A técnica de forcing e aplicações

Júnio Luan Pereira

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

Júnio Luan Pereira

A técnica de forcing e aplicações

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Leandro Fiorini Aurichi

USP – São Carlos
Maio de 2016

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Pereira, Júnio Luan
P436a A técnica de forcing e aplicações / Júnio Luan Pereira; orientador Leandro Fiorini Aurichi. - São Carlos - SP, 2016.
125 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Matemática) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2016.

1. Forcing. 2. Aplicações. I. Aurichi, Leandro Fiorini, orient. II. Título.

Júnio Luan Pereira

The forcing technique and applications

Master dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Master Program in Mathematics. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Leandro Fiorini Aurichi

USP – São Carlos
May 2016

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao CAPES pelo financiamento da bolsa de Mestrado, ao CNPq pelo financiamento das bolsas de pesquisa científica da graduação onde tive a preparação para essa pesquisa, e a Leandro Fiorini Aurichi, o homem que me guiou durante todo esse tempo.

Em especial, agradeço também aos membros da banca de defesa de minha dissertação, Eduardo Tengan, Rodrigo Roque Dias e Samuel Gomes da Silva, cujas diversas sugestões de correções contribuíram para a redação dessa versão revisada.

RESUMO

PEREIRA, J. L.. **A técnica de forcing e aplicações**. 2016. 125 f. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos – SP.

O texto descreve a definição e formalização da técnica de forcing, através de uma abordagem direta, sem a conversão para modelos transitivos. Também usa esta abordagem para provar um certo número de teoremas de consistência no âmbito da aritmética de cardinais e afins.

Palavras-chave: Forcing, Aplicações.

ABSTRACT

PEREIRA, J. L.. **A técnica de forcing e aplicações**. 2016. 125 f. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos – SP.

The text describes the definition and formalization of the forcing technique, via a direct approach, without the transition to ground models. It also uses this approach to prove a number of consistency theorems on cardinal arithmetic and related subjects.

Key-words: Forcing, Applications.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A primeira ferramenta criada para demonstrações de consistências de teorias matemáticas foi a teoria de modelos. Ela consiste em tomar uma “fração” de uma segunda teoria matemática e, a partir da linguagem desta, definir uma “interpretação” da linguagem da primeira teoria. Se tudo ocorrer bem, através desta técnica você conseguirá provar a consistência da primeira teoria caso valha a consistência da segunda teoria, ou seja, a teoria de modelos lida com demonstrações de “consistências relativas”.

Na teoria dos conjuntos, a abordagem mais corriqueira de teoria dos modelos é o uso de conjuntos ou classes próprias, de preferência transitivas, mantendo a linguagem original intacta, permitindo assim a demonstração de consistências relativas para várias axiomatizações da teoria dos conjuntos. Porém, o segundo teorema da incompletude de Gödel prova que o uso de conjuntos não permite provar consistências relativas de axiomatizações suficientemente amplas, como ZF ou ZFC, nos obrigando a lidar, na maioria das vezes, apenas com classes próprias.

Das classes próprias usadas como modelos, a mais conhecida é a classe $\mathbf{L}$ (introduzida por Gödel com o intuito de provar a consistência de GCH em ZF), o “universo dos construtíveis”. Com ela somos capazes de provar que a consistência da teoria ZFC juntamente com a afirmação de que todos os conjuntos fazem parte da classe $\mathbf{L}$ (o “axioma da construtibilidade”, denotado como $\mathbf{V} = \mathbf{L}$), desde que valha a consistência de ZF (o C vem de *axiom of* C*hoice*, “axioma da escolha”), isto é, Con(ZF) $\rightarrow$ Con(ZFC+$\mathbf{V} = \mathbf{L}$) (provada pelo próprio Gödel, para uma demonstração desse fato, veja (KUNEN, 1980, VII§2-4)). Porém, ela tem uma propriedade de “minimalidade”, isto é, toda classe própria transitiva que, como modelo, satisfaz ZFC (formalmente falando, só é necessário satisfazer um número finito específico de axiomas dessa teoria), obrigatoriamente conterá $\mathbf{L}$. O problema desse fato é que isso torna impossível provar, a partir dessa abordagem, afirmações como Con(ZFC) $\rightarrow$ Con(ZFC+$\mathbf{V} \neq \mathbf{L}$), uma vez que, caso encontrarmos uma classe própria transitiva que satisfaz ZFC+$\mathbf{V} \neq \mathbf{L}$, teremos como consequência imediata a demonstração de $\mathbf{V} \neq \mathbf{L}$, coisa que não podemos esperar conseguir provar uma vez que já sabemos que Con(ZF) $\rightarrow$ Con(ZFC+$\mathbf{V} = \mathbf{L}$) (a não ser que ZF seja inconsistente, mas ninguém deseja que isso seja verdade). O problema é ainda mais grave, uma vez que, em ZFC, podemos provar que $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ implica GCH (veja (KUNEN, 1980, VII§4)), hipótese relacionada ao valor do cardinal 2^κ, que não é possível de ser provada em ZFC. Logo, não podemos esperar provar, com a abordagem tradicional de modelos acima mencionada, consistências relativas de teorias cuja aritmética de cardinais transfinitos viola GCH (a dificuldade de provar GCH motiva essa investigação).

A técnica de forcing consiste em uma ferramenta de demonstração de consistências relativas, criada por Cohen, capaz de contornar esse fato, mas que, consequentemente, não usa a abordagem tradicional de modelos enunciada no parágrafo anterior. A abordagem do forcing no nosso texto, desenvolvida por Scott e Solovay, consiste de, a partir de uma álgebra booleana completa, construir uma classe de conjuntos que, a partir de uma linguagem bastante incomum (a "linguagem forcing"), passará a interpretar uma nova teoria para, assim, conseguirmos provar sua consistência relativa. Na linguagem que criaremos, as afirmações não serão simplesmente verdadeiras e falsas, mas assumirão um "valor", assinalado por um elemento específico da álgebra booleana completa.

Com a técnica acima, seremos capazes de interpretar teorias onde não apenas existem todos os conjuntos que já existiam na teoria original, mas também possuem conjuntos "novos". A partir desses conjuntos "novos", dentro dessa nova teoria provaremos afirmações "novas". Usualmente, a maneira mais usual de manipular essa técnica é a partir de dois "modelos transitivos", $M, M[G]$, onde M simula o "universo antigo", e $M[G]$, sendo criado a partir de M, a classe enunciada acima e o G satisfazendo propriedades específicas (um "filtro M-genérico", não confundir com a definição desse texto com o mesmo nome), simula o "universo novo", que "estende o universo antigo". Essa abordagem, apesar de deixar bem clara a ideia de conjuntos "novos" (que serão os elementos de $M[G]$ que não estão em M), não é necessária para o desenvolvimento da técnica (sem falar que é necessário um complexo contorno lógico para formalizar essa abordagem). Portanto, esse texto não usará essa abordagem, excluindo toda a necessidade de modelos "intermediários". No Apêncice B, enunciarei brevemente tal tipo de abordagem. Escolhendo a álgebra booleana completa adequada, conseguiremos provar afirmações onde facilmente violaremos $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ ou GCH. Nesse texto, exibiremos uma boa porção de teoremas provando isso. Rigorosamente falando, a classe enunciada no parágrafo anterior munida com a linguagem forcing será um "modelo booleano", embora não citaremos isso em nenhum lugar que não seja aqui.

CAPÍTULO

1

DEFINIÇÕES INTRODUTÓRIAS

Nesse capítulo, definiremos e desenvolveremos os principais conceitos necessários para abordar a técnica de forcing, que será desenvolvida no capítulo seguinte.

1.1 Álgebra Booleana

A nossa abordagem de forcing depende crucialmente da escolha de uma álgebra booleana completa. Nesta seção faremos as definições e desenvolvimentos necessários para que o leitor compreenda álgebras booleanas o suficiente para a leitura desse texto.

Definição 1.1.1 (ÁLGEBRA BOOLEANA)**.** Uma **álgebra booleana** é um conjunto $\mathscr{B}$, munido de duas constantes $\mathbb{0}, \mathbb{1} \in \mathscr{B}$, duas operações binárias $+$ (adição) e $\cdot$ (multiplicação) e uma operação unária $-$ (complemento) satisfazendo: Para quaisquer $u, v, w \in \mathscr{B}$

$(+)$ **I.** $u+v=v+u$

$(+)$ **II.** $(u+v)+w=u+(v+w)$

$(+)$ **III.** $u\cdot(v+w)=u\cdot v+u\cdot w$

$(+)$ **IV.** $u\cdot(u+v)=u$

$(+)$ **V.** $u+(-u)=\mathbb{1}$

$(\cdot)$ **I.** $u\cdot v=v\cdot u$

$(\cdot)$ **II.** $(u\cdot v)\cdot w=u\cdot(v\cdot w)$

$(\cdot)$ **III.** $u+(v\cdot w)=(u+v)\cdot(u+w)$

$(\cdot)$ **IV.** $u+(u\cdot v)=u$

$(\cdot)$ **V.** $u\cdot(-u)=\mathbb{0}$

Os próximos dois teoremas descreverão as propriedades das álgebras booleanas cujo conhecimento é crucial para qualquer desenvolvimento posterior de sua teoria.

Teorema 1.1.2. São válidas as seguintes afirmações em uma álgebra booleana $\mathscr{B}$: Para quaisquer $u, v, w \in \mathscr{B}$

1. $\begin{cases} u+v=u \\ u\cdot v=u \end{cases} \iff u=v$

2. $\begin{cases} u+v=\mathbb{1} \\ u\cdot v=\mathbb{0} \end{cases} \iff v=(-u)$

3. $-(-u)=u$

4. $-\mathbb{0}=\mathbb{1}$, $-\mathbb{1}=\mathbb{0}$

Também são válidas as seguintes propriedades relativas às operações $+$ e $\cdot$:

$(+)1.\ u+\mathbb{0}=u$ $\qquad$ $(\cdot)1.\ u\cdot\mathbb{1}=u$

$(+)2.\ u+u=u$ $\qquad$ $(\cdot)2.\ u\cdot u=u$

$(+)3.\ u+\mathbb{1}=\mathbb{1}$ $\qquad$ $(\cdot)3.\ u\cdot\mathbb{0}=\mathbb{0}$

$(+)4.\ -(u+v)=(-u)\cdot(-v)$ $\qquad$ $(\cdot)4.\ -(u\cdot v)=(-u)+(-v)$

Demonstração. Conforme formos provando as afirmações, passaremos a usá-las nas demonstrações seguintes.

$$(+)1.:\quad u+\mathbb{0} \overset{(\cdot)\mathbf{V}}{=} u+(u\cdot(-u)) \overset{(\cdot)\mathbf{IV}}{=} u$$

$$(\cdot)1.:\quad u\cdot\mathbb{1} \overset{(+)\mathbf{V}}{=} u\cdot(u+(-u)) \overset{(+)\mathbf{IV}}{=} u$$

$$(+)2.:\quad u+u \overset{(\cdot)1}{=} u+(u\cdot\mathbb{1}) \overset{(\cdot)\mathbf{IV}}{=} u$$

$$(\cdot)2.:\quad u\cdot u \overset{(+)1}{=} u\cdot(u+\mathbb{0}) \overset{(+)\mathbf{IV}}{=} u$$

$$\begin{aligned}(+)3.:\quad u+\mathbb{1} &\overset{(+)\mathbf{V}}{=} u+(u+(-u))\\ &\overset{(+)\mathbf{II}}{=} (u+u)+(-u)\\ &\overset{(+)2}{=} u+(-u)\\ &\overset{(+)\mathbf{V}}{=} \mathbb{1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\cdot)3.:\quad u\cdot\mathbb{0} &\overset{(\cdot)\mathbf{V}}{=} u\cdot(u\cdot(-u))\\ &\overset{(\cdot)\mathbf{II}}{=} (u\cdot u)\cdot(-u)\\ &\overset{(\cdot)2}{=} u\cdot(-u)\\ &\overset{(\cdot)\mathbf{V}}{=} \mathbb{0}\end{aligned}$$

1. $\Rightarrow$): Multiplique ambos os lados da primeira equação por v, obtendo $v \cdot (u+v) = v \cdot u$. Como $v \cdot (v+u) \overset{(+)\mathbf{I}}{=} v \cdot (u+v)$ e $v \cdot u \overset{(\cdot)\mathbf{I}}{=} u \cdot v$, obtemos $v \cdot (v+u) = u \cdot v$. Agora, uma vez que $v \overset{(+)\mathbf{IV}}{=} v \cdot (v+u)$ e $u \cdot v = u$ (segunda equação), então vale $v = u$.

1. $\Leftarrow$): Consequência imediata dos resultados $(+)2$ e $(\cdot)2$ deste teorema.

2. $\Rightarrow$): Multiplique ambos os lados da primeira equação por $-u$, obtendo $(-u) \cdot (u+v) = \mathbb{1} \cdot (-u)$, com tudo o que sabemos, chegamos a

$$\begin{aligned} \mathbb{1} \cdot (-u) &\overset{(\cdot)\mathbf{I}}{=} -u \cdot \mathbb{1} \\ &\overset{(\cdot)1}{=} -u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-u) \cdot (u+v) &\overset{(+)\mathbf{III}}{=} (-u) \cdot u + (-u) \cdot v \\ &\overset{(\cdot)\mathbf{V}}{=} \mathbb{0} + (-u) \cdot v \\ &\overset{(+)\mathbf{I}}{=} (-u) \cdot v + \mathbb{0} \\ &\overset{(+)1.}{=} (-u) \cdot v \end{aligned}$$

assim temos a equação $(-u) \cdot v = -u$. Some ambos os lados da segunda equação por $-u$, obtendo, $(-u) + (u \cdot v) = (-u) + \mathbb{0}$. Por um lado, vale $(-u) + \mathbb{0} \overset{(+)1}{=} -u$, por outro, temos que

$$\begin{aligned} (-u) + (u \cdot v) &\overset{(\cdot)\mathbf{III}}{=} ((-u) + u) \cdot ((-u) + v) \\ &\overset{(+)\mathbf{I}}{=} (u + (-u)) \cdot ((-u) + v) \\ &\overset{(+)\mathbf{V}}{=} \mathbb{1} \cdot ((-u) + v) \\ &\overset{(\cdot)\mathbf{I}}{=} ((-u) + v) \cdot \mathbb{1} \\ &\overset{(\cdot)1}{=} (-u) + v \end{aligned}$$

através desses dois resultados, chegamos à equação $(-u) + v = -u$. Juntas, esta equação com a obtida antes formam o sistema: $\begin{cases} (-u) + v = -u \\ (-u) \cdot v = -u \end{cases}$ que implica $-u = v$ através da parte 1 deste teorema.

2. $\Leftarrow$): Consequência imediata das propriedades $(+)$V e $(\cdot)$V.

3.: Consequência direta da parte 2 deste teorema, usando como equações a propriedades $(+)$**V** aplicada com $(+)$**I**, e a propriedade $(\cdot)$**V** aplicada com $(\cdot)$**I**.

4.: Consequência direta da parte 2 deste teorema, utilizando como equações a parte $(+)1$ deste teorema, fazendo $u = \mathbb{1}$, e a parte $(\cdot)1$ também deste teorema, fazendo $u = \mathbb{1}$.

$(+)4$.: Vamos provar que $u + v$ e $(-u) \cdot (-v)$ satisfaz as duas equações da parte 2 deste teorema, o que implicará o resultado.

$$\begin{aligned}
(u+v)+((-u)\cdot(-v)) &\overset{(\cdot)\mathbf{III}}{=} ((u+v)+(-u))\cdot((u+v)+(-v))\\
&\overset{(+)\mathbf{I},(+)\mathbf{II}}{=} ((u+(-u))+v)+(u+(v+(-v)))\\
&\overset{(+)\mathbf{V}}{=} (\mathbb{1}+v)+(u+\mathbb{1})\\
&\overset{(+)\mathbf{I}}{=} (v+\mathbb{1})+(u+\mathbb{1})\\
&\overset{(+)3}{=} \mathbb{1}+\mathbb{1}\\
&\overset{(+)3}{=} \mathbb{1}
\end{aligned}$$

Assim vale a primeira equação.

$$\begin{aligned}
(u+v)\cdot((-u)\cdot(-v)) &\overset{(+)\mathbf{III}}{=} (u\cdot((-u)\cdot(-v)))+(v\cdot(((-u)\cdot(-v))))\\
&\overset{(\cdot)\mathbf{I},(\cdot)\mathbf{II}}{=} ((u\cdot(-u))\cdot v)+((-u)\cdot(v\cdot(-v)))\\
&\overset{(\cdot)\mathbf{V}}{=} (\mathbb{0}\cdot v)+((-u)\cdot\mathbb{0})\\
&\overset{(\cdot)\mathbf{I}}{=} (v\cdot\mathbb{0})+((-u)\cdot\mathbb{0})\\
&\overset{(\cdot)3}{=} \mathbb{0}+\mathbb{0}\\
&\overset{(+)1}{=} \mathbb{0}
\end{aligned}$$

Assim também vale a segunda equação.

$(\cdot)$4.: Usando a parte $(+)4$ deste teorema com $-u$ e $-v$, obteremos $-((-u)+(-v)) = (-(-u))\cdot(-(-v))$. Uma vez que a parte 3 deste teorema implica $-(-u)=u$ e $-(-v)=v$, temos que $-((-u)+(-v))=u\cdot v$. Esta última afirmação implica $-(u\cdot v)=-(-((-u)+(-v)))$. Portanto, usando novamente a parte 3 deste teorema, concluímos que $-(u\cdot v)=(-u)+(-v)$. □

Definição 1.1.3. Dada uma álgebra Booleana $\mathscr{B}$, definimos a relação binária $\leq$ em $\mathscr{B}$ da seguinte forma: dados $u,v\in\mathscr{B}$, $u\leq v$ se, e somente se, $u\cdot(-v)=\mathbb{0}$.

Teorema 1.1.4. A relação $\leq$ definida acima é uma ordem em $\mathscr{B}$ e satisfaz as seguintes propriedades, para quaisquer $u,v,w,z\in\mathscr{B}$:

1. $u\leq v$ se, e somente se, $(-u)+v=\mathbb{1}$
2. $u\leq v$ se, e somente se, $u\cdot v=u$. Também, $u\leq v$ se, e somente se, $u+v=v$
3. $\mathbb{0}\leq u$, $u\leq\mathbb{1}$
4. $u\leq v$ se, e somente se, $(-v)\leq(-u)$

Também são válidas as seguintes propriedades relativas às operações $+$ e $\cdot$:

$(+)$1. $u\leq v$ implica $u+w\leq v+w$

$(\cdot)$1. $u\leq v$ implica $u\cdot w\leq v\cdot w$

$(+)$2. $u\leq v$ e $w\leq z$ implicam $u+w\leq v+z$

$(\cdot)$2. $u\leq v$ e $w\leq z$ implicam $u\cdot w\leq v\cdot z$

$(+)$3. $u\leq v$ e $u\leq w$ implicam $u\leq v+w$

$(\cdot)$3. $u\leq v$ e $u\leq w$ implicam $u\leq v\cdot w$

$(+)$4. $u\leq u+v$

$(\cdot)$4. $u\cdot v\leq u$

Demonstração. Usaremos implicitamente as propriedades das álgebras booleanas citadas na Definição 1.1.1 e no Teorema 1.1.2.

Provaremos primeiramente as propriedades 1 e 2, que provam definições equivalentes de $\leq$:

1.: Por definição, $u \leq v \Leftrightarrow u \cdot (-v) = \mathbb{0}$. Por sua vez, podemos derivar $u \cdot (-v) \Leftrightarrow -(u \cdot (-v)) = -\mathbb{0}$ (para a volta use Teorema 1.1.2 3). Usando o Teorema 1.1.2, temos que $(-u) + v = (-u) + (-(-v)) = -(u \cdot (-v)) = -\mathbb{0} = \mathbb{1}$.

2.: Suponha inicialmente que vale $u \leq v$, então temos que $u \cdot (-v) = \mathbb{0}$. Com isso, provamos que $u = u \cdot \mathbb{1} = u \cdot (v + (-v)) = (u \cdot v) + (u \cdot (-v)) = u \cdot v + \mathbb{0} = u \cdot v$. Agora, supondo que $u \cdot v = u$, temos $-u = -(u \cdot v) = (-u) + (-v)$. Somando v em ambos os lados, derivamos $(-u) + v = (-u) + (-v) + v = u + \mathbb{1} = \mathbb{1}$. Assim, pela parte 1 deste teorema, vale $u \leq v$. Concluindo a parte $u \leq v \Leftrightarrow u \cdot v = u$.

Vamos provar agora que $u \leq v \Leftrightarrow u + v = v$. Suponhamos inicialmente que vale $u \leq v$, então temos que $u \cdot (-v) = \mathbb{0}$. Somando v em ambos os lados, temos, $(u \cdot (-v)) + v = \mathbb{0} + v = v$. Note que, usando a distributividade da adição (propriedade $(\cdot)$**III**), temos $v = (u \cdot (-v)) + v = (u + v) \cdot ((-v) + v) = (u + v) \cdot \mathbb{1} = u + v$. Agora, suponha que $u + v = v$, multiplicando-se ambos os lados por $-v$, temos $(u + v) \cdot (-v) = v \cdot (-v) = \mathbb{0}$. Usando a distributividade do produto (propriedade $(+)$**III**), temos $u \cdot (-v) = u \cdot (-v) + \mathbb{0} = (u \cdot (-v)) + (v \cdot (-v)) = (u + v) \cdot (-v) = v \cdot (-v) = \mathbb{0}$, implicando então $u \leq v$. Concluindo a demonstração.

Agora, vamos provar que a relação $\leq$ é, de fato, uma ordem.

REFLEXÃO: $u \cdot (-u) = \mathbb{0}$, logo $u \leq u$.

ANTISSIMETRIA: Como vimos na parte 2 do teorema, $u \leq v$ implica $u \cdot v = u$. Por sua vez, $v \leq u$ implica $u + v = u$. Portanto, usando o Teorema 1.1.2 1 com essas duas equações, concluimos que $u \leq v$ e $v \leq u$ implicam $u = v$.

TRANSITIVIDADE: $u \leq v$ e $v \leq w$ implicam, pela parte 2 deste teorema, $u \cdot v = u$ e $v \cdot w = v$. Portanto, $u \cdot w = (u \cdot v) \cdot w = u \cdot (v \cdot w) = u \cdot v = u$, assim $u \leq w$ novamente pela parte 2 deste teorema.

Agora passemos à demonstração das propriedades restantes.

3.: Para qualquer $u \in \mathscr{B}$, $\mathbb{0} \cdot (-u) = \mathbb{0}$ e $(-u) + \mathbb{1} = \mathbb{1}$. Portanto, pelos resultados anteriores, $\mathbb{0} \leq u$ e $u \leq \mathbb{1}$.

4.: $u \leq v$ implica $u \cdot (-v) = \mathbb{0}$. Como $u = -(-u)$, vale $(-v) \cdot (-(-u)) = \mathbb{0}$, isto é $-v \leq -u$. Para a volta, note que já provamos, em particular, que $-v \leq -u$ implica $-(-u) \leq -(-v)$. Com isso, temos que imediato que $u \leq v$.

$(+)$1.: Suponha que vale $u \leq v$. Uma vez que $-(v + w) = (-v) \cdot (-w)$, vale $(u + w) \cdot (-(v + w)) = (u + w) \cdot (-v) \cdot (-w) = u \cdot (-v) \cdot (-w) + w \cdot (-v) \cdot (-w)$. Note que o segundo termo de $u \cdot (-v) \cdot (-w) + w \cdot (-v) \cdot (-w)$ é igual a $\mathbb{0}$, e o fato que $u \leq v$ implica que o primeiro termo também é $\mathbb{0}$. Logo, $(u+w) \cdot (-(v+w)) = \mathbb{0}$, isto é, $u+w \leq v+w$.

$(+)$2.: Por hipótese temos $u \leq v$ e $w \leq z$, então o resultado acima implica $u+w \leq v+w$ e $v+w \leq v+z$, como $\leq$ é uma ordem, vale $u+w \leq v+z$.

$(+)$3.: Consequência imediata do $(+)$2 acima sabendo que $u+u = u$.

$(+)$4.: $-(u+v) = (-u) \cdot (-v)$, assim $u \cdot (-(u+v)) = u \cdot (-u) \cdot (-v) = \mathbb{0}$, portanto $u \leq u+v$.

$(\cdot)$1.: Como $-(v \cdot w) = (-v) + (-w)$, temos $u \cdot w \cdot (-(v \cdot w)) = u \cdot w \cdot ((-v) + (-w)) = u \cdot w \cdot (-v) + u \cdot w \cdot (-w)$. Note que o segundo termo vale $\mathbb{0}$, e que $u \leq v$ implica que o primeiro termo também vale $\mathbb{0}$. Portanto $u \cdot w \cdot (-(v \cdot w)) = \mathbb{0}$ e então $u \cdot w \leq v \cdot w$.

$(\cdot)$2.: Por hipótese, vale $u \leq v$ e $w \leq z$. Note que o resultado acima implica que $u \cdot w \leq v \cdot w$ e $v \cdot w \leq v \cdot z$, portanto, pela transitividade de $\leq$, vale $u \cdot w \leq v \cdot z$.

$(\cdot)$3.: Consequência imediata do $(\cdot)$2 acima sabendo que $u \cdot u = u$.

$(\cdot)$4.: $u \cdot v \cdot (-u) = \mathbb{0}$, então $u \cdot v \leq u$. $\square$

Definição 1.1.5. Em uma álgebra booleana $\mathscr{B}$, definimos o operador binário $\to$ da seguinte forma, dados $u, v \in \mathscr{B}$, $u \to v = (-u) + v$.

Observação 1.1.6. Pelo Teorema 1.1.4 1, $u \leq v$ se, e somente se, $u \to v = \mathbb{1}$.

Exemplo 1.1.7 (ABERTO REGULAR)**.** Dada uma topologia (X, τ), dizemos que o aberto $a \in \tau$ é **regular** quando valer $\text{int}(\text{cl}(a)) = a$, onde, para todo $x \subset X$, $\text{int}(x)$ é o interior de x (denotado também por $\mathring{x}$), $\text{cl}(x)$ é o fecho de x (denotado também por $\overline{x}$). Defina $\mathscr{B}_{(X,\tau)}$ como o conjunto dos abertos regulares desta topologia, isto é, $\mathscr{B}_{(X,\tau)} = \{a \in \tau : a \textit{ é regular}\}$. Tal conjunto forma uma álgebra booleana com as seguintes operações, dados $a, b \in \mathscr{B}_{(X,\tau)}$:

- $a + b = \text{int}(\text{cl}(a \cup b))$
- $a \cdot b = a \cap b$
- $-a = \text{int}(X - a)$
- $\mathbb{0} = \emptyset$, $\mathbb{1} = X$

Demonstração. Para facilitar a demonstração, provemos primeiro o seguinte lema:

Lema 1.1.8. Dada uma topologia (X, τ) vale, para quaisquer $a, b \in \tau$ e $x, y \subset X$:

1. $\text{int}(\text{cl}(x))$ *é regular*
2. $\text{cl}(\text{int}(\text{cl}(a))) = \text{cl}(a)$

3. $\mathrm{cl}(x \cup y) = \mathrm{cl}(x) \cup \mathrm{cl}(y)$

4. $\mathrm{int}(x \cap y) = \mathrm{int}(x) \cap \mathrm{int}(y)$

5. $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}(a)) \cup b)) = \mathrm{int}(\mathrm{cl}(a \cup b))$

6. $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}(a)) \cap b)) = \mathrm{int}(\mathrm{cl}(a \cap b))$

7. $\mathrm{int}(X - a) = X - \mathrm{cl}(a)$

Demonstração. Fixe $a, b \in \tau$ e $x, y \subset X$ arbitrários para todas as demonstrações.

1.: Para todo $x \subset X$, $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(x))$ é aberto contido em $\mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}(x)))$, portanto $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(x)) \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}(x))))$. Por outro lado, pela definição de $\mathrm{int}()$, $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(x)) \subset \mathrm{cl}(x)$, o que implica $\mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}(x))) \subset \mathrm{cl}(\mathrm{cl}(x)) = \mathrm{cl}(x)$. Portanto $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}(x)))) \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}(x))$, concluindo assim a demonstração do item.

2.: Já sabemos que $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(a)) \subset \mathrm{cl}(a)$, então $\mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}(a))) \subset \mathrm{cl}(\mathrm{cl}(a)) = \mathrm{cl}(a)$. Agora, como a é aberto contido em $\mathrm{cl}(a)$, vale que $a \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}(a))$, então $\mathrm{cl}(a) \subset \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}(a)))$.

3.: Dado $z \in \mathrm{cl}(x \cup y)$, se $z \notin \mathrm{cl}(x)$, então existe aberto $A \ni z$ com $A \cap x = \emptyset$ e, consequentemente, $B \cap x = \emptyset$ para todo aberto $B \subset A$. Mas, como $B \cap (x \cup y) \neq \emptyset$ quando $z \in B$, segue que $B \cap y \neq \emptyset$. Neste caso, portanto, para todo aberto $C \ni z$, $z \in A \cap C$ e $C \cap y \supset (A \cap C) \cap y \neq \emptyset$, portanto $z \in \mathrm{cl}(y)$. Logo, $\mathrm{cl}(x \cup y) \subset \mathrm{cl}(x) \cap \mathrm{cl}(y)$. Agora, como $x \subset x \cup y$ e $y \subset x \cup y$ temos $\mathrm{cl}(x) \subset \mathrm{cl}(x \cup y)$ e $\mathrm{cl}(y) \subset \mathrm{cl}(x \cup y)$ e, portanto $\mathrm{cl}(x) \cup \mathrm{cl}(y) \subset \mathrm{cl}(x \cup y)$, concluindo a demonstração do item.

4.: Vale $x \cap y \subset x$ e $x \cap y \subset y$. Assim, $\mathrm{int}(x \cap y) \subset \mathrm{int}(x)$ e $\mathrm{int}(x \cap y) \subset \mathrm{int}(y)$. Portanto, $\mathrm{int}(x \cap y) \subset \mathrm{int}(x) \cap \mathrm{int}(y)$. Por outro lado, $\mathrm{int}(x) \subset x$ e $\mathrm{int}(y) \subset y$, assim $\mathrm{int}(x) \cap \mathrm{int}(y)$ é um aberto contido em $x \cap y$. Portanto $\mathrm{int}(x) \cap \mathrm{int}(y) \subset \mathrm{int}(x \cap y)$.

5.: Sendo a aberto contido em $\mathrm{cl}(a)$ então $a \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}(a))$, então $a \cup b \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}(a)) \cup b$ e, assim, $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(a \cup b)) \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}(a)) \cup b))$. Por outro lado, $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(a)) \subset \mathrm{cl}(a)$ e $b \subset \mathrm{cl}(b)$ implica $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(a)) \cup b \subset \mathrm{cl}(a) \cup \mathrm{cl}(b)$. Como, devido a parte 3 deste teorema, $\mathrm{cl}(a) \cup \mathrm{cl}(b) = \mathrm{cl}(a \cup b)$, temos que $\mathrm{cl}(a) \cup b \subset \mathrm{cl}(a) \cup \mathrm{cl}(b) = \mathrm{cl}(a \cup b)$. Assim, obtemos $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}(a)) \cup b)) \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(a \cup b))) = \mathrm{int}(\mathrm{cl}(a \cup b))$, provando o que queríamos.

6.: Como provamos acima, $a \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}(a))$, assim, vale $a \cap b \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}(a)) \cap b$, implicando que $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(a \cap b)) \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}(|)\mathrm{int}(\mathrm{cl}(a)) \cap b)$. Por outro lado, como $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(a)) \subset \mathrm{cl}(a)$, temos que $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(a)) \cap b \subset \mathrm{cl}(a) \cap b$. Antes de concluir a demonstração, vamos provar que $\mathrm{cl}(a) \cap b \subset \mathrm{cl}(a \cap b)$. Dado $z \in \mathrm{cl}(a) \cap b$ e um aberto $A \ni z$, temos que $z \in b$ e, portanto, $z \in A \cap b$, mas também $z \in \mathrm{cl}(a)$, portanto $A \cap (a \cap b) = (A \cap b) \cap a \neq \emptyset$, então $z \in \mathrm{cl}(a \cap b)$, o suficiente para provar o desejado. Retornando à demonstração, essa última afirmação implica que $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(a)) \cap b \subset \mathrm{cl}(a) \cup b \subset \mathrm{cl}(a \cup b)$. Portanto, $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(a)) \cap b \subset \mathrm{cl}(a \cap b)$, o que implica que $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}(a)) \cap b)) \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}(a \cap b))$, o que faltava para provarmos o que queríamos.

7.: Sabemos que $X-\mathrm{cl}(a)$ é aberto contido em $X-a$, então $X-\mathrm{cl}(a)\subset\mathrm{int}(X-a)$. Por outro lado, se $z\in\mathrm{int}(X-a)$, existe um aberto $A\ni z$ (a saber, o próprio $\mathrm{int}(X-a)$) com $A\cap a=\emptyset$, logo $z\notin\mathrm{cl}(a)$, ou seja, $z\in X-\mathrm{cl}(a)$. Concluindo a demonstração de que $\mathrm{int}(X-a)\subset X-\mathrm{cl}(a)$ e, consequentemente, a demonstração do item. $\square$

Primeiramente, vamos provar que, de fato, $\mathbb{0},\mathbb{1}\in\mathscr{B}_{(X,\tau)}$. Como $X,\emptyset$ são abertos e fechados, $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(X))=X$ e $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(\emptyset))=\emptyset$. Portanto o que definimos como $\mathbb{0},\mathbb{1}$ são regulares. Agora, vamos provar que $+,\cdot,-$ definidas acima são de fato operações em $\mathscr{B}_{(X,\tau)}$. Para isso, é suficiente provar que $a+b$, $a\cdot b$ e $-a$ são regulares para todo aberto regular a. A regularidade de $a+b$ é consequência imediata da parte 1 do lema acima. Como a é aberto, $X-a$ é fechado, então $\mathrm{cl}(X-a)=X-a$. Então, $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(X-a))=\mathrm{int}(X-a)$, e o mesmo resultado enunciado acima implica a regularidade de $-a$. Falta provar a regularidade de $a\cap b$ para a,b regulares. Como $a\cap b$ é aberto, $a\cap b\subset\mathrm{int}(\mathrm{cl}(a\cap b))$. Por outro lado, como $a\cap b\subset a$ e $a\cap b\subset b$, temos $\mathrm{cl}(a\cap b)\subset\mathrm{cl}(a)\cap\mathrm{cl}(b)$. Portanto, $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(a\cap b))\subset\mathrm{int}(\mathrm{cl}(a)\cap\mathrm{cl}(b))$. A parte 4 do lema acima implica $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(a)\cap\mathrm{cl}(b))=\mathrm{int}(\mathrm{cl}(a))\cap\mathrm{int}(\mathrm{cl}(b))$ que, pela regularidade de a e b, é igual a $a\cap b$. Portanto $a\cdot b$ é regular. Agora, vamos provar as propriedades da álgebra booleana.

$(+)$**I** e $(\cdot)$**I**: Consequência imediata da comutatividade de $\cup$ e $\cap$.

$(\cdot)$**II**: Imediato, devido a associatividade de $\cap$.

$(+)$**II**: $(a+b)+c=\mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}(a\cup b))\cup c))$ que, pelo item 5 do lema acima, é igual a $\mathrm{int}(\mathrm{cl}((a\cup b)\cup c))$. A associatividade de $\cup$ implica $\mathrm{int}(\mathrm{cl}((a\cup b)\cup c))=\mathrm{int}(\mathrm{cl}(a\cup(b\cup c)))$ que por sua vez é igual a, pelo item 5 do lema acima, $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(a\cup\mathrm{int}(\mathrm{cl}(b\cup c))))=a+(b+c)$.

$(+)$**III**: $a\cdot(b+c)=a\cap\mathrm{int}(\mathrm{cl}(b\cup c))$. A regularidade de a e $b+c$ implica que $a\cap\mathrm{int}(\mathrm{cl}(b\cup c))=\mathrm{int}(\mathrm{cl}(a\cap\mathrm{int}(\mathrm{cl}(b\cup c))))$. Por sua vez, $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(a\cap\mathrm{int}(\mathrm{cl}(b\cup c))))=\mathrm{int}(\mathrm{cl}(a\cap(b\cup c)))$. A distributividade de $\cap,\cup$ implica $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(a\cap(b\cup c)))=\mathrm{int}(\mathrm{cl}((a\cap b)\cup(a\cap c)))$, sendo este último igual a $(a\cdot b)+(a\cdot c)$.

$(\cdot)$**III**: $a+(b\cdot c)=\mathrm{int}(\mathrm{cl}(a\cup(b\cap c)))$. A distributividade de $\cup,\cap$ implica $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(a\cup(b\cap c)))=\mathrm{int}(\mathrm{cl}((a\cup b)\cap(a\cup c)))$. Aplicando o item 6 do lema acima duas vezes, obtemos $\mathrm{int}(\mathrm{cl}((a\cup b)\cap(a\cup b)))=\mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}(a\cup b))\cap\mathrm{int}(\mathrm{cl}(a\cup c))))$ que é igual, pela regularidade de $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(x))$, a $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(a\cup b))\cap\mathrm{int}(\mathrm{cl}(a\cup c))$, sendo este último igual a $(a+b)\cdot(a+c)$.

$(+)$**IV**: Como provamos na parte $(+)$**III**, $a\cdot(a+b)=\mathrm{int}(\mathrm{cl}(a\cap(a\cup b)))$. Mas como $a\cap(a\cup b)=a$ e a é regular, segue que $a\cdot(a+b)=\mathrm{int}(\mathrm{cl}(a))=a$.

$(\cdot)$**IV**: Como provamos em $(\cdot)$**III**, $a+(a\cdot b)=\mathrm{int}(\mathrm{cl}(a\cup(a\cap b)))$. Então, como $a\cup(a\cap b)=a$ e a é regular, $a+(a\cdot b)=\mathrm{int}(\mathrm{cl}(a))=a$.

$(+)$**V**: Sendo $X-a$ fechado, $\mathrm{int}(X-a)=\mathrm{int}(\mathrm{cl}(X-a))$. Então $a+(-a)=\mathrm{int}(\mathrm{cl}(a\cup\mathrm{int}(\mathrm{cl}(X-a))))$. Pela parte 5 do lema acima, obtemos que $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(a\cup\mathrm{int}(\mathrm{cl}(X-a))))=\mathrm{int}(\mathrm{cl}(a\cup(X-a)))=\mathrm{int}(\mathrm{cl}(X))=X=\mathbb{1}$, como queríamos.

$(\cdot)$**V**: Como provamos na parte 7 do lema acima, $\mathrm{int}(X-a)=X-\mathrm{cl}(a)$. Portanto,

$a\cdot(-a) = a\cap(X-\mathrm{cl}(a)) = a-\mathrm{cl}(a) = \emptyset = \mathbb{0}.$ □

Exemplo 1.1.9. Dada uma álgebra booleana $\mathscr{B}$ e dado $u\in\mathscr{B}-\{\mathbb{0}\}$, o conjunto $\mathscr{B}_u = \{v\in\mathscr{B} : v\leq u\}$ munido com a adição, multiplicação e $\mathbb{0}$ induzidas de $\mathscr{B}$ e, fazendo $\mathbb{1} = u$ e $-v = u\cdot(-v)$, é uma álgebra booleana. Analogamente, para todo $u\in\mathscr{B}-\{\mathbb{1}\}$, o conjunto $\mathscr{B}^u = \{v\in\mathscr{B} : u\leq v\}$ munido da adição, multiplicação e $\mathbb{1}$ induzidas de $\mathscr{B}$ e, definindo $\mathbb{0} = u$ e $-v = u+(-v)$, também é uma álgebra booleana.

Demonstração. As partes $(+)3$, $(+)4$, $(\cdot)3$ e $(\cdot)4$ do Teorema 1.1.4 provam que as operações acima estão bem definidas em ambas as definições. Como $+$ e $\cdot$ são induzidas de $\mathscr{B}$, as propriedades $(+)$**I-IV** e $(\cdot)$**I-IV** valem. Resta provar $(+)$**V** e $(\cdot)$**V**.

Para $\mathscr{B}_u$: $v+_{\mathscr{B}_u}(-v)_{\mathscr{B}_u} = v+u\cdot(-v) = (v+u)\cdot(v+(-v)) = (v+u)\cdot\mathbb{1} = v+u$. Pela parte 2 do Teorema 1.1.4, como $v\leq u$, vale $v+u = u$ e, então temos $v+_{\mathscr{B}_u}(-v)_{\mathscr{B}_u} = u = \mathbb{1}_{\mathscr{B}_u}$, provando $(+)$**V**. Por outro lado, $v\cdot_{\mathscr{B}_u}(-v)_{\mathscr{B}_u} = v\cdot u\cdot(-v) = v\cdot(-v)\cdot u = \mathbb{0}\cdot u = \mathbb{0}$, provando assim a parte $(\cdot)$**V**.

Para $\mathscr{B}^u$: $v\cdot_{\mathscr{B}^u}(-v)_{\mathscr{B}^u} = v\cdot(-v+u) = v\cdot(-v)+v\cdot u = \mathbb{0}+v\cdot u = v\cdot u$. Pela parte 2 do Teorema 1.1.4, como $u\leq v$, vale $u\cdot v = u$ e, assim temos $v\cdot_{\mathscr{B}^u}(-v)_{\mathscr{B}^u} = u = \mathbb{0}_{\mathscr{B}^u}$, assegurando que a parte $(\cdot)$**V** vale. Por outro lado, $v+_{\mathscr{B}^u}(-v)_{\mathscr{B}^u} = v+(-v)+u = \mathbb{1}+u = \mathbb{1}$, provando a parte $(+)$**V**. □

Definição 1.1.10 (IDEAL, FILTRO)**.** Dada uma álgebra booleana $\mathscr{B}$, dizemos que $I\subset\mathscr{B}$ é um **ideal de** $\mathscr{B}$ se satisfaz as seguintes propriedades, dados $u,v\in\mathscr{B}$:

I $\mathbb{0}\in I$, $\mathbb{1}\notin I$

II $u,v\in I$ implica $u+v\in I$

III $u\in I$ e $v\leq u$ implicam $v\in I$

Analogamente, dizemos que $G\subset\mathscr{B}$ é um **filtro sobre** $\mathscr{B}$ se satisfaz as seguintes propriedades, dados $u,v\in\mathscr{B}$:

I $\mathbb{1}\in G$, $\mathbb{0}\notin G$

II $u,v\in G$ implica $u\cdot v\in G$

III $u\in G$ e $u\leq v$ implicam $v\in G$

Além disso, dizemos que $I\subset\mathscr{B}$ é um **ideal primo**, (respectivamente $G\subset\mathscr{B}$ é um **ultrafiltro**), se I é um ideal e satisfaz, para todo $u\in\mathscr{B}$, $u\in I$ ou $-u\in I$ (G é um filtro e satisfaz, para todo $u\in\mathscr{B}$, $u\in G$ ou $-u\in G$).

Corolário 1.1.11. Se I é ideal primo (respectivamente, G é ultrafiltro) e J for ideal (H filtro) tal que $I \subset J$ ($G \subset H$), então $I = J$ ($G = H$).

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $J - I \neq \emptyset$ ($H - G \neq \emptyset$) e seja u um de seus elementos. Então, por definição, $-u \in I \subset J$ ($-u \in G \subset H$). Assim $u + (-u) = \mathbb{1} \in J$ ($u \cdot (-u) = \mathbb{0} \in H$), absurdo. $\square$

Definição 1.1.12 (ÁLGEBRA BOOLEANA COMPLETA)**.** Dizemos que uma álgebra booleana $\mathscr{B}$ é **completa** se, para todo $X \subset \mathscr{B}$, existem $u, v \in \mathscr{B}$ tais que $\sup X = u$ e $\inf X = v$ ($\sup, \inf$ tomados em relação a ordem definida na Definição 1.1.3). Se $\mathscr{B}$ for uma álgebra booleana completa e $X \subset \mathscr{B}$, definimos $\sum_{u \in X} u$ como $\sup X$ e $\prod_{u \in X} u$ como $\inf X$. Em particular, $\sum_{u \in \emptyset} u = \mathbb{0}$, $\prod_{u \in \emptyset} u = \mathbb{1}$ e, de modo análogo, $\sum_{u \in \mathscr{B}} u = \mathbb{1}$, $\prod_{u \in \mathscr{B}} u = \mathbb{0}$.

Observação 1.1.13. Dada uma álgebra booleana $\mathscr{B}$, é fácil ver que $\sup\{u, v\} = u + v$ e $\inf\{u, v\} = u \cdot v$.

Demonstração. Use partes $(+)3$, $(+)4$, $(\cdot)3$ e $(\cdot)4$ do Teorema 1.1.4. $\square$

Exemplo 1.1.14. A álgebra booleana $\mathscr{B}_{(X,\tau)}$ definida no Exemplo 1.1.7 é completa e satisfaz, para quaisquer $a, b \in \mathscr{B}_{(X,\tau)}$, $a \leq b$ se, e somente se, $a \subset b$.

Demonstração. Provemos inicialmente que $a \leq b \Leftrightarrow a \subset b$. Por definição, $a \leq b \Leftrightarrow a \cdot (-b) = \mathbb{0} \Leftrightarrow a \cap \mathrm{int}(X - b) = \emptyset$. Pela parte 7 do Lema 1.1.8, $a \cap \mathrm{int}(X - b) = \emptyset \Leftrightarrow a \cap (X - \mathrm{cl}(b)) = \emptyset \Leftrightarrow a - \mathrm{cl}(b) = \emptyset \Leftrightarrow a \subset \mathrm{cl}(b)$. Sendo a aberto, vale $a \subset \mathrm{cl}(b) \Leftrightarrow a \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}(b))$, mas como b é regular $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(b)) = b$ e, portanto, $a \leq b \Leftrightarrow a \subset b$.

Dado $A \subset \mathscr{B}_{(X,\tau)}$, digo que $\inf A = \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\bigcap A))$ e $\sup A = \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\bigcup A))$. De fato, a parte 1 do Lema 1.1.8 prova que ambos pertencem a $\mathscr{B}_{(X,\tau)}$. Para todo $a \in A$, $\bigcap A \subset a$ e $a \subset \bigcup A$. Portanto $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(\bigcap A)) \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}(a)) = a$ e $a = \mathrm{int}(\mathrm{cl}(a)) \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\bigcup A))$. Então eles são, respectivamente, limitantes inferior e superior. Agora provemos que eles são respectivamente, de fato, o maior limitante inferior e o menor limitante superior. Sejam $b, c \in \mathscr{B}_{(X,\tau)}$ tais que, para todo $a \in A$, $b \leq a$ e $a \leq c$, isto é, $b \subset a$ e $a \subset c$. Então $b \subset \bigcap A$ e $\bigcup A \subset c$. Assim, $b = \mathrm{int}(\mathrm{cl}(b)) \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\bigcap A))$ e $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(\bigcup A)) \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}(c)) = c$. Logo $b \leq \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\bigcap A))$ e $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(\bigcup A)) \leq c$, como queríamos provar. $\square$

Exemplo 1.1.15. Para toda álgebra booleana completa $\mathscr{B}$, as álgebras booleanas $\mathscr{B}_u$ e $\mathscr{B}^u$ definidas no Exemplo 1.1.9 são completas e suas ordens coincidem com a ordem de $\mathscr{B}$.

Demonstração. Para $v, w \in \mathscr{B}_u$, $v \leq_{\mathscr{B}_u} w \Leftrightarrow v \cdot_{\mathscr{B}_u} (-w)_{\mathscr{B}_u} = \mathbb{0}_{\mathscr{B}_u} \Leftrightarrow u \cdot v \cdot (-w) = \mathbb{0}$. Como $v \leq u$, $u \cdot v = v$. Portanto a última afirmação vale se, e somente se $v \cdot (-w) = \mathbb{0}$ que, por sua vez, vale se, e somente se, $v \leq w$. Agora, para $v, w \in \mathscr{B}^u$, pelo Teorema 1.1.4 $v \leq_{\mathscr{B}^u} w \Leftrightarrow (-v)_{\mathscr{B}^u} +_{\mathscr{B}^u} w = \mathbb{1}_{\mathscr{B}^u} \Leftrightarrow (-v) + u + w = \mathbb{1}$. Como $u \leq w$, vale $u + w = w$ e, assim, a última afirmação vale se, e somente se $-v+w=\mathbb{1}$. Por sua vez, a última afirmação vale se, e somente se, $v \leq w$. Então, a ordem de ambas as álgebras booleanas completas coincidem com a ordem de $\mathscr{B}$.

Devido à coincidência de ordens, para provar a completude, é suficiente provar que, para todo $X \subset \mathscr{B}_u$, $\sup X \leq u$ e $\inf X \leq u$ e que, para todo $X \subset \mathscr{B}^u$, $u \leq \sup X$ e $u \leq \inf X$, o que é evidente. □

1.2 Forcing

Mesmo que nossa abordagem esteja centrada em álgebras booleanas completas, o nosso interesse estará inteiramente centrado em **forcings**, definição que abordaremos nessa seção. Apesar de existir maneira de abordar a técnica de forcing diretamente com forcings, será mais fácil abordá-la com álgebras booleanas completas. Porém, isso exigirá que, a partir de um forcing, consigamos "associá-lo" a uma álgebra booleana completa, coisa que também faremos nessa seção.

Definição 1.2.1 (FORCING)**.** Dado um conjunto $\mathbb{P}$, dizemos que uma relação binária $\leq$ em $\mathbb{P}$ é uma **pré ordem** se satisfaz as seguintes propriedades, para todos $p,q,r \in \mathbb{P}$:

- $p \leq p$
- $p \leq q$ e $q \leq r$ implica $p \leq r$

Um **forcing** é uma tripla $(\mathbb{P}, \leq, \mathbb{1})$, onde $\leq$ é uma pré ordem de $\mathbb{P}$ e $\mathbb{1} \in \mathbb{P}$ satisfazendo, para todo $p \in \mathbb{P}$, $p \leq \mathbb{1}$. Denominaremos cada elemento de $\mathbb{P}$ como **condições**. Se $p,q \in \mathbb{P}$, dizemos que:

- p **é compatível com** q, ou $p \not\perp q$, se existe $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leq p$ e $r \leq q$
- p **é incompatível com** q, ou $p \perp q$, caso contrário

A partir de agora, quando não gerar conflitos, deixaremos implícita a menção de $\leq$ e $\mathbb{1}$ quando mencionarmos forcings. Também, quando mencionarmos álgebras booleanas, deixaremos implícita a menção de $\cdot$, a operação de multiplicação em álgebras booleanas.

Uma classe muito utilizada de forcings ao longo desse texto está explicitada no próximo exemplo:

Exemplo 1.2.2 (Fn())**.** Para quaisquer conjuntos I,J e qualquer cardinal infinito κ, definimos $\mathrm{Fn}(I,J,\kappa)$ como o conjunto de funções f com $\mathrm{dom}(f) \subset I$, $\mathrm{im}(f) \subset J$ e $|\mathrm{dom}(f)| < \kappa$, ou, equivalentemente, $|f| < \kappa$. Isto é,

$$\mathrm{Fn}(I,J,\kappa) = \{f : f \textit{ é função} \wedge \mathrm{dom}(f) \subset I \wedge \mathrm{im}(f) \subset J \wedge |f| < \kappa\}$$

A pré ordem de $\mathrm{Fn}(I,J,\kappa)$ é $\supset$ e, consequentemente, $\mathbb{1} = \emptyset$. Quando $\kappa = \omega$ denotaremos $\mathrm{Fn}(I,J,\omega)$ como $\mathrm{Fn}(I,J)$.

Definição 1.2.3 (ÁTOMO)**.** Dado um forcing $\mathbb{P}$, dizemos que $p \in \mathbb{P}$ é um **átomo** se, para todos $q, r \leq p$ valer $q \not\perp r$. Se $\mathbb{P}$ contém átomos, dizemos que ele é **atômico**, caso contrário, dizemos que ele é **não atômico**.

Observação 1.2.4. Se um forcing $\mathbb{P}$ é não atômico, então, para todo $p \in \mathbb{P}$, existem $q, r \leq p$ com $q \perp r$.

O forcing do Exemplo 1.2.2 pode ser atômico ou não, como mostrará o seguinte teorema:

Teorema 1.2.5. $\mathrm{Fn}(I, J, \kappa)$ é não atômico se, e somente se, $|I| \geq \kappa$ e $|J| \geq 2$.

Demonstração. Caso $|I| < \kappa$, qualquer $f \in \mathrm{Fn}(I, J, \kappa)$ com $\mathrm{dom}(f) = I$ será átomo, pois não existirá $g \in \mathrm{Fn}(I, J, \kappa)$ diferente de f tal que $f \subset g$ (isto é, $g \supset f$, a definição de $g \leq f$). Caso $J = \emptyset$ então $\mathrm{Fn}(I, J, \kappa) = \{\emptyset\}$ e, obviamente, $\emptyset$ é um átomo. Caso $|J| = 1$ então, para todo $f, g \in \mathrm{Fn}(I, J, \kappa)$, $f \leq g$ se, e somente se, $\mathrm{dom}(f) \supset \mathrm{dom}(g)$. Por causa disso, para quaisquer $g_1, g_2 \leq f$, $g_1 \cup g_2 \in \mathrm{Fn}(I, J, \kappa)$ e $g_1 \cup g_2 \leq g_1, g_2$, ou seja $g_1 \not\perp g_2$ e, portanto, todo elemento de $\mathrm{Fn}(I, J, \kappa)$ é átomo. Como conclusão, caso pelo menos uma das hipóteses do teorema forem violadas, $\mathrm{Fn}(I, J, \kappa)$ será forcing atômico.

Suponha agora que ambas as hipóteses do teorema são satisfeitas e fixe $f \in \mathrm{Fn}(I, J, \kappa)$ arbitrário. Então existem $i \in I$ com $i \notin \mathrm{dom}(f)$ e $j_1, j_2 \in J$ com $j_1 \neq j_2$. Portanto, defina $g_1 = f \cup \{(i, j_1)\}$ e $g_2 = f \cup \{(i, j_2)\}$. Logo, $g_1, g_2 \in \mathrm{Fn}(I, J, \kappa)$, $g_1 \leq f$, $g_2 \leq f$ e $g_1 \perp g_2$ pois, para todo h com $h \supset g_1, g_2$, temos que $h \supset g_1 \cup g_2$ e $g_1 \cup g_2$ não é uma função, então h também não será. Assim, o forcing $\mathrm{Fn}(I, J, \kappa)$ será não atômico. □

Definição 1.2.6 (FORCING SEPARATIVO)**.** Dizemos que um forcing $\mathbb{P}$ é **separativo** quando $\leq$ satisfaz antissimetria (assim $\leq$ é uma ordem) e, dados $p, q \in \mathbb{P}$, $p \not\leq q$ implica que existe $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leq p$ e $r \perp q$.

O forcing do Exemplo 1.2.2 é separativo quase sempre, as exceções serão exibidas no teorema a seguir:

Teorema 1.2.7. O forcing $\mathrm{Fn}(I, J, \kappa)$ é não separativo se, e somente se, $|J| = 1$ e $|I| \neq \emptyset$.

Demonstração. Uma vez que $\leq$ é $\supset$, a pré ordem é sempre antissimétrica.

Suponha que $\mathrm{Fn}(I, J, \kappa)$ seja não separativo. Então existem $f, g \in \mathrm{Fn}(I, J, \kappa)$ com $f \not\leq g$ e $h \not\perp g$ para todo $h \leq f$. Em particular, $f \not\perp g$. Do fato que $f \not\leq g$, isto é $g \not\subset f$, temos que existe $(i, j) \in g$ tal que $(i, j) \notin f$, então $i \in I$ e $j \in J$, logo já temos que $I \neq \emptyset$. Como supomos que $f \not\perp g$, $f \cup g$ é uma função. Assim deve valer $i \notin \mathrm{dom}(f)$. Suponha que exista $j' \in J$ tal que $j \neq j'$. Então valem $f \cup \{(i, j')\} \in \mathrm{Fn}(I, J, \kappa)$, $f \cup \{(i, j')\} \leq f$ e $f \cup \{(i, j')\} \perp g$, com essa última afirmação derivando do fato que $f \cup \{(i, j')\} \cup g$ não ser uma função, um absurdo com a hipótese inicial. Portanto $J = \{j\}$, ou seja, $|J| = 1$. Concluindo, para $\mathrm{Fn}(I, J, \kappa)$ ser não separativo, é necessário as hipóteses do teorema.

Agora, suponha que $\text{Fn}(I,J,\kappa)$ satisfaz as hipóteses do teorema. Fixe um i que pertença a I e j tal que $J=\{j\}$. Então, fazendo $f=\emptyset$ e $g=\{(i,j)\}$, temos que f e g pertencem a $\text{Fn}(I,J,\kappa)$ e $f\not\leq g$. Como observamos no Teorema 1.2.5, se $|J|=1$, então $h_0\leq h_1$ se, e somente se, $\text{dom}(h_0)\supset\text{dom}(h_1)$, além disso, $h_0\cup h_1$ é sempre função. Portanto todos os elementos de $\text{Fn}(I,J,\kappa)$ são compatíveis. Assim, para todo h com $h\leq f$, $h\not\perp g$, desse modo, f e g violam a propriedade de ser separativo e, portanto, $\text{Fn}(I,J,\kappa)$ é não separativo. $\square$

Observação 1.2.8. Para toda álgebra booleana $\mathscr{B}$, a tripla $(\mathscr{B}-\{\mathbb{0}\},\leq,\mathbb{1})$, onde $\leq$ é a ordem da Definição 1.1.3, é um forcing e satisfaz $u\perp v$ se, e somente se, $uv=\mathbb{0}$. Além disso, tal forcing é separativo. Definiremos ele como sendo o forcing induzido da álgebra booleana $\mathscr{B}$.

Demonstração. Que a ordem $\leq$ da álgebra booleana $\mathscr{B}$ satisfaz antissimetria foi provado no Teorema 1.1.4. Vamos provar agora que, para quaisquer $u,v\in\mathscr{B}-\{\mathbb{0}\}$, $u\perp v$ se, e somente se, $uv=\mathbb{0}$. Como foi provado na parte $(\cdot)4$ do Teorema 1.1.4, uv satisfaz $uv\leq u$ e $uv\leq v$. Portanto, $u\perp v$ implica $uv=\mathbb{0}$. Vimos, na Observação 1.1.13, que $uv=\inf\{u,v\}$. Portanto, para todo $w\in\mathscr{B}$ tal que $w\leq u$ e $w\leq v$, vale $w\leq uv$. Assim $uv=\mathbb{0}$ implica $w=\mathbb{0}$, logo $u\perp v$.

Provemos agora a separatividade de $\mathscr{B}$. Dado $u,v\in\mathscr{B}-\{\mathbb{0}\}$, se $u\not\leq v$, então $w=u(-v)\neq\mathbb{0}$ e w satisfaz $w\leq u$ e $w\perp v$ (pois $wv=u(-v)v=u\mathbb{0}=\mathbb{0}$), como queríamos provar. $\square$

Teorema 1.2.9. No forcing induzido da álgebra booleana $\mathscr{B}$ (definido na observação acima), temos que $u\in\mathscr{B}-\{\mathbb{0}\}$ é um átomo se, e somente se, não existir $v\in\mathscr{B}-\{\mathbb{0}\}$ tal que $v<u$.

Demonstração. Seja $u\in\mathscr{B}-\{\mathbb{0}\}$ satisfazendo a propriedade acima. Então, se $v\in\mathscr{B}-\{\mathbb{0}\}$ é tal que $v\leq u$, temos $v=u$ e a propriedade de átomo é automaticamente satisfeita. Agora, se $u\in\mathscr{B}-\{\mathbb{0}\}$ é um átomo, vamos provar que, para todo $v\in\mathscr{B}$ tal que $v<u$, vale $v=\mathbb{0}$, o que concluirá a demonstração do teorema. De $v<u$, temos que $v\leq u$ e $u\not\leq v$, isto é, $u(-v)\neq\mathbb{0}$ e $u(-v)\leq u$. Porém, vale $u(-v)\perp v$, assim, como u é átomo de $\mathscr{B}-\{\mathbb{0}\}$, deve obrigatoriamente valer $v=\mathbb{0}$. $\square$

Teorema 1.2.10. No forcing induzido de $\mathscr{B}$, fixado um átomo $u\in\mathscr{B}-\{\mathbb{0}\}$, para todo $v\in\mathscr{B}-\{\mathbb{0}\}$ tal que $u\not\leq v$, temos que $u\leq -v$. Assim, temos que, para qualquer $v\in\mathscr{B}-\{\mathbb{0}\}$, vale $u\leq v$ ou $u\leq -v$.

Demonstração. Note que $u\not\leq v$ implica $\mathbb{0}\neq u(-v)\leq u$. Como supomos que u é átomo, o teorema acima implica que $u(-v)=u$, portanto $u\leq -v$. $\square$

Como dissemos no início da seção, precisamos, de alguma forma, associar a um forcing $\mathbb{P}$ uma álgebra booleana completa. O teorema a seguir será o responsável por fazer essa associação.

Teorema 1.2.11. Para todo forcing $\mathbb{P}$, existem uma álgebra booleana completa $\mathscr{B}$ e uma função $e:\mathbb{P}\to\mathscr{B}$ que satisfaz, para quaisquer $p,q\in\mathbb{P}$:

1. $e(p) \neq \mathbb{0}$
2. $e(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$
3. $p \leq q$ implica $e(p) \leq e(q)$
4. $p \perp q \Leftrightarrow e(p) \perp e(q) \Leftrightarrow e(p)e(q) = \mathbb{0}$
5. Para todo $u \neq \mathbb{0}$ em $\mathscr{B}$ existe $p \in \mathbb{P}$ tal que $e(p) \leq u$

Tal $\mathscr{B}$ é $\mathscr{B}_{(\mathbb{P},\tau_{\mathbb{P}})}$ definida conforme o exemplo 1.1.7, sendo $\tau_{\mathbb{P}}$ a topologia em $\mathbb{P}$ gerada pela coleção de abertos básicos $\{\mathbb{P}_p : p \in \mathbb{P}\}$, onde, para todo $p \in P$, $\mathbb{P}_p = \{q \in \mathbb{P} : q \leq p\}$. A nossa função $e : \mathbb{P} \to \mathbb{B}$ satisfaz $e(p) = \text{int}(\text{cl}(\mathbb{P}_p))$. Passaremos a chamar tal $\mathscr{B}$ de r.o.$(\mathbb{P})$ (r.o. é abreviação de *regular open*). Além disso, se $\mathbb{P}$ é separativo, a função e satisfaz que, em acréscimo, se $e(p) \leq e(q)$, então $p \leq q$ (consequentemente, a função e é injetora).

Demonstração. Já sabemos que r.o.$(\mathbb{P})$ como definida acima é uma álgebra booleana completa (exemplo 1.1.14) e é fácil provar que a função $e : \mathbb{P} \to$ r.o.$(\mathbb{P})$ definida acima está bem definida. Vamos provar agora que a função e satisfaz as propriedade requeridas.

1.: Como $\mathbb{P}_p \subset \text{int}(\text{cl}(\mathbb{P}_p)) = e(p)$, segue que $e(p) \neq \emptyset = \mathbb{0}$.

2.: $\mathbb{P}_{\mathbb{1}} = \mathbb{P}$, e $\mathbb{P}$ é regular, portanto $e(\mathbb{1}) = \text{int}(\text{cl}(\mathbb{P})) = \mathbb{P} = \mathbb{1}$.

3.: $p \leq q$ implica $\mathbb{P}_p \subset \mathbb{P}_q$, logo, $e(p) = \text{int}(\text{cl}(\mathbb{P}_p)) \subset \text{int}(\text{cl}(\mathbb{P}_q)) = e(q)$, implicando então que $e(p) \leq e(q)$.

4.: Se $e(p) \perp e(q)$, então, $e(p) \cap e(q) = e(p)e(q) = \mathbb{0} = \emptyset$. Como $\mathbb{P}_p \subset e(p)$ e $\mathbb{P}_q \subset e(q)$, temos que $P_p \cap P_q = \emptyset$, logo $p \perp q$. Agora, se $e(p) \not\perp e(q)$, então $\text{int}(\text{cl}(\mathbb{P}_p)) \cap \text{int}(\text{cl}(\mathbb{P}_q)) = e(p)e(q) \neq \mathbb{0} = \emptyset$. Fixe $r \in \text{int}(\text{cl}(\mathbb{P}_p)) \cap \text{int}(\text{cl}(\mathbb{P}_q))$, então $\mathbb{P}_r \subset \text{int}(\text{cl}(\mathbb{P}_p)) \cap \text{int}(\text{cl}(\mathbb{P}_q))$. Como $\mathbb{P}_r \subset \text{cl}(\mathbb{P}_p)$, $\mathbb{P}_r \cap \mathbb{P}_p \neq \emptyset$, que é aberto. Agora, como temos $\mathbb{P}_r \cap \mathbb{P}_p \subset \mathbb{P}_r$ e também $\mathbb{P}_r \subset \text{cl}(\mathbb{P}_q)$, podemos derivar que $\mathbb{P}_r \cap \mathbb{P}_p \cap \mathbb{P}_q \neq \emptyset$, em particular, $\mathbb{P}_p \cap \mathbb{P}_q \neq \emptyset$, o que implica $p \not\perp q$. Concluindo a demonstração desse item.

5.: Dado $u \in$ r.o.$(\mathbb{P})$, $u \neq \mathbb{0} = \emptyset$ implica que existe $p \in u$. Como u é aberto, $\mathbb{P}_p \subset u$. Agora, como u é regular, $\text{int}(\text{cl}(\mathbb{P}_p)) \subset \text{int}(\text{cl}(u)) = u$. Assim temos que $e(p) \leq u$.

Caso $\mathbb{P}$ for separativo, para provar que e é injetora, basta provar que $e(p) \leq e(q)$ implica $p \leq q$. Para isso, vamos provar que $\mathbb{P}_p$ é regular e, portanto, $e(p) = \mathbb{P}_p$. Primeiramente, para todo $q \in \mathbb{P}$, $q \in \text{cl}(\mathbb{P})$ se, e somente se, $\mathbb{P}_q \cap \mathbb{P}_p \neq \emptyset$. Isto é, se, e somente se, $q \not\perp p$. Note que $q \in \text{int}(\text{cl}(\mathbb{P}_p))$ se, e somente se, $\mathbb{P}_q \subset \text{cl}(\mathbb{P}_p)$, isto é, se, e somente se, $\forall r \leq q\ r \not\perp q$. Por $\mathbb{P}$ ser separativo, isso implica $q \leq p$, e assim, $\text{int}(\text{cl}(\mathbb{P}_p)) \subset \mathbb{P}_p$, provando sua regularidade. Então $e(p) \leq e(q)$ implica $\mathbb{P}_p \subset \mathbb{P}_q$, logo, $p \leq q$. □

Uma vez que, para qualquer álgebra booleana, temos um forcing canônico associado, poderemos também associá-lo a uma álgebra booleana completa. Porém, neste caso, a função de associação (denotada por e no teorema acima) satifaz várias propriedades adicionais. Elas serão citadas e provadas agora.

Teorema 1.2.12. Para toda álgebra booleana $\mathscr{B}$, existe uma álgebra booleana completa $\mathscr{C}$ e uma função $h : \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ injetora que satisfaz, para quaisquer $u, v \in \mathscr{B}$:

1. $h(\mathbb{0}) = \mathbb{0}$ e $h(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$
2. $h(u+v) = h(u) + h(v)$
3. $h(uv) = h(u)h(v)$
4. $h(-u) = -h(u)$
5. Para todo $w \in \mathscr{C} - \{\mathbb{0}\}$ existe $u \in \mathscr{B}$ com $h(u) \leq w$

Tal $\mathscr{C}$ é exatamente r.o.$(\mathscr{B} - \{\mathbb{0}\})$ do teorema acima e h é definido da mesma forma que a embarcação canônica e, isto é, $h(u) = \mathrm{int}(\mathrm{cl}((\mathscr{B} - \{\mathbb{0}\})_u))$ para todo $u \in \mathscr{B}$ (no caso $u = \mathbb{0}$, vamos considerar $(\mathscr{B} - \{\mathbb{0}\})_{\mathbb{0}} = \emptyset$). Vamos denominar essa álgebra booleana completa de r.o.$(\mathscr{B})$.

Demonstração. Com h definido conforme acima, a propriedade 5 é imediatamente satisfeita e, argumentando do mesmo modo que o teorema acima, por $\mathscr{B} - \{\mathbb{0}\}$ ser separativa, $h \restriction \mathscr{B} - \{\mathbb{0}\}$ é injetora e com todos os valores diferentes de $\mathbb{0}$. Agora, vamos provar que ela satisfaz as demais propriedades requeridas. Como o conjunto $(\mathscr{B} - \{\mathbb{0}\})_u$ lembra muito o forcing induzido da álgebra booleana $\mathscr{B}_u$, definida no Exemplo 1.1.9, passaremos a denotar, para fins de simplificação, $(\mathscr{B} - \{\mathbb{0}\})_u$ como $\mathscr{B}_u$.

1. Como $\mathscr{B}_{\mathbb{0}} = \emptyset$ e $\mathscr{B}_{\mathbb{1}} = \mathscr{B}$ são regulares, $h(\mathbb{0}) = \emptyset = \mathbb{0}$ e $h(\mathbb{1}) = \mathscr{B} = \mathbb{1}$. Com isso concluímos também a demonstração de que h é injetora.

2.: Sendo $\mathscr{B} - \{\mathbb{0}\}$ separativo, $h(u) = \mathscr{B}_u$. Portanto precisamos provar somente que $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathscr{B}_u \cup \mathscr{B}_v)) = \mathscr{B}_{u+v}$. Vamos provar primeiramente que, para todo $w \neq \mathbb{0}$, vale $w \not\perp (u+v)$ se, e somente se, $w \not\perp u$ ou $w \not\perp v$. Caso valer $w \not\perp u$ ou $w \not\perp v$, teremos que wu ou wv será diferente de $\mathbb{0}$, consequentemente, $w(u+v) = wu + wv \neq \mathbb{0}$, provando assim que, se valer $w \not\perp u$ ou $w \not\perp v$, então vale $w \not\perp (u+v)$. Agora, suponha que valha $w \not\perp (u+v)$ e $w \perp u$, segue então que $\mathbb{0} \neq w(u+v) = wu + wv = wv$, uma vez que, pela hipótese, $wu = \mathbb{0}$. Ou seja, teremos $w \not\perp v$, o suficiente para provar que $w \not\perp (u+v)$ implica que $w \not\perp u$ ou $w \not\perp v$, concluindo essa primeira demonstração. Esse fato nos permite provar que $\mathrm{cl}(\mathscr{B}_u \cup \mathscr{B}_v) = \mathrm{cl}(\mathscr{B}_{u+v})$, assim, concluímos que $h(u) + h(v) = \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathscr{B}_u \cup \mathscr{B}_v)) = \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathscr{B}_{u+v})) = \mathscr{B}_{u+v}$.

3.: Aqui, basta provar que $\mathscr{B}_u \cap \mathscr{B}_v = \mathscr{B}_{uv}$, o que é evidente já que $uv = \inf\{u, v\}$.

4.: Inicialmente, provaremos que $(\mathscr{B} - \{\mathbb{0}\}) - \mathscr{B}_u = \mathrm{cl}(\mathscr{B}_{-u})$. Se $v \neq \mathbb{0}$ não pertence a $\mathscr{B}_u$, então $v \not\leq u$, isto é, $v(-u) \neq \mathbb{0}$. Portanto, $v \not\perp -u$ e, como consequência, $v \in \mathrm{cl}(\mathscr{B}_{-u})$. Por outro lado, se $v \in \mathrm{cl}(\mathscr{B}_{-u})$ então $v \not\perp -u$, ou seja, $v(-u) \neq \mathbb{0}$. Assim, $v \nleq u$ e, consequentemente, v não pertence a $\mathscr{B}_u$. Portanto $-h(u) = \mathrm{int}((\mathscr{B} - \{\mathbb{0}\}) - \mathscr{B}_u) = \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathscr{B}_{-u})) = \mathscr{B}_{-u} = h(-u)$. $\square$

Corolário 1.2.13. Para todo forcing $\mathbb{P}$, se $p \in \mathbb{P}$ é átomo, então $e(p) \in \mathrm{r.o.}(\mathbb{P}) - \{\mathbb{0}\}$ também será. E, se $u \in \mathrm{r.o.}(\mathbb{P}) - \{\mathbb{0}\}$ é átomo, então $u = e(p)$, para algum $p \in \mathbb{P}$ que seja átomo em $\mathbb{P}$.

Demonstração. Dados $u, v \in \mathrm{r.o.}(\mathbb{P}) - \{\mathbb{0}\}$, o teorema acima implica que existe $q, r \in \mathbb{P}$ com $e(q) \leq u$, $e(r) \leq v$. Agora suponha que p seja átomo e fixe $u, v \in \mathrm{r.o.}(\mathbb{P}) - \{\mathbb{0}\}$ arbitrários com q, r satisfazendo a propriedade acima. Se $u, v \leq e(p)$, então $e(q), e(r) \leq e(p)$. Portanto, $e(q) \not\perp e(p)$ e $e(r) \not\perp e(p)$, implicando $q \not\perp p$ e $r \not\perp p$. Assim existe q', r', com $q' \leq p, q$ e $r' \leq p, r$. Como p é átomo, temos que $q' \not\perp r'$. Retornando a $\mathrm{r.o.}(\mathbb{P})$, vale $e(q') \leq e(q) \leq u \leq e(p)$, $e(r') \leq e(r) \leq v \leq e(p)$ e $e(q') \not\perp e(r')$, consequentemente, $u \not\perp v$ e assim $e(p)$ é átomo no forcing induzido de $\mathrm{r.o.}(\mathbb{P})$.

Agora, dado $u \in \mathrm{r.o.}(\mathbb{P}) - \{\mathbb{0}\}$ que seja átomo, existe $p \in \mathbb{P}$ com $e(p) \leq u$. Assim, pelo Teorema 1.2.9, $e(p) = u$. Provemos agora que esse p é átomo em $\mathbb{P}$. Dados $q, r \leq p$, então $e(p), e(r) \leq e(p) = u$. Novamente o Teorema 1.2.9 implica $e(q) = e(r) = e(p) = u$. Note que $e(q) = e(r)$ implica $e(q) \not\perp e(r)$, de onde concluímos que $q \not\perp r$, assim p é átomo em $\mathbb{P}$. $\square$

1.3 Propriedades

Aqui analisaremos propriedades dos forcings e álgebras booleanas e, como mencionado anteriormente, quando mencionarmos uma álgebra booleana $\mathscr{B}$ no contexto de forcing, estaremos nos referindo implicitamente ao forcing induzido de $\mathscr{B} - \{\mathbb{0}\}$.

1.3.1 Somatórios e Produtórios

Nesta subseção, trabalharemos unicamente com álgebras booleanas completas, onde as operações $\sum, \prod$ podem ser definidas.

Teorema 1.3.1. Para toda álgebra booleana completa $\mathscr{B}$, todos $\{u_i\}_{i\in I}, \{v_i\}_{i\in I}$ subconjuntos de $\mathscr{B}$ e $v \in \mathscr{B}$, valem as seguintes propriedades:

1. $\sum_{i\in I}(u_i + v_i) = \sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i$ e $\prod_{i\in I} u_i v_i = \prod_{i\in I} u_i \prod_{i\in I} v_i$
2. $\sum_{i\in I}(v + u) = v + \sum_{i\in I} u_i$ e $\prod_{i\in I} v u_i = v \prod_{i\in I} u_i$
3. $v \sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} v u_i$ e $v + \prod_{i\in I} u_i = \prod_{i\in I}(v + u_i)$.

Demonstração. 1.: Para todo $i \in I$ vale $u_i \leq \sum_{i\in I} u_i$ e $v_i \leq \sum_{i\in I} v_i$. Então $v_i + u_i \leq \sum_{i\in I} v_i + \sum_{i\in I} u_i$, logo $\sum_{i\in I}(v_i + u_i) \leq \sum_{i\in I} v_i + \sum_{i\in I} u_i$. Por outro lado, como para todo $i \in I$, vale $u_i \leq v_i + u_i \leq \sum_{i\in I}(v_i + u_i)$ e $v_i \leq v_i + u_i \leq \sum_{i\in I}(v_i + u_i)$, vale $\sum_{i\in I} v_i \leq \sum_{i\in I}(v_i + u_i)$ e $\sum_{i\in I} u_i \leq \sum_{i\in I}(v_i + u_i)$, o que implica $\sum_{i\in I} v_i + \sum_{i\in I} u_i \leq \sum_{i\in I}(v_i+u_i) + \sum_{i\in I}(v_i+u_i) = \sum_{i\in I}(v_i+u_i)$. A demonstração da segunda equação é análoga, basta apenas inverter as ordens, substituir $\sum$ por $\prod$ e soma por multiplicação.

2.: Consequência imediata de 2 acima fazendo $v_i = v$ para todo $i \in I$. Sabendo que, neste caso, temos $\sum_{i\in I} v_i = \prod_{i\in I} v_i = v$.

3.: $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} \mathbb{1}u_i = \sum_{i\in I}(vu_i + (-v)u_i)$ que é igual, pelo item 1 provado acima, $\sum_{i\in I} vu_i + \sum_{i\in I}(-v)u_i$. Multiplicando-se ambos os lados por v, temos $v\sum_{i\in I} u_i = v\sum_{i\in I} vu_i + v\sum_{i\in I}(-v)u_i$. Como, para todo $i \in I$, temos $vu_i \leq v$ e $(-v)u_i \leq -v$, segue que $\sum_{i\in I} vu_i \leq v$ e $\sum_{i\in I}(-v)u_i \leq (-v)$. Então $v\sum_{i\in I} vu_i = \sum_{i\in I} vu_i$ e $v\sum_{i\in I}(-v)u_i \leq v(-v) = \mathbb{0}$, o que implica $v\sum_{i\in I}(-v)u_i = \mathbb{0}$. Concluindo assim que $v\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} vu_i$. A demonstração da segunda equação é análoga, basta inverter a ordem, substituir $\sum$ por $\prod$, multiplicação por soma e vice versa, e substituir $\mathbb{0}$ por $\mathbb{1}$ e vice versa. □

Teorema 1.3.2. Para toda álgebra booleana completa $\mathscr{B}$ e todos $\{u_i\}_{i\in I}$ e $\{v_j\}_{j\in J}$ subconjuntos de $\mathscr{B}$, valem as seguintes propriedades:

1. $\sum_{i\in I} u_i + \sum_{j\in J} v_j = \sum_{(i,j)\in I\times J}(u_i + v_j)$ e $\prod_{i\in I} u_i \prod_{j\in J} v_j = \prod_{(i,j)\in I\times J} u_i v_j$

2. $\sum_{i\in I} u_i \sum_{j\in J} v_j = \sum_{(i,j)\in I\times J} u_i v_j$ e $\prod_{i\in I} u_i + \prod_{j\in J} v_j = \prod_{(i,j)\in I\times J}(u_i + v_j)$

Demonstração. 1.: Aplicando a parte 2 do teorema acima duas vezes, obtemos $\sum_{i\in I} u_i + \sum_{j\in J} v_j = \sum_{i\in I}(u_i + \sum_{j\in J} v_j) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}(u_i + v_j)$ que podemos substituir por $\sum_{(i,j)\in I\times J}(u_i + v_j)$. A demonstração da segunda parte é análoga fazendo as substituições necessárias.

2.: Aplicando a parte 3 do teorema acima duas vezes, obtemos $\sum_{i\in I} u_i \sum_{j\in J} v_j = \sum_{i\in I}(u_i \sum_{j\in J} v_j) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} u_i v_j$, que podemos trocar por $\sum_{(i,j)\in I\times J} u_i v_j$. A demonstração da segunda equação é análoga fazendo as devidas substituições. □

Teorema 1.3.3. Para toda álgebra booleana completa $\mathscr{B}$ e $\{u_i\}_{i\in I} \subset \mathscr{B}$, vale $-(\sum_{i\in I} u_i) = \prod_{i\in I} -u_i$ e $-(\prod_{i\in I} u_i) = \sum_{i\in I} -u_i$.

Demonstração. Para todo $i \in I$, vale $u_i \leq \sum_{i\in I} u_i$ e $\prod_{i\in I} u_i \leq u_i$, o que implica $-(\sum_{i\in I} u_i) \leq -u_i$ e $-u_i \leq -(\prod_{i\in I} u_i)$. Consequentemente, vale $-(\sum_{i\in I} u_i) \leq \prod_{i\in I} -u_i$ e $\sum_{i\in I} -u_i \leq -(\prod_{i\in I} u_i)$. Usando a segunda consequência, temos que $-(\prod_{i\in I} -u_i) + (-(\sum_{i\in I} u_i)) \geq \sum_{i\in I}(-(-u)) + (-(\sum_{i\in I} u_i)) = \sum_{i\in I} u_i + (-(\sum_{i\in I} u_i)) = \mathbb{1}$, portanto $\prod_{i\in I} -u_i \leq -(\sum_{i\in I} u_i)$ e, assim, $\prod_{i\in I} -u_i = -(\sum_{i\in I} u_i)$. Agora, usando a primeira consequência, temos $-(\prod_{i\in I} u_i) - (\sum_{i\in I} -u_i) \leq -(\prod_{i\in I} u_i)\prod_{i\in I}(-(-u)) = -(\prod_{i\in I} u_i)\prod_{i\in I} u_i = \mathbb{0}$ o que implica $-(\prod_{i\in I} u_i) \leq \sum_{i\in I} -u_i$, portanto $-(\prod_{i\in I} u_i) \leq \sum_{i\in I} -u_i$ e, assim, $-(\prod_{i\in I} u_i) = \sum_{i\in I} -u_i$. □

1.3.2 Homomorfismos e Embarcações

As funções e do Teorema 1.2.11 e h do Teorema 1.2.12 são, na verdade, casos particulares de um grupo de funções mais gerais: **embarcações** e **homomorfismos**, que fazem, respectivamente, associações entre forcings e entre álgebras booleanas. Essas associações serão desenvolvidas nessa subseção e serão muito utilizadas na técnica de forcing.

Definição 1.3.4 (HOMOMORFISMO)**.** Dada duas álgebras booleanas $\mathscr{B},\mathscr{C}$, dizemos que uma função $h:\mathscr{C}\to\mathscr{B}$ é um **homomorfismo de álgebras booleanas** caso satisfaçam, $h(\mathbb{0})=\mathbb{0}$, $h(\mathbb{1})=\mathbb{1}$ e, dados $u,v\in\mathscr{C}$, $h(u+v)=h(u)+h(v)$, $h(uv)=h(u)h(v)$ e $h(-u)=-h(u)$. Se, além disso, h for bijetora, dizemos que é um **isomorfismo de álgebras booleanas**.

De modo análogo, dadas álgebras booleanas completas $\mathscr{B},\mathscr{C}$, caso um homomorfismo $h:\mathscr{C}\to\mathscr{B}$ satisfaça, para todo $\{u_i\}_{i\in I}\subset\mathscr{C}$, $h(\sum_{i\in I}u_i)=\sum_{i\in I}h(u_i)$ e $h(\prod_{i\in I}u_i)=\prod_{i\in I}h(u_i)$, dizemos que h é um **homomorfismo completo**. Se h for, de fato, um isomorfismo, dizemos que h é um **isomorfismo completo**.

Definição 1.3.5 (SUB-ÁLGEBRA)**.** Dada uma álgebra booleana $\mathscr{B}$, uma **sub-álgebra booleana de** $\mathscr{B}$ é uma álgebra booleana $\mathscr{C}\subset\mathscr{B}$ tal que a função inclusão $I:\mathscr{C}\to\mathscr{B}$ é um homomorfismo.

Analogamente, caso $\mathscr{B}$ for álgebra booleana completa e $\mathscr{C}\subset\mathscr{B}$ for álgebra booleana completa tal que a função inclusão I for homomorfismo completo, então dizemos que $\mathscr{C}$ é **sub-álgebra booleana completa**.

Definição 1.3.6 (EMBARCAÇÃO)**.** Dados dois forcings $\mathbb{P},\mathbb{Q}$, dizemos que a função $i:\mathbb{P}\to\mathbb{Q}$ é uma **embarcação** se satisfaz as seguintes propriedades, dados $p_0,p_1\in\mathbb{P}$:

1 $p_0\leq p_1$ implica $i(p_0)\leq i(p_1)$

2 $p_0\perp p_1$ se, e somente se, $i(p_0)\perp i(p_1)$

3 $\forall q\in\mathbb{Q}\ \exists p\in\mathbb{P}\ \forall r\leq p\ i(r)\not\perp q$

Se i, ao invés de 3 satisfaz a seguinte propriedade:

3′ $\forall q\in\mathbb{Q}\ \exists p\in\mathbb{P}\ i(p)\leq q$

dizemos que i é uma **embarcação densa**.

Observação 1.3.7. A função $e:\mathbb{P}\to\text{r.o.}(\mathbb{P})$ definida no Teorema 1.2.11 é uma embarcação densa, que passaremos a chamar **embarcação canônica de** r.o.$(\mathbb{P})$. Analogamente, $h:\mathscr{B}\to$ r.o.$(\mathscr{B})$ definido no Teorema 1.2.12 é um homomorfismo, que chamaremos, a partir de agora, de **homomorfismo canônico de** r.o.$(\mathscr{B})$. Além disso, 3′ implica 3.

Demonstração. Supondo 3′ e, dado $q\in\mathbb{Q}$ e $p\in\mathbb{P}$ tal que $i(p)\leq q$, vale, para todo $r\leq p$, $i(r)\leq q$, ou seja, $i(r)\not\perp q$, assim vale 3. □

Observação 1.3.8. Sejam forcings $\mathbb{P}, \mathbb{Q}, \mathbb{S}$, e funções $i : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ e $j : \mathbb{Q} \to \mathbb{S}$. Caso i é uma embarcação e j for embarcação densa, ou caso i seja embarcação densa e j seja embarcação, então $j \circ i$ é uma embarcação. Caso ambos i, j forem embarcações densas, $j \circ i$ também será embarcação densa.

Demonstração. As propriedades 1, 2 são facilmente dedutíveis em todos os três casos. Basta provar então a 3 para os dois primeiros casos e $3'$ para o terceiro, coisa que provaremos separadamente para cada caso.

Caso j seja densa e i não: Dado $s \in \mathbb{S}$, seja $q \in \mathbb{Q}$ com $j(q) \leq s$, então existe $p \in \mathbb{P}$ tal que, para todo $p' \leq p$, $i(p') \not\perp q$. Consequentemente $j(i(p')) \not\perp j(q)$ e, como $j(q) \leq s$, $j(i(p')) \not\perp s$ para todo $p' \leq p$, então $j \circ i$ satisfaz 3.

Caso i seja densa e j não: Dado $s \in \mathbb{S}$, seja $q \in \mathbb{Q}$ tal que, para todo $q' \leq q$, $j(q') \perp s$, fixe $p \in \mathbb{P}$ tal que $i(p) \leq q$. Digo que $j(i(p')) \not\perp s$ para todo $p' \leq p$. Pois, fixado $p' \leq p$, então $i(p') \leq i(p) \leq q$, portanto, pela propriedade de q, $j(i(p')) \not\perp s$, assim provando 3.

Caso i, j forem densas: Dado $s \in \mathbb{S}$, existe $q \in \mathbb{Q}$ com $j(q) \leq s$, do mesmo modo, existe $p \in \mathbb{P}$ com $i(p) \leq q$, portanto $j(i(p)) \leq j(q) \leq s$. Assim, $j \circ i$ satisfaz $3'$. $\square$

Definição 1.3.9. Dados $\mathbb{P}, \mathbb{Q}$ forcings separativos, se $i : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ é uma embarcação, então i satisfaz, para quaisquer $p_0, p_1 \in \mathbb{P}$, $i(p_0) \leq i(p_1)$ implica $p_0 \leq p_1$ e, portanto, i é injetora.

Demonstração. Dados $p_0, p_1 \in \mathbb{P}$, suponha por absurdo que $i(p_0) \leq i(p_1)$ e $p_0 \not\leq p_1$. Então, por separatividade, existe $r \leq p_0$ tal que $r \perp p_1$ implicando $i(r) \perp i(p_1)$, contrariando $i(r) \leq i(p_0) \leq i(p_1)$. $\square$

Para os forcings do estilo $\mathrm{Fn}(I, J, \kappa)$, é evidente que, caso $I \subset I'$, então $\mathrm{Fn}(I, J, \kappa) \subset \mathrm{Fn}(I', J, \kappa)$. Porém vale mais que isso, a função inclusão $i : \mathrm{Fn}(I, J, \kappa) \to \mathrm{Fn}(I', J, \kappa)$ é uma embarcação, como provaremos a seguir.

Teorema 1.3.10. Quando $I \subset I'$, a função $i : \mathrm{Fn}(I, J, \kappa) \to \mathrm{Fn}(I', J, \kappa)$ tal que $i(p) = p$, para todo $p \in \mathrm{Fn}(I, J, \kappa)$, é uma embarcação.

Demonstração. Uma vez que $\mathrm{Fn}(I, J, \kappa) \subset \mathrm{Fn}(I', J, \kappa)$ e a ordem de ambos coincide, temos que $p_0 \leq p_1$ se, e somente se, $i(p_0) \leq i(p_1)$, assim a condição 1 é satisfeita.

Note que, para qualquer ordem do estilo $\mathrm{Fn}()$, $p_0 \not\perp p_1$ se, e somente se, $p_0 \cup p_1$ é função. Com isso é fácil provar que $p_0 \not\perp p_1$ se, e somente se, $i(p_0) \not\perp i(p_1)$, consequentemente, $p_0 \perp p_1$ se, e somente se, $i(p_0) \perp i(p_1)$. Obtemos assim a propriedade 2.

Agora suponha $q \in \mathrm{Fn}(I', J, \kappa)$ arbitrário, então, fazendo $p = q \restriction I$, temos que $p \in \mathrm{Fn}(I, J, \kappa)$. Digo que, para todo $p_1 \in \mathrm{Fn}(I, J, \kappa)$ com $p_1 \leq p$, vale $i(p_1) \not\perp q$, isto é, $p_1 \cup q$ é função. Isso é verdade, uma vez que $p \subset q$ e $p \subset p_1$. Logo, para todo $x \in \mathrm{dom}(p)$, $p_1(x) = q(x)$

e, uma vez que $\mathrm{dom}(p) = \mathrm{dom}(q) \cap I$, para todo $x \in \mathrm{dom}(p_1) - \mathrm{dom}(p)$, $x \notin \mathrm{dom}(q)$. Assim temos a propriedade 3. $\square$

A versão mais geral do teorema acima será dada a seguir:

Teorema 1.3.11. Para toda função injetora $f : I \to I'$, a função $i_f : \mathrm{Fn}(I,J,\kappa) \to \mathrm{Fn}(I',J,\kappa)$, dada por $i_f(p) = p \circ (f \restriction \mathrm{dom}(p))^{-1}$ é uma embarcação. Caso f for bijetora, i_f será embarcação densa (de fato, isomorfismo de ordens).

Demonstração. Note que, uma vez que $f : I \to I'$ é injetora, faz sentido definir a função inversa $f^{-1} : f[I] \to I$. Assim, para todo $p \in \mathrm{Fn}(I,J,\kappa)$, $i_f(p)$ é definida da seguinte forma: $\mathrm{dom}(i_f(p)) = f[\mathrm{dom}(p)] \subset f[I] \subset I'$ e, para todo $x \in \mathrm{dom}(i_f(p))$, $i_f(p)(x) = p(f^{-1}(x))$.

Vamos considerar inicialmente o caso de que $f : I \to I'$ é bijetora. Nesse caso, além de $i_f(p) \in \mathrm{Fn}(I',J,\kappa)$, para todo $q \in \mathrm{Fn}(I',J,\kappa)$ existe $p \in \mathrm{Fn}(I,J,\kappa)$ com $i_f(p) = q$, a saber, $p = q \circ (f \restriction f^{-1}[\mathrm{dom}(q)])$ (isto é, $\mathrm{dom}(p) = f^{-1}[\mathrm{dom}(q)]$ e $p(x) = q(f(x))$, para todo $x \in \mathrm{dom}(p)$). Vamos provar que $p_0 \subset p_1 \Leftrightarrow i_f(p_0) \subset i_f(p_1)$, o que provará que $i_f : \mathrm{Fn}(I,J,\kappa) \to \mathrm{Fn}(I',J,\kappa)$ é função bijetora que preserva ordens (isomorfismo de ordens), implicando imediatamente que é embarcação densa.

$\Rightarrow$): $p_0 \subset p_1$ equivale a $\mathrm{dom}(p_0) \subset \mathrm{dom}(p_1)$ e $p_0(x) = p_1(x)$, para todo $x \in \mathrm{dom}(p_0)$. Com isso, temos que $\mathrm{dom}(i_f(p_0)) = f[\mathrm{dom}(p_0)] \subset f[\mathrm{dom}(p_1)] = \mathrm{dom}(i_f[p_1])$ e $i_f(p_0)(x) = p_0(f^{-1}(x)) = p_1(f^{-1}(x)) = i_f(p_1)(x)$, implicando que $i_f(p_0) \subset i_f(p_1)$.

$\Leftarrow$): $i_f(p_0) \subset i_f(p_1)$ implica que $f[\mathrm{dom}(p_0)] = \mathrm{dom}(i_f(p_0)) \subset \mathrm{dom}(i_f(p_1)) = f[\mathrm{dom}(p_1)]$ e, para todo $x \in \mathrm{dom}(i_f(p_1))$, $p_0(f^{-1}(x)) = i_f(p_0)(x) = i_f(p_1)(x) = p_1(f^{-1}(x))$. Logo, devido ao fato de f ser injetora, temos que $\mathrm{dom}(p_0) \subset \mathrm{dom}(p_1)$ e, para todo $x \in \mathrm{dom}(p_0)$, $p_0(x) = p_1(x)$, ou seja, $p_0 \subset p_1$.

Agora, no caso geral, note que $f : I \to f[I]$ é bijetora, então, como provamos acima, a função $e : \mathrm{Fn}(I,J,\kappa) \to \mathrm{Fn}(f[I],J,\kappa)$ que satisfaz $e(p) = i_f(p)$ para todo $p \in \mathrm{Fn}(I,J,\kappa)$, é embarcação densa. Uma vez que $f[I] \subset I'$, $\mathrm{Fn}(f[I],J,\kappa) \subset \mathrm{Fn}(I',J,\kappa)$ e, como provado no teorema acima, a função identidade $i : \mathrm{Fn}(f[I],J,\kappa) \to \mathrm{Fn}(I',J,\kappa)$ é uma embarcação, assim $i_f = i \circ e$. Consequentemente, a Observação 1.3.8 prova que i_f é embarcação. $\square$

Teorema 1.3.12. Para todo forcing $\mathbb{P}$ e $\mathscr{B}$ álgebra booleana completa, se $i : \mathbb{P} \to \mathscr{B}$ for uma embarcação densa, então existe isomorfismo completo $h : \mathrm{r.o.}(\mathbb{P}) \to \mathscr{B}$ tal que, se $e : \mathbb{P} \to \mathrm{r.o.}(\mathbb{P})$ for a embarcação densa canônica do Teorema 1.2.11, vale $h(e(p)) = i(p)$ para todo $p \in \mathbb{P}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "e"'] & \mathscr{B} \\
\mathrm{r.o.}(\mathbb{P}) \arrow[ur, dashed, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

Demonstração. Como e e i são embarcações densas, $e[\mathbb{P}]$ e $i[\mathbb{P}]$ são densos em r.o.$(\mathbb{P})$ e $\mathscr{B}$. Assim, se $u \in$ r.o.$(\mathbb{P})$ e $v \in \mathscr{B}$, vale $u = \sum\{e(p) : e(p) \leq u\}$ e $v = \sum\{i(p) : i(p) \leq v\}$ (caso $u = \mathbb{0}$ ou $v = \mathbb{0}$, temos $\sum\{e(p) : e(p) \leq u\} = \sum\emptyset = \mathbb{0}$ e $\sum\{i(p) : i(p) \leq v\} = \sum\emptyset = \mathbb{0}$, consequentemente a equação acima continua válida).

Definamos h da seguinte forma, para todo $u \in$ r.o.$(\mathbb{P})$, $h(u) = \sum\{i(p) : e(p) \leq u\} = \sum i[\{p : e(p) \leq u\}]$. Dado $p \in \mathbb{P}$, $h(e(p)) = \sum\{i(q) : e(q) \leq e(p)\}$, como $i(p) \in \{i(q) : e(q) \leq e(p)\}$, vale $i(p) \leq h(e(p))$. Assim, caso provarmos que $h(e(p)) \leq i(p)$, provaremos então que vale $h(e(p)) = i(p)$, demonstrando uma das afirmações do teorema. Para isso, basta provar que, para todo $q \in \mathbb{P}$, $e(q) \leq e(p)$ implica $i(q) \leq i(p)$. Vamos provar que, de fato, vale $e(q) \leq e(p)$ se, e somente se, $i(q) \leq i(p)$. Isso é válido pois, caso valer $e(q) \leq e(p)$ e $i(q) \not\leq i(p)$, pela separatividade de álgebras booleanas, existe $u \in \mathscr{B} - \{\mathbb{0}\}$ com $u \leq i(q)$ e $u \perp i(p)$. Pela densidade de i, existe $r \in \mathbb{P}$ com $i(r) \leq u$, logo, $i(r) \leq i(q)$, o que implica $i(r) \not\perp i(q)$ e $i(r) \perp i(p)$. Como i é embarcação, temos $r \not\perp q$ e $r \perp p$, mas e também é embarcação, portanto $e(r) \not\perp e(q)$ e $e(r) \perp e(p)$, absurdo, já que supomos $e(q) \leq e(p)$ e, portanto, deveríamos ter $e(r) \not\perp e(p)$. Com um argumento análogo podemos provar que $i(q) \leq i(p)$ implica $e(q) \leq e(p)$, concluindo o que desejávamos provar. É óbvio que, por e, i serem embarcações, vale $e(p) \perp e(q) \Leftrightarrow i(p) \perp i(q)$.

Vamos provar agora que h é função bijetora. Se $u, v \in$ r.o.$(\mathbb{P})$ é tal que $u \leq v$, então $\{p : e(p) \leq u\} \subset \{p : e(p) \leq v\}$. Portanto $i[\{p : e(p) \leq u\}] \subset i[\{p : e(p) \leq v\}]$, o que implica $h(u) \leq h(v)$. Por outro lado, se $h(u) \leq h(v)$ e $p \in \mathbb{P}$ é tal que $e(p) \leq u$ temos $i(p) \leq h(u) \leq h(v)$. Com isso, note que $i(p) \leq h(v) = \sum\{i(q) : e(q) \leq v\}$ implica $e(p) \leq v$, pois se $i(p) \leq h(v)$ e $e(p) \not\leq v$, pela separatividade de r.o.$(\mathbb{P})$ e densidade de e, existe $q \in \mathbb{P}$ com $e(q) \leq e(p)$ e $e(q) \perp v$. Portanto $e(q) \perp e(r)$ para todo $r \in \mathbb{P}$ tal que $e(r) \leq v$. Devido ao que provamos no parágrafo acima, vale $i(q) \leq i(p)$ e $i(q) \perp i(r)$ para todo $r \in \mathbb{P}$ satisfazendo $e(r) \leq v$, então $i(q)h(v) = i(q)\sum\{i(r) : e(r) \leq v\} = \sum\{i(q)i(r) : e(r) \leq v\} = \mathbb{0}$, assim $i(q) \perp h(v)$, absurdo com o fato que $i(q) \leq i(p) \leq h(v)$. Com toda essa argumentação, provamos que, se $h(u) \leq h(v)$ e $p \in \{q : e(q) \leq u\}$, então $p \in \{q : e(q) \leq v\}$, o que implica $\{p : e(p) \leq u\} \subset \{p : e(p) \leq v\}$, ou seja, $u \leq v$. Até o momento então, já sabemos que h satisfaz $u \leq v \Leftrightarrow h(u) \leq h(v)$ para quaisquer $u, v \in$ r.o.$(\mathbb{P})$. Com esse fato, já temos que h é função injetora, falta provar então que h é sobrejetora. Dado $u \in \mathscr{B}$, temos que $u = \sum\{i(p) : i(p) \leq u\}$. Vamos provar que, se $v = \sum\{e(p) : i(p) \leq u\} \in$ r.o.$(\mathbb{P})$ então, $h(v) = u$. Para isso, é suficiente provar que $\{p : i(p) \leq u\} = \{p : e(p) \leq v\}$.

A parte $\subset$ decorre da definição de v.

Suponha agora, por absurdo que valha $\not\supset$. Então, seja $p \in \mathbb{P}$ tal que $e(p) \leq v$ e $i(p) \not\leq u$. Portanto, existe $r \in \mathbb{P}$ tal que $i(r) \leq i(p)$ e $i(r) \perp u$, assim, $i(r) \perp i(q)$ para todo q com $i(q) \leq u$. Logo, $e(r) \perp e(q)$ para todo q com $i(q) \leq u$. Temos então que $e(r) \perp \sum\{e(q) : i(q) \leq u\} = v$, só que $i(r) \leq i(p)$ implica $e(r) \leq e(p) \leq v$ (usando a hipótese com o que provamos no segundo parágrafo da demonstração), absurdo. Assim provamos a parte $\supset$.

Agora, vamos provar que h é de fato um homomorfismo completo. Para isso, precisamos apenas provar que $h\left(\sum_{i\in I} u_i\right) = \sum_{i\in I} h(u_i)$ para todo $\{u_i\}_{i\in I} \subset$ r.o.$(\mathbb{P})$ e, $h(-u) = -h(u)$ para todo $u \in$ r.o.$(\mathbb{P})$. Uma vez provado isso, a parte $h\left(\prod_{i\in I} u_i\right) = \prod_{i\in I} h(u_i)$ poderá ser obtida usando $\prod_{i\in} u_i = -\sum_{i\in I} -u_i$, como provado no Teorema 1.3.3 e a parte que h ser homomorfismo decorrerá do fato que $u+v = \sum\{u,v\}$ e $uv = \prod\{u,v\}$, como vimos na Observação 1.1.13. Assim nos concentraremos na demonstração dessas duas afirmações.

Temos que $h\left(\sum_{i\in I} u_i\right) = \sum\{i(p) : e(p) \leq \sum_{i\in I} u_i\}$. Fixe $i \in I$ arbitrário, para todo $p \in \mathbb{P}$, se $e(p) \leq u_i$, então $e(p) \leq \sum_{i\in I} u_i$ e, como consequência disso, $h(u_i) = \sum\{i(p) : e(p) \leq u_i\} \leq \sum\{i(p) : e(p) \leq \sum_{i\in I} u_i\} = h\left(\sum_{i\in I} u_i\right)$. Portanto, a arbitrariedade de $i \in I$ acima implica que $\sup_{i\in I} h(u_i) \leq h\left(\sum_{i\in I} u_i\right)$. Agora, se $e(p) \leq \sum_{i\in I} u_i$, vamos provar que $i(p) \leq \sum_{i\in I} h(u_i)$, o que implicará $h\left(\sum_{i\in I} u_i\right) \leq \sum_{i\in I} h(u_i)$ e, consequentemente, $h\left(\sum_{i\in I} u_i\right) = \sum_{i\in I} h(u_i)$ concluindo a demonstração da primeira afirmação. Note primeiramente que, para toda álgebra booleana completa $\mathscr{B}$, $u \perp \sum_{i\in I} u_i \Leftrightarrow u \perp u_i$ para todo $i \in I$, pois, se $u \perp \sum_{i\in I} u_i$, teremos $uu_i \leq \sum_{i\in I} uu_i = u\sum_{i\in I} u_i = \mathbb{0}$, ou seja, $u \perp u_i$ para todo $i \in I$ arbitrário e, se $u \perp u_i$ para todo $i \in I$, temos $u\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} uu_i = \sum_{i\in I} \mathbb{0} = \mathbb{0}$, logo $u \perp \sum_{i\in I} u_i$. Agora, suponha, por absurdo, que exista $e(p) \leq \sum_{i\in I} u_i$ com $i(p) \nleq \sum_{i\in I} h(u_i)$. Então existe $i(r) \leq i(p)$ com $i(r) \perp \sum_{i\in I} h(u_i)$, portanto, o que provamos acima implica que, para todo $i \in I$, $i(r) \perp h(u_i)$. Esse último fato tem como consequência que $i(r) \perp i(q)$ para todo $q \in \mathbb{P}$ com $e(q) \leq u_i$. Como vale, devido ao fato de valer $i(r) \perp i(p)$, que $e(r) \perp e(q)$, concluímos que $e(r) \perp u_i$ para todo $i \in I$. Portanto, $e(r) \perp \sum_{i\in I} u_i$, absurdo, uma vez que, pela hipótese, vale $e(r) \leq e(p) \leq \sum_{i\in I} u_i$, provando o que queríamos.

Provemos agora que $h(-u) = -h(u)$. Se p é tal que $e(p) \leq -u$ então $e(p) \perp u$ implicando $e(p) \perp e(q)$ para todo $e(q) \leq u$. Portanto vale $i(p) \perp i(q)$, ou seja, $i(p) \perp h(u)$, o que implica de imediato que $i(p) \leq -h(u)$ e, por arbitrariedade de p com $e(p) \leq -u$, $h(-u) \leq -h(u)$. Vamos agora provar que, se $i(p) \leq -h(u)$ então $e(p) \leq -u$, isso implicará $-h(u) \leq h(-u)$, provando assim que $h(-u) = -h(u)$ e concluindo a demonstração do teorema. Note que $i(p) \leq -h(u)$ implica $i(p) \perp h(u)$ ou $i(p) \perp i(q)$, para todo q com $e(q) \leq u$, implicando assim que $e(p) \perp e(q)$ para todo $e(q) \leq u$, portanto $e(p) \perp u$, ou $e(p) \leq -u$. □

Teorema 1.3.13. Dados $\mathbb{P}$ forcing, $\mathscr{B}$ álgebra booleana completa e $i : \mathbb{P} \to \mathscr{B}$ embarcação, existe sub-álgebra completa $\mathscr{C}$ de $\mathscr{B}$ tal que $\mathrm{im}(\mathbb{P}) \subset \mathscr{C}$ e i é uma embarcação densa em $\mathscr{C}$.

Demonstração. Lembremos que, por definição, para todo $X \subset \mathscr{B}$, $\sum X = \sup X$ e $\prod X = \inf X$.

O nosso $\mathscr{C}$ será definido dessa forma: $\mathscr{C} = \{\sum_{p\in S} i(p) : S \subset \mathbb{P}\}$. Uma vez que, para todo $q \in \mathbb{P}$, $i(q) = \sum_{p\in\{q\}} i(p) \in \mathscr{C}$, vale $i[\mathbb{P}] \subset \mathscr{C}$. Note agora que, para provar que $\mathscr{C}$ é sub-álgebra completa de $\mathscr{B}$, é suficiente provar que $\mathbb{1}, \mathbb{0} \in \mathscr{C}$ e que $\mathscr{C}$ é fechado para as operações $+, \cdot, -, \sum, \prod$ e, argumentando do mesmo modo que na demonstração anterior, é suficiente mostrar que $\mathscr{C}$ é fechado pelas operações $-, \sum$. Temos que $\mathbb{0} \in \mathscr{C}$ já que $\mathbb{0} = \sum \emptyset = \sum_{p\in\emptyset} i(p)$. Vamos provar que $\sum_{p\in\mathbb{P}} i(p) = \mathbb{1}$, o que implicará $\mathbb{1} \in \mathscr{C}$. Suponha por absurdo que isso seja falso, então $u = -\left(\sum_{p\in\mathbb{P}} i(p)\right)$ é diferente de $\mathbb{0}$ e, para todo $p \in \mathbb{P}$, $i(p) \perp u$. Mas, como i é embarcação em $\mathscr{B}$, existe $p \in \mathbb{P}$ tal que $i(p) \not\perp u$, absurdo.

Para todo $j \in J$ com $u_j = \sum_{p \in S_j} i(p) \in \mathscr{C}$, é fácil demonstrar que, se $S = \bigcup_{j \in J} S_j$, $\sum_{j \in J} u_j = \sum_{p \in S} i(p) \in \mathscr{C}$. Assim, o conjunto $\mathscr{C}$ é fechado por $\sum$.

Agora, dado $u = \sum_{p \in S} i(p) \in \mathscr{C}$, defina $S' = \{p \in \mathbb{P} : \forall q \in S \ p \perp q\}$, digo que $v = \sum_{p \in S'} i(p) = -u$. Pois, por i ser embarcação, para todo $p \in S'$ e todo $q \in S$, $i(p) \perp i(q)$, assim $uv = \left(\sum_{p \in S'} i(p)\right)\left(\sum_{q \in S} i(q)\right) = \sum_{(p,q) \in S' \times S} i(p)i(q) = \mathbb{0}$. Com essa última afirmação, temos $v \leq -u$. Suponha agora, por absurdo, que não valha $-u \leq v$, teremos então que $(-u)(-v) \neq \mathbb{0}$. Uma vez que i é embarcação, fixe $p \in \mathbb{P}$ com $i(r) \not\perp (-u)(-v)$ para todo $r \leq p$. Digo que $p \perp q$ para todo $q \in S$. Pois, suponha por absurdo que $p \not\perp q$ para algum $q \in S$, então existirá $r \leq p, q$, consequentemente teremos $i(r) \leq i(q) \leq u$, assim $i(r) \perp -u$, absurdo com a definição de p, já que, o fato $r \leq p$ deveria implicar $i(r) \not\perp -u$. Com isso, concluímos que $p \in S'$, logo $i(p) \leq v$, absurdo, agora devido ao fato que essa última afirmação implica $i(p) \perp -v$, mas, pela definição de p, deveria valer $i(p) \not\perp -v$. Então, com essa afirmação provamos que $v = -u$, onde derivamos que $-u \in \mathscr{B}$ e, portanto, $\mathscr{C}$ é fechado por $-$.

Como provamos nos parágrafos anteriores, $\mathrm{im}(i) \subset \mathscr{C}$, $\mathbb{0}, \mathbb{1} \in \mathscr{C}$ e $\mathscr{C}$ é fechado para as operações $+, \cdot, -, \sum, \prod$. Por causa disso, $\mathscr{C}$ preserva as operações $+, \cdot, -, \sum, \prod$ e, consequentemente, também preserva as operações $\leq, \perp$, isto é, para quaisquer $u, v \in \mathscr{C}$, $u \leq_{\mathscr{B}} v \Leftrightarrow u \leq_{\mathscr{C}} v$ e $u \perp_{\mathscr{B}} v \Leftrightarrow u \perp_{\mathscr{C}} v$. Assim, já que $i : \mathbb{P} \to \mathscr{B}$ é embarcação, $i : \mathbb{P} \to \mathscr{C}$ satisfaz as propriedades 1 e 2 das embarcações. Dado $u \in \mathscr{C} - \{\mathbb{0}\}$, então $u = \sum_{p \in S} i(p)$ com $S \neq \emptyset$. Logo existe $p \in \mathbb{P}$ com $i(p) \leq_{\mathscr{C}} u$ e, portanto, $i : \mathbb{P} \to \mathscr{C}$ satisfaz a propriedade $3'$ e assim é uma embarcação densa. □

Corolário 1.3.14. Sejam $\mathbb{P}, \mathbb{Q}$ forcings e $i : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ embarcação. Então existe $h : \mathrm{r.o.}(\mathbb{P}) \to \mathrm{r.o.}(\mathbb{Q})$ homomorfismo que preserva i. Além disso, h é isomorfismo caso i for embarcação densa, ou h denota um isomorfismo de $\mathrm{r.o.}(\mathbb{P})$ com uma sub-álgebra completa de $\mathrm{r.o.}(\mathbb{Q})$ caso i for uma embarcação simples.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P} \arrow[r, "i"] \arrow[d] & \mathbb{Q} \arrow[d] \\
\mathrm{r.o.}(\mathbb{P}) \arrow[r, dashed, "h"] & \mathrm{r.o.}(\mathbb{P})
\end{tikzcd}$$

Demonstração. Seja $e : \mathbb{Q} \to \mathrm{r.o.}(\mathbb{Q})$ embarcação densa canônica definida no Teorema 1.2.11. Caso i for embarcação densa, $e \circ i : \mathbb{P} \to \mathrm{r.o.}(\mathbb{Q})$ também será embarcação densa e poderemos definir h através do Teorema 1.3.12 usando a função $e \circ i$, onde, no mesmo teorema, já foi provado ser isomorfismo. Caso i for simples embarcação, o Teorema 1.3.13 implica que existe $\mathscr{B}$ sub-álgebra completa de $\mathrm{r.o.}(\mathbb{Q})$ tal que $e \circ i : \mathbb{P} \to \mathscr{B}$ é embarcação densa, assim, usando o Teorema 1.3.12, existe $h : \mathrm{r.o.}(\mathbb{P}) \to \mathscr{B}$ isomorfismo que preserva $e \circ i$ e, portanto, preserva i. Estendendo o contra-domínio, $h : \mathrm{r.o.}(\mathbb{P}) \to \mathrm{r.o.}(\mathbb{Q})$ é um homomorfismo que denota um isomorfismo de $\mathrm{r.o.}(\mathbb{P})$ com uma sub-álgebra completa de $\mathrm{r.o.}(\mathbb{Q})$. □

Todos esses teoremas sugerem uma conexão íntima entre homomorfismos completos injetores e embarcações, conexão essa que será explicitada no próximo teorema.

Teorema 1.3.15. Fixe álgebras booleanas completas $\mathscr{B}$,$\mathscr{C}$ e $H : \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ função com $H(\mathbb{0}) = \mathbb{0}$. Caso H for embarcação, então também será homomorfismo completo injetor. Em particular, caso H for embarcação densa, então H será isomorfismo completo. Caso H for homomorfismo completo injetor, então também será embarcação. Em particular, caso H for isomorfismo completo, será embarcação densa.

Demonstração. Caso H for embarcação densa, o Teorema 1.3.12 implica a existência de um isomorfismo completo $I : \text{r.o.}(\mathscr{B}) \to \mathscr{C}$, que, aliado ao homomorfismo canônico $h : \mathscr{B} \to \text{r.o.}(\mathscr{B})$ injetor do Teorema 1.2.12, satisfaz, $I(h(u)) = H(u)$, para todo $u \in \mathscr{B}$ (o caso $u = \mathbb{0}$ não gera problemas, já que $H(\mathbb{0}) = \mathbb{0}$), ou seja, $I \circ h = H$. Digo que h também é isomorfismo completo, pois, homomorfismo injetor já foi provado. Agora, fixe $\{u_i\}_{i\in I}$, então, para todo $i \in I$, $u_i \leq \sum_{i\in I} u_i$, portanto, $\sum_{i\in I} h(u_i) \leq h(\sum_{i\in I} u_i)$. Por outro lado, suponha que valha $h(\sum_{i\in I} u_i) \not\leq \sum_{i\in I} h(u_i)$, então existe $v \leq h(\sum_{i\in I} u_i)$ tal que $v \sum_{i\in I} h(u_i) = \mathbb{0}$ e, consequentemente, existe $w \in \mathscr{B}$ tal que $h(w) \leq v$ e $h(w)\sum_{i\in I} h(u_i) = \mathbb{0}$, isto é, $h(w)h(u_i) = \mathbb{0}$ para todo $i \in I$. Por h ser homomorfismo injetor, vale $wu_i = \mathbb{0}$ para todo $i \in I$, assim devemos ter $w\sum_{i\in I} u_i = \mathbb{0}$, absurdo com o fato de que $h(w) \leq v \leq h(\sum_{i\in I} u_i)$. Portanto, $h(\sum_{i\in I} u_i) = \sum_{i\in I} u_i$. Com isso, temos que $h(\prod_{i\in I} u_i) = h(-\sum_{i\in I} -u_i) = -\sum_{i\in I} -h(u_i) = \prod_{i\in I} h(u_i)$, concluindo que h é homomorfismo injetor completo e, como $\text{r.o.}(\mathscr{B})$ é completamento de $\mathscr{B}$, h é bijetora e então, isomorfismo como. Por causa disso é fácil provar que $I \circ h = H$ é isomorfismo completo.

Caso H for somente embarcação, I será apenas homomorfismo completo injetor. Mas, sendo h isomorfismo completo, é o suficiente para provar que $I \circ h = H$ é homomorfismo completo injetor.

Agora, suponha que H é isomorfismo completo, é fácil provar que H é embarcação densa uma vez que H é bijetora e é fácil provar que $u \leq v$ se, e somente se $H(u) \leq H(v)$. Agora, caso H é apenas homomorfismo completo injetor, ainda podemos provar que $u \leq v \Leftrightarrow H(u) \leq H(v)$. Também podemos provar que $uv = \mathbb{0} \Leftrightarrow H(u)H(v) = \mathbb{0}$ (esta é a afirmação onde é necessário o fato de H ser injetora). Portanto, para provar que H é embarcação só falta provar a propriedade 3. Fixe $u \in \mathscr{C} - \{\mathbb{0}\}$ arbitrário, faça $w = \sum\{v \in \mathscr{B} : uH(v) = \mathbb{0}\}$. Digo que $w \neq \mathbb{1}$, isto é, $\{v \in \mathscr{B} : uH(v) = \mathbb{0}\} \neq \mathscr{B}$. Isto é verdade porque $\sum_{v\in\mathscr{B}}(uH(v)) = u\sum_{v\in\mathscr{B}} H(v) = uH(\sum_{v\in\mathscr{B}} v) = uH(\mathbb{1}) = u \neq \mathbb{0}$. Portanto, existe $w \in \mathscr{B}$ tal que $uH(w) \neq \mathbb{0}$ (é aqui onde o fato de H ser completa é usado). Com isso, para todo $w' \leq -w$ diferente de $\mathbb{0}$, vale $H(w')u \neq \mathbb{0}$, pois, caso contrário, pela definição de w, $w' \leq w$ e, assim, $w' = \mathbb{0}$, absurdo. Assim, $-w$ satisfaz a propriedade 3 para este $u \in \mathscr{C} - \{\mathbb{0}\}$. □

1.3.3 Subconjuntos Densos, Filtros e Anticadeias

Uma vez fixado um forcing ou álgebra booleana completa, derivaremos resultados com a técnica de forcing através das propriedades de conjuntos **densos**, **filtros** e **anticadeias**. Os três serão nosso objeto de estudo nessa subseção. O *núcleo* da técnica de forcing está na definição de *filtro genérico*, que será definida no fim dessa subseção.

Definição 1.3.16 (DENSO)**.** Dado um forcing $\mathbb{P}$, dizemos que $D \subset \mathbb{P}$ é **denso**, se, para todo $p \in \mathbb{P}$, existe $q \in D$ tal que $q \leq p$. Se, além disso, D for aberto na topologia $(\mathbb{P}, \tau_{\mathbb{P}})$, dizemos que D é **denso aberto**. Analogamente, para todo $p \in \mathbb{P}$, dizemos que $E \subset \mathbb{P}$ é **denso abaixo de** p se, para todo $q \in \mathbb{P}$, $q \leq p$ implica que existe $r \in E$ com $r \leq q$.

Teorema 1.3.17. Para toda álgebra booleana completa $\mathscr{B}$, se $D \subset \mathscr{B} - \{\mathbb{0}\}$ é denso, então $\sum D = \mathbb{1}$. E, para todo $u \in \mathscr{B}$, $u = \sum\{v \in D : v \leq u\}$. Dado $u \in \mathscr{B} - \{\mathbb{0}\}$ se $E \subset \mathscr{B} - \{\mathbb{0}\}$ é denso abaixo de u, então $u \leq \sum E$.

Demonstração. Suponha que $u = \sum D \neq \mathbb{1}$, então $-u \neq \mathbb{0}$ e, logo, existe $v \in D$ com $v \leq -u$, mas também vale $v \leq u$. Assim devemos ter $v = \mathbb{0}$, absurdo. Dado $u \in B$, se $u = \mathbb{0}$, então $\sum\{v \in D : v \leq \mathbb{0}\} = \sum \emptyset = \mathbb{0}$. Se $u \neq \mathbb{0}$, $\{v \in D : v \leq u\} = D \cap \mathscr{B}_u$, sendo D denso, evidentemente $D \cap \mathscr{B}_u$ é denso abaixo de u. Como B_u preserva a ordem de $\mathscr{B}$, $D \cap \mathscr{B}_u$ é denso em $\mathscr{B}_u$, portanto, como provamos acima, $\sum_{\mathscr{B}_u} D \cap \mathscr{B}_u = \mathbb{1}_{\mathscr{B}_u} = u$. Como B_u também preserva $\sum, \prod$ de $\mathscr{B}$, $\sum D \cap \mathscr{B}_u = u$.

Agora, se E é denso abaixo de u, então $E \cap \mathscr{B}_u$ continuará sendo denso abaixo de u. Então, argumentando como acima, podemos provar que $\sum E \cap \mathscr{B}_u = u$. Portanto, como $E \cap \mathscr{B}_u \subset E$, concluímos que $u = \sum E \cap \mathscr{B}_u \leq \sum E$. □

Definição 1.3.18 (ANTICADEIA)**.** Para todo forcing $\mathbb{P}$, dizemos que $A \subset \mathbb{P}$ é **anticadeia** se, dados $p, q \in A$, vale $p \perp q$. Se, além disso, não existir anticadeia B com $A \subsetneq B$, dizemos que A é **anticadeia maximal**, ou simplesmente **partição**.

Teorema 1.3.19. Para toda álgebra booleana completa $\mathscr{B}$, uma anticadeia $A \subset \mathscr{B} - \{\mathbb{0}\}$ é maximal se, e somente se, $\sum A = \mathbb{1}$. Por este motivo, denominamos anticadeias maximais como **partição**.

Demonstração. Se $\sum A = u \neq \mathbb{1}$, então $-u \neq \mathbb{0}$ e, para todo $v \in A$, como $v \leq u$, $v(-u) = \mathbb{0}$. Assim, $A \cup \{-u\} \supsetneq A$ é anticadeia e, portanto, A não é maximal. Agora, se A é anticadeia não maximal, seja $v \in \mathscr{B} - \{\mathbb{0}\}$ tal que, para todo $u \in A$, $uv = \mathbb{0}$, então $(\sum_{u \in A} u)\, v = \sum_{u \in A} uv = \mathbb{0}$ e, portanto, $(\sum_{u \in A} u)\,(-(-v)) = \mathbb{0}$, ou seja, $\sum_{u \in A} u \leq -v$ e $-v \neq \mathbb{1}$. □

Teorema 1.3.20. Para toda álgebra booleana completa $\mathscr{B}$ e $\{u_i\}_{i \in I} \subset \mathscr{B} - \{\mathbb{0}\}$ com $\sum_{i \in I} u_i = \mathbb{1}$, existe partição A tal que, para todo $v \in A$, existe $i \in I$ tal que $v \leq u_i$. Todo conjunto $A \subset \mathscr{B} - \{\mathbb{0}\}$ que satisfaz essa propriedade é dito ser **refinamento** de $\{u_i\}_{i \in I}$, nome com o qual denominaremos também à definição equivalente para forcings.

Demonstração. Defina $B = \bigcup_{i \in I} \mathscr{B}_{u_i}$ (como estamos tratando do forcing induzido de $\mathscr{B}_{u_i}$, $\mathbb{0} \notin B$). Use o lema de Zorn para encontrar uma anticadeia $A \subset B$ que seja maximal nesse conjunto. Para provar que tal A é de fato maximal em $\mathscr{B}$, basta provar que $\sum_{v \in A} v = \mathbb{1}$. Suponha, por absurdo, que $\sum_{v \in A} v = u \neq \mathbb{1}$, então $\sum_{i \in I} u_i(-u) = (-u)\sum_{i \in I} u_i = (-u)\mathbb{1} = -u \neq \mathbb{0}$. Assim, existe $i \in I$ tal que $\mathbb{0} \neq u_i(-u) \leq u_i$, portanto, $u_i(-u) \in B$ e $A \cup \{u_i(-u)\}$ é uma anticadeia satisfazendo $A \subsetneq A \cup \{u_i(-u)\} \subset B$, absurdo com a maximalidade de A. □

Corolário 1.3.21. Para todo D aberto denso de uma álgebra booleana completa $\mathscr{B}$, o Teorema 1.3.17 junto com o Teorema 1.3.20 implicam que D contém uma partição.

Existe um resultado análogo que "inverte os papéis" do denso aberto e partição.

Teorema 1.3.22. Para toda partição A de uma álgebra booleana completa $\mathscr{B}$, $D = \{u \in \mathscr{B} - \{\mathbb{0}\} : \exists v \in A\ u \leq v\}$ é denso aberto que é refinamento de A.

Demonstração. Uma vez fixada a partição A e D definido como acima, é fácil provar que D é aberto e refinamento de A. Agora, fixado $u \in \mathscr{B} - \{\mathbb{0}\}$, por A ser anticadeia maximal, temos que existe $v \in A$ tal que $uv \neq \mathbb{0}$, $uv \in D$ e $uv \leq u$, provando a densidade de D. □

Porém o corolário e o teorema acima são apenas um caso particular de um teorema muito mais geral sobre forcings:

Teorema 1.3.23. Para todo forcing $\mathbb{P}$, todo denso D contém uma anticadeia maximal e toda anticadeia maximal A está contida em um denso que é refinamento dela.

Demonstração. Dado um denso D, use o lema de Zorn para encontrar anticadeia $A \subset D$ que seja maximal *em relação a D*. Digo que A é maximal *em relação a* $\mathbb{P}$. Pois, suponha que isso seja falso e fixe $p \in \mathbb{P}$ tal que $A \cup \{p\}$ é anticadeia. Como D é denso, existe $r \in D$ com $r \leq p$. Agora, como vale $p \perp q$ para todo $q \in A$, segue que $r \perp q$ para todo $q \in A$. Então $A \cup \{r\} \subset D$ é anticadeia, absurdo com a maximalidade *relativa à D*.

Agora fixe uma anticadeia maximal A, faça $D = \{p \in \mathbb{P} : \exists q \in A\ p \leq q\}$. Evidentemente $A \subset D$, D é refinamento de A e D é aberto. Vamos provar que D é denso. Fixe $p \in \mathbb{P}$ arbitrário, caso $p \in A$, então teremos $p \in D$. Agora, caso $p \notin A$, existe $q \in A$ tal que $q \not\perp p$, então existe $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leq p, q$, e tal r pertencerá a D. Assim, D é denso. □

Definição 1.3.24 (SATURAÇÃO)**.** Para todo forcing $\mathbb{P}$, definimos a **saturação de** $\mathbb{P}$ ou $\mathrm{sat}(\mathbb{P})$ o menor cardinal κ tal que, se $A \subset \mathbb{P}$ é anticadeia, então $|A| < \kappa$.

Observação 1.3.25. Para todo forcing $\mathbb{P}$ e cardinal κ, se $\mathbb{P}$ possui anticadeia A com $|A| = \kappa$, então $\kappa < \mathrm{sat}(\mathbb{P})$. Se $\kappa < \mathrm{sat}(\mathbb{P})$, então existe anticadeia $A \subset \mathbb{P}$ com $|A| \geq \kappa$. Escolhendo um subconjunto de A, podemos supor que $|A| = \kappa$. Portanto, $\kappa < \mathrm{sat}(\mathbb{P})$ se, e somente se, existe anticadeia $A \subset \mathbb{P}$ com $|A| = \kappa$. Mas não necessariamente precisa existir partição A com $|A| = \kappa$, exceto em caso de álgebras booleanas completas e κ infinito, como provaremos abaixo.

Teorema 1.3.26. Para toda álgebra booleana completa $\mathscr{B}$ e cardinal infinito κ, vale $\kappa < \text{sat}(\mathscr{B})$ se, e somente se, existe partição $A \subset \mathscr{B} - \{\mathbb{0}\}$ com $|A| = \kappa$.

Demonstração. A ida é facilmente dedutível pela observação acima. Basta então provar que, se $\kappa < \text{sat}(\mathscr{B})$, então existe partição A com $|A| = \kappa$. A observação acima implica que existe B anticadeia de $\mathscr{B}$ com $|B| = \kappa$. Suponha que B não seja maximal, então $v = \sum_{u \in B} u \neq \mathbb{1}$, portanto, $-v \neq \mathbb{0}$ e $-v \perp u$ para todo $u \in B$, já que $u \leq v$. Fazendo $A = B \cup \{-v\}$, temos que A é uma anticadeia, $|A| = \kappa$ e $\sum_{u \in A} u = v + (-v) = \mathbb{1}$, isto é, A é partição. □

Teorema 1.3.27. Para toda álgebra booleana completa $\mathscr{B}$ e κ cardinal, $\kappa < \text{sat}(\mathscr{B})$ se, e somente se, existe sequência $(u_\xi)_{\xi<\kappa}$ de elementos de $\mathscr{B} - \{\mathbb{0}\}$ satisfazendo $u_\eta < u_\xi$ caso $\xi < \eta < \kappa$.

Demonstração. Se $\kappa < \text{sat}(\mathscr{B})$, a observação acima implica que existe $A \subset \mathscr{B} - \{\mathbb{0}\}$ anticadeia com $|A| = \kappa$. Seja $\{v_\xi\}_{\xi<\kappa}$ enumeração de A. Para todo $\xi < \kappa$, defina $u_\xi = \sum_{\eta \geq \xi} v_\eta$. Digo que a sequência $(u_\xi)_{\xi<\kappa}$ satisfaz as propriedades requeridas. É evidente que $\xi < \eta$ implica $u_\eta \leq u_\xi$, precisamos provar que, de fato, vale $u_\eta < u_\xi$. Isso vale pois $v_\xi \leq u_\xi$ e, para todo $\zeta \geq \eta$, $v_\xi v_\zeta = \mathbb{0}$, o que implica $v_\xi u_\eta = v_\xi \sum_{\zeta \geq \eta} v_\zeta = \sum_{\zeta \geq \eta} v_\xi v_\zeta = \mathbb{0} \neq v_\xi$, assim, $v_\xi \not\leq u_\eta$. Portanto, $u_\xi \neq u_\eta$ quando $\xi < \eta$.

Agora, dado $(u_\xi)_{\xi<\kappa}$ sequência que satisfaz o teorema, isto é, para todo $\xi < \kappa$ temos $u_{\xi+1} < u_\xi$. Portanto, $u_\xi(-u_{\xi+1}) \neq \mathbb{0}$. Assim, defina, para todo $\xi < \kappa$, $v_\xi = u_\xi(-u_{\xi+1})$. Digo que $\{v_\xi\}_{\xi<\kappa}$ é uma anticadeia de cardinalidade κ. Para isso, basta provar que, para todo $\xi, \eta < \kappa$ satisfazendo $\xi \neq \eta$, vale $v_\xi v_\eta = \mathbb{0}$.

Suponha, sem perda de generalidade, que $\xi < \eta$, então $u_\eta < u_\xi$. Assim, temos $u_\xi u_\eta = u_\eta$. Também vale $\xi + 1 < \eta + 1$, consequentemente, $u_{\eta+1} < u_{\xi+1}$, afirmação que implica $-u_{\xi+1} < -u_{\eta+1}$ ou, equivalentemente, $(-u_{\xi+1})(-u_{\eta+1}) = -u_{\xi+1}$. Com essas afirmações, concluímos que $v_\xi v_\eta = u_\xi(-u_{\xi+1})u_\eta(-u_{\eta+1}) = u_\xi u_\eta(-u_{\xi+1})(-u_{\eta+1}) = u_\eta(-u_{\xi+1})$. O fato que $\xi < \eta$ implica também que, $\xi + 1 \leq \eta$, então $u_\eta \leq u_{\xi+1}$, ou seja, $u_\eta(-u_{\xi+1}) = \mathbb{0}$, consequentemente, $v_\xi v_\eta = \mathbb{0}$, provando o que queríamos. Note que, caso $\kappa = n \in \omega$ basta acrescentar u_n hipotético igual a $\mathbb{0}$ na sequência para conseguirmos usar o argumento acima e provar o teorema para esse cardinal finito. □

Teorema 1.3.28. Para todo forcing $\mathbb{P}$, temos que $\text{sat}(\mathbb{P}) = \text{sat}(\text{r.o.}(\mathbb{P}))$.

Demonstração. Basta provar que, para todo cardinal κ, finito ou infinito, se existe anticadeia $A \subset \mathbb{P}$ com $|A| = \kappa$, então existe anticadeia $B \subset \text{r.o.}(\mathbb{P})$ com $|B| = \kappa$ e vice versa. Devido à propriedade $p \perp q \Leftrightarrow e(p) \perp e(q)$, se A é anticadeia de $\mathbb{P}$ com $|A| = \kappa$, então $B = e[A]$ é anticadeia de $\text{r.o.}(\mathbb{P})$ e $|B| = \kappa$. Se B é anticadeia de $\text{r.o.}(\mathbb{P})$ com $|B| = \kappa$, para todo $u \in B$, escolha p_u tal que $e(p_u) \leq u$, se $u \neq v$, então $e(p_u) \perp e(p_v)$, o que implica $p_u \perp p_v$, logo $p_u \neq p_v$, consequentemente, $A = \{p_u\}_{u \in B}$ é anticadeia de $\mathbb{P}$ com $|A| = \kappa$. □

Teorema 1.3.29. Para todo forcing $\mathbb{P}$, $\mathrm{sat}(\mathbb{P}) \leq \omega$ implica que $\{p \in \mathbb{P} : p \text{ é átomo}\}$ é denso em $\mathbb{P}$.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que exista $p \in \mathbb{P}$ sem átomo menor ou igual a ele. Então, para todo $q \leq p$, existe $r, s \leq q$ com $r \perp s$. Por indução sobre $n \in \omega$, escolha r_0, s_0 com $r_0 \perp s_0$ e $r_0, s_0 \leq p$ e, uma vez definido r_n, s_n, escolha r_{n+1}, s_{n+1} satisfazendo $r_{n+1}, s_{n+1} \leq s_n$ e $r_{n+1} \perp s_{n+1}$. Assim concluímos que $\{r_n\}_{n<\omega}$ é anticadeia enumerável de $\mathbb{P}$, absurdo com o fato de que $\mathrm{sat}(\mathbb{P}) \leq \omega$. $\square$

Teorema 1.3.30. Para todo forcing $\mathbb{P}$ vale $\mathrm{sat}(\mathbb{P}) \neq \omega$.

Demonstração. Para isso, é suficiente provar que, para todo forcing $\mathbb{P}$, $\mathrm{sat}(\mathbb{P}) \leq \omega$ implica $\mathrm{sat}(\mathbb{P}) < \omega$. Devido ao Teorema 1.3.28, basta provar a afirmação para álgebras booleanas completas.

Para uma álgebra booleana completa $\mathscr{B}$ com $\mathrm{sat}(\mathscr{B}) \leq \omega$, o teorema acima implica que $\{u \in \mathscr{B} : u \text{ é átomo}\}$ é denso, portanto, o Teorema 1.3.17 implica que todo elemento de $\mathscr{B}$ é gerado por um subconjunto de $\{u \in \mathscr{B} : u \text{ é átomo}\}$. Porém, este conjunto também é uma anticadeia de $\mathscr{B}$, pois dados $u, v \in \mathscr{B}$ átomos distintos, $uv \neq \mathbb{0}$ implica $uv = u$ e $uv = v$, portanto $u = v$, absurdo. Assim, $\mathrm{sat}(\mathscr{B}) \leq \omega$ implica $\{u \in \mathscr{B} : u \text{ é átomo}\}$ é finito e, consequentemente, só existe um número finito de subconjuntos de $\{u \in \mathscr{B} : u \text{ é átomo}\}$, implicando que $\mathscr{B}$ é finito. Portanto $\mathrm{sat}(\mathscr{B}) < \omega$. $\square$

Teorema 1.3.31. Para todo forcing $\mathbb{P}$, se $\mathrm{sat}(\mathbb{P})$ é infinito, então $\mathrm{sat}(\mathbb{P})$ é regular.

Demonstração. Pelo Teorema 1.3.28, é suficiente provar a afirmação para álgebras booleanas completas. Também, visto que o teorema acima implica que $\mathrm{sat}(\mathscr{B}) \neq \omega$, precisaremos apenas provar que $\mathrm{cf}(\mathrm{sat}(\mathscr{B})) = \mathrm{sat}(\mathscr{B})$.

Seja $\mathscr{B}$ álgebra booleana completa com $\kappa = \mathrm{sat}(\mathscr{B})$ e suponha que $\mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$. Como $\mathscr{B}_u$ preserva a ordem de $\mathscr{B}$, toda anticadeia de $\mathscr{B}_u$ é anticadeia de $\mathscr{B}$, logo $\mathrm{sat}(\mathscr{B}_u) \leq \mathrm{sat}(\mathscr{B})$. Para fins de simplificação, denotaremos $\mathrm{sat}(\mathscr{B}_u)$ como $\mathrm{sat}(u)$. Vamos definir como *estável* o $u \in \mathscr{B} - \{\mathbb{0}\}$ que satisfaz, para todo $v \leq u$ ($v \neq \mathbb{0}$), $\mathrm{sat}(v) = \mathrm{sat}(u)$. Digo que $\{u \in \mathscr{B} : u \text{ é estavel}\}$ é um conjunto denso em $\mathscr{B}$. Pois, dado $u \in \mathscr{B} - \{\mathbb{0}\}$, seja λ o menor cardinal do conjunto $\{\mathrm{sat}(v) : v \leq u\}$ e $v \leq u$ seja tal que $\mathrm{sat}(v) = \lambda$. Como $w \leq v$ implica $w \leq u$, devemos ter $\mathrm{sat}(w) = \lambda = \mathrm{sat}(v)$ o que implica que $v \leq u$ é estável. Note também que, além disso, se v é estável, todo $w \leq v$ também será estável. Assim $\{v \in \mathscr{B} : v \text{ é estável}\}$ é aberto denso. Portanto, o Corolário 1.3.21 implica que existe uma partição $A \subset \mathscr{B} - \{\mathbb{0}\}$ formada por elementos estáveis. Logo vale $\lambda = |A| < \kappa$. Então vamos denotar A como $\{u_\xi\}_{\xi<\lambda}$, para todo $\xi < \lambda$, u_ξ é estável e $\sum_{\xi<\lambda} u_\xi = \mathbb{1}$. Para todo $\xi \leq \lambda$, definiremos $\lambda_\xi = \mathrm{sat}(u_\xi)$.

Vamos provar agora que $\sup_{\xi<\lambda} \lambda_\xi = \kappa$. Suponha, por absurdo, que $\sup_{\xi<\lambda} \lambda_\xi < \kappa$. Seja B anticadeia de $\mathscr{B}$ com $|B| > (\sup_{\xi<\lambda} \lambda_\xi) \cdot \lambda$, para todo $\xi < \lambda$ (o $\cdot$ aqui significa produto de cardinais), então $B_\xi = \{u_\xi v : v \in B\}$ é anticadeia (excluindo possíveis valores nulos). Sendo $\{u_\xi\}_{\xi<\lambda}$ partição, cada B_ξ é disjunto de B_η, caso $\xi \neq \eta$, e $\bigcup_{\xi<\lambda} B_\xi$ é anticadeia com $|\bigcup_{\xi<\lambda} B_\xi| \leq (\sup_{\xi<\lambda} \lambda_\xi) \cdot \lambda$. Todavia, $|\bigcup_{\xi<\lambda} B_\xi| \geq |B|$, pois, para todo $v \in B$, $v = v\mathbb{1} = v\sum_{\xi<\lambda} u_\xi = \sum_{\xi<\lambda} vu_\xi$. Assim, existe $\xi < \lambda$ com $vu_\xi \neq \mathbb{0}$, uma contradição. Agora, como temos que $\mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$ implica que existe função $f : \mathrm{cf}(\kappa) \to \kappa$ com, para todo $\eta < \mathrm{cf}(\kappa)$, $f(\eta)$ é cardinal e $\sup_{\eta<\mathrm{cf}(\kappa)} f(\eta) = \kappa$, o fato já provado que $\sup_{\xi<\lambda} \lambda_\xi = \kappa$ implica, em particular, que $\lambda \geq \mathrm{cf}(\kappa)$. Concluindo, precisaremos dividir a demonstração final em dois casos:

1_**Existe** $\xi < \lambda$ **com** $\lambda_\xi = \mathrm{sat}(u_\xi) = \kappa$: Como, por hipótese, $\mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$, existe anticadeia $B \subset \mathscr{B}_{u_\xi}$ com $|B| = \mathrm{cf}(\kappa)$. Denotaremos B como $\{v_\eta\}_{\eta<\mathrm{cf}(\kappa)}$. Pela estabilidade de u_ξ, $\mathrm{sat}(v_\eta) = \kappa$ para todo $\eta < \mathrm{cf}(\kappa)$, então existe anticadeia $C_\eta \subset \mathscr{B}_{v_\eta}$ com $|C_\eta| = f(\eta)$, para todo $\eta < \mathrm{cf}(\kappa)$. Cada C_η é disjunto dos demais, portanto $C = \bigcup_{\eta<\mathrm{cf}(\kappa)} C_\eta$ é anticadeia de $\mathscr{B}_{u_\xi}$ (de $\mathscr{B}$ também) com $|C| = \kappa$, o absurdo que queríamos chegar para provar que $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$.

2_**Para todo** $\xi < \lambda$, vale $\mathrm{sat}(u_\xi) < \kappa$: $\mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$ implica que κ é cardinal sucessor. Valendo $\sup_{\xi<\lambda} \lambda_\xi = \kappa$ e $\lambda_\xi < \kappa$ para todo $\xi < \lambda$, existe subconjunto de cardinalidade $\mathrm{cf}(\kappa)$, $\{u_{\xi_\eta}\}_{\eta<\mathrm{cf}(\kappa)}$ com, para todo $\eta < \mathrm{cf}(\kappa)$, $\mathrm{sat}(u_{\xi_\eta}) \geq f(\eta)^+ < \kappa$. Assim, podemos escolher anticadeia C_η de $\mathscr{B}_{u_{\xi_\eta}}$ com $|C_\eta| = \lambda_{\xi_\eta}$. Argumentando como acima, podemos provar que $C = \bigcup_{\eta<\mathrm{cf}(\kappa)} C_\eta$ é anticadeia de $\mathscr{B}$ com $|C| = \kappa$, o absurdo que implica $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$. □

Definição 1.3.32 (κ-CC)**.** Dados um forcing $\mathbb{P}$ e κ um cardinal, dizemos que $\mathbb{P}$ satisfaz **κ-cc (κ-chain condition)** caso $\mathrm{sat}(\mathbb{P}) \leq \kappa$. Em particular, denotaremos ω_1-cc como **ccc (countable chain condition)**.

É razoavelmente difícil determinar a saturação de $\mathrm{Fn}(I,J,\kappa)$, uma vez que esta depende não somente de κ e das cardinalidades de I,J, mas também da aritmética cardinal. Porém, é possível provar o seguinte teorema relativo ao chain condition destes:

Teorema 1.3.33. Um forcing do estilo $\mathrm{Fn}(I,J,\kappa)$ satisfaz $(|J|^{<\kappa})^+$-cc.

Demonstração. Usaremos na demonstração o seguinte lema:

Lema 1.3.34. Seja um cardinal infinito κ. Para todo cardinal regular θ que satisfaz $\theta > \kappa$ e, para todo $\alpha \in \theta$, $|\alpha^{<\kappa}| < \theta$. Temos que, para qualquer coleção de conjuntos $\mathscr{A}$ satisfazendo: $|\mathscr{A}| \geq \theta$ e $|A| < \kappa$ para todo $A \in \mathscr{A}$, existe $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ e um conjunto r tais que $|\mathscr{B}| = \theta$ e, para quaisquer conjuntos $B, C \in \mathscr{B}$ distintos entre si, vale $B \cap C = r$. Tal conjunto r é chamado **raiz** (root).

Este lema é o Teorema **II** 1.5 do livro (KUNEN, 1980), estando a demonstração no mesmo livro. Em particular, as condições do lema são satisfeitas quando $\kappa = \omega$ e $\theta = \omega_1$. Neste caso, o lema acima equivale ao **lema do Δ-sistema**.

Na demonstração, suponha inicialmente que κ seja regular ou ω, faça $\theta = (|J|^{<\kappa})^+$, que é regular por ser sucessor. Uma vez que, para todo $\alpha \in \theta$, $|\alpha| \leq |J|^{<\kappa}$ e, por κ ser regular,

$(|J|^{<\kappa})^{<\kappa} = |J|^{<\kappa}$, todas as condições do lema são satisfeitas para os cardinais citados. Suponha a existência de anticadeia de cardinalidade θ, $\{f_\alpha\}_{\alpha<\theta}$, vamos provar que isso gera um absurdo. De fato, aplicando o lema na coleção $\mathscr{A} = \{\mathrm{dom}(f_\alpha)\}_{\alpha<\theta}$, provamos a existência de uma subcoleção da anticadeia $\{f_\alpha\}_{\alpha<\theta}$ de cardinalidade θ, $\{g_\alpha\}_{\alpha<\theta}$ e $r \subset I$ tal que $\mathrm{dom}(g_\xi) \cap \mathrm{dom}(g_\eta) = r$ para todo $\xi < \eta < \theta$ (caso $|\mathscr{A}| < \theta$ e o lema não for aplicável, então existirá subcoleção da anticadeia com cardinalidade θ com o mesmo domínio, o que, no fim, resulta nessa mesma afirmação). Uma vez fixado $\xi < \eta < \theta$, a condição necessária e suficiente para que valha $g_\xi \perp g_\eta$ é que as funções sejam distintas onde os domínios coincidem, isto é, $g_\xi \upharpoonright r$ e $g_\eta \upharpoonright r$ são funções distintas. Logo, $\{g_\alpha \upharpoonright r\}_{\alpha<\theta}$ se trata de coleção com θ funções distintas, com domínio $r \subset I$ e imagem contida em J. Mas, uma vez que $|r| < \kappa$, não pode existir mais do que $|J|^{<\kappa} < \theta$ funções desse tipo, absurdo, isso assegura a validade do teorema nesse caso.

Agora suponha κ singular, então, κ é cardinal limite e existe função cofinal $F : \mathrm{cf}(\kappa) \to \kappa$, que podemos supor ser de cardinais regulares ou ω (caso contrário, podemos tomar $G : \mathrm{cf}(\kappa) \to \kappa$ com $G(\alpha) = \omega$, caso $F(\alpha)$ finito, e $G(\alpha) = |F(\alpha)|^+$, caso contrário). Vamos denotar $\lambda_\xi = F(\xi)$. A demonstração aqui também será por absurdo. Uma vez suposta a existência de uma anticadeia de cardinalidade θ, $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\theta}$, para cada $\xi < \mathrm{cf}(\kappa)$, faça $Y_\xi = \{\alpha < \theta : |\mathrm{dom}(f_\alpha)| < \lambda_\xi\}$. Já que $\mathrm{cf}(\kappa) < \theta$ e θ é regular, existe $\xi < \mathrm{cf}(\kappa)$ tal que $|Y_\xi| = \theta$, tecnicamente falando, todas as funções de $\{f_\alpha\}_{\alpha<\in Y_\xi}$ fazem parte do forcing $\mathrm{Fn}(I,J,\lambda_\xi)$ e formam uma anticadeia nele. Como $|J|^{<\lambda_\xi} \leq |J|^{<\kappa} < \theta$, a suposição da anticadeia inicial viola o que acabamos de provar acima, que $\mathrm{Fn}(I,J,\lambda_\xi)$ satisfaz $(|J|^{<\lambda_\xi})^+$-cc. Esse absurdo nos permite provar o teorema neste caso. □

Corolário 1.3.35. Para todo I e J com $|J| \leq \omega$, $\mathrm{Fn}(I,J)$ satisfaz ccc.

A cardinalidade de $\mathrm{Fn}(I,J,\kappa)$ também é complicada de se calcular, devido às várias possibilidades consistentes que a aritmética cardinal pode assumir. Mas é possível calcular ao menos um limitante superior no caso geral.

Teorema 1.3.36. Para quaisquer conjuntos não vazios I,J, caso $|I| \geq 2$ ou $|J| \geq 2$, então $|\mathrm{Fn}(I,J,\kappa)| \leq \sup\{|I|^\lambda \cdot |J|^\lambda : \lambda < \kappa \wedge \lambda \textit{ é cardinal}\}$, onde, nesse teorema, $\kappa \cdot \lambda = |\kappa \times \lambda|$.

Demonstração. Para todo $p \in \mathrm{Fn}(I,J,\kappa)$, $|\mathrm{dom}(p)| < \kappa$. Fixe um cardinal $\lambda < \kappa$. Quantos $p \in \mathrm{Fn}(I,J,\kappa)$ no máximo satisfazem $|\mathrm{dom}(p)| = \lambda$? Uma vez fixado $X \subset I$ com $|X| = \lambda$, existem exatamente $|J|^\lambda$ funções com domínio X. Como existem no máximo $|I|^\lambda$ subconjuntos de I com cardinalidade λ, então existem no máximo $|I|^\lambda \cdot |J|^\lambda$ funções p com $|\mathrm{dom}(p)| = \lambda$. Assim, conseguimos provar que $|\mathrm{Fn}(I,J,\kappa)| \leq (\sup\{|I|^\lambda \cdot |J|^\lambda : \lambda < \kappa \wedge \lambda \textit{ é cardinal}\}) \cdot |\{\lambda < \kappa : \lambda \textit{ é cardinal}\}| \leq (\sup\{|I|^\lambda \cdot |J|^\lambda : \lambda < \kappa \wedge \lambda \textit{ é cardinal}\}) \cdot \kappa$. Uma vez que κ é infinito, para concluirmos a demonstração, basta provar que $\kappa \geq \sup\{|I|^\lambda \cdot |J|^\lambda : \lambda < \kappa \wedge \lambda \textit{ é cardinal}\}$, já que um produto de cardinais com ao menos um infinito é igual ao maior deles.

Uma vez que supomos I,J não vazios e ao menos um com cardinalidade maior que 2, temos como resultado imediato que $2^\lambda \geq \sup\{|I|^\lambda \cdot |J|^\lambda : \lambda < \kappa \wedge \lambda \textit{ é cardinal}\}$, para todo cardinal $\lambda < \kappa$. Como sempre vale $\lambda^+ \geq 2^\lambda$, temos $\lambda^+ \geq \sup\{|I|^\lambda \cdot |J|^\lambda : \lambda < \kappa \wedge \lambda \textit{ é cardinal}\}$. Consequentemente, $\sup\{\lambda^+ : \lambda < \kappa \wedge \lambda \textit{ é cardinal}\} \geq \sup\{|I|^\lambda \cdot |J|^\lambda : \lambda < \kappa \wedge \lambda \textit{ é cardinal}\}$. Com tudo isso, agora é um exercício fácil provar que $\sup\{\lambda^+ : \lambda < \kappa \wedge \lambda \textit{ é cardinal}\} = \kappa$. □

Caso estejamos assumindo GCH como verdadeiro, o cálculo de $\sup\{|I|^\lambda \cdot |J|^\lambda : \lambda < \kappa \wedge \lambda \textit{ é cardinal}\}$ fica extremamente fácil, uma vez que, com essa hipótese, operações do estilo κ^λ têm valor determinado a partir de uma regra simples. Além disso, supondo GCH e tendo I, J, κ especificados, temos grandes chances de encontrar um limitante inferior para a cardinalidade desse $\mathrm{Fn}(I, J, \kappa)$, o que, se tivermos sorte, permite-nos especificar sua cardinalidade exata.

Uma outra coisa que é bem difícil de calcular é a cardinalidade de álgebras booleanas completas (a menos que tenhamos sorte ou assumamos GCH). Porém, é possível calcular um limitante superior caso encontrarmos um conjunto denso $D \subset \mathscr{B}$ com cardinalidade conhecida, como provaremos no próximo teorema.

Teorema 1.3.37. Para toda álgebra booleana completa $\mathscr{B}$ e $D \subset \mathscr{B} - \{\mathbb{0}\}$ um conjunto denso, vale $|\mathscr{B}| \leq |D|^{<\mathrm{sat}(\mathscr{B})}$.

Demonstração. Vamos provar que, para todo $u \in \mathscr{B}$, existe $X \subset D$ com $|X| < \mathrm{sat}(\mathscr{B})$ tal que $\sum X = u$. Para $u = \mathbb{0}$, basta fazer $X = \emptyset$. Agora, caso $u \neq \mathbb{0}$, então $D \cap \mathscr{B}_u$ é denso abaixo de u e, consequentemente, denso em $\mathscr{B}_u$ (lembre-se: $\leq$, $\sum$ e $\prod$ de ambos, $\mathscr{B}_u$,$\mathscr{B}$, coincidem pelo que provamos no Exemplo 1.1.15). Portanto, o Teorema 1.3.23 implica que existe $X \subset D \cap \mathscr{B}_u$ anticadeia maximal de $\mathscr{B}_u$. Assim, pelo Teorema 1.3.19, vale $\sum X = \mathbb{1}_{\mathscr{B}_u} = u$. Esse $X \subset D$ também será anticadeia de X (porém não maximal), então vale $|X| < \mathrm{sat}(\mathscr{B})$ além de $\sum X = u$, que era nosso objetivo na demonstração. Esse fato é suficiente para provar o teorema. □

Para todo forcing $\mathbb{P}$, o Teorema 1.2.11 nos permite provar que $e[\mathbb{P}]$ é denso em $\mathrm{r.o.}(\mathbb{P})$. Como temos $|e[\mathbb{P}]| \leq |\mathbb{P}|$ e o Teorema 1.3.28 prova que $\mathrm{sat}(\mathbb{P}) = \mathrm{sat}(\mathrm{r.o.}(\mathbb{P}))$, temos o seguinte corolário:

Corolário 1.3.38. Para todo forcing $\mathbb{P}$, temos $|\mathrm{r.o.}(\mathbb{P})| \leq |\mathbb{P}|^{<\mathrm{sat}(\mathbb{P})}$.

Definição 1.3.39 (κ-DISTRIBUTIVIDADE)**.** Para todo forcing $\mathbb{P}$ e todo cardinal κ, dizemos que $\mathbb{P}$ satisfaz **κ-distributividade** caso satisfazer, para toda $\{D_\xi\}_{\xi<\kappa}$ coleção de abertos densos em $\mathbb{P}$, $\bigcap_{\xi<\kappa} D_\xi$ é denso em $\mathbb{P}$.

Observação 1.3.40. Note que, pela definição de aberto em $\mathbb{P}$, $\bigcap_{\xi<\kappa} D_\xi$ é aberto e, para todo cardinal $\lambda < \kappa$, $\mathbb{P}$ ser κ-distributivo implica que $\mathbb{P}$ é λ-distributivo.

Teorema 1.3.41. Para todo forcing $\mathbb{P}$ e cardinal κ, $\mathbb{P}$ ser κ-distributivo implica que $\mathrm{r.o.}(\mathbb{P})$ também é κ-distributivo.

Demonstração. Suponha que $\mathbb{P}$ é κ-distributivo e seja $\{B_\xi\}_{\xi<\kappa}$ uma coleção de abertos densos de $\mathrm{r.o.}(\mathbb{P})$. Digo que, para todo $\xi < \kappa$, $D_\xi = e^{-1}[B_\xi]$ é aberto denso em $\mathbb{P}$. Dados $p \in D_\xi$ e

$q \leq p$, então $e(q) \leq e(p)$ e $e(p) \in B_\xi$, implicando que $e(q) \in B_\xi$ e, consequentemente, $q \in D_\xi$, provando que D_ξ é aberto. Agora, dado $q \in \mathbb{P}$ arbitrário, existe $u \in B_\xi$ com $u \leq e(p)$, implicando que existe $q \in \mathbb{P}$ com $e(q) \leq u \leq e(p)$. Assim $q \in D_\xi$ e $e(q) \leq e(p)$. Note que, apesar de não ser necessariamente válido que $q \leq p$, sempre vale $q \not\perp p$. Existe, portanto, $r \in \mathbb{P}$ com $r \leq q, p$ e D_ξ ser aberto implica $r \in D_\xi$ e $r \leq p$, portanto D_ξ é denso em $\mathbb{P}$. A κ-distributividade de $\mathbb{P}$ implica que $D = \bigcap_{\xi<\kappa} D_\xi$ é denso aberto em $\mathbb{P}$ e $e[D] \subset B = \bigcap_{\xi<\kappa} B_\xi$. Dado $u \in \text{r.o.}(\mathbb{P}) - \{\mathbb{0}\}$ arbitrário, existe $p \in \mathbb{P}$ tal que $e(p) \leq u$ e, a densidade de D implica que existe $q \in D$ com $q \leq p$, então $e(q) \leq e(p) \leq u$ e $e(q) \in B$. Por arbitrariedade de u, segue que B é denso em r.o.$(\mathbb{P})$, provando a κ-distributividade de r.o.$(\mathbb{P})$. $\square$

O teorema a seguir e sua demonstração foram extraídos de (JECH, 1978, 158-159). Ele mostra afirmações equivalentes a κ-distributividade no caso de álgebras booleanas completas e, nos será muito útil mais para frente.

Teorema 1.3.42. Para toda álgebra booleana completa $\mathscr{B}$ e todo cardinal κ, as seguintes propriedades são equivalentes:

i. $\mathscr{B}$ é κ-distributivo

ii. Para toda $\{A_\xi\}_{\xi<\kappa}$ sequência de partições em $\mathscr{B}$, existe uma partição A que é refinamento de A_ξ, para todo $\xi < \kappa$

iii. $\prod_{\xi<\kappa} \sum_{i \in I_\xi} u_{\xi i} = \sum_{f \in \prod_{\xi<\kappa} I_\xi} \prod_{\xi<\kappa} u_{\xi f(\xi)}$, onde, para todo $\xi < \kappa$, $\{u_{\xi i}\}_{i \in I_\xi}$ é subconjunto arbitrário de $\mathscr{B}$.

Demonstração. **i** $\Rightarrow$ **ii**.: Seja $\{A_\xi\}_{\xi<\kappa}$ uma coleção de partições de $\mathscr{B}$. Para todo $\xi < \kappa$, denote $D_\xi = \{u \leq v : v \in A_\xi\}$. O Teorema 1.3.22 prova que D_ξ é aberto denso e refinamento de A_ξ, para todo $\xi < \kappa$. Então, a propriedade **i** implica que $D = \bigcap_{\xi<\kappa} D_\xi$ é aberto denso. Portanto, o Corolário 1.3.21 implica que existe partição $A \subset D$. Digo que tal A é refinamento de A_ξ, para todo $\xi < \kappa$. Pois isso vem facilmente do fato que $A \subset D_\xi$ e D_ξ é refinamento de A_ξ. Provando que vale a propriedade **ii**.

ii $\Rightarrow$ **iii**.: Vamos provar, primeiramente, que sempre vale $\sum_{f \in \prod_{\xi<\kappa} I_\xi} \prod_{\xi<\kappa} u_{\xi f(\xi)} \leq \prod_{\xi<\kappa} \sum_{i \in I_\xi} u_{\xi i}$, para todo cardinal κ. De fato, selecione $f \in \prod_{\xi<\kappa} I_\xi$ arbitrário. Vale, para todo $\xi < \kappa$, $\prod_{\xi<\kappa} u_{\xi f(\xi)} \leq u_{\xi f(\xi)} \leq \sum_{i \in I_\xi} u_{\xi i}$ (note, $f(\xi) \in I_\xi$). Pela arbitrariedade de f, temos $\sum_{f \in \prod_{\xi<\kappa} I_\xi} \prod_{\xi<\kappa} u_{\xi f(\xi)} \leq \sum_{i \in I_\xi} u_{\xi i}$. Mas perceba que, na parte direita da desigualdade, ξ também é arbitrário, assim $\sum_{f \in \prod_{\xi<\kappa} I_\xi} \prod_{\xi<\kappa} u_{\xi f(\xi)} \leq \prod_{\xi<\kappa} \sum_{i \in I_\xi} u_{\xi i}$, provando o que queríamos independentemente do cardinal κ.

Pelo que provamos acima, se $\prod_{\xi<\kappa} \sum_{i \in I_\xi} u_{\xi i} = \mathbb{0}$, $\prod_{\xi<\kappa} \sum_{i \in I_\xi} u_{\xi i} = \sum_{f \in \prod_{\xi<\kappa} I_\xi} \prod_{\xi<\kappa} u_{\xi f(\xi)}$ decorre imediatamente. Caso contrário, defina $\prod_{\xi<\kappa} \sum_{i \in I_\xi} u_{\xi i} = u \neq \mathbb{0}$. Vamos provar primeiramente o caso particular $u = \mathbb{1}$.

Como $u = \mathbb{1}$ implica $\sum_{i\in I_\xi} u_{\xi i} = \mathbb{1}$ para todo $\xi < \kappa$, então, pelo Teorema 1.3.20, existe uma partição A_ξ que é refinamento de $\{u_{\xi i}\}_{i\in I_\xi}$. Aplicando a hipótese **ii** à coleção de partições $\{A_\xi\}_{\xi<\kappa}$, existe A partição que é refinamento comum à todas essas partições. Assim $\sum A = \mathbb{1}$ e, por ser refinamento comum aos refinamentos acima, para todo $v \in A$ e todo $\xi < \kappa$, existe $i \in I_\xi$ tal que $v \leq u_{\xi i}$. Por arbitrariedade de ξ, existe $f_v \in \prod_{\xi<\kappa} I_\xi$ tal que $v \leq \prod_{\xi<\kappa} u_{\xi f_v(\xi)}$. Sendo A uma partição, $\mathbb{1} = \sum A \leq \sum_{v\in A} \prod_{\xi<\kappa} u_{\xi f_v(\xi)} \leq \sum_{f\in\prod_{\xi<\kappa} I_\xi} \prod_{\xi<\kappa} u_{\xi f(\xi)}$. Assim, $\prod_{\xi<\kappa}\sum_{i\in I_\xi} u_{\xi i} = \sum_{f\in\prod_{\xi<\kappa} I_\xi} \prod_{\xi<\kappa} u_{\xi f(\xi)} = \mathbb{1}$.

Caso $u \neq \mathbb{1}$, pelos teoremas do início da seção, $u = u\left(\prod_{\xi<\kappa}\sum_{i\in I_\xi} u_{\xi i}\right) = \prod_{\xi<\kappa}\sum_{i\in I_\xi} uu_{\xi i}$. Faça a definição $v_{\xi i} = uu_{\xi i}$, para quaisquer $\xi < \kappa$ e $i \in I_\xi$. Considerando que, em $\mathscr{B}_u$ a ordem de $\mathscr{B}$ e, consequentemente, as operações $\sum, \prod$ de $\mathscr{B}$ preservam seus valores, temos que vale, na álgebra booleana completa $\mathscr{B}_u$, $\prod_{\xi<\kappa}\sum_{i\in I_\xi} v_{\xi i} = \mathbb{1}$. Com isso, podemos usar a argumentação do parágrafo acima, e provar que, na álgebra booleana completa $\mathscr{B}_u$, $\sum_{f\in\prod_{\xi<\kappa} I_\xi} \prod_{\xi<\kappa} v_{\xi f(\xi)} = \mathbb{1}$. Agora, retornando à álgebra booleana completa $\mathscr{B}$, vale $\sum_{f\in\prod_{\xi<\kappa} I_\xi} \prod_{\xi<\kappa} uu_{\xi f(\xi)} = u$. Mas, como $u\left(\sum_{f\in\prod_{\xi<\kappa} I_\xi} \prod_{\xi<\kappa} u_{\xi f(\xi)}\right) = \sum_{f\in\prod_{\xi<\kappa} I_\xi} \prod_{\xi<\kappa} uu_{\xi f(\xi)}$, derivamos que $u\left(\sum_{f\in\prod_{\xi<\kappa} I_\xi} \prod_{\xi<\kappa} u_{\xi f(\xi)}\right) = u$. Esta última afirmação implica, por sua vez, $u \leq \sum_{f\in\prod_{\xi<\kappa} I_\xi} \prod_{\xi<\kappa} u_{\xi f(\xi)}$. Então, uma vez que a desigualdade provada inicialmente implica $\sum_{f\in\prod_{\xi<\kappa} I_\xi} \prod_{\xi<\kappa} u_{\xi f(\xi)} \leq u$, temos que $\sum_{f\in\prod_{\xi<\kappa} I_\xi} \prod_{\xi<\kappa} u_{\xi f(\xi)} = \prod_{\xi<\kappa}\sum_{i\in I_\xi} u_{\xi i} = u$, provando o que queríamos. Ao ler essa demonstração, note que, para conseguirmos realmente levar o argumento a termo, falta ainda provar que, se $\mathscr{B}$ satisfaz **ii** e $u \neq \mathbb{0}$, então $\mathscr{B}_u$ também satisfaz **ii**, e essa demonstração é o suficiente para realmente concluirmos o teorema.

Seja $\{A_\xi\}_{\xi<\kappa}$ uma coleção de partições de $\mathscr{B}_u$. Para todo $\xi < \kappa$, $B_\xi = A_\xi \cup \{-u\}$ é partição de $\mathscr{B}$. Aplicando então **ii** à coleção de partições $\{B_\xi\}_{\xi<\kappa}$, existe B refinamento comum à essa coleção. Para todo $v \in B$ e todo $\xi < \kappa$, vale $v \leq -u$, ou $v \leq w$, com $w \in A_\xi$ e, portanto, $w \leq u$ (mas não ambos). Assim, $A = B \cap \mathscr{B}_u$ é refinamento comum da coleção $\{A_\xi\}_{\xi<\kappa}$. Vamos provar que A é partição de $\mathscr{B}_u$. O fato de ser anticadeia decorre da preservação de $\perp$ de $\mathscr{B}$. Assim, é suficiente provar que $\sum A = u$. De fato, pela definição de A, $v \leq u$ para todo $v \in A$, portanto, $\sum A \leq u$. Agora, se $u \not\leq \sum A$ então $u(-\sum A) \neq \mathbb{0}$, sendo B partição e $A \subset B$, existe $v \in B$ com $v \not\perp u(-\sum A)$, implicando $v \not\perp u$ e, então, $v \not\leq -u$. Como dissemos acima, segue que $v \leq u$ e, assim, $v \in A$, absurdo com $v \not\perp u(-\sum A)$, uma vez que $v \in A$ implica que $v \perp -\sum A$. Como conclusão, $\sum A = u$, A é partição de $\mathscr{B}_u$ e refinamento comum da coleção de partições $\{A_\xi\}_{\xi<\kappa}$ de $\mathscr{B}_u$, que então satisfaz a propriedade **ii**.

iii $\Rightarrow$ **i**.: Seja $\{D_\xi\}_{\xi<\kappa}$ coleção de abertos densos, precisamos provar que $D = \bigcap_{\xi<\kappa} D_\xi$ é aberto denso. É fácil provar que D é aberto. Para fins de notação, para todo ξ e $v \in D_\xi$, denotemos $u_{\xi v} = v$. Agora, para $\xi < \kappa$ arbitrário, a densidade de D_ξ implica, pelo Teorema 1.3.17, que $\sum_{v\in D_\xi} u_{\xi v} = \mathbb{1}$, logo, $\prod_{\xi<\kappa}\sum_{v\in D_\xi} u_{\xi v} = \mathbb{1}$. Com isso, devido ao item **iii**, vale $\sum_{f\in\prod_{\xi<\kappa} D_\xi} \prod_{\xi<\kappa} u_{\xi f(\xi)} = \mathbb{1}$. Dado $u \in \mathscr{B} - \{\mathbb{0}\}$ arbitrário, temos que $u\left(\sum_{f\in\prod_{\xi<\kappa} D_\xi} \prod_{\xi<\kappa} u_{\xi f(\xi)}\right) = \sum_{f\in\prod_{\xi<\kappa} D_\xi} u\left(\prod_{\xi<\kappa} u_{\xi f(\xi)}\right) = u$, implicando que existe $f \in \prod_{\xi<\kappa} D_\xi$ com $u\left(\prod_{\xi<\kappa} u_{\xi f(\xi)}\right) \neq \mathbb{0}$.

Como vale $u\left(\prod_{\xi<\kappa} u_{\xi f(\xi)}\right) \leq u_{\xi f(\xi)} \in D_\xi$, para todo $\xi < \kappa$, temos que $u\left(\prod_{\xi<\kappa} u_{\xi f(\xi)}\right) \in D$ e $u\left(\prod_{\xi<\kappa} u_{\xi f(\xi)}\right) \leq u$. Concluindo, devido à arbitrariedade de u tomado, D é denso em $\mathscr{B}$. □

Corolário 1.3.43. Para toda álgebra booleana completa $\mathscr{B}$, como $\mathscr{B}_u$ e $\mathscr{B}^u$ preservam $\sum, \prod$ de $\mathscr{B}$, segue que, se $\mathscr{B}$ satisfaz a propriedade **iii** do teorema acima, então $\mathscr{B}_u, \mathscr{B}^u$ também satisfazem. Em particular, se $\mathscr{B}$ satisfaz κ-distributividade, $\mathscr{B}_u, \mathscr{B}^u$ também satisfazem.

Definição 1.3.44 (κ-FECHADO)**.** Dados um $\mathbb{P}$ forcing e um cardinal κ, dizemos que $\mathbb{P}$ é **κ-fechado** quando, para toda sequência $(p_\xi)_{\xi<\kappa}$ de elementos de $\mathbb{P}$ satisfazendo $p_\xi \geq p_\eta$ para todo $\xi < \eta < \kappa$, existir um $p \in \mathbb{P}$ tal que $p \leq p_\xi$ para todo $\xi < \kappa$.

Observação 1.3.45. Para todo cardinal κ e forcing $\mathbb{P}$, $\mathbb{P}$ ser κ-fechado implica que $\mathbb{P}$ também é λ-fechado, para todo cardinal $\lambda < \kappa$.

Teorema 1.3.46. Para todo forcing $\mathbb{P}$ e cardinal κ, $\mathbb{P}$ ser κ-fechado implica que $\mathbb{P}$ é κ-distributivo, porém a recíproca nem sempre é verdadeira.

Demonstração. Sejam $\mathbb{P}$ forcing κ-fechado, $\{D_\xi\}_{\xi<\kappa}$ coleção de abertos densos de $\mathbb{P}$ e $p \in \mathbb{P}$ arbitrário. Vamos construir, por recursão transfinita, sequência $(p_\xi)_{\xi<\kappa}$ satisfazendo $p_\xi \in D_\xi$, para todo $\xi < \kappa$, e $p_\eta \leq p_\xi \leq p$, para todo $\xi < \eta < \kappa$. Suponha que já tenhamos construído $(p_\eta)_{\eta<\xi}$, $\xi < \kappa$, se $\xi = 0$, basta definir $p_\xi = p_0$ tal que $p_0 \in D_0$ e $p_0 \leq p$. Se $\xi = \alpha + 1$, basta escolher $p_\xi \in D_\xi$ tal que $p_\xi \leq p_\alpha$. Agora, se ξ é ordinal limite, pela κ-distributividade de $\mathbb{P}$, existe $p' \in \mathbb{P}$ tal que $p' \leq p_\eta \leq p$ para todo $\eta < \xi < \kappa$. Assim, basta escolher $p_\xi \in D_\xi$ tal que $p_\xi \leq p'$. Aplique novamente a propriedade de ser κ-fechado, agora na sequência completa $(p_\xi)_{\xi<\kappa}$, escolhendo $q \in \mathbb{P}$ tal que $q \leq p_\xi \in D_\xi$, para todo $\xi < \kappa$. Como $\{D_\xi\}_{\xi<\kappa}$ é sequência de abertos densos, $q \in \bigcap_{\xi<\kappa} D_\xi$ e $q \leq p$, provando a densidade de $\bigcap_{\xi<\kappa} D_\xi$.

Para construir um contra-exemplo da recíproca do teorema, escolha κ cardinal infinito, $\mathbb{P}$ forcing separativo κ-fechado, consequentemente κ-distributivo pela observação acima, com uma sequência $(p_\xi)_{\xi<\kappa}$ satisfazendo $p_\eta < p_\xi$ para todo $\xi < \eta < \kappa$ (posteriormente daremos exemplos desse tipo de forcing que satisfaz, pelo Teorema 1.3.27, $\mathrm{sat}(\mathbb{P}) = \mathrm{sat}(\mathrm{r.o.}(\mathbb{P})) > \kappa$). O parágrafo acima prova que r.o.$(\mathbb{P})$ é κ-distributivo. Além disso, temos $e_{p_\eta} < e(p_\xi)$ para todo $\xi < \eta < \kappa$ e a κ-distributividade de $\mathbb{P}$ implica que $u = \prod_{\xi<\kappa} e(p_\xi) \neq \mathbb{0}$. Assim, a álgebra booleana completa r.o.$(\mathbb{P})^u$ também é κ-distributiva pelo Corolário 1.3.43. Porém, como $u < e(p_\xi)$ para todo $\xi < \kappa$, $(e(p_\xi))_{\xi<\kappa}$ é uma sequência em r.o.$(\mathbb{P})^u$ que prova que o mesmo não é κ-fechado, portanto, sendo o contra exemplo que desejávamos encontrar. □

Teorema 1.3.47. Para todo forcing $\mathbb{P}$ e todo $n \in \omega$, $\mathbb{P}$ é n-fechado e, consequentemente, n-distributivo.

Demonstração. Isso é evidente quando $n = 0$. Caso $n \neq 0$ e $(p_m)_{m<n}$ é sequência satisfazendo $p_m \leq p_{m'}$, para todo $m' < m < n$, segue que $p_{n-1} \leq p_m$ para todo $m < n$, provando assim que $\mathbb{P}$ é n-fechado. □

Exemplos mais interessantes de forcings κ-fechados e, consequentemente, κ-distributivos são dados no teorema seguinte:

Teorema 1.3.48. Para todo cardinal κ regular, $\mathrm{Fn}(I,J,\kappa)$ é λ-fechado e, consequentemente, λ-distributiva, para todo cardinal infinito $\lambda < \kappa$.

Demonstração. Fixe $\lambda < \kappa$. Dada uma sequência $\{f_\xi\}_{\xi<\lambda}$ de elementos de $\mathrm{Fn}(I,J,\kappa)$ satisfazendo $f_\eta \leq f_\xi$, para todo $\xi < \eta < \lambda$, então os seus elementos são compatíveis 2 a 2. Logo, $\bigcup_{\xi<\lambda} f_\xi$ é uma função. Como κ é regular e, para todo $\xi < \lambda$, $|\mathrm{dom}(f_\xi)| < \kappa$, vale $|\mathrm{dom}(\bigcup_{\xi<\lambda} f_\xi)| < \kappa$, temos então que $\bigcup_{\xi<\lambda} f_\xi \in \mathrm{Fn}(I,J,\kappa)$ e $\bigcup_{\xi<\lambda} f_\xi \leq f_\xi$ para todo $\xi < \kappa$, provando o que queríamos. □

O teorema respectivo para cardinais arbitrários está no próximo teorema.

Teorema 1.3.49. Para qualquer cardinal infinito λ, $\mathrm{Fn}(I,J,\lambda)$ é μ-fechado, para todo cardinal $\mu < \mathrm{cf}(\lambda)$.

Demonstração. Aqui o argumento é análogo ao do teorema acima, a única diferença é que precisamos usar o teorema mais geral que afirma que, dada uma coleção $\{I_\xi\}_{\xi<\mu}$ de conjuntos satisfazendo $|I_\xi| < \lambda$ para todo $\xi < \mu < \mathrm{cf}(\kappa) \leq \lambda$, então vale $|\bigcup_{\xi<\mu} I_\xi| < \lambda$. □

Definição 1.3.50 (FILTRO)**.** Dada um forcing $\mathbb{P}$, dizemos que $G \subset \mathbb{P}$ é um **filtro**, se satisfaz as seguintes propriedades:

1. Para quaisquer $p,q \in G$, existe $r \in G$ tal que $r \leq p$ e $r \leq q$
2. Para todo $p \in G$ e todo $q \in \mathbb{P}$, $p \leq q$ implica $q \in G$

Além disso, dizemos que o filtro $G \subset \mathbb{P}$ é **maximal** se não existir filtro $H \subset \mathbb{P}$ tal que $G \subsetneq H$.

Observação 1.3.51. Para toda álgebra booleana $\mathscr{B}$, a definição de filtro acima coincide com a definição de filtro da Definição 1.1.10. Além disso, o filtro é maximal se, e somente se, ele é ultrafiltro.

Demonstração. Dado $G \subset \mathscr{B}$ filtro como na Definição 1.1.10, vamos provar que ele é filtro como na Definição 1.3.50. A propriedade **I** da Definição 1.1.10 implica que $\mathbb{0} \notin G$, portanto $G \subset \mathscr{B} - \{\mathbb{0}\}$, com isso provamos que G está, de fato, contido no forcing induzido de $\mathscr{B}$. Vamos provar agora que G satisfaz todas as propriedades da Definição 1.3.50.

1.: Caso G ser filtro como em 1.1.10 e $u,v \in G$, a proriedade **II** implica que $uv \in G$, $uv \leq u$ e $uv \leq v$.

2.: Consequência imediata de **III**.

Do mesmo modo, se G for filtro como na Definição 1.3.50, vamos provar que G é filtro como na Definição 1.1.10, provando as respectivas propriedades uma a uma.

I: Como $G \subset \mathscr{B} - \{\mathbb{0}\}$, então $\mathbb{0} \notin G$.

II: Se $u, v \in G$ então 1 existe $w \in G$ com $w \leq u$ e $w \leq v$, assim $w \leq uv$ e $uv \in G$ decorre de 2.

III: Consequência imediata de 2.

A partir de agora, vamos provar a parte que diz que ultrafiltro equivale à filtro maximal.

Se G for ultrafiltro, o fato de G ser filtro maximal segue do Corolário 1.1.11.

Agora, se $G \subset \mathscr{B} - \{\mathbb{0}\}$ for filtro maximal, vamos provar que, para todo $u \in \mathscr{B} - \{\mathbb{0}\}$, $u \in G$ ou $-u \in G$. Se definirmos $Gv = \{wv : w \in G\}$, então $\mathbb{0}$ não pertencerá a pelo menos um dos dois: Gu ou $G(-u)$. Pois, se existir $w_0, w_1 \in G$ com $w_0 u = w_1(-u) = \mathbb{0}$, então $w_0 \leq -u$ e $w_1 \leq u$, assim, $w_0 w_1 = \mathbb{0}$, absurdo, já que 1 implica que $w_0 \not\perp w_1$. Sem perda de generalidade, suponha que $\mathbb{0} \notin Gu$. Se $v_0, v_1 \in Gu$, então $v_0 v_1 \in Gu$, pois $v_0 = w_0 u$ e $v_1 = w_1 u$, para alguns $w_0, w_1 \in G$ e, como provamos acima que $w_0 w_1 \in G$, temos $v_0 v_1 = w_0 w_1 u \in Gu$. Logo, pelo que provamos acima, $H = \{v \in \mathscr{B} - \{\mathbb{0}\} : \exists w \in G \; uw \leq v\}$ é um filtro tanto como na definição 1.1.10 como na Definição 1.3.50. H satisfaz também $u \in H$ e $G \subset H$. Devido à maximalidade, $G = H$. Portanto, $u \in G$. Argumento análogo prova que, caso $\mathbb{0} \notin G(-u)$ implica que $-u \in G$, concluindo a demonstração. □

Teorema 1.3.52. Todo filtro está contido em um filtro maximal.

Demonstração. Dado um filtro G, aplique o lema de Zorn sobre o conjunto de todos os filtros que contém esse filtro, ordenado pela inclusão. □

Definição 1.3.53 (FILTRO $\mathfrak{D}$-GENÉRICO)**.** Em um forcing $\mathbb{P}$ e $\mathfrak{D} \subset \wp(\mathbb{P})$, dizemos que o filtro $G \subset \mathbb{P}$ é **$\mathfrak{D}$-genérico** se, para todo $D \in \mathfrak{D}$, $G \cap D \neq \emptyset$.

Apesar da definição acima ser mais geral, na maior parte das vezes, iremos supor que $\mathfrak{D}$ é coleção de subconjuntos densos de $\mathbb{P}$.

CAPÍTULO

2

A TÉCNICA DE FORCING

2.1 Definições Essenciais

Esta seção se preocupará em fazer todas as definições e demonstrações necessárias para definir a técnica de forcing e mostrar como e porque ela funciona. Porém, as demonstrações de alguns teoremas que envolvem conceitos estritamente lógicos serão deslocados para o apêndice.

Definição 2.1.1 (ORDENS CANÔNICAS)**.** Para todo $n \in \omega$, definimos a boa ordem canônica (estrita) $<^n$ sobre a classe $\mathbf{ON}^n$, de forma que, para todo $s,t \in \mathbf{ON}^n$, $s <^n t$ se, e somente se, uma das seguintes afirmações valer:

- $\max_{m<n} s(m) < \max_{m<n} t(m)$
- $\max_{m<n} s(m) = \max_{m<n} t(m)$ e s é menor que t lexicograficamente como sequência de ordinais, isto é, vale a afirmação $\exists m < n(\forall i < m\ s(i) = t(i)) \wedge s(m) \in t(m)$

Analogamente, definimos a boa ordem canônica estrita $<^{<\omega}$ sobre a classe $\mathbf{ON}^{<\omega}$ como, para todo $s,t \in \mathbf{ON}^{<\omega}$, $s <^{\omega} t$ caso satisfazer uma das seguintes afirmações:

- $\mathrm{dom}(s) < \mathrm{dom}(t)$
- $\mathrm{dom}(s) = \mathrm{dom}(t)$ e $s <^{\mathrm{dom}(s)} t$

Observação 2.1.2. Para todo $n \in \omega$ e $s \in \mathbf{ON}^n$, temos que $\{t \in \mathbf{ON}^n : t <^n s\} \subset ((\max_{m<n} s(m)) + 1)^n$ e, portanto, se trata de um conjunto. Analogamente, para $s \in \mathbf{ON}^{<\omega}$, pois $\{t \in \mathbf{ON}^{<\omega} : t <^{<\omega} s\} \subset ((\max_{m<\mathrm{dom}(s)} s(m)) + 1)^{<(\mathrm{dom}(s)+1)}$. Dizemos em geral que uma relação $\mathbf{R}$ sobre uma classe $\mathbf{A}$ é **set-like** caso, para todo $x \in \mathbf{A}$, $\{y \in \mathbf{A} : y\mathbf{R}x\}$ forma um conjunto, que denotaremos $\mathrm{pred}(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})$.

As ordens que podemos gerar a partir das ordens estritas definidas acima serão úteis para definições e demonstrações recursivas com múltiplos parâmetros. Assim, elas serão usadas como ordens canônicas sempre que possível a partir de agora.

A partir de agora, caso não deixarmos expresso qual álgebra booleana estamos usando, estaremos supondo o uso de uma álgebra booleana completa arbitrária.

A classe definida por uma álgebra booleana completa, que a técnica de forcing usará e que foi mencionada na Introdução, é denotada $\mathbf{V}^{\mathscr{B}}$ e será definida a seguir.

Definição 2.1.3. Dada uma álgebra booleana completa $\mathscr{B}$, para todo ordinal α, defina $\mathbf{V}^{\mathscr{B}}_{\alpha}$, por recursão sobre o ordinal α, da seguinte forma:

1. $\mathbf{V}^{\mathscr{B}}_0 = \emptyset$
2. Caso $\alpha = \beta + 1$, para algum ordinal β: $\mathbf{V}^{\mathscr{B}}_{\alpha} = \{x \subset \mathbf{V}^{\mathscr{B}}_{\beta} \times \mathscr{B} : x \textit{ é função}\}$
3. Caso α seja ordinal limite: $\mathbf{V}^{\mathscr{B}}_{\alpha} = \bigcup_{\xi<\alpha} \mathbf{V}^{\mathscr{B}}_{\xi}$

Com isso, definimos a classe $\mathbf{V}^{\mathscr{B}}$ como sendo: $\mathbf{V}^{\mathscr{B}} = \bigcup_{\alpha\in\mathbf{ON}} \mathbf{V}^{\mathscr{B}}_{\alpha}$. Chamaremos, de modo geral, um elemento $\mathbf{x}$ de $\mathbf{V}^{\mathscr{B}}$ como **nome**.

Definição 2.1.4. Para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}$, definimos o **rank de x, ou** $\rho(\mathbf{x})$, como o menor ordinal α tal que $\mathbf{x} \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}_{\alpha+1}$. Ou, equivalentemente, o menor ordinal α tal que $\mathrm{dom}(\mathbf{x}) \subset \mathbf{V}^{\mathscr{B}}_{\alpha}$.

Definição 2.1.5 ($\check{x}$)**.** Dada uma álgebra booleana $\mathscr{B}$, para todo conjunto x, defina $\check{x}$ por recursão sobre $rank(x)$, da seguinte forma: $\check{x}$ é função, $\mathrm{dom}(\check{x}) = \{\check{y} : y \in x\}$ e $\check{x}(t) = \mathbb{1}$ para todo $t \in \mathrm{dom}(\check{x})$.

Observação 2.1.6. Para todo x, $\check{x} \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}$.

Partiremos agora à definição dos valores booleanos das fórmulas. A definição se dará por indução sobre o comprimento da fórmula, sendo que, nas fórmulas primitivas, deveremos provas elas simultaneamente e por recursão sobre pares de nomes. A ideia no caso de fórmulas primitivas é definir $x \in y$ a partir de sua versão equivalente $\exists z \in y\, x = z$ e definir $x = y$ a partir da versão equivalente $x \subset y \wedge y \subset x$, com $x \subset y$ simbolizando $\forall z \in x\, x \in y$.

Definição 2.1.7. Dada uma álgebra booleana completa $\mathscr{B}$, para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}$, definimos $[\![\mathbf{x} \in \mathbf{y}]\!], [\![\mathbf{x} \subset \mathbf{y}]\!], [\![\mathbf{x} = \mathbf{y}]\!] \in \mathscr{B}$ simultaneamente por recursão sobre $(\rho(\mathbf{x}), \rho(\mathbf{y}))$, satisfazendo as seguintes propriedades:

- $[\![\mathbf{x} \in \mathbf{y}]\!] = \sum_{t\in\mathrm{dom}(\mathbf{y})} [\![\mathbf{x} = t]\!]\mathbf{y}(t)$
- $[\![\mathbf{x} \subset \mathbf{y}]\!] = \prod_{t\in\mathrm{dom}(\mathbf{x})} \mathbf{x}(t) \to [\![t \in \mathbf{y}]\!]$
- $[\![\mathbf{x} = \mathbf{y}]\!] = [\![\mathbf{x} \subset \mathbf{y}]\!][\![\mathbf{y} \subset \mathbf{x}]\!]$

Tendo em vista a definição acima, dada uma fórmula $\phi(x_1,...,x_n)$, sendo $x_1,...,x_n$ suas variáveis livres, para cada $\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_n \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}$, definimos o **valor booleano** $[\![\phi(\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_n)]\!] \in \mathscr{B}$, por indução sobre o comprimento da fórmula, satisfazendo as seguintes propriedades (deixando implícita menção às variáveis livres):

- $[\![\mathbf{x} \in \mathbf{y}]\!], [\![\mathbf{x} = \mathbf{y}]\!]$: vide definição acima
- $[\![\phi \wedge \psi]\!] = [\![\phi]\!][\![\psi]\!]$
- $[\![\sim \phi]\!] = -[\![\phi]\!]$
- $[\![\exists x\ \phi(x)]\!] = \sum_{\mathbf{x}\in\mathbf{V}^{\mathscr{B}}}[\![\phi(\mathbf{x})]\!]$

Como sugerimos no início dessa seção, na recursão sobre $(\rho(\mathbf{x}), \rho(\mathbf{y})) \in \mathbf{ON}^2$, usaremos $<^2$ como ordem.

Observação 2.1.8. Das definições acima, segue imediatamente que:

- $[\![\phi \vee \psi]\!] = [\![\phi]\!] + [\![\psi]\!]$
- $[\![\phi \to \psi]\!] = [\![\phi]\!] \to [\![\psi]\!]$
- $[\![\phi \leftrightarrow \psi]\!] = [\![\phi \to \psi]\!][\![\psi \to \phi]\!]$
- $[\![\forall x\ \phi(x)]\!] = \prod_{\mathbf{x}\in\mathbf{V}^{\mathscr{B}}}[\![\phi(\mathbf{x})]\!]$

E também vale $([\![\phi \to \psi]\!] = \mathbb{1})$ se, e somente se, $([\![\phi]\!] \to [\![\psi]\!] = \mathbb{1}) \Leftrightarrow ([\![\phi]\!] \leq [\![\psi]\!])$, e $([\![\phi \leftrightarrow \psi]\!] = \mathbb{1})$ se, e somente se, $([\![\phi]\!] = [\![\psi]\!])$ (ver Teorema 1.1.4 1).

A linguagem forcing que usaremos em conjunto com a classe $\mathbf{V}^{\mathscr{B}}$ na técnica de forcing, citada na Introdução, usa o valor booleano definido acima e será definida a seguir.

Definição 2.1.9 (LINGUAGEM FORCING)**.** Dada uma álgebra Booleana completa $\mathscr{B}$ e uma fórmula $\phi(x_1,...,x_n)$, para quaisquer $u \in \mathscr{B} - \{\mathbb{0}\}$ e $\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_n \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}$, dizemos que u **força** $\phi(\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_n)$, ou $u \Vdash$ "$\phi(\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_n)$" , se, e somente se, valer $u \leq [\![\phi(\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_n)]\!]$.

Devido à similaridade entre o valor booleano e a linguagem forcing, podemos usar ambos no desenvolvimento da técnica, como faremos.

Essa "linguagem forcing" permite, de modo informal, considerarmos $\mathbf{V}^{\mathscr{B}}$ como um "universo", onde a linguagem forcing denomina suas propriedades. Por causa disso, caso valer $\mathbb{1} \Vdash$ "**x** *é função*" ou até mesmo $u \Vdash$ "**x** *é função*", podemos, de modo informal, tratar o nome **x** como se fosse uma função. O problema de fazer isso é que, apesar de $\mathbb{1} \Vdash$ "**x** *é função*" e $u \Vdash$ "**x** *é função*" serem afirmações distintas, tal tratamento não deixa claro suas diferenças. Através da associação $x \mapsto \check{x}$, poderemos também considerar, de modo informal, que **V** está contido em $\mathbf{V}^{\mathscr{B}}$, sendo o segundo “maior ou igual” ao primeiro. Demonstrar quando, de fato, $\mathbf{V}^{\mathscr{B}}$ é “maior”, requer uma demonstração formal da existência de um “conjunto novo”, seja lá o que isso signifique, e será analisada mais adiante nesse texto.

Acima de tudo, o nosso interesse em descobrir propriedades do “universo” $\mathbf{V}_{\mathscr{B}}$ é provar consistência de novas teorias, preferencialmente as que estendem ZFC. Assim, muito nos interessará o fato que, dada uma fórmula ϕ sem variáveis livres, caso valer $[\![\phi]\!] > \mathbb{0}$ para alguma álgebra booleana completa $\mathscr{B}$, então ϕ será consistente com ZFC. Portanto, o valor booleano de uma fórmula será nossa ferramenta para “detectar consistências”. O fato enunciado aqui será provado assim que tivermos as ferramentas necessárias para tal.

Teorema 2.1.10. Para toda fórmula $\phi(x_1,...,x_n)$ com variáveis livres $x_1,...,x_n$, para todo $\mathbf{t}_1,...,\mathbf{t}_n \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}$, temos que $\mathbb{1} \Vdash$ “$\phi(\mathbf{t}_1,...,\mathbf{t}_n)$” se, e somente se, $[\![\phi(\mathbf{t}_1,...,\mathbf{t}_n)]\!] = \mathbb{1}$. Além disso, as seguintes afirmações são equivalentes, para todo $u \in \mathscr{B} - \{\mathbb{0}\}$:

1. $u \Vdash$ “$\phi(\mathbf{t}_1,...,\mathbf{t}_n)$”
2. $\forall v \leq u\ v \Vdash$ “$\phi(\mathbf{t}_1,...,\mathbf{t}_n)$”
3. $\{v : v \Vdash$ “$\phi(\mathbf{t}_1,...,\mathbf{t}_n)$”$\}$ é denso abaixo de u, isto é, vale $\forall v \leq u\ \exists w \leq v\ w \Vdash$ “$\phi(\mathbf{t}_1,...,\mathbf{t}_n)$”

Demonstração. A primeira afirmação é evidente. Portanto, aqui provaremos a equivalência das três afirmações.

1 ⇒ 2.: $u \Vdash$ “$\phi(\mathbf{t}_1,...,\mathbf{t}_n)$” implica $u \leq [\![\phi(\mathbf{t}_1,...,\mathbf{t}_n)]\!]$. Então, para todo $v \leq u$, temos $v \leq [\![\phi(\mathbf{t}_1,...,\mathbf{t}_n)]\!]$, isto é, $v \Vdash$ “$\phi(\mathbf{t}_1,...,\mathbf{t}_n)$”.

2 ⇒ 3: Imediato.

3 ⇒ 1.: Note que, pela definição de $\Vdash$, $\sum\{v : v \Vdash$ “$\phi(\mathbf{t}_1,...,\mathbf{t}_n)$”$\} = [\![\phi(\mathbf{t}_1,...,\mathbf{t}_n)]\!]$. Mas o Teorema 1.3.17 implica que, como $\{v : v \Vdash$ “$\phi(\mathbf{t}_1,...,\mathbf{t}_n)$”$\}$ é denso abaixo de u, temos $u \leq [\![\phi(\mathbf{t}_1,...,\mathbf{t}_n)]\!]$, isto é, $u \Vdash$ “$\phi(\mathbf{t}_1,...,\mathbf{t}_n)$”. □

Observação 2.1.11. Da definição acima, segue que, para todo $u \in \mathscr{B} - \{\mathbb{0}\}$:

1. $u \Vdash$ “ $\sim \phi$” se, e somente se, ($\forall v \leq u\ v \nVdash$ “ϕ”)
2. $u \Vdash$ “$\phi \wedge \psi$” se, e somente se, ($u \Vdash$ “ϕ” e $u \Vdash$ “ψ”)
3. $u \Vdash$ “$\forall x\ \phi(x)$” se, e somente se, ($\forall \mathbf{x} \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}\ u \Vdash$ “$\phi(\mathbf{x})$”)
4. $u \Vdash$ “$\phi \vee \psi$” se, e somente se, $\{v : v \Vdash$ “ϕ” $\vee\ v \Vdash$ “ψ”$\}$ é denso abaixo de u, isto é, $\forall v \leq u\ \exists w \leq v (w \Vdash$ “ϕ” $\vee\ w \Vdash$ “ψ”$)$
5. $u \Vdash$ “$\phi \rightarrow \psi$” se, e somente se, ($\forall v \leq u\ v \Vdash$ “ϕ” $\rightarrow v \Vdash$ “ψ”)

6. $u \Vdash$ "$\exists x\ \phi(x)$" se, e somente se, $\{v : \exists \mathbf{x} \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}\ v \Vdash$ "$\phi(\mathbf{x})$"$\}$ é denso abaixo de u, isto é, vale $\forall v \leq u\ \exists w \leq v\ \exists \mathbf{x} \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}\ w \Vdash$ "$\phi(\mathbf{x})$"

Note que essa observação usa $\mathscr{B}$ como forcing, então $\mathbb{0}$ não aparece em nenhuma afirmação.

Demonstração. Vamos provar as 3 primeiras afirmações diretamente. Uma vez provadas, elas serão usadas para provar as demais afirmações (isso simplificaria uma definição de $\Vdash$ a partir dessas propriedades).

1:$\Rightarrow$) $u \Vdash$ "$\sim \phi$" implica $u \leq [\![\sim \phi]\!] = -[\![\phi]\!]$ e, portanto, $u[\![\phi]\!] = \mathbb{0}$. Portanto não existe $v \in \mathscr{B} - \{\mathbb{0}\}$ tal que $v \leq u$ e $v \not\leq [\![\phi]\!]$, pois, caso contrário, valeria $v \leq u[\![\phi]\!] = \mathbb{0}$, absurdo. Portanto, para todo $v \leq u$, $v \not\leq [\![\phi]\!]$, isto é, $v \not\Vdash$ "ϕ".

$\Leftarrow$) Se $v \not\Vdash$ "ϕ" para todo $v \leq u$, segue que $v \not\leq [\![\phi]\!]$ para todo $v \leq u$, isto é, $v(-[\![\phi]\!]) \neq \mathbb{0}$. Portanto, $v \not\perp -[\![\phi]\!]$ para todo $v \leq u$. Assim, devido à separatividade de $\mathscr{B}$, temos que $u \leq -[\![\phi]\!]$, ou seja, $u \Vdash$ "$\sim \phi$".

2:$\Rightarrow$) $u \Vdash$ "$\phi \wedge \psi$" implica $u \leq [\![\phi \wedge \psi]\!] = [\![\phi]\!][\![\psi]\!]$. Consequentemente, $u \leq [\![\phi]\!]$ e $u \leq [\![\psi]\!]$. Ou seja $u \Vdash$ "ϕ" e $u \Vdash$ "ψ".

$\Leftarrow$) $u \Vdash$ "ϕ" e $u \Vdash$ "ψ" implica $u \leq [\![\phi]\!]$ e $u \leq [\![\psi]\!]$. Portanto $u \leq [\![\phi]\!][\![\psi]\!] = [\![\phi \wedge \psi]\!]$. Ou seja, $u \Vdash$ "$\phi \wedge \psi$".

3:$\Rightarrow$) $u \Vdash$ "$\forall x\ \phi(x)$" implica $u \leq \prod_{\mathbf{x} \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}} [\![\phi(\mathbf{x})]\!]$. Assim, para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}$, $u \leq [\![\phi(\mathbf{x})]\!]$. Ou seja, $u \Vdash$ "$\phi(\mathbf{x})$" para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}$.

$\Leftarrow$) Caso valer $u \Vdash$ "$\phi(\mathbf{x})$", isto é, $u \leq [\![\phi(\mathbf{x})]\!]$, para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}$, teremos $u \leq \prod_{\mathbf{x} \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}} [\![\phi(\mathbf{x})]\!]$ devido à definição de $\prod$. Portanto, $u \Vdash$ "$\forall x\ \phi(x)$".

4: $\phi \vee \psi$ equivale a $\sim (\sim \phi \wedge \sim \psi)$. Assim $u \Vdash$ "$\phi \vee \psi$" equivale a $u \Vdash$ "$\sim (\sim \phi \wedge \sim \psi)$". Utilizando os resultados acima, vale $u \Vdash$ "$\sim (\sim \phi \wedge \sim \psi)$" se, e somente se, $\forall v \leq u\ v \not\Vdash$ "$\sim \phi \wedge \sim \psi$". Como $v \Vdash$ "$\sim \phi \wedge \sim \psi$" equivale a $v \Vdash$ "$\sim \phi$" $\wedge\, v \Vdash$ "$\sim \psi$", então $v \not\Vdash$ "$\sim \phi \wedge \sim \psi$" equivale a $v \not\Vdash$ "$\sim \phi$" $\vee\, v \not\Vdash$ "$\sim \psi$". Uma vez que $v \Vdash$ "$\sim \phi$" equivale a $\forall w \leq v\ w \not\Vdash$ "ϕ", temos que $v \not\Vdash$ "$\sim \phi$" equivale a $\exists w \leq v\ w \Vdash$ "ϕ", podendo dizer o mesmo para $v \not\Vdash$ "$\sim \psi$". Portanto, $u \Vdash$ "$\phi \vee \psi$" equivale a $\forall v \leq u\ \exists w \leq v(w \Vdash$ "ϕ" $\vee\, w \Vdash$ "ψ"), sendo este último equivalente ao fato de $\{v : v \Vdash$ "ϕ" $\vee\, v \Vdash$ "ψ"$\}$ ser denso abaixo de u.

5: Como $\phi \to \psi$ equivale a $\sim \phi \vee \psi$, podemos usar o resultado acima e provar que $u \Vdash$ "$\phi \to \psi$" se, e somente se, $\{v : v \Vdash$ "$\sim \phi$" $\vee\, v \Vdash$ "ψ"$\}$ é denso abaixo de u. Fixe $v \leq u$ arbitrário que satisfaça $v \Vdash$ "ϕ". Pelo teorema que provamos acima, isso implica $w \Vdash$ "ϕ" para todo $w \leq v$, logo, $w \Vdash$ "$\sim \phi$" $\vee\, w \Vdash$ "ψ" implica, obrigatoriamente, $w \Vdash$ "ψ". Concluindo, $u \Vdash$ "$\phi \to \psi$" implica que, para todo $v \leq u$, se $v \Vdash$ "ϕ", então $\{w : w \Vdash$ "ψ"$\}$ é denso abaixo de v, o que equivale, pelo teorema acima, a $v \Vdash$ "ψ".

6: $\exists x\ \phi(x)$ equivale a $\sim \forall x\ \sim \phi(x)$. Portanto, $u \Vdash$ "$\exists x\ \phi(x)$" se, e somente se, $v \not\Vdash$ "$\forall x\ \sim \phi(x)$", para todo $v \leq u$. Como $v \Vdash$ "$\forall x\ \sim \phi(x)$" equivale a $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}\ v \Vdash$ "$\sim \phi(\mathbf{x})$", então

$v \not\Vdash$ "$\forall x \sim \phi(x)$" equivale a $\exists \mathbf{x} \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}$ $v \not\Vdash$ "$\sim \phi(\mathbf{x})$". Uma vez que $v \not\Vdash$ "$\sim \phi(\mathbf{x})$" equivale a $\exists w \leq v$ $w \Vdash$ "$\phi(\mathbf{x})$", temos que $u \Vdash$ "$\exists x\ \phi(x)$" equivale a $\forall v \leq u\ \exists w \leq v\ \exists \mathbf{x} \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}$ $w \Vdash$ "$\phi(\mathbf{x})$", ou seja, $\{v : \exists \mathbf{x} \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}\ v \Vdash \text{"}\phi(\mathbf{x})\text{"}\}$ é denso abaixo de u. □

Definição 2.1.12 (u-VÁLIDA)**.** Dadas uma álgebra booleana $\mathscr{B}$ e $u \in \mathscr{B} - \{\mathbb{0}\}$, dizemos que uma fórmula $\phi(x_1,...,x_n)$, com $x_1,...,x_n$ variáveis livres, é ***u*-válida** (no sentido $\mathscr{B}$, omitiremos isso quando o contexto não gerar conflitos) quando, para todo $\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_n \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}$, $u \Vdash$ "$\phi(\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_n)$". Diremos que $\phi(x_1,...,x_n)$ é **válida** (no sentido $\mathscr{B}$) quando for $\mathbb{1}$-válida.

Observação 2.1.13. Para toda álgebra booleana $\mathscr{B}$ e $u \in \mathscr{B} - \{\mathbb{0}\}$, uma fórmula $\phi(x_1,...,x_n)$, com $x_1,...,x_n$ variáveis livres, é u-válida se, e somente se, $u \Vdash$ "$\forall x_1...\forall x_n\ \phi(x_1,...,x_n)$".

Demonstração. Se $\phi(x_1,...,x_n)$ é u-válida, então, para todo $\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_n \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}$, vale $u \Vdash$ "$\phi(\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_n)$", isto é, $u \leq [\![\phi(\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_n)]\!]$. Então, por arbitrariedade de $\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_n \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}$, vale $u \leq \prod_{\mathbf{x}_1 \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}} \cdots \prod_{\mathbf{x}_n \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}} [\![\phi(\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_n)]\!]$, isto é, $u \Vdash$ "$\forall x_1...\forall x_n\ \phi(x_1,...,x_n)$". Agora, suponha que $u \Vdash$ "$\forall x_1...\forall x_n\ \phi(x_1,...,x_n)$", isto é, $u \leq \prod_{\mathbf{x}_1 \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}} \cdots \prod_{\mathbf{x}_n \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}} [\![\phi(\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_n)]\!]$. Então, para todo $\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_n \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}$, $u \leq \prod_{\mathbf{x}_1 \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}} \cdots \prod_{\mathbf{x}_n \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}} [\![\phi(\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_n)]\!] \leq \phi(\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_n)$, ou seja, $u \Vdash$ "$\phi(\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_n)$", e portanto, $\phi(x_1,...,x_n)$ é u-válido. □

Teorema 2.1.14. Dadas uma álgebra booleana completa $\mathscr{B}$ e uma fórmula $\phi(x_1,...,x_n)$, tendo $x_1,...,x_n$ como variáveis livres, se $\vdash \phi(x_1,...,x_n)$ (isto é, $\phi(x_1,...,x_n)$ é logicamente provável), então $\phi(x_1,...,x_n)$ é válido.

Teorema 2.1.15. Dados álgebra booleana completa $\mathscr{B}$, $u \in \mathscr{B} - \{\mathbb{0}\}$ e $\phi_1,...,\phi_n$ coleção finita de afirmações, todas u-válidas. Se $\psi(y_1,...,y_m)$ é tal que $\phi_1,...,\phi_n \vdash \psi(y_1,...,y_m)$, então $\psi(y_1,...,y_m)$ é u-válido.

Como devemos entender os dois teoremas acima? Ambos se tratam de teoremas da metateoria, sendo um esquema de teoremas formais da teoria dos conjuntos (mais basicamente, ZFC, apesar de alguns axiomas não serem necessários). O Teorema 2.1.14 diz que, para qualquer fórmula ϕ tal que $\vdash \phi$ temos ZFC $\vdash \phi$ *é* $\mathbb{1}$*-válido*. O Teorema 2.1.15 é mais complicado de formalizar, pois, uma vez que $\mathscr{B}$ faz parte da teoria dos conjuntos, não faria sentido mencioná-lo em uma afirmação estritamente metateórica, assim a nossa formalização seguirá o seguinte critério: uma vez fixadas as fórmulas $\phi_1,...,\phi_n$, para cada fórmula ψ tal que $\phi_1,...,\phi_n \vdash \psi$, o Teorema 2.1.15 diz que ZFC $\vdash \forall u \in \mathscr{B} - \{\mathbb{0}\}((\phi_1$ *é u-válido*$\wedge ... \wedge \phi_n$ *é u-válido*$) \to \psi$ *é u-válido*$)$.

A demonstração dos dois teoremas acima serão feitas no apêndice.

Corolário 2.1.16. Para toda álgebra booleana completa $\mathscr{B}$, como a afirmação $x = x$ é logicamente provável, ela é válida, isto é, $[\![\mathbf{x} = \mathbf{x}]\!] = \mathbb{1}$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}$. Com isso, para todo $t \in \mathrm{dom}(\mathbf{x})$ com $\mathbf{x} \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}$, $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t)\mathbb{1} = \mathbf{x}(t)[\![t = t]\!] \leq \sum_{t' \in \mathrm{dom}(\mathbf{x})} \mathbf{x}(t')[\![t = t']\!] = [\![t \in \mathbf{x}]\!]$. Portanto, $\mathbf{x}(t) \leq [\![t \in \mathbf{x}]\!]$ para todo $t \in \mathrm{dom}(\mathbf{x})$.

Teorema 2.1.17. Para todo $\mathbf{y} \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}$ e toda fórmula $\phi(x)$ com x variável livre, vale:

1. $[\![\exists x \in \mathbf{y}\ \phi(x)]\!] = \sum_{t\in \mathrm{dom}(\mathbf{y})} (\mathbf{y}(t)[\![\phi(t)]\!])$

2. $[\![\forall x \in \mathbf{y}\ \phi(x)]\!] = \prod_{t\in \mathrm{dom}(\mathbf{y})} (\mathbf{y}(t) \to [\![\phi(t)]\!])$

Demonstração. 1: O Corolário 2.1.16 implica, para todo $t \in \mathrm{dom}(\mathbf{y})$, $\mathbf{y}(t) \leq [\![t \in \mathrm{dom}(\mathbf{y})]\!]$. Como $\mathrm{dom}(\mathbf{y}) \subset \mathbf{V}^{\mathscr{B}}$, vale $\sum_{t\in \mathrm{dom}(\mathbf{y})} \mathbf{y}(t)[\![\phi(t)]\!] \leq \sum_{x\in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}} [\![\mathbf{x} \in \mathbf{y}]\!][\![\phi(\mathbf{x})]\!] = [\![\exists \mathbf{x} \in \mathbf{y}\ \phi(x)]\!]$. Por outro lado, dado $\mathbf{x} \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}$ arbitrário, temos que $[\![\mathbf{x} \in \mathbf{y}]\!] = \sum_{t\in \mathrm{dom}(\mathbf{y})} \mathbf{y}(t)[\![\mathbf{x} = t]\!]$. Assim, $[\![\mathbf{x} \in \mathbf{y}]\!][\![\phi(\mathbf{x})]\!] = \left(\sum_{t\in \mathrm{dom}(\mathbf{y})} \mathbf{y}(t)[\![\mathbf{x} = t]\!]\right)[\![\phi(\mathbf{x})]\!] = \sum_{t\in \mathrm{dom}(\mathbf{y})} \mathbf{y}(t)[\![\mathbf{x} = t]\!][\![\phi(\mathbf{x})]\!]$. Sendo a afirmação $(x = t \wedge \phi(x)) \to \phi(t)$ logicamente provável, portanto válida, o Teorema 1.1.4 1 implica que $[\![\mathbf{x} = t]\!][\![\phi(\mathbf{x})]\!] \leq [\![\phi(t)]\!]$, de onde obtemos $\sum_{t\in \mathrm{dom}(\mathbf{y})} \mathbf{y}(t)[\![\mathbf{x} = t]\!][\![\phi(\mathbf{x})]\!] \leq \sum_{t\in \mathrm{dom}(\mathbf{y})} \mathbf{y}(t)[\![\phi(t)]\!]$. A arbitrariedade de $\mathbf{x}$ então conclui que $[\![\exists x \in \mathbf{y}\ \phi(x))]\!] = \sum_{\mathbf{x}\in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}} [\![\mathbf{x} \in \mathbf{y}]\!][\![\phi(\mathbf{x})]\!] \leq \sum_{t\in \mathrm{dom}(\mathbf{y})} \mathbf{y}(t)[\![\phi(t)]\!]$, provando assim o item.

2: $\forall x \in y\ \phi(y)$ é equivalente a $\sim \exists x \in y\ \sim \phi(x)$, portanto, usando o item acima provado, temos que $[\![\forall x \in y\ \phi(x)]\!] = -[\![\exists x \in y\ \sim \phi(x)]\!] = -\left(\sum_{t\in \mathrm{dom}(\mathbf{y})} y(t)[\![\sim \phi(t)]\!]\right) = -\left(\sum_{t\in \mathrm{dom}(\mathbf{y})} y(t)(-[\![\phi(t)]\!])\right) = \prod_{t\in \mathrm{dom}(\mathbf{y})}(-\mathbf{y}(t) + [\![\phi(t)]\!]) = \prod_{t\in \mathrm{dom}(\mathbf{y})} \mathbf{y}(t) \to [\![\phi(t)]\!]$, provando o desejado. □

Como o leitor pode ter notado, esse teorema prova que, de fato, as definiçãos $[\![\mathbf{x} \in \mathbf{y}]\!]$ e $[\![\mathbf{x} \subset \mathbf{y}]\!]$ feitas anteriormente equivalem a, respectivamente, $[\![\exists z \in \mathbf{y}\ \mathbf{x} = z]\!]$ e $[\![\forall z \in \mathbf{x}\ z \in \mathbf{y}]\!]$. Analogamente, a nossa definição de $[\![\mathbf{x} = \mathbf{y}]\!]$ equivale a $[\![\mathbf{x} \subset \mathbf{y} \wedge \mathbf{y} \subset \mathbf{x}]\!]$.

2.2 Absoluticidade

Apesar de ficarem em segundo plano, as definições de **absoluticidade** e **class-preserving** serão cruciais para simplificarmos a demonstração de todos os teoremas que provaremos usando a técnica de forcing.

Definição 2.2.1 ($\mathscr{B}$-ABSOLUTICIDADE)**.** Dada uma álgebra booleana completa $\mathscr{B}$, dizemos que uma fórmula $\phi(x_1,...,x_n)$, com variáveis livres $x_1,...,x_n$, é **$\mathscr{B}$-absoluta** se satisfaz, para quaisquer conjuntos $z_1,...,z_n$:

1. $\phi(z_1,...,z_n)$ implica $\mathbb{1} \Vdash$ "$\phi((z_1)\check{}, ..., (z_n)\check{})$"

2. $\sim \phi(z_1,...,z_n)$ implica $\mathbb{1} \Vdash$ "$\sim \phi((z_1)\check{}, ..., (z_n)\check{})$"

Além disso, dada uma função $F(x_1,...,x_n)$ que seja **definível** (isto é, é demonstrável na teoria que estamos supondo e, ao mesmo tempo, $\mathbb{1}$-válida no sentido de $\mathscr{B}$ a seguinte afirmação: $\forall x_1,...,x_n\ \exists! y\ y = F(x_1,...,x_n)$), dizemos que $F(x_1,...,x_n)$ é $\mathscr{B}$-absoluta caso for $\mathscr{B}$-absoluta a fórmula $y = F(x_1,...,x_n)$.

Teorema 2.2.2. Para toda álgebra booleana completa $\mathscr{B}$, são $\mathscr{B}$-absolutas as seguintes fórmulas:

I $x \in y$

II $x = y$

Se ϕ, ψ são fórmulas $\mathscr{B}$-absolutas, também serão $\mathscr{B}$-absolutas as seguintes fórmulas:

1. $\sim \phi$

2. $\phi \wedge \psi$

3. $\exists x \in y\ \phi$

Em particular, toda Δ_0-fórmula (isto é, toda fórmula cujos quantificadores são da forma $\forall x \in y$ ou $\exists x \in y$) é $\mathscr{B}$-absoluta. Além disso, se a afirmação $\phi(x_1,...,x_n) \leftrightarrow \psi(x_1,...,x_n)$ for provável na teoria que estivermos supondo e, ao mesmo tempo, $\mathbb{1}$-válida no sentido de $\mathscr{B}$, se $\phi(x_1,...,x_n)$ é $\mathscr{B}$-absoluta, então $\psi(x_1,...,x_n)$ também será $\mathscr{B}$-absoluta.

Demonstração. **I** e **II**: A demonstração será por indução sobre $(\text{rank}(x), \text{rank}(y))$ nas duas afirmações simultaneamente.

Supondo que já provamos as duas afirmações para todo z, w com $(\text{rank}(z), \text{rank}(w)) <^2 (\text{rank}(x), \text{rank}(y))$, suponha que vale $x \in y$. Então $[\![\check{x} \in \check{y}]\!] = \sum_{t \in \text{dom}(\check{y})} \check{y}(t)[\![t = \check{x}]\!]$. Através da definição de $\check{y}$, podemos provar o seguinte: $[\![\check{x} \in \check{y}]\!] = \sum_{t \in \text{dom}(\check{y})} \check{y}(t)[\![t = \check{x}]\!] = \sum_{z \in y} \check{y}(\check{z})[\![\check{z} = \check{x}]\!] = \sum_{z \in y} \mathbb{1}[\![\check{z} = \check{x}]\!] = \sum_{z \in y}[\![\check{z} = \check{x}]\!]$. Agora, podemos usar a hipótese de indução da segunda afirmação no par (x, z), com $z \in y$ (pois $z \in y$ implica $\text{rank}(z) < \text{rank}(y)$, assim $(\text{rank}(x), \text{rank}(z)) <^2 (\text{rank}(x), \text{rank}(y))$). Como $x \in y$ implica que existe $z \in y$ com $z = x$, então devemos ter que $\mathbb{1} = [\![\check{z} = \check{x}]\!]$, para algum $z \in y$ e, consequentemente, $[\![x \in y]\!] = \sum_{z \in y}[\![\check{z} = \check{x}]\!] = \mathbb{1}$. Analogamente, supondo $x \notin y$, então $z \neq x$ para todo $z \in y$. Assim, pela hipótese de indução, $[\![\check{z} \neq x]\!] = \mathbb{1}$, para todo $z \in y$, o que implica $[\![\check{x} \notin \check{y}]\!] = -[\![\check{x} \in \check{y}]\!] = -\sum_{z \in y}[\![\check{z} = \check{x}]\!] = \prod_{z \in y} -[\![\check{z} = \check{x}]\!] = \prod_{z \in y}[\![\check{z} \neq \check{x}]\!] = \mathbb{1}$, provando assim a parte respectiva do item **I**.

Supondo agora que vale $x = y$, então vale $x \subset y$ e $y \subset x$. Usando agora a definição de $\check{x}$, conseguimos provar que $[\![\check{x} \subset \check{y}]\!] = \prod_{t \in \text{dom}(\check{x})} \check{x}(t) \to [\![t \in \check{y}]\!] = \prod_{z \in x} \check{x}(\check{z}) \to [\![\check{z} \in y]\!] = \prod_{z \in x} \mathbb{1} \to [\![\check{z} \in y]\!] = \prod_{z \in x}[\![\check{z} \in y]\!]$ (lembre-se que $\mathbb{1} \to u = -\mathbb{1} + u = \mathbb{0} + u = u$). Portanto, podemos aplicar indução da primeira afirmação sobre (z, y) para todo $z \in x$. Note que $x \subset y$ implica, para todo $z \in x$, $z \in y$. Assim, por hipótese, $[\![\check{z} \in \check{y}]\!] = \mathbb{1}$ para todo $z \in x$. Logo, $[\![\check{x} \subset \check{y}]\!] = \prod_{z \in x}[\![\check{z} \in \check{y}]\!] = \mathbb{1}$. Analogamente, $y \subset x$ implica $[\![\check{y} \subset \check{x}]\!] = \mathbb{1}$. Então, $x = y$ implica $[\![\check{x} = \check{y}]\!] = [\![\check{x} \subset \check{y}]\!][\![\check{y} \subset \check{x}]\!] = \mathbb{1}$. Agora, caso $x \neq y$ valer, então vale $x \not\subset y \vee y \not\subset x$. Caso $x \not\subset y$, existe $z \in x$ tal que $z \notin y$, assim, por indução, $[\![\check{z} \notin \check{y}]\!] = \mathbb{1}$ e, portanto, $[\![\check{x} \not\subset \check{y}]\!] = -[\![\check{x} \subset \check{y}]\!] = -\prod_{z \in x}[\![\check{z} \in y]\!] = \sum_{z \in x} -[\![z \in y]\!] = \sum_{z \in x}[\![z \notin y]\!] = \mathbb{1}$. De modo análogo, caso $y \not\subset x$, vale $[\![\check{y} \not\subset \check{x}]\!] = \mathbb{1}$. Então, $x \neq y$ implica

$[\![\check{x} \neq y]\!] = -([\![\check{x} \subset \check{y}]\!][\![\check{y} \subset \check{x}]\!]) = [\![\check{x} \not\subset \check{y}]\!] + [\![\check{y} \not\subset \check{x}]\!] = \mathbb{1}$, provando assim a parte respectiva do item **II**, concluindo a demonstração indutiva e, portanto, a absoluticidade das afirmações.

Agora, suponha a absoluticidade das fórmulas ϕ, ψ, vamos provar a absoluticidade dos itens 1 a 3.

1: Consequência imediata da absoluticidade de ϕ, apenas note que $\sim\sim \phi$ implica ϕ, e $[\![\sim\sim \phi]\!] = -(-[\![\phi]\!]) = [\![\phi]\!]$.

2: $\phi \wedge \psi$ implica ϕ e ψ e, por hipótese, $[\![\phi]\!] = \mathbb{1}$ e $[\![\psi]\!] = \mathbb{1}$. Portanto, $[\![\phi \wedge \psi]\!] = [\![\phi]\!][\![\psi]\!] = \mathbb{1}$. Agora, caso valer $\sim (\phi \wedge \psi)$, vale $\sim \phi \vee \sim \psi$. Se valer $\sim \phi$, por hipótese, então vale $[\![\sim \phi]\!] = \mathbb{1}$. Agora, se valer $\sim \psi$, também por hipótese, vale $[\![\sim \psi]\!] = \mathbb{1}$. Assim, em ambos os casos, vale $[\![\sim (\phi \wedge \psi)]\!] = -([\![\phi]\!][\![\psi]\!]) = [\![\sim \phi]\!] + [\![\sim \psi]\!] = \mathbb{1}$. Portanto, $\phi \wedge \psi$ é absoluto.

3: O Teorema 2.1.17 implica que $[\![\exists x \in \check{y}\ \phi(x)]\!] = \sum_{t \in \mathrm{dom}(\check{y})} \check{y}(t)[\![\phi(t)]\!] = \sum_{x \in y} \check{y}(\check{x})[\![\phi(\check{x})]\!] = \sum_{x \in y} \mathbb{1}[\![\phi(\check{x})]\!] = \sum_{x \in y}[\![\phi(\check{x})]\!]$. Suponha que vale $\exists x \in y\ \phi(x)$, então existe $x \in y$ tal que $\phi(x)$ é verdade, assim vale $[\![\phi(\check{x})]\!] = \mathbb{1}$ e, portanto, $[\![\exists x \in \check{y}\ \phi(x)]\!] = \sum x \in y[\![\phi(\check{x})]\!] = \mathbb{1}$. Caso valer $\sim \exists x \in y\ \phi(x)$, então, para todo $x \in y$, vale $\sim \phi(x)$. Por hipótese, vale $[\![\sim \phi(\check{x})]\!] = \mathbb{1}$, logo, $[\![\sim \exists x \in \check{y}\ \phi(x)]\!] = -\left(\sum_{x \in y}[\![\phi(\check{x})]\!]\right) = \prod_{x \in y} -[\![\phi(\check{x})]\!] = \prod_{x \in y}[\![\sim \phi(\check{x})]\!] = \mathbb{1}$, provando a absoluticidade de $\exists x \in y\ \phi(x)$.

Agora, supondo que $\phi(x_1, ..., x_n) \leftrightarrow \psi(x_1, ..., x_n)$ é provável e $\mathbb{1}$-válida no sentido $\mathscr{B}$, teremos, em particular, que $\sim \phi(x_1, ..., x_n) \leftrightarrow \sim \psi(x_1, ..., x_n)$. Assim, para todo $x_1, ..., x_n$, vale $[\![\phi((x_1)^{\check{}}, ..., (x_n)^{\check{}})]\!] = [\![\psi((x_1)^{\check{}}, ..., (x_n)^{\check{}})]\!]$ e $-[\![\phi((x_1)^{\check{}}, ..., (x_n)^{\check{}})]\!] = -[\![\psi((x_1)^{\check{}}, ..., (x_n)^{\check{}})]\!]$. Todas essas equivalências e igualdades implicam que $\psi(x_1, ..., x_n)$ é automaticamente absoluta, caso $\phi(x_1, ..., x_n)$ assim seja. □

Teorema 2.2.3. Para toda álgebra booleana completa $\mathscr{B}$, dada uma fórmula $\mathscr{B}$-absoluta $\phi(x_1, ..., x_n)$, com $x_1, .., x_n$ variáveis livres, seja $F_1(y_1, ..., y_m), ..., F_n(y_1, ..., y_m)$ funções, com variáveis livres entre $y_1, ..., y_m$ (não necessariamente todas, podendo algumas funções serem simples variáveis), definíveis e $\mathscr{B}$-absolutas, então $\phi(F_1(y_1, ..., y_m), ..., F_n(y_1, ..., y_m))$ é uma fórmula $\mathscr{B}$-absoluta. Analogamente, se $F(x_1, ..., x_n)$ for função definível e $\mathscr{B}$-absoluta, e $G_1(y_1, ..., y_m), ..., G_n(y_1, ..., y_m)$ forem fórmulas com variáveis livres entre $y_1, ..., y_m$ (não necessariamente todas, podendo algumas funções serem simples variáveis) definíveis e $\mathscr{B}$-absolutas, então $F(G_1(y_1, ..., y_m), ..., G_n(y_1, ..., y_m))$ também será função definível e $\mathscr{B}$-absoluta.

Demonstração. A demonstrabilidade e validade da afirmação $\forall y_1, ..., y_m\ \exists! z\ z = F_i(y_1, ..., y_m)$, $1 \leq i \leq n$, implica a demonstrabilidade e validade da afirmação $\phi(F_1(y_1, ..., y_m), ..., F_n(y_1, ..., y_m))$ $\overset{(1)}{\Leftrightarrow} (\exists z_1, ..., z_n\ z_1 = F_1(y_1, ..., y_m) \wedge ... \wedge z_n = F_n(y_1, ..., y_m) \wedge \phi(z_1, ..., z_n)) \overset{(2)}{\Leftrightarrow}$ $(\forall z_1, ..., z_n(z_1 = F_1(y_1, ..., y_m) \wedge ... \wedge z_n = F_n(y_1, ..., y_m)) \to \phi(z_1, ..., z_n))$. Suponha que vale $\phi(F_1(y_1, ..., y_m), ..., F_n(y_1, ..., y_m))$, pela equivalência (1) acima, existem $z_1, ..., z_n$ tais que $z_1 = F_1(y_1, ..., y_m) \wedge ... \wedge z_n = F_n(y_1, ..., y_m) \wedge \phi(z_1, ..., z_n)$. Então, pela absoluticidade de todas as afirmações envolvidas e o Teorema 2.2.2, concluímos que

$\mathbb{1} \Vdash$ "$(z_1)\check{} = F_1((y_1)\check{}...(y_m)\check{}) \wedge, ..., \wedge (z_n)\check{} = F_n((y_1)\check{}, ..., (y_m)\check{}) \wedge \phi((z_1)\check{}, ..., (z_n)\check{})$", o que implica $\mathbb{1} \Vdash$ "$\exists z_1, ..., z_n\ z_1 = F_1((y_1)\check{}, ..., (y_m)\check{}) \wedge z_n = F_n((y_1)\check{}, ..., (y_m)\check{}) \wedge \phi(z_1, ..., z_n)$" ou seja, pela equivalência (1), $\mathbb{1} \Vdash$ "$\phi(F_1((y_1)\check{}, ..., (y_m)\check{}), ..., F_n((y_1)\check{}, ..., (y_m)\check{}))$".

Suponha agora que vale $\sim \phi(F_1(y_1, ..., y_m), ..., F_n(y_1, ..., y_m))$. Pela equivalência (2) acima, vale $\sim (\forall z_1, ..., z_n((z_1 = F_1(y_1, ..., y_m) \wedge ... \wedge z_n = F_n(y_1, .., y_m)) \rightarrow \phi(z_1, ..., z_n)))$, que, por sua vez, é equivalente a $\exists z_1, ..., z_n\ z_1 = F_1(y_1, ..., y_m) \wedge ... \wedge z_n = F_n(y_1, ..., y_n) \wedge \sim \phi(z_1, ..., z_n)$. Isto é, existem $z_1, ..., z_n$ tais que $z_1 = F_1(y_1, ..., y_m) \wedge ... \wedge z_n = F_n(y_1, ..., y_m) \wedge \sim \phi(z_1, ..., z_n)$. Novamente, pelo Teorema 2.2.2 e a absoluticidade das fórmulas envolvidas, vale $\mathbb{1} \Vdash$ "$(z_1)\check{} = F_1((y_1)\check{}, ..., (y_m)\check{}) \wedge ... \wedge (z_n)\check{} = F_n((y_1)\check{}, ..., (y_m)\check{}) \wedge \sim \phi((z_1)\check{}, ..., (z_n)\check{})$" e, consequentemente, $\mathbb{1} \Vdash$ "$\exists z_1, ..., z_n\ z_1 = F_1((y_1)\check{}, ..., (y_m)\check{}) \wedge ... \wedge z_n = F_n((y_1)\check{}, ..., (y_m)\check{}) \wedge \sim \phi(z_1, ..., z_n)$". Portanto, devido à equivalência (2), vale $\mathbb{1} \Vdash$ "$\sim \phi(F_1((y_1)\check{}, ..., (y_m)\check{}), ..., F_n((y_1)\check{}, ..., (y_m)\check{}))$", concluindo a demonstração da absoluticidade.

Note que é fácil provar a definibilidade da função $F(G_1(y_1, ..., y_m), ..., G_n(y_1, ..., y_m))$, quando as funções $F(x_1, ..., x_n), G_1(y_1, ..., y_m), ..., G_n(y_1, ..., y_m)$. A demonstração da absoluticidade de $z = F(G_1(y_1, ..., y_m), ..., G_n(y_1, ..., y_m))$ é idêntica à demonstração acima, basta usar $z = F(x_1, ..., x_n)$ no lugar de $\phi(x_1, ..., x_n)$. Perceba que agora, com esse resultado, podemos aplicar esse mesmo teorema à função $F(G_1(y_1, ..., y_m), ..., G_n(y_1, ..., y_m))$ e qualquer fórmula ψ. □

Definição 2.2.4 ($\mathscr{B}$-CLASS-PRESERVING)**.** Dada uma álgebra booleana completa $\mathscr{B}$, dizemos que uma classe $\mathbf{A}(y_1, ..., y_n)$, com $y_1, ..., y_n$ parâmetros da classe (isto é, a classe é definida como $\{x : \phi(x, y_1, ..., y_n)\}$, onde $\phi(x, y_1, ..., y_n)$ é a afirmação que simboliza $x \in \mathbf{A}(y_1, ..., y_n)$), é **$\mathscr{B}$-class-preserving**, ou simplesmente **$\mathscr{B}$-cp**, quando valer, para cada $y_1, ..., y_n$, $[\![\mathbf{x} \in \mathbf{A}((y_1)\check{}, ..., (y_n)\check{})]\!] = \sum_{a \in \mathbf{A}(y_1, ..., y_n)} [\![\mathbf{x} = \check{a}]\!]$, para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}$.

Observação 2.2.5. Para toda álgebra booleana completa $\mathscr{B}$, se a classe $\mathbf{A}(y_1, ..., y_n)$ é $\mathscr{B}$-cp, então a afirmação $x \in \mathbf{A}(y_1, ..., y_n)$ é absoluta.

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos omitir menção aos parâmetros da classe. Suponha que vale $x \in \mathbf{A}$, então $\mathscr{B}$-cp implica que $[\![\check{x} \in \mathbf{A}]\!] = \sum_{y \in \mathbf{A}} [\![\check{x} = \check{y}]\!]$. Como $x \in \mathbf{A}$ e $[\![\check{x} = \check{x}]\!] = \mathbb{1}$, então $[\![\check{x} \in \mathbf{A}]\!] = \sum_{y \in \mathbf{A}} [\![\check{x} = \check{y}]\!] = \mathbb{1}$. Agora, suponha que vale $x \notin \mathbf{A}$, então, para todo $y \in A$, $x \neq y$. A absoluticidade dessa última fórmula implica $[\![\check{x} \neq \check{y}]\!] = \mathbb{1}$, isto é, $[\![\check{x} = \check{y}]\!] = \mathbb{0}$ para todo $y \in \mathbf{A}$. Logo, $[\![\check{x} \in \mathbf{A}]\!] = \sum_{y \in \mathbf{A}} [\![\check{x} = \check{y}]\!] = \mathbb{0}$, de onde extraímos $[\![\check{x} \notin \mathbf{A}]\!] = \mathbb{1}$, provando a absoluticidade da fórmula. □

Teorema 2.2.6. Dada uma álgebra booleana completa $\mathscr{B}$, para toda classe $\mathbf{A}(y_1, ..., y_n)$, com $y_1, ..., y_n$ parâmetros de classe, e toda fórmula $\phi(y, x_1, ..., x_m)$, com variáveis livres entre $y, x_1, ..., x_m$, caso $\mathbf{A}(y_1, ..., y_n)$ for $\mathscr{B}$-class-preserving, então vale, para quaisquer conjuntos $w_1, ..., w_n$ e quaisquer $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}$:

1. $[\![\exists y \in \mathbf{A}((w_1)\check{}, ..., (w_n)\check{}) \phi(y, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m)]\!] = \sum_{y \in \mathbf{A}(w_1, ..., w_n)} [\![\phi(\check{y}, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m)]\!]$

2. $[\![\forall y \in \mathbf{A}((w_1)\check{}, ..., (w_n)\check{})\phi(y, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m)]\!] = \prod_{y \in \mathbf{A}(w_1,...,w_n)} [\![\phi(\check{y}, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m)]\!]$

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos omitir menção aos parâmetros de classe.

1: $[\![\exists y \in \mathbf{A}\ \phi(y, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m)]\!] = \sum_{\mathbf{y} \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}} [\![\mathbf{y} \in \mathbf{A}]\!] [\![\phi(\mathbf{y}, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m)]\!]$. Fixe $\mathbf{y} \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}$ arbitrário, $\mathbf{A}$ ser $\mathscr{B}$-class-preserving implica que $[\![\mathbf{y} \in \mathbf{A}]\!] = \sum_{x \in \mathbf{A}} [\![\mathbf{y} = \check{x}]\!]$. Portanto, temos por demonstração lógica que $[\![\mathbf{y} \in \mathbf{A}]\!] [\![\phi(\mathbf{y}, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m)]\!] = (\sum_{x \in \mathbf{A}} [\![\mathbf{y} = \check{x}]\!])\, [\![\phi(\mathbf{y}, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m)]\!] = \sum_{x \in \mathbf{A}} [\![\mathbf{y} = \check{x}]\!] [\![\phi(\mathbf{y}, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m)]\!] \leq \sum_{x \in \mathbf{A}} [\![\phi(\check{x}, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m)]\!]$, ou seja, $[\![\exists y \in \mathbf{A}\ \phi(y, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m)]\!] \leq$ $\sum_{y \in \mathbf{A}} [\![\phi(\check{y}, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m)]\!]$. Agora, note que $\sum_{y \in \mathbf{A}} [\![\check{y} \in \mathbf{A}]\!] [\![\phi(\check{y}, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n)]\!] \leq$ $\sum_{\mathbf{y} \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}} [\![\mathbf{y} \in \mathbf{A}]\!] [\![\phi(\mathbf{y}, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m)]\!] = [\![\exists y \in \mathbf{A}\ \phi(y, \mathbf{x}_1, .., \mathbf{x}_m)]\!]$. Pela observação acima, $\mathbf{A}$ ser $\mathscr{B}$-class-preserving implica que $y \in \mathbf{A}$ é absoluto, então, para todo $y \in \mathbf{A}$, vale $[\![\check{y} \in \mathbf{A}]\!] = \mathbb{1}$, assim, $\sum_{y \in \mathbf{A}} [\![\phi(\check{y}, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m)]\!] = \sum_{y \in \mathbf{A}} [\![\check{y} \in \mathbf{A}]\!] [\![\phi(\check{y}, ..., \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m)]\!] \leq [\![\exists y \in \mathbf{A}\ \phi(y, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m)]\!]$, concluindo assim a demonstração de que $[\![\exists y \in \mathbf{A}\ \phi(y, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m)]\!] = \sum_{y \in \mathbf{A}} [\![\phi(\check{y}, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m)]\!]$.

2: Como $\forall y \in \mathbf{A}\ \phi(y, x_1, ..., x_m)$ equivale a $\sim \exists y \in \mathbf{A}\ \sim \phi(y, x_1, ..., x_m)$, $[\![\forall y \in \mathbf{A}\ \phi(y, \mathbf{x}_1, ..., x_m)]\!] = [\![\sim \exists y \in \mathbf{A}\ \sim \phi(y, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m)]\!] = -[\![\exists y \in \mathbf{A}\ \sim \phi(y, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m)]\!]$. Usando a parte 1 deste teorema provada no parágrafo acima, temos que $[\![\forall y \in \mathbf{A}\ \phi(y, \mathbf{x}_1, ..., x_m)]\!] = -\left(\sum_{y \in \mathbf{A}} -[\![\phi(\check{y}, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m)]\!]\right)$, então, $[\![\forall y \in \mathbf{A}\ \phi(y, \mathbf{x}_1, ..., x_m)]\!] = \prod_{y \in \mathbf{A}} [\![\phi(\check{y}, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m)]\!]$. □

Teorema 2.2.7. Sejam uma álgebra booleana completa $\mathscr{B}$ e uma classe $\mathbf{A}(y_1, ..., y_m)$ que seja $\mathscr{B}$-class-preserving. Então, para toda fórmula $\phi(x_1, ..., x_n)$ com $x_1, ..., x_n$ variáveis livres e que não possui em nenhum lugar as variáveis $y_1, ..., y_m$, então a fórmula relativizada $\phi^{\mathbf{A}(y_1,...,y_m)}(x_1, ..., x_n)$ é absoluta.

Demonstração. Sem prejuízo da demonstração, omitiremos menção aos parâmetros de classe e, quando for possível, às variáveis livres.

A demonstração será por indução sobre o comprimento da fórmula. Para os casos $x \in y$ e $x = y$, o teorema se reduz à demonstração da absoluticidade dessas fórmulas, que foi demonstrada no Teorema 2.2.2. Supondo que já foi provado o teorema para as fórmulas ϕ e ψ, a demonstração para $\sim \phi$ e $\phi \wedge \psi$ é análoga às respectivas provas de indução do Teorema 2.2.2, partes 1 e 2 (lembrando que a demonstração aqui usa $\phi^{\mathbf{A}}$ e $\psi^{\mathbf{A}}$). Agora, para concluir a parte indutiva da demonstração, precisamos, com a hipótese de já termos provado para $\phi(x)$, provar o teorema para $\exists x\ \phi(x)$. Neste caso, $(\exists x\ \phi(x))^{\mathbf{A}}$ equivale a $\exists x \in A\ \phi^{\mathbf{A}}(x)$. Pelo teorema provado acima, temos, pelo fato de $\mathbf{A}$ ser $\mathscr{B}$-class-preserving, que $[\![\exists x \in \mathbf{A}\ \phi^{\mathbf{A}}(x)]\!] = \sum_{x \in \mathbf{A}} [\![\phi^{\mathbf{A}}(\check{x})]\!]$, suponha que vale $\exists x \in \mathbf{A}\ \phi^{\mathbf{A}}(x)$, então vale $\phi^{\mathbf{A}}(x)$ para algum $x \in \mathbf{A}$, pela hipótese $[\![\phi^{\mathbf{A}}(\check{x})]\!] = \mathbb{1}$ para esse x e, assim, $[\![(\exists x\ \phi(x))^{\mathbf{A}}]\!] = \sum_{x \in \mathbf{A}} [\![\phi^{\mathbf{A}}(\check{x})]\!] = \mathbb{1}$. Por outro lado, caso valer $\sim \exists x \in \mathbf{A}\ \phi^{\mathbf{A}}(x)$, então vale $\sim \phi^{\mathbf{A}}(x)$ para todo $x \in \mathbf{A}$. Logo, por hipótese $[\![\phi^{\mathbf{A}}(\check{x})]\!] = \mathbb{0}$ para todo $x \in \mathbf{A}$, logo $[\![(\exists x\ \phi(x))^{\mathbf{A}}]\!] = \sum_{x \in \mathbf{A}} [\![\phi^{\mathbf{A}}(\check{x})]\!] = \mathbb{0}$, isto é, $[\![\sim (\exists x\ \phi(x))^{\mathbf{A}}]\!] = -[\![(\exists x\ \phi(x))^{\mathbf{A}}]\!] = \mathbb{1}$, como queríamos provar. □

A Observação 2.2.5 mostra que, de certa forma, "$\mathscr{B}$-cp implica absoluticidade". Então, poderíamos nos perguntar: A "recíproca"é verdadeira, isto é, se $x \in \mathbf{A}$ é absoluta, então $\mathbf{A}$ é

$\mathscr{B}$-cp? No caso particular da classe $\mathbf{A}$ ser um conjunto, a resposta é sim, como veremos no teorema abaixo:

Teorema 2.2.8. Para toda álgebra booleana completa $\mathscr{B}$, toda função $F(x_1,...,x_n)$ definível e $\mathscr{B}$-absoluta, quando considerada como uma classe com parâmetros $x_1,...,x_n$, é $\mathscr{B}$-class-preserving. Analogamente, quando $\mathbf{A}(x_1,...,x_n)$ é uma classe $\mathscr{B}$-cp tal que, a classe $\{x : x \in \mathbf{A}(x_1,...,x_n)\}$ se trata de uma função definível, então tal função também será $\mathscr{B}$-absoluta.

Demonstração. Aqui, o que precisamos fazer para provar a primeira afirmação é provar que, para todo $x_1,...,x_n$, $[\![\mathbf{x} \in F((x_1)\check{}\,,...,(x_n)\check{}\,)]\!] = \sum_{z\in F(x_1,...,x_n)}[\![\mathbf{x} = \check{z}]\!]$. De fato, a absoluticidade de $F(x_1,...,x_n)$ implica a absoluticidade de $y = F(x_1,...,x_n)$, isso por sua vez implica que $\mathbb{1} = [\![(F(x_1,...,x_n))\check{}\, = F((x_1)\check{}\,,...,(x_n)\check{}\,)]\!]$. Como consequência imediata disto, podemos provar, por via lógica, que $[\![\mathbf{x} \in F((x_1)\check{}\,,...,(x_n)\check{}\,)]\!] = [\![\mathbf{x} \in (F(x_1,...,x_n))\check{}\,]\!]$. Assim podemos concluir, usando a definição de $[\![\mathbf{x} \in \mathbf{y}]\!]$ e $\check{x}$, que $[\![\mathbf{x} \in (F(x_1,...,x_n))\check{}\,]\!] = \sum_{t\in \mathrm{dom}((F(x_1,...,x_n))\check{}\,)}(F(x_1,...,x_n))\check{}\,(t)[\![\mathbf{x} = t]\!]$, mas $\mathrm{dom}((F(x_1,...,x_n))\check{}\,) = \{\check{x} : x \in F(x_1,...,x_n)\}$ e, para todo $t \in \mathrm{dom}((F(x_1,...,x_n))\check{}\,)$, $(F(x_1,...,x_n))\check{}\,(t) = \mathbb{1}$, então $\sum_{t\in \mathrm{dom}((F(x_1,...,x_n))\check{}\,)}(F(x_1,...,x_n))\check{}\,(t)[\![\mathbf{x} = t]\!] = \sum_{z\in F(x_1,...,x_n)}[\![\mathbf{x} = \check{z}]\!]$, o que é suficiente para provar que a classe $F(x_1,...,x_n)$ é $\mathscr{B}$-class-preserving.

Agora, dada a classe $\mathbf{A}(x_1,...,x_n)$ $\mathscr{B}$-cp, note que a Observação 2.2.5 já implica que $x \in \mathbf{A}(x_1,...,x_n)$ é absoluto. Agora, o fato que $\{x : x \in \mathbf{A}(x_1,...,x_n)\}$ é definível (o que inclui o fato de ser demonstrável e válido o fato de $\{x : x \in \mathbf{A}(x_1,...,x_n)\}$ ser conjunto) implica que podemos fazer a definição $\{x : x \in \mathbf{A}(x_1,...,x_n)\}$ da seguinte forma: $y = \{x : x \in \mathbf{A}(x_1,...,x_n)\} \Leftrightarrow \forall x \in y\ x \in \mathbf{A}(x_1,...,x_n) \wedge \forall x \in \mathbf{A}(x_1,...,x_n)\ x \in y$. A primeira fórmula $\forall x \in y\ x \in \mathbf{A}(x_1,...,x_n)$ é absoluta através da técnicas do Teorema 2.2.2, já a segunda fórmula $\forall x \in \mathbf{A}(x_1,...,x_n)\ x \in y$ é uma fórmula relativizada por uma classe $\mathscr{B}$-cp e, pelo teorema acima, é absoluta, logo as técnicas do Teorema 2.2.2 provam que $y = \{x : x \in \mathbf{A}(x_1,...,x_n)\}$ é absoluta, provando assim a absoluticidade de $\{x : x \in \mathbf{A}(x_1,...,x_n)\}$, como era nosso objetivo. $\square$

Agora, podemos nos perguntar: E no caso geral, a "equivalência" de $\mathscr{B}$-cp e $\mathscr{B}$-absoluticidade vale? A resposta é 'não'. Mas ainda precisamos desenvolver um pouco mais a teoria para conseguirmos provar a existência de um contra-exemplo.

2.3 Modelando ZFC

Uma vez que temos a pretensão de usar $\mathbf{V}^{\mathscr{B}}$ como um "modelo incomum" por intermédio da linguagem forcing, precisamos saber o que a linguagem forcing nos dizem a respeito de cada axioma da teoria ZFC (que supomos implicitamente como verdadeiro ao longo de todo esse texto). Essa resposta nos será fornecida no próximo teorema que, em sua demonstração, usaremos também as consequências dos teoremas da seção anterior.

Teorema 2.3.1. Para toda álgebra booleana completa $\mathscr{B}$, todo axioma de ZFC é válido.

Demonstração. Nós denotaremos aqui os axiomas de ZFC conforme a seção 7 da Introdução do livro (KUNEN, 1980). Porém, excluiremos menção ao "Axioma 0" desse livro porque provaremos, no apêndice, que ele é logicamente provável e, portanto, válido.

Axioma da Extensão: Essa demonstração seguirá o esquema de (JECH, 1978, 173). A Observação 2.1.13 implica que necessitamos provar a validade de $\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y$, isto é, para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}$, $[\![\forall z(z \in \mathbf{x} \leftrightarrow z \in \mathbf{y})]\!] \leq [\![\mathbf{x} = \mathbf{y}]\!]$. Podemos provar, por via lógica, que $[\![\forall z(z \in \mathbf{x} \leftrightarrow z \in \mathbf{y})]\!] \leq [\![\forall z \in \mathbf{x}\ z \in \mathbf{y}]\!] = [\![\mathbf{x} \subset \mathbf{y}]\!]$, sendo a última igualdade consequência do Teorema 2.1.17. Analogamente, podemos provar por via lógica que $[\![\forall z(z \in \mathbf{x} \leftrightarrow z \in \mathbf{y})]\!] \leq [\![\forall z \in \mathbf{y}\ z \in \mathbf{x}]\!] = [\![\mathbf{y} \subset \mathbf{x}]\!]$, com a última igualdade consequência do Teorema 2.1.17. Então, concluímos que $[\![\forall z(z \in \mathbf{x} \leftrightarrow z \in \mathbf{y})]\!] \leq [\![\mathbf{x} \subset \mathbf{y}]\!][\![\mathbf{y} \subset \mathbf{x}]\!] = [\![\mathbf{x} = \mathbf{y}]\!]$, como queríamos provar.

Axioma da Fundação: O objetivo aqui é provar que, para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}$, $[\![\exists y\ y \in \mathbf{x} \to \exists y(y \in \mathbf{x} \wedge \sim \exists z(z \in y \wedge z \in \mathbf{x}))]\!] = \mathbb{1}$, equivalentemente, para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}$, $[\![\exists y\ y \in \mathbf{x} \wedge \forall y(y \in \mathbf{x} \to \exists z(z \in y \wedge z \in \mathbf{x}))]\!] = -[\![\exists y\ y \in \mathbf{x} \to \exists y(y \in \mathbf{x} \wedge \sim \exists z(z \in y \wedge z \in \mathbf{x}))]\!] = \mathbb{0}$. Suponha que, por absurdo, essa afirmação é falsa, isto é, existe $\mathbf{x} \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}$ com $[\![\exists y\ y \in \mathbf{x} \wedge \forall y(y \in \mathbf{x} \to \exists z(z \in y \wedge z \in \mathbf{x}))]\!] \neq \mathbb{0}$. Fixado um $\mathbf{x}$ com essa propriedade, temos que $[\![\exists y\ y \in \mathbf{x} \wedge \forall y(y \in \mathbf{x} \to \exists z(z \in y \wedge z \in \mathbf{x}))]\!] = [\![\exists y\ y \in \mathbf{x}]\!][\![\forall y(y \in \mathbf{x} \to \exists z(z \in y \wedge z \in \mathbf{x}))]\!] = \left(\sum_{\mathbf{y} \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}}[\![\mathbf{y} \in \mathbf{x}]\!]\right)[\![\forall y(y \in \mathbf{x} \to \exists z(z \in y \wedge z \in \mathbf{x}))]\!] = \sum_{\mathbf{y} \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}}([\![\mathbf{y} \in \mathbf{x}]\!][\![\forall y(y \in \mathbf{x} \to \exists z(z \in y \wedge z \in \mathbf{x}))]\!]) \neq \mathbb{0}$. Note que, por via lógica, $[\![\forall y(y \in \mathbf{x} \to \exists z(z \in y \wedge z \in \mathbf{x}))]\!] = [\![\forall y \in \mathbf{x}\ \exists z \in \mathbf{y}\ z \in \mathbf{x}]\!]$. Portanto, fixe um $\mathbf{y} \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}$ com o menor $\rho(\mathbf{y})$ que satisfaz $[\![\mathbf{y} \in \mathbf{x}]\!][\![\forall y \in \mathbf{x}\ \exists z \in y\ z \in \mathbf{x}]\!] \neq \mathbb{0}$. Como, por via lógica, vale $[\![\mathbf{y} \in \mathbf{x}]\!][\![\forall y \in \mathbf{x}\ \exists z \in y\ z \in \mathbf{x}]\!] \leq [\![\exists z \in \mathbf{y}\ z \in \mathbf{x}]\!][\![\forall y \in \mathbf{x}\ \exists z \in y\ z \in \mathbf{x}]\!]$, portanto $\mathbb{0} \neq [\![\exists z \in \mathbf{y}\ z \in \mathbf{x}]\!][\![\forall y \in \mathbf{x}\ \exists z \in y\ z \in \mathbf{x}]\!] = \sum_{u \in \mathrm{dom}(\mathbf{y})}(\mathbf{y}(u)[\![u \in \mathbf{x}]\!][\![\forall y \in \mathbf{x}\ \exists z \in y\ z \in \mathbf{x}]\!]) \leq \sum_{u \in \mathrm{dom}(\mathbf{y})}([\![u \in \mathbf{x}]\!][\![\forall y \in \mathbf{x}\ \exists z \in y\ z \in \mathbf{x}]\!])$. Assim, existe $u \in \mathrm{dom}(\mathbf{y})$ tal que $[\![u \in \mathbf{x}]\!][\![\forall y \in \mathbf{x}\ \exists z \in y\ z \in \mathbf{x}]\!] \neq \mathbb{0}$, um absurdo, pois, devido à hipótese de minimalidade de $\mathbf{y}$ e o fato que $\rho(u) < \rho(\mathbf{y})$, para todo $u \in \mathrm{dom}(\mathbf{y})$, deveria valer, para todo u dessa forma, $[\![u \in \mathbf{x}]\!][\![\forall y \in \mathbf{x}\ \exists z \in y\ z \in \mathbf{x}]\!] = \mathbb{0}$. Deste modo, concluímos a demonstração da validade do axioma da fundação.

Axioma da Compreensão: Esse axioma se trata, na verdade, de um **esquema de axiomas**. O nosso objetivo aqui é provar, para toda fórmula $\phi(x, z, w_1, ..., w_n)$, com variáveis livres entre $x, z, w_1, ..., w_n$, que a afirmação $\forall z\ \exists y\ \forall x(x \in y \leftrightarrow (x \in z \wedge \phi(x, z, w_1, ..., w_n)))$ é válida. Para isso, fixe a fórmula $\phi(x, z, w_1, ..., w_n)$ e $\mathbf{z}, \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_n \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}$. Assim, defina o nome $\mathbf{y}$ da seguinte forma: $\mathrm{dom}(\mathbf{y}) = \mathrm{dom}(\mathbf{z})$ e, para todo $t \in \mathrm{dom}(\mathbf{y}) = \mathrm{dom}(\mathbf{z})$, $\mathbf{y}(t) = [\![t \in \mathbf{z}]\!][\![\phi(t, \mathbf{z}, \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_n)]\!]$. Para provar que $[\![\forall x(x \in \mathbf{y} \leftrightarrow (x \in \mathbf{z} \wedge \phi(x, \mathbf{z}, \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_n)))]\!] = \mathbb{1}$, basta provar que $[\![\forall x \in \mathbf{y}\ x \in \mathbf{z} \wedge \phi(x, \mathbf{z}, \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_n)]\!] = \mathbb{1}$ e $[\![\forall x \in \mathbf{z}(\phi(x, \mathbf{z}, \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_n) \to x \in \mathbf{y})]\!] = \mathbb{1}$.

Note que $[\![\forall x \in \mathbf{y}\ x \in \mathbf{z} \wedge \phi(x, \mathbf{z}, \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_n)]\!] = \prod_{t \in \mathrm{dom}(\mathbf{y})}(\mathbf{y}(t) \to [\![t \in \mathbf{z} \wedge \phi(t, \mathbf{z}, \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_n)]\!]) = \prod_{t \in \mathrm{dom}(\mathbf{z})}([\![t \in \mathbf{z}]\!][\![\phi(t, \mathbf{z}, \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_n)]\!] \to [\![t \in \mathbf{z}]\!][\![\phi(t, \mathbf{z}, \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_n)]\!])$. Como, evidentemente, $[\![t \in \mathbf{z}]\!][\![\phi(t, \mathbf{z}, \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_n)]\!] \leq [\![t \in \mathbf{z}]\!][\![\phi(t, \mathbf{z}, \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_n)]\!]$, concluímos que $[\![\forall x \in \mathbf{y}\ x \in \mathbf{z} \wedge \phi(x, \mathbf{z}, \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_n)]\!] = \mathbb{1}$. Agora, temos que $[\![\forall x \in \mathbf{z}(\phi(x, \mathbf{z}, \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_n) \to x \in \mathbf{y})]\!] = \prod_{t \in \mathrm{dom}(\mathbf{z})}(\mathbf{z}(t) \to ([\![\phi(t, \mathbf{z}, \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_n)]\!] \to [\![t \in \mathbf{y}]\!])) = \prod_{t \in \mathrm{dom}(\mathbf{z})}(\mathbf{z}(t)[\![\phi(t, \mathbf{z}, \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_n)]\!] \to [\![t \in \mathbf{y}]\!])$. Fixe $t \in \mathrm{dom}(\mathbf{z})$ arbitrário, então $[\![t \in \mathbf{y}]\!] = \sum_{u \in \mathrm{dom}(\mathbf{y})} \mathbf{y}(u)[\![t = u]\!] = \sum_{u \in \mathrm{dom}(\mathbf{y})}[\![u \in \mathbf{z}]\!][\![\phi(u, \mathbf{z}, \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_n)]\!][\![t = u]\!]$.

Como $t \in \text{dom}(\mathbf{y})$ e $[\![t = t]\!] = \mathbb{1}$, temos $[\![t \in \mathbf{z}]\!][\![\phi(t,\mathbf{z},\mathbf{w}_1,...,\mathbf{w}_n)]\!] \leq \sum_{u \in \text{dom}(\mathbf{y})} \mathbf{y}(u)[\![t = u]\!] = [\![t \in \mathbf{y}]\!]$. Uma vez que o Corolário 2.1.16 implica que $\mathbf{z}(t) \leq [\![t \in \mathbf{z}]\!]$, logo, $\mathbf{z}(t)[\![\phi(t,\mathbf{z},\mathbf{w}_1,...,\mathbf{w}_n)]\!] \leq [\![t \in \mathbf{z}]\!][\![\phi(t,\mathbf{z},\mathbf{w}_1,...,\mathbf{w}_n)]\!] \leq [\![t \in \mathbf{y}]\!]$ e, portanto, $(\mathbf{z}(t)[\![\phi(t,\mathbf{z},\mathbf{w}_1,...,\mathbf{w}_n)]\!] \to [\![t \in \mathbf{y}]\!]) = \mathbb{1}$. Como conclusão de tudo isso, temos $[\![\forall x \in \mathbf{z}\, \phi(x,\mathbf{z},\mathbf{w}_1,...,\mathbf{w}_n) \to x \in \mathbf{y}]\!] = \prod_{t \in \text{dom}(\mathbf{z})}(\mathbf{z}(t)[\![\phi(t,\mathbf{z},\mathbf{w}_1,...,\mathbf{w}_n)]\!] \to [\![t \in \mathbf{y}]\!]) = \mathbb{1}$. Como foi nosso objetivo, provamos que $[\![\forall x\, x \in \mathbf{y} \leftrightarrow (x \in \mathbf{z} \wedge \phi(x,\mathbf{z},\mathbf{w}_1,...,\mathbf{w}_n))]\!] = \mathbb{1}$. Uma vez que $\mathbf{y} \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}$, temos que $[\![\exists y(\forall x\, x \in y \leftrightarrow (x \in \mathbf{z} \wedge \phi(x,\mathbf{z},\mathbf{w}_1,...,\mathbf{w}_n)))]\!]) = \sum_{\mathbf{y} \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}}[\![\forall x\, x \in \mathbf{y} \leftrightarrow (x \in \mathbf{z} \wedge \phi(x,\mathbf{z},\mathbf{w}_1,...,\mathbf{w}_n))]\!] = \mathbb{1}$, provando, como queríamos, a validade do esquema de axiomas da compreensão.

Axioma do Par não Ordenado: Aqui o objetivo é provar a validade de $\forall x\, \forall y\, \exists z\, x \in z \wedge y \in z$. Para simplificar a notação, faremos a seguinte definição: Dado S conjunto de nomes, isto é, $S \subset \mathbf{V}^{\mathscr{B}}$, definimos $S_{\mathscr{B}} \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}$ como o nome que satisfaz $\text{dom}(S_{\mathscr{B}}) = S$ e, para todo $t \in \text{dom}(S_{\mathscr{B}})$, $S_{\mathscr{B}}(t) = \mathbb{1}$. É fácil notar assim que, para todo $t \in \text{dom}(S_{\mathscr{B}})$, $S_{\mathscr{B}}(t)u = S_{\mathscr{B}}(t) \to u = u$, e isso nos será muito útil para expansão de fórmulas do tipo $[\![\phi]\!]$, pois permitirá omitir a maior parte das menções de $S_{\mathscr{B}}(t)$. Neste axioma, sendo $\mathbf{x},\mathbf{y}$ arbitrários, definiremos $\mathbf{z} = \{\mathbf{x},\mathbf{y}\}_{\mathscr{B}}$. Para todo $\mathbf{w} \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}$, temos $[\![\mathbf{w} \in \mathbf{z}]\!] = [\![\mathbf{w} \in \{\mathbf{x},\mathbf{y}\}_{\mathscr{B}}]\!] = \sum_{t \in \{\mathbf{x},\mathbf{y}\}}[\![\mathbf{w} = t]\!] = [\![\mathbf{w} = \mathbf{x}]\!] + [\![\mathbf{w} = \mathbf{y}]\!]$. Então, é fácil provar que $[\![\mathbf{x} \in \mathbf{z}]\!] = \mathbb{1}$ e $[\![\mathbf{y} \in \mathbf{z}]\!] = \mathbb{1}$. Concluindo, $[\![\mathbf{x} \in \mathbf{z} \wedge \mathbf{y} \in \mathbf{z}]\!] = \mathbb{1}$, implicando $[\![\exists z\, \mathbf{x} \in z \wedge \mathbf{y} \in z]\!] = \mathbb{1}$ e a validade da mesma fórmula, devido à arbitrariedade de $\mathbf{x},\mathbf{y}$.

Axioma da União: Este axioma se define como $\forall x\, \exists y\, \forall z\, \forall w\, (w \in z \wedge z \in x) \to w \in y$. Fixe o nome $\mathbf{x}$, vamos encontrar um nome $\mathbf{y}$ que satisfaça $[\![\forall z \in \mathbf{x}\, \forall w \in z\, w \in \mathbf{y}]\!] = \mathbb{1}$. Essa fórmula é logicamente equivalente a $\forall z\, \forall w((w \in z \wedge z \in x) \to w \in y)$. Assim, de modo análogo ao que fizemos nos parágrafos anteriores, obteremos $[\![\exists y\, \forall z \in \mathbf{x}\, \forall w \in z\, w \in y]\!] = \mathbb{1}$, provando a validade do axioma. Esse $\mathbf{y}$ será $\left(\bigcup_{t \in \text{dom}(\mathbf{x})} \text{dom}(t)\right)_{\mathscr{B}}$, desse jeito, para um nome $\mathbf{v}$ arbitrário $[\![v \in \mathbf{y}]\!] = \sum_{u \in \bigcup_{t \in \text{dom}(\mathbf{x})} \text{dom}(t)}[\![v = u]\!]$, de onde podemos inferir que, para todo $u \in \text{dom}(t)$ com $t \in \text{dom}(\mathbf{x})$, $[\![u \in \mathbf{y}]\!] = \mathbb{1}$. Fazendo a expansão da fórmula que desejamos provar a validade, $[\![\forall z \in \mathbf{x}\, \forall w \in z\, w \in \mathbf{y}]\!] = \prod_{t \in \text{dom}(\mathbf{x})}(\mathbf{x}(t) \to [\![\forall w \in t\, w \in \mathbf{y}]\!]) = \prod_{t \in \text{dom}(\mathbf{x})}\left(\mathbf{x}(t) \to \prod_{u \in \text{dom}(t)}(t(u) \to [\![u \in \mathbf{y}]\!])\right)$. Essa última fórmula pode ser reescrita como $\prod_{t \in \text{dom}(\mathbf{x})}\prod_{u \in \text{dom}(t)}(\mathbf{x}(t)t(u) \to [\![u \in \mathbf{y}]\!])$. Como provamos acima, para todo u neste produtório, $[\![u \in \mathbf{y}]\!] = \mathbb{1}$. Além disso, independente dos t,u tomados, $\mathbf{x}(t)t(u) \leq \mathbb{1}$, portanto, para todo u nesse produtório, $\mathbf{x}(t)t(u) \leq [\![u \in \mathbf{y}]\!]$, isto é, $\mathbf{x}(t)t(u) \to [\![u \in \mathbf{y}]\!] = \mathbb{1}$. Assim, $[\![\forall z \in \mathbf{x}\, \forall w \in z\, w \in \mathbf{z}]\!] = \prod_{t \in \text{dom}(\mathbf{x})}\prod_{u \in \text{dom}(t)}(\mathbf{x}(t)t(u) \to [\![u \in \mathbf{y}]\!]) = \mathbb{1}$, provando a validade da fórmula desejada.

Axioma da Substituição: Este aqui também se consiste num esquema de axiomas onde, para toda fórmula $\phi(x,y,A,w_1,...,w_n)$, com variáveis livres entre as exibidas, $(\forall x \in A\, \exists! y\, \phi(x,y,A,w_1,...,w_n)) \to (\exists Y\, \forall x \in A\, \exists y \in Y\, \phi(x,y,A,w_1,...,w_n))$. Fixando ϕ arbitrário do estilo acima, vamos provar a validade dessa fórmula. Para fins de simplificação, omitiremos de ϕ menções às variáveis $w_1,...,w_n$. Note que a fórmula é consequência lógica da afirmação $\exists Y\, \forall x \in A((\exists y\, \phi(x,y,A)) \to (\exists y \in Y\, \phi(x,y,A)))$, assim basta provar a validade dessa fórmula. Fixe o nome $\mathbf{A}$ e, por enquanto, considere $\mathbf{Y}$ nome arbitrário. Então, $[\![\forall x \in \mathbf{A}((\exists y\, \phi(x,y,\mathbf{A})) \to (\exists y \in \mathbf{Y}\, \phi(x,y,\mathbf{A})))]\!] = \prod_{t \in \text{dom}(\mathbf{A})}(\mathbf{A}(t) \to [\![(\exists y\, \phi(x,y,A)) \to (\exists y \in \mathbf{Y}\, \phi(x,y,A))]\!])$. Fixemos

$t \in \text{dom}(\mathbf{A})$, então $[\![\exists y\ \phi(t,y,\mathbf{A})]\!] = \sum_{\mathbf{y}\in\mathbf{V}^{\mathscr{B}}}[\![\phi(t,\mathbf{y},\mathbf{A})]\!]$. Lembre-se que todos os valores possíveis desse somatório estão em $\mathscr{B}$ ($\mathbb{0}$ pode estar incluído). Portanto, para todo $u \in \mathscr{B}$, se existir $\mathbf{y} \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}$ tal que $[\![\phi(t,\mathbf{y},\mathbf{A})]\!] = u$, então existirá um com essa propriedade tal que $\rho(\mathbf{y})$ seja mínimo, para esse $\mathbf{y}$, defina $\alpha_u = \rho(\mathbf{y})$, caso contrário, defina $\alpha_u = 0$. Defina agora $\gamma = \sup_{u\in\mathscr{B}}(\alpha_u + 1)$ e faça $S = \mathbf{V}^{\mathscr{B}}_{\gamma}$. Perceba que, para todo $\mathbf{y} \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}$, existe $\mathbf{y}_0 \in S$ tal que $[\![\phi(t,\mathbf{y},\mathbf{A})]\!] = [\![\phi(t,\mathbf{y}_0,\mathbf{A})]\!]$, assim, $[\![\exists y\ \phi(t,y,\mathbf{A})]\!] = \sum_{\mathbf{y}\in\mathbf{V}^{\mathscr{B}}}[\![\phi(t,\mathbf{y},\mathbf{A})]\!] = \sum_{\mathbf{y}\in S}[\![\phi(t,\mathbf{y},\mathbf{A})]\!] = [\![\exists y \in S_{\mathscr{B}}\ \phi(t,y,\mathbf{A})]\!]$, que implica $[\![\exists y\ \phi(t,y,\mathbf{A})]\!] = \sum_{\mathbf{y}\in\mathbf{V}^{\mathscr{B}}}[\![\phi(t,\mathbf{y},\mathbf{A})]\!] \leq \sum_{\mathbf{y}\in S}[\![\phi(t,\mathbf{y},\mathbf{A})]\!] = [\![\exists y \in S_{\mathscr{B}}\ \phi(t,y,\mathbf{A})]\!]$, isto é, $[\![(\exists y\ \phi(x,y,A)) \to (\exists y \in \mathbf{Y}\ \phi(x,y,A))]\!] = \mathbb{1}$. Logo, ao fazermos $\mathbf{Y} = S_{\mathscr{B}}$, teremos como consequência que $[\![\forall x \in \mathbf{A}((\exists y\ \phi(x,y,\mathbf{A})) \to (\exists y \in \mathbf{Y}\ \phi(x,y,\mathbf{A})))]\!] = \prod_{t\in\text{dom}(\mathbf{A})}(\mathbf{A}(t) \to [\![(\exists y\ \phi(x,y,A)) \to (\exists y \in \mathbf{Y}\ \phi(x,y,A))]\!]) = \mathbb{1}$, uma vez que $t \in \text{dom}(\mathbf{A})$ foi escolhido arbitrariamente e sempre vale $\mathbf{A}(t) \leq \mathbb{1}$. Concluindo a demonstração, derivamos facilmente que $[\![\exists Y\ \forall x \in A((\exists y\ \phi(x,y,A)) \to (\exists y \in Y\ \phi(x,y,A)))]\!] = \mathbb{1}$, provando a validade do axioma.

Até o momento, provamos a validade de todos os axiomas do sistema ZF-P-Inf, esses axiomas são suficientes para usar as técnicas de absoluticidade e class-preserving da seção 2.2 e provar que são definíveis e absolutas, já que ZF-P-Inf prova sua equivalência a Δ_0-fórmulas, as seguintes definições:

- $\emptyset = 0$
- $S(x) = x \cup \{x\}$

Elas serão usadas no próximo axioma:

Axioma do Infinito: Esse axioma se consiste em $\exists y\ (\emptyset \in y \wedge \forall x \in y\ S(x) \in y)$. É evidente que a afirmação é valida quando $y = \omega$ e que $\emptyset \in y \wedge \forall x \in y\ S(x) \in y$ é $\mathscr{B}$-absoluta, portanto temos $[\![\emptyset \in \check{\omega} \wedge \forall x \in y\ S(x) \in \check{\omega}]\!] = \mathbb{1}$. Consequentemente, temos a validade de $\exists y(\emptyset \in y \wedge \forall x \in y\ S(x) \in y)$ como queríamos provar.

Axioma da Potência: O nosso objetivo é provar a validade da fórmula $\forall x\ \exists y\ \forall z\ z \subset x \to z \in y$. Mas antes disso, vamos provar um lema que diz que todo subconjunto de um nome pode ser representado por uma forma canônica.

Lema 2.3.2. Dados uma álgebra booleana $\mathscr{B}$ e nomes $\mathbf{x}, \mathbf{Y} \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}$, existe um nome, que denotaremos por $\mathbf{X}$, que satisfaz $\text{dom}(\mathbf{X}) = \text{dom}(\mathbf{Y})$ e $[\![\mathbf{x} \subset \mathbf{Y} \to \mathbf{x} = \mathbf{X}]\!] = \mathbb{1}$.

Demonstração. Fixado o nome $\mathbf{x}$, definiremos $\mathbf{X}$ de modo que satisfaça $\text{dom}(\mathbf{X}) = \text{dom}(\mathbf{Y})$ e, para todo $u \in \text{dom}(\mathbf{Y})$, $\mathbf{X}(u) = \mathbf{Y}(u)[\![u \in \mathbf{x}]\!]$. Vamos provar que $[\![\mathbf{X} = \mathbf{x} \cap \mathbf{Y}]\!] = \mathbb{1}$ (a teoria já está avançada o suficiente para provar que $x \cap y$ é definível). Usando equivalência, o valor booleano da fórmula acima é igual a $[\![\mathbf{X} \subset \mathbf{x}]\!][\![\mathbf{X} \subset \mathbf{Y}]\!][\![\forall y \in \mathbf{Y}\ y \in \mathbf{x} \to y \in \mathbf{X}]\!]$ (nessa equivalência, além da lógica, precisamos usar todos os axiomas necessários para definir $x \cap y$, principalmente o axioma da extensão. Porém, como já provamos a validade de todos eles, isso não gera problemas). Vamos provar a validade dessas fórmulas, o suficiente para provar a validade desejada.

$[\![\mathbf{X} \subset \mathbf{x}]\!] = \prod_{u \in \mathrm{dom}(\mathbf{Y})}(\mathbf{Y}(u)[\![u \in \mathbf{x}]\!] \to [\![u \in \mathbf{x}]\!])$, para todo $u \in \mathrm{dom}(\mathbf{Y}) = \mathrm{dom}(\mathbf{X})$. Uma vez que sempre vale $\mathbf{Y}(u)[\![u \in \mathbf{x}]\!] \leq [\![u \in \mathbf{x}]\!]$, portanto, vale $\mathbf{Y}(u)[\![u \in \mathbf{x}]\!] \to [\![u \in \mathbf{x}]\!] = \mathbb{1}$, assim, $[\![\mathbf{X} \subset \mathbf{x}]\!] = \mathbb{1}$. Note que $[\![\mathbf{X} \subset \mathbf{Y}]\!] = \prod_{u \in \mathrm{dom}(\mathbf{Y})}(\mathbf{Y}(u)[\![u \in \mathbf{x}]\!] \to [\![u \in \mathbf{Y}]\!])$. Como já sabemos que $\mathbf{Y}(u)[\![u \in \mathbf{x}]\!] \leq \mathbf{Y}(u) \leq [\![u \in \mathbf{Y}]\!]$, logo, $\mathbf{Y}(u)[\![u \in \mathbf{x}]\!] \to [\![u \in \mathbf{Y}]\!] = \mathbb{1}$, portanto, $[\![\mathbf{X} \subset \mathbf{Y}]\!] = \mathbb{1}$.

Agora, $[\![\forall y \in \mathbf{Y}\ y \in \mathbf{x} \to y \in \mathbf{X}]\!] = \prod_{u \in \mathrm{dom}(\mathbf{Y})}(\mathbf{Y}(u) \to ([\![u \in \mathbf{x}]\!] \to [\![u \in \mathbf{X}]\!])) = \prod_{u \in \mathrm{dom}(\mathbf{Y})}(\mathbf{Y}(u)[\![u \in \mathbf{x}]\!] \to [\![u \in \mathbf{X}]\!])$. Note aqui que $\mathbf{Y}(u)[\![u \in \mathbf{X}]\!] = \mathbf{X}(u) \leq [\![u \in \mathbf{X}]\!]$, de onde tiramos, como consequência imediata, que $[\![\forall y \in \mathbf{Y}\ y \in \mathbf{x} \to y \in \mathbf{X}]\!] = \mathbb{1}$, concluindo a demonstração de que $[\![\mathbf{X} = \mathbf{x} \cap \mathbf{Y}]\!]$. Portanto temos, como consequência lógica e dos axiomas usados para definir $x \cap y$, que $[\![\mathbf{x} \subset Y \to \mathbf{X} = \mathbf{x}]\!]$, como queríamos demonstrar. □

Com o lema acima, fixado o nome $\mathbf{x}$, defina $S = \mathrm{dom}(\mathbf{x})^{\mathscr{B}}$, isto é, o conjunto das funções $f : \mathrm{dom}(\mathbf{x}) \to \mathscr{B}$, e faça $\mathbf{y} = S_{\mathscr{B}}$. O nosso objetivo agora é provar que $[\![\forall z\ z \subset \mathbf{x} \to z \in \mathbf{y}]\!] = \mathbb{1}$. Note que $[\![\forall z\ z \subset \mathbf{x} \to z \in \mathbf{y}]\!] = \prod_{\mathbf{z} \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}}[\![\mathbf{z} \subset \mathbf{x} \to \mathbf{z} \in \mathbf{y}]\!]$. Uma vez fixado o nome $\mathbf{z}$, seja $\mathbf{Z}$ nome que satisfaz o lema acima, isto é, $\mathrm{dom}(\mathbf{Z}) = \mathrm{dom}(\mathbf{x})$ e $[\![\mathbf{z} \subset \mathbf{x} \to \mathbf{Z} = \mathbf{z}]\!] = \mathbb{1}$. Uma vez que $[\![\mathbf{Z} \in \mathbf{y}]\!] = \mathbb{1}$, então, $[\![\mathbf{z} \subset \mathbf{x} \to \mathbf{Z} = \mathbf{z}]\!][\![\mathbf{Z} \in \mathbf{y}]\!] = \mathbb{1}$ e, por consequência lógica, $[\![\mathbf{z} \subset \mathbf{x} \to \mathbf{z} \in \mathbf{y}]\!] = \mathbb{1}$. Assim, a arbitrariedade de $\mathbf{z}$ implica na validade de $\exists y\ \forall z\ z \subset x \to z \in y$, o axioma da potência.

Axioma da Escolha: Temos, até o momento, já demonstrado a validade de todos os axiomas da teoria ZF. Com ela, podemos provar que o axioma da escolha é equivalente à afirmação $\forall x\ \exists f\ f$ *é função*$\wedge \mathrm{dom}(f)$ *é ordinal*$\wedge x \subset x \subset \mathrm{im}(f)$. A validade do axioma da escolha será obtida provando a validade dessa fórmula, mas para isso precisaremos nos aventurar por um tempo nas definições usadas por ela. Usando ZF, podemos provar a absoluticidade de todas as definições mencionadas, mas somente necessitaremos usar a absoluticidade da afirmação *x é ordinal*.

Primeiramente, note que $z = \{x, y\}$ é equivalente à fórmula $x \in z \wedge y \in z \wedge (\forall w \in z\ (w = x \vee w = y))$ (aqui será sempre necessário usar os axiomas de ZF que já provamos ser válidos). Dados os nomes $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, vamos provar que $[\![\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}_{\mathscr{B}} = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}]\!] = \mathbb{1}$. Como já provamos durante a demonstração do axioma do par não ordenado, $[\![\mathbf{w} \in \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}_{\mathscr{B}}]\!] = [\![\mathbf{w} = \mathbf{x}]\!] + [\![\mathbf{w} = \mathbf{y}]\!]$. Assim, $[\![\mathbf{x} \in \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}_{\mathscr{B}}]\!] = [\![\mathbf{y} \in \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}_{\mathscr{B}}]\!] = \mathbb{1}$. Note que $[\![\forall w \in \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}_{\mathscr{B}}(w = \mathbf{x} \vee w = \mathbf{y})]\!] = \prod_{t \in \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}}([\![t = \mathbf{x}]\!] + [\![t = \mathbf{y}]\!]) = ([\![\mathbf{x} = \mathbf{x}]\!] + [\![\mathbf{x} = \mathbf{y}]\!])([\![\mathbf{y} = \mathbf{x}]\!] + [\![\mathbf{y} = \mathbf{y}]\!]) = \mathbb{1}$, o que nos permite provar que $[\![\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}_{\mathscr{B}} = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}]\!] = \mathbb{1}$. Uma ligeira modificação na demonstração nos permite provar que $[\![\{\mathbf{x}\}_{\mathscr{B}} = \{\mathbf{x}\}]\!] = \mathbb{1}$. A definição de par ordenado é a seguinte: $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$, vamos definir assim $\mathbf{op}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \{\{\mathbf{x}\}_{\mathscr{B}}, \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}_{\mathscr{B}}\}_{\mathscr{B}}$. Em um primeiro instante, podemos provar que $[\![\mathbf{op}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \{\{\mathbf{x}\}_{\mathscr{B}}, \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}_{\mathscr{B}}\}]\!] = \mathbb{1}$. Agora, combinando com os resultados que provamos agora há pouco, concluímos que $[\![\mathbf{op}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})]\!] = \mathbb{1}$. Assim $\mathbf{op}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ será o nome que usaremos para representar os pares ordenados, elementos das relações e funções.

Fixe um nome arbitrário $\mathbf{x}$, usando o axioma da escolha, podemos provar existência de uma função bijetora f, onde $\mathrm{dom}(f)$ é um ordinal, que denotaremos α, e $\mathrm{im}(f) = \mathrm{dom}(\mathbf{x})$. Defina $\mathbf{F} = \{\mathbf{op}(\check{\xi}, f(\xi)) : \xi < \alpha\}_{\mathscr{B}}$. Nosso objetivo final é provar que $[\![\mathbf{F}$ *é função*$\wedge\mathrm{dom}(\mathbf{F})$ *é ordinal*$\wedge \mathbf{x} \subset \mathrm{im}(\mathbf{F})]\!] = \mathbb{1}$, de onde obteremos de imediato a validade do axioma da escolha.

f *é função* é equivalente a f *é relação*$\wedge \forall x \in \mathrm{dom}(f)\ \forall y\ \forall z((x,y) \in f \wedge (x,z) \in f) \to y = z$, onde f *é relação* equivale a $\forall z \in f$ z *é par ordenado* ou $\forall z \in f\ \exists x\ \exists y\ z = (x,y)$. Vamos nos restringir à essa fórmula inicialmente. Note que, para toda fórmula $\phi(x)$, $[\![\forall x \in \mathbf{F}\ \phi(x)]\!] = \prod_{t\in\{\mathbf{op}(\check{\xi},f(\xi)):\xi<\alpha\}}[\![\phi(t)]\!] = \prod_{\xi<\alpha}[\![\phi(\mathbf{op}(\check{\xi}, f(\xi)))]\!]$, analogamente $[\![\exists x \in \mathbf{F}\ \phi(x)]\!] = \sum_{\xi<\alpha}[\![\phi(\mathbf{op}(\check{\xi}, f(\xi)))]\!]$. Fixe $\xi < \alpha$, como provamos acima que $[\![\mathbf{op}(\check{\xi}, f(\xi)) = (\check{\xi}, f(\xi))]\!] = \mathbb{1}$, então, $[\![\exists x\ \exists y\ \mathbf{op}(\check{\xi}, f(\xi)) = (x,y)]\!] = \mathbb{1}$. Pela arbitrariedade de $\xi < \alpha$, concluímos que $[\![\forall z \in \mathbf{F}\ \exists x\ \exists y\ z = (x,y)]\!] = \mathbb{1}$, portanto, $[\![\mathbf{f}$ *é relação*$]\!] = \mathbb{1}$.

Agora, vamos concentrar nossa atenção para provar que $[\![\mathrm{dom}(\mathbf{F}) = \check{\alpha}]\!] = [\![\mathrm{im}(\mathbf{F}) = (\mathrm{dom}(\mathbf{x}))_{\mathscr{B}}]\!] = \mathbb{1}$ para depois concluir a demonstração de que $[\![\mathbf{F}$ *é função*$]\!] = \mathbb{1}$. De fato, $\mathrm{dom}(R) = X$ equivale a $X \subset \mathrm{dom}(R) \wedge \mathrm{dom}(R) \subset X$, onde $X \subset \mathrm{dom}(R)$ equivale a $\forall x \in X\ \exists y\ (x,y) \in R)$ e $\mathrm{dom}(R) \subset X$ equivale a $\forall z \in R\ \forall x\ \forall y(z = (x,y) \to x \in X)$. Para a primeira fórmula, $[\![\forall x \in \check{\alpha}\ \exists y\ (x,y) \in \mathbf{F}]\!] = \prod_{\xi<\alpha}[\![\exists y\ (\check{\xi}, y) \in \mathbf{F}]\!]$. Fixe $\xi < \alpha$. Inicialmente, temos que $[\![\mathbf{op}(\check{\xi}, f(\xi)) \in \mathbf{F}]\!] = \mathbb{1}$ e que $[\![\mathbf{op}(\check{\xi}, f(\xi)) = (\check{\xi}, f(\xi))]\!] = \mathbb{1}$. Então, por consequência lógica, $\mathbb{1} = [\![\mathbf{op}(\check{\xi}, f(\xi)) \in \mathbf{F}]\!][\![\mathbf{op}(\check{\xi}, f(\xi)) = (\check{\xi}, f(\xi))]\!] \leq [\![(\check{\xi}, f(\xi)) \in]\!]$, de onde extraímos, já que $f(\xi)$ é nome, $[\![\exists y\ (\check{\xi}, y) \in \mathbf{F}]\!] = \mathbb{1}$ e, por arbitrariedade de $\xi < \alpha$, temos $[\![\check{\alpha} \subset \mathrm{dom}(\mathbf{F})]\!] = \mathbb{1}$. Para a segunda equação, $[\![\forall z \in \mathbf{F}\ \forall x\ \forall y\ z = (x,y) \to x \in \check{\alpha}]\!] = \prod_{\xi<\alpha}[\![\forall x\ \forall y\ \mathbf{op}(\check{\xi}, f(\xi)) = (x,y) \to x \in \check{\alpha}]\!]$. Assim, para provarmos a validade de $[\![\mathrm{dom}(\mathbf{F}) \subset \check{\alpha}]\!] = \mathbb{1}$, precisamos provar que, para quaisquer nomes $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ e $\xi < \alpha$, $[\![\mathbf{op}(\check{\xi}, f(\xi)) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \to \mathbf{x} \in \check{\alpha}]\!] = \mathbb{1}$. Primeiramente, veja que a fórmula $x = y \to (\phi(x) \leftrightarrow \phi(y))$, demonstrável logicamente, implica que, caso $[\![\mathbf{x} = \mathbf{y}]\!] = \mathbb{1}$, então $[\![\phi(\mathbf{x})]\!] = [\![\phi(\mathbf{y})]\!]$. Essa "igualdade lógico-booleana" nos será muito útil em várias demonstrações (note que, pelo jeito que demonstramos, ela também será verdadeira caso usarmos definições no lugar de nomes). A igualdade acima prova que, como $[\![\mathbf{op}(\check{\xi}, f(\xi)) = (\check{\xi}, f(\xi))]\!] = \mathbb{1}$, $[\![\mathbf{op}(\check{\xi}, f(\xi)) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \to \mathbf{x} \in \check{\alpha}]\!] = [\![(\check{\xi}, f(\xi)) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \to \mathbf{x} \in \check{\alpha}]\!]$. Por equivalência sobre ZF, temos que $[\![(\check{\xi}, f(\xi)) = (x,y)]\!] = [\![x = \check{\xi} \wedge y = f(\xi)]\!]$, mas temos também que $[\![\check{\xi} \in \check{\alpha}]\!] = \mathbb{1}$. Portanto, por consequência lógica, $[\![x = \check{\xi} \wedge y = f(\xi)]\!] = [\![x = \check{\xi} \wedge y = f(\xi)]\!][\![\check{\xi} \in \check{\alpha}]\!] \leq [\![x \in \check{\alpha}]\!]$ e, consequentemente, $[\![\mathrm{dom}(\mathbf{F}) \subset \check{\alpha}]\!] = \mathbb{1}$. Argumentando analogamente, podemos provar que $[\![\mathrm{im}(\mathbf{F}) = \mathrm{dom}(\mathbf{x})_{\mathscr{B}}]\!] = \mathbb{1}$, apenas note que $\mathrm{dom}(\mathbf{x}) = \{f(\xi) : \xi < \alpha\}$, que $Y \subset \mathrm{im}(R)$ equivale a $\forall y \in Y\ \exists x\ (x,y) \in R$ e $\mathrm{im}(R) \subset Y$ equivale a $\forall z \in R\ \forall x\ \forall y\ (z = (x,y) \to y \in R)$ (tome cuidado para não confundir o nome $\mathbf{x}$ citado aqui com o $\mathbf{x}$ usado quase que indiscriminadamente na demonstração acima).

Retornando agora aos esforços para provar que $[\![\mathbf{F}$ *é função*$]\!] = \mathbb{1}$, falta provar que $[\![\forall x \in \mathrm{dom}(\mathbf{F})\ \forall y\ \forall z\ ((x,y) \in \mathbf{F} \wedge (x,z) \in \mathbf{F}) \to y = z]\!] = \mathbb{1}$. Como provamos que $[\![\mathrm{dom}(\mathbf{F}) = \check{\alpha}]\!] = \mathbb{1}$, a igualdade lógico-booleana implica que $[\![\forall x \in \mathrm{dom}(\mathbf{F})\ \forall y\ \forall z((x,y) \in \mathbf{F} \wedge (x,z) \in \mathbf{F}) \to y = z]\!] = [\![\forall x \in \check{\alpha}\ \forall y\ \forall z((x,y) \in \mathbf{F} \wedge (x,z) \in \mathbf{F}) \to y = z]\!] = \prod_{\xi<\alpha}\prod_{\mathbf{y}\in\mathbf{V}^{\mathscr{B}}}\prod_{\mathbf{z}\in\mathbf{V}^{\mathscr{B}}}[\![((\check{\xi}, \mathbf{y}) \in \mathbf{F} \wedge (\check{\xi}, \mathbf{z})) \to \mathbf{y} = \mathbf{z}]\!]$. Fixe agora $\mathbf{y}, \mathbf{z}$ nomes. Então, como se pode facilmente provar, $[\![(\check{\xi}, \mathbf{y}) \in \mathbf{F}]\!] =$

$\sum_{\eta<\alpha}[\![(\check{\xi},\mathbf{x})=(\check{\eta},f(\eta))]\!]$ que é igual a, usando a equivalência entre igualdade de pares ordenados usada acima, $\sum_{\eta<\alpha}([\![\check{\xi}=\check{\eta}]\!][\![\mathbf{y}=f(\eta)]\!])$. Pelos teoremas provados sobre absoluticidade, temos que $[\![\check{\xi}=\check{\eta}]\!]=\mathbb{0}$ quando $\xi\neq\eta$ e $[\![\check{\xi}=\check{\eta}]\!]=\mathbb{1}$ quando $\xi=\eta$, portanto, $[\![(\check{\xi},\mathbf{y})\in\mathbf{F}]\!]=[\![\mathbf{y}=f(\xi)]\!]$. De modo análogo, podemos provar que $[\![(\check{\xi},\mathbf{z})\in\mathbf{F}]\!]=[\![\mathbf{z}=f(\xi)]\!]$. Assim, por via lógica, temos $[\![(\check{\xi},\mathbf{y})\in\mathbf{F}]\!][\![(\check{\xi},\mathbf{z})\in\mathbf{F}]\!]\leq[\![\mathbf{y}=\mathbf{z}]\!]$, isto é, $[\![((\check{\xi},\mathbf{y})\in\mathbf{F}(\check{\xi},\mathbf{z})\in\mathbf{F})\to\mathbf{y}=\mathbf{z}]\!]=\mathbb{1}$ e, consequentemente, concluímos a demonstração de que $[\![\mathbf{F}$ *é função*$]\!]=\mathbb{1}$. Como já provamos que $[\![\mathrm{dom}(\mathbf{F})=\check{\alpha}]\!]$ e que *x é ordinal* é absoluto, então $[\![\check{\alpha}$ *é ordinal*$]\!]=\mathbb{1}$ e a igualdade lógico-booleana implica que $[\![\mathrm{dom}(\mathbf{F})$ *é ordinal*$]\!]=\mathbb{1}$. Também já provamos que $[\![\mathrm{im}(\mathbf{F})=\mathrm{dom}(\mathbf{x})_{\mathscr{B}}]\!]=\mathbb{1}$. Se conseguirmos provar que $[\![\mathbf{x}\subset\mathrm{dom}(\mathbf{x})_{\mathscr{B}}]\!]=\mathbb{1}$, teremos, pela igualdade lógico-booleana, que $[\![\mathbf{x}\subset\mathrm{im}(\mathbf{F})]\!]=\mathbb{1}$ e concluiremos a validade do axioma da escolha. Isso vale, já que $[\![\mathbf{x}\subset\mathrm{dom}(\mathbf{x})_{\mathscr{B}}]\!]=\prod_{t\in\mathrm{dom}(\mathbf{x})}\mathbf{x}(t)\to[\![t\in\mathrm{dom}(\mathbf{x})_{\mathscr{B}}]\!]$ e $[\![\mathbf{x}\in\mathrm{dom}(\mathbf{x})_{\mathscr{B}}]\!]=\sum_{u\in\mathrm{dom}(\mathbf{x})}[\![t=u]\!]$ é igual a $\mathbb{1}$ para todo $t\in\mathrm{dom}(\mathbf{x})$, sempre valendo então que $\mathbf{x}(t)\leq[\![t\in\mathrm{dom}(\mathbf{x})_{\mathscr{B}}]\!]$, implicando a validade da fórmula. Concluindo assim a validade do axioma da escolha e a validade da validade de todos os axiomas de ZFC, como queríamos provar. □

Corolário 2.3.3. Para toda fórmula $\phi(x_1,...,x_n)$ com variáveis livres $x_1,...,x_n$, se ZFC $\vdash\phi(x_1,...,x_n)$ então $\phi(x_1,...,x_n)$ é válido.

Agora, com o corolário acima, podemos provar mais uma série de teoremas envolvendo absoluticidade e class-preserving, isso é o que faremos até o final dessa seção.

Teorema 2.3.4. Para toda álgebra booleana completa $\mathscr{B}$, dadas uma classe $\mathbf{A}$, uma relação $\mathbf{R}$ definida em $\mathbf{A}$, ambas absolutas (isto é, as fórmulas $x\in\mathbf{A}$ e $x\mathbf{R}y$ são absolutas), e uma função $F:\mathbf{A}\times\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ definível e absoluta. Defina a classe $\mathbf{R}(y)$ do seguinte modo, $x\in\mathbf{R}(y)\Leftrightarrow x\mathbf{R}y$. Se $\mathbf{R}(y)$ for class-preserving e, além disso, as fórmulas a seguir são todas prováveis e igualmente $\mathbb{1}$-válidas em $\mathscr{B}$:

- $\mathbf{R}$ *é set-like*
- $\mathbf{R}$ *é bem fundado sobre* $\mathbf{A}$, isto é, $\forall X\subset\mathbf{A}\ X\neq\emptyset\to\exists y\in X(\sim\exists x\in X\ x\mathbf{R}y)$

Então é definível e absoluta a única função $G:\mathbf{A}\to\mathbf{V}$ que satisfaz, para todo $x\in\mathbf{A}$, $G(x)=F(x,G\restriction\mathrm{pred}(\mathbf{A},x,\mathbf{R}))$, onde $G\restriction\mathrm{pred}(\mathbf{A},x,\mathbf{R})$ é uma função g, com $\mathrm{dom}(g)=\mathrm{pred}(\mathbf{A},x,\mathbf{R})$ e, para todo $y\in\mathrm{dom}(g)$, $g(y)=G(y)$.

Nota: Com a citação $F:\mathbf{A}\times\mathbf{V}\to\mathbf{V}$, queremos dizer que F é uma função com dois parâmetros, sendo o primeiro obrigatoriamente pertencente à classe $\mathbf{A}$. Assim, para realmente fazer sentido a definição da função, precisamos usar a definição auxiliar $F'(x,y)$ da seguinte forma: $z=F'(x,y)\Leftrightarrow(x\in\mathbf{A}\wedge z=F(x,y))\vee(x\notin\mathbf{A}\wedge z=\emptyset)$. O mesmo caso acontece com $G:\mathbf{A}\to\mathbf{V}$, função de um único parâmetro obrigatoriamente da classe $\mathbf{A}$, aqui, a função G' necessária para a definição é $y=G(x)\Leftrightarrow(x\in\mathbf{A}\wedge y=G(x))\vee(x\notin\mathbf{A}\wedge y=\emptyset)$. Porém, como as fórmulas $x\in\mathbf{A}$ e $y=\emptyset$ são ambas absolutas pelas técnicas do capítulo anterior aliado ao corolário acima, não gerará nenhum prejuízo para a absoluticidade dessas funções ignorar esse fato. Como a relação **R** é definida em **A**, $x\mathbf{R}y$ implica, obrigatoriamente, $x \in \mathbf{A}$ e $y \in \mathbf{A}$, porém a absoluticidade de **R** não será prejudicada mesmo que sejamos obrigados a mencionar explicitamente esse fato, já que $x \in \mathbf{A}$ é absoluto. A demonstração abaixo pode ser adaptada caso **A** e F possuírem mais parâmetros que os citados aqui.

Demonstração. Primeiramente provaremos o seguinte lema, que nos será muito útil para simplificar as demonstrações de absoluticidade de funções definidas:

Lema 2.3.5. Para toda álgebra booleana completa $\mathscr{B}$ e toda função $F(x_1,...,x_n)$ definível, temos que $F(x_1,...,x_n)$ é absoluta se, e somente se, para todo $x_1,...,x_n$, $\mathbb{1} \Vdash$ "$(F(x_1,...,x_n))\check{} = F((x_1)\check{},...,(x_n)\check{})$".

Demonstração. Defina, neste lema, a fórmula $\phi(y,x_1,...,x_n)$, que representa $y = F(x_1,...,x_n)$.

Suponha a absoluticidade de $\phi(y,x_1,...,x_n)$. É fácil provar que vale a veracidade de $\phi(F(x_1,...,x_n),x_1,...,x_n)$. Assim, a hipótese implica que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\phi((F(x_1,...,x_n))\check{},(x_1)\check{},...,(x_n)\check{})$", isto é, $\mathbb{1} \Vdash$ "$(F(x_1,...,x_n))\check{} = F((x_1)\check{},...,(x_n)\check{})$", provando assim o lema.

Suponha agora a veracidade do lema. A absoluticidade será provada caso provarmos a absoluticidade da fórmula $\phi(y,x_1,...,x_n)$. Seja $y,x_1,...,x_n$ arbitrários, suponha que $\phi(y,x_1,...,x_n)$ seja verdade, então $y = F(x_1,...,x_n)$. A absoluticidade do $=$ implica facilmente que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\check{y} = (F(x_1,...,x_n))\check{}$", mas como supomos que $\mathbb{1} \Vdash$ "$(F(x_1,...,x_n))\check{} = F((x_1)\check{},...,(x_n)\check{})$", segue que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\check{y} = F((x_1)\check{},...,(x_n)\check{})$", isto é, $\mathbb{1} \Vdash$ "$\phi(\check{y},(x_1)\check{},...,(x_n)\check{})$". Agora, suponha a falsidade de $\phi(y,x_1,...,x_n)$, isto é, a veracidade de $\sim \phi(y,x_1,...,x_n)$. Então vale $y \neq F(x_1,...,x_n)$, de onde provamos, pela absoluticidade de $=$, que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\check{y} \neq (F(x_1,...,x_n))\check{}$". Como já sabemos que $\mathbb{1} \Vdash$ "$(F(x_1,...,x_n))\check{} = F((x_1)\check{},...,(x_n)\check{})$", segue que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\check{y} \neq F((x_1)\check{},...,(x_n)\check{})$", isto é, $\mathbb{1} \Vdash$ "$\sim \phi(\check{y},(x_1)\check{},...,(x_n)\check{})$". □

Como observamos acima, $x\mathbf{R}y$ implica, obrigatoriamente, $x,y \in \mathbf{A}$. Por causa disso, a classe $\{x : x \in \mathbf{R}(y)\}$ equivale à classe $\{x \in \mathbf{A} : x \in \mathbf{R}(y)\} = \{x \in \mathbf{A} : x\mathbf{R}y\}$. Como é provável e igualmente válido em $\mathscr{B}$ que **R** *é set-like*, então $\mathbf{R}(y)$ é um conjunto e assim função definível e class-preserving. Logo, o Teorema 2.2.8 implica que a função $\{x : x \in \mathbf{R}(y)\} = \mathrm{pred}(\mathbf{A},y,\mathbf{R})$ é absoluta, isto é, para todo $x \in \mathbf{A}$, $\mathbb{1} \Vdash$ "$(\mathrm{pred}(\mathbf{A},x,\mathbf{R}))\check{} = \mathbf{pred}(\mathbf{A},\check{x},\mathbf{R})$".

O principal uso dos axiomas de ZFC aqui é provar que a definição de $\mathbf{G} : \mathbf{A} \to \mathbf{V}$ faz sentido. Pois, uma vez determinada uma relação **R** sobre a classe **A** que satisfaça as propriedades: **R** *é set-like sobre* **A** e **R** *é bem fundado*, e fixando uma função $F : \mathbf{A} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, podemos definir uma função $G : \mathbf{A} \to \mathbf{V}$ que satisfaça a propriedade e provar que uma única definição pode satisfazer tal propriedade. O modo de definir G é o seguinte: podemos dizer que um conjunto $X \subset \mathbf{A}$ é **fechado** quando, para todo $x \in X$, $\mathrm{pred}(\mathbf{A},x,\mathbf{R}) \subset X$ e podemos provar que, para todo $x \in \mathbf{A}$, existe função f com $x \in \mathrm{dom}(f) \subset \mathbf{A}$, $\mathrm{dom}(f)$ fechado e, para todo $y \in \mathrm{dom}(f)$, $f(y) = F(y, f \upharpoonright \mathrm{pred}(\mathbf{A},x,\mathbf{R}))$, além disso, para quaisquer funções g,h satisfazendo essas propriedades, então $g(x) = h(x)$. Assim, podemos formalizar $y = G(x)$ como sendo a fórmula $\exists f\ f$ *é função*$\wedge \mathrm{dom}(f)$ *é fechado*$\wedge x \in \mathrm{dom}(f) \wedge y = f(x)$. Apesar de podermos usar essas propriedades e fórmulas para provar a absoluticidade, será mais fácil demonstrarmos-a através do lema acima.

Para provar a absoluticidade, usaremos o lema acima provando que, para todo $x \in \mathbf{A}$, $\mathbb{1} \Vdash$ "$(G(x))\check{} = G(\check{x})$". Provaremos isso por indução pela relação bem fundada $\mathbf{R}$, isto é, se valer $\mathbb{1} \Vdash$ "$(G(x))\check{} = G(\check{x})$" para todo $x \in \mathrm{pred}(\mathbf{A}, y, \mathbf{R})$, então vale $\mathbb{1} \Vdash$ "$(G(y))\check{} = G(\check{y})$".

Assuma a hipótese, vamos provar que ela implica que $\mathbb{1} \Vdash$ "$(G \restriction \mathrm{pred}(\mathbf{A}, y, \mathbf{R}))\check{} = G \restriction \mathrm{pred}(\mathbf{A}, \check{y}, \mathbf{R})$". A fórmula $g = G \restriction X$ é equivalente a g *é função*$\wedge \mathrm{dom}(g) = X \wedge \forall x \in X\ g(x) = G(x)$, logo, $[\![\mathbf{g} = G \restriction \mathrm{pred}(\mathbf{A}, \check{y}, \mathbf{R})]\!] = [\![\mathbf{g}$ *é função*$\wedge \mathrm{dom}(\mathbf{g}) = \mathbf{pred}(\mathbf{A}, \check{y}, \mathbf{R}) \wedge \forall x \in \mathbf{pred}(\mathbf{A}, \check{y}, \mathbf{R})\ \mathbf{g}(x) = G(x)]\!]$. Como a absoluticidade de $\mathrm{pred}(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})$ implica $\mathbb{1} \Vdash$ "$(\mathrm{pred}(\mathbf{A}, y, \mathbf{R}))\check{} = \mathbf{pred}(\mathbf{A}, \check{y}, \mathbf{R})$", a equação anterior é igual (pela igualdade lógico-booleana) a $[\![\mathbf{g}$ *é função*$\wedge \mathrm{dom}(\mathbf{g}) = (\mathbf{pred}(\mathbf{A}, y, \mathbf{R}))\check{} \wedge \forall x \in (\mathbf{pred}(\mathbf{A}, y, \mathbf{R}))\check{}\ \mathbf{g}(x) = G(x)]\!]$, que é igual a $[\![\mathbf{g}$ *é função*$]\!][\![\mathrm{dom}(\mathbf{g}) = (\mathrm{pred}(\mathbf{A}, y, \mathbf{R}))\check{}\,]\!][\![\forall x \in (\mathrm{pred}(\mathbf{A}, y, \mathbf{R}))\check{}\ \mathbf{g}(x) = G(x)]\!]$. Note que $[\![\forall x \in (\mathrm{pred}(\mathbf{A}, y, \mathbf{R}))\check{}\ \mathbf{g}(x) = G(x)]\!] = \prod_{x \in \mathrm{pred}(\mathbf{A}, y, \mathbf{R})} [\![\mathbf{g}(\check{x}) = G(\check{x})]\!]$. Já que, por hipótese, $[\![(G(x))\check{} = G(\check{x})]\!] = \mathbb{1}$, para todo $x \in \mathrm{pred}(\mathbf{A}, y, \mathbf{R})$, então, $\prod_{x \in \mathrm{pred}(\mathbf{A}, y, \mathbf{R})} [\![\mathbf{g}(\check{x}) = G(\check{x})]\!] = \prod_{x \in \mathrm{pred}(\mathbf{A}, y, \mathbf{R})} [\![\mathbf{g}(\check{x}) = (G(x))\check{}\,]\!]$. Façamos $\mathbf{g} = (G \restriction \mathrm{pred}(\mathbf{A}, y, \mathbf{R}))\check{}$, então por absoluticidade temos $[\![\mathbf{g}$ *é função*$]\!] = \mathbb{1}$ e $[\![\mathrm{dom}(\mathbf{g}) = (\mathrm{pred}(\mathbf{A}, y, \mathbf{R}))\check{}\,]\!] = \mathbb{1}$, também, por absoluticidade da fórmula $f(x) = y$, temos que, para todo $x \in \mathbf{pred}(\mathbf{A}, y, \mathbf{R})$, $[\![\mathbf{g}(\check{x}) = (G(x))\check{}\,]\!] = \mathbb{1}$. Portanto, $[\![\forall x \in (\mathrm{pred}(\mathbf{A}, y, \mathbf{R}))\check{}\ \mathbf{g}(x) = G(x)]\!] = \mathbb{1}$ e, consequentemente, $[\![(G \restriction \mathrm{pred}(\mathbf{A}, y, \mathbf{R}))\check{} = G \restriction \mathrm{pred}(\mathbf{A}, \check{y}, \mathbf{R})]\!] = \mathbb{1}$. Agora, a propriedade de G associado à igualdade lógico booleana implica que, para o nosso y particular, que $[\![G(\check{y}) = F(\check{y}, (\mathrm{pred}(\mathbf{A}, y, \mathbf{R}))\check{}\,)]\!]$. Então, podemos agora aplicar a absoluticidade da função F, provando que $[\![F(\check{y}, (\mathrm{pred}(\mathbf{A}, y, \mathbf{R}))\check{}\,) = (F(y, \mathrm{pred}(\mathbf{A}, y, \mathbf{R})))\check{}\,]\!] = \mathbb{1}$, de onde concluímos que $[\![(G(y))\check{} = G(\check{y})]\!]$, provando o passo de indução e assim a absoluticidade da função $G : \mathbf{A} \to \mathbf{V}$.

Nota: O que aconteceria caso $x \notin \mathbf{A}$? Nesse caso, teríamos $G'(x) = \emptyset$ e, portanto, é fácil provar que $\mathbb{1} \Vdash$ "$(G'(x))\check{} = G'(\check{x})$". Assim, o resultado do parágrafo acima implica que G' satisfaz o lema acima. Formalmente falando, é isso que assegura a absoluticidade de G. $\square$

Teorema 2.3.6. Para toda álgebra booleana completa $\mathscr{B}$, as seguintes funções e afirmações são absolutas:

1º. $A^n, n \in \omega$

2º. $A^{<\omega} = \bigcup_{n \in \omega} A^n$

3º. x *é finito*

Nota: No primeiro item, a definição é entendida como no estilo $F : \mathbf{V} \times \omega \to \mathbf{V}$, onde ω é classe absoluta (de fato, é um conjunto, portanto class-preserving). Como os dois primeiros itens são de fato conjuntos, o Teorema 2.2.8 implica que são class-preserving.

Demonstração. **1º**: $A^{\emptyset} = \{\emptyset\}$, portanto, evidentemente A^n é absoluto quando $n = 0$ através do Teorema 2.2.3. Caso $n \geq 1$, usaremos o Teorema 1.3.42, sabendo que o Teorema 1.3.47 implica que toda álgebra booleana completa é n-distributiva.

Para fins de simplificação, denotaremos por $f : n \to A$ a afirmação *f é função*$\wedge \text{dom}(f) = n \wedge \text{im}(f) \subset A$, que é absoluta pelas técnicas que temos até o momento. Com isso provamos que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\mathbf{f} \in (A^n)\check{} \to \mathbf{f} \in \check{A}^{\check{n}}$", sendo $\mathbf{f}$ nome arbitrário. Se formos capazes de provar a volta, isto é, $\mathbb{1} \Vdash$ "$\mathbf{f} \in \check{A}^{\check{n}} \to \mathbf{f} \in (A^n)\check{}$", conseguiremos provar que $\mathbb{1} \Vdash$ "$(A^n)\check{} = \check{A}^{\check{n}}$", permitindo-nos provar a absoluticidade graças ao lema do teorema acima.

ZFC junto com a lógica implica que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\mathbf{f} \in \check{A}^{\check{n}} \to (\mathbf{f} : \check{n} \to \check{A})$". Do mesmo modo, vale $\mathbb{1} \Vdash$ "$(\mathbf{f} : \check{n} \to \check{A}) \to \forall x \in \check{n}\ \exists y \in \check{A}\ \mathbf{f}(x) = y$". Combinando as duas afirmações e escrevendo-a de outro modo, temos $[\![\mathbf{f} \in \check{A}^{\check{n}}]\!] \leq [\![\forall x \in \check{n}\ \exists y \in \check{A}\ \mathbf{f}(x) = y]\!] = \prod_{m<n} \sum_{a \in A} [\![\mathbf{f}(\check{m}) = \check{a}]\!]$. Usando agora o Teorema 1.3.42, obtemos que $\prod_{m<n} \sum_{a \in A} [\![\mathbf{f}(\check{m}) = \check{a}]\!] = \sum_{g \in A^n} \prod_{m<n} [\![\mathbf{f}(\check{m}) = (g(m))\check{}\,]\!]$, logo, $[\![\mathbf{f} \in \check{A}^{\check{n}}]\!] \leq \sum_{g \in A^n} \prod_{m<n} [\![\mathbf{f}(\check{m}) = (g(m))\check{}\,]\!]$. Por absoluticidade da definição $f(x)$, temos que, para todo $m < n$ e todo $g \in A^n$, $[\![(g(m))\check{} = \check{g}(\check{m})]\!] = \mathbb{1}$. Assim, pela igualdade lógico booleana, $[\![\mathbf{f} \in \check{A}^{\check{n}}]\!] \leq \sum_{g \in A^n} \prod_{m<n} [\![\mathbf{f}(\check{m}) = \check{g}(\check{m})]\!]$, isto é, $\mathbb{1} \Vdash$ "$\mathbf{f} \in \check{A}^{\check{n}} \to \exists g \in (A^n)\check{}\ \forall m \in \check{n}\ \mathbf{f}(m) = g(m)$". Trabalhando com as definições, vale $\mathbb{1} \Vdash$ "$\mathbf{f} \in \check{A}^{\check{n}} \to \text{dom}(\mathbf{f}) = \check{n}$" e, como já provamos que $\mathbb{1} \Vdash$ "$(A^n)\check{} \subset \check{A}^{\check{n}}$", também vale $\mathbb{1} \Vdash$ "$\mathbf{g} \in (A^n)\check{} \to \text{dom}(\mathbf{g}) = \check{n}$". Portanto, $\mathbb{1} \Vdash$ "$\mathbf{f} \in \check{A}^{\check{n}} \to \exists g \in (A^n)\check{}\,((\forall m \in \check{n}\ \mathbf{f}(m) = g(m))\text{dom}(\mathbf{f}) = \check{n} \wedge \text{dom}(g) = \check{n})$", de onde extraímos $\mathbb{1} \Vdash$ "$\mathbf{f} \in \check{A}^{\check{n}} \to \exists g \in (A^n)\check{}\ \mathbf{f} = g$", isto é, $\mathbb{1} \Vdash$ "$\check{A}^{\check{n}} \subset (A^n)\check{}$", como queríamos provar.

2º: Note primeiramente que $\{A^n : n \in \omega\}$ é definição absoluta, pois $y = \{A^n : n \in \omega\}$ equivale a $(\forall n \in \omega\ A^n \in y) \wedge (\forall x \in y\ \exists n \in \omega\ x = A^n)$, que é fórmula absoluta que usa definições absolutas. Assim, basta usar o Teorema 2.2.3. O mesmo teorema prova a absoluticidade de $A^{<\omega}$, pois $A^{<\omega} = \bigcup\{A^n : n \in \omega\}$, função absoluta que usa definições absolutas.

3º: *x é finito* equivale à fórmula $\exists f \in x^{<\omega}$ *f é injetora*$\wedge \text{im}(f) = x$, fórmula absoluta que usa definições absolutas, portanto absoluta. □

Teorema 2.3.7. Dado uma álgebra booleana completa $\mathscr{B}$, as seguintes fórmulas e definições são absolutas:

1º *R é boa ordem de A*

2º $\text{type}(A, R)$

Demonstração. **1º**: Quando consideramos um conjunto R como uma relação, dizemos que vale xRy quando valer $(x, y) \in R$, por causa disso, xRy é afirmação absoluta para qualquer conjunto R (mesmo que não seja relação). Note que *R é boa ordem de A* equivale a *R é ordem de* $A \wedge \forall X \subset A(X \neq \emptyset \to \exists x \in X\ \forall y \in X\ xRy)$, onde *R é ordem de A* equivale a $R \subset A \times A$ (portanto, R é uma relação) e, para todo x, y, z:

- xRx

- $(xRy \wedge yRx) \to x = y$
- $(xRy \wedge yRz) \to xRz$

(ou seja, falamos de ordem no sentido *fraco*). Assim, é fácil provar a absoluticidade de *R é ordem de A* pelos teoremas provados até o momento, porém não podemos dizer o mesmo de $\forall X \subset A(X \neq \emptyset \to \exists x \in X\ \forall y \in X\ xRy)$, por não ser equivalente a uma Δ_0-fórmula (por causa do quantificador $\forall X \subset A$). Mas existe uma maneira de contornar isso, usando ZFC, podemos provar que *R é boa ordem de A* é equivalente a $\exists \alpha$ *ordinal* $\exists f$ *f é isomorfismo de ordem entre* (A,R) *e* α (lembre-se, em um ordinal, $\xi \leq \eta$ se, e somente se, $\xi \subset \eta$). Então, suponha que vale *R é boa ordem de A*, assim, existe função f com $\mathrm{dom}(f) = A$, $\mathrm{im}(f)$ é ordinal e que denota um isomorfismo entre (A,R) e $\mathrm{im}(f)$, isto é, $\forall x,y \in A\ xRy \leftrightarrow f(x) \subset f(y)$. Sendo todas essas fórmulas absolutas, obtemos a afirmação $[\![\mathrm{im}(\check{f})$ *é ordinal*$\wedge \check{f}$ *é isomorfismo de ordem entre* $(\check{A},\check{R})$ *e* $\mathrm{im}(\check{f})]\!] = \mathbb{1}$ e, consequentemente, $\mathbb{1} \Vdash$ "$\exists \alpha$ *ordinal* $\exists f$ *f é isomorfismo entre* $(\check{A},\check{R})$ *e* α". Portanto, pela validade dos axiomas de ZFC, $\mathbb{1} \Vdash$ "$\check{R}$ *é boa ordem de* $\check{A}$".

Agora, suponha que vale $\sim$ *R é boa ordem de A*, isto é, $\sim$ (*R é ordem de A*)$\vee \sim (\forall X \subset A(X \neq \emptyset \to \exists x \in X\ \forall y \in X\ xRy))$. Como já provamos a absoluticidade da fórmula *R é ordem de A*, podemos restringir nossa demonstração ao caso (*R é ordem de A*)$\wedge \sim (\forall X \subset A(X \neq \emptyset \to \exists x \in X\ \forall y \in X\ xRy))$. Note que $\sim (\forall X \subset A(X \neq \emptyset \to \exists x \in X\ \forall y \in X\ xRy))$ equivale a $\exists X\ X \subset A \wedge X \neq \emptyset \wedge \forall x \in X\ \exists y \in X\ \sim (xRy)$. Fixe X satisfazendo essa propriedade, por absoluticidade, $\mathbb{1} \Vdash$ "$\check{X} \subset \check{A} \wedge \check{X} \neq \emptyset \wedge \forall x \in \check{X}\ \exists y \in \check{X}\ \sim (x\check{R}y)$", logo, $\mathbb{1} \Vdash$ "$\exists X\ X \subset \check{A} \wedge X \neq \emptyset \wedge \forall x \in X\ \exists y \in X\ \sim (x\check{R}y)$". Portanto, $\mathbb{1} \Vdash$ "$\sim$ ($\check{R}$ *é boa ordem de* $\check{A}$)", concluindo assim a demonstração do item. Nesse parágrafo a demonstração foi feita diretamente através da definição.

2º: Aqui, para a definição fazer sentido, ela deve ser da forma: $\alpha = \mathrm{type}(A,R) \Leftrightarrow$ (*R é boa ordem de A* $\wedge$ α *é ordinal*$\wedge \exists f$ *f é isomorfismo de ordem entre* (A,R) *e* α) $\vee$ ($\sim$ (*R é boa ordem de A*) $\wedge\ \alpha = \emptyset$). Como já provamos a absoluticidade das fórmulas presentes em $\sim$ (*R é boa ordem de A*) $\wedge\ \alpha = \emptyset$, podemos seguramente ignorá-la nessa demonstração. Suponha que vale *R é boa ordem de A* $\wedge$ α *é ordinal*$\wedge \exists f$ *f é isomorfismo de ordem entre* (A,R) *e* α. Então, de modo análogo à demonstração acima, podemos provar que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\check{\alpha}$ *é ordinal*$\wedge \exists f$ *f é isomorfismo de ordem entre* $(\check{A},\check{R})$ *e* $\check{\alpha}$" que, combinando com a absoluticidade provada no item anterior, temos que $\alpha = \mathrm{type}(A,R)$ implica que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\check{\alpha} = \mathrm{type}(\check{A},\check{R})$".

Agora, suponha que vale $\sim$ (*R é boa ordem de A* $\wedge$ α *é ordinal*$\wedge \exists f$ *f é isomorfismo de ordem entre* (A,R) *e* α), isto é, $\sim$ (*R é boa ordem de A*)$\vee \sim$ (α *é ordinal*)$\vee \sim$ ($\exists f$ *f é isomorfismo de ordem entre* (A,R) *e* α). Como já provamos que a duas primeiras afirmações são absolutas, podemos nos restringir ao caso *R é boa ordem de A* $\wedge$ α *é ordinal*$\wedge \sim$ ($\exists f$ *f é isomorfismo de ordem entre* (A,R) *e* α). Como *R é boa ordem de A*, existe ordinal β com $\beta = \mathrm{type}(A,R)$. Mas, como é falso que $\exists f$ *f é isomorfismo de ordem entre* (A,R) *e* α, temos que $\beta \neq \alpha$. Portanto, vale $\mathbb{1} \Vdash$ "$\check{\beta} \neq \check{\alpha}$" e, usando o que provamos no parágrafo acima, $\mathbb{1} \Vdash$ "$\check{\beta} = \mathrm{type}(\check{A},\check{R})$", de onde tiramos $\mathbb{1} \Vdash$ "$\check{\alpha} \neq \mathrm{type}(\check{A},\check{R})$", provando assim a absoluticidade da definição $\mathrm{type}(A,R)$. $\square$

Teorema 2.3.8. Para qualquer álgebra booleana completa $\mathscr{B}$, a classe dos ordinais **ON** é $\mathscr{B}$-cp.

Demonstração. A demonstração aqui utilizada foi extraída de (JECH, 1978, 174).

Já provamos a absoluticidade da afirmação α *é ordinal*, então, para todo $\alpha \in \mathbf{ON}$, $[\![\check{\alpha} \in \mathbf{ON}]\!] = \mathbb{1}$. Agora, fixe $\mathbf{x}$ nome. Para todo ordinal α, $[\![\mathbf{x} = \check{\alpha}]\!] = [\![\mathbf{x} = \check{\alpha}]\!][\![\check{\alpha} \in \mathbf{ON}]\!] \leq [\![\mathbf{x} \in \mathbf{ON}]\!]$ (a parte $\leq$ foi obtida por inferência lógica), assim, $\sum_{\alpha \in \mathbf{ON}}[\![\mathbf{x} = \check{\alpha}]\!] \leq [\![\mathbf{x} \in \mathbf{ON}]\!]$. Por outro lado, é um teorema de ZFC que, se x, y são ordinais, então vale uma das seguintes afirmações: $x \in y$, $x = y$ ou $y \in x$. Portanto, para todo ordinal α, $[\![\mathbf{x} \in \mathbf{ON}]\!] = [\![\mathbf{x} \in \mathbf{ON}]\!][\![\check{\alpha} \in \mathbf{ON}]\!] \leq [\![\mathbf{x} \in \check{\alpha} \vee \mathbf{x} = \check{\alpha} \vee \check{\alpha} \in \mathbf{x}]\!] = [\![\mathbf{x} \in \check{\alpha}]\!] + [\![\mathbf{x} = \check{\alpha}]\!] + [\![\check{\alpha} \in \mathbf{x}]\!]$. Digo que existe um ordinal α tal que $[\![\check{\alpha} \in \mathbf{x}]\!] = \mathbb{0}$. Pois, $[\![\check{\alpha} \in \mathbf{x}]\!] = \sum_{t \in \mathrm{dom}(\mathbf{x})} \mathbf{x}(t)[\![\check{\alpha} = t]\!]$ e, para cada $t \in \mathrm{dom}(\mathbf{x})$ e $u \in \mathscr{B} - \{\mathbb{0}\}$, existe no máximo um ordinal ξ tal que $[\![\check{\xi} = t]\!] = u$, pois, se existirem $\eta \neq \xi$ satisfazendo essa última propriedade para um dado t, então $u = [\![\check{\xi} = t]\!][\![\check{\eta} = t]\!] \leq [\![\check{\xi} = \check{\eta}]\!] = \mathbb{0}$ (lembre-se, $\mathbb{1} \Vdash$ "$\check{\xi} \neq \check{\eta}$"), absurdo. Assim, basta escolher um ordinal α maior do que todos os ordinais ξ tais que $[\![\check{\xi} = t]\!] = u$, para algum $t \in \mathrm{dom}(\mathbf{x})$ e $u \in \mathscr{B} - \{\mathbb{0}\}$. Desse modo, $[\![\check{\alpha} = t]\!] = \mathbb{0}$, para todo $t \in \mathrm{dom}(\mathbf{x})$ e, portanto, $\check{\alpha} \in \mathbf{x} = \mathbb{0}$. Para esse α, temos que $[\![\mathbf{x}$ *é ordinal*$]\!] \leq [\![\mathbf{x} \in \check{\alpha}]\!] + [\![\mathbf{x} = \check{\alpha}]\!]$, isto é, $\mathbb{1} \Vdash$ "$\mathbf{x}$ *é ordinal*$\rightarrow$ $(\mathbf{x} \in \check{\alpha} \vee \mathbf{x} = \check{\alpha})$". Com isso, concluímos que $[\![\mathbf{x}$ *é ordinal*$]\!] \leq [\![\mathbf{x} \in \check{\alpha} \vee \mathbf{x} = \check{\alpha}]\!] = \sum_{\xi < \alpha+1}[\![\mathbf{x} = \check{\xi}]\!] \leq \sum_{\beta \in \mathbf{ON}}[\![\mathbf{x} = \check{\beta}]\!]$. Portanto $[\![\mathbf{x}$ *é ordinal*$]\!] = \sum_{\gamma \in \mathbf{ON}}[\![\mathbf{x} = \check{\gamma}]\!]$, provando que **ON** é cp. $\square$

Teorema 2.3.9. Para toda álgebra booleana completa $\mathscr{B}$, a classe dos construtíveis **L** é $\mathscr{B}$-cp.

Demonstração. Por definição, $\mathbf{L} = \bigcup_{\alpha \in \mathbf{ON}} L(\alpha)$, onde $L : \mathbf{ON} \to \mathbf{V}$ é uma função definida por recursão que podemos provar ser absoluta através das técnicas demonstradas até agora, principalmente o Teorema 2.3.4. Então, $x \in \mathbf{L}$ equivale, por definição, a $\exists \alpha \in \mathbf{ON}\ x \in L(\alpha)$. Já que provamos acima que **ON** é cp, o Teorema 2.2.6 implica que $[\![\mathbf{x} \in \mathbf{L}]\!] = \sum_{\alpha \in \mathbf{ON}}[\![\mathbf{x} \in L(\check{\alpha})]\!]$. A absoluticidade da função L, por sua vez, implica que $[\![\mathbf{x} \in L(\check{\alpha})]\!] = [\![\mathbf{x} \in (L(\alpha))\check{}\,]\!] = \sum_{a \in L(\alpha)}[\![\mathbf{x} = \check{a}]\!]$. Portanto, $[\![\mathbf{x} \in \mathbf{L}]\!] = \sum_{\alpha \in \mathbf{ON}} \sum_{a \in L(\alpha)}[\![\mathbf{x} = \check{a}]\!] = \sum_{a \in \mathbf{L}}[\![\mathbf{x} = \check{a}]\!]$, como queríamos provar. $\square$

Todos os teoremas relativos à absoluticidade e class-preserving provados nessas duas últimas seções, a partir daqui, serão denotadas como uma unidade para justificar que certas afirmações e classes citadas são, respectivamente, absolutas ou class-preserving.

Uma das consequências das técnicas de absoluticidade e class-preserving é que todas as afirmações provadas serem absolutas em modelos transitivos nos capítulos **IV**, **V** e **VI** do livro (KUNEN, 1980) são absolutas no sentido desse texto. A razão disso é que as duas últimas seções se preocuparam em provar versões equivalentes dos teoremas usados nesse livro para provar tais absoluticidades, portanto, basta fazer adaptações nas demonstrações. De fato, o Teorema 2.2.2, resume em um só teorema as versões equivalentes dos Lemas **IV** 3.2, **IV** 3.4 e **IV** 3.7, junto aos Corolários **IV** 3.3 e **IV** 3.6, o Teorema 2.2.3 se trata da versão equivalente ao Lema **IV** 3.10, o Teorema 2.3.4 equivale ao Teorema **IV** 5.6, e, por fim, os Teoremas 2.3.6 e 2.3.7 são as versões equivalentes, respectivamente, dos Teoremas **IV** 5.3 e **IV** 5.4. Apesar de termos alguns desses teoremas enquanto ainda não tínhamos provados a lista completa, ou mesmo antes de termos provado a validade dos axiomas de ZFC (necessários para muitas demonstrações que usam a última afirmação do Teorema 2.2.2), esse livro deixa bem claro que apenas o que tínhamos provado até aquele momento era o suficiente para provar a absoluticidade. Porém, o leitor que quiser verificar esse fato, irá encontrar dificuldade em adaptar as demonstrações, sendo o mais complexo o Teorema 2.3.4, onde as hipóteses foram, em relação ao seu equivalente no livro, as mais modificadas entre todas. Porém, o leitor não encontrará dificuldades em provar, usando os teoremas dessas duas últimas seções, principalmente os que se referem a class-preserving, que as classes e funções usadas nas demonstrações do livro que usam tal teorema satisfazem, de fato, as hipóteses requeridas no Teorema 2.3.4.

2.4 Descrição da Técnica

Dado um forcing $\mathbb{P}$ e $p \in \mathbb{P}$, vamos definir $\mathfrak{D}_{\mathbb{P}}^{p}$ como sendo $\{D \subset \mathbb{P} : D$ *é denso abaixo de* $p\}$. Em particular, denotaremos $\mathfrak{D}_{\mathbb{P}}^{\mathbb{1}}$ como $\mathfrak{D}_{\mathbb{P}}$. Dada uma álgebra booleana completa $\mathscr{B}$, definimos $\Gamma \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}$ como sendo $\{(\breve{u}, u) : u \in \mathscr{B}\}$. Fixado uma embarcação $i : \mathbb{P} \to \mathscr{B}$ (que, devido ao Teorema 1.3.15, pode ser um homomorfismo completo injetor, caso o forcing for uma álgebra booleana completa), definiremos o nome $\Gamma_i \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}$ como $\{(\breve{p}, i(p)) : p \in \mathbb{P}\}$.

Vamos iniciar essa seção provando o fato anteriormente citado de que, dada uma fórmula ϕ sem variáveis livres, caso valer $[\![\phi]\!] > \mathbb{0}$ para alguma álgebra booleana completa $\mathscr{B}$ (equivalente ao fato de ϕ ser $[\![\phi]\!]$-válida), então ϕ é consistente com ZFC.

Teorema 2.4.1. Dada uma fórmula ϕ sem variáveis livres, caso valer $[\![\phi]\!] > \mathbb{0}$ para alguma álgebra booleana completa $\mathscr{B}$, então ϕ é consistente com ZFC, isto é, vale Con(ZFC) $\to$ Con(ZFC + ϕ).

Demonstração. Suponha que ZFC + ϕ seja inconsistente, isto é, existe fórmula ψ tal que $\text{ZFC} + \phi \vdash \psi \wedge \sim \psi$. Desse fato, podemos derivar que $\text{ZFC} \vdash \phi \to (\psi \wedge \sim \psi)$. Com isso, podemos derivar, pelo Corolário 2.3.3 que a fórmula $\phi \to (\psi \wedge \sim \psi)$ é válida, ou seja, $[\![\phi]\!] \leq [\![\psi \wedge \sim \psi]\!]$ (independentemente de que nome atribuímos às variáveis livres de ψ, caso ela tenha). Porém, é sempre verdade que $[\![\psi \wedge \sim \psi]\!] = [\![\psi]\!](-[\![\psi]\!]) = \mathbb{0}$, portanto $[\![\phi]\!] \leq \mathbb{0}$, absurdo com o fato de que $[\![\phi]\!] > \mathbb{0}$, concluindo a demonstração (aqui estamos supondo que usamos unicamente ZFC para assegurar que $[\![\phi]\!] > \mathbb{0}$). $\square$

O teorema acima mostra o princípio de como usar a técnica de forcing para provar consistências de teorias que estendem ZFC. A forma geral de como funciona a técnica de forcing na teoria dos conjuntos está no próximo teorema:

Teorema 2.4.2. Fixe uma certa teoria S que estende ZFC e seja T uma outra teoria arbitrária. Caso exista uma álgebra booleana completa $\mathscr{B}$ onde, no universo dos nomes $\mathbf{V}^{\mathscr{B}}$, para toda lista finita $\phi_1,...,\phi_n$ de axiomas de T, podemos provar, usando S, que existe $u \in \mathscr{B} - \{\mathbb{0}\}$ tal que $\phi_1,...,\phi_n$ são todas u-válidas, então temos que T é consistente caso S assim o seja, isto é, em notação de metateoria, $\mathrm{Con}(\mathrm{S}) \to \mathrm{Con}(\mathrm{T})$.

Demonstração. Aqui, vamos provar que, caso T seja inconsistente, S também será inconsistente, o suficiente para provar o teorema. Seja ψ uma fórmula tal que $\mathrm{T} \vdash \psi \wedge \sim \psi$, portanto, existe $\phi_1,...,\phi_n$ lista finita de axiomas de T tal que $\phi_1,...,\phi_n \vdash \psi \wedge \sim \psi$. Fixe $u \in \mathscr{B} - \{\mathbb{0}\}$ para o qual as fórmulas $\phi_1,...,\phi_n$ sejam todas u-válidas. Então, o Teorema 2.1.15 implica que $\mathrm{S} \vdash (\psi \wedge \sim \psi)$ *é u-válido*, ou seja $\mathrm{S} \vdash u \leq [\![\psi]\!] \cdot (-[\![\psi]\!])$ (caso ψ possua variáveis livres, precisamos fixar um nome arbitrário para cada uma delas, embora que, uma vez provada tal inconsistência, podemos obter a mesma contradição com ψ totalmente quantificado), todavia $\mathrm{S} \vdash [\![\psi]\!] \cdot (-[\![\psi]\!]) = \mathbb{0}$, um absurdo já que supomos $u \in \mathscr{B} - \{\mathbb{0}\}$. □

Nota: Para o leitor que ainda tem dúvidas sobre a demonstração *metateórica* acima, acredito que a seguinte digressão será suficiente para eliminar as dúvidas. Primeiramente, o leitor precisa ter em mente que é crucial se ter o conhecimento de uma demonstração de $\psi \wedge \sim \psi$ a partir de T (cuja definição está no apêndice). Com a demonstração, podemos selecionar os axiomas $\phi_1,...,\phi_n \in \mathrm{T}$ que são de fato usados, e provar, através do Teorema 2.1.15, já que S é extensão de ZFC, que $\mathrm{S} \vdash \forall u \in \mathscr{B} - \{\mathbb{0}\}((\phi_1 \textit{ é u-válido} \wedge ... \wedge \phi_n \textit{ é u-válido}) \to (\psi \wedge \sim \psi)$ *é u-válido*). A hipótese é usada para garantir que $\mathrm{S} \vdash \exists u \in \mathscr{B} - \{\mathbb{0}\}(\phi_1 \textit{ é u-válido} \wedge ... \wedge \phi_n$ *é u-válido*) (o fato do u ser igual em todas as validades é crucial). Com essas duas afirmações, podemos derivar $\mathrm{S} \vdash \exists u \in \mathscr{B} - \{\mathbb{0}\}(\psi \wedge \sim \psi)$ *é u-válido*. O absurdo é que podemos provar que $\mathrm{S} \vdash [\![\psi \wedge \sim \psi]\!] = \mathbb{0}$ (mais precisamente, $\mathrm{ZFC} \vdash [\![\psi \wedge \sim \psi]\!] = \mathbb{0}$).

No teorema acima, ao contrário do teorema anterior, foi preciso substituir valor booleano maior que $\mathbb{0}$ por u-validade para $u > \mathbb{0}$, isso se deve ao fato de que é possível que alguns axiomas de T possuam variáveis livres (embora que, é possível quantificar universalmente tais axiomas sem prejuízo da teoria). Note também que foi preciso lidar com cada *lista finita* de axiomas possíveis ao invés de *cada axioma separadamente*. Isso se deve ao fato de poder acontecer que, apesar de uma lista finita de afirmações serem consistentes separadamente, elas não são consistentes em conjunto. Um exemplo simples seria duas fórmulas sem variáveis livres ϕ,ψ tais que $[\![\phi]\!] > \mathbb{0}$, $[\![\psi]\!] > \mathbb{0}$ e $[\![\phi]\!][\![\psi]\!] = \mathbb{0}$, apesar do teorema anterior afirmar que Con(ZFC) $\to$ Con(ZFC + ϕ) e Con(ZFC) $\to$ Con(ZFC + ψ), vale, uma vez que $[\![\sim (\phi \wedge \psi)]\!] = \mathbb{1}$, Con(ZFC) $\to$ Con(ZFC + $\sim (\phi \wedge \psi)$).

Uma vez tendo demonstrado o Teorema 2.3.1, podemos supor que T é uma extensão de ZFC, independentemente do $u \in \mathscr{B} - \{\mathbb{0}\}$ que tomemos em cada lista finita, e isso nós faremos ao longo desse texto. Podemos acrescentar ainda que, caso já tivéssemos uma demonstração metateórica de $\mathrm{Con}(\mathrm{S}') \to \mathrm{Con}(\mathrm{S})$, podemos obter que $\mathrm{Con}(\mathrm{S}') \to \mathrm{Con}(\mathrm{T})$. Isso nos permitirá provar $\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC}) \to \mathrm{Con}(\mathrm{T})$, usando a técnica apenas para provar que $\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC}+\mathbf{V} = \mathbf{L}) \to \mathrm{Con}(\mathrm{T})$, já que existe uma demonstração bem conhecida de $\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC}) \to \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC}+\mathbf{V} = \mathbf{L})$.

Apesar da enorme generalidade do teorema acima, na maior parte das vezes nesse texto, usaremos um corolário mais simples de mencionar do teorema acima.

Corolário 2.4.3. Fixe uma certa teoria S que estende ZFC e seja T uma outra teoria arbitrária. Caso exista uma álgebra booleana completa $\mathscr{B}$ tal que, no universo dos nomes $\mathbf{V}^{\mathscr{B}}$, toda fórmula de T é válida, então temos que T é consistente caso S assim o seja, isto é Con(S) $\rightarrow$ Con(T).

Mas, para encontrar um T interessante que satisfaça as propriedades da hipótese do teorema (ou o corolário) acima (uma vez fixado S), precisamos de ferramentas que nos permitam calcular o valor booleano de diversas fórmulas de interesse no universo de nomes especificado, essas ferramentas se desembocam em duas vertentes:

1. Ferramentas que asseguram que fórmulas anteriormente verdadeiras, continuam, de certo modo, "verdadeiras";
2. Ferramentas que nos permitem calcular o valor booleano de fórmulas "novas".

As ferramentas enunciadas no item 1 consistem, basicamente, nas propriedades de absoluticidade e class-preserving que foram o objetivo das seções anteriores. Já o item 2, a sua principal constituição são os teoremas 2.1.14 e 2.1.15.

No item 2, a abordagem padrão será, após provar que certas afirmações $\phi_1, ..., \phi_n$ satisfazem $u \Vdash$ "ϕ_1"$, ..., u \Vdash$ "ϕ_n", para nomes específicos e algum $u \in \mathscr{B} - \{\mathbb{0}\}$, provar que, como consequência, $u \Vdash$ "ψ" para alguma afirmação ψ e para esses nomes específicos, argumentando de modo parecido a como se argumentaria para provar que tal fórmula é consequência das primeiras através da teoria T (uma vez já tendo assegurado que cada fórmula de T é u-válida, ou pelo menos as fórmulas que serão usadas). Esse argumento de fato "faz sentido", para formalizá-lo, primeiramente precisamos formalizar a demonstração para comprovar que, de fato, vale $T \vdash (\phi_1 \wedge ... \wedge \phi_n) \rightarrow \psi$. Com isso, agora poderemos usar o Teorema 2.1.15, com o u satisfazendo a propriedade acima, e provar que $(\phi_1 \wedge ... \wedge \phi_n) \rightarrow \psi$ é u-válido. Depois disso, fixe os nomes nos quais sabemos que vale $u \Vdash$ "ϕ_1"$, ..., u \Vdash$ "ϕ_n" e, consequentemente, $u \Vdash$ "$\phi_1 \wedge ... \wedge \phi_n$", isto é, $u \leq [\![\phi_1 \wedge ... \wedge \phi_n]\!]$. Agora, basta proceder da seguinte forma: $(\phi_1 \wedge ... \wedge \phi_n) \rightarrow \psi$ ser u-válida implica $u \Vdash$ "$(\phi_1 \wedge ... \wedge \phi_n) \rightarrow \psi$", isto é, $u \leq [\![(\phi_1 \wedge ... \wedge \phi_n) \rightarrow \psi]\!] = -[\![(\phi_1 \wedge ... \wedge \phi_n)]\!] + [\![\psi]\!]$. Então, já sabemos que $u \leq [\![\phi_1 \wedge ... \wedge \phi_n]\!]$ e $u \leq -[\![\phi_1 \wedge ... \wedge \phi_n]\!] + [\![\psi]\!]$. Multiplicando ambas as fórmulas, obtemos $u = uu \leq [\![(\phi_1 \wedge ... \wedge \phi_n)]\!](-[\![(\phi_1 \wedge ... \wedge \phi_n)]\!] + [\![\psi]\!]) = [\![(\phi_1 \wedge ... \wedge \phi_n)]\!][\![\psi]\!] \leq [\![\psi]\!]$, isto é, $u \Vdash$ "ψ". Esse argumento nos permitirá, na maior parte do tempo, manipular a linguagem forcing desse universo de nomes como se ele fosse um universo para a teoria T. Na maior parte do tempo ao longo desse texto, o nosso S será ZFC e $u = \mathbb{1}$. Também poderemos omitir algumas fórmulas ϕ_i quando for fácil prová-las que $u \Vdash$ "ϕ_i", para os nomes específicos pretendidos.

Apesar do parágrafo acima e todos os teoremas envolvidos, para o item 2 funcionar como pretendemos, necessitaremos de alguma fórmula "interessante" no universo de nomes. Elas existem e serão abordadas até o fim dessa seção.

Teorema 2.4.4. Fixado $\mathscr{B}$ álgebra booleana completa, valem as seguintes afirmações:

a) $[\![\check{u} \in \Gamma]\!] = u$, para todo $u \in \mathscr{B}$

b) $\mathbb{1} \Vdash$ "Γ *é ultrafiltro de* $\check{\mathscr{B}}$"

c) $\mathbb{1} \Vdash$ "Γ *é* $(\mathfrak{D}_{\mathscr{B}})\check{}$ $-$*genérico*"

d) $\mathbb{1} \Vdash$ "$\check{u} \in \Gamma \to \Gamma$ *é* $(\mathfrak{D}^u_{\mathscr{B}})\check{}$ $-$*genérico*" para todo $u \in \mathscr{B} - \{\mathbb{0}\}$

Demonstração. **a**: Por definição de valor booleano e Γ, $[\![\check{u} \in \Gamma]\!] = \sum_{v \in \mathscr{B}}(v[\![\check{v} = \check{u}]\!])$. Por absoluticidade, se $v = u$ então $[\![\check{v} = \check{u}]\!] = \mathbb{1}$, caso contrário $[\![\check{v} = \check{u}]\!] = \mathbb{0}$. Assim, $\sum_{v \in \mathscr{B}}(v[\![\check{v} = \check{u}]\!]) = u[\![\check{u} = \check{u}]\!] = u\mathbb{1} = u$.

b: Primeiro, vamos assegurar que $[\![\Gamma \subset \check{\mathscr{B}}]\!] = \mathbb{1}$. De fato, por definição de Γ, $[\![\Gamma \subset \check{\mathscr{B}}]\!] = \prod_{u \in \mathscr{B}}(u \to [\![\check{u} \in \check{\mathscr{B}}]\!])$. Como, para todo $u \in \mathscr{B}$, $[\![\check{u} \in \check{\mathscr{B}}]\!] = \mathbb{1}$ (absoluticidade), temos $u \leq [\![\check{u} \in \check{\mathscr{B}}]\!]$, portanto, $u \to [\![\check{u} \in \check{\mathscr{B}}]\!] = \mathbb{1}$. Assim $[\![\Gamma \subset \check{\mathscr{B}}]\!] = \mathbb{1}$.

Para provar o teorema, vamos provar primeiro que $\mathbb{1} \Vdash$ "Γ *é filtro*". Para isso, vamos provar que cada um das propriedades citadas na Definição 1.1.10 tem valor booleano $\mathbb{1}$ para Γ, mas primeiro, note que todas as operações de $\mathscr{B}$ são absolutas (já que, por definição, elas são funções, a saber $+, \cdot : \mathscr{B} \times \mathscr{B} \to \mathscr{B}$ e $- : \mathscr{B} \to \mathscr{B}$), o mesmo podemos dizer das constantes de $\mathscr{B}$, como $u \leq v$ se, e somente se, $u \cdot v = \mathbb{0}$, então, a ordem de $\mathscr{B}$ também é absoluta (a ordem de um forcing também é absoluta pois a consideramos um conjunto relação).

Para o item **I**, usando a parte **a** deste teorema, $[\![\check{\mathbb{1}} \in \Gamma]\!] = \mathbb{1}$ e $[\![\check{\mathbb{0}} \notin \Gamma]\!] = -[\![\check{\mathbb{0}} \in \Gamma]\!] = -\mathbb{0} = \mathbb{1}$.

Para o item **II**, note que uma versão equivalente dele é $\forall u \in \mathscr{B}\ \forall v \in \mathscr{B}\ (u \in G \wedge v \in G) \to u \cdot v \in G$. Assim, $[\![\forall u \in \check{\mathscr{B}}\ \forall v \in \check{\mathscr{B}}\ (u \in \Gamma \wedge v \in \Gamma) \to u \check{\cdot} v \in \Gamma]\!] = \prod_{u \in \mathscr{B}} \prod_{v \in \mathscr{B}} [\![(\check{u} \in \Gamma \wedge \check{v} \in \Gamma) \to \check{u} \check{\cdot} \check{v} \in \Gamma]\!] = \prod_{u \in \mathscr{B}} \prod_{v \in \mathscr{B}} ([\![\check{u} \in \Gamma]\!][\![\check{v} \in \Gamma]\!]) \to [\![\check{u} \check{\cdot} \check{v} \in \Gamma]\!]$. Por absoluticidade de $\cdot$, $[\![\check{u} \check{\cdot} \check{v} = (u \cdot v)\check{}\ ]\!] = \mathbb{1}$, portanto, $[\![\check{u} \check{\cdot} \check{v} \in \Gamma]\!] = [\![(u \cdot v)\check{}\ \in \Gamma]\!]$ (igualdade lógico booleana). Logo, $\prod_{u \in \mathscr{B}} \prod_{v \in \mathscr{B}} ([\![\check{u} \in \Gamma]\!][\![\check{v} \in \Gamma]\!]) \to [\![\check{u} \check{\cdot} \check{v} \in \Gamma]\!] = \prod_{u \in \mathscr{B}} \prod_{v \in \mathscr{B}} ((uv) \to uv)$ e, evidentemente, $uv \to uv = \mathbb{1}$, provando que $[\![\forall u \in \check{\mathscr{B}}\ \forall v \in \check{\mathscr{B}}\ (u \in \Gamma \wedge v \in \Gamma) \to u \check{\cdot} v \in \Gamma]\!] = \mathbb{1}$.

Para o item **III**, $[\![\forall u \in \check{\mathscr{B}}\ \forall v \in \check{\mathscr{B}} (u \in \Gamma \wedge u \leq v) \to v \in \Gamma]\!] = \prod_{u \in \mathscr{B}} \prod_{v \in \mathscr{B}} (([\![\check{u} \in \Gamma]\!][\![\check{u} \leq \check{v}]\!]) \to [\![\check{v} \in \Gamma]\!])$ (aqui $\leq$ é uma definição por isso não se usa $\check{\leq}$, como se faria no caso de um forcing). Fixe $u, v \in \mathscr{B}$ arbitrário, por absoluticidade, se $u \leq v$ então $[\![\check{u} \leq \check{v}]\!] = \mathbb{1}$, caso contrário, $[\![\check{u} \leq \check{v}]\!] = \mathbb{0}$. No primeiro caso, temos $[\![\check{u} \in \Gamma]\!][\![\check{u} \leq \check{v}]\!] = u\mathbb{1} = u \leq v = [\![\check{v} \in \Gamma]\!]$, caso contrário, $[\![\check{u} \in \Gamma]\!][\![\check{u} \leq \check{v}]\!] = \mathbb{0} \leq v = [\![\check{v} \in \Gamma]\!]$. Assim, concluímos que $[\![\forall u \in \check{\mathscr{B}}\ \forall v \in \check{\mathscr{B}} (u \in \Gamma \wedge u \leq v) \to v \in \Gamma]\!] = \mathbb{1}$, provando que $\mathbb{1} \Vdash$ "Γ *é filtro de* $\check{\mathscr{B}}$".

Agora, para concluir a demonstração de **b**, resta provar que $[\![\forall u \in \check{\mathscr{B}}\ u \in \Gamma \vee -u \in \Gamma]\!] = \mathbb{1}$, o critério para ultrafiltros. Note que $[\![\forall u \in \check{\mathscr{B}}\ u \in \Gamma \vee -u \in \Gamma]\!] = \prod_{u \in \mathscr{B}} [\![\check{u} \in \Gamma \vee -\check{u} \in \Gamma]\!]$. Por absoluticidade do operador $-$, $[\![-\check{u} = (-u)\check{}\ ]\!] = \mathbb{1}$ para qualquer $u \in \mathscr{B}$, então $[\![\check{u} \in \Gamma \vee -\check{u} \in$

$\Gamma]\!] = [\![\check{u} \in \Gamma \vee (-u)\check{} \in \Gamma]\!] = [\![\check{u} \in \Gamma]\!] + [\![(-u)\check{} \in \Gamma]\!] = u + (-u) = \mathbb{1}$. Consequentemente, $[\![\forall u \in \check{\mathscr{B}}\ u \in \Gamma \vee -u \in \Gamma]\!] = \mathbb{1}$, concluindo a demonstração.

c: Primeiramente, note que $G \cap D \neq \emptyset$ é equivalente à $\exists p \in D\ p \in G$, então, precisamos provar que $[\![\forall D \in (\mathfrak{D}_{\mathscr{B}})\check{}\ \exists u \in D\ u \in \Gamma]\!] = \mathbb{1}$. Note que $[\![\forall D \in (\mathfrak{D}_{\mathscr{B}})\check{}\ \exists u \in D\ u \in \Gamma]\!] = \prod_{D \in \mathfrak{D}_{\mathscr{B}}} (\sum_{u \in D} [\![\check{u} \in \Gamma]\!])$. Perceba também que, para todo $D \subset \mathscr{B}$, $\sum_{u \in D} [\![\check{u} \in \Gamma]\!] = \sum_{u \in D} u = \sum D$. Assim, para provarmos o desejado, precisamos provar que $\sum D = \mathbb{1}$, para todo $D \in \mathfrak{D}_{\mathscr{B}}$, mas isso é consequência imediata pelo Teorema 1.3.17, já que, todo $D \in \mathfrak{D}_{\mathscr{B}}$ é denso em $\mathscr{B}$.

d: Aqui, é suficiente provar que $[\![\check{u} \in \Gamma]\!] \leq [\![\Gamma\ \textit{é}\ (\mathfrak{D}^u_{\mathscr{B}})\check{}\textit{-genérico}]\!]$, isto é, $u \leq [\![\Gamma\ \textit{é}\ (\mathfrak{D}^u_{\mathscr{B}})\check{}\textit{-genérico}]\!]$. Como $[\![\Gamma\ \textit{é}\ (\mathfrak{D}^u_{\mathscr{B}})\check{}\ \textit{genérico}]\!] = \prod_{E \in \mathfrak{D}^u_{\mathscr{B}}} (\sum_{v \in E} [\![\check{v} \in \Gamma]\!])$, argumentando de modo análogo no item acima, para provarmos o desejado, é suficiente provar que, para todo $E \in \mathfrak{D}^u_{\mathscr{B}}$, $u \leq \sum E$. Mas isso é consequência do mesmo Teorema 1.3.17 enunciado acima, já que cada $E \in \mathfrak{D}^u_{\mathscr{B}}$ é denso abaixo de u. $\square$

Muitas vezes, porém o nosso $\mathscr{B}$ será da forma r.o.$(\mathbb{P})$, onde $\mathbb{P}$ é um forcing. Nesse caso, seria de utilidade acrescentar o seguinte teorema:

Teorema 2.4.5. Para um dado forcing $\mathbb{P}$, faça $\mathscr{B} =$ r.o.$(\mathbb{P})$ e seja $e : \mathbb{P} \to$ r.o.$(\mathbb{P})$ a embarcação densa canônica. Então temos que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\Gamma_e = \check{e}^{-1}[\Gamma]$" e, além disso, valem as seguintes fórmulas:

a') $[\![\check{p} \in \Gamma_e]\!] = e(p)$, para todo $p \in \mathbb{P}$

b') $\mathbb{1} \Vdash$ "Γ_e *é filtro de* $\check{\mathbb{P}}$"

c') $\mathbb{1} \Vdash$ "Γ_e *é* $(\mathfrak{D}_{\mathbb{P}})\check{}-$*genérico*"

d') $\mathbb{1} \Vdash$ "$\check{p} \in \Gamma_e \to \Gamma_e$ *é* $(\mathfrak{D}^p_{\mathbb{P}})\check{}-$*genérico*" para todo $p \in \mathbb{P}$

Demonstração. Primeiramente, note que, por absoluticidade, é fácil provar que todos, $[\![\check{\mathbb{P}}$ *é forcing*$]\!]$, $[\![\check{\mathscr{B}}$ *é álgebra booleana completa*$]\!]$ e $[\![\check{e} : \check{\mathbb{P}} \to \check{\mathscr{B}}$ *é embarcação densa*$]\!]$ tem valor $\mathbb{1}$ (aqui usamos $($r.o.$(\mathbb{P}))\check{}$ e não r.o.$(\check{\mathbb{P}})$, pois, caso contrário, não seria fácil nem ao menos saber se é verdade o que afirmei). Apesar de eu não mencionar isso, essas afirmações são cruciais em uma demonstração estritamente rigorosa dessas afirmações.

Antes de provar que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\Gamma_e = \check{e}^{-1}[\Gamma]$", vamos provar o item *a)*, ele nos será útil nessa demonstração.

a': Pela definição de Γ_e, $[\![\check{p} \in \Gamma_e]\!] = \sum_{q \in \mathbb{P}} e(q) [\![\check{q} = \check{p}]\!]$. Por absoluticidade, para todo $q \in \mathbb{P}$, se $q = p$, então $[\![\check{q} = \check{p}]\!] = \mathbb{1}$, caso contrário, $[\![\check{q} = \check{p}]\!] = \mathbb{0}$. Portanto, $\sum_{q \in \mathbb{P}} e(q) [\![\check{q} = \check{p}]\!] = e(p) [\![\check{p} = \check{p}]\!] = e(p)$, provando o que queríamos.

Para a demonstração de $\mathbb{1} \Vdash$ "$\Gamma_e = \check{e}^{-1}[\Gamma]$", note que, como vale $\mathbb{1} \Vdash$ "$\Gamma_e \subset \check{\mathbb{P}}$" (a prova é análoga à de $\mathbb{1} \Vdash$ "$\Gamma \subset \check{\mathscr{B}}$"), precisamos apenas provar que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\forall p \in \check{\mathbb{P}}\ p \in \Gamma_e \leftrightarrow \check{e}(p) \in \Gamma$". Inicialmente, vale $[\![\forall p \in \check{\mathbb{P}}\ p \in \Gamma_e \leftrightarrow \check{e}(p) \in \Gamma]\!] = \prod_{p \in \mathbb{P}} [\![\check{p} \in \Gamma_e \leftrightarrow \check{e}(\check{p}) \in \Gamma]\!]$. Por absoluticidade da função e, temos $[\![\check{p} \in \Gamma_e \leftrightarrow \check{e}(\check{p}) \in \Gamma]\!] = [\![\check{p} \in \Gamma_e \leftrightarrow (e(p))\check{} \in \Gamma]\!]$. Logo, para demonstrar o que queremos, basta provar que $[\![\check{p} \in \Gamma_e]\!] = [\![(e(p))\check{} \in \Gamma]\!] = e(p)$, para todo $p \in \mathbb{P}$, consequência imediata do item **a'**.

Agora, o resultado $\mathbb{1} \Vdash$ "$\Gamma_e = \check{e}^{-1}[\Gamma]$" nos será útil nas nossas próximas demonstrações. Para provarmos **b'**, iremos necessitar da parte *c')*, então, provaremos **c'**, **d'** antes.

c': Dado $D \subset \mathbb{P}$ denso, isto é, $D \in \mathfrak{D}_{\mathbb{P}}$, digo que $e[D]$ é denso em $\mathscr{B}$, isto é, $e[D] \in \mathfrak{D}_{\mathscr{B}}$. Pois, uma vez fixado $D \subset \mathbb{P}$ e $u \in \mathscr{B} - \{\mathbb{0}\}$, por e ser embarcação densa, existe $p \in \mathbb{P}$ tal que $e(p) \leq u$. Pela densidade de D, existe $q \in D$ com $q \leq p$, assim, $e(q) \in e[D]$ e $e(q) \leq e(p) \leq u$. Portanto, o item **c** do teorema anterior implica $[\![\forall D \in (\mathfrak{D}_{\mathbb{P}})\check{}\ \check{e}[D] \cap \Gamma \neq \check{\emptyset}]\!] = \mathbb{1}$, logo, $[\![\forall D \in (\mathfrak{D}_{\mathbb{P}})\check{}\ D \cap \check{e}^{-1}[\Gamma] \neq \emptyset]\!] = \mathbb{1}$, isto é, $[\![\forall D \in (\mathfrak{D}_{\mathbb{P}})\check{}\ D \cap \Gamma_e \neq \emptyset]\!] = \mathbb{1}$.

d': Aqui, analogamente ao item acima, podemos provar que, se $E \subset \mathbb{P}$ é denso abaixo de p, então $e[D]$ é denso abaixo de $e(p)$. Obtendo, pelo item *d)* do teorema acima, $[\![(e(p))\check{} \in \Gamma \rightarrow \forall D \in (\mathfrak{D}^p_{\mathbb{P}})\check{}\ \check{e}[D] \cap \Gamma \neq \emptyset]\!]$, isto é, $[\![(e(p))\check{} \in \Gamma]\!] \leq [\![\forall D \in (\mathfrak{D}^p_{\mathbb{P}})\check{}\ \check{e}[D] \cap \Gamma \neq \emptyset]\!]$. Argumentando como acima e usando o item **a'**, temos que $[\![p \in \Gamma_e]\!] \leq [\![\forall D \in (\mathfrak{D}^p_{\mathbb{P}})\check{}\ D \cap \Gamma_e \neq \emptyset]\!]$, como queríamos provar.

b': Como consequência do item **b** do teorema acima, temos $[\![\Gamma$ *é filtro de* $\mathscr{B}]\!] = \mathbb{1}$ (no sentido de forcing ou álgebra booleana, os dois são equivalentes, como dissemos na Observação 1.3.51). Antes da demonstração, precisaremos provar o seguinte lema:

Lema 2.4.6. Dados forcings $\mathbb{P}, \mathbb{Q}$ e $i : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{Q}$ uma embarcação (podendo ser homomorfismo completo injetor, devido ao Teorema 1.3.15). Dado $G \subset \mathbb{Q}$ filtro, então são válidas as seguintes afirmações:

1. $\forall p_0 \in i^{-1}[G]\ \forall p_1 \in \mathbb{P}\ p_0 \leq p_1 \rightarrow p_1 \in i^{-1}[G]$

2. $\forall p_0, p_1 \in i^{-1}[G]\ p_0 \not\perp p_1$

Demonstração. 1: Se $p_0 \in i^{-1}[G]$, $p_1 \in \mathbb{P}$ e $p_0 \leq p_1$, então $i(p_0) \in G$, $i(p_1) \in \mathbb{Q}$ e $i(p_0) \leq i(p_1)$, logo $i(p_1) \in G$ e, assim, $p_1 \in i^{-1}[G]$.

2. Dados $p_0, p_1 \in i^{-1}[G]$, vale $i(p_0), i(p_1) \in G$. Por G ser filtro, existe $q \in G$ tal que $q \leq i(p_0)$ e $q \leq i(p_1)$, isto é, $i(p_0) \not\perp i(p_1)$. Que $p_0 \not\perp p_1$ vale é consequência imediata de i ser embarcação. $\square$

Do lema acima, podemos concluir que vale $\mathbb{1} \Vdash$ "$\forall p \in \Gamma_e\ \forall q \in \check{\mathbb{P}}\ p \check{\leq} q \rightarrow q \in \Gamma_e$", uma das propriedades de filtro. Além disso, considerando a absoluticidade de $\perp$, vale $\mathbb{1} \Vdash$ "$\forall p, q \in \Gamma_e\ p \not\perp q$", mas precisamos provar mais do que isso, precisamos provar que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\forall p, q \in \Gamma_e\ \exists r \in \Gamma_e\ r \check{\leq} p \wedge r \check{\leq} q$", para isso, vamos usar o item **c'**. Note que, para quaisquer $p, q \in \mathbb{P}$, $\{r \in \mathbb{P} : r \perp p \vee r \perp q \vee (r \leq p \wedge r \leq q)\}$ é denso, isto é, este conjunto pertence a $\mathfrak{D}_{\mathbb{P}}$. Pela absoluticidade deste conjunto, temos $\mathbb{1} \Vdash$ "$\forall p, q \in \check{\mathbb{P}}\ \{r \in \check{\mathbb{P}} : r \perp p \vee r \perp q \vee (r \check{\leq} p \wedge r \check{\leq} q)\} \in$

$(\mathfrak{D}_{\mathbb{P}})\check{}$" (note que r não é variável livre da definição desse conjunto, por isso não leva$\check{}$). Logo, temos $\mathbb{1} \Vdash$ "$\forall p, q \in \check{\mathbb{P}}\ \exists r \in \Gamma_e\ r \perp p \vee r \perp q \vee (r \check{\leq} p \wedge r \check{\leq} q)$", em particular, $\mathbb{1} \Vdash$ "$\forall p, q \in \Gamma_e\ \exists r \in \Gamma_e\ r \perp p \vee r \perp q \vee (r \check{\leq} p \wedge r \check{\leq} q)$". Mas pelo que provamos acima, nessa fórmula, $r \perp p$ e $r \perp q$ são inadmissíveis, então temos $\mathbb{1} \Vdash$ "$\forall p, q \in \check{\mathbb{P}}\ \exists r \in \Gamma_e\ r \check{\leq} p \wedge r \check{\leq} q$", o que restava para provar o lema. □

Na verdade, vale a seguinte versão generalizada:

Teorema 2.4.7. Dados uma álgebra booleana completa $\mathscr{B}$, um forcing $\mathbb{P}$ com $i : \mathbb{P} \to \mathscr{B}$ embarcação (podendo ser homomorfismo completo injetor). No universo de nomes $\mathbf{V}^{\mathscr{B}}$, valem as seguintes afirmações:

a') $[\![\check{p} \in \Gamma_i]\!] = i(p)$, para todo $p \in \mathbb{P}$

b') $\mathbb{1} \Vdash$ "Γ_i *é filtro de* $\check{\mathbb{P}}$"

c') $\mathbb{1} \Vdash$ "Γ_i *é* $(\mathfrak{D}_{\mathbb{P}})\check{}$*−genérico*"

d') $\mathbb{1} \Vdash$ "$\check{p} \in \Gamma_i \to \Gamma_i$ *é* $(\mathfrak{D}^p_{\mathbb{P}})\check{}$*−genérico*" para todo $p \in \mathbb{P}$

Demonstração. Esta demonstração é praticamente análoga à demonstração acima, as únicas diferenças são os trechos nos quais usamos propriedades de embarcação densa, que deveremos provar que ainda valem ao trocá-las por uma simples embarcação. Será esse ponto a que nos restringiremos aqui. Portanto, já temos que é verdade o item **a'** e $\mathbb{1} \Vdash$ "$\Gamma_i = \check{i}^{-1}[\Gamma]$", já que suas demonstrações não usam as propriedades de e. Para provar os demais teoremas, necessitaremos do seguinte lema:

Lema 2.4.8. Para todo forcing $\mathbb{P}$ e $E \subset \mathbb{P}$, temos que $\{p \in \mathbb{P} : \exists r \in E\ r \leq p\} \cup \{q \in \mathbb{P} : \forall r \in E\ q \perp r\}$ é denso.

Demonstração. Fixe $p \in \mathbb{P}$, se valer $\forall r \in E\ p \perp r$, então $p \in \{p \in \mathbb{P} : \forall r \in E\ p \perp r\}$, logo $p \in \{p \in \mathbb{P} : \exists r \in E\ r \leq p\} \cup \{q \in \mathbb{P} : \forall r \in E\ q \perp r\}$. Caso contrário, seja $q \in E$ tal que $q \not\perp p$, fixe r com $r \leq p, q$, então $r \in \{p \in \mathbb{P} : \exists r \in E\ r \leq p\}$, assim $r \in \{p \in \mathbb{P} : \exists r \in E\ r \leq p\} \cup \{q \in \mathbb{P} : \forall r \in E\ q \perp r\}$, concluindo a demonstração. □

c': Fixe $E \subset \mathscr{B} - \{\mathbb{0}\}$. Usando o lema acima e absoluticidade, temos que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\{u \in \check{\mathscr{B}} - \{\check{\mathbb{0}}\} : \exists w \in \check{E}\ w \leq u\} \cup \{v \in \check{\mathscr{B}} - \{\check{\mathbb{0}}\} : \forall w \in \check{E}\ v \perp w\} \in (\mathfrak{D}_{\mathscr{B}})\check{}$", logo, $\mathbb{1} \Vdash$ "$(\{u \in \check{\mathscr{B}} - \{\check{\mathbb{0}}\} : \exists w \in \check{E}\ w \leq u\} \cup \{v \in \check{\mathscr{B}} - \{\check{\mathbb{0}}\} : \forall w \in \check{E}\ v \perp w\}) \cap \Gamma \neq \emptyset$". Fixe $D \in \mathfrak{D}_{\mathbb{P}}$, então $i[D] \subset \mathscr{B} - \{\mathbb{0}\}$. Dessa afirmação, podemos inferir que, usando a fórmula anterior e absoluticidade, $\mathbb{1} \Vdash$ "$(\{u \in \check{\mathscr{B}} - \{\check{\mathbb{0}}\} : \exists w \in \check{i}[\check{D}]\ w \leq u\} \cup \{v \in \check{\mathscr{B}} - \{\check{\mathbb{0}}\} : \forall w \in \check{i}[\check{D}]\ v \perp w\}) \cap \Gamma \neq \emptyset$", para todo $D \in \mathfrak{D}_{\mathbb{P}}$, portanto, $\mathbb{1} \Vdash$ "$\forall D \in (\mathfrak{D}_{\mathbb{P}})\check{}\ (\{u \in \check{\mathscr{B}} - \{\check{\mathbb{0}}\} : \exists w \in \check{i}[D]\ w \leq u\} \cup \{v \in \check{\mathscr{B}} - \{\check{\mathbb{0}}\} : \forall w \in \check{i}[D]\ v \perp w\}) \cap \Gamma \neq \emptyset$". Vamos provar que $[\![\forall D \in (\mathfrak{D}_{\mathbb{P}})\check{}\ \{v \in \check{\mathscr{B}} - \{\check{\mathbb{0}}\} : \forall w \in \check{i}[D]\ v \perp w\} \cap \Gamma \neq \emptyset]\!] = \mathbb{0}$, ou, por equivalência, $[\![\forall D \in (\mathfrak{D}_{\mathbb{P}})\check{}\ \exists v \in \Gamma\ \forall p \in D\ \check{i}(p) \perp v]\!] = \mathbb{0}$. Uma vez fixado $v \in \mathscr{B} - \{\mathbb{0}\}$

e $D \in \mathfrak{D}_{\mathbb{P}}$, como i é embarcação, existe $q \in \mathbb{P}$ tal que $i(r) \not\leq w$ para todo $r \leq q$, em particular, como D é denso em $\mathbb{P}$, existe $p \in D$ com $i(p) \not\leq w$, assim, $\mathbb{1} \Vdash$ "$\forall D \in (\mathfrak{D}_{\mathbb{P}})\check{}\ \forall w \in \check{\mathscr{B}} - \{\check{\mathbb{0}}\}\ \exists p \in D\ \check{i}(p) \not\leq w$", permitindo que a fórmula desejada seja inferida. Por causa disso concluímos que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\forall D \in (\mathfrak{D}_{\mathbb{P}})\check{}\ \{u \in \check{\mathscr{B}} - \{\check{\mathbb{0}}\} : \exists w \in \check{i}[D]\ w \leq u\} \cap \Gamma \neq \emptyset$". Uma vez que $\mathbb{1} \Vdash$ "Γ *é filtro*" temos $\mathbb{1} \Vdash$ "$\forall D \in (\mathfrak{D}_{\mathbb{P}})\check{}\ \Gamma \cap \check{i}[D] \neq \emptyset$", então $\mathbb{1} \Vdash$ "$\forall D \in (\mathfrak{D}_{\mathbb{P}})\check{}\ \Gamma_i \cap D \neq \emptyset$".

d': Argumentando do mesmo modo que o início do teorema acima, fixado $p \in \mathbb{P}$, para todo $E \in \mathfrak{D}^p_{\mathbb{P}}$, $i[E] \subset \mathscr{B} - \{\mathbb{0}\}$, portanto, $\mathbb{1} \Vdash$ "$\forall E \in (\mathfrak{D}^p_{\mathbb{P}})\check{}\ (\{u \in \check{\mathscr{B}} - \{\check{\mathbb{0}}\} : \exists w \in \check{i}[E]\ w \leq u\} \cup \{v \in \check{\mathscr{B}} - \{\check{\mathbb{0}}\} : \forall w \in \check{i}[E]\ v \perp w\}) \cap \Gamma \neq \emptyset$". Como $\mathbb{1} \Vdash$ "Γ *é filtro*", podemos provar que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\check{i}(\check{p}) \in \Gamma \rightarrow \forall u \in \Gamma\ \exists v \in \Gamma\ v \leq \check{i}(\check{p}) \wedge v \leq u$". Dados $E \in \mathfrak{D}^p_{\mathbb{P}}$ e $u, v \in \mathscr{B} - \{\mathbb{0}\}$ com $v \leq i(p)$ e $v \leq u$, sendo i embarcação, existe $q \in \mathbb{P}$ tal que $i(r) \not\leq v$ para todo $r \leq q$. Em particular, $i(q) \not\leq v \leq i(p)$, o que implica $i(q) \not\leq i(p)$, de onde extraímos $q \not\leq p$. Seja $r' \in \mathbb{P}$ com $r' \leq p, q$, por E ser denso embaixo de p, existe $r \in E$ com $r \leq r' \leq p, q$, de onde extraímos $i(r) \not\leq v \leq u$, portanto, $i(r) \not\leq u$. Assim temos, por absoluticidade, que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\forall u \in \check{\mathscr{B}} - \{\check{\mathbb{0}}\}\ \forall v \in \check{\mathscr{B}} - \{\check{\mathbb{0}}\}\ v \leq u \wedge v \leq \check{i}(\check{p}) \rightarrow \exists r \in \check{E}\ r \not\leq u$". Como $\mathbb{1} \Vdash$ "$\Gamma \subset \check{\mathscr{B}} - \{\check{\mathbb{0}}\}$", podemos inferir que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\forall u \in \Gamma\ \forall v \in \Gamma\ v \leq u \wedge v \leq \check{i}(\check{p}) \rightarrow \exists r \in \check{E}\ r \not\leq u$". Combinando com a fórmula obtida inicialmente, temos que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\check{i}(\check{p}) \in \Gamma \rightarrow \forall u \in \Gamma\ \exists r \in \check{E}\ \check{i}(r) \not\leq u$", isto é, $\mathbb{1} \Vdash$ "$\check{i}(\check{p}) \in \Gamma \rightarrow \sim \exists u \in \Gamma\ \forall r \in \check{E}\ \check{i}(r) \perp u$". Como $E \in \mathfrak{D}^p_{\mathbb{P}}$ foi tomado arbitrário, deduzimos que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\check{i}(\check{p}) \in \Gamma \rightarrow \forall E \in (\mathfrak{D}^p_{\mathbb{P}})\check{}\ \sim \exists u \in \Gamma\ \forall r \in E\ \check{i}(r) \perp u$", esta última afirmação é equivalente a $\mathbb{1} \Vdash$ "$\check{i}(\check{p}) \in \Gamma \rightarrow \forall E \in (\mathfrak{D}^p_{\mathbb{P}})\check{}\ \{v \in \check{\mathscr{B}} - \{\check{\mathbb{0}}\} : \forall w \in \check{i}[E]\ v \perp w\} \cap \Gamma \neq \emptyset$", o que implica $\mathbb{1} \Vdash$ "$\check{i}(\check{p}) \in \Gamma \rightarrow \forall E \in (\mathfrak{D}^p_{\mathbb{P}})\check{}\ \{u \in \check{\mathscr{B}} - \{\check{\mathbb{0}}\} : \exists w \in \check{i}[E]\ w \leq u\} \cap \Gamma \neq \emptyset$" e, consequentemente, $\check{i}(\check{p}) \in \Gamma \rightarrow \forall E \in (\mathfrak{D}^p_{\mathbb{P}}\ \Gamma \cap \check{i}[E] \neq \emptyset)\check{}$. O fato que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\check{p} \in \Gamma_i \rightarrow \forall E \in (\mathfrak{D}^p_{\mathbb{P}})\check{}\ E \cap \Gamma_i \neq \emptyset$" decorre imediatamente dessa última afirmação.

b': A demonstração do respectivo item do teorema acima está inteiramente adaptada para o caso de i ser embarcação, uma vez provado o item **c'** deste teorema. □

2.5 Primeiros Resultados

Na seção anterior, disse que os teoremas 2.4.4, 2.4.5 e 2.4.7 se tratavam de fórmulas "interessantes", com isso eu queria dizer que não existe um $G \subset \mathscr{B}$ que seja $\mathfrak{D}_{\mathscr{B}}$-genérico, no universo $\mathbf{V}$. Assim, Γ simboliza um "conjunto novo". Porém, preciso dizer que isso nem sempre é verdadeiro e, nos casos em que existe tal G podemos provar que $u \in G \rightarrow G$ *é* $\mathfrak{D}^u_{\mathscr{B}}$*-genérico* e, uma vez dada $i : \mathbb{P} \rightarrow \mathscr{B}$ embarcação, densa ou não, podemos provar as duas afirmações para $i^{-1}[G]$ relativa ao forcing $\mathbb{P}$ também são verdadeiras (o leitor que quiser provar isso achará o Lema 2.4.8 bastante útil, e também poderá encontrar o "segredo" dessas demonstrações "oculto" nas demonstrações dos teoremas 2.4.5 e 2.4.7). Também é válida essa afirmação:

Teorema 2.5.1. Para todo forcing $\mathbb{P}$, se G é filtro $\mathfrak{D}_{\mathbb{P}}$-genérico, então G é filtro maximal.

Demonstração. Para todo $p \in \mathbb{P}$, usando o Lema 2.4.8 com $E = \{p\}$, temos que $\{r \in \mathbb{P} : r \leq$

$p\} \cup \{r \in \mathbb{P} : r \perp p\}$ é denso. Assim, se $p \notin G$, então existe $q \in G$ com $q \perp p$, mostrando que o filtro G não pode ser estendido.

Nota: No universo dos nomes (de qualquer álgebra booleana completa $\mathscr{B}$), podemos provar que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\forall p \in \check{\mathbb{P}}\ \{r \in \check{\mathbb{P}} : r \check{\leq} p\} \cup \{r \in \check{\mathbb{P}} : r \perp p\} \in (\mathfrak{D}_{\mathbb{P}})\check{}$". Assim argumentando como acima, podemos provar que, caso exista $i : \mathbb{P} \to \mathscr{B}$ embarcação, $\mathbb{1} \Vdash$ "Γ_i *é filtro maximal*". $\square$

Portanto, caso exista o filtro $\mathfrak{D}_{\mathscr{B}}$-genérico, nenhuma das fórmulas enunciadas na seção anterior é de fato "interessante". A condição necessária e suficiente para a existência desse conjunto que "estraga tudo" está enunciado no teorema a seguir.

Teorema 2.5.2. Para todo forcing $\mathbb{P}$, existe um filtro $\mathfrak{D}_{\mathbb{P}}$-genérico se, e somente se, $\mathbb{P}$ é atômico.

Demonstração. Suponha $\mathbb{P}$ atômico, fixe $p \in \mathbb{P}$ um de seus átomos e faça $S = \{r \in \mathbb{P} : r \leq p\}$. Então, para todo $r, s \in S$, não vale apenas que $r \not\perp s$, mas também existe $t \in S$ com $t \leq r, s$. Fixe agora $D \subset \mathbb{P}$ denso, então existe $r \in D$ com $r \leq p$, portanto $S \cap D \neq \emptyset$. Note agora que $G = \{q \in \mathbb{P} : \exists r \in S\ r \leq q\}$ é filtro que satisfaz $S \subset G$, portanto, para todo $D \in \mathfrak{D}_{\mathbb{P}}$, $G \cap D \neq \emptyset$, sendo assim um filtro $\mathfrak{D}_{\mathbb{P}}$-genérico.

Agora, suponha que $\mathbb{P}$ é não atômico. Suponha, por absurdo que exista G filtro $\mathfrak{D}_{\mathbb{P}}$-genérico. Digo que $\mathbb{P} - G$ é denso. Pois, fixe $p \in \mathbb{P}$, então existem $q, r \in \mathbb{P}$ com $q \perp r$, assim, ao menos um dos dois não pertence a G e assim pertence a $\mathbb{P} - G$. Então, por hipótese, $G \cap (\mathbb{P} - G) \neq \emptyset$, absurdo. Logo, caso $\mathbb{P}$ seja não atômico, não existe filtro $\mathfrak{D}_{\mathbb{P}}$-genérico. $\square$

Observação 2.5.3. O teorema acima não gera nenhuma contradição no universo de nomes $\mathbf{V}^{\mathscr{B}}$. Pois, argumentando como acima, caso $\mathscr{B}$ é não atômica, podemos provar que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\sim (\exists G \subset \check{\mathscr{B}}\ G$ *é filtro* $\mathfrak{D}_{\check{\mathscr{B}}}$*-genérico*)", e isso não contradiz o Teorema 2.4.4, uma vez que $\mathfrak{D}_{\check{\mathscr{B}}}$ não é o mesmo que $(\mathfrak{D}_{\mathscr{B}})\check{}$.

Com o resultado acima, podemos provar o seguinte:

Teorema 2.5.4. Para toda álgebra booleana completa $\mathscr{B}$ não atômica, vale, para todo conjunto x, $[\![\Gamma = \check{x}]\!] = \mathbb{0}$.

Demonstração. Podemos provar que é absoluta a fórmula $G \subset \mathscr{B}$ *é ultrafiltro* X*-genérico*, e o teorema acima implica que, para todo conjunto x, é falso que $x \subset \mathscr{B}$ *é ultrafiltro* $\mathfrak{D}_{\mathscr{B}}$*-genérico*, portanto, $[\![\check{x} \subset \check{\mathscr{B}}$ *é ultrafiltro* $(\mathfrak{D}_{\mathscr{B}})\check{}$ *-genérico*$]\!] = \mathbb{0}$, isto é, $[\![\sim (\check{x} \subset \check{\mathscr{B}}$ *é ultrafiltro* $(\mathfrak{D}_{\mathscr{B}})\check{}$ *-genérico*$)]\!] = \mathbb{1}$. Mas como $[\![\Gamma \subset \check{\mathscr{B}}$ *é ultrafiltro* $(\mathfrak{D}_{\mathscr{B}})\check{}$ *-genérico*$]\!] = \mathbb{1}$, obtemos $[\![\Gamma \neq \check{x}]\!] = \mathbb{1}$, isto é, $[\![\Gamma = \check{x}]\!] = \mathbb{0}$. $\square$

Este último teorema, por sua vez, nos permite provar o nosso primeiro resultado:

Teorema 2.5.5. $\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC}) \to \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC} + \mathbf{V} \neq \mathbf{L})$.

Demonstração. Aqui nós suporemos a nossa teoria inicial como sendo ZFC, $\mathscr{B}$ pode ser qualquer álgebra booleana completa não atômica, por exemplo, $\mathscr{B} = \text{r.o.}(\text{Fn}(\omega, 2))$, como nos assegura o Teorema 1.2.5 e o Corolário 1.2.13.

O teorema acima nos permite concluir que $\sum_{x\in\mathbf{L}}[\![\Gamma = \check{x}]\!] = \mathbb{0}$. Como $\mathbf{L}$ é class-preserving, temos que $[\![\Gamma \in \mathbf{L}]\!] = \sum_{x\in\mathbf{L}}[\![\Gamma = \check{x}]\!]$. Portanto, $[\![\Gamma \in \mathbf{L}]\!] = \mathbb{0}$, isto é, $[\![\Gamma \notin \mathbf{L}]\!] = \mathbb{1}$. Assim, $\mathbb{1} \Vdash$ "$\exists x\ x \notin \mathbf{L}$", logo, todo axioma de ZFC+$\mathbf{V} \neq \mathbf{L}$ é válido no universo de nomes $\mathbf{V}^{\mathscr{B}}$, como queríamos provar. □

Antes da descoberta da técnica de forcing, o método padrão de demonstração de consistências relativas (o uso de modelos transitivos), não permitia demonstrar Con(ZFC)$\rightarrow$Con(ZFC+$\mathbf{V} \neq \mathbf{L}$) e, consequentemente, nenhuma demonstração do estilo Con(ZFC)$\rightarrow$Con(S), onde vale $\mathrm{S} \vdash \mathbf{V} \neq \mathbf{L}$. A "magia" da técnica de forcing consiste exatamente em superar essa barreira de modo quase trivial. Por causa disso, a técnica de forcing é usada principalmente para demonstração de consistências relativas nesse estilo.

Os forcings não atômicos também nos permitem provar que, de certo modo, class-preserving não é equivalente a absoluticidade, como tinha prometido anteriormente.

Teorema 2.5.6. A classe dos conjuntos finitos **Fn**, apesar de ser absoluta como definição, não é class-preserving.

Demonstração. A absoluticidade foi provada no Teorema 2.3.6. Para provar que ela não é class-preserving, precisamos antes fixar uma álgebra booleana completa não atômica $\mathscr{B}$. Com essa hipótese, podemos provar que $[\![\{\Gamma\} \in \mathbf{Fn}]\!] = \mathbb{1}$. Porém, $[\![\{\Gamma\} = \check{x}]\!] = \mathbb{0}$ para todo conjunto x, uma vez que $[\![\{\Gamma\} = \check{x}]\!] \leq [\![\{\Gamma\} \subset \check{x}]\!] = [\![\exists y \in \check{x}\ y = \Gamma]\!] = \sum_{y\in x}[\![\Gamma = \check{y}]\!] = \mathbb{0}$, essa última igualdade devido ao Teorema 2.5.4. Então, $\sum_{x\in\mathbf{Fn}}[\![\{\Gamma\} = \check{x}]\!] = \mathbb{0}$, como queríamos provar (aqui, é necessário trocar $\{\Gamma\}$ por um nome $\mathbf{x}$ que satisfaça $[\![\{\Gamma\} = \mathbf{x}]\!] = \mathbb{1}$, por exemplo, $\mathbf{x} = \{(\Gamma, \mathbb{1})\}$, e depois usar igualdade lógico-booleana). □

2.6 Aritmética de Cardinais

2.6.1 Primeiros Resultados

A relação de ordem canônica usada entre cardinais é: $\alpha \leq \beta$ se, e somente se, $\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta$, ou, equivalentemente, $\alpha \subset \beta$. Sua versão estrita é: $\alpha < \beta$ se, e somente se, $\alpha \in \beta$. Ambas são absolutas. Portanto, a partir de agora, faremos uso implícito dessas ordens, deixando implícito também sua absoluticidade e suas respectivas consequências.

A principal consequência do Axioma da Construtibilidade ($\mathbf{V} = \mathbf{L}$) é que ela implica GCH. Assim, para provarmos consistências de afirmações da aritmética cardinal que violam GCH, entre elas $\sim$CH, é crucial assegurar a falsidade desse "axioma". Então, a técnica de forcing se torna a principal (se não for a única) ferramenta para esse tipo de demonstração. Passaremos agora a procurar ferramentas para "medir" como fica os cardinais e sua aritmética através dessa técnica.

Uma das principais operações da aritmética cardinal é $2^\kappa = |\wp(\kappa)|$. O teorema a seguir permite nos indicar um "limitante superior" para essa operação, uma vez fixado uma álgebra booleana completa (ou um forcing, assumindo que $\mathscr{B} = \text{r.o.}(\mathbb{P})$).

Teorema 2.6.1. Para toda álgebra booleana completa $\mathscr{B}$ e todo cardinal κ vale $\mathbb{1} \Vdash$ "$|\wp(\check{\kappa})| \leq |(|\mathscr{B}|^\kappa)\check{}\,|$".

Demonstração. Releia a demonstração do Teorema 2.3.1 na parte do axioma da potência. O Lema 2.3.2 prova que todo subconjunto de κ será representado por um nome $\mathbf{x}$, com $\text{dom}(\mathbf{x}) = \{\check{\alpha} : \alpha \in \kappa\}$, e cada nome desse conjunto desse estilo representa um subconjunto de κ. Portanto, fazendo o nome $\mathbf{p}_\kappa$ tal que $\text{dom}(\mathbf{p}_\kappa) = \mathscr{B}^{\{\check{\alpha}:\alpha\in\kappa\}}$ e $\mathbf{p}_\kappa(t) = \mathbb{1}$ para todo $t \in \text{dom}(\mathbf{p}_\kappa)$, podemos provar que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\wp(\check{\kappa}) = \mathbf{p}_\kappa$". Como $|\text{dom}(\mathbb{p}_\kappa)| = |\mathscr{B}|^\kappa$, existe função $f : \kappa \to \text{dom}(\mathbb{p}_\kappa)$ bijetora. Agora, releia mais uma vez o Teorema 2.3.1, só que agora na parte do axioma da escolha e note que, ao tomarmos o nome $\mathbf{f}$ que satisfaz $\text{dom}(\mathbf{f}) = \{\mathbf{op}(\check{\xi}, f(\xi)) : \xi \in |\mathscr{B}|^\kappa\}$ e $\mathbf{f}(t) = \mathbb{1}$ para todo $t \in \text{dom}(\mathbf{f})$, podemos provar que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\mathbf{f}$ *é uma função*$\wedge\text{dom}(\mathbf{f}) = (|\mathscr{B}|^\kappa)\check{} \wedge \mathbf{p}_\kappa = \text{im}(\mathbf{f})$". Consequentemente, $\mathbb{1} \Vdash$ "$\mathbf{f}$ *é uma função*$\wedge\text{dom}(\mathbf{f}) = (|\mathscr{B}|^\kappa)\check{} \wedge \wp(\check{\kappa}) = \text{im}(\mathbf{f})$", o que nos permite provar, através de ZFC, que $\mathbb{1} \Vdash$ "$|\wp(\check{\kappa})| \leq \|(|\mathscr{B}|^\kappa)\check{}\,|$". $\square$

Note que, no teorema acima, usamos $|(|\mathscr{B}|^\kappa)\check{}\,|$ ao invés de $(|\mathscr{B}|^\kappa)\check{}$. Isso se deve ao fato de que, caso λ seja cardinal, não necessariamente vale $\mathbb{1} \Vdash$ "$\check{\lambda}$ *é cardinal*". Mais precisamente, a cardinalinalidade não é necessariamente absoluta. Quando a cardinalidade não é absoluta, dizemos que ocorre o **colapso de cardinais**. Porém, *x é cardinal* será absoluta caso a cofinalidade for absoluta (entendida como uma função $\text{cf} : \mathbf{ON} \to \mathbf{V}$) como provaremos mais para frente, a partir de agora, nos preocuparemos em encontrar $\mathscr{B}$ que satisfaçam esse fato.

Para provarmos que a cofinalidade é absoluta em $\mathscr{B}$, basta provar que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\text{cf}(\check{\alpha}) = (\text{cf}(\alpha))\check{}$" para todo $\alpha \in \mathbf{ON}$. De fato, essa afirmação é verdadeira para todo α com $\text{cf}(\alpha) \leq \omega$, independentemente do $\mathscr{B}$ que se escolha, como provaremos a seguir.

Teorema 2.6.2. Para toda álgebra booleana completa $\mathscr{B}$ e todo ordinal α com $\text{cf}(\alpha) \leq \omega$, vale $\mathbb{1} \Vdash$ "$\text{cf}(\check{\alpha}) = (\text{cf}(\alpha))\check{}$".

Demonstração. Inicialmente, provaremos que vale $\mathbb{1} \Vdash$ "$\text{cf}(\check{\alpha}) \leq (\text{cf}(\alpha))\check{}$" para qualquer ordinal α. Isso é verdade pois a afirmação $(f : \beta \to \gamma) \wedge f$ *é cofinal* é absoluta. Assim, dado uma função $f : \text{cf}(\alpha) \to \alpha$ cofinal, vale $\mathbb{1} \Vdash$ "$\check{f}$ *é cofinal*". Logo, podemos provar, via ZFC, que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\text{cf}(\check{\alpha}) \leq (\text{cf}(\alpha))\check{}$".

Quando $\text{cf}(\alpha) \leq \omega$, temos duas possibilidades: $\text{cf}(\alpha) = 1$ ou $\text{cf}(\alpha) = \omega$. No primeiro caso, α *é ordinal sucessor*. Essa fórmula é absoluta, portanto $\mathbb{1} \Vdash$ "$\check{\alpha}$ *é ordinal sucessor*", portanto, devido ao ZFC, vale $\mathbb{1} \Vdash$ "$\mathrm{cf}(\check{\alpha}) = 1$". Porém, o que queremos provar é que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\mathrm{cf}(\check{\alpha}) = \check{1}$", mas essa segue da anterior através da absoluticidade da constante 1 e igualdade lógico booleana.

Agora, se $\mathrm{cf}(\alpha) = \omega$, então α *é ordinal limite*, que também é absoluta, portanto, $\mathbb{1} \Vdash$ "$\check{\alpha}$ *é ordinal limite*", ou seja, devido a ZFC, $\mathbb{1} \Vdash$ "$\mathrm{cf}(\check{\alpha}) \geq \omega$", de onde podemos extrair $\mathbb{1} \Vdash$ "$\mathrm{cf}(\check{\alpha}) \geq \check{\omega}$", graças à absoluticidade de ω, isto é, $\mathbb{1} \Vdash$ "$\mathrm{cf}(\check{\alpha}) \geq (\mathrm{cf}(\alpha))\check{}$". Unindo isso ao que provamos no primeiro parágrafo, temos $\mathbb{1} \Vdash$ "$\mathrm{cf}(\check{\alpha}) = (\mathrm{cf}(\alpha))\check{}$", como queríamos. $\square$

Quanto aos demais ordinais, uma vez fixado $\mathscr{B}$, podemos provar que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\mathrm{cf}(\check{\alpha}) = (\mathrm{cf}(\alpha))\check{}$" caso $\mathrm{cf}(\alpha) \geq \mathrm{sat}(\mathscr{B})$. Mas, para isso, precisamos provar antes o seguinte teorema:

Teorema 2.6.3. Para toda álgebra booleana completa $\mathscr{B}$, todo $\mathbf{f} \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}$ e quaisquer conjuntos A, B, existe uma função $F : A \to \wp(B)$ que satisfaz $[\![\mathbf{f} : \check{A} \to \check{B}]\!] \leq [\![\mathbf{f}(\check{a}) \in \check{F}(\check{a})]\!]$, para todo $a \in A$ (ou seja, $\mathbb{1} \Vdash$ "$(\mathbf{f} : \check{A} \to \check{B}) \to \forall a \in \check{A}\ \mathbf{f}(a) \in \check{F}(a)$", onde $f : A \to B$ significa f *é uma função,* $\mathrm{dom}(f) = A$ *e* $\mathrm{im}(f) \subset B$). Além disso, para todo $a \in A$, $|F(a)| < \mathrm{sat}(\mathscr{B})$.

Demonstração. Defina a função $F : A \to \wp(B)$ da seguinte forma: para todo $a \in A$, $F(a) = \{b \in B : [\![\mathbf{f} : \check{A} \to \check{B}]\!][\![\mathbf{f}(\check{a}) = \check{b}]\!] \neq \mathbb{0}\}$ (quando $[\![\mathbf{f} : \check{A} \to \check{B}]\!] = \mathbb{0}$, teremos $F(a) = \emptyset$, para todo $a \in A$). Vamos provar que esse F satisfaz o teorema. Se $[\![\mathbf{f} : \check{A} \to \check{B}]\!] = \mathbb{0}$, isso é evidente. Caso $[\![\mathbf{f} : \check{A} \to \check{B}]\!] \neq \mathbb{0}$, provemos inicialmente que, para todo $a \in A$, $|F(a)| < \mathrm{sat}(\mathscr{B})$. Fixe $a \in A$, dados $b_0, b_1 \in F(a)$ com $b_0 \neq b_1$, digo que $v = [\![\mathbf{f} : \check{A} \to \check{B}]\!][\![\mathbf{f}(\check{a}) = (b_0)\check{}]\!][\![\mathbf{f}(\check{a}) = (b_1)\check{}]\!] = \mathbb{0}$. Pois, caso $v \neq \mathbb{0}$, então $v \Vdash$ "$(\mathbf{f} : \check{A} \to \check{B}) \wedge \mathbf{f}(\check{a}) = \check{b_0} \wedge \mathbf{f}(\check{a}) = \check{b_1}$". Como $\mathbb{1} \Vdash$ "$\check{a} \in \check{A}$", segue que $v \Vdash$ "$(b_0)\check{} = (b_1)\check{}$". Porém, como $b_0 \neq b_1$ temos $\mathbb{1} \Vdash$ "$(b_0)\check{} \neq (b_1)\check{}$", por absoluticidade. Consequentemente, $v \Vdash$ "$(b_0)\check{} \neq (b_1)\check{}$" e, com isso obtemos um absurdo, uma vez que tais afirmações implicam $v \Vdash$ "$(b_0)\check{} = (b_1)\check{} \wedge (b_0)\check{} \neq (b_1)\check{}$", isto é, $v \leq [\![(b_0)\check{} = (b_1)\check{}]\!](-[\![(b_0)\check{} = (b_1)\check{}]\!]) = \mathbb{0}$. Uma vez demonstrado isso, e com o fato que $([\![\mathbf{f} : \check{A} \to \check{B}]\!][\![\mathbf{f}(\check{a}) = (b_0)\check{}]\!])([\![\mathbf{f} : \check{A} \to \check{B}]\!][\![\mathbf{f}(\check{a}) = (b_1)\check{}]\!]) = [\![\mathbf{f} : \check{A} \to \check{B}]\!][\![\mathbf{f}(\check{a}) = (b_0)\check{}]\!][\![\mathbf{f}(\check{a}) = (b_1)\check{}]\!]$, podemos provar que, para todo $a \in A$, $\{[\![\mathbf{f} : \check{A} \to \check{B}]\!][\![\mathbf{f}(\check{a}) = \check{b}]\!]\}_{b \in F(a)}$ se trata de uma anticadeia de $\mathscr{B}$ com a mesma cardinalidade que $F(a)$, assim devemos ter que $|F(a)| < \mathrm{sat}(\mathscr{B})$.

Agora, vamos provar que, de fato, vale $[\![\mathbf{f} : \check{A} \to \check{B}]\!] \leq [\![\mathbf{f}(\check{a}) \in \check{F}(\check{a})]\!]$ para todo $a \in A$, de onde poderemos concluir $[\![\mathbf{f} : \check{A} \to \check{B}]\!] \leq \prod_{a \in A} [\![\mathbf{f}(a) \in \check{F}(a)]\!]$, logo, $[\![\mathbf{f} : \check{A} \to \check{B}]\!] \leq [\![\forall a \in \check{A}\ \mathbf{f}(a) \in \check{F}(a)]\!]$, isto é, $\mathbb{1} \Vdash$ "$(\mathbf{f} : \check{A} \to \check{B}) \to \forall a \in \check{A}\ \mathbf{f}(a) \in \check{F}(a)$". Inicialmente, temos que $\mathbb{1} \Vdash$ "$(\mathbf{f} : \check{A} \to \check{B}) \to \forall a \in \check{A}\ \exists b \in \check{B}\ \mathbf{f}(a) = b$", isto é, $[\![\mathbf{f} : \check{A} \to \check{B}]\!] \leq \prod_{a \in A} \sum_{b \in B} [\![\mathbf{f}(\check{a}) = \check{b}]\!]$. Portanto, $[\![\mathbf{f} : \check{A} \to \check{B}]\!] \leq \sum_{b \in B} [\![\mathbf{f}(\check{a}) = \check{b}]\!]$ para todo $a \in A$, isto é, $\sum_{b \in B}([\![\mathbf{f} : \check{A} \to \check{B}]\!][\![\mathbf{f}(\check{a}) = \check{b}]\!]) = [\![\mathbf{f} : \check{A} \to \check{B}]\!]$. Mas, pelo modo que definimos $F(a)$, temos que $\sum_{b \in B}([\![\mathbf{f} : \check{A} \to \check{B}]\!][\![\mathbf{f}(\check{a}) = \check{b}]\!]) = \sum_{b \in F(a)}([\![\mathbf{f} : \check{A} \to \check{B}]\!][\![\mathbf{f}(\check{a}) = \check{b}]\!])$. Então $\sum_{b \in F(a)}([\![\mathbf{f} : \check{A} \to \check{B}]\!][\![\mathbf{f}(\check{a}) = \check{b}]\!]) = [\![\mathbf{f} : \check{A} \to \check{B}]\!]$, isto é, $[\![\mathbf{f} : \check{A} \to \check{B}]\!] \leq \sum_{b \in F(a)} [\![\mathbf{f}(\check{a}) = \check{b}]\!]$. Da igualdade anterior podemos deduzir que $[\![\mathbf{f} : \check{A} \to \check{B}]\!] \leq [\![\exists b \in (F(a))\check{}\ \ \mathbf{f}(\check{a}) = b]\!]$, consequentemente, $[\![f : \check{A} \to \check{B}]\!] \leq [\![\mathbf{f}(\check{a}) \in (F(a))\check{}]\!]$, uma vez que podemos provar, por absoluticidade, que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\check{F}(\check{a}) = (F(a))\check{}$" e, via igualdade lógico booleana, que $[\![\mathbf{f} : \check{A} \to \check{B}]\!] \leq [\![\mathbf{f}(\check{a}) \in \check{F}(\check{a})]\!]$ para $a \in A$ arbitrário, concluindo a demonstração. $\square$

Agora vamos provar o teorema pretendido:

Teorema 2.6.4. Para todo ordinal α com $\mathrm{cf}(\alpha) \geq \mathrm{sat}(\mathscr{B})$, vale $\mathbb{1} \Vdash$ "$\mathrm{cf}(\check{\alpha}) = (\mathrm{cf}(\alpha))\check{}$".

Demonstração. Fixe ordinal α com $\mathrm{cf}(\alpha) \geq \mathrm{sat}(\mathscr{B})$. Para $\beta \in \mathrm{cf}(\alpha)$ e $\mathbf{f} \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}$ arbitrários, seja F a função que, pelo Teorema 2.6.3, satisfaz $\mathbb{1} \Vdash$ "$(\mathbf{f} : \check{\beta} \to \check{\alpha}) \to \forall \gamma \in \check{\beta}\ \mathbf{f}(\gamma) \in \check{F}(\gamma)$". Como $\mathrm{cf}(\alpha)$ é um cardinal regular, $|\beta| < \mathrm{cf}(\alpha)$ e, para todo $\gamma \in \beta$, $|F(\gamma)| < \mathrm{sat}(\mathscr{B}) \leq \mathrm{cf}(\alpha)$, então vale $|\bigcup_{\gamma\in\beta} F(\gamma)| < \mathrm{cf}(\alpha)$. Devido a essa última afirmação, uma vez que $\bigcup_{\gamma\in\mathrm{cf}(\alpha)} F(\gamma) \subset \alpha$, existe $\xi \in \alpha$ tal que $\eta < \xi$ para todo $\eta \in \bigcup_{\gamma\in\mathrm{cf}(\alpha)} F(\gamma)$, isto é, $\exists \xi \in \alpha\ \forall \gamma \in \beta\ \forall \eta \in F(\gamma)\ \eta < \xi$ que, por absoluticidade, implica $\mathbb{1} \Vdash$ "$\exists \xi \in \check{\alpha}\ \forall \gamma \in \check{\beta}\ \forall \eta \in \check{F}(\gamma)\ \eta < \xi$". Uma vez que $\mathbb{1} \Vdash$ "$(\mathbf{f} : \check{\beta} \to \check{\alpha}) \to \forall \gamma \in \check{\beta}\ \mathbf{f}(\gamma) \in \check{F}(\gamma)$", podemos derivar $\mathbb{1} \Vdash$ "$(\mathbf{f} : \check{\beta} \to \check{\alpha}) \to \exists \xi \in \check{\alpha}\ \forall \gamma \in \check{\beta}\ \mathbf{f}(\gamma) < \xi$", equivalentemente, $\mathbb{1} \Vdash$ "$(\mathbf{f} : \check{\beta} \to \check{\alpha}) \to \mathbf{f}$ *não é cofinal*". Como $\beta \in \mathrm{cf}(\alpha)$ e $\mathbf{f} \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}$ foram tomados arbitrariamente, segue que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\forall \beta \in (\mathrm{cf}(\alpha))\check{}\ \forall f (f : \beta \to \check{\alpha}) \to f$ *não é cofinal*", equivalentemente, $\mathbb{1} \Vdash$ "$\mathrm{cf}(\check{\alpha}) \geq (\mathrm{cf}(\alpha))\check{}$". Como já sabemos que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\mathrm{cf}(\check{\alpha}) \leq (\mathrm{cf}(\alpha))\check{}$" pela demonstração do Teorema 2.6.2, temos $\mathbb{1} \Vdash$ "$\mathrm{cf}(\check{\alpha}) = (\mathrm{cf}(\alpha))\check{}$". □

O Teorema 2.6.2 implica que sempre temos $\mathbb{1} \Vdash$ "$\mathrm{cf}(\alpha) = (\mathrm{cf}(\alpha))\check{}$" quando $\mathrm{cf}(\alpha) \leq \omega$, e $\mathrm{cf}(\alpha)$ sempre é um cardinal. Para que a cofinalidade seja absoluta em $\mathscr{B}$, este precisa apenas satisfazer $\mathbb{1} \Vdash$ "$\mathrm{cf}(\check{\alpha}) = (\mathrm{cf}(\alpha))\check{}$" para todo ordinal α tal que $\mathrm{cf}(\alpha) \geq \omega_1$, e o teorema acima prova que isso acontecerá quando $\mathrm{sat}(\mathscr{B}) = \omega_1$. Assim provamos a seguinte afirmação:

Corolário 2.6.5. Para toda álgebra booleana $\mathscr{B}$ ccc, a cofinalidade é $\mathscr{B}$-absoluta.

Agora provaremos que, de fato, a $\mathscr{B}$-absoluticidade da cofinalidade implica a $\mathscr{B}$-absoluticidade da cardinalidade.

Teorema 2.6.6. Para toda álgebra booleana completa $\mathscr{B}$ tal que cf() seja $\mathscr{B}$-absoluta, então as afirmações κ *é cardinal* e κ *é cardinal regular* são $\mathscr{B}$-absolutas.

Demonstração. Vamos provar primeiramente que, uma vez fixado $\mathscr{B}$ satisfazendo as propriedades necessárias, para todo cardinal κ vale que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\check{\kappa}$ *é cardinal*". Já sabemos que a definição ω é absoluta e que ZFC prova as fórmulas ω *é cardinal* e $\forall n \in \omega\ n$ *é cardinal*. Então, caso $\kappa \leq \omega$, temos $\mathbb{1} \Vdash$ "$\check{\kappa}$ *é cardinal*".

A partir de agora, suponha $\kappa > \omega$. Caso κ for regular, como x *é cardinal regular* equivale a x *é ordinal* $\wedge x > \omega \wedge \mathrm{cf}(x) = x$, pela absoluticidade dos ordinais e $\mathscr{B}$-absoluticidade de cf(), temos $\mathbb{1} \Vdash$ "$\check{\kappa}$ *é cardinal regular*", consequentemente, $\mathbb{1} \Vdash$ "$\check{\kappa}$ *é cardinal*". Agora, caso κ não for regular, ele é cardinal limite, assim, para todo cardinal $\lambda < \kappa$ com $\lambda \geq \omega$, temos que $\lambda^+ < \kappa$ que, por sua vez é regular. Então, se definirmos $X = \{\lambda < \kappa : \lambda$ *é cardinal regular*$\}$, temos que $\forall \lambda \in X\ \lambda$ *é cardinal regular* e $\bigcup X = \kappa$. Essas fórmulas, por sua vez, devido ao resultado provado acima e à absoluticidade implicam $\mathbb{1} \Vdash$ "$\forall \lambda \in \check{X}\ \lambda$ *é cardinal regular*" e $\mathbb{1} \Vdash$ "$\bigcup \check{X} = \check{\kappa}$". Como podemos provar em ZFC que, para toda coleção Y composta exclusivamente de cardinais, $\sup Y = \bigcup Y$ é cardinal, essas últimas fórmulas implicam $\mathbb{1} \Vdash$ "$\check{\kappa}$ *é cardinal*".

Só resta provar que $\sim \kappa$ *é cardinal* implica $\mathbb{1} \Vdash$ "$\sim \check{\kappa}$ *é cardinal*". Como x *é cardinal* equivale a x *é ordinal* $\wedge \sim \exists f$ (f *é função* $\wedge \mathrm{dom}(f) \in x \wedge \mathrm{im}(f) = x \wedge f$ *é injetora*) e uma vez que a primeira fórmula é absoluta, podemos aqui nos restringir ao caso que κ *é ordinal* $\wedge \exists f$ (f *é função* $\wedge \mathrm{dom}(f) \in \kappa \wedge \mathrm{im}(f) = \kappa \wedge f$ *é injetora*). Fixe a função $f : \alpha \to \kappa$ bijetora que satisfaz $\alpha \in \kappa$, teremos então, pela absoluticidade dos termos envolvidos, $\mathbb{1} \Vdash$ "$\check{f}$ *é função* $\wedge \mathrm{dom}(\check{f}) \in \check{\kappa} \wedge \mathrm{im}(\check{f}) = \check{\kappa} \wedge \check{f}$ *é injetora*", logo $\mathbb{1} \Vdash$ "$\exists f$ (f *é função* $\wedge \mathrm{dom}(f) \in \check{\kappa} \wedge \mathrm{im}(f) = \check{\kappa} \wedge f$ *é injetora*)". Assim concluímos que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\check{\kappa}$ *é ordinal* $\wedge \exists f$ (f *é função* $\wedge \mathrm{dom}(f) \in \check{\kappa} \wedge \mathrm{im}(f) = \kappa \wedge f$ *é injetora*)", isto é, $\mathbb{1} \Vdash$ "$\sim \check{\kappa}$ *é cardinal*", como queríamos.

A $\mathscr{B}$-absoluticidade de κ *é regular* é imediata, uma vez que x *é cardinal regular* equivale a x *é ordinal* $\wedge x \geq \omega \wedge \mathrm{cf}(x) = x$ e, uma vez que as duas primeiras fórmulas são absolutas e a última satisfaz $\mathscr{B}$-absoluticidade, as três fórmulas combinadas são $\mathscr{B}$-absolutas. $\square$

A $\mathscr{B}$-absoluticidade da cardinalidade, por sua vez, implica a absoluticidade de várias definições.

Teorema 2.6.7. Para toda álgebra booleana $\mathscr{B}$ tal que κ *é cardinal* é $\mathscr{B}$-absoluta, então as seguintes definições são $\mathscr{B}$-absolutas:

1. ω_α, $\alpha \in \mathbf{ON}$
2. α^+, $\alpha \in \mathbf{ON}$
3. $|A|$, para todo A

Demonstração. Aqui, quando for necessário, usaremos o Lema 2.3.5 implicitamente.

1: Aqui necessitaremos de algumas definições auxiliares. Para todo ordinal α, definiremos $\Omega(\alpha)$ como sendo o conjunto $\{\kappa \in \alpha : \kappa \geq \omega \wedge \kappa$ *é cardinal*$\}$. Como supomos que κ *é cardinal* é $\mathscr{B}$-absoluta, então podemos provar que $\Omega(\alpha)$ é $\mathscr{B}$-absoluta. Para todo conjunto $X \subset \mathbf{ON}$, definimos $\leq_X$ como a relação de ordem para X definida a partir da ordem canônica entre ordinais, sendo esta última absoluta, então $\leq_X$ é absoluta (aqui usamos implicitamente o fato da classe $\{X : X \subset \mathbf{ON}\}$ ser absoluta, o que é fácil uma vez que X pertence a essa classe se, e somente se, $\forall x \in X$ x *é ordinal*. Porém, a mesma classe não é class-preserving, como o leitor poderá provar em breve). Com essas definições, pode-se provar que $\kappa = \omega_\alpha$ se, e somente se, κ *é cardinal* $\wedge \kappa \geq \omega \wedge \mathrm{type}(\Omega(\kappa), \leq_{\Omega(\alpha)}) = \alpha$, uma vez que temos a $\mathscr{B}$-absoluticidade de todas as fórmulas e definições citadas (inclusive $\mathrm{type}(A,R)$) a fórmula inteira é $\mathscr{B}$-absoluta.

2: α^+ se trata do menor cardinal maior que α (na prática, ele só é usado quando α é cardinal). Assim, $\kappa = \alpha^+$ equivale a κ *é cardinal* $\wedge \kappa > \alpha \wedge \forall \xi \in \kappa (\xi > \alpha \to \sim \xi$ *é cardinal*) e a $\mathscr{B}$-absoluticidade de cada termo, consequentemente da fórmula toda, é trivial.

3: Fixe conjunto A e cardinal κ tal que $|A| = \kappa$, fixe $f : A \to \kappa$ bijetora. Por absoluticidade, temos $\mathbb{1} \Vdash$ "$\check{f}$ *é função* $\wedge \mathrm{dom}(\check{f}) = \check{A} \wedge \mathrm{im}(\check{f}) = \check{\kappa} \wedge \check{f}$ *é injetora*", portanto, $\mathbb{1} \Vdash$ "$\exists f$ f *é função*

$\wedge \mathrm{dom}(f) = \check{A} \wedge \mathrm{im}(f) = \check{\kappa} \wedge f$ *é injetora*". Combinando essa fórmula com a $\mathscr{B}$-absoluticidade de x *é cardinal*, obtemos $\mathbb{1} \Vdash$ "$\check{\kappa}$ *é cardinal* $\wedge \exists f\ f$ *é função* $\wedge \mathrm{dom}(f) = \check{A} \wedge \mathrm{im}(f) = \check{\kappa} \wedge f$ *é injetora*", implicando, via ZFC, que $\mathbb{1} \Vdash$ "$|\check{A}| = \check{\kappa}$", isto é, $\mathbb{1} \Vdash$ "$|\check{A}| = (|A|)\check{}$" para A arbitrário, provando sua $\mathscr{B}$-absoluticidade. □

Assim, podemos aplicar o teorema acima, junto com o Corolário 2.6.5 no Teorema 2.6.1, já que, para os cardinais κ e λ, κ^λ representa a cardinalidade do conjunto de funções $f : \lambda \to \kappa$ (que denotaremos ${}^\lambda\kappa$ para evitar confusões), obtendo o seguinte corolário:

Corolário 2.6.8. Para toda álgebra booleana completa ccc $\mathscr{B}$ e todo cardinal λ, temos $\mathbb{1} \Vdash$ "$|\wp(\check{\lambda})| \leq (|\mathscr{B}|^\lambda)\check{}$".

Também, com a $\mathscr{B}$-absoluticidade de κ *é cardinal*, podemos provar o seguinte corolário:

Corolário 2.6.9. Dado álgebra booleana completa $\mathscr{B}$ tal que κ *é cardinal* é $\mathscr{B}$-absoluta, então a classe dos cardinais **CN** é class-preserving.

Demonstração. x *é cardinal* equivale a $\exists \alpha \in \mathbf{ON}(\alpha$ *é cardinal* $\wedge x = \alpha)$. Assim, devido ao class-preserving de **ON**, temos, para todo nome $\mathbf{x} \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}$, $[\![\mathbf{x} \in \mathbf{CN}]\!] = [\![\exists \alpha \in \mathbf{ON}(\alpha$ *é cardinal* $\wedge \mathbf{x} = \alpha)]\!] = \sum_{\alpha \in \mathbf{ON}}([\![\check{\alpha}$ *é cardinal*$]\!][\![\mathbf{x} = \check{\alpha}]\!])$. Devido à $\mathscr{B}$-absoluticidade da cardinalidade, $[\![\check{\alpha}$ *é cardinal*$]\!]$ é igual a $\mathbb{1}$ caso α for cardinal, e $\mathbb{0}$, caso contrário, então $\sum_{\alpha \in \mathbf{ON}}([\![\check{\alpha}$ *é cardinal*$]\!][\![\mathbf{x} = \check{\alpha}]\!]) = \sum_{\kappa \in \mathbf{CN}}[\![\mathbf{x} = \check{\kappa}]\!]$, como queríamos provar. □

Com o último teorema obtemos o nosso segundo resultado de consistência:

Teorema 2.6.10. $\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC}) \to \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC} + \mathrm{GCH} + \mathbf{V} \neq \mathbf{L})$.

Demonstração. Como já sabemos que Con(ZFC)→Con(ZFC+GCH), podemos considerar nossa teoria inicial como ZFC+GCH. Nesse caso, a aritmética cardinal se comporta da seguinte maneira: Para quaisquer cardinais $\kappa \geq 2, \lambda \geq 2$ com ao menos um desses infinito, $\kappa^\lambda =$

$$\begin{cases} \lambda^+, & \text{Caso } \kappa \leq \lambda; \\ \kappa^+, & \text{Caso } \mathrm{cf}(\kappa) \leq \lambda < \kappa; \\ \kappa, & \text{Caso } \lambda < \mathrm{cf}(\kappa). \end{cases}$$

O $\mathscr{B}$ usado nesse teorema será $\mathrm{r.o.}(\mathrm{Fn}(\omega,2))$, como $\mathrm{Fn}(\omega,2)$ é não atômico, $\mathrm{r.o.}(\mathrm{Fn}(\omega,2))$ também será, assim temos $\mathbb{1} \Vdash$ "$\mathbf{V} \neq \mathbf{L}$". O Corolário 1.3.35 implica que $\mathrm{Fn}(\omega,2)$ é ccc, então o Teorema 1.3.28 implica que $\mathrm{r.o.}(\mathrm{Fn}(\omega,2))$ é ccc. Portanto, todos os teoremas dessa seção são válidos para o nosso $\mathscr{B}$.

Antes de demonstrar que $\mathbb{1} \Vdash$ "GCH", precisamos calcular, ou ao menos estimar, o valor de $|\mathrm{r.o.}(\mathrm{Fn}(\omega,2))|$. O Teorema 1.3.36 prova que $|\mathrm{Fn}(\omega,2)| = \sup_{n\in\omega}(\omega^n \cdot 2^n) = \omega$, como é fácil provar que $|\mathrm{Fn}(\omega,2)| \geq \omega$, segue que $|\mathrm{Fn}(\omega,2)| = \omega$ (não é necessário usar GCH aqui). O fato de $\mathrm{Fn}(\omega,2)$ ser não atômico, junto com o Corolário 1.3.35, permite provar que $\mathrm{sat}(\mathrm{Fn}(\omega,2)) = \omega_1$

(caso fosse menor, o conjunto de átomos seria denso em $\mathrm{Fn}(\omega,2)$ pelo Teorema 1.3.29). Agora, o Corolário 1.3.38 nos permite provar que $|\mathrm{r.o.}(\mathrm{Fn}(\omega,2))| \leq |\mathrm{Fn}(\omega,2)|^{<\mathrm{sat}(\mathrm{Fn}(\omega,2))} = \omega^{<\omega_1} = \omega^\omega = \omega_1$. Uma vez que supomos GCH, então é fácil provar, usando a regra citada acima, que para todo ordinal α, $(\omega_1)^{\omega_\alpha} = (\omega_\alpha)^+ = \omega_{\alpha+1}$. Portanto, através do Corolário 2.6.8, temos que $\mathbb{1} \Vdash$ "$|\wp((\omega_\alpha)\check{})| \leq (\omega_{\alpha+1})\check{}$". Pela r.o.$(\mathrm{Fn}(\omega,2))$-absolutividade de todos os termos envolvidos, provamos que $\mathbb{1} \Vdash$ "$|\wp(\omega_\alpha)| \leq \omega_\alpha$", isto é, $\mathbb{1} \Vdash$ "$2^{\omega_\alpha} \leq \omega_{\alpha+1}$", uma vez que vale, graças à ZFC, $\mathbb{1} \Vdash$ "$2^{\omega_\alpha} \geq \omega_{\alpha+1}$", concluimos que $\mathbb{1} \Vdash$ "$2^{\omega_\alpha} = \omega_{\alpha+1}$". Pela arbitrariedade do ordinal e o class-preserving dessa classe, obtem-se $\mathbb{1} \Vdash$ "$\forall \alpha \in \mathbf{ON}\ 2^{\omega_\alpha} = \omega_{\alpha+1}$", ou seja, $\mathbb{1} \Vdash$ "GCH". Portanto, todos os axiomas de ZFC+GCH+$\mathbf{V} \neq \mathbf{L}$ são válidos em r.o.$(\mathrm{Fn}(\omega,2))$. □

Como já dissemos, em ZFC, o axioma da construtibilidade implica GCH, o teorema acima nos permite provar que a recíproca não é verdadeira, assim o axioma da construtibilidade é mais "forte" que GCH.

2.6.2 Consistência de $\sim$CH

Até o presente momento, nos concentramos em teoremas que preservam a aritmética cardinal. A partir de agora, passaremos a exibir as ferramentas que realmente permitem "controlá-la", assim permitindo-nos provar a consistência de afirmações como $\sim$CH.

Para adquirir esse "controle", precisaremos realmente acrescentar "novos conjuntos", mas nem sempre é evidente que o fato de adicionar um ultrafiltro genérico, de fato adicionará o conjunto que nos interessa, no caso da aritmética cardinal, funções entre os cardinais. Porém é fácil provar que isso acontece caso a álgebra booleana completa é gerada a partir de forcings do estilo $\mathrm{Fn}(I,J,\lambda)$, como provaremos a seguir.

Teorema 2.6.11. Para todos I,J não vazios, κ cardinal infinito e álgebra booleana completa $\mathscr{B}$ com nome $\mathbf{G} \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}$ tal que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\mathbf{G}$ *é filtro* $(\mathfrak{D}_{\mathrm{Fn}(I,J,\kappa)})\check{}$*-genérico*", então $\mathbb{1} \Vdash$ "$\bigcup \mathbf{G}$ *é função* $\wedge \mathrm{dom}(\bigcup \mathbf{G}) = \check{I}$" e, caso $|I| \geq \kappa$ temos, em acréscimo, que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\mathrm{im}(\bigcup \mathbf{G}) = \check{J}$". Essa função será "nova" quando $\mathrm{Fn}(I,J,\kappa)$ for não atômico.

Demonstração. Pela absolutividade das propriedades de $\mathrm{Fn}(I,J,\kappa)$, podemos provar que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\forall p \in (\mathrm{Fn}(I,J,\kappa))\check{}\ p$ *é função* $\wedge \mathrm{dom}(p) \subset \check{I} \wedge \mathrm{im}(p) \subset \check{J}$" e $\mathbb{1} \Vdash$ "$\forall p,q \in (\mathrm{Fn}(I,J,\kappa))\check{}\ p \not\perp q \rightarrow p \cup q$ *é função*". Como temos, por hipótese, que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\mathbf{G} \subset (\mathrm{Fn}(I,J,\kappa))\check{}$" e $\mathbb{1} \Vdash$ "$\mathbf{G}$ *é filtro*", temos que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\bigcup \mathbf{G}$ *é função*$\wedge \mathrm{dom}(\bigcup \mathbf{G}) \subset \check{I} \wedge \mathrm{im}(\bigcup \mathbf{G}) \subset \check{J}$".

Para todo $i \in I$, fixe o conjunto $D_i = \{p \in \mathrm{Fn}(I,J,\kappa) : i \in \mathrm{dom}(p)\}$, digo que D_i é denso. Pois, para todo $p \in \mathrm{Fn}(I,J,\kappa)$, caso $i \in \mathrm{dom}(p)$ então $p \in D_i$, caso contrário, fixe $j \in J$ arbitrário e faça $q = p \cup \{(i,j)\}$, então $q \in D_i$ e $q \leq p$. Portanto, pela absolutividade dos termos envolvidos, podemos provar que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\{p \in (\mathrm{Fn}(I,J,\kappa))\check{} : \check{i} \in \mathrm{dom}(p)\} \in (\mathfrak{D}_{\mathrm{Fn}(I,J,\kappa)})\check{}$", assim, unindo esse fato às hipóteses, temos que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\check{i} \in \mathrm{dom}(\bigcup \mathbf{G})$" para $i \in I$ arbitrário. Logo, $\mathbb{1} \Vdash$ "$\mathrm{dom}(\bigcup \mathbf{G}) \supset \check{I}$", assim concluímos a demonstração de que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\mathrm{dom}(\bigcup \mathbf{G}) = \check{I}$".

Suponha agora que $|I| \geq \kappa$. Para todo $j \in J$, defina $D_j = \{p \in \mathrm{Fn}(I,J,\kappa) : j \in \mathrm{im}(p)\}$, vamos provar que D_j é denso. Para isso, podemos nos restringir ao caso que $p \notin D_j$, neste caso $j \notin \mathrm{im}(p)$. Como $|\mathrm{dom}(p)| < \kappa$ e $|I| \geq \kappa$, então existe $i \in I$ tal que $i \notin \mathrm{dom}(p)$, consequentemente, fazendo $q = p \cup \{(i,j)\}$, $q \in D_j$ e $q \leq p$. Agora, a absoluticidade nos fornece que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\{p \in (\mathrm{Fn}(I,J,\kappa))^{\check{}} : j \in \mathrm{im}(p)\} \in (\mathfrak{D}_{\mathrm{Fn}(I,J,\kappa)})^{\check{}}$". Com ela e a hipótese, podemos concluir que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\check{j} \in \mathrm{im}(\bigcup \mathbf{G})$" para todo $j \in J$, ou seja $\mathbb{1} \Vdash$ "$\mathrm{im}(\bigcup \mathbf{G}) \supset \check{J}$". Com isso, concluímos que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\mathrm{im}(\bigcup \mathbf{G}) = \check{J}$".

Pelo Teorema 1.2.5, $\mathrm{Fn}(I,J,\kappa)$ é não atômico se, e somente se, $|I| \geq \kappa$ e $|J| \geq 2$. Para provarmos que $\bigcup \mathbf{G}$ é "nova" nessas condições, vamos provar que, para toda função $f : I \to J$, temos que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\bigcup \mathbf{G} \neq f$". Para isso, construiremos o conjunto $D_f = \{p \in \mathrm{Fn}(I,J,\kappa) : \exists i \in \mathrm{dom}(p)\ p(i) \neq f(i)\}$. Digo que ele é denso, pois fixe $p \in \mathrm{Fn}(I,J,\kappa)$ arbitrário, vale $|\mathrm{dom}(p)| < \kappa$ e, como supomos que $\mathrm{Fn}(I,J,\kappa)$ é não atômico, existe $i \in I$ com $i \notin \mathrm{dom}(p)$. Pela mesma hipótese, existe $j \in J$ com $j \neq f(i)$. Consequentemente, $q = p \cup \{(i,j)\}$ satisfaz $q \in D_f$ e $q \leq p$. Assim, por absoluticidade, temos $\mathbb{1} \Vdash$ "$\{p \in (\mathrm{Fn}(I,J,\kappa))^{\check{}} : \exists i \in \mathrm{dom}(p)\ p(i) \neq \check{f}(i)\} \in (\mathfrak{D}_{\mathrm{Fn}(I,J,\kappa)})^{\check{}}$", de onde podemos provar que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\exists i \in \mathrm{dom}(\bigcup \mathbf{G})\ \bigcup \mathbf{G}(i) \neq \check{f}(i)$", isto é, $\mathbb{1} \Vdash$ "$\bigcup \mathbf{G} \neq \check{f}$", para toda função $f : I \to J$, o que queríamos. $\square$

Observação 2.6.12. Note que no teorema anterior foi crucial usar $(\mathrm{Fn}(I,J,\kappa))^{\check{}}$ ao invés de $\mathrm{Fn}(\check{I},\check{J},\check{\kappa})$, uma vez que $\mathrm{Fn}(I,J,\kappa)$ não precisa ser necessariamente absoluta.

O teorema acima nos fornece o segredo para acrescentar novos conjuntos. Pois, uma vez que ZFC prova a existência de uma bijeção $2^I \Leftrightarrow \wp(I)$, uma vez tendo uma função $f : I \to 2$ "nova", teremos um subconjunto de I "novo". Mas podemos ser mais precisos, para toda função $f : I \to 2$, podemos associar um conjunto $I_f \subset I$ definido como $\{i \in I : f(i) = 1\}$. Para todo subconjunto $J \subset I$, existe $f : I \to 2$ com $J = I_f$, a saber, χ_J, definido como, para todo $i \in I$, $\chi_J(i) = \begin{cases} 1, & \text{se } i \in J; \\ 0, & \text{se } i \notin J. \end{cases}$ Note que , com essas definições, assumindo as hipóteses do teorema acima e a absoluticidade dos termos envolvidos, temos que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\check{I}_{\bigcup \mathbf{G}} \subset \check{I}$" e, para toda função $f : I \to 2$, vale que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\check{I}_{\bigcup \mathbf{G}} \neq \check{I}_{\check{f}}$", consequentemente $\mathbb{1} \Vdash$ "$\check{I}_{\bigcup \mathbf{G}} \neq \check{J}$", para todo $J \in \wp(I)$. Logo, $\mathbb{1} \Vdash$ "$\check{I}_{\bigcup \mathbf{G}} \notin (\wp(I))^{\check{}}$". Portanto, a existência de um novo subconjunto de I é "evidente" (isto é, valor booleano $\mathbb{1}$).

Porém, para conseguirmos violar CH, não basta somente criar um novo subconjunto (de ω), precisamos criar infinitos conjuntos novos, o suficiente para violar a hipótese (mais que ω_1). A estratégia geral para acrescentar infinitos conjuntos I é através do forcing $\mathrm{Fn}(I \times \kappa, 2, \lambda)$, onde κ é a cardinalidade de cardinais "criada" (desde que os cardinais sejam preservados). Assumindo as mesmas hipóteses do teorema acima, podemos provar que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\bigcup \mathbf{G}$ *é função* $\wedge \mathrm{dom}(\bigcup \mathbf{G}) = \check{I} \times \check{\kappa} \wedge \mathrm{im}(\bigcup \mathbf{G}) = 2$". Como podemos, dado uma função $f : I \times \kappa \to 2$, definir a coleção $\{f_\xi\}_{\xi < \kappa}$ de funções $f : I \to 2$ onde, para todo $\xi < \kappa$, $f_\xi(i) = f(i,\xi)$. Portanto, a função $\bigcup \mathbf{G}$ dita acima nos fornece uma lista infinita de funções, o fato de todas elas serem "novas" será provado no teorema abaixo.

Teorema 2.6.13. Para todo forcing do estilo $\mathrm{Fn}(I \times \kappa, J, \lambda)$ com $|I| \geq \lambda$ e $|J| \geq 2$ e toda álgebra booleana completa $\mathscr{B}$ que possua um nome $\mathbf{G}$ tal que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\mathbf{G}$ *é filtro* $(\mathfrak{D}_{\mathrm{Fn}(I\times\kappa,J,\lambda)})^{\check{}}$*-genérico*", então vale, para todo $\xi < \kappa$ e função $f : I \to J$, $\mathbb{1} \Vdash$ "$(\bigcup \mathbf{G})_{\check{\xi}} \neq \check{f}$".

Demonstração. Note que, como $|I| \geq \lambda$, vale $|I \times \kappa| \geq \lambda$, portanto, $\mathrm{Fn}(I \times \kappa, J, \lambda)$ é não atômica e o Teorema 2.6.11 é aplicável. Agora, fixe $\xi < \kappa$ e função $f : I \to J$, defina o conjunto $D_f^\xi = \{p \in \mathrm{Fn}(I \times \kappa, J, \lambda) : \exists i \in I\ (i,\xi) \in \mathrm{dom}(p) \wedge p(i,\xi) \neq f(i)\}$, esse conjunto é denso, pois, para todo $p \in \mathrm{Fn}(I \times \kappa, J, \lambda)$, temos que $|\{i \in I : (i,\xi) \in \mathrm{dom}(p)\}| < \lambda$, portanto existe $i \in I$ com $(i,\xi) \notin \mathrm{dom}(p)$ e $j \in J$ tal que $f(i) \neq j$. Logo, fazendo $q = p \cup \{((i,\xi), j)\}$ temos que $q \in D_f^\xi$ e $q \leq p$. Assim, devido à absoluticidade, temos que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\{p \in (\mathrm{Fn}(I \times \kappa, J, \lambda))^{\check{}} : \exists i \in \check{I}\ (i,\check{\xi}) \in \mathrm{dom}(p) \wedge p(i,\check{\xi}) \neq \check{f}(i)\} \in (\mathfrak{D}_{\mathrm{Fn}(I\times\kappa,J,\lambda)})^{\check{}}$", de onde podemos derivar $\mathbb{1} \Vdash$ "$\bigcup \mathbf{G}_{\check{\xi}} \neq \check{f}$" para $\xi < \kappa$ arbitrário, como queríamos provar. □

Fixe agora um forcing $\mathrm{Fn}(I,J,\kappa)$ não atômico, seja $\lambda = |I| \geq \kappa$. Uma vez que existe função bijetora $f : I \times \lambda \to I$, o Teorema 1.3.11 implica que existe embarcação densa $i_f : \mathrm{Fn}(I \times \kappa, J, \kappa) \to \mathrm{Fn}(I, J, \kappa)$, então podemos provar que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\mathbf{G}$ *é filtro* $(\mathfrak{D}_{\mathrm{Fn}(I,J,\kappa)})^{\check{}}$*-genérico*" implica que $\mathbb{1} \Vdash$ "$(i_f)^{\check{}\,-1}[\mathbf{G}]$ *é filtro* $(\mathfrak{D}_{\mathrm{Fn}(I\times\lambda,J,\kappa)})^{\check{}}$*-genérico*", a demonstração é similar à da afirmação equivalente no Teorema 2.4.5. De modo geral, dada uma embarcação $i : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$, $\mathbb{1} \Vdash$ "$\mathbf{G}$ *é filtro* $(\mathfrak{D}_{\mathbb{Q}})^{\check{}}$*-genérico*" implica $\mathbb{1} \Vdash$ "$\check{i}^{-1}[\mathbf{G}]$ *é filtro* $(\mathfrak{D}_{\mathbb{P}})^{\check{}}$*-genérico*", a demonstração é análoga à equivalente no Teorema 2.4.7. Com isso, podemos provar que a mesma álgebra booleana completa que acrescenta uma nova função $f : I \to J$, ela acaba acrescentando obrigatoriamente $|I|$ funções distintas (desde que os cardinais sejam preservados).

Como o leitor pode ter notado, o fato do forcing ser não atômico não é o suficiente para que todas as funções enunciadas serem "novas". Porém, tecnicamente falando, para violarmos CH e a aritmética de cardinais em geral, precisaríamos apenas do fato desse forcing assegurar a existência de κ subconjuntos de um conjunto específico I, desde que os cardinais sejam preservados. O problema é que, para provar que as κ funções do teorema acima serem distintas umas das outras, necessitaremos das mesmas hipóteses do teorema acima. No caso de CH, o conjunto I será ω e provaremos abaixo o teorema respectivo.

Teorema 2.6.14. Para todo cardinal κ, existe álgebra booleana completa $\mathscr{B}$ tal que a cardinalidade seja $\mathscr{B}$-absoluta e vale $\mathbb{1} \Vdash$ "$2^\omega \geq \check{\kappa}$" (lembre que 2 e ω são definições absolutas).

Demonstração. Aqui basta fazer o $\mathscr{B} = \mathrm{r.o.}(\mathrm{Fn}(\omega \times \kappa, 2))$. O Corolário 1.3.35 prova que $\mathrm{Fn}(\omega \times \kappa, 2)$, consequentemente, $\mathrm{r.o.}(\mathrm{Fn}(\omega \times \kappa, 2))$ é ccc, portanto, o Teorema 2.6.6 prova que cardinalidade é $\mathscr{B}$-absoluta. Também existe nome $\mathbf{G}$ tal que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\mathbf{G}$ *é filtro* $(\mathfrak{D}_{\mathrm{Fn}(\omega\times\kappa,2)})^{\check{}}$*-genérico*", a saber, $\mathbf{G} = \Gamma_e$. Então podemos provar, para todo $\xi < \kappa$, que $\mathbb{1} \Vdash$ "$(\bigcup \Gamma_e)_{\check{\xi}}$ *é função* $\wedge \mathrm{dom}((\bigcup \Gamma_e)_{\check{\xi}}) = \omega \wedge \mathrm{im}((\bigcup \Gamma_e)_{\check{\xi}}) \subset 2$" seguindo os passos das demonstrações anteriores. Porém, para chegarmos a conclusão desejada, precisamos assegurar que cada uma das funções dessa coleção é distinta das demais, isso será demonstrado em sua versão mais geral no lema a seguir (como sugerimos acima, o fato de todas essas funções serem "novas" não será usado).

Lema 2.6.15. Para quaisquer $\mathrm{Fn}(I\times\kappa,J,\lambda)$ com $|I|\geq\lambda$, $|J|\geq 2$ e toda álgebra booleana completa $\mathscr{B}$ com nome $\mathbf{G}$ tal que $\mathbb{1}\Vdash$ "$\mathbf{G}$ *é filtro* $(\mathfrak{D}_{\mathrm{Fn}(I\times\kappa)})\check{}$ *-genérico*", então, para todo $\xi,\eta\in\kappa$ com $\xi\neq\eta$, vale que $\mathbb{1}\Vdash$ "$\bigcup\mathbf{G}_{\check{\xi}}\neq\bigcup\mathbf{G}_{\check{\eta}}$".

Demonstração. Para provar o lema, vamos provar que o seguinte conjunto é denso: $D_{(\xi,\eta)}=\{p\in\mathrm{Fn}(I\times\kappa,J,\lambda):\exists i\in I\ (i,\xi),(i,\eta)\in\mathrm{dom}(p)\wedge p(i,\xi)\neq p(i,\eta)\}$, para $\xi,\eta\in\kappa$ com $\xi\neq\eta$. Uma vez fixado $p\in\mathrm{Fn}(I\times\kappa,J,\lambda)$, podemos provar que $|\{i\in I:(i,\xi)\in\mathrm{dom}(p)\vee(i,\eta)\in\mathrm{dom}(p)\}|<\lambda$, portanto, existe $i\in I$ com $(i,\xi),(i,\eta)\notin\mathrm{dom}(p)$. Fixe $j_0,j_1\in J$ com $j_0\neq j_1$, então, fazendo $q=p\cup\{((i,\xi),j_0),((i,\eta),j_1)\}$, temos que $q\in D_{(\xi,\eta)}$ e $q\leq p$. Assim, provamos por absoluticidade que $\mathbb{1}\Vdash$ "$\{p\in(\mathrm{Fn}(I\times\kappa,J,\lambda))\check{}:\exists i\in\check{I}\ (i,\check{\xi}),(i,\check{\eta})\in\mathrm{dom}(p)\wedge p(i,\check{\xi})\neq p(i,\check{\eta})\}\in(\mathfrak{D}_{\mathrm{Fn}(I\times\kappa,J,\lambda)})\check{}$", consequentemente, podemos derivar $\mathbb{1}\Vdash$ "$\bigcup\mathbf{G}_{\check{\xi}}\neq\bigcup\mathbf{G}_{\check{\eta}}$", o que queríamos. $\square$

Portanto, junto com o fato já demonstrado que $\mathbb{1}\Vdash$ "$\forall\xi\in\check{\kappa}(\bigcup\Gamma_e)_\xi$ *é função* $\wedge\mathrm{dom}((\bigcup\Gamma_e)_\xi)=\omega\wedge\mathrm{im}((\bigcup\Gamma_e)_\xi)\subset 2$", o lema acima, junto com a absoluticidade da igualdade, implica $\mathbb{1}\Vdash$ "$\forall\xi\in\check{\kappa}\forall\eta\in\check{\kappa}\ \xi\neq\eta\rightarrow(\bigcup\Gamma_e)_\xi\neq(\bigcup\Gamma_e)_\eta$". Essas duas afirmações, junto com o fato de que, por hipótese, $\mathbb{1}\Vdash$ "$\check{\kappa}$ *é cardinal*", nos permitem provar que $\mathbb{1}\Vdash$ "$2^\omega\geq\check{\kappa}$". $\square$

O teorema acima já nos permite obter mais um teorema de consistência:

Teorema 2.6.16. Con(ZFC)$\rightarrow$Con(ZFC+$\sim$CH).

Demonstração. A teoria inicial será o próprio ZFC (não será necessário supor GCH). Basta usar o teorema acima com $\kappa=\omega_2$, uma vez que, pelo Teorema 2.6.7, a $\mathscr{B}$-absoluticidade de cardinalidade implica a $\mathscr{B}$-absoluticidade de ω_α. Então, para todo $\mathscr{B}$ que satisfaça o teorema acima para $\kappa=\omega_2$, vale que $\mathbb{1}\Vdash$ "$2^\omega\geq\omega_2$", isto é, $\mathbb{1}\Vdash$ "$\sim$ CH". $\square$

Porém, podemos ir mais longe, e determinar o valor exato de 2^ω, podendo escolhê-lo em uma vasta gama de cardinais, que atinge sua extensão máxima quando se supõe GCH. Provaremos isso no próximo teorema.

Teorema 2.6.17. Supondo GCH, para todo cardinal $\kappa>\omega$ com $\mathrm{cf}(\kappa)\geq\omega_1$, existe álgebra booleana completa $\mathscr{B}$ tal que a cardinalidade é $\mathscr{B}$-absoluta e satisfaz $\mathbb{1}\Vdash$ "$2^\omega=\check{\kappa}$".

Demonstração. Uma vez fixado κ com as propriedades desejadas, o nosso $\mathscr{B}$ será r.o.$(\mathrm{Fn}(\omega\times\kappa,2))$. Agora, seguindo os passos do Teorema 2.6.14, podemos provar que $\mathbb{1}\Vdash$ "$2^\omega\geq\check{\kappa}$". Vamos agora usar GCH para calcular $|\mathscr{B}|$. Com a ajuda do Teorema 1.3.36, podemos provar que $|\mathrm{Fn}(\omega\times\kappa,2)|=\kappa$. Agora, o Corolário 1.3.38 nos permite estimar que $|\mathscr{B}|\leq\kappa^\omega=\kappa$ (uma vez que $\mathrm{cf}(\kappa)>\omega$ e estamos supondo GCH). Pelo fato de $\mathrm{Fn}(\omega\times\kappa,2)$ ser separativa, temos que $|\mathscr{B}| = \kappa$. Então, combinando o Teorema 2.6.1 com o Teorema 2.6.7, podemos provar que $\mathbb{1} \Vdash$ "$2^\omega \leq \check{\kappa}$" (já provamos que $\kappa^\omega = \kappa$), concluindo: $\mathbb{1} \Vdash$ "$2^\omega = \check{\kappa}$". $\square$

Como já sabemos que Con(ZFC) $\to$ Con(ZFC+GCH), seria tentador criar um teorema dizendo que Con(ZFC)$\to$Con(ZFC+$2^\omega = \kappa$) para todo cardinal $\kappa \geq \omega_1$ satisfazendo $\text{cf}(\kappa) > \omega$, mas é preciso ter cautela. Pois, primeiramente precisaríamos considerá-lo como um esquema de metateoremas, um para cada cardinal κ satisfazendo as propriedades requeridas, porém a metateoria estuda apenas as afirmações que se pode fazer na teoria dos conjuntos, ela não é capaz de "reconhecer" conjuntos. Por causa disso, a afirmação $2^\omega = \kappa$ não fará nenhum sentido, a menos que κ possa ser definido como uma constante (função sem parâmetros). Assim, só poderemos criar um esquema, no máximo, com esse tipo de cardinais (chamado "cardinais definíveis"), nesse caso, poderemos fazer uma "quantificação metateórica" nos cardinais definíveis, agrupando esse esquema em um único metateorema. Mas ainda tem um inconveniente, o cardinal definível precisa ser $\mathscr{B}$-absoluto, pois o teorema acima prova apenas que $\mathbb{1} \Vdash$ "$2^\omega = \check{\kappa}$", que não precisa necessariamente implicar $\mathbb{1} \Vdash$ "$2^\omega = \kappa$", a não ser no caso de $\mathscr{B}$-absoluticidade. Assim o nosso metateorema precisa ser Con(ZFC)$\to$Con(ZFC+$2^\omega = \kappa$), para todo cardinal κ definível em ZFC e que é demonstrável, via ZFC ou ZFC+GCH, as seguintes afirmações:

1. κ *é cardinal* e $\kappa > \omega$
2. κ é r.o.$(\text{Fn}(\omega \times \kappa, 2))$-absoluto (sendo κ definível, r.o.$(\text{Fn}(\omega \times \kappa, 2))$ também será)
3. $\text{cf}(\kappa) > \omega$

Como exemplo de cardinais desse tipo, temos $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ e $\omega_{\omega_1}, \omega_{\omega_2}, \omega_{\omega_3}, \dots$. Note que ω_ω é exemplo de um que não satisfaz isso, uma vez que $\text{cf}(\omega_\omega) = \omega$, porém $\omega_{\omega+1}, \omega_{\omega+2}, \omega_{\omega+3}, \dots$ satisfazem.

Agora, o leitor pode perguntar: Que teorema parecido com o de cima podemos ter sem supor GCH? Fazendo $\mathscr{B} = \text{r.o.}(\text{Fn}(\omega \times \kappa, 2))$ com κ infinito, podemos provar que $\mathbb{1} \Vdash$ "$2^\omega = (\kappa^\omega)\check{}$", como provaremos abaixo.

Teorema 2.6.18. Fazendo $\mathscr{B} = \text{r.o.}(\text{Fn}(\omega \times \kappa, 2))$ para cardinal κ infinito, temos que $\mathbb{1} \Vdash$ "$2^\omega = (\kappa^\omega)\check{}$".

Demonstração. Notemos, acima de tudo, que nesse caso, cardinalidade é $\mathscr{B}$-absoluta e que $|\mathscr{B}| \leq \kappa^\omega$. Portanto, podemos usar o Corolário 2.6.8 que implica $\mathbb{1} \Vdash$ "$2^\omega \leq (\kappa^\omega)\check{}$". Agora, devido ao Lema 2.6.15, podemos provar que $\mathbb{1} \Vdash$ "$2^\omega \geq \check{\kappa}$". Como ZFC prova que $(2^\omega)^\omega = 2^\omega$, temos $\mathbb{1} \Vdash$ "$2^\omega \geq \check{\kappa}^\omega$". Por absoluticidade de funções, podemos provar que $\mathbb{1} \Vdash$ "$({}^\omega\kappa)\check{} \subset {}^\omega\check{\kappa}$", consequentemente, $\mathbb{1} \Vdash$ "$(\kappa^\omega)\check{} \leq \check{\kappa}^\omega$", portanto, $\mathbb{1} \Vdash$ "$2^\omega \geq (\kappa^\omega)\check{}$", implicando o desejado. $\square$

O resultado acima, porém, não adiciona nenhum resultado novo de consistência, servindo apenas como curiosidade.

2.6.3 Caso Geral

A subseção anterior sugere uma receita bem simples para manipularmos a aritmética de cardinais em geral. Fixe dois cardinais infinitos κ, λ, fazendo $\mathscr{B} = \text{r.o.}(\text{Fn}(\kappa \times \lambda, 2))$. Neste caso, temos que a cofinalidade e, consequentemente, a cardinalidade são $\mathscr{B}$-absolutas por ser ccc. Fazendo $\mathbf{G} = \Gamma_e$, então teremos como consequência do Lema 2.6.15 que $\mathbb{1} \Vdash$ "$2^{\check{\kappa}} \geq \check{\lambda}$". Podemos obter mais, pois caso supormos GCH e que λ satisfaz $\text{cf}(\lambda) > \kappa$, teremos que $\lambda^{\omega} = \lambda^{\kappa} = \lambda$ e, consequentemente, $|\text{r.o.}(\text{Fn}(\kappa \times \lambda, 2))| = \lambda$. Logo, o Teorema 2.6.1, junto com o fato da cardinalidade ser $\mathscr{B}$-absoluta, nos assegura que $\mathbb{1} \Vdash$ "$2^{\check{\kappa}} \leq \check{\lambda}$", concluindo que $\mathbb{1} \Vdash$ "$2^{\check{\kappa}} = \check{\lambda}$".

Apesar do argumento acima estar correto, ele possui um inconveniente. Fixemos um cardinal infinito $\mu < \kappa$. Como $\mu \times \lambda \subset \kappa \times \lambda$, temos que $\text{Fn}(\mu \times \lambda, 2) \subset \text{Fn}(\kappa \times \lambda, 2)$. Então, devido ao Teorema 1.3.10, a função identidade, que denotaremos por $i_\mu : \text{Fn}(\mu \times \lambda, 2) \to \text{Fn}(\kappa \times \lambda, 2)$, é uma embarcação. Isso implica em particular, devido ao Teorema 2.4.7, que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\Gamma_{i_\mu \circ e}$ *é filtro* $\mathfrak{D}_{\text{Fn}(\mu \times \kappa, 2)}$*-genérico*". Logo, usando o Teorema 2.6.11 junto com o Lema 2.6.15, fazendo $\mathbf{G} = \Gamma_{i_\mu \circ e}$, podemos provar que $\mathbb{1} \Vdash$ "$2^{\check{\mu}} \geq \check{\lambda}$". Supondo GCH e $\text{cf}(\lambda) > \kappa > \mu$, provamos também que $\lambda^{\mu} = \lambda$ e, assim, $\mathbb{1} \Vdash$ "$2^{\check{\mu}} = \check{\lambda}$", para todo cardinal infinito $\mu < \kappa$. Então a regra acima acaba restringindo nossa liberdade de determinar de modo arbitrário a aritmética cardinal em cardinais menores que κ. Como fazer para evitar isso? Note que, ao usarmos $\mathscr{B} = \text{r.o.}(\text{Fn}(\kappa \times \lambda, 2, \kappa))$ no lugar de $\text{r.o.}(\text{Fn}(\kappa \times \lambda, 2))$, ainda seremos capazes de provar que $\mathbb{1} \Vdash$ "$2^{\check{\kappa}} \geq \check{\lambda}$" através do Teorema 2.6.11 junto com o Lema 2.6.15, mas não poderemos fazer a mesma coisa para cardinais infinitos $\mu < \kappa$, uma vez que $\text{Fn}(\mu \times \lambda, 2, \kappa)$ não satisfaz a propriedade $\mu \geq \kappa$, que é necessária. Porém, não poderemos usar esse forcing a menos que provemos a $\mathscr{B}$-absoluticidade da cofinalidade, ou ao menos da cardinalidade.

Supondo GCH, temos que $2^{<\kappa} = \kappa$. Consequentemente, o Teorema 1.3.33 implica que $\text{Fn}(\kappa \times \lambda, 2, \kappa)$ satisfaz κ^+-cc. Portanto, fazendo $\mathscr{B} = \text{r.o.}(\text{Fn}(\kappa \times \lambda, 2, \kappa))$, os teoremas 2.6.2 e 2.6.4 provam que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\text{cf}(\check{\alpha}) = (\text{cf}(\alpha))\check{}$" para todo ordinal α tal que $\text{cf}(\alpha) \leq \omega$ ou $\text{cf}(\alpha) \geq \kappa^+$. Portanto, para provar a $\mathscr{B}$-absoluticidade da cofinalidade, precisamos provar a mesma afirmação para ordinais α tais que $\omega < \text{cf}(\alpha) < \kappa^+$, ou, equivalentemente, $\omega < \text{cf}(\alpha) \leq \kappa$. Isso será válido caso $\mathscr{B}$ for μ-distributivo para todo cardinal infinito $\mu < \kappa$, como iremos provar.

Teorema 2.6.19. Para todo cardinal κ e toda álgebra booleana completa $\mathscr{B}$ κ-distributiva, então, $\mathbb{1} \Vdash$ "$\text{cf}(\check{\alpha}) = (\text{cf}(\alpha))\check{}$" para todo ordinal α tal que $\text{cf}(\alpha) \leq \kappa$.

Demonstração. Antes da demonstração, necessitaremos provar o seguinte lema:

Lema 2.6.20. Para todo cardinal κ e álgebra booleana completa $\mathscr{B}$ κ-distributiva, então, para todo conjunto A e todo conjunto B tal que $|B| \leq \kappa$, segue que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\check{A}^{\check{B}} = (A^B)\check{}$".

Nota: Caso for possível definir a classe $\mathbf{A} = \{B : |B| \leq \kappa\}$ e provar sua $\mathscr{B}$-absoluticidade, então podemos usar esse lema para provar que a definição $F : \mathbf{V} \times \mathbf{A} \to \mathbf{V}$ dada por $F(A, B) = A^B$

é $\mathscr{B}$-absoluta. Poderíamos também provar, como consequência, que a definição $G : \mathbf{A} \to \mathbf{V}$, dada por $G(B) = \wp(B)$ também é absoluta.

Demonstração. Considerando que, para todo cardinal $\mu < \kappa$, $\mathscr{B}$ será μ-distributiva, podemos restringir a demonstração para o caso que $|B| = \kappa$. Então existe função $F : \kappa \to B$ bijetora, e a absoluticidade garante que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\check{F} : \check{\kappa} \to \check{B} \wedge \check{F}$ *é bijetora*". Argumentando do mesmo modo que na demonstração do Teorema 2.3.6 **1º**, substituindo apenas n por κ, podemos provar, devido a κ-distributividade, que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\check{A}^{\check{\kappa}} = (A^\kappa)\check{}$" para todo conjunto A. Com isso, vamos provar que, para todo nome $\mathbf{f} \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}$ vale $\mathbb{1} \Vdash$ "$(\mathbf{f} : \check{B} \to \check{A}) \to \mathbf{f} \in (A^B)\check{}$".

Uma vez fixado nome $\mathbf{f}$ como acima, usando a função F, temos que $\mathbb{1} \Vdash$ "$(\mathbf{f} : \check{B} \to \check{A}) \to (\mathbf{f} \circ \check{F} : \check{\kappa} \to \check{A})$", ou seja, $\mathbb{1} \Vdash$ "$(\mathbf{f} : \check{B} \to \check{A}) \to \mathbf{f} \circ \check{F} \in \check{A}^{\check{\kappa}}$". Então, o que demonstramos no parágrafo acima implica que $\mathbb{1} \Vdash$ "$(\mathbf{f} : \check{B} \to \check{A}) \to \mathbf{f} \circ \check{F} \in (A^\kappa)\check{}$", de um outro modo, $[\![\mathbf{f} : \check{B} \to \check{A}]\!] \leq [\![\mathbf{f} \circ \check{F} \in (A^\kappa)\check{}]\!]$. Se então provarmos que $[\![\mathbf{f} \circ \check{F} \in (A^\kappa)\check{}]\!] \leq [\![\mathbf{f} \in (A^B)\check{}]\!]$, poderemos deduzir facilmente que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\check{A}^{\check{B}} \subset (A^B)\check{}$", o suficiente para provarmos o lema, uma vez que $\mathbb{1} \Vdash$ "$(A^B)\check{} \subset \check{A}^{\check{B}}$" decorre da absoluticidade.

Temos que $[\![\mathbf{f} \circ \check{F} \in (A^\kappa)\check{}]\!] = \sum_{g \in A^\kappa} [\![\mathbf{f} \circ \check{F} = \check{g}]\!]$. Fixe $g \in A^\kappa$ arbitrário. O fato de F ser bijetora implica que F admite inversa. Então podemos provar $\mathbb{1} \Vdash$ "$\mathbf{f} \circ \check{F} = \check{g} \to \mathbf{f} = \check{g} \circ \check{F}^{-1}$", isto é, $[\![\mathbf{f} \circ \check{F} = \check{g}]\!] \leq [\![\mathbf{f} = \check{g} \circ \check{F}^{-1}]\!]$. A absoluticidade dos termos envolvidos implica $[\![\mathbf{f} = \check{g} \circ \check{F}^{-1}]\!] = [\![\mathbf{f} = (g \circ F^{-1})\check{}]\!]$. Uma vez que $g \circ F^{-1} \in A^B$, temos que $\mathbb{1} \Vdash$ "$(g \circ F^{-1})\check{} \in (A^B)\check{}$", consequentemente, $[\![\mathbf{f} = (g \circ F^{-1})\check{}]\!] \leq [\![\mathbf{f} \in (A^B)\check{}]\!]$. Já que $g \in A^\kappa$ foi tomado arbitrariamente, segue que $\sum_{g \in A^\kappa} [\![\mathbf{f} \circ \check{F} = \check{g}]\!] \leq [\![\mathbf{f} \in (A^B)\check{}]\!]$, provando a última coisa que queríamos. □

Como, para todo $\xi < \kappa$, $|\xi| < \kappa$, o lema acima nos permitirá provar que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\check{A}^{\check{\xi}} = (A^\xi)\check{}$" para todo A e todo $\xi < \kappa$. Agora, fixe ordinal α com $\mathrm{cf}(\alpha) \leq \kappa$, então todo $\xi < \mathrm{cf}(\alpha)$ satisfaz a propriedade acima. Já sabemos que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\mathrm{cf}(\check{\alpha}) \leq (\mathrm{cf}(\alpha))\check{}$", só nos bastando aqui provar que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\mathrm{cf}(\check{\alpha}) \geq (\mathrm{cf}(\alpha))\check{}$".

Para todo $\xi < \mathrm{cf}(\alpha)$, não existe função $f : \xi \to \alpha$ cofinal, isto é, $\sim \exists f \in \alpha^\xi$ *f é cofinal*, de onde, por absoluticidade, derivamos $\mathbb{1} \Vdash$ "$\sim \exists f \in (\alpha^\xi)\check{}$ *f é cofinal*". Usando o lema acima nessa última fórmula, obtemos que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\sim \exists f \in \check{\alpha}^{\check{\xi}}$ *f é cofinal*". Pela arbitrariedade de $\xi < \mathrm{cf}(\alpha)$, o último resultado implica que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\forall \xi < (\mathrm{cf}(\alpha))\check{} \sim \exists f \in \check{\alpha}^\xi$ *f é cofinal*", de onde podemos derivar que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\mathrm{cf}(\check{\alpha}) \geq (\mathrm{cf}(\alpha))\check{}$", como queríamos provar. □

Agora podemos provar o esquema geral do que desejávamos como consequência imediata do teorema acima e o Teorema 2.6.4.

Corolário 2.6.21. Para toda álgebra booleana completa $\mathscr{B}$ que satisfaça κ^+-cc e que, para todo cardinal infinito $\mu < \kappa$, $\mathscr{B}$ é μ-distributiva, então a função cofinalidade $\mathrm{cf} : \mathbf{ON} \to \mathbf{ON}$ é $\mathscr{B}$-absoluta, e então os teoremas 2.6.6, 2.6.7 e o Corolário 2.6.9 são aplicáveis.

Uma vez supondo GCH, já provamos que $\mathrm{Fn}(\kappa\times\lambda,2,\kappa)$, consequentemente r.o.$(\mathrm{Fn}(\kappa\times\lambda,2,\kappa))$ satisfaz κ^+-cc. Agora, o Teorema 1.3.48 implica que $\mathrm{Fn}(\kappa\times\lambda,2,\kappa)$ e, consequentemente, r.o.$(\mathrm{Fn}(\kappa\times\lambda,2,\kappa))$ são μ-distributivos para todo cardinal infinito $\mu<\kappa$ *desde que* κ seja regular. Logo, a cardinalidade é r.o.$(\mathrm{Fn}(\kappa\times\lambda,2,\kappa))$-absoluta para todo cardinal regular κ. É sobre essas restrições que somos obrigados a abordar a partir de agora. Apesar disso, o próximo teorema mostra todo o potencial desse método.

Teorema 2.6.22. Supondo GCH, para todo cardinal regular κ e todo cardinal λ tal que $\mathrm{cf}(\lambda)>\kappa$, segue que, fazendo $\mathscr{B}=$ r.o.$(\mathrm{Fn}(\kappa\times\lambda,2,\kappa))$, $\mathbb{1}\Vdash$ "$2^{\check{\kappa}}=\check{\lambda}$". Além disso, para todo conjunto A e cardinal $\mu<\kappa$ temos que $\mathbb{1}\Vdash$ "$\check{A}^{\check{\mu}}=(A^{\mu})\check{}$".

Demonstração. Primeiramente, necessitamos fazer o cálculo de $|\mathscr{B}|$. Usando o Teorema 1.3.36, graças à GCH, temos que $|\mathrm{Fn}(\kappa\times\lambda,2,\kappa)|\leq\lambda$. Como é fácil provar que $|\mathrm{Fn}(\kappa\times\lambda,2,\kappa)|\geq\lambda$, temos que $|\mathrm{Fn}(\kappa\times\lambda,2,\kappa)|=\lambda$. Agora através do Corolário 1.3.38, sabendo que $\mathrm{Fn}(\kappa\times\lambda,2,\kappa)$ satisfaz κ^+-cc, temos que $|$r.o.$(\mathrm{Fn}(\kappa\times\lambda,2,\kappa))|\leq\lambda^\kappa=\lambda$. Como obviamente temos $|$r.o.$(\mathrm{Fn}(\kappa\times\lambda,2,\kappa))|\geq\lambda$, obtemos que $|$r.o.$(\mathrm{Fn}(\kappa\times\lambda,2,\kappa))|=\lambda$.

Agora, sabendo que $|\mathscr{B}|=\lambda$ e da $\mathscr{B}$-absoluticidade da cardinalidade, podemos usar o Teorema 2.6.1 para provar que $\mathbb{1}\Vdash$ "$2^{\check{\kappa}}\leq\check{\lambda}$". O Lema 2.6.15 implica que $\mathbb{1}\Vdash$ "$2^{\check{\kappa}}\geq\check{\lambda}$", logo $\mathbb{1}\Vdash$ "$2^{\check{\kappa}}=\check{\lambda}$". O fato de que $\mathbb{1}\Vdash$ "$\check{A}^{\check{\mu}}=(A^{\mu})\check{}$" para todo A e todo cardinal infinito $\mu<\kappa$ decorre imediatamente do Lema 2.6.20. $\square$

Com esse teorema, podemos provar teoremas de consistência ao estilo Con(ZFC) $\rightarrow$ Con(ZFC+$2^\kappa=\lambda$), porém com a mesma advertência do fim da subseção anterior, isto é, a necessidade de que κ,λ sejam definíveis em ZFC e r.o.$(\mathrm{Fn}(\kappa\times\lambda,2,\kappa))$-absolutas em ZFC ou ZFC+GCH. Mas isso não é o interessante, uma vez que já poderíamos fazer isso com r.o.$(\mathrm{Fn}(\kappa\times\lambda,2))$, o interessante é a afirmação adicional, $\mathbb{1}\Vdash$ "$\check{A}^{\check{\mu}}=(A^{\mu})\check{}$" para todo A e todo cardinal $\mu<\kappa$, que tem como consequência imediata que, para todo cardinal θ e todo cardinal $\mu<\kappa$, $\mathbb{1}\Vdash$ "$\check{\theta}^{\check{\mu}}=(\theta^{\mu})\check{}$". Ou seja, a operação θ^μ é preservada para todo cardinal $\mu<\kappa$. Uma vez que supomos GCH, θ^μ seguirá as mesmas regras que seguia quando era válido GCH, e podemos converter isso numa fórmula, que enunciaremos na próxima definição.

Definição 2.6.23. Para todo cardinal κ, definiremos como $\mathrm{GCH}_{<\kappa}$ a fórmula que representa a seguinte afirmação "Para quaisquer cardinais $\theta\geq2,\mu\geq2$ com ao menos um infinito e $\mu<\kappa$, então θ^μ tem o mesmo valor de quando se supõe GCH (exibidas na demonstração do Teorema 2.6.10)". Do mesmo modo, definimos $\mathrm{GCH}_{\leq\kappa}$, $\mathrm{GCH}_{>\kappa}$ e $\mathrm{GCH}_{\geq\kappa}$, substituindo apenas a ocorrências de $<$ em $\mu<\kappa$, respectivamente, por $\leq,>,\geq$.

Nota: Cada uma das afirmações acima possui uma única variável livre, a saber, o κ, que exigimos que seja cardinal.

Supondo GCH e fazendo $\mathscr{B}=$ r.o.$(\mathrm{Fn}(\kappa\times\lambda,2,\kappa))$, para κ cardinal regular e λ cardinal tal que $\mathrm{cf}(\lambda)>\kappa$, podemos notar que todos os conceitos envolvidos são $\mathscr{B}$-absolutos (incluindo cofinalidade e infinitude), portanto temos que $\mathbb{1} \Vdash$ “$\mathrm{GCH}_{<\check{\kappa}}$”. Tem mais alguma das afirmações da definições acima que o nosso $\mathscr{B}$ satisfaz? Existe, é $\mathbb{1} \Vdash$ “$\mathrm{GCH}_{\geq\check{\lambda}}$”, como iremos provar abaixo.

Teorema 2.6.24. Suponha GCH e faça $\mathscr{B} = \mathrm{r.o.}(\mathrm{Fn}(\kappa \times \lambda, 2, \kappa))$, para κ cardinal regular e λ cardinal tal que $\mathrm{cf}(\lambda) > \kappa$. Então vale $\mathbb{1} \Vdash$ “$\mathrm{GCH}_{\geq\check{\lambda}}$”.

Demonstração. Como já conhecemos a $\mathscr{B}$-absoluticidade de todos os termos da fórmula, precisamos aqui provar apenas o fato que $\mathbb{1} \Vdash$ “$\check{\theta}^{\check{\mu}} = (\theta^{\mu})\check{}$”, para quaisquer cardinais $\theta \geq 2, \mu \geq \lambda$, onde θ^{μ} representa seu valor em GCH (que estamos supondo). Para isso, necessitaremos o seguinte lema:

Lema 2.6.25. Para toda álgebra booleana completa $\mathscr{B}$ tal que a cardinalidade é $\mathscr{B}$-absoluta, então, para todo cardinal infinito $\lambda \geq |\mathscr{B}|$, temos que $\mathbb{1} \Vdash$ “$2^{\check{\lambda}} = (2^{\lambda})\check{}$” (não é necessário supor GCH).

Demonstração. Use o Teorema 2.6.1 com $\mathscr{B}$-absoluticidade da cardinalidade e o fato que, para todo cardinal $\kappa \geq 2$ com $\kappa \leq \lambda$, temos que $\kappa^{\lambda} = 2^{\lambda}$ (sem usar GCH). Assim derivamos $\mathbb{1} \Vdash$ “$2^{\check{\lambda}} \leq (2^{\lambda})\check{}$”. O fato evidente que $\mathbb{1} \Vdash$ “$2^{\check{\lambda}} \geq (2^{\lambda})\check{}$” conclui a demonstração. □

O lema acima nos fornece a informação que, uma vez que $|\mathscr{B}| = \lambda$, a operação 2^{μ} é preservada para todo cardinal $\mu \geq \lambda$, isto é, vale μ^{+} uma vez que supomos GCH. Agora, para finalizar o teorema, o leitor deve analisar a demonstração dos valores de θ^{μ} quando vale GCH (por exemplo, no livro (KUNEN, 1980), onde tal afirmação é o teorema **I** 10.42), e perceber que é possível adaptá-la a essa versão limitada de GCH, desde que suponhamos $\mu \geq \lambda$, provando diretamente a afirmação desejada, não necessitando usar $\mathscr{B}$-absoluticidade. □

Esses últimos resultados nos permitem provar o seguinte resultado generalizado de consistência:

Teorema 2.6.26. Para quaisquer cardinais infinitos κ, λ tais que κ é regular e $\mathrm{cf}(\lambda) > \kappa$, temos $\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC}) \to \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC} + 2^{\kappa} = \lambda + \mathrm{GCH}_{<\kappa} + \mathrm{GCH}_{\geq\lambda})$. Aqui estamos considerando implicitamente o fato de κ, λ serem definíveis em ZFC, todas as hipóteses serem prováveis em ZFC, e ZFC ou ZFC + GCH provar que κ, λ são $\mathrm{r.o.}(\mathrm{Fn}(\kappa \times \lambda, 2, \kappa))$-absolutas.

O teorema acima se trata de um único teorema, com quantificadores no estilo $\forall\kappa$ *cardinal definível em ZFC* $\forall\lambda$ *cardinal definível em ZFC* .... Tal quantificação é permissível em metateoria uma vez que os cardinais definiveis são determinados por fórmulas. O teorema acima nos permite “acrescentar” novas manipulações na aritmética de cardinal além de $2^{\kappa} = \lambda$. O teorema geral será mostrado a seguir:

Teorema 2.6.27. Fixe cardinais infinitos κ, λ e suponha que seja válido que $2^\kappa = \lambda$ e $\mathrm{GCH}_{<\kappa}$. Sejam cardinais infinitos $\kappa' < \kappa$ e $\lambda' \leq \lambda$ tais que κ' é regular e $\mathrm{cf}(\lambda') > \kappa'$. Fazendo $\mathscr{B} = \mathrm{r.o.}(\mathrm{Fn}(\kappa' \times \lambda', 2, \kappa'))$, teremos que $\mathbb{1} \Vdash$ "$2^{\check{\kappa}'} = \check{\lambda}'$", $\mathbb{1} \Vdash$ "$\mathrm{GCH}_{<\check{\kappa}'}$" e $\mathbb{1} \Vdash$ "$2^{\check{\theta}} = (2^\theta)\check{}$" para todo cardinal $\theta \geq \lambda'$. Em particular, $\mathbb{1} \Vdash$ "$2^{\check{\kappa}} = \check{\lambda}$".

Demonstração. Através de $\mathrm{GCH}_{<\kappa}$, podemos provar que $\mathscr{B} = \mathrm{r.o.}(\mathrm{Fn}(\kappa' \times \lambda', 2, \kappa'))$ satisfaz κ'^+-cc e $|\mathscr{B}| = \lambda'$. Também sabemos que $\mathscr{B}$ é μ-distributivo para todo cardinal infinito $\mu < \kappa'$. Assim, o Corolário 2.6.21 nos implica a $\mathscr{B}$-absoluticidade da cofinalidade e cardinalidade. Como $\mathrm{GCH}_{<\kappa}$ implica que $\lambda'^{\kappa'} = \lambda'$, o Teorema 2.6.1 implica que $\mathbb{1} \Vdash$ "$2^{\check{\kappa}'} \leq \check{\lambda}'$". O Lema 2.6.15 por sua vez prova que $\mathbb{1} \Vdash$ "$2^{\check{\kappa}'} \geq \check{\lambda}'$", portanto, $\mathbb{1} \Vdash$ "$2^{\check{\kappa}'} = \check{\lambda}'$". O Lema, 2.6.20 junto com $\mathrm{GCH}_{<\kappa}$, implica que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\mathrm{GCH}_{<\check{\kappa}'}$". O fato que $\mathbb{1} \Vdash$ "$2^{\check{\theta}} = (2^\theta)\check{}$" para todo cardinal $\theta \geq \lambda'$ segue do Lema 2.6.25. $\square$

Com o teorema acima podemos "aninhar" o Teorema 2.6.26, provando um teorema de consistência do estilo Con(ZFC) $\rightarrow$ Con(ZFC + $2^{\kappa'} = \lambda'$ + $2^\kappa = \lambda$ + $\mathrm{GCH}_{<\kappa'}$ + $\mathrm{GCH}_{\geq\lambda}$). Lembrando de todos os requisitos para ambos os pares de cardinais κ', λ' e κ, λ, junto com os requisitos adicionais que $\kappa' < \kappa$ e $\lambda' \leq \lambda$. Por sua vez, o teorema acima permite "aninhar" mais uma vez, e assim por diante.

Ao contrário do fim da subseção anterior, onde provamos um resultado caso não seja suposto GCH. Nesta subseção, supor GCH é crucial para a conclusão das demonstrações, já que é através dela que provamos o Teorema 2.6.19.

2.7 Colapso de Cardinais

Como o leitor pode ter notado, na seção anterior, foi necessário que κ fosse regular para sermos capazes de provar que a cofinalidade e, consequentemente, a cardinalidade fosse $\mathrm{r.o.}(\mathrm{Fn}(I,J,\kappa))$-absoluta. Essa suposição foi crucial uma vez que, não é possível provar tais $\mathrm{r.o.}(\mathrm{Fn}(I,J,\kappa))$-absoluticidades caso κ seja singular. Mais especificamente, quando κ é singular, é possível provar a existência de cardinais λ tais que, em $\mathscr{B} = \mathrm{r.o.}(\mathrm{Fn}(I,J,\kappa))$, $\mathbb{1} \Vdash$ "$\check{\lambda}$ *não é cardinal*", isto é, λ "deixará de ser cardinal", fato que denominei anteriormente como **colapso de cardinais**. Nessa situação, o menor cardinal maior que λ que não foi "colapsado" passam a "fazer o papel" de λ, já que, uma vez que ZFC assegura a existência de um cardinal infinito para cada ordinal com a associação $\alpha \mapsto \omega_\alpha$, nenhum desses cardinais se "extingue".

O próximo teorema prova que a $\mathrm{r.o.}(\mathrm{Fn}(I,J,\kappa))$-absoluticidade da cardinalidade não precisa ser verdade caso κ não seja regular:

Teorema 2.7.1. Fixe um κ cardinal singular e álgebra booleana completa $\mathscr{B}$ tais que exista nome $\mathbf{G}$ tal que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\mathbf{G}$ *é filtro* $(\mathfrak{D}_{\mathrm{Fn}(\kappa,2,\kappa)})\check{}$*-genérico*" (por exemplo $\mathrm{r.o.}(\mathrm{Fn}(\kappa,2,\kappa))$). Então vale $\mathbb{1} \Vdash$ "$\exists g$ *g é injetora* $\wedge \mathrm{dom}(g) = \check{\kappa} \wedge \mathrm{im}(g) = (\mathrm{cf}(\kappa))\check{}$".

Demonstração. É possível provar que, para qualquer cardinal singular λ, existe função $f : \mathrm{cf}(\lambda) \to \lambda$ cofinal, estritamente crescente e tal que $f(\xi)$ *é cardinal infinito* para todo $\xi < \kappa$. Com essa função podemos construir uma função $F : \mathrm{cf}(\lambda) \to \lambda$ que seja cofinal, estritamente crescente e que $F(\xi)$ *é cardinal regular* para todo $\xi < \mathrm{cf}(\lambda)$, a saber, fazendo $F(\xi) = f(\xi)^+$. Fixe tal F para κ.

Como já sabemos, as hipóteses implicam que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\bigcup \mathbf{G} : \check{\kappa} \to 2$". Assim, a nossa função g será criada (em teoria, não exibiremos um nome para a mesma) satisfazendo, para todo $\alpha < \kappa$, $g(\alpha) = \min\{\xi < \mathrm{cf}(\kappa) : \mathrm{type}(\{\eta \in F(\xi) - F(\xi+1) : \bigcup \mathbf{G}(\eta) = 1\}) = F(\xi) + \alpha\}$ (a função $\mathrm{type}(A)$ aqui está usando a ordem canônica de ordinais implicitamente, por isso foi omitido o R). Falando de modo rigoroso, o que vamos provar é $\mathbb{1} \Vdash$ "$\exists g\ g : \check{\kappa} \to (\mathrm{cf}(\kappa))\check{} \wedge g$ *é injetora* $\wedge \forall \alpha \in \check{\kappa}(g(\alpha) = \min\{\xi < (\mathrm{cf}(\kappa))\check{} : \mathrm{type}(\{\eta \in (\check{F}(\xi) - \check{F}(\xi+1)) : \bigcup \mathbf{G}(\eta) = 1\}) = \check{F}(\xi) + \alpha\})$". Para isso, note que, caso provarmos apenas que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\forall \alpha < \check{\kappa}\ \exists \xi < (\mathrm{cf}(\kappa))\check{}\ \mathrm{type}(\{\eta \in (\check{F}(\xi) - \check{F}(\xi+1)) : \bigcup \mathbf{G}(\eta) = 1\}) = \check{F}(\xi) + \alpha$", a afirmação acima segue de imediato. Então provaremos apenas isso.

Os conjuntos densos usados aqui serão, para todo $\alpha < \kappa$, $D_\alpha = \{q \in \mathrm{Fn}(\kappa, 2, \kappa) : \exists \xi < \mathrm{cf}(\kappa)(((F(\xi+1) - F(\xi))) \in \mathrm{dom}(q) \wedge \mathrm{type}(\{\eta \in (F(\xi+1) - F(\xi)) : q(\eta) = 1\}) = F(\xi) + \alpha)\}$. Primeiro precisamos provar que, de fato, eles são densos. Fixe $p \in \mathrm{Fn}(\kappa, 2, \kappa)$ arbitrário. Digo que existe $\xi < \mathrm{cf}(\alpha)$ tal que $\alpha < F(\xi+1)$ e $|\mathrm{dom}(p) \cap (F(\xi+1) - F(\xi))| < F(\xi)$. De fato, existe $\beta \in \mathrm{cf}(\kappa)$ tal que, para todo $\gamma \in \mathrm{cf}(\kappa)$ com $\gamma \geq \beta$, vale $|\mathrm{dom}(p) \cap (F(\xi+1) - F(\xi))| \leq F(\xi)$, pois, caso contrário, teríamos $|\mathrm{dom}(p)| \geq \sup\{F(\xi) : \beta \leq \xi < \mathrm{cf}(\kappa)\} = \kappa$, absurdo com $|p| < \kappa$. Então basta escolher $\xi \geq \beta$ com $\alpha \leq F(\xi)$, uma vez que F é cofinal estritamente crescente.

Uma vez tendo $\xi < \mathrm{cf}(\kappa)$ com $\alpha < F(\xi+1)$ e $|\mathrm{dom}(p) \cap (F(\xi+1) - F(\xi))| < F(\xi)$, existirá $\beta \in (F(\xi+1) - F(\xi))$ tal que, $\eta < \beta$ para todo $\eta \in (\mathrm{dom}(p) \cap (F(\xi+1) - F(\xi)))$, ($F(\xi+1)$ é regular) e $\gamma = \mathrm{type}(\{\eta \in (\mathrm{dom}(p) \cap (F(\xi+1) - F(\xi))) : p(\eta) = 1\}) < F(\xi) \leq F(\xi) + \alpha$. Então podemos criar $q \supset p$ "preenchendo lacunas de p" de modo que $(F(\xi+1) - F(\xi)) \subset \mathrm{dom}(q)$, fazendo $q(\beta + \xi) = 1$ para um número suficiente de ordinais a ponto de valer $\mathrm{type}(\{\eta \in (F(\xi+1) - F(\xi)) : q(\eta) = 1\}) = F(\xi) + \alpha$. Agora, basta fazer $q(\eta) = 0$ para os demais $\eta \in (F(\xi+1) - F(\xi))$ que não estão em $\mathrm{dom}(p)$ e, nos demais $\eta \in \kappa$, mantendo-se como era em p, sem acrescentar mais elementos. Isso é o suficiente para provar que $q \in D_\alpha$ e, portanto, D_α é denso para $\alpha < \kappa$ arbitrário.

Com a densidade dos conjuntos, fixe ordinal $\alpha < \kappa$ arbitrário. Os critérios de absoluticidade nos fornece que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\{q \in (\mathrm{Fn}(\kappa, 2, \kappa))\check{} : \exists \xi < (\mathrm{cf}(\kappa))\check{}\ ((\check{F}(\xi+1) - \check{F}(\xi)) \in \mathrm{dom}(q) \wedge \mathrm{type}(\{\eta \in (\check{F}(\xi+1) - \check{F}(\xi)) : q(\eta) = 1\}) = \check{F}(\xi) + \check{\alpha})\} \in (\mathfrak{D}_{\mathrm{Fn}(\kappa,2,\kappa)})\check{}$". Unindo isso ao fato de que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\mathbf{G}$ *é filtro* $(\mathfrak{D}_{\mathrm{Fn}(\kappa,2,\kappa)})\check{}$*-genérico*", nos permite derivar que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\exists \xi < (\mathrm{cf}(\kappa))\check{}\ \mathrm{type}(\{\eta \in (\check{F}(\xi) - \check{F}(\xi+1)) : \bigcup \mathbf{G}(\eta) = 1\}) = \check{F}(\xi) + (\alpha)\check{}$" e, consequentemente, uma vez que $\alpha < \kappa$ foi tomado arbitrariamente, vale $\mathbb{1} \Vdash$ "$\forall \alpha < \check{\kappa}\ \exists \xi < (\mathrm{cf}(\kappa))\check{}\ \mathrm{type}(\{\eta \in (\check{F}(\xi) - \check{F}(\xi+1)) : \bigcup \mathbf{G}(\eta) = 1\}) = \check{F}(\xi) + \alpha$". Como dissemos no segundo parágrafo, isso permite provar a validade da existência da função enunciada no teorema.

Nota: A demonstração acima não usou nada que seja consequência de $\mathscr{B}$-absoluticidade de cardinalidade ou cofinalidade, isso é importantíssimo para levarmos os argumentos acima a termo. Como consequência, para todos os efeitos, todos os cardinais mencionados dentro de um $\Vdash$ “” são considerados como simples ordinais. □

Qual é o colapso que o teorema acima fornece? Uma vez que $\mathrm{cf}(\alpha) < \alpha$ e existe função $f : \kappa \to \mathrm{cf}(\alpha)$ injetora, o cardinal κ é colapsado, isto é, $\mathbb{1} \Vdash$ “$\check{\kappa}$ *não é cardinal*”. Os mesmos fatos enunciados nesse parágrafos implicam $\mathbb{1} \Vdash$ “$|(\mathrm{cf}(\kappa))\check{}\,| = |\check{\kappa}|$”. De modo geral, $\mathbb{1} \Vdash$ “$|(\mathrm{cf}(\kappa))\check{}\,| = |\check{\alpha}|$”, para todo ordinal α entre $\mathrm{cf}(\kappa)$ e κ.

Agora, suponha GCH e, fazendo $\mathscr{B} = \mathrm{r.o.}(\mathrm{Fn}(\kappa, 2, \kappa))$, temos que $\mathrm{Fn}(\kappa, 2, \kappa)$ satisfaz κ^+-cc e o Teorema 1.3.49 implica que $\mathrm{Fn}(\kappa, 2, \kappa)$ é μ-distributiva para todo cardinal $\mu < \mathrm{cf}(\kappa)$. Então os teoremas 2.6.4 e 2.6.19 implicam que para todo ordinal α tal que $\mathrm{cf}(\alpha) \geq \kappa^+$ ou $\mathrm{cf}(\alpha) \leq \mathrm{cf}(\kappa)$, vale que $\mathbb{1} \Vdash$ “$\mathrm{cf}(\check{\alpha}) = (\mathrm{cf}(\alpha))\check{}$”. Portanto, parafraseando a demonstração do Teorema 2.6.6, podemos provar que, para todo cardinal regular λ tal que $\lambda \leq \mathrm{cf}(\alpha)$ ou $\lambda \geq \kappa^+$, então $\mathbb{1} \Vdash$ “λ *é cardinal regular*”. Concluindo a dedução, parafraseando o mesmo teorema, para todo cardinal θ satisfazendo $\theta \leq \mathrm{cf}(\kappa)$ ou $\theta \geq \kappa^+$, vale $\mathbb{1} \Vdash$ “$\check{\theta}$ *é cardinal*”, então o colapso fica restrito ao cardinais θ satisfazendo $\mathrm{cf}(\alpha) < \theta \leq \kappa$. Como consequência, o cardinal $\mathrm{cf}(\kappa)$ é preservado (sua regularidade também) e todos os cardinais colapsados colapsam para $\mathrm{cf}(\kappa)$, isto é, $\mathbb{1} \Vdash$ “$|\check{\theta}| = (\mathrm{cf}(\kappa))\check{}$” para θ satisfazendo $\mathrm{cf}(\kappa) < \theta \leq \kappa$. Essa última afirmação, junto com a preservação de $\mathrm{cf}(\kappa)$ independem de GCH, uma vez que elas usam somente μ-distributividade, e não o chain condition.

De modo mais geral, para conseguirmos colapsar um cardinal κ basta “produzir” uma função sobrejetora $g : \alpha \to \kappa$ com $\alpha < \kappa$. Graças ao Teorema 2.6.11, conseguiremos assegurar a existência dessa função para qualquer $\mathrm{Fn}(I, J, \kappa)$ com $|I| \geq \kappa$ (para assegurar que ela é “nova”, precisamos supor em acréscimo, que $|J| \geq 2$, que será verdade em todos os casos interessantes). Em especial no que se refere a colapso de cardinais, temos o seguinte teorema geral.

Teorema 2.7.2. Para todo forcing não atômico do estilo $\mathrm{Fn}(I, J, \kappa)$ e para toda álgebra booleana completa $\mathscr{B}$ tal que existe nome $\mathbf{G}$ tal que $\mathbb{1} \Vdash$ “$\mathbf{G}$ *é filtro* $(\mathfrak{D}_{\mathrm{Fn}(I,J,\kappa)})\check{}$*-genérico*”, vale $\mathbb{1} \Vdash$ “$|\check{J}| \leq |\check{I}|$”. Caso valer também $|I| \leq |J|$, teremos $\mathbb{1} \Vdash$ “$|\check{I}| = |\check{J}|$”.

Demonstração. Consequência imediata do Teorema 2.6.11, uma vez que ZFC prova que a existência de função $f : A \to B$ sobrejetora implica $|B| \leq |A|$. Para a segunda afirmação, atente para o fato que $|I| \leq |J|$ equivale a $\exists f\ f : I \to J \wedge f$ *é injetora*. Portanto, uma vez que temos que $f : I \to J \wedge f$ *é injetora* é absoluta, vale que $\mathbb{1} \Vdash$ “$|\check{I}| \leq |\check{J}|$”. □

O colapso de cardinais nos permite construir álgebras booleanas completas no qual é válido fragmentos de GCH sem fazer nenhuma suposição acerca da aritmética de cardinais, como o próprio GCH. Porém, isso serve apenas como curiosidade para mostrar que o forcing é capaz de provar consistências que são demonstradas pelas técnicas elementares da teoria dos modelos transitivos (como $\mathbb{L}$). O nosso teorema mais geral acerca desse assunto é exibido abaixo.

Teorema 2.7.3. Para todo cardinal infinito κ, existe álgebra booleana completa $\mathscr{B}$ tal que $\mathbb{1} \Vdash$ "$2^{\check{\kappa}} = \check{\kappa}^+$".

Demonstração. Na demonstração não estamos assumindo nenhuma hipótese sobre aritmética de cardinais, como GCH.

O nosso $\mathscr{B}$ será r.o.$(\mathrm{Fn}(\kappa^+, 2^\kappa, \kappa^+))$, note que $\kappa^+ \leq 2^\kappa$. O fato de κ^+ ser regular implica, pelo Teorema 1.3.48, que $\mathscr{B}$ é κ-distributiva e o Teorema 1.3.33 implica que $\mathscr{B}$ satisfaz $(2^\kappa)^+$-cc. Assim, temos que os únicos cardinais θ que são colapsados satisfazem $\kappa^+ < \theta \leq 2^\kappa$. Este fato e o teorema acima implicam que $\mathbb{1} \Vdash$ "$\check{\kappa}^+ = |2^\kappa|$". Assim, para provarmos o que desejamos, precisamos provar que $\mathbb{1} \Vdash$ "$2^{\check{\kappa}} \leq |2^\kappa| = \check{\kappa}^+$" (a parte $\mathbb{1} \Vdash$ "$2^{\check{\kappa}} \geq |2^\kappa| = \check{\kappa}^+$" segue diretamente de ZFC).

O Teorema 1.3.36 implica que $|\mathrm{Fn}(\kappa^+, 2^\kappa, \kappa^+)| = 2^\kappa$ (como $\kappa^+ \leq 2^\kappa$, temos $(\kappa^+)^\kappa = (2^\kappa)^\kappa = 2^\kappa$), agora o Teorema 1.3.37 implica que $|\mathrm{r.o.}(\mathrm{Fn}(\kappa^+, 2^\kappa, \kappa^+))| = 2^\kappa$. Com essas informações, podemos usar o Teorema 2.6.1 e provar que $\mathbb{1} \Vdash$ "$2^{\check{\kappa}} \leq |2^\kappa|$", concluindo nossa demonstração. $\square$

Com isso conseguimos produzir provas diretas (isto é, usando apenas forcing) de consistência do estilo Con(ZFC)$\rightarrow$Con(ZFC+$2^\kappa = \kappa^+$), para qualquer cardinal infinito κ (lembrando da exigência de κ ser definível e absoluto), em particular, temos Con(ZFC)$\rightarrow$Con(ZFC+CH).

APÊNDICE

A

DEMONSTRAÇÕES DOS TEOREMAS 2.1.14 E 2.1.15

Aqui, para evitar qualquer problema ou confusão, assumiremos como conhecidos as afirmações enunciadas e provadas *antes do Teorema 2.1.14*.

A.1 Teorema 2.1.14

A.1.1 Breve introdução à lógica

Aqui, o nosso intuito é fazer o leitor entender o que se denota "*afirmações logicamente prováveis*". Essa definição varia largamente em vários textos. Aqui, ela é puramente formal, denotando todas as afirmações entendidas como *axiomas da lógica*. As afirmações logicamente prováveis serão, então, todas as afirmações deriváveis a partir desses axiomas (incluindo os próprios axiomas), através das regras de inferências que iremos denotar.

As afirmações são criadas de modo construtivo, começando com as *fórmulas primitivas*: $R(x_1,...,x_n)$, onde $x_1,...,x_n$ são as *variáveis livres* da fórmula. Quando se escolhe um *universo de domínio*, $R(x_1,...,x_n)$ se torna "verdadeira" ou "falsa", quando se substitui cada variável livre por um elemento desse universo. Na lógica, uma das fórmulas primitivas é $=$, de duas variáveis livres, que denotará a conhecida igualdade. Em acréscimo, na teoria dos conjuntos, um dos principais assuntos desse texto, incluímos a fórmula $\in$, de duas variáveis livres. Denotaremos sempre $x \in y$ e $x = y$ ao invés de $\in (x,y)$ e $= (x,y)$. Também podemos incluir *funções primitivas* $F(x_1,...,x_n)$, com um número arbitrário de variáveis livres, incluindo nenhum. Ao se substituir cada variável livre por um elemento do universo de domínio, a função passa a representar um elemento desse domínio, caso não possuir variáveis livres, ela representa um elemento fixo do mesmo domínio. Porém, a teoria dos conjuntos não possui funções primitivas (apesar de mencionarmos funções e até outras fórmulas que parecem ser primitivas ao longo desse texto, elas são apenas *definições*, de modo que toda fórmula em que elas aparece são apenas "abreviações" da fórmula legítima, criadas para facilitar sua leitura), por isso não entraremos em mais detalhes sobre isso.

O passo de indução usa os *conectivos lógicos*: $\vee$ ("ou *inclusivo*"), $\wedge$ ("e"), $\sim$ ("negação" ou "falsidade"), $\rightarrow$ ("implica"), e dos *quantificadores* $\forall$ ("para todo") e $\exists$ ("existe"), de modo que, se ϕ e ψ forem fórmulas, também serão:

1. $(\phi) \vee (\psi)$
2. $(\phi) \wedge (\psi)$
3. $\sim (\phi)$
4. $(\phi) \rightarrow (\psi)$
5. $\forall x(\phi)$
6. $\exists x(\phi)$

Parênteses servem para denotar as *subfórmulas* existentes em uma fórmula, por exemplo, ϕ é uma subfórmula em todos os itens acima, ψ também é subfórmula em todos, exceto os itens 3, 5 e 6, embora seja comum omiti-las sempre quando isso não deixar dúvidas sobre as subfórmulas da fórmula. Todas as subfórmulas de ϕ e ψ também são subfórmulas das fórmulas onde elas aparecem. É importante salientar que, nos itens 5 e 6, *x não é* variável livre das fórmulas (independentemente se era ou não em ϕ, ele nem sequer precisa aparecer nessa subfórmula), mas todas as outras variáveis livres de ϕ, e somente elas, continuam sendo nesses itens. No item 3, as variáveis livres prosseguem sendo as mesmas de ϕ, nos demais itens, suas variáveis livres são as variáveis livres de ϕ e ψ juntas. Dizemos que a subfórmula que o parêntese imediatamente posterior ao $\exists x$ ou $\forall x$ envolvem, formam o *escopo* desse quantificador. Esse x passará a ser *variável quantificada* e deixará de ser variável livre somente no escopo, isto é, ela pode continuar sendo variável livre na fórmula, desde que apareça em uma subfórmula fora do escopo, como ocorre, em particular, na fórmula $x = y \wedge \exists x\, y \in x$. As *ocorrências livres*, de uma variável x em uma fórmula ϕ, são todas as suas aparições nela fora de qualquer escopo onde x está quantificado. Uma vez determinados os valores lógicos ϕ e ψ, os valores lógicos dos itens 1 a 4 ficam definidos conforme as regras conhecidas dos conectivos lógicos, valendo as seguintes equivalências entre eles:

i. $(\phi) \wedge (\psi) \equiv \sim ((\sim (\phi)) \vee (\sim (\psi)))$

ii. $(\phi) \rightarrow (\psi) \equiv (\sim (\phi)) \vee (\psi)$

Quanto à fórmula do item 5, após substituir todas as variáveis livres por elementos do universo de domínio, ela será intuitivamente verdadeira quando, ao substituir as ocorrências livres de x por qualquer elemento do universo de domínio em ϕ, ela se torna verdadeira. De modo análogo, o item 6 será intuitivamente verdadeiro quando existir um elemento desse universo que, após trocá-lo pelas ocorrências livres de x em ϕ, essa fórmula se tornar verdadeira. Vale também as seguintes equivalências:

I. $\exists x(\phi) \equiv \sim (\forall x(\sim (\phi)))$

A partir de agora, quando denotarmos uma fórmula no estilo $\phi(x,y,...)$ as variáveis exibidas entre parêntese serão possíveis variáveis livres da fórmula ϕ, mas não será obrigatório que as variáveis realmente ocorram livres nessa fórmulas. Denotaremos como $\phi(x|y)$ o ato de substituir todas as ocorrências livres de x em ϕ pela variável y, o que não destrói o fato de ϕ ser fórmula. Tal substituição é dita ser *admissível* quando todas as ocorrências livres de x em ϕ aparecem fora do escopo onde y está quantificado, denotaremos por $\phi(y)$ a fórmula resultante dessa transformação (caso y será variável livre caso a substituição seja admissível). Obviamente, $\phi(x|x)$ sempre será admissível. Caso existir uma função primitiva $F(x_1,...,x_n)$, poderíamos criar novas fórmulas fazendo a transformação $\phi(x|F(x_1,...,x_n))$ (deveríamos incluir isso no passo de indução acima), tal substituição só será admissível caso forem admissíveis as transformações $\phi(x|x_1)$, ... , $\phi(x|x_n)$.

As equivalências acima (**i**,**ii** e **I**) serão usadas como *definições* na nossa teoria lógica, cuja primeira lista de axiomas é a seguinte, para quaisquer fórmulas ϕ, ψ, χ:

P1 $(\phi \vee \phi) \rightarrow \phi$

P2 $\phi \rightarrow (\phi \vee \psi)$

P3 $(\phi \vee \psi) \rightarrow (\psi \vee \phi)$

P4 $((\phi \vee \psi) \vee \chi) \rightarrow (\phi \vee (\psi \vee \chi))$

P5 $(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\chi \vee \phi) \rightarrow (\chi \vee \psi))$

Esses axiomas (na verdade, cinco esquemas de axiomas) fazem parte do **Cálculo Proposicional**, sua característica é não abordar nada sobre variáveis e quantificadores. A abordagem desses elementos se faz acrescentando outros quatro novos esquemas de axiomas, que junto com os axiomas acima formam o **Cálculo de Predicados**. Os dois primeiros são, para quaisquer variável x, fórmula $\phi(x)$ e variável livre y tal que $\phi(x|y)$ seja admissível:

Pr1. $\forall x\, \phi(x) \rightarrow \phi(y)$

Pr2. $\phi(y) \rightarrow \exists x\, \phi(x)$

Aqui, intuitivamente falando, a admissibilidade da substituição é necessária para evitar provar afirmações que sejam falsas. Por exemplo, na teoria dos números, $\forall x\, x \neq 0 \rightarrow \exists y\, x = y+1$ é uma afirmação verdadeira, mas aqui, tal substituição gerararia $\phi(x) \equiv (x \neq 0 \rightarrow \exists y\, x = y+1)$, e então axioma **Pra1** implicaria que $y \neq 0 \rightarrow \exists y\, y = y+1$ é verdade, um absurdo, que é evitado já que $\phi(x|y)$ é inadmissível. Os próximos dois axiomas são, para qualquer variável x e quaisquer fórmula $\phi(x)$, ψ tais que x não é variável livre de ψ, temos que:

Pr3. $(\forall x(\psi \rightarrow \phi(x))) \rightarrow (\psi \rightarrow \forall x\, \phi(x))$

Pr4. $(\forall x(\phi(x) \rightarrow \psi)) \rightarrow ((\exists x\, \phi(x)) \rightarrow \psi)$

Esses axiomas nos permitem minimizar o escopo de uma variável quantificada, excluindo as subfórmulas onde ela não ocorre livremente.

A característica do cálculo de predicado é que, uma vez definido as fórmulas primitivas, independente do comportamento lógico destas ao substituir as variáveis livres por elementos do universo de domínio, qualquer afirmação demonstrável por estes axiomas são sempre intuitivamente verdadeiros. Porém, nós desejamos que a fórmula primitiva $=$ satisfaça certas propriedades intuitivas da igualdade conhecida. Assim, nós precisamos acrescentar dois axiomas (na verdade, esquemas) determinando tais propriedades. Eles são, para toda variável x, y e fórmula $\phi(x)$ tal que y não é variável livre de $\phi(x)$, e $\phi(x|y)$ é admissível:

L1 $x = x$

L2 $x = y \rightarrow (\phi(x) \rightarrow \phi(y))$

Como esses axiomas impõe certas "características" à formula primitiva $=$, muitos textos tratam esses axiomas fora do âmbito lógico, o que nós não faremos. De fato, combinando o axioma **L1** com o **Pr2**, podemos obter a consequência $\exists x\, x = x$ (veremos a demonstração disso abaixo). Ou seja, provamos que "existe um elemento no universo de domínio", assim, para tornar estes axiomas intuitivamente verdadeiros, precisamos admitir sempre um universo de domínio não vazio. Isso explica por que ZFC não necessita de um axioma dizendo que existe um conjunto (o "Axioma 0" da Introdução do livro (KUNEN, 1980), caso não fosse possível provar esse fato, não poderíamos provar que existe $\emptyset$, que causaria problemas ao definir o axioma do infinito). Os axiomas **P1-P5**, **Pr1-Pr4**, **L1** e **L2** formam os axiomas da lógica. Uma afirmação ψ é logicamente provável, se existe $\phi_1, \ldots, \phi_n$ sequência finita de fórmulas tais que $\phi_n \equiv \psi$ e, para todo m com $1 \leq m \leq n$, ϕ_m é axioma da lógica, ou é derivável das fórmulas anteriores a partir das seguintes *regras de inferência*:

$$\alpha \begin{cases} \phi_i & \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B} \\ \phi_j & \mathfrak{A} \\ \hline \phi_m & \mathfrak{B} \end{cases}$$

$$\gamma \begin{cases} \dfrac{\phi_i \quad \mathfrak{A}}{\phi_m \quad \forall x\, \mathfrak{A}} \end{cases}$$

Onde i, j satisfaz $1 \leq i, j < m$.

Além dessas regras, podemos, em uma fórmula já constatada ser derivável, usar as definições, substituindo subfórmulas por suas versões equivalentes, sendo a fórmula resultante igualmente derivável. Porém, não necessitaremos incluir essa regra de derivação, desde que tornemos essas definições esquema de axiomas, substituindo seu formato $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ por $(\mathfrak{A}) \leftrightarrow (\mathfrak{B})$ e incluindo, do mesmo modo, a equivalência definição $(\phi) \leftrightarrow (\psi) \equiv ((\phi) \rightarrow (\psi)) \wedge ((\psi) \rightarrow (\phi))$ como axioma. Não demonstraremos essa afirmação, e o leitor que quiser provar precisará de um pouco de sagacidade, pois todos os axiomas usam essas definições. Será portanto preciso primeiro escolher alguns conectivos e quantificadores como "primitivos" e depois substituir todas as aparições dos demais conectivos lógicos (exceto à esquerda da definição do respectivo símbolo) pela versão equivalente usando apenas esses símbolos primitivos (uma dica: escolha $\vee, \sim, \forall$ como primitivos e, dada um caso particular da definição no estilo $\phi \leftrightarrow \psi$, onde as variáveis livres de ϕ, ψ sejam as mesmas, prove, por indução sobre o comprimento da fórmula $\mathfrak{A}$, a versão equivalente de $\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{A}'$, onde $\mathfrak{A}'$ é a fórmula $\mathfrak{A}$ com todas as aparições da subfórmula ϕ substituídos por ψ. O leitor poderá substituir subfórmulas por versões equivalentes denotadas nas definições, desde que esteja ciente que, formalmente falando, isso é apenas uma simplificação da real fórmula para facilitar o entendimento do leitor).

Nas regras, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ denotam fórmulas arbitrárias. Como exemplo de como usar as regras de inferência, vamos provar o fato enunciado acima de que "existe um elemento no universo de domínio", isto é, $\exists x\; x = x$. Para deixar claro ao leitor como estamos usando os axiomas, exibiremos as *substituições* de fórmulas e variáveis com o símbolo $/$, por exemplo, $\phi/x = x$ significa que estamos usando $x = x$ onde aparecer ϕ, e y/z significa que estamos usando as variável z onde aparece y nos respectivos axiomas.

ϕ_1	$x = x \rightarrow \exists x\; x = x$	Axioma **Pr2**; $\phi/(x = x)$; y/x
ϕ_2	$x = x$	Axioma **L1**
ϕ_3	$\exists x\; x = x$	Regra α com ϕ_1 e ϕ_2

Agora podemos usar a fórmula $\exists x\; x = x$ junto com os axiomas para derivar outras fórmulas com as regras de inferência, e assim por diante. Para formalizar esse fato, você só precisa "concatenar" a demonstração acima com a demonstração onde você usou este teorema.

Antes de finalizar esta seção, devo citar as referências que usei para essa introdução. O livro texto principal usado foi (KNEEBONE, 1963), livro que possui uma abordagem principalmente histórica da lógica, com algumas modificações minhas e extraídas de (HALBEISEN, 2012). De fato, os Axiomas **P1-P5, Pr1,Pr2,L1** e **L2** foram extraídos dos Capítulos 2 e 3 de (KNEEBONE, 1963), porém eu os modifiquei para o formato de esquemas de Axiomas de modo a eliminar a necessidade de mencionar *regras de substituição* citadas no mesmo livro. Os Axiomas **Pr3** e **Pr4** são oriundos de (HALBEISEN, 2012) e eles permitem substituir as regras de inferência ($\gamma 1$) e ($\gamma 2$) citadas em (KNEEBONE, 1963, 67) pela regra de inferência γ citada acima. A regra de inferência α desse texto equivale à (β), citada em (KNEEBONE, 1963, 67). A parte falando da construção das fórmulas, apesar de possuir inspiração de (HALBEISEN, 2012) e (KNEEBONE, 1963), é bastante original.

A.1.2 Demonstração

Demonstração do Teorema 2.1.14. Note que podemos fragmentar valor booleano de uma fórmula e torná-lo uma sequência de operações envolvendo o valor booleano de suas subfórmulas, substituindo os conectivos lógicos $\vee$, $\wedge$, $\sim$, $\rightarrow$, respectivamente, por $=$, $\cdot$ (que geralmente omitimos), $-$, $\rightarrow$ ($\rightarrow$ booleano: $u \rightarrow v = -u + v$) e os quantificadores $\forall$, $\exists$, respectivamente, por $\prod$, $\sum$, conforme a Definição 2.1.7 e a Observação 2.1.8. Para os nossos objetivos, lembre-se da mesma Observação 2.1.8, que diz que $[\![\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}]\!] = \mathbb{1} \Leftrightarrow [\![\mathfrak{A}]\!] \leq [\![\mathfrak{B}]\!]$ e $[\![\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{B}]\!] = \mathbb{1} \Leftrightarrow [\![\mathfrak{A}]\!] = [\![\mathfrak{B}]\!]$. Usaremos essas propriedades para provar a validade de todos os axiomas.

Como, formalmente falando, estamos considerando as definições como axiomas, somos obrigados a provar a validade de todos eles, isto é, a igualdade entre os valores booleanos das fórmulas equivalentes. Note que, a respectiva demonstração de $\rightarrow$ (definição **ii**) e $\leftrightarrow$ está, respectivamente, na Observação 2.1.8, 3 e 4. Pegando o valor booleano da definição **i**, e trocando $[\![\phi]\!]$ e $[\![\psi]\!]$, respectivamente, por u e v, provaremos sua validade se provarmos que $uv = -((-u) + (-v))$, que se obtém combinando o Teorema 1.1.2, partes (+)4 e 3. Para a validade da definição de **I**, temos que provar que $\sum_{\mathbf{x} \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}} [\![\phi(\mathbf{x})]\!] = -\prod_{\mathbf{x} \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}} -[\![\phi(\mathbf{x})]\!]$, que é consequência dos Teoremas 1.3.3 e 1.1.2 3.

Indo agora para os axiomas **P1-P5**, ao fazer a fragmentação, denote $[\![\phi]\!], [\![\psi]\!], [\![\chi]\!]$, respectivamente, por u, v, w. A validade dos 4 primeiros axiomas são consequência imediata das seguintes propriedades, que apenas enunciaremos abaixo, ao lado da propriedade que devemos provar para conseguir a validade da respectiva afirmação:

P1 $u + u \leq u$: Teorema 1.1.2 (+)2

P2 $u \leq u + v$: Teorema 1.1.4 (+)4

P3 $u + v \leq v + u$: Definição 1.1.1 (+)**I**

P5 $(u + v) + v \leq u + (v + w)$: Definição 1.1.1 (+)**II**

Já o teorema **P5** é mais complexo, teremos que provar a propriedade $u \rightarrow v \leq (w + u) \rightarrow (w + v)$, isto é, $-u + v \leq -(w + u) + (w + v)$. Note que, devido às propriedades conhecidas das álgebras booleanas, temos que $-(w + u) + (w + v) = (-w)(-u) + w + v = (-w + w + u)(-u + w + v) = \mathbb{1}(-u + v + w) = -u + v + w$. Como é evidente que $-u + v \leq -u + v + w$, obtemos a validade do axioma **P5**.

Até aqui, usamos propriedades que valem para quaisquer valores booleanos. Por causa disso, até o momento foi irrelevante denotar quais nomes foram colocados no lugar das variáveis livres das fórmulas, fato essencial numa demonstração de validade. A partir de agora, a situação vai mudar.

Para os axiomas **Pr1,Pr2**, fixe fórmula $\phi(x)$ com $\phi(x|y)$ admissível. Fixe um nome arbitrário para todas as variáveis livres da fórmula, exceto x, caso for uma variável livre. Note que, para qualquer $\mathbf{x} \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}$, pela definição de $\prod$, vale $\prod_{\mathbf{t}\in\mathbf{V}^{\mathscr{B}}}[\![\phi(\mathbf{t})]\!] \leq [\![\phi(\mathbf{x})]\!]$. Isso permite-nos provar que $(\forall x\ \phi(x)) \to \phi(y)$ tem valor booleano $\mathbb{1}$, para quaisquer nome que troquemos a variável livre y (caso y seja variável livre em ϕ, devemos preservar o nome anteriormente fixado, mas isso não acarreta prejuízo à demonstração), provando assim a vaidade de **Pr1**. A demonstração de **Pr2** é análoga, devendo apenas substituir $\forall$ por $\exists$ e $\prod$ por $\sum$, levando em consideração que $[\![\phi(\mathbf{x})]\!] \leq \sum_{\mathbf{t}\in\mathbf{V}^{\mathscr{B}}}[\![\phi(\mathbf{t})]\!]$.

Para os axiomas **Pr3,Pr4**, fixe uma variável x e duas fórmulas $\phi(x), \psi$ tais que x não é variável livre em ψ. Deixe um nome fixado para cada variável livre de $\phi(x), \psi$ exceto o x caso assim seja. Note que $[\![\psi]\!]$ permanece um valor constante independentemente do nome que fixamos para a variável livre x. Isso nos permite usar o Teorema 1.3.1 3 para "por para fora" $[\![\psi]\!]$ em um produtório, do seguinte modo: para **Pr3**, $[\![\forall x(\psi \to \phi(x))]\!] = \prod_{\mathbf{x}\in\mathbf{V}^{\mathscr{B}}}([\![\psi]\!] \to [\![\phi(\mathbf{x})]\!]) = \prod_{\mathbf{x}\in\mathbf{V}^{\mathscr{B}}}(-[\![\psi]\!] + [\![\phi]\!])$. Usando o teorema acima exibido, a última equação é igual a $-[\![\psi]\!] + \prod_{\mathbf{x}\in\mathbf{V}^{\mathscr{B}}}[\![\phi(\mathbf{x})]\!]$ que, por sua vez, é igual a $[\![\psi \to \forall x\ \phi(x)]\!]$, o suficiente para provar a validade de **Pr3**, uma vez que era necessário provar apenas que $[\![\forall x(\psi \to \phi(x))]\!] \leq [\![\psi \to \forall x\ \phi(x)]\!]$. Para **Pr4**, podemos proceder de modo análogo, até obtermos a equação $[\![\forall x(\phi(x) \to \psi)]\!] = \prod_{\mathbf{x}\in\mathbf{V}^{\mathscr{B}}}(-[\![\phi(\mathbf{x})]\!] + [\![\psi]\!]) = \left(\prod_{\mathbf{x}\in\mathbf{V}^{\mathscr{B}}} -[\![\phi(\mathbf{x})]\!]\right) + [\![\psi]\!]$. Agora, podemos usar o Teorema 1.3.3 para provar que $\prod_{\mathbf{x}\in\mathbf{V}^{\mathscr{B}}} -[\![\phi(\mathbf{x})]\!] = -\sum_{\mathbf{x}\in\mathbf{V}^{\mathscr{B}}}[\![\phi(\mathbf{x})]\!]$, assim concluímos que $\left(\prod_{\mathbf{x}\in\mathbf{V}^{\mathscr{B}}} -[\![\phi(\mathbf{x})]\!]\right) + [\![\psi]\!] = -\left(\sum_{\mathbf{x}\in\mathbf{V}^{\mathscr{B}}}[\![\phi(\mathbf{x})]\!]\right) + [\![\psi]\!] = [\![(\exists x\ \phi(x)) \to \psi]\!]$, o suficiente para provar a validade do axioma, já que bastava provar que $[\![\forall x(\phi(x) \to \psi)]\!] \leq [\![(\exists x\phi(x)) \to \psi]\!]$.

Até o momento, todas as demonstrações precisavam apenas fixar nomes arbitrários e as demonstrações seguiam normalmente, nos próximos axiomas isso não bastará, precisaremos fazer demonstrações por recursão sobre os nomes.

Para demonstrar a validade do axioma **L1**, precisamos provar que, para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}$, $[\![\mathbf{x} = \mathbf{x}]\!] = \mathbb{1}$. Isso será feito por recursão sobre $\rho(\mathbf{x})$, mas, para esse objetivo, será necessário acrescentar uma fórmula adicional e provar, via recursão, as duas simultaneamente, esse será o objetivo do próximo lema:

Lema A.1.1. Para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}$, são válidas as seguintes afirmações:

1. $\mathbf{x}(t) \leq [\![t \in \mathbf{x}]\!]$, para todo $t \in \mathrm{dom}(\mathbf{x})$

2. $[\![\mathbf{x} = \mathbf{x}]\!] = \mathbb{1}$

Demonstração. Fixe $\mathbf{x} \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}$. Suponha que os dois itens sejam válidos para todo $\mathbf{y}$ com $\rho(\mathbf{y}) < \rho(\mathbf{x})$.

1: Fixe $t \in \mathrm{dom}(\mathbf{x})$, então $[\![t \in \mathbf{x}]\!] = \sum_{u \in \mathrm{dom}(\mathbf{x})} \mathbf{x}(u)[\![t = u]\!]$. Como $t \in \mathrm{dom}(\mathbf{x})$, $\rho(t) < \rho(\mathbf{x})$ e assim, por hipótese, $[\![t = t]\!] = \mathbb{1}$. Portanto, $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t)[\![t = t]\!] \leq \sum_{u \in \mathrm{dom}(\mathbf{x})} \mathbf{x}(u)[\![t = u]\!] = [\![t \in \mathbf{x}]\!]$, provando o item.

2: $[\![\mathbf{x} = \mathbf{x}]\!] = [\![\mathbf{x} \subset \mathbf{x}]\!][\![\mathbf{x} \subset \mathbf{x}]\!] = [\![\mathbf{x} \subset \mathbf{x}]\!] = \prod_{t \in \mathrm{dom}(\mathbf{x})}(\mathbf{x}(t) \to [\![t \in \mathbf{x}]\!])$. Como provamos o item 1 para $\mathbf{x}$, temos que $(x(t) \to [\![t \in \mathbf{x}]\!]) = \mathbb{1}$, para todo $t \in \mathrm{dom}(\mathbf{x})$, o que implica $[\![\mathbf{x} = \mathbf{x}]\!] = \mathbb{1}$.

Nota: O Corolário 2.1.16 diz a mesma coisa que o item 1 deste lema, de fato, a demonstração em ambos é similar. Mas isso não gera contradição nesse texto, pois o Corolário supõe a validade da afirmação lógica $x = x$, enquanto este supõe apenas que $[\![\mathbf{y} = \mathbf{y}]\!] = \mathbb{1}$ para $\mathbf{y}$ tal que $\rho(\mathbf{y}) < \rho(\mathbf{x})$. E, para todos os efeitos, o Corolário 2.1.16 é desconhecido nesse apêndice. Porém, é interessante o fato de que algo que mencionei ser consequência imediata da validade da afirmação $x = x$ é, na verdade, crucial para sua própria demonstração. □

Para a demonstração do axioma **L2**, ao invés da indução dos nomes, será necessário o uso da indução por comprimento das fórmulas. Mas, primeiro, usaremos as propriedades booleanas para converter o axioma em uma versão mais adequada para a demonstração (não usaremos lógica em nenhum momento dessa demonstração, embora o que faremos, na maior parte do tempo, pode ser justificado logicamente). Temos que $[\![\mathbf{x} = \mathbf{y} \to (\phi(\mathbf{x}) \to \phi(\mathbf{y}))]\!] = [\![\mathbf{x} = \mathbf{y}]\!] \to ([\![\phi(\mathbf{x})]\!] \to [\![\phi(\mathbf{y})]\!]) = -[\![\mathbf{x} = \mathbf{y}]\!] + (-[\![\phi(\mathbf{x})]\!]) + [\![\phi(\mathbf{y})]\!] = -([\![\mathbf{x} = \mathbf{y}]\!][\![\phi(\mathbf{x})]\!]) + [\![\phi(\mathbf{y})]\!] = [\![\mathbf{x} = \mathbf{y}]\!][\![\phi(\mathbf{x})]\!] \to [\![\phi(\mathbf{y})]\!]$. Portanto, provaremos a validade do axioma caso provarmos que $[\![\mathbf{x} = \mathbf{y}]\!][\![\phi(\mathbf{x})]\!] \leq [\![\phi(\mathbf{y})]\!]$. Caso x não for variável livre do nosso $\phi(x)$, a desigualdade anterior é evidente. Assim, na nossa demonstração por indução sobre o comprimento da fórmula, nos restringiremos ao caso em que x é realmente variável livre de $\phi(x)$, além, é claro, de supor que y não é variável livre de $\phi(x)$.

O primeiro caso da hipótese de indução é para as fórmulas primitivas, que, considerando nossas hipóteses, assumem as formas: $x = z$, $z = x$, $x \in z$ e $z \in x$, onde z pode ser qualquer variável exceto y (podendo ser o próprio x). Mas, como podemos constatar pela definição, vale $[\![\mathbf{x} = \mathbf{z}]\!] = [\![\mathbf{x} \subset \mathbf{z}]\!][\![\mathbf{z} \subset \mathbf{x}]\!] = [\![\mathbf{z} \subset \mathbf{x}]\!][\![\mathbf{x} \subset \mathbf{z}]\!] = [\![\mathbf{z} = \mathbf{x}]\!]$. Assim, só precisamos provar as três seguintes afirmações:

1. $[\![\mathbf{x} = \mathbf{z}]\!][\![\mathbf{x} = \mathbf{y}]\!] \leq [\![\mathbf{y} = \mathbf{z}]\!]$

2. $[\![\mathbf{x} \in \mathbf{z}]\!][\![\mathbf{x} = \mathbf{y}]\!] \leq [\![\mathbf{y} \in \mathbf{z}]\!]$

3. $[\![\mathbf{z} \in \mathbf{x}]\!][\![\mathbf{x} = \mathbf{y}]\!] \leq [\![\mathbf{z} \in \mathbf{y}]\!]$

Este será o objetivo do nosso próximo lema:

Lema A.1.2. Fixada uma álgebra booleana completa $\mathscr{B}$, vale, para quaisquer nomes $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}$:

a. $[\![\mathbf{x}=\mathbf{z}]\!][\![\mathbf{x}=\mathbf{y}]\!] \leq [\![\mathbf{y}=\mathbf{z}]\!]$

b. $[\![\mathbf{x}\in\mathbf{z}]\!][\![\mathbf{x}=\mathbf{y}]\!] \leq [\![\mathbf{y}\in\mathbf{z}]\!]$

c. $[\![\mathbf{z}\in\mathbf{x}]\!][\![\mathbf{x}=\mathbf{y}]\!] \leq [\![\mathbf{z}\in\mathbf{y}]\!]$

Demonstração. A demonstração será por indução sobre todas as triplas obtidas com $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}$ *simultaneamente*, induzida pela ordem $<^3$ sobre $(\rho(\mathbf{x}),\rho(\mathbf{y}),\rho(\mathbf{z}))$.

a: $[\![\mathbf{x}=\mathbf{z}]\!][\![\mathbf{x}=\mathbf{y}]\!] \leq [\![\mathbf{z}\subset\mathbf{x}]\!][\![\mathbf{x}=\mathbf{y}]\!]$. Este último é igual a $\left(\prod_{v\in\mathrm{dom}(\mathbf{z})}\mathbf{z}(v)\to[\![v\in\mathbf{x}]\!]\right)[\![\mathbf{x}=\mathbf{y}]\!] = \prod_{v\in\mathrm{dom}(\mathbf{z})}((\mathbf{z}(v)\to[\![v\in\mathbf{x}]\!])[\![\mathbf{x}=\mathbf{y}]\!])$. Fixe $v\in\mathrm{dom}(\mathbf{z})$, então $(\mathbf{z}(v)\to[\![v\in\mathbf{x}]\!])[\![\mathbf{x}=\mathbf{y}]\!] = (-\mathbf{z}(v))[\![\mathbf{x}=\mathbf{y}]\!]+[\![v\in\mathbf{x}]\!][\![\mathbf{x}=\mathbf{y}]\!]$. Por hipótese de indução sobre o item **c**, temos que $[\![v\in\mathbf{x}]\!][\![\mathbf{x}=\mathbf{y}]\!]\leq[\![v\in\mathbf{y}]\!]$, logo, $(-\mathbf{z}(v))[\![\mathbf{x}=\mathbf{y}]\!]+[\![v\in\mathbf{x}]\!][\![\mathbf{x}=\mathbf{y}]\!]\leq-\mathbf{z}(v)+[\![v\in\mathbf{y}]\!]$. Pela arbitrariedade de $v\in\mathrm{dom}(\mathbf{z})$, obtemos $[\![\mathbf{z}\subset\mathbf{x}]\!][\![\mathbf{x}=\mathbf{y}]\!]\leq[\![\mathbf{z}\subset\mathbf{y}]\!]$.

Por outro lado, $[\![\mathbf{x}=\mathbf{z}]\!][\![\mathbf{x}=\mathbf{y}]\!]\leq[\![\mathbf{y}\subset\mathbf{x}]\!][\![\mathbf{x}=\mathbf{z}]\!]=\prod_{u\in\mathrm{dom}(\mathbf{y})}((-\mathbf{y}(u)+[\![u\in\mathbf{x}]\!])[\![\mathbf{x}=\mathbf{z}]\!])$. Fixando $u\in\mathrm{dom}(\mathbf{y})$, temos que $(-\mathbf{y}(u)+[\![u\in\mathbf{x}]\!])[\![\mathbf{x}=\mathbf{z}]\!]=(-\mathbf{y}(u))[\![\mathbf{x}=\mathbf{z}]\!]+[\![u\in\mathbf{x}]\!][\![\mathbf{x}=\mathbf{z}]\!]$. Por hipótese de indução sobre o item **c**, temos que $[\![u\in\mathbf{x}]\!][\![\mathbf{x}=\mathbf{z}]\!]\leq[\![u\in\mathbf{z}]\!]$, assim, $(-\mathbf{y}(u))[\![\mathbf{x}=\mathbf{z}]\!]+[\![u\in\mathbf{x}]\!][\![\mathbf{x}=\mathbf{z}]\!]\leq-\mathbf{y}(u)+[\![u\in\mathbf{z}]\!]$, de onde extraímos, pela arbitrariedade de $u\in\mathrm{dom}(\mathbf{y})$, $[\![\mathbf{y}\subset\mathbf{x}]\!][\![\mathbf{x}=\mathbf{z}]\!]\leq[\![\mathbf{y}\subset\mathbf{z}]\!]$.

As duas partes acima nos permitem concluir que $[\![\mathbf{x}=\mathbf{z}]\!][\![\mathbf{x}=\mathbf{y}]\!]\leq[\![\mathbf{y}=\mathbf{z}]\!]$.

b: $[\![\mathbf{x}\in\mathbf{z}]\!]=\sum_{v\in\mathrm{dom}(\mathbf{z})}\mathbf{z}(v)[\![\mathbf{x}=v]\!]$, então $[\![\mathbf{x}\in\mathbf{z}]\!][\![\mathbf{x}=\mathbf{y}]\!]=\sum_{v\in\mathrm{dom}(\mathbf{z})}\mathbf{z}(v)[\![\mathbf{x}=v]\!][\![\mathbf{x}=\mathbf{y}]\!]$. A hipótese de indução sobre o item **a** implica que $[\![\mathbf{x}=v]\!][\![\mathbf{x}=\mathbf{y}]\!]\leq[\![\mathbf{y}=v]\!]$. Assim, podemos inferir que, como não se faz suposição sobre $v\in\mathrm{dom}(\mathbf{z})$, $[\![\mathbf{x}\in\mathbf{z}]\!][\![\mathbf{x}=\mathbf{y}]\!]=\sum_{v\in\mathrm{dom}(\mathbf{z})}\mathbf{z}(v)[\![\mathbf{x}=v]\!][\![\mathbf{x}=\mathbf{y}]\!]\leq\sum_{v\in\mathrm{dom}(\mathbf{z})}\mathbf{z}(v)[\![\mathbf{y}=v]\!]=[\![\mathbf{y}\in\mathbf{z}]\!]$.

c: Primeiramente, fixe $t\in\mathrm{dom}(\mathbf{x})$, digo que $\mathbf{x}(t)[\![\mathbf{x}=\mathbf{y}]\!]\leq[\![t\in\mathbf{y}]\!]$. Pois, como $[\![\mathbf{x}=\mathbf{y}]\!]=\prod_{t\in\mathrm{dom}(\mathbf{x})}\mathbf{x}(t)\to[\![t\in\mathbf{y}]\!]$, vale $[\![\mathbf{x}=\mathbf{y}]\!]\leq\mathbf{x}(t)\to[\![t\in\mathbf{y}]\!]=-\mathbf{x}(t)+[\![t\in\mathbf{y}]\!]$, portanto, $\mathbf{x}(t)[\![\mathbf{x}=\mathbf{y}]\!]\leq\mathbf{x}(t)(-\mathbf{x}(t)+[\![t\in\mathbf{y}]\!])=\mathbf{x}(t)[\![t\in\mathbf{y}]\!]\leq[\![t\in\mathbf{y}]\!]$. Multiplicando-se ambos os lados por $[\![\mathbf{z}=t]\!]$, obtemos $[\![\mathbf{z}=t]\!]\mathbf{x}(t)[\![\mathbf{x}=\mathbf{y}]\!]\leq[\![\mathbf{z}=t]\!][\![t\in\mathbf{y}]\!]$. Pela hipótese de indução sobre **b**, deduzimos $[\![\mathbf{z}=t]\!][\![t\in\mathbf{y}]\!]\leq[\![\mathbf{z}\in\mathbf{y}]\!]$ e, pela arbitrariedade de $t\in\mathrm{dom}(\mathbf{x})$, temos $\sum_{t\in\mathrm{dom}(\mathbf{x})}[\![\mathbf{z}=t]\!]\mathbf{x}(t)[\![\mathbf{x}=\mathbf{y}]\!]\leq[\![\mathbf{z}\in\mathbf{y}]\!]$. Mas, como $\sum_{t\in\mathrm{dom}(\mathbf{x})}[\![\mathbf{z}=t]\!]\mathbf{x}(t)[\![\mathbf{x}=\mathbf{y}]\!]=\left(\sum_{t\in\mathrm{dom}(\mathbf{x})}[\![\mathbf{z}=t]\!]\mathbf{x}(t)\right)[\![\mathbf{x}=\mathbf{y}]\!]$, sendo esta última fórmula igual a $[\![\mathbf{z}\in\mathbf{x}]\!][\![\mathbf{x}=\mathbf{y}]\!]$, provamos, assim, a desigualdade desejada.

Nota: Talvez seja necessária uma melhor explicação sobre o método de indução usado neste teorema. Ele exige um claro conhecimento sobre a ordem no qual as variáveis $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}$ são colocadas em cada tripla possível. O teorema cita as afirmações no formato de uma tripla $(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})$, porém a demonstração prova várias triplas ao mesmo tempo, como, por exemplo, $(\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{x})$. O leitor precisa estar ciente que, no caso dessa tripla, estamos implicitamente provando as mesmas afirmações dos itens, só que substituindo as ocorrências de $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}$, respectivamente, por $\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{x}$. Agora, o leitor pode induzir as versões para as outras triplas. Na demonstração, de fato, nós misturamos as triplas usadas como hipótese. Por exemplo, na demonstração do item **a**, onde exibimos a demonstração para a tripla $(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})$, usamos as hipóteses de indução do item **c** sobre a tripla $(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})$, na primeira parte, e sobre a tripla $(\mathbf{x},\mathbf{z},\mathbf{y})$, na segunda parte. O leitor, caso deseje explicitar a demonstração do item **a** para a tripla $(\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{x})$, irá notar que as hipóteses de indução serão do item **c**, respectivamente sobre as triplas $(\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{x})$ e $(\mathbf{y},\mathbf{x},\mathbf{z})$. Caso o leitor achar esse processo muito suspeito, você pode formalizar como uma demonstração por indução sobre 18 fórmulas distintas! 3 para cada tripla, o leitor também perceberá que é possível reduzir bastante o número de fórmulas, uma vez que nem todas serão usadas como hipóteses. □

Uma vez provada a afirmação para as fórmulas primitivas, provaremos o caso de indução sobre o comprimento da fórmula. Suponha que o axioma já tenha sido provado válido para as afirmações $\phi(x),\psi(x)$ arbitrárias (caso satisfaçam as hipóteses necessárias). Podemos aqui apenas provar que o axioma é válido para as fórmulas $\phi(x)\vee\psi(x)$, $\sim\phi(x)$ e $\forall z\ \phi(x)$, uma vez que as outras fórmulas são criadas por definição usando usando somente esses operadores. Para as fórmulas acima satisfazerem as propriedades, é necessário e suficiente que as subfórmulas satisfaçam essas propriedades, a saber, $\phi(x),\psi(x)$ não possuam y como variável livre e as transformações $\phi(x|y)$ e $\psi(x|y)$ sejam admissíveis. Podemos, sem perda de generalidade, nos restringir a esse caso.

$\phi(x)\vee\psi(x)$: Por hipótese de indução, temos $[\![\mathbf{x}=\mathbf{y}]\!][\![\phi(\mathbf{x})]\!]\leq[\![\phi(\mathbf{y})]\!]$ e $[\![\mathbf{x}=\mathbf{y}]\!][\![\psi(\mathbf{x})]\!]\leq[\![\psi(\mathbf{y})]\!]$, para quaisquer nomes $\mathbf{x},\mathbf{y}$ e outros para as demais variáveis livres. Então, $[\![\mathbf{x}=\mathbf{y}]\!]([\![\phi(\mathbf{x})]\!]+[\![\psi(\mathbf{x})]\!])=[\![\mathbf{x}=\mathbf{y}]\!][\![\phi(\mathbf{x})]\!]+[\![\mathbf{x}=\mathbf{y}]\!][\![\psi(\mathbf{y})]\!]\leq[\![\phi(\mathbf{y})]\!]+[\![\psi(\mathbf{y})]\!]$. Mas, como $[\![\phi\vee\psi]\!]=[\![\psi]\!]+[\![\psi]\!]$, deduzimos, da fórmula acima, que $[\![\mathbf{x}=\mathbf{y}]\!][\![\phi(\mathbf{x})\vee\psi(\mathbf{x})]\!]\leq[\![\phi(\mathbf{y})\vee\psi(\mathbf{y})]\!]$, o que era desejado.

$\sim\phi(x)$: O leitor deve notar que, nessa parte da demonstração, a indução é somente sobre o comprimento da fórmula, as variáveis livres usadas podem ser tomadas arbitrariamente. Logo, uma vez feita a demonstração para $\phi(x)$, intuitivamente já fizemos a demonstração também para $\phi(y)$, desde que $\phi(y)$ satisfaça as hipóteses. Como estamos supondo que $\phi(x)$ não possua y como variável livre e a transformação $\phi(x|y)$ é admissível, uma vez a transformação feita, $\phi(y)$ não possuirá x como variável livre e a transformação $\phi(y|x)$ será admissível. Unindo esse fato ao fato que $[\![\mathbf{y}=\mathbf{x}]\!]=[\![\mathbf{x}=\mathbf{y}]\!]$, temos, por hipótese, que $[\![\mathbf{x}=\mathbf{y}]\!][\![\phi(\mathbf{y})]\!]\leq[\![\phi(\mathbf{x})]\!]$, isto é, $([\![\mathbf{x}=\mathbf{y}]\!][\![\phi(\mathbf{y})]\!])\to[\![\phi(\mathbf{x})]\!]=\mathbb{1}$. Por sua vez, esta última fórmula equivale a $-[\![\mathbf{x}=\mathbf{y}]\!]+(-[\![\phi(\mathbf{y})]\!])+[\![\phi(\mathbf{x})]\!]=\mathbb{1}$. Manipulando essas operações, obtemos $-[\![\mathbf{x}=\mathbf{y}]\!]+(-[\![\phi(\mathbf{y})]\!])+[\![\phi(\mathbf{x})]\!]=-[\![\mathbf{x}=\mathbf{y}]\!]+(-[\![\phi(\mathbf{y})]\!])+(-(-[\![\phi(\mathbf{x})]\!]))=-[\![\mathbf{x}=\mathbf{y}]\!]+(-(-[\![\phi(\mathbf{x})]\!]))+(-[\![\phi(\mathbf{y})]\!])=([\![\mathbf{x}=\mathbf{y}]\!](-[\![\phi(\mathbf{x})]\!]))\to(-[\![\phi(\mathbf{y})]\!])$. Logo, por consequência, temos $([\![\mathbf{x}=\mathbf{y}]\!](-[\![\phi(\mathbf{x})]\!]))\to(-[\![\phi(\mathbf{y})]\!])=\mathbb{1}$, isto é, $[\![\mathbf{x}=\mathbf{y}]\!](-[\![\phi(\mathbf{x})]\!])\leq-[\![\phi(\mathbf{y})]\!]$. Então, obtemos o desejado, já que $[\![\sim\phi]\!]=-[\![\phi]\!]$ e, portanto, $[\![\mathbf{x}=\mathbf{y}]\!][\![\sim\phi(\mathbf{x})]\!]\leq[\![\sim\phi(\mathbf{y})]\!]$ (lembre-se de prefixar um nome para todas as outras variáveis presentes na fórmula $\phi(x)$).

$\forall z\ \phi(x)$: Agora, o leitor deve notar que nossas demonstrações nesta parte admitem completa arbitrariedade nos nomes que atribuímos às variáveis livres, entre elas o z (caso ele realmente seja uma variável livre de ϕ). Então temos, por hipótese de indução, $[\![\mathbf{x}=\mathbf{y}]\!][\![\phi(\mathbf{x},\mathbf{z})]\!]\leq$

$[\![\phi(\mathbf{y},\mathbf{z})]\!]$ para qualquer nome $\mathbf{z}$. Como $[\![\mathbf{x}=\mathbf{y}]\!]\prod_{\mathbf{z}\in\mathbf{V}^{\mathscr{B}}}[\![\phi(\mathbf{x},\mathbf{z})]\!]=\prod_{\mathbf{z}\in\mathbf{V}^{\mathscr{B}}}([\![\mathbf{x}=\mathbf{y}]\!][\![\phi(\mathbf{x},\mathbf{z})]\!])\leq [\![\mathbf{x}=\mathbf{y}]\!][\![\phi(\mathbf{x},\mathbf{z})]\!]$, temos $[\![\mathbf{x}=\mathbf{y}]\!]\prod_{\mathbf{z}\in\mathbf{V}^{\mathscr{B}}}[\![\phi(\mathbf{x},\mathbf{z})]\!]\leq[\![\phi(\mathbf{y},\mathbf{z})]\!]$, para qualquer nome $\mathbf{z}$, o que nos permite concluir que $[\![\mathbf{x}=\mathbf{y}]\!]\prod_{\mathbf{z}\in\mathbf{V}^{\mathscr{B}}}[\![\phi(\mathbf{x},\mathbf{z})]\!]\leq\prod_{\mathbf{z}\in\mathbf{V}^{\mathscr{B}}}[\![\phi(\mathbf{y},\mathbf{z})]\!]$, o que era necessário provar para obtermos $[\![\mathbf{x}=\mathbf{y}]\!][\![\forall z\ \phi(\mathbf{x},\mathbf{z})]\!]\leq[\![\forall z\ \phi(\mathbf{y},z)]\!]$ (nesse teorema, consideramos que z seja diferente de x e y, uma vez que estamos supondo que x é de fato variável livre da fórmula $\chi(x)$ que usamos na demonstração e que $\chi(x|y)$ é admissível, nesta última demonstração, o $\chi(x)$ que nos referimos é $\forall z\ \phi$).

Isso conclui a demonstração da validade do último axioma da lógica que faltava.

Uma vez provado que todos os axiomas da lógica são válidos, para demonstrar que toda fórmula logicamente provável é válida, só falta provar que, as regras de derivação α e γ, uma vez aplicadas à fórmulas válidas, geram fórmulas válidas. Esse é o nosso próximo objetivo. Nas demonstrações abaixo, como todas as variáveis livres podem ser substituídas por nomes arbitrários, podemos omitir suas aparições, sem perda de generalidade.

Regra α: A validade de $\mathfrak{A}\rightarrow\mathfrak{B}$ equivale a $[\![\mathfrak{A}]\!]\leq[\![\mathfrak{B}]\!]$, por hipótese, também temos a validade de $\mathfrak{A}$, que equivale a $\mathbb{1}\leq[\![\mathfrak{A}]\!]$. Com essas duas afirmações, concluímos que $\mathbb{1}=[\![\mathfrak{B}]\!]$, que nos permite derivar a validade de $\mathfrak{B}$, a nossa intenção.

Regra γ: Aqui a nossa única hipótese é a validade de $\mathfrak{A}$, isto é $\mathbb{1}=[\![\mathfrak{A}]\!]$ para quaisquer nomes a que atribuamos às variáveis livres, entre elas o x (seja ele variável livre de $\mathfrak{A}$ ou não, isso é irrelevante). Isso nos permite concluir que $\mathbb{1}=\prod_{\mathbf{x}\in\mathbf{V}^{\mathscr{B}}}[\![\mathfrak{A}]\!]$, onde $\mathbf{x}$ é o símbolo que representa o nome atribuído a todas as ocorrências livres da variável livre x em $\mathfrak{A}$, isso implica facilmente a validade da fórmula $\forall x\ \mathfrak{A}$, uma vez que as outras variáveis livres prosseguem sendo arbitrárias, como queríamos provar. $\square$

Nota: Para a formalização da demonstração da validade das fórmulas logicamente prováveis, será necessário que o leitor *forneça* a demonstração dessa fórmula, isto é, a sequência $\phi_1,\ldots,\phi_n$ aos moldes da nossa definição de fórmula logicamente provável, e depois provar que cada fórmula dessa lista é válida, seguindo as instruções fornecidas na demonstração acima. Por isso é estritamente obrigatório, para nossos objetivos, que essa lista seja finita.

A.2 Teorema 2.1.15

A.2.1 Formalizações Necessárias

Aqui precisamos formalizar o que queremos dizer com $\phi_1,\ldots,\phi_n\vdash\psi$. Para isso, vamos definir a versão geral do conceito $\vdash$. Dada uma teoria T, diremos que $T\vdash\psi$ quando existir uma lista finita de fórmulas $\psi_1,\ldots,\psi_m$ com $\psi_m\equiv\psi$ e, para todo k com $1\leq k\leq m$, ψ_k satisfaz uma das seguintes propriedades:

1. ψ_k é um dos axiomas de T

2. ψ_k é logicamente provável, isto é, $\vdash \psi_k$

3. ψ_k é derivado das fórmulas $\psi_1, ..., \psi_{k-1}$ a partir da regra α ou da regra γ

Quando a teoria T se tratar de uma lista finita $\phi_1, ..., \phi_n$, poderemos escrever $\phi_1, ..., \phi_n \vdash \psi$. Em particular, consideramos o caso $\vdash \psi$ quando a teoria T não possuir nenhum axioma, consequentemente, ψ é logicamente provável (explicando assim nossa notação). Por causa da definição, para toda fórmula ψ tal que $\mathrm{T} \vdash \psi$, existe uma lista finita $\phi_1, ..., \phi_n$ de axiomas de T tal que $\phi_1, ..., \phi_n \vdash \psi$.

Essa definição, além de facilitar a demonstração do nosso teorema, permite fazer uma distinção entre *Teoria* e *Lógica*. Na demonstração do teorema, nós suporemos implicitamente uma sequência nesse estilo, usando o Teorema 2.1.14 quando possível. Porém, o leitor deverá estar ciente que, em uma demonstração estritamente formal, para cada aparição de uma fórmula logicamente provável, estaremos usando implicitamente uma demonstração ao estilo da seção anterior dessa fórmula. Caso assim deseje, o leitor mais cético pode concatenar essas demonstrações na nossa lista, eliminando esse "conflito", porém, será necessário adaptar a demonstração para isso.

A.2.2 Demonstração

Demonstração do Teorema 2.1.15. Fixe o $u \in \mathscr{B} - \{\mathbb{0}\}$ suposto do teorema. Vamos provar que cada fórmula que aparece na lista que comentamos acima é u-válida. Como por hipótese, cada uma das "fórmulas da teoria" $\phi_1, ..., \phi_n$ é u-válida, já está provado esse caso. Se uma afirmação for logicamente provável, ela é $\mathbb{1}$-válida, logo, como $u \leq \mathbb{1}$, ela também será u-válida. Resta então provar que as regras α e γ, quando aplicadas a fórmulas u-válidas, geram fórmulas u-válidas. Nessa última demonstração, omitiremos as variáveis livres e os nomes atribuídos a ela, sem perda de generalidade.

Regra γ: Essa é simples, pois, uma vez que $u \leq [\![\mathfrak{A}]\!]$ para qualquer nome $\mathbf{x}$ que se atribua à variável livre x (esteja ela ou não na fórmula $\mathfrak{A}$), temos que $u \leq \prod_{\mathbf{x} \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}} [\![\mathfrak{A}]\!]$, o que nos permite induzir que $\forall x\, \mathfrak{A}$ é u-válida.

Regra α: Uma vez suposto que $u \leq [\![\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}]\!] = -[\![\mathfrak{A}]\!] + [\![\mathfrak{B}]\!]$ e $u \leq [\![\mathfrak{A}]\!]$, temos que $u \leq (-[\![\mathfrak{A}]\!] + [\![\mathfrak{B}]\!])[\![\mathfrak{A}]\!] = [\![\mathfrak{A}]\!][\![\mathfrak{B}]\!] \leq [\![\mathfrak{B}]\!]$, o que nos permite inferir a u-validade de $\mathfrak{B}$. $\square$

APÊNDICE

B

VERSÃO DE FORCING COM MODELOS

A abordagem mais comum da técnica de forcing consiste em tomar um modelo transitivo M de uma teoria S que estende ZFC e, através da técnica de forcing, criar uma extensão desse modelo que satisfaça a teoria T. Caso tivermos êxito nessa construção, a consistência de T estará ligada à consistência de construirmos um modelo transitivo para S. Tal extensão usa um elemento que iremos definir agora.

Definição B.1 (FILTRO M-GENÉRICO)**.** Dado M um modelo transitivo de ZFC (ou uma teoria que a estende), $\mathbb{P} \in M$ um forcing em M (isto é, vale $(\mathbb{P}$ *é forcing*$)^M$ e, consequentemente, $\mathbb{P}$ é forcing), dizemos que $G \subset \mathbb{P}$ é um **filtro M-genérico** quando G for filtro e, para todo $D \in M$, caso valer $(D \subset \mathbb{P} \wedge D$ *é denso em* $\mathbb{P})^M$ (consequentemente, por absoluticidade, vale $D \subset \mathbb{P} \wedge D$ *é denso em* $\mathbb{P}$), vale $G \cap D \neq \emptyset$. Caso o forcing for uma álgebra booleana e G for ultrafiltro, denotaremos G como **ultrafiltro M-genérico**.
Nota: Note que G não precisa pertencer a M.

Como o leitor pode perceber, fixado um modelo transitivo M de ZFC e um forcing $\mathbb{P}$ de M, um filtro M-genérico corresponde ao filtro $(\mathfrak{D}_{\mathbb{P}})^M$-genérico conforme a definição usada nesse texto.

O modelo que estende M depende de fixarmos $\mathscr{B} \in M$ tal que vale $(\mathscr{B}$ *é álgebra booleana completa*$)^M$ ($\mathscr{B}$ é álgebra booleana em $\mathbf{V}$, mas não necessariamente completa) e tomarmos G um ultrafiltro M-genérico de $\mathscr{B}$. Ele é denotado por $M[G]$, definido a partir de $(\mathbf{V}^{\mathscr{B}})^M$ que denotamos por $M^{\mathscr{B}}$ (como M é modelo transitivo de ZFC, é fácil provar, via absoluticidade, que $M^{\mathscr{B}} = \mathbf{V}^{\mathscr{B}} \cap M$), como faremos na próxima definição.

Definição B.2 ($\mathrm{val}(\mathbf{x}, G)$)**.** Dado M modelo transitivo de ZFC, para toda álgebra booleana $\mathscr{B} \in M$ completa em M e todo G ultrafiltro M-genérico, definiremos $\mathrm{val}(\mathbf{x}, G)$, ou $\mathbf{x}_G$, para todo nome $\mathbf{x} \in \mathbf{V}^{\mathscr{B}}$, da seguinte forma recursiva: $\mathrm{val}(\mathbf{x}, G) = \{\mathrm{val}(t, G) : t \in \mathrm{dom}(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{x}(t) \in G\}$. Em particular, definiremos a classe $\{\mathrm{val}(\mathbf{x}, G) : \mathbf{x} \in M^{\mathscr{B}}\}$ como $M[G]$.

Como $\mathbb{1} \in G$, podemos provar, por recursão, que $\check{x}_G = x$ para todo conjunto x, o que implica: $M \subset M[G]$ (é necessário provar que $\check{x} \in M$ para todo $x \in M$, o que é feito via absoluticidade). Com isso, é fácil provar que $\Gamma_G = G$ e, como é fácil verificar que $\Gamma \in M$, vale $G \in M[G]$. Sendo M transitivo, é fácil provar que $M[G]$ também o será.

A pedra angular dessa abordagem é o seguinte metateorema:

Teorema B.3. Fixados M modelo transitivo de ZFC (ou teoria que a estenda), $\mathscr{B}$ álgebra booleana completa de M e G ultrafiltro M-genérico. Para toda fórmula $\phi(x_1,...,x_n)$ com $x_1,...,x_n$ variáveis livres e quaisquer nomes $\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_n \in M^{\mathscr{B}}$, vale $\phi^M[G](\mathrm{val}(\mathbf{x}_1,G),...,\mathrm{val}(\mathbf{x}_n,G))$ se, e somente se, $([\![\phi(\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_n)]\!])^M \in G$.
Nota: A definição $[\![\phi]\!]$ não é absoluta, assim é crucial que se use a versão relativizada (lembre-se, formalmente falando, $[\![\phi]\!]$ é uma definição diferente para cada fórmula ϕ).

Demonstração. A demonstração se dá via indução sobre o comprimento da fórmula, veja os detalhes em (JECH, 1978, 167-169), mais precisamente a demonstração da fórmula (18.30). No caso de fórmulas primitivas, teremos que prová-las todas simultaneamente, podendo usar a absoluticidade de seu valor booleano. Porém, nas fórmulas com quantificadores, tal absoluticidade já não vale e é necessário considerar sua versão relativizada a M.

Como motivação para o leitor, provaremos o corolário necessário para provar a parte da indução que envolve quantificação.

Lema B.4. Fixados M modelo transitivo de ZFC, G ultrafiltro genérico de uma álgebra booleana completa $\mathscr{B} \in M$. Então para todo conjunto $X \in M$ tal que $X \subset \mathscr{B}$ e $X \subset G$, vale que $\prod X \in G$. Também, para todo $Y \in \mathbf{M}$ não vazio tal que $Y \subset \mathscr{B}$, então $\sum Y \in G$ se, e somente se, existe $u \in Y$ tal que $u \in G$.

Demonstração. Seja $X \in M$ tal que $X \subset G$, criemos o conjunto $D_X = \{u \in \mathscr{B} - \{\mathbb{0}\} : \forall v \in X\ u \leq v\} \cup \{u \in \mathscr{B} - \{\mathbb{0}\} : \exists v \in X\ u \perp v\}$. É fácil provar que $D_X \in M$. Além disso, D_X é denso, pois, fixe $u \in \mathscr{B} - \{\mathbb{0}\}$. Caso $u \leq v$ para todo $v \in X$, então $u \in \{u \in \mathscr{B} - \{\mathbb{0}\} : \forall v \in X\ u \leq v\} \subset D_X$. Caso contrário, fixe $v \in X$ tal que $u \not\leq v$, como as álgebras booleanas são separativas, existe $w \leq u$ tal que $w \perp v$, assim, $w \in \{u \in \mathscr{B} - \{\mathbb{0}\} : \exists v \in X\ u \perp v\} \subset D_X$. Portanto, a M-genericidade de G implica $D_X \cap G \neq \emptyset$, mas, como supomos $X \subset G$ que é filtro, deve valer $G \cap \{u \in \mathscr{B} - \{\mathbb{0}\} : \exists v \in X\ u \perp v\} = \emptyset$, então $G \cap \{u \in \mathscr{B} - \{\mathbb{0}\} : \forall v \in X\ u \leq v\} \neq \emptyset$, isto é, $\exists u \in G\ \forall v \in X\ u \leq v$, consequentemente, $\prod X \in G$.

Para provar a outra afirmação, fixe $Y \in M$ subconjunto de $\mathscr{B}$. Caso existir $u \in Y$ que pertence a G, é consequência imediata de G ser filtro que $\sum Y \in G$. Agora, se $\sum Y \in G$, suponha por absurdo que não existe $u \in Y$ tal que $u \in G$, então, já que G é ultrafiltro, segue que $Z = \{-u : u \in Y\} \subset G$. Como é fácil provar que $Z \in M$, o que provamos acima implica que $-\sum Y = \prod Z \in G$, absurdo com o fato de G ser filtro.

Nota: Lembre-se que $\sum, \prod$ neste teorema só faz sentido dentro do modelo M, uma vez que $\mathscr{B}$ não precisa ser completa em $\mathbf{V}$. $\square$

$\square$

A partir desta ferramenta, essa abordagem provará a consistência de uma teoria T construindo para ela um modelo transitivo $M[G]$ para ela, a partir do modelo transitivo M de uma teoria S que estende ZFC e um ultrafiltro M-genérico para uma álgebra booleana completa de M. Em uma abordagem assim, será usado várias vezes o metateorema acima junto com o fato de M ser modelo transitivo de S para provar todos os teoremas de consistência que provamos nesse texto e muitos outros. Para nós, porém, uma vez que provamos todas as nossas afirmações diretamente a partir do universo dos nomes, podemos simplesmente relativizar nossos resultados para M e usar uma única vez esse metateorema e reobter todos os nossos resultados com essa abordagem. Por exemplo, no Teorema 2.5.5, o que fizemos foi provar (usando ZFC) que, para uma álgebra booleana completa específica, vale $\mathbb{1} = [\![\exists x\, x \notin \mathbf{L}]\!]$. Portanto, para M modelo de ZFC, vale $(\mathbb{1} = [\![\exists x\, x \notin \mathbf{L}]\!])^M$ e, usando o metateorema acima, para qualquer ultrafiltro M-genérico G, teremos que $(\exists x\, x \notin \mathbf{L})^{M[G]}$, provando que $M[G]$ é um modelo para $\mathbf{V} \neq \mathbf{L}$ (nos teoremas onde usamos GCH, M precisa ser modelo de GCH também).

Se o leitor desenvolver nessa abordagem os conceitos de absoluticidade e class-preserving que provamos, perceberá que a $\mathscr{B}$-absoluticidade de $\phi(x_1, ..., x_n)$ implica que vale $\forall x_1, ..., x_n\ (\phi^M(x_1, ..., x_n) \to \phi^{M[G]}(x_1, ..., x_n))$, isto é, a $M, M[G]$-absoluticidade. Analogamente, verá que uma classe $\mathbf{A}(y_1, ..., y_n)$ ser $\mathscr{B}$-cp implica que $\forall y_1, ..., y_n\ (\mathbf{A}^{M[G]}(y_1, ..., y_n) = \mathbf{A}^M(y_1, ..., y_n))$ (basta verificar que $([\![\mathbf{x} \in \mathbf{A}((y_1)\check{}, ..., (y_n)\check{})]\!])^M = \sum_{x \in M}([\![\mathbf{x} = \check{x}]\!])^M$ e usar o Lema B.4), em particular, $\mathbf{ON}^M = \mathbf{ON}^{M[G]}$ e $\mathbf{L}^M = \mathbf{L}^{M[G]}$.

A partir dessa abordagem, podemos obter resultados da forma Con(S') $\to$ Con(T), onde S' é a teoria usada para provar que M é modelo transitivo de S e que o G usado é ultrafiltro M-genérico para a álgebra booleana completa de M usada. Mas, quando é que podemos assegurar a existência de tais M e G? Caso M for $\mathbf{V}$, já sabemos, pelo Teorema 2.5.2, que tal G não existe a menos que a álgebra booleana completa seja atômica. E caso for atômica, ainda vale o caso interessante que todo G obrigatoriamente possuirá um átomo, como provaremos abaixo.

Teorema B.5. Para todo forcing atômico $\mathbb{P}$, se $G \subset \mathbb{P}$ é filtro $\mathfrak{D}_{\mathbb{P}}$-genérico, então existe um átomo que pertence a G.

Demonstração. Releia a demonstração do Teorema 2.5.2 na parte que se assume $\mathbb{P}$ não atômico. Note que, para que um $\mathbb{P}$ atômico não incorra na mesma contradição, $\mathbb{P} - G$ não pode ser denso, isto é, existe $p \in \mathbb{P}$ tal que, para todo $q \leq p$, $q \notin \mathbb{P} - G$, equivalentemente, $q \in G$, então tal p é um átomo e $p \in G$. $\square$

O problema é que todos os resultados de consistência que fizemos nesse texto usaram álgebras booleanas não atômicas. Caso tomarmos M como sendo $\mathbf{L}$, ainda não é possível provar a existência de um G para álgebras booleanas completas não atômicas (já que $\mathbf{L}$ pode ser $\mathbf{V}$), mas é possível provar a consistência de sua existência, o que é suficiente para obter os resultados desse texto por meio dessa abordagem, isso será provado no próximo teorema.

Teorema B.6. Para um $\mathscr{B} \in \mathbf{L}$ que satisfaz ($\mathscr{B}$ *é álgebra booleana completa*)$^{\mathbf{L}}$, é consistente com ZFC que existe ultrafiltro $\mathbf{L}$-genérico.
Nota: Nesse teorema, $\mathscr{B}$ precisa ser definido por uma fórmula para que a afirmação acima não possua variáveis livres.

Demonstração. Como Con(ZFC)$\rightarrow$ Con(ZFC + $\mathbf{V} = \mathbf{L}$), podemos supor que vale $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ e assim supor que $\mathscr{B}$ seja álgebra booleana completa em $\mathbf{V}$. Portanto, podemos provar que, para $\mathbf{V}^{\mathscr{B}}$, vale $[\![\Gamma \text{ é ultrafiltro } (\mathfrak{D}_{\mathscr{B}})^{\mathbf{L}}\text{-genérico}]\!] = \mathbb{1}$. Pois $\mathfrak{D}_{\mathscr{B}} = (\mathfrak{D}_{\mathscr{B}})^{\mathbf{L}}$ e, devido ao fato de $\mathbf{L}$ ser $\mathscr{B}$-cp, vale $[\![((\mathfrak{D}_{\mathscr{B}})^{\mathbf{L}})\check{} = (\mathfrak{D}_{\mathscr{B}})^{\mathbf{L}}]\!] = \mathbb{1}$ (devido ao Teorema 2.2.7), agora é só usar o Teorema 2.4.4. Consequentemente, vale $[\![\exists G\ G \text{ é ultrafiltro } (\mathfrak{D}_{\mathscr{B}})^{\mathbf{L}}\text{-genérico}]\!] = \mathbb{1}$, provando a consistência da afirmação desejada com ZFC. $\square$

Porém, o melhor caso é quando M é um conjunto enumerável, nesse caso, para todo elemento diferente de $\mathbb{0}$ da álgebra booleana completa existe um ultrafiltro M-genérico que o contém, como provaremos a seguir.

Teorema B.7. Dado um modelo transitivo enumerável de ZFC M, $\mathscr{B} \in M$ álgebra booleana completa (em M) e $u \in \mathscr{B} - \{\mathbb{0}\}$, existe G ultrafiltro M-genérico tal que $u \in G$.

Demonstração. Seja $\{D_n\}_{n\in\omega}$ enumeração dos conjuntos densos de $\mathscr{B}$ que estão em M. Por indução sobre $n \in \omega$, crie a sequência $v_0 \geq v_1 \geq ... \geq v_n \geq ...$ tal que $v_0 = u$ e, para todo $n \in \omega$, $v_{n+1} \in D_n$ (o que é sempre possível uma vez que D_n é denso), então é fácil provar que $G = \{w \in \mathscr{B} - \{\mathbb{0}\} : \exists n \in \omega\ v_n \leq w\}$ é filtro M-genérico, só resta provar que G é ultrafiltro. Uma vez que M é modelo transitivo de ZFC, é fácil de provar que, para todo $w \in \mathscr{B}$ o conjunto denso $\{u \in \mathscr{B} - \{\mathbb{0}\} : u \leq w \vee u \leq -w\}$ pertence a M, consequentemente, vale $w \in G$ ou $-w \in G$ para todo $w \in \mathscr{B}$, e logo $\mathscr{B}$ é ultrafiltro. $\square$

O problema no que se refere a esse caso é que não dá para provar a existência de modelos transitivos enumeráveis para todo axioma ZFC, ou qualquer teoria que a estenda. Mas existe uma maneira de contornar esse caso. Todas as demonstrações feitas sobre valor booleano de uma fórmula exigem apenas um número finito de axiomas para demonstrá-lo. Assim M só precisará satisfazer um número finito de axiomas. Em particular, todos os teoremas que provamos nesse apêndice só precisam supor também que M satisfaz um número finito de axiomas e, dada uma fórmula ϕ, a respectiva instância do Teorema B.3 para essa fórmula também só necessita que M satisfaça um número finito de axiomas. Uma vez que, em toda teoria S que estende ZFC, uma vez fixada uma coleção finita de axiomas dela, podemos provar (em S) que existe um modelo transitivo enumerável M para essa lista finita, pode-se usar essa abordagem para provar que, para cada lista finita de axiomas de T, existe um $M[G]$ que seja modelo para essa lista, o suficiente para provar que Con(S) $\rightarrow$ Con(T).

REFERÊNCIAS

HALBEISEN, L. J. **Combinatorial Set Theory**: With a gentle introduction to forcing. London: Springer-Verlag, 2012. ISBN 978-1-4471-2173-2. Citado 2 vezes nas páginas 107 e 108.

JECH, T. **Set Theory**. London: Academic Press, 1978. ISBN 0-12-381950-4. Citado 4 vezes nas páginas 46, 63, 73 e 116.

KNEEBONE, G. T. **Mathematical Logic and the Foundations of Mathematics**: An introductory survey. London: D. Van Nostrand Company Ltd, 1963. Citado 2 vezes nas páginas 107 e 108.

KUNEN, K. **Set Theory: An Introduction to Independence Proofs**. New York: Noth-Holland Publishing Company, 1980. ISBN 0-444-85401-0. Citado 6 vezes nas páginas 13, 43, 63, 73, 97 e 106.

ÍNDICE

ÍNDICE DE SÍMBOLOS