I.C.M.S.C.

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

DISTRIBUIÇÕES PERIÓDICAS

E

HIPOELITICIDADE

Cristiano dos Santos Neto

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

SÃO CARLOS - SÃO PAULO

BRASIL

DISTRIBUIÇÕES PERIÓDICAS

E

HIPOELITICIDADE

Cristiano dos Santos Neto

Orientador: Prof. Dr. Adalberto P.Bergamasco

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, da Universidade de São Paulo, para obtenção do Título de Mestre em Ciências (Matemática)

SÃO CARLOS

1985

À minha esposa, Amélia, pela compreensão e pela força demonstrada nos momentos que estive por fraquejar.

Ao meu filho, Francisco, pelas oportunidades que tive de aprender com ele, sobre a "arte de aprender".

Ao meu filho que está para nascer, pela motivação que despertou em mim.

Dedico este trabalho.

Meus Agradecimentos:

Ao Prof.Dr. Adalberto Panobianco Bergamasco pela orientação segura e dedicada, e pelo incentivo ao início de minha carreira científica.

Aos Professores Doutores Natalino Adelmo de Molfetta, Décio Botura Filho e Aldo Ventura pelo apoio e confiança, que me dispensaram durante a realização deste trabalho.

Aos colegas da Universidade Federal de São Carlos e do Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos - USP, pelo incentivo.

Aos meus pais, Benedicto e Layde, que através de uma dedicada educação me moldaram assim como sou.

A senhora Neube E.D.G.Stabili, pelo ótimo trabalho de datilografia.

Este trabalho foi patrocinado parcialmente pelas instituições: CAPES, CNPq, FAPESP e FINEP.

ABSTRACT

The first goal of this work is to present a study of Periodic Distributions, aimed at a reader who has a basic knowledge of Distribution Theory.

The second goal is to apply the above mentioned tools to the study of the regularity, in spaces of periodic functions and distributions, of the solutions of a linear partial differential equation with constant coefficients, giving detailed proofs of some results in the literature.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é estudar com detalhes o tópico que trata das Distribuições Periódicas, resumidamente exposto em [6] e aplicá-lo ao estudo da regularidade das soluções de uma equação diferencial parcial com coeficientes constantes, tendo como base o artigo, "Global Hypoellipticity and Liouville Numbers" publicado no Proc. Amer.Math.Soc (31)(1972), 112-114, de Stephen J. Greenfield and Nolan R. Wallach.

O estudo desenvolvido até o final do capítulo 1 tem um caráter didático, proporcionando ao leitor que possui apenas os conhecimentos de um curso básico de Teoria das Distribuições, meios para a compreensão de conceitos mais refinados da teoria das equações diferenciais parciais como por exemplo o conceito de Hipoeliticidade Periódica para um operador diferencial parcial com coeficientes constantes.

Vale ressaltar que o estudo das Distribuições Periódicas poderia ser desenvolvido de outras maneiras equivalentes à nossa, como procuramos mostrar no final do capítulo 1. Ver por exemplo [7] e [8].

No capítulo 0 reunimos alguns fatos básicos que são necessários para a compreensão do trabalho.

No capítulo 1 demonstramos, inicialmente, alguns resultados sobre somabilidade de uma série em Espaços Localmente Convexos e desenvolvemos, então, um estudo das distribuições que são 1-periódicas em cada variável, buscando caracterizá-las como uma série de exponenciais.

No capítulo 2 aplicamos os resultados obtidos no capítulo 1 ao estudo da Hipoeliticidade Periódica dos operadores de primeira ordem, que possuem coeficientes constantes, utilizando os números de Liouville.

CAPÍTULO 0

PRÉ-REQUISITOS

Indicaremos por $x = (x_1,\ldots,x_n)$ um elemento de R^n e $g = (g_1,g_2,\ldots,g_n)$ um elemento de $Z^n = Z \times\ldots\times Z$.

Seja Z_+ o conjunto dos números inteiro não negativos.

Dada a n-upla $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in Z_+^n$ definimos

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}, \quad x \in R^n$$

Além disso se $\alpha \in Z_+^n$ e $g \in Z^n$ vale que:

$$|g^\alpha| \leq \|g\|^{|\alpha|} \leq (1+\|g\|)^{|\alpha|} \leq \sum_{k\leq|\alpha|} (1+\|g\|)^k$$

onde $\|g\|$ é qualquer uma dentre as três expressões seguintes:

$$\sqrt{g_1^2+g_2^2+\ldots+g_n^2}, \quad |g_1|+|g_2|+\ldots+|g_n|,$$

$$\max\{|g_j|: j = 1,2\ldots n\}$$

Para cada $j = 1,2\ldots n$, escrevemos

$$\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad D_j = \frac{1}{i}\partial_j \quad \text{onde} \quad i = \sqrt{-1}$$

e se $\alpha \in Z_+^n$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \ldots D_n^{\alpha_n}$.

Definição 0.1

Se Q é um conjunto qualquer e $(c_i)_{i\varepsilon Q}$ é uma família de números reais definida pelo conjunto de Q, dizemos que a série

$$\sum_{i\varepsilon Q} c_i$$

é somável de soma c e escrevemos

$$\sum_{i\varepsilon Q} c_i = c$$

se, dado $\varepsilon > 0$, existe um subconjunto finito de índices $J_0 \subset Q$ tal que, para todo subconjunto finito de índices $J \supset J_0$ tenhamos $\left|c - \sum_{i\varepsilon J} c_i\right| < \varepsilon$

O conceito de somabilidade se estende também aos números complexos, mas por simplicidade nos restringiremos ao conjunto dos números reais.

Proposição 0.1 (Ver [7] pg 4).

Uma condição necessária e suficiente para que a série $\sum_{i\varepsilon Q} c_i$ seja somável é que a série $\sum_{i\varepsilon Q} |c_i|$ seja somável e então

$$\left|\sum_{i\varepsilon Q} c_i\right| \leq \sum_{i\varepsilon Q} |c_i|.$$

Se $\sum_{i \varepsilon Q} d_i$ é uma série de termos positivos e somável e se

$$|c_i| \leq d_i$$

então a série $\sum_{i \varepsilon Q} c_i$ é somável e além disso

$$\left| \sum_{i \varepsilon Q} c_i \right| \leq \sum_{i \varepsilon Q} d_i$$

Proposição 0.2 (Somabilidade e Convergência absoluta) (Ver [7] pg 7).

Se o conjunto de índices Q é o conjunto Z_+, para que $\sum_{i \varepsilon Q} c_i$ seja somável é necessário e suficiente que esta série seja absolutamente convergente e, então, sua soma como série é igual a sua soma no sentido da teoria das séries somáveis.

Proposição 0.3 (Soma por pacotes e associatividade) (Ver [7] pg 8)

Suponhamos que o conjunto de índices Q seja uma união de uma família de subconjuntos Q_j, $j \varepsilon A$:

$$Q = \bigcup_{j \varepsilon A} Q_j$$

dois a dois disjuntos. Então se a série $\sum_{i\varepsilon Q} c_i$ é somável, cada uma das séries $\sum_{i\varepsilon Q_j} c_i$ é somável de soma σ_j, a série $\sum_{j\varepsilon A} \sigma_j$ é somável e temos que

$$\sum_{i\varepsilon Q} c_i = \sum_{j\varepsilon A} \sigma_j = \sum_{j\varepsilon A} \left(\sum_{i\varepsilon Q_j} c_i \right)$$

Proposição 0.4 (Ver [7] pg 10)

Se todos os c_i são ≥ 0 e se convencionamos chamar $+\infty$ a soma de uma série divergente de termos ≥ 0, então

$$\sum_{i\varepsilon Q} c_i = \sum_{j\varepsilon A} \left(\sum_{i\varepsilon Q_j} c_i \right)$$

onde o valor dos dois membros é finito ou $+\infty$.

Proposição 0.5 (Ver [7] pg 11)

Se as séries $\sum_{i\varepsilon Q} c_i$ e $\sum_{j\varepsilon L} d_j$ são somáveis, com soma c e d respectivamente, então a série

$$\sum_{Q\times L} c_i d_j$$

produto das duas séries dadas é somável com soma c.d.

Tendo em vista os resultados enunciados acima, mostremos que a série $\sum_{Z^n} \frac{1}{(1+\|g\|)^k}$, $k > n$ é somável.

Como $(|1+\|g\|)^n \geq (1+|g_1|)(1+|g_2|)\dots(1+|g_n|)$ então

$$(1+\|g\|)^{-k} = (1+\|g\|)^{-\frac{k}{n}n} \leq$$

$$\leq [(1+|g_1|)\dots(1+|g_n|)]^{-\frac{k}{n}} =$$

$$= (1+|g_1|)^{-\frac{k}{n}} \dots (1+|g_n|)^{-\frac{k}{n}} .$$

Logo

$$\sum_{Z^n} \frac{1}{(1+\|g\|)^k} \leq \sum_{Z^n} (1+|g_1|)^{-\frac{k}{n}} \dots (1+|g_n|)^{-\frac{k}{n}}$$

e pela proposição 0.5 temos que

$$\sum_{Z^n} (1+|g_1|)^{-k/n} \dots (1+|g_n|)^{-k/n} =$$

$$= \sum_{Z} \frac{1}{(1+|g_1|)^{k/n}} \dots \sum_{Z} \frac{1}{(1+|g_n|)^{k/n}} < \infty,$$

pois dado $j = 1,2\dots n$, temos, usando as proposições 0.4 e 0.2, que

$$\sum_{Z} \frac{1}{(1+|g_j|)^{k/n}} = 2 \sum_{N} \frac{1}{(1+|g_j|)^{k/n}} + 1$$

$$= 2 \sum_{g_j=1}^{\infty} \frac{1}{(1+|g_j|)^{k/n}} + 1 < +\infty.$$

Assim a série $\sum_{Z^n} \frac{1}{(1+\|g\|)^k}$ $k > n$ é majorada pelo produto de séries somáveis.

$$\sum_{Z} \frac{1}{(1+|g_1|)^{k/n}} \cdots \sum_{Z} \frac{1}{(1+|g_n|)^{k/n}}$$

e consequentemente é somável.

Seja $B(R^n) = \{h: R^n \to C,\ h \text{ limitada}\}$

$B(R^n)$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|h\| = \sup_{x\varepsilon R^n} |h(x)|$$

Definição 0.2

Consideremos a família $\{h_i(x)\}_Q$, de funções definidas em R^n, a valores complexos que são limitadas. Então dizemos que a série $\sum_{i\varepsilon Q} h_i(x)$ é uniformemente somável, com soma $h(x)$, se dado $\varepsilon > 0$, existe um subconjunto finito de índices $J_0 \subset Q$, dependendo somente de ε, tal que para todo subconjunto J de Q, finito tal que J contenha J_0 tenhamos

$$\left|h(x) - \sum_J h_i(x)\right| < \varepsilon, \qquad x \varepsilon R^n$$

Observemos que este é um caso particular da somabilidade em Espaços Localmente Convexos que será vista no Capítulo 1.

Proposição 0.6

1) Se o conjunto de índices Q é enumerável e se $\sum_{i \in Q} h_i(x)$ é uma série de termos ≥ 0, então

$$\int_{R^n} \sum_{i \in Q} h_i(x)\,dx = \sum_{i \in Q} \int_{R^n} h_i(x)\,dx$$

sendo os dois membros finitos ou iguais a $+\infty$

2) Se Q é enumerável, se as $h_i(x)$ são quaisquer (reais ou complexas) e se

$$\sum_{i \in Q} \int_{R^n} |h_i(x)|\,dx = \int_{R^n} \sum_{i \in Q} |h_i(x)|\,dx$$

é finito, então, por um lado, cada uma das funções $h_i(x)$ é integrável em R^n e a série $\sum_{i \in Q} \int_{R^n} h_i(x)\,dx$ é somável; por outro lado, para quase todo x, a série $\sum_{i \in Q} h_i(x)$ é somável e sua soma é uma função de x, definida em quase toda parte que é integrável em R^n por último

$$\int_{R^n} \sum_{i \in Q} h_i(x)\,dx = \sum_{i \in Q} \int_{R^n} h_i(x)\,dx$$

Definição 0.3

Seja Ω um aberto de R^n. Denotaremos por $C_c^\infty(\Omega)$ o espaço das funções-testes em Ω, isto é, o conjunto das funções a valores complexos indefinidamente diferenciáveis com suporte compacto em Ω.

Definição 0.4

Uma sequência (ϕ_j) de funções pertencentes a $C_c^\infty(\Omega)$ converge a zero em $C_c^\infty(\Omega)$ se:

(i) existe um compacto $K \subset \Omega$ tal que $S(\phi_j) \subseteq K$ $j=1,2\ldots$

(ii) para todo inteiro positivo m, as derivadas de ordem m das funções ϕ_j convergem uniformemente a zero quando $j \to +\infty$.

Definição 0.5

Seja Ω um aberto de R^n. Um funcional linear contínuo $u: C_c^\infty(\Omega) \to C$ é dito uma distribuição em Ω. O espaço das distribuições em Ω se denota $D'(\Omega)$.

Definição 0.6

Dizemos que uma sequência $u_j \in D'(\Omega)$ $j = 1,2\ldots$ converge a $u \in D'(\Omega)$ se $\langle u_j, \phi\rangle$ converge a $\langle u,\phi\rangle$ para toda $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Neste caso escrevemos $u_j \to u$ em $D'(\Omega)$.

Definição 0.7

Se $u \in D'(\Omega)$ definimos suporte de u, como intersecção de todos os fechados de Ω fora dos quais u é nulo.

Indicaremos por $E'(\Omega)$ o espaço vetorial das distribuições que possuem suporte compacto contido em Ω.

Denotaremos por $S(w)$ o suporte de w quer seja w uma função ou distribuição.

Proposição 0.7

Sejam $f \in C^{\infty}(R^n)$ e $\phi \in C_c^{\infty}(R^n|f^{-1}(0))$. Então a função

$$\Psi(x) = \begin{cases} \dfrac{\phi(x)}{f(x)}, & x \notin f^{-1}(0) \\ 0 & x \in f^{-1}(0) \end{cases}$$

pertence a $C_c^{\infty}(R^n)$, com $S(\Psi) \subset R^n|f^{-1}(0)$ e $f.\Psi = \phi$.

Demonstração

Observemos inicialmente que $f^{-1}(0) \cap S(\phi) = \emptyset$ e então $r = d(f^{-1}(0), S(\phi)) > 0$.

Dado $x_0 \in f^{-1}(0)$ consideremos então $B_r(x_0)$, logo $\Psi \equiv 0$ em $B_r(x_0)$ e portanto $\Psi \in C^{\infty}(B_r(x_0))$.

Como $\Psi \in C^{\infty}(R^n|f^{-1}(0))$ então

$$\Psi \in C^{\infty}(R^n|f^{-1}(0)) \cup (\bigcup_{x \in f^{-1}(0)} B_r(x)) = C^{\infty}(R^n),$$

$$S(\Psi) = S(\phi) \cap S(\tfrac{1}{f}) \subset S(\phi) \subset\subset R^n|f^{-1}(0)$$

e portanto $\Psi \in C_c^{\infty}(R^n)$ e $S(\Psi) \subset R^n|f^{-1}(0)$.

Além disso $f(x)\Psi(x) = \phi(x) \quad \forall\, x \in R^n$ pois se $x \notin f^{-1}(0)$ temos $f(x)\Psi(x) = f(x)\,\dfrac{\phi(x)}{f(x)} = \phi(x)$.

Corolário

Se $f \in C^{\infty}(R^n)$, $u \in \mathcal{D}'(R^n)$ e se $f.u = 0$ então $S(u) \subset f^{-1}(0)$.

Demonstração

Dada $\phi \in C_c^\infty(R^n|f^{-1}(0))$ consideremos Ψ como na proposição anterior. Então

$$<u,\phi> = <u,f\Psi> = <fu,\Psi> = 0$$

Lema (Ver [6] pg 13)

Se $f \in C^k(B)$; $B = \{x \in R^n : \|x\| < R\}$ e $k \geq 1$ então $f(x) = f(0) + \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(x)$ onde $f_j \in C^{k-1}(B)$;
$\partial^\alpha f_j(0) = \dfrac{\partial^\alpha \partial_j f(0)}{1+|\alpha|}$ e $\sup_B |\partial^\alpha f_j| \leq \sup_B |\partial^\alpha \partial_j f|$.

Teorema 0.1

Se $u \in D'(\Omega)$ onde Ω é um subconjunto aberto de R^n e $x_j u = 0$, $j = 1,2...n$ então $u = c\delta$ para algum c.

Demonstração

Observemos que $S(u) \subset \{0\}$ pois dada $\phi \in C_c^\infty(R^n|\{0\})$ basta tomarmos na proposição anterior $f(x) = \|x\|^2$, $x \in R^n$, para obtermos

$$<u,\phi> = <u,\|x\|^2\Psi> = \sum_{j=1}^{n} <x_j u, x_j \Psi> = 0$$

onde $\Psi \in C_c^\infty(R^n)$ é tal que $\|x\|^2 \Psi(x) = \phi(x)$.

Logo dada $\phi \in C^\infty(R^n)$, então pelo Lema anterior temos que $\phi(x) = \phi(0) + \sum_{j=1}^{n} x_j\phi_j(x)$ $\phi_j \in C^\infty(R^n)$ e portanto

$$<u,\phi> = <u,\phi(0)> + \sum_{j=1}^{n} <x_j u,\phi_j(x)> = <u,\phi(0)> =$$

$$= <u,1><\delta,\phi> = <c\delta,\phi>.$$

Teorema 0.2 (Ver [4] pg 35)

Sejam u_1 e u_2 pertencentes a $\mathcal{D}'(R^n)$ tais que todo ponto de R^n tem uma vizinhança onde $u_1 = u_2$.

Então $u_1 = u_2$ em R^n.

Definição 0.8

Se $f(x)$ e $g(x)$ são funções contínuas em R^n e uma delas tem suporte compacto, a convolução de f e g se define como

$$f*g(x) = \int f(x-y)g(y)dy = \int g(x-y)f(y)dy.$$

Definição 0.9

Se $u \in \mathcal{D}'(R^n)$ $(u \in \mathcal{E}'(R^n))$ e $\phi \in C_c^\infty(R^n)$ $(\phi \in C^\infty(R^n))$ denotaremos por $u*\phi$ a função definida por

$$u * \phi(a) = <u,\check{\phi}_a> \quad \text{onde} \quad \check{\phi}_a(x) = \phi(a-x)$$

No seguinte teorema denotaremos τ_h o operador de translação $(\tau_h u)(x) = u(x-h)$.

Teorema 0.3 (Ver [4] pg 65)

Seja $U: C_c^\infty(R^n) \to C^\infty(R^n)$ um operador contínuo que comuta com todas as translações τ_h, $h \in R^n$. Então existe uma única $u \in \mathcal{D}'(R^n)$ tal que $U\phi = u*\phi$, $\phi \in C_c^\infty(R^n)$.

Definição 0.10

Sejam u_1, $u_2 \in \mathcal{D}'(R^n)$ e suponhamos que uma delas tem suporte compacto. Definimos $v = u_1 * u_2$ como a única distribuição v tal que $u_1*(u_2*\phi) = v*\phi$; $\phi \in C_c^\infty(R^n)$.

Observe que $V(\phi) = u_1*(u_2*\phi)$ define um operador que satisfaz as hipóteses do teorema 0.3 e por conseguinte $V(\phi) = v*\phi$ para uma $v \in \mathcal{D}'(R^n)$ bem definida.

Proposição 0.8 (Ver [1] pg 93)

Se $u \in \mathcal{D}'(R^n)$, $v \in \mathcal{E}'(R^n)$ e $h \in R^n$ então

$$(u*v)_h = u_h*v = u*v_h \quad \text{onde} \quad \langle u_h, \phi\rangle = \langle u, \phi_{-h}\rangle,$$

$$\phi_{-h}(x) = \phi(x+h), \qquad \phi \in C_c^\infty(R^n).$$

Definição 0.11

Uma função $\Psi \in C^{\infty}(R^n)$ é rapidamente decrescente no infinito se

$$\lim_{\|x\|\to\infty} |x^{\alpha}D^{\beta}\Psi(x)| = 0 \qquad \alpha,\beta \in Z_+^n$$

ou equivalentemente: dados $k \geq 0$ e $\alpha \in Z_+^n$

$$\sup_{R^n} (1+\|x\|)^k |\partial^{\alpha}\Psi(x)| < +\infty.$$

O conjunto das funções deste tipo é indicado por $S(R^n)$. Observemos que $C_c^{\infty}(R^n)$ é um subespaço vetorial de $S(R^n)$.

Como é usual, consideraremos o espaço $S(R^n)$ munido da topologia definida pela seguinte família de semi-normas,

$$P_{\alpha,\beta}(\psi) = \sup_{R^n} |x^{\alpha}D^{\beta}\Psi(x)| \qquad \alpha,\beta \in Z_+^n$$

Definição 0.12

A transformada de Fourier de uma função $\Psi \in S(R^n)$ é definida por

$$\hat{\Psi}(\xi) = \int_{R^n} \Psi(x) e^{-i<x,\xi>} dx$$

onde $<x,\xi> = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \ldots + x_n\xi_n$.

Definição 0.13

Um funcional linear contínuo em $\mathcal{S}(R^n)$ é dito uma distribuição temperada. O espaço das distribuições que são temperadas se denota por $\mathcal{S}'(R^n)$.

A transformada de Fourier de uma distribuição temperada, u, também é uma distribuição temperada e é definida por

$$<\hat{u},\Psi> = <u,\hat{\Psi}> , \qquad \Psi \in \mathcal{S}(R^n) .$$

Se $u \in \mathcal{S}'(R^n)$ então vale a seguinte propriedade:

$$\hat{\hat{u}} = (2\pi)^n \check{u}$$

onde $<\check{u},\Psi> = <u,\check{\Psi}>$ com $\check{\Psi}(x) = \Psi(-x)$.

O espaço $C^\infty(R^n)$ estará sempre munido da topologia definida pela seguinte família de seminormas

$$P_{m,K}(\Psi) = \sup_{\substack{K \\ |\alpha|\leq m}} |\partial^\alpha \Psi(x)|$$

onde K é um subconjunto compacto de R^n e $m \in Z_+$.

Denotaremos por $C_1^\infty(R^n)$ o espaço das funções infinitamente diferenciáveis que são 1-periódicas em cada variável, isto é, $\phi \in C_1^\infty(R^n)$ se e somente se $\phi \in C^\infty(R^n)$ e $\phi(x-g) = \phi(x)$, $g \in Z^n$.

O espaço $C_1^\infty(R^n)$ estará sempre munido da topologia definida pela seguinte família de seminormas

$$P_m(\phi) = \sup_{\substack{R^n \\ |\alpha| \leq m}} |\partial^\alpha \phi(x)|, \quad m \in Z_+$$

Sejam $P = P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$, $a_\alpha \in C$ um operador diferencial parcial linear de ordem m com coeficientes constantes e

$$P_m(\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \xi^\alpha \quad , \qquad \xi \in R^n$$

o polinômio homogêneo de grau m, associado a P.

Definição 0.14

Dizemos que o operador P é elítico de ordem m se:

$$P_m(\xi) \neq 0 \text{ para todo } \xi \in R^n, \ \xi \neq 0$$

ou equivalentemente se: existe $c_0 > 0$ tal que

$$|P_m(\xi)| \geq c_0 \|\xi\|^m , \qquad \xi \in R^n$$

(Ver [1] pg 201).

CAPÍTULO 1

DISTRIBUIÇÕES PERIÓDICAS

Neste capítulo demonstramos, inicialmente, alguns resultados sobre somabilidade de séries em Espaços Localmente Convexos e desenvolvemos, então, um estudo das distribuições $u \in \mathcal{D}_1'(R^n)$, ver definição 1.6, buscando caracterizá-las como uma série de exponenciais. O estudo aqui desenvolvido requer, somente, os conhecimentos de um curso básico de Teoria das Distribuições.

Os resultados principais deste capítulo são os Teorema 1.12 que nos fornece a série de Fourier de u e o Teorema 1.15 que caracteriza a distribuição u em termos do crescimento da família de seus coeficientes de Fourier

1.1. Somabilidade em Espaços Localmente Convexos

Seja X um espaço localmente convexo cuja topologia é dada pela família de seminormas $(P_j)_{j\in F}$ onde F é um conjunto de índices.

Definição 1.1

Se Q é um conjunto de índices e $(u_g)_{g\in Q}$ é uma família de elementos de X então dizemos que a série

$\sum_{g\varepsilon Q} u_g$ é somável em X com soma $u \varepsilon X$ e escrevemos $u = \sum_Q u_g$ se:

Dados $j \varepsilon F$ e $\varepsilon > 0$, existe um subconjunto finito de índices $J_0 \subset Q$ tal que, para todo subconjunto finito de índices $J \supset J_0$ se tenha que

$$P_j(\sum_J u_g - u) < \varepsilon$$

Definição 1.2 (Condição de Cauchy)

Dizemos que uma série de elementos de X, $\sum_{g\varepsilon Q} u_g$, satisfaz a condição de Cauchy se:

Dado $j \varepsilon F$ e $\varepsilon > 0$ existe um subconjunto finito de índices $J_0 \subset Q$, tal que para todo subconjunto finito de índices J satisfazendo $J \cap J_0 = \emptyset$ se tenha

$$P_j(\sum_J u_g) < \varepsilon$$

Somente por simplicidade ao considerarmos a série $\sum_Q u_g$ consideraremos o conjunto de índices Q como sendo enumerável pois se Q é não enumerável existe um subconjunto Q' de Q que é enumerável fora do qual os somandos dão nulos e então trabalhamos com Q'.

Teorema 1.1

Se a série $\sum_Q u_g$, $u_g \in X$ é somável de soma $u \in X$ então a série dada satisfaz a Condição de Cauchy, e reciprocamente se X é sequencialmente completo e $\sum_Q u_g$ satisfaz a Condição de Cauchy então a série dada é somável em X.

Demonstração

Suponhamos que $u = \sum_Q u_g$. Sejam $j \in \mathcal{F}$ e $\varepsilon > 0$ dados. Existe $J_0 \subset Q$, J_0 finito, tal que se $J \subset Q$, J finito, satisfaz $J \supset J_0$ então

$$P_j(\sum_J u_g - u) < \varepsilon/2.$$

Logo se $J \subset Q$, J finito, satisfaz $J \cap J_0 = \emptyset$ temos:

$$P_j(\sum_J u_g) = P_j(\sum_{J \cup J_0} u_g - u + u - \sum_{J_0} u_g) \leq$$

$$\leq P_j(\sum_{J \cup J_0} u_g - u) + P_j(\sum_{J_0} u_g - u) <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Assim $\sum_Q u_g$ satisfaz a Condição de Cauchy.

Reciprocamente, consideremos a particular ordenação de Q dada por $Q = \bigcup_{s=1}^{\infty} J^s$, $J^s = \{g_s\}$, segue imediatamente da hipótese que a série $\sum_{s=1}^{\infty} u_{g_s}$ satisfaz a Condição de Cauchy usual e como X é sequencialmente completo então existe $u \in X$ tal que $u = \sum_{s=1}^{\infty} u_{g_s}$. Mostremos então que $u = \sum_{Q} u_g$.

Dados $j \in \mathcal{F}$ e $\varepsilon > 0$, sabemos que:

i) $\exists\, J_0 \subset Q$, J_0 finito, tal que se $J \subset Q$. J finito, $J \cap J_0 = \emptyset$

então $P_j(\sum_J u_g) < \varepsilon/2$

ii) $\exists\, \ell_0 \in N$ tal que se $s \geq \ell_0$ temos

$$P_j(\sum_{s=1}^{\ell} u_{g_s} - u) < \varepsilon/2$$

Tomemos então $\tilde{J} = \{g_1, g_2, \dots, g_k\}$ tal que

$$J_0 \cup \{g_1, g_2, \dots, g_{\ell_0}\} \subset \tilde{J}.$$

Logo se $J \subset Q$, J finito, é tal que $J \supset \tilde{J}$ então:

$$P_j(\sum_J u_g - u) = P_j(\sum_J u_g - \sum_{\tilde{J}} u_g + \sum_{\tilde{J}} u_g - u) \leq$$

$$P_j(\sum_J u_g - \sum_{\tilde{J}} u_g) + P_j(\sum_{\tilde{J}} u_g - u) \overset{(ii)}{<} P_j(\sum_{J|\tilde{J}} u_g) + \frac{\varepsilon}{2} \overset{(i)}{<}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Corolário

Seja X sequencialmente completo e $u = \sum_{Q} u_g$, $u_g \in X$. Se J_0 é um subconjunto finito de Q tal que, para todo K finito, $K \supset J_0$, se tenha

$$\left|\sum_{K} u_g - u\right| \leq \varepsilon$$

então, se verifica a mesma desigualdade para K infinito, $K \supset J_0$.

Demonstração

Seja $J_0 \subset Q$ tal que para todo J finito, J J_0, se tenha

$$\left|\sum_{J} u_g - u\right| \leq \varepsilon$$

então, se $K \subset Q$ e K é infinito contendo J_0, existe, qualquer que seja $\eta > 0$, um conjunto finito de índices J_1, $J_0 \subset J_1 \subset K$ tal que

$$\left|\sum_{K} u_g - \sum_{J_1} u_g\right| \leq \eta$$

(da definição da somabilidade da série parcial $\sum_{K} u_g$). Então teremos

$$\left|\sum_{K} u_g - \sum_{J_1}\right| \leq \eta \quad \text{e} \quad \left|u - \sum_{J_1} u_g\right| \leq \varepsilon$$

logo $\left|\sum_{K} u_g - u\right| \leq \varepsilon + \eta$

e como η é arbitrário temos que

$$\left|\sum_{K} u_g - u\right| \leq \varepsilon$$

com K infinito.

Teorema 1.2 - Somabilidade por Pacotes ou Associatividade

Dado X sequencialmente completo, suponhamos que o conjunto de índices Q seja reunião de subconjunto Q_i, $i \varepsilon A$, isto é,

$$Q = \bigcup_{i \varepsilon A} Q_i$$

sendo estes subconjuntos dois a dois disjuntos. Então se a série $\sum_Q u_g$ é somável temos que a série $\sum_{g \varepsilon Q_i} U_g$ é somável de soma σ_i , $\sum_{i \varepsilon A} \sigma_i$ é somável e

$$\sum_{g \varepsilon Q} u_g = \sum_{i \varepsilon A} \sigma_i = \sum_{i \varepsilon A} \left(\sum_{g \varepsilon Q_i} u_g \right)$$

Demonstração

Como a série $\sum_Q u_g$ é somável, satisfaz o Critério de Cauchy, então qualquer soma parcial da série considerada, por exemplo $\sum_{Q_i} u_g$, também o satisfaz. Segue então da completeza sequencial de X que a série $\sum_{Q_i} u_g$ é somável.

Se $u = \sum_Q u_g$, então dados $j \varepsilon F$ e $\varepsilon > 0$ existe $J_0 \subset Q$, J_0 finito, tal que se $J \subset Q$, J finito ou infinito e $J \supset J_0$ temos

$$P_j\left(\sum_J u_g - u\right) < \varepsilon$$

Seja J_1 o subconjunto finito de A dado por

$$J_1 = \{i \in A \mid Q_i \cap J_0 \neq \emptyset\}.$$

Então dado $D \subset A$, D finito, $D \supset J_1$, temos que $E = \bigcup_{i \in D} Q_i$ contém J_0 e portanto

$$P_j(u - \sum_{g \in E} u_g) < \varepsilon$$

Como D é finito temos que:

$$\sum_{g \in E} u_g = \sum_{g \in \bigcup_{i \in D} Q_i} u_g = \sum_{i \in D} \sigma_i$$

e consequentemente $P_j(u - \sum_{i \in D} \sigma_i) < \varepsilon$.

Logo $\sum_{i \in A} \sigma_i$ é somável de soma u.

Teorema 1.3

Dados X sequencialmente completo e a família de elementos de $X, \{u_g\}_Q$, suponhamos que para cada $j \in F$ exista uma família de números $\{M_g\}_Q$, $M_g = M_g(j) > 0$ satisfazendo $\sum_Q M_g$ somável e $P_j(u_g) \leq M_g$. Então a série $\sum_Q u_g$ é somável em X.

Demonstração

Dado $\varepsilon>0$ e $j\varepsilon F$ decorre da somabilidade de $\sum_{Q} M_g$ que, existe $J_0 \subset Q$, J_0 finito, tal que se $J \subset Q$, J finito satisfaz $J \cap J_0 = \emptyset$ então $\left|\sum_{J} M_g\right| < \varepsilon$.

Logo $P_j(\sum_{J} u_g) \leq \sum_{J} P_j(u_g) \leq \sum_{J} M_g < \varepsilon$

Assim $\sum_{Q} u_g$ satisfaz a Condição de Cauchy e pelo teorema 1.1 segue o resultado.

Com base nos fatos acima estabelecidos demonstraremos alguns resultados envolvendo somabilidade em espaços vetoriais topológicos, que nos serão úteis no decorrer deste capítulo.

Teorema 1.4

Se $\Psi \varepsilon S(R^n)$ então a série $\sum_{Z^n} \Psi_{ag}, 0 \neq a \varepsilon R$ é somável em $C^\infty(R^n)$ e sua soma pertence a $C_a^\infty(R^n)$.

Demonstração

Dado $N \varepsilon N$.

$$\sum_{Z^n} \Psi_{ag}(x) = \sum_{\|g\| < \frac{2N}{|a|}} \Psi_{ag}(x) + \sum_{\|g\| \geq \frac{2N}{|a|}} \Psi_{ag}(x) \qquad x \varepsilon B_N[0]$$

$\sum_{\|g\| < \frac{2N}{|a|}} \Psi_{ag}$ é somável em $C^\infty(R^n)$ pois é uma so ma finita de funções pertencentes a $C^\infty(R^n)$.

Demonstraremos então que $\sum_{\|g\| \geq \frac{2N}{|a|}} \Psi_{ag}$ é somável em $C^\infty(R^n)$.

Se $x \in B_N[0]$ e $\|g\| \geq \frac{2N}{|a|}$ então $\frac{|a|\,\|g\|}{2} \geq N \geq \|x\|$

portanto $\|x-ag\| \geq |a|\|g\| - \|x\| \geq |a|\|g\| - \frac{|a|\|g\|}{2} = \frac{|a|\|g\|}{2}$

Logo como $\Psi \in \mathcal{S}(R^n)$, para $|\alpha| \leq m$, $m \in Z_+$, $\|g\| \geq \frac{2N}{|a|}$ e $x \in B_N[0]$ temos:

$$|\partial^\alpha \Psi_{ag}(x)| = |\partial^\alpha \Psi(x-ag)| \leq \frac{c}{(1+\|x-ag\|)^{n+1}} \leq$$

$$\leq \frac{2^{n+1}c}{(2+|a|\|g\|)^{n+1}} \leq \frac{2^{n+1}c}{(\min\{2,|a|\})^{n+1}} \cdot \frac{1}{(1+\|g\|)^{n+1}} =$$

$$= \frac{\tilde{c}}{(1+\|g\|)^{n+1}}$$

Assim para cada $\Psi \in \mathcal{S}(R^n)$ e dados $K \subset\subset R^n$, $m \in Z_+$ seja $N \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset B_N[0]$ e seja $g \in Z^n$ tal que $\|g\| \geq \frac{2N}{|a|}$, então a família, somável, de números $M_g = \frac{\tilde{c}}{(1+\|g\|)^{n+1}}$ satisfaz

$$P_{m,K}(\Psi_{ag}) \leq P_{m,B_N[0]}(\Psi_{ag}) \leq M_g, \quad \|g\| \geq \frac{2N}{|a|}$$

lembramos que $P_{m,K}(\Psi_{ag}) = \sup_{\substack{K \\ |\alpha| \leq m}} |\partial^\alpha \Psi_{ag}|$.

Então pelo teorema 1.3 a série $\sum_{\|g\| \geq \frac{2N}{|a|}} \Psi_{ag}$ é somável em $C^{\infty}(R^n)$.

Logo $\sum_{Z^n} \Psi_{ag}$ é somável em $C^{\infty}(R^n)$ pois é uma soma finita de séries somáveis em $C^{\infty}(R^n)$.

Temos ainda que se $f(x) = \sum_{Z^n} \Psi_{ag}(x)$ e $g' \in Z^n$ então

$$f(x-ag') = \sum_{g\in Z^n} \Psi(x-a(g+g')) = \sum_{\substack{g\in Z^n \\ \tilde{g}=g+g'}} \Psi(x-a\tilde{g}) =$$

$$= \sum_{\tilde{g}\in Z} \Psi(x-a\tilde{g}) = f(x)$$

Logo a soma $f(x)$ da série $\sum_{Z^n} \psi_{ag}$, $0 \neq a \in R$ é um elemento de $C_a^{\infty}(R^n)$.

Observemos que na terceira igualdade usamos o fato da soma não depender da ordenação.

Proposição 1.1

Se a série $\sum_{Z^n} u_g$, $u_g \in C^{\infty}(R^n)$ é somável em $C^{\infty}(R^n)$ então dado $\alpha \in Z_+^n$ a série $\sum_{Z^n} \partial^{\alpha} u_g$ é somável em $C^{\infty}(R^n)$.

Demonstração

A demonstração segue imediatamente da observação do seguinte fato:

Dados $K \subset\subset R^n$, $m \in Z_+$ e $J \subset Z^n$, finito, tomemos $m' \in Z_+$ tal que $|\alpha| = m'$, então:

$$P_{m,K}(\sum_J \partial^\alpha u_g) = \sup_{\substack{|\beta| \leq m \\ K}} |\partial^\beta (\sum_J \partial^\alpha u_g)| \leq$$

$$\leq \sup_{\substack{|\gamma| \leq m+m' \\ K}} |\partial^\gamma (\sum_J u_g)| = P_{m+m',K}(\sum_J u_g).$$

Proposição 1.2

Dada a família $\{u_g\}_{Z^n}$, $u_g \in C_1^\infty(R^n)$ então a série $\sum_{Z^n} u_g$ é somável em $C_1^\infty(R^n)$ se e somente se é somável em $C^\infty(R^n)$.

Demonstração

A demonstração da ida da proposição é imediata enquanto a volta está esquematizada abaixo.

Seja $I = \{x \in R^n: 0 \leq x_j \leq 1,\ j = 1,\ldots,n\}$.

Então a demonstração da proposição segue do seguinte fato:

dados $m \in Z_+$, $K \subset\subset R^n$, $K \supset I$ e $J \subset Z^n$, J finito temos:

$$P_m(\sum_J u_g) = \sup_{\substack{|\alpha|\leq m \\ R^n}} |\partial^\alpha(\sum_J u_g)| = \sup_{\substack{|\alpha|\leq m \\ K}} |\partial^\alpha(\sum_J u_g)| =$$

$$= P_{m,K}(\sum_J u_g),$$ onde na segunda igualdade utilizamos a periodicidade de u_g, $g \in Z^n$.

Teorema 1.5

O operador $F: S(R^n) \longrightarrow C_1^\infty(R^n)$ definido por $F(\Psi) = \sum_{Z^n} \Psi_g$ é linear e contínuo.

Demonstração

Tomando $a = 1$ no teorema 1.4 resulta que $F(\Psi) = \sum_{Z^n} \Psi_g$ está bem definida e $F(\Psi) \in C_1^\infty(R^n)$.

A linearidade de F decorre de propriedades elementares de somabilidade.

Mostremos então que F é contínuo isto é se $\Psi_j \longrightarrow 0$ em $S(R^n)$ então $F_j = F(\Psi_j) \longrightarrow 0$ em $C_1^\infty(R^n)$.

Observemos inicialmente que

$$\|x-g\| \geq \frac{\|g\|}{3} \qquad x \in B_{\frac{2}{3}}[0].$$

De fato:

Se $\|g\| = 0$ temos $\|x\| \geq 0$

Se $\|g\| \geq 1$ temos

$$\|x-g\| \geq | \|g\| - \|x\| | \geq \|g\| - \frac{2}{3} \geq \|g\| - \frac{2}{3}\|g\| =$$

$$= \frac{\|g\|}{3}$$

Sejam $\varepsilon > 0$ e m pertencente a Z_+ dados; então como Ψ_j converge para zero em $S(R^n)$, existe $j_0 \in N$ tal que para $j \geq j_0$ temos, pela observação acima que:

$$|\partial^\alpha \Psi_j(x-g)| \leq \frac{\varepsilon}{(1+\|x-g\|)^{n+1}} \leq \frac{\varepsilon\, 3^{n+1}}{(1+\|g\|)^{n+1}}$$

$x \in B_{\frac{2}{3}}[0]$, $|\alpha| \leq m$, $g \in Z^n$.

Logo se $j \geq j_0$ temos

$$P_m(F_j) = \sup_{\substack{|\alpha| \leq m \\ R^n}} |\partial^\alpha F_j(x)| = \sup_{\substack{|\alpha| \leq m \\ B_{\frac{2}{3}}[0]}} |\partial^\alpha F_j(x)| =$$

$$= \sup_{\substack{|\alpha| \leq m \\ B_{\frac{2}{3}}[0]}} \left| \sum_{g \in Z^n} \partial^\alpha \Psi_j(x-g) \right| \leq \sup_{\substack{|\alpha| \leq m \\ B_{\frac{2}{3}}[0]}} \sum_{g \in Z^n} |\partial^\alpha \Psi_j(x-g)| <$$

$$< \varepsilon \sum_{Z^n} \frac{3^{n+1}}{(1+\|g\|)^{n+1}}$$

Assim F_j converge para zero em $C_1^\infty(R^n)$.

Proposição 1.3

Dada $\phi \in C_c^\infty(R^n)$ então o operador $G: \mathcal{S}(R^n) \longrightarrow C_c^\infty(R^n)$ definido por $G(\Psi) = \phi \sum_{Z^n} \Psi_g$ é linear e contínuo.

Demonstração

Observemos inicialmente que se $\phi \in C_c^\infty(R^n)$ o operador linear $T_\phi(f) = \phi.f$ definido em $C^\infty(R^n)$ com valores em $C_c^\infty(R^n)$ é contínuo; resumo da prova: se f_j converge para zero em $C^\infty(R^n)$ então temos

$S(T_\phi f_j) \subset S(\phi)$ para qualquer j e dado $\alpha \in Z_+^n$, existe $k > 0$ tal que

$$|\partial^\alpha(\phi.f_j)| \leq k \sup_{\substack{\beta \leq \alpha \\ S(\phi)}} |\partial^\beta f_j| \longrightarrow 0 \text{ quando } j \to \infty$$

Consideremos então
$$\begin{array}{ccccc} S & \xrightarrow{F} & C_1^\infty \subset C^\infty & \xrightarrow{T_\phi} & C_c^\infty \\ \Psi & \longrightarrow & \sum_{Z^n} \Psi_g & \longrightarrow & \phi \sum_{Z^n} \Psi_g \end{array}$$

assim $G = T_\phi o F$.

Logo, decorre da observação inicial e do teorema 1.5 que $G = T_\phi o F$ é linear e contínuo.

1.2 - Funções Unitárias

Definição 1.3

Uma função χ é dita unitária se $\chi \in C_c^\infty(R^n)$ e se existe um número real a tal que

$$\sum_{g \in Z^n} \chi(x+ag) = 1 \qquad x \in R^n$$

O espaço de todas as funções que são unitárias com respeito a algum número real a fixado será denotado por U_a.

Observemos que uma função unitária juntamente com suas transladadas nos fornece uma partição da unidade em R^n.

O próximo teorema nos mostra que $U_a \neq \emptyset$.

Teorema 1.6

Dado $0 \neq a \in R$ e dada uma vizinhança X do cubo

$$K = \{x \in R^n: |x_j| \leq \frac{a}{2},\ j = 1,2\ldots n\}$$

existe uma função não negativa $\chi \in C_c^\infty(X)$ tal que

$$\sum_{Z^n} \chi(x+ag) = 1 \qquad x \in R^n$$

Demonstração

Consideremos

$\Psi \varepsilon C_c^\infty(X)$ tal que $0 \leq \Psi \leq 1$ e $\Psi \equiv 1$ em K.

Então segue do teorema 1.4 que $\phi = \sum_{Z^n} \Psi_{ag} \in C_a^\infty(R^n)$ portanto $\phi \in C_a^\infty(X)$.

Além disso dado $x \in X$ então existe $g_0 \in Z^n$ tal que $x + ag_0 \in K \subset S(\Psi)$ portanto $\Psi(x+ag_0) = 1$. Como $0 \leq \Psi \leq 1$ então temos que $\phi \geq 1$.

Definamos então

$$\begin{aligned} \chi: X &\longrightarrow C \\ x &\longrightarrow \chi(x) = \frac{\Psi(x)}{\phi(x)} \end{aligned}$$

Logo:

χ é não negativa pois Ψ e ϕ o são.

χ é um produto de funções que pertencem a $C^\infty(X)$ e $S(\chi) \subset S(\Psi) \subset X$, assim $\chi \in C_c^\infty(X)$. Finalmente $\sum_{Z^n} \chi(x+ag) = 1$, $x \in R^n$ pois:

$$\sum_{Z^n} \chi(x+ag) = \sum_{Z^n} \frac{\Psi(x+ag)}{\phi(x+ag)} = \sum_{Z^n} \frac{\Psi(x+ag)}{\phi(x)} =$$

$$= \frac{1}{\phi(x)} \sum_{Z^n} \Psi(x+ag) = \frac{\phi(x)}{\phi(x)} = 1, \quad x \in R^n.$$

Observemos que se $\Psi \in C_c^\infty(R^n)$ pode-se demonstrar, de maneira mais simples, que $\phi = \sum_{Z^n} \Psi_{ag} \in C^\infty(R^n)$.

De fato: Seja $N \in \mathbb{N}$ tal que $S(\Psi) \subset B_N[0]$; então dado $x \in R^n$ tomemos $r \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_r(0)$

Se $\|g\| \geq \dfrac{N+r}{|a|}$ então $\|x+ag\| \geq |a|\,\|g\| - \|x\| >$

$> r + N - r = N$ para $x \in B_r(0)$, portanto $\Psi_{-ag}(x)=0$.

Logo $\phi = \sum_{Z^n} \Psi_{-ag} = \sum_{\|g\| < \frac{N+r}{|a|}} \Psi_{-ag}$ em $B_r(0)$

Como para cada $g \in Z^n$, $\Psi_{-ag} \in C^\infty(R^n)$ então $\phi \in C^\infty(B_r(0))$ e portanto $\phi \in C^\infty(R^n)$.

A demonstração acima se deveu basicamente ao seguinte fato:

Se $\Psi \in C_c^\infty(R^n)$ então a série $\sum_{Z^n} \Psi_{-ag}$ é uma soma finita em cada subconjunto limitado de R^n.

Finalmente observemos que, segue de maneira imediata, igualmente dos fatos acima que: se $\chi \in U_a$ então

$$\partial_j\Big(\sum_{Z^n} \chi_{-ag}\Big) = \sum_{Z^n} \partial_j(\chi_{-ag}) = 0 \qquad j = 1,2\ldots n.$$

1.3 - Os espaços s e s'

Definição 1.4

Dizemos que uma família de números complexos $\{A_g\}_{Z^n}$ cresce lentamente no infinito, ou simplesmente que

$\{A_g\} \in s'(Z^n)$, se existe $k > 0$ tal que

$$|A_g| \leq k(1+\|g\|)^k, \qquad g \in Z^n$$

Definição 1.5

Dizemos que uma família de números complexos $\{A_g\}_{Z^n}$ decresce rapidamente no infinito, ou simplesmente que $\{A_g\} \in s(Z^n)$, se dado $k \in Z_+$.

$$(1+\|g\|)^k|A_g| \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \|g\| \longrightarrow +\infty$$

Cumpre-nos observar que a semelhança entre os espaços s, s' e S, S' se faz sentir, notadamente, no fato de que é possível colocar topologias em s e s' de modo que s' se torne o dual de s. A demonstração desse fato está relacionada com a demonstração do teorema 1.15 deste capítulo. A seguir enunciaremos um teorema, o qual admitiremos, como verdadeiro, sem demonstração, que é de grande utilidade prática para verificar se uma dada família de números complexos é ou não rapidamente decrescente no infinito.

Teorema 1.7

Dada a família $\{A_g\}_{Z^n}$ de números complexos então são equivalentes:

1) $\{A_g\} \in s(Z^n)$

2) Para cada $j = 1, \ldots n$ e cada $k \in Z_+$, $\exists\, M_{jk} > 0$ tal que $|g_j^k A_g| \leq M_{jk}$ $\quad g \in Z^n$

3) Para cada $\alpha \in N^n$, $\exists\, M_\alpha > 0$ tal que $|g^\alpha A_g| \leq M_\alpha$, $\quad g \in Z^n$

4) Se $P(g)$ é um polinômio em g então $\exists\, M_P > 0$ tal que $|P(g) A_g| \leq M_P$ $\quad g \in Z^n$

5) Dado $k \in Z$, $\exists\, M_k > 0$ tal que $(1+\|g\|)^k |A_g| \leq M_k$ $\quad g \in Z^n$

6) $\sup\limits_g (1+\|g\|)^\ell \, |A_g|^2 < +\infty$ para cada $\ell \in Z$

7) $\sum\limits_{Z^n} (1+\|g\|)^s |A_g|^2 < +\infty$ para cada $s \in Z$

8) $\sum\limits_{\|g\|>0} \|g\|^m |A_g|^2 < +\infty$ para cada $m \in Z$

Teorema 1.8

A família de números complexos $\{A_g\} \in s(Z^n)$ se e somente se a série $\sum\limits_{Z^n} A_g e^{2\pi i <x,g>}$ é somável em $C_1^\infty(R^n)$

Demonstração

(⟹) Decorre do Teorema 1.7.5 que:

Dado $\alpha \in N^n$

$$|\partial^\alpha (A_g e^{2\pi i<x,g>})| = (2\pi)^{|\alpha|} |g^\alpha A_g| \leq \frac{M}{(1+\|g\|)^{n+1}}$$

para quaisquer $g \in Z^n$ e $x \in R^n$.

com $M = (2\pi)^{|\alpha|} \sup_g (1+\|g\|)^{n+1+|\alpha|} |A_g|$

portanto dado $m \in Z_+$, $\exists\, M(m) > 0$ tal que

$$P_m(A_g e^{2\pi i<x,g>}) = \sup_{\substack{|\alpha|\leq m \\ R^n}} |\partial^\alpha (A_g e^{2\pi i<x,g>})| \leq \frac{M}{(1+\|g\|)^{n+1}} \qquad g \in Z^n$$

Logo do teorema 1.3 segue que $\sum_{Z^n} A_g e^{2\pi i<x,g>}$ é somável em $C_1^\infty(R^n)$.

(⟸) Se a série $\sum_{Z^n} A_g e^{2\pi i<x,g>}$ é somável em $C_1^\infty(R^n)$ então decorre da proposição 1.1 e proposição 1.2 que dado $\alpha \in N^n$ a série $\sum_{Z^n} g^\alpha A_g e^{2\pi i<x,g>}$ é somável em $C_1^\infty(R^n)$.

Assim tomando $x = 0$ temos que, a série numérica $\sum_{Z^n} g^{\alpha} A_g$ é somável.

Logo a série $\sum_{Z^n} |g^{\alpha}||A_g|$ é somável e segue então do Teorema 1.7.3 o resultado.

1.4 - Fórmula da Somatória de Poisson

O objetivo deste parágrafo é determinar a transformada de Fourier da soma de medidas de Dirac dada por

$$\sum_{Z^n} \delta_{ag} \qquad 0 \neq a \in R$$

Teorema 1.9

Dada a série $\sum_{Z^n} \delta_{ag}$, $0 \neq a \in R$ então $u^a = \sum_{Z^n} \delta_{ag}$ pertence a $S'(R^n)$, isto é, u^a definida por $\langle u^a, \Psi\rangle = \sum_{Z^n} \langle \delta_{ag}, \Psi\rangle$, $\Psi \in S(R^n)$ é um funcional linear contínuo em $S(R^n)$.

Demonstração

Observemos inicialmente que se $\Psi \in \mathcal{S}(R^n)$ então existe $k \in Z_+$ tal que

$$(1+\|g\|)^{n+1}|\Psi(ag)| \leq \frac{k}{(\min\{1,|a|\})^{n+1}} = \tilde{k}.$$

Então decorre da somabilidade de $\sum_{Z^n} \frac{1}{(1+\|g\|)^{n+1}}$

que a série numérica definida por $\sum_{Z^n} \langle\delta_{ag},\Psi\rangle$ é somável.

Logo u^a está bem definida e sua linearidade é consequência imediata da linearidade de δ_{ag}, para cada g, e de propriedades elementares de somabilidade.

Finalmente se $\Psi_j \to 0$ em $\mathcal{S}(R^n)$ temos que, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, j_0 \in N$ tal que se $j \geq j_0$ então

$$(1+\|g\|)^{n+1}|\Psi_j(ag)| < \varepsilon, \qquad g \in Z^n$$

Logo

$$|\langle u^a,\Psi_j\rangle| = \left|\sum_{Z^n} \Psi_j(ag)\right| \leq \sum_{Z^n} |\Psi_j(ag)| <$$

$$< \varepsilon \sum_{Z^n} \frac{1}{(1+\|g\|)^{n+1}} .$$

Assim $\langle u^a,\Psi_j\rangle$ converge para zero e consequentemente u^a é contínuo em $\mathcal{S}(R^n)$.

Observação

Observemos que $u^a = \sum_{Z^n} \delta_{ag}$, $0 \neq a \in R$ satisfaz a seguinte propriedade:

$$u^a_{az} = u^a \qquad \forall\ z \in Z^n$$

De fato: se $\phi \in C_c^\infty(R^n)$, $z \in Z^n$

$$<u^a_{az}, \phi> = <u^a, \phi_{-az}> = \sum_{g \in Z^n} <\delta_{ag}, \phi_{-az}> = \sum_{g \in Z^n} \phi_{-az}(ag)$$

$$= \sum_{g \in Z^n} \phi(a(g+z)) = \sum_{\substack{g \in Z^n \\ \tilde{g}=g+z}} \phi(a\tilde{g}) = \sum_{\tilde{g} \in Z^n} \phi(a\tilde{g}) = <u^a, \phi>$$

Logo u^a está bem definido e podemos estabelecer os seguintes resultados.

Proposição 1.4

$$(e^{i<ag,.>}-1)\widehat{u^a} = 0 \qquad g \in Z^n.$$

Demonstração

Dado $g \in Z^n$, $\delta_{ag} \in E'(R^n)$, então como a convolução comuta com translações, ver proposição 0.8, e pela observação anterior de que $u^a_{az} = u^a$, $z \in Z^n$ temos que

$$\delta_{ag} * u^a = u^a \qquad \text{pois}$$

$$\delta_{ag} * u^a = (\delta * u^a)_{ag} = \delta * u^a_{ag} = \delta * u^a = u^a.$$

Logo

$$\widehat{u^a} = [\delta_{-ag} * u^a]^\wedge = \widehat{\delta_{-ag}} \cdot \widehat{u^a} =$$

$$= e^{i<ag,\cdot>} \widehat{u^a}.$$

Proposição 1.5

$\widehat{u^a}$ é não nula precisamente em $\frac{2\pi}{a} Z^n$ isto é

$$S(\widehat{u^a}) = \frac{2\pi}{a} Z^n.$$

Demonstração

$S(\widehat{u^a}) \subset \frac{2\pi}{a} Z^n$ pois

dada $\phi \in C_c^\infty(R^n | \frac{2\pi}{a} Z^n)$ consideremos, pela proposição 0.7 $\psi \in C_c^\infty(R^n)$ tal que $(e^{i<ag,\cdot>}-1)\Psi = \phi$ então pela proposição anterior temos que

$$<\widehat{u^a}, \phi> = <\widehat{u^a}, (e^{i<ag,\cdot>}-1)\Psi> =$$

$$= <(e^{i<ag,\cdot>}-1)\widehat{u^a}, \Psi> = <0, \Psi> = 0$$

Além disso $\widehat{u^a} = c_a\delta$ na origem para alguma cons tante c_a. De fato, tomando e_j a n-upla que vale um na coordenada j e zero nas demais coordenadas temos pela proposição anterior que $(e^{iax_j}-1)\widehat{u^a} = (e^{i<ae_j,x>}-1)\widehat{u^a} = 0$ e multiplicando ambos os membros por $e^{-iax_j/2}$ obtemos

$$\widehat{u^a}\ \text{sen}(\frac{ax_j}{2}) = 0, \quad j = 1,2,\ldots n.$$

Seja $\tilde{u} \in \mathcal{D}'(\rho(B_{\frac{\pi}{2a}}(0))$ dada por

$$\tilde{u} = |J_{\rho^{-1}}|\widehat{u^a}\circ\rho^{-1} \quad \text{onde} \quad \rho(x) = (\text{sen}\ \frac{ax_1}{2},\ldots,\text{sen}\ \frac{ax_n}{2})$$

é o difeomorfismo definido em $B_{\frac{\pi}{2a}}(0)$ que determina a seguinte mudança de variáveis

$$y_j = \text{sen}\ \frac{ax_j}{2} \qquad j = 1 \ldots n$$

Então pela proposição anterior $y_j\,\tilde{u} = 0 \quad j = 1,\ldots, n$, pois dada $\Psi \in C_c^\infty(\rho(B_{\frac{\pi}{2a}}(0)))$ temos

$$<y_j\,\tilde{u},\Psi> = <y_j|J_{\rho^{-1}}(y)|(\widehat{u^a}\circ\rho^{-1})(y),\ \Psi(y)> =$$

$$= <(\widehat{u^a}\circ\rho^{-1})(y),\ y_j\Psi(y)|J\rho^{-1}(y)|> =$$

$$= <\widehat{u^a}(x),\ \text{sen}(\frac{ax_j}{2}).(\Psi\circ\rho)(x)\ |J_{\rho^{-1}}(\rho(x))|\ |J\rho(x)|> =$$

$$= <\widehat{u^a}(x),\ \text{sen}(\frac{ax_j}{2})(\Psi\circ\rho)(x)> =$$

$$= <\text{sen}\ \frac{ax_j}{2}\ .\ \widehat{u^a},\ \Psi\circ\rho> = 0$$

Logo pelo teorema 0.1 existe $c_a \in R$ tal que $\tilde{u} = c_a\delta$ em $\rho(B_{\frac{\pi}{2a}}(0))$.

Finalmente dada $\phi \in C_c^\infty(B_{\frac{\pi}{2a}}(0))$ temos

$$<\widehat{u^a},\phi> = <\widehat{u^a}o\rho^{-1}o\rho(x),\ \phi(x)> =$$

$$= <(\widehat{u^a}o\rho^{-1})(y),(\phi o\rho^{-1})(y)|J\rho^{-1}(y)|>$$

$$= <|J\rho^{-1}(y)|(\widehat{u^a}o\rho^{-1})(y),(\phi o\rho^{-1})(y)> =$$

$$= <\tilde{u}(y),(\phi o\rho^{-1})(y)> = <c_a\delta,\phi o\rho^{-1}> =$$

$$= c_a\phi o\rho^{-1}(0) = c_a\phi(0) = <c_a\delta,\phi>,$$

portanto $\widehat{u^a} = c_a\delta$ em $B_{\frac{\pi}{2a}}(0)$.

Tendo em vista o que demonstramos acima, torna-se suficiente provarmos que $\widehat{u^a}$ é invariante por translações em $\frac{2\pi}{a}Z^n$, para concluirmos a demonstração da proposição. Dada $\phi \in C_c^\infty(R^n)$ e $g' \in Z^n$.

$$<(\widehat{u^a})_{\frac{2\pi}{a}g'},\phi> = <\widehat{u^a},\phi_{-\frac{2\pi}{a}g'}>) = <u^a,[\phi_{-\frac{2\pi}{a}g'}]^\wedge>$$

$$= \sum_{Z^n} <\delta_{ag},[\phi_{-\frac{2\pi}{a}g'}]^\wedge> = \sum_{Z^n}[\phi_{-\frac{2\pi}{a}g'}]^\wedge(ag) =$$

$$= \sum_{Z^n} \int_{R^n} \phi(x+\frac{2\pi}{a} g')e^{-i<ag,x>} dx$$

$$= \sum_{Z^n} \int_{R^n} \phi(y)\, e^{-i<ag,y - \frac{2\pi}{a} g'>} dy =$$

$$= \sum_{Z^n} \int_{R^n} \phi(y)e^{-i<ag,y>} dy = \sum_{Z^n} \hat{\phi}(ag) = <\widehat{u^a},\phi>$$

Observemos que, como $\widehat{u^a}$ é invariante por translações em $\frac{2\pi}{a} Z^n$ e $\widehat{u^a} = c_a\delta$ em $B_{\frac{\pi}{2a}}(0)$ então dado

$g_0 \in Z^n$ temos $\widehat{u^a} = c_a \delta_{\frac{2\pi}{a} g_0}$ em $B_{\frac{\pi}{2a}}(\frac{2\pi}{a} g_0)$ pois dada

$$\phi \in C_c^\infty(B_{\frac{2\pi}{a}}(\frac{2\pi}{a} g_0)).$$

$$<\widehat{u^a},\phi> = <(\widehat{u^a})_{\frac{2\pi}{a} g_0},\phi> = <\widehat{u^a},\phi_{-\frac{2\pi}{a} g_0}> =$$

$$= <c_a\, \delta,\phi_{-\frac{2\pi}{a} g_0}> = <c_a\, \delta_{\frac{2\pi}{a} g_0},\phi>$$

Teorema 1.10

$$\widehat{u^a} = c_a u^{\frac{2\pi}{a}}, \quad c_a = (\tfrac{2\pi}{a})^n \quad \text{em} \quad D'(R^n).$$

Demonstração

Seja $v = c_a\, u^{\frac{2\pi}{a}}$, onde c_a é a constante que comparece na demonstração da proposição anterior. Demonstraremos inicialmente que $\widehat{u^a} = v$ e em seguida que

$$c_a = (\frac{2\pi}{a})^n.$$

Dado $x \in R^n$, pelo teorema 0.2 , é suficiente mostrarmos que existe uma vizinhança de x, V_x tal que $\widehat{u^a} = v$ em V_x.

Se $x \notin \frac{2\pi}{a} Z^n$, seja $V_x = R^n \mid \frac{2\pi}{a} Z^n$. Dada $\phi \in C_c^\infty(V_x)$ temos que $S(\phi) \bigcap \frac{2\pi}{a} Z^n = \emptyset$ logo da proposição anterior e da definição de v segue que:

$$<\widehat{u^a}, \phi> = 0 = \sum_{Z^n} c_a \phi(\frac{2\pi}{a} g) = <v, \phi>$$

e portanto $\widehat{u^a} = v$ em V_x.

Se $x = \frac{2\pi}{a} g_0$, para algum $g_0 \in Z^n$, tomemos $V_{\frac{2\pi}{a} g_0} = B_{\frac{\pi}{2a}}(\frac{2\pi}{a} g_0)$. Então segue da observação feita após a demonstração da proposição anterior que dada $\phi \in C_c^\infty(V_{\frac{2\pi}{a} g_0})$.

$$<\widehat{u^a}, \phi> = <c_a \delta_{\frac{2\pi}{a} g_0}, \phi> = c_a \phi(\frac{2\pi}{a} g_0) =$$

$$= \sum_{Z^n} c_a \phi(\frac{2\pi}{a} g) = <v, \phi>$$

e portanto $\widehat{u^a} = v$ em V_x.

Mostremos finalmente que $c_a = (\frac{2\pi}{a})^n$.

Dada $\phi \in C_c^\infty(R^n)$ e $t \in R^n$ temos que

$$c_a \sum_{Z^n} \phi(\frac{2\pi}{a} g+t) = \sum_{Z^n} e^{i<ag,t>} \hat{\phi}(ag)$$

pois transladando $\hat{u}^a$ e $u^{2\pi/a}$ de t

$$<c_a u_t^{\frac{2\pi}{a}}, \phi> = <c_a u^{\frac{2\pi}{a}}, \phi_{-t}> = c_a \sum_{Z^n} \phi_{-t}(\frac{2\pi}{a} g) =$$

$$= c_a \sum_{Z^n} \phi(\frac{2\pi}{a} g+t)$$

e

$$<\hat{u}_t^a, \phi> = <\hat{u}^a, \phi_{-t}> = \sum_{Z^n} (\phi_{-t})^\wedge(ag) =$$

$$= \sum_{Z^n} \int_{R^n} \phi_{-t}(y) e^{-i<ag,y>} dy = \sum_{Z^n} \int_{R^n} \phi(y+t) e^{-i<ag,y>} dy$$

$$= \sum_{Z^n} e^{i<ag,t>} \int_{R^n} \phi(w) e^{-i<ag,w>} dw =$$

$$= \sum_{Z^n} e^{i<ag,t>} \hat{\phi}(ag)$$

Então integrando ambos os membros em $K = [0, \frac{2\pi}{a}] \times \ldots \times [0, \frac{2\pi}{a}]$ temos:

$$c_a \int_K \sum_{Z^n} \phi(\frac{2\pi}{a} g+t) dt = \int_K \sum_{Z^n} e^{i<ag,t>} \hat{\phi}(ag) dt$$

e como os integrandos são séries somáveis em $C^0(R^n)$ então

$$c_a\int_K \sum_{Z^n} \phi(\frac{2\pi}{a}\, g+t)dt = \sum_{Z^n} c_a\int_K \phi(\frac{2\pi}{a}\, g+t)dt =$$

$$= \sum_{Z^n} c_a\int_{K+\frac{2\pi}{a}g} \phi(y)dy = c_a\int_{R^n} \phi(y)dy = c_a\widehat{\phi}(0)$$

e

$$\int_K \sum_{Z^n} e^{i<ag,t>}\widehat{\phi}(ag)dt = \sum_{Z^n} \int_K e^{i<ag,t>}\widehat{\phi}(ag)dt$$

$$= \int_K \widehat{\phi}(0)dt + \sum_{g\neq 0} \int_K e^{i<ag,t>}\widehat{\phi}(ag)dt =$$

$$= (\frac{2\pi}{a})^n\widehat{\phi}(0)$$

pois $\int_K e^{i<ag,t>} dt = 0$ para $g \neq 0$.

Logo concluimos que $c_a\widehat{\phi}(0) = (\frac{2\pi}{a})^n\, \widehat{\phi}(0)$ $\phi \in C_c^\infty(R^n)$. Então tomando $\phi \in C_c^\infty(R^n)$ tal que $\phi(0) \neq 0$ obtemos $c_a = (\frac{2\pi}{a})^n$ e portanto

$$\widehat{u^a} = (\frac{2\pi}{a})^n\, u^{\frac{2\pi}{a}} \quad \text{em } \mathcal{D}'(R^n).$$

Observemos que $\widehat{u^a}$ e $u^{\frac{2\pi}{a}}$ pertencem a $\mathcal{S}'(R^n)$, logo a igualdade $\widehat{u^a} = (\frac{2\pi}{a})^n\, u^{2\pi/a}$ vale em $\mathcal{S}'(R^n)$, assim temos o seguinte resultado.

Corolário: Fórmula da Somatória de Poisson

Dada $\Psi \in S(R^n)$ então

$$\left(\frac{2\pi}{a}\right)^n \sum_{Z^n} \Psi\left(\frac{2\pi}{a}g\right) = \sum_{Z^n} \widehat{\Psi}(ag).$$

Com o teorema acima encerramos os resultados preliminares deste capítulo. Passemos então aos resultados principais começando por definir o que vem a ser uma distribuição 1-periódica em cada variável.

1.5 - Distribuições Periódicas

Definição 1.6

Dizemos que $u \in D'(R^n)$ é 1-periódica em cada variável, ou simplesmente $u \in D'_1(R^n)$, se $u_g = u$, $g \in Z^n$, onde u_g é a transladada de u isto é

$$<u_g,\phi> = <u,\phi_{-g}> = <u,\phi>, \quad \phi \in C_c^\infty(R^n)$$

onde $\phi_{-g}(x) = \phi(x+g)$.

Proposição 1.6

Sejam $u \in D'_1(R^n)$ e $\chi \in U_1$ então

$$\langle u,\Psi\rangle = \sum_{Z^n} \langle u, \chi\Psi_g\rangle, \qquad \Psi \in C_c^\infty(R^n).$$

Demonstração

Observemos inicialmente que dadas $\chi \in U_1$ e $\Psi \in C_c^\infty(R^n)$ temos

$$\Psi = \Psi.1 = \Psi \sum_{Z^n} \chi_{-g} = \sum_{\|g\|<k_1+k_2} \Psi\, \chi_{-g}$$

onde k_1 e k_2 são tais que $S(\Psi) \subset B_{k_1}[0]$ e $S(\chi) \subset B_{k_2}[0]$; pois se $x \in S(\Psi)$ então temos para $\|g\| \geq k_1+k_2$ que $\|g+x\| \geq k_1 + k_2 - k_1 = k_2$ e portanto $x + g \notin S(\chi)$

Logo

$$\Psi = \Psi \sum_{\|g\|<k_1+k_2} \chi_{-g} = \sum_{\|g\|<k_1+k_2} \Psi\, \chi_{-g}$$

Assim dada $\Psi \in C_c^\infty(R^n)$

$$\langle u,\Psi\rangle = \langle u, \sum_{\|g\|<k_1+k_2} \Psi\, \chi_{-g}\rangle =$$

$$= \sum_{\|g\|<k_1+k_2} \langle u,\Psi\chi_{-g}\rangle = \sum_{\|g\|<k_1+k_2} \langle u,(\Psi_g\chi)_{-g}\rangle =$$

$$= \sum_{\|g\|<k_1+k_2} \langle u_g,\Psi_g\chi\rangle = \sum_{\|g\|<k_1+k_2} \langle u,\Psi_g\, \chi\rangle =$$

$$= \sum_{Z^n} \langle u,\chi\, \Psi_g\rangle$$

Teorema 1.11

Se $u \in \mathcal{D}_1'(\mathbb{R}^n)$ então $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e

$\hat{u} = (2\pi)^n \sum_{Z^n} c_g(u)\delta_{2\pi g}$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ com

$c_g(u) = \langle u, \chi e^{-2\pi i\langle x,g\rangle}\rangle = \widehat{u\chi}(2\pi g)$ onde

$\chi \in U_1$.

Demonstração

Temos de mostrar que u se estende a uma distribuição temperada $\tilde{u}$.

Consideremos $\tilde{u}$ definida através da seguinte composição

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{G} & C_c^\infty(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{u} & \mathbb{C} \\ \Psi & \longrightarrow & \sum_{Z^n} \chi\Psi_g & \longrightarrow & \sum_{Z^n} \langle u, \chi\Psi_g\rangle \end{array} \qquad \chi \in U_1$$

Então segue da continuidade de G estabelecida na proposição 1.3 que $\tilde{u} = u\circ G$ é contínua e da proposição 1.6 que $\tilde{u}$ estende u.

Logo decorre da densidade de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ que $\tilde{u}$ é a única extensão de u e assim podemos tomar o mesmo nome para $\tilde{u}$ e u e definirmos

$$<u,\Psi> = \sum_{Z^n} <u,\chi\ \Psi_g> \qquad \Psi \in S(R^n)$$

Dada $\Psi \in S(R^n)$ calcúlemos $<\widehat{u},\Psi>$.

Observemos inicialmente que se $\Psi \in S(R^n)$ então

$$[\Psi e^{-i<.,x>}]^{\wedge}(-g) = \int_{R^n} \Psi(y) e^{-i<y,x>} e^{-i<y,-g>} dy =$$

$$= \int_{R^n} \Psi(y)\ e^{-i<y,x-g>} dy =$$

$$= \widehat{\Psi}(x-g)$$

Logo se $\chi \in U_1$ e usando a Fórmula da Somatória de Poisson temos:

$$<\widehat{u},\Psi> = <u,\widehat{\Psi}> = <u,\chi \sum_{Z^n} \widehat{\Psi}_g> =$$

$$= <u,\chi(x) \sum_{Z^n} [\Psi(.)e^{-i<.,x>}]^{\wedge}(-g)>$$

$$= <u,\chi(x) \sum_{Z^n} [\Psi(.)e^{-i<.,x>}]^{\wedge}(g)> =$$

$$= <u,\chi(x)(2\pi)^n \sum_{Z^n} [\Psi(.)e^{-i<.,x>}](2\pi g)> =$$

$$= <u,\chi(x)(2\pi)^n \sum_{Z^n} \Psi(2\pi g)e^{-i<2\pi g,x>}> =$$

$$= (2\pi)^n \langle u, \sum_{Z^n} \chi(x) e^{-2\pi i \langle x,g \rangle} \Psi(2\pi g) \rangle =$$

$$= (2\pi)^n \sum_{Z^n} \langle u, \chi(x) e^{-2\pi i \langle x,g \rangle} \Psi(2\pi g) \rangle$$

$$= (2\pi)^n \sum_{Z^n} \langle u, \chi(x) e^{-2\pi i \langle x,g \rangle} \rangle \Psi(2\pi g) =$$

$$= (2\pi)^n \sum_{Z^n} \langle u, \chi\, e^{-2\pi i \langle \cdot ,g \rangle} \rangle \langle \delta_{2\pi g}, \psi \rangle =$$

$$= (2\pi)^n \sum_{Z^n} \langle c_g(u) \delta_{2\pi g}, \Psi \rangle$$

$$= \langle (2\pi)^n \sum_{Z^n} c_g(u) \delta_{2\pi g}, \Psi \rangle \quad \text{com}$$

$$c_g(u) = \langle u, \chi e^{-2\pi i \langle x,g \rangle} \rangle$$

portanto $\widehat{u} = (2\pi)^n \sum_{Z^n} c_g(u) \delta_{2\pi g}$ com $c_g(u) = \langle u, \chi\, e^{-2\pi i \langle x,g \rangle} \rangle$

Observemos que $c_g(u)$ independe de χ pois: dada $\theta \in U_1$, temos, utilizando o que demonstramos acima, que:

$$\widehat{u} = (2\pi)^n \sum_{Z^n} \tilde{c}_g(u) \delta_{2\pi g}, \quad \tilde{c}_g(u) = \langle u, \theta\, e^{-2\pi i \langle x,g \rangle} \rangle$$

Logo $\sum_{Z^n} (\tilde{c}_g(u) - \tilde{c}_g(u)) \delta_{2\pi g} = 0$ em $S'(R^n)$

Dado $g' \in Z^n$ consideremos $\phi \in C_c^\infty(R^n)$, $\phi \equiv 1$ numa vizinhança de $2\pi g'$ tal que $S(\phi) \subset B_1[2\pi g']$.

Então

$$0 = < \sum_{Z^n} (\tilde{c}_g(u) - c_g(u))\delta_{2\pi g}, \phi > =$$

$$= \sum_{Z^n} (\tilde{c}_g(u) - c_g(u))\phi(2\pi g) = \tilde{c}_{g'}(u) - c_{g'}(u)$$

Finalmente recordemos que se $\chi \in C_c^\infty(R^n) \hookrightarrow E'(R^n)$ então $u\chi \in E'(R^n)$ e assim

$$c_g(u) = <u, \chi\, e^{-2\pi i<x,g>}> = <u\,\chi,\, e^{-2\pi i<x,g>}> =$$

$$= \widehat{u\chi}(2\pi g).$$

Teorema 1.12

Dada $u \in D'(R^n)$ então:
se $u \in D_1'(R^n)$ temos que $u = \sum_{Z^n} c_g(u) e^{2\pi i<x,g>}$ em $D'(R^n)$ com $c_g(u) = <u, \chi\, e^{-2\pi i<x,g>}> = \widehat{u\chi}(2\pi g)$, $\chi \in U_1$

e reciprocamente se

$$u = \sum_{Z^n} A_g\, e^{2\pi i<x,g>} \text{ em } D'(R^n) \text{ então}$$

$$u \in D_1'(R^n) \text{ e } A_g = c_g(u), \quad g \in Z^n.$$

Demonstração

Se $u \in \mathcal{D}_1'(R^n)$ segue do teorema anterior, da igualdade $\hat{\hat{u}} = (2\pi)^n \check{u}$ e da continuidade do $\hat{}$ que

$$(2\pi)^n \check{u} = \hat{\hat{u}} = (2\pi)^n \sum_{Z^n} c_g(u)\ \hat{\delta}_{2\pi g}$$

Logo

$$\check{u} = \sum_{Z^n} c_g(u) e^{-2\pi i<x,g>} \quad \text{em} \quad \mathcal{S}'(R^n);$$

por outro lado a mudança de variáveis determinada por $\check{}$ é uma aplicação contínua em $\mathcal{S}'(R^n)$ e portanto

$$u = \check{\check{u}} = \sum_{Z^n} c_g(u) e^{2\pi i<x,g>} \quad \text{em} \quad \mathcal{S}'(R^n) \quad \text{com}$$

$$c_g(u) = <u, \chi\ e^{-2\pi i<x,g>}> = \widehat{u\chi}(2\pi g), \qquad \chi \in U_1.$$

Desde que $\mathcal{S}'(R^n) \subset \mathcal{D}'(R^n)$ então a primeira parte do teorema está demonstrada. Reciprocamente; usando o fato de que a translação é contínua em $\mathcal{D}'(R^n)$ temos, dado $\tilde{g} \in Z^n$ que

$$u_{\tilde{g}} = \sum_{Z^n} A_g\ e^{2\pi i<x-\tilde{g},g>} = \sum_{Z^n} A_g\ e^{2\pi i<x,g>} = u \qquad \text{e}$$

portanto $u = \sum_{Z^n} A_g\ e^{2\pi i<x,g>} \in \mathcal{D}_1'(R^n)$ e usando a ida deste teorema temos que

$$u = \sum_{Z^n} c_g(u)\ e^{2\pi i<x,g>} \quad \text{com}$$

$$c_g(u) = <u, \chi e^{-2\pi i<x,g>}> , \qquad \chi \in U_1$$

Como

$$c_g(u) = <u, \chi\ e^{-2\pi i<x,g>}> =$$

$$= \sum_{g'} A_{g'} <e^{2\pi i<x,g'>}, \chi e^{-2\pi i<x,g>}> =$$

$$= \sum_{Z^n} A_{g'} <e^{-2\pi i<x,g>},\ \chi\ e^{-2\pi i<x,-g'>}> =$$

$$= \sum_{Z^n} A_{g'}\ c_{-g'}(e^{2\pi i<x,-g>}) = A_g \qquad g \in Z^n$$

pois $e^{2\pi i<x,-g>}$ já se encontra em série de Fourier e o único coeficiente não nulo é igual a 1 , então $u \in D_1'(R^n)$ e $A_g = c_g(u)$, $g \in Z^n$.

O resultado acima estende para distribuições o conceito de série de Fourier, já conhecido para funções conforme estabelece o seguinte teorema.

Teorema 1.13

Se $k \geq 0$ e $u \in C_1^k(R^n)$ então

(1) $c_g(T_u) = c_g(u) = \widehat{u\chi}(2\pi g)$ onde $T_u \in \mathcal{D}_1'(R^n)$

é a distribuição associada a $u \in C_1^k(R^n)$, $\chi \in U_1$ e

$$c_g(T_u) = \langle T_u, \chi\, e^{-2\pi i\langle x,g\rangle}\rangle$$

(2) $\exists\, M_0 > 0$ tal que $|c_g(u)| \leq M_0 \quad \forall\, g \in \mathbb{Z}^n$

(3) Se $k \geq 1$ então para cada $j = 1,2,\ldots, n$

$$g_j\, c_g(u) = \frac{1}{2\pi i}\, c_g(\partial_j u)$$

(4) $c_g(u) = 0(\|g\|^{-k})$

(5) Se $k > n$ então a série $\sum_{\mathbb{Z}^n} c_g(u)\, e^{2\pi i\langle x,g\rangle}$

é uniformemente somável em R^n.

Demonstração

(1) Consideremos

$$R^n = \bigcup_{\ell\in \mathbb{Z}^n} I+\ell,\ I = \{x\in R^n: 0 \leq x_j \leq 1,\ j = 1\ldots n\}$$

$$c_g(T_u) = \langle T_u, \chi\, e^{-2\pi i\langle x,g\rangle}\rangle =$$

$$= \int_{R^n} u(x)\chi(x)e^{-2\pi i\langle x,g\rangle}dx =$$

$$= \int_{\bigcup_{Z^n} I+\ell} u(x)\chi(x)e^{-2\pi i<x,g>}dx =$$

$$= \sum_{Z^n} \int_{I+\ell} u(x)\chi(x)e^{-2\pi i<x,g>}dx$$

$$= \sum_{Z^n} \int_{I} u(y+\ell)\chi(y+\ell)e^{-2\pi i<y+\ell,g>}dy$$

$$= \sum_{Z^n} \int_{I} u(y)\ \chi(y+\ell)\ e^{-2\pi i<y,g>}dy$$

$$= \int_{I} u(y)e^{-2\pi i<y,g>} \sum_{Z^n} \chi(y+\ell)dy =$$

$$= \int_{I} u(y)e^{-2\pi i<y,g>}dy$$

$$= c_g(u)$$

portanto $c_g(T_u) = c_g(u) \quad \forall\ g \in Z^n.$

Além disso como

$$c_g(T_u) = \int_{R^n} u(x)\chi(x)e^{-2\pi i<x,g>} =$$

$$= \int_{R^n} (u\chi)(x)e^{-i<x,2\pi g>}dx = \widehat{u\chi}(2\pi g) \qquad \forall\ g \in Z^n$$

então $c_g(T_u) = c_g(u) = \widehat{u\chi}(2\pi g) \quad \forall\ g \in Z^n$

(2) Como $c_g(T_u) = \int_I u(x)e^{-2\pi i<x,g>}dx$ então segue imediatamente que

$$|c_g(u)| \leq M_0 \quad \text{com} \quad M_0 = \sup_I |u(x)|$$

(3) $g_j \; c_g(u) = g_j \int_I u(x)e^{-2\pi i<x,g>}dx =$

$$= g_j \int_0^1 \ldots \int_0^1 u(x)e^{-2\pi i<x,g>}dx_1 \ldots dx_n.$$

Então fixado $j \in \{1,2\ldots n\}$ temos, integrando por partes, que:

$$g_j \int_0^1 u(x)e^{-2\pi i<x,g>}\,dx_j = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \partial_j u(x)e^{-2\pi i<x,g>}dx_j$$

Logo dado $g \in Z^n$ temos:

$$g_j \; c_g(u) = \int_0^1 \ldots g_j \int_0^1 u(x)e^{-2\pi i<x,g>}dx_j \; dx_1 \ldots dx_{j-1} \; dx_{j+1} \ldots dx_n$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \ldots \int_0^1 \partial_j u(x)e^{-2\pi i<x,g>}dx_j dx \ldots dx_{j-1} dx_{j+1} \ldots dx_n$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \ldots \int_0^1 \partial_j u(x)e^{-2\pi i<x,g>}dx_1 \ldots dx_n$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_I \partial_j u(x)e^{-2\pi i<x,g>}dx = \frac{1}{2\pi i}\, c_g\,(\partial_j u).$$

(4) Segue de. (2) e (3) que

$\exists\, M > 0$ tal que $\|g\|^k \, |c_g(u)| \leq (1+\|g\|)^k \, |c_g(u)| \leq M$

para qualquer $g \in Z^n$

Logo $\exists\, M > 0$ tal que $\|g\|^k \, |c_g(u)| \leq M \quad \forall\, g \in Z^n$ portanto $c_g(u) = O(\|g\|^{-k})$

(5) Usando a desigualdade obtida em (4) segue que:

$\exists\, M > 0$ tal que

$$|c_g(u) \, e^{-2\pi i<x,g>}| = |c_g(u)| \leq \frac{M}{(1+\|g\|)^k} \qquad g \in Z^n$$

Logo se $k > n$ temos pelo teorema 1.3 que $\sum_{Z^n} c_g(u) e^{2\pi i<x,g>}$ é uniformemente somável em R^n.

Os teoremas seguintes nos fornecem a caracterização de um elemento de $D_1'(R^n)$ em termos do crescimento da família de seus coeficientes de Fourier.

Teorema 1.14

Dada $u \in D_1'(R^n)$ então $u \in C_1^\infty(R^n)$ se e somente se $\{c_g(u)\} \in s(Z^n)$.

Demonstração

Suponhamos $u \in \mathcal{D}_1'(R^n)$ e $u \in C_1^\infty(R^n)$.

Pelo teorema 13.4 temos que

$$c_g(u) = O(\|g\|^{-k}) \qquad k \in Z.$$

Logo usando o teorema 1.7.5 temos que $\{c_g(u)\} \in s(Z^n)$.

Reciprocamente suponhamos $u \in \mathcal{D}_1'(R^n)$ e $\{c_g(u)\} \in s(Z^n)$.

Tomando a série de Fourier de u temos que

$$u = \sum_{Z^n} c_g(u) e^{2\pi i<x,g>} \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(R^n)$$

Pelo Teorema 1.8 temos que

$$v = \sum_{Z^n} c_g(u) e^{2\pi i<x,g>} \quad \text{em} \quad C_1^\infty(R^n)$$

Como $C_1^\infty(R^n)$ está contido continuamente em $\mathcal{D}'(R^n)$ então $v = \sum_{Z^n} c_g(u) e^{2\pi i<x,g>}$ em $\mathcal{D}'(R^n)$.

Logo pela unicidade da soma de uma série temos que $u = v$ em $\mathcal{D}'(R^n)$

portanto $u = \sum_{Z^n} c_g(u) e^{2\pi i<x,g>} \in C_1^\infty(R^n) \hookrightarrow \mathcal{D}'(R^n)$.

Observemos que o teorema acima nos possibilita escrever uma versão análoga à do teorema 1.7 em relação a família dos coeficientes de Fourier de uma função $u \varepsilon C_1^\infty(R^n)$.

Teorema 1.15

Dada $T: Z^n \to C$ então $\{T(g)\}_{Z^n}$ é família dos coeficientes de Fourier de alguma $u \varepsilon D_1'(R^n)$ se e somente se a família $\{T(g)\} \varepsilon s'(Z^n)$.

Demonstração

Suponhamos por absurdo que $\{T(g)\} \notin s'(Z^n)$
Logo dado $m \varepsilon N$ podemos tomar

$$\|g_1\| < \|g_2\| < \ldots < \|g_m\| < \ldots$$

satisfazendo

$$|T(g_m)| > m(1+\|g_m\|)^m.$$

Consideremos a família $\{A_g\}_{Z^n}$, definida a partir da escolha acima, da seguinte maneira:

$$A_{g_m} = (1+\|g_m\|)^{-m}$$

$$A_g = 0 \text{ se } g \notin \{g_1, g_2, \ldots, g_m, \ldots\}$$

e observemos que $\{A_g\} \in s(Z^n)$ pois dado $k \in Z$

$$\sup_{g}(1+\|g\|)^k |A_g| = \sup_{g_m}(1+\|g_m\|)^k |A_{g_m}| =$$

$$= \sup_{g_m}(1+\|g_m\|)^{k-m} = \max_{1\leq m\leq k}(1+\|g_m\|)^{k-m} = M_k.$$

isto é dado $k \in Z$, existe $M_k = \max\limits_{1\leq m\leq k}(1+\|g_m\|)^{k-m}$ tal que

$$(1+\|g\|)^k |A_g| \leq M_k \qquad g \in Z^n$$

Então pelo teorema 1.8 $\theta(x) = \sum_{Z^n} A_g e^{2\pi i<x,g>}$ é um elemento de $C_1^\infty(R^n)$ e pela unicidade da representação de $\theta(x)$ em série de Fourier

$$A_g = c_g(\theta) \qquad g \in Z^n.$$

Entretanto se considerarmos $\phi = \chi.\theta$, $\chi \in U_1$, teremos

$$<u,\phi> = <u,\chi.\theta> = \sum_{Z^n} c_g(u) <e^{2\pi i<x,g>},\chi.\theta> =$$

$$= \sum_{Z^n} c_g(u) <\theta,\chi e^{2\pi i<x,g>}> = \sum_{Z^n} c_g(u).c_{-g}(\theta).$$

e como

$$\sum_{Z^n}|c_g(u).c_{-g}(\theta)| = \sum_{Z^n}|T(g)||A_{-g}| \geq$$

$$\geq \sum_{m=1}^{\infty} m(1+\|g_m\|)^{m-m} = \sum_{m=1}^{\infty} m = +\infty \qquad \text{então}$$

$<u,\phi> = \sum_{Z^n} c_g(u)\, c_{-g}(\theta)$ não é somável,

absurdo.

Suponhamos que $\{T(g)\} \in s'(Z^n)$ isto é existe

$k \in Z_+$ tal que $|T(g)| \leq k(1+\|g\|)^k \quad \forall\, g \in Z^n.$

Dada $\phi \in C_c^\infty(R^n)$ consideremos a série

$$\sum_{Z^n} T(g)\ <e^{2\pi i<x,g>}, \phi>$$

Efetuando a demonstração análoga a do Teorema 1.13.4 temos que:

$\forall\, k \in Z, \exists\, C=C(k)$ tal que

$$(1+\|g\|)^{k+(n+1)}\, |<e^{2\pi i<x,g>}, \phi>| \leq C \quad \forall\, g \in Z^n.$$

Logo existe $\tilde{k} \in Z$ tal que

$$|T(g)<e^{2\pi i<x,g>}, \phi>| = |T(g)|\,|<e^{2\pi i<x,g>}, \phi>| \leq$$

$$\leq k(1+\|g\|)^k |\, e^{2\pi i<x,g>}, \phi>| \leq$$

$$\leq \frac{\tilde{k}}{(1+\|g\|)^{n+1}}, \qquad g \in Z^n$$

Então segue do teorema 1.3 que $\sum_{Z^n} T(g)\ e^{2\pi i<x,g>}$

é somável em $\mathcal{D}'(R^n)$ e pelo teorema 1.12

$$u = \sum_{Z^n} T(g)e^{2\pi i<x,g>} \in \mathcal{D}_1'(R^n) \quad \text{e}$$

$$c_g(u) = T(g), \qquad g \in Z^n.$$

Lema

Se $u \in \mathcal{D}_1'(R^n)$ então dados $\alpha \in Z_+^n$, $|\alpha| \neq 0$ e $\chi \in U_1$ temos

$$<u, e^{-2\pi i<.,g>} D^\alpha \chi> = 0$$

Demonstração

Tomando $\rho \in U_1$, e usando a proposição 1.6 temos que:

$$<u, e^{-2\pi i<.,g>} D^\alpha \chi> = \sum_{g'} <u, \rho(e^{-2\pi i<.,g>} D^\alpha \chi)_{g'}>$$

$$= <u, \sum_{g'} \rho(e^{-2\pi i<.,g>} D^\alpha \chi)_{g'}>.$$

Como

$$\sum_{g'} \rho(x)(e^{-2\pi i<x,g>}D^{\alpha}\chi)_{g'} =$$

$$= \sum_{g'} \rho(x)e^{-2\pi i<x-g',g>}D^{\alpha}\chi_{g'}(x) =$$

$$= e^{-2\pi i<x,g>}\rho(x)(\sum_{g'} D^{\alpha}\chi_{g'}(x)) =$$

$$= e^{-2\pi i<x,g>}\rho(x)D^{\alpha}(\sum_{g'} \chi_{g'}(x)) = 0$$

então $\quad <u,e^{-2\pi i<.,g>}D^{\alpha}\chi> = 0$

Teorema 1.16

Se $u \in \mathcal{D}_1'(R^n)$ então dado $\alpha \in \mathbb{N}^n$ temos que

$$c_g(D^{\alpha}u) = (2\pi g)^{\alpha}c_g(u), \qquad g \in \mathbb{Z}^n.$$

Demonstração

$$c_g(D^{\alpha}u) = <D^{\alpha}u,\chi\ e^{-2\pi i<.,g>}> =$$

$$(-1)^{|\alpha|}<u,D^{\alpha}(\chi\ e^{-2\pi i<.,g>})> =$$

$$= (-1)^{|\alpha|}<u, \sum_{\beta\leq\alpha} C(\alpha,\beta)D^{\alpha-\beta}\chi.D^{\beta}e^{-2\pi i<.,g>}>$$

$$=<u,(2\pi g)^{\alpha}\chi\ e^{-2\pi i<.,g>}> +$$

$$+(-1)^{|\alpha|}\sum_{\beta<\alpha} C(\alpha,\beta)<u,D^{\alpha-\beta}\chi.D^{\beta}e^{-2\pi i<.,g>}>$$

Assim do Lema anterior temos que a segunda expressão do segundo membro se anula; logo

$$c_g(D^\alpha u) = (2\pi g)^\alpha <u, \chi\, e^{-2\pi i<.,g>}> = (2\pi g)^\alpha\, c_g(u)$$

Corolário

Se $u \in \mathcal{D}'_1(R^n)$ e $P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$

então

$$c_g(Pu) = P(2\pi g) c_g(u).$$

Finalizemos este capítulo com algumas observações sobre o espaço das distribuições periódicas.

Existem outras maneiras de estudar estes objetos. Vamos dar algumas idéias de como se pode passar de uma teoria para outra.

Observação 1:

O espaço $\mathcal{D}'_1(R^n)$ é linearmente homeomorfo, isto é, é isomorfo algébrica e topologicamente, ao dual de $C_1^\infty(R^n)$. Isto decorre de vários resultados que foram demonstrados e utilizados neste capítulo conforme veremos a seguir.

Consideremos $C_1^\infty(R^n)$ munido da topologia em que a convergência de sequências seja dada por: Uma sequência (θ_j) converge para zero em $C_1^\infty(R^n)$ se dado $\alpha \in Z_+^n$ a sequência $(\partial^\alpha \theta_j)$ converge uniformemente, em R^n, para zero.

Então um funcional linear $\tilde{u}$ definido em $C_1^\infty(R^n)$ é contínuo, se dada uma sequência (θ_j) convergente para zero em $C_1^\infty(R^n)$ implicar que a sequência numérica $(<\tilde{u},\theta_j>)$ converge para zero.

Dado $u \in D_1'(R^n)$ definamos $\tilde{u}$ por

$$<\tilde{u},\theta> = <u,\chi\theta> \quad \theta \in C_1^\infty(R^n), \quad \chi \in U_1$$

O funcional $\tilde{u}$ está bem definido pois $\chi\theta \in C_c^\infty(R^n)$, é linear pois u é linear e além disso independe da escolha de $\chi \in U_1$. De fato:

Dada $\Phi \in U_1$

$$<u,\Phi\theta> = <u,(\Sigma_{Z^n} \chi_{-g})\Phi\theta> = <u,\Sigma_{Z^n}(\chi_{-g}\Phi\theta)>$$

$$= <u, \Sigma_{Z^n}(\chi \; \Phi_g \; \theta_g)_{-g}> = <u_g, \Sigma_{Z^n} \chi\Phi_g \; \theta> =$$

$$= <u,\chi \; \theta \; \Sigma_{Z^n} \Phi_g> = <u,\chi \; \theta>.$$

Temos ainda para cada $\phi \in C_c^\infty(R^n)$ que se a sequência (θ_j) converge para zero em $C_1^\infty(R^n)$ então a sequência $(\phi\theta_j)$ converge para zero em $C_c^\infty(R^n)$ pois:

$S(\phi\theta_j) \subset S(\phi)$ para qualquer $j \in Z_+$ e dado

$\alpha \in Z^n_+$ a sequência $(\partial^\alpha(\phi.\theta_j))$ converge uniformemente para zero.

Logo $\tilde{u}$ é um funcional linear contínuo em $C^\infty_1(R^n)$.

Reciprocamente, dado $\tilde{u}$ um funcional linear contínuo em $C^\infty_1(R^n)$ definamos u em cada $\phi \in C^\infty_c(R^n)$ por:

$$<u,\phi> = <\tilde{u},\theta>, \qquad \theta = \sum_{Z^n} \phi_g.$$

O funcional u está bem definido pois $\theta = \sum_{Z^n} \phi_g \in C^\infty_1(R^n)$, é 1-periódico em cada variável pois dado $g' \in Z^n$.

$$<u_{g'},\phi> = <u,\phi_{-g'}> = <\tilde{u},\theta>$$

e sua linearidade decorre da linearidade de $\tilde{u}$.

Temos ainda que, dada uma sequência (ϕ_j) em $C^\infty_c(R^n)$ convergindo para zero então a sequência (θ_j), $\theta_j = \sum_{g\in Z^n} (\phi_j)_g$ converge para zero em $C^\infty_1(R^n)$. De fato: dado $\ell_1 > 1/2$ e tomando ℓ_2 tal que $B_{\ell_2}[0] \supset S(\phi_j)$, $j\in Z_+$ temos que $\theta_j = \sum_{||g||\leq \ell_1+\ell_2} (\phi_j)_g$ em $B_{\ell_1}(0)$.

Logo dado $\alpha \in Z^n_+$ a sequência $(\partial^\alpha\theta_j)$, $\theta_j = \sum_{||g||\leq \ell_1+\ell_2} (\phi_j)_g$ converge uniformemente para zero em $B_{\ell_1}(0)$.

Segue da periodicidade das funções θ_j que a sequência (θ_j) converge para zero em $C_1^\infty(R^n)$.

Então decorre do que demonstramos acima e da continuidade de $\tilde{u}$, que o funcional u, definido em $C_c^\infty(R^n)$, linear e 1-periódico em cada variável é contínuo.

Definamos então

$$T: \mathcal{D}_1'(R^n) \to (C_1^\infty(R^n))' \quad \text{e} \quad H: (C_1^\infty(R^n))' \to \mathcal{D}_1'(R^n)$$

$$u \to T(u) = \tilde{u} \qquad\qquad \tilde{u} \to H(\tilde{u}) = u$$

Os operadores T e H estão bem definidos, conforme o que acabamos de demonstrar acima e são evidentemente lineares e contínuas.

Mostremos então que $TH = HT = I$. Dada $\phi \in C_c^\infty(R^n)$.

$$<(HT)(u),\phi> = <T(u), \sum_{Z^n} \phi_g> = <u,\chi \sum_{Z^n} \phi_g> =$$

$$= <u, \sum_{Z^n} (\phi\chi_{-g})_g> = <u_{-g},\phi \sum_{Z^n} \chi_{-g}> = <u,\phi>.$$

Dada $\theta \in C_1^\infty(R^n)$

$$<(TH)(\tilde{u}),\theta> = <H(\tilde{u}),\chi\theta> = <\tilde{u},\sum_{Z^n} \chi_g\theta_g> =$$

$$= <\tilde{u},\theta \sum_{Z^n} \chi_g> = <\tilde{u},\theta>.$$

Assim $\mathcal{D}_1'(R^n)$ e $(C_1^\infty(R^n))'$ são linearmente homeomorfos.

Observação 2

Um outro fato que pode ser destacado é que valem em $(C_1^\infty(R^n))'$ as propriedades esperadas como por exemplo: se, dada $u \in (C_1^\infty(R^n))'$, definimos

$$<\partial_j\tilde{u},\theta> = (-1)<\tilde{u},\partial_j\theta>, \qquad \theta \in C_1^\infty(R^n)$$

então é possível mostrar que esta definição coincide com a definição usual de derivada de distribuição, isto é, se $u \in \mathcal{D}_1'(R^n)$ então $\partial_j T(u) = T(\partial_j u)$ e se $\tilde{u} \in (C_1^\infty(R^n))'$ então $\partial_j H(\tilde{u}) = H(\partial_j\tilde{u})$.

Observação 3

Podemos ainda estabelecer um homeomorfismo linear entre o espaço dos funcionais lineares contínuos em $C_1^\infty(R^n)$ e o espaço $\mathcal{D}'(T^n)$, bastando para isto ter em conta que os espaços $C_1^\infty(R^n)$ e $C^\infty(T^n)$ são identificados de modo natural.

Assim $\mathcal{D}_1'(R^n) \cong \mathcal{D}'(T^n) \cong (C_1^\infty(R^n))'$.

Um pequeno resumo das distribuições periódicas, como foi desenvolvido neste capítulo, pode ser encontrada em [6] ; enquanto que o estudo das distribuições periódicas, como funcionais lineares contínuos em $C_1^\infty(R^n)$, pode ser encontrado por exemplo em [5] e [7] e como elementos de $\mathcal{D}'(T^n)$ em [8].

Finalmente observemos que os resultados obtidos neste capítulo se estendem de modo natural às distribuições que são a-periódicas em cada variável, $0 \neq a \in R$. A título de exemplificação, a série de Fourier de u como elemento de $\mathcal{D}'_a(R^n)$ seria dada por:

$$\sum_{g \in \mathbb{Z}^n} c_g(u)\, e^{\frac{2\pi i}{a}<x,g>} \qquad \text{com}$$

$$c_g(u) = a^{-n} <u, \chi\, e^{-\frac{2\pi i}{a}<x,g>}> =$$

$$= a^{-n}\, \widehat{u\chi}\left(\frac{2\pi}{a} g\right)$$

onde $\chi \in U_a$.

CAPÍTULO 2

HIPOELITICIDADE PERIÓDICA E NÚMEROS DE LIOUVILLE

Neste capítulo vamos aplicar os resultados do Capítulo 1 ao estudo da regularidade das Soluções das Equações Diferenciais Parciais. Os resultados principais são o Teorema 2.1 que caracteriza um operador (PH), ver Definição 2.1, em termos do crescimento, no infinito, do polinômio $P(g)$, $g \in Z^n$, associado ao operador P e o Teorema 2.2 que caracteriza a Hipoeliticidade Periódica dos Operadores de Primeira Ordem que possuem Coeficientes Constantes, utilizando os números de Liouville, ver Definição 2.2.

Seja P um operador diferencial parcial com coeficientes constantes

$$P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha D^\alpha$$

onde $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} . D_2^{\alpha_2} \ldots D_n^{\alpha_n}$, $D_j^{\alpha_j} = (\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j})^{\alpha_j}$,

Definição 2.1

Dizemos que P é Periodicamente Hipoelítico quando:

(PH) Dada $f \in C_1^\infty(R^n)$ e $Pu = f$ com $u \in D_1'(R^n)$ então $u \in C_1^\infty(R^n)$.

Teorema 2.1

P é (PH) se e somente se existem $L,M,C \in R_+$ tais que:

$$\text{(LMC)} \qquad |P(2\pi g)| \geq \frac{M}{\|2\pi g\|^M} \qquad \|g\| \geq C, \; g \in Z^n.$$

Demonstração

(=>) Suponhamos por absurdo que:

Dados $L,M,C \in R_+$ exista $g \in Z^n$ com $\|g\|$ arbitrariamente grande tal que:

$$|P(2\pi g)| < \frac{L}{\|2\pi g\|^M}$$

Logo tomando $L = 1$, $M = j$ vemos que existe uma sequência $(g_j)_N \subset Z^n$ tal que $\|g_j\| \to \infty$ quando $j \to \infty$ e

$$|P(2\pi g_j)| < \frac{1}{\|2\pi g_j\|}$$

Consideremos então $\{T_g\}_{Z^n}$ a família de números definida a partir da sequência $(g_j)_N$ e dada por

$$T_g = \begin{cases} 1, & g \in \{g_1, g_2, \ldots\} \\ 0, & g \notin \{g_1, g_2, \ldots\} \end{cases}$$

Logo a família $\{T_g\}_{Z^n} \in s'(Z^n)$ e então pelo teorema 1.15 existe $u \in D_1'(R^n)$ tal que $c_g(u) = T_g$, $g \in Z^n$, entretanto, $\{c_g(u)\}_{Z^n} = \{0,1\}$ assim temos que $\{c_g(u)\}_{Z^n} \notin s(Z^n)$ e assim pelo teorema 1.14 segue que $u \notin C_1^\infty(R^n)$.

Decorre do corolário do teorema 1.16 e da definição dos coeficientes de Fourier da distribuição periódica u que $Pu \in C_1^\infty(R^n)$, pois dado $k \in Z$

$$\sup_g (1+\|g\|)^k |c_g(Pu)| = \sup_g (1+\|g\|)^k |P(2\pi g)| |c_g(u)|$$

$$= \sup_{g_j} (1+\|g_j\|)^k |P(2\pi g_j)| < \sup_{g_j} \frac{(1+\|g_j\|)^k}{\|2\pi g_j\|^j} < M_k$$

onde $M_k = \sup\limits_{g_j} \|g_j\|^{k-j}$.

Assim encontramos $u \in D_1'(R^n)$ tal que $Pu \in C_1^\infty(R^n)$ e no entanto $u \notin C_1^\infty(R^n)$ o que contradiz (PH).

Reciprocamente se vale (LMC) então temos que $P(g) \neq 0$ para $\|g\|$ suficientemente grande e

$$\frac{\|2\pi g\|^M}{L} \geq \frac{1}{|P(2\pi g)|}$$

Mostremos então que: dada $u \in D_1'(R^n)$ satisfazendo $Pu \in C_1^\infty(R^n)$ então $u \in C_1^\infty(R^n)$.

Dados $k \in Z$ e $\|g\|$ suficientemente grande, temos pelo corolário do teorema 1.16 que:

$$(1+\|g\|)^k \; |c_g(u)| = (1+\|g\|)^k \; \frac{|c_g(Pu)|}{|P(2\pi g)|} \leq$$

$$\leq \frac{(2\pi)^M}{L} (1+\|g\|)^k \|g\|^M \; |c_g(Pu)| < \frac{(2\pi)^M}{L} (1+\|g\|)^{k+M} |c_g(Pu)|$$

Logo como $\{c_g(Pu)\} \in s(Z^n)$ então $\{c_g(u)\} \in s(Z^n)$ é consequentemente pelo teorema 1.14 $u \in C_1^\infty(R^n)$.

Observemos que o teorema acima continua válido se tomarmos $M \in R$. De fato: se $M < 0$ basta tomarmos $\tilde{C} = \max\{1, C\}$ pois

$$\frac{L}{\|2\pi g\|^M} = L\|2\pi g\|^{|M|} \geq \frac{L}{\|2\pi g\|} \quad \text{para} \quad \|g\| \geq \tilde{C}$$

Em particular se P é um operador elítico de ordem m então (LMC) vale com $M = -m$ como nos demonstra o seguinte lema.

Lema

Se P é um operador elítico de ordem m então existem $d_1, d_2 \in R_+$ tais que

$$|P(\xi)| \geq d_2 \|\xi\|^m \quad \text{para } \|\xi\| \geq d_1$$

Demonstração

Dados

$$P = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D^\alpha, \quad a_\alpha \in C, \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}, D_j^{\alpha_j} = \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^{\alpha_j}$$

e $\xi \in R^n$, observemos que:

se $c_0 = \min\limits_{\|\xi\|=1} |P_m(\xi)|$, $P_m(\xi) = \sum\limits_{|\alpha|=m} a_\alpha \xi^\alpha$ então:

$$|P_m(\xi)| \geq c_0 \|\xi\|^m \qquad \text{pois}$$

$$\frac{1}{\|\xi\|^m} |P_m(\xi)| = \left|P_m\left(\frac{\xi}{\|\xi\|}\right)\right| \geq c_0, \quad \xi \neq 0;$$

se $\|\xi\| \geq 1$, então existe $c_1 > 0$ tal que

$$|P(\xi) - P_m(\xi)| \leq c_1 \|\xi\|^{m-1}.$$

De fato

$$|P(\xi)-P_m(\xi)| = \left|\sum_{|\alpha|\leq m-1} a_\alpha \xi^\alpha\right| \leq \sum_{|\alpha|\leq m-1} |a_\alpha| \, \|\xi\|^{|\alpha|} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{|\alpha|\leq m-1} |a_\alpha|\right) \|\xi\|^{m-1} = c_1 \|\xi\|^{m-1}.$$

Seja $d_1 = \max\{1, \frac{2c_1}{c_0}\}$ onde $c_0 > 0$. Então para $\|\xi\| > d_1$ temos

$$|P(\xi)| = |P(\xi)-P_m(\xi) + P_m(\xi)| \geq$$

$$\geq \|P_m(\xi)| - |P(\xi)-P_m(\xi)|| \geq |P_m(\xi)| -$$

$$- |P(\xi) - P_m(\xi)| \geq c_0 \|\xi\|^m - c_1\|\xi\|^{m-1} \geq$$

$$\geq c_0 \|\xi\|^m - \frac{c_0}{2} \|\xi\|^m = \frac{c_0}{2} \|\xi\|^m = d_2\|\xi\|^m .$$

Corolário

Se P é elítico de ordem m então P é Periodicamente Hipoelítico.

Demonstração

Se P é elítico de ordem m então do lema anterior existem $d_1, d_2 \in R_+$ tal que

$$|P(\xi)| \geq d_2 \|\xi\|^m \qquad \|\xi\| \geq d_1 , \qquad \xi \in R^n$$

Basta tomarmos $L = d_2$, $M = 1$ e $C = \frac{d_1}{2\pi}$, para obtermos $|P(2\pi g)| \geq d_2 \|2\pi g\|^m \geq \dfrac{d_2}{\|2\pi g\|} = \dfrac{L}{\|2\pi g\|^M}$ quando,

$\|g\| \geq C \quad g \in Z^n$. O resultado segue então do teorema 3.1.

Seja $P = D_1 - cD_2$, $c = a + ib$.

Se $b \neq 0$ temos que P é elítico de ordem 1 pois para $\xi \in R^2$.

$$P(\xi) = \xi_1 + c\xi_2 = (\xi_1 - a\xi_2) + ib\xi_2 = 0 \iff$$

$$\iff \xi_1 = \xi_2 = 0$$

logo pelo Corolário do teorema anterior o operador P é Periodicamente Hipoelítico.

Se $b = 0$ e $0 \neq a \in Q$ então P não satisfaz (LMC).

De fato: dados $a = \frac{n}{m}$ $n, m \in Z$, $m \neq 0$, $L, M \in R_+$ basta considerarmos a sequência $g_k = (kn, +km)$ $0 \neq k \in Z$ pois $\|g_k\| \to +\infty$ quando $|k| \to +\infty$ e

$$|P(2\pi g_k)| = 2\pi |kn - akm| = 0 < \frac{L}{\|2\pi g_k\|^M} \quad 0 \neq k \in Z$$

Logo pelo teorema 2.1 o operador P não Periodicamente Hipoelítico.

Na verdade se $b = 0$ e $a \in Q$ podemos construir $u \in D_1'(R^2) | C_1^\infty(R^2)$, mas, com $Pu = 0$, u solução da equação homogênea. De fato, para $a = \frac{n}{m}$ $0 \neq m,n \in Z$, consideremos $u \in \mathcal{D}_1'(R^2) | C_1^\infty(R^2)$, tomando-se como coeficiente de Fourier de u, os elementos da família $\{T_g\} \in s'(Z^2)$ definida por, $T_g = 1$ para $g = (kn,km)$, $k \in Z$ e $T_g = 0$ para os demais $g \in Z^2$.

Então $c_g(Pu) = P(2\pi g)\, c_g(u) = 0$, $g \in Z^2$, pois $P(2\pi g) = 0$ se $g = (kn,km)$ e portanto $Pu = 0$.

Se $b = 0$, $a \notin Q$ e $Pu = 0$ para alguma $u \in D_1'(R^2)$ então u é constante. De fato, dados $b = 0$, $a \notin Q$ e $(0,0) \neq g \in Z^2$ temos então que $P(2\pi g) \neq 0$ e portanto $c_g(u) = \dfrac{c_g(Pu)}{P(2\pi g)} = 0$.

Logo a série de Fourier de u se reduz ao único termo não nulo $c_0(u)$ e portanto u é constante.

A condição (LMC) se torna particularmente especial ao analisarmos a Hipoeliticidade Periódica do operador $P = D_1 - cD_2$, $c = a + ib$, quando $b = 0$ e $a \notin Q$; veremos que a Hipoeliticidade do operador P será caracterizada utilizando um tópico da Teoria dos Números, como nos revela o próximo teorema, o qual é um dos mais importantes deste trabalho.

Teorema 2.2

Seja a um número irracional. O operador $P = \partial_1 - a\partial_2$ é (PH) se e somente se a não é um número de Liouville.

Antes de demonstrarmos o teorema façamos alguns comentários a respeito dos números de Liouville. Um estudo elementar e esclarecedor sobre o assunto poderá ser encontrado em [2].

Definição 2.2

Um número irracional a é de Liouville se, dado $N \in Z_+$ existem $K > 0$ e infinitos racionais $\frac{n}{m}$, $0 \neq m$, $n \in Z$ distintos tais que

$$|a - \frac{n}{m}| < \frac{K}{|m|^N}$$

Mais adiante demonstraremos várias condições que caracterizam a ser de Liouville bem como a não ser de Liouville; adiantaremos que, a não ser de Liouville significa que: Existe $N \in Z_+$ tal que dado $K > 0$ existe no máximo um número finito de racionais $\frac{n}{m}$ distintos, satisfazendo

$$|a - \frac{n}{m}| < \frac{K}{|m|^N}$$

ou equivalentemente: Existe $N \in Z_+$ tal que dado $K > 0$, existe $b > 0$ tal que para $m \neq 0$, $\|(n,m)\| \geq b$ temos

$$|a - \frac{n}{m}| \geq \frac{K}{|m|^N}$$

Proposição 2.1

Dado um número irracional a então são equivalentes as seguintes afirmações

1) a é um número de Liouville

2) Dado $N_1 \in Z_+$, $\exists\, K_1 > 0$ e uma sequência de racionais distintos $(\frac{n_j}{m_j})$, $|m_j| \to +\infty$ tais que

$$|a - \frac{n_j}{m_j}| < \frac{K_1}{|m_j|^{N_1}} + 1$$

3) Dados $N_2 \in Z_+$ e $K_2 > 0$ existe uma sequência de racionais distintos $(\frac{n_j}{m_j})$, $|m_j| \to +\infty$ tais que

$$|a - \frac{n_j}{m_j}| < \frac{K_2}{|m_j|^{N_2}}$$

4) Existe uma sequência de racionais distintos $(\frac{n_j}{m_j})$, $m_j > 0$ tais que

$$|a - \frac{n_j}{m_j}| < \frac{1}{m_j^j}$$

Demonstração

Demonstremos a implicação de (1) para (2).

Seja a um número de Liouville e seja $N_1 \in \mathbb{Z}$ dado.

Então para $N = N_1 \in \mathbb{Z}_+$ existe $K_1 = K > 0$ e infinitos racionais $\frac{n}{m}$ distintos tais que

$$|a - \frac{n}{m}| < \frac{K}{|m|^N} . \qquad (*)$$

Logo devemos ter, necessariamente, que o conjunto $H = \{|m|$ tal que $\frac{n}{m}$ satisfaz $(*)\}$ é não limitado. De fato, suponhamos que H seja um conjunto limitado. Então o conjunto $L = \{|n|$ tal que $\frac{n}{m}$ satisfaz $(*)\}$ é não limitado, para se cumpra a exigência de existirem infinitos racionais distintos $\frac{n}{m}$ satisfazendo a desigualdade.

Mas dados $N = 0$ e $K > 0$, se $|n| > (K+|a|)m_0$ onde $m_0 = \max H$ temos

$$|a - \frac{n}{m}| \geq |\frac{|n|}{|m|} - |a|| \geq \frac{|n|}{|m|} - |a| \geq$$

$$\geq \frac{(K+|a|)m_0}{|m|} - |a| \geq \frac{(K+|a|)m_0}{m_0} - |a| = K$$

o que contradiz a hipótese.

Assim H é não limitado e portanto existe uma sequência de racionais $(\frac{n_j}{m_j})$ distintos com $|m_j| \to +\infty$ tais que

$$|a - \frac{n_j}{m_j}| < \frac{K_1}{|m_j|^{N_1}}$$

Suponhamos válido (2) e demonstremos (3). Dado $N_2 \in Z_+$ seja $N_1 = N_2 + 2$. Existe $K_1 > 0$ satisfazendo a hipótese. Dado $K_2 > 0$ seja $j_0 \in N$ tal que para $j \geq j_0$ tenhamos $\frac{K_1}{|m_j|} < K_2$.

Consideremos então a sequência $(\frac{n_j}{m_j})$ obtida da sequência da hipótese a partir de j_0, logo

$$\left|a - \frac{n_j}{m_j}\right| < \frac{K_1}{|m_j|^{N_1}} = \frac{K_1}{|m_j|}\,\frac{1}{|m_j|^{N_1-1}} \leq \frac{K_2}{|m_j|^{N_1-1}} =$$

$$= \frac{K_2}{|m_j|^{N_2+1}}$$

A demonstração de que (3) implica (4) decorre imediatamente da observância do seguinte fato:

tomando $K_2 = 1$ e $N_2 = k$, $k \in N$ obtemos uma sequência de racionais $(\frac{n_{jk}}{m_{jk}})$ com $|m_{jk}| \to +\infty$ quando $j \to \infty$ tais que

$$\left|a - \frac{n_{jk}}{m_{jk}}\right| < \frac{1}{|m_{jk}|^k}$$

Finalmente (4) implica (1) pois dado $N \in Z_+$ seja $K = 1$, então considerando a sequência $(\frac{n_j}{m_j})$ obtida da sequência da hipótese tomando-se $j \geq N$ temos

$$\left|a - \frac{n_j}{m_j}\right| < \frac{1}{m_j^j} = \frac{1}{|m_j|^j} \leq \frac{K}{|m_j|^N}$$

Logo a é um número de Liouville.

O número $a = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{10^{m!}}$ é um exemplo de número de Liouville e pode ser encontrado em [2] uma demonstração detalhada deste fato.

Os números que não são de Liouville desempenham um papel muito importante neste trabalho.

Ver também em [2] o seguinte resultado: Todo número de Liouville é transcendente. Basta considerarmos então qualquer número algébrico de grau maior ou igual a dois, $\sqrt{2}$ por exemplo,para obtermos exemplos de números que não são de Liouville.

A proposição seguinte nos mostra que um número irracional a não ser de Liouville é equivalente ao operador $P = D_1 - aD_2$ não satisfazer a condição (LMC) do Teorema 2.1.

Proposição 2.2

Se a é um número irracional então são equivalentes as seguintes afirmações:

1) Existem $L, M, C \in R_+$ tais que

$$\left|a - \frac{n}{m}\right| \geq \frac{L}{|m| \, \|(n,m)\|^M} \quad \text{para} \quad \|(n,m)\| \geq C, \quad m \neq 0.$$

2) Existem L_1, M_1, $C_1 \in R_+$ tais que

$$|a - \frac{n}{m}| \geq \frac{L_1}{|m| \, \|(n,m)\|^{M_1}} \quad \text{para} \quad \|(n,m)\| \geq C_1,$$

$m \neq 0$ e $|a - \frac{n}{m}| < 1$

3) Existem L_2, M_2, C_2 ε R_+ tais que

$$|a - \frac{n}{m}| \geq \frac{L_2}{|m|^{M_2+1}} \quad \text{para} \quad \|(n,m)\| \geq C_2,$$

$m \neq 0$ e $|a - \frac{n}{m}| < 1$

4) a não é um número de Liouville.

Demonstração

A demonstração de que (1) implica (2) é imediata. Demonstremos então que (2) implica (3).

Observemos inicialmente que se $|a - \frac{n}{m}| < 1$ então

$$|n| < k|m| \quad \text{onde} \quad k = 1 + |a|$$

Consequentemente: $\|(n,m)\| \leq |n|+|m| < (k+1)|m|$.

Sejam $M_2 = M_1$, $L_2 = \frac{L_1}{(k+1)^{M_1}}$ e $C_2 = C_1$; logo se $\|(n,m)\| \geq C_2$, $m \neq 0$ e $|a - \frac{n}{m}| < 1$ temos que

$$|a - \frac{n}{m}| \geq \frac{L_1}{|m| \| (n,m) \|^{M_1}} \geq \frac{L_1}{(1+k)^{M_1} |m|^{M_1+1}} =$$

$$= \frac{L_2}{|m|^{M_2+1}}$$

Demonstremos a implicação de (3) para (4) mostrando que $\sim(4)$ implica $\sim(3)$. Suponhamos que a é de Liouville. Então decorre da proposição 2.1.3 que dados L_2, M_2, C_2 ε R_+ existe uma sequência $\{(n_j,m_j)\} \subset Z^2, m_j \neq 0$ com $|m_j| \to \infty$ e portanto $\|(n_j,m_j)\| \to \infty$ tal que

$$|a - \frac{n_j}{m_j}| < \frac{L_2}{|m_j|^{M_2+1}}$$

Como $|m_j| \to \infty$ então existem j_0, j_1 ε N tais que $|a - \frac{n_j}{m_j}| < 1$ para $j \geq j_0$ e $\|(n_j,m_j)\| \geq C_2$, $m_j \neq 0$ para $j \geq j_1$.

Logo se $j \geq \max\{j_0,j_1\}$ temos que

$$|a - \frac{n_j}{m_j}| < \frac{L_2}{|m_j|^{M_2+1}} \quad \text{para}$$

$$\|(n_j,m_j)\| \geq C_2, \quad m_j \neq 0 \quad \text{e} \quad |a - \frac{n_j}{m_j}| < 1.$$

Finalmente supondo (4) demonstremos (1).

Se a não é de Liouville então existe N ε Z_+ tal que dado $K > 0$ existe $b > 0$ tal que para

$\|(n,m)\| \geq b,\ \ m \neq 0$ temos $|a - \frac{n}{m}| \geq \frac{K}{|m|^N} \geq \frac{K}{|m|\,|m|^N} \geq$

$$\geq \frac{K}{|m|\,\|(n,m)\|^N}$$

Logo tomando $L = 1$, $M = N$ e $C = b$ segue o resultado.

Vamos agora demonstrar o teorema 2.2 e para maior clareza do leitor vamos repetir o seu enunciado.

Teorema 2.2

Seja a um número irracional.

O operador $P = D_1 - aD_2$ é (PH) se e somente se a não é um número de Liouville.

Demonstração

Do teorema 2.1 temos que $P = D_1 - aD_2$ é (PH) se e somente se existem $L,M,C \in R_+$ tais que

$$|n-a.m| \geq \frac{L}{\|(n,m)\|^M (2\pi)^{M+1}} \text{ para } \|(n,m)\| \geq C$$

ou equivalentemente existem $\tilde{L}$, $\tilde{M}$, $\tilde{C} \in R_+$ tais que

...

$$\left|a - \frac{n}{m}\right| \geq \frac{\tilde{L}}{|m| \; \|(n,m)\|^{\tilde{M}}} \quad \text{para} \quad \|(n,m)\| \geq \tilde{C}, \quad m \neq 0$$

Logo a demonstração segue imediatamente da proposição anterior.

BIBLIOGRAFIA

[1] BARROS-NETO, J. - "An Introduction to the Theory of Distributions", Marcel Dekker, Inc. New York, 1973.

[2] FIGUEIREDO, D.G. - "Números Irracionais e Transcendentes", Soc. Bras. de Matemática, 1980.

[3] GREENFIELD, S.J. and WALLACH, N.R. - "Global hipoellipticity and Liouville numbers", Proc.Amer. Math. Soc. 31 (1972), 112-114.

[4] HONIE, J. - "Teoria Elementar das Distribuições", 12º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1979.

[5] HÖNIG, C.S. - "Métodos Matemáticos da Física (Teoria das Distribuições)" 3ª ed., IPqM - USP, 1967.

[6] HORMANDER, L. - "The Analysis of Linear Partial Differential Operators I", Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo, 1983.

[7] SCHWARTZ, L. - "Métodos Matemáticos para las Ciências Físicas", Selecciones Científicas, Madrid, 1969.

[8] ZEMANIAN, A.H. - "Distribution Theory and Transform Analysis".