

I.C.M.S.C.

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

ANÁLISE COMPARATIVA DE ALGUMAS EQUAÇÕES  
DIFERENCIAIS E APROXIMANTES DISCRETOS

*Carmen Maria Guacelli Tâboas*

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

SÃO CARLOS - SÃO PAULO  
BRASIL

ANÁLISE COMPARATIVA DE ALGUMAS EQUAÇÕES  
DIFERENCIAIS E APROXIMANTES DISCRETOS

*Carmen Maria Guacelli Tâboas*

*Orientador:* Prof. Dr. Luiz Antonio Vieira de Carvalho

Dissertação apresentada no Instituto de  
Ciências Matemáticas de São Carlos, da  
Universidade de São Paulo, para a ob-  
tenção do Título de Mestre em Matemá-  
tica.

SÃO CARLOS  
1985

*Plácido,*

*Hã sempre nesta vida, que jã se viveu, alguns dias de infãvel ventura, de ventura que nã se apreciou devidamente quando se estava gozando, e que depois se saboreia muito quando o esp̃rito ruma o passado; hã sempre nestes dias algumas horas de suprema felicidade, que com maviosa saudade sã lembradas, que ficam eternamente impressas na alma, que se nã esquecem nunca, que cada dia se tornam mais e mais vivas e que, em muitas ocasiões, a pesar nosso, fazem se lembrar, ã força, mil vezes em uma noite, mil vezes em uma hora, semelhantes a estas melodias simpáticas que, sem que as modulemos, contra a nossa vontade, soam que as modulemos, contra a nossa vontade, soam dentro de nã cantadas docemente pela nossa alma, no passeio, no trabalho, no leito e durante o sono.*

*Joaquim Manuel de Macedo*

*As coisas tangíveis  
tornam-se insensíveis  
à palma da mão.*

*Mas as coisas finas,  
muito mais que lindas,  
essas ficarão.*

*Carlos Drummond de Andrade*

*Gustavo e Ariane,*

*E o sonho é belo  
Pois tudo ainda faremos  
Nada está no lugar  
Tudo está por pensar  
Tudo está por criar*

*Milton Nascimento*

Ao Luiz,

Agradeço pelo estímulo e pela segurança ao mostrar o caminho ...

Compreender bem o que já se fez antes de nós, aumenta o nosso respeito àqueles cujos pensamentos originais nos capacita à nossa atividade presente.

Keith Eaton

Aos Colegas e Funcionários,

... e aprendi que se depende sempre,  
de tanta muita diferente gente.  
Toda pessoa sempre é as marcas  
das lições diárias de outras tantas pessoas ...

Luiz Gonzaga Junior

## I N D I C E

0. INTRODUÇÃO .....	i
1. DEFINIÇÕES E GENERALIDADES .....	1
2. COMPORTAMENTO DE SOLUÇÕES APROXIMADAS DE ALGUMAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS .....	25
3. CRITÉRIO DE ESTABILIDADE PARA EQUAÇÕES DIFERENÇA ..	67
4. APÊNDICE .....	87
5. BIBLIOGRAFIA .....	91

## SUMMARY

This is a study of interactive procedures which can be used as discrete approximations of differential equations.

Rather than the accuracy of the methods in bounded intervals, in which is mostly concerned the numerical analysts, we are interested in asymptotic properties of solutions which are preserved in the discrete scheme. Several examples are given.

In chapter I we study the concept of first order endomorphism.

In chapter II we show how a differential equation can be reduced to a difference equation. We give some examples where it is possible to see when the stability properties are preserved.

The study of a differential-difference equation is also presented.

In chapter III, a modified method of Routh-Hurwitz is applied in order to state conditions for the roots of certain characteristic polynomials have modulus less than one.



## 0. INTRODUÇÃO

Neste trabalho a preocupação foi inicialmente estudar as funções contínuas  $f : M \rightarrow M$ , que permitem construir seqüências  $x_j$   $j = 0, 1, 2, \dots$  a partir de  $x_0 \in M$ , onde cada elemento  $x_n \in M$  é obtido da forma  $x_1 = f(x_0)$ ,  $x_2 = f^2(x_0)$ ,  $\dots$ ,  $x_n = f^n(x_0)$ , e identificá-las como endomorfismos de primeira ordem. Uma seqüência  $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$  assim obtida é chamada órbita positiva de  $f$  a partir de  $x_0$ .

Estendemos esse conceito para endomorfismos de ordem  $k$ ,  $k \geq 2$ .

Dada uma  $f$  nestas condições exemplificamos como analisar o comportamento de  $x_n$  quando  $n \rightarrow \infty$ , como as órbitas se alteram por pequenas variações na função  $f$  e como se verifica a periodicidade de tais órbitas.

A discussão efetuada a seguir, sobre a estabilidade de soluções de certos tipos de equações diferenciais, e a análise do comportamento das soluções aproximadas por equações a diferenças finitas dadas por endomorfismos de ordem  $k$ ,  $k \geq 1$ , vieram mostrar que os fatos apontados e estudados anteriormente colaboraram para avaliar problemas de estabilidade.

Devemos salientar que grande parte dos trabalhos referentes a avaliar soluções de equações diferenciais, utilizando-se de métodos numéricos, tem sido em geral restritos a um intervalo finito  $[t_0, t_0 + b]$  e os problemas de determinar estabilidade e periodicidade de soluções estão relacionados aos intervalos  $[t_0, \infty)$  ou  $(-\infty, \infty)$ , e nesses casos, a questão torna-se não de quão pre

cisa é a aproximação no intervalo finito, mas sim, se as soluções aproximadas gozam de propriedades análogas às das soluções da equação diferencial que se deseja aproximar.

Este trabalho pretende contribuir para o discernimento de tais questões. Vários exemplos são aqui estudados com a intenção de mostrar ao leitor, a possibilidade de extensão à situações mais gerais quando equações diferenciais são tratadas do ponto de vista numérico.

Nesses casos, nada garante que o método numérico empregado e o passo  $h$  fixado em determinado problema, ofereçam aproximação cujas soluções tenham o mesmo comportamento das soluções da equação diferencial em intervalos não limitados.

A informação que se tem "a priori", é restrita aos intervalos finitos do tipo  $[t_0, T]$  e afirma que a solução aproximada  $y_n(t)$ , obtida pelo método das aproximações sucessivas, converge para a solução  $y(t)$  quando o problema do valor inicial é expresso por uma função contínua satisfazendo a condição de Lipschitz.

Finalmente procuramos estabelecer condições que permitam auferir se as raízes dos polinômios característicos associados à equações diferença têm módulo menor que 1, analisando os determinantes das matrizes menores principais da matriz de Hurwitz formada pelos coeficientes dos polinômios.

Naturalmente, pelo exposto, essas condições determinam um critério, que torna-se um procedimento adequado para investigar a estabilidade de equações diferença envolvendo espaços de dimensão  $n = 1, 2, 3$ , visto que, nesse caso, o estudo da estabilidade se resume no cálculo de equações ou desigualdades algébricas de no máximo terceiro grau.

## 1. DEFINIÇÕES E GENERALIDADES

Uma seqüência  $x_j$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$ , em um conjunto  $M$  é dita recorrente, se cada elemento  $x_n$  pode ser obtido a partir de seu precedente  $x_{n-1}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . (Neste trabalho  $M$  será o espaço  $R^n$  ou eventualmente uma variedade regular  $m$ -dimensional).

Essa idéia está ligada àquela de iteração. Dada uma função contínua  $f : M \rightarrow M$ , a partir de cada  $x_0 \in M$  podemos construir a seqüência recorrente  $x_j$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$ , da seguinte forma:

$$x_1 = f(x_0) = f^1(x_0)$$

$$x_2 = f(x_1) = f \circ f(x_0) = f^2(x_0)$$

$\vdots$

$$x_n = f(x_{n-1}) = f \circ \dots \circ f(x_0) = f^n(x_0)$$

que chamaremos seqüência dos iterados de  $f$  a partir de  $x_0$ , ou preferencialmente, órbita positiva de  $f$  partindo de  $x_0$ . Neste caso, a função  $f : M \rightarrow M$  é chamada recorrência, ou, de acordo com a terminologia de [9], endomorfismo de primeira ordem.

Há um grande número de interessantes questões de Matemática Elementar relacionadas com a idéia de recorrência, as mais populares se referem às progressões aritméticas e geométricas. Os problemas geralmente se relacionam com o cálculo do termo geral  $x_n$  como função de  $x_0$  ou com questões de convergência.

Nosso interesse principal está na linha de problemas de estabilidade. A grosso modo, queremos saber o que acontece com  $x_n$  quando  $n \rightarrow \infty$ , ou ainda, se variarmos um pouco a recorrência  $f$ , o que acontece com suas órbitas.

Neste capítulo apresentaremos alguns aspectos do estudo global para uma forma generalizada de recorrências, endomorfismos de ordem superior. Esta apresentação é baseada em [9].

### *Endomorfismos de Ordem Superior*

Seja  $M$  uma variedade regular de dimensão  $m$  e  $k$  um inteiro positivo. Denotaremos com  $M^k$  o produto de  $k$  cópias de  $M$ .

Definição: Um endomorfismo de ordem  $k$ , ou  $k$ -endomorfismo, é uma função contínua  $f : M^k \rightarrow M$ .

A partir de cada  $k$ -upla  $(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}) \in M^k$ , podemos construir a seqüência  $x_j$ ,  $j = 0, 1, \dots$ , da seguinte forma:

$$x_m = f(x_{m-k}, \dots, x_{m-1}), \quad m = k, k+1, \dots$$

a qual será chamada de órbita positiva de  $f$  partindo da  $k$ -upla inicial  $(x_0, x_1, \dots, x_{k-1})$ .

Uma órbita inteira de  $f$  é uma seqüência  $x_j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , tal que  $x_m = f(x_{m-k}, \dots, x_{m-1})$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ .

A órbita positiva fica univocamente determinada a partir da  $k$ -upla inicial  $(x_0, x_1, \dots, x_{k-1})$ . Entretanto, nem sempre existem órbitas inteiras passando por  $(x_0, x_1, \dots, x_{k-1})$ , além disso, elas nem sempre são únicas, se existirem.

Exemplos:

Sejam  $k = 2$  e  $M = \mathbb{R}$ .

- (1) Se  $f(x,y) = \max(x,y)$ , dados  $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ ,  $x_0 \neq x_1$ , não existe órbita inteira passando por  $(x_0, x_1)$ . Por outro lado, se  $x_0 = x_1$  fica univocamente determinada a órbita inteira  $x_j = x_0$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , passando por  $(x_0, x_1)$ .

Prova:

Dado  $(x_k, x_{k+1})$ , afirmamos que existe órbita inteira passando por  $(x_k, x_{k+1}) \iff x_k = x_{k+1}$ .

De fato, suponhamos que existe órbita inteira passando por  $(x_k, x_{k+1})$  com  $x_k \neq x_{k+1}$ .

Sendo  $x_{k+1} = f(x_{k-1}, x_k) = \max(x_{k-1}, x_k) \geq x_k$ , a suposição  $x_k \neq x_{k+1}$  nos leva a  $x_{k+1} > x_k$ .

Logo  $x_{k+1} = x_{k-1}$  e, portanto,  $x_{k-1} > x_k$ . (\*)

Mas  $x_k = \max(x_{k-2}, x_{k-1}) \geq x_{k-1}$  (\*\*)

Deste modo, como a suposição  $x_{k+1} \neq x_k$  leva a contradição (\*) e (\*\*), fica provada a afirmação no sentido ( $\rightarrow$ ).

No sentido ( $\leftarrow$ ), basta tomar  $x_j = x_k$ ,  $j = \dots, -1, 0, 1, \dots$

- (2) Se  $f(x,y) = x+y$ , dados quaisquer pontos  $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ , fica univocamente determinada, de modo óbvio, a órbita  $x_j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , passando por  $(x_0, x_1)$ .

- (3) Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $f(x) = x(x^2 - 1)$ , para  $-\frac{2}{9}\sqrt{3} < x_0 < \frac{2}{9}\sqrt{3}$ , a figura 1 mostra que existem três escolhas possíveis para  $x_{-1}$ . Cada uma dessas escolhas gera uma órbita inteira passando por  $x_0$ .

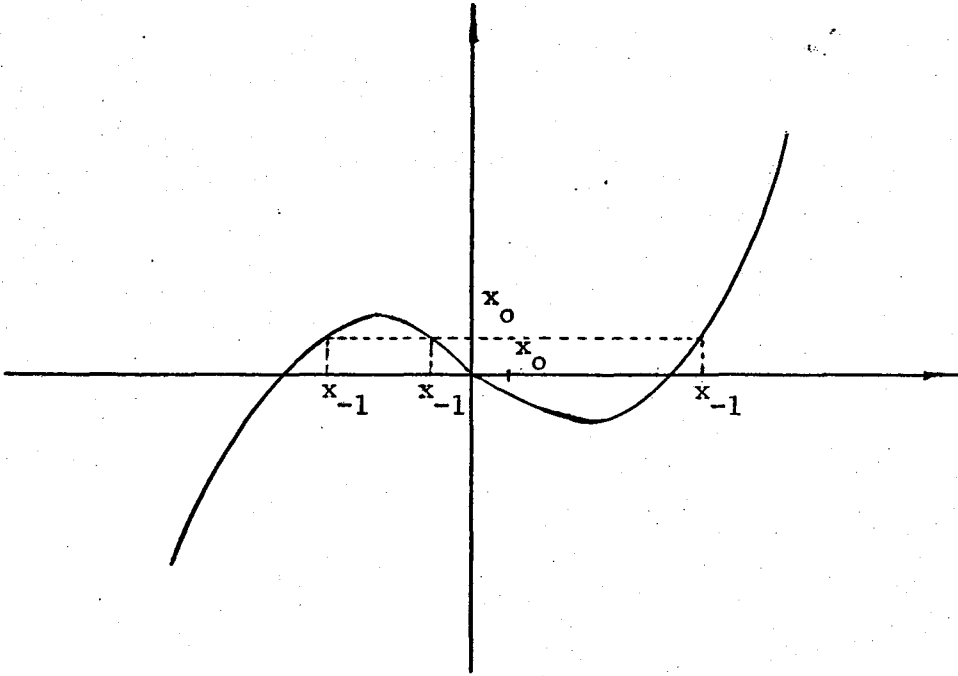


Figura 1

Um  $k$ -endomorfismo é chamado endomorfismo de ordem superior se  $k \geq 2$ .

A fim de simplificar a apresentação, concentrar-nos-emos no caso  $k = 2$ , desde que a extensão das definições e resultados obtidos é imediata para  $k > 2$ .

Um 2-endomorfismo  $f : M^2 \rightarrow M$  induz um endomorfismo de primeira ordem  $\tilde{f} : M^2 \rightarrow M^2$  definido por

$$\tilde{f}(x,y) = (y, f(x,y)) \quad \forall x,y \in M.$$

$\tilde{f}$  é chamado levantamento de  $f$ .

Se  $x_j, j = 0, 1, 2, \dots$ , é uma órbita de  $f$ , então  $(x_j, x_{j+1}), j = 0, 1, 2, \dots$ , é uma órbita de  $\tilde{f}$ , além disso, toda

órbita de  $\tilde{f}$  é dessa forma.

Definição: Uma órbita  $x_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , de  $f : M^2 \rightarrow M$  é periódica, se existir  $p \in \mathbb{N}^*$  de modo que  $x_{p+1} = x_1$ ,  $x_{p+2} = x_2$  e  $(x_j, x_{j+1}) \neq (x_1, x_2)$ , para  $1 < j \leq p$ .

Neste caso, a órbita fica completamente determinada conhecendo-se quaisquer  $p$  elementos  $(x_{j+1}, \dots, x_{j+p})$  com  $j = 0, 1, 2, \dots$ , por isso será denotada por  $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ .

É imediato que  $(x_1, \dots, x_p)$  é uma órbita positiva periódica de período  $p$  de  $f : M^2 \rightarrow M$ , se e somente se,  $((x_1, x_2), (x_2, x_3), \dots, (x_p, x_1))$  é uma órbita positiva periódica de período  $p$  de  $\tilde{f} : M^2 \rightarrow M^2$ .

Diz-se que uma órbita inteira  $x_j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , é periódica de período  $p$ , quando  $x_j = x_{j-p} = x_{j-2p} = \dots = x_{j-np} = \dots$ .

É evidente que toda órbita positiva periódica pode ser univocamente prolongada a uma órbita inteira periódica.

Todo ponto fixo de  $\tilde{f}$  é da forma  $(x, x)$ .

De fato,  $\tilde{f}(x, y) = (x, y)$  implica  $(x, y) = (y, f(x, y))$ , que por sua vez, implica  $x = y$  e  $f(x, x) = x$ .

Neste caso diremos que  $x$  é um ponto fixo de  $f$ .

O exemplo seguinte mostra como os autovalores de  $\tilde{f}$  são decisivos no estudo do comportamento das órbitas de um 2-endomorfismo linear  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

No entanto, fica bem claro nos itens  $(C_2)$ ,  $(C_3)$ ,  $(C_4)$ ,  $(C_5)$ , que nem todas as propriedades assintóticas das órbitas de  $\tilde{f}$  se transferem para as de  $f$ .

Exemplo:

Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$   $f(x,y) = ax+by$  e consideremos a transformação linear  $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  cuja matriz  $A$  é dada por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{bmatrix}.$$

Sendo  $\lambda_1, \lambda_2$  os autovalores de  $A$  e  $x_n, n=0,1,2,\dots$ , uma órbita positiva de  $f$  com  $(x_0, x_1) \neq (0,0)$ , afirmamos que:

(A) Se  $|\lambda_1|, |\lambda_2| < 1$ , então  $\lim x_n = 0$ .

(B) Se  $|\lambda_1| < 1 < |\lambda_2|$ , então

(B<sub>1</sub>)  $(x_0, x_1) \neq \sigma(1, \lambda_1)$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}$ , implica  $\lim |x_n| = \infty$ .

(B<sub>2</sub>)  $(x_0, x_1) = \sigma(1, \lambda_1)$ , para algum  $\sigma \in \mathbb{R}$ , implica  $\lim x_n = 0$ .

(C) Se  $|\lambda_1|, |\lambda_2| > 1$ , então:

Quando  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  tem-se:

(C<sub>1</sub>)  $\lambda_1 \neq -\lambda_2$  ou  $\lambda_1 = \lambda_2$  implica  $\lim |x_n| = \infty$ .

(C<sub>2</sub>)  $\lambda_1 = -\lambda_2$  implica

se  $x_0 \neq 0, x_1 \neq 0$ , então  $\lim |x_n| = \infty$

se  $x_0 = 0, x_1 \neq 0$ ,  $\lim x_{2n} = 0$  e  $\lim |x_{2n+1}| = \infty$

se  $x_0 \neq 0, x_1 = 0$ ,  $\lim x_{2n+1} = 0$  e  $\lim |x_{2n}| = \infty$ .

Quando  $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{R}$ ,  $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$ ;  $\lambda_2 = \alpha + i\beta = re^{i\theta}$ ,  $\theta \neq k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  e  $\theta = \frac{p}{q}\pi$ ,  $\frac{p}{q}$  irredutível, temos:

(C<sub>3</sub>)  $x_{mq} = 0, m = 0,1,2,\dots$ , e  $\lim_{n \neq mq} |x_n| = \infty$ , se  $x_0 = 0, x_1 \neq 0$ .



(C<sub>4</sub>) Se  $x_0 \neq 0$ ,  $x_1 = \alpha x_0 = r x_0 \cos \theta$ , então

$q$  ímpar implica  $\lim |x_n| = \infty$

$q$  par implica  $x_n = 0$ , se  $n = (2k+1)\frac{q}{2}$ ,  $k=0,1,\dots$ ,  
e

$\lim_{n \neq (2k+1)q/2} |x_n| = \infty$ .

(C<sub>5</sub>) Se  $x_0 \neq 0$ ,  $x_1 \neq \alpha x_0$ , seja  $S = \{n \in \mathbb{Z}_+ \text{ tal que } c_0 \cos n\theta + d_0 \operatorname{senn}\theta = 0\}$ .

onde  $d_0 = -x_0 \cot \theta + \frac{x_1}{r} \operatorname{cosec} \theta$ .

Então  $x_n = 0$ , se e somente se,  $n \in S$  e  $\lim_{n \notin S} |x_n| = \infty$ .

Observação: Se  $S = \emptyset$ , temos  $\lim |x_n| = \infty$ .

Quando  $S \neq \emptyset$ ,  $S$  é infinito.

### Prova

(I) A não diagonalizável.

Um exame do polinômio característico de  $A$ ,  $P(\lambda) = \lambda^2 - b\lambda - a = 0$ , nos fornece  $\lambda = \frac{1}{2}(b \pm \sqrt{b^2 + 4a})$

Logo  $\lambda_1 = \lambda_2 \iff b^2 + 4a = 0 \iff a = -\frac{b^2}{4}$  e

$\lambda = \frac{b}{2}$ , ou seja,  $\lambda_1 = \lambda_2 \iff a = -\lambda^2$  e  $b = 2\lambda$ .

Nestas condições,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda^2 & 2\lambda \end{bmatrix}$$

com autovalor  $\lambda = \frac{b}{2}$  e autovetor  $v = (1, \lambda)$  associado a  $\lambda$ .

Portanto, para  $\lambda_1 = \lambda_2$ , não existem dois autovetores distintos associados a  $\lambda$ , o que deixa  $A$  não diagonalizável.

Por indução obtemos

$$\begin{bmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n\lambda^{n-1} \left( x_1 - \frac{n-1}{n} \lambda x_0 \right) \\ (n+1)\lambda^n \left( x_1 - \frac{n}{n+1} \lambda x_0 \right) \end{bmatrix}_{n=1,2,\dots}$$

ou seja,

$$x_n = n\lambda^{n-1} \left( x_1 - \frac{n-1}{n} \lambda x_0 \right).$$

Quando  $n \rightarrow \infty$ ,  $\left( x_1 - \frac{n-1}{n} \lambda x_0 \right) \rightarrow k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

Analisemos a expressão  $n\lambda^{n-1}$

para  $|\lambda| > 1$ ,  $n|\lambda|^{n-1} \rightarrow \infty$

e, para  $|\lambda| < 1$ ,  $n\lambda^{n-1} = \frac{n\lambda^n}{\lambda}$ . Fazendo  $|\lambda| = c$ ,  
 $|n\lambda^n| = n|\lambda|^n = nc^n$  e  $\lim_{x \rightarrow \infty} xc^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{c^{-x}}$  L'Hosp.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{-\ln c(c^{-x})}$

$$= - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{c^x}{\ln c} = 0.$$

Desse modo, podemos concluir que, se  $|\lambda| < 1$   
 $\lim x_n = 0$  e se  $|\lambda| > 1$   $\lim |x_n| = \infty$ .

Ficam assim provadas, respectivamente, as afirmações  
 (A) e (C<sub>1</sub>) no caso de  $\lambda_1 = \lambda_2$ .

(II) A diagonalizável.

Se  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \implies \lambda_i = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4a}}{2}$  e  $v_i = (1, \lambda_i)$

$i = 1, 2$ ,  $v_i$  autovetor associado a  $\lambda_i$ .

Nestas condições  $A$  é diagonalizável.

(II-1)  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ .

Lembrando a representação espectral do operador  $A$ , existe uma resolução da identidade definida por duas projeções  $\pi_1, \pi_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , de modo que

$$\pi_1 \pi_2 = 0, \quad \pi_1 + \pi_2 = I \quad (\text{identidade})$$

com  $A = \lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2$ .

A imagem de  $\pi_i$  é o subespaço gerado pelo autovetor  $v_i$  associado a  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2$ .

Uma vez que  $A^n = \lambda_1^n \pi_1 + \lambda_2^n \pi_2$  temos

$$\begin{bmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} = \lambda_1^n \pi_1 \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} + \lambda_2^n \pi_2 \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}.$$

De  $(x_0, x_1) = \sigma_1 v_1 + \sigma_2 v_2$   $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}$ , visto que  $(x_0, x_1)$  é elemento do  $\mathbb{R}^2$ , segue que

$$x_0 = \sigma_1 + \sigma_2$$

$$x_1 = \sigma_1 \lambda_1 + \sigma_2 \lambda_2$$

e, portanto,

$$\sigma_1 = \frac{\lambda_2 x_0 - x_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

e

$$\sigma_2 = \frac{\lambda_1 x_0 - x_1}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Assim,

$$x_n = \lambda_1^n \left( \frac{\lambda_2 x_0 - x_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) + \lambda_2^n \left( \frac{\lambda_1 x_0 - x_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \right), \quad n = 1, 2, \dots$$

ou, podemos escrever  $x_n = \lambda_1^n \sigma_1 + \lambda_2^n \sigma_2$ ,  $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}$ .

Para  $|\lambda_1|, |\lambda_2| < 1$ ,  $\lambda_1^n \rightarrow 0$  e  $\lambda_2^n \rightarrow 0$ , logo

$\lim x_n = 0$ .

Para  $|\lambda_1| < 1 < |\lambda_2|$  temos as alternativas:

(1)  $(x_0, x_1) \neq \sigma(1, \lambda_1)$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}$ ,

assim,  $x_1 \neq \sigma \lambda_1$ , o que faz  $\sigma_2 \neq 0$ .

Logo, na expressão de  $x_n$ ,  $\lambda_1^n \rightarrow 0$  e  $|\lambda_2^n \sigma_2| \rightarrow \infty$ .

Portanto,  $\lim |x_n| = \infty$ .

(2)  $(x_0, x_1) = \sigma(1, \lambda_1)$ , para algum  $\sigma \in \mathbb{R}$ ,

assim,  $x_0 = \sigma$  e  $x_1 = \sigma \lambda_1$ , o que torna  $\sigma_2 = 0$ .

Portanto  $x_n = \lambda_1^n \sigma_1 + \lambda_2^n \cdot 0$ .

Como  $\lambda_1^n \rightarrow 0$ ,  $\lim x_n = 0$ .

Para  $|\lambda_1|, |\lambda_2| > 1$  temos as alternativas:

(1)  $\lambda_1 \neq -\lambda_2$

Se ocorrer  $|\lambda_1| > |\lambda_2|$  podemos escrever

$$\frac{x_n}{|\lambda_2|^n} = \sigma_1 \left( \frac{\lambda_1}{|\lambda_2|} \right)^n + \sigma_2 \left( \frac{\lambda_2}{|\lambda_2|} \right)^n$$

ou

$$\frac{|x_n|}{|\lambda_2|^n} \geq |\sigma_1| \left( \frac{|\lambda_1|}{|\lambda_2|} \right)^n - |\sigma_2|.$$

A razão  $\frac{|\lambda_1|}{|\lambda_2|} > 1$  e  $|x_n| \geq \frac{|x_n|}{|\lambda_2|^n}$ , torna  $\lim |x_n| = \infty$ .

Analogamente, se ocorrer  $|\lambda_2| > |\lambda_1|$ .

(2)  $\lambda_1 = -\lambda_2$

Escrevemos

$$x_n = (-\lambda_2)^n \left( \frac{\lambda_2 x_0 - x_1}{2\lambda_2} \right) - \lambda_2^n \left( \frac{-\lambda_2 x_0 - x_1}{2\lambda_2} \right)$$

o que implica  $x_{2n} = \lambda_2^{2n} x_0$  e  $x_{2n+1} = \lambda_2^{2n+1} x_1$ .

Se  $x_0 \neq 0$ ,  $x_1 \neq 0$ ,  $|\lambda_2|^n \rightarrow \infty$  e  $|x_n| \rightarrow \infty$  pois

$$|x_{2n}| \rightarrow \infty \text{ e } |x_{2n+1}| \rightarrow \infty.$$

Se  $x_0 = 0$ ,  $x_1 \neq 0$

$$x_{2n} = 0, \quad |x_{2n+1}| \rightarrow \infty.$$

Se  $x_0 \neq 0$  e  $x_1 = 0$

$$|x_{2n}| \rightarrow \infty, \quad x_{2n+1} = 0.$$

Dessa maneira ficam provadas, respectivamente, as afirmações (A), (B<sub>1</sub>), (B<sub>2</sub>), (C<sub>1</sub>) no caso  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  e (C<sub>2</sub>).

$$(II-2) \lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{R} \quad (\lambda_1 = \bar{\lambda}_2; \lambda_2 = re^{i\theta}, \theta \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$$

$$\lambda_j = \frac{b}{2} \pm i \frac{\sqrt{-(b^2+4a)}}{2}, \quad j = 1, 2 \implies$$

$$\implies b^2 < -4a \implies |b| < 2\sqrt{-a}.$$

Este caso se refere exclusivamente aos itens (A), (C<sub>3</sub>), (C<sub>4</sub>), (C<sub>5</sub>).

Nestas condições, a matriz real A tem autovalores complexos  $\lambda_j = re^{\pm i\theta}$ , de forma que  $b = 2r\cos\theta$  e  $a = -r^2$ .

$$\text{De fato, } \lambda_j = \frac{b}{2} \pm i \frac{\sqrt{-(b^2+4a)}}{2} = r(\cos\theta \pm i\sin\theta)$$

$$\iff \frac{b}{2} = r\cos\theta \quad \text{e} \quad \sqrt{-(b^2+4a)} = 2r\sin\theta$$

$$\iff b = 2r\cos\theta \quad \text{e} \quad -(b^2+4a) = 4r^2\sin^2\theta$$

$$-b^2-4a = 4r^2\sin^2\theta$$

$$-4a = 4r^2\sin^2\theta + 4r^2\cos^2\theta$$

$$-4a = 4r^2$$

$$\iff b = 2r\cos\theta \quad \text{e} \quad a = -r^2$$

Assim,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -r^2 & 2r\cos\theta \end{bmatrix}$$

cujos autovetores associados a  $\lambda_j = re^{\pm i\theta}$  são  $(1, \lambda_j)$ ,  $j = 1, 2$ ,

respectivamente.

Do mesmo modo

$$B = \begin{bmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix}$$

é matriz real com autovalores  $\lambda_j = re^{\pm i\theta}$  e autovetores associados  $v_j = (1, re^{\pm i\theta})$ ,  $j = 1, 2$ .

As matrizes  $A$  e  $B$  com essas características são matrizes semelhantes, o que nos leva a afirmar que existe matriz real  $P$ ,  $2 \times 2$ , inversível, tal que  $P^{-1}AP = B$ .

Tomando  $AP = PB$  e  $P = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \rho \end{bmatrix}$ , encontramos:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ r \cos \theta & r \sin \theta \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\cot \theta & \frac{1}{r} \operatorname{cosec} \theta \end{bmatrix}.$$

Isto significa que existe uma nova base do  $R^2$ , cuja matriz de mudança é  $P$ , de modo que a matriz de  $\tilde{f}$  na nova base passa a ser  $B$ .

A órbita positiva  $(x_n, x_{n+1})$   $n = 0, 1, \dots$  de  $\tilde{f}$  é representada em novas coordenadas por  $(c_n, d_n)$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , onde

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ d_0 \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} c_n \\ d_n \end{bmatrix} = B^n \begin{bmatrix} c_0 \\ d_0 \end{bmatrix}.$$

Logo

$$c_n = r^n (c_0 \cos n\theta + d_0 \operatorname{senn}\theta)$$

$$d_n = r^n (-c_0 \operatorname{senn}\theta + d_0 \cos n\theta) \quad n=1,2,\dots$$

e

$$c_0 = x_0$$

$$d_0 = (-\cotg\theta)x_0 + \frac{1}{r}(\operatorname{cossec}\theta)x_1.$$

Por outro lado,

$$\begin{bmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} c_n \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_n \\ c_n r \cos\theta + d_n r \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix}$$

de modo que

$$(1) \quad x_n = r^n (c_0 \cos n\theta + d_0 \operatorname{senn}\theta) \quad n = 0,1,\dots$$

Assim, a afirmação (A) é imediatamente verificada neste caso, pois, para  $n \rightarrow \infty$  e  $|\lambda| = r < 1$ , na equação (1), obtemos uma função limitada e uma infinitésima o que torna  $x_n \rightarrow 0$ .

Se  $r = |\lambda_1| = |\lambda_2| > 1$ , temos as alternativas:

(1) Se  $x_0 = 0$ ,  $x_1 \neq 0$ , implica  $c_0 = 0$ ,  $d_0 \neq 0$  donde

$$x_n = r^n d_0 \operatorname{senn} \frac{p}{q} \pi$$

ou seja, para  $n = mq$ ,  $m \in \mathbb{Z} \implies x_n = 0$

$$n \neq mq, \quad m \in \mathbb{Z} \implies x_n \neq 0 \quad e$$

$$x_{n+q} = r^q x_n = r^q (r^n d_0 \operatorname{senn} \frac{p}{q} \pi).$$

Observemos como esta seqüência se comporta.



Como  $n \neq mq$ , o primeiro termo da seqüência múltiplo de  $q$  é  $x_n$  com  $n = q$ .

Logo, tomemos  $\tilde{x} = \min(|x_1|, \dots, |x_{q-1}|) > 0$ .

De  $n \neq mq \implies n = j + kq$ ,  $0 < j < q$

$$\begin{aligned} \implies x_n &= x_{j+kq} = x_{j+(k-1)q+q} = r^q x_{j+(k-1)q} = \\ &= r^{2q} x_{j+(k-2)q} = \dots = r^{kq} x_j \end{aligned}$$

$$\implies |x_n| = r^{kq} |x_j| \implies |x_n| \geq r^{kq} \tilde{x}$$

$$\text{quando } n \rightarrow \infty \implies k \rightarrow \infty \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = \lim_{k \rightarrow \infty} r^{kq} \tilde{x} = \infty.$$

(2) Se  $x_0 \neq 0$ ,  $x_1 = \alpha x_0 = r x_0 \cos \theta$ , implica  $c_0 \neq 0$  e  $d_0 = 0$

$$\text{donde } x_n = r^n c_0 \cos \frac{np}{q} \pi.$$

Assim,  $q$  ímpar implica que não existe inteiro  $k$  tal que  $\frac{np}{q} \pi = \frac{\pi}{2} + k\pi$ . Caso existisse, teríamos  $2np = (2k+1)q$ , que é contradição.

Desse modo a seqüência finita  $\cos \frac{np}{q} \pi$   $n = 0, 1, \dots$ , tem todos os seus termos não nulos.

$$\text{Portanto } \lim |x_n| = \infty.$$

Se  $q$  for par,  $\cos n \frac{p}{q} \pi = 0$  se e somente se  $\frac{np}{q} \pi = \frac{\pi}{2} + k\pi$ . Esta relação é equivalente a

$$np = (2k+1) \frac{q}{2}, \quad k = 0, 1, \dots$$

e esta, em virtude de ser  $\frac{p}{q}$  irredutível, se equivale a

$$n = (2k+1) \frac{q}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Portanto  $x_n = 0$  se e somente se  $n = (2k+1)\frac{q}{2}$ ,  $k=0,1,\dots$

Fica assim provada a afirmação  $(C_4)$ .

A afirmação  $(C_5)$  decorre imediatamente da equação (1).

No entanto, para a afirmação  $(C_5)$  mostraremos um exemplo de que  $S \neq \emptyset$ .

Tomamos  $x_0 = \frac{2\alpha}{r}x_1 = \frac{2x_1}{r}\cos\theta$  e afirmamos que  $2 \in S$ .

Verificação:

$$S = \{n \in \mathbb{Z}^+ \text{ tal que } x_0 \cos n\theta + d_0 \operatorname{sen} n\theta = 0\}$$

onde  $d_0 = -x_0 \cotg\theta + \frac{x_1}{r} \operatorname{cosec}\theta$ .

Seja  $x_0 = \frac{2\alpha}{r}x_1 = \frac{2x_1}{r}\cos\theta$  e  $n = 2$

$$\begin{aligned} x_0 \cos 2\theta + d_0 \operatorname{sen} 2\theta &= \\ &= x_0 \cos 2\theta - x_0 \cotg\theta \operatorname{sen} 2\theta + \frac{x_1}{r} \operatorname{cosec}\theta \operatorname{sen} 2\theta = \\ &= x_0 (\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) - 2x_0 \cotg\theta \operatorname{sen}\theta \cos\theta + \frac{2x_1}{r} \operatorname{cosec}\theta \cos\theta \operatorname{sen}\theta = \\ &= x_0 \cos^2\theta - x_0 \operatorname{sen}^2\theta - 2x_0 \cos^2\theta + \frac{2x_1}{r} \cos\theta = \\ &= -x_0 (\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) + \frac{2x_1}{r} \cos\theta = \\ &= -x_0 + \frac{2x_1}{r} \cos\theta = 0 \end{aligned}$$

o que mostra  $2 \in S$ .

Analisando as conclusões  $(C_2)$ ,  $(C_3)$ ,  $(C_4)$ ,  $(C_5)$  do exemplo, verificamos que quando  $n \rightarrow \infty$ , as órbitas de  $\tilde{f}$ ,  $|(x_{2n}, x_{2n+1})| \rightarrow \infty$ , o que não acontece com as órbitas de  $f$ .

Ainda com relação ao exemplo  $f(x,y) = ax+by$ , examinemos algumas possibilidades de existência de órbitas periódicas.

Quando a matriz  $A$  de  $\tilde{f}$  tem autovalores complexos

$\lambda_1 = re^{-i\theta}$   $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = re^{+i\theta}$ , a órbita  $x_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , conhecidos os elementos  $x_0, x_1$ , de acordo com a nossa análise anterior, é dada pela expressão geral

$$x_n = r^n(x_0 \cos n\theta + d_0 \operatorname{senn}\theta), \quad n = 0, 1, \dots$$

onde  $d_0 = -x_0 \cot\theta + x_1 \frac{\operatorname{cosec}\theta}{r}$ , quando  $e^{i\theta} \neq e^{-i\theta}$  e, portanto,  $d_0$  está bem definido.

É claro que para existirem órbitas periódicas não triviais, devemos ter necessariamente  $r = 1$ , ou seja,  $|\lambda_j| = 1$ ,  $j = 1, 2$ .

Assim, neste caso, a condição  $x_k = x_0$  é equivalente a  $x_0 = x_0 \cos k\theta + d_0 \operatorname{sen}k\theta$  e para que isto ocorra é suficiente que  $k\theta = 2n\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , ou seja,  $\cos k\theta = 1$  e  $\operatorname{sen}k\theta = 0$ .

Neste caso a órbita é  $k$ -periódica, pois

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_0 \cos(k+1)\theta + d_0 \operatorname{sen}(k+1)\theta = \\ &= x_0 (\cos k\theta \cos\theta - \operatorname{sen}k\theta \operatorname{sen}\theta) + d_0 (\operatorname{sen}k\theta \cos\theta + \operatorname{sen}\theta \cos k\theta) = \\ &= x_0 \cos\theta + d_0 \operatorname{sen}\theta = x_1. \end{aligned}$$

Desse modo, se  $\theta = \frac{2\pi}{k}$ , a órbita é  $k$ -periódica.

Por exemplo, se  $\theta = \frac{\pi}{3}$  (portanto  $\theta = \frac{2\pi}{6}$ ) a órbita passando por  $x_0 = 1$ ,  $x_1 = 0$  é 6-periódica.

De fato, calculemos essa órbita

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 0 \implies d_0 = -\cot\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Donde:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_0 \cos 2\theta + d_0 \sin 2\theta = \cos \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{2\pi}{3} = \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{1\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot 2} = -1 \end{aligned}$$

$$x_3 = x_0 \cos 3\theta + d_0 \sin 3\theta = x_0 \cos \pi + d_0 \sin \pi = -x_0 = -1$$

$$\begin{aligned} x_4 &= x_0 \cos 4\theta + d_0 \sin 4\theta = \cos \frac{4\pi}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{4\pi}{3} = \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_5 &= x_0 \cos 5\theta + d_0 \sin 5\theta = \cos \frac{5\pi}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{5\pi}{3} = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \end{aligned}$$

$$x_6 = x_0 \cos 6\theta + d_0 \sin 6\theta = x_0 \cos 2\pi + d_0 \sin 2\pi = x_0 = 1$$

$$\begin{aligned} x_7 &= x_0 \cos 7\theta + d_0 \sin 7\theta = \cos \frac{7\pi}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{7\pi}{3} = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 = x_1 \end{aligned}$$

Como  $x_6 = x_0$ ,  $x_7 = x_1$ , nossa afirmação está comprovada.

A correspondente órbita do levantamento  $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$   $(x_0, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4), (x_4, x_5), (x_5, x_6)$  é dada por  $(1, 0), (0, -1), (-1, -1), (-1, 0), (0, 1), (1, 1)$  e está representada na figura 2.

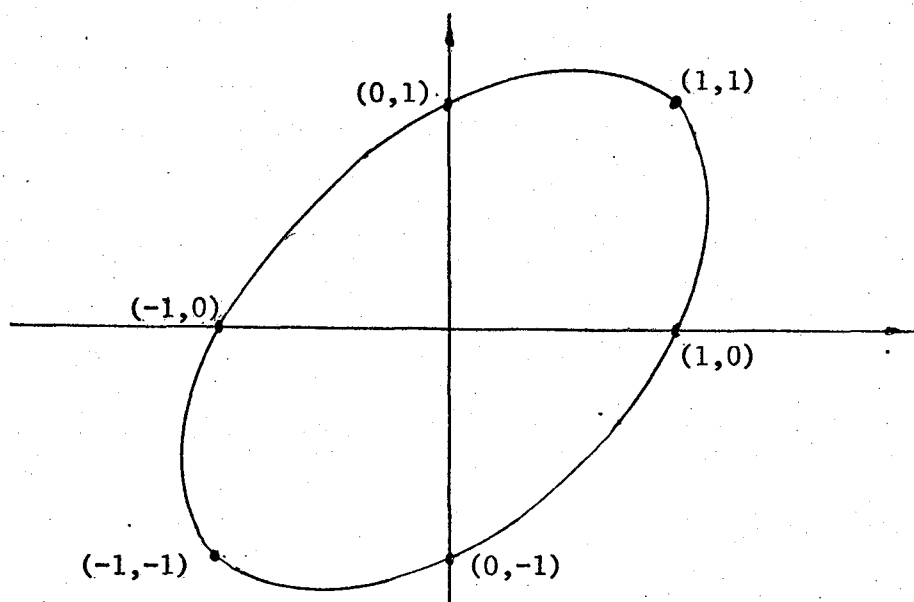


Figura 2

Analisemos agora o mesmo exemplo com base nos coeficientes  $a$  e  $b$ . Faremos as hipóteses  $|a+b| = 1$  e  $|a-b| = 1$ , com  $x_0 = x_1$  e  $x_0 = -x_1$ , respectivamente.

Caso (1)

$a + b = 1$  e  $x_0 = x_1 \in \mathbb{R} \implies f(x,y) = x - b(x-y)$  e  $\tilde{f}$  é dada por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1-b & b \end{bmatrix}$$

cujo polinômio característico tem raízes  $\lambda_1 = 1$  e  $\lambda_2 = b-1$ .

Como  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ , pode ocorrer:

(i)  $\lambda_1 = \lambda_2$

ou (ii)  $\lambda_1 \neq \lambda_2$

A suposição (i)  $\implies \lambda_2 = 1$ ,  $a = -1$  e  $b = 2 \implies$   
 $\implies f(x,y) = -x + 2y$ .

Neste caso, a expressão geral da órbita de  $x_n$  é

$$x_n = \left(x_0 - \frac{n-1}{n}x_0\right) = x_0.$$

A suposição (ii)  $\implies \lambda_1 = 1$  e  $\lambda_2 = b-1 \neq 1$  e a expressão geral da órbita é

$$x_n = \frac{\lambda_2 x_0 - x_1}{\lambda_2 - 1} - \frac{\lambda_2^n (x_0 - x_1)}{\lambda_2 - 1}$$

$$x_n = \frac{(\lambda_2 - 1)x_0}{\lambda_2 - 1}$$

$$x_n = x_0 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Portanto, a órbita de  $f(x,y) = ax + by$ , com as condições  $a+b = 1$  e  $x_0 = x_1$ , é  $x_j = x_0$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$ , órbita periódica de período 1.

### Caso (2)

$$-a - b = 1 \quad \text{e} \quad x_1 = x_0 \in \mathbb{R} \implies$$

$$\implies A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b-1 & b \end{bmatrix}$$

com autovalores  $\lambda = \frac{1}{2}(b \pm \sqrt{b^2 - 4b - 4})$  e  $f(x,y) = -x + b(y-x)$ .

Logo, a órbita  $x_n$  é:

$$x_0$$

$$x_1 = x_0$$

$$x_2 = -x_0$$

$$x_3 = -x_1 = -x_0$$

$$x_4 = -x_2 = x_0$$

$$x_5 = -x_3 = x_0$$

$$x_6 = -x_4 = -x_0$$

$$x_7 = -x_5 = -x_0$$

$$x_8 = -x_6 = x_0$$

$$\vdots$$

$$x_n = -x_{n-2} + b(x_{n-1} - x_{n-2}) \quad n \geq 2.$$

$$0$$

A órbita positiva de  $f(x,y) = ax + by$ , com  $-a-b = 1$  e  $x_0 = x_1$ , é periódica de período 4, pois  $x_4 = x_0$  e  $x_5 = x_1$ .

### Caso (3)

$$a-b = 1 \text{ e } x_0 = -x_1 \in \mathbb{R} \implies f(x,y) = x + b(x+y) \text{ e } \tilde{f}$$

é dado por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1+b & b \end{bmatrix}$$

com autovalores  $\lambda_1 = -1$  e  $\lambda_2 = b+1$ .

Para (i)  $\lambda_1 = \lambda_2$ ,  $\lambda_1 = -1 \implies b = -2$  e  $a = -1 \implies \implies f(x,y) = -x - 2y$

$$x_n = n(-1)^{n-1} (x_1 - \frac{n-1}{n}(-1)x_0) \implies x_{2n} = x_0$$

e  $x_{2n+1} = -x_0$ .

(ii)  $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$x_n = (-1)^n \left( \frac{\lambda_2 x_0 - x_1}{\lambda_2 + 1} \right) - \frac{\lambda_2^n (-x_0 - x_1)}{\lambda_2 + 1}$$

o que implica  $x_{2n} = x_0$  e  $x_{2n+1} = -x_0$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Logo, a órbita positiva de  $f(x, y) = ax + by$ , com as condições  $a - b = 1$  e  $x_0 = -x_1$ , é periódica de período 2.

#### Caso (4)

$$-a + b = 1 \text{ e } x_0 = -x_1 \in \mathbb{R} \implies A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ b-1 & b \end{bmatrix} \text{ com}$$

autovalores  $\lambda = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4b - 4}}{2}$  e  $f(x, y) = -x + b(x + y)$ .

Neste caso a órbita  $x_n$  é mais simplesmente obtida desenvolvendo-se

$$x_0$$

$$x_1 = -x_0$$

$$x_2 = -x_0$$

$$x_3 = -x_1 = x_0$$

$$x_4 = -x_2 = x_0$$

$$x_5 = -x_3 = -x_0$$

$$x_6 = -x_4 = -x_0$$

$$x_7 = -x_5 = x_0$$

$$x_8 = -x_6 = x_0$$



$$x_9 = -x_7 = -x_0$$

$$x_{10} = -x_8 = -x_0$$

$$\vdots$$

$$x_n = -x_{n-2} + b(x_{n-2} + x_{n-1}) \quad n \geq 2$$

$$0$$

e, como  $(x_4, x_5) = (x_0, x_1)$ , segue-se que a órbita é periódica de período 4.

## 2. COMPORTAMENTO DE SOLUÇÕES APROXIMADAS DE ALGUMAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Consideremos agora o problema do valor inicial

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x) \\ (2) \quad x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

onde  $x$ ,  $f(t, x)$  são  $m$ -vetores (vetores  $m$ -dimensionais reais ou complexos),  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ .

A abordagem desse problema do ponto de vista da Análise Numérica leva muitas vezes à consideração de uma recorrência.

Os chamados métodos de passo simples [4, Parte 1] consistem em discretizar a variável  $t$  considerando um incremento fixo  $h$  de modo que  $t_n = t_0 + nh$ . Isto leva freqüentemente a uma equação diferença:

$$\begin{aligned} x(t_{n+1}) &= g(t_n, x(t_n), x(t_{n-1}), \dots, x(t_{n-N}); h) \\ (3) \quad x(t_n) &= x_n \end{aligned}$$

cuja solução é tomada como aproximação da solução de (2).

Cada método de passo simples é uma maneira de se chegar a uma equação desse tipo. Neste texto será visto inicialmente, um exemplo de um método, da diferença central, aplicado a uma equação de segunda ordem, posteriormente, dois exemplos do método de Euler aplicado a duas equações de primeira e segunda ordens, respectivamente.

Observemos que no caso autônomo, isto é, quando  $f$  não

depende de  $t$ , a equação diferença (3), nada mais é do que um endomorfismo de ordem  $N+1$  em  $R^m$  ou  $C^m$ , o qual depende de um parâmetro  $h$ .

Em alguns casos, entretanto, o interesse está no cálculo da solução num intervalo limitado  $[t_0, t_0+b]$  e na precisão do método empregado, restrito a esse intervalo.

Por outro lado, propriedades de estabilidade ou o problema de determinar soluções periódicas de (2) estão naturalmente ligados aos intervalos  $[t_0, +\infty)$  ou  $(-\infty, \infty)$ , respectivamente.

A consideração de questões dessa natureza leva ao problema de saber se as soluções de (3), gozam de propriedades análogas às das soluções de (2) nesses intervalos. Outro problema de interesse é o de saber como essas propriedades dependem do passo  $h$ .

A apresentação deste capítulo está baseada em [4] e, através da análise de alguns exemplos, pretendemos facilitar a compreensão dos problemas mencionados anteriormente.

Consideremos inicialmente a equação diferença

$$(4) \quad x_{n+1} = Ax_n$$

onde  $A = (a_{ij})$   $i, j = 1, 2$ ,  $x_n = \text{col}(x_n^1, x_n^2)$ . Se os autovalores da matriz real  $A$  são  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  e soluções complexas são admitidas, então a solução geral de (4) é da forma:

$$(5) \quad x_n = c\lambda_1^n + d\lambda_2^n \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

onde  $c$  e  $d$  são vetores bidimensionais obtidos como múlti-

plos de autovetores associados a  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , respectivamente. Para ver isto basta observar que, sendo  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , dois autovetores  $v_1, v_2$  associados a  $\lambda_1, \lambda_2$ , respectivamente, formam uma base do  $C^2$ .

Escrevemos o termo inicial  $x_0 = \alpha v_1 + \beta v_2$  e tomamos  $c = \alpha v_1$ ,  $d = \beta v_2$ .

Para o caso em que  $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$ , desde que  $c = \bar{d}$  teremos  $x_n \in R$ .

A origem  $x_n = 0$   $n = 0, 1, 2, \dots$ , é uma solução de (4) e, além disso, temos as seguintes alternativas segundo [4]:

(A) Se  $|\lambda_1|, |\lambda_2| < 1$ . Toda solução tende para a origem quando  $n \rightarrow \infty$ .

Se  $\lambda_1, \lambda_2 \in R$  a origem é chamada "nó estável".

Se  $\lambda_1, \lambda_2 \notin R$  a origem é chamada "foco estável".

(B) Se  $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$ . Toda solução é limitada. Neste caso a origem é chamada "centro".

(C) Se  $|\lambda_1|, |\lambda_2| > 1$ . Toda solução satisfaz  $\lim |x_n| = \infty$ .

Se  $\lambda_1, \lambda_2 \in R$  a origem é chamada "nó instável".

Se  $\lambda_1, \lambda_2 \notin R$  a origem é chamada "foco instável".

(D) Se  $|\lambda_1| < 1 < |\lambda_2|$ . Toda solução satisfaz  $\lim |x_n| = \infty$ , exceto quando se tem  $d = 0$  em (5), neste caso  $\lim x_n = 0$ .

$\lambda_1, \lambda_2 \in R$  e a origem é chamada "ponto de sela".

Essa terminologia é inspirada nas Equações Diferenciais, porque em cada caso, o comportamento das soluções próximas

ã origem é semelhante ao comportamento das Equações Diferenciais em ponto de equilíbrio análogo.

Seja agora a equação do oscilador linear amortecido e vejamos como ela pode se relacionar com um endomorfismo.

$$(6) \quad \ddot{x} + \mu \dot{x} + x = 0 \quad (x \text{ escalar})$$

ou equivalentemente o sistema

$$(6') \quad \dot{y} = Ay$$

onde  $y = \text{col}(y_1, y_2)$ ,  $y_1 = x$ ,  $y_2 = \dot{x}$  e a matriz  $A$  é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\mu \end{bmatrix}.$$

Sabe-se da Teoria das Equações Diferenciais que o comportamento das soluções de (6') próximas de  $y = 0$  depende do parâmetro  $\mu$ .

Para os autovalores  $\lambda_1, \lambda_2$  de  $A$  são possíveis as seguintes alternativas segundo [2; pg. 101].

Sejam

$$\lambda_1 = \frac{-\mu - \sqrt{\mu^2 - 4}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{-\mu + \sqrt{\mu^2 - 4}}{2}.$$

$$(I) \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

$$(1) \quad \mu^2 - 4 = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -\frac{\mu}{2}.$$

$$(A) \quad \text{Para } \mu = 2 \quad \lambda = -1$$

Neste caso existe somente um autovetor independente  $v_1$  de  $\lambda$ .

Quando  $t \rightarrow \infty$  e  $t \rightarrow -\infty$ , a tangente à órbita torna-se paralela a  $v_1$ .

A origem chama-se "nó estável impróprio".

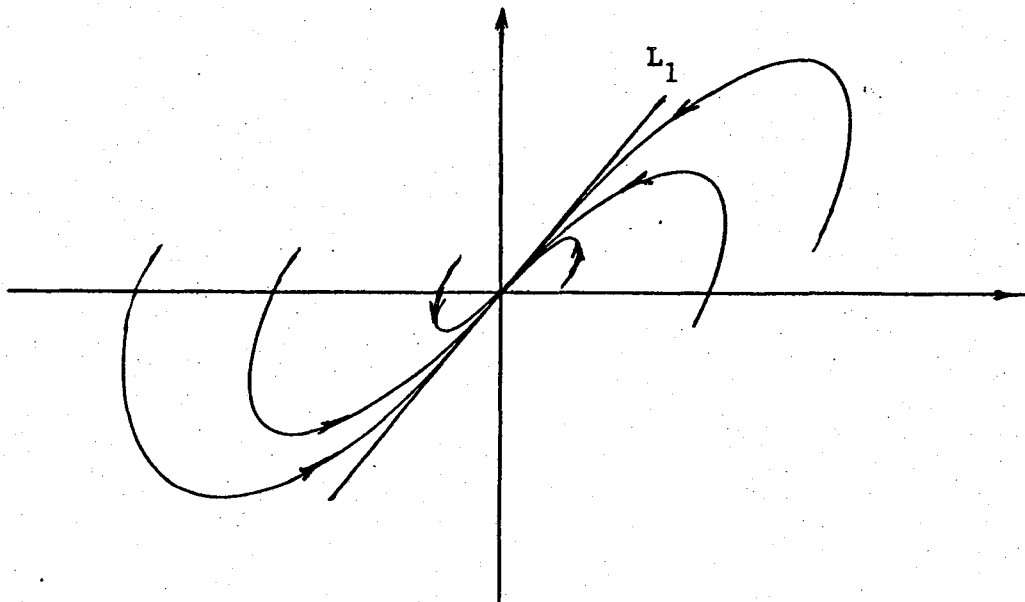


Figura 3

(B) Para  $\mu = -2$ ,  $\lambda = 1$  e a origem chama-se "nó instável impróprio".

$$(2) \mu^2 - 4 > 0 \implies |\mu| > 2.$$

$$(A) 2 < \mu < \infty \implies \lambda_1, \lambda_2 < 0$$

Quando  $t \rightarrow \infty$ , toda solução tende para zero.

A origem é chamada "nó estável".

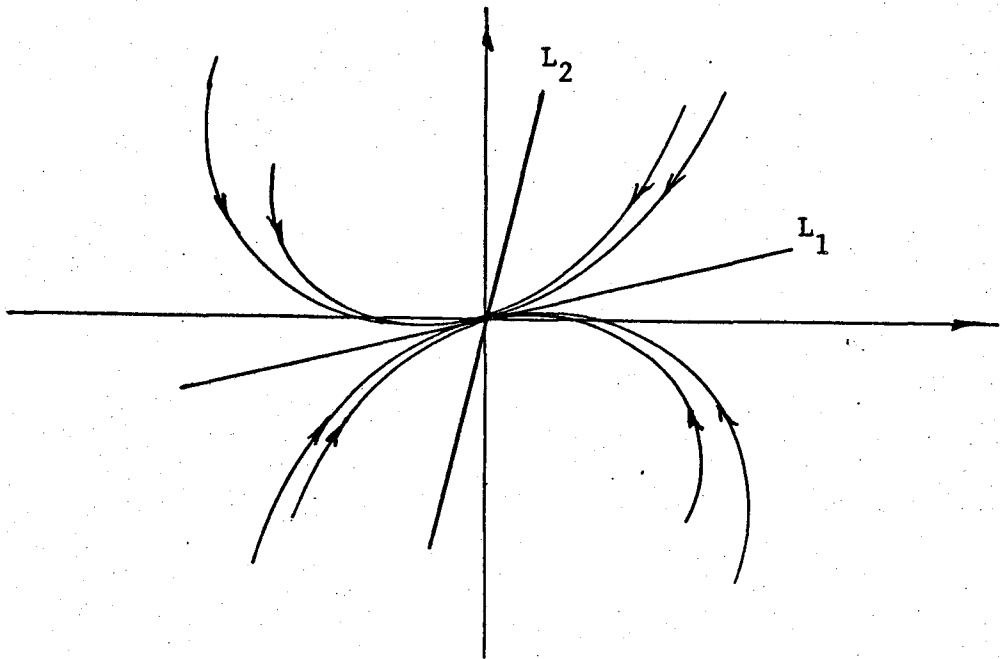


Figura 4

(B)  $-\infty < \mu < -2 \implies \lambda_2 > \lambda_1 > 0$ .

Toda solução tende para infinito quando  $t \rightarrow +\infty$ .

A origem é chamada "nô instável".

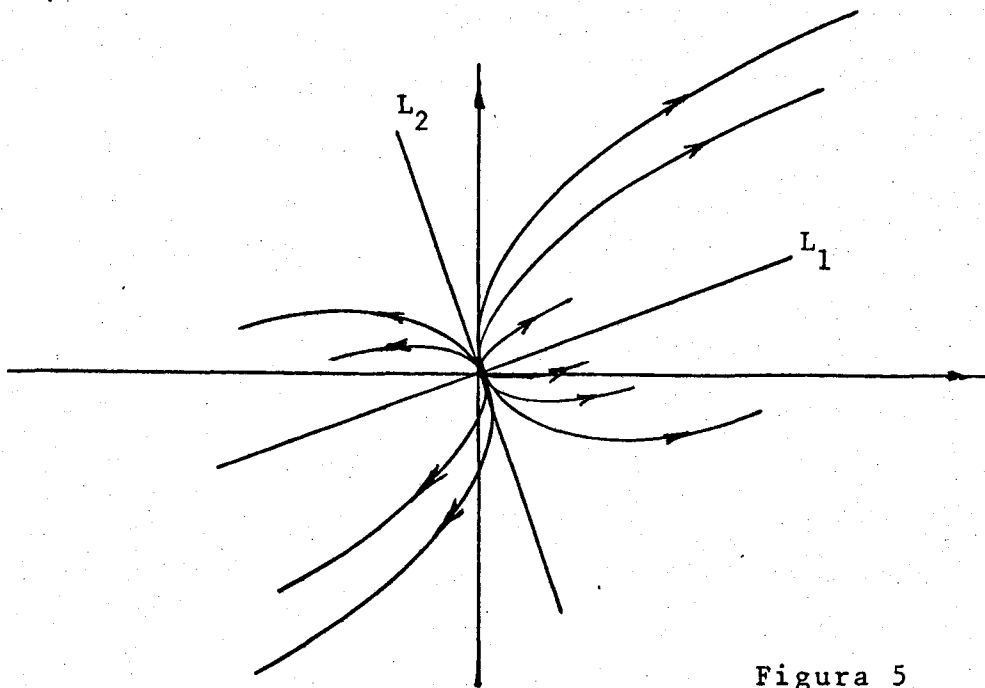


Figura 5

$L_1$  e  $L_2$  são retas que contêm os autovetores  $v_1$  e

$v_2$ .

$$(II) \lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{R} \implies \lambda_1 = \bar{\lambda}_2 \implies$$

$$\implies \begin{cases} \lambda_1 = -\frac{\mu}{2} + i\frac{\beta}{2} \\ \lambda_2 = -\frac{\mu}{2} - i\frac{\beta}{2} \end{cases}$$

$$e \begin{cases} v_1 = u + iv \\ v_2 = u - iv \end{cases}$$

são autovetores associados a  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , respectivamente.

$$(1) \mu^2 - 4 < 0 \implies |\mu| < 2$$

(C)  $0 < \mu < 2$  deixa  $\operatorname{Re}(\lambda_j) < 0$   $j = 1, 2$ .

Todas as soluções se aproximam do zero quando  $t \rightarrow \infty$ .

As órbitas são espirais. O ponto de equilíbrio é chamado um "foco estável".

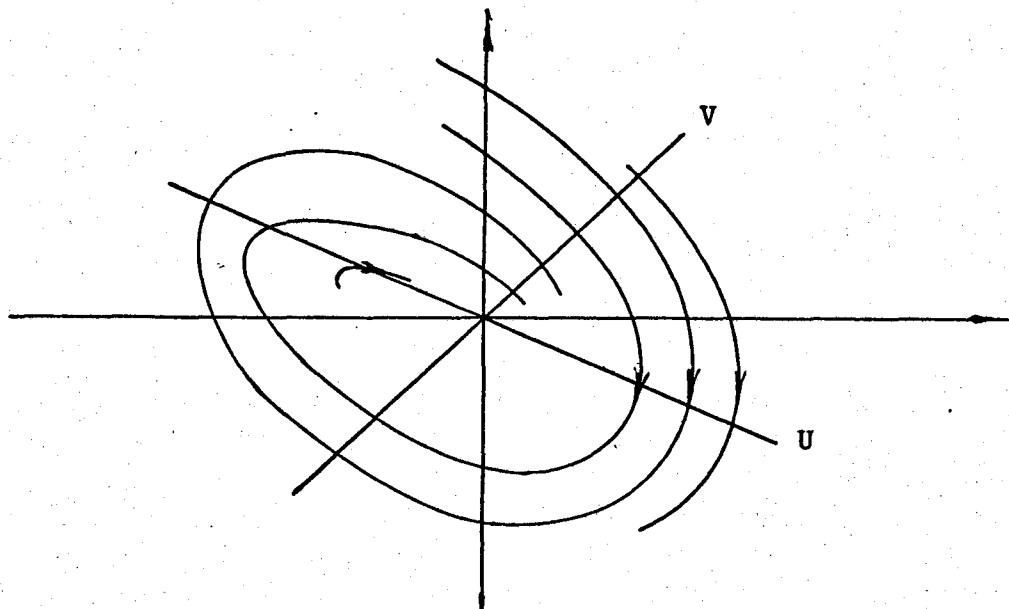


Figura 6



(D)  $-2 < \mu < 0$  implica  $\operatorname{Re}(\lambda_j) > 0 \quad j = 1, 2$ .

Todas as soluções tendem a infinito quando  $t \rightarrow \infty$ .

O ponto de equilíbrio é chamado "foco instável".

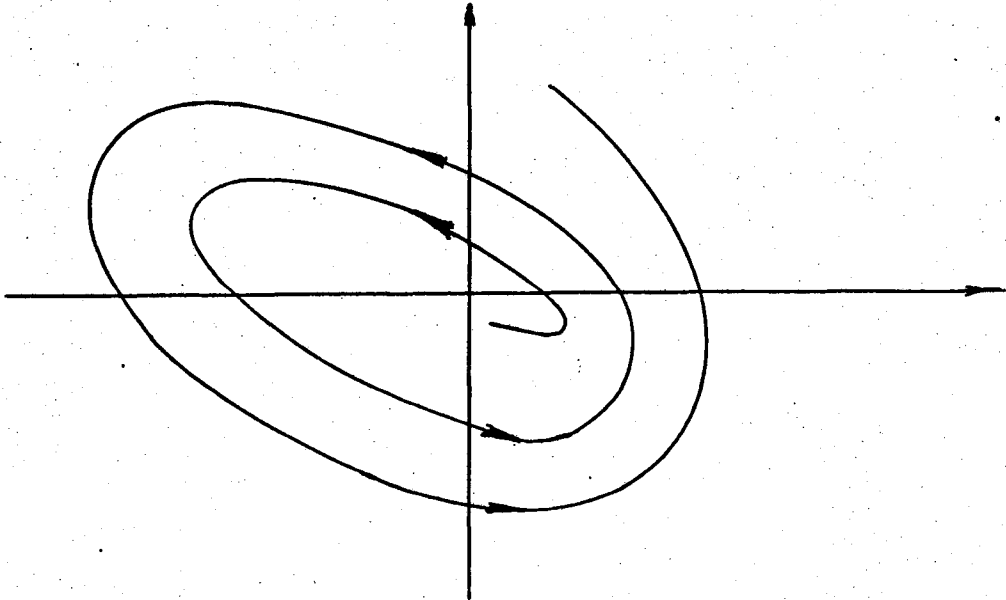


Figura 7

(E)  $\mu = 0, \quad \lambda_j = \pm i \quad j = 1, 2$

ou seja  $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$  com  $\operatorname{Re}(\lambda_j) = 0$  e  $\operatorname{Im}(\lambda_j) \neq 0 \quad j=1, 2$ .

As órbitas são curvas fechadas e toda solução é periódica de período  $2\pi$ .

Se  $u$  e  $v$  são não ortogonais, estas curvas serão elipses distorcidas. A origem é estável e é chamada um "centro".

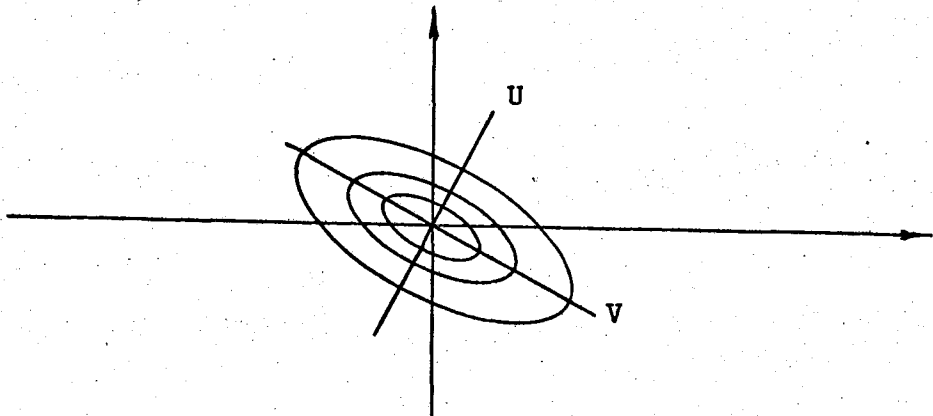


Figura 8

$U$  e  $V$  são retas geradas por  $u$  e  $v$  respectivamente.

Resumindo esta análise feita, que estabelece a relação entre o parâmetro  $\mu$  e os autovalores da matriz  $A$ , na equação (6'), podemos afirmar:

- (A)  $2 \leq \mu < \infty$  a origem é um nó estável  
 (B)  $-\infty < \mu \leq -2$  a origem é um nó instável  
 (C)  $0 < \mu < 2$  a origem é um foco estável  
 (D)  $-2 < \mu < 0$  a origem é um foco instável  
 (E)  $\mu = 0$  a origem é um centro

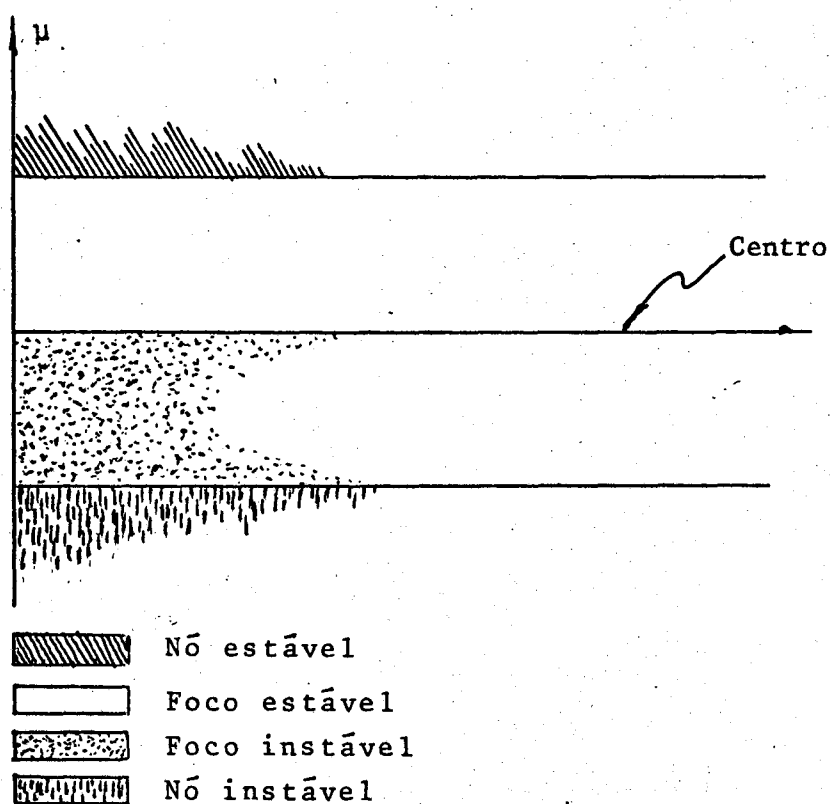


Figura 9

Por outro lado, vamos considerar o método numérico da diferença central para aproximar a equação (6) a uma equação de diferença.

Nesse método desenvolvemos  $y(t)$  em séries de Taylor, com centro em  $t_n$  e acréscimos  $+h$  e  $-h$ ,  $h > 0$ , como segue em (i) e (ii), obtendo para a derivada primeira a aproximação

$$(*) \quad \dot{y}(t_n) = \frac{y(t_n+h) - y(t_n-h)}{2h}$$

$$(i) \quad y(t_n+h) = y(t_n) + h\dot{y}(t_n) + \frac{h^2}{2!}\ddot{y}(t_n) + \frac{h^3}{3!}\dddot{y}(t_n) + \dots$$

$$(ii) \quad y(t_n-h) = y(t_n) - h\dot{y}(t_n) + \frac{h^2}{2!}\ddot{y}(t_n) - \frac{h^3}{3!}\dddot{y}(t_n) + \dots$$

Subtraindo essas duas últimas igualdades, obtemos

$$y(t_n+h) - y(t_n-h) = 2h\dot{y}(t_n) + \frac{2h^3}{3!}\dddot{y}(t_n) + \dots$$

Desprezando os termos da terceira derivada em diante, vem

$$y(t_n+h) - y(t_n-h) = 2h\dot{y}(t_n)$$

o que nos dá a aproximação (\*).

Adicionando (i) e (ii) temos

$$y(t_n+h) + y(t_n-h) = 2y(t_n) + \frac{2h^2}{2!}\ddot{y}(t_n) + \dots$$

obtendo para a derivada segunda a aproximação

$$(**) \quad \ddot{y}(t_n) = \frac{y(t_n+h) + y(t_n-h) - 2y(t_n)}{h^2}$$

Considerando que  $t_{n+h} = t_{n+1}$ ,  $t_{n-h} = t_{n-1}$ , (\*) e (\*\*), temos a equação (6) aproximada por

$$(7) \quad \frac{1}{h^2} [x(t_{n+1}) - 2x(t_n) + x(t_{n-1})] + \\ + \frac{\mu}{2h} [x(t_{n+1}) - x(t_{n-1})] + x(t_n) = 0.$$

Agora, fazendo  $z_n^1 = x(t_{n-1})$  e  $z_n^2 = x(t_n)$ , obtemos obviamente

$$(8) \quad z_{n+1}^1 = z_n^2$$

e, além disso, a equação (7) passa a ter a seguinte forma equi-valente:

$$(9) \quad z_{n+1}^2 = -\frac{2-h\mu}{2+h\mu} z_{n-1}^2 + \frac{4-2h^2}{2+h\mu} z_n^2$$

Como a relação (8) é uma identidade, a equação (7) é equivalente ao par (8), (9) que, por sua vez pode ser escrito na forma matricial como a equação diferença

$$(10) \quad z_{n+1} = Tz_n$$

onde  $z_n = \text{col}(z_n^1, z_n^2)$  e  $T$  é a matriz  $2 \times 2$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2-h\mu}{2+h\mu} & \frac{4-2h^2}{2+h\mu} \end{bmatrix}$$

As expressões (6) e (7) vêm exemplificar os comentários feitos no início deste capítulo em relação às equações (2) e (3).

Além disso, a equação (10) representa o endomorfismo do  $\mathbb{R}^2$  (ou  $\mathbb{C}^2$ ), definido no capítulo anterior como levantamento do 2-endomorfismo

$$z_{n+1} = -\frac{2 - h\mu}{2 + h\mu}z_{n-1} + \frac{4 + 2h^2}{2 + h\mu}z_n$$

o qual foi fartamente analisado naquela ocasião.

Entretanto, ao adotarmos este procedimento, uma questão que adquire grande interesse é o efeito do parâmetro  $h$  sobre o comportamento das soluções de (10) como problema aproximado de (6) e, como já observamos, uma pergunta básica é: "Em que condições as soluções de (6) gozam de propriedades análogas às das soluções de (10)?"

Em vez de analisarmos diretamente a equação (10), nos prenderemos à equação mais geral (4). Observamos inicialmente que  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são completamente determinados pelo traço de  $A$ ,  $\text{tr } A = a_{11} + a_{22}$ , e seu determinante,  $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ , uma vez que sua equação característica é:

$$\lambda^2 - 2b\lambda + c = 0$$

onde  $2b = \text{tr } A$ ,  $c = \det A$ .

A parábola  $b^2 = c$  do plano  $bc$  é o lugar geométrico dos pontos  $(b, c)$ , em que a matriz  $A$  possui um autovalor com multiplicidade dois. Damos a essa pa-

rábola um caráter de excepcionalidade e não nos aprofundaremos por ora ao estudo desses pontos.

Damos a seguir as alternativas possíveis para a solução  $x_n = 0$   $n = 0, 1, 2, \dots$ , quanto ao comportamento das soluções de (4) próximas à origem, segundo a nomenclatura da página 27.

$$\text{Sejam } \lambda_1 = b - \sqrt{b^2 - c}, \quad \lambda_2 = b + \sqrt{b^2 - c}.$$

$$(1) \quad b^2 < c \text{ implica } \lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{R}, \quad \lambda_1 = \bar{\lambda}_2 \text{ e } |\lambda_i| = c \quad i=1,2.$$

Portanto  $c < 1$       foco estável

$c = 1$             centro

$c > 1$             foco instável

$$(2) \quad b^2 = c \text{ implica } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad \lambda_i = b \quad i = 1, 2.$$

Aos comentários feitos anteriormente para esse caso podemos acrescentar que  $P = (1, 1)$  e  $Q = (-1, 1)$  pertencem à parábola  $b^2 = c$ .

$$(3) \quad b^2 > c \text{ implica } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

(i) Vamos caracterizar inicialmente a região do plano  $bc$  em que a origem é ponto de sela.

Essa região está definida pelas condições

$$|\lambda_2| < 1 < |\lambda_1| \quad \text{ou} \quad |\lambda_1| < 1 < |\lambda_2|.$$

Como supomos  $\lambda_1 < \lambda_2$  pode ocorrer:

$$(a_1) \lambda_1 < -1 \quad e \quad (a_2) -1 < \lambda_2 < 1$$

ou

$$(b_1) -1 < \lambda_1 < 1 \quad e \quad (b_2) \lambda_2 > 1$$

Das condições  $(a_1)$  e  $(a_2)$ , obtemos:

$$(a_1) \iff b - \sqrt{b^2 - c} < -1 \iff 1 + b < \sqrt{b^2 - c}$$

$$\text{Para } 1 + b > 0 \implies b > -1 \quad e \quad -2b > c+1$$

$$\text{Então } (a_1) \iff b \leq -1 \quad \text{ou} \quad -2b > c+1 \quad (*)$$

$$(a_2) \iff \sqrt{b^2 - c} > -(1+b) \quad e \quad \sqrt{b^2 - c} < 1 - b$$

$$\sqrt{b^2 - c} > -(1+b) \iff b \geq -1 \quad \text{ou} \quad -2b > c+1 \quad (**)$$

$$\sqrt{b^2 - c} < 1 - b \iff b < 1 \quad e \quad 2b < c+1 \quad (***)$$

Das condições  $(b_1)$  e  $(b_2)$ , obtemos:

$$(b_1) \iff -\sqrt{b^2 - c} < 1 - b \quad e \quad -\sqrt{b^2 - c} > -(1+b)$$

$$-\sqrt{b^2 - c} < 1 - b \iff b \leq 1 \quad \text{ou} \quad 2b > c+1 \quad (\Delta)$$

$$-\sqrt{b^2 - c} > -(1+b) \iff b > -1 \quad e \quad -2b < c+1 \quad (\Delta\Delta)$$

$$(b_2) \iff \sqrt{b^2 - c} > 1 - b \iff b \geq 1 \quad \text{ou} \quad 2b > c+1 \quad (\Delta\Delta\Delta)$$

As condições  $(*)$ ,  $(**)$ ,  $(***)$  e  $(\Delta)$ ,  $(\Delta\Delta)$ ,  $(\Delta\Delta\Delta)$  determinam completamente a região do plano  $bc$  onde se tem o ponto de sela.

(ii) Vamos verificar a região do plano  $bc$  em que a origem é um nó estável.

Define essa região as condições

$$|\lambda_1|, |\lambda_2| < 1.$$

Do fato de  $\lambda_1 < \lambda_2$  ocorre

$$\begin{array}{ccc} -1 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1 \\ (c_1) & & (c_2) \end{array}$$

$$(c_1) \iff -\sqrt{b^2 - c} > -(1+b) \iff b > -1 \text{ e } -2b < c+1 \quad (\neq)$$

e

$$(c_2) \iff \sqrt{b^2 - c} < 1 - b \iff b < 1 \text{ e } 2b < c+1 \quad (\neq\neq)$$

As condições  $(\neq)$  e  $(\neq\neq)$  determinam a região onde se tem o nó estável.

(iii) Determinemos a região do plano  $bc$  em que a origem é um nó instável.

Essa região é definida pelas condições

$$|\lambda_1|, |\lambda_2| > 1.$$

Podendo ocorrer  $(d_1) \lambda_1 < \lambda_2 < -1$

ou  $(d_2) \lambda_2 > \lambda_1 > 1$

$(d_3) \lambda_1 < -1 \text{ e } \lambda_2 > 1$



$$(d_1) \Leftrightarrow -\sqrt{b^2-c} < \sqrt{b^2-c} < -(1+b)$$

$$\Leftrightarrow b < -1 \quad e \quad -2b < c+1 \quad (o)$$

$$(d_2) \Leftrightarrow \sqrt{b^2-c} > -\sqrt{b^2-c} > 1-b$$

$$\Leftrightarrow b > 1 \quad e \quad 2b < c+1 \quad (oo)$$

$$(d_3) \Leftrightarrow -\sqrt{b^2-c} < -(1+b) \quad e \quad \sqrt{b^2-c} > 1-b$$

$$\Leftrightarrow b > -1 \quad e \quad -2b > c+1$$

$$e \quad b < 1 \quad e \quad 2b > c+1 \quad (ooo)$$

As condições (o), (oo) e (ooo) determinam onde se tem o nó instável.

Obtemos assim a descrição do plano  $bc$  dado na Figura 10.

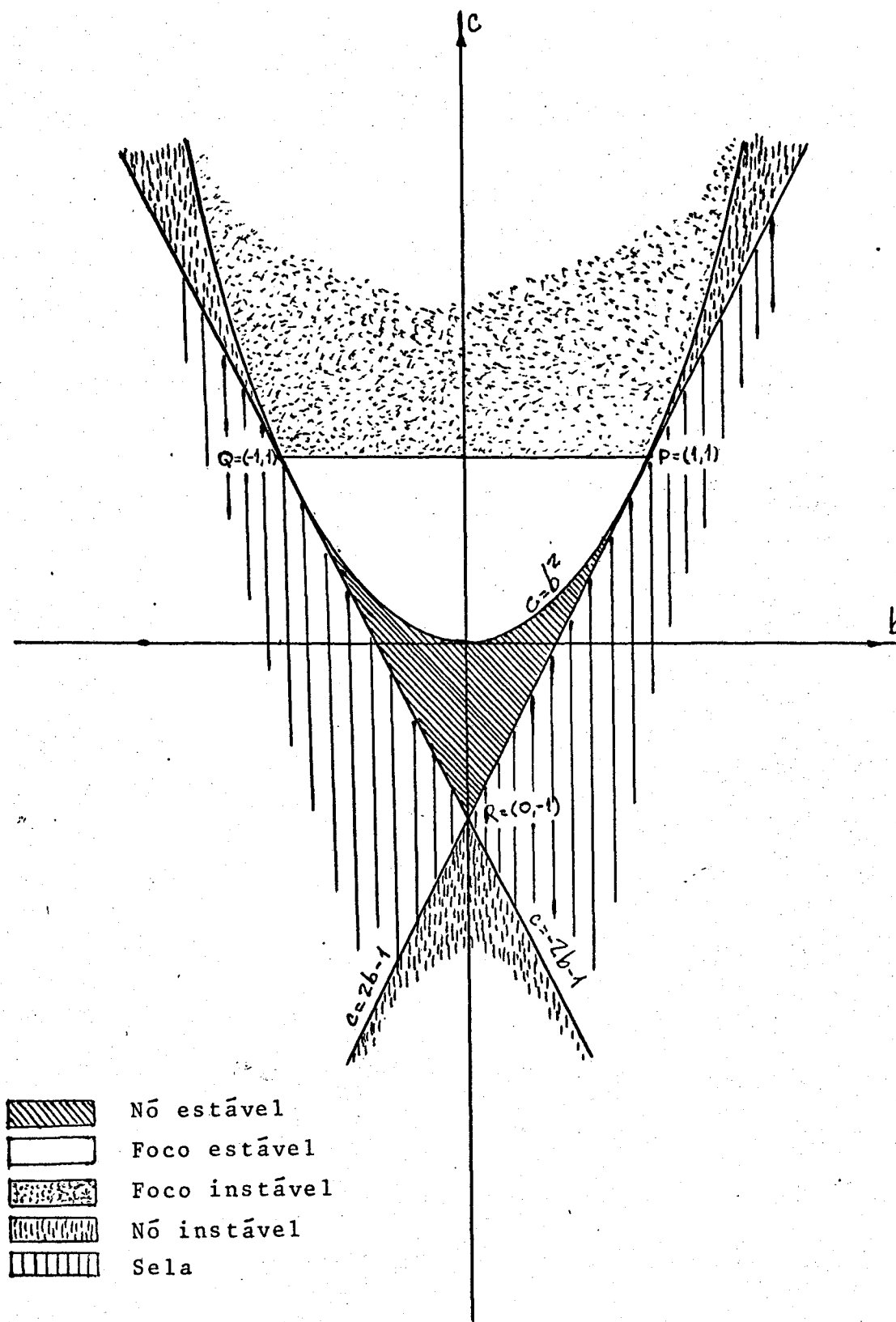


Figura 10

Sobre o segmento  $PQ$ ,  $P = (1,1)$ ,  $Q = (-1,1)$  e no ponto  $R = (0,-1)$  temos que a origem é um centro.

Voltemos agora à equação (10), uma vez que nosso objetivo é analisar a equação do oscilador (6).

Assim, fazendo  $A = T$  nas considerações anteriores temos:

$$2b = \frac{4 - 2h^2}{2 + h\mu} ; \quad c = \frac{2 - h\mu}{2 + h\mu}$$

No semiplano  $S = \{(h, \mu) : h > 0\}$  o ramo da hipérbole  $h\mu = -2$  estabelece a relação entre o passo  $h$  e o coeficiente  $\mu$  em que a equação (10) não define uma aproximação de (6).

Portanto a região do plano  $(h, \mu)$  que nos interessa é  $\Delta = \{(h, \mu) : h > 0, h\mu > -2\}$ .

A parábola  $b^2 = c$  é imagem da circunferência de raio 2 e centro na origem.

$$b^2 = c \iff \frac{(2-h^2)^2}{2+h\mu} = 2 - h\mu \iff 4-4h^2+h^4 = 4-h^2\mu^2$$

$\iff \mu^2 + h^2 = 4$  com  $h > 0$ , define a semicircunferência no semiplano em questão.

A pré-imagem da reta  $-2b = c+1$  é a reta  $h = 2$  e a reta  $2b = c+1$  não tem pré-imagem na região  $\Delta$ .

De fato

$$-2b = c+1 \iff \frac{-4 + 2h}{2 + h\mu} = \frac{2 - h\mu}{2 + h\mu} + 1$$

$$\iff -4 + 2h^2 = 4 \iff h^2 = 4$$

$$\iff h = 2, \quad h > 0$$

$$2b = c+1 \iff \frac{4 - 2h^2}{2 + h\mu} = \frac{4}{2 + h\mu}$$

$$\iff 4 - 2h^2 = 4 \iff h = 0$$

Os pontos do segmento PQ tem coordenadas  $c = 1$  e  $-1 \leq b \leq 1$ .

Esses pontos têm pré-imagem dos pontos do segmento  $\{(h,0); 0 < h \leq 2\}$ .

Verificamos que:

$$c = 1 \iff 2 - h\mu = 2 + h\mu \iff h\mu = 0$$

$$\iff \mu = 0 \quad \text{para } h > 0$$

$$-1 \leq b \leq 1 \iff -1 \leq \frac{2 - h^2}{2 + h\mu} \leq 1 \iff$$

$$\iff -2 - h\mu \leq 2 - h^2 \leq 2 + h\mu$$

$$\iff h^2 - h\mu - 4 \leq 0 \quad \text{e} \quad -h^2 \leq h\mu$$

$$\iff h^2 - h\mu - 4 \leq 0 \quad \text{e} \quad -h \leq \mu$$

Logo

$$\begin{cases} h^2 - h\mu - 4 \leq 0 \\ -h \leq \mu \quad \text{com } \mu = 0 \end{cases}$$

$$\iff |h| \leq 2 \iff 0 < h \leq 2.$$

Portanto a região do centro corresponde a  $\mu = 0$  e  $0 < h \leq 2$ .

O ponto  $R = (0, -1)$  não tem pré-imagem em  $\Delta$ , pois nestas condições  $h = \sqrt{2}$ , mas não existe valor para  $\mu$ .

$$b = 0 \iff \frac{2 - h^2}{2 + h\mu} = 0 \iff h = \sqrt{2}$$

mas  $c = -1 \iff 2 - h\mu = -2 - h\mu$

A região do ponto de sela  $\{2b < c+1\} \cap \{-2b > c+1\}$  tem pré-imagem  $\{(h, \mu) : h > 2, h\mu > -2\}$  enquanto que a região  $\{2b > c+1\} \cap \{-2b < c+1\}$  não tem pré-imagem.

De fato

$$2b < c+1 \iff \frac{4 - 2h^2}{2 + h\mu} < \frac{4}{2 + h\mu} \iff -2h^2 < 0$$

$$-2b > c+1 \iff \frac{-4 + 2h^2}{2 + h\mu} > \frac{4}{2 + h\mu} \iff 2h^2 > 8 \iff h > 2$$

Enquanto que

$$2b > c+1 \iff \frac{4 - 2h^2}{2 + h\mu} > \frac{4}{2 + h\mu} \iff -2h^2 > 0.$$

Da mesma forma

$$-2b < c+1 \iff 2h^2 < 8.$$

A região do nó estável  $\{-2b < c+1\} \cap \{2b < c+1\}$  corresponde a  $\{(h, \mu) : 0 < h < 2 \text{ e } h^2 + \mu^2 > 4\}$  pois

$$-2b < c+1 \iff 2h^2 < 8 \iff |h| < 2 \iff 0 < h < 2$$

$$2b < c+1 \iff -2h^2 < 0$$

$$b^2 > c \iff \left(\frac{2 - h^2}{2 + h\mu}\right)^2 > \frac{2 - h\mu}{2 + h\mu}$$

$$\iff h^4 + h^2\mu^2 - 4h^2 > 0$$

$$\iff h^2(h^2 + \mu^2 - 4) > 0$$

$$\iff h^2 + \mu^2 > 4$$

A região do nó instável  $b < -1, b > 1, b^2 > c$  e  $\{-2b < c+1\} \cap \{2b < c+1\}$  corresponde a  $\{(h, \mu) : 0 < h < 2 \text{ e } h^2 + \mu^2 > 4\}$ .

$$2b < c+1 \iff -2h^2 < 0 \iff h > 0$$

$$-2b < c+1 \iff 0 < h < 2$$

$$b^2 > c \iff h^2 + \mu^2 > 4$$

A região do nó instável  $-1 < b < 1$ ,  $\{2b > c+1\} \cap \{-2b > c+1\}$  não tem pré-imagem.

A região do foco estável é  $\{(h, \mu) \text{ tal que } \mu > 0 \text{ e } h^2 + \mu^2 < 4\}$ , pois

$$c < 1 \iff 2 - h\mu < 2 + h\mu \iff -2h\mu < 0$$

$$\iff \mu > 0 \quad \text{para } h > 0$$

$$b^2 < c \iff h^2 + \mu^2 < 4$$

E finalmente

A região do foco instável é  $\{(h, \mu) : \mu < 0 \text{ e } h^2 + \mu^2 < 4\}$ ,

pois

$$c > 1 \iff -2h\mu < 0 \iff \mu < 0 \quad \text{para } h > 0$$

$$b^2 < c \iff h^2 + \mu^2 < 4$$

Dessa forma, determinamos a pré-imagem de cada uma das regiões do plano  $bc$ , especificadas na Figura 10 e obtemos a Figura 11, mantendo a mesma legenda.

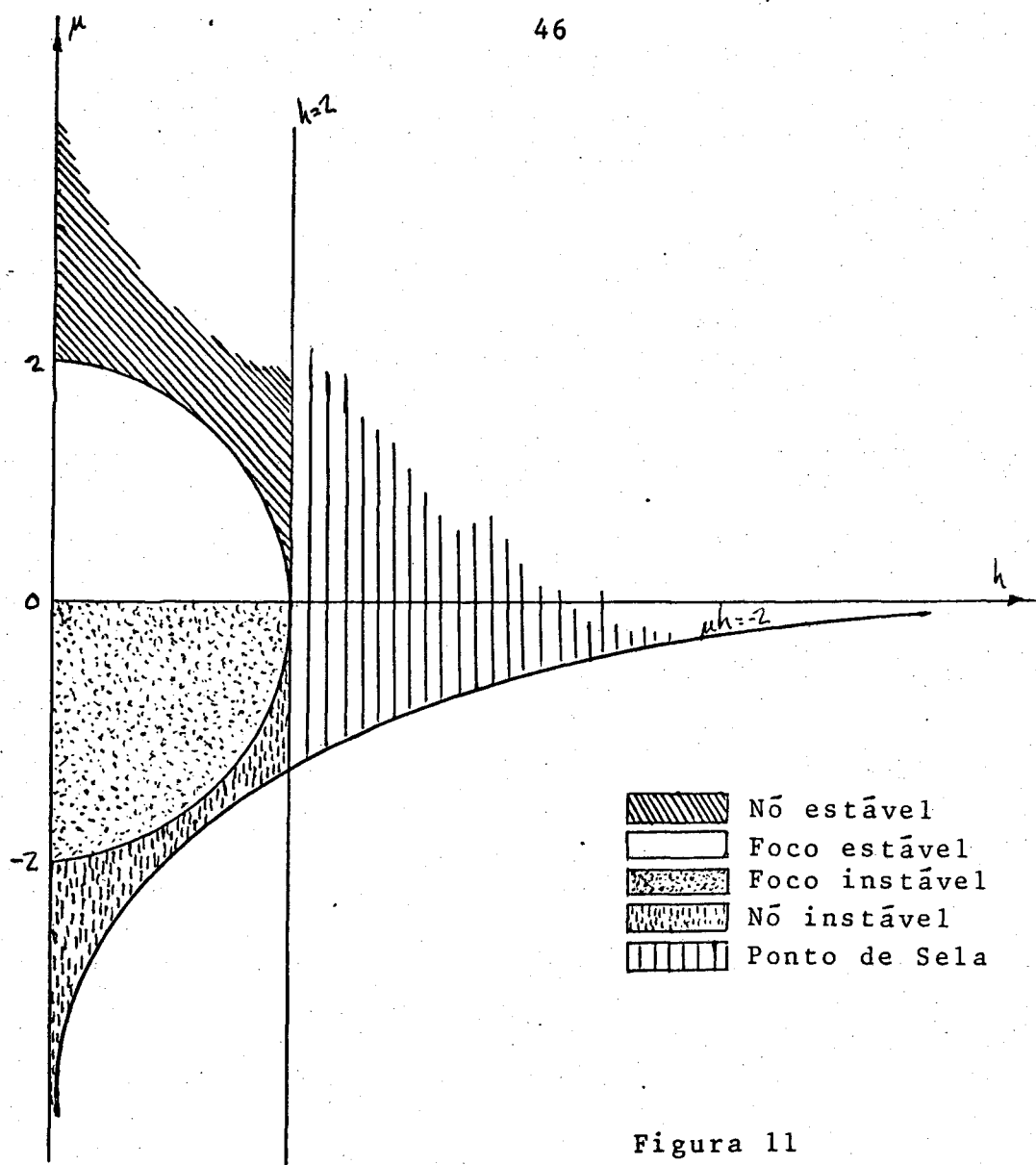


Figura 11

A hipérbole  $\mu h = -2$  é o lugar dos pontos onde a equação (10) não está definida.

A análise realizada até aqui pode ser resumida no seguinte teorema:

Teorema: Se  $0 < h < 2$ , a solução trivial da equação (10) tem o seguinte comportamento:

$$(Ah) \sqrt{4-h^2} < \mu < \infty : \text{nô estável}$$

- (Bh)  $-\frac{2}{h} < \mu < -\sqrt{4-h^2}$  : nó instável
- (Ch)  $0 < \mu < \sqrt{4-h^2}$  : foco estável
- (Dh)  $-\sqrt{4-h^2} < \mu < 0$  : foco instável
- (Eh)  $\mu = 0$  : centro

A prova é uma simples interpretação da Figura 11.

Observa-se que quando  $h \rightarrow 0$ , as condições de (Ah) a (Eh) tendem às de (A) a (E) da página 33, representadas na Figura 9, o que nos faz concluir, que para  $h$  pequeno, o comportamento das soluções da equação diferença (10) é aproximadamente o mesmo da equação diferencial (6) com  $\mu > 0$  e com  $\mu < 0$  quando  $|\mu h| < 2$ .

Já analisado o comportamento das soluções da equação do oscilador linear amortecido, nos concentremos no caso em que o mesmo tenha uma força restauradora com efeito retardado. Uma equação que expressa essa situação é a equação diferencial diferença do tipo

$$(11) \quad \ddot{x}(t) + \mu \dot{x}(t) + x(t-r) = 0$$

No modelo clássico ordinário ( $r = 0$ ) que acabamos de estudar na equação (6), sabe-se que para  $\mu \neq 0$  não existem soluções periódicas. No entanto, em [3, pg. 261], Jack K. Hale estuda um problema não linear, que inclui a equação (11), e mostra a existência de um valor  $\mu_0 > 0$ , do coeficiente  $\mu$ , onde (11) tem uma bifurcação de Hopf.



Por conseguinte, se fizermos  $\mu$  variar no sentido crescente, a solução  $(x(t), \dot{x}(t)) = (0, 0)$  permanece estável até o parâmetro  $\mu$  cruzar o valor  $\mu_0$ , quando então a solução perde a estabilidade e dela surge um ramo de soluções periódicas, para  $\mu > \mu_0$ .

Assim, a equação (11) difere fundamentalmente do modelo ordinário. O retardamento  $r$  provoca o aparecimento de soluções periódicas que não existiam no caso ordinário, e além disso, no caso retardado, o equilíbrio  $(x, \dot{x}) = (0, 0)$  torna-se instável para certos valores de  $\mu$ .

Aplicaremos o método de Euler para chegar ao problema discreto e faremos uma análise comparativa a respeito da estabilidade de um ponto de equilíbrio. Mostraremos que a Equação Diferença obtida a partir de (11) pode não preservar as propriedades de estabilidade descritas acima.

A equação (11) é equivalente ao sistema de primeira ordem

$$(12) \quad \begin{aligned} \dot{x}^1(t) &= x^2(t) \\ \dot{x}^2(t) &= -\mu x^2(t) - x^1(t-r) \end{aligned} \quad x(t) = x^1(t)$$

Com a finalidade de compatibilizar a diferença, decorrente do método de discretização, com a diferença  $r$ , própria do modelo matemático, tomaremos o passo  $h$  no método de Euler da forma  $h = \frac{r}{p}$ ,  $p$  inteiro positivo.

$$x^1(t_n+h) = x^1(t_n) + h\dot{x}^1(t_n) = x^1(t_n) + hx^2(t_n)$$

$$x^2(t_n+h) = x^2(t_n) + h\dot{x}^2(t_n) = x^2(t_n) - h\mu x^2(t_n) - hx^1(t_{n-p})$$

ou, fazendo  $x^j(t_n) = x_n^j$ ,  $j = 1, 2$ ,  $n = 1, 2, \dots$

$$(13) \quad \begin{aligned} x_{n+1}^1 &= x_n^1 + hx_n^2 \\ x_{n+1}^2 &= (1-h\mu)x_n^2 - hx_{n-p}^1 \end{aligned}$$

Com o intuito de expressarmos as relações anteriores na forma  $x_{n+1} = Ax_n$ , acrescentamos a essas, as relações  $x_{n+1}^3 = x_n^1$ ,  $x_{n+1}^4 = x_n^3$ ,  $x_{n+1}^5 = x_n^4$ ,  $\dots$ ,  $x_{n+1}^{p+1} = x_n^p$ . Nesta última, observamos que  $x_n^{p+1} = x_{n-1}^p = \dots = x_{n-p}^1$ .

As equações (13) se tornam equivalentes a

$$\begin{aligned} x_{n+1}^1 &= x_n^1 + hx_n^2 \\ x_{n+1}^2 &= (1-\mu h)x_n^2 - hx_n^{p+1} \\ x_{n+1}^3 &= x_n^1 \\ x_{n+1}^4 &= x_n^3 \\ &\vdots \\ x_{n+1}^{p+1} &= x_n^p \end{aligned}$$

que podem ser escritas:

$$(14) \quad \begin{bmatrix} x_{n+1}^1 \\ x_{n+1}^2 \\ x_{n+1}^3 \\ x_{n+1}^4 \\ \vdots \\ x_{n+1}^{p+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & h & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1-\mu h & 0 & 0 & \dots & 0 & -h \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n^1 \\ x_n^2 \\ x_n^3 \\ x_n^4 \\ \vdots \\ x_n^{p+1} \end{bmatrix}$$

Como sabemos, a estabilidade do sistema (4) depende do valor absoluto dos autovalores da matriz dos coeficientes, isto é, das raízes do polinômio  $P(\lambda)$  dado por

$$P(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & h & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1-\mu h-\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & -h \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda \end{bmatrix}$$

Desenvolvendo o determinante  $P(\lambda)$  pelos elementos da última coluna, obtemos:

$$P(\lambda) = (-1)^{p+1} \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & h & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & h & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1-\mu h-\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda \end{bmatrix}$$

Trocando as posições das duas primeiras colunas do primeiro determinante, vê-se que o mesmo se torna triangular e fica fácil mostrar que seu valor é  $-h$ , portanto

$$P(\lambda) = (-1)^{p+1} h^2 - \lambda \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & h & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1-\mu h - \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda \end{bmatrix}$$

Desenvolvendo-se esse determinante pelos elementos da última coluna e desenvolvendo-se sucessivamente os menores obtidos, também pelos elementos da última coluna, até chegarmos a um menor de ordem 2, temos:

$$P(\lambda) = (-1)^{p+1} h^2 + (-1)^{p-1} \lambda^{p-1} \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & h \\ 0 & 1-\mu h - \lambda \end{bmatrix}$$

Finalmente obtemos assim, que a equação característica de (14) pode ser escrita na forma

$$(15) \quad \lambda^{p-1} (1-\lambda) (1-\mu h - \lambda) = -h^2 < 0$$

Em virtude das raízes de um polinômio variarem continuamente com os coeficientes, segue que, para  $h$  suficientemente

pequeno, as raízes características (raízes da equação (15)) estão próximas das raízes do polinômio  $P(\lambda) = \lambda^{p-1}(\lambda-1)^2$ . Assim, do fator  $\lambda^{p-1}$  se originam  $p-1$  raízes características, contadas as multiplicidades, próximas da raiz  $\lambda = 0$  do polinômio  $P(\lambda)$ . Como essas raízes satisfazem a condição  $|\lambda| < 1$ , não podem implicar a instabilidade do sistema (14).

As outras duas raízes características,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , estão próximas da raiz dupla  $\lambda = 1$  do polinômio  $P(\lambda)$ . Estas são as raízes que podem determinar a instabilidade do sistema (14), pois existe a possibilidade de satisfazerem a condição  $|\lambda| > 1$ .

Vamos verificar que se o passo  $h = \frac{r}{p}$  for suficientemente pequeno, existem valores  $0 < \mu_0 < \mu_1$  tais que, se  $\mu_0 \leq \mu \leq \mu_1$ , então as raízes características do sistema (14) estão todas no interior do círculo unitário. Portanto, o sistema (14) é estável. Se  $\mu > \mu_1$  existe uma raiz  $\lambda$  de (15), com  $|\lambda| > 1$ . Portanto o sistema (14) perde a estabilidade quando  $\mu$  cruza  $\mu_1$  da esquerda para a direita.

Para verificar esses fatos é conveniente ter em conta as Figuras (12.a) e (12.b). Ali estão representados os gráficos  $\gamma$  do polinômio do primeiro membro de (15), quando  $p$  é ímpar e quando  $p$  é par, respectivamente.

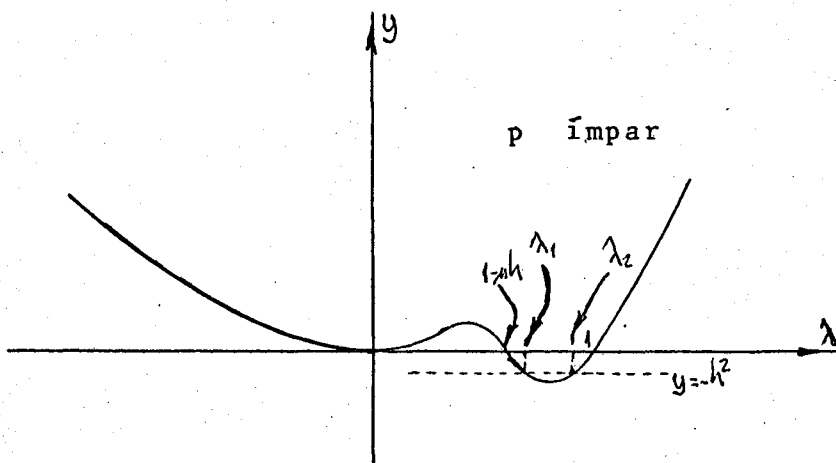


Figura 12.a

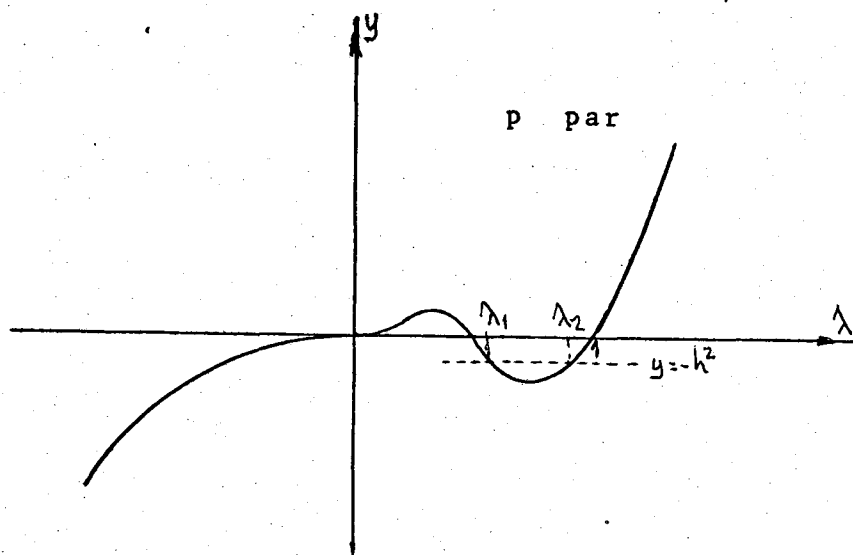


Figura 12.b

Sendo  $h$  pequeno, pode-se escolher  $\mu$  conveniente de modo que existam  $\lambda_1, \lambda_2 \in (1-\mu h, 1)$  sendo  $(\lambda_1, -h^2), (\lambda_2, -h^2)$  interseções de  $\gamma$  com a reta  $y = -h^2$ , de acordo com as Figuras (12.a) e (12.b). Deste modo  $|\lambda_1|, |\lambda_2| < 1$  e o sistema (14) é estável.

Fazendo  $\mu$  variar na direção positiva, ao atingir valores suficientemente grandes temos  $1-\mu h < -1$ , com  $|\lambda_1| > 1$ . Veja Figuras (13.a), (13.b).

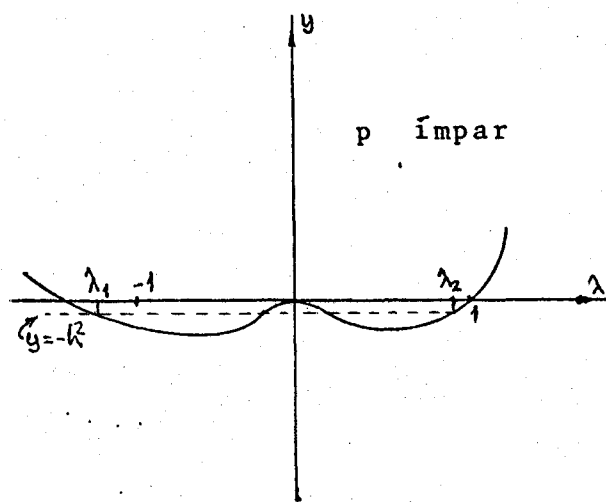


Figura 13.a

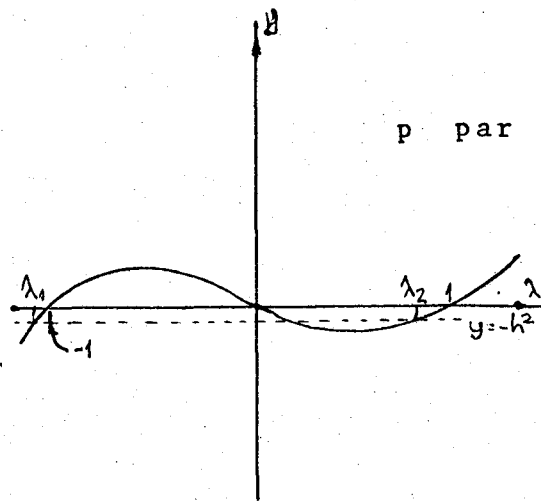


Figura 13.b

Assim, existe  $\mu_1 \geq 0$  tal que se  $\mu$  estiver próximo de  $\mu_1$  à esquerda, o sistema (14) é estável ( $-1 < 1 - \mu h < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$ ); estamos na situação representada nas Figuras (12.a), (12.b). Para  $\mu$  à direita de  $\mu_1$ , o sistema (14) é instável ( $\lambda_1 < -1$ ); estamos na situação representada nas Figuras (13.a), (13.b).

Além disso, fazendo  $\mu$  variar desde  $\mu_1$  para 0, o ponto  $1 - \mu h$  tende para 1 e, portanto, existe um valor  $\mu'$ ,  $0 < \mu' < \mu_1$ , em que  $\gamma$  se torna tangente à reta  $y = -h^2$ , isto é, as raízes  $\lambda_1, \lambda_2$  se colapsam numa raiz dupla  $\tilde{\lambda}$ . Veja Figuras (14.a), (14.b).

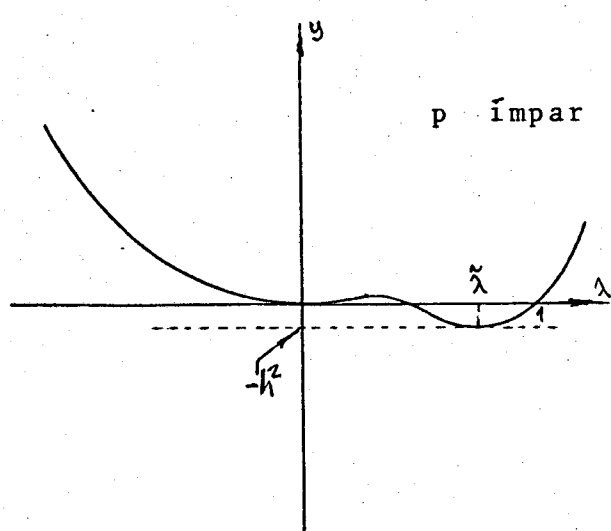


Figura 14.a

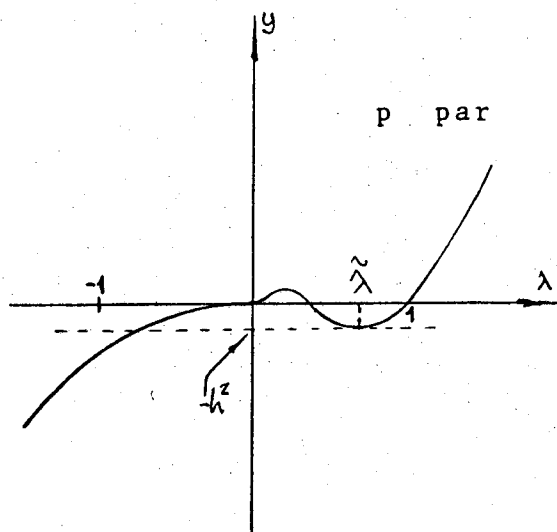


Figura 14.b

Neste caso, para  $\mu = \mu'$ , ainda temos  $|\tilde{\lambda}| < 1$ , e o sistema (14) continua sendo estável. Ainda à esquerda de  $\mu'$ , como para  $\mu$  próximo a  $\mu'$ , as raízes  $\lambda_1$  e  $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$  devem estar próximas de  $\tilde{\lambda}$ , o sistema (14) ainda é estável.

Como, para  $0 \leq \mu < \mu'$ , as raízes de (15) são complexas, a análise torna-se mais complicada, mas deve existir  $\mu_0$ ,  $0 < \mu_0 < \mu'$ , tal que, para  $\mu > 0$  à esquerda de  $\mu_0$ , o siste

ma (14) é instável. Essa conjectura é fortalecida pelo seguinte exemplo onde, para  $\mu = 0$ , existe uma raiz característica de módulo maior do que 1.

Exemplo: Seja  $h = 0,025$  e  $p = 3$ .

Para  $\mu = 0$ , a equação (15) fica:

$$(15') \quad \lambda^2(\lambda-1)^2 = -h^2$$

ou seja

$$\lambda(\lambda-1) = \pm ih$$

Uma das raízes de (15') é, pois, raiz da equação

$$\lambda^2 - \lambda - ih = 0$$

cujos discriminante é  $\Delta = 1 + 4hi = 1 + 0,1i$ .

Portanto, uma raiz quadrada de  $\Delta$  é

$$\sqrt{|\Delta|} e^{1/2 i \arctg 0,1} = \sqrt{1,01} e^{0,049i}$$

Assim, uma das raízes de (15') satisfaz

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1,01} (\cos 0,049 + i \sin 0,049) = \\ &= \frac{1}{2} [1 + \sqrt{1,01} \cos 0,049 + i \sqrt{1,01} \sin 0,049] \end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned} |\lambda_1| &= \frac{1}{2} [1 + 2\sqrt{1,01} \cos 0,049 + 1,01]^{1/2} = \\ &= \frac{1}{2} [1 + 2,008 \cos 0,049 + 1,01]^{1/2} > \\ &> \frac{1}{2} [1 + 2,003 + 1,01]^{1/2} > 1 \end{aligned}$$



Deste modo, o sistema (14) é instável quando  $\mu = 0$ , se  $h = 0,025$  e  $p = 3$ .

Observações:

(1) A discussão anterior se aplica para pequenos retardamentos. De fato, ela depende fortemente do argumento, segundo o qual, ao tomarmos  $h$  suficientemente pequeno, a reta  $y = -h^2$  é secante à curva  $\gamma$  em dois pontos que determinam as raízes  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ . Veja Figuras (12.a), (12.b), por exemplo.

Entretanto, se o retardamento  $r$  for fixo, tomar  $h$  suficientemente pequeno, significa tomar  $p$  grande. Isto é, diminuir  $h = \frac{r}{p}$  implica em aumentar o grau do polinômio

$$(16) \quad \lambda^{p-1}(\lambda-1)(\lambda-1 + \mu h)$$

cujo gráfico  $\gamma$  está representado em (12.a), (12.b).

Deste modo, o valor mínimo representado entre  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  nas Figuras (12.a), (12.b) decresce em valor absoluto quando  $h$  decresce. Assim, nada impede que a reta  $y = -h^2$  seja disjunta com a curva  $\gamma$ , para  $\lambda > 0$  (Figura 15).

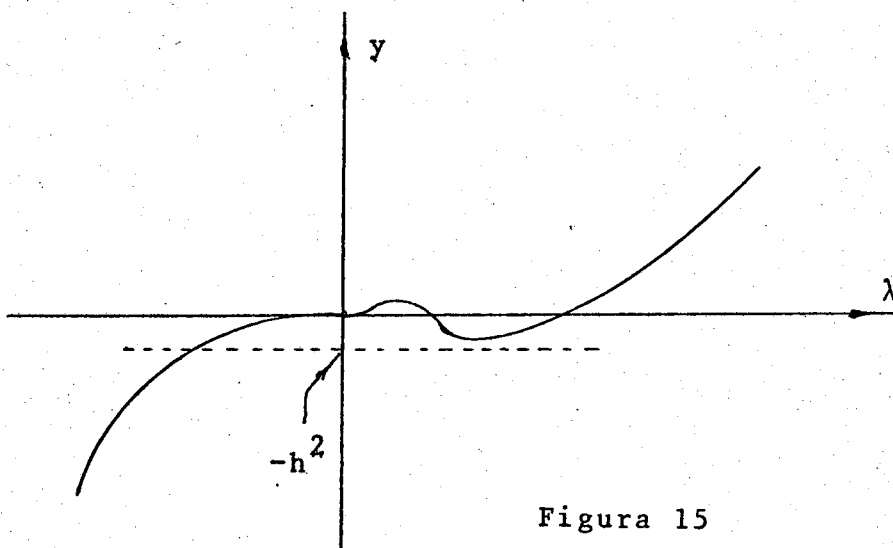
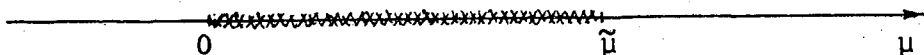


Figura 15

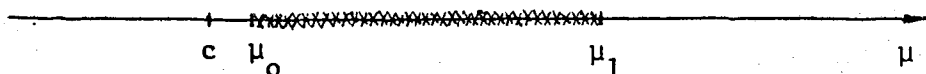
Para evitar essa situação, ao considerarmos o passo  $h = \frac{r}{p}$  pequeno, estamos tomando  $r$  pequeno, mantendo o grau do polinômio (16) constante.

(2) De acordo com nossas observações iniciais no estudo da equação (11), assinalamos no gráfico abaixo, a região de estabilidade no eixo  $\mu$ .



À direita de  $\tilde{\mu}$  aparecem soluções periódicas da equação (11).

Para o sistema (14), aproximado de (11), a situação é a seguinte



À direita de  $\mu_1$ , a solução nula de (14) é instável. À esquerda de  $\mu_0$ , não foi feito o estudo em casos gerais, mas o exemplo dado, sugere que a solução nula de (14) seja instável. O aparecimento de soluções periódicas quando  $\mu$  cruza  $\mu_1$ , da esquerda para a direita, é um problema aberto.

Vejamos agora um exemplo de um sistema de duas equações lineares de primeira ordem

$$(17) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= ax + by \\ \dot{y} &= cx + ay \end{aligned} \quad \text{com } a \text{ constante; } bc = \epsilon.$$

Chamando  $z = \text{col}(x, y)$ ,  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix}$ ,

obtemos o sistema equivalente

$$(17') \quad \dot{z} = Az$$

Analisemos o comportamento das soluções de (17') próximas do ponto de equilíbrio  $z = (0, 0)$ .

A equação característica é

$$\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 - \varepsilon = 0$$

cujas raízes são

$$\lambda = a \pm \sqrt{\varepsilon} \quad \text{se} \quad \varepsilon \geq 0$$

$$\text{ou} \quad \lambda = a \pm i\sqrt{-\varepsilon} \quad \text{se} \quad \varepsilon < 0$$

e as alternativas possíveis são:

(I)  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \implies \lambda_1 = a - \sqrt{\varepsilon}$  e  $\lambda_2 = a + \sqrt{\varepsilon}$ ,  $\varepsilon > 0$   
 as soluções são da forma  $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}$ ;  $y(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}$ ,  $c_1$  e  $c_2$  constantes arbitrárias.

$$(A) \quad a < 0 \quad \lambda_1 < \lambda_2 < 0 \iff 0 < \varepsilon < a^2$$

quando  $t \rightarrow \infty$ , toda solução tende para zero.

Neste caso, dizemos que  $(0, 0)$  é um nó estável.

$$(B) \quad a > 0 \quad \lambda_2 > \lambda_1 > 0 \iff 0 < \varepsilon < a^2$$

quando  $t \rightarrow \infty$ , toda solução tende para infinito.

Dizemos que  $(0, 0)$  é um nó instável.

$$(C) \quad \lambda_1 < 0 < \lambda_2 \iff \varepsilon > a^2$$

$x(t) = 0$ ;  $y(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}$ ,  $t \rightarrow \infty$ , a solução tende para infinito

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}; y(t) = 0, \quad t \rightarrow \infty, \quad \text{a solução tende a zero}$$

Se  $c_1 < 0$  e  $c_2 > 0$ ,  $t \rightarrow \infty$ , a solução tende a  $(0, \infty)$   
 $t \rightarrow -\infty$ , a solução tende a  $(-\infty, 0)$

$(0, 0)$  é ponto de sela

$$(II) \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = a, \quad \varepsilon = 0 \quad \text{e} \quad a \neq 0$$

(1) Se  $b = c = 0$

$$x(t) = c_1 e^{at} \quad y(t) = c_2 e^{at}$$

As trajetórias são famílias de linhas retas

$a < 0$  nó impróprio estável

$a > 0$  nó impróprio instável

(2) Se  $b \neq 0$

$$x(t) = c_1 e^{at} \quad y(t) = (c_1 t + c_2) e^{at}$$

$$(III) \lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{R}, \quad \lambda_1 = a - i\sqrt{-\varepsilon}, \quad \lambda_2 = a + i\sqrt{-\varepsilon}$$

$\varepsilon < 0$ .

$$(D) a = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = i\sqrt{-\varepsilon}, \quad v = \sqrt{-\varepsilon}$$

as soluções são:

$$x(t) = c_1 \sin(vt + \alpha)$$

$$y(t) = c_1 \cos(vt + \alpha)$$

todas as trajetórias são uma família de círculos

$$c \equiv x^2 + y^2 = c_1^2$$

$(0,0)$  é um centro, é estável mas não assintoticamente estável.

(E)  $a \neq 0$

$$x(t) = c_1 e^{at} \operatorname{sen}(vt + \alpha)$$

$$y(t) = c_2 e^{at} \operatorname{cos}(vt + \alpha)$$

as trajetórias são uma família de espirais

$$x^2 + y^2 = c_1^2 e^{2at}$$

(E<sub>1</sub>)  $a > 0 \quad \operatorname{Re}(\lambda_j) = a > 0 \quad j = 1,2$

$(0,0)$  é um foco instável.

(E<sub>2</sub>)  $a < 0 \quad \operatorname{Re}(\lambda_j) = a < 0 \quad j = 1,2$

$(0,0)$  é um foco estável.

Essas conclusões estão representadas nas Figuras 16 e 17.

Daremos um tratamento numérico ao sistema (17), segundo o método de Euler explícito, que consiste em desenvolver  $x(t)$  em séries de Taylor, com centro em  $t_k$  e acréscimos  $+h$ , com  $h > 0$

$$x(t_k + h) = x(t_k) + h\dot{x}(t_k) + \frac{h^2}{2!}\ddot{x}(t_k) + \dots$$

Desprezamos os termos a partir da primeira derivada e substituímos  $t_k + h = t_{k+1}$ , visto que  $t_k = t_0 + kh$ .

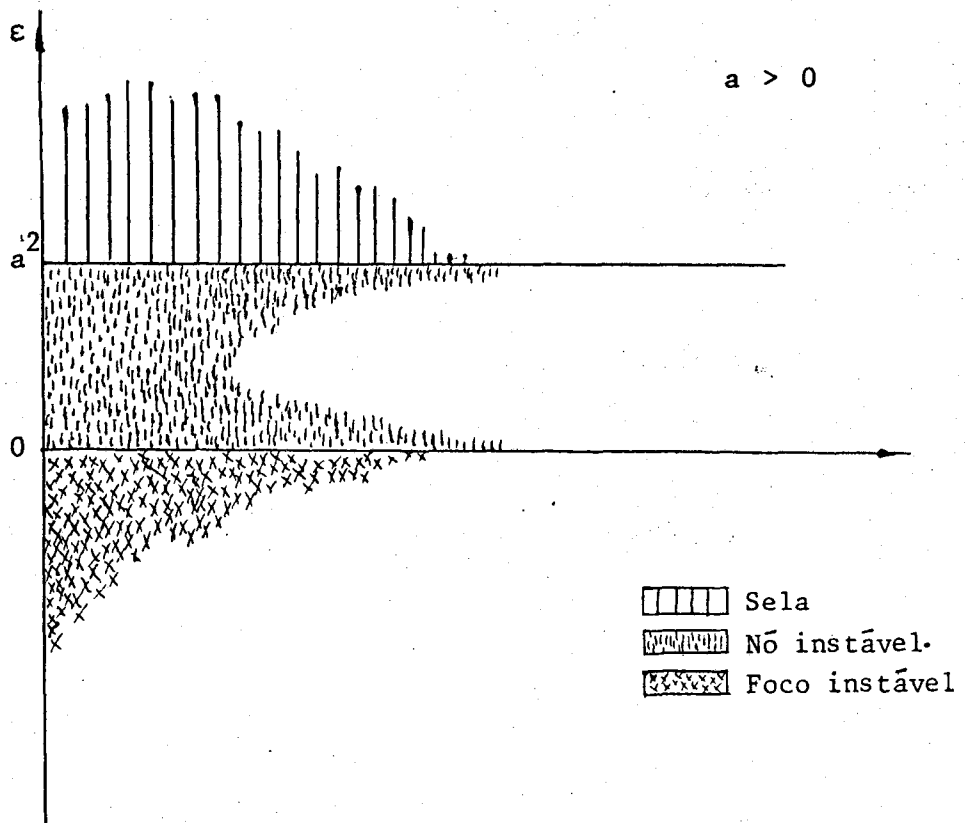


Figura 16

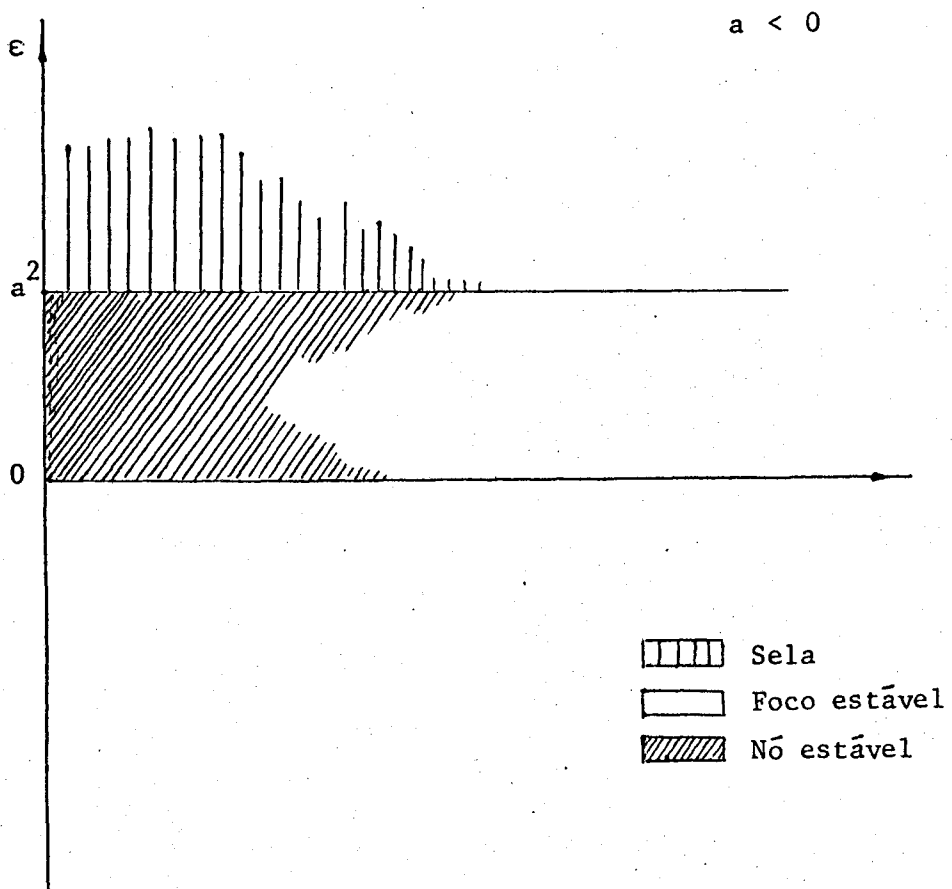


Figura 17

Obtemos, assim, a aproximação para a primeira derivada

$$\dot{x}(t_k) = \frac{1}{h}[x(t_{k+1}) - x(t_k)].$$

Analogamente para  $\dot{y}(t_k) = \frac{1}{h}[y(t_{k+1}) - y(t_k)].$

Assim a equação (17) fica

$$\frac{1}{h}[x(t_{k+1}) - x(t_k)] = ax(t_k) + by(t_k)$$

$$\frac{1}{h}[y(t_{k+1}) - y(t_k)] = cx(t_k) + ay(t_k)$$

correspondendo a

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + hax(t_k) + hby(t_k)$$

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + hcx(t_k) + hay(t_k)$$

Fazendo  $x(t_k) = x_k$  e  $y(t_k) = y_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , obtemos

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+ha & hb \\ hc & 1+ha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$(18) \quad z_{k+1} = Bz_k \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

desde que  $z_k = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} 1+ha & hb \\ hc & 1+ha \end{bmatrix}$ .

Assim, pelo método de Euler explícito, a equação (17) é aproximada pela equação diferença (18), cujo comportamento em torno do equilíbrio  $(0,0)$  é definido pelos autovalores de  $B$ .

Além disso, a equação (18) representa o endomorfismo de primeira ordem do  $\mathbb{R}^2$ , definido no capítulo anterior, onde  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$   $(x_{k+1}, y_{k+1}) = F(x_k, y_k)$  e

$$x_{k+1} = (1+ha)x_k + hby_k$$

$$y_{k+1} = hcx_k + (1+ha)y_k$$

Em que condições as soluções de (17) gozam de propriedades análogas às das soluções de (18) ?

Para isso, devemos estudar o comportamento das soluções de (18) próximas de  $(0,0)$ , analisando os autovalores de  $B$ .

A equação característica de  $B$  é

$$\lambda^2 - 2(1+ah)\lambda + (1+ah)^2 - h^2\varepsilon = 0$$

e suas raízes são

$$\lambda_1 = 1+ah - h\sqrt{\varepsilon}, \quad \lambda_2 = 1+ah + h\sqrt{\varepsilon} \quad \text{para } \varepsilon \geq 0$$

$$\text{e } \lambda_1 = 1+ah - ih\sqrt{-\varepsilon}, \quad \lambda_2 = \bar{\lambda}_1 \quad \text{para } \varepsilon < 0$$

No caso  $a > 0$

$$(I) \quad \varepsilon \geq 0 \implies \lambda_1, \lambda_2 \text{ reais}$$

$$(Bh) \quad |\lambda_j| > 1, \quad j=1,2 \iff \varepsilon < a^2 \quad \text{ou} \quad \varepsilon > \frac{(ah+2)^2}{h^2}$$

não instável



$$(Ch) \quad |\lambda_1| < 1 < |\lambda_2| \iff a^2 < \epsilon < \frac{(ah+2)^2}{h^2}$$

ponto de sela

$$(II) \quad \epsilon < 0 \implies \lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{R}$$

$$(E_1h) \quad |\lambda_j| > 1, \quad j=1,2 \iff \epsilon < 0$$

foco instável

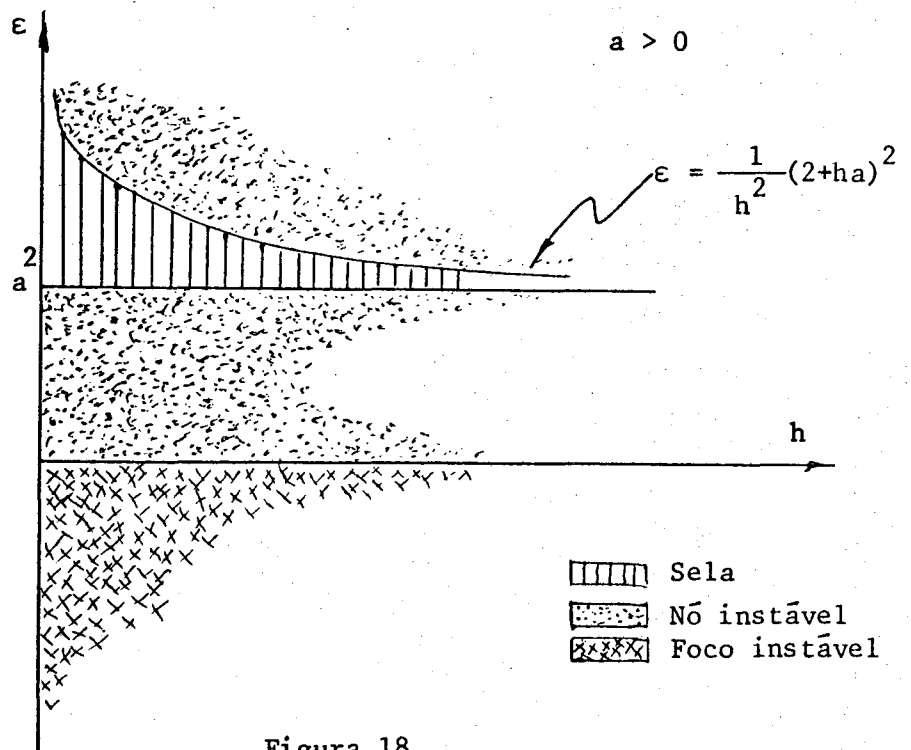


Figura 18

A Figura 18, mostra no caso  $a > 0$ , que para o passo  $h$  suficientemente pequeno, o comportamento da equação (18) em torno do equilíbrio  $(0,0)$ , é muito próximo da equação (17). (Figura 16). As diferenças aparecem apenas para valores muito grandes de  $\epsilon$ , pois quando  $h \rightarrow 0$ ,  $\epsilon = \frac{(2+ha)^2}{h^2} \rightarrow \infty$ .

No caso  $a < 0$

(I)  $\epsilon \geq 0 \implies \lambda_1, \lambda_2$  reais

$$(Ah) \quad |\lambda_j| < 1 \quad j=1,2 \iff \begin{cases} h < -\frac{2}{a}, \quad \epsilon < a^2 \\ e \\ \sqrt{\epsilon} < a + \frac{2}{h} \end{cases}$$

não estável

$$(Bh) \quad |\lambda_j| > 1 \quad j=1,2 \iff \begin{cases} \epsilon > a^2 \quad e \quad \sqrt{\epsilon} > a + \frac{2}{h} \\ \text{ou} \\ h > -\frac{2}{a} \quad e \quad a + \frac{2}{h} < \sqrt{\epsilon} < \\ < -(a + \frac{2}{h}) \end{cases}$$

não instável

$$(Ch) \quad |\lambda_1| < 1 \quad e \quad |\lambda_2| > 1 \iff h < -\frac{2}{a}, \quad \epsilon > a^2 \quad e \\ \sqrt{\epsilon} < a + \frac{2}{h}$$

ou

$$|\lambda_2| < 1 \quad e \quad |\lambda_1| > 1 \iff \epsilon < a^2, \quad \sqrt{\epsilon} > a + \frac{2}{h} \\ e \quad \sqrt{\epsilon} > -(a + \frac{2}{h})$$

ponto de sela

$$(II) \quad \varepsilon < 0 \implies \lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{R}$$

$$(E_1h) \quad |\lambda_j| = (1+ah)^2 - h^2\varepsilon > 1 \iff h\varepsilon < 2a + a^2h$$

$$j=1,2$$

foco instável

$$(E_2h) \quad |\lambda_j| < 1 \quad j=1,2 \iff h < -\frac{2}{a} \quad \text{e} \quad h\varepsilon > 2a + a^2h$$

foco estável

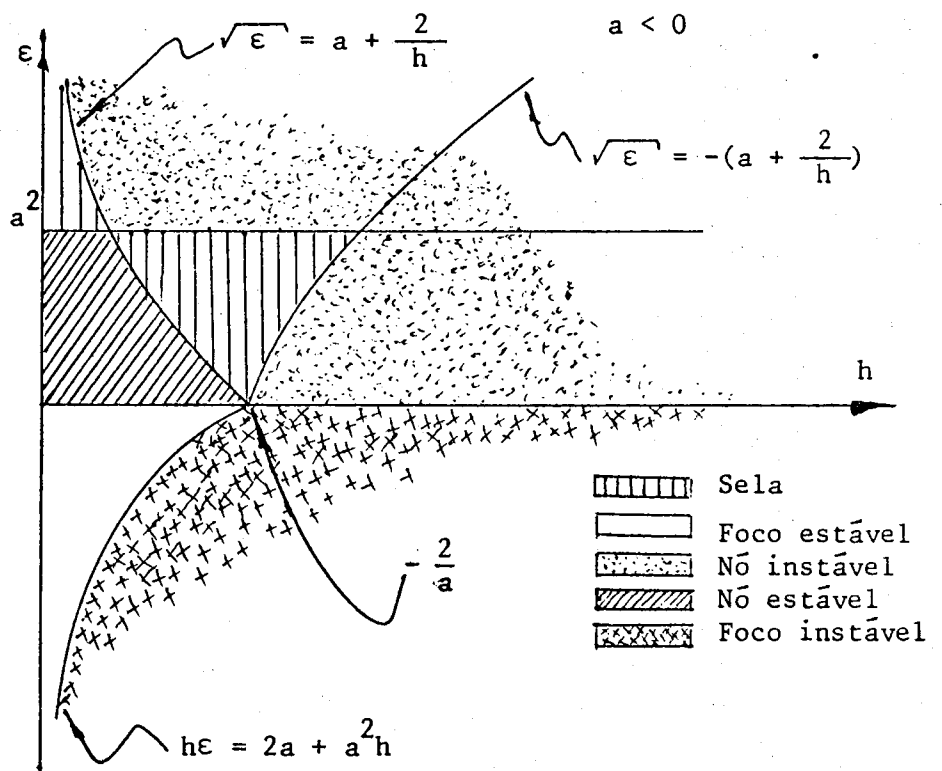


Figura 19

A Figura 19 mostra que

$$h \rightarrow 0^+ \implies \sqrt{\varepsilon} = \frac{2}{h} + a \rightarrow +\infty \quad \text{e} \quad h\varepsilon = 2a + a^2h \rightarrow -\infty$$

ou seja, para  $h$  suficientemente pequeno e  $a < 0$ , o comportamento das soluções da equação (18) em torno do ponto de equilíbrio, é bem próximo das soluções da equação (17).

### 3. CRITÉRIO DE ESTABILIDADE PARA EQUAÇÕES DIFERENÇA

Seja a equação diferença

$$(19) \quad x_{n+1} = Ax_n$$

onde  $x_n = \text{col}(y_1, y_2, \dots, y_n)$ ,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$y_k, a_{ij} \in \mathbb{R}$  com  $1 \leq i, j, k \leq n$ .

Sua equação característica é

$$(20) \quad P(w) = w^n + a_1 w^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

Do capítulo anterior sabemos que a solução nula  $x = 0$  da equação (19) é estável quando todas as raízes da equação característica (20) têm módulo menor que 1, ou seja,  $|w| < 1$ .

O nosso objetivo é estabelecer condições que permitam concluir quando ocorre  $|w| < 1$ , pela análise dos coeficientes numéricos de  $P(w)$ .

Nesses moldes, temos o Critério de Routh-Hurwitz para as equações diferenciais. Esse critério determina que "uma condi

ção necessária e suficiente, para uma equação característica ter as partes reais de todas as suas raízes, negativas, é que sejam positivos todos os menores principais diagonais da matriz de Hurwitz".

Assim, para o polinômio  $G(z) = z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n$ , a matriz de Hurwitz, indicada por  $H$ , é

$$H = \begin{bmatrix} b_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_5 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_n \end{bmatrix}$$

A matriz de Hurwitz se compõe do modo seguinte: na diagonal principal se escrevem os coeficientes do polinômio característico começando por  $b_1$  e terminando por  $b_n$ .

As colunas, umas após as outras, constam dos coeficientes de índices somente ímpares ou índices somente pares.

Todos os demais elementos da matriz correspondentes a índices maiores que  $n$  e menores que zero, se supõem iguais a zero.

Logo, os menores diagonais principais da matriz de Hurwitz são da forma

$$\Delta_1 = b_1 ; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} b_1 & 1 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix} ; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} b_1 & 1 & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 \\ b_5 & b_4 & b_3 \end{vmatrix} ;$$

$$; \dots; \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} b_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_5 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

A condição de Hurwitz afirma:

"as raízes da equação característica têm as partes reais negativas, se e somente se, ocorrer:  $\Delta_1 > 0$ ,  $\Delta_2 > 0$ , ...,  $\Delta_n > 0$ ."

Desejamos verificar quando as raízes da equação  $P(w) = 0$  tem  $|w| < 1$ . Para isso, transformamos  $P(w)$  em  $G(z)$ , onde  $z$  tem parte real negativa se e somente se  $|w| < 1$  e, com os coeficientes numéricos de  $G(z)$  compomos a matriz de Hurwitz.

Assim, as raízes de  $P(w)$  transformada em  $G(z)$  têm módulo menor que 1, se e somente se, todos os menores diagonais principais da matriz de Hurwitz, formada pelos coeficientes numéricos de  $G(z)$ , forem positivos.

Inicialmente, tomamos a transformação  $S$ , que leva o semiplano  $Z = \{z = (x,y) \text{ tal que } x < 0\}$  no semiplano  $B = \{s = (r,p) \text{ tal que } p > 0\}$ , definida por  $s = Sz = -iz$  e a transformação  $L$ , que leva o semiplano  $B$  no conjunto  $W = \{w = (u,v) \text{ tal que } u^2 + v^2 < 1\}$ , definida por  $w = Ls = \frac{i-s}{i+s}$ .

Finalmente obtemos a transformação  $T = LOS$  que leva o semiplano  $Z = \{z = (x,y) \text{ tal que } x < 0\}$  no conjunto  $W = \{w = (u,v) \text{ tal que } u^2 + v^2 < 1\}$ .

Assim

$$T(z) = (LoS)(z) = L(-iz) = \frac{i + iz}{i - iz}, \quad T(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

e portanto  $w = (LoS)z = \frac{1+z}{1-z}$ .

Observamos que  $\text{Dom } T = \mathbb{C} - \{1\}$  e  $\text{Im } T = \mathbb{C} - \{-1\}$ , ou seja,  $T$  não está definida para  $z = 1$  e  $w = -1$  não é imagem pela  $T$  de nenhum  $z$ .

Além disso  $T$  é bijeção pois  $T$  é transformação de Möebius.

Ilustramos essa transformação pela Figura 20.

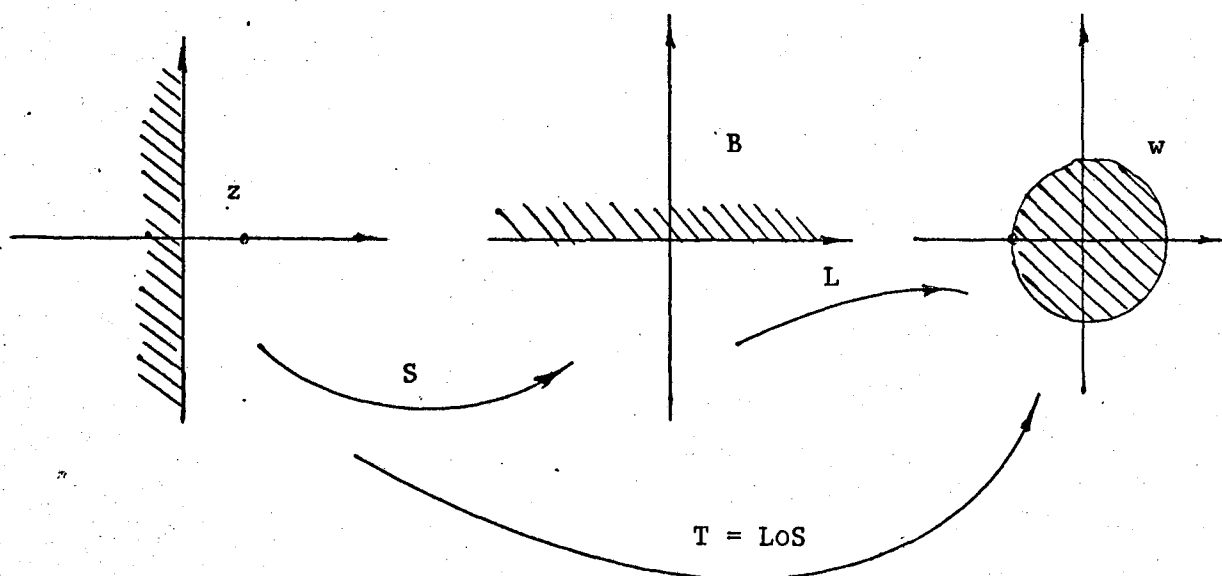


Figura 20

O fato de que a transformação  $T$  leva o semiplano  $\text{Re } z < 0$  no disco  $|w| < 1$  pode ser observado considerando a Figura 21.

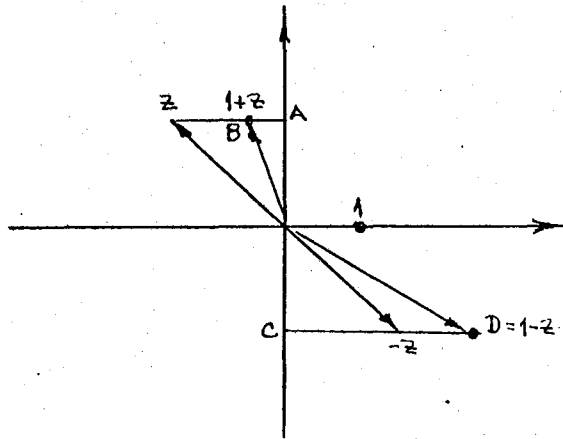


Figura 21

Observa-se que os triângulos retângulos  $OAB$  e  $OCD$  têm os catetos  $OA$  e  $OC$  congruentes, enquanto o cateto  $CD$  é maior que o cateto  $AB$ . Assim, segue-se do Teorema de Pitágoras que  $|1+z| < |1-z|$ , portanto  $w = \left| \frac{1+z}{1-z} \right| < 1$ , ou seja,  $w$  é interior ao disco unitário.

Para a verificação de que a imagem inversa do interior do disco unitário é o semiplano  $\operatorname{Re} z < 0$ , veja [8, pg. 271].

Dessa forma, do polinômio característico

$$P(w) = w^n + a_1 w^{n-1} + \dots + a_n, \text{ desde que } w = -1 \text{ não}$$

é raiz de  $P(w)$ , ou seja, quando  $P(-1) \neq 0$ , podemos obter pela transformação  $w = Tz$ , a função  $F(z)$ .

$$\text{Então } F(z) = P(Tz) = 1(Tz)^n + a_1(Tz)^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

$$F(z) = \left( \frac{1+z}{1-z} \right)^n + a_1 \left( \frac{1+z}{1-z} \right)^{n-1} + \dots + a_n = 0$$



$$\begin{aligned}
(1-z)^n F(z) &= (1+z)^n + a_1(1-z)(1+z)^{n-1} + \dots + a_n(1-z)^n \\
&= (z^n + nz^{n-1} + \binom{n}{2}z^{n-2} + \dots + nz + 1) + \\
&+ a_1(1-z)[z^{n-1} + (n-1)z^{n-2} + \binom{n-2}{2}z^{n-3} + \dots + (n-1)z + 1] + \\
&+ \dots + a_n[(-1)^n z^n + (-1)^{n-1} n z^{n-1} + \\
&+ (-1)^{n-2} \binom{n}{2} z^{n-2} + \dots + n(-1)^1 z + (-1)^0]
\end{aligned}$$

Nesta expressão o coeficiente numérico de  $z^n$  é  $(1-a_1+a_2+\dots+(-1)^n a_n) = P(-1)$ .

Como a condição inicial é  $P(-1) \neq 0$ , podemos simplificar a expressão anterior, colocando os termos semelhantes em evidência e dividindo-os por  $P(-1)$  para obter

$$G(z) = z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n = 0$$

onde  $b_i$   $1 \leq i \leq n$  são combinações lineares de  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

Com essas constantes  $1, b_1, b_2, \dots, b_n$  formamos a matriz de Hurwitz e podemos ter as condições de estabilidade para a equação diferença (19).

Considerando-se tais resultados, estudemos a estabilidade da equação (4) do capítulo anterior dada por

$$(4) \quad x_{n+1} = Ax_n \quad \text{com} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Seja seu polinômio característico

$$P(w) = \begin{vmatrix} a_{11} - w & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - w \end{vmatrix} = w^2 - 2bw + c$$

onde  $2b = \text{tr } A$  e  $c = \det A$ .

Se  $P(-1) = 1+2b+c = 0$ , temos uma raiz  $w = -1$  e a solução nula  $x_n = 0$   $n = 0, 1, \dots$  é instável.

Se  $P(-1) \neq 0$ , podemos continuar investigando as condições de estabilidade da equação (4) da seguinte forma:

A afirmação de que a solução nula  $x = 0$  é estável quando  $|w| < 1$ , ou seja, quando  $w \in W$  onde  $W = \{w = (u,v) \text{ tal que } u^2 + v^2 < 1\}$ ,

vamos relacionar a análise dos coeficientes do polinômio característico.

Já vimos que  $w = Tz = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)$  onde  $z \in Z$ ,  
 $Z = \{z = (x,y) \text{ tal que } x < 0\}$ .

Logo

$$P(Tz) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 - 2b\left(\frac{1+z}{1-z}\right) + c = 0.$$

Desenvolvendo fica

$$1 + z^2 + 2z - 2b(1-z^2) + c(1+z^2 - 2z) = 0$$

ou  $(1+2b+c)z^2 + 2(1-c)z + (1-2b+c) = 0.$

Finalmente como  $1+2b+c \neq 0$

$$z^2 + \frac{2(1-c)}{(1+2b+c)}z + \frac{1-2b+c}{1+2b+c} = 0.$$

Escrevendo a matriz de Hurwitz para este polinômio, temos

$$H = \begin{bmatrix} \frac{2(1-c)}{1+2b+c} & 1 \\ 0 & \frac{1-2b+c}{1+2b+c} \end{bmatrix}$$

cujos menores diagonais principais são:

$$\Delta_1 = \frac{2(1-c)}{1+2b+c}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2(1-c) & 1 \\ 0 & \frac{1-2b+c}{1+2b+c} \end{vmatrix}$$

As condições de estabilidade por Routh-Hurwitz são

$$\Delta_1 = \frac{2(1-c)}{1+2b+c} > 0$$

e

$$\Delta_2 = \frac{2(1-c)}{1+2b+c} \cdot \frac{1-2b+c}{1+2b+c} > 0$$

as quais implicam

$$(a) \quad c < 1 \quad e \quad \{-2b < c+1\} \cap \{2b < c+1\}$$

ou

$$(b) \quad c > 1 \quad e \quad \{-2b > c+1\} \cap \{2b > c+1\}$$

É imediata a impossibilidade da condição (b).

De (a) obtemos:

$$\det A < 1 \quad e \quad \begin{cases} -\operatorname{tr} A < \det A + 1 \\ \operatorname{tr} A < \det A + 1 \end{cases}$$

$$\implies \det A < 1 \quad e \quad |\operatorname{tr} A| < \det A + 1.$$

Conclusão: A solução  $x = 0$  da equação (4) é estável se e somente se  $c < 1$  e  $|2b| < c+1$ , (veja Figura 22).

$b$  e  $c$  são obtidos a partir dos coeficientes do polinômio característico.

Tal resultado vem ratificar o estudo feito em (1) e (3) (ii), da página 39 do capítulo anterior e representado na Figura 10.

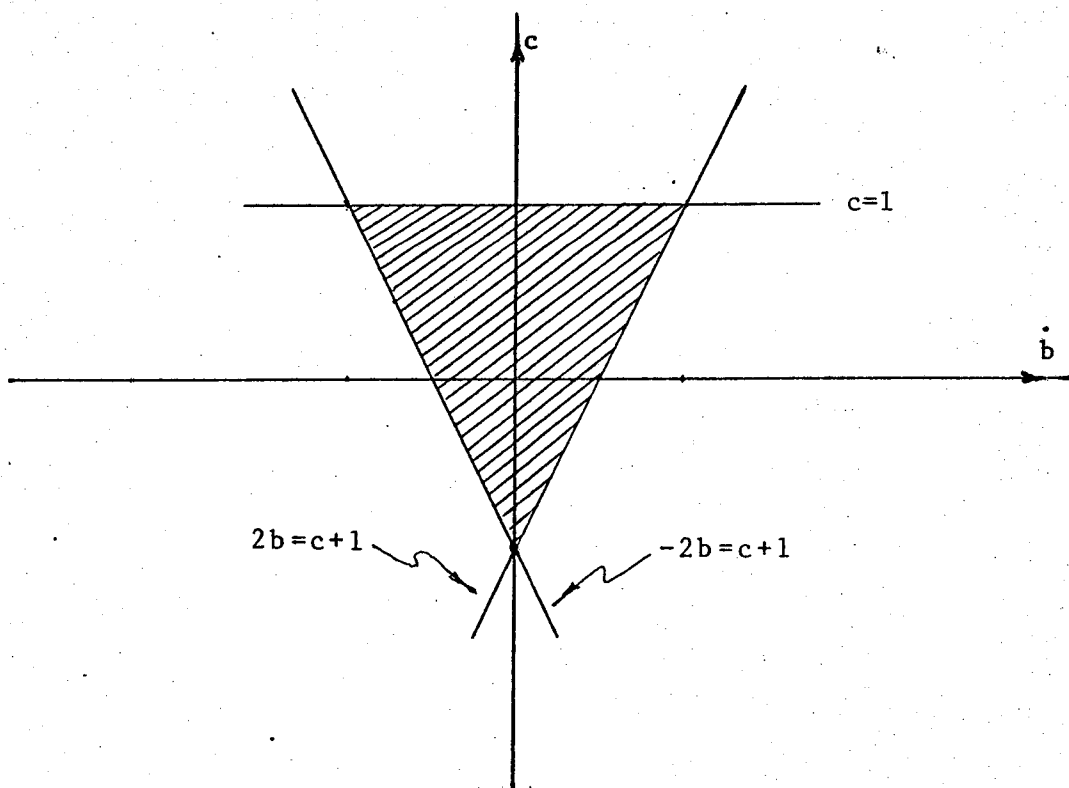


Figura 22

Vamos analisar agora um caso particular da equação (4), tomando  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{bmatrix}$ , que representa no capítulo 1, o endomorfismo de primeira ordem  $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definido por  $\tilde{f}(x,y) = (y, f(x,y))$  onde  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x,y) = ax + by$ .

Como  $\text{tr } A = b$  e  $\det A = -a$  as condições de estabilidade já obtidas para a equação (4) se traduzem por

$$(*) \quad a > -1 \quad \text{e} \quad |b| < -a + 1.$$

As alternativas possíveis são:

(i)  $a > -1$  e  $b < -a + 1$

(ii)  $a > -1$  e  $-b < -a + 1$

Tais condições estão representadas na Figura 23.

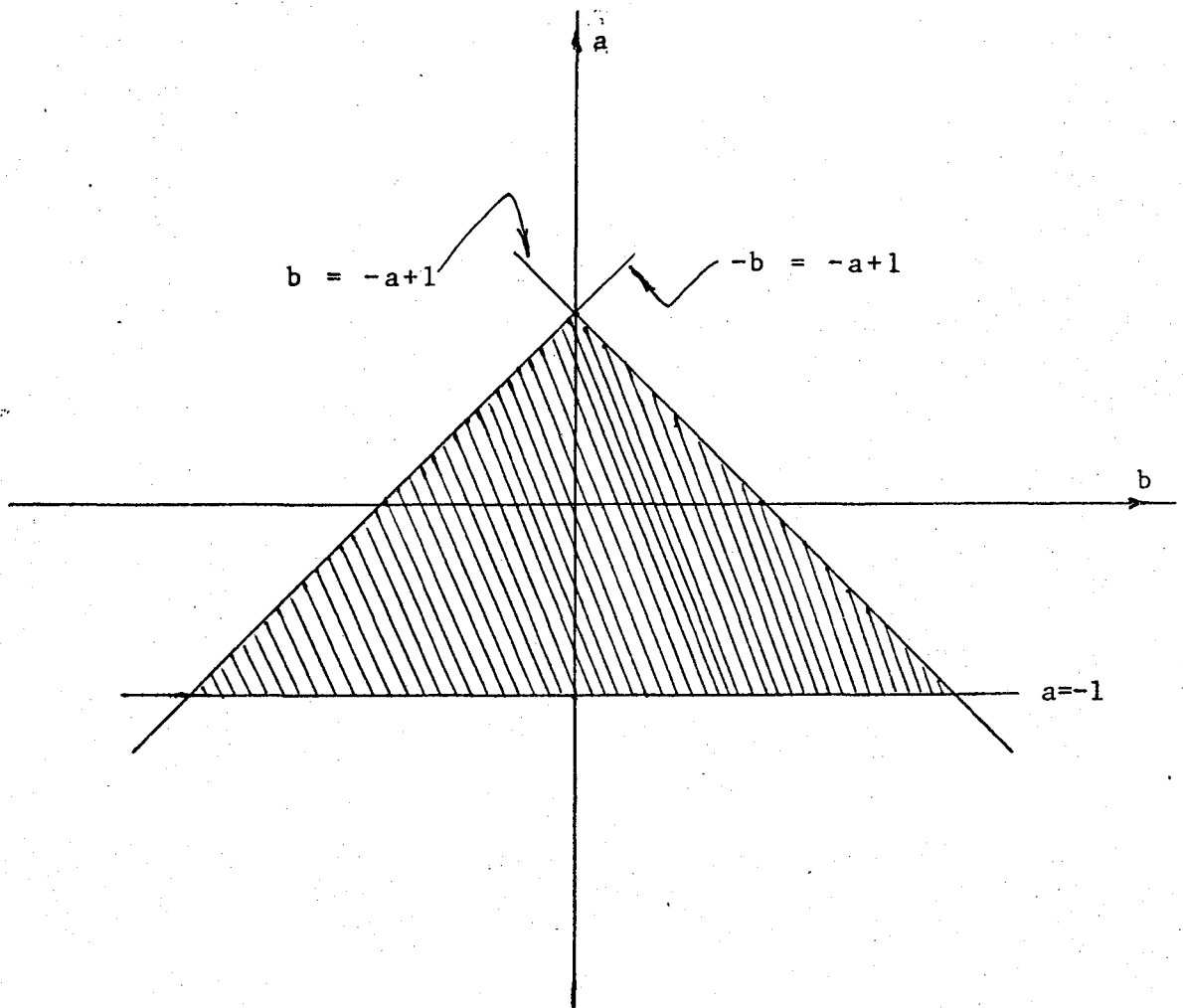


Figura 23

Baseados nesta análise, podemos afirmar:

Se  $(x_{n-1}, x_n)$   $n = 1, 2, 3, \dots$  é uma órbita positiva de  $\tilde{f}$ , com  $(x_0, x_1) \neq (0, 0)$ , então  $|(x_{n-1}, x_n)| \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , desde que verificadas as condições (\*) para  $f$

ou,  $x_{n+1} = ax_{n-1} + bx_n$ , equação diferença discreta,

tem a solução nula  $x = 0$  estável quando  $a > -1$  e  $|b| < -a+1$ .

Ainda aproveitando o estudo de estabilidade feito para a equação (4) nos moldes propostos por este trabalho, vejamos como ficam as condições de estabilidade da equação (18) do capítulo anterior, entendida como um endomorfismo de primeira ordem  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(18) \quad z_{k+1} = Bz_k \quad \text{onde} \quad B = \begin{bmatrix} 1+ha & hb \\ hc & 1+ha \end{bmatrix}$$

cujo  $\text{tr } B = 2(1+ha)$  e  $\det B = (1+ha)^2 - h^2\varepsilon$ ;  $\varepsilon = bc$ .

Pelas conclusões obtidas para a equação (4) temos:

o ponto de equilíbrio  $z = 0$  é estável quando  $\det B < 1$  e  $|\text{tr } B| < \det B + 1$ , ou seja, fazendo as substituições necessárias:

$$z = 0 \quad \text{é} \quad \text{estável} \quad \iff$$

$$\iff a^2 + \frac{2a}{h} < \varepsilon \quad \text{e} \quad |2(1+ha)| < (1+ha)^2 - h^2\varepsilon + 1$$

$$\iff a^2 + \frac{2a}{h} < \varepsilon \quad \text{e} \quad \begin{cases} 2(1+ha) < (1+ha)^2 - h^2\varepsilon + 1 \\ -[(1+ha)^2 - h^2\varepsilon + 1] < 2(1+ha) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a^2 + \frac{2a}{h} < \epsilon \quad e \quad \begin{cases} \epsilon < a^2 \\ \epsilon < (a + \frac{2}{h})^2 \end{cases}$$

Resumindo, as condições de estabilidade para  $z = 0$  na equação (18) são

$$a^2 + \frac{2a}{h} < \epsilon < a^2 \quad e \quad \epsilon < (a + \frac{2}{h})^2.$$

(I) Para  $a > 0$  essas condições se traduzem por

$$0 < a^2 + \frac{2a}{h} < a^2 \quad (\text{absurdo !})$$

(II) Para  $a < 0$

$$\epsilon \geq 0 \Rightarrow 0 < \epsilon < a^2 \quad e \quad \epsilon < (a + \frac{2}{h})^2$$

$$\Rightarrow h < -\frac{2}{a}, \quad 0 \leq \epsilon < a^2 \quad e \quad \sqrt{\epsilon} < a + \frac{2}{h}$$

$$\epsilon < 0 \Rightarrow a^2 + \frac{2a}{h} < \epsilon < 0 \quad e \quad \epsilon < (a + \frac{2}{h})^2$$

$$\Rightarrow h < -\frac{2}{a}, \quad h\epsilon > 2a + a^2h$$

Comparando as conclusões (I) e (II) aqui obtidas e o estudo feito no capítulo anterior, cujos resultados estão representados nas Figuras 18 e 19, verificamos que os mesmos coincidem.

Além disso, com o intuito de aplicar o critério de Routh-Hurwitz, adaptado às equações diferença por este trabalho, analisaremos a estabilidade das soluções de algumas equações diferença ainda não discutidas até aqui.

Exemplos:

$$(1) x_n = ax_{n-1} + dx_{n-3}$$

$$\text{Tomando } x_n^1 = ax_{n-1}^3 + dx_{n-1}^1$$

$$x_n^2 = x_{n-1}^1$$

$$x_n^3 = x_{n-1}^2$$

obtemos a representação da equação na forma  $x_n = Ax_{n-1}$ , com

$$A = \begin{bmatrix} d & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A equação característica é

$P(w) = -w^3 + dw^2 + a = 0$ . Se  $P(-1) = 1+d+a \neq 0$  a equação é transformada na função

$$F(z) = -\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^3 + d\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 + a = 0$$

$$\text{ou } G(z) = 1z^3 + \frac{3+d-3a}{1+d+a}z^2 + \frac{3-d+3a}{1+d+a}z + \frac{1-d-a}{1+d+a} = 0$$

Os coeficientes de  $G(z)$  compõem a matriz de Hurwitz

$$H = \begin{bmatrix} \frac{3+d-3a}{1+d+a} & 1 & 0 \\ \frac{1-d-a}{1+d+a} & \frac{3-d+3a}{1+d+a} & \frac{3+d-3a}{1+d+a} \\ 0 & 0 & \frac{1-d-a}{1+d+a} \end{bmatrix}$$

e cujas condições de estabilidade são:



$$\Delta_1 = \frac{3 + d - 3a}{1+d+a} > 0$$

$$\Delta_2 = \left[ \frac{3+(d-3a)}{1+d+a} \cdot \frac{3-(d-3a)}{1+d+a} \right] - \left( \frac{1-d-a}{1+d+a} \right) > 0$$

$$\Delta_3 = \frac{1-d-a}{1+d+a} \cdot \Delta_2 > 0 \implies \frac{1-d-a}{1+d+a} > 0.$$

O que nos propõe as alternativas:

$$(I) \quad 3+d-3a > 0, \quad 1+d+a > 0, \quad 1-d-a > 0 \quad \text{e} \quad 1-a^2+ad > 0$$

$$(II) \quad 3+d-3a < 0, \quad 1+d+a < 0, \quad 1-d-a < 0 \quad \text{e} \quad 1-a^2+ad > 0$$

É imediata a impossibilidade da alternativa (II).

Somos levados a restringir a estabilidade da equação do exemplo (1) às condições:

$$a+d < 1, \quad a+d > -1, \quad d-3a > -3 \quad \text{e} \quad a^2 < ad+1$$

ou seja,

$$|a+d| < 1, \quad d-3a > -3 \quad \text{e} \quad a^2 < ad+1$$

representadas na Figura 24.

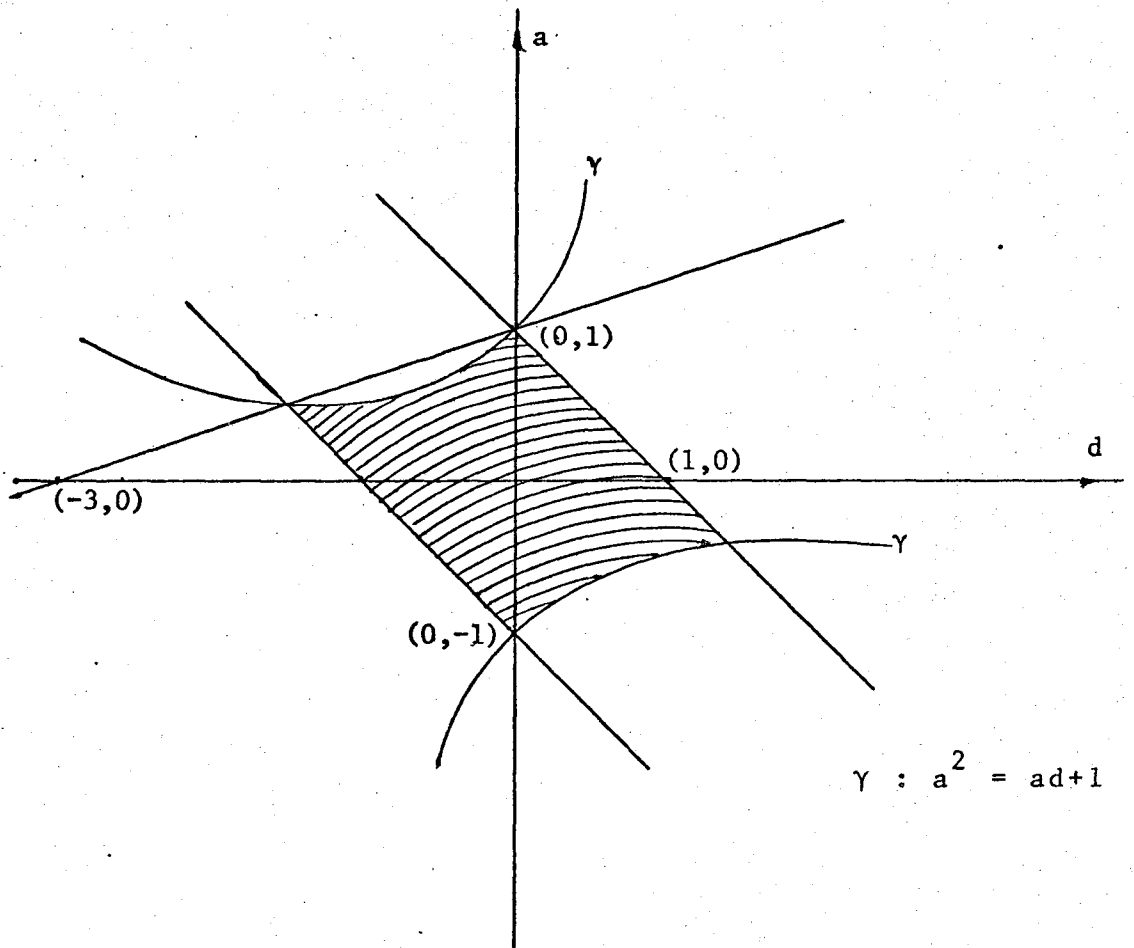


Figura 24

$$(2) \quad x_n = ax_{n-3} + dx_{n-2}$$

$$\text{Fazendo } x_n^1 = ax_{n-1}^3 + dx_{n-1}^2$$

$$x_n^2 = x_{n-1}^1$$

$$x_n^3 = x_{n-1}^2$$

$$\text{obtemos } x_n = Ax_{n-1}, \text{ com } A = \begin{bmatrix} 0 & d & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico é

$$P(w) = -w^3 + dw + a. \text{ Se } P(-1) = 1-d+a \neq 0,$$

obtemos  $F(z) = -(1+z)^3 + d(1+z)(1-z)^2 + a(1-z)^3 = 0.$

Reduzindo os termos semelhantes temos

$$G(z) = 1z^3 + \left(\frac{-3-d+3a}{-1+d-a}\right)z^2 + \left(\frac{-3-d-3a}{-1+d-a}\right)z + \left(\frac{-1+d+a}{-1+d-a}\right) = 0$$

A matriz de Hurwitz

$$H = \begin{bmatrix} \frac{-3-(d-3a)}{-1+(d-a)} & 1 & 0 \\ \frac{-1+(d+a)}{-1+(d-a)} & \frac{-3-(d+3a)}{-1+(d-a)} & \frac{-3-(d-3a)}{-1+(d-a)} \\ 0 & 0 & \frac{-1+(d+a)}{-1+(d-a)} \end{bmatrix}$$

nos fornece os menores diagonais principais que estabelecem as condições de estabilidade seguintes:

$$\Delta_1 = \frac{-3-(d-3a)}{-1+(d-a)} > 0$$

$$\Delta_2 = \left[ \frac{-3-(d-3a)}{-1+(d-a)} \cdot \frac{-3-(d+3a)}{-1+(d-a)} \right] - \left[ \frac{-1+(d+a)}{-1+(d-a)} \right] > 0$$

$$\Delta_3 = \frac{-1+(d+a)}{-1+(d-a)} \cdot \Delta_2 > 0$$

As alternativas são

$$(I) \quad -1+d+a > 0, \quad -1+d-a > 0, \quad -3-d+3a > 0 \quad \text{e} \quad d-a^2+1 > 0$$

$$(II) \quad -1+d+a < 0, \quad -1+d-a < 0, \quad -3-d+3a < 0 \quad \text{e} \quad d-a^2+1 > 0$$

É imediata a impossibilidade da alternativa (I).

Logo, a solução referente ao exemplo (2) é estável se e somente se, estiverem satisfeitas as seguintes relações representadas na Figura 25:

$$a+d < 1, \quad d-a < 1, \quad 3a-d < 3 \quad \text{e} \quad a^2 < d+1$$

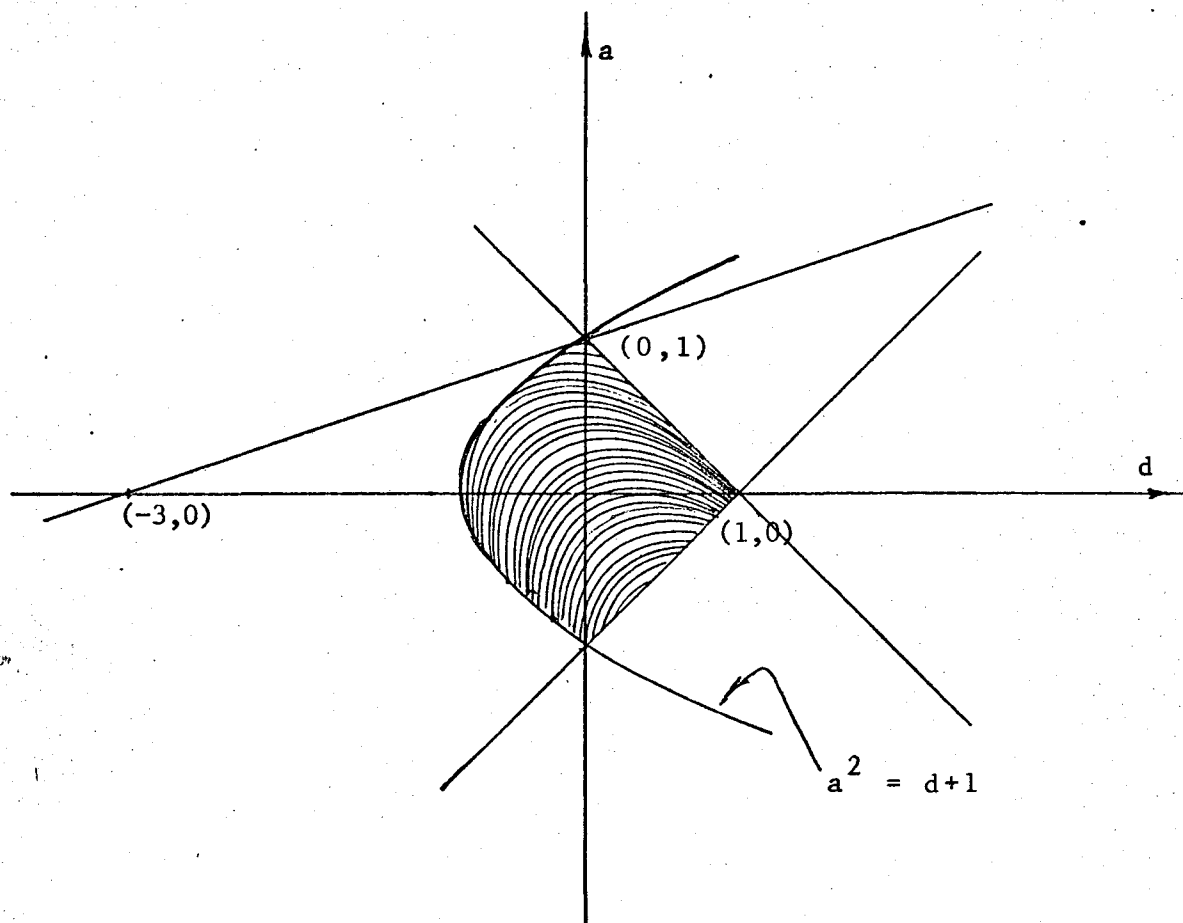


Figura 25

$$(3) \quad x_n = ax_{n-1} + dx_{n-1}$$

ou

$$x_n = (a+d)x_{n-1}$$

Na forma  $x_n = Ax_{n-1}$ , temos

$$x_n^1 = (a+d)x_{n-1}^1$$

$$x_n^2 = x_{n-1}^2 \quad e \quad A = \begin{bmatrix} a+d & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P(w) = w^2 - (a+d)w = 0. \quad \text{Se } P(-1) = 1+a+d \neq 0,$$

obtemos  $G(z) = 1z^2 + \left(\frac{2}{1+a+d}\right)z + \frac{1-a-d}{1+a+d} = 0$

A matriz de Hurwitz  $\bar{e}$

$$H = \begin{bmatrix} \frac{2}{1+a+d} & 1 \\ 0 & \frac{1-a-d}{1+a+d} \end{bmatrix}$$

cujos menores principais e condições de estabilidade são

$$\Delta_1 = \frac{2}{1+a+d} > 0$$

$$\Delta_2 = \frac{2}{1+a+d} \cdot \frac{1-a-d}{1+a+d} > 0$$

que nos dão as relações  $a+d > -1$  e  $-a-d > -1$ , ou seja,  
 $|a+d| < 1$  (Figura 26).

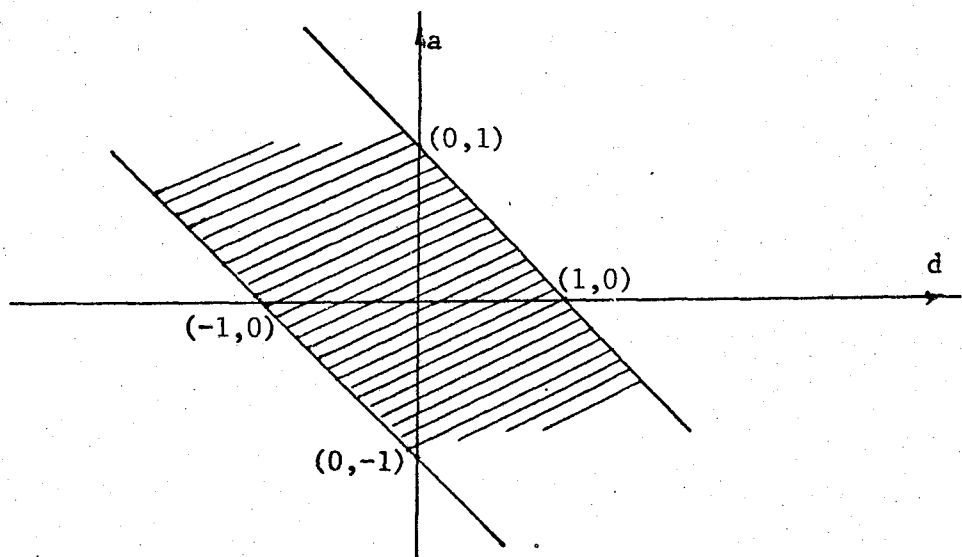


Figura 26

$$(4) \quad x_n = -\frac{1}{2}x_{n-2} - \frac{1}{2}x_{n-1}$$

$$\text{Fazendo } x_n^1 = x_{n-1}^2$$

$$x_n^2 = -\frac{1}{2}x_{n-1}^1 - \frac{1}{2}x_{n-1}^2$$

obtemos a representação

$$x_n = Ax_{n-1}, \quad \text{com } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$P(w) = w^2 + \frac{1}{2}w + \frac{1}{2}$$

Como  $P(-1) = 1 \neq 0$ , segue que

$$G(z) = z^2 + z + 2.$$

A matriz de Hurwitz é

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Observemos que

$$\Delta_1 = 1 > 0; \quad \Delta_2 = 2 > 0.$$

Logo, as partes reais de todas as raízes de  $G(z)$  são sempre negativas, implicando que as raízes de  $P(w)$  têm sempre módulo menor que 1, ou seja, o ponto de equilíbrio  $x = 0$  é sempre estável.

#### 4. APÊNDICE

Este trabalho desperta o interesse pela descoberta de aplicações desse estudo no ensino de Matemática no segundo grau, visto que, modelos matemáticos envolvendo equações diferença podem representar problemas que ocorrem na natureza, colaborando para o estudante compreender o mundo em que vive e sobretudo participar dele, no momento em que é possível analisar, discutir e colocar em prática aspectos relevantes dos mesmos.

Alguns exemplos, com operações elementares, sugeridos por trabalhos divulgados na revista - The Mathematics Teacher, Vol. 77, vieram confirmar a possibilidade de discussão de alguns desses problemas nesse nível escolar.

Assim, a uma quantidade  $y$ , crescendo com o tempo  $t$  a uma taxa proporcional a seu tamanho, relacionamos a equação  $\Delta y = ky$ . A compreensão desse fato se dará ao tomarmos valores de  $t$  espaçados igualmente:  $t_0, t_1, t_2, \dots, t_j$  e valores correspondentes de  $y$ :  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_j$ , de forma que,  $y_1 - y_0 = ky_0$ ,  $y_2 - y_1 = ky_1, \dots, y_j - y_{j-1} = ky_{j-1}$ . A solução da equação diferença de primeira ordem  $y_{n+1} = y_n + ky_n$ , representando tal situação, pode ser calculada sucessivamente com um mínimo de matemática.

Um outro exemplo, baseado no modelo de equação diferencial de Lotka (1956), se aplica numa reserva florestal a situações necessárias de equilíbrio ecológico. Supomos uma população de animais "caçadores", tal como raposas, interagindo com uma população de "presas", como coelhos.

O modelo matemático deve descrever a população de presas ( $p$ ) e a população de caçadores ( $c$ ), de forma a responder as seguintes questões:

1. Como se comportarão as populações  $p$  e  $c$ , como função do tempo ?
2. Para um dado valor inicial qual das populações inicialmente aumentará e qual diminuirá ?
3. As populações  $p$  e  $c$  mudarão monotonicamente ou terão valores extremos ?
4. Quais são os pontos de equilíbrio ?

Para a construção desse modelo matemático do problema levamos em conta que: a população de presas crescerá a uma taxa proporcional ao seu tamanho  $\Delta p = ap$  ( $a > 0$ ) na ausência dos caçadores; a população de caçadores diminuirá a uma taxa proporcional ao seu tamanho na ausência das presas,  $\Delta c = -dc$  ( $d > 0$ ) e quando as duas populações se interagem aparecem os efeitos de predação.

Assim, a população de presas será diminuída e a população de caçadores será aumentada de acordo com uma taxa proporcional ao número de encontros de indivíduos de espécies diferentes, isto é,  $-bpc$  ( $b > 0$ ) e  $epc$  ( $e > 0$ ), respectivamente.

Obtemos o sistema de equações diferença

$$\text{Presas: } \Delta p = ap - bpc$$

$$\text{Caçadores: } \Delta c = -dc + epc \quad a, b, d, e > 0$$



Esse sistema pode ser escrito como segue:

$$\Delta p = bp \left( \frac{a}{b} - c \right)$$

(1)

$$\Delta c = ec \left( p - \frac{d}{e} \right)$$

(1) é um modelo desse problema e podemos começar a analisar o que ocorre na natureza.

Se  $p_0 = c_0 = 0$  então  $\Delta p = \Delta c = 0$  e teremos um ponto de equilíbrio na população: zero presas e zero caçadores. Esse fato, naturalmente, não é significativo na natureza.

Se  $c_0 = \frac{a}{b}$  e  $p_0 = \frac{d}{e}$ , novamente ocorrerá  $\Delta p = \Delta c = 0$ . Essa relação nos interessa pois nos fornece a informação que se a população inicial de presas é  $\frac{d}{e}$  e a de caçadores é  $\frac{a}{b}$ , a população permanecerá constante ao longo do tempo e diremos que estará em equilíbrio.

Uma nova questão passa a preocupar-nos: O que acontecerá se  $p_0$  e  $c_0$  não forem os valores acima?

Analisando (1) temos:

- (i) se  $p > \frac{d}{e}$  então  $\Delta c > 0$  (c aumenta);
- (ii) se  $p < \frac{d}{e}$  então  $\Delta c < 0$  (c diminui);
- (iii) se  $c > \frac{a}{b}$  então  $\Delta p < 0$  (p diminui);
- (iv) se  $c < \frac{a}{b}$  então  $\Delta p > 0$  (p aumenta).

Logo, uma grande população de presas dá razão a um aumento na população de caçadores e uma pequena população de presas causa uma diminuição na população de caçadores. Uma grande

população de caçadores causa diminuição na população de presas e uma pequena população de caçadores fará a população de presas aumentar.

O aumento ou diminuição de uma população é provocado pela outra população. Ambas as populações aumentarão ou diminuirão periodicamente e esse comportamento está ilustrado na figura 27.

Na figura 27,  $E = (\frac{d}{e}, \frac{a}{b})$  denota o equilíbrio na população onde  $\Delta p = \Delta c = 0$ . Esse resultado não é intuitivo e surpreenderá os estudantes.

A argumentação acima é uma justificativa intuitiva de periodicidade, cuja prova rigorosa foi feita por Volterra em 1931.

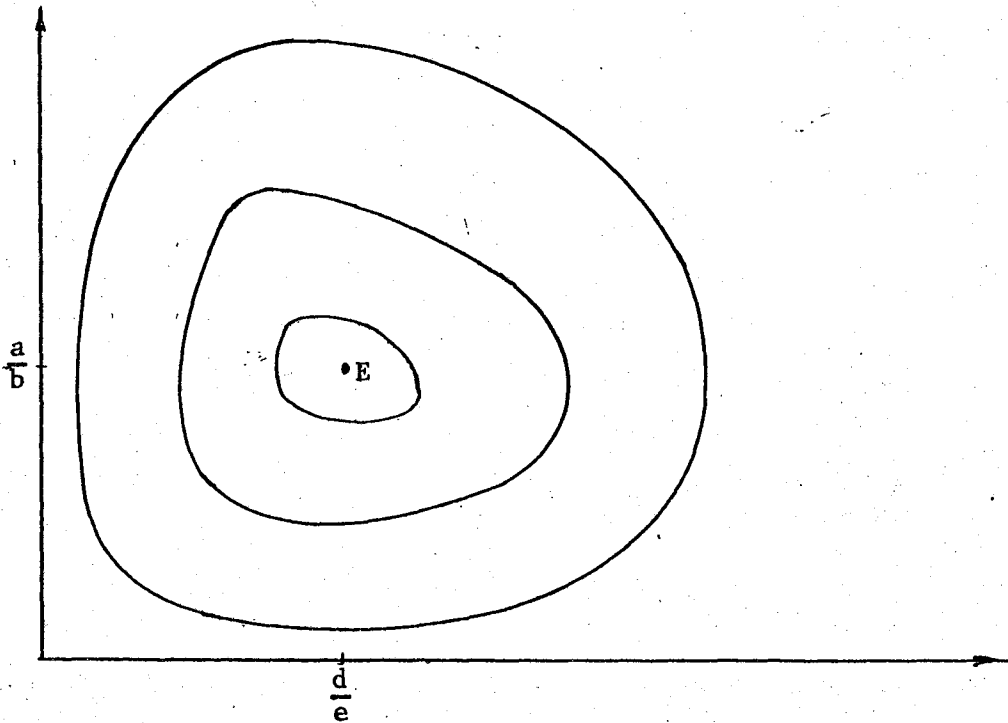


Figura 27

## 5. BIBLIOGRAFIA

- [1] - Carvalho, L.A.V. - On Liapunov Functionals for Linear Difference Equations. Tese de Doutorado, Brown University, 1979.
- [2] - Hale, Jack K. - Ordinary Differential Equations. John Wiley & Sons, Inc., 1969.
- [3] - Hale, Jack K. - Theory of Functional Differential Equations. Springer-Verlag, New York, Inc., 1977.
- [4] - Hurt, James - Some Aspects of Difference Equations. Tese de Doutorado, Brown University, 1967.
- [5] - Montel, Paul - Leçons sur recurrences et leurs applications. Paris, 1957.
- [6] - Spiegel, M.R. - Variáveis Complexas. Editora Mc Graw-Hill do Brasil Ltda, 1977.
- [7] - Nering, E.D. - Linear Algebra and Matrix Theory. John Wiley & Sons, Inc., 1970.
- [8] - Rudin, W. - Real and Complex Analysis. Mc Graw-Hill Book Company, 1966.
- [9] - Paterlini, R.R. - Endomorfismo de Ordem Superior. Tese de Doutorado, IMPA-Rio de Janeiro, 1980.
- [10] - Sánchez, D.A. - Ordinary Differential Equation and Stability Theory; An Introduction. W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1968.
- [11] - Shilov, G.E. - Linear Algebra. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1971.