ABCD é um losango de diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, então

$$A_{(ABCD)} = \frac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{BD}.$$

*Demonstração.* Dado um losango ABCD com diagonais AC e BD ao traçar a diagonal AC tem-se que ABC $\equiv$ ADC por L.L.L. que implica em $\hat{B} = \hat{D}$ , analogamente com a diagonal $\overline{BD}$ têm-se que $\hat{A} = \hat{C}$.

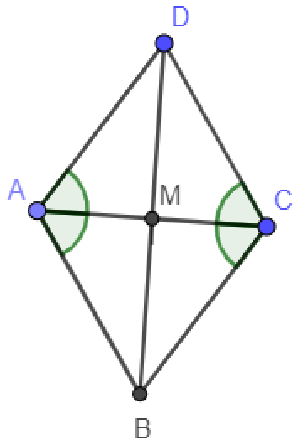
Observe ainda que o triângulo ABC é isósceles e ao traçar a mediana BM obtêm-se ABM e CBM são congruentes por L.L.L., assim A$\hat{M}$B = C$\hat{M}$B e $A\hat{M}B + C\hat{M}B$ = 180º, logo $A\hat{M}B = C\hat{M}B$ = 90º, analogamente nos triângulos BCD, CDA e DAB temos que as diagonais são perpendiculares. Sendo as diagonais perpendiculares em M o encontro das diagonais $\overline{BM}$ e $\overline{CM}$ são as alturas dos triângulos ABC e CDA, respetivamente, ilustrado na figura 11. Assim tem-se que:

$$A_{(ABCD)} = A_{(ABC)} + A(ACD)$$
$$A_{(ABCD)} = \frac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{BM} + \frac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{MD}$$
$$A_{(ABCD)} = \frac{1}{2}\overline{AC} \cdot (\overline{BM} + \overline{MD})$$
$$A_{(ABCD)} = \frac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{BD}$$ □

### 3.3.4 Geometria analítica

Para a construção da coordenada no plano inicia-se com a distância entre pontos numa reta com orientação. Sejam $r$ uma reta, $O$ e $A$ pontos distintos em r. Uma reta $r$ sobre a qual foi escolhida uma semirreta $\overrightarrow{OA}$ denomina-se eixo E de origem O com sentido de percurso induzido pela semirreta $\overrightarrow{OA}$.

Figura 11 – Área do Losango



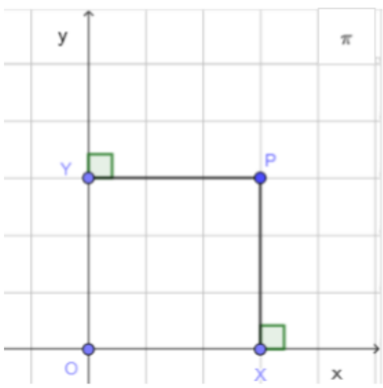

Fonte: Elaborada pelo autor.

O eixo E é posto em correspondência com o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais da seguinte maneira: a origem O faz-se corresponder o número 0 (zero); a cada ponto X $\neq$ O da semirreta $\overrightarrow{OA}$ corresponde o número real positivo $x = d(O,X)$; a cada ponto X $\neq$ O da semirreta $\overrightarrow{OB}$, oposta a semirreta $\overrightarrow{OA}$, corresponde o número real negativo $x = -d(O,X)$;

Dado um sistema de eixos ortogonais num plano $\pi$ , considere um par de eixos, eixo $OX$ e eixo $OY$, com unidade de medida de igual comprimento, que intersectam-se perpendicularmente na origem comum $O$. Por convenção, o eixo $OX$ é denominado eixo horizontal e o eixo $OY$, o eixo vertical. Esse sistema de eixos ortogonais $OXY$ estabelece uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano $\pi$ e os pares ordenados de números reais do conjunto $\mathbb{R}^2 = \{(x,y)|x,y \in \mathbb{R}\}$.

De fato, ao ponto $P \in \pi$ fazemos corresponde o par ordenado $(x,y)$,onde $x$ é a coordenada do pé da perpendicular ao eixo $OX$ e $y$ é a coordenada do pé da perpendicular ao eixo $OY$ que passam por P.

Figura 12 – Coordenadas x e y do ponto P




Fonte: Elaborada pelo autor.

Para uma construção de vocabulário por parte do professor com seu aluno na realização da atividade apresentada em 4.3 é necessário cautela na apresentação do conceito de distância, principalmente na situação entre ponto e reta, e entre retas paralelas.

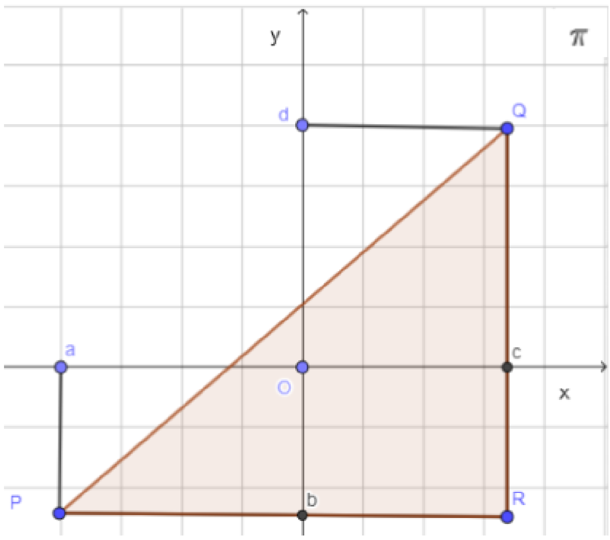
Para avançar nesse dialogo iniciar-se-a com a distância entre pontos, equações da reta por meio de segmentos orientados (vetores) e distâncias envolvendo retas.

#### *3.3.4.1 Distância entre pontos do plano*

Sejam $P = (a,b)$ e $Q = (c,d)$ pontos do plano $\pi$ dados por suas coordenadas em relação a um sistema de eixo ortogonais OXY.

A distância de P a Q, que designamos d(P,Q), é a medida da hipotenusa PQ do triângulo retângulo PQR de cateto PR e QR, onde $R = (c,b)$.

Figura 13 – Distância entre dois pontos




Fonte: Elaborada pelo autor.

**Proposição 13.** Dados que $P(a,b)$ e que $Q(c,d)$ tem-se que $d(P,Q) = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$.

*Demonstração.* Sendo a distância entre dois pontos de um eixo igual ao módulo da diferença de suas coordenadas, as medidas desses catetos são, respectivamente, $|PR| = |a-c|$ e $|QR| = |b-d|$. Então pelo Teorema de Pitágoras, obtemos:

$$d(P,Q) = |PQ| = \sqrt{|PR|^2 + |QR|^2} = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}. \tag{3.1}$$

□

Com o cálculo da distância em coordenadas podemos obter uma caracterização algébrica da circunferência do plano.

**Definição 7.** O circulo C de centro no ponto A $\in \pi$ e raio $r > 0$ é o conjunto dos pontos do plano $\pi$ situados à distância r do ponto A, ou seja: C = {P $\in \pi$ | $d(P,A) = r\}$.

**Proposição 14.** Uma circunferência de centro $A(a,b)$ e raio $r$ tem como representação algébrica $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

*Demonstração.* Se $A = (a,b)$ são as coordenadas do centro num sistema de eixos ortogonais OXY do plano $\pi$, segue :

$P = (x,y) \in C \Longleftrightarrow d(P,A) = r.$

$\Longleftrightarrow d(P,A)^2 = r^2.$

$\Longleftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$

Assim, associamos à circunferência C a equação

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2. \tag{3.2}$$

□

### 3.3.4.2 Vetores no plano

Para a obtenção da equação da reta será preciso a apresentação da base de vetores no plano. Será apresentado o suficiente para o estudo da distância entre ponto e reta, e entre retas que são situações possíveis de serem exploradas na atividade apresentada em 4.3.

Seja $AB$ um segmento orientado de origem $A$ e extremidade $B$. Isto é, que o segmento $AB$ estabelece o sentido de percurso de $A$ para $B$. Pode-se dizer que o segmento $BA$ tem sentido de percurso oposto ao do segmento $AB$. Sendo assim, os segmentos orientados podem ser classificados a partir da relação de equipolência:

**Definição 8.** Diz-se que os segmentos orientados AB e CD são equipolentes, e escrevemos AB $\equiv$ CD, quando satisfazem às seguintes três propriedades:

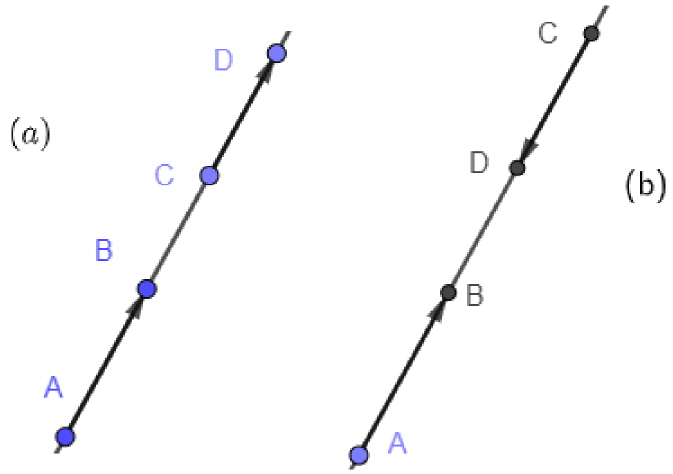
(a) têm o mesmo comprimento;

(b) são paralelos ou colineares;

(c) têm o mesmo sentido;

Dois segmento colineares $AB$ e $CD$,conforme a figura 14, têm o mesmo sentido quando as semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ induzem o mesmo sentido de percurso na reta que os contêm.

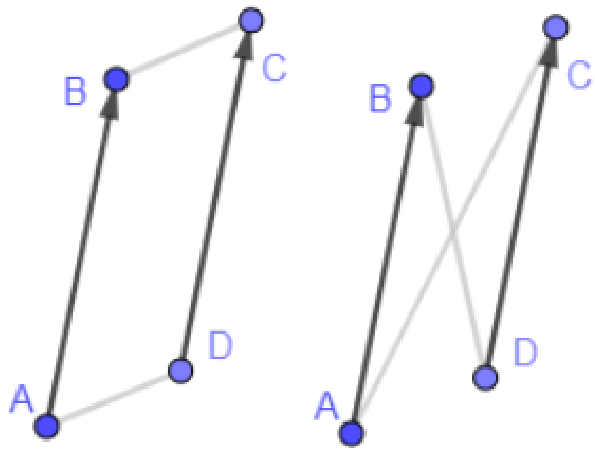
Figura 14 – Segmentos colineares:AB e CD (a) o mesmo sentido (b) sentidos oposto




Fonte: Elaborada pelo autor.

Se $AB$ e $CD$ são segmentos paralelos e de igual comprimento, $AB$ e $CD$ têm o mesmo sentido quando ABDC é um paralelogramo[10].

Figura 15 – (a) AB $\equiv$ CD (b) AB $\not\equiv$ CD




Fonte: Elaborada pelo autor.

Assim, na figura 15 (a), AB $\equiv$ CD, porque ABDC é um paralelogramo e, na figura 15 (b), AB $\not\equiv$ CD, pois ABDC não é um paralelogramo.

**Proposição 15.** AB $\equiv$ CD se e somente se ponto médio de AD = ponto médio de BC.

*Demonstração.* Se AB $\parallel$ CD, a equivalência é verdadeira pois nesse caso ABDC é um paralelogramo, portanto suas diagonais AD e BC cortam-se ao meio.

[10] Um paralelogramo tem dois pares de lados paralelos

Se AB e CD são colineares, seja r a reta que os contém provida de uma origem e um sentido de percurso escolhido de modo que B esteja à direita de A.

Sejam a, b, c e d as coordenadas de A,B,C e D na reta r em relação a uma unidade de medida. ($\Longrightarrow$) se AB $\equiv$ CD, temos $a < b$ e $c < d$, pois AB e CD têm o mesmo sentido, e $b-a = d-c$, porque $|AB| = |CD|$.

Logo, $b-a = d-c \Longleftrightarrow a+d = b+c \Longleftrightarrow \dfrac{a+d}{2} = \dfrac{b+c}{2} \Longleftrightarrow$ ponto médio de AD = ponto médio de BC.

($\Longleftarrow$) Se ponto médio de $AD = \dfrac{a+d}{2} = \dfrac{b+c}{2}$ = ponto médio de $BC$, temos:

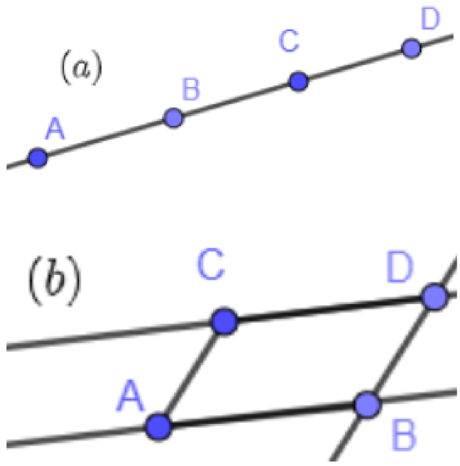
$a+d = b+c \Longleftrightarrow b-a = d-c$.

Como $b-a$ e $d-c$ têm sinal e módulo iguais, os segmentos colineares $AB$ e $CD$ possuem o mesmo sentido e o mesmo comprimento. Portanto, $AB \equiv CD$. □

**Proposição 16.** Dados os pontos $A, B$ e $C$, existe um único ponto $D$ tal que $AB \equiv CD$.

*Demonstração.* Temos dois casos a considerar:

Figura 16 – $AB \equiv CD$




Fonte: Elaborada pelo autor.

(a) A,B e C são colineares. Basta considerar, na reta r que contém esses pontos, o único ponto D tal que $|CD| = |AB|$ e CD e AB têm o mesmo sentido.

(b) $A, B$ e $C$ não são colineares. Basta tomar $D$ como sendo o quarto vértice do paralelogramo que possui $AB$ e $AC$ como lados. Ou seja, $D$ é o ponto de interseção da reta que passa por $B$ e é paralela à reta que contém o segmento $AC$, com a reta s, que passa por $C$ e é paralela à reta que contém o segmento $AB$.

□

Pode-se caracterizar equipolência em termos de coordenadas. Para isso, consideremos um sistema de eixos ortogonais OXY no plano, e sejam $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2), C = (c_1, c_2)$ e $D = (d_1, d_2)$ pontos do plano expressos em coordenadas com relação ao sistema dado.

**Proposição 17.** $AB \equiv CD \iff b_1 - a_1 = d_1 - c_1$ e $b_2 - a_2 = d_1 - c_2$.

*Demonstração.* Pela Proposição 15

$$AB \equiv CD \iff \text{ponto médio de } AD = \text{ponto médio de } BC$$

$$\iff \left(\frac{a_1+d_1}{2}, \frac{a_2+d_2}{2}\right) = \left(\frac{b_1+c_1}{2}, \frac{b_2+c_2}{2}\right)$$

$$\iff (a_1+d_1, a_2+d_2) = (b_1+c_1, b_2+c_2)$$

$$\iff a_1+d_1 = b_1+c_1 \text{ e } a_2+d_2 = b_2+c_2$$

$$\iff b_1-a_1 = d_1-c_1 \text{ e } b_2-a_2 = d_2-c_2.$$

□

**Definição 9.** Sejam $A$ e $B$ pontos no plano. O vetor $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{AB}$ é o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a $AB$. Cada segmento equipolente a $AB$ é um representante do vetor $\overrightarrow{AB}$

**Observação 2.**

(a) Os segmentos orientados $AB$ e $CD$ são equipolentes se e somente se representam o mesmo vetor. Isto é,

$$AB \equiv CD \iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

.

(b) Dado um ponto A do plano, o vetor $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{AA}$ é o vetor nulo. Note que $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{BB}$ , qualquer que seja o ponto B do plano.

(c) Pela Proposição 16 dado um vetor $\overrightarrow{v}$ e um ponto qualquer C, existe um único ponto D tal que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CD}$. Isto é, qualquer ponto do plano é origem de um único segmento orientado representante do vetor $\overrightarrow{v}$.

**Definição 10.** Dados os pontos $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$, os números $b_1 - a_1$ e $b_2 - a_2$ são as coordenadas do vetor $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ e escrevemos $\overrightarrow{v} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$.

Tem-se que $AB \equiv CD$, então, pela proposição 17

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (d_1 - c_1, d_2 - c_2) = \overrightarrow{CD}.$$

Isto é, as coordenadas de um vetor podem ser calculadas usando qualquer segmento orientado que o represente.

Da Observação 2, temos que se $\overrightarrow{v}$ é um vetor e $AB$ é um dos seus representante, então existe um único ponto $P$ tal que $\overrightarrow{v} \equiv \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$. Assim, se $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2)$ e $P = (x, y)$:

$$AB \equiv OP \iff (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (x - 0, y - 0) = (x, y).$$

Ou seja, vale a seguinte proposição:

**Proposição 18.** Seja OXY um sistema de eixos ortogonais do plano. Para todo vetor $\overrightarrow{v}$ existe um único ponto P tal que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP}$. Além disso, as coordenadas do ponto $P$ coincidem com as coordenadas do vetor $\overrightarrow{v}$.

Apesar de termos algumas operações entre vetores, focaremos nas que são fundamentais para conceitos de geometria analítica que poderiam ser explorados com os alunos na educação básica em eventual ampliação da atividade apresentada em 4.3. Desta forma, define-se no conjunto de vetores do plano a operação de multiplicação de vetor por um número real, que a cada vetor $\overrightarrow{v}$ e a cada número real $\lambda$, também chamado escalar, associa o vetor $\lambda\overrightarrow{v}$, chamado produto do escalar $\lambda$ pelo vetor $\overrightarrow{v}$.

**Definição 11.** O produto de $\lambda \in \mathbb{R}$ por $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ é o vetor $\lambda\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{AB}$, representado pelo segmento $AC$, tal que:

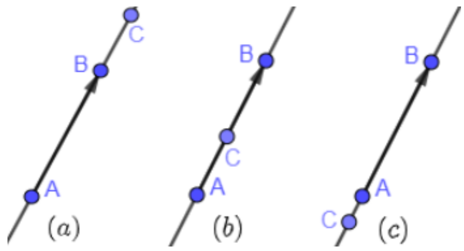
(a) $A, B$ e $C$ são colineares;

(b) $d(A,C) = |\lambda| d(A,B)$;

(c) $C = A$ se $\lambda = 0$;

(d) os segmentos $AC$ e $AB$ têm igual sentido se $\lambda > 0$, e sentidos opostos se $\lambda < 0$.

Figura 17 – Multiplicação de Escalar por vetores $\lambda\vec{v} = \vec{AC}$ para : $(a)\lambda > 1; (b)0 < \lambda < 1; (c)\lambda < 0$




Fonte: Elaborada pelo autor.

Seja OXY um sistema de eixos ortogonais. Na Proposição 19 obtêm-se as coordenadas do ponto C da Definição 11 em termos de $\lambda$ e das coordenadas dos pontos $A$ e $B$.

**Proposição 19.** Se $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ , então $\lambda\vec{AB} = \vec{AC}$, onde

$$C = (a_1 + \lambda(b_1 - a_1), a_2 + \lambda(b_2 - a_2)).$$

Consequentemente,

$$\lambda\vec{AB} = (\lambda(b_1 - a_1), \lambda(b_2 - a_2))$$

*Demonstração.* Seja $C = (a_1 + \lambda(b_1 - a_1), a_2 + \lambda(b_2 - a_2))$ é claro que se $\lambda = 0$, então $C = A$ (condição (c) da definição 11). A condição (b) da Definição 11 é satisfeita, pois:

$$d(A,C) = \sqrt{\lambda^2(b_1 - a_1)^2 + \lambda^2(b_2 - a_2)^2} = |\lambda|\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} = |\lambda|d(A,B)$$

Para mostrar que os pontos A,B e C são colineares (condição (a) da definição 11), no caso $\lambda \neq 0$, começamos observando que:

$$\begin{aligned} d(C,B) &= \sqrt{((a_1 + \lambda(b_1 - a_1)) - b_1)^2 + (a_2 + \lambda(b_2 - a_2) - b_2)^2} \\ &= \sqrt{(\lambda(b_1 - a_1) - (b_1 - a_1))^2 + (\lambda(b_2 - a_2) - (b_2 - a_2))^2} \\ &= \sqrt{(\lambda - 1)^2(b_1 - a_1)^2 + (\lambda - 1)^2(b_2 - a_2)^2} \\ &= |\lambda - 1|\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} = |\lambda - 1|d(A,B) \end{aligned}$$

Analisemos os quatro casos possíveis:

Caso 1. $\lambda \in (0,1)$. Como $|\lambda - 1| = 1 - \lambda$, temos:

$$d(A,C) + d(C,B) = \lambda d(A,B) + (1 - \lambda)d(A,B) = d(A,B).$$

Logo, $A, B$ e $C$ são colineares e C está entre $A$ e $B$.

Caso 2. $\lambda = 1$. Nesse caso, $C = B$.

Caso 3. $\lambda > 1$. Temos $|\lambda - 1| = \lambda - 1$, portanto

$$d(A,B) + d(B,C) = d(A,B) + (\lambda - 1)d(A,B) = d(A,C).$$

Assim, $A, B$ e $C$ são colineares e $B$ está entre $A$ e $C$.

Caso 4. $\lambda < 0$. Como $|\lambda| = -\lambda > 0$ e $|\lambda - 1| = (1 - \lambda)$ , temos:

$$d(C,A) + d(A,B) = -\lambda d(A,B) + d(A,B) = (1 - \lambda)d(A.B) = d(C,B).$$

Logo, $C, A$ e $B$ são colineares e $A$ está entre $C$ e $B$.

Portanto, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ têm o mesmo sentido se $\lambda > 0$ e sentidos opostos se $\lambda < 0$ (condição (d) da Definição 11) □

**Corolário 2.** O vetor $\lambda \overrightarrow{v}$ está bem definido. Isto é, se $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, então

$$\lambda\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{CD}.$$

Logo, se $\overrightarrow{v} = (\alpha, \beta)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então:

$$\lambda \overrightarrow{v} = (\lambda\alpha, \lambda\beta).$$

Em particular, se $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{\lambda v} = \overrightarrow{OQ}$, temos $P = (\alpha, \beta)$ e $Q = (\lambda\alpha, \lambda\beta)$

*Demonstração.* Com efeito, sejam as coordenadas dos pontos $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2), C = (c_1, c_2)$ e $D = (d_1, d_2)$ em relação a um sistema de eixos ortogonais. Como

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (d_1 - c_1, d_2 - c_2) = \overrightarrow{CD},$$

temos, pela Proposição 19,

$$\lambda\overrightarrow{AB} = (\lambda(b_1 - a_1), \lambda(b_2 - a_2)) = (\lambda(d_1 - c_1), \lambda(d_2 - c_2)) = \lambda\overrightarrow{CD}.$$

Logo, se $\overrightarrow{v} = (\alpha, \beta) = \overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$, então

$$\lambda \overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{AB} = (\lambda(b_1 - a_1), \lambda(b_2 - a_2)) = (\lambda\alpha, \lambda\beta).$$

□

**Observação 3.**

- $\lambda \overrightarrow{0} = \lambda\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$.
- $0\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$.
- Não confunda: o número 0 (zero) com o vetor $\overrightarrow{0}$ (**vetor nulo**).

**Proposição 20.** Um ponto $P$ pertence à reta r que passa pelos pontos $A$ e $B$ se, e somente se, $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

*Demonstração.* Pela definição da multiplicação de $\lambda \in \mathbb{R}$ pelo vetor $\overrightarrow{AB}$, o ponto P tal que $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}$ pertence à reta $r$. Reciprocamente , seja $P$ um ponto pertencente à reta r e seja $\mu = \dfrac{d(A,P)}{d(A,B)}$. Se o sentido de percurso de $A$ para $P$ coincidir com o sentido de $A$ para $B$, então $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}$, onde $\lambda = \mu$, pois o ponto $P$ é o único ponto da semirreta de origem em A que passa por B tal que $d(A,P) = \mu d(A,B)$. Se o sentido de percurso de A para P for oposto ao sentido de A para B, então $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}$, onde $\lambda = -\mu$, pois o ponto P é o único ponto da semirreta de origem A oposta à semirreta de origem A que passa por B tal que $d(A,P) = \mu d(A,B)$. □

**Definição 12.** O vetor $\overrightarrow{v}$ é múltiplo do vetor $\overrightarrow{u}$ se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$.

**Proposição 21.** Um dos vetores $\overrightarrow{u} = (a,b)$ e $\overrightarrow{v} = (a',b')$ é múltiplo do outro se e só se

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = ab' - ba' = 0.$$

*Demonstração.* $(\Rightarrow)$ Se $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, temos:

$(a',b') = \lambda(a,b) = (\lambda a, \lambda b) \Rightarrow a' = \lambda a$ e $b' = \lambda b$. Logo, $ab' - ba' = a(\lambda b) - b(\lambda a) = 0$.

$(\Leftarrow)$ Suponhamos que $ab' - ba' = 0$.Consideremos separadamente os casos a $\neq 0$ e $a = 0$.

**Caso** $a \neq 0 : ab' - ba' = 0 \Rightarrow b' = b\frac{a'}{a}$. Logo,

$$\frac{a'}{a}\overrightarrow{u} = \frac{a'}{a}(a,b) = \left(\frac{a'}{a}a, \frac{a'}{a}b\right) = (a',b') = \overrightarrow{v}$$

**Caso** $a = 0 : ba' = 0 \Rightarrow b = 0$ ou $a' = 0$. Logo,

$$\begin{cases} b = 0 \Rightarrow \overrightarrow{u} = (0,0) = \overrightarrow{0} \Rightarrow \overrightarrow{u} = 0\overrightarrow{v}. \\ a' = 0 \;\; e \;\; b \neq 0 \Rightarrow (0,b') = \dfrac{b'}{b}(0,b) \Rightarrow \overrightarrow{v} = \dfrac{b'}{b}\overrightarrow{u}. \end{cases}$$

Em qualquer caso, um dos vetores é múltiplo do outro. □

#### 3.3.4.3 Produto interno

Há uma operação entre vetores denominada **produto interno**, que associa a cada par de vetores um escalar. Outro nome utilizado para essa operação é o **produto escalar**, dando ênfase à natureza escalar do resultado.

Será dado primeiramente uma definição geométrica do **produto interno** e posteriormente obter-se-á sua expressão em termos das coordenadas dos fatores em relação a um sistema de eixos ortogonais. Para a abordagem geométrica precisamos de dois conceitos preliminares: **norma** de um vetor e **ângulo** entre dois vetores.

Seja $OXY$ um sistema de eixos ortogonais no plano.

**Definição 13.** A **norma** ou **comprimento** do vetor $\overrightarrow{v}$ é o número $||\overrightarrow{v}||$ dado pelo comprimento de um segmento representante de $\overrightarrow{v}$.

**Observação 4.** (a) A norma de um vetor independe da escolha do segmento representante. Com efeito, se $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, então $AB \equiv CD$. Portanto,

$$d(A,B) = d(C,D) = ||\overrightarrow{v}||.$$

(b) Se $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2)$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$, então

$$||\overrightarrow{v}|| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}.$$

(c) Se $\overrightarrow{v} = (x,y)$ e $P = (x,y)$ é o ponto tal que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP}$, então

$$||\overrightarrow{v}|| = d(O,P) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

**Observação 5.** (a) Temos $||\overrightarrow{v}|| = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$. Além disso, $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0} \Leftrightarrow ||\overrightarrow{v}|| > 0$.

(b) Se $\overrightarrow{v}$ é um vetor e $\lambda \in \mathbb{R}$, então $||\overrightarrow{v}|| = |\lambda|||\overrightarrow{v}||$. De fato, se $\overrightarrow{v} = (x,y)$, temos $\lambda\overrightarrow{v} = (\lambda x, \lambda y)$. Logo,

$$||\lambda\overrightarrow{v}|| = \sqrt{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2} = \sqrt{\lambda^2(x^2+y^2)} = \sqrt{\lambda^2}\sqrt{x^2+y^2} = |\lambda|||\overrightarrow{v}||.$$

(c) Um vetor é chamado **unitário** se sua norma é igual a 1.

(d) Se $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, o vetor $\dfrac{\overrightarrow{v}}{||\overrightarrow{v}||}$ é um vetor unitário, chamado **normalizado** do vetor $\overrightarrow{v}$, com a mesma direção e o mesmo sentido do vetor $\overrightarrow{v}$. De fato, os vetores têm a mesma direção, pois um é múltiplo do outro, e pelo item **[(b)]**,

$$\left\|\frac{\overrightarrow{v}}{||\overrightarrow{v}||}\right\| = \left\|\frac{1}{||\overrightarrow{v}||}\overrightarrow{v}\right\| = \left|\frac{1}{||\overrightarrow{v}||}\right| ||\overrightarrow{v}|| = \frac{1}{||\overrightarrow{v}||}||\overrightarrow{v}|| = 1.$$

Como $\dfrac{1}{||\overrightarrow{v}||} > 0$, os vetores $\overrightarrow{v}$ e $\dfrac{\overrightarrow{v}}{||\overrightarrow{v}||}$ têm também o mesmo sentido.

(e) Se $\overrightarrow{v} \neq 0$, o vetor $-\dfrac{\overrightarrow{v}}{||\overrightarrow{v}||}$ é também unitário com a mesma direção do vetor $\overrightarrow{v}$, mas tem sentido oposto.

**Definição 14.** O **ângulo** entre os vetores não nulos $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ é o menor ângulo entre os segmentos representantes $AB$ e $AC$ de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, respectivamente. Designamos $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ a medida do ângulo entre $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

**Observação 6.** (a) O ângulo entre dois vetores está bem definido. Para provar esse fato, basta usar que a soma de dois vetores independe de seus representante e o caso LLL de congruência de triângulos.

(b) Medimos os ângulos em **radianos** ou em **graus**, onde $\pi radianos = 180^{o}$.

(c) Note que $0 \leq \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \leq \pi$, equivalentemente, $0^{o} \leq \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \leq 180^{o}$.

(d) Tem-se: $\begin{cases} \angle(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}) = \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}), & \\ \angle(\lambda\overrightarrow{u}, \mu\overrightarrow{v}) = \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}), & \text{se } \lambda\mu > 0 \\ \angle(\lambda\overrightarrow{u}, \mu\overrightarrow{v}) = \pi - \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}), & \text{se } \lambda\mu < 0. \end{cases}$

Assim tem-se condições de definir o produto interno de dois vetores:

**Definição 15.** O produto interno dos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ do plano é o número real:

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se} \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \text{ou} \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}; \\ \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \cos(\theta) & \text{se} \overrightarrow{u} \neq 0, \overrightarrow{v} \neq 0 \text{e} \theta = \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}). \end{cases}$$

**Observação 7.** (a) Da comutatividade da multiplicação de números reais e da observação 6, concluímos que o produto interno é comutativo, isto é:

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle.$$

(b) Se $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ e $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ temos, pela Observação 6 que $\theta = \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \angle\left(\frac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}, \frac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}\right)$.

Logo,
$$\left\langle \frac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}, \frac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|} \right\rangle = \left\| \frac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|} \right\| \left\| \frac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|} \right\| \cos\theta = \cos\theta \Rightarrow \theta = \arccos\left\langle \frac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}, \frac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|} \right\rangle,$$
ou seja, o produto interno mede essencialmente o ângulo entre dois vetores do plano.

(c) O produto interno de um vetor com ele mesmo é não negativo.

Com efeito, sendo $\theta = \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$,

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \cos 0\| = \|\overrightarrow{u}\|^2 \geq 0.$$

Na seguinte proposição obtém-se o produto interno entre dois vetores através de suas coordenadas em relação a um sistema de eixos ortogonais.

**Proposição 22.** Sejam $\overrightarrow{u} = (a, b)$ e $\overrightarrow{v} = (\alpha, \beta)$ dois vetores do plano. Então,

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = a\alpha + b\beta. \tag{3.3}$$

*Demonstração.* Se um dos vetores $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ é nulo, temos $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0$ e, também. $a\alpha + b\beta = 0$. Logo, a identidade 3.3 é satisfeita.

Sejam $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OQ}$ vetores não nulos, com $P = (a, b)$ e $Q = (\alpha, \beta)$. Então,

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{v} - \overrightarrow{u} = (\alpha - a, \beta - b).$$

Supondo que $O, P$ e $Q$ são colineares e aplicando a Lei dos Cossenos ao triângulo $OPQ$, obtemos:

$$||\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}||^2 = ||\overrightarrow{u}||^2 + ||\overrightarrow{v}||^2 - 2||\overrightarrow{u}||||\overrightarrow{v}||\cos\theta,$$

onde $\theta = \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Daí:

$\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|\cos\theta = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}\|^2$

$= (a^2+b^2) + (\alpha^2+\beta^2) - ((\alpha-a)^2 + (\beta-b)^2)$

$= a^2+b^2+\alpha^2+\beta^2 - (\alpha^2 - 2\alpha a + a^2 + \beta^2 - 2\beta b + b^2)$

$= a^2+b^2+\alpha^2+\beta^2 - \alpha^2 + 2\alpha a - a^2 - \beta^2 + 2\beta b - b^2$

$2\alpha a + 2\beta b = 2(a\alpha + b\beta).$

Portanto,

$$\langle\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|\cos\theta = a\alpha + b\beta.$$

No caso em que $O, P$ e $Q$ são colineares, temos, pela Proposição 20, que existe um número real $\lambda \neq 0$ tal que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OP} = \lambda\overrightarrow{OQ} = \lambda\overrightarrow{v}$. Então, $a = \lambda\alpha, b = \lambda\beta$ e

$$\langle\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle = \langle\lambda\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}\rangle = \|\lambda\overrightarrow{v}\|\|\overrightarrow{v}\|\cos\angle\lambda\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} = |\lambda|\|\overrightarrow{v}\|^2\cos\angle\lambda\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}.$$

Como $\cos\angle\lambda\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} = 1$ se $\lambda > 0$ e $\cos\angle\lambda\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} = -1$ se $\lambda < 0$, segue que $\langle\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle = \lambda\|\overrightarrow{v}\|^2$.

Logo,

$$\langle\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle = \lambda(\alpha^2+\beta^2) = (\lambda\alpha)\alpha + (\lambda\beta)\beta = a\lambda + b\beta.$$

□

**Definição 16.** O vetor $\overrightarrow{u}$ é **perpendicular** (ou **ortogonal**) ao vetor $\overrightarrow{v}$, e escrevemos $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$, se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ ou $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 90^\circ$.

Os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são **ortonormais** quando são unitários e ortogonais.

Note que $\overrightarrow{u}$ é perpendicular a $\overrightarrow{v}$ se e só se $\overrightarrow{v}$ é perpendicular a $\overrightarrow{u}$.

A seguinte proposição é um critério de perpendicularidade em termos do produto interno.

**Proposição 23.** Dois vetores são perpendiculares se e só se seu produto interno é zero:

$$\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \Leftrightarrow <\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}> = 0.$$

*Demonstração.* Se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, então $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ e também, $<\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}> = 0$.

Sejam $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}, \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ e $\theta = \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, então:

$$<\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}> = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|\cos\theta = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 90^\circ.$$

□

A seguinte proposição caracteriza, em termos de coordenadas, todos os vetores perpendiculares a um vetor dado:

**Proposição 24.** Se $\overrightarrow{u} = (a,b)$ é um vetor não nulo, então:

$\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{v} = \lambda(-b,a)$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

*Demonstração.* Se $\overrightarrow{v} = \lambda(-b,a)$, então:

$$< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >= a(-\lambda b) + b(\lambda a) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}.$$

Reciprocamente, se $\overrightarrow{v} = (c,d)$ é um vetor tal que $< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >= 0$, então $ac + bd = 0$, isto é,

$$ca - d(-b) = \begin{vmatrix} c & d \\ -b & a \end{vmatrix} = 0.$$

Logo, pela Proposição 21, o vetor $\overrightarrow{v} = (c,d)$ é múltiplo do vetor $(-b,a)$, ou seja, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{v} = (c,d) = \lambda(-b,a)$. □

#### 3.3.4.4 *Equações da reta no plano*

Será realizado um estudo algébrico sobre retas no plano sendo tratados assuntos como reta paramétrica, equação geral da reta, equação reduzida da reta, distância entre pontos e distância entre ponto e reta, pois são conteúdos trabalhados indiretamente na aplicação da atividade 4.3 ou até diretamente se redirecionada para o ensino médio. Para isso iniciar-se-á pela equação paramétrica da reta.

##### 3.3.4.4.1 Equação paramétrica da reta

Neste tipo de equação a coordenadas dos pontos pertencentes a uma reta são dadas por expressões do primeiro grau em função de um parâmetro real. Ao variar o valor do parâmetro, encontra-se pontos distintos da reta, e a cada ponto da reta corresponde um parâmetro. As equações paramétricas da reta serão divididas em dois casos: reta que passa por dois pontos e reta que contém um ponto e é paralela a um vetor.

**Reta r que passa pelos pontos A e B**

Seja r a reta que passa pelos pontos $A$ e $B$, e seja P um ponto do plano. Então, pela Proposição 20, o ponto P pertence à reta r se e somente se o vetor $\overrightarrow{AP}$ é um múltiplo do vetor $\overrightarrow{AB}$. Isto é, $P \in r$ se, e somente se, existe um número $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}.$$

Note que o número $t$ é determinado de forma único pelo P e é chamado **parâmetro** de P em r, assim, para atingir o ponto P na reta r, devemos ir até o ponto A e nos deslocarmos ao longo da reta por $t\overrightarrow{AB}$. Escreve-se então a equação que determina o ponto P "pela variação do parâmetro t"da seguinte forma, chamada **equação paramétrica** da reta r:

$$r : P = A + t\overrightarrow{AB}, t \in \mathbb{R}.$$

Se $A = (a,b), B = (a',b')$ e $P = (x,y)$ são as coordenadas dos pontos num sistema de coordenadas, então:

$$P = (x,y) \in r \Leftrightarrow (x,y) = (a,b) + t(a'-a, b'-b), \text{ para algum } t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a + t(a'-a) \\ y = b + t(b'-b) \end{cases} \text{, para algum } t \in \mathbb{R}$$

que são as **equações paramétricas** da reta r.

**Definição 17.** Um vetor $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ é paralelo a um reta r quando, para quaisquer dois pontos $A, B \in r$, o vetor $\overrightarrow{AB}$ é múltiplo do vetor $\overrightarrow{v}$. Neste caso, escreve-se $\overrightarrow{v} \parallel r$. Um vetor $\overrightarrow{v}$ paralelo a uma reta r é chamado **vetor direção** de r.

Note que se tomar dois pontos C e D pertencentes à reta r que passa pelos pontos A e B, então existem $s \in \mathbb{R}$ tais que $\overrightarrow{AC} = s\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD} = t\overrightarrow{AB}$. Logo,

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{AB} - s\overrightarrow{AB} = (t-s)\overrightarrow{AB}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{CD} = \lambda\overrightarrow{AB}$, onde $\lambda = t - s$.

Verificamos assim que dois vetores determinados por pontos distintos pertencentes a uma mesma reta são sempre múltiplos.

**Observação 8.** É fácil mostrar que um vetor $\overrightarrow{v}$ é paralelo à reta r se e somente se $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{CD}$, onde C e D são pontos distintos quaisquer na reta r. E se $\overrightarrow{v}$ é um vetor paralelo à reta r, então $\overrightarrow{w}$ é paralelo à reta r se e só se $\overrightarrow{w}$ e $\overrightarrow{v}$ são múltiplos.

**Reta r que passa pelo ponto A e é paralela ao vetor** $\overrightarrow{v} \neq 0$.

Se r é a reta que passa pelo A e tem direção $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, então:

$P \in r \Leftrightarrow \overrightarrow{AP}$ é múltiplo de $\overrightarrow{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{v}$, para algum $t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow P = A + t\overrightarrow{v}$, para algum $t \in \mathbb{R}$.

Portanto, a **equação paramétrica** de r é

$$r : P = A + t\overrightarrow{v}; t \in \mathbb{R}.$$

Escrevendo essa equação em coordenadas, temos que se $A = (a,b)$ e $\overrightarrow{v} = (\alpha, \beta)$, então as **equações paramétricas** de r são:

$$r : \begin{cases} x = a + \alpha t \\ y = b + \beta t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

#### 3.3.4.4.2 Equação cartesiana da reta

Utilizar-se-á o produto interno para caracterizar algebricamente uma reta normal ou perpendicular a uma direção dada. Desta forma apresentar-se-á um segundo tipo de equação da reta: a equação cartesiana.

**Definição 18.** Um vetor $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ é **normal** ou **perpendicular** a uma reta $r$ se $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{AB}$, quaisquer que sejam os pontos $A, B \in r$

Seja r a reta que passa pelo ponto $A = (x_0, y_0)$ e é normal ao vetor $\overrightarrow{u} = (a,b) \neq \overrightarrow{0}$. Então,

$$P = (x,y) \in r \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{u}$$

$$\Leftrightarrow \left\langle \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{u} \right\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle (x - x_0, y - y_0), (a,b) \rangle = 0$$

$\Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow ax + by = ax_0 + by_0 \Leftrightarrow ax + by = c$, onde $c = ax_0 + by_0$.

A **equação cartesiana** da reta $r$ é

$$r : ax + by = c.$$

Diferente das equações paramétricas, nesse caso as coordenadas dos pontos pertencentes à reta precisam satisfazer a uma única equação. Na equação $ax + by = c$, os coeficientes a e b de x e y, respectivamente, são as coordenadas do vetor normal $\overrightarrow{u} = (a,b)$ à reta r e o valor de c é obtido conhecendo um ponto de r, por exemplo, o ponto $A = (x_0, y_0)$. Observe também que a e b não podem ser ambos iguais a zero, pois $\overrightarrow{u} = (a,b)$ é um vetor não nulo.

**Observação 9.** Segue, da proposição 24, que um vetor $\overrightarrow{u} = (a,b) \neq (0,0)$ é normal à reta r se e somente se o vetor $\overrightarrow{v} = (-b,a)$ é paralelo a r. E se $\overrightarrow{u}$ é normal à reta r, então $\overrightarrow{w}$ é normal a r se e só se $\overrightarrow{w}$ e $\overrightarrow{u}$ são múltiplos.

#### 3.3.4.4.3 Equação reduzida da reta ou equação afim

Seja $r : ax + by = c$ uma reta dada por sua equação cartesiana, onde $\overrightarrow{u} = (a,b) \neq (0,0)$ é um vetor normal a r.

Vamos verificar que r pode ser reescrita nas seguintes formas:

(a) Se $b = 0$, um ponto $(x,y) \in r$ se, e somente se, $x = \dfrac{c}{a}$. Ou seja, se $d = \dfrac{c}{a}$ (note que $a \neq 0$), então $r = \{(d,y) | y \in \mathbb{R}\}$.

Uma reta do tipo $r : x = d$ é dita **vertical**, pois nesse caso r é paralela ao eixo $OY$ ou coincide com esse eixo.

(b) Se $b \neq 0$, um ponto $(x,y) \in r$ se, e somente se,
$by = -ax + c \Leftrightarrow y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$.
Ou seja, se $m = -\frac{a}{b}$ e $n = \frac{c}{b}$, então $r = \{(x, mx+n) | x \in \mathbb{R}\}$.

A **equação reduzida da reta ou equação afim** r é a equação:

$$y = mx + n.$$

Provamos assim que toda reta r não vertical é representada por uma equação da forma $y = mx + n$, onde:

1. O número n é a ordenada do ponto onde r intersecta o eixo OY. Se n = 0, passa pela origem.

2. O número m, chamado **inclinação ou coeficiente angular da reta** r, é a razão entre o acréscimo de y e o acréscimo de x quando se passa de um ponto a outro sobre a reta. De fato, se $x_0 \neq x_1, y_0 = mx_0 + n$ e $y_1 = mx_1 + n$, então:
$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{(mx_1 + n) - (mx_0 + n)}{x_1 - x_0} = \frac{m(x_1 - x_0)}{x_1 - x_0} = m.$

Além disso, a função $y = mx + n$ é

1. **crescente** se $m > 0$, isto é, se $x_1 < x_2$, então $y_1 = mx_1 + n < y_2 = mx_2 + n$.

2. **decrescente** se $m < 0$, isto é, se $x_1 < x_2$, então $y_1 = mx_1 + n > y_2 = mx_2 + n$.

3. **constante** se $m = 0$, pois $y = n$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Nesse caso, dizemo que $r : y = n$ é uma **reta horizontal**.

Se $\theta$ é o ângulo que a reta $r : y = mx + n$ faz com o semieixo $OX$ positivo. Então,

$$tg\theta = m.$$

De fato, veja as figuras:

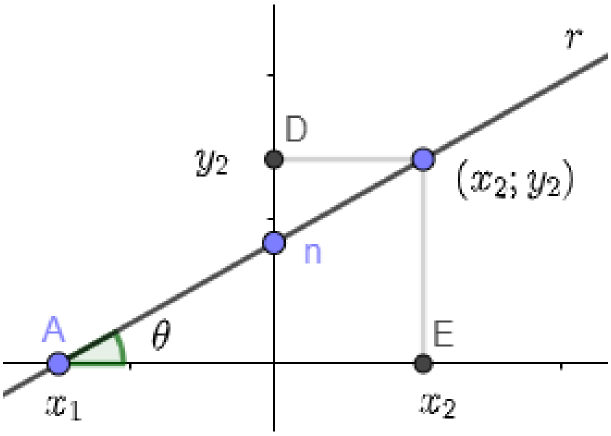
#### 3.3.4.5 *Posição relativa entre retas*

Para a compreensão da distância entre reta e ponto é necessário a compreensão da posição relativa entre retas. Por isso apresenta-se sobre o paralelismo e perpendicularismo entre retas.

##### 3.3.4.5.1 Paralelismo e perpendicularismo entre retas

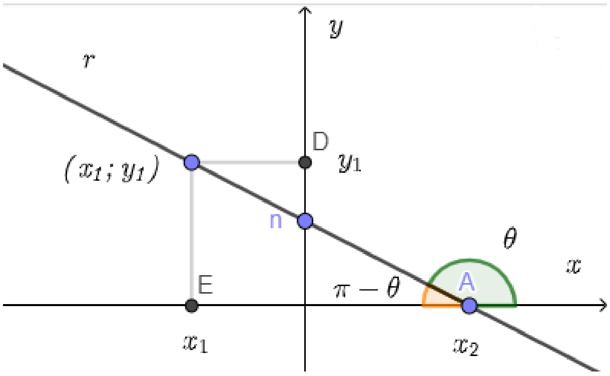
Duas retas $r_1$ e $r_2$ no plano podem estar em três posições relativas (uma em relação à outra), ou seja, as retas $r_1$ e $r_2$ podem ser:

Figura 18 – Caso $m > 0 : 0 < \theta < \frac{\pi}{2}.m = \frac{y_2 - 0}{x_2 - x_1} = tg\theta$




Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 19 – Caso $m < 0 : \frac{\pi}{2} < \theta < \pi.m = \frac{0 - y_1}{x_2 - x_1}$




Fonte: Elaborada pelo autor.

(a) coincidentes: quando são iguais, isto é, $r_1 = r_2$;

(b) paralelas: quando não se intersectam, isto é, $r_1 \bigcap r_2 = \varnothing$. Neste caso, escrevemos $r_1 \parallel r_2$;

(c) concorrentes: quando se intersectam em um ponto, isto é, $r_1 \bigcap r_2 = P$.

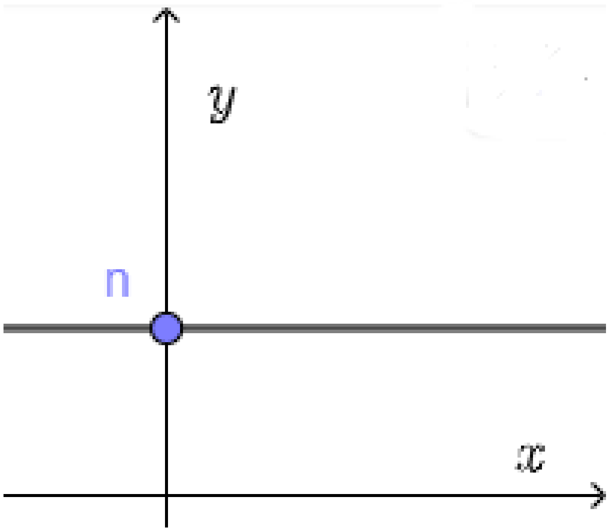
A partir das equações cartesianas de $r_1$ e $r_2$, determinaremos quando ocorre cada uma detas situações.

**Proposição 25.** As retas $r_1 : ax + by = c$ e $r_2 : a'x + b'y = c'$ são paralelas ou coincidentes se e somente se existe $\lambda \neq 0$ tal que $(a', b') = \lambda(a, b)$, isto é, se e somente se seus vetores normais são múltiplos.

*Demonstração.* Suponhamos que $a' = \lambda a, b' = \lambda b, c' \neq \lambda c$ e $\lambda \neq 0$. Se $P = (x, y) \in r_1$, ou seja, $ax + by = c$, então

$$\lambda ax + \lambda by = \lambda c \Leftrightarrow a'x + b'y = \lambda c \neq c'.$$

Figura 20 – Caso $m = 0 : \theta = 0.m = 0 \Rightarrow \theta = 0 \Rightarrow m = tg\theta$




Fonte: Elaborada pelo autor.

Provamos assim que se $P = (x,y) \in r_1$, então $P = (x,y) \notin r_2$, ou seja, $r_1 \bigcap r_2 = \varnothing$. Por outro lado, se $a' = \lambda a, b' = \lambda b, c' = \lambda c$ e $\lambda \neq 0$, então

$$ax + by = c \Leftrightarrow \lambda ax + \lambda by = \lambda c \Leftrightarrow a'x + b'y = c',$$

ou seja, as retas $r_1$ e $r_2$ são coincidentes. Suponhamos agora que $r_1 \bigcap r_2 = \varnothing$ ou $r_1 = r_2$, ou seja, que $r_1$ e $r_2$ são retas paralelas ou coincidentes. Consideremos o sistema:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c', \end{cases}$$

Se $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b \neq 0$, o sistema possui uma única solução dada por:

$$x = \frac{cb' - c'b}{ab' - a'b} \qquad \text{e} \qquad y = \frac{c'a - ca'}{ab' - a'b}.$$

Logo, como as retas são paralelas ou coincidentes, devemos ter $ab' - a'b = 0$. Isto significa que o vetores $(a,b)$ e $(a',b')$ são múltiplos, ou seja, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $(a',b') = \lambda(a,b)$. Como $(a,b) \neq (0,0)$ e $(a',b') \neq (0,0)$, devemos ter $\lambda \neq 0$. □

**Observação 10.** Pela Observação 9 e pela Proposição 25, duas retas são paralelas ou coincidentes se, e só se, seus vetores paralelos são múltiplos.

**Corolário 3.** As retas $r_1 : ax + by = c$ e $r_2 : a'x + b'y = c'$ são **coincidentes** se e somente se existe $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$, tal que

$$(a',b') = \lambda(a,b)\text{e}c' = \lambda c.$$

*Demonstração.* Pelo teorema acima, se as retas são coincidentes, existe $\lambda \neq 0$ tal que $a' = \lambda a$ e $b' = \lambda b$. Seja $(x_0, y_0)$ um ponto da reta $r$. Como $r_1 = r_2$, as coordenada $x = x_0$ e $y = y_0$ satisfazem também à equação de $r_2$. Logo,

$$c' = a'x_0 + b'y_0 = \lambda a x_0 + \lambda b y_0 = \lambda c,$$

isto é $c' = \lambda c$.

Reciprocamente, se existe $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$, tal que $\lambda a = a', \lambda b = b'$ e $\lambda c = c'$, é claro que as equações de $r_1$ e $r_2$ representam a mesma reta, isto é, $r_1 = r_2$. □

Como consequência do corolário anterior e da Proposição 25, obtemos:

**Corolário 4.** As retas $r_1 : ax + by = c$ e $r_2 : a'x + b'y = c'$ são **paralelas** se e somente se existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, tal que

$$(a', b') = \lambda(a, b) \quad \text{e} \quad c' \neq \lambda c.$$

**Definição 19.** O **ângulo** $\angle r_1, r_2$ **entre duas retas** $r_1$ **e** $r_2$ define-se da seguinte maneira:

1. se $r_1$ e $r_2$ são coincidentes ou paralelas, $\angle(r_1, r_2) = 0$;

2. se as retas são concorrentes, isto é, $r_1 \bigcap r_2 = P, \angle(r_1, r_2)$ é o menor dos ângulos positivos determinados pelas retas.

Em particular, $0 \leq \angle(r_1, r_2) \leq \dfrac{\pi}{2}$. A medida dos ângulos pode ser dada em graus ou radianos.

Sejam $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ vetores paralelos às retas concorrentes $r_1$ e $r_2$, respectivamente. Então, como $\angle(r_1, r_2) = \angle(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ ou $\angle(r_1, r_2) = \pi - \angle(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$

$$\cos\angle(r_1, r_2) = |\cos\angle(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) = \frac{|\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \rangle|}{\|\overrightarrow{v_1}\| \, \|\overrightarrow{v_2}\|}, 0 < \angle(r_1, r_2) \leq \frac{\pi}{2}.$$

Observe que a fórmula vale também quando $r_1$ e $r_2$ são paralelas ou coincidentes, isto é, quando $\angle(r_1, r_2) = 0$, pois, nesses casos, exite $\lambda \neq 0$ tal que $\overrightarrow{v_1} = \lambda \overrightarrow{v_2}$

$$\frac{|\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \rangle|}{\|\overrightarrow{v_1}\| \, \|\overrightarrow{v_2}\|} = \frac{|\langle \lambda \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2} \rangle|}{\|\lambda \overrightarrow{v_2}\| \, \|\overrightarrow{v_2}\|} = \frac{|\lambda| \, |\langle \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2} \rangle|}{|\lambda| \, \|\overrightarrow{v_2}\| \, \|\overrightarrow{v_2}\|} = 1 = \cos 0 = \cos\angle(r_1, r_2).$$

Dizemos que duas retas $r_1$ e $r_2$ são **perpendiculares**, e escrevemos $r_1 \perp r_2$, quando o ângulo entre elas mede $90^{o}$ (ou $\dfrac{\pi}{2}$ radianos).

**Proposição 26.** As retas $r_1 : ax + by = c$ e $r_2 : a'x + b'y = c'$ são perpendiculares se, e somente se, seus vetores normais $\overrightarrow{w_1} = (a, b)$ e $\overrightarrow{w_2} = (a', b')$ são perpendiculares, ou seja,

$$aa' + bb' = 0.$$

*Demonstração.* De fato, as retas $r_1$ e $r_2$ são perpendiculares se e somente se

$$\angle(r_1,r_2)=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow \cos\angle(r_1,r_2)=0\Leftrightarrow \langle\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}\rangle=0,$$

onde $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ são vetores paralelos às retas $r_1$ e $r_2$, respectivamente. Como $\overrightarrow{w_1}=(a,b)\perp r_1$ e $\overrightarrow{w_2}=(a',b')\perp r_2$ temos, pela Observação 9, que $\overrightarrow{v_1}=(-b,a)\parallel r_1$ e $\overrightarrow{v_2}=(-b',a')\parallel r_2$. Então, $r_1\perp r_2$ se e somente se

$$\langle\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}\rangle=(-b)(-b')+aa'=aa'+bb'=0,$$

Ou seja, $\langle\overrightarrow{w_1},\overrightarrow{w_2}\rangle=aa'+bb'=0.$ □

Veja agora como caracterizar o paralelismo e o perpendicularismo entre duas retas dadas na forma reduzida.

É fácil verificar que se $r_1$ é uma reta vertical, então : $r_2\parallel r_1\Leftrightarrow r_2$ é vertical. Na proposição abaixo veremos quando duas retas não verticais na forma reduzida são paralelas.

**Proposição 27.** As retas $r_1: y=mx+n$ e $r_2: y=m'x+n'$ são paralelas se e somente se $m=m'$ e $n\neq n'$.

*Demonstração.* De fato, como $r_1: mx-y=-n$ e $r_2: m'x-y=-n'$, $\overrightarrow{v}=(m,-1)$ e $\overrightarrow{w}=(m',-1)$ são vetores normais às retas $r_1$ e $r_2$, respectivamente. Logo, pelo corolário 4, $r_1$ e $r_2$ são paralelas se e somente e existe $\lambda\neq 0$ tal que

$$(m',-1)=\lambda(m,-1)=(\lambda m,-\lambda)\text{e}-n'\neq-\lambda n.$$

Como $-1=-\lambda$, devemos ter $\lambda=1$. Então $r_1\parallel r_2$ se e somente se $m=m'$ e $n\neq n'$. □

Assim, as retas $r_1: y=mx+n$ e $r_2: y=m'x+n'$ são paralelas se e somente se possuem o mesmo coeficiente angular e cortam o eixo $OY$ em pontos distintos.

Sejam $r_1$ e $r_2$ retas perpendiculares. Se $r_1$ é horizontal, então $r_2$ é vertical, e vice-versa.

A seguinte proposição estabelece quando duas retas não verticais e não horizontais são perpendiculares.

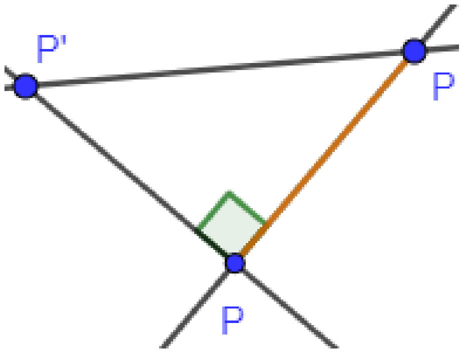
**Proposição 28.** Sejam $r_1: y=mx+n$ e $r_2: y=m'x+n'$ duas retas tais que $m\neq 0$ e $m'\neq 0$. Então, $r_1\perp r_2$ se e somente se $m\cdot m'=-1$.

*Demonstração.* Como $r_1: mx-y=-n$ e $r_2: m'x-y=-n'$ temos, pela Proposição 26, que $r_1\perp r_2$ se, e somente se, seus vetores normais $\overrightarrow{v}=(m,-1)$ e $\overrightarrow{w}=(m,-1)$ são ortogonais. Logo,

$$r_1\perp r_2\Leftrightarrow\langle\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\rangle=m\cdot m'+1=0\Leftrightarrow m\cdot m'=-1.$$

□

Figura 21 – P* realiza a distância de P à reta r.




Fonte: Elaborada pelo autor.

### 3.3.4.5.2 Distância entre reta e ponto

Dados um ponto $P$ e uma reta r do plano r, já sabe-se calcular a distância de $P$ a cada ponto $P' \in r$. Agora vê-se como calcular a distância do ponto $P$ à reta $r$.

**Definição 20.** Defini-se a **distância**, $d(P,r)$, do ponto $P$ à reta $r$ por

$$d(P,r) = \min\{d(P,P')|P' \in r\}.$$

Diz-se que um ponto $P* \in r$ **realiza a distância** do ponto P à reta r se

$$d(P,P*) \leq d(P,P'),$$

para todo $P' \in r$.

Usando o **Teorema de Pitágoras** é fácil verificar que o ponto P* que realiza a distância do ponto P à reta r é o **pé da perpendicular a r que passa pelo ponto P**. Assim,

$$d(P,r) = \min\{d(P,P')|P' \in r\} = d(P,P*).$$

**Teorema 3.** Sejam $r : ax+by = c$ uma reta e $P = (x_0,y_0)$ um ponto do plano. Então, a distância de P a reta r é dada por

$$d(P,r) = \frac{|ax_0+by_0-c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

*Demonstração.* Seja $s$ a reta perpendicular à reta $r : ax+by = c$ que passa pelo ponto $P = (x_0,y_0)$. Como $\overrightarrow{u} = (a,b) \perp r$, temos que $\overrightarrow{u} \parallel s$. Logo,

$$s : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} ;t \in \mathbb{R},$$

são as equações paramétricas de s.

Seja P* o pé da perpendicular a r que passa por P, ou seja $P* = r \bigcap s$. Então, $P* = (x_0 + at*, y_0 + bt*)$, para algum $t* \in \mathbb{R}$, e

$$a(x_0 + at*) + b(y_0 + bt*) = c \Leftrightarrow (a^2 + b^2)t * + ax_0 + by_0 = c \Leftrightarrow t* = \frac{c - (ax_0 + by_0)}{a^2 + b^2}.$$

Como $d(P, r) = d(P, P*) = \left\| \overrightarrow{PP*} \right\|$ e $\overrightarrow{PP*} = (a, b)t*$, temos:

$$d(P, r) = |t*| \cdot \|(a, b)\| = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{a^2 + b^2} \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

□

#### 3.3.4.5.3 Distância entre duas retas do plano

**Definição 21.** Define-se a **distância entre duas retas r e r'** como sendo menor distância entre um ponto de r e um ponto de r'. Isto é,

$$d(r, r') = \min\{d(P, P')|P \in r \ \text{ e } \ P' \in r'\}.$$

Pela definição anterior, pode-se concluir que $d(r, r') = 0$ se, e somente se, $r$ e $r'$ são coincidentes ou concorrentes.

Sabemos que se $r$ e $r'$ são retas paralelas e $R \in r$, então existe um único ponto $R* \in r'$, pé da perpendicular a $r'$ que passa por $R$, tal que

$$d(R, R') \geq d(R, R*),$$

para todo $R' \in r'$. Como $r \parallel r'$, temos

$$d(Q, Q*) = d(P, P*),$$

quaisquer que sejam $P, Q \in r$, pois $QPP*Q*$ é um retângulo. Então,

$$d(Q, Q') \geq d(Q, Q*) = d(P, P*) = d(P, r'),$$

quaisquer que sejam $Q \in r$ e $Q' \in r'$. Logo, qualquer que seja $P \in r$,

$$d(r, r') = d(P, r').$$

Como consequência do Teorema 3, temos o seguinte corolário.

**Corolário 5.** Sejam $r : ax + by = c$ e $r' : ax + by = c'$ retas paralelas $(c \neq c')$ ou coincidentes $(c = c')$. Então,

$$d(r, r') = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

*Demonstração.* Seja $P = (x_0, y_0)$ um ponto da reta r. Então,

$$d(r, r') = d(P, r') = \frac{|ax_0 + by_0 - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Como $ax_0 + by_0 = c$, obtemos $d(r, r') = \dfrac{|c - c'|}{a^2 + b^2}$ □

# CAPÍTULO 4

# ATIVIDADES PROPOSTAS

A construção deste capítulo busca atender eventual expectativa do professor de matemática de exemplificar por meio de atividades que colaborem com a mudança de mentalidade fixa para a mentalidade de crescimento de seus discentes e como elas se relacionam com os pilares da UNESCO. Serão apresentadas 3 atividades, e na apresentação de cada uma delas mostramos a relação com os capítulos matemáticos apresentados no capítulo 3, relacionamos com os pilares da UNESCO para docente e discente, habilidades e competências da BNCC (BRASIL, 2018) e orientações gerais para o professor.

Iniciamos pela apresentação da atividade **Formação de palavras**, disponível na seção 4.1, apresentamos uma possibilidade do estudo de análise combinatória por meio de um jogo realizado em grupo tendo ganhos por conta da possibilidade de descoberta matemática, interação entre estudantes, uso de tecnologias, atender estudantes com níveis diferentes de compreensão matemática dentre outras.

Na atividade **Planejamento financeiro**, seção 4.2, os alunos são levados a refletir sobre o poder de compra em algumas situações: uma com um ganho na loteria, outra com uma família que começou a ser formada para finalmente construir o próprio plano quando começar a exercer atividade remunerada. Essa proposta favorece a compreensão do mundo do trabalho, das possibilidades como adulto, de colaborar para uma empatia dos jovens frente a situação dos pais, uso de diversos conteúdos matemáticos em situações corriqueiras dentre outras.

A atividade **Carnaval**, seção 4.3, os alunos precisam construir uma máscara de carnaval utilizando exclusivamente instrumentos matemáticos (esquadro,régua, compasso e transferidor) devendo elaborar um roteiro que explicite qual procedimentos devem ser feitos para a construção da máscara. Tais estratégias tornam necessárias tanto uma boa compreensão de como usar cada instrumento quanto como organizar a construção relacionando com a etapa anterior. A forma utilizada por cada estudante para a construção de seu roteiro fará ele refletir sobre a posição relativa entre diversos objetos que atende , pelo menos em parte, os objetivos do ensino da geometria plana/analítica, além de desenvolver a sua habilidade na escrita. O fato do aluno ter uma certa autonomia na execução da atividade favorece que o professor tenha um olhar de mediador frente ao conhecimento que deseja desenvolver no estudante.

## 4.1 Atividade 1 - Formação de palavras

**Autor**

Thiago Santana Rodrigues

**Tema**

Anagramas

**Justificativa**

A matemática tem uma aplicação significativa para jogos e os conteúdos matemáticos nem sempre são percebidos durante a realização do jogo. Acredita-se que a apresentação de conteúdos que possibilitem um melhor resultado para o jogador poderá estimular o interesse dos alunos. A relação das pessoas durante os jogos e brincadeiras podem ser maneiras de favorecer formas mais adequadas para o trabalho em grupo.

**Segmento**

Ensino médio - 2º ano

**Competências gerais (BNCC)**

- Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
- Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
- Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
- Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

- Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, suas identidades, suas culturas e suas potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.

**Disciplina**

Matemática

**Competências específicas - Matemática**

- Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística – para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

- Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

**Unidades temáticas**

- Ensino médio (2º ano) - Análise combinatória

- Ensino fundamental - Princípio multiplicativo

**Objetivos de conhecimento**

Ensino médio (2º ano) - Permutação, permutação com repetição, arranjo, combinação

**Habilidades da matemática**

- **(EM13MAT310)** Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo diferentes tipos de agrupamento de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas como o diagrama de árvore.

- **(EM13MAT315)** Reconhecer um problema algorítmico, enunciá-lo, procurar uma solução e expressá-la por meio de um algoritmo, com o respectivo fluxograma.

**Inclusão e acessibilidade**

Alunos que possuem deficiência visual, auditiva ou na fala a princípio poderiam apresentar dificuldade para participar. Nestes casos, algumas adaptações são possíveis. Para alunos com deficiência auditiva e/ou fala, o registro por meio de uma folha ou acesso a plataforma deve possibilitar a adaptação necessária. Para alunos com deficiência visual é possível o registro em braile.

**Conhecimento prévio**

Para jogar o jogo dos anagramas será necessário que conheçam os tipos de palavras que serão aceitas. Os alunos deverão apresentar palavras que podem ser formadas com as letras fornecidas pelo jogo. (Como é mudado todo dia é impossível ter uma previsão das letras sorteadas)

Regras básicas do Anagramas

- Não valem nomes próprios e gírias;
- Verbos somente no infinitivo;
- Palavras com cedilha e acentos são aceitas;
- Cada letra conta como um ponto.

**Transversalidade**

Ética (Respeito Mútuo, Justiça, Diálogo, Solidariedade)

**Interdisciplinaridade**

O professor de língua portuguesa pode discutir a formação de palavras com prefixos, mas não significa que com as letras disponíveis seja possível formar algum prefixo.

**Eixo temático**

Matemática e suas aplicações.

**Delimitação do conteúdo**

Ensino médio - Análise combinatória

**Metodologia**

Apesar da realização ser sugerida a distância é possível adaptar para o presencial.

Para a realização da 1ª etapa e 2ª etapa serão usadas 2 aulas. Para a realização da 3ª etapa serão usadas 2 aulas.

**1ª Etapa - Formação dos grupos e papéis dos alunos - 10 minutos**

Determinar os grupos e os papéis de cada aluno (COHEN, 2017), preferencialmente definir antes. O foco desta primeira etapa é explicar os papéis de cada um dos alunos, cada grupo deve ter pelo menos 4 integrantes. Uma sugestão de organização dos grupos é representada na figura 22 [1].

[1] Desconsiderar coluna dos meets no caso de atividade presencial.

Figura 22 – Organização dos grupos identificando as funções

| GRUPOS ANAGRAMAS | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| FUNÇÕES | FACILITADOR(A) | | ORADOR | | REDATOR | | COLABORADOR | | COLABORADOR | | | CÓPIA DO DESENVOLVIMENTO |
| GRUPOS | Nº | NOME | Nº | NOME | Nº | NOME | Nº | NOME | Nº | NOME | MEETS | DOCS SOLUÇÃO |
| GRUPO 1 | | | | | | | | | | | | |
| GRUPO 2 | | | | | | | | | | | | |
| GRUPO 3 | | | | | | | | | | | | |
| GRUPO 4 | | | | | | | | | | | | |
| GRUPO 5 | | | | | | | | | | | | |
| GRUPO 6 | | | | | | | | | | | | |
| GRUPO 7 | | | | | | | | | | | | |
| GRUPO 8 | | | | | | | | | | | | |

Fonte: Elaborada pelo autor.

No caso da atividade presencial escrever na lousa ou entregar uma folha por grupo com os papéis e funções. Os papéis e as funções são:

FACILITADOR - organiza prioridade de demandas, controla o tempo e favorece uma participação igualitária entre os participantes.

ORADOR - será o representante na apresentação do grupo

RELATOR - anota e sistematiza os comentários pertinentes dos colegas

COLABORADOR - contribui para ideias do grupo e auxilia colegas que possuem dificuldade em realizar seu papel. Apenas auxiliar, não deve realizar a função pelo colega.

**OBS: caso o grupo tenha mais de 4 alunos, os outros deverão ser colaboradores. Pode ser interessante selecionar alunos com baixa participação em aula para papéis como orador e facilitador.**

Caso a atividade seja realizada virtualmente ou parcialmente virtual é desejável que se grave a interação. Mas é importante que se estabeleça alguns combinados para minimizar o tempo destinado para assistir aos vídeos.

**Antes de começar a gravação**

- Câmeras abertas
- Já ter criado documentos que serão usados para respostas/comentários
- Já ter algum dos membros apresentando a tela

**Durante a gravação ou atividade presencial**

- Não falar palavras de baixo calão
- Sempre discutir as respostas apresentadas por outro colega
- Favorecer uma discussão igualitária

**2ª Etapa - Coleta de palavras**

Com o auxílio do jogo “anagramas” do site *https://rachacuca.com.br/palavras/anagramas/* os alunos deverão descobrir palavras que podem ser formadas com as letras apresentadas pelo jogo. Para descobrir se as palavras serão aceitas, eles devem clicar nas letras na ordem para formação da palavra. Caso ela seja aceita, será incluída abaixo das letras pelo site. Caso não seja aceita, clique em limpar.

Os alunos devem criar um documento google [2] para organizar as informações abaixo[3]:

1) Tela inicial, sem respostas (anexe print)

2) Tela com respostas no período destinado para isso (anexe print)

3) Apresentar a justificativa do nº total de anagramas utilizando todas as letras (digitado).

4) Apresentar a justificativa do nº total de anagramas com qualquer quantidade de letras (digitado).

5) Apresentar a justificativa do nº total de anagramas que podem formar palavras, considere além dos anagramas listados (digitado).

obs: Para que os grupos não se percam no tempo pode fornecer para eles cronômetros digitais. Um exemplo seria https://relogioonline.com.br/.

**3ª Etapa - Discussão pós atividade - 2 aulas**

É importante, antes de iniciar essa etapa, que o professor tenha assistido as gravações (caso seus alunos tenham conseguido gravar).

Para conversar com os grupos é possível realizar um sorteio usando o site *https://sorteador.com.br/* e ajustando o número de grupos ao intervalo no sorteio.

Sortear dois grupos para comentar com a sala sobre cada pergunta abaixo:

1. Como foi trabalhar em grupo tendo funções específicas? O grupo conseguiu respeitar as funções?

2. Como achou o total de anagramas? E o total de anagramas com qualquer quantidade de letras?

3. Quais foram as restrições pensadas para formação de palavras? Quantos anagramas podem formar palavras?

4. Surgiram perguntas pertinentes durante a atividade? Quais? (PARA TODOS)

[2] Mesmo com alunos presencialmente pois facilita a comprovação das letra que os alunos tinham disponíveis

[3] Quando realizada virtualmente peça para que façam três gravações de até 15min cada uma, para responder as perguntas 3,4,5.

Após essas perguntas recomenda-se que o professor questione o número de anagramas entre duas palavras já identificadas, que não sejam consecutivas, no jogo de algum dos grupos.

**Cronograma**

1ª etapa - 10 minutos - explicação da atividade

2ª etapa - 2 aulas de 50 minutos (uma das aulas terão 10 minutos usados pela etapa 1)

3ª etapa - 2 aulas de 50 minutos - reflexão da atividade

**Recursos e tecnologias**

Jogo: disponível em *https://rachacuca.com.br/palavras/anagramas/*

Reuniões para desenvolvimento da atividade: equipamento com internet para vídeo-conferência, conta com acesso às ferramentas onlines, se online.

Planilha virtual e documento online: para organizar os grupos com as funções de cada aluno, links das vídeo-conferências para se reunirem e documento para apresentarem suas soluções, se online

Controle do tempo: para facilitar que os alunos não esqueçam do tempo, teremos a ferramenta de despertador online *https://relogioonline.com.br/*.

Sorteio dos grupos: para haver transparência na escolha dos grupos que irão comentar seus trabalhos, teremos como ferramenta *https://sorteador.com.br/*.

**Relação entre a atividade e conteúdos matemáticos do capítulo 3**

Durante a 2ª Etapa, no jogo pedem-se as seguintes informações referentes ao conteúdo matemático:

Total de anagramas com todas as letras disponíveis.

Total de anagramas com qualquer quantidade de letras, dentre as disponíveis.

Para a obtenção do números de anagramas com todas as letras, os discentes terão um problema de permutação simples ($P_n$, com $n$ sendo o total de letras) , se não houver letras repetidas, ou um problema de permutação com repetição (${P_n}^{a,b}$, sendo $n$ o total de letras, $a$ quantidade de repetições de uma letra, $b$ quantidade de repetições de outra letra e assim sucessivamente) , se houver letras repetidas.

Na obtenção do número total de anagramas com qualquer quantidade de letras, a existência de letras repetidas fará diferença. Caso não haja repetição de letras, basta realizar soma de diversos arranjos ( $A_{n,1} + A_{n,2} + A_{n,3} + \ldots + A_{n,n}$ , sendo $n$ o total de letras). Caso haja repetição pela complexidade irei resolver um exemplo a seguir com 8 letras, sendo 3 iguais e as demais distintas.

Para encontrar o número total de casos propomos pensar em 3 grupos: sem letras repetidas, com exatamente 2 repetições e com exatamente 3 repetições.

1º Caso - sem letras repetidas

Já apontamos acima que temos $A_{n,1} + A_{n,2} + A_{n,3} + ... + A_{n,n}$ para casos sem repetição, assim para esse caso teremos $\sum_1^6 A_{6,i}$ casos sem repetição.

2º Caso - com exatamente 2 repetições.

Para a escolha da(s) letra(s) que não repete temos 5 letras disponíveis e por isso $C_{5,i-1}$ com $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$ formas de escolhê-las e para ordenar essas letras temos $1+i$ letras das quais 2 são iguais, assim, $P_{1+i,2}$. Desta forma, o número de anagramas com 2 letras repetidas é $\sum_1^6 (C_{5,i-1} \cdot P_{1+i,2})$.

3º Caso - com exatamente 3 repetições.

Para a escolha da(s) letra(s) que não repete temos 5 letras disponíveis e por isso $C_{5,i-1}$ com $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$ formas de escolhê-las e para ordenar essas letras temos $1+i$ letras das quais 3 são iguais, assim, $P_{2+i,3}$. Desta forma, o número de anagramas com 2 letras repetidas é $\sum_1^6 (C_{5,i-1} \cdot P_{2+i,3})$.

Como não tem outra hipótese para esse caso temos $\sum_1^6 (A_{6,i} + C_{5,i-1} \cdot P_{1+i,2} + C_{5,i-1} \cdot P_{2+i,3})$

**Relação entre os saberes da UNESCO na atividade**

Para os alunos

"Aprender a fazer- Sistematização das falas realizadas por outros colegas para o redator. Pela organização das palavras geradas pelo jogo é possível elaborar estratégia(s) de organização para outro casos.

"Aprender a conhecer- O conceito de arranjo simples não foi explicitado anteriormente mas por conhecer o princípio fundamental da contagem os alunos poderão explorar o conceito e iniciar um contato. Da mesma forma para casos com letras repetidas que será necessária o uso da combinação que os alunos a princípio não conhecem.

"Aprender a conviver- A procura da equidade durante a atividade favorecerá uma convivência mais pacífica entre os estudantes que aprenderam a respeitar o momento de fala do outro e até o uso de linguagem apropriada na elaboração do raciocínio.

"Aprender a ser- Serão favorecidos a perceber a sua dificuldade/facilidade na função que foi destinado para a realização da atividade e assim favorecendo uma reflexão sobre pontos fortes e fracos.

Para o professor

"Aprender a fazer- Montar equipes com papéis definidos.

"Aprender a conhecer- Os alunos podem usar argumentações não pensadas para o professor tanto nas perguntas que possuem um valor único como solução quanto na argumentação da questão aberta (total de palavras).

"Aprender a conviver- Observação e orientação da convivência dos alunos, mais que pensar só no saber matemático envolvido. Opção de escolha das funções dos alunos entra a forma que os alunos convivem entre si.

"Aprender a ser- Desenvolvimento na relação de moderador dos grupos e uso da ludicidade como proposta pedagógica.

**Orientações gerais para o professor**

Para o professor pensar antes da atividade

1. Quando vou realizar essa atividade? Antes de arranjo? Antes de combinação? Recomendo que o professor use após apresentação dos conceitos de princípio multiplicativo, permutação e permutação com repetição, apesar do aluno não ter o conceito formal de arranjo simples é possível resolver situações pelo princípio multiplicativo e no caso de combinação pensar como a divisão de arranjo por permutação.

2. Existe diferença entre casos que as letras são repetidas, quais são elas? Conforme apresentado na relação entre a atividade e conteúdos matemáticos do capítulo 3 existe significativa diferença e por isso merece atenção na orientação dos grupos

3. Vou desafiar os alunos na escolha desses papéis? Ele já está acostumado com essa função? Conhecer os alunos fará com que o professor reflita sobre o quão desfiante será para o aluno na função, mas podem haver surpresas e desafios.

4. Os grupos que penso em formar tem problemas pessoais? É o melhor momento para deixar pessoas que não se gostam juntas? Realizar uma sondagem de desentendimentos pode minimizar os conflitos durante a realização da atividade. Não significa que o professor nunca poderá resolver tal conflito, mas a escolha de mantê-los no mesmo grupo pode ocasionar no fracasso na atividade.

5. Os alunos já possuem e-mail que possibilite edição de documentos em nuvem?

6. Os alunos sabem editar textos matemáticos em documentos virtuais? Os alunos provavelmente vão precisar inserir informações subscritas, sobrescritas, frações e outros.

7. O erro do estudante está sendo valorizado? Ele está sendo estimulado a tentar ou estou favorecendo que ele apenas reproduza? A linguagem usada para orientar o estudante é parte crucial para favorecer uma mentalidade de crescimento.

Para o professor perguntar durante a atividade

1. As palavras descobertas são apresentadas em uma determina ordem? Qual? Os alunos devem perceber que as palavras são ordenadas por número de caracteres e em ordem alfabética.

2. Quantos anagramas existem entre duas palavras conhecidas?Em algum momento do jogo os alunos vão descobrir anagramas com o mesmo número de caracteres que não estejam em sequência e isso possibilitará que os alunos apresentem todos os casos entre elas encontrando inclusive palavras que não pertencem a seu vocabulário.

3. Quais características não são possíveis em nenhuma palavra? Algumas possíveis pensamentos são: quantidade de vogais seguidas, quantidade de consoantes seguidas, prefixos e sufixo possíveis, dentre outros.

**Considerações finais**

O aluno deverá compreender o raciocínio combinatório para encontrar palavras que ele possa não conhecer, pois as palavras são colocadas em ordem alfabética de acordo com o número de letras. Isso deverá ser explorado na aula de reflexão da atividade.

## 4.2 Atividade 2 - Planejamento financeiro

**Autor**

Thiago Santana Rodrigues

**Tema**

Planejamento financeiro familiar

**Justificativa**

A execução de um planejamento financeiro acerca do consumo e dos gastos das famílias brasileiras podem evitar o endividamento e a inadimplência da sociedade brasileira.

**Segmento**

Ensino fundamental II (6ºano)

**Competências gerais da BNCC**

- Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

- Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

- Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

- Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.

- Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

- Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.

**Disciplinas para o trabalho interdisciplinar**

Matemática, geografia, português e ciências

**Competências específicas da matemática na BNCC**

- Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.

- Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.

- Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.

- Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.
- Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).
- Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza.

**Unidades temáticas**

Ensino fundamental (6º ano): Números.

**Objetos de conhecimento**

Ensino fundamental (6ºano):

- Sistema de numeração decimal: características, leitura, escrita e comparação de números naturais e de números racionais representados na forma decimal.
- Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números naturais.
- Coleta de dados, organização e registro.
- Construção de diferentes tipos de gráficos para representá-los e interpretação das informações.

**Habilidades da BNCC**

- (EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora;
- (EF06MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da "regra de três", utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros;
- (EF06MA33) Planejar e coletar dados de pesquisa referente a práticas sociais escolhidas pelos alunos e fazer uso de planilhas eletrônicas para registro, representação e interpretação das informações, em tabelas, vários tipos de gráficos e texto;

**Inclusão e acessibilidade**

Para alunos com deficiência auditiva e/ou na fala não teriam grandes prejuízos para realização das pesquisas. Para alunos com deficiência visual será necessário adequar algumas escolhas. Na escolha de alguns itens será necessário que haja maiores descrições.

**Conhecimento prévio**

Para a realização da atividade os alunos necessitam dominar as 4 operações, no entanto podem e devem ser auxiliados em eventuais dificuldades.

**Transversalidade**

- Cidadania e civismo - Vida familiar e social; educação em direitos humanos.
- Economia - Trabalho;
- Educação financeira.

**Eixo temático**

Números e operações.

**Delimitação do conteúdo**

Operações fundamentais (adição,subtração, multiplicação e divisão); porcentagem; análise gráfica; área de figuras planas.

**Metodologia**

O trabalho será separado em dois momentos:

- SITUAÇÃO 1 - Se subdivide em três etapas (1ª,2ª e 3ª) que configuram na construção do planejamento financeiro com o ganho na loteria.
- SITUAÇÃO 2 - É composto de três outras etapas (4ª, 5ª e 6ª) que configuram no planejamento financeiro com cada responsável da família ganhando um salário mínimo, inicialmente.

**1ª Etapa: Explicação da atividade - situação 1**

Será apresentada a seguinte situação hipotética: Após um jogo de loteria você foi um dos ganhadores da loteria, o valor total do prêmio é de 49 milhões. Porém houveram outros ganhadores, 13 contando com você. Para contribuir na organização de suas finanças, iremos estabelecer alguns critérios, porém é possível acrescentar mais itens.

Para evitar problemas financeiros futuros foi decidido que 20% do valor não será gasto, sendo armazenado na sua conta poupança. Para o dinheiro restante haverá um planejamento financeiro que atenda minimamente os itens abaixo:

- Compra de um imóvel (comprovado com o anúncio)
- Viagem nacional com seus respectivos gastos (detalhamento abaixo)
- Viagem internacional com seus respectivos gastos (detalhamento abaixo)
- Graduação (detalhamento abaixo)
- Realizar uma doação para uma Organização não governamental (ONG) que exista. (detalhamento abaixo)

O trabalho deve ser estruturado da seguinte forma:

- Capa
- Sumário
- Valores do prêmio
- Gastos obrigatórios
- Gastos adicionais (opcional)

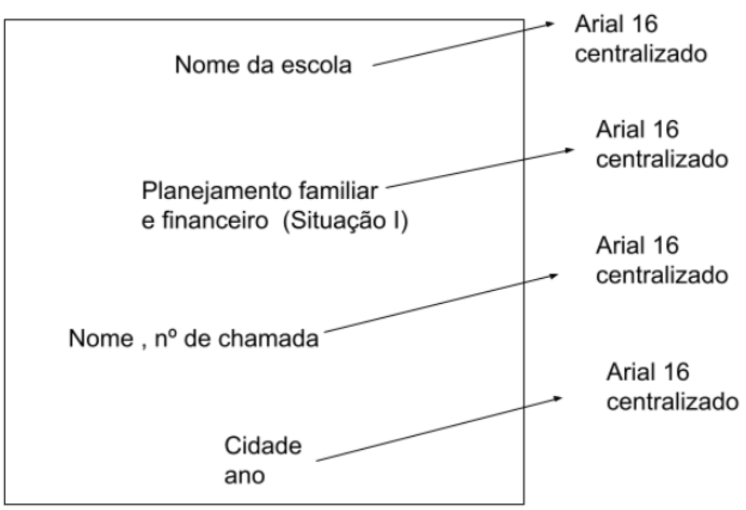
**Detalhamento de cálculos**

Todos os cálculos no trabalho devem ser realizados a lápis pelo próprio aluno (na divisão do prêmio, do valor destinado para a poupança, valor destinado para gastos).

Após o gasto de cada sessão indicar o valor restante, também indicar cálculo a lápis.

**Detalhamento da capa (formato ABNT), segue modelo na figura 23:**

Figura 23 – Capa do trabalho - situação 1




Fonte: Elaborada pelo autor.

**Detalhamento do sumário (figura 24):**

Figura 24 – Sumário do trabalho - situação 1

Sumário



Fonte: Elaborada pelo autor.

**Detalhamento 1.1. Prêmio recebido**

Calcular prêmio recebido a lápis e indicar o valor recebido em uma frase.

**Exemplo 7.** O valor recebido por cada ganhador foi de R$ xxx,xx .

**Detalhamento 1.2. Prêmio investido na poupança**

Calcular a parte do prêmio investido na poupança a lápis e indicar o valor investido em uma frase.

**Exemplo 8.** O valor investido na poupança foi de R$ xxx,xx .

**Detalhamento 1.3. Prêmio que pode ser gasto**

Calcular a parte do prêmio que pode ser gasto a lápis e indicar o valor recebido em uma frase.

**Exemplo 9.** O valor que pode ser gasto é de R$ xxx,xx .

**Detalhamento 2.1. Compra do imóvel**

- Necessário anexar propaganda real do imóvel.
- Deve incluir endereço do imóvel contendo no mínimo município/estado/país.
- Imagens do imóvel no anúncio.
- Área do imóvel.
- Cálculo do metro quadrado. (registrar cálculo)
- Caso o imóvel seja de outro país deve converter moeda para reais, usar valor real indicando dia que realizou as contas.

**Detalhamento 2.2. Gastos universitários**

Será necessário indicar:

- Nome do curso de ensino superior e a instituição de ensino superior (particular) que tem esse curso.
- Tempo de duração do curso
- Valor mensal e total do curso, valores reais e devidamente comprovados (realizar cálculos).
- Responder às perguntas: Qual é o motivo da escolha desta carreira? Conhece alguém que exerce essa profissão? Indique algum canal do youtube com mais referências sobre a profissão.

**Detalhamento 2.3. Viagem nacional e 2.4. Viagem internacional**

- Indicar o valor real que seria gasto com a passagem de avião ou ônibus para si e acompanhantes (inserir pelo menos 1 acompanhante em seu orçamento) ida e volta comprovando em sites de compra.
- Latitude e longitude das cidades indicadas.
- Distância entre a cidade que habita e o destino.
- Clima e relevo (incluindo temperatura e pluviosidade).
- Fauna típicas da região (citar pelo menos 3 tipos).
- Flora típicas da região (citar pelo menos 3 tipos).
- Apontar a quantidade de dias que pretende permanecer e o custo com refeições (almoço e jantar), valores reais e devidamente comprovados [mesmo que tenha parentes na cidade].

- Custo da estadia dos integrantes da viagem, valores reais e devidamente comprovados [mesmo que tenha parentes na cidade].
- Pontos turísticos na cidade e/ou arredores (citar pelo menos 2 lugares) e seus custos.
- Específico da viagem nacional - Identificar estado.
- Específico da viagem internacional - Identificar país e continente.

**Detalhamento 2.5. Doação para Organização não governamental (ONG)**

- Indicar endereço, telefone, redes sociais e site da instituição **(informações reais)**.
- Apresentar uma carta que apresente as principais funções da ONG e que justifique a escolha desta instituição.
- Para favorecer a divulgação desta instituição você fará **(hipoteticamente)** uma postagem nas redes sociais. Mostre uma possível publicação para essa divulgação.

**Detalhamento 3. Valor do prêmio gasto com itens não obrigatórios**

Indicar itens adicionais que queira gastar e seus respectivos gastos. Não precisa utilizar todo o dinheiro que poderia ser gasto. Caso sobre dinheiro, o que faria?

**2ª Etapa - aula de produção/ pesquisa/*feedback***

É recomendado que sejam dadas 3 aulas para esta etapa, sendo 1 por semana. Para que os alunos tenham momentos de orientação, pesquisar e até pensar nas diversas atividades do processo. Para não excluir nenhum aluno com dificuldade econômica da atividade é importante que ocorram em uma sala com internet. Provavelmente haverá algum trabalho iniciado no começo desta etapa, é importante ter tempo para orientação desses trabalhos, em especial nessa faixa etária.

Recomenda-se uma avaliação formativa (com entregas parciais). Irá ajudar alunos com maior dificuldade.

**3ª Etapa - *Feedback* geral**

Realizar *feedback* geral dos trabalhos e comentar individualmente trabalhos que ficaram muito abaixo da expectativa. É importante ter algum prazo antes do fechamento de notas para que os trabalhos que não atingirem uma pontuação satisfatória tenham chance de recuperar.

**4ª Etapa - Planejamento familiar - situação 2**

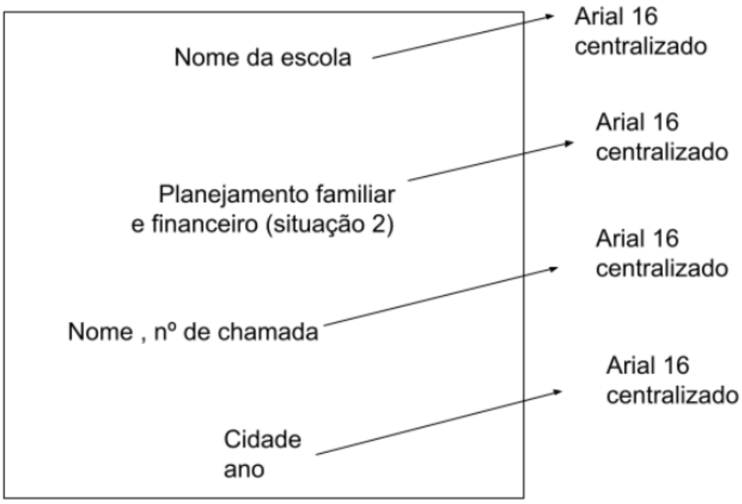
Será apresentada a seguinte situação hipotética: Você tem uma família composta por um companheiro (a) e um filho menor de 5 anos. Vocês não possuem casa própria e os adultos desta casa recebem um salário mínimo cada um. Quando casaram receberam alguns presentes de seus amigos e familiares.

Antes de pensar nos gastos atuais temos algumas etapas estruturantes. Para facilitar o planejamento financeiro apresente o trabalho respeitando a organização inicial a seguir:

Capa

**Detalhamento da capa (formato ABNT), segue modelo (figura 25):**

Figura 25 – Capa da situação 2




Fonte: Elaborada pelo autor.

Sumário

**Detalhamento do sumário (figura 26)**

**Detalhamento de cálculos**

Todos os cálculos realizados no trabalho devem ser realizados a lápis pelo próprio aluno (rendimento mensal, valor dos presentes anterior ao casamento, aluguel, contas (água/luz/gás), alimentação básica, outros gastos).

Após o gasto de cada sessão indicar o valor restante. Também deve demonstrar o cálculo a lápis.

**Detalhamento 1.1. anteriores ao casamento**

Encontrar os preços reais dos itens listados abaixo que foram recebidos antes do casamento, considerando que são novos.

- geladeira até 300l
- fogão 4 bocas
- televisão de 24 polegadas
- cama de casal

Figura 26 – Sumário situação 2

Sumário



Fonte: Elaborada pelo autor.

- cama do filho
- guarda-roupa do filho
- guarda-roupa do casal
- mesa de jantar com 4 lugares
- sofá 2 lugares
- micro-ondas
- máquina de lavar até 10kg

Obtenha o valor gasto pelos amigos e familiares com esses presentes. É necessário mostrar todas as contas à lápis e devidamente organizadas.

**Detalhamento 1.2. Vestimentas anteriores ao casamento**

Realizar uma pesquisa com pelo menos 5 adultos que tenham filhos, precisa ter ao menos dois homens e duas mulheres. Nessa pesquisa deve constar o nome completo, idade dos entrevistados e de seus dependentes (filhos). Os entrevistados devem responder às seguintes perguntas:

1ª Qual é o seu nome completo ?

2ª Qual é a sua idade?

3ª Seu(s) filho(s) possui(em) qual(is) idades?

4ª Qual é a durabilidade de uma vestimenta superior para temperatura rotineira (Camisa,camiseta, "blusinha") para usá-la nessa função? E qual seria uma quantidade adequada? Justifique sua resposta.

5ª Qual é a durabilidade de uma vestimenta superior de frio (agasalho) para usá-la nessa função? E qual seria uma quantidade adequada? Justifique sua resposta.

6ª Qual é a durabilidade de uma vestimenta inferior curta (bermuda, shorts, saia) para usá-la nessa função? E qual seria uma quantidade adequada? Justifique sua resposta.

7ª Qual é a durabilidade de uma vestimenta inferior longa de frio (calça) para usá-la nessa função? E qual seria uma quantidade adequada? Justifique sua resposta.

8ª Qual é a durabilidade de um calçado (sapato, tênis, sapatilha, chinelo)? E qual seria uma quantidade adequada? Justifique sua resposta.

9ª Qual é a durabilidade de um par de meias? E qual seria uma quantidade adequada? Justifique sua resposta.

**Detalhamento 2.3 Gastos essenciais**

Esta família não possui casa própria, tem custos com água, luz, gás e mercado. O consumo desta família se mantém estável ao longo dos anos:

- O consumo médio da água é de 12 $m^3$.
- O Consumo médio de energia elétrica é de 250 kwh.
- O Consumo médio da gás é de 3 $m^3$.

Para calcular as despesas com água de uma residência considerar que preço será calculado por **[Preço pago, em reais]** $= 5\cdot$ **[consumo médio, em $m^3$]**.

Para calcular as despesas com energia elétrica de uma residência considerar que preço será calculado por **[Preço pago, em reais]** $= 0,8\cdot$ **[consumo médio, em kwh]**.

Para calcular os custos de custo de gás de uma residência considerar que preço será calculado por **[Preço pago, em reais]** $= 10\cdot$ **[consumo médio, em $m^3$]**.

Considerando os gastos apresentados acima, determine o valor que poderá ser gasto com alimentação. Alguns itens de alimentação/higiene [4] são considerados básicos para essa família no período de 1 mês, seguem eles:

- 1 kg de arroz
- 0,5 kg de feijão
- 2 dúzias de ovos
- 500 g de macarrão
- 4 molhos de tomate
- 2 kg de frango
- 250 g de sardinha
- 500 g de café
- 0,5 kg de farinha de trigo
- 2 kg de pão de forma
- 340 g de seleta de legumes ou milho/ervilhas
- 8 litros de leite
- 0,5 kg de manteiga
- 2 kg de banana
- 0,9 litros de óleo
- 0,5 kg de açúcar
- 0,5 kg de sal
- 90g de creme dental
- 1 litro de água sanitária
- 480 g de esponja de aço
- 300 ml de desodorante
- 0,5 l de limpador multiuso

[4] Uma proposta de produtos é apresentada em https://blog.cestanobre.com.br/como-montar-cesta-basica-aprenda-aqui-2/ que baseou a nossa escolha para elaboração desta lista

- 1 kg de sabão em barra
- 325 ml de shampoo
- 325 ml de condicionador
- 1 detergente
- 2 sabonetes
- 0,5 kg de sabão em pó
- 2 litros de desinfetante
- 48 rolos de papel higiênico de 30m

Pesquise em supermercados/hipermercados/mercearias que contenham o preço destes bens, pode ser recorte de panfletos ou fotos de gondolas.

Procure um imóvel para alugar nesta cidade que possua condição de pagar.

Essa família precisa economizar no consumo de água/gás/energia elétrica para manter a alimentação/higiene básica no mês? Justifique sua resposta, apresente exemplos reais destes gastos.

**Detalhamento 2.3. Comparação das despesas e rendimentos**

Para organizar suas contas, os responsáveis desta família decidem organizar seus gastos essenciais de duas maneiras. Em ambas elas separam inicialmente em 3 categorias: aluguel, contas (água/luz/gás), alimentação/higiene.

**Detalhamento 2.3.1. Comparação com salário mínimo**

As 3 categorias [aluguel, contas (água/luz/gás), alimentação/higiene] serão comparadas individualmente com o salário mínimo. Indique a razão entre o valor gasto na categoria e o valor do salário mínimo. Qual fração de um salário mínimo foi usado para estas 3 categorias?

**Detalhamento 2.3.2. Comparação com salário total da família**

As 3 categorias [aluguel, contas (água/luz/gás), alimentação/higiene] são comparadas individualmente com o salário total da família. Indique a razão entre o valor gasto na categoria e o rendimento do casal. Qual fração do salário total da família foi usado para essas 3 categorias?

O gasto de uma família não se limita aos gastos essenciais. Desta forma, o aluno deverá pensar em gastos complementares que também são importantes: café da manhã/café da tarde, roupas e internet.

Em uma conversa entre os adultos da casa eles chegam na seguinte decisão: devemos atender às novas necessidades com certa ordem de prioridades. As prioridades elencadas são:

1ª Comprar pelo menos uma peça de roupa por mês;

2º Guardar dinheiro para compra de notebook/celular à vista;

3º Pagar internet para a residência apenas quando já possuir notebook/celular;

4º Compra de imóvel próprio (detalhamento 2.5.);

**Detalhamento 2.4 Formação acadêmica**

Para possibilitar um crescimento em sua carreira será necessário conhecer bibliotecas públicas da sua região, indique o endereço de pelo menos duas.

Indique um curso técnico gratuito especificando a instituição, duração do curso e endereço completo.

Indique um curso superior gratuito especificando a instituição, duração do curso e endereço completo.

**Detalhamento 2.5. Compra do imóvel próprio**

Escolha de um imóvel próprio (2 quartos) na região e menor que 60 $m^2$ . Escreva um plano de compra para cada situação:

1º Os responsáveis têm apenas o ensino médio e seus gastos são apenas os essenciais.

Observação: Para realizar o financiamento imobiliário é obrigatório que a renda seja superior a 2,5 salários mínimos. Desta forma compre a vista.

2º Os responsáveis têm formação técnica e seus gastos são apenas os essenciais.

Observação: Para realizar o financiamento imobiliário com imóvel novo é obrigatório ter 20 % do valor total na entrada e tem um acréscimo de 6 % do valor do imóvel para taxas governamentais. Para realizar o financiamento imobiliário com imóvel usado é obrigatório ter 30 % do valor total na entrada e tem um acréscimo de 6 % do valor do imóvel para taxas governamentais. Suponha que após essa formação o salário seja de 2,5 salários mínimos por adulto.

3º Os responsáveis têm ensino superior e seus gastos são apenas os essenciais.

Observação: Para realizar o financiamento imobiliário com imóvel novo é obrigatório ter 20 % do valor total na entrada e tem um acréscimo de 6 % do valor do imóvel para taxas governamentais, realizar o financiamento imobiliário com imóvel usado é obrigatório ter 30 % do valor total na entrada e tem um acréscimo de 6 % do valor do imóvel para taxas governamentais.Suponha que após essa formação o salário seja de 5 salários mínimos por adulto.

**Detalhamento 2.6. Planejamento pessoal**

Agora que possui uma noção dos gastos de uma família já é possível adequar o plano para uma futura realidade. Por isso, apresente um planejamento pessoal para compra do seu imóvel próprio, não deve levar em consideração um(a) companheiro(a). Considere que enquanto morar na casa dos seus responsáveis deverá ajudar com pelo menos 30 % da sua renda. Apresente todos os cursos que deseja cursar e seus respectivos custos.

**5ª Etapa - aula de produção/pesquisa/*feedback***

É recomendado que sejam dadas 4 aulas para esta etapa, sendo 1 por semana. Para que os alunos tenham momentos de orientação, pesquisar e até pensar nas diversas atividades do processo. Para não excluir nenhum aluno com dificuldade econômica da atividade é importante que ocorram em uma sala com internet para que os alunos possam realizar suas pesquisas e organizar seu trabalho. Provavelmente haverá algum trabalho iniciado no começo desta etapa, é importante ter tempo para orientação desses trabalhos, em especial nessa faixa etária.

Recomenda-se uma avaliação formativa (com entregas parciais). Isso irá ajudar alunos com maior dificuldade.

**6ª Etapa - *Feedback* geral**

Realizar *feedback* geral dos trabalhos e comentar individualmente trabalhos que ficaram muito abaixo da expectativa. É importante ter algum prazo antes do fechamento de notas para que os trabalhos que não atingirem uma pontuação satisfatória tenham chance de recuperar.

**Cronograma**

1ª Etapa - 2 aulas - Explicação do trabalho etapas 1,2 e 3 - Planejamento familiar com ganho na loteria.

2ª Etapa - 3 aulas - Aula de produção/ pesquisa/*feedback* - uma aula por semana e pelo menos uma semana após etapa anterior.

3ª Etapa - 1 aula - *Feedback* geral - semana posterior a correção de todos os trabalhos

4ª Etapa - 2 aulas - Explicação do trabalho etapas 4,5 e 6 - Planejamento familiar com salário mínimo - Preferencialmente bimestre ou ciclo posterior.

5ª Etapa - 4 aulas - Aula de produção/ pesquisa/*feedback* - uma aula por semana e pelo menos uma semana após etapa anterior.

6ª Etapa - 1 aula - *Feedback* geral - semana posterior a correção de todos os trabalhos.

**Sugestões de acréscimos quando em séries mais avançadas - 8º ano ou superior**

1. Consultar taxas de rendimentos bancários diferentes e utilizar o conhecimento de juros compostos sobre o dinheiro economizado em cada uma das situações e calcular valor gasto com juros na compra de imóveis em cada um dos modelos (PRICE e SAC).

2. Apresentar problemas após a compra do imóvel como o quanto de tinta de tinta será usado para pintar as paredes, quanto de piso/azulejo será usado nos banheiro, tamanho/preço do box do banheiro, quantas pessoas conseguirão receber para uma refeição/festa e outros detalhes que possam ser uteis para o acabamento de um imóvel ou que sejam úteis para o morador daquela casa.

**Recursos e tecnologias**

Para execução deste plano os alunos necessitam em algum momento de:

- Computador com acesso a internet;
- Folhas sulfites para impressão, a quantidade é variável;
- E-mail, talvez seja necessário que crie uma conta pessoal;

**Relação entre a atividade e conteúdos matemáticos do capítulo 3**

A apresentação matemática que acreditamos que mereça maior destaque foi no juros compostos como possibilidade de investimento do valor destinado a poupança. É possível ainda a explicitação de algumas plantas de imóveis que os alunos manifestaram interesse de compra para estudo de área e perímetro.

**Relação entre os saberes da UNESCO na atividade**

Para os alunos

"Aprender a fazer- Os alunos desenvolveram estratégias de buscas online. Aprenderam a utilizar documentos digitais.

"Aprender a conhecer- Vão conhecer contextos a princípio dos adultos que logo serão sua realidade.

"Aprender a conviver- Com um conhecimento mais profundo sobre os gastos é possível que o aluno adquira um outro olhar frente aos pedidos direcionado aos pais.

"Aprender a ser- O desenvolvimento da empatia parte do estudo de situações que outros cidadãos passam.

Para o professor de matemática

"Aprender a fazer- Orientar os alunos para problemas que não necessariamente sejam matemáticos.

"Aprender a conhecer- Conhecer seus alunos numa perspectiva mais ampla, tanto interesses quanto facilidades/dificuldades.

"Aprender a conviver- Poderá descobrir sonhos e ambições de seus alunos, podendo favorecer algumas questões de aprofundamento.

"Aprender a ser- Refletir sobre as escolhas da sua vida profissional conforme aparecem diversas possibilidades.

**Orientações gerais para o professor**

Para o professor pensar antes da atividade

1. Existem professores que podem ser parceiros neste trabalho? Pelas propostas apresentadas o professor de geografia pode direcionar boas falas no estudo das cidades visitadas (clima, relevo), o professor de língua portuguesa pode favorecer na justificativa da ONG que os alunos vão apoiar e a publicação em rede social que a divulgue.

2. A escola que trabalho tem computadores suficientes para atender os alunos? É importante ter real dimensão de quantos computadores a turma terá disponível na aula destinada pra isso.

3. Quais ferramentas digitais os alunos vão precisar? Eles sabem utilizar? É possível que o professor queira minimizar alguns problemas no processo no suporte de ferramentas digitais e por isso o professor pode preparar oficinas anteriores sobre formulários digitais, documentos de texto, planilhas eletrônicas e outros.

4. Os valores estimados para contas continuam atualizados? Dependo de quando o professor aplique essa atividade as formulas sugeridas precisem ser adequadas.

5. O erro do estudante está sendo valorizado? Ele está sendo estimulado a tentar ou estou favorecendo que ele apenas reproduza? A linguagem usada para orientar o estudante é parte crucial para favorecer uma mentalidade de crescimento.

## 4.3 Atividade 3 - Carnaval

**Autor**

Thiago Santana Rodrigues

**Tema**

Carnaval

**Justificativa**

O carnaval é uma festa tradicional do povo brasileiro que promove uma grande diversidade cultural, seja nos temas usados nos desfiles ou devido ao turismo. Existem muitos elementos na decoração carnavalesca que podem ter uma abordagem sistematizada pela matemática.

**Segmento**

Ensino fundamental II (6ºano)

**Competências gerais da BNCC**

- Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva
- Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
- Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
- Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital , bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo

**Disciplina para o trabalho interdisciplinar**

Matemática, História, Português, Ciências

**Competências específicas da Matemática na BNCC**

- Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.
- Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
- Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.
- Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.
- Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas

e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).

**Unidades temáticas**

Geometria plana e geometria analítica.

**Objetos de conhecimento**

No ensino fundamental II (6º ano) temos:

- Plano cartesiano: associação dos vértices de um polígono a pares ordenados.
- Construção de retas paralelas e perpendiculares, fazendo uso de réguas, esquadros e softwares.
- Ângulos: noção, usos e medida.
- Diferentes tipos de representação de informações: gráficos e fluxogramas.

**Habilidades da BNCC**

- (EF06MA16) Associar pares ordenados de números a pontos do plano cartesiano do 1º quadrante, em situações como a localização dos vértices de um polígono.
- (EF06MA22) Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros.
- (EF06MA23) Construir algoritmo para resolver situações passo a passo.
- (EF06MA25) Reconhecer a abertura do ângulo como grandeza associada às figuras geométricas.
- (EF06MA26) Resolver problemas que envolvam a noção de ângulo em diferentes contextos e em situações reais, como ângulo de visão.
- (EF06MA27) Determinar medidas da abertura de ângulos, por meio de transferidor e/ou tecnologias digitais.
- (EF06MA34) Interpretar e desenvolver fluxogramas simples, identificando as relações entre os objetos representados

**Inclusão e acessibilidade**

Para alunos com deficiência auditiva pode ser necessário ter todas as instruções por escrito e tirar dúvidas também.

Para alunos com deficiência visual será necessário auxiliar na compreensão do plano cartesiano. Uma possibilidade seria utilizar o barbante para destacar os eixos e outro barbante mais fino para destacar retas perpendiculares aos eixos. Provavelmente a descrição para este aluno terá uma riqueza de detalhes maior, será necessário que um profissional entenda braile ou que esse aluno faça sua descrição verbalmente.

Observação: Caso o aluno com necessidade especial não reconheça o que é uma máscara levar algumas com relevo destacado.

**Conhecimento prévio**

Para realizar essa atividade deve ser alfabetizado.

**Transversalidade (possíveis)**

Multiculturalismo - Diversidade Cultural e Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras: Abordando temas de samba-enredos, outras festas culturais (brasileiras ou não), dentre outras.

Meio ambiente - Educação ambiental e educação para o consumo: Discussão sobre os materiais usados nos carros alegóricos e seu uso posterior, higienização de arquibancadas do sambódromo e vias no carnaval de rua.

Economia - trabalho: trabalhos gerados diretamente e indiretamente por conta da festa, tributação de impostos, sazonalidade de algumas profissões.

**Eixo temático da BNCC**

Geometria

**Delimitação do conteúdo**

Ângulos, classificação de figuras, plano cartesiano e dependendo da contextualização adotada em outras disciplinas, porcentagem, gráficos e operações fundamentais.

**Metodologia**

**1ª Etapa - Construção da máscara - 2 aulas em sala.**

Os alunos devem construir um molde de máscara carnavalesca, será necessário dois exemplares. Todo o traçado deve ser feito com o auxílio dos instrumentos régua, compasso e transferidor, não serão considerados traços a mão livre. Devem apresentar um roteiro indicando as etapas de construção da máscara.

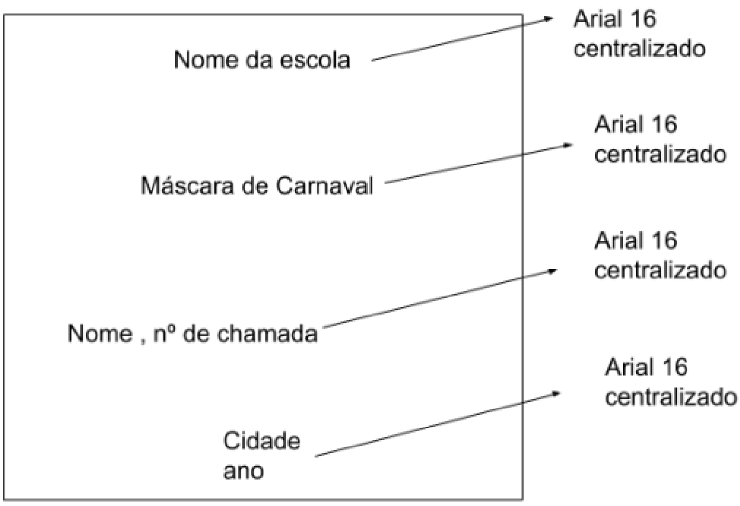
Para organizar o trabalho peço que seja organizado com no mínimo os tópicos abaixo:

- Capa
- Sumário
- Itens necessários para construção

- Roteiro de construção
- Máscara construída usando o roteiro

**Detalhamento da capa (formato ABNT), segue modelo (figura 27):**

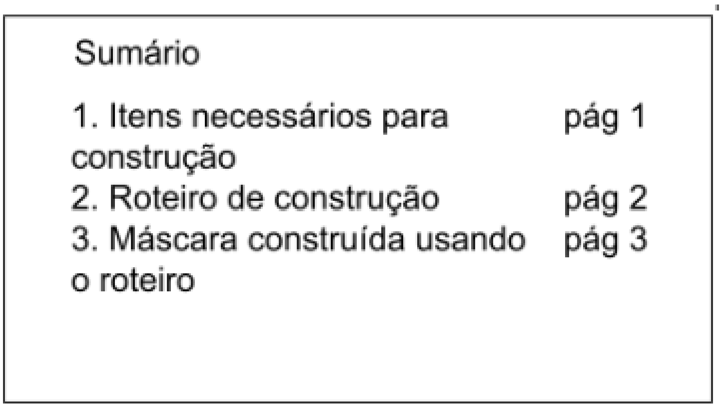
Figura 27 – Capa do trabalho da máscara de carnaval




Fonte: Elaborada pelo autor.

**Detalhamento do sumário (figura 28)**

Figura 28 – Sumário do trabalho do carnaval




Fonte: Elaborada pelo autor.

**Detalhamento dos itens necessários para construção da máscara**

- Apresentar o nome do item.
- Apresentar custo do item (indicar endereço do local que está com este preço).

**Detalhamento do roteiro de construção**

Indicar todas as etapas necessárias para construção da máscara com o máximo de detalhes possíveis. Os detalhes devem ir da posição da régua/compasso/transferidor à localização do lápis no material.

Pode ser realizado em duplas para ter um número menor de trabalhos e incentivar o trabalho colaborativo.

Prazo de entrega: 1 semana.

**2ª Etapa - 2 aulas (Após correção de todos os trabalhos)**

Comentar erros que os alunos cometeram nos trabalhos. Alguns erros possíveis:

- Capa sem informação, com informações desnecessárias ou decoração;
- Trabalho sem sumário ou sem página;
- Palavras escritas de forma incorreta;
- Instruções confusas (não informar a construção do próximo traço referenciado em relação ao anterior ou frases sem sentido);
- Utilização inadequada dos equipamentos (régua, transferidor, esquadro, compasso).

**3ª Etapa - Utilização correta dos equipamentos e roteiro - 2 aulas**

Explicar o funcionamento do plano cartesiano e como isso pode auxiliar no desenho de objetos. Após esta etapa pedir para que os alunos façam novamente suas máscaras.

**4ª Etapa - 1 aula (Após correção de todos os trabalhos refeitos)**

Comentar erros que os alunos cometeram nos trabalhos e os avanços na escrita.

**Cronograma**

- 1ª etapa - 2 aulas
- 2ª etapa - 2 aulas (após 1ª correção)
- 3ª etapa - 2 aulas
- 4ª etapa - 1 aulas (após 2ª correção)

**Sugestões de acréscimos quando em séries mais avançadas - 3ºano do ensino médio**

- Utilizar alguma representação construída por alunos de outras séries e descrever a máscara como trechos de funções.

- Dada uma máscara pronta solicitar a distância entre pontos e retas dadas as informações de construções.

**Recursos e tecnologias**

Por trabalho será necessário (sem considerar trabalhos interdisciplinares possíveis):

- Aproximadamente 10 folhas sulfites;
- 1 transferidor;
- 1 compasso;
- 1 régua;
- 1 esquadro escaleno;
- 1 esquadro isósceles.

**Exemplos de máscaras**

exemplo 1
Material necessário

- régua de 30 cm
- transferidor
- Lápis
- 1 folha sulfite

Construção do roteiro (exemplo 1)

1ºPasso - Deixe a folha no formato retrato (lado maior da folha na vertical).

2ºPasso - A 5 cm de uma das bordas verticais construa um segmento de 22 cm.

3ºPasso - As extremidades do segmento do 2º passo serão os vértices de dois ângulos. Com o auxílio do transferidor construa ângulos de 90º de tal forma que o outro lado deste ângulo tenha 13 cm e não atravesse a borda.

4ºPasso - Una os segmentos construídos no 3º passo. Obtendo um retângulo, que será a cabeça da máscara.

5ºPasso - A 5 cm de um dos segmentos horizontais construídos no 3º passo, construa segmentos de 4 cm a 1 cm de cada uma dos segmentos verticais construídos no 2º e 4º passo. Será uma parte dos olhos.

6ºPasso - Construa um segmento de reta de 4 cm em cada extremidade do 5º Passo formando um ângulo de 90º com esses segmentos na direção da borda mais distante, com auxílio do transferidor.

7ºPasso - Repita o 5º passo, obtendo dois quadrados. Obtendo os olhos da sua máscara.

8ºPasso - Construa um segmento de 4cm a 12 cm da borda horizontal mais próxima dos olhos e a 4,5 cm de uma das bordas verticais. Este segmento será a base do nariz.

9ºPasso - Faça um ponto a 8 cm da borda horizontal dos olhos e a 6,5 cm da de uma borda vertical. Será o topo do nariz.

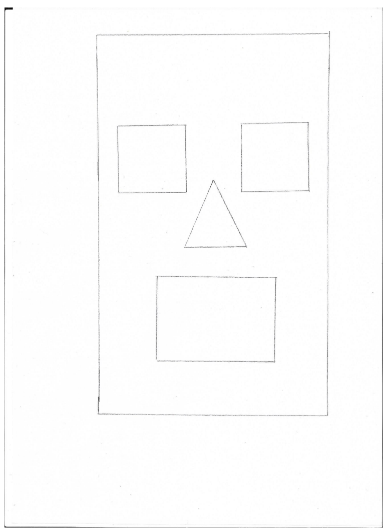
10ºPasso - Construa segmentos que unam a extremidade do segmento construído no 8º Passo com o ponto do 9º Passo. O nariz foi formado.

11ºPasso - A 4 cm da borda horizontal mais distante do olhos construa um segmento de 7 cm que esteja a 5 cm de uma das bordas verticais. Será a parte de baixo da boca da máscara.

12ºPasso - As extremidades do segmento do 11º passo serão os vértices de dois ângulos. Com o auxílio do transferidor construa ângulos de 90º de tal forma que o outro lado deste ângulo tenha 4 cm e não atravesse a borda.

13ºPasso - Una os segmentos construídos no 12º passo. Obtendo um retângulo, que será a boca da máscara.

Figura 29 – Máscara - exemplo 1



Fonte: Elaborada pelo autor.

Essas dimensões foram realizadas para o rosto de um homem adulto que tem formato retangular (medidas verticais maiores que as horizontais), os valores não são adequados para todos os rostos.

Exemplo 2

Material necessário

- régua de 30 cm
- transferidor
- compasso
- Lápis
- 2 esquadros
- 1 folha sulfite

Construção do roteiro (exemplo 2)

1ºPasso Marque um ponto que esteja a pelo menos 8 cm de todas as bordas, será o ponto O.

2ºPasso Abra o compasso mantendo 8 cm de distância entre a ponta seca e o "grafite", coloque a ponta seca em O e construa uma circunferência, isto será a máscara.

3ºPasso Repita o 2º Passo mas com a distância de 2 cm e construa uma circunferência, isto será o nariz.

4ºPasso Do O ponto construa um segmento *OB* de 4 cm, em tracejado, logo precisará apagar.

5ºPasso Apoie o esquadro com o vértice que possui 90º em B, meça 3 cm para cada região marcando com um ponto, será o centro do seu olho.

6ºPasso No centro de cada olho construa uma circunferência de raio 2 cm.

7ºPasso Com um esquadro (A) fixo sobre OB e outro esquadro (C) de tal forma que o ângulo de 90º possa ser colocado sobre O encostando no outro esquadro em OB e que as outras partes do lado estejam na direção dos olhos.

8ºPasso Retire o esquadro A

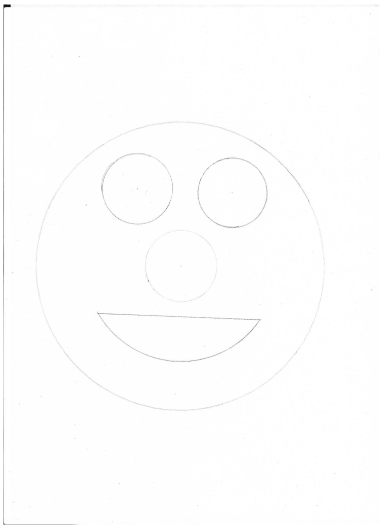
9ºPasso Posicionando um esquadro em O e lado comum ao esquadro C que não seja OB, construa segmentos tracejados formando o ângulo de 30º e 150º.

10ºPasso Construa um arco de circunferência com centro em O e raio 5,5 cm que esteja entre os segmentos construídos no 9ºPasso, será a parte inferior da sua boca.

11ºPasso Una as extremidades do arco construído no 10ºPasso, finalizamos a boca.

12ºPasso Apague os segmentos tracejados.

Figura 30 – Máscara - exemplo 2



Fonte: Elaborada pelo autor.

**Relação entre a atividade e conteúdos matemáticos do capítulo 3**

Observações sobre o roteiro do exemplo 1
No 1º Passo existe um pensamento introdutório sobre os eixos x e y (horizontal e vertical) da geometria analítica.

No 2º Passo a orientação para a construção do segmento que preserva uma distância de outro segmento aparece a ideia de menor distância entre ponto e reta. A construção deste segmento deve ser feito usando a régua de tal forma que fique perpendicular a borda vertical escolhida e posteriormente meça 5 cm, repetir o procedimento para outro ponto distinto e construir o segmento que passa por eles. Assim também aparece a ideia de que dois pontos determinam uma única reta.

Perceba que no 3º Passo aparece a ideia de semiplanos dividido por uma reta e a construção de ângulos por meio do transferidor (6º, 12º também).

No 5º Passo a construção já se pauta em eixos de referência (6º,8º,9, 11 Passos também), além do raciocínio de segmentos de mesma direção.

Observações do roteiro do exemplo 2
No 1º Passo aborda o conceito de lugar geométrico, no 2º Passo lugar geométrico "circunferência"(3º,6º Passos também), além do uso do compasso.

No 5º Passo tanto o conceito de ângulo, eixo de referência, semiplanos divididos por uma reta e uso do esquadro (7º Passo também).

No 9ºPasso o conceito de arco de circunferência.

**Relação entre os saberes da UNESCO na atividade**

Caso realizada individualmente (alunos)

"Aprender a fazer- durante a construção da máscara o aluno vai utilizar instrumentos que podem ser usados futuramente, além de trabalhar com as unidades de medida. Redigir procedimentos com etapas bem definidas que vão ser usadas para coisas futuras como uma receita de bolo.

"Aprender a conhecer- Os alunos conheceram ou prestaram a atenção as dimensões do rosto, além de aprender o uso de novos instrumentos e conceitos importantes para a geometria.

"Aprender a ser- A construção de ideias que sejam dependentes faz com que ele reflita nas consequências dos atos e até da objetividade da fala/escrita.

"Aprender a conviver- A compreensão das particularidades do formato de cabeça de cada individuo favorecerá uma relação que respeite o outro em suas particularidades.

Caso realizada em duplas ou em grupos (alunos)

Terão as mesmas das desenvolvidas individualmente e com o acréscimo no "Aprender a conhecer"visto que vão precisar convencer o parceiro que aquele formato será mais vantajoso ou até se as instruções que um sugeriu é adequada, fortalecendo o "aprender a ser"no desenvolvimento de argumentação, negociação e respeito ao outro.

Para o professor de matemática

"Aprender a fazer- O fazer do professor não será encaminhado por ele mas por seus alunos, com a descentralização o fazer será mais mediar, em especial durante a construção na aula. A importância destacada para o *feedback* voltado ao estudante.

"Aprender a conhecer- A apresentação da forma de realizar determinadas construções sugeridas pelos alunos fará com que pense tanto em temas matemáticos que não tinha pensado como na argumentação usada pelos alunos.

Aprender a conviver- A convivência com seus alunos não se dará na distância da cadeira pra lousa, mas de uma troca mais próxima, mas personalizada as demandas que o aluno lhe apresenta.

"Aprender a ser- A compreensão que para que o aluno possa fazer com qualidade é preciso boas perguntas mais que boas "receitas"de resolução.

**Orientações gerais para o professor**

Para o professor pensar antes da atividade

1. Os alunos possuem quais instrumentos para a construção da máscara? Em algumas escolas possuem listas de materiais e em outras os alunos podem precisar esperar a entrega de kits por parte da instituição.

2. O compasso tem uma ponta que pode furar, minha turma poderá trabalhar com ele? Pode ser preciso restringir o uso do compasso em situações que a integridade do estudante esteja

em risco.

3. Os alunos sabem construir margem? Para alguns estudantes a construção de margem pode ser um problema é preciso refletir se o professor irá orientar previamente.

4. O erro do estudante está sendo valorizado? Ele está sendo estimulado a tentar ou estou favorecendo que ele apenas reproduza? A linguagem usada para orientar o estudante é parte crucial para favorecer uma mentalidade de crescimento.

Para o professor pensar durante a atividade

1. As etapas da construção da máscara está coerente? Alguns alunos vão encontrar dificuldade de referenciar uma construção a outra.

2. Os alunos já fizeram as listas de materiais necessários? Alguns alunos esquecem deste passo.

3. A referência pelo plano cartesiano está o mais sucinto possível? Reflita se a construção descrita é a realizada com menor quantidade de passos.

4. O objeto matemático descrito foi realizado de forma correta? Verifique se as condições são necessárias e suficientes.

CAPÍTULO

5

# CONCLUSÃO

Na construção/manutenção de um professor de matemática competente no século XXI são necessários um conjunto de fatores. A premissa fundamental está nos 4 pilares educacionais da UNESCO (DELORS *et al.*, 1998) que torna o professor um profissional ativo frente tanto ao conhecimento específico quanto nas relações sociais (KEPNER, 1986).

No saber matemático da educação básica existe uma atualização com ritmo mais lento. Porém, a forma de transpor tal conhecimento para o aluno imerso em tantas tecnologias tem se tornado cada vez mais desafiadora. Por isso, o professor necessita manter-se buscando o conhecimento, sobretudo no aspecto didático (MEIRIEU, 2005).

O compartilhamento do trabalho e pesquisas desenvolvidos pelos professores com a comunidade docente é uma ferramenta essencial para favorecer uma formação continuada para os docentes em exercício. Isso colabora no desenvolvimento do "aprender a fazer"por também apresentar sugestões no "aprender a viver junto"pois ao se expressar frente ao apresentado é necessário organizar as ideias para interagir com respeito. O "aprender a compreender"quando relacionado com as estratégias apresentadas dos outros, ajudará o professor no desenvolvimento do "aprender a ser". Por isso é preciso favorecer tanto a procura por novos saberes de forma individual como o compartilhamento dos saberes.

No Brasil, a maioria dos docentes possui um baixo rendimento financeiro e uma alta carga horária de trabalho (BARBOSA, 2011), então é preciso que esse momento de compartilhamento seja incorporado na rotina do ambiente escolar ou se tornará uma possibilidade no contraturno entre o momento de lazer e o trabalho. Não desconsideranos que o docente faça estudos complementares nesse período, pelo contrário, é importante que ele ocorra, mas a sua atualização profissional não pode ficar restrita a este momento.

Na atualização das relações sociais da escola é importante que o docente tenha tempo para experienciar essa relação com o saber que vem sofrendo alterações constantes (DELORS *et al.*, 1998). O momento de formação na universidade se dá com a perspectiva da sua disciplina e é necessário que este momento aconteça com os pares das outras disciplinas também, favorecendo o desenvolvimento de atividades interdisciplinares para estudantes mais próximos do mundo real.

Infelizmente é possível que um professor entre na sala de aula de uma escola e não compartilhe ou escute seus parceiros, seja por insegurança ou receio de perder sua autonomia (PERRENOUD, 2001). A reunião pedagógica escolar é um momento que pode e deve ser usado para a permanente aprendizagem dos docentes. É preciso que sejam criadas possibilidades para a construção do trabalho coletivo, ora em área específica, ora com parceiros de outras disciplinas pois isso contribui para o exercício contínuo de amadurecimento do professor. Além disso, não basta tornar esse ambiente um local de aprendizagem docente, sendo importante ampliá-lo. As redes de ensino público podem favorecer a comunicação entre os docentes nas reuniões pedagógicas ou mesmo em formação com auxílio de um professor mais experiente, por exemplo.

Ainda dentro de uma mesma unidade escolar é possível explorar os murais de avisos, que podem e devem indicar eventos de divulgação científica, cursos de aperfeiçoamento e pós-graduação, além de favorecer o uso da biblioteca da instituição, que deve estar em devida ordem. Já existem aplicativos através dos quais é possível fomentar a leitura com ferramentas que possibilitam indicar o que já leu, o que gostaria de ler, escrever resenhas, concorrer a sorteio de livros, tudo de forma gratuita.

É esperado que a formação continuada tenha um impacto positivo na jornada do professor, tornando o seu tempo destinado ao trabalho mais útil, favorecendo um *feedback* a seus alunos e a seus colegas tornando assim a aprendizagem da sala de aula mais efetiva. É importante perceber que a variedade de formatos seja explorada tanto pelos professores quanto pelos alunos. Não pode-se apenas pedir para o aluno realizar atividades com respostas que são praticamente roteiros prontos pois na vida os problemas não são assim. É claro que não podemos pedir que os alunos partam de situações muito complexas, mas é preciso pensar mais em questões de matemática de forma aberta pois existem variáveis do mundo real que impactam até mesmo um problema simples e é preciso que o professor abra os olhos para essa possibilidade. A matemática não é apenas um saber abstrato e por isso é preciso que esses momentos de prática existam e existam com qualidade.

# REFERÊNCIAS


AMADO, C. M. M. **História da Pedagogia e da Educação**. [S.l.], 2007. Citado na página 19.

BARBOSA, X. Y. Z. A. **Os Salários dos Professores Brasileiros: implicações para o trabalho docente. Brasília: Liber Livro, 2011.** [S.l.], 2011. Citado nas páginas 22 e 111.

BEGUOCI, L. D. L. **Como dar feedbacks efetivos dentro da escola**. [S.l.], 2017. Disponível em: <https://novaescola.org.br/conteudo/7087/como-dar-feedbacks-efetivos-dentro-da-escola>. Citado na página 29.

BOALER, J. **paying the price for"sugar and spice"shifiting the analytical lens in equity research. Matematical thinkink and Learning**. [S.l.], 2002. Citado na página 30.

____. **Research Suggests That Timed Tests Cause Math Anxiety. Teaching Children Mathematics.** [S.l.], 2014. Citado na página 28.

____. **Mentalidades matemáticas: estimulando o potencial dos estudantes por meio da matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador.** [S.l.], 2018. Citado nas páginas 20, 27, 28, 29 e 30.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da natureza, Matemática e Tecnologias. Ensino Médio**. [S.l.], 2000. Citado na página 33.

____. **Emenda constitucional nº 59, de 11 de novembro de 2009**. [S.l.], 2009. Citado na página 39.

____. **Base Nacional Comum Curricular**. [S.l.], 2018. Citado nas páginas 33 e 73.

CHARLIER, P. P. L. P. M. A. Évelyne. **Formando Professores Profissionais. Quais estratégias? Quais competências**. [S.l.], 2001. Citado nas páginas 22, 23 e 31.

CHRISTIANSEN B., e. W. **Perspectives on mathematics education**. [S.l.], 1986. Citado na página 26.

COHEN, R. A. L. E. G. **Planejando o trabalho em grupo: estratégias para salas de aula heterogêneas**. [S.l.], 2017. Citado na página 76.

CORTELLA, G. D. M. S. **A era da curadoria: o que importa é saber o que importa! Educação e formação de pessoas em tempos velozes.** [S.l.], 2015. Citado nas páginas 30 e 31.

DAY, C. **devoluphing teacher: the challengs of lifelong learning**. [S.l.], 1999. Citado nas páginas 25 e 26.

DELORS, J.; MUFTI, I. A.; AMAGI, I.; CARNEIRO, R.; CHUNG, F. **Educação: um tesouro a descobrir: relatório para a Unesco da comissão internacional sobre educação para o século XXI**. [S.l.], 1998. Citado nas páginas 19, 20, 21, 23, 25 e 111.

DEMO, X. Y. Z. P. **Educar pela pesquisa**. [S.l.], 1997. Citado nas páginas 20, 22, 23, 24, 25, 27 e 30.

DWECK, C. S. **Mindset: a nova psicologia do sucesso.** [S.l.], 2019. Citado nas páginas 20 e 27.

EDUCAçãO, M. da. **Conheça o perfil dos professores brasileiros**. [S.l.], 2020. Disponível em: <https://www.gov.br/mec/pt-br/assuntos/noticias/conheca-o-perfil-dos-professores-brasileiros>. Citado na página 30.

FREITAS, J. M. P. S. L. **Formação continuada: um estudo colaborativo com professores do Ensino Médio de Rondônia**. [S.l.], 2018. Citado na página 23.

FURTADO, I. **Formação em serviço**. [S.l.], 2012. Disponível em: <https://www.itausocial.org.br/formacao-em-servico/>. Citado na página 31.

KELCHTERMANS, G. **A utilização da biografia na formação de professores**. [S.l.], 1995. Citado na página 26.

KEPNER, B. B. T. C. H. **Novo administrador racional**. [S.l.], 1986. Citado nas páginas 27, 28, 29, 31 e 111.

MACHADO, A. dos S. **MATEMÁTICA, TEMA E METAS - SISTEMAS LINEARES E ANÁLISE COMBINATÓRIA**. [S.l.], 1986. Citado na página 36.

MAINARDES, C. **Enfim, Brasil tem um novo PNE.** [S.l.], 2014. Citado nas páginas 30 e 31.

MEIRIEU, P. **Carta a um jovem professor**. [S.l.], 2005. Citado na página 111.

MORAN, J. **Ampliando as práticas de Mentoria na Educação**. [S.l.], 2019. Disponível em: <http://www2.eca.usp.br/moran/wp-content/uploads/2019/08/mentoria_Moran.pdf>. Citado na página 27.

MORGADO, P. C. P. C. A. C. **Matemática discreta**. [S.l.], 2017. Citado na página 34.

MOSER, J. a. **Mind Your Errors Evidence for a Neural Mechanism Linking Growth Mind Set to Adaptive Posterror Adjustments.** [S.l.], 2011. Citado na página 28.

NETO, A. C. M. **Geometria**. [S.l.], 2016. Citado na página 39.

PAULO, S. **Resolução SE 75 - Dispõe sobre a função gratificada de Professor Coordenador**. [S.l.], 2014. Citado na página 26.

PAULO, U. S. dos especialistas de educação do magistério oficial do estado de S. **Sobre o Professor Coordenador**. [S.l.]. Disponível em: <http://www.udemo.org.br/2019/destaques/110_2019-08-05_Sobre-o-Professor-Coordenador.html>. Citado na página 27.

PENIN, S. **Transformação produtiva e equidade - A questão do ensino básico**. [S.l.], 1994. Citado na página 23.

PERRENOUD, P. **Ensinar: Agir na urgência, decidir na incerteza**. [S.l.], 2001. Citado nas páginas 20, 22 e 112.

PIMENTA, S. G. **Formação de professores: identidade e saberes da docência**. [S.l.], 2000. Citado na página 23.

PONTE, J. P. **O conhecimento profissional dos professores de matemática**. [S.l.], 1997. Citado na página 25.

PRADA, L. E. A. **Dever e direito à formação continuada de professores**. [S.l.], 2007. Citado na página 23.

SAITO, A. T. **Uma contribuição ao desenvolvimento da educação em finanças pessoais no Brasil.** [S.l.], 2007. Citado na página 38.

SANTOS, C. F. **O ensino da leitura e a formação em serviço do professor**. [S.l.], 2002. Citado na página 23.

SANTOS, L. M. d.; SILVEIRA, M. C.; TASCHETTO, M. P. **A “experiência”e o“esperançar”na Educação Matemáticadurante a pandemiade COVID-19**. [S.l.], 2021. Citado na página 19.

SARAIVA, M.; PONTE, J. P. **O trabalho colaborativo e o desenvolvimento profissional do professor de Matemática**. [S.l.], 2003. Citado nas páginas 25 e 26.

SCHLINDWEIN, I. M. C. **Compromisso das Escolas Associadas**. [S.l.], 2019. Disponível em: <https://www.peaunescosc.com.br/2019/04/16/compromisso-das-escolas-associadas/>. Citado na página 19.

SCHöN, D. **Educando o profissional reflexivo: um novo design para o ensino e a aprendizagem**. [S.l.], 2000. Citado na página 22.

SERRAZINA, L. **Teacher’s professional development in a period change in primary mathematics education in Portugal**. [S.l.], 1998. Citado na página 26.

SERRES, M. **EDUCAÇÃO E CONTEMPORANEIDADE em MICHEL SERRES**. [S.l.], 2015. Disponível em: <https://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-73072015000100239>. Citado na página 30.

SILVA, A. F. M. **A importância da matemática financeira no ensino**. [S.l.], 2015. Citado na página 38.

SILVA, M. C. **A Combinatória: abordagem em documentos oficiais, em pesquisas e em livros didáticos**. [S.l.], 2016. Citado na página 33.

TOBIAS, S. **Overcoming math anxiety.** [S.l.], 1978. Citado na página 28.

TRICATE, M. **Valores em rede: escolas associadas à UNESCO**. [S.l.], 2020. Disponível em: <https://revistaeducacao.com.br/2020/02/12/escolas-associadas-a-unesco/#:~:text=No%20Brasil%2C%20a%20Rede%20PEA,rede%20entre%20todos%20os%20pa%C3%ADses.> Citado na página 19.

ICMC USP
SÃO CARLOS