

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

**Geometria diferencial de segunda ordem de variedades
singulares em espaços euclidianos**

Pedro Benedini Riul

Tese de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em
Matemática (PPG-Mat)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Pedro Benedini Riul

Geometria diferencial de segunda ordem de variedades singulares em espaços euclidianos

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Maria Aparecida Soares Ruas

Coorientador: Prof. Dr. Raúl Adrián Oset Sinha

USP – São Carlos
Março de 2019

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

B463g Benedini Riul, Pedro
 Geometria diferencial de segunda ordem de
 variedades singulares em espaços euclidianos / Pedro
 Benedini Riul; orientadora Maria Aparecida Soares
 Ruas; coorientador Raúl Adrián Oset Sinha. -- São
 Carlos, 2019.
 148 p.

 Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em
 Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e
 de Computação, Universidade de São Paulo, 2019.

 1. Geometria diferencial. 2. Segunda forma
 fundamental. 3. Variedades singulares. I. Ruas,
 Maria Aparecida Soares, orient. II. Oset Sinha,
 Raúl Adrián, coorient. III. Título.

Pedro Benedini Riul

Second order differential geometry of singular varieties in
euclidean spaces

Doctoral dissertation submitted to the Institute of
Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP, in
partial fulfillment of the requirements for the degree of
the Doctorate Program in Mathematics. *FINAL
VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Profa. Dra. Maria Aparecida Soares Ruas

Co-advisor: Prof. Dr. Raúl Adrián Oset Sinha

USP – São Carlos

March 2019

*Este trabalho é dedicado a todos que de
alguma forma contribuíram para que ele pudesse ser realizado.*

AGRADECIMENTOS

Dentre os muitos agradecimentos que devem ser feitos, espero fazer jus a todos e não deixar ninguém de fora.

A primeira pessoa que merece o meu mais profundo agradecimento é a minha orientadora, Prof. Cidinha. Logo após minha chegada ao ICMC descobri que ela seria minha orientadora e estaria mentindo se dissesse não me senti ao menos um pouco apreensivo. No entanto, muito pouco tempo precisou passar para que eu percebesse o porquê ela é uma pessoa tão querida e respeitada. Além de uma profissional excepcional, descobri que a Prof. Cidinha é uma pessoa compreensiva, humilde e uma orientadora muito melhor do que qualquer outra que sonhei em ter, mesmo em meus maiores devaneios. Não há como agradecê-la por tudo que tem me ensinado. Do fundo do meu coração, obrigado!

Meu segundo agradecimento vai para meu coorientador, Raúl. Durante o período que estive em Valência e estudamos juntos aprendi mais do que imaginei ser possível em apenas 9 meses. Não tenho a menor dúvida que em poucos anos será um dos maiores nomes na teoria de Singularidades. Obrigado por todo carinho e atenção! Aproveito o gancho de Valência para agradecer à Carmen, Juanjo, Danilo e Jéssica por todo o apoio e companhia na inesquecível Valência.

Agradeço à minha família: meus pais, Angelo e Silvana, ao meu irmão e cunhada, Caio e Michelle, aos meus avós Silvia e Ademar e à Rose por todo apoio que me deram durante toda a minha vida acadêmica.

Não podem ficar de fora desse agradecimento todos meus amigos que estiveram ao meu lado nessa doideira que foi o doutorado: Ana Carolina, Patrícia Manoel, Jéssica, Eric, Fernando, Wilker (Zé), Patrícia Tempesta, Thales, Victor (Argola), Angelo, Matheus, Amanda, Jackson, Alex Paulo, Dione, Hellen, Otoniel, Jorge, Liliam, Mariana, Thaís e Camila. Dentre o hall de amigos, três gorduchas merecem grande destaque. Carol por ser uma companhia incrível, amiga em todas as horas, parceira de comilanças e bebedeiras e de vez em quando até nos estudos. As outras duas são as bolotas mais fantásticas que conheço: Ana Maria e Rafaella. Sem elas minha vida em São Carlos não seria a mesma, parceiras desde a época de graduação, minha eterna gratidão por todo o carinho que recebi de vocês.

Um agradecimento ao meu amor mais amado, Leonardo. Você foi o melhor (e literalmente o maior) presente que ganhei em São Carlos. Obrigado por me apoiar, aconselhar e dividir comigo essa empreitada!

Meus mais profundos agradecimentos à todos do ICMC: professores e funcionários. Agradeço ao grupo de Singularidades pelo constante apoio e carinho, em especial aos professores Farid, Miriam, Marcelo e Nivaldo.

Por fim, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro e pela oportunidade de realizar um período sanduíche (CAPES - PVE 88887.122685/2016-00).

*“Hear this, young men and women everywhere, and proclaim it far and wide.
The earth is yours and the fullness thereof. Be kind, but be fierce.
You are needed now more than ever before. Take up the mantle of change. For this is your time.”*
(Sir Winston Churchill)

RESUMO

BENEDINI RIUL, P. **Geometria diferencial de segunda ordem de variedades singulares em espaços euclidianos**. 2019. 148 p. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2019.

Esta tese é dedicada ao estudo da geometria de segunda ordem de variedades singulares de coposto 1 em espaços euclidianos, ou seja, ao estudo das propriedades geométricas relacionadas à segunda forma fundamental de tais variedades em pontos singulares. O foco será dado às superfícies de coposto 1 em \mathbb{R}^4 , no entanto também serão consideradas superfícies e 3-variedades de coposto 1 em \mathbb{R}^3 e \mathbb{R}^5 , respectivamente.

Palavras-chave: Geometria diferencial, Segunda forma fundamental, Variedades Singulares.

ABSTRACT

BENEDINI RIUL, P. **Second order differential geometry of singular varieties in euclidean spaces**. 2019. 148 p. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2019.

This thesis is dedicated to the study of the second order geometry of corank 1 singular varieties in euclidean spaces, that is, to the study of geometrical properties related to the second fundamental form of those varieties at singular points. The focus will be on corank 1 surfaces in \mathbb{R}^4 , however corank 1 surfaces and 3-varieties in \mathbb{R}^3 and \mathbb{R}^5 , respectively, will also be considered.

Keywords: Differential geometry, Second fundamental form, Singular varieties.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Teorema 3.13.	58
Figura 2 – Segmentos - caso $\alpha = \beta$	72
Figura 3 – Os espaços $\mathcal{A}ff_p$ e E_p	78
Figura 4 – Direções assintóticas para cada tipo de parábola de curvatura.	84
Figura 5 – Referencial adaptado de E_p	87
Figura 6 – Curvatura umbílica $\kappa_u(p)$	89
Figura 7 – Cálculo de $\Theta(X)$ utilizando o software Singular - Parte 1.	98
Figura 8 – Cálculo de $\Theta(X)$ utilizando o software Singular - Parte 2.	98
Figura 9 – Cálculo de $\Theta(X)$ utilizando o software Singular - Parte 3.	99
Figura 10 – Cálculo de $\Theta(X)$ utilizando o software Singular - Parte 4.	99
Figura 11 – Cálculo de $\Theta(X)$ utilizando o software Singular - Parte 5.	100
Figura 12 – Superfície de Steiner Romana.	120
Figura 13 – Superfície de Steiner Romana.	122
Figura 14 – Superfície cross-cap.	122
Figura 15 – Superfície Steiner de Tipo 5.	122
Figura 16 – Superfície cross-cup.	122
Figura 17 – Elíptica	123
Figura 18 – Triangular	123
Figura 19 – Cone planar	123
Figura 20 – Tipo 1	123
Figura 21 – Tipo 2	123
Figura 22 – Tipo 3	123
Figura 23 – Locus de curvatura planares.	123
Figura 24 – Elipses de curvatura na superfície de Steiner Romana.	125
Figura 25 – Elipses de curvatura na região elíptica.	126
Figura 26 – Vista superior do locus de curvatura.	130
Figura 27 – Vista lateral do locus de curvatura.	130
Figura 28 – Ilustração do Teorema 6.18.	132
Figura 29 – Vista lateral do locus de curvatura.	133
Figura 30 – Vista superior do locus de curvatura.	133
Figura 31 – Parábolas de curvatura contidas no locus de curvatura.	134
Figura 32 – Região parabólica.	134
Figura 33 – Parábolas de curvatura na região parabólica.	135

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Germes de funções \mathcal{R} -simples.	34
Tabela 2 – As \mathcal{G} -classes de pares de formas quadráticas.	37
Tabela 3 – \mathcal{A} -classes de germes de aplicação $(\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ com \mathcal{A}_e -codimensão ≤ 3	41
Tabela 4 – Singularidades \mathcal{A} -simples $(\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$	47
Tabela 5 – Condições sobre os coeficientes do 2-jato para a \mathcal{A}^2 -classificação.	69
Tabela 6 – Algoritmo para a obtenção do ideal gerador de X	96
Tabela 7 – Germes de submersão em \mathcal{M}_4 com $\mathcal{R}(X)$ -codimension ≤ 3	102
Tabela 8 – Cálculo da $\mathcal{R}(X)$ -codimensão utilizando Singular.	109
Tabela 9 – Tipos de singularidade de h_ν (ponto hiperbólico).	115
Tabela 10 – Elipses de curvatura na região elíptica.	125
Tabela 11 – Condições para \mathcal{A}^2 -classificação em $\Sigma^1 J^2(3, 5)$	130

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathbb{R}^n — Espaço Euclidiano de dimensão n .

(X, p) — Germe de X em p .

\mathcal{E}_n^m — Conjunto de germes de aplicação $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}^m$.

\mathcal{M}_n — Ideal maximal de \mathcal{E}_n^m .

$J^k(n, m)$ — Espaço de k -jatos de germes de aplicações suaves $(\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$.

TU — Fibrado tangente de U .

df_p — Diferencial da aplicação f em p .

\mathcal{R} — Grupo de germes de difeomorfismos agindo na fonte.

\mathcal{L} — Grupo de germes de difeomorfismos agindo na meta.

\mathcal{A} — Grupo de germes de difeomorfismos agindo na fonte e na meta.

\mathcal{K} — Grupo de contato.

\mathcal{C} — Subgrupo \mathcal{C} do grupo de contato.

$L\mathcal{G} \cdot f$ — Espaço tangente à \mathcal{G} -órbita de f no germe f

$\text{cod}(f, \mathcal{G})$ — Codimensão da \mathcal{G} -órbita do germe f .

$\text{cod}_e(f, \mathcal{G})$ — Codimensão da \mathcal{G} -órbita estendida do germe f .

$\mathcal{H}(f)(p)$ — Matriz Hessiana de f em p .

A_k — Singularidade do tipo A_k .

D_k — Singularidade do tipo D_k , $k \geq 4$.

E_k — Singularidade do tipo E_k , $k = 6, 7, 8$.

$T_p S$ — Espaço tangente à S em p .

$N_p S$ — Espaço normal à S em p .

II — Segunda forma fundamental.

\mathbb{S}^n — Esfera unitária de dimensão n .

δ — Resultante

$\mathcal{O}(n)$ — Grupo de isometrias em \mathbb{R}^n .

$GL(n, \mathbb{R})$ — Grupo linear em \mathbb{R}^n .

h_v — Função altura na direção v .

$CS(\varepsilon)$ — Hipersuperfície canal de S de raio ε .

$\mathcal{A}ff_p$ — Subespaço afim determinado pelo locus de curvatura.

E_p — Subespaço vetorial determinado pelo locus de curvatura.

κ_u — Curvatura umbílica.

Δ_p — Locus de curvatura de uma variedade singular no ponto p .

\mathcal{A}^2 — Subgrupo de \mathcal{A} de 2-jatos de difeomorfismos agindo na fonte e na meta.

$\Sigma^1 J^2(n, p)$ — Subconjunto dos 2-jatos de coposto 1 de germes $(\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$.

Δ_e — Elipse de curvatura.

\mathcal{R}^2 — Subgrupo de \mathcal{R} de 2-jatos de difeomorfismos agindo na fonte.

$\mathcal{R}(X)$ — Subgrupo de \mathcal{R} de difeomorfismos que preservam X .

$\Theta(X)$ — \mathcal{E}_4 -módulo de campos de vetores tangentes à X .

$\Theta_1(X)$ — Campos de vetores em $\Theta(X)$ que possuem 1-jato nulo.

$\mathcal{R}_1(X)$ — Subgrupo de $\mathcal{R}(X)$ de elementos cujo 1-jato é a identidade.

$C(X, x_0)$ — Cone tangente à X em x_0 .

$ord_{x_i} f$ — Ordem de f na variável x_i .

$C_p M$ — Plano que contém o cone tangente de M em p .

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	23
2	PRELIMINARES	27
2.1	Singularidades de aplicações diferenciáveis	27
2.2	Superfícies regulares em \mathbb{R}^4	35
2.3	Superfícies regulares em \mathbb{R}^5	43
3	SUPERFÍCIES SINGULARES EM \mathbb{R}^3	49
3.1	A geometria de segunda ordem	49
3.2	A relação entre os loci de curvatura	54
4	SUPERFÍCIES SINGULARES EM \mathbb{R}^4	63
4.1	A parábola de curvatura	63
4.2	Propriedades geométricas de segunda ordem	77
4.3	Curvatura umbílica	86
4.4	Contato com hiperplanos	90
5	GEOMETRIA PLANA DA SINGULARIDADE I_1	95
5.1	Contato com hiperplanos	109
6	3-VARIEDADES EM ESPAÇOS EUCLIDIANOS	117
6.1	3-variedades regulares	118
6.2	3-variedades singulares de coposto 1 em \mathbb{R}^5	125
	REFERÊNCIAS	141
	Índice	147

INTRODUÇÃO

A geometria diferencial de variedades singulares tem ganhado cada vez mais destaque na literatura matemática. A teoria de singularidades, sem dúvida alguma, pode tomar para si uma parcela generosa do crédito pelo avanço dessa área. Cada vez mais pesquisadores do mundo todo têm se dedicado ao estudo destes objetos, fato este que pode ser observado pelo alto número de artigos que podemos encontrar relacionados a este tema nas últimas décadas.

Dentre as superfícies singulares, foram estudadas primeiramente as frentes e frontais (não necessariamente sob o ponto de vista da teoria de singularidades). Tais superfícies apresentam um “bom comportamento”, pois em cada um de seus pontos singulares podemos definir um plano tangente dado como limite de planos tangentes em pontos regulares. Nesta classe destaca-se a superfície cuspidal edge, o tipo mais simples de frente de onda, que é objeto de estudo em (SAJI; UMEHARA; YAMADA, 2009; MARTINS; SAJI, 2016; NAOKAWA; UMEHARA; YAMADA, 2016; KOKUBU *et al.*, 2018; MARTINS; SAJI, 2018; OSET SINHA; TARI, 2018). Também podemos destacar a superfície rabo de andorinha (Swallowtail) estudada em (BRUCE; KIRK; PLESSIS, 1997; SAJI, 2018).

Além disso, a geometria do cross-cap (ou guarda-chuva de Whitney) e de outras superfícies singulares de coposto 1 foi também amplamente estudada: (BRUCE; WEST, 1998; NUÑO BALLESTEROS; TARI, 2007; FUKUI; HASEGAWA, 2012; FUKUI; HASEGAWA, 2013; HASEGAWA *et al.*, 2014; HASEGAWA *et al.*, 2015; OSET SINHA; TARI, 2015; DIAS; TARI, 2016; SICHACÁ; KABATA, 2018). No entanto, uma vez que tais superfícies, em geral, não são frentes de onda, seu estudo demanda novas abordagens, como o que pode ser encontrado em (MARTINS; NUÑO BALLESTEROS, 2015), onde são investigados aspectos gerais de superfícies singulares de coposto 1 em \mathbb{R}^3 .

Neste artigo, os autores se debruçam sobre o problema de definir a primeira e segunda formas fundamentais para tais superfícies, buscando por fim, compreender as informações geométricas que delas são obtidas. Inspirados na definição da elipse de curvatura para superfícies

regulares em \mathbb{R}^4 (LITTLE, 1969), eles definem a parábola de curvatura, uma curva plana cujo traço está contido no plano normal. Esta curva codifica toda a informação geométrica de segunda ordem da superfície. São definidas também direções assintóticas e binormais, além de um invariante por isometrias chamado curvatura umbílica, definido em pontos singulares em que a parábola de curvatura se degenera. Por fim, estudam o contato destas superfícies com planos e esferas através do estudo das singularidades das funções altura e distância ao quadrado, respectivamente.

Ao projetarmos ortogonalmente uma superfície imersa $S \subset \mathbb{R}^4$ em \mathbb{R}^3 , a composição da parametrização de S com a projeção pode ser vista, localmente, como um germe de aplicação $(\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$. Se a direção de projeção é tangente à superfície S , surgem singularidades. Em particular, sabemos que se a direção tangente é também assintótica, singularidades mais degeneradas que um cross-cap (guarda-chuva de Whitney) são obtidas (MOND, 1985; BRUCE; NOGUEIRA, 1998).

Neste contexto é natural, portanto, o seguinte questionamento: Dada uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^4$ em $p \in S$, existe alguma relação entre a elipse de curvatura de S neste ponto e a parábola de curvatura da sua projeção no respectivo ponto singular? Mais ainda, como se relacionam as geometrias de ambos os objetos? As respostas para estas perguntas se encontram em (BENEDINI RIUL; OSET SINHA, 2019). Estes e mais resultados compõem o Capítulo 3 desta tese. A resposta para a primeira pergunta, por exemplo, é o Teorema 4.27, o principal deste capítulo.

O Capítulo 4 é dedicado ao estudo de superfícies singulares de coposto 1 em \mathbb{R}^4 . Para tanto utilizamos como inspiração o que foi feito em (MARTINS; NUÑO BALLESTEROS, 2015). Dada uma superfície $M \subset \mathbb{R}^4$ singular de coposto 1 em $p \in M$, definimos a primeira e segunda forma fundamentais da superfície naquele ponto. A *parábola de curvatura* (Definição 4.3) de M em p , denotada por Δ_p , é uma curva cujo traço está contido no espaço normal e que pode se degenerar em uma semirreta, uma reta ou um ponto.

Em (MENDES; NUÑO BALLESTEROS, 2016), os autores mostram que existem quatro órbitas no conjunto de todos os germes de aplicação $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$ de coposto 1, de acordo com seu 2-jato, via ação do grupo \mathcal{A}^2 , dado como o conjunto de 2-jatos de difeomorfismos agindo na fonte e na meta (Lema 4.7). A parábola de curvatura é um invariante completo para esta classificação, ou seja, ela distingue completamente as quatro \mathcal{A}^2 -órbitas (Teorema 4.9). Além desta propriedade, é possível afirmar que a parábola de curvatura contém toda a geometria de segunda ordem de uma superfície. Isso se deve ao Teorema 4.13, que mostra que dois 2-jatos de coposto 1 $(\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$ são equivalentes pela ação de $\mathcal{H}^2 \times \mathcal{O}(4)$ se, e somente se, existe uma isometria linear entre os hiperplanos normais que preserva as respectivas parábolas de curvatura.

Ainda no Capítulo 4, investigamos a geometria de segunda ordem de superfícies de coposto 1 em \mathbb{R}^4 . Para tanto, buscamos uma relação entre a geometria desta superfície com

a de uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^4$, que chamamos de *superfície associada*. Tal relação é dada no Teorema 4.27. Os conceitos de *direção binormal* e *direção assintótica* são definidos e alguns resultados acerca deles são demonstrados. Finalmente, um invariante de segunda ordem é definido: a *curvatura umbílica*. Este invariante pode ser encontrado na literatura, por exemplo em (COSTA; MORAES; ROMERO FUSTER, 2009; MARTINS; NUÑO BALLESTEROS, 2015; MARTINS; SAJI, 2016; MARTINS; SAJI, 2018). O invariante aqui definido pode ser visto como uma generalização daqueles citados, para o caso de superfícies singulares de coposto 1 em \mathbb{R}^4 . Na última seção deste capítulo é estudado o contato de superfícies de coposto 1 em \mathbb{R}^4 com hiperplanos, através do estudo das singularidades da função altura. Todos os resultados contidos neste capítulo podem ser encontrados em (BENEDINI RIUL; RUAS; OSET SINHA, 2018).

De modo similar a superfícies singulares em \mathbb{R}^3 , superfícies singulares em \mathbb{R}^4 aparecem naturalmente como projeções de superfícies regulares em \mathbb{R}^5 ao longo de direções tangentes. Consequentemente, a composição da parametrização da superfície regular com a projeção pode ser vista como um germe de aplicação $(\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$. Em (KLOTZ; POP; RIEGER, 2007), os autores classificam todos os germes \mathcal{A} -simples $(\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{2n}, 0)$. Em particular, quando $n = 2$, temos a família I_k dada por $(x, y) \mapsto (x, xy, y^2, y^{2k+1})$, $k \geq 1$. Além disso, no Capítulo 4, e também em (BENEDINI RIUL; RUAS; OSET SINHA, 2018), mostramos que a família I_k é a única cuja parábola de curvatura é não degenerada. Em particular, o caso $k = 1$ apresenta uma importante propriedade geométrica: em (ROMERO FUSTER; RUAS; TARI, 2008), os autores provam que dada uma superfície regular $N \subset \mathbb{R}^5$, uma direção tangente \mathbf{u} , em pontos cuja segunda forma fundamental tem posto máximo, é assintótica se, e somente se, a projeção de N ao longo de \mathbf{u} em um quatro espaço transversal tem uma \mathcal{A} -singularidade mais degenerada que I_1 . Podemos dizer, em um certo sentido, que I_1 é para superfícies singulares em \mathbb{R}^4 o que o cross-cap é para superfícies singulares em \mathbb{R}^3 .

Tendo em vista a posição de destaque da singularidade I_1 , no Capítulo 5 nos debruçamos sobre a geometria plana dessa singularidade. Os resultados presentes neste capítulo podem ser encontrados em (BENEDINI RIUL; OSET SINHA, 2018). Neste capítulo, estudamos a geometria plana de superfícies singulares de coposto 1 em \mathbb{R}^4 cuja parametrização local é \mathcal{A} -equivalente à singularidade I_1 . São classificadas submersões $(\mathbb{R}^4, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ através de mudanças de coordenadas na fonte que preservam a *superfície modelo* X parametrizada por I_1 (Teorema 5.9). Essas mudanças de coordenadas formam um subgrupo geométrico do grupo de Mather \mathcal{H} , denotado por $\mathcal{R}(X)$. Tal grupo é estudado em (BRUCE; ROBERTS, 1988; DAMON, 1988), além de em (BRUCE; WEST, 1998; OSET SINHA; TARI, 2018; OSET SINHA; SAJI, 2018), onde os autores o utilizam para classificar submersões que preservam o cross-cap e a superfície cuspidal edge, respectivamente.

Neste capítulo também analisamos a função altura de uma superfície singular de coposto 1 em \mathbb{R}^4 , cuja parametrização é \mathcal{A} -equivalente à singularidade I_1 e dada por uma forma normal genérica obtida por mudanças de coordenadas na fonte e isometrias na meta (Teorema 5.10). Tais

singularidades são modeladas por aquelas obtidas na $\mathcal{B}(X)$ -classificação de submersões. Mais ainda, apresentamos caracterizações geométricas para cada tipo de singularidade encontrada da função altura.

No último capítulo nos voltamos para o estudos de três variedades tanto regulares quanto singulares. Na primeira seção, é feita uma rápida revisão acerca de 3-variedades regulares em espaços euclidianos. Nesta seção, mostramos que dada uma 3-variedade regular em \mathbb{R}^{3+k} , com $k \geq 1$, seu locus de curvatura em um ponto é gerado pela reunião não disjunta das elipses de curvatura das superfícies regulares em \mathbb{R}^{2+k} obtidas via seções normais da 3-variedade (Proposição 6.9). São apresentados alguns exemplos ilustrando essa propriedade.

A segunda seção trata de 3-variedades singulares de coposto 1 em \mathbb{R}^5 . É importante deixar claro que as definições e resultados iniciais desta seção não são de nossa autoria. Os créditos deste estudo são de Andrea de Jesus Sacramento, que durante um período de pós-doutoramento (CNPq150469/2017-9) sob supervisão da Prof^a. Maria Ap. Soares Ruas se dedicou a pesquisar estes objetos. Em (RUAS; SACRAMENTO, 2018), elas estudam a geometria de segunda ordem de tais variedades, inspiradas pelos trabalhos (MARTINS; NUÑO BALLESTEROS, 2015; BENEDINI RIUL; RUAS; OSET SINHA, 2018).

Nossa contribuição direta para tal estudo pode ser encontrada nos Teoremas 6.18 e 6.21. No primeiro, é provado que o locus de curvatura de uma 3-variedade singular de coposto 1 em \mathbb{R}^5 pode ser gerado pela reunião não disjunta das parábolas de curvatura das superfícies de coposto 1 em \mathbb{R}^4 obtidas da 3-variedade via seções normais. Um dos resultados mostrados pelas autoras no estudo dessas 3-variedades é a \mathcal{A}^2 -classificação dos dois jatos de aplicação de coposto 1, $(\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^5, 0)$. No entanto, contrariando as expectativas, o locus de curvatura da 3-variedade não é um invariante para essa classificação. Provamos, que neste caso, as parábolas de curvatura das seções normais são capazes de distinguir completamente as \mathcal{A}^2 -órbitas em $\Sigma^1 J^2(3, 5)$.

PRELIMINARES

Este capítulo é dedicado ao estudo de conceitos e resultados preliminares necessários ao melhor entendimento desta tese. Apresentamos aqui definições e resultados já bastante conhecidos na literatura, providenciando sempre ao menos uma referência para que o leitor, se assim desejar, possa se aprofundar mais em um determinado assunto. Dessa forma, não apresentamos aqui demonstrações dos resultados enunciados. No entanto, nem toda a matemática preliminar estará contida neste capítulo. Nos capítulos que sucedem serão adicionados também definições e resultados não inéditos que de outra forma ficariam deslocados neste capítulo.

2.1 Singularidades de aplicações diferenciáveis

Se tivéssemos que escolher um marco zero para a teoria de Singularidades, muito provavelmente seria com o trabalho de Hassler Whitney, ([WHITNEY, 1955](#)), em que ele mostra que aplicações do plano no plano possuem, em geral, singularidades do tipo dobra e cúspide. Muitos trabalhos foram e ainda tem sido feitos no estudo de singularidades de aplicações diferenciáveis.

Não temos intenção aqui de apresentar um estudo amplo acerca de singularidades de aplicações diferenciáveis, mas sim familiarizar o leitor com a linguagem e as ferramentas que aparecerão no decorrer do texto. Mais detalhes podem ser encontrados em ([GIBSON, 1979](#); [MARTINET, 1982](#); [ARNOL'D](#); [GUSEIN-ZADE](#); [VARCHENKO, 1985](#)). Além destes, para aqueles que se interessam na aplicação da teoria em geometria diferencial, o livro ([BRUCE](#); [GIBLIN, 1992](#)) é muito interessante, repleto de exemplos e exercícios relacionando conceitos da teoria de singularidades com o estudo local da geometria de curvas. No entanto, para uma leitura mais direcionada para a geometria genérica de superfícies em espaços euclidianos e de Minkowski, o capítulo 3 de ([IZUMIYA *et al.*, 2016](#)) é de grande valia.

As definições e resultados que enunciaremos estão apresentados para aplicações entre

subconjuntos de espaços euclidianos. No entanto eles são também verdadeiros para aplicações entre variedades diferenciáveis.

Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ subconjuntos contendo um ponto $p \in \mathbb{R}^n$. Dizemos que X e Y são equivalentes se existe um subconjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ contendo p tal que $X \cap U = Y \cap U$. Isso define uma relação de equivalência entre subconjuntos de \mathbb{R}^n e denotamos a classe de equivalência de X por (X, p) , que é chamada de *germe* de X em p .

Sejam $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ dois abertos tais que $p \in U_1 \cap U_2$. Considere também duas aplicações suaves $f : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^m$. Dizemos que $f \sim g$ se existe um aberto $W \subset U_1 \cap U_2$ contendo p tal que $f = g$ em W . Isso define uma relação de equivalência e definimos um *germe de aplicação* em p como uma classe de equivalência dada por essa relação, que denotamos por

$$f : (\mathbb{R}^n, p) \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Quando exigimos que todos os elementos da classe de equivalência tenham a mesma imagem, escrevemos:

$$f : (\mathbb{R}^n, p) \rightarrow (\mathbb{R}^m, q).$$

O conjunto de todos os germes de função suave na origem $0 \in \mathbb{R}^n$, dotado das operações de adição e multiplicação é um anel local denotado por

$$\mathcal{E}_n = \{f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é um germe de função suave}\},$$

cujo ideal maximal, \mathcal{M}_n , é o subconjunto dos germes de função que se anulam na origem. Tomando (x_1, \dots, x_n) um sistema de coordenadas locais de $(\mathbb{R}^n, 0)$, temos que o ideal \mathcal{M}_n é gerado pelos germes de funções x_i , com $i = 1, \dots, n$, ou seja

$$\mathcal{M}_n = \mathcal{E}_n \cdot \{x_1, \dots, x_n\}.$$

Para $k \in \mathbb{Z}_+$, o ideal dado pela k -ésima potência de \mathcal{M}_n

$$\mathcal{M}_n^k = \{x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}; i_1 + \dots + i_n = k\},$$

é o conjunto de funções $f \in \mathcal{M}_n$ cujas derivadas parciais de ordem menor ou igual a $k - 1$ nulas na origem.

O conjunto de todas os germes de aplicações suaves $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}^m$ é denotado por \mathcal{E}_n^m . Mais ainda, este conjunto é dado pelo produto direto de m cópias de \mathcal{E}_n , ou seja,

$$\mathcal{E}_n^m = \underbrace{\mathcal{E}_n \times \cdots \times \mathcal{E}_n}_{m \text{ vezes}}.$$

O espaço de k -jatos de germes de aplicações suaves $(\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$ é definido pelo seguinte quociente

$$J^k(n, m) = \frac{\mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_n^m}{\mathcal{M}_n^{k+1} \cdot \mathcal{E}_n^m}.$$

A aplicação $j^k : \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_n^m \rightarrow J^k(n, m)$ leva cada germe de aplicação f em seu k -ésimo jato. Um elemento em $J^k(n, m)$ correspondente a um germe de aplicação $f \in \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_n^m$ é denotado por $j^k f$, que é simplesmente o polinômio de Taylor de f de ordem k na origem e sem o termo constante.

Definição 2.1. Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação suave e $df : TU \rightarrow T\mathbb{R}^m$ a sua diferencial. A aplicação f é *singular* em $p \in U$ se o posto da aplicação linear $df_p : T_p\mathbb{R}^n \rightarrow T_{f(p)}\mathbb{R}^m$ não é máximo, ou seja, se $\text{posto}(df_p) < \min(n, m)$. Neste caso, dizemos que p é um *ponto singular* de f . Caso contrário, f é não singular em p , que por sua vez é chamado de *ponto regular* de f .

A definição anterior também pode ser estendida para germes de aplicações. Um germe $f : (\mathbb{R}^n, p) \rightarrow \mathbb{R}^m$ é dito singular se algum de seus representantes é singular em p .

Exemplo 2.2. (i) Um germe de função $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ é singular se, e somente se, todas as derivadas parciais na origem de um de seus representantes se anula. Consequentemente, o conjunto de todos os germes de funções singulares é o ideal \mathcal{M}_n^2 .

(ii) Um germe de curva $f : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow \mathbb{R}^m$ é singular se, e somente se, seu vetor tangente na origem $f'(0)$ é o vetor nulo.

Mather, em seus trabalhos (MATHER, 1968a; MATHER, 1968b; MATHER, 1969a; MATHER, 1969b; MATHER, 1970) definiu uma série de grupos que agem no conjunto de germes de aplicações \mathcal{E}_n^m . Denotamos por \mathcal{R} o grupo de germes de difeomorfismo $(\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$, em outras palavras, mudanças de coordenadas na fonte. A ação de \mathcal{R} em \mathcal{E}_n^m é dada por

$$\cdot_{\mathcal{R}} : \mathcal{E}_n^m \times \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{E}_n^m, (f, h) \mapsto h \cdot f = f \circ h^{-1},$$

para todo $h \in \mathcal{R}$ e todo $f \in \mathcal{E}_n^m$.

O grupo de difeomorfismos $(\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$ agindo na meta é denotado por \mathcal{L} e sua ação é dada por

$$\cdot_{\mathcal{L}} : \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_n^m \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_n^m, (f, k) \mapsto k \cdot f = k \circ f,$$

para todo $k \in \mathcal{L}$ e todo $f \in \mathcal{E}_n^m$. O grupo $\mathcal{A} = \mathcal{R} \times \mathcal{L}$ dado pelo produto direto de \mathcal{R} e \mathcal{L} age sobre $\mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_n^m$:

$$\cdot_{\mathcal{A}} : \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_n^m \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_n^m, (f, (h, k)) \mapsto (h, k) \cdot f = k \circ f \circ h^{-1},$$

para todo $(h, k) \in \mathcal{A}$ e $f \in \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_n^m$.

Podemos também definir o *grupo de contato* \mathcal{K} . Este grupo é dado pelo conjunto de germes de difeomorfismos $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, (0, 0))$ que podem ser escritos na forma $H(x, y) = (h(x), H_1(x, y))$, de modo que $h \in \mathcal{R}$ e $H_1(x, 0) = 0$ para x suficientemente próximo de 0. Tomando a projeção canônica $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, temos que $\pi \circ H = h \circ \pi$. No entanto quando $h = id_n$ (id_n é o germe de aplicação identidade de \mathbb{R}^n), o conjunto de germes de

difeomorfismo como acima é denotado por \mathcal{C} , mais um dos grupos de Mather. Além disso, o grupo de contato é dado pelo produto semidireto de \mathcal{R} e \mathcal{C} , ou seja, $\mathcal{K} = \mathcal{R} \times \mathcal{C}$.

O grupo de contato \mathcal{K} age em $\mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_n^m$ da seguinte maneira: dados dois germes $f, g \in \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_n^m$ e $H = (h, H_1) \in \mathcal{K}$, $g = (h, H_1) \cdot f$ se, e somente se,

$$(x, g(x)) = H(h^{-1}(x), f(h^{-1}(x))).$$

Os grupos \mathcal{R} , \mathcal{L} , \mathcal{A} , \mathcal{C} e \mathcal{K} são conhecidos como os *grupos de Mather*. Em geral, se \mathcal{G} é um grupo de Mather, dizemos que dois germes f e g são ditos \mathcal{G} -*equivalentes* ($f \sim_{\mathcal{G}} g$) se eles estão na mesma \mathcal{G} -órbita.

Nosso próximo objetivo é definir os espaços tangentes às órbitas obtidas pela ação dos grupos de Mather. Dizemos que um germe de aplicação $\xi : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow T\mathbb{R}^m$ é um *germe de campo de vetores ao longo de* $f \in \mathcal{E}_n^m$ se $\pi \circ \xi = f$, onde $\pi : T\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$. O espaço tangente θ_f a \mathcal{E}_n^m em f é definido como o \mathcal{E}_n -módulo de germes de campos de vetores ao longo de f .

Denotamos por $\theta_n = \theta_{id(\mathbb{R}^n, 0)}$ e $\theta_m = \theta_{id(\mathbb{R}^m, 0)}$, onde $id(\mathbb{R}^n, 0)$ e $id(\mathbb{R}^m, 0)$ representam os germes de aplicação identidade em $(\mathbb{R}^n, 0)$ e $(\mathbb{R}^m, 0)$, respectivamente. Para $f \in \mathcal{E}_n^m$ definimos o \mathcal{E}_n -homomorfismo

$$tf : \theta_n \rightarrow \theta_f, \phi \mapsto df \circ \phi.$$

Considere também o pull-back $f^* : \mathcal{E}_m \rightarrow \mathcal{E}_n$ dado por $f^*(\alpha) = \alpha \circ f$, para todo $\alpha \in \mathcal{E}_m$. Essa aplicação induz o \mathcal{E}_m -homomorfismo

$$wf : \theta_m \rightarrow \theta_f, \psi \mapsto \psi \circ f.$$

Os *espaços tangentes* $L\mathcal{G} \cdot f$ às \mathcal{G} -órbitas de f no germe f são definidos como segue:

$$\begin{aligned} L\mathcal{R} \cdot f &= tf(\mathcal{M}_n \cdot \theta_n) & L\mathcal{L} \cdot f &= wf(\mathcal{M}_m \cdot \theta_m) \\ L\mathcal{A} \cdot f &= L\mathcal{R} \cdot f + L\mathcal{L} \cdot f \\ L\mathcal{C} \cdot f^* &= f(\mathcal{M}_m) \cdot \theta_f & L\mathcal{K} \cdot f &= L\mathcal{R} \cdot f + L\mathcal{C} \cdot f. \end{aligned}$$

Uma vez que os difeomorfismos pertencentes aos grupos de Mather fixam a origem, as definições acima precisam ser reformuladas caso seja de interesse mover a origem. Com esse intuito, podemos definir os *espaços tangentes estendidos*:

$$\begin{aligned} L_e\mathcal{R} \cdot f &= tf(\theta_n) & L_e\mathcal{L} \cdot f &= wf(\theta_m) \\ L_e\mathcal{A} \cdot f &= L_e\mathcal{R} \cdot f + L_e\mathcal{L} \cdot f \\ L_e\mathcal{C} \cdot f^* &= f(\mathcal{M}_m) \cdot \theta_f & L_e\mathcal{K} \cdot f &= L_e\mathcal{R} \cdot f + L_e\mathcal{C} \cdot f. \end{aligned}$$

Dado um sistema de coordenadas (y_1, \dots, y_m) em $(\mathbb{R}^m, 0)$, os germes de campos de vetores ao longo de f ,

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_1} \right) \cdot f, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial y_m} \right) \cdot f,$$

formam uma base de θ_f , que por sua vez pode ser identificado com \mathcal{E}_n^m e assim, temos

$$\begin{aligned} L\mathcal{R} \cdot f &= \mathcal{M}_n \cdot \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\}, & L_e\mathcal{R} \cdot f &= \mathcal{E}_n \cdot \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\}, \\ L\mathcal{L} \cdot f &= f^*(\mathcal{M}_m) \cdot \{e_1, \dots, e_m\}, & L_e\mathcal{L} \cdot f &= f^*(\mathcal{E}_m) \cdot \{e_1, \dots, e_m\}, \\ L\mathcal{C} \cdot f &= f^*(\mathcal{M}_m) \cdot \mathcal{E}_n \cdot \{e_1, \dots, e_m\}, & L_e\mathcal{C} \cdot f &= f^*(\mathcal{M}_m) \cdot \mathcal{E}_n \cdot \{e_1, \dots, e_m\}, \end{aligned}$$

onde $\{e_1, \dots, e_m\}$ é a base canônica de \mathbb{R}^m e cada vetor da base é visto como um elemento de \mathcal{E}_n^m e (x_1, \dots, x_n) é um sistema de coordenadas em $(\mathcal{R}^n, 0)$.

Definição 2.3. A *codimensão da órbita* de f é definida como

$$\text{cod}(f, \mathcal{G}) = \dim_{\mathbb{R}} \left(\frac{\mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_n^m}{L\mathcal{G} \cdot f} \right)$$

e a *codimensão da órbita estendida* é dada por

$$\text{cod}_e(f, \mathcal{G}) = \dim_{\mathbb{R}} \left(\frac{\mathcal{E}_n^m}{L\mathcal{G} \cdot f} \right).$$

Um conceito chave no estudo das singularidades de aplicações diferenciáveis é o de *determinação finita*.

Definição 2.4. Um germe f é chamado *k - \mathcal{G} -finitamente determinado* se qualquer outro germe g tal que $j^k g = j^k f$ é \mathcal{G} -equivalente à f . O menor inteiro k satisfazendo essa propriedade é chamado de *grau de determinação de f* . Mais ainda, um germe é chamado *\mathcal{G} -determinado* se é k - \mathcal{G} -determinado para algum inteiro k .

Em geral não é simples determinar se um germe de aplicação é finitamente determinado ou não, além de determinar seu grau de determinação. Em (WALL, 1981), o leitor pode encontrar um estudo detalhado a respeito de determinação finita.

Teorema 2.5. (WALL, 1981, p. 486) Para todo todo germe de aplicação f e todo grupo de Mather \mathcal{G} são equivalentes:

- (i) f é \mathcal{G} -determinado;
- (ii) $\mathcal{M}_n^k \cdot \mathcal{E}_n^m \subset L\mathcal{G} \cdot f$, para algum inteiro k ;
- (iii) $\text{cod}(f, \mathcal{G}) < \infty$;
- (iv) $\text{cod}_e(f, \mathcal{G}) < \infty$.

Em particular, quando \mathcal{G} é \mathcal{R} , \mathcal{C} ou \mathcal{H} , o espaço tangente $L\mathcal{G} \cdot f$ é um \mathcal{E}_n -módulo e o seguinte resultado é válido.

Teorema 2.6. (WALL, 1981) Seja $f \in \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_n^m$ e $\mathcal{G} = \mathcal{R}, \mathcal{C}$ ou \mathcal{H} . Suponha que

$$\mathcal{M}_n^k \cdot \mathcal{E}_n^m \subset L\mathcal{G} \cdot f + \mathcal{M}_n^{k+1} \cdot \mathcal{E}_n^m.$$

Então, f é k - \mathcal{G} -determinado.

Definição 2.7. Seja $f \in \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_n^m$. Um *desdobramento* a a -parâmetros (a, F) de f é o germe de aplicação

$$F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^a, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^a, (0, 0))$$

na forma $F(x, u) = (\bar{f}(x, u), u)$, com $\bar{f}(x, 0) = f(x)$. A família

$$\bar{f} : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^a, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$$

é chamada uma *deformação* a a -parâmetros de f .

Definição 2.8. Seja \mathcal{G} um grupo de Mather e I a identidade deste grupo.

- (i) Um morfismo entre dois desdobramentos (a, F) e (b, G) é um par $(a, \psi) : (a, F) \rightarrow (b, G)$ com $\alpha : (\mathbb{R}^a, 0) \rightarrow (\mathcal{G}, I)$, $\psi : (\mathbb{R}^a, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^b, 0)$ tal que

$$\bar{f}_u = \alpha(u) \cdot \bar{g}_{\psi(u)}.$$

O desdobramento (a, F) é então chamado de *induzido* de (b, G) por (α, ψ) .

- (ii) Dois desdobramentos (a, F) e (b, G) são \mathcal{G} -equivalentes se existe um morfismo $(a, \psi) : (a, F) \rightarrow (b, G)$ tal que ψ é inversível.
- (iii) Um desdobramento (a, F) de um germe de aplicação f é \mathcal{G} -*versal* se qualquer outro desdobramento (b, G) de f pode ser induzido de (a, F) .

Podemos reescrever a Definição 2.8 para os grupos estendidos, apenas trocando \mathcal{G} por \mathcal{G}_e .

Dado um desdobramento (a, F) de um germe de aplicação $f \in \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_n^m$, denotamos por $\dot{F}_i, i = 1, \dots, a$, o germe de aplicação em $\mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_n^m$ dado por

$$\dot{F}_i(x) = \frac{\partial \bar{f}}{\partial u_i}(x, 0).$$

Teorema 2.9. (WALL, 1981, p. 499) Um desdobramento (a, F) de um germe de aplicação $f \in \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_n^m$ é \mathcal{G} -versal se, e somente se,

$$L\mathcal{G} \cdot f + \mathbb{R} \cdot \{\dot{F}_1, \dots, \dot{F}_a\} = \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_n^m$$

e \mathcal{G}_e -versal se, e somente se,

$$L\mathcal{G}_e \cdot f + \mathbb{R} \cdot \{\dot{F}_1, \dots, \dot{F}_a\} = \mathcal{E}_n^m.$$

Definição 2.10. Seja X uma variedade e G um grupo de Lie agindo em X . A *modalidade* de um ponto $x \in X$ sob a ação de G em X é o menor número m tal que uma vizinhança suficientemente pequena de x pode ser coberta por um número finito de famílias de órbitas a m -parâmetros. O ponto x é chamado *simplex* se sua modalidade é zero.

Em outras palavras, podemos dizer que um ponto é simples se uma vizinhança suficientemente pequena de x intersecta somente um número finito de órbitas.

Se \mathcal{G} é um grupo de Mather agindo em \mathcal{E}_n^m , $J^k\mathcal{G}$ é o grupo de Lie dos k -jatos de elementos de \mathcal{G} . Além disso, $J^k\mathcal{G}$ age naturalmente em $J^k(n, m)$.

Definição 2.11. Seja $f \in \mathcal{E}_n^m$ um germe de aplicação. Dizemos que f é \mathcal{G} -simples se para todo $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, $J^k f(0)$ admite uma vizinhança U em $J^k(n, m)$ que encontra apenas um número finito de $J^k\mathcal{G}$ -órbitas.

Finalmente, nesta breve exposição acerca de singularidades de aplicações diferenciáveis, vamos nos concentrar no caso de germes de função (caso $m = 1$).

Definição 2.12. A matriz Hessiana de um germe de função $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ é dada por

$$\mathcal{H}(f)(0) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0) \right),$$

$i, j = 1, \dots, n$. Se f é singular na origem, dizemos que a singularidade é *não degenerada* se o posto de $\mathcal{H}(f)(0)$ é igual a n , ou seja, se, e somente se, $\det(\mathcal{H}(f)(0)) \neq 0$.

Teorema 2.13 (Lema de Morse). (GIBSON, 1979, p. 123) Suponha que $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ tenha uma singularidade não degenerada. Então f é \mathcal{R} -equivalente à forma quadrática não degenerada

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \pm x_1^2 \pm \dots \pm x_n^2.$$

Quando o germe de função f possui singularidade degenerada, definimos o *coposto* de f como

$$\text{coposto}(f)(0) = n - \text{posto}(\mathcal{H}(f)(0)).$$

Note que, em particular, f possui singularidade não degenerada se, e somente se, $\text{coposto}(f)(0) = 0$.

Lema 2.14 (Lema de Separação de Arnol'd). (GIBSON, 1979, p. 125) Suponha que $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ possua uma singularidade de coposto r na origem. Então, f é \mathcal{R} -equivalente a um germe da forma

$$g(x_1, \dots, x_r) + Q(x_{r+1}, \dots, x_n),$$

com $g \in \mathcal{M}_r^3$ e $Q(x_{r+1}, \dots, x_n) = \pm x_{r+1}^2 \pm \dots \pm x_n^2$.

Dados dois germes g_1 e g_2 em \mathcal{M}_r^3 e Q como no Lema 2.14, temos que $g_1 + Q$ e $g_2 + Q$ são \mathcal{R} -equivalentes se, e somente se, g_1 e g_2 o são.

Em (ARNOL'D; GUSEIN-ZADE; VARCHENKO, 1985), os autores apresentam uma lista de germes de função \mathcal{R} -finitos, que listamos na Tabela 1. As singularidades \mathcal{R} -simples

Tabela 1 – Germes de funções \mathcal{R} -simples.

Nome	Forma normal	\mathcal{R} -codimensão
$A_k, k \geq 0$	$\pm x_1^{k+1} + Q(x_2, \dots, x_n)$	k
$D_k, k \geq 4$	$x_1^2 x_2 \pm x_2^{k-1} + Q(x_3, \dots, x_n)$	k
E_6	$x_1^3 + x_2^4 + Q(x_3, \dots, x_n)$	6
E_7	$x_1^3 + x_1 x_2^4 + Q(x_3, \dots, x_n)$	7
E_8	$x_1^3 + x_2^5 + Q(x_3, \dots, x_n)$	8

* $Q(x_1, \dots, x_n) = \pm x_1^2 \pm \dots \pm x_n^2$.

foram classificadas por Arnol'd em (ARNOL'D, 1974). Note que $\text{cod}(g + Q, \mathcal{R}) = \text{cod}(g, \mathcal{R})$ para qualquer germe \mathcal{R} -finito $g \in \mathcal{M}_r^3$.

Uma deformação $F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^a, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ de um germe $f = F|_{\mathbb{R}^n \times \{0\}}$ é chamada de uma *família de germes de funções*. Denotaremos aqui por \mathcal{R}^+ o produto direto do grupo \mathcal{R} com translações.

Definição 2.15. Duas famílias de germes de funções F e $G : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^a, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ são P - \mathcal{R}^+ -equivalentes se existe um germe de difeomorfismo $\Psi : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^a, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^a, (0, 0))$ da forma $\Psi(x, u) = (\alpha(x, u), \psi(u))$ e um germe de função $c : (\mathbb{R}^a, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$G(x, u) = F(\Psi(x, u)) + c(u).$$

O próximo teorema é uma adaptação do Teorema 2.9 para famílias de funções.

Teorema 2.16. Uma deformação $F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^a, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ de um germe de função $f \in \mathcal{M}_n$ é \mathcal{R}^+ -versal se, e somente se,

$$L_{\mathcal{R}e} \cdot f + \mathbb{R} \cdot \{1, \dot{F}_1, \dots, \dot{F}_a\} = \mathcal{E}_n.$$

A Definição 2.15 pode ser estendida para famílias $F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^a, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ e $G : (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^a, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ com $n \neq p$. Adicionamos uma forma quadrática não degenerada $Q(y_{n+1}, \dots, y_{n+p})$ à F e uma forma quadrática não degenerada $Q'(z_{p+1}, \dots, z_{n+p})$ à G e consideramos as duas famílias $F + Q$ e $G + Q'$ como na forma $(\mathbb{R}^{n+p} \times \mathbb{R}^a, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$.

Teorema 2.17. (IZUMIYA *et al.*, 2016, p. 62) Seja $f \in \mathcal{M}_n^2$ um germe de função \mathcal{R} -finitamente determinado tal que $1 \leq \text{cod}_e(f, \mathcal{R}) \leq 4$. Então qualquer desdobramento \mathcal{R}^+ -miniversal de f (ou seja, que possui o menor número possível de parâmetros para que seja versal) é P - \mathcal{R}^+ -equivalente a um das seguintes famílias de germes, com $Q(x_1, \dots, x_n) = \pm x_1^2 \pm \dots \pm x_n^2$:

- (i) $A_2: Q(x_2, \dots, x_n) + x_1^3 + u_1 x_1,$
- (ii) $A_3: Q(x_2, \dots, x_n) \pm x_1^4 + u_2 x_1^2 + u_1 x_1,$
- (iii) $A_4: Q(x_2, \dots, x_n) + x_1^5 + u_3 x_1^3 + u_2 x_1^2 + u_1 x_1,$

- (iv) $A_5: Q(x_2, \dots, x_n) \pm x_1^6 + u_4 x_1^4 + u_3 x_1^3 + u_2 x_1^2 + u_1 x_1$,
- (v) $D_4^-: Q(x_3, \dots, x_n) + x_1^3 - x_1 x_2^2 + u_3(x_1^2 + x_2^2) + u_2 x_2 + u_1 x_1$,
- (vi) $D_4^+: Q(x_3, \dots, x_n) + x_1^3 + x_2^3 + u_3 x_1 x_2 + u_2 x_2 + u_1 x_1$,
- (vii) $D_5: Q(x_3, \dots, x_n) + x_1^2 x_2 + x_2^4 + u_4 x_2^2 + u_3 x_1^2 + u_2 x_2 + u_1 x_1$.

As singularidades no Teorema 2.17 são conhecidas como as *sete catástrofes elementares de Thom*.

2.2 Superfícies regulares em \mathbb{R}^4

Little, em (LITTLE, 1969), estudou a geometria de segunda ordem de subvariedades imersas em espaços euclidianos, em particular de superfícies imersas em \mathbb{R}^4 . Seu trabalho inspirou muitos outros, dentre os quais podemos citar: (MOCHIDA; ROMERO FUSTER; RUAS, 1995; BRUCE; NOGUEIRA, 1998; MOCHIDA; ROMERO FUSTER; RUAS, 1999; GARCIA *et al.*, 2000; BRUCE; TARI, 2002; GARCIA; SÁNCHEZ BRINGAS, 2002; NUÑO BALLESTEROS; TARI, 2007; BAYARD; SÁNCHEZ BRINGAS, 2012; OSET SINHA; TARI, 2015), entre outros.

As propriedades geométricas que estão relacionadas com a segunda forma fundamental dependem somente do 2-jato da imersão. Tais propriedades derivam, em cada ponto $p \in S$, de uma elipse no plano normal de S em p , chamada de *elipse de curvatura*.

Apresentamos aqui aspectos gerais de superfícies regulares em \mathbb{R}^4 necessários para o desenvolvimento do trabalho. Em (IZUMIYA *et al.*, 2016), no capítulo 7, os autores fazem um estudo bastante abrangente sobre tais superfícies, e é nele que nos baseamos.

Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma parametrização local de S , onde U é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^2 . Considere também um referencial ortonormal $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ de \mathbb{R}^4 tal que para todo $u \in U$, $\{\mathbf{e}_1(u), \mathbf{e}_2(u)\}$ é uma base para o plano tangente $T_p S$ e $\{\mathbf{e}_3(u), \mathbf{e}_4(u)\}$ é uma base para o plano normal $N_p S$ da superfície S em $p = f(u)$.

A segunda forma fundamental de S em p , $II_p : T_p S \times T_p S \rightarrow N_p S$ é definida como

$$\begin{aligned} II_p(\mathbf{e}_1(u), \mathbf{e}_1(u)) &= \pi_2(f_{xx}(u)), & II_p(\mathbf{e}_1(u), \mathbf{e}_2(u)) &= \pi_2(f_{xy}(u)) \\ II_p(\mathbf{e}_2(u), \mathbf{e}_2(u)) &= \pi_2(f_{yy}(u)), \end{aligned}$$

na base $\{\mathbf{e}_1(u), \mathbf{e}_2(u)\}$ de $T_p S$, com $\pi_2 : T_p \mathbb{R}^4 \rightarrow N_p S$ sendo a projeção canônica no plano normal. Estendemos II_p para todo o espaço de modo único como uma aplicação bilinear simétrica.

Tomando $\mathbf{w} = w_1 \mathbf{e}_1 + w_2 \mathbf{e}_2 \in T_p S$, podemos escrever a forma quadrática

$$II_p(\mathbf{w}, \mathbf{w}) = (l_1 w_1^2 + 2m_1 w_1 w_2 + n_1 w_2^2) \mathbf{e}_3 + (l_2 w_1^2 + 2m_2 w_1 w_2 + n_2 w_2^2) \mathbf{e}_4,$$

onde $l_i = \langle f_{xx}, \mathbf{e}_{i+2} \rangle$, $m_i = \langle f_{xy}, \mathbf{e}_{i+2} \rangle$ e $n_i = \langle f_{yy}, \mathbf{e}_{i+2} \rangle$, $i = 1, 2$ são chamados de coeficientes da segunda forma fundamental com respeito ao referencial acima e $\mathbf{w} = w_1 \mathbf{e}_1 + w_2 \mathbf{e}_2 \in T_p S$. A matriz da segunda forma fundamental com respeito ao referencial ortonormal acima é dada por

$$\alpha = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{pmatrix}.$$

Denote por \mathbb{S}^1 o círculo unitário no plano tangente $T_p S$ parametrizado por θ e denote por γ_θ a seção normal de S na direção tangente $\mathbf{u} = \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2$. Podemos parametrizar γ_θ por comprimento de arco e denotar por $\eta(\theta)$ seu vetor curvatura no ponto p . Dessa forma, $\eta(\theta)$ é a projeção de γ_θ'' em $N_p S$, ou de forma equivalente, $\eta(\theta) = H_p(\mathbf{u}, \mathbf{u})$. Logo, para cada ponto $p \in S$, temos a aplicação $\eta : \mathbb{S}^1 \subset T_p S \rightarrow N_p S$ dada por

$$\begin{aligned} \eta(\theta) &= (l_1 \cos^2 \theta + 2m_1 \cos \theta \sin \theta + n_1 \sin^2 \theta) \mathbf{e}_3 \\ &\quad + (l_2 \cos^2 \theta + 2m_2 \cos \theta \sin \theta + n_2 \sin^2 \theta) \mathbf{e}_4. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Definição 2.18. A *elipse de curvatura* de S em p é definida como a imagem da aplicação $\eta : \mathbb{S}^1 \subset T_p S \rightarrow N_p S$.

A elipse de curvatura é invariante sob rotações no plano tangente $T_p S$ e é rotacionada quando rotacionamos o plano normal $N_p S$. Consequentemente, qualquer invariante escalar isométrico da elipse de curvatura também é um invariante da superfície S via ação do grupo $\mathcal{O}(2) \times \mathcal{O}(2)$ em $T_p S \times N_p S$.

Little (LITTLE, 1969) também estudou a *resultante* das formas quadráticas polinomiais $l_1 x^2 + 2m_1 xy + n_1 y^2$ e $l_2 x^2 + 2m_2 xy + n_2 y^2$, um invariante escalar de S (sob ação de $\mathcal{O}(2) \times \mathcal{O}(2)$ em $T_p S \times N_p S$, dado por

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{1}{4} \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 & 0 \\ l_2 & m_2 & n_2 & 0 \\ 0 & l_1 & m_1 & n_1 \\ 0 & l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{4} (4(l_1 m_2 - m_1 n_2)(m_1 n_2 - n_1 m_2) - (l_1 n_2 - n_1 l_2)^2). \end{aligned} \quad (2.2)$$

A função δ possui uma propriedade importante: a elipse de curvatura passa por p se, e somente se, $\eta(\theta) = 0$ para algum θ . No entanto, de (2.1) temos que isso ocorre se, e somente se, os polinômios acima possuem uma raiz em comum. Portanto, o ponto p pertence à elipse de curvatura se, e somente se, $\delta(p) = 0$. O ponto p estar dentro ou fora da elipse de curvatura também é uma propriedade determinada pelo sinal de $\delta(p)$, positivo para dentro e negativo para fora.

Os pontos de uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^4$ são classificados em termos da elipse de curvatura, como segue.

Definição 2.19. Um ponto $p \in S$ é chamado *semiumbílico* se a elipse de curvatura se degenera em um segmento de reta cuja reta que o contém não passa por p (ou seja, essa reta é não radial). Se a elipse de curvatura é um segmento radial, o ponto p é chamado de *ponto de inflexão*. Um ponto de inflexão é de *tipo real*, (resp. *tipo imaginário, flat*) se p é um ponto interior do segmento radial, (resp. não pertence ao segmento, é um de seus extremos). Quando a elipse de curvatura se reduz a um ponto, p é chamado *umbílico*. Além disso, se o ponto é o próprio p , ele é chamado *umbílico flat*. Um ponto que não é de inflexão $p \in S$ é chamado *elíptico* (resp. *hiperbólico, parabólico*) quando ele está dentro (resp. fora, sobre) da elipse de curvatura.

Os invariantes definidos anteriormente estão relacionados com a ação do grupo $\mathcal{O}(2) \times \mathcal{O}(2)$ em $T_pS \times N_pS$. No entanto, quando estamos interessados em estudar o contato de uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^4$ com hiperplanos, planos e retas, é natural considerar propriedades invariantes afins, uma vez que o contato com tais objetos é um invariante afim, ou seja, é invariante sob ação do grupo $GL(2, \mathbb{R}) \times GL(2, \mathbb{R})$ em $T_pS \times N_pS$.

A elipse de curvatura também pode ser vista como a imagem do círculo unitário em T_pS via a aplicação definida pelo par de formas quadráticas (Q_1, Q_2) . Esse par de formas quadráticas é o 2-jato da aplicação 1-flat $F : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ cujo gráfico, em coordenadas ortogonais, é localmente a superfície S . Cada ponto da superfície determina um par de formas quadráticas $(Q_1, Q_2) = (l_1x^2 + 2m_1xy + n_1y^2, l_2x^2 + 2m_2xy + n_2y^2)$ e o grupo $\mathcal{G} = GL(2, \mathbb{R}) \times GL(2, \mathbb{R})$ age nesses pares de formas binárias (Q_1, Q_2) nos dando as \mathcal{G} -órbitas listadas na Tabela 2. Um ponto é chamado de elíptico/hiperbólico/parabólico/inflexão de acordo com a classificação de sua órbita correspondente como na Tabela 2. Essa definição coincide com a Definição 2.19, dada pela posição relativa a elipse de curvatura (BRUCE; NOGUEIRA, 1998).

Teorema 2.20. (GIBSON, 1979) As órbitas da ação de $\mathcal{G} = GL(2, \mathbb{R}) \times GL(2, \mathbb{R})$ no conjunto de pares de formas quadráticas são dadas na Tabela 2.

Tabela 2 – As \mathcal{G} -classes de pares de formas quadráticas.

\mathcal{G} -classe	Nome
(x^2, y^2)	ponto hiperbólico
$(xy, x^2 - y^2)$	ponto elíptico
(x^2, xy)	ponto parabólico
$(x^2 \pm y^2, 0)$	ponto de inflexão
$(x^2, 0)$	inflexão degenerada
$(0, 0)$	inflexão degenerada

A próxima proposição apresenta uma caracterização dos pontos de M em termos do sinal do invariante δ (resultante).

Proposição 2.21. (IZUMIYA *et al.*, 2016, p. 211) Seja $S \subset \mathbb{R}^4$ uma superfície regular e $p \in S$. Então,

- (i) $\delta(p) < 0$ se, e somente se, p é um ponto hiperbólico;
- (ii) $\delta(p) > 0$ se, e somente se, p é um ponto elíptico;
- (iii) $\delta(p) = 0$ e posto de $\alpha(p) = 2$ se, e somente se, p é um ponto parabólico;
- (iv) $\delta(p) = 0$ e posto de $\alpha(p) < 2$ se, e somente se, p é um ponto de inflexão.

Definição 2.22. Seja $\eta(\theta)$ a parametrização (2.1) da elipse de curvatura. Uma direção tangente θ no ponto $p \in S$ é uma *direção assintótica* em p se $\eta(\theta)$ e $\frac{d\eta}{d\theta}(\theta)$ forem vetores linearmente dependentes em N_pS . Uma curva em S cuja direção tangente em cada ponto é uma direção assintótica é chamada de *linha assintótica*.

O próximo resultado apresenta um critério para determinar linhas assintóticas em superfícies regulares em \mathbb{R}^4 .

Teorema 2.23. (IZUMIYA *et al.*, 2016, p. 213) Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma parametrização local de uma superfície regular S e denote por $l_1, m_1, n_1, l_2, m_2, n_2$ os coeficientes de sua segunda forma fundamental com respeito a um referencial $\{f_x, f_y, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4\}$ de $T_pS \times N_pS$ que depende suavemente de $p = f(x, y)$. Então, as linhas assintóticas de S são as curvas soluções da equação diferencial binária (EDB)

$$(l_1m_2 - l_2m_1)dx^2 + (l_1n_2 - l_2n_1)dxdy + (m_1n_2 - m_2n_1)dy^2 = 0 \quad (2.3)$$

que também pode ser escrita na forma de determinante

$$\begin{vmatrix} dy^2 & -dxdy & dx^2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Seja $S \subset \mathbb{R}^4$ uma superfície regular. Podemos, para cada $p \in S$, escolher (através de mudanças de coordenadas e rotações) um sistema de coordenadas (X, Y, Z, W) em \mathbb{R}^4 de modo que o ponto p seja a origem deste sistema, T_pS seja o plano $Z = W = 0$ e a superfície S seja localmente o gráfico de uma aplicação suave $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$, com U um subconjunto aberto de \mathbb{R}^2 contendo a origem. Tomando (f_1, f_2) como as funções coordenadas da aplicação f , temos a parametrização de Monge

$$\phi(x, y) = (x, y, f_1(x, y), f_2(x, y)),$$

de M em p .

Escrevemos as expansões de Taylor de ordem k na origem das funções coordenadas f_1 e f_2 como

$$\begin{aligned} j^k f_1(x, y) &= a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \sum_{i+j=3}^k a_{ij}x^i y^j, \\ j^k f_2(x, y) &= b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + \sum_{i+j=3}^k b_{ij}x^i y^j, \end{aligned}$$

uma vez que as funções coordenadas não possuem termos constantes ou lineares.

Para esta parametrização especial, temos os seguintes resultados.

Lema 2.24. (IZUMIYA *et al.*, 2016, p. 218) Seja $S \subset \mathbb{R}^4$ uma superfície suave localmente parametrizada na forma de Monge $\phi(x, y) = (x, y, f_1(x, y), f_2(x, y))$ na origem $p \in S$. Então,

(i) Os coeficientes da primeira forma fundamental são: $E = 1 + f_{1_x}^2 + f_{2_x}^2$, $F = f_{1_x}f_{1_y} + f_{2_x}f_{2_y}$ e $G = 1 + f_{1_y}^2 + f_{2_y}^2$.

(ii) Podemos escolher o referencial $\mathbf{F} = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4\}$ no aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ tal que

$$\mathbf{f}_1 = \phi_x = (1, 0, f_{1_x}, f_{2_x})$$

$$\mathbf{f}_2 = \phi_y = (0, 1, f_{1_y}, f_{2_y})$$

$$\mathbf{f}_3 = (-f_{1_x}, -f_{1_y}, 1, 0)$$

$$\mathbf{f}_4 = (-f_{2_x} + f_{1_y}(f_{1_x}f_{2_y} - f_{1_y}f_{2_x}), -f_{2_y} - f_{1_x}(f_{1_x}f_{2_y} - f_{1_y}f_{2_x}), -f_{1_x}f_{2_x} - f_{1_y}f_{2_y}, 1 + f_{1_x}^2 + f_{2_x}^2).$$

O referencial \mathbf{F} na origem é a base canônica de \mathbb{R}^4 .

Proposição 2.25. (IZUMIYA *et al.*, 2016, p. 219) Seja $S \subset \mathbb{R}^4$ uma superfície regular localmente parametrizada na forma de Monge $\phi(x, y) = (x, y, f_1(x, y), f_2(x, y))$ na origem $p \in S$. A segunda forma fundamental em p com respeito ao referencial \mathbf{F} do Lema 2.24 é dada por

$$II_p(\mathbf{w}) = 2(a_{20}w_1^2 + a_{11}w_1w_2 + a_{02}w_2^2, b_{20}w_1^2 + b_{11}w_1w_2 + b_{02}w_2^2), \quad (2.4)$$

com $\mathbf{w} = (w_1, w_2, 0, 0) \in T_pS$ e a resultante $\delta(p)$ é dado por

$$\delta(p) = 4((a_{20}b_{11} - b_{20}a_{11})(a_{11}b_{02} - b_{11}a_{02}) - (a_{20}b_{02} - b_{20}a_{02})^2).$$

Importantes informações sobre a geometria de uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^4$ podem ser obtidas estudando-se seu contato com hiperplanos. Este contato, por sua vez, é medido pelas singularidades da função altura de S . Dada uma parametrização local $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ de S , a família de funções altura $H : U \times \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$H(u, v) = \langle f(u), v \rangle.$$

Para $v \in \mathbb{S}^3$ fixado, temos definida a função altura h_v de S dada por $h_v(u) = \langle f(u), v \rangle$. Note que um ponto $p = f(u)$ é um ponto singular da função altura h_v se, e somente se, v é um vetor normal a S em p .

O próximo teorema nos diz sobre as possíveis singularidades da função altura h_v . Denotamos aqui por $Imm(U, \mathbb{R}^4)$ o subconjunto de $C^\infty(U, \mathbb{R}^4)$ munido da Topologia C^∞ de Whitney, cujos elementos são imersões próprias de classe C^∞ de $U \subset \mathbb{R}^2$ em \mathbb{R}^4 . Consideramos em $Imm(U, \mathbb{R}^4)$ a topologia induzida pela topologia C^∞ de Whitney. Uma propriedade P no espaço topológico $Imm(U, \mathbb{R}^4)$ é dita *genérica* se é satisfeita por um subconjunto residual (interseção enumerável de abertos densos) de $Imm(U, \mathbb{R}^4)$.

Teorema 2.26. (IZUMIYA *et al.*, 2016, p. 222) Existe um subconjunto aberto e denso \mathcal{O}_H em $\text{Imm}(U, \mathbb{R}^4)$ tal que para todo $f \in \mathcal{O}_H$, a superfície $S = f(U)$ tem as seguintes propriedades. Para todo $v \in \mathbb{S}^3$, a função altura h_v ao longo da direção normal v em qualquer ponto $p \in M$ possui somente \mathcal{R} -singularidades locais do tipo A_1, A_2, A_3, A_4 ou D_4 (ou seja, singularidades \mathcal{R} -equivalentes aos tipos citados). Além disso, as singularidades de h_v são \mathcal{R}^+ -versalmente desdobradas pela família H .

Definição 2.27. Uma direção $v \in N_p S$ é chamada uma *direção binormal* de S em $p = f(u)$ se a função altura h_v possui uma singularidade degenerada (isto é, não Morse) em u . Um hiperplano ortogonal a uma direção binormal e tangente à S em p é chamado de *hiperplano osculador*.

Proposição 2.28. (IZUMIYA *et al.*, 2016, p. 223) A direção normal $v \in N_p S$ em $p = f(u)$ é uma direção binormal se, e somente se, toda direção tangente pertencente ao núcleo da matriz Hessiana de h_v em u é uma direção assintótica de S em p

A próxima proposição pode ser tomada como uma definição alternativa para direções assintóticas e binormais. Não consideramos este resultado original, uma vez que ele pode ser óbvio para especialistas. No entanto, essa equivalência não é encontrada na literatura e, portanto, apresentamos sua demonstração, que também foi incluída em (BENEDINI RIUL; RUAS; OSET SINHA, 2018).

Proposição 2.29. Seja $S \subset \mathbb{R}^4$ uma superfície regular. A direção tangente não nula $\mathbf{u} \in T_p S$ é uma direção assintótica se, e somente se, existe um vetor não nulo $v \in N_p M$ tal que

$$\langle II(\mathbf{u}, \mathbf{w}), v \rangle = 0, \quad \forall \mathbf{w} \in T_p S.$$

Mais ainda, neste caso, $v \in N_p S$ é uma direção binormal.

Demonstração. Considere S localmente parametrizada na forma de Monge por

$$f(x, y) = (x, y, a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + o(3), b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + o(3)).$$

Sejam $\mathbf{u} = (\alpha_1, \beta_1), \mathbf{w} = (\alpha_2, \beta_2) \in T_p S$ e $v = (0, 0, v_3, v_4) \in N_p S$. Logo,

$$II(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = (0, 0, 2a_{20}\alpha_1\alpha_2 + a_{11}(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + 2a_{02}\beta_1\beta_2, 2b_{20}\alpha_1\alpha_2 + b_{11}(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + 2b_{02}\beta_1\beta_2).$$

E assim,

$$\begin{aligned} \langle II(\mathbf{u}, \mathbf{w}), v \rangle &= (2a_{20}\alpha_1\alpha_2 + a_{11}(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + 2a_{02}\beta_1\beta_2)v_3 \\ &\quad + (2b_{20}\alpha_1\alpha_2 + b_{11}(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + 2b_{02}\beta_1\beta_2)v_4 \\ &= [(2a_{20}\alpha_1 + a_{11}\beta_1)v_3 + (2b_{20}\alpha_1 + b_{11}\beta_1)v_4]\alpha_2 \\ &\quad + [(a_{11}\alpha_1 + 2a_{02}\beta_1)v_3 + (b_{11}\alpha_1 + 2b_{02}\beta_1)v_4]\beta_2. \end{aligned}$$

Dessa forma, $\langle II(\mathbf{u}, \mathbf{w}), \nu \rangle = 0$ para todo $\mathbf{w} \in T_p S$ se, e somente se,

$$\begin{cases} (2a_{20}v_3 + 2b_{20}v_4)\alpha_1 + (a_{11}v_3 + b_{11}v_4)\beta_1 = 0 \\ (a_{11}v_3 + b_{11}v_4)\alpha_1 + (2a_{02}v_3 + 2b_{02}v_4)\beta_1 = 0. \end{cases}$$

Finalmente, $\mathbf{u} = (\alpha_1, \beta_1)$ é uma solução não trivial se, e somente se, $\mathbf{u} \in \ker(\mathcal{H}(h_\nu(p)))$, onde $\mathcal{H}(h_\nu(p))$ denota a matriz Hessiana da função altura h_ν em p , e

$$\begin{vmatrix} 2a_{20}v_3 + 2b_{20}v_4 & a_{11}v_3 + b_{11}v_4 \\ a_{11}v_3 + b_{11}v_4 & 2a_{02}v_3 + 2b_{02}v_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Note que a matriz acima é precisamente a matriz Hessiana da função altura h_ν e as condições acima são exatamente aquelas exigidas para que \mathbf{u} seja uma direção assintótica e para ν ser uma direção binormal de S em p . \square

Como consequência, obtemos o seguinte corolário, cuja demonstração segue imediatamente da Definição 2.22 e da Proposição 2.29.

Corolário 2.30. Uma direção normal $\nu \in N_p S$ é uma direção binormal se, e somente se, existe uma direção assintótica θ tal que ν é ortogonal ao espaço gerado por $\eta(\theta)$ e $\frac{d\eta}{d\theta}(\theta)$.

Seja $S \subset \mathbb{R}^4$ uma superfície regular. É possível descrever direções assintóticas através das singularidades da projeção de S em hiperplanos.

Teorema 2.31. (MOND, 1982; BRUCE; NOGUEIRA, 1998) Uma direção tangente \mathbf{v} em $p \in S$ é uma direção assintótica se, e somente se, a projeção na direção de \mathbf{v} possui uma singularidade mais degenerada que um cross-cap.

Genericamente as singularidades que aparecem na projeção são aquelas cuja \mathcal{A}_e -codimensão é menor ou igual a 3 na lista de Mond, (MOND, 1985) (veja Tabela 3).

Tabela 3 – \mathcal{A} -classes de germes de aplicação $(\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ com \mathcal{A}_e -codimensão ≤ 3 .

Nome	Forma normal	\mathcal{A}_e -codimensão
Imersão	$(x, y, 0)$	0
Crosscap	(x, y^2, xy)	0
S_k^\pm	$(x, y^2, y^3 \pm x^{k+1}y)$, $k = 1, 2, 3$	k
B_k^\pm	$(x, y^2, x^2y \pm y^{2k+1})$, $k = 2, 3$	k
C_3^\pm	$(x, y^2, xy^3 \pm x^3y)$	3
H_k	$(x, xy + y^{3k-1}, y^3)$, $k = 2, 3$	k
P_3^*	$(x, xy + y^3, xy^2 + ay^4)$, $a \neq 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$	3

* A codimensão de P_3 é a de seu estrato.

Seja $S \subset \mathbb{R}^4$ uma superfície regular. Podemos, a partir dela, construir uma hipersuperfície em \mathbb{R}^4 .

Definição 2.32. A hipersuperfície canal de S de raio $\varepsilon > 0$ é o conjunto

$$CS(\varepsilon) = \{p + \varepsilon v : p \in S, v \in (N_p S)_1\},$$

onde $(N_p S)_1$ denota a esfera unitária em $N_p S$.

Podemos considerar $(N_p S)_1$ como um subconjunto de \mathbb{S}^3 e como consequência, identificamos (p, v) e $p + \varepsilon v$.

Teorema 2.33. (IZUMIYA *et al.*, 2016, p. 42) Seja $S \subset \mathbb{R}^4$ uma superfície regular e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. São verdadeiras as seguintes afirmações:

- (i) A hipersuperfície canal de S é localmente uma subvariedade suave de codimensão 1 em \mathbb{R}^4 ;
- (ii) A aplicação de Gauss $G : CS(\varepsilon) \rightarrow \mathbb{S}^3$ da hipersuperfície canal $CS(\varepsilon)$ é dada por $G(p, v) = v$.

A transformação linear $W_{(p,v)} = -dG_{(p,v)} : T_{(p,v)}CS(\varepsilon) \rightarrow T_{(p,v)}CS(\varepsilon)$ é chamada de *operador forma* ou de *aplicação de Weingarten* de $CS(\varepsilon)$ em (p, v) . Esse operador é auto-adjunto e seus auto-valores $\kappa_i(p, v)$, $i = 1, 2, 3$, são chamados de *curvaturas principais* de $CS(\varepsilon)$ em (p, v) . A *curvatura de Gauss-Kronecker* da hipersuperfície canal em (p, v) é definida como

$$K_c(p, v) = \det(W_p) = \prod_{i=1}^3 \kappa_i(p, v).$$

A família de funções altura de $CS(\varepsilon)$ será denotada por $\bar{H} : CS(\varepsilon) \times \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Dessa forma, dado $w \in \mathbb{S}^3$, a função altura de $CS(\varepsilon)$ na direção w é dada por $\bar{h}_w : CS(\varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$, onde $\bar{h}_w(p, v) = \bar{H}((p, v), w)$.

Proposição 2.34. (IZUMIYA *et al.*, 2016, p. 226) Seja S uma superfície regular em \mathbb{R}^4 e seja $p \in M$. O ponto p é um ponto singular de h_v se e somente se, $(p, v) \in CS(\varepsilon)$ é um ponto singular de \bar{h}_v . Além disso, o tipo de \mathcal{R} -singularidade de h_v em p é o mesmo de que \bar{h}_v em (p, v) .

Seja $K_c : CS(\varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ a função curvatura de Gauss-Kronecker de $CS(\varepsilon)$. O conjunto singular de G é o conjunto dos pontos parabólicos

$$K_c^{-1}(0) = \{p + \varepsilon v \in CS(\varepsilon) \mid h_v \text{ tem singularidade degenerada em } p\}$$

de $CS(\varepsilon)$, o qual é uma superfície regular exceto em um número finito de pontos, a saber naqueles correspondentes às singularidades D_4^\pm de \bar{h}_v .

A aplicação de Gauss G é uma aplicação Lagrangiana estável. Os símbolos de Thom-Boardman podem ser usados para distinguir os pontos singulares da aplicação de Gauss. Logo,

podemos escrever $K_c^{-1}(0) = S_1(G) \cup S_2(G)$, onde $S_1(G)$ denota o subconjunto de pontos de coposto 1 e $S_2(G)$ o conjunto de pontos de coposto 2 de G . O conjunto $S_1(G)$ é uma superfície suave e também pode ser decomposta por $S_{1,0}(G) \cup S_{1,1,0}(G) \cup S_{1,1,1,0}(G)$. Os pontos em $S_{1,0}(G)$ são os pontos regulares da restrição de G ao conjunto $S_1(G)$: o conjunto de pontos de dobra de G . Por outro lado, o conjunto de pontos singulares de $G|_{S_1(G)}$ é uma curva suave $S_{1,1}(G) = S_{1,1,0}(G) \cup S_{1,1,1,0}(G)$. Neste caso, $S_{1,1,0}(G)$ é o conjunto de pontos regulares de G restrita a $S_{1,1}(G)$ e $S_{1,1,1,0}$ é o conjunto de pontos singulares: os pontos de cuspidal edge e os de swallowtail de G , respectivamente.

A projeção da hipersuperfície canal $CS(\varepsilon)$ em S , $\zeta : CS(\varepsilon) \rightarrow S$, é dada por $\zeta(p, v) = p$. A imagem do conjunto parabólico $K_c^{-1}(0)$ via ζ é o conjunto $\delta \leq 0$. Seja $\bar{\zeta}$ a restrição de ζ a superfície regular $S_1(G) = K_c^{-1}(0) \setminus S_2(G)$.

É possível caracterizar geometricamente as singularidades degeneradas da função altura. Denote por γ a seção normal da superfície S dada pela direção asintótica θ em p associada ao vetor binormal v .

Teorema 2.35. (IZUMIYA *et al.*, 2016, p. 229) Seja p um ponto hiperbólico. Então, p é uma singularidade do tipo A_2 de h_v se, e somente se, γ tem torção não nula em p . Além disso, a singularidade é do tipo A_3 se, e somente se, a torção de γ em p é nula e a direção θ é transversal à curva $\bar{\zeta}(S_{1,1}(G))$.

O próximo resultado caracteriza as singularidades da função altura em um ponto parabólico.

Teorema 2.36. (IZUMIYA *et al.*, 2016, p. 231) Seja p um ponto parabólico que não seja de inflexão. São verdadeiras as seguintes afirmações:

- (i) p é um ponto singular do tipo A_2 de h_v se, e somente se, θ é transversal à curva parabólica δ ;
- (ii) p é um ponto do tipo A_3 de h_v se, somente se, θ é tangente à curva parabólica δ com contato de primeira ordem.

2.3 Superfícies regulares em \mathbb{R}^5

As superfícies regulares em \mathbb{R}^5 também desempenharão um papel importante neste trabalho. Dessa forma, trazemos nesta seção as definições e resultados necessários para o desenvolvimento dos capítulos que seguem. Para mais resultados e demonstrações, indicamos os seguintes trabalhos: (MORAES; ROMERO FUSTER, 2002; MOCHIDA; ROMERO FUSTER; RUAS, 2003; ROMERO FUSTER; RUAS; TARI, 2008; COSTA; MORAES; ROMERO FUSTER, 2009; IZUMIYA *et al.*, 2016).

Para superfícies regulares em \mathbb{R}^5 também definimos a elipse de curvatura para cada ponto da superfície. Uma vez que para estas superfícies o espaço normal em cada ponto possui dimensão 3, a elipse de curvatura em cada ponto determina um subespaço próprio do espaço normal, de modo que a dimensão e a posição relativa deste espaço em relação ao ponto considerado são de bastante importância no estudo da geometria de segunda ordem da superfície. Diferentemente do que ocorre para superfícies regulares em \mathbb{R}^4 , para superfícies regulares em \mathbb{R}^5 o número de direções em que a função altura é degenerada (ou seja, não Morse) não é finito. Na verdade, tais direções determinam um cone no espaço normal e tal cone também será bastante importante no estudo destas superfícies.

Seja N uma superfície regular em \mathbb{R}^5 e $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^5$ uma parametrização local de N . O referencial ortonormal positivamente orientado $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5\}$ de \mathbb{R}^5 satisfaz a condição de que para todo $u \in U$, $\{\mathbf{e}_1(u), \mathbf{e}_2(u)\}$ é uma base para o plano tangente $T_p N$ e $\{\mathbf{e}_3(u), \mathbf{e}_4(u), \mathbf{e}_5(u)\}$ é uma base para o hiperplano normal $N_p N$ em $p = f(u)$. A segunda forma fundamental associada ao mergulho pode ser representada pela matriz

$$\alpha_p = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{pmatrix},$$

onde $l_i = \langle f_{xx}, \mathbf{e}_{i+2} \rangle$, $m_i = \langle f_{xy}, \mathbf{e}_{i+2} \rangle$ e $n_i = \langle f_{yy}, \mathbf{e}_{i+2} \rangle$, $i = 1, 2, 3$. Dessa forma, a segunda forma fundamental de N é a forma quadrática vetorial $II_p : T_p N \rightarrow N_p N$ dada por

$$II_p(\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^3 (l_i w_1^2 + 2m_i w_1 w_2 + n_i w_2^2) \mathbf{e}_{i+2},$$

com $\mathbf{w} = w_1 \mathbf{e}_1 + w_2 \mathbf{e}_2 \in T_p N$.

A elipse de curvatura no ponto p da superfície N é a imagem da aplicação $\eta : \mathbb{S}^1 \rightarrow N_p N$, obtida associando a cada direção tangente unitária θ o vetor de curvatura da seção normal γ_θ .

Definimos também os subconjuntos

$$N_i = \{p \in N \mid \text{posto}(\alpha_p) = i\}, \quad i \leq 3.$$

As autoras mostraram em (MOCHIDA; ROMERO FUSTER; RUAS, 2003, p. 999) que dada uma superfície fechada $N \subset \mathbb{R}^5$, existe um subconjunto residual \mathcal{O} em $\text{Emb}(N, \mathbb{R}^5)$ tal que para todo $f \in \mathcal{O}$, $N = N_3 \cup N_2$. Mais ainda, mostram que N_3 é um subconjunto aberto de N e N_2 é uma curva mergulhada regularmente.

Definição 2.37. Denotamos por E_p e $\mathcal{A}ff_p$ o subespaço vetorial e o subespaço afim determinados pela elipse de curvatura em $N_p N$, respectivamente.

Podemos, a partir da Definição 2.37, classificar os pontos da superfície regular N em termos da posição relativa desses subespaços.

- (i) Se $p \in N_3$, então $\mathcal{A}ff_p$ é um plano que não contém a origem p de N_pN ;
- (ii) Se $p \in N_2$, temos duas possibilidades: ou $\mathcal{A}ff_p$ é um plano passando por p (e consequentemente coincidindo com E_p), ou uma reta não radial, ou seja, uma reta que não passa pela origem p de N_pN ;
- (iii) Se $p \in N_1$, então $\mathcal{A}ff_p$ é uma reta radial e $\mathcal{A}ff_p = E_p$.

Para superfícies regulares em \mathbb{R}^5 podemos definir o conceito de curvatura umbílica. Esta curvatura é um invariante isométrico da superfície e está fortemente ligado ao estudo do contato da superfície com hipersferas.

Definição 2.38. Seja $N \subset \mathbb{R}^5$ uma superfície regular e $p \in N$. Definimos a *curvatura umbílica* de N em p como o número não negativo

$$\kappa_u(p) = d(p, \mathcal{A}ff_p).$$

Em (COSTA; MORAES; ROMERO FUSTER, 2009), as autoras definem e estudam as propriedades deste invariante, mostrando, por exemplo, que se N está contida em uma hipersfera, sua curvatura umbílica é constante.

Seja $p \in N$. A segunda forma fundamental de N em p induz a aplicação linear

$$A_p : N_pN \rightarrow \mathcal{Q}_2, \quad v \mapsto A(v) = II_p^v,$$

onde \mathcal{Q}_2 é o espaço das formas quadráticas em T_pN e $II_p^v : T_pN \rightarrow \mathbb{R}$ é a *segunda forma fundamental em p na direção v* , dada por $II_p^v(\mathbf{w}) = \langle II_p(\mathbf{w}), v \rangle$. Dada uma base para T_pN , podemos escrever $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ nesta base e consequentemente

$$\mathcal{Q}_2 = \{aw_1^2 + 2bw_1w_2 + cw_2^2; a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

O subespaço \mathcal{Q}_2 também pode ser identificado com o espaço das matrizes reais simétricas da seguinte maneira:

$$\mathcal{Q}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Tomando uma base para N_pN , podemos escrever $v = (v_1, v_2, v_3) \in N_pN$ com respeito a esta base. Logo,

$$A_p(v_1v_2, v_3) = \sum_{i=1}^3 (l_iw_1^2 + 2m_iw_1w_2 + n_iw_2^2)v_i.$$

Denotamos por \mathcal{C} o cone de *formas quadráticas degeneradas*, dado pelas formas quadráticas em \mathcal{Q}_2 tais que $ac - b^2 = 0$. Definimos por \mathcal{C}_p o subconjunto $A_p^{-1}(\mathcal{C})$ e são válidas as seguintes propriedades:

- (i) Se $p \in N_3$, a aplicação linear A_p possui posto máximo e dessa forma, \mathcal{C}_p é um cone contido em $N_p N$;
- (ii) Se $p \in N_2$, a imagem de A_p é um plano pela origem em \mathcal{Q}_2 . Neste caso existem três possibilidades para a posição relativa de imagem da aplicação A_p e o cone \mathcal{C} das formas quadráticas degeneradas. Essas três possibilidades geram também três possibilidades para \mathcal{C}_p , a saber:
- Tipo hiperbólico N_2^h* : Neste caso, $Im(A_p) \cap \mathcal{C}$ é um par de retas e dessa forma, \mathcal{C}_p é uma união de dois planos se intersectando ao longo da reta dada por $\ker(\alpha_p)$.
- Tipo elíptico N_2^e* : Neste caso, $Im(A_p) \cap \mathcal{C} = \{0\}$ e logo \mathcal{C}_p é a reta $\ker(\alpha_p)$.
- Tipo parabólico N_2^p* : Aqui, temos $Im(A_p)$ é um plano tangente ao cone \mathcal{C} ao longo de uma reta contendo a origem e \mathcal{C}_p , por sua vez, é um plano contendo a reta $\ker(\alpha_p)$.
- (iii) Se $p \in N_1$, a imagem de A_p é uma reta pela origem de \mathcal{Q}_2 e temos duas possibilidades para \mathcal{C}_p : ou um plano coincidente com $\ker(A_p)$ ou todo o espaço $N_p N$.

O contato de uma superfície regular $N \subset \mathbb{R}^5$ com hiperplanos é medido pelas singularidades da função altura. Definimos a *família de funções altura*

$$H : N \times \mathbb{S}^4 \rightarrow \mathbb{R}, (p, v) \mapsto H(p, v) = h_v(p) = \langle p, v \rangle,$$

onde h_v é a função altura de N na direção $v \in \mathbb{S}^4$.

Teorema 2.39. (IZUMIYA *et al.*, 2016, p. 259) Existe um subconjunto aberto e denso \mathcal{O}_H em $Imm(U, \mathbb{R}^5)$ tal que para todo $f \in \mathcal{O}_H$, a superfície $N = f(U)$ é tal que para todo $v \in \mathbb{S}^4$, a função altura h_v ao longo da direção v em $p \in N$ tem somente \mathcal{K} -singularidades do tipo $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, D_4$ e D_5 . Além disso, as singularidades de h_v são \mathcal{R} -versalmente desdobradas pela família H .

Uma superfície em \mathbb{R}^5 é chamada *função altura genérica* se qualquer uma de suas parametrizações locais pertence ao conjunto \mathcal{O}_H , como no Teorema 2.39.

Definição 2.40. Seja $v \in \mathcal{C}_p \subset N_p N$. Dizemos que v é uma *direção normal degenerada* de N em p . Neste caso, temos que $\ker(\mathcal{H}(h_v)(p)) \neq \{0\}$ e qualquer direção $u \in \ker(\mathcal{H}(h_v)(p))$ é chamada de *direção de contato flat associada* à v , onde $\mathcal{H}(h_v)(p)$ denota a matriz Hessiana de h_v em p .

Definição 2.41. Uma direção degenerada $v \in \mathcal{C}_p$ tal que h_v possui uma singularidade do tipo A_3 ou mais degenerada, ou seja, com \mathcal{K} -codimensão pelo menos 2, é chamada de *direção binormal* de N em p . O hiperplano tangente ortogonal à uma direção degenerada é chamado de *hiperplano osculador* em p . As direções de contato correspondentes à uma direção binormal são chamadas de *direções assintóticas*.

Na definição acima fica claro que os conceitos de direção assintótica e binormal para superfícies regulares em \mathbb{R}^5 não estão relacionados com a geometria de segunda ordem da superfície, ao contrário do que acontece com as superfícies regulares em \mathbb{R}^4 .

Proposição 2.42. (MOCHIDA; ROMERO FUSTER; RUAS, 2003, p. 1006) Seja $N \subset \mathbb{R}^5$ uma superfície suave e $p \in N$. Se $p \in N_3$, então existem ao menos uma e no máximo 5 direções assintóticas de N em p .

Direções assintóticas também podem ser caracterizadas via projeções ortogonais em 4-espacos. Denote por TS^4 o fibrado tangente de S^4 . A família de projeções em 4-espacos é dada por

$$P : N \times S^4 \rightarrow TS^4, (p, v) \mapsto (p, P_v(p)),$$

onde $P_v(p) = p - \langle p, v \rangle v$. A aplicação P_v pode ser considerada localmente como uma aplicação suave $(\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$. Pode ser mostrado que existe um subconjunto aberto e denso \mathcal{O}_P em $Imm(U, \mathbb{R}^5)$ para o qual a família P é genérica. Além disso, uma superfície em \mathbb{R}^5 é chamada *projeção P -genérica* se qualquer uma de suas parametrizações locais pertence à \mathcal{O}_P .

Em (KLOTZ; POP; RIEGER, 2007), os autores classificam as singularidades \mathcal{A} -simples $(\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$, listadas na Tabela 4.

Tabela 4 – Singularidades \mathcal{A} -simples $(\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$.

Nome	Forma normal	\mathcal{A} -codimensão
Imersão	$(x, y, 0, 0)$	0
I_k	$(x, xy, y^2, y^{2k+1}), k \geq 1$	$k + 2$
II_k	$(x, y^2, y^3, x^k y), k \geq 2$	$2k + 1$
$III_{k,l}$	$(x, y^2, y^3 + (\pm 1)^{k+1} x^k y, x^l y), l > k \geq 2$	$l + k + 1$
IV_k	$(x, y^2, x^2 y \pm y^{2k+1}, xy^3), k \geq 2$	$k + 5$
V	$(x, y^2, x^2 y, y^5)$	8
VI	$(x, y^2, x^3 y + y^5, xy^3)$	9
VII_k	$(x, xy, xy^2 + y^{3k+1}, y^3), k \geq 1$	$3(k + 1)$
$VIII_k$	$(x, xy, xy^2 + y^{3k+2}, y^3), k \geq 1$	$3(k + 1) + 1$
IX_k	$(x, xy + y^{3k+2}, xy^2, y^3), k \geq 1$	$3(k + 1) + 2$
X	(x, xy, y^3, y^4)	7
XI	(x, xy, y^3, y^5)	8
XII_k	$(x, xy + y^3, xy^2 + y^{2k+1}, y^4), k \geq 2$	$k + 6$
$XIII$	$(x, x^2 y + y^4 \pm y^5, xy^2, y^3)$	9
XIV	$(x, x^2 y + y^4, xy^2, y^3)$	10

Para uma superfície projeção P -genérica, as singularidades que aparecem são aquelas de \mathcal{A}_e -codimensão menor ou igual a 4. Listamos na Tabela 4 os germes \mathcal{A} -simples e suas \mathcal{A} -codimensões. É mostrado em (WALL, 1981) que é válida a seguinte igualdade:

$$\mathcal{A}_e\text{-cod} = \mathcal{A}\text{-cod} - n,$$

para um germe de aplicação $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$. Portanto, os germes de \mathcal{A}_e -codimensão menor ou igual a 4 são: imersão, I_k ($k = 1, \dots, 4$), II_2 , $III_{2,3}$ e VII_1 .

A próxima proposição estabelece um critério de reconhecimento de direções assintóticas para superfícies regulares em pontos cuja matriz da segunda forma fundamental possui posto máximo.

Proposição 2.43. (ROMERO FUSTER; RUAS; TARI, 2008, p. 317) Uma direção tangente $\mathbf{u} \in T_p N$ com $p \in N_3$ é assintótica se, e somente se, a projeção de N ao longo de \mathbf{u} em um 4-espaço transversal tem uma \mathcal{A} -singularidade do tipo I_2 ou mais degenerada.

SUPERFÍCIES SINGULARES EM \mathbb{R}^3

Neste capítulo estudaremos a relação da geometria de uma superfície regular em \mathbb{R}^4 e a de sua projeção singular em uma direção tangente. O objetivo é provar o Teorema 3.13, que estabelece relações entre a elipse de curvatura de uma superfície regular em \mathbb{R}^4 (definida no Capítulo 2) e a parábola de curvatura de sua projeção singular em uma direção tangente. Para tanto, apresentaremos inicialmente um breve estudo sobre a geometria diferencial de segunda ordem de superfícies de coposto 1 em \mathbb{R}^3 , ou seja, de superfícies parametrizadas por aplicações suaves de coposto 1. Mais detalhes podem ser encontrados em (MARTINS; NUÑO BALLESTEROS, 2015). Neste artigo, os autores, definem, nos pontos singulares, a primeira e segunda formas fundamentais. A partir das formas fundamentais, definem a parábola de curvatura: uma curva contida no plano normal da superfície e que possui um papel similar àquele da elipse de curvatura de superfícies regulares. Mais ainda, eles definem os conceitos de direções binormais e assintóticas para tais superfícies no ponto singular, relacionando-os com o contato da superfície com planos e esferas.

3.1 A geometria de segunda ordem

Dada uma superfície de coposto 1, $M \subset \mathbb{R}^3$ em $p \in M$, vamos assumi-la como a imagem de uma aplicação suave $g : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde \tilde{M} é uma superfície suave e $q \in \tilde{M}$ é um ponto de coposto 1 da aplicação g tal que $g(q) = p \in M$. Tomando $\varphi : U \subset \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^2$ um sistema de coordenadas, onde U é uma vizinhança aberta de $q \in \tilde{M}$, $f = g \circ \varphi^{-1}$ é uma parametrização local de M em p , como no diagrama abaixo.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xleftarrow{\varphi} & U \subset \tilde{M} \xrightarrow{g} M \subset \mathbb{R}^3 \\ & \searrow f & \nearrow \end{array}$$

A reta tangente à M em p é o conjunto $T_p M = \text{Im}(dg_q)$, onde $dg_q : T_q \tilde{M} \rightarrow T_p \mathbb{R}^3$. O plano normal $N_p M$ é o subespaço que satisfaz $T_p \mathbb{R}^3 = T_p M \oplus N_p M$. A primeira forma fundamental de

M em p $I : T_q\tilde{M} \times T_q\tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$I(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle dg_q(\mathbf{u}), dg_q(\mathbf{v}) \rangle, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_q\tilde{M}.$$

Se $f = g \circ \varphi^{-1}$ é uma parametrização local de M em p como anteriormente e $\{\partial_x, \partial_y\}$ é uma base de $T_q\tilde{M}$, os coeficientes da primeira forma fundamental com respeito ao sistema de coordenadas φ são:

$$\begin{aligned} E(q) &= I(\partial_x, \partial_x) = \langle f_x, f_x \rangle(\varphi(q)), \quad F(q) = I(\partial_x, \partial_y) = \langle f_x, f_y \rangle(\varphi(q)) \\ G(q) &= I(\partial_y, \partial_y) = \langle f_y, f_y \rangle(\varphi(q)), \end{aligned}$$

e tomando $\mathbf{u} = \alpha\partial_x + \beta\partial_y \in T_q\tilde{M}$, $I(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \alpha^2E(q) + 2\alpha\beta F(q) + \beta^2G(q)$. A primeira forma fundamental não define uma métrica Riemanniana em $T_q\tilde{M}$, mas sim uma pseudométrica. Seja $\perp : T_p\mathbb{R}^3 \rightarrow N_pM$ a projeção ortogonal no plano normal. A segunda forma fundamental de M em p , $II : T_q\tilde{M} \times T_q\tilde{M} \rightarrow N_pM$, é a aplicação bilinear simétrica tal que

$$II(\partial_x, \partial_x) = f_{xx}^\perp(\varphi(q)), \quad II(\partial_x, \partial_y) = f_{xy}^\perp(\varphi(q)) \quad \text{e} \quad II(\partial_y, \partial_y) = f_{yy}^\perp(\varphi(q)).$$

A definição da segunda forma fundamental não depende da escolha das coordenadas locais em \tilde{M} . Além disso, dado um vetor $\mathbf{v} \in N_pM$, definimos a segunda forma fundamental na direção \mathbf{v} de M em p :

$$II_{\mathbf{v}} : T_q\tilde{M} \times T_q\tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}, \quad II_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle II(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathbf{v} \rangle,$$

para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_q\tilde{M}$. Os coeficientes de $II_{\mathbf{v}}$ em coordenadas são

$$l_{\mathbf{v}}(q) = \langle f_{xx}^\perp, \mathbf{v} \rangle(q), \quad m_{\mathbf{v}}(q) = \langle f_{xy}^\perp, \mathbf{v} \rangle(q) \quad \text{e} \quad n_{\mathbf{v}}(q) = \langle f_{yy}^\perp, \mathbf{v} \rangle(q).$$

Para $\mathbf{u} = \alpha\partial_x + \beta\partial_y \in T_q\tilde{M}$, temos $II_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \alpha^2l_{\mathbf{v}}(q) + 2\alpha\beta m_{\mathbf{v}}(q) + \beta^2n_{\mathbf{v}}(q)$ e fixando um referencial ortonormal $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ de N_pM ,

$$\begin{aligned} II(\mathbf{u}, \mathbf{u}) &= II_{\mathbf{v}_1}(\mathbf{u}, \mathbf{u})\mathbf{v}_1 + II_{\mathbf{v}_2}(\mathbf{u}, \mathbf{u})\mathbf{v}_2 \\ &= (\alpha^2l_{\mathbf{v}_1} + 2\alpha\beta m_{\mathbf{v}_1} + \beta^2n_{\mathbf{v}_1})\mathbf{v}_1 + (\alpha^2l_{\mathbf{v}_2} + 2\alpha\beta m_{\mathbf{v}_2} + \beta^2n_{\mathbf{v}_2})\mathbf{v}_2, \end{aligned}$$

com os coeficientes avaliados em q . Também podemos representar a segunda forma fundamental pela matriz dos coeficientes

$$\begin{pmatrix} l_{\mathbf{v}_1} & m_{\mathbf{v}_1} & n_{\mathbf{v}_1} \\ l_{\mathbf{v}_2} & m_{\mathbf{v}_2} & n_{\mathbf{v}_2} \end{pmatrix}.$$

Considere os vetores $\mathbf{u} = (\pm 1, y) \in T_q\tilde{M}$, que são unitários de acordo com a pseudométrica definida pela primeira forma fundamental em $T_q\tilde{M}$. A imagem desses vetores via segunda forma fundamental de M em p é dada por

$$II(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = (l_{\mathbf{v}_1} \pm 2ym_{\mathbf{v}_1} + y^2n_{\mathbf{v}_1})\mathbf{v}_1 + (l_{\mathbf{v}_2} \pm 2ym_{\mathbf{v}_2} + y^2n_{\mathbf{v}_2})\mathbf{v}_2,$$

com $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ referencial ortonormal de N_pM . Note que essa é uma curva que pode ser reparametrizada e escrita como

$$II(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = (l_{\mathbf{v}_1} + 2ym_{\mathbf{v}_1} + y^2n_{\mathbf{v}_1})\mathbf{v}_1 + (l_{\mathbf{v}_2} + 2ym_{\mathbf{v}_2} + y^2n_{\mathbf{v}_2})\mathbf{v}_2,$$

fazendo a troca $-y \mapsto y$. Essa curva é uma parábola e se degenera se, e somente se, sua curvatura κ se anula, o que é equivalente à $n_{\mathbf{v}_2}m_{\mathbf{v}_1} - n_{\mathbf{v}_1}m_{\mathbf{v}_2} = 0$.

Definição 3.1. A *parábola de curvatura* é o subconjunto $\Delta_p \subset N_pM$ dado por $\eta_q(C_q)$ onde $C_q \subset T_q\tilde{M}$ é o subconjunto de vetores unitários e $\eta_q : C_q \rightarrow N_pM$ é definida por $\eta_q(\mathbf{u}) = II(\mathbf{u}, \mathbf{u})$.

A parábola de curvatura é uma curva plana que pode se degenerar em uma semirreta, em uma reta ou em um ponto. A definição não depende da escolha das coordenadas locais de \tilde{M} , no entanto, depende da aplicação g (como na construção anterior). Uma vez que g tem coposto 1 em $q \in \tilde{M}$, é possível escolher um sistema de coordenadas e fazer rotações em \mathbb{R}^3 de modo que $f(x, y) = (x, f_2(x, y), f_3(x, y))$ e $(f_i)_x(\varphi(q)) = (f_i)_y(\varphi(q)) = 0$ para $i = 2, 3$. Dessa forma, obtemos $E = 1, F = G = 0$ e $C_q = \{\mathbf{u} = (\pm 1, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$. Portanto, fixando um referencial ortonormal $\{v_1, v_2\}$ de N_pM e usando a expressão da segunda forma fundamental,

$$\eta(y) = (l_{v_1} + 2m_{v_1}y + n_{v_1}y^2)v_1 + (l_{v_2} + 2m_{v_2}y + n_{v_2}y^2)v_2 \quad (3.1)$$

é uma parametrização para a parábola de curvatura Δ_p em N_pM .

Em (MOND, 1985), Mond classificou os germes de $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ de coposto 1 de acordo com o seu 2-jato, $j^2f(0)$, via a ação do subgrupo \mathcal{A}^2 , o conjunto dos 2-jatos de difeomorfismos na fonte e na meta. O espaço dos 2-jatos $j^2f(0)$ de germes de aplicações $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ é denotado por $J^2(2, 3)$ e $\Sigma^1 J^2(2, 3)$ é o subconjunto dos 2-jatos de coposto 1.

Proposição 3.2. (MOND, 1985, p. 341) Existem quatro \mathcal{A}^2 -órbitas em $\Sigma^1 J^2(2, 3)$:

$$(x, y^2, xy), (x, y^2, 0), (x, xy, 0) \text{ e } (x, 0, 0).$$

O próximo teorema mostra que a parábola de curvatura é um invariante completo para a \mathcal{A}^2 -classificação de Mond.

Teorema 3.3. (MARTINS; NUÑO BALLESTEROS, 2015, p. 111) Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície com singularidade de coposto 1 em $p \in M$. Assumimos por simplicidade que p é a origem de \mathbb{R}^3 e denotamos por $j^2f(0)$ o 2-jato da parametrização local $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ de M . São verdadeiras as seguintes equivalências:

- (i) Δ_p é uma parábola não degenerada se, e somente se, $j^2f(0) \sim_{\mathcal{A}^2} (x, y^2, xy)$;
- (ii) Δ_p é uma semirreta se, e somente se, $j^2f(0) \sim_{\mathcal{A}^2} (x, y^2, 0)$;
- (iii) Δ_p é uma reta se, e somente se, $j^2f(0) \sim_{\mathcal{A}^2} (x, xy, 0)$;
- (iv) Δ_p é um ponto se, e somente se, $j^2f(0) \sim_{\mathcal{A}^2} (x, 0, 0)$.

Demonstração. Por completude, apresentamos uma ideia da prova. Sem perda de generalidade, assumimos que

$$j^2f(0) = \left(x, \frac{1}{2}(a_{20}x^2 + 2a_{11}xy + a_{02}y^2), \frac{1}{2}(b_{20}x^2 + 2b_{11}xy + b_{02}y^2) \right).$$

Seja $\{e_1, e_2, e_3\}$ a base canônica de \mathbb{R}^3 . Logo, $T_pM = [e_1]$ e $N_pM = [e_2, e_3]$. A matriz dos coeficientes da segunda forma fundamental é dada por

$$\begin{pmatrix} a_{20} & a_{11} & a_{02} \\ b_{20} & b_{11} & b_{02} \end{pmatrix}.$$

De acordo com (MOND, 1985), a classificação dos 2-jatos $j^2f(0)$ segue da análise dos coeficientes a_{ij}, b_{ij} :

- (a) $j^2f(0) \sim_{\mathcal{S}^2} (x, y^2, xy)$ se, e somente se, $a_{11}b_{02} - a_{02}b_{11} \neq 0$;
- (b) $j^2f(0) \sim_{\mathcal{S}^2} (x, y^2, 0)$ se, e somente se, $a_{11}b_{02} - a_{02}b_{11} = 0$ and $a_{02}^2 + b_{02}^2 > 0$;
- (c) $j^2f(0) \sim_{\mathcal{S}^2} (x, xy, 0)$ se, e somente se, $a_{02} = b_{02} = 0$ and $a_{11}^2 + b_{11}^2 > 0$;
- (d) $j^2f(0) \sim_{\mathcal{S}^2} (x, 0, 0)$ se, e somente se, $a_{02} = b_{02} = a_{11} = b_{11} = 0$.

O resultado segue da comparação das condições acima com a parametrização da parábola de curvatura Δ_p dada por $\eta(y) = (0, a_{20} + 2a_{11}y + a_{02}y^2, b_{20} + 2b_{11}y + b_{02}y^2)$. \square

As definições de direções assintóticas e binormais para superfícies singulares de coposto 1 em \mathbb{R}^3 são dadas em termos da segunda forma fundamental, inspiradas pelas mesmas definições para superfícies regulares em \mathbb{R}^4 .

Definição 3.4. Uma direção tangente não nula $\mathbf{u} \in T_q\tilde{M}$ é chamada *assintótica* se existe uma direção normal não nula $\mathbf{v} \in N_pM$ tal que $II_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$, para todo $\mathbf{v} \in T_q\tilde{M}$. Neste caso, dizemos que \mathbf{v} é uma *direção binormal*.

O próximo resultado apresenta um critério para determinar se uma direção tangente é assintótica.

Lema 3.5. (MARTINS; NUÑO BALLESTEROS, 2015, p. 115) Seja $\{v_1, v_2\}$ um referencial ortonormal de N_pM . Uma direção tangente $\mathbf{u} = \alpha\partial_x + \beta\partial_y \in T_q\tilde{M}$ é assintótica se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} \beta^2 & -\alpha\beta & \alpha^2 \\ l_{v_1} & m_{v_1} & n_{v_1} \\ l_{v_2} & m_{v_2} & n_{v_2} \end{vmatrix} = 0,$$

onde l_{v_i}, m_{v_i} e n_{v_i} , $i = 1, 2$, são os coeficientes da segunda forma fundamental.

É possível escolher coordenadas locais em \tilde{M} de modo que a parábola de curvatura seja parametrizada por η , como dada em (3.1). O parâmetro $y \in \mathbb{R}$ corresponde à direção tangente unitária $\mathbf{u} = \partial_x + y\partial_y \in C_q$. Denotamos por y_∞ o parâmetro correspondente à direção tangente nula (segundo a pseudo-métrica dada pela primeira forma fundamental) $\mathbf{u} = \partial_y$. Quando

a parábola de curvatura Δ_p se degenera em uma semirreta ou uma reta, definimos $\eta(y_\infty) = \eta'(y_\infty) = \eta'(y)/|\eta'(y)|$, onde $y > 0$ é qualquer valor tal que $\eta'(y) \neq 0$. Quando Δ_p se degenera em um ponto v , definimos $\eta(y_\infty) = v$ e $\eta'(y_\infty) = 0$. No entanto, quando Δ_p é uma parábola não degenerada, os vetores $\eta(y_\infty)$ e $\eta'(y_\infty)$ não estão definidos.

O parâmetro $y \in \mathbb{R} \cup [y_\infty]$ correspondente à uma direção assintótica $\mathbf{u} \in T_q\tilde{M}$ é também chamado de direção assintótica. É possível determinar o número de direções assintóticas $y \in \mathbb{R} \cup [y_\infty]$ analisando cada tipo de parábola de curvatura e sua posição em relação ao ponto singular p .

- (i) Se Δ_p é uma parábola não degenerada, temos 0, 1 ou 2 direções assintóticas, de acordo com a posição do ponto p : dentro (ou seja, p pertence à região convexa de N_pM delimitada por Δ_p), sobre ou fora da parábola, respectivamente;
- (ii) Se Δ_p é uma semirreta, ou temos duas direções assintóticas, $[y_v, y_\infty]$, onde $\eta(y_v)$ é o vértice de Δ_p ou todo $y \in \mathbb{R} \cup [y_\infty]$ é uma direção assintótica, de acordo com que a reta que contém Δ_p não é radial (não contém p) ou é, respectivamente;
- (iii) Se Δ_p é uma reta, ou y_∞ é a única direção assintótica ou toda direção $y \in \mathbb{R} \cup [y_\infty]$ é assintótica, de acordo com que a reta não é radial (não contém p) ou é, respectivamente;
- (iv) Se Δ_p é um ponto, todo $y \in \mathbb{R} \cup [y_\infty]$ é direção assintótica.

Em (MARTINS; NUÑO BALLESTEROS, 2015), os autores estudam o contato de superfícies singulares de coposto 1 com planos e, para tanto, utilizam a função altura. Tal como para superfícies regulares em \mathbb{R}^4 , é mostrado que a função altura em uma dada direção é singular se, e somente se, tal direção é normal. Mais ainda, a singularidade é degenerada (não Morse) se, e somente se, tal direção é binormal (no caso em que Δ_p não é um ponto). Quando a parábola de curvatura Δ_p é um ponto, a função altura é degenerada para toda direção normal.

Os autores também definem um invariante (sob a ação de $\mathcal{R}^2 \times \mathcal{O}(3)$) de superfícies singulares de coposto 1 em \mathbb{R}^3 : a curvatura umbílica. No entanto, esse invariante não está definido para o caso em que Δ_p é uma parábola não degenerada. Muito embora o estudo que faremos na próxima seção não dependerá desse invariante, apresentaremos aqui sua definição, pois no Capítulo 4 definiremos esta curvatura para superfícies de coposto 1 em \mathbb{R}^4 . Antes, no entanto, uma construção se faz necessária.

Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície de coposto 1 em $p \in M$. Suponha que Δ_p não seja uma parábola não degenerada. Considere um referencial ortonormal $\{v_1, v_2\}$ de N_pM e uma direção tangente $\mathbf{u} \in T_q\tilde{M}$. Dessa forma, sabemos que

$$H(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = H_{v_1}(\mathbf{u}, \mathbf{u})v_1 + H_{v_2}(\mathbf{u}, \mathbf{u})v_2.$$

Suponha, inicialmente, que Δ_p não seja um ponto, ou seja, a parábola de curvatura é uma semirreta ou uma reta. Neste caso, a direção assintótica y_∞ está bem definida. Denote

por \mathbf{v}_∞ a direção binormal associada de modo que $\{\eta(y_\infty), \mathbf{v}_\infty\}$ seja um referencial ortonormal positivamente orientado de N_pM . Suponha agora que Δ_p seja um ponto distinto de p . Isto posto, temos que $\eta(y)$ é constante e podemos definir o referencial ortonormal positivamente orientado $\{\mathbf{v}, \frac{\eta(y)}{|\eta(y)|}\}$, onde \mathbf{v} é uma direção binormal. Os referenciais que definimos acima são chamados de *referenciais adaptados* de N_pM . Note que no caso em que $\Delta_p = \{p\}$, qualquer referencial ortonormal de N_pM pode ser tomado como um referencial adaptado.

Consequentemente, dado $\mathbf{u} \in C_q$, $II(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \in \Delta_p$. Dessa forma, em um referencial adaptado, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ de N_pM , $II_{\mathbf{v}_2}(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ não depende de \mathbf{u} a menos de sinal.

Definição 3.6. Sejam $\mathbf{u} \in C_q \subset T_q\tilde{M}$ e $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ um referencial adaptado de N_pM . Chamamos o número não negativo

$$\kappa_u(p) = |\langle II(\mathbf{u}, \mathbf{u}), \mathbf{v}_2 \rangle| = |II_{\mathbf{v}_2}(\mathbf{u}, \mathbf{u})|$$

de *curvatura umbílica* de M em p .

Podemos tirar algumas conclusões geométricas da definição anterior. Se Δ_p é um ponto, por exemplo, a curvatura umbílica é a distância entre Δ_p e p . Além disso, $\kappa_u(p) = 0$ se, e somente se, ou $\Delta_p = \{p\}$ ou a parábola de curvatura está contida em uma reta radial, quando Δ_p é uma semirreta ou uma reta. Em (MARTINS; NUÑO BALLESTEROS, 2015), os autores mostram que a curvatura umbílica não depende da escolha do referencial ortonormal, da parametrização de Δ_p ou do sistema de coordenadas locais em \tilde{M} . No entanto, depende da aplicação g de coposto 1. Neste artigo são também apresentadas outras fórmulas para o cálculo desta curvatura.

3.2 A relação entre os loci de curvatura

Nesta seção relacionamos a geometria de uma superfície S imersa em \mathbb{R}^4 em um ponto p com a geometria da superfície singular obtida pela sua projeção em \mathbb{R}^3 . Em particular, relacionamos a elipse de curvatura da superfície regular S com a parábola de curvatura de sua projeção singular. Os resultados aqui apresentados podem ser encontrados em (BENEDINI RIUL; OSET SINHA, 2019).

Sem perda de generalidade, podemos assumir que p é a origem de \mathbb{R}^4 e que a parametrização de S está na forma de Monge $F(x, y) = (x, y, f_1(x, y), f_2(x, y))$ de modo que $j^2(f_1, f_2) = (\frac{1}{2}(a_{20}x^2 + 2a_{11}xy + a_{02}y^2), \frac{1}{2}(b_{20}x^2 + 2b_{11}xy + b_{02}y^2))$. Dada uma direção $\mathbf{v} \in \mathbb{S}^3$, a projeção ortogonal em \mathbb{R}^4 na direção de \mathbf{v} é dada por $\pi_{\mathbf{v}} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ com

$$\pi_{\mathbf{v}}(p) = p - \langle p, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v}.$$

Nosso objetivo é estudar projeções ao longo de direções tangentes, de modo que, sem perda de generalidade, podemos assumir, via rotações no plano tangente, que $\mathbf{v} = (0, 1) \in T_pS$, uma vez que tais rotações deixam invariante a elipse de curvatura. Portanto, a parametrização para $\pi_{\mathbf{v}}(S)$ é dada por $f(x, y) = (x, f_1(x, y), f_2(x, y))$.

Proposição 3.7. Seja $S \subset \mathbb{R}^4$ uma superfície regular e $\pi_{\mathbf{v}}(S)$ sua projeção singular ao longo da direção tangente $\mathbf{v} = (0, 1) \in T_p S$.

- (i) O número de direções assintóticas de S em p e de $\pi_{\mathbf{v}}(S)$ em $\pi_{\mathbf{v}}(p)$ é o mesmo.
- (ii) O número de direções binormais é igual em ambas superfícies. Mais ainda, se $\nu \in N_p S$ é uma direção binormal de S , ela é também direção binormal de $\pi_{\mathbf{v}}(S)$ em $\pi_{\mathbf{v}}(p)$.

Demonstração. Para a prova da primeira afirmação, basta observarmos que os coeficientes das segundas formas fundamentais de ambas superfícies, S e $\pi_{\mathbf{v}}(S)$, são iguais nos pontos correspondentes p e $\pi_{\mathbf{v}}(p)$ e os resultados que caracterizam direções assintóticas nos dois casos dependem unicamente destes coeficientes: Teorema 2.23 e Lema 3.5.

De acordo com (OSET SINHA; TARI, 2015), a função altura da superfície projetada $\pi_{\mathbf{v}}(S)$ ao longo do vetor normal ω é dada por

$$\langle \pi_{\mathbf{v}}(x, y), \omega \rangle = \langle F(x, y) - \langle F(x, y), \mathbf{v} \rangle \mathbf{v}, \omega \rangle = \langle F(x, y), \omega \rangle,$$

que é precisamente a função altura de S na direção do vetor ω . Uma vez que direções binormais, tanto em \mathbb{R}^4 como em \mathbb{R}^3 , são dadas por singularidades degeneradas (não Morse) da função altura, temos a prova da segunda afirmação. \square

Do mesmo modo como em superfícies regulares em \mathbb{R}^4 , no artigo (OSET SINHA; TARI, 2015, Definição 2.1) os autores classificam pontos singulares de superfícies de coposto 1 em \mathbb{R}^3 de acordo com as \mathcal{G} -órbitas do par de formas quadráticas (Q_1, Q_2) , onde $Q_1(x, y) = j^2 f_1(x, y)$ e $Q_2(x, y) = j^2 f_2(x, y)$ e $\mathcal{G} = GL(2, \mathbb{R}) \times GL(2, \mathbb{R})$. Ou seja, um ponto singular de S é elíptico/hiperbólico/parabólico/inflexão se a \mathcal{G} -classe de (Q_1, Q_2) é como na Tabela 2. Lá é mostrado que um ponto $p \in S \subset \mathbb{R}^4$ é um ponto elíptico/hiperbólico/parabólico/inflexão se, e somente se, $\pi_{\mathbf{v}}(p)$ é um ponto elíptico/hiperbólico/parabólico/inflexão (OSET SINHA; TARI, 2015, Teorema 3.3).

A Proposição 3.7 e a observação anterior tornam natural a próxima definição.

Definição 3.8. Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície com singularidade de coposto 1 em $p \in M$. O ponto p é chamado:

- (i) *elíptico*, se não há direções assintóticas em p ;
- (ii) *hiperbólico*, se há duas direções assintóticas em p ;
- (iii) *parabólico*, se existe uma direção assintótica em p ;
- (iv) *ponto de inflexão*, se há infinitas direções assintóticas em p .

Teorema 3.9. Seja \mathbf{v} uma direção tangente em $p \in S \subset \mathbb{R}^4$. O ponto p é um ponto elíptico/hiperbólico/parabólico/inflexão se, e somente se, o ponto singular $\pi_{\mathbf{v}}(p) \in \pi_{\mathbf{v}}(S) \subset \mathbb{R}^3$ é um ponto elíptico/hiperbólico/parabólico/inflexão, respectivamente.

Demonstração. A prova é uma consequência imediata do primeiro item da Proposição 3.7 e da Definição 3.8. \square

Corolário 3.10. A Definição 2.1 em (OSET SINHA; TARI, 2015) e a Definição 3.8 coincidem.

Observação 3.11. O cross-cap é uma singularidade de coposto 1 cuja geometria tem sido amplamente estudada. Em (WEST, 1995) a autora mostra que, utilizando mudanças de coordenadas na fonte e mudanças de coordenadas afins na meta, podemos parametrizar o cross-cap na forma $f(x, y) = (x, xy + p(y), y^2 + ax^2 + q(x, y))$, com $p \in \mathcal{M}^4$ e $q \in \mathcal{M}_2^3$. O cross-cap é chamado hiperbólico, elíptico ou parabólico se $a < 0$, $a > 0$ ou $a = 0$, respectivamente. Em (NUÑO BALLESTEROS; TARI, 2007) e (OSET SINHA; TARI, 2015), os autores mostram que um cross-cap é hiperbólico, elíptico ou parabólico se, e somente se, se o ponto singular é elíptico, hiperbólico ou parabólico, respectivamente. Tal resultado é explicado pela Definição 3.8, uma vez que em um cross-cap hiperbólico não há direções assintóticas, um cross-cap elíptico possui duas direções assintóticas e um cross-cap parabólico possui uma direção assintótica.

Seja $S \subset \mathbb{R}^4$ uma superfície regular parametrizada na forma de Monge em uma vizinhança da origem p , como anteriormente:

$$F(x, y) = (x, y, \frac{1}{2}(a_{20}x^2 + 2a_{11}xy + a_{02}y^2) + o(3), \frac{1}{2}(b_{20}x^2 + 2b_{11}xy + b_{02}y^2) + o(3)).$$

Denotamos, neste capítulo, a elipse de curvatura de S em p por Δ_e , afim de evitar confusão com a notação da parábola de curvatura. No próximo resultado, fornecemos um critério de degeneração para a elipse de curvatura Δ_e . Este critério será útil na demonstração do principal teorema deste capítulo.

Proposição 3.12. A elipse de curvatura Δ_e se degenera (em um segmento ou ponto) se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a_{20} & a_{11} & a_{02} \\ b_{20} & b_{11} & b_{02} \end{vmatrix} = 0.$$

Demonstração. Sabemos, pela Proposição 2.25, que elipse de curvatura pode ser parametrizada por

$$\eta_e(\theta) = (a_{20} \cos^2 \theta + 2a_{11} \sin \theta \cos \theta + a_{02} \sin^2 \theta, b_{20} \cos^2 \theta + 2b_{11} \sin \theta \cos \theta + b_{02} \sin^2 \theta).$$

Além disso, a elipse se degenera se, e somente se, $\kappa = 0$, onde κ é a curvatura de η_e vista como uma curva plana. No entanto, $\kappa = 0$ se, e somente se, $\det(\eta_e, \eta'_e) = 0$ e um cálculo direto mostra que essa condição é equivalente à $(a_{20}b_{11} - b_{20}a_{11}) + (a_{11}b_{02} - a_{02}b_{11}) = 0$. \square

O próximo resultado é o principal deste capítulo. Nele é mostrada a relação entre os loci de curvatura de uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^4$ em um ponto $p \in S$ e o de sua projeção em uma direção tangente $\mathbf{v} \in T_p S$, $\pi_{\mathbf{v}}(S)$ em $\pi_{\mathbf{v}}(p)$.

Teorema 3.13. Seja $F : U \rightarrow \mathbb{R}^4$ a parametrização de uma superfície regular $S = F(U)$ e considere $p \in S$. Seja $\mathbf{v} \in T_p S$ e defina a projeção ortogonal $\pi_{\mathbf{v}} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ da superfície S em \mathbb{R}^3 . Sejam Δ_e a elipse de curvatura de S em p e Δ_p a parábola de curvatura de $\pi_{\mathbf{v}}(S)$ em $\pi_{\mathbf{v}}(p)$. São verdadeiras as seguintes equivalências:

- (i) Δ_e é uma elipse tal que o ponto p está em seu interior se, e somente se, Δ_p é uma parábola com $\pi_{\mathbf{v}}(p)$ contido no seu interior.
- (ii) Δ_e é uma elipse tal que o ponto p está fora de Δ_e ou um segmento cuja reta que o contém não passa por p (não radial) se, e somente se, Δ_p é uma parábola tal que $\pi_{\mathbf{v}}(p)$ está fora (quando \mathbf{v} não é assintótica) ou uma semirreta cuja reta que a contém não passa por $\pi_{\mathbf{v}}(p)$ (caso contrário).
- (iii) Δ_e é uma elipse tal que p pertence ao seu traço se, e somente se, Δ_p é uma parábola tal que $\pi_{\mathbf{v}}(p)$ pertence ao seu traço (quando \mathbf{v} é não assintótica) ou uma reta que não contém $\pi_{\mathbf{v}}(p)$ (caso contrário).
- (iv) Δ_e é um segmento cuja reta que o contém passa por p ou um ponto diferente de p se, e somente se, Δ_p é uma reta que contém $\pi_{\mathbf{v}}(p)$, uma semirreta cuja reta que a contém passa por $\pi_{\mathbf{v}}(p)$ ou um ponto diferente de $\pi_{\mathbf{v}}(p)$.
- (v) Δ_e é o ponto p se, e somente se, Δ_p é o ponto $\pi_{\mathbf{v}}(p)$.

Na Figura 1 é apresentada uma ilustração de cada um dos itens do teorema.

Demonstração. Sabemos, pelo Teorema 2.31, que se \mathbf{v} não é uma direção assintótica, então $\pi_{\mathbf{v}}(S)$ tem uma singularidade cross-cap em $\pi_{\mathbf{v}}(p)$ e então, pelo Teorema 3.3, a parábola de curvatura é não degenerada. Se \mathbf{v} é uma direção assintótica, então a singularidade de projeção pode ser mais degenerada que um cross-cap e a parábola de curvatura é degenerada.

Note também que pela Proposição 3.7, o número de direções assintóticas em p (0, 1, 2 ou infinitas) é o mesmo que em $\pi_{\mathbf{v}}(p)$.

(i) Por definição Δ_e é uma elipse com p em seu interior se, e somente se, p é um ponto elíptico. Neste caso, não há direções assintóticas, então \mathbf{v} não é assintótica e $\pi_{\mathbf{v}}(S)$ tem uma singularidade cross-cap em $\pi_{\mathbf{v}}(p)$ e assim a parábola de curvatura é não degenerada. Além disso, não há direções assintóticas em $\pi_{\mathbf{v}}(p)$ (já que o ponto é elíptico) se, e somente se, o ponto está no interior da parábola de curvatura Δ_p .

(ii) Por definição Δ_e é uma elipse com p no seu exterior ou um segmento cuja reta que o contém não passa por p (ou seja, não radial) se p é um ponto hiperbólico (possivelmente

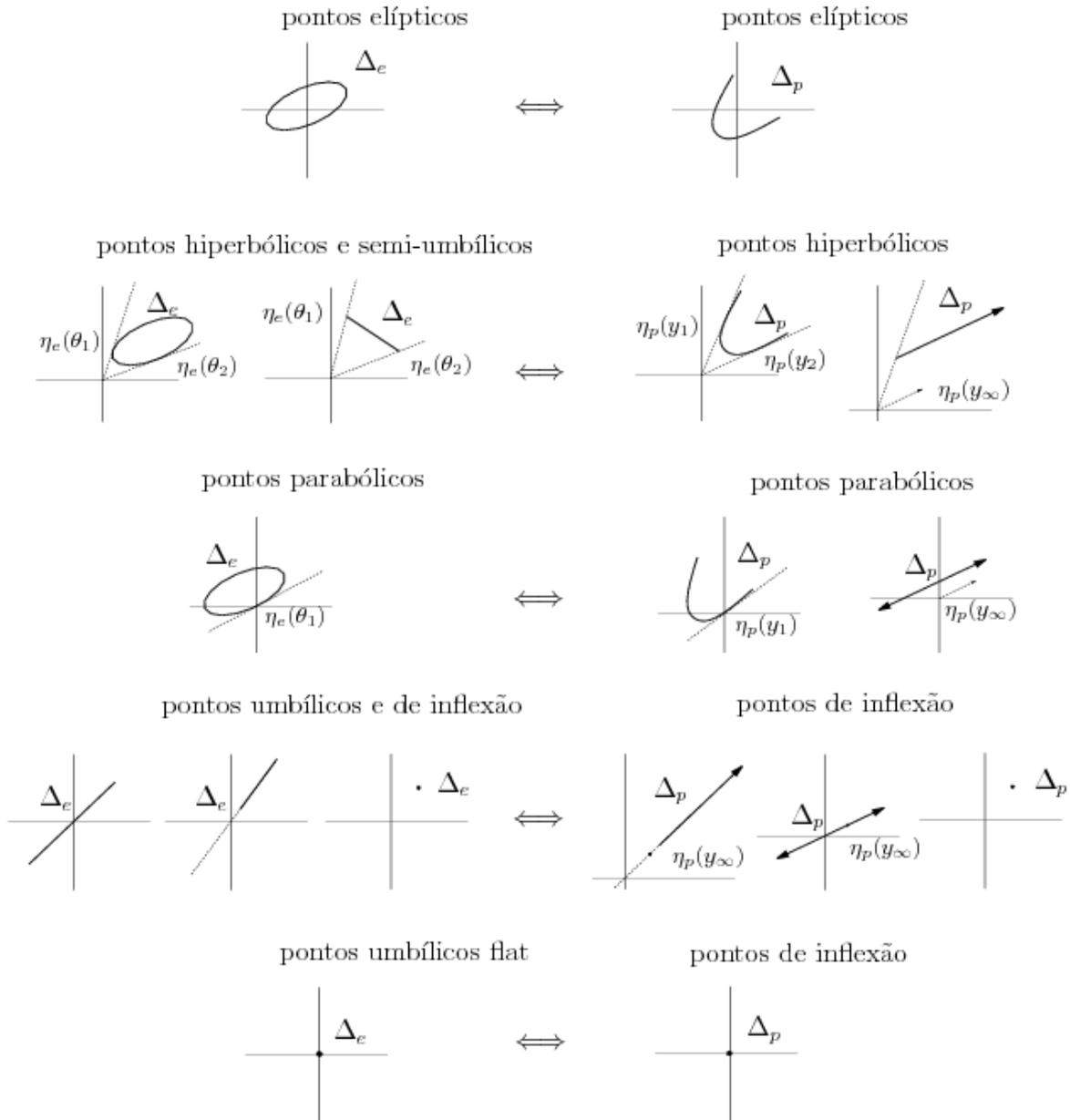


Figura 1 – Teorema 3.13.

semiumbílico, mas não de inflexão). Neste caso, temos exatamente duas direções assintóticas distintas. Pela Proposição 2.25 e pela natureza do ponto, p é hiperbólico se, e somente se, a resultante

$$\delta(p) = \frac{1}{4}[4(a_{20}b_{11} - b_{20}a_{11})(a_{11}b_{02} - a_{02}b_{11}) - (a_{20}b_{02} - b_{20}a_{02})^2] < 0.$$

Temos então duas possibilidades. Se $a_{11}b_{02} - a_{02}b_{11} \neq 0$, pela demonstração do Teorema 3.3 essa condição é válida se, e somente se, Δ_p é uma parábola não degenerada. Dado que existem duas direções assintóticas, o ponto $\pi_v(p)$ pertence ao exterior da parábola. Isso ocorre quando v não é uma direção assintótica.

Por outro lado, se $a_{11}b_{02} - a_{02}b_{11} = 0$, então $a_{20}b_{02} - b_{20}a_{02} \neq 0$ para que $\delta(p)$ seja negativo, e então $a_{02}^2 + b_{02}^2 > 0$. Essa condição é equivalente, pelo Teorema 3.3, à Δ_p ser uma semirreta, e como existem duas direções assintóticas, a reta que contém a semirreta não contém o ponto $\pi_v(p)$, ou seja, não é radial. Neste caso v é uma direção assintótica.

Reciprocamente, se Δ_p é uma parábola com $\pi_v(p)$ pertencente ao seu exterior ou uma semirreta não radial, então existem exatamente duas direções assintóticas e consequentemente, p é um ponto hiperbólico (possivelmente semiumbílico, mas não de inflexão).

(iii) Por definição Δ_e é uma elipse com p pertencente ao seu traço se p é um ponto parabólico (mas não de inflexão), isto é, existe somente uma direção assintótica em p . Tais pontos são caracterizados por

$$\delta(p) = \frac{1}{4}[4(a_{20}b_{11} - b_{20}a_{11})(a_{11}b_{02} - a_{02}b_{11}) - (a_{20}b_{02} - b_{20}a_{02})^2] = 0.$$

Novamente, temos dois casos para considerar. Se $a_{11}b_{02} - a_{02}b_{11} \neq 0$ então Δ_p é uma parábola não degenerada e uma vez que temos somente uma direção assintótica, o ponto $\pi_v(p)$ deve pertencer ao traço da parábola. Neste caso, v não é uma direção assintótica.

Por outro lado, se $a_{11}b_{02} - a_{02}b_{11} = 0$ temos $a_{20}b_{11} - b_{20}a_{11} \neq 0$. Isso ocorre por conta da Proposição 3.12: Δ_e é não degenerada se, e somente se,

$$(a_{20}b_{11} - b_{20}a_{11}) + (a_{11}b_{02} - a_{02}b_{11}) \neq 0.$$

Portanto $a_{11}^2 + b_{11}^2 > 0$. Dado que $\delta(p) = 0$ segue então que $a_{20}b_{02} - b_{20}a_{02} = 0$, o que nos garante que $a_{02} = b_{02} = 0$. Pelo Teorema 3.3, $a_{11}^2 + b_{11}^2 > 0$ e $a_{02} = b_{02} = 0$ se, e somente se, Δ_p é uma reta, e como temos somente uma direção assintótica, essa reta não contém $\pi_v(p)$, ou seja, é não radial. Neste caso v é uma direção assintótica.

Reciprocamente, se Δ_p é uma parábola com $\pi_v(p)$ pertencente ao seu traço ou uma reta que não contém $\pi_v(p)$, então existe exatamente uma direção assintótica e portanto, p deve ser ponto parabólico (mas não de inflexão).

(iv) Pela definição, Δ_e é um segmento cuja reta que o contém passa por p ou um ponto diferente de p se p é um ponto de inflexão (possivelmente umbílico, mas não umbílico flat).

Neste caso, $\delta(p) = 0$ e como Δ_e é degenerada, pela Proposição 3.12,

$$(a_{20}b_{11} - b_{20}a_{11}) + (a_{11}b_{02} - a_{02}b_{11}) = 0.$$

Desta maneira, $a_{20}b_{11} - b_{20}a_{11} = 0$, $a_{11}b_{02} - a_{02}b_{11} = 0$ e $a_{20}b_{02} - b_{20}a_{02} = 0$. Essas três condições juntas implicam que todas as direções tangentes são assintóticas. Se $a_{02}^2 + b_{02}^2 > 0$, Δ_p é uma semirreta e como todas as direções são assintóticas, $\pi_v(p)$ pertence à reta que contém esta semirreta. Se $a_{02} = b_{02} = 0$ e $a_{11}^2 + b_{11}^2 > 0$, Δ_p é uma reta que contém $\pi_v(p)$. Se $a_{02} = b_{02} = a_{11} = b_{11} = 0$ então Δ_p é um ponto. Neste caso, $a_{20}^2 + b_{20}^2 \neq 0$ pois caso contrário $\Delta_e = \{p\}$. Logo Δ_p é um ponto distinto de $\pi_v(p)$.

(v) Se $\Delta_e = \{p\}$, p é um ponto umbílico flat por definição e $a_{02} = b_{02} = a_{11} = b_{11} = a_{20} = b_{20} = 0$. Portanto $\Delta_p = \{\pi_v(p)\}$. \square

O próximo exemplo ilustra alguns casos que aparecem no Teorema 3.13 e que podem parecer um pouco surpreendentes. Nele são apresentadas três situações. Na primeira, temos um ponto em uma superfície regular em \mathbb{R}^4 em que o locus de curvatura é um segmento mas o de sua projeção singular é uma parábola não degenerada. No segundo, temos novamente um segmento como locus de curvatura da superfície regular e um ponto ou semirreta na superfície singular, dependendo da escolha da direção de projeção. Por fim, temos o caso em que o locus de curvatura da superfície em \mathbb{R}^4 é um ponto e o da superfície singular é uma semirreta.

Exemplo 3.14. (i) Considere a superfície em \mathbb{R}^4 parametrizada por $F(x, y) = (x, y, x^2 + xy + y^2, x^2 + 2xy + y^2)$. Essa superfície tem um ponto semiumbílico na origem e a elipse de curvatura é parametrizada por

$$\eta_e(\theta) = 2(\cos^2 \theta + \sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta, \cos^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta),$$

e cujo traço é um segmento ligando os pontos $(1, 0)$ e $(3, 4)$ no plano normal. Logo, $(0, 1)$ não é uma direção assintótica. Projetando ao longo de $(0, 1)$, obtemos $f(x, y) = (x, x^2 + xy + y^2, x^2 + 2xy + y^2)$. A parábola de curvatura na origem é parametrizada por $\eta_p(y) = 2(0, y^2 + y + 1, y^2 + 2y + 1)$, ou seja, Δ_p é uma parábola não degenerada.

(ii) Considere a superfície regular em \mathbb{R}^4 cujo 2-jato é dado por (x, y, x^2, x^2) e que possui um ponto de inflexão na origem. A elipse de curvatura é o segmento que une os pontos $(0, 0)$ e $(2, 2)$. Note que, neste caso todas as direções tangentes são assintóticas. Ao projetarmos ao longo da direção $(0, 1)$ obtemos a superfície em \mathbb{R}^3 cujo 2-jato é dado por (x, x^2, x^2) . A parábola de curvatura para esta superfície de coposto 1 é o ponto $\{(2, 2)\}$. Se, no entanto, projetarmos ao longo de $(1, 0)$, obtemos (y, x^2, x^2) , cuja parábola de curvatura é a semirreta dada por $\eta_p(y) = 2(0, y^2, y^2)$.

(iii) Considere a superfície em \mathbb{R}^4 cujo 2-jato é dado por $(x, y, x^2 + y^2, x^2 + y^2)$ e que possui um ponto umbílico não flat na origem. A elipse de curvatura é o ponto $\{(2, 2)\}$ e todas as

direções tangentes são assintóticas. Se projetarmos ao longo da direção $(0, 1)$, obtemos uma superfície parametrizada por $(x, x^2 + y^2, x^2 + y^2)$, cuja parábola de curvatura é a semirreta dada por $\eta_p(y) = 2(0, y^2 + 1, y^2 + 1)$.

O próximo resultado estabelece uma relação entre as parametrizações da elipse de curvatura de uma superfície regular em \mathbb{R}^4 e da parábola de curvatura de sua projeção singular (em uma direção tangente) em \mathbb{R}^3 .

Proposição 3.15. Considere $S \subset \mathbb{R}^4$ uma superfície regular imersa cuja parametrização é dada na forma de Monge, como na Proposição 2.25. Considere também a elipse de curvatura parametrizada por

$$\eta_e(\theta) = (a_{20} \cos^2 \theta + 2a_{11} \sin \theta \cos \theta + a_{02} \sin^2 \theta, b_{20} \cos^2 \theta + 2b_{11} \sin \theta \cos \theta + b_{02} \sin^2 \theta).$$

A parábola de curvatura da projeção de S ao longo da direção tangente $(0, 1)$ é parametrizada por

$$\eta_p(y) = (0, a_{20} + 2a_{11}y + a_{02}y^2, b_{20} + 2b_{11}y + b_{02}y^2).$$

Demonstração. A elipse de curvatura é parametrizada pelos vetores unitários em $T_p S$, ou seja, pela aplicação $\eta_e : \mathbb{S}^1 \subset T_p S \rightarrow N_p S$. Por outro lado, a parábola de curvatura é também parametrizada por vetores unitários, mas desta vez por vetores do plano tangente de \tilde{M} (como na construção feita no início do capítulo), onde temos uma pseudo-métrica induzida pela primeira forma fundamental e não uma métrica. Tomando a parametrização da projeção dada por $f(x, y) = (x, f_1(x, y), f_2(x, y))$, os coeficientes da primeira forma fundamental no ponto singular são dados por $E = 1, F = G = 0$, e dessa forma, $I(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \alpha^2$, onde $\mathbf{u} = \alpha \partial_x + \beta \partial_y \in T_q \tilde{M}$. Logo, o subconjunto dos vetores tangentes unitários é dado por $C_q = \{(\pm 1, y); y \in \mathbb{R}\}$. Cálculos mostram que a parábola de curvatura da projeção singular é obtida dividindo cada componente por $\cos^2 \theta$ e fazendo a mudança $\tan \theta = y$. Em outras palavras, mudamos $\mathbb{S}^1 \subset T_p S$ para coordenadas homogêneas da reta projetiva quando $\cos \theta \neq 0$, e $\cos \theta = 0$ corresponde à direção tangente nula $\mathbf{u} = \partial_y$. \square

Dada uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^4$, sabemos que ao projetá-la ao longo de uma direção assintótica, a superfície obtida genericamente tem uma das singularidades listadas na Tabela 3. Note que as singularidades S_k, B_k , e C_3 possuem seus 2-jatos equivalentes (via ação de \mathcal{A}^2) ao germe $(x, y^2, 0)$ e assim, a parábola de curvatura associada é uma semirreta (ver Teorema 3.3). Portanto, esses pontos singulares podem ser somente pontos hiperbólicos ou de inflexão, dependendo do número de direções assintóticas: se existem duas ou infinitas, respectivamente. De acordo com a demonstração do Teorema 3.13, o primeiro caso ocorre se $a_{20}b_{02} - b_{20}a_{02} \neq 0$ e o segundo ocorre se $a_{20}b_{02} - b_{20}a_{02} = 0$ e $a_{02}^2 + b_{02}^2 > 0$.

Por outro lado, as singularidades H_k e $P_3(c)$ possuem 2-jatos equivalentes, via ação de \mathcal{A}^2 , à $(x, xy, 0)$, e dessa forma, sua parábola de curvatura nos pontos singulares é uma reta. Como

consequência, esses pontos podem somente ser parabólicos (caso exista somente uma direção assintótica) ou de inflexão (caso existam infinitas). Segundo a demonstração do Teorema 3.13, isso ocorre quando $a_{20}b_{11} - b_{20}a_{11} \neq 0$, $a_{02} = b_{02} = 0$ e $a_{11}^2 + b_{11}^2 > 0$ para o caso parabólico e quando $a_{20}b_{11} - b_{20}a_{11} = 0$, $a_{02} = b_{02} = 0$ e $a_{11}^2 + b_{11}^2 > 0$ para o caso de inflexão.

Portanto, a demonstração do Teorema 3.13 nos permite recuperar o Teorema 2.5 da página 39 em (OSET SINHA; TARI, 2015), o qual apresenta exatamente a discussão feita acima.

SUPERFÍCIES SINGULARES EM \mathbb{R}^4

Neste capítulo estudaremos a geometria de superfícies singulares de coposto 1 em \mathbb{R}^4 . Isto será feito através da primeira e segunda formas fundamentais que serão definidas na superfície no ponto singular. Além disso, inspirados no trabalho (MARTINS; NUÑO BALLESTEROS, 2015) a definição da parábola de curvatura será estendida para este caso. Aqui, entretanto, a parábola de curvatura estará contida em um espaço de dimensão 3, mas uma vez que ela ainda é uma curva plana, o plano que a contém será um plano privilegiado, em um certo sentido. Estudaremos em profundidade a geometria de segunda ordem da superfície, ou seja, toda a geometria relacionada à segunda forma fundamental no ponto singular. Neste estudo estão incluídos definições e resultados acerca de direções assintóticas e binormais. Além disso, definimos um invariante de segunda ordem que também é invariante por isometrias: a curvatura umbílica. Por fim, estudamos o contato de superfícies de coposto 1 em \mathbb{R}^4 com hiperplanos, através do estudo das singularidades da função altura. Os resultados aqui apresentados podem ser encontrados também em (BENEDINI RIUL; RUAS; OSET SINHA, 2018).

4.1 A parábola de curvatura

Seja $M \subset \mathbb{R}^4$ uma superfície singular de coposto 1 em $p \in M$. Tomaremos M como imagem de uma aplicação de classe C^∞

$$g : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^4,$$

onde \tilde{M} é uma superfície regular suave e $q \in \tilde{M}$ é um ponto singular de coposto 1 da aplicação g tal que $g(q) = p \in M$. Dessa forma, considere $\varphi : U \subset \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma carta local de \tilde{M} em q e defina a parametrização local para M dada por

$$f = g \circ \varphi^{-1}, \tag{4.1}$$

como no diagrama a seguir.

$$\mathbb{R}^2 \xleftarrow{\varphi} U \subset \tilde{M} \xrightarrow{g} M \subset \mathbb{R}^4$$

$$\searrow \quad \nearrow$$

$$f$$

Essa construção se faz necessária para que possamos garantir que a superfície M tomada é de coposto 1, além de possibilitar a definição das formas fundamentais, uma vez que utilizaremos o espaço tangente da superfície regular suave \tilde{M} em q , $T_q\tilde{M}$, para fazê-lo. Além do mais, essas definições não vão depender da parametrização local φ .

Definição 4.1. A reta tangente à M em p é dada pelo conjunto $T_pM = \text{im}(dg_q)$, onde $dg_q : T_q\tilde{M} \rightarrow T_p\mathbb{R}^4$ é a diferencial da aplicação g no ponto de coposto 1, q . Definimos o hiperplano normal à M em p como o subespaço vetorial de dimensão 3, N_pM , tal que

$$T_p\mathbb{R}^4 = T_pM \oplus N_pM.$$

Definição 4.2. A primeira forma fundamental $I : T_q\tilde{M} \times T_q\tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$ de M em p é dada por

$$I(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle dg_q(\mathbf{u}), dg_q(\mathbf{v}) \rangle, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_q\tilde{M},$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno canônico induzido de \mathbb{R}^4 .

É importante observar que I não é uma métrica Riemanniana em $T_q\tilde{M}$, pois pode ocorrer $I(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$, mas $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$. No entanto, I é uma pseudométrica.

Tome $f = g \circ \varphi^{-1}$ como em (4.1) uma parametrização local para M em p e $\{\partial_x, \partial_y\}$ base de $T_q\tilde{M}$. Podemos obter os coeficientes da primeira forma fundamental de M com respeito à carta φ . Dessa forma,

$$E(q) = I(\partial_x, \partial_x) = \langle f_x, f_x \rangle(\varphi(q)); \quad F(q) = I(\partial_x, \partial_y) = \langle f_x, f_y \rangle(\varphi(q));$$

$$G(q) = I(\partial_y, \partial_y) = \langle f_y, f_y \rangle(\varphi(q)).$$

Se $\mathbf{u} = \alpha\partial_x + \beta\partial_y \in T_q\tilde{M}$, então:

$$I(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \langle dg_q(\alpha\partial_x + \beta\partial_y), dg_q(\alpha\partial_x + \beta\partial_y) \rangle$$

$$= \alpha^2 E(q) + 2\alpha\beta F(q) + \beta^2 G(q).$$

Ainda nas mesmas condições, podemos definir uma segunda forma fundamental de M em p na base $\{\partial_x, \partial_y\}$ considerada acima. Isso é feito como segue. A projeção ortogonal

$$\pi_2 : T_p\mathbb{R}^4 \rightarrow N_pM$$

$$w \mapsto \pi_2(w)$$

é definida canonicamente e $II : T_q\tilde{M} \times T_q\tilde{M} \rightarrow N_pM$ é tal que

$$II(\partial_x, \partial_x) = \pi_2(f_{xx}(\varphi(q))); \quad II(\partial_x, \partial_y) = \pi_2(f_{xy}(\varphi(q)));$$

$$II(\partial_y, \partial_y) = \pi_2(f_{yy}(\varphi(q))).$$

Estendemos II para $T_q\tilde{M} \times T_q\tilde{M}$ de modo único a uma aplicação bilinear simétrica.

Podemos, para cada vetor $\mathbf{v} \in N_pM$, definir uma segunda forma fundamental de M em p , $II_{\mathbf{v}}$, na direção deste vetor, da seguinte maneira:

$$II_{\mathbf{v}} : T_q\tilde{M} \times T_q\tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$$

é tal que $II_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle II(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathbf{v} \rangle$, para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_q\tilde{M}$. Analogamente ao que fizemos para a primeira forma fundamental, podemos obter os coeficientes de $II_{\mathbf{v}}$ com relação à base $\{\partial_x, \partial_y\}$:

$$\begin{aligned} l_{\mathbf{v}}(q) &= \langle \pi_2(f_{xx}), \mathbf{v} \rangle(\varphi(q)); \\ m_{\mathbf{v}}(q) &= \langle \pi_2(f_{xy}), \mathbf{v} \rangle(\varphi(q)); \\ n_{\mathbf{v}}(q) &= \langle \pi_2(f_{yy}), \mathbf{v} \rangle(\varphi(q)). \end{aligned}$$

Dado $\mathbf{u} = \alpha\partial_x + \beta\partial_y \in T_q\tilde{M}$ temos:

$$\begin{aligned} II_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) &= \langle II(\mathbf{u}, \mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle \\ &= \langle II(\alpha\partial_x + \beta\partial_y, \alpha\partial_x + \beta\partial_y), \mathbf{v} \rangle \\ &= \langle \alpha^2 II(\partial_x, \partial_x) + 2\alpha\beta II(\partial_x, \partial_y) + \beta^2 II(\partial_y, \partial_y), \mathbf{v} \rangle \\ &= \alpha^2 l_{\mathbf{v}}(q) + 2\alpha\beta m_{\mathbf{v}}(q) + \beta^2 n_{\mathbf{v}}(q). \end{aligned}$$

Fixando um referencial ortonormal $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ para N_pM podemos obter uma expressão para a segunda forma fundamental II em função de $II_{\mathbf{v}_i}$, $i = 1, 2, 3$.

$$\begin{aligned} II(\mathbf{u}, \mathbf{u}) &= II_{\mathbf{v}_1}(\mathbf{u}, \mathbf{u})\mathbf{v}_1 + II_{\mathbf{v}_2}(\mathbf{u}, \mathbf{u})\mathbf{v}_2 + II_{\mathbf{v}_3}(\mathbf{u}, \mathbf{u})\mathbf{v}_3 \\ &= \sum_{i=1}^3 (\alpha^2 l_{\mathbf{v}_i} + 2\alpha\beta m_{\mathbf{v}_i} + \beta^2 n_{\mathbf{v}_i})\mathbf{v}_i. \end{aligned}$$

Podemos escrever os coeficientes da segunda forma fundamental com respeito ao referencial $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ na forma matricial

$$\begin{pmatrix} l_{\mathbf{v}_1} & m_{\mathbf{v}_1} & n_{\mathbf{v}_1} \\ l_{\mathbf{v}_2} & m_{\mathbf{v}_2} & n_{\mathbf{v}_2} \\ l_{\mathbf{v}_3} & m_{\mathbf{v}_3} & n_{\mathbf{v}_3} \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Lema 4.3. A definição da segunda forma fundamental não depende da escolha de cartas locais em \tilde{M} .

Demonstração. Tome M, \tilde{M} como anteriormente e seja $\bar{\varphi} : \bar{U} \subset \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^2$ outra carta local de \tilde{M} tal que $q \in \bar{U} \cap U$, com coordenadas locais (u, v) e denotemos por $\bar{f} = g \circ \bar{\varphi}^{-1}$ a parametrização local correspondente de M em p . Uma vez que $f = g \circ \varphi^{-1}$, como em (4.1), obtemos $\bar{f} = f \circ \phi$, onde $\phi : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$. Calculando as derivadas parciais de \bar{f} , obtemos: $\bar{f}_u = f_x x_u + f_y y_u$ e $\bar{f}_v = f_x x_v + f_y y_v$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} \bar{f}_{uu} &= f_x x_{uu} + f_y y_{uu} + f_{xx} x_u^2 + 2f_{xy} x_u y_u + f_{yy} y_u^2; \\ \bar{f}_{uv} &= f_x x_{uv} + f_y y_{uv} + f_{xx} x_u x_v + f_{xy} (x_u y_v + x_v y_u) + f_{yy} y_u y_v; \\ \bar{f}_{vv} &= f_x x_{vv} + f_y y_{vv} + f_{xx} x_v^2 + 2f_{xy} x_v y_v + f_{yy} y_v^2. \end{aligned}$$

Projetando em N_pM , obtemos:

$$\begin{aligned}\pi_2(\bar{f}_{uu}) &= \pi_2(f_{xx}x_u^2 + 2f_{xy}x_u y_u + f_{yy}y_u^2); \\ \pi_2(\bar{f}_{uv}) &= \pi_2(f_{xx}x_u x_v + f_{xy}(x_u y_v + x_v y_u) + f_{yy}y_u y_v) \\ \pi_2(\bar{f}_{vv}) &= \pi_2(f_{xx}x_v^2 + 2f_{xy}x_v y_v + f_{yy}y_v^2).\end{aligned}$$

Note que os vetores $\pi_2(\bar{f}_{uu})$, $\pi_2(\bar{f}_{uv})$, $\pi_2(\bar{f}_{vv})$ e $\pi_2(f_{xx})$, $\pi_2(f_{xy})$, $\pi_2(f_{yy})$ estão relacionados pelas equações de mudança de base em uma aplicação bilinear simétrica com relação à matriz

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$$

que nada mais é que a matriz mudança de base de $\{\partial_x, \partial_y\}$ para $\{\partial_u, \partial_v\}$ em $T_q\tilde{M}$. Segue o resultado. \square

A próxima definição apresentada é a da parábola de curvatura. Este objeto foi primeiramente definido em (MARTINS; NUÑO BALLESTEROS, 2015) como o locus de curvatura de superfícies singulares de coposto 1 em \mathbb{R}^3 .

Definição 4.4. Seja C_q o conjunto de vetores unitários de $T_q\tilde{M}$ e defina $\eta_q : C_q \rightarrow N_pM$ a aplicação dada por $\eta_q(\mathbf{u}) = II(\mathbf{u}, \mathbf{u})$. A *parábola de curvatura*, Δ_p , de M em p é dada por $\Delta_p = \eta_q(C_q)$.

Como consequência do Lema 4.3, concluímos que a parábola de curvatura não depende da escolha de coordenadas locais na superfície \tilde{M} . No entanto, ela depende da aplicação g de coposto 1 que parametriza $M \subset \mathbb{R}^4$.

Exemplo 4.5. Considere o germe $f(x, y) = (x, xy, y^2, y^{2k+1})$, com $k \geq 1$. Seja $M = f(\mathbb{R}^2)$ e $p = (0, 0, 0, 0)$. Tomemos $\tilde{M} = \mathbb{R}^2$, $\varphi = id$, $g = f$ e $q = (0, 0)$. Nessas condições, $f_x(0, 0) = (1, 0, 0, 0)$ e $f_y(0, 0) = (0, 0, 0, 0)$. Logo, os coeficientes da primeira forma fundamental são: $E(q) = 1$, $F(q) = G(q) = 0$. Se $\mathbf{u} = (\alpha, \beta) \in T_q\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^2$, temos $I(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \alpha^2$. Consequentemente, $C_q = \{(\pm 1, \beta); \beta \in \mathbb{R}\}$. A reta tangente e o hiperplano normal à M em p são dados por $[(1, 0, 0, 0)]$ e $[(0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)]$, respectivamente, ou seja, o eixo X e o hiperplano YZW . Uma vez que $f_{xx}(0, 0) = (0, 0, 0, 0)$, $f_{xy}(0, 0) = (0, 1, 0, 0)$ e $f_{yy}(0, 0) = (0, 0, 2, 0)$, a matriz dos coeficientes da segunda forma fundamental de M em p é dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e, tomando novamente $\mathbf{u} = (\alpha, \beta) \in T_q\mathbb{R}^2$, $II(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = (2\alpha\beta, 2\beta^2, 0)$. Portanto, a parábola de curvatura Δ_p de M em p é uma parábola não degenerada cujo traço está contido em N_pM e que pode ser parametrizada por $\eta(y) = (0, 2y, 2y^2, 0)$.

Observação 4.6. Seja $g : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$ um germe de coposto 1 em q , como no começo dessa seção. Podemos escolher um sistema de coordenadas ϕ e fazer rotações em \mathbb{R}^4 de modo que

$$f(x, y) = g \circ \phi^{-1}(x, y) = (x, f_2(x, y), f_3(x, y), f_4(x, y)),$$

onde $\frac{\partial f_i}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f_i}{\partial y}(0, 0) = 0$, para $i = 2, 3, 4$. Da pseudométrica definida pela primeira forma fundamental em (4.2), se $\mathbf{u} = (\alpha, \beta) \in C_q$, $I(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 1$ implica que $\alpha = \pm 1$ e $\beta \in \mathbb{R}$. Dessa forma, C_q é um par de retas paralelas à direção ∂_y em $T_q\tilde{M}$. Além disso, fixando um referencial ortonormal $\{v_1, v_2, v_3\}$ de N_pM , podemos parametrizar Δ_p por

$$\eta(y) = \sum_{i=1}^3 (l_{v_i} + 2m_{v_i}y + n_{v_i}y^2)v_i, \quad (4.3)$$

utilizando a equação (4.1). É importante também notar que Δ_p é uma curva plana contida em N_pM . De fato, uma vez que pela sua própria definição a parábola de curvatura é uma curva cujo traço está contido em N_pM , podemos considerá-la como uma curva contida em um espaço tridimensional. Sabemos que a torção de uma curva em \mathbb{R}^3 é dada por

$$\tau(y) = \frac{\langle \eta'(y) \times \eta'''(y), \eta''(y) \rangle}{|\eta'(y) \times \eta''(y)|^2},$$

(CARMO, 1976; KLINGENBERG, 1978) e assim, pela parametrização de Δ_p , é imediato que $\tau \equiv 0$ e portanto, a parábola de curvatura é uma curva plana, quando sua curvatura é não nula.

Os autores, em (MENDES; NUÑO BALLESTEROS, 2016), mostraram que existem quatro \mathcal{A}^2 órbitas em $\Sigma^1 J^2(2, 4)$. Vamos mostrar, em breve, que a parábola de curvatura é um invariante completo para esta classificação. Para tanto, reproduziremos a prova dessa classificação, pois ela apresenta critérios para a distinção de cada uma das órbitas, critérios estes que serão necessários para demonstrar nosso resultado.

Lema 4.7. (MENDES; NUÑO BALLESTEROS, 2016, p. 235) Existem quatro \mathcal{A}^2 órbitas em $\Sigma^1 J^2(2, 4)$:

$$(x, xy, y^2, 0), (x, y^2, 0, 0), (x, xy, 0, 0) \text{ e } (x, 0, 0, 0).$$

Demonstração. Considere o 2-jato

$$j^2 f(0) = (x, a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2, b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2, c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2).$$

Utilizando a seguinte mudança de coordenadas na meta que remove os termos com x^2 das últimas três coordenadas,

$$\tilde{X} = X, \tilde{Y} = Y - a_{20}X^2, \tilde{Z} = Z - b_{20}X^2 \text{ e } \tilde{W} = W - c_{20}X^2,$$

obtemos

$$j^2 f(0) \sim (x, a_{11}xy + a_{02}y^2, b_{11}xy + b_{02}y^2, c_{11}xy + c_{02}y^2).$$

Tomando a mudança de coordenadas na meta

$$\bar{X} = X, \bar{Y} = Y - \frac{a_{02}}{b_{02}}Z, \bar{Z} = Z - \frac{b_{11}}{a_{11}}Y, \text{ e } \bar{W} = W,$$

temos

$$j^2 f(0) \sim \left(x, \frac{a_{11}b_{02} - a_{02}b_{11}}{b_{02}}xy, \frac{a_{11}b_{02} - a_{02}b_{11}}{a_{11}}y^2, c_{11}xy + c_{02}y^2 \right).$$

Note que poderíamos ter feito a mudança utilizando quaisquer duas das três últimas coordenadas do jato. O resultado seria análogo e as condições também as seriam. Dessa forma, sem perda de generalidade utilizaremos a segunda e a terceira coordenadas. Se $a_{11}b_{02} - a_{02}b_{11} \neq 0$ (ou $a_{11}c_{02} - a_{02}c_{11} \neq 0$ ou ainda $c_{11}b_{02} - c_{02}b_{11} \neq 0$, para os outros casos), então, com simples mudanças na meta, teríamos $j^2 f(0) \sim (x, xy, y^2, c_{11}xy + c_{02}y^2)$. Por fim, com a mudança

$$X' = X, Y' = Y, Z' = Z, \text{ e } W' = W - c_{11}Y - c_{02}Z,$$

temos $j^2 f(0) \sim (x, xy, y^2, 0)$. Por outro lado, se $a_{11}b_{02} - a_{02}b_{11} = 0$, as coordenadas Y e Z são linearmente dependentes, ou seja, existem reais $A, B \neq 0$ tais que $AY + BZ = 0$. Assim, tomemos

$$\tilde{X} = X, \tilde{Y} = Y, \tilde{Z} = AY + BZ \text{ e } \tilde{W} = W$$

e com uma rotação na meta obtemos $j^2 f(0) \sim (x, a_{11}xy + a_{02}y^2, c_{11}xy + c_{02}y^2, 0)$. Prosseguindo com a análise, se $a_{11}c_{02} - a_{02}c_{11} \neq 0$, com uma mudança na meta como feito anteriormente, $j^2 f(0) \sim (x, xy, y^2, 0)$. No entanto, se $a_{11}c_{02} - a_{02}c_{11} = 0$, podemos tomar $c_{02} = c_{11} = 0$ e assim, $j^2 f(0) \sim (x, a_{11}xy + a_{02}y^2, 0, 0)$. Temos as seguintes possibilidades:

(i) Se $a_{02} \neq 0$ e $a_{11} \in \mathbb{R}$, $j^2 f(0) \sim (x, y^2, 0, 0)$. De fato,

$$j^2 f(0) \sim (x, a_{11}xy + a_{02}y^2, 0, 0) = \left(x, \left(\frac{a_{11}}{2\sqrt{a_{02}}}x + \sqrt{a_{02}}y \right)^2 - \frac{a_{11}^2}{4a_{02}}x^2, 0, 0 \right).$$

Da mesma forma como na primeira mudança feita na demonstração, eliminamos o termo $\frac{a_{11}^2}{4a_{02}}x^2$, e por fim renomeamos $y' = \frac{a_{11}}{2\sqrt{a_{02}}}x + \sqrt{a_{02}}y$. Logo, $j^2 f(0) \sim (x, y^2, 0, 0)$.

(ii) Se $a_{02} = 0$ e $a_{11} \neq 0$, segue diretamente que $j^2 f(0) \sim (x, xy, 0, 0)$.

(iii) Se $a_{02} = a_{11} = 0$, $j^2 f(0) \sim (x, 0, 0, 0)$.

Portanto, obtivemos as quatro \mathcal{A}^2 órbitas em $\Sigma^1 J^2(2, 4)$. □

Observação 4.8. Dado o 2-jato,

$$j^2 f(0) = (x, a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2, b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2, c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2),$$

de um germe de coposto 1, $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$, listamos na Tabela 5 condições sobre seus coeficientes para que ele seja equivalente a uma das quatro formas normais obtidas no Lema 4.7.

Tabela 5 – Condições sobre os coeficientes do 2-jato para a \mathcal{A}^2 -classificação.

\mathcal{A}^2 -forma normal	Condições
$(x, xy, y^2, 0)$	$\gamma_1 = a_{11}b_{02} - a_{02}b_{11} \neq 0$ ou $\gamma_2 = a_{11}c_{02} - a_{02}c_{11} \neq 0$ ou $\gamma_3 = c_{11}b_{02} - c_{02}b_{11} \neq 0$
$(x, y^2, 0, 0)$	$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$ e $a_{02}^2 + b_{02}^2 + c_{02}^2 > 0$
$(x, xy, 0, 0)$	$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$, $a_{02} = b_{02} = c_{02} = 0$ e $a_{11}^2 + b_{11}^2 + c_{11}^2 > 0$
$(x, 0, 0, 0)$	$a_{11} = a_{02} = b_{11} = b_{02} = c_{11} = c_{02} = 0$.

O próximo teorema mostra que a parábola de curvatura, Δ_p , é um invariante completo para a classificação obtida no Lema 4.7. Isso significa que a parábola de curvatura distingue completamente cada uma das quatro \mathcal{A}^2 -órbitas.

Teorema 4.9. Seja $M \subset \mathbb{R}^4$ uma superfície com uma singularidade de coposto 1 em $p \in M$. Vamos assumir $p = (0, 0, 0, 0)$ e denotar por $j^2 f(0)$ o 2-jato de uma parametrização local $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$ de M . São válidas as seguintes equivalências:

- (i) Δ_p é uma parábola não degenerada $\Leftrightarrow j^2 f(0) \sim_{\mathcal{A}^2} (x, xy, y^2, 0)$;
- (ii) Δ_p é uma semirreta $\Leftrightarrow j^2 f(0) \sim_{\mathcal{A}^2} (x, y^2, 0, 0)$;
- (iii) Δ_p é uma reta $\Leftrightarrow j^2 f(0) \sim_{\mathcal{A}^2} (x, xy, 0, 0)$;
- (iv) Δ_p é um ponto $\Leftrightarrow j^2 f(0) \sim_{\mathcal{A}^2} (x, 0, 0, 0)$.

Demonstração. Vamos assumir, sem perda de generalidade, que

$$j^2 f(0) = \left(x, \frac{1}{2}(a_{20}x^2 + 2a_{11}xy + a_{02}y^2), \frac{1}{2}(b_{20}x^2 + 2b_{11}xy + b_{02}y^2), \frac{1}{2}(c_{20}x^2 + 2c_{11}xy + c_{02}y^2) \right)$$

e vamos denotar a base de \mathbb{R}^4 por $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$. Dessa forma, $T_p M = [\mathbf{e}_1]$ e $N_p M = [\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4]$. Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(j^2 f(0))}{\partial x} &= (1, a_{20}x + a_{11}y, b_{20}x + b_{11}y, c_{20}x + c_{11}y) \\ \frac{\partial(j^2 f(0))}{\partial y} &= (0, a_{11}x + a_{02}y, b_{11}x + b_{02}y, c_{11}x + c_{02}y) \\ \frac{\partial^2(j^2 f(0))}{\partial x^2} &= (0, a_{20}, b_{20}, c_{20}) & \frac{\partial^2(j^2 f(0))}{\partial x \partial y} &= (0, a_{11}, b_{11}, c_{11}) \\ \frac{\partial^2(j^2 f(0))}{\partial y^2} &= (0, a_{02}, b_{02}, c_{02}). \end{aligned}$$

Logo, a matriz dos coeficientes da segunda forma fundamental fica:

$$\begin{pmatrix} l_{\mathbf{e}_2} & m_{\mathbf{e}_2} & n_{\mathbf{e}_2} \\ l_{\mathbf{e}_3} & m_{\mathbf{e}_3} & n_{\mathbf{e}_3} \\ l_{\mathbf{e}_4} & m_{\mathbf{e}_4} & n_{\mathbf{e}_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{20} & a_{11} & a_{02} \\ b_{20} & b_{11} & b_{02} \\ c_{20} & c_{11} & c_{02} \end{pmatrix}.$$

Vamos considerar η como uma curva em um espaço de dimensão 3, N_pM , parametrizada por

$$\eta(y) = (0, a_{20} + 2a_{11}y + a_{02}y^2, b_{20} + 2b_{11}y + b_{02}y^2, c_{20} + 2c_{11}y + c_{02}y^2).$$

A curvatura de η é dada por

$$\kappa(y) = \frac{|\eta'(y) \times \eta''(y)|}{|\eta'(y)|^3},$$

ou seja, a curvatura é identicamente nula se, e somente se, o vetor $\eta'(y) \times \eta''(y)$ é o vetor nulo (ver (CARMO, 1976)). Uma vez dada a parametrização de η acima, temos:

$$\eta'(y) = (0, 2a_{11} + 2a_{02}y, 2b_{11} + 2b_{02}y, 2c_{11} + 2c_{02}y) \text{ e } \eta''(y) = (0, 2a_{02}, 2b_{02}, 2c_{02})$$

e dessa forma,

$$\eta'(y) \times \eta''(y) = 4(c_{02}b_{11} - b_{02}c_{11}, a_{02}c_{11} - c_{02}a_{11}, b_{02}a_{11} - a_{02}b_{11}).$$

Portanto, a parábola de curvatura Δ_p se degenera se, e somente se,

$$c_{02}b_{11} - b_{02}c_{11} = a_{02}c_{11} - c_{02}a_{11} = b_{02}a_{11} - a_{02}b_{11} = 0,$$

ou de forma equivalente, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$ (ver Observação 4.8). Concluímos assim o primeiro caso. Os casos restantes seguem da comparação imediata da Observação 4.8 e da parametrização de Δ_p dada acima. \square

Exemplo 4.10. Sabemos do estudo de cônicas, que uma parábola pode ser obtida como o limite de uma sequência de elipses onde um foco é mantido fixo e o outro pode se mover para uma distância cada vez maior do foco em uma direção. Em outras palavras, uma parábola pode ser considerada a seção do segmento de uma elipse que possui um foco no infinito. Consequentemente, é natural perguntar se dada a parábola de curvatura em um ponto singular de coposto 1 de uma superfície $M \subset \mathbb{R}^4$, podemos obtê-la como limite de uma sequência de elipses de curvatura em pontos regulares. A resposta dessa pergunta é não. Mostraremos aqui um exemplo.

Considere a superfície de coposto 1 na origem $p = (0, 0, 0, 0)$, $M \subset \mathbb{R}^4$ localmente parametrizada por $f(x, y) = (x, xy, y^2, y^3)$. Sua parábola de curvatura Δ_p é uma parábola não degenerada que pode ser parametrizada por $\eta(y) = (0, 2y, 2y^2, 0)$, contida no plano YZ . Uma vez que a singularidade de M é isolada, sabemos que em uma vizinhança suficientemente pequena de $p \in M$ somente temos pontos regulares. Dessa forma, para cada ponto \bar{p} nesta vizinhança temos uma elipse de curvatura, como vimos no Capítulo 2.

Seja $(x, y) \neq (0, 0)$ um ponto qualquer suficientemente próximo da origem na fonte. Podemos encontrar uma parametrização para a elipse de curvatura em $\bar{p} = f(x, y)$. Para tanto, calculamos um referencial ortonormal $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ de \mathbb{R}^4 em \bar{p} . Sabemos, pelo processo de ortonormalização de Gram-Schmidt, que os vetores

$$w_1 = \frac{f_x}{|f_x|} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}(1, y, 0, 0)$$

e

$$w_2 = \frac{f_y - \langle \frac{f_x}{|f_x|}, f_y \rangle \frac{f_x}{|f_x|}}{|f_y - \langle \frac{f_x}{|f_x|}, f_y \rangle \frac{f_x}{|f_x|}|} = \frac{(-xy, x, 2y + 2y^3, 3y^2 + 3y^4)}{\sqrt{x^2y^2 + x^2 + 4y^2 + 22y^6 + 17y^4 + 9y^8}}$$

formam uma base ortonormal para $T_{\bar{p}}M$. A fim de completar o referencial ortonormal, tomamos

$$w_3 = \frac{(0, 0, -3y, 2)}{\sqrt{9y^2 + 4}}$$

e

$$w_4 = \frac{(9y^6 + 13y^4 + 4y^2, -9y^5 - 13y^3 - 4y, 2x(1 + y^2), 3xy(1 + y^2))}{\sqrt{(y^2 + 1)^2(9y^4 + 4)(x^2 + 9y^6 + 13y^4 + 4y^2)}}.$$

A matriz da segunda forma fundamental de M em \bar{p} é dada por

$$\begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{pmatrix},$$

de modo que

$$\begin{aligned} l_1 &= \langle f_{xx}(x, y), w_3 \rangle = 0; \\ m_1 &= \langle f_{xy}(x, y), w_3 \rangle = 0; \\ n_1 &= \langle f_{yy}(x, y), w_3 \rangle = \frac{6y}{\sqrt{9y^2 + 4}} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} l_2 &= \langle f_{xx}(x, y), w_4 \rangle = 0; \\ m_1 &= \langle f_{xy}(x, y), w_4 \rangle = \frac{-y(9y^2 + 4)}{\sqrt{(9y^4 + 4)(x^2 + 9y^6 + 13y^4 + 4y^2)}}; \\ n_1 &= \langle f_{yy}(x, y), w_4 \rangle = \frac{2x(2 + 9y^2)}{\sqrt{(9y^4 + 4)(x^2 + 9y^6 + 13y^4 + 4y^2)}}. \end{aligned}$$

Portanto, podemos parametrizar a elipse de curvatura por

$$\begin{aligned} \eta(\theta) &= \frac{6y}{\sqrt{9y^2 + 4}} \text{sen}^2 \theta w_3 \\ &+ \left(\frac{-2y(9y^2 + 4)}{\sqrt{(9y^4 + 4)(x^2 + 9y^6 + 13y^4 + 4y^2)}} \text{sen} \theta \cos \theta + \frac{2x(2 + 9y^2)}{\sqrt{(9y^4 + 4)(x^2 + 9y^6 + 13y^4 + 4y^2)}} \text{sen}^2 \theta \right) w_4. \end{aligned}$$

Substituindo as expressões dos vetores normais w_3 e w_4 , obtemos:

$$\begin{aligned} \eta(\theta) &= \left(0, 0, -\frac{18y^2}{9y^2 + 4} \text{sen}^2 \theta, \frac{12y}{9y^2 + 4} \text{sen}^2 \theta \right) \\ &+ \frac{y(9y^2 + 4) \text{sen} \theta \cos \theta - x(9y^2 + 2) \text{sen}^2 \theta}{(9y^2 + 4)(x^2 + 9y^6 + 13y^4 + 4y^2)} (-2y^2(9y^2 + 4), 2y(9y^2 + 4), -4x, -6xy) \end{aligned}$$

Seja $\gamma: (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ um germe de curva suave dado por $\gamma(t) = (at^\alpha + o(\alpha + 1), bt^\beta + o(\beta + 1))$, com $ab \neq 0$. Vamos calcular as elipses de curvatura de M em pontos regulares ao longo dos caminhos dados pela imagem dessas curvas e também o seu limite quando $t \rightarrow 0$. Vamos separar esses cálculos em casos.

(i) Quando $\beta > \alpha$. Neste caso, obtemos:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \eta(\theta) &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[\left(0, 0, -\frac{18b^2t^{2\beta}}{9b^2t^{2\beta} + 4} \text{sen}^2 \theta, \frac{12bt^\beta}{9b^2t^{2\beta} + 4} \text{sen}^2 \theta \right) \right. \\ &+ \frac{bt^\beta(9b^2t^{2\beta} + 4) \text{sen} \theta \cos \theta - at^\alpha(9b^2t^{2\beta} + 2) \text{sen}^2 \theta}{(9b^2t^{2\beta} + 4)(a^2t^{2\alpha} + 9b^6t^{6\beta} + 13b^4t^{4\beta} + 4b^2t^{2\beta})} (-2b^2t^{2\beta}(9t^{2\alpha}t^{2\beta} + 4), 2bt^\beta(9b^2t^{2\beta} + 4), -4at^\alpha, -6abt^{\alpha+\beta}) \left. \right] \\ &= (0, 0, 2\text{sen}^2 \theta, 0). \end{aligned}$$

Portanto o limite das elipses de curvatura é dado por $\eta(\theta) = (0, 0, 2\text{sen}^2\theta, 0)$, um segmento contido no eixo Z , unindo os pontos $(0, 0)$ e $(0, 2)$.

(ii) Quando $\alpha > \beta$, obtemos

$$\lim_{t \rightarrow 0} \eta(\theta) = (0, 2\text{sen}\theta \cos\theta, 0, 0),$$

que também é um segmento, mas desta vez contido no eixo Y , unindo os pontos $(-1, 0)$ e $(2, 0)$.

(iii) Por fim, temos o caso $\alpha = \beta$. Aqui, no limite obtemos uma família de segmentos

$$\lim_{t \rightarrow 0} \eta(\theta) = \left(0, \frac{4b(2b\text{sen}\theta \cos\theta - a\text{sen}\theta)}{a^2 + 4b^2}, \frac{-2a(2b\text{sen}\theta \cos\theta - a\text{sen}\theta)}{a^2 + 4b^2}, 0 \right),$$

em a e b . Na Figura 2, ilustramos várias possibilidades para os parâmetros a e b , além de também representarmos a parábola de curvatura da superfície no ponto singular.

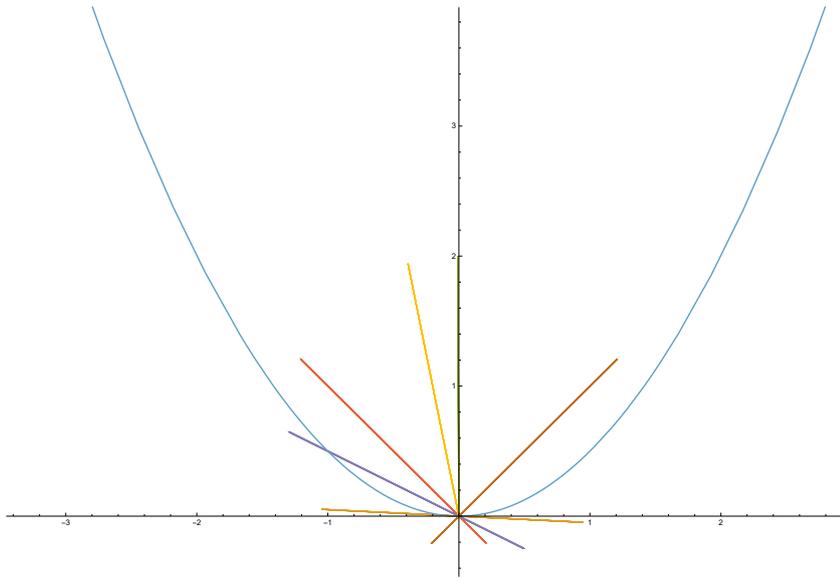


Figura 2 – Segmentos - caso $\alpha = \beta$.

Concluimos então que a parábola de curvatura de uma superfície singular de coposto 1 em \mathbb{R}^4 não pode ser obtida como limite de elipses de curvatura de pontos regulares em uma vizinhança de um ponto singular.

Lema 4.11. Seja $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$ um germe de aplicação de coposto 1. Usando mudanças de coordenadas suaves na fonte e isometrias na meta, podemos reduzir f a forma:

- (i) $(x, y) \mapsto (x, xy + p(x, y), b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + q(x, y), c_{20}x^2 + r(x, y))$, se $j^2 f(0) \sim_{\mathcal{A}^2} (x, xy, y^2, 0)$;
- (ii) $(x, y) \mapsto (x, a_{20}x^2 + y^2 + p(x, y), b_{20}x^2 + q(x, y), r(x, y))$, se $j^2 f(0) \sim_{\mathcal{A}^2} (x, y^2, 0, 0)$;

(iii) $(x, y) \mapsto (x, xy + p(x, y), b_{20}x^2 + q(x, y), r(x, y))$, se $j^2 f(0) \sim_{\mathcal{A}^2} (x, xy, 0, 0)$;

(iv) $(x, y) \mapsto (x, p(x, y), b_{20}x^2 + q(x, y), r(x, y))$, se $j^2 f(0) \sim_{\mathcal{A}^2} (x, 0, 0, 0)$,

onde $a_{20}, b_{ij}, c_{20} \in \mathbb{R}$, $b_{02} > 0$ e $p, q, r \in \mathcal{M}_2^3$.

Demonstração. Vamos considerar os casos. Inicialmente, seja f um germe de coposto 1 tal que $j^2 f(0) \sim_{\mathcal{A}^2} (x, xy, y^2, 0)$. Podemos escrever f da seguinte maneira:

$$\left(x, \frac{a_{20}}{2}x^2 + a_{11}xy + \frac{a_{02}}{2}y^2 + o(3), \frac{b_{20}}{2}x^2 + b_{11}xy + \frac{b_{02}}{2}y^2 + o(3), \frac{c_{20}}{2}x^2 + c_{11}xy + \frac{c_{02}}{2}y^2 + o(3) \right),$$

onde $\gamma_1 = a_{11}b_{02} - a_{02}b_{11} \neq 0$ ou $\gamma_2 = a_{11}c_{02} - a_{02}c_{11} \neq 0$ ou $\gamma_3 = c_{11}b_{02} - c_{02}b_{11} \neq 0$ (ver Observação 4.8) e $a_{02}^2 + b_{02}^2 + c_{02}^2 > 0$. Vamos assumir, sem perda de generalidade, $b_{02} \neq 0$. Queremos eliminar os termos de x^2 e y^2 da segunda coordenada.

Para tanto, suponha sem perda de generalidade que $\gamma_1 \neq 0$. Tome o ângulo θ_1 de modo que

$$(\sin \theta_1, \cos \theta_1) = \frac{(a_{02}, b_{02})}{\sqrt{a_{02}^2 + b_{02}^2}},$$

ou seja, o ângulo θ_1 é dado por $\theta_1 = \arctan(\frac{b_{02}}{a_{02}})$. Considere também a rotação em \mathbb{R}^4 dada por

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ 0 & \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e a mudança de coordenadas na fonte

$$\psi(x, y) = \left(x, \frac{1}{\gamma_1} \left(-\frac{1}{2}(a_{20}b_{02} - a_{02}b_{20})x + \sqrt{a_{02}^2 + b_{02}^2}y \right) \right).$$

Dessa forma, obtemos

$$(T_1 \circ g \circ \psi)(x, y) = \left(x, xy + \sum_{i+j=3} \frac{\lambda_{ij}}{i!j!} x^i y^j + o(4), \sum_{i+j=2} \frac{\mu_{ij}}{i!j!} x^i y^j + o(3), \sum_{i+j=2} \frac{\sigma_{ij}}{i!j!} x^i y^j + o(3) \right),$$

para constantes λ_{ij} , μ_{ij} e σ_{ij} . Logo, podemos escrever

$$f \sim (x, xy + p(x, y), a'x^2 + b'xy + c'y^2 + q'(x, y), a''x^2 + b''xy + c''y^2 + r'(x, y)),$$

onde $p, q', r' \in \mathcal{M}_2^3$. Uma rotação nos eixos ZW anula o termo c'' e assim,

$$f \sim (x, xy + p(x, y), ax^2 + bxy + cy^2 + q(x, y), \tilde{a}x^2 + \tilde{b}xy + r(x, y)),$$

com $p, q, r \in \mathcal{M}_2^3$. Com uma última rotação T_2 dada por

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\cos \theta_2 & 0 & \sin \theta_2 \end{pmatrix}$$

de um ângulo θ_2 tal que $(\sin \theta_2, \cos \theta_2) = \frac{(1, \tilde{b})}{\sqrt{1+\tilde{b}^2}}$ e uma mudança na fonte dada por $\bar{\varphi}(x, y) = (x, y/(\sin \theta_2 + \tilde{b} \cos \theta_2))$, obtemos

$$f \sim (x, xy + \tilde{a} \cos \theta_2 x^2 + \bar{p}(x, y), ax^2 + bxy + cy^2 + q(x, y), \tilde{a}x^2 + \bar{r}(x, y)).$$

A última mudança a ser feita é também na fonte: $\tilde{\psi}(x, y) = (x, y - \tilde{a} \cos \theta_2 x)$. Esta última finaliza este caso e assim a forma normal como no enunciado,

$$(x, y) \mapsto (x, xy + p(x, y), b_{02}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + q(x, y), c_{02}x^2 + r(x, y)),$$

é por fim obtida. Note que podemos assumir $b_{02} > 0$, pois uma vez que este coeficiente é não nulo podemos rotacionar os dois últimos eixos coordenadas do ângulo $\theta_3 = \pi$. Os outros casos são completamente análogos e terão suas demonstrações omitidas. \square

Exemplo 4.12. Para cada forma normal obtida no Lema 4.11, vamos calcular a segunda forma fundamental da superfície correspondente. Sejam $\mathbf{u} = (\alpha_1, \beta_1)$, $\mathbf{v} = (\alpha_2, \beta_2) \in T_q \tilde{M}$.

(i) Para $f(x, y) = (x, xy + p(x, y), b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + q(x, y), c_{20}x^2 + r(x, y))$ temos

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= (1, y + p_x, 2b_{20}x + b_{11}y + q_x, 2c_{20}x + r_x) \\ f_y(x, y) &= (0, x + p_y, b_{11}x + 2b_{02}y + q_y, r_y). \end{aligned}$$

Além disso

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= (0, p_{xx}, 2b_{20} + q_{xx}, 2c_{20} + r_{xx}), \quad f_{xy}(x, y) = (0, 1 + p_{xy}, b_{11} + q_{xy}, r_{xy}) \\ f_{yy}(x, y) &= (0, p_{yy}, 2b_{02} + q_{yy}, r_{yy}), \end{aligned}$$

o que nos garante que

$$II(\partial_x, \partial_x) = (0, 0, 2b_{20}, 2c_{20}), \quad II(\partial_x, \partial_y) = (0, 1, b_{11}, 0) \quad \text{e} \quad II(\partial_y, \partial_y) = (0, 0, 2b_{02}, 0).$$

Dessa forma a expressão da segunda forma fundamental é dada por:

$$\begin{aligned} II(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= II(\alpha_1 \partial_x + \beta_1 \partial_y, \alpha_2 \partial_x + \beta_2 \partial_y) \\ &= \alpha_1 II(\partial_x, \alpha_2 \partial_x + \beta_2 \partial_y) + \beta_1 II(\partial_y, \alpha_2 \partial_x + \beta_2 \partial_y) \\ &= \alpha_1 \alpha_2 II(\partial_x, \partial_x) + \alpha_1 \beta_2 II(\partial_x, \partial_y) + \beta_1 \alpha_2 II(\partial_y, \partial_x) + \beta_1 \beta_2 II(\partial_y, \partial_y) \\ &= \alpha_1 \alpha_2 (0, 0, 2b_{20}, 2c_{20}) + (\alpha \beta_2 + \beta_1 \alpha_2)(0, 1, b_{11}, 0) + \beta_1 \beta_2 (0, 0, 2b_{02}, 0) \\ &= (0, \alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2, 2b_{20} \alpha_1 \alpha_2 + b_{11}(\alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2) + 2b_{02} \beta_1 \beta_2, 2c_{20} \alpha_1 \alpha_2). \end{aligned}$$

(ii) Para $f(x, y) = (x, a_{20}x^2 + y^2 + p(x, y), b_{20}x^2 + q(x, y), r(x, y))$, temos:

$$f_x(x, y) = (1, 2a_{20}x + p_x, 2b_{20}x + q_x, r_x), \quad f_y(x, y) = (0, 2y + p_y, q_y, r_y),$$

as segundas derivadas são dadas por

$$f_{xx}(x, y) = (0, 2a_{20} + p_{xx}, 2b_{20} + q_{xx}, r_{xx}), \quad f_{xy}(x, y) = (0, p_{xy}, q_{xy}, r_{xy})$$

$$f_{yy}(x, y) = (0, 2 + p_{yy}, q_{yy}, r_{yy})$$

e a segunda forma fundamental é

$$II(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (0, 2(a_{20}\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2), 2b_{20}\alpha_1\alpha_2, 0).$$

(iii) Quando $f(x, y) = (x, xy + p(x, y), b_{20}x^2 + q(x, y), r(x, y))$, as derivadas são dadas por:

$$f_x(x, y) = (1, y + p_x, 2b_{20}x + q_x, r_x), \quad f_y(x, y) = (0, 1 + p_y, q_y, r_y)$$

e

$$f_{xx}(x, y) = (0, p_{xx}, 2b_{20} + q_{xx}, r_{xx}), \quad f_{xy}(x, y) = (0, p_{xy}, q_{xy}, r_{xy})$$

$$f_{yy}(x, y) = (0, p_{yy}, q_{yy}, r_{yy}).$$

A segunda forma fundamental é dada por

$$II(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (0, \alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2, 2b_{20}\alpha_1\alpha_2, 0).$$

(iv) Por fim, quando $f(x, y) = (x, p(x, y), b_{20}x^2 + q(x, y), r(x, y))$ a segunda forma fundamental é dada por

$$II(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (0, 0, 2b_{20}\alpha_1\alpha_2, 0)$$

e os cálculos são análogos aos feitos acima.

Para todos os germes considerados neste exemplo temos $a_{20}, b_{ij}, c_{20} \in \mathbb{R}$ e $p, q, r \in \mathcal{M}_2^3$.

O próximo resultado é o mais importante desta seção. Nele mostramos que a parábola de curvatura codifica toda a geometria de segunda ordem de uma superfície de coposto 1 em \mathbb{R}^4 no ponto singular.

Teorema 4.13. Sejam $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^4$ duas superfícies com singularidades de coposto 1 em $p_1 \in M_1, p_2 \in M_2$ e parametrizadas por f e g , respectivamente. Os 2-jatos $j^2f(0)$ e $j^2g(0) \in \Sigma^1 J^2(2, 4)$ são equivalentes via ação de $\mathcal{R}^2 \times \mathcal{O}(4)$ se, e somente se, existe uma isometria linear $\varphi : N_{p_1}M_1 \rightarrow N_{p_2}M_2$ tal que $\varphi(\Delta_{p_1}M_1) = \Delta_{p_2}M_2$.

Demonstração. Vamos assumir que $j^2f(0)$ e $j^2g(0)$ estão na mesma \mathcal{A}^2 -órbita $(x, xy, y^2, 0)$. Pelo Lema 4.11, podemos reduzi-los a:

$$j^2f(0) = (x, xy, ax^2 + bxy + cy^2, dx^2) \text{ e } j^2g(0) = (x, xy, \tilde{a}x^2 + \tilde{b}xy + \tilde{c}y^2, \tilde{d}x^2).$$

Vamos denotar as coordenadas em \mathbb{R}^4 por (X, Y, Z, W) . Ambos os hiperplanos normais $N_{p_1}M_1$ e $N_{p_2}M_2$ coincidem com o hiperplano YZW . Da Observação 4.6, as parábolas de curvatura $\Delta_{p_1}M_1$ e $\Delta_{p_2}M_2$ podem ser parametrizadas, respectivamente, por:

$$\eta_1(y) = (0, 2y, 2a + 2by + 2cy^2, 2d) \text{ e } \eta_2(y) = (0, 2y, 2\tilde{a} + 2\tilde{b}y + 2\tilde{c}y^2, 2\tilde{d}).$$

Suponha, inicialmente, que $j^2f(0) \sim j^2g(0)$ via ação de $\mathcal{R}^2 \times \mathcal{O}(4)$, ou seja, existe $(\psi, \phi) \in \mathcal{R}^2 \times \mathcal{O}(4)$ tal que $\phi \circ j^2f(0) \circ \psi = j^2g(0)$. Podemos assumir que ψ é uma aplicação linear e escrever as matrizes de ψ e ϕ , respectivamente, como:

$$P = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \text{ e } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

satisfazendo $\det(P) \neq 0$ e $AA^t = I_4$, onde I_4 denota a matriz identidade de ordem 4. Note que $\phi \circ j^2f(0) \circ \psi = (h_1, h_2, h_3, h_4)$, com

$$\begin{aligned} h_i &= a_{i1}px + a_{i1}qy + a_{i2}(prx^2 + (ps + qr)xy + qsy^2) + a_{i3}(ap^2 + bpr + cr^2)x^2 \\ &+ a_{i3}(2apq + b(ps + qr) + 2crs)xy + a_{i3}(aq^2 + bqs + cs^2)y^2 + a_{i4}dp^2x^2 \\ &+ 2a_{i4}dpqxy + a_{i4}dq^2y^2, \quad i = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Comparando os termos de $\phi \circ j^2f(0) \circ \psi$ e $j^2g(0)$ obtemos:

$$\begin{aligned} a_{11}p &= 1 & a_{12}p &= a_{13}p = a_{14}p = 0 \\ a_{11}q &= a_{12}q = a_{13}q = a_{14}q = 0 \\ a_{12}pr + a_{13}(ap^2 + bpr + cr^2) + a_{14}dp^2 &= 0 \\ a_{22}pr + a_{23}(ap^2 + bpr + cr^2) + a_{24}dp^2 &= 0 \\ a_{32}pr + a_{33}(ap^2 + bpr + cr^2) + a_{34}dp^2 &= \tilde{a} \\ a_{42}pr + a_{43}(ap^2 + bpr + cr^2) + a_{44}dp^2 &= \tilde{d} \\ a_{12}(ps + qr) + a_{13}(2apq + bps + bqr + 2crs) + 2a_{14}dpq &= 0 \\ a_{22}(ps + qr) + a_{23}(2apq + bps + bqr + 2crs) + 2a_{24}dpq &= 1 \\ a_{32}(ps + qr) + a_{33}(2apq + bps + bqr + 2crs) + 2a_{34}dpq &= \tilde{b} \\ a_{42}(ps + qr) + a_{43}(2apq + bps + bqr + 2crs) + 2a_{44}dpq &= 0 \\ a_{12}qs + a_{13}(aq^2 + bqs + cs^2) + a_{14}dq^2 &= 0 \\ a_{22}qs + a_{23}(aq^2 + bqs + cs^2) + a_{24}dq^2 &= 0 \\ a_{32}qs + a_{33}(aq^2 + bqs + cs^2) + a_{34}dq^2 &= \tilde{c} \\ a_{42}qs + a_{43}(aq^2 + bqs + cs^2) + a_{44}dq^2 &= 0. \end{aligned}$$

Das equações obtidas acima e com as condições $\det(P) = ps - qr \neq 0$ e $AA^t = I_4$, obtemos: $a_{11}, p, s, a_{33} \neq 0$ e $r = q = a_{12} = a_{13} = a_{14} = a_{21} = a_{31} = a_{41} = a_{23} = a_{43} = a_{32} = a_{34} = a_{24} =$

$a_{42} = 0$. Substituindo os valores obtidos, nos restam as seguintes condições:

$$\begin{aligned} a_{11}p &= p^2 = s^2 = 1, \quad \tilde{a} = a_{33}a \\ \tilde{d} &= a_{44}d, \quad a_{22}ps = 1 \\ \tilde{b} &= a_{33}bps, \quad \tilde{c} = a_{33}c \\ a_{11}^2 &= a_{22}^2 = a_{33}^2 = a_{44}^2 = 1. \end{aligned}$$

Vamos mostrar que a isometria linear que buscamos é justamente ϕ . Para tanto, é suficiente provar que as curvas $\phi \circ \eta_1$ e η_2 possuem o mesmo traço, ou seja, existe uma mudança de coordenadas (reparametrização) que leva uma parametrização à outra.

De fato, como a_{22} e ps possuem o mesmo sinal, temos que ou as parametrizações coincidem ou basta considerarmos a mudança $y \mapsto -y$. Portanto, mostramos uma parte da equivalência (para um dos casos). Por outro lado, suponha que exista uma isometria linear $\phi : N_{p_1}M_1 \rightarrow N_{p_2}M_2$ tal que $\phi(\Delta_{p_1}M_1) = \Delta_{p_2}M_2$. Podemos escrever a matriz de ϕ como:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}.$$

Comparando $\phi \circ \eta_1$ e η_2 obtemos as seguintes equações:

$$\begin{aligned} b_{12} &= b_{13} = b_{31} = b_{32} = 0, \quad b_{11} = 1 \\ \tilde{c} &= b_{22}c \\ \tilde{b} &= b_{21} + b_{22}b \\ \tilde{a} &= b_{22}a + b_{23}d \\ \tilde{d} &= b_{33}d. \end{aligned}$$

Uma vez que ϕ é uma isometria linear, a sua matriz B é ortogonal, ou seja, $BB^t = I_3$, onde I_3 denota a matriz identidade de ordem 3. Com mais essa condição, $b_{21} = b_{23} = 0$, $b_{22}^2 = b_{33}^2 = 1$ e $b_{22}b_{33} = 1$.

Por fim, as condições acima se reduzem a:

$$\tilde{a} = \pm a, \quad \tilde{b} = \pm b, \quad \tilde{c} = \pm c, \quad \tilde{d} = \pm d,$$

onde os sinais coincidem, pois o mesmo ocorre com os de b_{22} e b_{33} . Finalmente, estendendo linearmente ϕ de forma canônica para todo \mathbb{R}^4 , verifica-se que $\phi \circ j^2 f(0) = j^2 g(0)$ e, consequentemente, $j^2 f(0) \sim j^2 g(0)$ via $\mathcal{R}^2 \times \mathcal{O}(4)$. Os outros casos são completamente análogos e suas demonstrações serão omitidas. \square

4.2 Propriedades geométricas de segunda ordem

Nesta seção, o objetivo é apresentar aspectos da geometria de segunda ordem de superfícies singulares de coposto 1 em \mathbb{R}^4 no ponto singular. Para tanto, serão apresentados conceitos

de grande interesse, como os de direções assintóticas, binormais e degeneradas, todos estes relacionados com a geometria herdada da segunda forma fundamental. Associaremos a superfície singular em \mathbb{R}^4 uma superfície regular contida em \mathbb{R}^4 . Isso é feito localmente, como explicado a seguir.

Dada uma superfície regular $N \subset \mathbb{R}^5$, consideramos a superfície singular de coposto 1, M em p , obtida pela projeção de N em uma direção tangente, via aplicação

$$\xi : N \subset \mathbb{R}^5 \rightarrow M, x \mapsto \xi(x).$$

A superfície regular $N \subset \mathbb{R}^5$ pode ser tomada localmente como imagem de uma imersão $i : \tilde{M} \rightarrow N \subset \mathbb{R}^5$, onde \tilde{M} é a superfície regular tomada na construção anterior (4.1). Mais ainda, toda superfície singular de coposto 1 em \mathbb{R}^4 pode ser obtida como projeção de uma superfície regular contida em \mathbb{R}^5 em uma direção tangente.

A correspondência local dessas duas superfícies possui uma consequência geométrica muito importante: a superfície singular $M \subset \mathbb{R}^4$ e a superfície regular $N \subset \mathbb{R}^5$ possuem a mesma segunda forma fundamental em p e $\xi^{-1}(p)$, respectivamente. Além do mais, tais como os pontos de N são caracterizados de acordo com o posto da sua matriz da segunda forma fundamental, podemos fazer o mesmo para os pontos singulares de M :

Definição 4.14. Dada uma superfície singular de coposto 1, M em $p \in M$, dizemos que $p \in M_i$ se o posto da matriz da segunda forma fundamental de M em p é i , $i = 0, 1, 2, 3$.

Definição 4.15. O espaço afim de menor dimensão que contém a parábola de curvatura é denotado por $\mathcal{A}ff_p$. O plano denotado por E_p é o espaço vetorial tal que: é paralelo à $\mathcal{A}ff_p$ se Δ_p é uma parábola não degenerada, o plano passando por p que contém $\mathcal{A}ff_p$ se Δ_p é uma semirreta não radial ou uma reta não radial e qualquer plano por p que contenha $\mathcal{A}ff_p$ se Δ_p é uma semirreta radial, uma reta radial ou um ponto (Ver Figura 3).

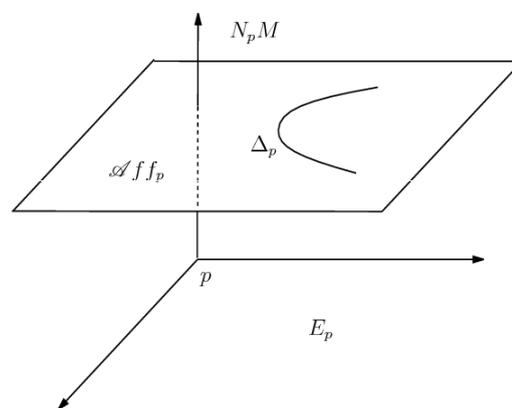


Figura 3 – Os espaços $\mathcal{A}ff_p$ e E_p .

Lema 4.16. Seja p um ponto singular de coposto 1 da superfície $M \subset \mathbb{R}^4$. São válidas as seguintes afirmações:

- (i) Se Δ_p é uma parábola não degenerada, $p \in M_2$ ou $p \in M_3$ de acordo com que $\mathcal{A}ff_p = E_p$ ou não, respectivamente;
- (ii) Se Δ_p é uma semirreta ou uma reta, $p \in M_1$ ou $p \in M_2$ de acordo com que Δ_p é radial ou não, respectivamente;
- (iii) Se Δ_p é um ponto, $p \in M_0$ ou $p \in M_1$ de acordo com que Δ_p é p ou não, respectivamente.

Demonstração. A demonstração segue de cálculos imediatos utilizando as formas normais apresentadas no Lema 4.11. Faremos aqui a prova do primeiro item. Suponha inicialmente que Δ_p seja uma parábola não degenerada. Dessa forma, podemos parametrizar localmente M por $f(x, y) = (x, xy + p(x, y), b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + q(x, y), c_{20}x^2 + r(x, y))$, com $b_{02} > 0$ e $p, q, r \in \mathcal{M}_2^3$. A matriz da segunda forma fundamental de M em p é dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2b_{20} & b_{11} & 2b_{02} \\ 2c_{20} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e seu determinante é $4b_{02}c_{20}$. Dessa forma, $p \in M_3$ se, e somente se, $c_{20} \neq 0$, uma vez que $b_{02} \neq 0$. Note ainda que Δ_p pode ser parametrizada por $\eta(y) = (0, 2y, 2b_{20} + 2b_{11}y + 2b_{02}y^2, 2c_{20})$ (ver Observação 4.6), de modo que $\mathcal{A}ff_p$ é o plano paralelo ao plano YZ passando pelo ponto $(0, 0, 0, 2c_{20})$, enquanto que E_p é o próprio plano YZ . Portanto, $p \in M_3$ se, e somente se, $\mathcal{A}ff_p \neq E_p$. A demonstração dos outros casos é completamente análoga e será omitida. \square

Seja $S \subset \mathbb{R}^4$ a superfície regular obtida localmente pela projeção de $N \subset \mathbb{R}^5$ pela aplicação p no quatro espaço dado por $T_{\xi^{-1}(p)}N \oplus \xi^{-1}(E_p)$ (ver o diagrama a seguir).

$$\begin{array}{ccccc} & & N \subset \mathbb{R}^5 & & \\ & & \downarrow \xi & & \searrow p \\ \mathbb{R}^2 & \xleftarrow{\phi} & \tilde{M} & \xrightarrow{g} & M \subset \mathbb{R}^4 & & S \subset \mathbb{R}^4 \\ & & \searrow f & & & & \end{array}$$

A superfície regular $S \subset \mathbb{R}^4$ será chamada de *superfície regular associada* à superfície singular de coposto 1, $M \subset \mathbb{R}^4$ em $p \in M$. O fato da superfície $S \subset \mathbb{R}^4$ ser regular segue de que a mesma é obtida pela projeção da superfície regular $N \subset \mathbb{R}^5$ em um 4-espaço que contém o seu plano tangente. Não é única a superfície regular em \mathbb{R}^4 associada à superfície singular de coposto 1, $M \subset \mathbb{R}^4$ em $p \in M$. No entanto, se S_1 e S_2 são associadas à M em p , as suas geometrias de segunda ordem coincidem, pois suas segundas formas fundamentais serão equivalentes.

Exemplo 4.17. Seja $M \subset \mathbb{R}^4$ uma superfície singular de coposto 1 em $p \in M$, localmente parametrizada por $f(x, y) = (x, f_2(x, y), f_3(x, y), f_4(x, y))$, com $f_i \in \mathcal{M}_2^2$, para $i = 2, 3, 4$. Podemos tomar a parametrização f de modo que E_p seja o plano dado pelos eixos coordenados YZ . Isso pode ser feito tomando f como uma das formas normais apresentadas no Lema 4.11. Considere também a superfície regular $N \subset \mathbb{R}^5$ parametrizada localmente por $i(x, y) = (x, y, f_2(x, y), f_3(x, y), f_4(x, y))$, de modo que M é obtida via projeção de N na direção tangente $(0, 1)$. Portanto, a superfície regular $S \subset \mathbb{R}^4$ associada é parametrizada localmente por $(x, y) \mapsto (x, y, f_2(x, y), f_3(x, y))$.

Na Definição 4.15, quando um ponto $p \in M$ é um ponto de coposto 1 tal que $p \in M_1 \cup M_0$, vimos que o plano E_p não é único. Consequentemente, a superfície regular $S \subset \mathbb{R}^4$ associada à superfície singular $M \subset \mathbb{R}^4$ de coposto 1 também não é única. O próximo resultado nos mostra que a geometria de segunda ordem de S não vai depender da escolha de E_p .

Proposição 4.18. Seja $p \in M_1 \cup M_0$. A geometria de segunda ordem da superfície regular associada $S \subset \mathbb{R}^4$, obtida como na construção anterior, não depende da escolha do plano $E_p \subset N_p M$.

Demonstração. Suponha $p \in M_1$, ou seja, Δ_p é uma semirreta radial, uma reta radial ou um ponto diferente de p . Podemos assumir sem perda de generalidade que Δ_p esteja contida em um dos eixos coordenados, a saber, o eixo Y . Sejam Γ_1, Γ_2 dois planos distintos passando por p tais que $\Delta_p \subset \Gamma_1, \Gamma_2$. Considerando a superfície regular $N \subset \mathbb{R}^5$ como previamente, obtemos as superfícies regulares $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^4$, dadas pela projeção de N nos quatro espaços $T_{\xi^{-1}(p)}N \oplus \xi^{-1}(\Gamma_1)$ e $T_{\xi^{-1}(p)}N \oplus \xi^{-1}(\Gamma_2)$, respectivamente. Tomando a parametrização local de M em p dada por $f(x, y) = (x, f_2(x, y), f_3(x, y), f_4(x, y))$ tal que $f_2 \in \mathcal{M}_2^2$ e $f_3, f_4 \in \mathcal{M}_2^3$, podemos parametrizar localmente S_1 e S_2 por

$$g_1(x, y) = (x, y, f_2(x, y), \alpha_1 f_2(x, y) + \beta_1 f_3(x, y) + \gamma_1 f_4(x, y))$$

e

$$g_2(x, y) = (x, y, f_2(x, y), \alpha_2 f_2(x, y) + \beta_2 f_3(x, y) + \gamma_2 f_4(x, y)),$$

respectivamente, com $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$. Fazendo rotações na meta, podemos reescrever g_1 e g_2 como

$$\tilde{g}_1(x, y) = (x, y, f_2(x, y) + p_1(x, y), q_1(x, y)) \text{ e } \tilde{g}_2(x, y) = (x, y, f_2(x, y) + p_2(x, y), q_2(x, y)),$$

respectivamente, com $p_i, q_i \in \mathcal{M}_2^3$, $i = 1, 2$. Portanto, as segundas formas fundamentais de S_1 e S_2 são equivalentes por rotações na meta, ou seja, possuem a mesma geometria de segunda ordem. O caso $p \in M_0$ é análogo. \square

As definições de direções assintóticas e binormais apresentadas a seguir foram inspiradas por aquelas dadas para superfícies regulares em \mathbb{R}^4 e para superfícies singulares de coposto 1 em \mathbb{R}^3 . Esses conceitos são definidos usando a segunda forma fundamental e serão também caracterizadas em termos da parábola de curvatura.

Definição 4.19. Uma direção não nula $\mathbf{u} \in T_q\tilde{M}$ é chamada *assintótica* de M em p se existe um vetor não nulo $\mathbf{v} \in E_p$ tal que

$$II_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle II(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathbf{v} \rangle = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in T_q\tilde{M}.$$

Neste caso, dizemos que \mathbf{v} é uma *direção binormal*.

Um vetor qualquer $\mathbf{v} \in N_pM$ satisfazendo a condição da definição acima, $II_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$, é chamado de *direção degenerada*.

Na Definição 4.19, tomamos as direções binormais como vetores pertencentes ao plano E_p . Dessa forma, essas direções estão bem definidas para pontos $p \in M_3 \cup M_2$, ou seja, em pontos em que o plano E_p é único e não depende de uma escolha. Consequentemente, para pontos $p \in M_1 \cup M_0$, é necessário mostrar que a definição de direções assintóticas e binormais independe, em um certo sentido, da escolha de E_p .

Lema 4.20. Quando $p \in M_1 \cup M_0$, a escolha de E_p não muda o número de direções binormais. Além disso, toda direção $\mathbf{u} \in T_q\tilde{M}$ é assintótica.

Demonstração. De fato, se Δ_p é uma semirreta radial ou uma reta radial, as direções degeneradas são aquelas do plano ortogonal à $\mathcal{A}ff_p$. Escolhendo um plano qualquer do feixe de planos contendo Δ_p , a interseção desse plano com o plano ortogonal a $\mathcal{A}ff_p$ nos dá uma direção binormal. Quando Δ_p é um ponto diferente de p , a situação é análoga: basta tomarmos a reta passando por p e Δ_p e a construção é como acima. No entanto, quando $\Delta_p = \{p\}$ todas as direções de E_p são binormais para qualquer escolha de E_p . Para a segunda parte, é suficiente tomarmos $\mathbf{v} \in N_pM$ tal que \mathbf{v} é ortogonal à Δ_p , quando Δ_p é uma semirreta radial ou uma reta radial, ou \mathbf{v} ortogonal à reta contendo p e Δ_p , quando temos um ponto. \square

Observação 4.21. Podemos tomar o referencial ortonormal $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ de N_pM tal que $E_p = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$ e $E_p^\perp = [\mathbf{v}_3]$. Dessa forma, podemos escrever $N_pM = E_p \oplus E_p^\perp$ e a matriz da segunda forma fundamental de M em p é dada por

$$\begin{pmatrix} l_{v_1} & m_{v_1} & n_{v_1} \\ l_{v_2} & m_{v_2} & n_{v_2} \\ l_{v_3} & m_{v_3} & n_{v_3} \end{pmatrix},$$

onde l_{v_i}, m_{v_i} e n_{v_i} , $i = 1, 2, 3$ são os coeficientes da segunda forma fundamental correspondentes ao referencial ortonormal $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

O próximo resultado fornece um critério para determinar se uma direção tangente $\mathbf{u} \in T_q\tilde{M}$ é assintótica ou não.

Lema 4.22. Seja $E_p = [v_1, v_2]$ como na Observação 4.21. A direção tangente não nula $\mathbf{u} = (\alpha, \beta) \in T_q\tilde{M}$ é assintótica se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} \beta^2 & -\alpha\beta & \alpha^2 \\ l_{v_1} & m_{v_1} & n_{v_1} \\ l_{v_2} & m_{v_2} & n_{v_2} \end{vmatrix} = 0.$$

Demonstração. Considere a direção tangente $\mathbf{v} = (\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \in T_q\tilde{M}$ e a direção normal não nula $\mathbf{v} = av_1 + bv_2 \in E_p$. Note que não há necessidade de uma componente na direção v_3 , uma vez que $\mathbf{v} \in E_p$ (ver Observação 4.21). Assim,

$$\begin{aligned} II(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= II(\alpha\partial_x + \beta\partial_y, \bar{\alpha}\partial_x + \bar{\beta}\partial_y) \\ &= \alpha\bar{\alpha}II(\partial_x, \partial_x) + (\alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\alpha})II(\partial_x, \partial_y) + \beta\bar{\beta}II(\partial_y, \partial_y) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} II_V(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \langle II(\mathbf{u}, \mathbf{v}), av_1 + bv_2 \rangle \\ &= a\langle II(\mathbf{u}, \mathbf{v}), v_1 \rangle + b\langle II(\mathbf{u}, \mathbf{v}), v_2 \rangle \\ &= a[\alpha\bar{\alpha}l_{v_1} + (\alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\alpha})m_{v_1} + \beta\bar{\beta}n_{v_1}] \\ &\quad + b[\alpha\bar{\alpha}l_{v_2} + (\alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\alpha})m_{v_2} + \beta\bar{\beta}n_{v_2}]. \end{aligned}$$

Reescrevendo:

$$\begin{aligned} II_V(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \bar{\alpha}[a(\alpha l_{v_1} + \beta m_{v_1}) + b(\alpha l_{v_2} + \beta m_{v_2})] \\ &\quad + \bar{\beta}[a(\alpha m_{v_1} + \beta n_{v_1}) + b(\alpha m_{v_2} + \beta n_{v_2})]. \end{aligned}$$

Para que $\mathbf{u} \in T_q\tilde{M}$ seja uma direção assintótica, precisamos mostrar que $II_V(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$. A última igualdade precisa ser satisfeita para todo vetor $\mathbf{v} = (\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \in T_q\tilde{M}$, então

$$\begin{cases} (\alpha l_{v_1} + \beta m_{v_1})a + (\alpha l_{v_2} + \beta m_{v_2})b = 0 \\ (\alpha m_{v_1} + \beta n_{v_1})a + (\alpha m_{v_2} + \beta n_{v_2})b = 0. \end{cases}$$

Uma vez que $a = b = 0$ não é uma solução, teremos mais soluções se, e somente se,

$$\det \begin{pmatrix} \alpha l_{v_1} + \beta m_{v_1} & \alpha l_{v_2} + \beta m_{v_2} \\ \alpha m_{v_1} + \beta n_{v_1} & \alpha m_{v_2} + \beta n_{v_2} \end{pmatrix} = 0,$$

ou seja,

$$\alpha^2(l_{v_1}m_{v_2} - l_{v_2}m_{v_1}) + \alpha\beta(l_{v_1}n_{v_2} - l_{v_2}n_{v_1}) + \beta^2(m_{v_1}n_{v_2} - m_{v_2}n_{v_1}) = 0,$$

e essa última igualdade é equivalente ao determinante desejado. \square

A parábola de curvatura Δ_p pode ser parametrizada por

$$\eta(y) = \sum_{i=1}^3 (l_{v_i} + 2m_{v_i}y + n_{v_i}y^2)e_{i+1},$$

como vimos em (4.3). Dessa forma, cada parâmetro $y \in \mathbb{R}$ corresponde à uma direção tangente unitária $\mathbf{u} = \partial_x + y\partial_y = (1, y) \in C_q$. Inspirados pela definição dada em (MARTINS;

NUÑO BALLESTEROS, 2015), vamos denotar por y_∞ o parâmetro correspondente à direção tangente nula (segundo a pseudométrica definida pela primeira forma fundamental) dada por $\mathbf{u} = \partial_y = (0, 1)$. Para cada possibilidade de parábola de curvatura Δ_p definimos $\eta(y_\infty)$:

- (i) Quando Δ_p é uma semirreta ou uma reta, $\eta(y_\infty) = \eta'(y_\infty) = \eta'(y)/|\eta'(y)|$, onde $y > 0$ é qualquer parâmetro tal que $\eta'(y) \neq 0$;
- (ii) Quando Δ_p é um ponto v , $\eta(y_\infty) = v$ e $\eta'(y_\infty) = 0$;
- (iii) Quando Δ_p é uma parábola não degenerada, $\eta(y_\infty)$ e $\eta'(y_\infty)$ não estão definidos.

Lema 4.23. Uma direção tangente em $T_q\tilde{M}$ dada por um parâmetro $y \in \mathbb{R} \cup [y_\infty]$ é assintótica se, e somente se, $\pi(\eta(y))$ e $\pi(\eta'(y))$ são colineares (se eles estão definidos), onde $\pi : N_pM \rightarrow E_p$ é a projeção ortogonal canônica.

Demonstração. A prova será dividida em dois casos.

- (i) Considere inicialmente $y \in \mathbb{R}$. Por (4.3) e pela Observação 4.21, temos

$$\eta(y) = \sum_{i=1}^3 (l_{v_i} + 2m_{v_i}y + n_{v_i}y^2)v_i \text{ e } \eta'(y) = \sum_{i=1}^3 (2m_{v_i} + 2n_{v_i}y)v_i,$$

nas condições anteriores. Logo,

$$\pi(\eta(y)) = \sum_{i=1}^2 (l_{v_i} + 2m_{v_i}y + n_{v_i}y^2)v_i \text{ e } \pi(\eta'(y)) = \sum_{i=1}^2 (2m_{v_i} + 2n_{v_i}y)v_i$$

e esses vetores são colineares se, e somente se, $\det(\mathbf{e}, \pi(\eta(y)), \pi(\eta'(y)), v_3) =$

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_{v_1} + 2m_{v_1}y + n_{v_1}y^2 & l_{v_2} + 2m_{v_2}y + n_{v_2}y^2 & 0 \\ 0 & 2m_{v_1} + 2n_{v_1}y & 2m_{v_2} + 2n_{v_2}y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2[(l_{v_1}m_{v_2} - l_{v_2}m_{v_1}) + (l_{v_1}n_{v_2} - l_{v_2}n_{v_1})y + (m_{v_1}n_{v_2} - m_{v_2}n_{v_1})y^2], \end{aligned}$$

onde $\mathbf{e} = (1, 0, 0, 0) \in T_pM$. Uma vez que a igualdade é a mesma que aparece no Lema 4.22 para $\mathbf{u} = (1, y) \in C_q$, o primeiro caso está demonstrado.

- (ii) Por outro lado, quando $y = y_\infty$, $\eta(y)$ e $\eta'(y)$ já são colineares, se estiverem definidos. Portanto, eles são colineares se, e somente se, Δ_p é uma parábola degenerada, o que é equivalente a $m_{v_1}n_{v_2} - m_{v_2}n_{v_1} = 0$ (ver demonstração do Teorema 4.9). Por fim, note que a equação acima é obtida do Lema 4.22 com $\mathbf{u} = (0, 1)$. Não há necessidade de projetar os vetores em E_p , pois $\mathcal{A}ff_p \subset E_p$.

Concluimos assim a demonstração. □

Cada parâmetro $y \in \mathbb{R} \cup [y_\infty]$ correspondente à uma direção assintótica $\mathbf{u} \in T_q\tilde{M}$ também será chamado de *direção assintótica*. Usando essa nomenclatura e o Lema 4.23 podemos determinar o número de direções assintóticas para cada tipo de parábola de curvatura Δ_p (ver Figura 4).

- (i) Quando Δ_p é uma parábola não degenerada, temos 0, 1 ou 2 direções assintóticas dependendo da posição de p : “dentro”, sobre ou “fora” de $\pi(\Delta_p)$, respectivamente, onde $\pi : N_pM \rightarrow E_p$ é a projeção ortogonal canônica, como definida anteriormente;
- (ii) Quando Δ_p é uma semirreta, temos 2 direções assintóticas $\{y_v, y_\infty\}$, onde $\eta(y_v)$ é o vértice de Δ_p , se Δ_p é não radial. Caso contrário, todas direções são assintóticas;
- (iii) Quando Δ_p é uma reta, y_∞ é a única direção assintótica se a reta é não radial e se Δ_p é radial, toda direção é assintótica;
- (iv) Quando Δ_p é um ponto, toda direção $y \in \mathbb{R} \cup [y_\infty]$ é uma direção assintótica.

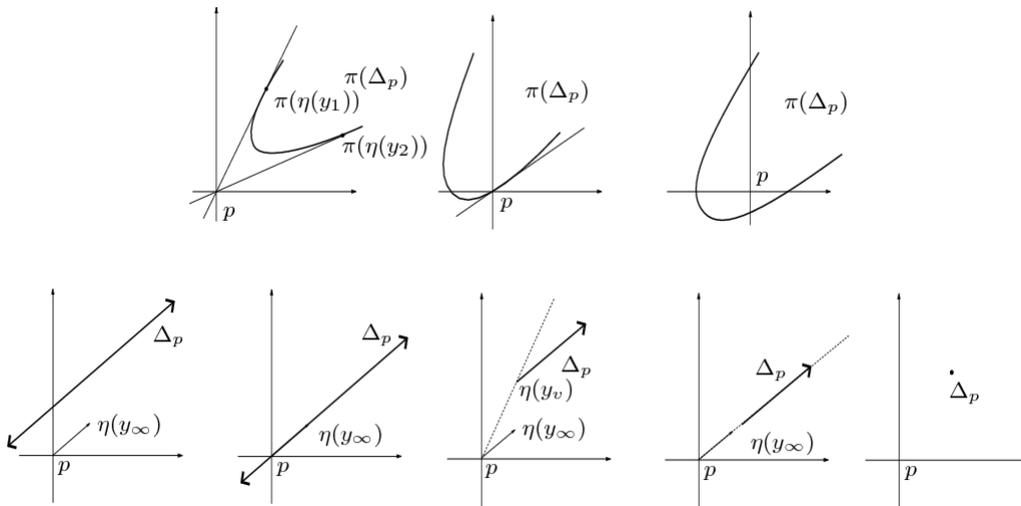


Figura 4 – Direções assintóticas para cada tipo de parábola de curvatura.

Como consequência dos resultados anteriores, temos o seguinte:

Corolário 4.24. Uma direção normal $\mathbf{v} \in E_p$ é uma direção binormal se, e somente se, existe uma direção assintótica $y \in \mathbb{R} \cup [y_\infty]$ tal que \mathbf{v} é ortogonal ao subespaço gerado pelos vetores $\pi(\eta(y))$ e $\pi(\eta'(y))$, onde $\pi : N_pM \rightarrow E_p$ é a projeção ortogonal canônica.

Definição 4.25. Dada uma direção binormal $\mathbf{v} \in E_p$, o hiperplano passando por p e ortogonal à \mathbf{v} é chamado de *hiperplano osculador* de M em p .

O número de direções binormais e de hiperplanos osculadores também depende do tipo de parábola de curvatura. Utilizando o Corolário 4.24, podemos calcular esse número. Se Δ_p

é uma parábola não degenerada, temos 0, 1 ou 2 direções binormais, uma para cada direção assintótica. Quando Δ_p é uma semirreta, existem três possibilidades: se Δ_p é não radial, temos 2 direções binormais. Caso contrário, temos uma se o vértice da parábola não é p (pois em E_p só vai existir uma direção ortogonal à direção assintótica), e se o vértice é p , todas as direções são binormais pois toda direção de E_p será ortogonal à direção nula. Quando Δ_p é uma reta ou um ponto diferente de p , temos uma direção binormal. Finalmente, se $\Delta_p = \{p\}$ todas as direções são binormais.

Definição 4.26. Dada uma superfície $M \subset \mathbb{R}^4$ com uma singularidade de coposto 1 em $p \in M$. O ponto p é chamado:

- (i) *elíptico* se não há direções assintóticas em p ;
- (ii) *hiperbólico* se há duas direções assintóticas em p ;
- (iii) *parabólico* se há somente uma direção assintótica em p ;
- (iv) *inflexão* se há infinitas direções assintóticas em p .

Segue como consequência da Definição 4.26 e da contagem do número de direções assintóticas que p é um ponto parabólico, hiperbólico ou elíptico se, e somente se, $p \in M_3 \cup M_2$. Além disso, p é um ponto de inflexão se, e somente se, $p \in M_1 \cup M_0$.

O próximo resultado é o mais relevante desta seção. Ele nos garante que a geometria de uma superfície singular $M \subset \mathbb{R}^4$ de coposto 1 em p está fortemente relacionada com a geometria da sua superfície regular associada $S \subset \mathbb{R}^4$ em $p \circ \xi^{-1}(p)$, como definida previamente.

Teorema 4.27. Sejam $M \subset \mathbb{R}^4$ uma superfície singular de coposto 1 em $p \in M$ e $S \subset \mathbb{R}^4$ a sua superfície regular associada.

- (i) A direção tangente $\mathbf{u} \in T_q \tilde{M}$ é uma direção assintótica de M em p se, e somente se, é também uma direção assintótica de $S \subset \mathbb{R}^4$ em $p \circ \xi^{-1}(p)$;
- (ii) A direção $\mathbf{v} \in N_p M$ é uma direção binormal de M em p se, e somente se, $p \circ \xi^{-1}(\mathbf{v}) \in N_{p \circ \xi^{-1}(p)} S$ é uma direção binormal de S em $p \circ \xi^{-1}(p)$.
- (iii) O ponto $p \in M$ é um ponto elíptico/hiperbólico/parabólico/inflexão se, e somente se, $p \circ \xi^{-1}(p) \in S$ é um ponto elíptico/hiperbólico/parabólico/inflexão, respectivamente.

Demonstração. O primeiro item segue diretamente do Teorema 2.23 e do Lema 4.22. O segundo item é uma consequência do Corolário 2.30 e do Corolário 4.24. Note que neste item, ao contrário do anterior, não temos necessariamente a mesma direção binormal para ambas as superfícies. Isso se dá pelo fato de que no caso singular, para que uma direção seja binormal, além de ser uma direção degenerada, ela deve pertencer ao plano E_p . O terceiro item segue imediatamente das definições 4.26, 2.19 e do primeiro item deste teorema. \square

Em (KLOTZ; POP; RIEGER, 2007), os autores apresentam uma classificação dos germes de aplicações \mathcal{A} -simples $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$. A singularidade I_k , $k \geq 1$, dada pela \mathcal{A} -forma normal $(x, y) \mapsto (x, xy, y^2, y^{2k+1})$ tem a seguinte propriedade: todo germe de aplicação \mathcal{A} -equivalente a ele parametriza localmente uma superfície com uma singularidade de coposto 1 em \mathbb{R}^4 tal que sua parábola de curvatura é uma parábola não degenerada. Mais ainda, I_k é a única singularidade com essa propriedade. Portanto, todo germe de aplicação \mathcal{A} -equivalente à I_k é $\mathcal{R}^2 \times \mathcal{O}(4)$ -equivalente à primeira forma normal do Lema 4.11.

Proposição 4.28. Considere a $\mathcal{R}^2 \times \mathcal{O}(4)$ -forma normal da singularidade I_k dada por $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$ onde $f(x, y) = (x, xy + p(x, y), b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + q(x, y), c_{20}x^2 + r(x, y))$ com $b_{02} > 0$ e $p, q, r \in \mathcal{M}_2^3$ (ver Lema 4.11). Então, a singularidade I_k é hiperbólica, parabólica ou elíptica se, e somente se, b_{20} é positivo, zero ou negativo, respectivamente.

Demonstração. A parábola de curvatura Δ_p é, neste caso, uma parábola não degenerada que pode ser parametrizada por $\eta(y) = (0, 2y, 2b_{20} + 2b_{11}y + 2b_{02}y^2, 2c_{20})$ e E_p é o plano YZ . Do Lema 4.23, $y \in \mathbb{R}$ é uma direção assintótica se, e somente se, $\pi(\eta(y))$ and $\pi(\eta'(y))$ são colineares, onde $\pi : N_pM \rightarrow E_p$ é a projeção ortogonal canônica. Essa condição é equivalente a seguinte igualdade:

$$\det(\mathbf{e}_1, \pi(\eta(y)), \pi(\eta'(y)), \mathbf{e}_4) = 4(b_{02}y^2 - b_{20}) = 0,$$

onde $T_pM = [\mathbf{e}_1]$ e $E_p^\perp = [\mathbf{e}_4]$. Portanto, $y \in \mathbb{R}$ é direção assintótica se, e somente se, $y = \pm\sqrt{b_{20}b_{02}/b_{02}}$. Como $b_{02} > 0$, teremos 0, 1 ou 2 direções assintóticas de acordo com que b_{20} é negativo, zero ou positivo, respectivamente. \square

4.3 Curvatura umbílica

Podemos encontrar na literatura invariantes chamados curvatura umbílica. Podemos citar, por exemplo, artigos sobre superfícies regulares em \mathbb{R}^5 (COSTA; MORAES; ROMERO FUSTER, 2009; IZUMIYA *et al.*, 2016), onde podemos encontrar a Definição 2.38. Além disso, esse invariante também é recorrente em artigos que tratam de superfícies singulares em \mathbb{R}^3 tais como (MARTINS; NUÑO BALLESTEROS, 2015; MARTINS; SAJI, 2016; MARTINS; SAJI, 2018). Nestes, o encontraremos como na Definição 3.6.

A definição que apresentaremos aqui se assemelha àquela dada para o caso de superfícies singulares de coposto 1 em \mathbb{R}^3 , mas ao contrário do que foi feito lá, nosso invariante estará definido para o caso em que a parábola de curvatura Δ_p é uma parábola não degenerada. Geometricamente, esse invariante mede a distância entre o ponto singular p e o subespaço afim $\mathcal{A}ff_p$, de modo muito parecido com a Definição 2.38. Em nosso caso, esse será um invariante de segunda ordem da superfície, ou seja, esse invariante dependerá da geometria herdada da segunda forma fundamental da superfície.

Definição 4.29. O número real não negativo

$$\kappa_u(p) = d(p, \mathcal{A}ff_p)$$

é chamado de *curvatura umbílica* de M em p .

Seja $\{v_1, v_2, v_3\}$ um referencial ortonormal de N_pM tal como o da Observação 4.21. Podemos escrever

$$II(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = II_{v_1}(\mathbf{u}, \mathbf{u})v_1 + II_{v_2}(\mathbf{u}, \mathbf{u})v_2 + II_{v_3}(\mathbf{u}, \mathbf{u})v_3,$$

para $\mathbf{u} \in C_q \subset T_q\tilde{M}$. Se Δ_p é uma parábola não degenerada, $II(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \in \Delta_p \subset \mathcal{A}ff_p$. Então $II_{v_3}(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ não depende de \mathbf{u} a menos de sinal, ou seja, $II_{v_3}(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ nos diz somente sobre a posição de Δ_p em N_pM (veja Observação 4.21). Se Δ_p se degenera, a expressão acima não depende de $II_{v_3}(\mathbf{u}, \mathbf{u})v_3$, uma vez que $\Delta_p \subset E_p$. Suponha, inicialmente, que Δ_p não seja um ponto. A direção assintótica y_∞ está bem definida e a direção binormal associada v_∞ , chamada *direção binormal infinita*, é tal que $\{\eta(y_\infty), v_\infty\}$ é um referencial ortonormal positivamente orientado de E_p . Se Δ_p é um ponto diferente de p , $\eta(y)$ é constante e assim, tomamos o referencial ortonormal positivamente orientado $\{v, \eta(y)/|\eta(y)|\}$ de E_p onde v é uma direção binormal. Os referenciais acima são chamados de *referenciais adaptados* de E_p (veja Figura 5). Se $\Delta_p = \{p\}$ ou uma parábola não degenerada, então qualquer referencial positivamente orientado é considerado um referencial adaptado.

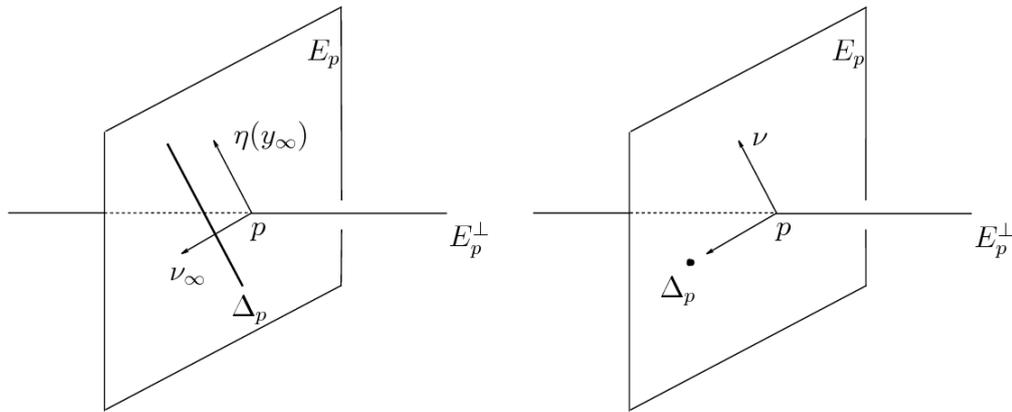


Figura 5 – Referencial adaptado de E_p .

Proposição 4.30. Seja $\{v_1, v_2, v_3\}$ um referencial ortonormal de N_pM tal que $\{v_1, v_2\}$ é um referencial adaptado de E_p . Então, para $\mathbf{u} \in C_q$,

$$\kappa_u(p) = \begin{cases} |II_{v_3}(\mathbf{u}, \mathbf{u})|, & \text{se } \Delta_p \text{ é não degenerada} \\ |II_{v_2}(\mathbf{u}, \mathbf{u})|, & \text{se } \Delta_p \text{ é degenerada} \end{cases}$$

Demonstração. Se Δ_p é uma parábola não degenerada,

$$d(p, \mathcal{A}ff_p) = d(p, II_{v_3}(\mathbf{u}, \mathbf{u})) = |II_{v_3}(\mathbf{u}, \mathbf{u})|$$

para $\mathbf{u} \in C_q$. Por outro lado, se Δ_p é degenerada, $II_{v_3}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$ uma vez que $\Delta_p \subset E_p$. Além disso, $II(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ não depende de $II_{v_2}(\mathbf{u}, \mathbf{u})v_2$, para $\mathbf{u} \in C_q$, a menos de sinal. Portanto,

$$d(p, \mathcal{A}ff_p) = d(p, II_{v_2}(\mathbf{u}, \mathbf{u})) = |II_{v_2}(\mathbf{u}, \mathbf{u})|,$$

o que conclui a prova. \square

Quando $p \in M_1$, para cada escolha de E_p temos um referencial adaptado diferente. No entanto, nem a escolha de E_p , ou a do referencial adaptado mudam a curvatura umbílica. De fato, suponha que Δ_p é uma semirreta radial ou uma reta radial. Sejam $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset N_pM$ planos passando por p tais que $\Delta_p \subset \Gamma_1, \Gamma_2$. Considere os referenciais adaptados $\{\eta(y_\infty), v_\infty^1\}$ e $\{\eta(y_\infty), v_\infty^2\}$ de Γ_1 e Γ_2 , respectivamente. Uma vez que Δ_p está contida na reta dada pela direção $\eta(y_\infty)$,

$$II_{v_\infty^1}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = II_{v_\infty^2}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0,$$

para todo $\mathbf{u} \in C_q$. Além do mais, da Definição 4.29, $\kappa_u(p) = 0$, pois $p \in \mathcal{A}ff_p$. No caso em que Δ_p é um ponto diferente de p , a justificativa é análoga.

Os próximos dois corolários apresentam fórmulas explícitas para o cálculo da curvatura umbílica.

Corolário 4.31. Seja $M \subset \mathbb{R}^4$ uma superfície de coposto 1 em p tal que Δ_p é uma parábola não degenerada e $\{v_1, v_2, v_3\}$ é um referencial ortonormal de N_pM tal como na Observação 4.21. Então,

$$\kappa_u(p) = \frac{|II_{v_3}(\mathbf{u}, \mathbf{u})|}{I(\mathbf{u}, \mathbf{u})} = |\text{proj}_{v_3} \eta(y)| = |\langle \eta(y), v_3 \rangle|,$$

para todo $\mathbf{u} \in T_q\tilde{M}$.

Demonstração. Seja $\mathbf{u} \in T_q\tilde{M}$ uma direção tangente qualquer. A primeira igualdade segue do fato de que

$$|II_{v_3}(\mathbf{u}, \mathbf{u})| = |\mathbf{u}|^2 \left| II_{v_3} \left(\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}, \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} \right) \right| = I(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \kappa_u(p).$$

Dado que $\Delta_p \subset \mathcal{A}ff_p$, as duas últimas igualdades seguem da definição de curvatura umbílica. \square

Corolário 4.32. Se Δ_p é uma semirreta ou uma reta, $\kappa_u(p)$ é o comprimento da projeção de Δ_p na direção dada por uma direção binormal infinita. Consequentemente, temos as seguintes fórmulas:

$$\kappa_u(p) = \left| \left\langle \eta(y), \frac{\mathbf{e} \times \eta'(y) \times v_3}{|\eta'(y)|} \right\rangle \right| = \frac{1}{|\eta'(y)|} |\det(\mathbf{e}, \eta(y), \eta'(y), v_3)|$$

e

$$\kappa_u(p) = \frac{|\mathbf{e} \times \eta(y) \times \eta'(u)|}{|\eta'(y)|},$$

onde $T_pM = [\mathbf{e}]$, $E_p^\perp = [\mathbf{v}_3]$ e $\eta'(y) \neq 0$ (veja Figura 6). Mais ainda, para qualquer $\mathbf{u} \in T_q\tilde{M}$ e $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ referencial ortonormal de N_pM tal que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ é um referencial adaptado de E_p , temos:

$$\kappa_u(p) = \frac{|II_{\mathbf{v}_2}(\mathbf{u}, \mathbf{u})|}{I(\mathbf{u}, \mathbf{u})}.$$

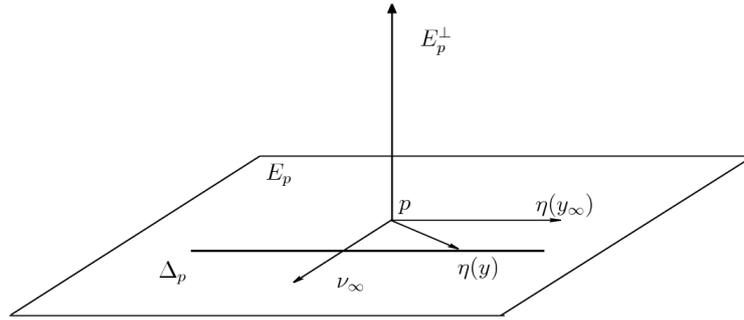


Figura 6 – Curvatura umbílica $\kappa_u(p)$.

A curvatura umbílica não depende da escolha do referencial adaptado, do referencial ortonormal de N_pM , da parametrização η da parábola de curvatura e nem da escolha das coordenadas locais de \tilde{M} . No entanto, ela depende da aplicação $g : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^4$ de coposto 1 que parametriza a superfície \tilde{M} . De fato, tome como exemplo a superfície localmente parametrizada por $f(x, y) = (x, y^2, y^3, x^2y)$. Sua curvatura umbílica é dada por $\kappa_u(p) = 0$. Por outro lado $\bar{f}(x, y) = (x, (y^3 + x)^2, (y^3 + x)^3, (y^3 + x)^2y)$ parametriza o mesmo conjunto de pontos, no entanto $\bar{\kappa}_u(0) = 2$.

Lema 4.33. Seja $M \subset \mathbb{R}^4$ uma superfície singular de coposto 1 em $p \in M$. São verdadeiras as seguintes afirmações:

- (i) Se Δ_p é uma parábola não degenerada, $p \in M_3$ se, e somente se, $\kappa_u(p) \neq 0$;
- (ii) Se Δ_p é uma semirreta ou uma reta, $p \in M_2$ se, e somente se, $\kappa_u(p) \neq 0$;
- (iii) Se Δ_p é um ponto, $p \in M_1$ se, e somente se, $\kappa_u(p) \neq 0$.

Demonstração. A prova pode ser feita a partir de cálculos imediatos utilizando o Lema 4.16. Faremos a demonstração do primeiro caso, uma vez que os outros são análogos. Para tanto, utilizaremos a forma normal do Lema 4.11. Tomando a parametrização local

$$f(x, y) = (x, xy + p(x, y), b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + q(x, y), c_{20}x^2 + r(x, y)),$$

com $p, q, r \in \mathcal{M}_2^3$ e $b_{02} \neq 0$, a matriz da segunda forma fundamental de M em p é dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2b_{20} & b_{11} & 2b_{02} \\ 2c_{20} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo, $p \in M_3$ se, e somente se, $c_{20} \neq 0$, caso contrário $p \in M_2$. O plano $\mathcal{A}ff_p$ é o plano paralelo ao plano YZ passando por $(0, 0, 0, 2c_{20})$. Portanto, $\kappa_u(p) = 2|c_{20}|$ e $p \in M_3$ se, e somente se, $\kappa_u(p) \neq 0$. \square

4.4 Contato com hiperplanos

Valiosas informações geométricas de uma superfície podem ser obtidas através do estudo de seu contato com hiperplanos. Tal contato é medido pelas singularidades da função altura, definida da seguinte maneira: dada uma parametrização local $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$ de uma superfície singular $M \subset \mathbb{R}^4$ de coposto 1 em $p = (0, 0, 0, 0)$ e $v \in \mathbb{S}^3$, a *função altura* de M é dada por

$$h_v : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0), (x, y) \mapsto h_v(x, y) = \langle f(x, y), v \rangle.$$

Lema 4.34. Sejam $M \subset \mathbb{R}^4$ uma superfície de coposto 1 em $p \in M$ e $v \in N_p M$ um vetor não nulo. As formas quadráticas II_v em p e $\mathcal{H}(h_v)(p)$ são equivalentes, ou seja, existem sistemas de coordenadas nos quais elas coincidem, onde $\mathcal{H}(h_v)(p)$ denota a matriz Hessiana de h_v em p .

Demonstração. Seja $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$ uma parametrização local de M em p , dada por $f(x, y) = (x, f_2(x, y), f_3(x, y), f_4(x, y))$ com $f_i \in \mathcal{M}_2^2$, $i = 2, 3, 4$. Podemos escrever, a menos de termos de ordem maior ou igual a 3,

$$f_2(x, y) = \sum_{i+j=2} a_{ij}x^i y^j, f_3(x, y) = \sum_{i+j=2} b_{ij}x^i y^j \text{ e } f_4(x, y) = \sum_{i+j=2} c_{ij}x^i y^j.$$

Além disso, seja $v = (0, v_2, v_3, v_4) \in N_p M$. Logo, a função altura é dada por

$$h_v(x, y) = xv_1 + f_2(x, y)v_2 + f_3(x, y)v_3 + f_4(x, y)v_4$$

e a sua matriz Hessiana em p é

$$\mathcal{H}(h_v)(p) = \begin{pmatrix} 2(a_{20}v_2 + b_{20}v_3 + c_{20}v_4) & a_{11}v_2 + b_{11}v_3 + c_{11}v_4 \\ a_{11}v_2 + b_{11}v_3 + c_{11}v_4 & 2(a_{02}v_2 + b_{02}v_3 + c_{02}v_4) \end{pmatrix}$$

Por outro lado, $II_v(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = x^2 l_v + 2xym_v + y^2 n_v$, para $\mathbf{u} = (x, y) \in T_q \tilde{M}$, com

$$l_v = \langle f_{xx}, v \rangle = 2(a_{20}v_2 + b_{20}v_3 + c_{20}v_4), m_v = \langle f_{xy}, v \rangle = a_{11}v_2 + b_{11}v_3 + c_{11}v_4, \\ n_v = \langle f_{yy}, v \rangle = 2(a_{02}v_2 + b_{02}v_3 + c_{02}v_4).$$

Portanto, a matriz de H_V em p é dada por

$$H_V = \begin{pmatrix} 2(a_{20}v_2 + b_{20}v_3 + c_{20}v_4) & a_{11}v_2 + b_{11}v_3 + c_{11}v_4 \\ a_{11}v_2 + b_{11}v_3 + c_{11}v_4 & 2(a_{02}v_2 + b_{02}v_3 + c_{02}v_4) \end{pmatrix} = \mathcal{H}(h_V)(p).$$

Concluimos assim a demonstração. \square

O próximo resultado é o mais importante desta seção. Nele são apresentados critérios geométricos para que a função altura possua singularidade do tipo A_1 (Morse) ou mais degenerada.

Teorema 4.35. Seja $M \subset \mathbb{R}^4$ uma superfície de coposto 1 em $p \in M$. A função altura h_V é singular em p se, e somente se, $v \in N_pM$. Além disso, são verdadeiras as seguintes afirmações:

- (i) Assuma que Δ_p não é um ponto. Assim, h_V tem uma singularidade degenerada (não Morse) em p se, e somente se, v é uma direção degenerada.
- Quando Δ_p é uma parábola não degenerada, h_V tem uma singularidade de coposto 2 em p se, e somente se, $v \in E_p^\perp$ e $\kappa_u(p) = 0$.
 - Quando Δ_p é uma semirreta ou uma reta, temos duas possibilidades: se $\kappa_u(p) \neq 0$, a única direção tal que h_V tem uma singularidade de coposto 2 em p é dada por E_p^\perp . No entanto, se $\kappa_u(p) = 0$, h_V tem uma singularidade de coposto 2 em p para todas as direções em $\mathcal{A}ff_p^\perp$;
- (ii) Assuma agora que Δ_p é um ponto. Neste caso, h_V tem uma singularidade degenerada em p para todo $v \in N_pM$. Mais ainda, se $\kappa_u(p) \neq 0$, h_V tem uma singularidade de coposto 2 em p para todas as direções no plano ortogonal à reta passando por p e que contém Δ_p . Se $\kappa_u(p) = 0$ a singularidade é de coposto 2 para todo $v \in N_pM$.

Demonstração. Tome $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$ uma parametrização local de M em p , dada por $f(x, y) = (x, f_2(x, y), f_3(x, y), f_4(x, y))$ com $f_i \in \mathcal{M}_2^2$, $i = 2, 3, 4$. Dado um vetor $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$, a função altura de M na direção de v é dada por:

$$h_V(x, y) = xv_1 + f_2(x, y)v_2 + f_3(x, y)v_3 + f_4(x, y)v_4,$$

e conseqüentemente, h_V é singular na origem se, e somente se $v_1 = 0$. Geometricamente, isso é equivalente a dizer que $v \in N_pM$. Suponha que Δ_p é uma parábola não degenerada e tome uma parametrização local dada pela forma normal dada no Lema 4.11, ou seja,

$$f(x, y) = (x, xy + p(x, y), b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + q(x, y), c_{20}x^2 + r(x, y)),$$

de modo que $b_{02} > 0$ e $p, q, r \in \mathcal{M}_2^3$. A segunda forma fundamental de M em p na direção $v = (0, v_2, v_3, v_4) \in N_pM$ é dada por

$$H_V(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle (0, \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1, 2b_{20}\alpha_1\alpha_2 + b_{11}(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + 2b_{02}\beta_1\beta_2, 2c_{20}\alpha_1\alpha_2), \mathbf{v} \rangle,$$

onde $\mathbf{u} = (\alpha_1, \beta_1)$, $\mathbf{v} = (\alpha_2, \beta_2) \in T_q\tilde{M}$. Dessa forma, \mathbf{v} é uma direção degenerada se, e somente se, $II_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ para todo $\mathbf{v} \in T_q\tilde{M}$, o que é equivalente a $v_2 = -b_{11}v_3 \pm 2\sqrt{b_{20}b_{02}v_3^2 + b_{02}c_{20}v_3v_4}$. Por outro lado, a função altura é dada por

$$h_{\mathbf{v}}(x, y) = (xy + p(x, y))v_2 + (b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + q(x, y))v_3 + (c_{20}x^2 + q(x, y))v_4,$$

e a sua matriz Hessiana em p é a matriz

$$\mathcal{H}(h_{\mathbf{v}})(p) = \begin{pmatrix} 2(b_{20}v_3 + c_{20}v_4) & v_2 + b_{11}v_3 \\ v_2 + b_{11}v_3 & 2b_{02}v_3 \end{pmatrix}.$$

Logo, $h_{\mathbf{v}}$ tem uma singularidade degenerada (não Morse) em p se, e somente se, $\det(\mathcal{H}(h_{\mathbf{v}})(p)) = 0$, ou de modo equivalente, $v_2 = -b_{11}v_3 \pm 2\sqrt{b_{20}b_{02}v_3^2 + b_{02}c_{20}v_3v_4}$. A matriz Hessiana se anula se, e somente se, $\mathbf{v} \in E_p^\perp$ e $\kappa_u(p) = 0$, uma vez que $E_p^\perp = [v_4]$ e $\kappa_u(p) = 2|c_{20}|$. Quando Δ_p é uma semirreta ou uma reta, a demonstração é análoga. Por fim, quando Δ_p é um ponto, usando novamente a parametrização local dada pela forma normal do Lema 4.11, Δ_p pode ser parametrizada por $\eta(y) = (0, 0, 2b_{20}, 0)$, a curvatura umbílica é dada por $\kappa_u(p) = 2|b_{20}|$ e a função altura por $h_{\mathbf{v}}(x, y) = p(x, y)v_2 + (b_{20}x^2 + q(x, y))v_3 + r(x, y)v_4$, com $p, q, r \in \mathcal{M}_2^3$. Assim, $h_{\mathbf{v}}$ se degenera para todo $\mathbf{v} \in N_pM$ pois

$$\mathcal{H}(h_{\mathbf{v}})(p) = \begin{pmatrix} 2b_{20}v_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Além disso, $h_{\mathbf{v}}$ tem singularidade de coposto 2 se, e somente se, $\kappa_u(p)v_3 = 0$. Portanto, se $\kappa_u(p) \neq 0$, temos $v_3 = 0$ e para todo \mathbf{v} ortogonal ao vetor $(0, 0, 2b_{20}, 0)$, isto é, \mathbf{v} ortogonal ao plano por p contendo Δ_p , $h_{\mathbf{v}}$ tem uma singularidade de coposto 2. Se $\kappa_u(p) = 0$, $h_{\mathbf{v}}$ tem uma singularidade de coposto 2 em p para todo $\mathbf{v} \in N_pM$. \square

Como consequência do Teorema 4.35 podemos dizer que o subconjunto das direções degeneradas $\mathbf{v} \in N_pM$ de uma superfície singular de coposto 1, $M \subset \mathbb{R}^4$, em $p \in M$ é exatamente o subconjunto de direções degeneradas da função altura $h_{\mathbf{v}}$.

Definição 4.36. O subconjunto das direções normais $\mathbf{v} \in N_pM$ tais que a função altura $h_{\mathbf{v}}$ possui singularidade degenerada é denotado por $\mathcal{C}_p \subset N_pM$.

Esse subconjunto, $\mathcal{C}_p \subset N_pM$, é um cone que pode se degenerar. Além disso, segue da Definição 4.19 que as direções binormais de M em p são obtidas pela interseção do cone de direções degeneradas, \mathcal{C}_p , com o plano E_p . Essa é uma diferença fundamental da noção de direção binormal de uma superfície regular em \mathbb{R}^5 e a noção aqui apresentada para superfícies de coposto 1 em \mathbb{R}^4 . No primeiro caso, como vimos na Definição 2.41, um vetor normal \mathbf{v} é uma direção binormal se a correspondente função altura $h_{\mathbf{v}}$ tem uma singularidade do tipo A_3 ou mais degenerada. Por outro lado, no nosso caso, para que uma direção normal \mathbf{v} seja uma direção binormal, ela precisa pertencer à interseção de \mathcal{C}_p e E_p .

Concluimos assim, que a definição que apresentamos de direção binormal (e também de direção assintótica) está fortemente relacionada com a geometria de segunda ordem da superfície, de modo que essas definições e, conseqüentemente, os resultados que as seguem aproximam a geometria de uma superfície singular de coposto 1 em \mathbb{R}^4 com àquela de sua superfície regular associada em \mathbb{R}^4 , o que é corroborado pelo Teorema 4.27.

Corolário 4.37. Seja $\mathbf{u} \in T_q\tilde{M}$ uma direção assintótica dada pelo parâmetro $y \in \mathbb{R} \cup [y_\infty]$. Então, o cone cuja base é a parábola de curvatura é perpendicular ao cone \mathcal{C}_p de direções degeneradas em p .

Demonstração. A direção tangente $\mathbf{u} \in T_q\tilde{M}$ é uma direção assintótica dada pelo parâmetro $y \in \mathbb{R} \cup [y_\infty]$ se, e somente se, existe uma direção binormal $\mathbf{v} \in \mathcal{C}_p \cap E_p$ tal que para todos os vetores tangentes $\mathbf{v} \in T_q\tilde{M}$,

$$H_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle H(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathbf{v} \rangle = 0.$$

Em particular, para $\mathbf{v} = \mathbf{u}$, isso significa que $\langle \eta(y), \mathbf{v} \rangle = 0$. Em outras palavras, a reta dada por $\eta(y)$ e p (contida no cone cuja base é Δ_p) é perpendicular ao cone \mathcal{C}_p das direções degeneradas. \square

Corolário 4.38. Seja $M \subset \mathbb{R}^4$ uma superfície como no Teorema 4.35. Um hiperplano tem um contato degenerado com M em p se, e somente se, é ortogonal à uma direção degenerada $\mathbf{v} \in N_pM$. Em particular, se \mathbf{v} é uma direção binormal, o hiperplano é um hiperplano osculador.

Demonstração. A prova desta afirmação segue imediatamente do Teorema 4.35 e da Definição 4.25. \square

Observação 4.39. Vamos citar aqui algumas perguntas ainda não respondidas relacionadas ao assunto deste capítulo. Em (MARAR; NUNO BALLESTEROS, 2014), os autores estudam germes de aplicação $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ de coposto 1. Formas normais de tais germes de aplicação dadas por $f(x, y) = (x, p(x, y), q(x, y))$ sugerem que em alguns casos estes germes podem ser vistos como desdobramentos a 1-parâmetro de curvas planas $\gamma_x = (p(x, y), q(x, y))$. É mostrado que se uma dada condição de genericidade é cumprida, a curva γ_0 , chamada de fatia transversal, contém informações sobre a geometria do germe f . Já em (GIBSON; HOBBS, 1993), são classificados os germes de curvas espaciais de \mathcal{A}_e -codimensão menor ou igual a 11. Uma questão que se coloca é o estudo dos germes de aplicação $(\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$ de coposto 1 vistos como desdobramentos a 1-parâmetro de curvas espaciais, aplicando a mesma técnica de Marar e Nuño Ballesteros e utilizar as informações e propriedades de curvas obtidas no trabalho de Gibson e Hobbs.

Podemos destacar também como um problema a ser considerado, o estudo das projeções de superfícies singulares de coposto 1 em \mathbb{R}^4 em superfícies singulares em \mathbb{R}^3 . Nosso interesse é comparar as informações geométricas da superfície em \mathbb{R}^4 com as de sua projeção através do estudo das singularidades de projeções genéricas que podem ser parametrizadas por \mathbb{S}^3 e

que também podem ser vistas como desdobramentos versais de uma projeção com uma certa singularidade. Além disso, é importante determinar os diagramas de bifurcação obtidos através da variação da direção de projeção no espaço de parâmetros dado pela esfera \mathbb{S}^3 .

Considere, por exemplo, a singularidade I_1 apresentada em (KLOTZ; POP; RIEGER, 2007), dada pela \mathcal{A} -forma normal $(x, y) \mapsto (x, xy, y^2, y^3)$. Tomando coordenadas $XYZW$ em \mathbb{R}^4 , a projeção da superfície singular M localmente parametrizada por I_1 no 3-espaço XYZ parametriza localmente um cross-cap, enquanto a projeção em XZW é um cuspidal edge, ambas superfícies singulares de coposto 1 em \mathbb{R}^3 . Uma pergunta natural que surge é se existe uma relação entre as geometrias desses objetos e de que maneira elas se relacionam.

Algumas outras perguntas também se colocam de forma natural. Pode-se perguntar se os métodos até então empregados podem ser utilizados no estudo de superfícies singulares de coposto 1 em \mathbb{R}^n , $n > 4$. Além disso, o caso de superfícies de coposto 2 em \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, ainda não foi investigado. Por fim, temos também o estudo global de superfícies de coposto 1 em \mathbb{R}^4 .

GEOMETRIA PLANA DA SINGULARIDADE I_1

Neste capítulo estudamos o contato com hiperplanos da superfície singular de coposto 1, $M \subset \mathbb{R}^4$, localmente parametrizada pela singularidade I_1 , dada pela \mathcal{A} -forma normal $(x, y) \mapsto (x, xy, y^2, y^3)$. Esta singularidade é listada em (KLOTZ; POP; RIEGER, 2007), onde os autores classificam todos os germes \mathcal{A} -simples $(\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$ (ver Tabela 4). Este germe, faz parte de uma família bastante especial: a família I_k , dada por

$$(x, y) \mapsto (x, xy, y^2, y^{2k+1}), \quad k \geq 1,$$

e que se destaca por ser a única família cuja parábola de curvatura no ponto singular é uma parábola não degenerada. Mesmo dentro dessa família, o germe I_1 se destaca ainda mais, uma vez que visto localmente como uma projeção singular em uma direção tangente de uma superfície regular imersa em \mathbb{R}^5 (em determinados pontos especiais), ela distingue direções assintóticas, como visto na Proposição 2.43.

Podemos sintetizar o *modus operandi* da seguinte maneira: primeiramente, dada uma superfície singular de coposto 1 em \mathbb{R}^4 , cuja parametrização local é \mathcal{A} -equivalente à singularidade I_1 , classificamos submersões $(\mathbb{R}^4, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ via mudanças de coordenadas na fonte que preservam a superfície modelo X parametrizada por I_1 (Teorema 5.9).

Estudamos as singularidades da função altura de uma superfície singular cuja parametrização é dada por uma forma normal geral obtida por mudanças de coordenadas na fonte que preservam a geometria de segunda ordem e isometrias na meta (Teorema 5.10). Essas singularidades são modeladas por aquelas encontradas nas submersões classificadas anteriormente. Finalmente, apresentamos critérios geométricos para cada tipo de singularidade da função altura.

Os resultados aqui apresentados podem ser encontrados no artigo (BENEDINI RIUL; OSET SINHA, 2018).

Tal como definimos no Capítulo 2, o anel local de germes de funções $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ será denotado por \mathcal{E}_n e seu ideal maximal por \mathcal{M}_n . Seja $(X, 0) \subset (\mathbb{R}^n, 0)$ um germe de subvariedade

reduzida de \mathbb{R}^n na origem definido pelo ideal I de \mathcal{E}_n .

Definição 5.1. Dizemos que um difeomorfismo $k : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ preserva X se $(k(X, 0)) = (X, 0)$. O grupo formado por tais difeomorfismos é um subgrupo do grupo \mathcal{R} e é denotado por $\mathcal{R}(X)$.

O grupo $\mathcal{R}(X)$ é um dos “subgrupos geométricos” de Damon do grupo \mathcal{H} . Desta forma, os métodos de Teoria de Singularidades se aplicam ao estudo da ação de $\mathcal{R}(X)$ no anel \mathcal{E}_n . Este subgrupo é amplamente estudado em (BRUCE; ROBERTS, 1988; DAMON, 1988). Para classificarmos submersões $(\mathbb{R}^4, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ via ação do grupo $\mathcal{R}(X)$ precisaremos de definições e resultados para tal grupo, como determinação finita, trivialidade e uma versão do Teorema da Transversal Completa. Apresentaremos no decorrer deste capítulo os resultados necessários para nosso estudo. Muito embora não demonstraremos tais resultados, deixaremos indicadas referências em que o leitor possa encontrar as provas, se assim o desejar.

Considere a \mathcal{A} -forma normal da singularidade I_1 , dada por $f(x, y) = (x, xy, y^2, y^3)$. Nosso objetivo é classificar germes de submersões $g : (\mathbb{R}^4, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ através da $\mathcal{R}(X)$ -equivalência, onde $X = f(\mathbb{R}^2, 0)$ é nossa *superfície modelo*. O ideal $I \triangleleft \mathcal{E}_4$ de polinômios irredutíveis que definem a superfície modelo X é dado por:

$$I = \langle Y^2 - X^2Z, W^2 - Z^3, XW - YZ, YW - XZ^2 \rangle.$$

Utilizamos o software Singular para encontrar o ideal I . Descrevemos na Tabela 6 o algoritmo utilizado para encontrá-las. Para descrevê-lo, consideramos A o anel \mathcal{E}_4 nas variáveis x, y, z e w (na meta) e o anel B representa \mathcal{E}_2 nas variáveis x e y (na fonte). Além disso, um germe f é dado por $f = (f_1, f_2, f_3, f_4)$.

Tabela 6 – Algoritmo para a obtenção do ideal gerador de X .

```
>ring A=0, (x,y,z,w), ds;
>ring B=0, (x,y), ds;
>map f=A,f1,f2,f3,f4;
>setring A;
>ideal I=kernel(B,f);
>I;
```

Denotamos por $\Theta(X)$ o \mathcal{E}_4 -módulo de campos de vetores tangentes à superfície modelo X . Na literatura, alguns textos também denotam tal módulo por $\text{Derlog}(X)$. Uma vez que tais campos são tangentes, temos que

$$\xi \in \Theta(X) \Leftrightarrow \xi h(x) = dh_x(\xi(x)) \in I, \forall h \in I.$$

A justificativa para essa afirmação pode ser encontrada em (BRUCE; WEST, 1998).

Proposição 5.2. Seja X a superfície modelo dada pela \mathcal{A} -forma normal da singularidade I_1 . O \mathcal{E}_4 -módulo de campos de vetores tangentes $\Theta(X)$ é gerado por:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= X \frac{\partial}{\partial X} + Y \frac{\partial}{\partial Y}, & \xi_2 &= X^2 \frac{\partial}{\partial X} + 2Y \frac{\partial}{\partial Z} + 3XZ \frac{\partial}{\partial W}, \\ \xi_3 &= Y \frac{\partial}{\partial Y} + 2Z \frac{\partial}{\partial Z} + 3W \frac{\partial}{\partial W}, & \xi_4 &= Y \frac{\partial}{\partial X} + XZ \frac{\partial}{\partial Y}, \\ \xi_5 &= Z \frac{\partial}{\partial X} + W \frac{\partial}{\partial Y}, & \xi_6 &= XZ \frac{\partial}{\partial Y} + 2W \frac{\partial}{\partial Z} + 3Z^2 \frac{\partial}{\partial W}, \\ \xi_7 &= W \frac{\partial}{\partial X} + Z^2 \frac{\partial}{\partial Y}, & \xi_8 &= (Y^2 - X^2Z) \frac{\partial}{\partial W}, \\ \xi_9 &= (YZ - XW) \frac{\partial}{\partial W}, & \xi_{10} &= XW \frac{\partial}{\partial Y} + 2Z^2 \frac{\partial}{\partial Z} + 3ZW \frac{\partial}{\partial W}, \\ \xi_{11} &= (YW - XZ^2) \frac{\partial}{\partial W}, & \xi_{12} &= (W^2 - Z^3) \frac{\partial}{\partial W}, \\ \xi_{13} &= (W^2 - Z^3) \frac{\partial}{\partial Y}.\end{aligned}$$

Demonstração. Para facilitar a notação, escrevemos $(X, Y, Z, W) = (X_1, X_2, X_3, X_4)$. Estamos procurando por campos de vetores $\xi = \sum_{i=1}^4 \xi_i \frac{\partial}{\partial X_i}$ em \mathbb{R}^4 tais que para cada $j = 1, \dots, 4$ existem funções $\alpha_i(X_1, \dots, X_4)$ satisfazendo

$$\sum_{i=1}^4 \xi_i \frac{\partial h_j}{\partial X_i} = \sum_{i=1}^4 \alpha_i h_i.$$

Considere, para $j = 1, \dots, 4$, a aplicação $\Phi_j : \mathcal{E}_4^8 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\Phi_j(\xi, \alpha) = \sum_{i=1}^4 \xi_i \frac{\partial h_j}{\partial X_i} - \sum_{i=1}^4 \alpha_i h_i,$$

onde $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_4) \in \mathcal{E}_4^4$ e $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_4) \in \mathcal{E}_4^4$. Seja $A_j = \ker \Phi_j$. Tome $\pi : \mathcal{E}_4^8 \rightarrow \mathcal{E}_4^4$ a projeção canônica dada por $\pi(\xi, \alpha) = \xi$ e seja $B_j = \pi(A_j)$. Dessa forma,

$$\Theta(X) = \bigcap_{j=1}^4 B_j.$$

Para obter A_j , utilizamos syzygies no software Singular, como ilustramos nas Figuras 7, 8, 9 e 10. A Figura 11 mostra como obtemos, utilizando o Singular, os conjuntos B_j e consequentemente os vetores do \mathcal{E}_4 -módulo de campos de vetores tangentes à superfície modelo X . Pode-se checar que um campo de vetores obtido por este método é levantável, isto é, existe um campo de vetores η em \mathbb{R}^2 tal que $dh(\eta) = \xi \circ h$, e que portanto, é tangente à X .

□

A ideia para a classificação de germes de funções analíticas $g : (\mathbb{R}^4, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ através da $\mathcal{R}(X)$ -equivalência é utilizar generalizações dos resultados clássicos relacionados ao grupo \mathcal{R} , que pode ser visto como o caso particular em que $X = \{0\}$. Uma vez que o subgrupo $\mathcal{R}(X)$

```

SINGULAR / Development
A Computer Algebra System for Polynomial Computations / version 4.1.1
                                0<
by: W. Decker, G.-M. Greuel, G. Pfister, H. Schoenemann \ Feb 2018
FB Mathematik der Universitaet, D-67653 Kaiserslautern \
> ring A=0, (x,y,z,w), ds;
> poly h1=y2-x2z;
> poly h2=w2-z3;
> poly h3=xw-yz;
> poly h4=yw-xz2;
> ideal I1=diff(h1,x),diff(h1,y),diff(h1,z),diff(h1,w),h1,h2,h3,h4;
> module M1=syz(I1);
> M1;
M1[1]=2*gen(8)-z*gen(1)-w*gen(2)
M1[2]=2*gen(5)-y*gen(2)-2z*gen(3)
M1[3]=gen(4)
M1[4]=2x*gen(7)+2w*gen(3)+xz*gen(2)
M1[5]=2x*gen(6)-2w*gen(7)-z2*gen(1)-zw*gen(2)
M1[6]=x*gen(1)-2z*gen(3)
M1[7]=2y*gen(7)+yz*gen(2)-xw*gen(2)
M1[8]=2y*gen(6)-w2*gen(2)+z3*gen(2)
M1[9]=2y*gen(3)+x2*gen(2)
M1[10]=y*gen(1)+xz*gen(2)
M1[11]=2z*gen(7)+w*gen(1)+z2*gen(2)
>

```

Figura 7 – Cálculo de $\Theta(X)$ utilizando o software Singular - Parte 1.

```

> ideal I2=diff(h2,x),diff(h2,y), diff(h2,z), diff(h2,w),h1,h2,h3,h4;
> module M2=syz(I2);
> M2;
M2[1]=6*gen(8)-2x*gen(3)-3y*gen(4)
M2[2]=6*gen(6)-2z*gen(3)-3w*gen(4)
M2[3]=gen(2)
M2[4]=gen(1)
M2[5]=6y*gen(7)+6z*gen(5)-2x2*gen(3)-3xy*gen(4)
M2[6]=2y*gen(3)-6z*gen(7)+3xz*gen(4)
M2[7]=2w*gen(7)+yz*gen(4)-xw*gen(4)
M2[8]=2w*gen(5)-y2*gen(4)+x2z*gen(4)
M2[9]=2w*gen(3)+3z2*gen(4)
>

```

Figura 8 – Cálculo de $\Theta(X)$ utilizando o software Singular - Parte 2.

é um dos “subgrupos geométricos” de Damon do grupo \mathcal{H} , existem versões dos teoremas de desdobramentos e determinação finita para este subgrupo. Nesta classificação, as órbitas são obtidas através de um processo indutivo no nível dos jatos e o Método da Transversal Completa é também adaptado para essa ação.

Definimos o \mathcal{E}_4 -módulo $\Theta_1(X) = \{\xi \in \Theta(X); j^1\xi = 0\}$. Consequentemente, pela Proposição 5.2,

$$\Theta_1(X) = \mathcal{M}_4 \cdot \{\xi_1, \dots, \xi_7\} + \mathcal{E}_4 \cdot \{\xi_8, \dots, \xi_{13}\}.$$

```

> ideal I3=diff(h3,x),diff(h3,y),diff(h3,z),diff(h3,w),h1,h2,h3,h4;
> module M3=syz(I3);
> M3;
M3[1]=gen(8)+w*gen(3)+z2*gen(4)
M3[2]=gen(7)-z*gen(3)-w*gen(4)
M3[3]=gen(6)-w*gen(1)-z2*gen(2)
M3[4]=gen(5)+y*gen(3)+xz*gen(4)
M3[5]=x*gen(3)+y*gen(4)
M3[6]=x*gen(2)+z*gen(4)
M3[7]=x*gen(1)-w*gen(4)
M3[8]=y*gen(2)-z*gen(3)
M3[9]=y*gen(1)+w*gen(3)
M3[10]=z*gen(1)+w*gen(2)
>

```

Figura 9 – Cálculo de $\Theta(X)$ utilizando o software Singular - Parte 3.

```

> ideal I4=diff(h4,x),diff(h4,y),diff(h4,z),diff(h4,w),h1,h2,h3,h4;
> module M4=syz(I4);
> M4;
M4[1]=2*gen(8)-z*gen(3)-2w*gen(4)
M4[2]=gen(7)-x*gen(2)+z*gen(4)
M4[3]=gen(6)-z*gen(1)-w*gen(2)
M4[4]=2*gen(5)-x*gen(3)-2y*gen(4)
M4[5]=2x*gen(1)-z*gen(3)
M4[6]=y*gen(3)+2xz*gen(4)
M4[7]=y*gen(2)-w*gen(4)
M4[8]=y*gen(1)+z2*gen(4)
M4[9]=w*gen(3)+2xz*gen(2)
M4[10]=w*gen(1)+z2*gen(2)
>

```

Figura 10 – Cálculo de $\Theta(X)$ utilizando o software Singular - Parte 4.

Temos também o subgrupo

$$\mathcal{R}_1(X) = \{h \in \mathcal{R}(X); j^1 h(0) = \text{Id}\},$$

em que Id denota a identidade. Para cada $f \in \mathcal{E}_4$, $\Theta(X) \cdot f = \{\xi(f) : \xi \in \Theta(X)\}$. Uma definição similar é feita para $\Theta_1(X) \cdot f$. Além disso, definimos os *espaços tangentes* às $\mathcal{R}(X)$ -órbitas de f :

$$L\mathcal{R}_1(X) \cdot f = \Theta_1(X) \cdot f, L\mathcal{R}(X) \cdot f = L\mathcal{R}_e(X) \cdot f = \Theta(X) \cdot f.$$

A última igualdade acima ocorre porque todos os elementos de $\Theta(X)$ se anulam na origem.

$$\text{A } \mathcal{R}(X)\text{-codimensão é dada por } d(f, \mathcal{R}(X)) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{E}_4/L\mathcal{R}(X) \cdot f).$$

Os próximos resultados que enunciaremos são auxiliares para a demonstração da $\mathcal{R}(X)$ -classificação de germes de funções e são válidos para qualquer subvariedade reduzida X . O primeiro resultado que apresentamos é uma versão adaptada para o grupo $\mathcal{R}(X)$ do Método da Transversal Completa.

```

> module N1=-z*gen(1)-w*gen(2), -y*gen(2)-2z*gen(3), gen(4), 2w*gen(3)+xz*gen(2), -z
2*gen(1)-zw*gen(2), x*gen(1)-2z*gen(3), yz*gen(2)-xw*gen(2), -w2*gen(2)+z3*gen(2), 2
y*gen(3)+x2*gen(2), y*gen(1)+xz*gen(2), w*gen(1)+z2*gen(2);
> module N2=-2x*gen(3)-3y*gen(4), -2z*gen(3)-3w*gen(4), gen(2), gen(1), -2x2*gen(3)-
3xy*gen(4), 2y*gen(3)+3xz*gen(4), yz*gen(4)-xw*gen(4), -y2*gen(4)+x2z*gen(4), 2w*gen
(3)+3z2*gen(4);
> module N3=w*gen(3)+z2*gen(4), -z*gen(3)-w*gen(4), -w*gen(1)-z2*gen(2), y*gen(3)+x
z*gen(4), x*gen(3)+y*gen(4), x*gen(2)+z*gen(4), x*gen(1)-w*gen(4), y*gen(2)-z*gen(3)
, y*gen(1)+w*gen(3), z*gen(1)+w*gen(2);
> module N4=-z*gen(3)-2w*gen(4), -x*gen(2)+z*gen(4), -z*gen(1)-w*gen(2), -x*gen(3)-
2y*gen(4), 2x*gen(1)-z*gen(3), y*gen(3)+2xz*gen(4), y*gen(2)-w*gen(4), y*gen(1)+z2*g
en(4), w*gen(3)+2xz*gen(2), w*gen(1)+z2*gen(2);
> intersect(N1,N2,N3,N4);
_[1]=x*gen(1)+y*gen(2)
_[2]=2y*gen(3)+x2*gen(2)+3xz*gen(4)
_[3]=y*gen(2)+2z*gen(3)+3w*gen(4)
_[4]=y*gen(1)+xz*gen(2)
_[5]=z*gen(1)+w*gen(2)
_[6]=2w*gen(3)+xz*gen(2)+3z2*gen(4)
_[7]=w*gen(1)+z2*gen(2)
_[8]=y2*gen(4)-x2z*gen(4)
_[9]=yz*gen(4)-xw*gen(4)
_[10]=2z2*gen(3)+xw*gen(2)+3zw*gen(4)
_[11]=yw*gen(4)-xz2*gen(4)
_[12]=w2*gen(4)-z3*gen(4)
_[13]=w2*gen(2)-z3*gen(2)
>

```

Figura 11 – Cálculo de $\Theta(X)$ utilizando o software Singular - Parte 5.

Proposição 5.3. (BRUCE; WEST, 1998, p. 26) Seja $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ um germe suave e h_1, \dots, h_r polinômios homogêneos de grau $k+1$ satisfazendo a seguinte propriedade:

$$\mathcal{M}_n^{k+1} \subset L\mathcal{R}_1(X) \cdot f + \mathbb{R} \cdot \{h_1, \dots, h_r\} + \mathcal{M}_n^{k+2}.$$

Então, qualquer germe g tal que $j^k f(0) = j^k g(0)$ é $\mathcal{R}_1(X)$ -equivalente a um germe da forma $f + \sum_{i=1}^r u_i h_i + \phi$, onde $\phi \in \mathcal{M}_n^{k+2}$. O subespaço vetorial $\mathbb{R} \cdot \{h_1, \dots, h_r\}$ é chamado de $(k+1)$ - $\mathcal{R}(X)$ -transversal completa de f .

Definição 5.4. Um germe de função $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ é k - $\mathcal{R}(X)$ -determinado se todos os germes de funções tais que possuem o mesmo k -jato que f são $\mathcal{R}(X)$ -equivalentes ao germe f .

Corolário 5.5. (BRUCE; WEST, 1998, p. 28) São verdadeiras as seguintes afirmações:

- (i) Se $L\mathcal{R}_1(X) \cdot f + \mathcal{M}_4^{k+2} \supset \mathcal{M}_4^{k+1}$, então f é k - $\mathcal{R}(X)$ -determinado;
- (ii) Se todo campo de vetor em $\Theta(X)$ se anula na origem e $\Theta(X) \cdot f + \mathcal{M}_4^{k+2} \supset \mathcal{M}_4^{k+1}$, então f é $(k+1)$ - $\mathcal{R}(X)$ -determinado.

Definição 5.6. Um germe suave de uma família de funções a 1-parâmetro $F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ tal que $F(0, t) = 0$ para valores pequenos de t é chamada k - $\mathcal{R}(X)$ -trivial se existe um

germe de uma família a 1-parâmetro de difeomorfismos $H : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$, com H_t preservando X , tal que $H(x, 0) = x$, $H(0, t) = 0$ (para valores de t pequenos) e $F(H(x, t), t) = F(x, 0) + \psi(x, t)$ para algum germe de aplicação $\psi \in \mathcal{M}_n^{k+1} \subset \mathcal{E}_{n+1}$. Se $\psi \equiv 0$, então F é chamada $\mathcal{R}(X)$ -trivial.

Temos o seguinte critério de trivialidade.

Proposição 5.7. (BRUCE; WEST, 1998, p. 25) Seja $F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ uma família suave de funções tais que $F(0, t) = 0$ para t suficientemente pequeno. Além disso, sejam ξ_1, \dots, ξ_p campos de vetores em $\Theta(X)$ que se anulam na origem. Então, a família F é k - $\mathcal{R}(X)$ -trivial se

$$\frac{\partial F}{\partial t} \in \langle \xi_1(F), \dots, \xi_p(F) \rangle + \mathcal{M}_n^{k+1} \subset \mathcal{E}_{n+1}.$$

Dois famílias de germes de funções F e $G : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^a, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ são $P - \mathcal{R}^+(X)$ -equivalentes se existe um germe de difeomorfismo $\Psi : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^a, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^a, (0, 0))$ preservando $(X \times \mathbb{R}^a, (0, 0))$ dado na forma $\Psi(x, u) = (\alpha(x, u), \psi(u))$ e um germe $c : (\mathbb{R}^a, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $G(x, u) = F(\Psi(x, u)) + c(u)$.

Uma família F é chamada uma $\mathcal{R}^+(X)$ -deformação versal de $F_0(x) = F(x, 0)$ se qualquer outra deformação G de F_0 puder ser escrita na forma $G(x, u) = F(\Psi(x, u)) + c(u)$ para germes de aplicação suaves Ψ e c como acima, com Ψ não necessariamente um germe de difeomorfismo.

Proposição 5.8. (BRUCE; WEST, 1998, p. 24) Uma deformação $F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^a, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ de um germe de função f é $\mathcal{R}^+(X)$ -versal se, e somente se,

$$L_{\mathcal{R}_e(X)} \cdot f + \mathbb{R} \cdot \{1, \dot{F}_1, \dots, \dot{F}_a\} = \mathcal{E}_4,$$

onde $\dot{F}_i(x) = \frac{\partial F}{\partial u_i}(x, 0)$.

Podemos agora aplicar os resultados anteriores para demonstrar o próximo teorema. Aqui tomaremos o caso particular de $n = 4$, e como vimos na Proposição 5.2, todos os campos de vetores tangentes à nossa superfície modelo X se anulam na origem.

Teorema 5.9. Seja X o germe da \mathcal{A} -superfície modelo localmente parametrizada por $f(x, y) = (x, xy, y^2, y^3)$. Nestas condições, qualquer germe de submersão $\mathcal{R}(X)$ -finitamente determinado em \mathcal{M}_4 com $\mathcal{R}(X)$ -codimensão ≤ 3 é $\mathcal{R}(X)$ -equivalente a algum dos germes listados na Tabela 7.

Demonstração. Nesta demonstração consideraremos os campos ξ_1, \dots, ξ_{13} dados como na Proposição 5.2. Além disso, as mudanças de coordenadas lineares em $\mathcal{R}(X)$ obtidas a partir da integração dos 1-jatos dos campos vetoriais em $\Theta(X)$ são as listadas abaixo, η_i com $i = 1, \dots, 7$. A mudança η_8 não é obtida de integração de 1-jatos do Derlog, mas também preserva a superfície

Tabela 7 – Germes de submersão em \mathcal{M}_4 com $\mathcal{R}(X)$ -codimension ≤ 3 .

Forma normal	$d(f, \mathcal{R}(X))$	$\mathcal{R}(X)$ -deformação versal
X	0	X
$\pm Z \pm X^2$	1	$\pm Z \pm X^2 + a_1 X$
$\pm Z + X^3$	2	$\pm Z + X^3 + a_1 X + a_2 X^2$
$\pm Z \pm X^4$	3	$\pm Z \pm X^3 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3$
Y	2	$Y + a_1 X + a_2 Z$
$\pm W \pm X^2$	3	$\pm W \pm X^2 + a_1 X + a_2 Y + a_3 Z$

modelo:

$$\begin{aligned}
 \eta_1 &= (e^\alpha X, e^\alpha Y, Z, W), \quad \alpha \in \mathbb{R}, & \eta_2 &= (X, Y, Z + \alpha Y, W), \quad \alpha \neq 0, \\
 \eta_3 &= (X, e^\alpha Y, e^{2\alpha} Z, e^{3\alpha} W), \quad \alpha \in \mathbb{R}, & \eta_4 &= (X + \alpha Y, Y, Z, W), \quad \alpha \neq 0, \\
 \eta_5 &= (X + \alpha Z, Y + \alpha W, Z, W), \quad \alpha \neq 0, & \eta_6 &= (X, Y, Z + \alpha W, W), \quad \alpha \neq 0, \\
 \eta_7 &= (X + \alpha W, Y, Z, W), \quad \alpha \neq 0, & \eta_8 &= (-X, -Y, Z, W).
 \end{aligned}$$

Considere um 1-jato não nulo dado por $g = aX + bY + cZ + dW$. Aqui, a notação \sim^{η_i} significa $\mathcal{R}(X)$ -equivalência via mudança de coordenadas η_i , $i = 1, \dots, 8$.

- Se $a \neq 0$, temos:

$$\begin{aligned}
 aX + bY + cZ + dW &\sim^{\eta_4} aX + cZ + dW \\
 &\sim^{\eta_5} aX + dW \\
 &\sim^{\eta_7} aX \\
 &\sim^{\eta_1} \pm X \\
 &\sim^{\eta_8} X.
 \end{aligned}$$

- Se $a = 0$ e $c \neq 0$:

$$\begin{aligned}
 bY + cZ + dW &\sim^{\eta_2} cZ + dW \\
 &\sim^{\eta_6} cZ \\
 &\sim^{\eta_3} \pm Z.
 \end{aligned}$$

- Se $a = c = 0$ e $b \neq 0$

$$\begin{aligned}
 bY + dW &\sim^{\eta_5} bY \\
 &\sim^{\eta_1} \pm Y \\
 &\sim^{\eta_8} Y.
 \end{aligned}$$

- Por fim, se $a = b = c = 0$ e $d \neq 0$, temos:

$$dW \sim^{\eta_3} \pm W$$

Portanto, as quatro possibilidades para o 1-jato de g são: $X, \pm Z, Y$ e $\pm W$.

Vamos analisar separadamente cada uma das quatro possibilidades. Em cada caso, vamos calcular a transversal completa, formas normais finitamente determinadas e a $\mathcal{R}(X)$ -codimensão dessas formas normais. No entanto, a classificação será feita para germes com $\mathcal{R}(X)$ -codimensão menor ou igual a três.

(i) Considere inicialmente o 1-jato $g(X, Y, Z, W) = X$. Os geradores de $\Theta(X) \cdot g$ são:

$$\begin{aligned}\xi_1(g) &= X, \quad \xi_2(g) = \xi_3(g) = \xi_6(g) = \xi_8(g) = \dots = \xi_{13}(g) = 0, \\ \xi_4(g) &= Y, \quad \xi_5(g) = Z, \quad \xi_7(g) = W.\end{aligned}$$

Note que uma vez que todo campo de vetores $\xi_i \in \Theta(X)$, se anula na origem para todo $i \in \{1, \dots, 13\}$ e $\mathcal{M}_4 \subset \Theta(X) \cdot g + \mathcal{M}_4^2$, então g é 1- $\mathcal{R}(X)$ -determinado pelo Corolário 5.5. Além disso,

$$d(g, \mathcal{R}(X)) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{M}_4 / \Theta(X) \cdot g) = 0,$$

ou seja, g é estável.

(ii) Agora, considere o 1-jato $g(X, Y, Z, W) = \pm Z$. Desta vez, os geradores de $\Theta(X) \cdot g$ são:

$$\begin{aligned}\xi_1(g) &= \xi_4(g) = \xi_5(g) = \xi_7(g) = \xi_8(g) = \xi_9(g) = \xi_{11}(g) = \xi_{12}(g) = \xi_{13}(g) = 0, \\ \xi_2(g) &= \pm Y, \quad \xi_3(g) = \pm 2Z, \quad \xi_6(g) = \pm 2W, \quad \xi_{10}(g) = \pm 2Z^2.\end{aligned}$$

é importante lembrar que, neste caso, temos

$$L\mathcal{R}_1(X) \cdot g = \mathcal{M}_4\{\pm 2Y, \pm 2Z, \pm 2W\} + \mathcal{E}_4\{\pm 2Z^2\}.$$

Tome $h_1(X, Y, Z, W) = X^2$ e note que

$$L\mathcal{R}_1(X) \cdot g + \mathbb{R} \cdot \{h_1\} + \mathcal{M}_4^3 \supset \mathcal{M}_4,$$

ou seja, aplicando a Proposição 5.3, a 2- $\mathcal{R}(X)$ -transversal completa de g é dada por $\pm Z + \beta X^2$. Se $\beta \neq 0$, $\pm Z + \beta X^2 \sim_{\eta_1} g_2(X, Y, Z, W) = \pm Z + \pm X^2$. Os geradores de $\Theta(X) \cdot g_2$ são:

$$\begin{aligned}\xi_1(g_2) &= \pm 2X^2, \quad \xi_2(g_2) = \pm 2Y, \quad \xi_3(g_2) = \pm 2Z, \quad \xi_4(g_2) = \pm 2XY, \quad \xi_5(g_2) = \pm 2XZ, \\ \xi_6(g_2) &= \pm 2W, \quad \xi_7(g_2) = \pm 2XW, \quad \xi_8(g_2) = \xi_9(g_2) = \xi_{11}(g_2) = \xi_{12}(g_2) = \xi_{13}(g_2) = 0 \\ \xi_{10}(g_2) &= \pm 2Z^2.\end{aligned}$$

Nessas condições, $\mathcal{M}_4^2 \subset \Theta(X) \cdot g_2 + \mathcal{M}_4^3$ e assim, g_2 é 2- $\mathcal{R}(X)$ -determinado pelo Corolário 5.5. Por outro lado, se $\beta = 0$, devemos olhar para a 3- $\mathcal{R}(X)$ -transversal completa de g , que é dada por $\pm Z + \gamma X^3$. Se $\gamma \neq 0$, $\pm Z + \beta X^3 \sim_{\eta_1} \pm Z \pm X^3 \sim_{\eta_8} g_3(X, Y, Z, W) = \pm Z + X^3$ e os geradores de $\Theta(X) \cdot g_3$ são:

$$\begin{aligned}\xi_1(g_3) &= 3X^3, \quad \xi_2(g_3) = \pm 2Y, \quad \xi_3(g_3) = \pm 2Z, \quad \xi_4(g_3) = 3X^2Y, \quad \xi_5(g_3) = 3X^2Z, \\ \xi_6(g_3) &= \pm 2W, \quad \xi_7(g_3) = 3X^2W, \quad \xi_8(g_3) = \xi_9(g_3) = \xi_{11}(g_3) = \xi_{12}(g_3) = \xi_{13}(g_3) = 0 \\ \xi_{10}(g_3) &= \pm 2Z^2\end{aligned}$$

e $\mathcal{M}_4^3 \subset \Theta(X) \cdot g_3 + \mathcal{M}_4^4$, ou seja, g_3 é 3- $\mathcal{R}(X)$ -determinado. Se $\gamma = 0$, olhamos para a 4- $\mathcal{R}(X)$ -transversal completa de g , e assim por diante, obtendo através de um processo

indutivo que a k - $\mathcal{R}(X)$ -transversal completa de g é dada por $\pm Z + \delta X^k$. Se $\delta \neq 0$, $\pm Z + \delta X^k \sim_{\eta_1} g_k(X, Y, Z, W) = \pm Z + (-1)^{k+1} X^k$ e os geradores de $\Theta(X) \cdot g_k$ são:

$$\begin{aligned}\xi_1(g_k) &= (-1)^{k+1} kX^k, \xi_2(g_k) = \pm 2Y, \xi_3(g_k) = \pm 2Z, \xi_4(g_k) = (-1)^{k+1} kX^{k-1}Y, \\ \xi_5(g_k) &= (-1)^{k+1} kX^{k-1}Z, \xi_6(g_k) = \pm 2W, \xi_7(g_k) = (-1)^{k+1} X^{k-1}W, \\ \xi_8(g_k) &= \xi_9(g_k) = \xi_{11}(g_k) = \xi_{12}(g_k) = \xi_{13}(g_k) = 0, \xi_{10}(g_k) = \pm 2Z^2.\end{aligned}$$

Mais uma vez, $\mathcal{M}_4^k \subset \Theta(X) \cdot g_k + \mathcal{M}_4^{k+1}$ e g_k é k - $\mathcal{R}(X)$ -determinado. Além disso,

$$d(g_k, \mathcal{R}(X)) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{M}_4/\Theta(X) \cdot g_k) = k - 1.$$

(iii) Considere o 1-jato $g(X, Y, Z, W) = Y$. Os geradores de $\Theta(X) \cdot g$ são:

$$\begin{aligned}\xi_1(g) &= \xi_3(g) = Y, \xi_2(g) = X^2, \xi_4(g) = \xi_6(g) = XZ, \xi_5(g) = W, \xi_7(g) = Z^2, \\ \xi_8(g) &= \xi_9(g) = \xi_{11}(g) = \xi_{12}(g) = 0, \xi_{10}(g) = XW, \xi_{13}(g) = W^2 - Z^3.\end{aligned}$$

A 2- $\mathcal{R}(X)$ transversal completa de g é dada por $g_2(X, Y, Z, W) = Y + \beta X^2 + \gamma Z^2 + \delta XZ$ e os geradores de $\Theta(X) \cdot g_2$ são:

$$\begin{aligned}\xi_1(g_2) &= 2\beta X^2 + \delta XZ + Y, \xi_2(g_2) = X^2 + 4\gamma YZ + 2\delta XY, \\ \xi_3(g_2) &= Y + 4\gamma Z^2 + 2\delta XZ, \xi_4(g_2) = 2\beta XY + \delta YZ + XZ, \\ \xi_5(g_2) &= 2\beta XZ + \delta Z^2 + W, \xi_6(g_2) = XZ + 4\gamma ZW + 2\delta XW, \\ \xi_7(g_2) &= 2\beta XW + \delta ZW + Z^2, \xi_8(g_2) = \xi_9(g_2) = \xi_{11}(g_2) = \xi_{12}(g_2) = 0, \\ \xi_{10}(g_2) &= XW + 4\gamma Z^3 + 2\delta XZ^2, \xi_{13}(g_2) = W^2 - Z^3.\end{aligned}$$

Dos geradores acima é importante observar que

$$X\xi_5(g_2) \equiv XW \pmod{\mathcal{M}_4^3} \text{ e } Z\xi_5(g_2) \equiv ZW \pmod{\mathcal{M}_4^3}.$$

Dessa forma, também utilizando $\xi_7(g_2)$, mostramos que

$$\frac{\partial g_2}{\partial \gamma} = Z^2 \in \langle \xi_1(g_2), \dots, \xi_{13}(g_2) \rangle + \mathcal{M}_4^3 \subset \mathcal{E}_5,$$

ou seja, tomando g_2 como uma família a 1-parâmetro em γ , g_2 é 2- $\mathcal{R}(X)$ -trivial pela Proposição 5.7. Tomamos então $\bar{g}_2 = Y + \beta X^2 + \delta XZ$. Calculando os geradores de $\Theta(X) \cdot \bar{g}_2$, obtemos:

$$\begin{aligned}\xi_1(\bar{g}_2) &= 2\beta X^2 + \delta XZ + Y, \xi_2(\bar{g}_2) = X^2 + 2\delta XY, \\ \xi_3(\bar{g}_2) &= Y + 2\delta XZ, \xi_4(\bar{g}_2) = 2\beta XY + \delta YZ + XZ, \\ \xi_5(\bar{g}_2) &= 2\beta XZ + \delta Z^2 + W, \xi_6(\bar{g}_2) = XZ + 2\delta XW, \\ \xi_7(\bar{g}_2) &= 2\beta XW + \delta ZW + Z^2, \xi_8(\bar{g}_2) = \xi_9(\bar{g}_2) = \xi_{11}(\bar{g}_2) = \xi_{12}(\bar{g}_2) = 0, \\ \xi_{10}(\bar{g}_2) &= XW + 2\delta XZ^2, \xi_{13}(\bar{g}_2) = W^2 - Z^3.\end{aligned}$$

Dos geradores acima, podemos notar que

$$X\xi_3(\bar{g}_2) \equiv XY \pmod{\mathcal{M}_4^3} \text{ e } Z\xi_3(\bar{g}_2) \equiv YZ \pmod{\mathcal{M}_4^3}.$$

Se considerarmos \bar{g}_2 como uma família a 1-parâmetro em δ ,

$$\frac{\partial \bar{g}_2}{\partial \delta} = XZ \in \langle \xi_1(\bar{g}_2), \dots, \xi_{13}(\bar{g}_2) \rangle + \mathcal{M}_4^3 \subset \mathcal{E}_5,$$

o que nos garante que \bar{g}_2 é 2- $\mathcal{R}(X)$ -trivial. Por fim, tomemos $\tilde{g}_2 = Y + \beta X^2$. Os geradores de $\Theta(X) \cdot \tilde{g}_2$ são dados por:

$$\begin{aligned} \xi_1(\tilde{g}_2) &= 2\beta X^2, \quad \xi_2(\tilde{g}_2) = X^2, \\ \xi_3(\tilde{g}_2) &= Y, \quad \xi_4(\tilde{g}_2) = 2\beta XY + XZ, \\ \xi_5(\tilde{g}_2) &= 2\beta XZ + W, \quad \xi_6(\tilde{g}_2) = XZ, \\ \xi_7(\tilde{g}_2) &= 2\beta XW + Z^2, \quad \xi_8(\tilde{g}_2) = \xi_9(\tilde{g}_2) = \xi_{11}(\tilde{g}_2) = \xi_{12}(\tilde{g}_2) = 0, \\ \xi_{10}(\tilde{g}_2) &= XW, \quad \xi_{13}(\tilde{g}_2) = W^2 - Z^3. \end{aligned}$$

Considerando \tilde{g}_2 como uma família a 1-parâmetro β , temos

$$\frac{\partial \tilde{g}_2}{\partial \beta} = X^2 \in \langle \xi_1(\tilde{g}_2), \dots, \xi_{13}(\tilde{g}_2) \rangle + \mathcal{M}_4^3 \subset \mathcal{E}_5,$$

ou seja, \tilde{g}_2 é 2- $\mathcal{R}(X)$ -trivial. Por fim, notemos que $g(X, Y, Z, W) = Y$ é 2- $\mathcal{R}(X)$ -determinado, pois $\mathcal{M}_4^2 \subset \Theta(X) \cdot g + \mathcal{M}_4^3$ e

$$d(g, \mathcal{R}(X)) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{M}_4 / \Theta(X) \cdot g) = 2.$$

(iv) Por último, consideramos o 1-jato $g(X, Y, Z, W) = \pm W$. Para este germe, os geradores de $\Theta(X) \cdot g$ são:

$$\begin{aligned} \xi_1(g) &= \xi_4(g) = \xi_5(g) = \xi_7(g) = \xi_{13}(g) = 0, \quad \xi_2(g) = \pm 3XZ \\ \xi_3(g) &= \pm 3W, \quad \xi_6(g) = \pm 3Z^2, \quad \xi_8(g) = \pm(Y^2 - X^2Z), \quad \xi_9(g) = \pm(YZ - XW), \\ \xi_{10}(g) &= \pm 3ZW, \quad \xi_{11}(g) = \pm(YW - XZ^2), \quad \xi_{12}(g) = \pm(W^2 - Z^3). \end{aligned}$$

A 2- $\mathcal{R}(X)$ transversal completa é dada por

$$g_2 = \pm W + \alpha X^2 + \beta Z^2 + \gamma XY + \delta XZ$$

e os geradores de $\Theta(X) \cdot G$ são:

$$\begin{aligned} \xi_1(g_2) &= 2\alpha X^2 + 2\gamma XY + \delta XZ, \quad \xi_2(g_2) = \gamma X^3 + 4\beta YZ + 2\delta XY \pm 3XZ, \\ \xi_3(g_2) &= \gamma XY + 4\beta Z^2 + 2\delta XZ \pm 3W, \quad \xi_4(g_2) = 2\alpha XY + \gamma Y^2 + \delta YZ + \gamma X^2Z, \\ \xi_5(g_2) &= 2\alpha XZ + \gamma YZ + \delta Z^2 + \gamma XW, \quad \xi_6(g_2) = \gamma X^2Z + 4\beta ZW + 2\delta XW \pm 3Z^2, \\ \xi_7(g_2) &= 2\alpha XW + \gamma YW + \delta ZW + \gamma XZ^2, \quad \xi_8(g_2) = \pm(Y^2 - X^2Z), \\ \xi_9(g_2) &= \pm(YZ - XW), \quad \xi_{10}(g_2) = \gamma X^2W + 4\beta Z^3 + 2\delta XZ^2 \pm 3ZW, \\ \xi_{11}(g_2) &= \pm(YW - XZ^2), \quad \xi_{12}(g_2) = \pm(W^2 - z^3), \quad \xi_{13}(g_2) = \gamma X(W^2 - Z^3). \end{aligned}$$

Note que

$$Z\xi_3(g_2) \equiv \pm 3ZW \pmod{\mathcal{M}_4^3} \text{ e } X\xi_3(g_2) \equiv \pm 3XW \pmod{\mathcal{M}_4^3}.$$

Dessa forma, como $\xi_6(g_2) \equiv 4\beta ZW + 2\delta XW \pm 3Z^2 \pmod{\mathcal{M}_4^3}$, temos que

$$\frac{\partial g_2}{\partial \beta} = Z^2 \in \langle \xi_1(g_2), \dots, \xi_{13}(g_2) \rangle + \mathcal{M}_4^3 \subset \mathcal{E}_5,$$

ou seja, considerando g_2 como uma família a 1-parâmetro em β , g_2 é 2- $\mathcal{R}(X)$ -trivial. Podemos então tomar $\bar{g}_2 = \pm W + \alpha X^2 + \gamma XY + \delta XZ$. Os geradores de $\Theta(X) \cdot G_1$ são:

$$\begin{aligned} \xi_1(\bar{g}_2) &= 2\alpha X^2 + 2\gamma XY + \delta XZ, & \xi_2(\bar{g}_2) &= \gamma X^3 + 2\delta XY \pm 3XZ, \\ \xi_3(\bar{g}_2) &= \gamma XY + 2\delta XZ \pm 3W, & \xi_4(\bar{g}_2) &= 2\alpha XY + \gamma Y^2 + \delta YZ + \gamma X^2 Z, \\ \xi_5(\bar{g}_2) &= 2\alpha XZ + \gamma YZ + \delta Z^2 + \gamma XW, & \xi_6(\bar{g}_2) &= \gamma X^2 Z + 2\delta XW \pm 3Z^2, \\ \xi_7(\bar{g}_2) &= 2\alpha XW + \gamma YW + \delta ZW + \gamma XZ^2, & \xi_8(\bar{g}_2) &= \pm(Y^2 - X^2 Z), \\ \xi_9(\bar{g}_2) &= \pm(YZ - XW), & \xi_{10}(\bar{g}_2) &= \gamma X^2 W + 2\delta XZ^2 \pm 3ZW, \\ \xi_{11}(\bar{g}_2) &= \pm(YW - XZ^2), & \xi_{12}(\bar{g}_2) &= \pm(W^2 - Z^3), & \xi_{13}(\bar{g}_2) &= \gamma X(W^2 - Z^3). \end{aligned}$$

Suponha $\alpha \neq 0$. Ao tomarmos \bar{g}_2 como uma família a 1-parâmetro em γ , temos

$$\xi_4(\bar{g}_2) \equiv 2\alpha XY + \gamma Y^2 + \delta YZ \pmod{\mathcal{M}_4^3} \text{ e } X\xi_3(\bar{g}_2) \equiv \pm 3XW \pmod{\mathcal{M}_4^3}.$$

Consequentemente, $\pm YZ \in \Theta(X) \cdot \bar{g}_2$ e $\xi_8(\bar{g}_2) \equiv \pm Y^2 \pmod{\mathcal{M}_4^3}$. Dessa forma, obtemos que $2\alpha XY \in \langle \xi_1(\bar{g}_2), \dots, \xi_{13}(\bar{g}_2) \rangle$, via $\xi_4(\bar{g}_2)$. Uma vez que $\alpha \neq 0$, é válido que

$$\frac{\partial \bar{g}_2}{\partial \gamma} = XY \in \langle \xi_1(\bar{g}_2), \dots, \xi_{13}(\bar{g}_2) \rangle + \mathcal{M}_4^3 \subset \mathcal{E}_5,$$

mostrando assim que \bar{g}_2 é 2- $\mathcal{R}(X)$ -trivial. Tomemos então $\tilde{g}_2 = \pm W + \alpha X^2 + \delta XZ$. Os geradores de $\Theta(X) \cdot \tilde{g}_2$ são:

$$\begin{aligned} \xi_1(\tilde{g}_2) &= 2\alpha X^2 + \delta XZ, & \xi_2(\tilde{g}_2) &= 2\delta XY \pm 3XZ, \\ \xi_3(\tilde{g}_2) &= 2\delta XZ \pm 3W, & \xi_4(\tilde{g}_2) &= 2\alpha XY + \delta YZ, \\ \xi_5(\tilde{g}_2) &= 2\alpha XZ + \delta Z^2, & \xi_6(\tilde{g}_2) &= 2\delta XW \pm 3Z^2, \\ \xi_7(\tilde{g}_2) &= 2\alpha XW + \delta ZW, & \xi_8(\tilde{g}_2) &= \pm(Y^2 - X^2 Z), \\ \xi_9(\tilde{g}_2) &= \pm(YZ - XW), & \xi_{10}(\tilde{g}_2) &= 2\delta XZ^2 \pm 3ZW, \\ \xi_{11}(\tilde{g}_2) &= \pm(YW - XZ^2), & \xi_{12}(\tilde{g}_2) &= \pm(W^2 - Z^3), & \xi_{13}(\tilde{g}_2) &= 0. \end{aligned}$$

Dos geradores acima, temos que $X\xi_3(\tilde{g}_2) \equiv \pm 3W \pmod{\mathcal{M}_4^3}$, e assim, via $\xi_6(\tilde{g}_2)$, obtemos $\pm 3Z^2 \in \langle \xi_1(\tilde{g}_2), \dots, \xi_{13}(\tilde{g}_2) \rangle \subset \mathcal{E}_5$. Consequentemente, através de $\xi_2(\tilde{g}_2)$ obtemos $2\alpha XZ$, e como $\alpha \neq 0$, temos

$$\frac{\partial \tilde{g}_2}{\partial \delta} = XZ \in \langle \xi_1(\tilde{g}_2), \dots, \xi_{13}(\tilde{g}_2) \rangle + \mathcal{M}_4^3 \subset \mathcal{E}_5,$$

ou seja, tomando \tilde{g}_2 como uma família a 1-parâmetro em δ , mostramos que esta família é 2- $\mathcal{R}(X)$ -trivial. Por fim, obtemos $\pm W + \alpha X^2$. No entanto, note que

$$\pm W + \alpha X^2 \sim_{\eta_1} \pm W \pm X^2 = \hat{g},$$

e os geradores de $\Theta(X) \cdot \hat{g}$ são:

$$\begin{aligned}\xi_1(\hat{g}) &= \pm 2X^2, \quad \xi_2(\hat{g}) = \pm 3XZ, \quad \xi_3(\hat{g}) = \pm 3W, \\ \xi_4(\hat{g}) &= \pm 2XY, \quad \xi_5(\hat{g}) = \pm 2XZ, \quad \xi_6(\hat{g}) = \pm 3Z^2, \\ \xi_7(\hat{g}) &= \pm 2XW, \quad \xi_8(\hat{g}) = \pm (Y^2 - X^2Z), \\ \xi_9(\hat{g}) &= \pm (YZ - XW), \quad \xi_{10}(\hat{g}) = \pm 3ZW, \\ \xi_{11}(\hat{g}) &= \pm (YW - XZ^2), \quad \xi_{12}(\hat{g}) = \pm (W^2 - Z^3), \quad \xi_{13}(\hat{g}) = 0.\end{aligned}$$

Note que $\mathcal{M}_4^2 \subset \Theta(X) \cdot \hat{g} + \mathcal{M}_4^3$, e logo, pelo Corolário 5.5, \hat{g} é 2- $\mathcal{R}(X)$ -determinado. Além disso,

$$d(\hat{g}, \mathcal{R}(X)) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{M}_4/\Theta(X) \cdot \hat{g}) = 3.$$

Por último, suponha $\alpha = 0$. Este caso não entra na nossa classificação por conta da codimensão alta. No entanto, faremos sua classificação aqui para fins de esclarecimento. Tome $\bar{g}_2 = \pm W + \gamma XY + \delta XZ$. Os geradores de $\Theta(X) \cdot \bar{g}_2$ são:

$$\begin{aligned}\xi_1(\bar{g}_2) &= 2\gamma XY + \delta XZ, \quad \xi_2(\bar{g}_2) = \gamma X^3 + 2\delta XY \pm 3XZ, \\ \xi_3(\bar{g}_2) &= \gamma XY + 2\delta XZ \pm 3W, \quad \xi_4(\bar{g}_2) = \gamma Y^2 + \delta YZ + \gamma X^2Z, \\ \xi_5(\bar{g}_2) &= \gamma YZ + \delta Z^2 + \gamma XW, \quad \xi_6(\bar{g}_2) = \gamma X^2Z + 2\delta XW \pm 3Z^2, \\ \xi_7(\bar{g}_2) &= \gamma YW + \delta ZW + \gamma XZ^2, \quad \xi_8(\bar{g}_2) = \pm (Y^2 - X^2Z), \\ \xi_9(\bar{g}_2) &= \pm (YZ - XW), \quad \xi_{10}(\bar{g}_2) = \gamma X^2W + 2\delta XZ^2 \pm 3ZW, \\ \xi_{11}(\bar{g}_2) &= \pm (YW - XZ^2), \quad \xi_{12}(\bar{g}_2) = \pm (W^2 - Z^3), \quad \xi_{13}(\bar{g}_2) = \gamma X(W^2 - Z^3).\end{aligned}$$

As únicas equações que envolvem XY e XZ são $\xi_1(\bar{g}_2)$, $\xi_2(\bar{g}_2)$ e $\xi_3(\bar{g}_2)$. Além disso, não é possível mostrar trivialidade para qualquer um dos parâmetros (γ ou δ). As possibilidades para \bar{g}_2 são, por fim:

$$G \sim \begin{cases} \pm W \pm XY + \delta XZ & \text{se } \gamma \neq 0 \\ \pm W + XZ & \text{se } \gamma = 0. \end{cases}$$

No entanto,

$$W \pm XY + \delta XZ \sim_{\eta_2} \pm W + \delta XZ \sim_{\eta_1 + \eta_8} \pm W + XZ.$$

Assim, consideramos apenas o caso $\bar{g}_2 = \pm W + XZ$ e analisamos a sua 3- $\mathcal{R}(X)$ transversal completa. Os geradores de $\Theta(X) \cdot \bar{g}_2$ são:

$$\begin{aligned}\xi_1(\bar{g}_2) &= XZ, \quad \xi_2(\bar{g}_2) = 2\delta XY \pm 3XZ, \\ \xi_3(\bar{g}_2) &= 2\delta XZ \pm 3W, \quad \xi_4(\bar{g}_2) = YZ, \\ \xi_5(\bar{g}_2) &= Z^2, \quad \xi_6(\bar{g}_2) = 2XW \pm 3Z^2, \\ \xi_7(\bar{g}_2) &= ZW, \quad \xi_8(\bar{g}_2) = \pm (Y^2 - X^2Z), \\ \xi_9(\bar{g}_2) &= \pm (YZ - XW), \quad \xi_{10}(\bar{g}_2) = 2XZ^2 \pm 3ZW, \\ \xi_{11}(\bar{g}_2) &= \pm (YW - XZ^2), \quad \xi_{12}(\bar{g}_2) = \pm (W^2 - Z^3), \quad \xi_{13}(\bar{g}_2) = 0.\end{aligned}$$

O germe \bar{g}_2 não é $\mathcal{R}(X)$ -finitamente determinado, uma vez que não é possível obter potências da forma X^k , para qualquer k . A 3- $\mathcal{R}(X)$ transversal completa é dada por

$g_3 = \pm W + XZ + \lambda X^3$, e os geradores de $\Theta(X) \cdot g_3$ são:

$$\begin{aligned}\xi_1(g_3) &= 3\lambda X^3 + XZ, \quad \xi_2(g_3) = 2XY \pm 3XZ, \\ \xi_3(g_3) &= 2XZ \pm 3W, \quad \xi_4(g_3) = 3\lambda 3X^2Y + YZ, \\ \xi_5(g_3) &= 3\lambda X^2Z + Z^2, \quad \xi_6(g_3) = 2XW \pm 3Z^2, \\ \xi_7(g_3) &= 3\lambda X^2W + ZW, \quad \xi_8(g_3) = \pm(Y^2 - X^2Z), \\ \xi_9(g_3) &= \pm(YZ - XW), \quad \xi_{10}(g_3) = 2XZ^2 \pm 3ZW, \\ \xi_{11}(g_3) &= \pm(YW - XZ^2), \quad \xi_{12}(g_3) = \pm(W^2 - Z^3), \quad \xi_{13}(g_3) = 0.\end{aligned}$$

Todos os monômios de grau 3 com exceção de X^3 podem ser obtidos, e assim, o germe não é 3- $\mathcal{R}(X)$ determinado. Temos então que analisar a 4- $\mathcal{R}(X)$ transversal completa, que é dada por $g_4 = \pm W + XZ + \lambda Z^3 + \mu X^4$. Os geradores de $\Theta(X) \cdot g_4$ são:

$$\begin{aligned}\xi_1(g_4) &= 4\mu X^4 + 3\lambda X^3 + XZ, \quad \xi_2(g_4) = 2XY \pm 3XZ, \\ \xi_3(g_4) &= 2XZ \pm 3W, \quad \xi_4(g_4) = 4\mu X^3Y + 3\lambda 3X^2Y + YZ, \\ \xi_5(g_4) &= 4\mu X^3Z + 3\lambda X^2Z + Z^2, \quad \xi_6(g_4) = 2XW \pm 3Z^2, \\ \xi_7(g_4) &= 4\mu X^3W + 3\lambda X^2W + ZW, \quad \xi_8(g_4) = \pm(Y^2 - X^2Z), \\ \xi_9(g_4) &= \pm(YZ - XW), \quad \xi_{10}(g_4) = 2XZ^2 \pm 3ZW, \\ \xi_{11}(g_4) &= \pm(YW - XZ^2), \quad \xi_{12}(g_4) = \pm(W^2 - Z^3), \quad \xi_{13}(g_4) = 0.\end{aligned}$$

Vamos testar se o germe g_4 é trivial ao considerarmos como uma família a 1-parâmetro μ . Observe que:

$$\begin{aligned}X\xi_1(g_4) &= 3\lambda X^4 + X^2Z & \xi_5(g_4) &= 4\mu X^3Z + 3\lambda X^2Z + Z^2 \\ X\xi_2(g_4) &= 2X^2Y \pm 3X^2Z & \xi_4(g_4) &= 4\mu X^3Y + 3\lambda 3X^2Y + YZ \\ X\xi_2(g_4) &= 2X^2Z + 3XW & \xi_6(g_4) &= 2XW \pm 3Z^2.\end{aligned}$$

Todas as equações acima são vistas módulo \mathcal{M}_4^5 . Além disso, já sabemos que é possível obter X^3Y e X^3Z , de modo que podemos obter $4\mu X^3Y$ e $4\mu X^3Z$. O determinante a seguir contém os coeficientes relativos aos monômios X^4 , X^2Z , X^2Y , XW , Z^2 e YZ das equações listadas acima.

$$\begin{vmatrix} X^4 & X^2Z & X^2Y & XW & Z^2 & YZ \\ \hline 3\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \pm 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \pm 3 & 0 \end{vmatrix} = -6\lambda(4 + 27\lambda).$$

Portanto, se $\lambda \neq 0, -4/27$ então

$$\frac{\partial g_4}{\partial \mu} = X^4 \in \langle \xi_1(g_4), \dots, \xi_{13}(g_4) \rangle + \mathcal{M}_4^5 \subset \mathcal{E}_5,$$

ou seja, g_4 é 2- $\mathcal{R}(X)$ -trivial. Mais ainda, $\bar{g}_4 = \pm W + XZ + \lambda X^3$ com $\lambda \neq 0, -4/27$ é 4- $\mathcal{R}(X)$ determinado e

$$d(\bar{g}_4, \mathcal{R}(X)) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{M}_4/\Theta(X) \cdot \bar{g}_4) = 5,$$

para valores de λ diferentes de $0, -4/27$. O cálculo dessa codimensão foi feito utilizando o software Singular. Na Tabela 8, mostramos o algoritmo utilizado no software Singular para o cálculo da $\mathcal{R}(X)$ -codimensão.

Tabela 8 – Cálculo da $\mathcal{R}(X)$ -codimensão utilizando Singular.

```
>ring r=0, (x,y,z,w), ds;
>ideal i=ξ1(g4),...,ξ13(g4);
>i=groebner(i);
>ideal k=kbase(i);
>k;
```

Os cálculos foram feitos para valores positivos e negativos de λ , sempre respeitando a condição $\lambda \neq 0, -4/27$.

□

5.1 Contato com hiperplanos

O próximo teorema apresenta uma forma normal geral de ordem até 3 para qualquer superfície singular de coposto 1 em \mathbb{R}^4 cuja parametrização local é \mathcal{A} -equivalente à singularidade I_1 .

Teorema 5.10. Seja $f_1 : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$ um germe de aplicação \mathcal{A} -equivalente à $f(x, y) = (x, xy, y^2, y^3)$. Então, existem mudanças de coordenadas suaves na fonte e isometrias lineares na meta tais que f_1 é equivalente à

$$\left(x, xy, \sum_{i+j=2,3} b_{ij}x^i y^j, c_{20}x^2 + \sum_{i+j=3} c_{ij}x^i y^j \right) + O(4),$$

onde $b_{ij}, c_{ij} \in \mathbb{R}$ e $b_{02}c_{03} \neq 0$.

Demonstração. No Lema 4.11 mostramos que

$$f_1 \sim_{\mathcal{R}^2 \times \mathcal{O}(4)} \left(x, xy + \sum_{i+j \geq 3} a_{ij}x^i y^j, \sum_{i+j=2} b_{ij}x^i y^j, c_{20}x^2 \right) + O(3),$$

para constantes a_{ij}, b_{ij} e c_{20} . Considere a seguinte mudança de coordenadas na fonte:

$$x \mapsto x' = x, \quad y \mapsto y' = y - \sum_{i+j \geq 3} a_{ij}x^{i-1}y^j.$$

Essa mudança elimina todos os monômios de grau três ou mais que possuem o fator x na segunda função coordenada. Ficamos então com

$$(x, y) \mapsto (x, xy + p_1(y), b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + q(x, y), c_{20}x^2 + r(x, y)),$$

onde $q, r \in \mathcal{M}_2^3$ e $p_1 \in \mathcal{M}_1^3$. Escrevendo $p_1(y) = a_{03}y^3 + \sum_{j \geq 4} a_{ij}y^j$, basta eliminarmos o termo $a_{03}y^3$ para obter a forma normal desejada. Considere a isometria T e o ângulo $\theta = \arctan(a_{03}/c_{03})$, tal que $(\sin\theta, \cos\theta) = (a_{03}, c_{03})/\sqrt{a_{03}^2 + c_{03}^2}$:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Dessa forma, obtemos

$$\left(x, \cos\theta xy - \sin\theta(c_{20}x^2 + c_{30}x^3 + c_{21}x^2y + c_{12}xy^2), \sum_{i+j=2,3} b_{ij}x^i y^j, \bar{c}_{20}x^2 + \sum_{i+j=3} \bar{c}_{ij}x^i y^j \right) + O(4).$$

Para eliminarmos os monômios x^2, x^3, x^2y e xy^2 da segunda função coordenada, tome a mudança de coordenadas na fonte dada por:

$$x \mapsto x' = x \text{ e } y \mapsto y' = y + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}(c_{20}x + c_{30}x^2 + c_{21}xy + c_{12}y^2).$$

Portanto, temos

$$\left(x, \cos\theta xy, \sum_{i+j=2,3} \bar{b}_{ij}x^i y^j, \bar{c}_{20}x^2 + \sum_{i+j=3} \bar{c}_{ij}x^i y^j \right) + O(4).$$

Finalmente, a mudança de coordenadas na fonte dada por $x \mapsto x' = x$ e $y \mapsto y' = (1/\cos\theta)y$ nos dá a forma normal desejada. A condição $c_{03} \neq 0$ segue do fato de que f_1 é \mathcal{A} -equivalente à singularidade I_1 de acordo com (KLOTZ; POP; RIEGER, 2007). \square

A noção de cone tangente em um ponto singular é a generalização da noção de espaço tangente em um ponto suave de uma variedade real ou complexa. Whitney deu definições algébricas e geométricas do cone tangente em (WHITNEY, 1965a; WHITNEY, 1965b), provando também algumas equivalências entre as definições no caso de variedades complexas.

Definição 5.11. Seja X um conjunto semialgébrico tal que $x_0 \in \bar{X}$. Um vetor $v \in \mathbb{R}^n$ é um *vetor tangente* de X em $x_0 \in \mathbb{R}^n$ se existe uma sequência de pontos $\{x_i\} \subset X - \{x_0\}$, $x_i \rightarrow x_0$ e uma sequência de números reais positivos $\{t_i\}$ tais que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{t_i}(x_i - x_0) = v.$$

O *cone tangente* de X em x_0 é o conjunto

$$C(X, x_0) = \{v \in \mathbb{R}^n; v \text{ é um vetor tangente de } X \text{ em } x_0 \in \bar{X}\}.$$

Mais detalhes sobre o cone tangente também podem ser encontrados em (SHAFAREVICH, 1977).

Definição 5.12. Seja $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ um germe de aplicação polinomial com $n \leq p$. Para cada variável x_i considere a função $g(x_i) = f(0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0)$. Se $g \neq 0$, temos que $g(x_i) = x_i^m \tilde{g}(x_i)$, para algum $m \in \mathbb{N}$ com $\tilde{g}(0) \neq 0$. O natural m é chamado de *ordem* de f com respeito à variável x_i e é denotado por $\text{ord}_{x_i} f(0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0)$. Se $g = 0$, dizemos que $\text{ord}_{x_i} f(0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0) = \infty$.

Teorema 5.13. (BIRBRAIR; MENDES; NUÑO BALLESTEROS, 2017) Seja $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$ um germe de aplicação polinomial injetivo de coposto 1 e $(X, 0)$ sua imagem. Então, temos duas possibilidades para o cone tangente de X em $0 \in \mathbb{R}^4$: ou ele é um plano ou um semiplano.

O próximo lema será uma ferramenta importante para calcularmos o cone tangente à uma superfície singular de coposto 1 em \mathbb{R}^4 parametrizada localmente pela $\mathcal{R}^2 \times \mathcal{O}(4)$ -forma normal dada no Teorema 5.10.

Lema 5.14. Seja X uma superfície em \mathbb{R}^4 com singularidade na origem. Suponha que $\varphi : (\mathbb{R}^4, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$ seja um germe de difeomorfismo e que Y é a imagem de X via φ . Seja $C(X, 0)$ o cone tangente de X na origem $0 \in \mathbb{R}^4$. Então, $C(Y, 0) = d\varphi_0(C(X, 0))$.

Demonstração. A demonstração deste resultado é completamente análoga àquela da Proposição 2.1.2 em (WEST, 1995). \square

A demonstração do Teorema 5.13 nos mostra como determinar se o cone tangente de uma superfície de coposto 1 em \mathbb{R}^4 localmente parametrizada por um germe $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$ nas condições do teorema é um semiplano ou um plano. Utilizando-a encontraremos o cone tangente da superfície modelo X dada como imagem de $f(x, y) = (x, xy, y^2, y^3)$. Faremos rotações na meta de modo que a parametrização fica $g(x, y) = (x, y^2, y^3, xy) = (x, g_2, g_3, g_4)$. Desse modo, temos que

$$\text{ord}_y g_2(x, 0) < \text{ord}_y g_3(x, 0) < \text{ord}_y g_4(x, 0) \text{ e } g_2(x, 0) = g_3(x, 0) = g_4(x, 0) = 0.$$

Note que o cone tangente pode ser considerado como o conjunto de todos os vetores tangentes de todos os arcos subanalíticos $\gamma \subset X$ tais que $\gamma(0) = 0$. Qualquer arco subanalítico γ dessa forma tem um pull back $\tilde{\gamma} \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\tilde{\gamma}(0) = 0$. Estes arcos podem ser representados na forma $(x, h(x))$ ou $(l(y), y)$, com h e l funções subanalíticas tais que $\text{ord}_x h, \text{ord}_y l \geq 1$. O vetor tangente de γ é determinado pelo menor expoente de Puiseux. Considere arcos da forma $\tilde{\gamma}(y) = (by^2, y)$ com $b \in \mathbb{R} - \{0\}$. Dessa forma, obtemos $g(by^2, y) = (by^2, y^2, y^3, by^3)$, cujo vetor tangente é $(b, 1, 0, 0)$. Calculando os vetores tangentes aos outros arcos, conclui-se que eles são paralelos ao eixo X ou é o vetor $(0, 1, 0, 0)$. Portanto, o cone tangente é o semiplano XY , onde Y tem

coordenadas positivas. Na parametrização original f , o cone tangente é o semiplano definido pelo eixo coordenado X e pelo semieixo Z com coordenadas positivas em \mathbb{R}^4 .

Proposição 5.15. Seja M uma superfície singular na origem $p = (0, 0, 0, 0)$ de coposto 1 em \mathbb{R}^4 parametrizada localmente pela $\mathcal{R}^2 \times \mathcal{O}(4)$ -forma normal dada no Teorema 5.10. Então, o cone tangente $C(M, p)$ é o semiplano definido pelo eixo coordenado X e pelo semieixo Z com coordenadas positivas em \mathbb{R}^4 .

Demonstração. Uma vez que o cone tangente em um ponto também pode ser considerado como o limite de secantes de arcos passando por este ponto, vamos mostrar que podemos obter duas direções linearmente independentes secantes à M e contidas no semiplano definido pelos eixos coordenados X e Z (com coordenadas positivas em Z). Uma vez que, pelo Lema 5.14, $C(M, p)$ deve ser um semiplano, concluímos que deve ser o semiplano desejado.

Considere a parametrização local dada pelo Teorema 5.10,

$$f(x, y) = (x, xy, b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2, c_{20}x^2) + O(3)$$

e o germe de curva $\gamma: (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$, dado por $\gamma(s) = (\alpha s^2, s)$ com $\alpha \in \mathbb{R}$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(\gamma(s))}{|f(\gamma(s))|} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(\alpha s^2, \alpha s^3 + o(4), b_{02}s^2 + o(3), c_{20}\alpha^2 + o(3))}{\sqrt{\alpha^2 s^4 + \alpha^2 s^6 + \dots + b_{02}^2 s^4 + o(4)}} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(\alpha, \alpha s + o(4), b_{02} + o(3), c_{20}\alpha^2 s^2 + o(3))}{\sqrt{\alpha^2 + b_{02}^2 + o(2)}} \\ &= \frac{(\alpha, 0, b_{02}, 0)}{\sqrt{\alpha^2 + b_{02}^2}}. \end{aligned}$$

Como $b_{02} > 0$, se $\alpha = 0$, obtemos como limite o eixo Z com coordenadas positivas. Por outro lado, se $\alpha \neq 0$, obtemos como limite todos os vetores no plano XZ linearmente independentes ao eixo Z , menos o eixo X . Resta então, obtermos o eixo X . Mas para tanto, basta tomarmos o germe de curva $\delta: (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ dado por $\delta(s) = (s, 0)$ e tomar novamente o limite. \square

Dada uma superfície singular M na origem $p = (0, 0, 0, 0)$ de coposto 1 em \mathbb{R}^4 parametrizada localmente pela $\mathcal{R}^2 \times \mathcal{O}(4)$ -forma normal dada no Teorema 5.10, sabemos que seu cone tangente é o semiplano XZ com coordenadas positivas em Z . Denotaremos por $C_p M$ o plano XZ em \mathbb{R}^4 que contém o cone tangente de M em p . Além disso, o plano E_p é o plano YZ e sua curvatura umbílica em p é dada por $\kappa_u(p) = 2|c_{20}|$.

Seja $M \subset \mathbb{R}^4$ uma superfície de coposto 1 localmente parametrizada por um germe de aplicação \mathcal{A} -equivalente à I_1 . A família de funções altura de M é dada por

$$H: M \times \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{R}, H(p, v) = \langle p, v \rangle.$$

Fixando $v \in \mathbb{S}^3$, as singularidades da função altura $h_v(p) = H(p, v)$ medem o contato de M com hiperplanos ortogonais ao vetor v , denotados por Γ_v . Este contato é também descrito pelo obtido

utilizando as fibras $\{g = 0\}$ do Teorema 5.9, onde g são os germes de cada uma das $\mathcal{R}(X)$ -orbitas que aparecem na Tabela 7. Tomando a parametrização local de M dada pelo Teorema 5.10, temos

$$h_v(x, y) = xv_1 + xyv_2 + \sum_{i+j=2,3} b_{ij}x^i y^j v_3 + c_{20}x^2 v_4 + \sum_{i+j=3} c_{ij}x^i y^j v_4,$$

com $v = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{S}^3$.

A função altura h_v é singular na origem $(0, 0)$ se, e somente se, $v_1 = 0$. Geometricamente, isso significa que o hiperplano Γ_v , ortogonal ao vetor $v = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{S}^3$, contém a reta $T_p M$. Consequentemente, se $v_1 \neq 0$, a função altura h_v é regular e o hiperplano Γ_v é transversal ao plano $C_p M$ (que contém o cone tangente de M em p) e contém o plano E_p . Esse contato entre M e Γ_v é também descrito pelo contato da fibra de zero de $g_1 = X$ (primeiro germe da Tabela 7) com a superfície modelo X .

Considere $S \subset \mathbb{R}^4$ a superfície regular associada à superfície de coposto 1, $M \subset \mathbb{R}^4$, como anteriormente (ver Teorema 4.27). Dada uma direção binormal de M , $v \in N_p M$, \mathbf{u} denotará a direção assintótica correspondente, que pelo Teorema 4.27 também é uma direção assintótica da superfície regular associada S . Além disso, denotaremos por τ a torção da seção normal da superfície regular S na direção \mathbf{u} . Considere também $CS(\varepsilon)$ a hipersuperfície canal de S (ver 2.32). A curva de pontos de cuspidal edge da aplicação de Gauss de $CS(\varepsilon)$ será denotada por \mathcal{C} .

Proposição 5.16. Seja $v = (0, v_2, v_3, 0) \in \mathbb{S}^3$ com $v_3 \neq 0$. O hiperplano Γ_v é tangente à reta $T_p M$ e transversal ao cone tangente $C_p M$ e ao plano E_p . A função altura h_v pode ter singularidades do tipo A_{k-1}^\pm , $k = 2, 3, 4$ que são modeladas pelo contato das zero fibras dos germes de submersão $g_{2k} = \pm Z + (-1)^{k+1} X^k$ com a superfície modelo X (isto é, modeladas pela composição do germe de submersão com a parametrização da superfície modelo), respectivamente. A singularidade é do tipo A_1 (Morse) se, e somente se, $v \in N_p M$ não é uma direção binormal. Para singularidades mais degeneradas, essa configuração apresenta três possibilidades:

- (i) Se p é um ponto hiperbólico, a singularidade da função altura é do tipo A_2 se, e somente se, v é uma direção binormal de M e $\tau \neq 0$. Finalmente, a singularidade é do tipo A_3 se, e somente se, v é uma direção binormal, $\tau = 0$ e a direção assintótica \mathbf{u} de S é transversal à curva \mathcal{C} de pontos de cuspidal edge da aplicação de Gauss da hipersuperfície canal $CS(\varepsilon)$. Ver Tabela 9.
- (ii) Se p é um ponto parabólico, h_v tem singularidade do tipo A_2 se, e somente se, v é uma direção binormal de M e a direção assintótica associada \mathbf{u} é transversal à curva de pontos parabólicos de S . A singularidade é do tipo A_3 se, e somente se, v é uma direção binormal e \mathbf{u} é tangente à curva de pontos parabólicos de S com contato de primeira ordem.
- (iii) Se p é elíptico, a função altura possui somente singularidades do tipo A_1 .

Demonstração. A demonstração segue imediatamente dos seguintes resultados: Teorema 2.35, Teorema 2.36 e Teorema 4.27, uma vez que ambas as superfícies M e S possuem a mesma função

altura. No entanto, vamos apresentar alguns cálculos para o caso p hiperbólico, ou seja, quando $b_{20} > 0$. Seja $v = (0, v_2, v_3, 0)$ com $v_3 \neq 0$. Para a forma normal genérica apresentada no Teorema 5.10, E_p é o plano YZ e C_pM é o plano XZ . Portanto, Γ_v é transversal à E_p e à C_pM . Então, esse caso é modelado pelo contato da zero fibra de $g = \pm Z + (-1)^{k+1}X^k$, $k = 2, 3, 4$ (ver Tabela 7) e da superfície modelo X .

Tomando $v = (0, v_2, 1, 0)$, a função altura é dada por

$$h_v(x, y) = (b_{11} + v_2)xy + b_{20}x^2 + b_{02}y^2 + b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3,$$

com $b_{02} > 0$. O determinante da matriz Hessiana de h_v é dado por $\det(\mathcal{H}(h_v(x, y))) = 4b_{20}b_{02} - (v_2 + b_{11})^2$. Dessa forma, h_v possui uma singularidade do tipo A_1 (ou seja, Morse) se, e somente se, $v_2 \neq -b_{11} \pm 2\sqrt{b_{20}b_{02}}$, o que é equivalente ao vetor v não ser uma direção binormal (ver Teorema 4.35, notando que $v \in E_p$).

As condições para a função altura h_v possuir uma singularidade do tipo A_2 são: v ser uma direção binormal e

$$b_{30} \mp \frac{b_{21}\sqrt{b_{20}b_{02}}}{b_{02}} + \frac{b_{12}b_{20}}{b_{02}} \mp \frac{b_{03}b_{20}\sqrt{b_{20}b_{02}}}{b_{02}^2} \neq 0.$$

Por outro lado, o núcleo da matriz Hessiana da função altura h_v com $v = (0, v_2, 1, 0) = (0, -b_{11} \pm 2\sqrt{b_{20}b_{02}}, 1, 0)$ é a direção assintótica $\mathbf{u} = (u_1, \mp\sqrt{b_{20}b_{02}}u_1/b_{02})$. A seção normal ao longo dessa direção assintótica pode ser parametrizada por

$$\begin{aligned} \gamma(u_1) &= \left(u_1, \mp \frac{\sqrt{b_{20}b_{02}}}{b_{02}}u_1, \mp \frac{\sqrt{b_{20}b_{02}}}{b_{02}}u_1^2, \left(2b_{20} \mp \frac{b_{11}\sqrt{b_{20}b_{02}}}{b_{02}} \right)u_1^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(b_{30} \mp \frac{b_{21}\sqrt{b_{20}b_{02}}}{b_{02}} + \frac{b_{12}b_{20}}{b_{02}} \mp b_{03} \left(\frac{\sqrt{b_{20}b_{02}}}{b_{02}} \right)^3 \right)u_1^3 \right) + O(4). \end{aligned}$$

Considere a rotação na meta dada pela matriz

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen} \theta & 0 & 0 \\ \text{sen} \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

onde $\theta = \arctan(\pm \frac{\sqrt{b_{20}b_{02}}}{b_{02}})$. Portanto $\text{sen} \theta \mp \frac{\sqrt{b_{20}b_{02}}}{b_{02}} \cos \theta = 0$, e uma vez que $b_{20}, b_{02} > 0$, concluímos que $\cos \theta \pm \frac{\sqrt{b_{20}b_{02}}}{b_{02}} \text{sen} \theta \neq 0$. Seja $\tilde{\gamma}$ a curva obtida pela rotação de γ usando a matriz de rotação acima. A segunda componente de $\tilde{\gamma}$ é zero, então podemos considerá-la uma curva em \mathbb{R}^3 . A torção de $\tilde{\gamma}$ (e portanto a de γ) é dada por

$$\tau(0) = \frac{\mp 12\sqrt{b_{20}b_{02}}}{b_{02}} (\cos \theta \pm \frac{\sqrt{b_{20}b_{02}}}{b_{02}} \text{sen} \theta) \left(b_{30} \mp \frac{b_{21}\sqrt{b_{20}b_{02}}}{b_{02}} + \frac{b_{12}b_{20}}{b_{02}} \mp \frac{b_{03}b_{20}\sqrt{b_{20}b_{02}}}{b_{02}^2} \right).$$

Portanto, $\tau(0) \neq 0$ se, e somente se, $b_{30} \mp \frac{b_{21}\sqrt{b_{20}b_{02}}}{b_{02}} + \frac{b_{12}b_{20}}{b_{02}} \mp \frac{b_{03}b_{20}\sqrt{b_{20}b_{02}}}{b_{02}^2} \neq 0$, condição esta que é precisamente aquela para que a função altura tenha uma singularidade do tipo A_2 . \square

Tabela 9 – Tipos de singularidade de h_v (ponto hiperbólico).

Vetor	Tipo de singularidade	Submersão
$v = (1, 0, 0, 0)$ $E_p \subset \Gamma_v \pitchfork T_p M, C_p M$	submersão	$g_1 = X$
$v = (0, v_2, v_3, 0)$ $\Gamma_v \pitchfork E_p, C_p M$	$A_1 \Leftrightarrow v$ não é binormal $A_2 \Leftrightarrow v$ é binormal e $\tau \neq 0$ $A_3 \Leftrightarrow v$ é binormal, $\tau = 0$ e $\mathbf{u} \pitchfork \mathcal{C}$.	$g_{2k} = \pm Z + (-1)^{k+1} X^k$ $k = 2, 3, 4$
$v = (0, v_2, 0, 0)$ $C_p M \subset \Gamma_v \pitchfork E_p$	A_1	$g_3 = Y$
$v = (0, 0, 0, v_4)$ $E_p, C_p M \subset \Gamma_v,$	$A_2 \Leftrightarrow \kappa_u(p) \neq 0$	$g_4 = \pm W \pm X^2$

Corolário 5.17. O hiperplano Γ_v é um hiperplano osculador de M em p se, e somente se, é transversal ao plano E_p e se a função altura h_v possui singularidade do tipo $A_{\geq 2}$.

Proposição 5.18. Seja $v = (0, v_2, 0, 0) \in \mathbb{S}^3$, $v_2 \neq 0$, o hiperplano Γ_v contém o plano $C_p M$ e é transversal ao plano E_p . Nestas condições, a função altura tem singularidade do tipo A_1 (Morse), singularidades esta descrita pelo contato da zero fibra da submersão $g_3 = Y$ com a superfície modelo X .

Demonstração. Quando $v = (0, v_2, 0, 0)$, $v_2 \neq 0$, podemos tomar $v = (0, 1, 0, 0)$ e a função altura é dada por $h_v(x, y) = xy + O(4)$, cuja singularidade é do tipo A_1 . \square

Proposição 5.19. Seja $v = (0, 0, 0, v_4) \in \mathbb{S}^3$, $v_4 \neq 0$. O hiperplano Γ_v contém ambos os planos E_p e $C_p M$. A função altura h_v tem singularidade do tipo $A_{\geq 2}$, que é descrita pelo contato da zero fibra da submersão $g_4 = \pm W \pm X^2$ com a superfície modelo X se, e somente se, $\kappa_u(p) \neq 0$.

Demonstração. Tomando $v = (0, 0, 0, 1)$, a função altura é dada por

$$h_v(x, y) = c_{20}x^2 + \sum_{i+j=3} c_{ij}x^i y^j + O(4).$$

Dessa forma, h_v possui singularidade do tipo $A_{\geq 2}$ se, e somente se, $c_{20} \neq 0$, ou de forma equivalente, se e somente se, $\kappa_u(p) = 2|c_{20}| \neq 0$. \square

3-VARIEDADES EM ESPAÇOS EUCLIDIANOS

Neste capítulo final estudaremos a geometria de segunda ordem de 3-variedades regulares em \mathbb{R}^{3+k} , com $k \geq 1$ e também de 3-variedades de coposto 1 em \mathbb{R}^5 .

O estudo de 3-variedades regulares em \mathbb{R}^{3+k} , $k \geq 1$, é um assunto já conhecido na literatura. Sob o ponto de vista da teoria de singularidades, em (GARCIA, 1993; NABARRO, 2003; NABARRO; ROMERO FUSTER, 2009), os autores estudam o caso $k = 1$, ou seja, estudam a geometria de 3-variedades em \mathbb{R}^4 , especialmente sob o ponto de vista da teoria de contato. Já em (DREIBELBIS, 2012), o autor apresenta um estudo a respeito de 3-variedades em \mathbb{R}^6 , focando principalmente no estudo de direções conjugadas. Por fim, em (BINOTTO; COSTA; ROMERO FUSTER, 2016a; BINOTTO; COSTA; ROMERO FUSTER, 2016b), as autoras também se voltam principalmente para as 3-variedades imersas em \mathbb{R}^6 , apresentando todos os possíveis tipos topológicos que o locus de curvatura dessas variedades podem assumir. Neles também investigam o contato dessas variedades com hiperplanos e hiperesferas, além de apresentarem os conceitos de direções assintóticas, binormais e relacioná-los com o estudo da convexidade local.

Na primeira seção deste capítulo, apresentamos um breve resumo das principais definições e resultados acerca de 3-variedades regulares em \mathbb{R}^{3+k} , com $k \geq 1$. Nosso intuito é mostrar o Teorema 6.9, que garante que dada uma 3-variedade regular \bar{M} em \mathbb{R}^{3+k} , com $k \geq 1$, seu locus de curvatura em $\bar{p} \in \bar{M}$ é gerado pela reunião não disjunta de elipses de curvatura das superfícies regulares em \mathbb{R}^{2+k} obtidas por seções normais de \bar{M} .

Na segunda seção, trazemos um estudo sobre a geometria de segunda ordem de 3-variedades de coposto 1 em \mathbb{R}^5 . Este, no entanto, não é de nossa autoria. Ele foi desenvolvido durante o período de pós-doutorado de Andrea de Jesus Sacramento, sob supervisão da Prof^a. Maria Aparecida S. Ruas, neste instituto e pode ser encontrado em (RUAS; SACRAMENTO, 2018).

Ainda nesta seção, apresentamos um resultado similar ao da seção anterior: mostramos,

no Teorema 6.18, que dada uma 3-variedade singular de coposto 1 em \mathbb{R}^5 , seu locus de curvatura em um ponto é gerado pela reunião não disjunta de parábolas de curvatura das superfícies singulares de coposto 1 em \mathbb{R}^4 obtidas via seções normais da 3-variedade (Teorema 6.18). Além disso, no Teorema 6.21, mostramos que as parábolas de curvatura das seções normais distinguem completamente a \mathcal{A}^2 -classificação de 2-jatos de aplicações de coposto 1 de aplicações $(\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^5, 0)$.

6.1 3-variedades regulares

Seja \bar{M} uma 3-variedade compacta em \mathbb{R}^{3+k} , com $k \geq 1$, localmente dada como imagem de um mergulho $\bar{f}: U \rightarrow \mathbb{R}^{3+k}$, com $U \subset \mathbb{R}^3$ um aberto. Denotaremos por (x, y, z) as coordenadas locais em \bar{M} .

Para cada $\bar{p} = \bar{f}(x, y, z)$, tomamos a base do 3-espaço tangente $T_{\bar{p}}\bar{M}$ dada por $B^{\bar{f}} = \left\{ \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}(\bar{p}), \frac{\partial \bar{f}}{\partial y}(\bar{p}), \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}(\bar{p}) \right\}$. Além disso, tomamos um referencial ortonormal do espaço normal $N_{\bar{p}}\bar{M} \cong \mathbb{R}^k$, $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k\}$ de modo que a orientação do referencial

$$\left\{ \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}(\bar{p}), \frac{\partial \bar{f}}{\partial y}(\bar{p}), \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}(\bar{p}), \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k \right\}$$

seja a mesma que a do espaço \mathbb{R}^{3+k} .

Dado um campo vetorial normal \mathbf{v} em \bar{M} , considere a aplicação linear

$$d\mathbf{v}: T_{\bar{p}}\bar{M} \rightarrow T_{\bar{p}}\mathbb{R}^{3+k} \cong T_{\bar{p}}\bar{M} \oplus N_{\bar{p}}\bar{M}$$

e a projeção canônica $\pi^\perp: T_{\bar{p}}\bar{M} \oplus N_{\bar{p}}\bar{M} \rightarrow N_{\bar{p}}\bar{M}$. A aplicação

$$S_{\bar{p}}^{\mathbf{v}} = -\pi^\perp \circ d\mathbf{v}: T_{\bar{p}}\bar{M} \rightarrow T_{\bar{p}}\bar{M}$$

é chamada de \mathbf{v} -operador de forma em \bar{p} . A segunda forma fundamental de \bar{M} ao longo do campo vetorial normal \mathbf{v} é a aplicação bilinear

$$II_{\bar{p}}^{\mathbf{v}}: T_{\bar{p}}\bar{M} \times T_{\bar{p}}\bar{M} \rightarrow \mathbb{R}, II_{\bar{p}}^{\mathbf{v}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \langle \mathbf{v}, d^2 \bar{f}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \rangle,$$

para todo $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_{\bar{p}}\bar{M}$, em que $d^2 \bar{f}$ é a segunda derivada de \bar{f} . Também definimos a segunda forma fundamental de \bar{M} , dada pela seguinte aplicação bilinear:

$$II_{\bar{p}}: T_{\bar{p}}\bar{M} \times T_{\bar{p}}\bar{M} \rightarrow N_{\bar{p}}\bar{M}, II_{\bar{p}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \pi^\perp \circ d^2 \bar{f}(\mathbf{v}, \mathbf{w}),$$

para todo $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_{\bar{p}}\bar{M}$.

Dado um ponto $\bar{p} \in \bar{M} \subset \mathbb{R}^{3+k}$, com $k \geq 1$ e um vetor unitário $\nu \in \mathbb{S}^2 \subset T_{\bar{p}}\bar{M}$, denotamos por γ_ν a seção normal de \bar{M} na direção ν , ou seja, $\gamma_\nu = \bar{M} \cap \mathbb{H}_\nu$, onde $\mathbb{H}_\nu = \{\lambda \nu\} \oplus N_{\bar{p}}\bar{M}$ é um $k+1$ -espaço passando por \bar{p} em \mathbb{R}^{3+k} . O vetor curvatura normal $\eta(\nu)$ de γ_ν em \bar{p} , dado pela

projeção de γ'_v em $N_{\bar{p}}\bar{M}$ é tal que variando v em toda esfera $\mathbb{S}^2 \subset T_{\bar{p}}\bar{M}$, obtemos uma superfície contida no espaço normal $N_{\bar{p}}\bar{M}$. Essa superfície é chamada de *locus de curvatura de \bar{M} em \bar{p}* .

O locus de curvatura pode também ser visto como a imagem da esfera unitária $\mathbb{S}^2 \subset T_{\bar{p}}\bar{M}$ via segunda forma fundamental de \bar{M} em \bar{p} . O próximo resultado apresenta uma parametrização para o locus de curvatura.

Lema 6.1. (BINOTTO; COSTA; ROMERO FUSTER, 2016a, p. 27) Tomando coordenadas esféricas na esfera unitária, obtemos a seguinte parametrização para o locus de curvatura

$$\eta : \mathbb{S}^2 \subset T_{\bar{p}}\bar{M} \rightarrow N_{\bar{p}}\bar{M}, (\theta, \phi) \mapsto \eta(\theta, \phi),$$

de modo que

$$\begin{aligned} \eta(\theta, \phi) = & H + (1 + 3 \cos(2\phi))B_1 + \cos(2\theta)\text{sen}^2\theta B_2 \\ & + \text{sen}(2\theta)\text{sin}^2\phi B_3 + \cos\theta\text{sen}(2\phi)B_4 + \text{sen}\theta\text{sen}(2\phi)B_5 \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} H = \frac{1}{3}(f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}), \quad B_1 = \frac{1}{12}(-f_{xx} - f_{yy} + 2f_{zz}), \\ B_2 = \frac{1}{2}(f_{xx} - f_{yy}), \quad B_3 = f_{xy}, \quad B_4 = f_{xz} \text{ e } B_5 = f_{yz}. \end{aligned}$$

Definição 6.2. O primeiro espaço normal de \bar{M} em \bar{p} é dado por

$$N_{\bar{p}}^1\bar{M} = \langle f_{xx}, f_{xy}, f_{xz}, f_{yy}, f_{yz}, f_{zz} \rangle_p.$$

A envoltória afim do locus de curvatura em $N_{\bar{p}}\bar{M}$ é denotada por $\mathcal{A}ff_p$ e E_p é o subespaço linear de $N_{\bar{p}}^1\bar{M}$ paralelo à $\mathcal{A}ff_p$.

A seguir, apresentaremos alguns exemplos de locus de curvatura de 3-variedades regulares em \mathbb{R}^{3+k} , com $k \geq 1$.

Exemplo 6.3. (i) Considere a 3-variedade \bar{M} localmente parametrizada pela imersão $\bar{f} : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^6, 0)$ com $\bar{f}(x, y, z) = (x, y, z, \frac{\sqrt{2}}{2}xy, \frac{\sqrt{2}}{2}xz, \frac{\sqrt{2}}{2}yz)$. Seu locus de curvatura na origem $\bar{p} \in \mathbb{R}^6$ pode ser parametrizado por

$$\eta(\theta, \phi) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\text{sen}^2\phi\text{sen}(2\theta), \text{sen}(2\phi)\cos\theta, \text{sen}(2\phi)\text{sen}\theta),$$

com $0 \leq \theta, \phi \leq \pi$. O locus de curvatura desta 3-variedade na origem é conhecido como *superfície de Steiner Romana*, ilustrada na Figura 12.

(ii) A 3-variedade regular dada pela imersão $\bar{f} : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^5, 0)$, com

$$\bar{f}(x, y, z) = \left(x, y, z, \frac{\sqrt{2}}{2}xz, \frac{\sqrt{2}}{2}yz \right)$$

é tal que seu locus de curvatura na origem $\bar{p} \in \mathbb{R}^5$ é parametrizado por

$$\eta(\theta, \phi) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\text{sen}(2\phi)\cos\theta, \text{sen}(2\phi)\text{sen}\theta),$$

com $0 \leq \theta, \phi \leq \pi$. Tal locus é uma região circular com raio $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e centrada na origem.

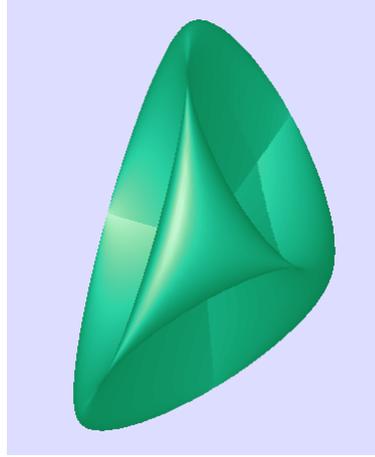


Figura 12 – Superfície de Steiner Romana.

- (iii) O locus de curvatura da 3-variedade dada pela imersão $\bar{f} : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$, $\bar{f}(x, y, z) = (x, y, z, z^2)$ na origem $\bar{p} \in \mathbb{R}^4$ é uma segmento radial dado por $\eta(\theta, \phi) = (0, 0, 0, 1 + \cos(2\phi))$, com $0 \leq \theta, \phi \leq \pi$.
- (iv) Tomando a imersão $\bar{f} : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$ dada por $\bar{f}(x, y, z) = (x, y, z, x^2 + y^2 + z^2)$, seu locus de curvatura na origem é o ponto $(0, 0, 0, 2) \in \mathbb{R}^4$.

O locus de curvatura de um 3-variedade regular em \mathbb{R}^{3+k} pode ser visto como a imagem da *superfície Veronese clássica de ordem 2* via um aplicação linear conveniente. A expressão dessa superfície pode ser dada pela imagem da esfera unitária em \mathbb{R}^3 através da aplicação $\xi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^6$ dada por

$$\xi(u, v, w) = (u^2, v^2, w^2, \sqrt{2}uv, \sqrt{2}uw, \sqrt{2}vw).$$

A imagem $\xi(S^2)$ está contida em um hiperplano de \mathbb{R}^6 . Mais detalhes a respeito da superfície Veronese podem ser encontrados em (APÉRY, 1987).

Relacionamos a Veronese com o locus de curvatura da seguinte maneira.

Proposição 6.4. (BINOTTO; COSTA; ROMERO FUSTER, 2016a, p. 29) Dada uma 3-variedade regular $\bar{M} \subset \mathbb{R}^{3+k}$, com $k \geq 1$ e $\bar{p} \in \bar{M}$, o locus de curvatura em \bar{p} é isomorfo (logo, difeomorfo) à superfície Veronese clássica de ordem 2 composta com uma aplicação afim de \mathbb{R}^6 em $N_{\bar{p}}\bar{M} \cong \mathbb{R}^k$, aplicação esta determinada pela segunda forma fundamental em cada ponto. O posto da transformação linear associada coincide com a dimensão do subespaço $\mathcal{A}ff_p \subset N_{\bar{p}}\bar{M}$.

Definição 6.5. Seja $\bar{M} \subset \mathbb{R}^{3+k}$, com $k \geq 1$ uma 3-variedade regular. Dizemos que $\bar{p} \in \bar{M}$ é do tipo \bar{M}_i , $i = 0, 1, \dots, 6$ se $\dim N_{\bar{p}}^1 \bar{M} = i$.

Teorema 6.6. (BINOTTO; COSTA; ROMERO FUSTER, 2016a, p. 31) Dada uma 3-variedade regular \bar{M} compacta, existe um subconjunto residual de imersões de \bar{M} em \mathbb{R}^{3+k} tal que:

- (i) Se $k > 6$, todo ponto de \bar{M} é de tipo \bar{M}_6 ;
- (ii) Se $k = 6$, existe um subconjunto S de codimensão 1 (possivelmente vazio) em \bar{M} tal que os pontos em $M - S$ são do tipo \bar{M}_6 e aqueles em S são do tipo \bar{M}_5 ;
- (iii) Se $k = 5, 4, 3, 2, 1$, todo ponto de \bar{M} é de tipo \bar{M}_k .

O próximo resultado apresenta uma listagem com todos os tipos topológicos possíveis de locus de curvatura para 3-variedades regulares em \mathbb{R}^6 . Como vimos no Teorema 6.6, para uma imersão genérica de uma 3-variedade regular em \mathbb{R}^6 , temos somente pontos do tipo \bar{M}_3 .

Teorema 6.7. (BINOTTO; COSTA; ROMERO FUSTER, 2016a, p. 34) O locus de curvatura em um ponto de tipo \bar{M}_3 de uma 3-variedade \bar{M} imersa em \mathbb{R}^6 pode possuir uma das seguintes configurações.

- (i) Quando $H(p) \in E_p$: Uma superfície de Steiner Romana (Figura 13), uma superfície cross-cap (Figura 14), uma superfície Steiner de Tipo 5 (Figura 15), uma superfície cross-cup (Figura 16), um elipsóide ou um cone compacto.
- (ii) Quando $H(p) \notin E_p$, o locus de curvatura é uma região planar convexa linearmente equivalente à uma região elíptica (Figura 17), uma região triangular (Figura 18), um cone planar compacto (Figura 19) ou uma projeção planar de tipo 1, 2 ou 3 (Figuras 20, 21 e 22, respectivamente) da superfície Veronese.

Aqui, o $H(p)$ é o vetor curvatura média, tal como no Lema 6.1.

Da mesma maneira como fizemos no capítulo 2, quando definimos a elipse de curvatura para superfícies regulares em \mathbb{R}^4 e \mathbb{R}^5 , podemos definir a elipse de curvatura de uma superfície regular imersa em \mathbb{R}^n , com $n > 5$. Dada uma superfície regular $M \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 4$ e um ponto $p \in M$, considere um vetor tangente unitário $w \in \mathbb{S}^1 \subset T_pM$, e denote por γ_w a curva dada pela interseção de M com o hiperplano dado pela soma direta do espaço normal N_pM e da reta definida pela direção w . Tal curva é chamada *seção normal* de M na direção w e seu vetor curvatura normal pertence à N_pM . Quando variamos w em todo círculo unitário $\mathbb{S}^1 \subset T_pM$, os vetores curvatura normal das seções normais descrevem uma elipse em N_pM , que chamamos de *elipse de curvatura de M em p* .

Para tais superfícies, é válido também que a elipse de curvatura é a imagem, via segunda forma fundamental, dos vetores tangentes unitários da superfície. Mais detalhes podem ser encontrados em (COSTA; MORAES; ROMERO FUSTER, 2009).

Observação 6.8. Dada uma superfície regular $M \subset \mathbb{R}^n$, com $n \geq 4$ e $p \in M$, a elipse de curvatura de M em p é invariante por isometrias de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^n e é preservada por mergulhos canônicos de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^{n+r} , com $r > 0$.

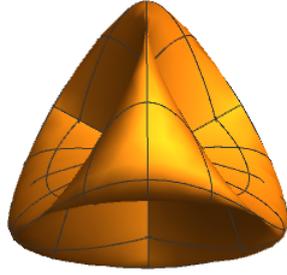


Figura 13 – Superfície de Steiner Romana.

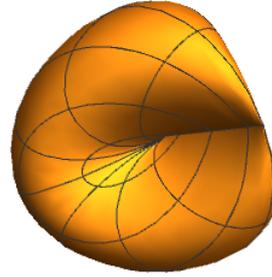


Figura 14 – Superfície cross-cap.

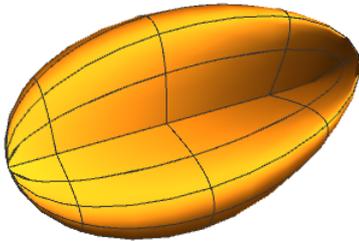


Figura 15 – Superfície Steiner de Tipo 5.

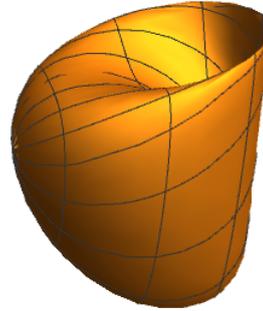


Figura 16 – Superfície cross-cup.

O próximo resultado, de nossa autoria, relaciona o locus de curvatura de uma 3-variedade regular em \mathbb{R}^{3+k} com as elipses de curvatura de superfícies regulares em \mathbb{R}^{2+k} dadas por seções normais da 3-variedade.

Teorema 6.9. Seja $\bar{M} \subset \mathbb{R}^{3+k}$, $k \geq 1$, uma 3-variedade regular e $\bar{p} \in \bar{M}$. O locus de curvatura de \bar{M} em \bar{p} é gerado pela reunião não disjunta de elipses de curvatura em \bar{p} das superfícies regulares em \mathbb{R}^{2+k} obtidas pelas seções normais dadas por direções tangentes da 3-variedade \bar{M} .

Demonstração. Seja $\bar{M} \subset \mathbb{R}^{3+k}$, $k \geq 1$, uma 3-variedade regular em $\bar{p} \in \bar{M}$, que por simplicidade tomamos como a origem. Assim, \bar{M} pode ser localmente parametrizada na forma de Monge $\bar{f}: (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{3+k}, 0)$, com

$$\bar{f}(x, y, z) = (x, y, z, f_1(x, y, z), \dots, f_k(x, y, z)),$$

de modo que $f_i \in \mathcal{M}_3^2$, para $i = 1, \dots, k$. Tomemos coordenadas $(X, Y, Z, W_1, \dots, W_k)$ em \mathbb{R}^{3+k} . Desta forma, $T_{\bar{p}}\bar{M}$ é o 3-espaço gerado pelas três primeiras coordenadas, a saber, X, Y e Z .

Seja $\mathbf{u} \in T_{\bar{p}}\bar{M}$ um vetor não nulo. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que \mathbf{u} é unitário, ou seja, $\mathbf{u} \in \mathbb{S}^2 \subset T_{\bar{p}}\bar{M}$. Dessa forma, existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ não simultanea-

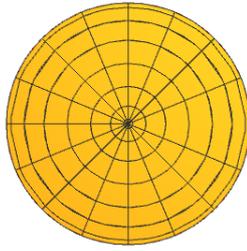


Figura 17 – Elíptica

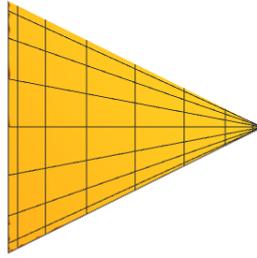


Figura 18 – Triangular

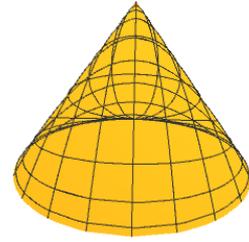


Figura 19 – Cone planar

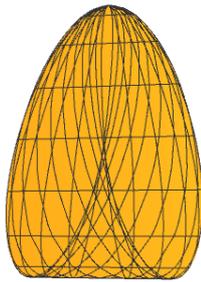


Figura 20 – Tipo 1

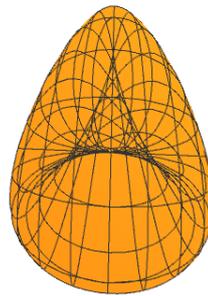


Figura 21 – Tipo 2

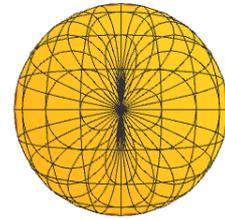


Figura 22 – Tipo 3

Figura 23 – Locus de curvatura planares.

mente nulos tais que $\mathbf{u} = \alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z$ e $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$. Considere a seção normal dada pelo $(2+k)$ -espaço gerado por $\alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z = 0$. Suponha que $\alpha_3 \neq 0$ (os outros casos são análogos). Podemos, então, escrever

$$Z = -\frac{\alpha_1}{\alpha_3} X - \frac{\alpha_2}{\alpha_3} Y = \beta_1 X + \beta_2 Y,$$

com $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$.

A partir da seção normal dada por $Z = \beta_1 X + \beta_2 Y$, obtemos a superfície regular M em \mathbb{R}^{3+k} (mas que está contida em uma cópia de \mathbb{R}^{2+k}) localmente parametrizada por

$$f(x, y) = (x, y, \beta_1 x + \beta_2 y, f_1(x, y, \beta_1 x + \beta_2 y), \dots, f_k(x, y, \beta_1 x + \beta_2 y)).$$

Note que, pela Observação 6.8, mesmo estando mergulhada em \mathbb{R}^{3+k} , a elipse de curvatura da superfície dada pela seção normal não se altera.

Note que o plano tangente à M em \bar{p} , $T_{\bar{p}}M$ é tal que o subconjunto dos vetores tangentes unitários \mathbb{S}^1 está contido no subconjunto dos vetores tangentes unitários $\mathbb{S}^2 \subset T_{\bar{p}}\bar{M}$ da 3-variedade \bar{M} . Uma vez que o locus de curvatura de \bar{M} é a imagem, via segunda forma fundamental, de \mathbb{S}^2 e que a restrição da segunda forma fundamental à $T_{\bar{p}}M$ nos dá a segunda forma fundamental da superfície M , concluímos que a elipse de curvatura de M (imagem via segunda forma fundamental de $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{S}^2 \subset T_{\bar{p}}\bar{M}$) está contida no locus de curvatura de \bar{M} .

Finalmente, quando variamos \mathbf{u} em toda esfera \mathbb{S}^2 , obtemos todas as seções normais possíveis, e como a elipse de curvatura de cada seção normal está contida no locus de curvatura da 3-variedade, geramos o locus de curvatura através da união não disjunta de elipses de curvatura das superfícies regulares obtidas via seções normais de \bar{M} . \square

Exemplo 6.10. (i) Considere novamente a 3-variedade \bar{M} dada no item (i) do Exemplo 6.3, localmente parametrizada pela imersão $\bar{f}: (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^6, 0)$ com

$$\bar{f}(x, y, z) = \left(x, y, z, \frac{\sqrt{2}}{2}xy, \frac{\sqrt{2}}{2}xz, \frac{\sqrt{2}}{2}yz \right).$$

Vimos que seu locus de curvatura na origem é a superfície de Steiner Romana. Esta superfície é gerada por elipses e segmentos, dados como elipses de curvatura de superfícies regulares em \mathbb{R}^5 . Tomando, por exemplo, as seções normais $X = 0$, $Y = 0$ e $Z = 0$, obtemos as superfícies regulares cujas elipses de curvatura são, respectivamente:

$$\eta_X(\theta) = (0, 0, \sqrt{2}\sin\theta \cos\theta), \quad \eta_Y(\theta) = (0, \sqrt{2}\sin\theta \cos\theta, 0) \quad \text{e} \quad \eta_Z(\theta) = (\sqrt{2}\sin\theta \cos\theta, 0, 0),$$

com $\theta \in [0, 2\pi]$. Note que em todos os três casos, a elipse de curvatura se degenera em um segmento. Tomando, por outro lado, as seções $X = Y$, $X = Z$ e $Y = Z$, após reparametrizações e rotações no espaço tangente das superfícies em \mathbb{R}^5 , obtemos respectivamente as seguintes parametrizações das elipses de curvatura:

$$\begin{aligned} \eta_{XY}(\theta) &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin^2\theta, \sin\theta \cos\theta, \sin\theta \cos\theta \right), \quad \eta_{XZ}(\theta) = \left(\sin\theta \cos\theta, \frac{\sqrt{2}}{2}\sin^2\theta, \sin\theta \cos\theta \right) \\ \eta_{YZ}(\theta) &= \left(\sin\theta \cos\theta, \sin\theta \cos\theta, \frac{\sqrt{2}}{2}\sin^2\theta \right), \end{aligned}$$

novamente com $\theta \in [0, 2\pi]$. Desta vez, todas são elipses não degeneradas. Na Figura 24, estão representadas as seis elipses de curvatura obtidas anteriormente. A superfície de Steiner Romana começou a ser estudada já no século XIX, pelo geômetra Jacob Steiner. Segundo (APÉRY, 1987), em 1844, em uma visita à cidade de Roma, Steiner descobriu algumas propriedades geométricas desta superfície, dentre elas, a de que ela é gerada por cônicas, como mostramos neste exemplo. No entanto, nosso resultado é mais geral pois contempla toda a classe de subvariedades que são locus de curvatura de 3-variedades regulares.

- (ii) Considere a 3-variedade em \mathbb{R}^5 dada por $f(x, y, z) = (x, y, z, x^2 + z^2, xy)$. Tomando coordenadas (X, Y, Z, W, T) em \mathbb{R}^5 , o locus de curvatura na origem é uma região elíptica contida no plano normal WT , centrada em $(1, 0)$ de raio 1. Na Tabela 10, apresentamos algumas elipses de curvatura de superfícies dadas por seções normais. Em todas elas temos $\theta \in [0, 2\pi]$. Na Figura 25, são dados os traços das elipses de curvatura obtidas na Tabela 10.

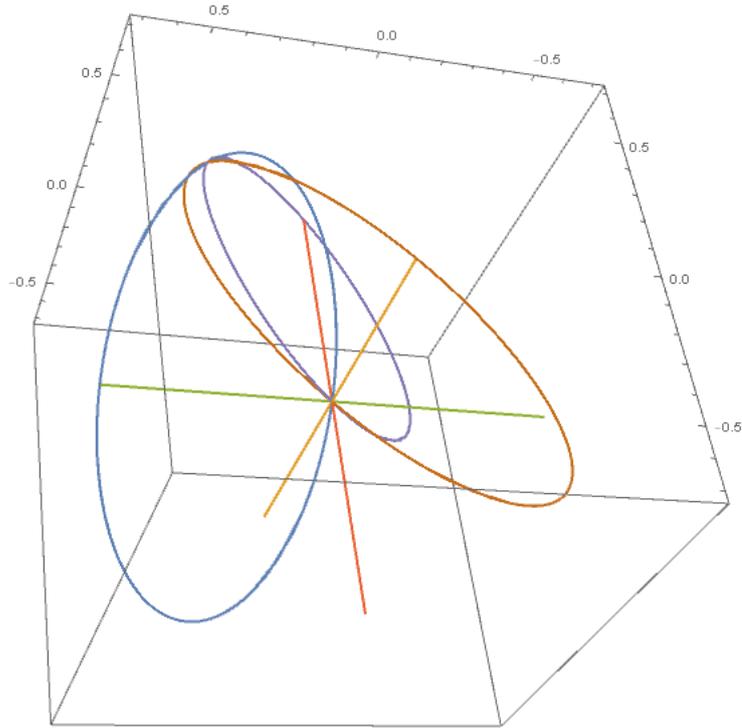


Figura 24 – Elipses de curvatura na superfície de Steiner Romana.

Tabela 10 – Elipses de curvatura na região elíptica.

Seção normal	Parametrização da elipse de curvatura	Tipo da elipse
$X = 0$	$(2\text{sen}^2\theta, 0)$	segmento
$Y = 0$	$(2, 0)$	ponto
$Z = 0$	$(2\text{sen}^2\theta, 2\text{sen}\theta \cos\theta)$	círculo
$X = Z$	$(2\text{sen}^2\theta, \frac{2}{\sqrt{2}}\text{sen}\theta \cos\theta)$	elipse
$Y = Z$	$(2\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta, \frac{2}{\sqrt{2}}\text{sen}\theta \cos\theta)$	elipse
$X = Y$	$(\text{sen}^2\theta + 2\cos^2\theta, \text{sen}^2\theta)$	segmento

6.2 3-variedades singulares de coposto 1 em \mathbb{R}^5

O objetivo desta seção é fazer um estudo da geometria de segunda ordem de 3-variedades singulares de coposto 1 em \mathbb{R}^5 . É importante ressaltar que as definições e resultados iniciais aqui apresentados são de autoria de Andrea de Jesus Sacramento e Maria Aparecida S. Ruas. Tais resultados são fruto de um período de pós-doutoramento realizado por Andrea (CNPq 150469/2017-9) sob supervisão da professora Maria Aparecida, (RUAS; SACRAMENTO, 2018). Os resultados que obtivemos nesta tese serão devidamente sinalizados.

Com o intuito de estudar a geometria de tais objetos, as autoras se motivaram pelas construções e definições apresentadas em (MARTINS; NUÑO BALLESTEROS, 2015) para o estudo da geometria de segunda ordem de superfícies singulares de coposto 1 em \mathbb{R}^3 e que também nortearam o estudo inicial para o caso de superfícies de coposto 1 em \mathbb{R}^4 apresentado

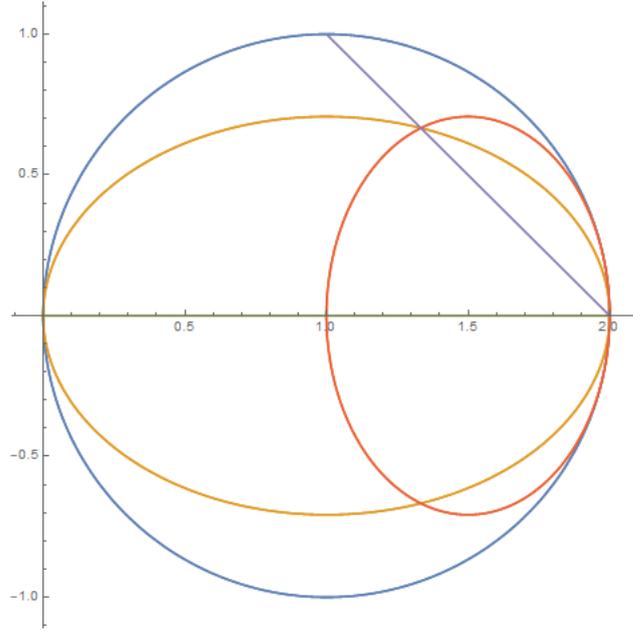


Figura 25 – Elipses de curvatura na região elíptica.

no Capítulo 4 e que também pode ser encontrado em (BENEDINI RIUL; RUAS; OSET SINHA, 2018).

Seja $M \subset \mathbb{R}^5$ uma 3-variedade singular de coposto 1 em $p \in M$. Vamos considerá-la como a imagem de uma aplicação C^∞ , $g : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^5$, onde \tilde{M} é uma variedade de dimensão 3 regular e $q \in \tilde{M}$ é um ponto singular de coposto 1 da aplicação g tal que $g(q) = p$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \xleftarrow{\phi} & U \subset \tilde{M} \xrightarrow{g} M \subset \mathbb{R}^5 \\ & \searrow f & \nearrow \end{array}$$

Tomando um sistema local de coordenadas $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, com $U \subset \tilde{M}$ um aberto contendo q , dizemos que a aplicação $f = g \circ \phi^{-1}$ é uma parametrização local de M em p . O espaço tangente de M em p é dado por $T_p M = \text{im}(dg_q)$, onde $dg_q : T_q \tilde{M} \rightarrow T_p \mathbb{R}^5$ é a diferencial da aplicação g no ponto de coposto 1, q . Definimos o hiperplano normal à M em p como o subespaço vetorial de dimensão 3, $N_p M$, tal que

$$T_p \mathbb{R}^5 = T_p M \oplus N_p M.$$

A primeira forma fundamental de M em p , $I : T_q \tilde{M} \times T_q \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$, é dada por

$$I(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle dg_q(\mathbf{u}), dg_q(\mathbf{v}) \rangle, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_q \tilde{M},$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno induzido de \mathbb{R}^5 . Da mesma forma como as primeiras formas fundamentais para superfícies de coposto 1 em \mathbb{R}^n , $n = 3, 4$, a primeira forma fundamental de uma 3-variedade de coposto 1 não é uma métrica Riemanniana em $T_q \tilde{M}$, mas sim uma pseudométrica.

Tomando uma parametrização local de M em p , $f = g \circ f^{-1}$, como antes e $\{\partial_x, \partial_y, \partial_z\}$ uma base de $T_q\tilde{M}$, podemos obter os *coeficientes da primeira forma fundamental* com respeito à carta local ϕ :

$$\begin{aligned} E(q) &= I(\partial_x, \partial_x) = \langle f_x, f_x \rangle(\phi(q)), & F(q) &= I(\partial_x, \partial_y) = \langle f_x, f_y \rangle(\phi(q)), \\ G(q) &= I(\partial_y, \partial_y) = \langle f_y, f_y \rangle(\phi(q)), & H(q) &= I(\partial_z, \partial_z) = \langle f_z, f_z \rangle(\phi(q)), \\ I(q) &= I(\partial_x, \partial_z) = \langle f_x, f_z \rangle(\phi(q)), & J(q) &= I(\partial_y, \partial_z) = \langle f_y, f_z \rangle(\phi(q)). \end{aligned}$$

Tomando $\mathbf{u} = \alpha\partial_x + \beta\partial_y + \gamma\partial_z \in T_q\tilde{M}$, temos

$$I(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \alpha^2 E(q) + 2\alpha\beta F(q) + \beta^2 G(q) + \gamma^2 H(q) + 2\alpha\gamma I(q) + 2\beta\gamma J(q).$$

Nas mesmas condições, definimos a *segunda forma fundamental* na base $\{\partial_x, \partial_y, \partial_z\}$ considerada acima. Isso é feito como segue. A projeção ortogonal

$$\begin{aligned} \pi_2 : T_p\mathbb{R}^5 &\rightarrow N_pM \\ w &\mapsto \pi_2(w) \end{aligned}$$

é definida canonicamente e $II : T_q\tilde{M} \times T_q\tilde{M} \rightarrow N_pM$ é tal que

$$\begin{aligned} II(\partial_x, \partial_x) &= \pi_2(f_{xx}(\phi(q))), & II(\partial_x, \partial_y) &= \pi_2(f_{xy}(\phi(q))), & II(\partial_y, \partial_y) &= \pi_2(f_{yy}(\phi(q))), \\ II(\partial_z, \partial_z) &= \pi_2(f_{zz}(\phi(q))), & II(\partial_x, \partial_z) &= \pi_2(f_{xz}(\phi(q))), & II(\partial_y, \partial_z) &= \pi_2(f_{yz}(\phi(q))). \end{aligned}$$

Logo, podemos estender II para $T_q\tilde{M} \times T_q\tilde{M}$ canonicamente de modo único a uma aplicação bilinear simétrica. Mais ainda, dado $\mathbf{u} = \alpha\partial_x + \beta\partial_y + \gamma\partial_z \in T_q\tilde{M}$ podemos escrever

$$II(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = (\alpha^2\pi_2(f_{xx}) + 2\alpha\beta\pi_2(f_{xy}) + \beta^2\pi_2(f_{yy}) + \gamma^2\pi_2(f_{zz}) + 2\alpha\gamma\pi_2(f_{xz}) + 2\beta\gamma\pi_2(f_{yz}))(\phi(q)).$$

Lema 6.11. A definição da segunda forma fundamental não depende da escolha do sistema de coordenadas locais ϕ em \tilde{M} .

Demonstração. A demonstração deste resultado é completamente análoga àquela feita no Lema 4.3, de modo que não a reproduziremos novamente aqui. \square

Para cada vetor normal $\mathbf{v} \in N_pM$ podemos definir a *segunda forma fundamental de M em p ao longo de \mathbf{v}* ,

$$II_{\mathbf{v}} : T_q\tilde{M} \times T_q\tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto II_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle II(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathbf{v} \rangle,$$

para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_q\tilde{M}$. Podemos escrever também os coeficientes de $II_{\mathbf{v}}$ em coordenadas:

$$\begin{aligned} l_{\mathbf{v}}(q) &= \langle \pi_2(f_{xx}), \mathbf{v} \rangle(\phi(q)), & m_{\mathbf{v}}(q) &= \langle \pi_2(f_{xy}), \mathbf{v} \rangle(\phi(q)), & n_{\mathbf{v}}(q) &= \langle \pi_2(f_{yy}), \mathbf{v} \rangle(\phi(q)), \\ p_{\mathbf{v}}(q) &= \langle \pi_2(f_{zz}), \mathbf{v} \rangle(\phi(q)), & q_{\mathbf{v}}(q) &= \langle \pi_2(f_{xz}), \mathbf{v} \rangle(\phi(q)), & r_{\mathbf{v}}(q) &= \langle \pi_2(f_{yz}), \mathbf{v} \rangle(\phi(q)). \end{aligned}$$

Tomando $\mathbf{u} = \alpha\partial_x + \beta\partial_y + \gamma\partial_z \in T_q\tilde{M}$, é válido que

$$II_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = (\alpha^2 l_{\mathbf{v}} + 2\alpha\beta m_{\mathbf{v}} + \beta^2 n_{\mathbf{v}} + \gamma^2 p_{\mathbf{v}} + 2\alpha\gamma q_{\mathbf{v}} + 2\beta\gamma r_{\mathbf{v}})(q).$$

Fixando um referencial ortonormal $\{v_1, v_2, v_3\}$ para N_pM , temos

$$\begin{aligned} II(\mathbf{u}, \mathbf{u}) &= II_{v_1}(\mathbf{u}, \mathbf{u})v_1 + II_{v_2}(\mathbf{u}, \mathbf{u})v_2 + II_{v_3}(\mathbf{u}, \mathbf{u})v_3 \\ &= \sum_{i=1}^3 (\alpha^2 l_{nu_i} + 2\alpha\beta m_{v_i} + \beta^2 l_{v_i} + \gamma^2 p_{v_i} + 2\alpha\gamma q_{v_i} + 2\beta\gamma r_{v_i})(q), \end{aligned}$$

para todo $\mathbf{u} = \alpha\partial_x + \beta\partial_y + \gamma\partial_z \in T_q\tilde{M}$.

Mais ainda, ainda utilizando o referencial ortonormal acima podemos escrever a *matriz da segunda forma fundamental de M em p* , dada pela seguinte matriz de ordem 3×6 :

$$\begin{pmatrix} l_{v_1} & m_{v_1} & n_{v_1} & p_{v_1} & q_{v_1} & r_{v_1} \\ l_{v_2} & m_{v_2} & n_{v_2} & p_{v_2} & q_{v_2} & r_{v_2} \\ l_{v_3} & m_{v_3} & n_{v_3} & p_{v_3} & q_{v_3} & r_{v_3} \end{pmatrix}.$$

A próxima definição é a de locus de curvatura para uma 3-variedade M com singularidade de coposto 1 em \mathbb{R}^5 .

Definição 6.12. Seja C_q o subconjunto dos vetores unitários (segundo a pseudométrica dada pela primeira forma fundamental) em $T_q\tilde{M}$. Considere a aplicação $\eta_q : C_q \rightarrow N_pM$ dada por $\eta_q(\mathbf{u}) = II(\mathbf{u}, \mathbf{u})$. O *locus de curvatura de M em p* é a imagem desta aplicação e será denotado por Δ_p , ou seja, $\Delta_p = \eta_q(C_q)$.

Uma vez que a segunda forma fundamental não depende da escolha do sistema de coordenadas locais ϕ em \tilde{M} , o mesmo vale para o locus de curvatura. No entanto, tal como nos casos de superfícies de coposto 1, Δ_p depende da aplicação g .

Exemplo 6.13. (i) Considere a 3-variedade de coposto 1 dada como imagem de $\tilde{M} = \mathbb{R}^3$ via aplicação $g(x, y, z) = (x, y, xz, yz, z^2)$. Tomando coordenadas (X, Y, Z, W, T) na meta com $p = (0, 0, 0, 0, 0)$ e $q = (0, 0, 0)$, temos que o plano tangente T_pM é dado pelo plano XY e o hiperplano normal N_pM é o gerado por ZWT . Além disso, para $\mathbf{u} = \alpha\partial_x + \beta\partial_y + \gamma\partial_z \in T_q\tilde{M}$ temos $E = G = 1$ e $F = H = I = J = 0$, de modo que $I(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \alpha^2 + \beta^2$ e $II(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = (0, 0, 2\alpha\gamma, 2\beta\gamma, 2\gamma^2)$. Portanto, o conjunto dos vetores unitários é o cilindro dado por $C_q = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3; \alpha^2 + \beta^2 = 1\}$ e o locus de curvatura é o parabolóide $\Delta_p = \{(0, 0, 2\alpha\gamma, 2\beta\gamma, 2\gamma^2); \alpha^2 + \beta^2 = 1\}$.

(ii) Tomando M dada por $g(x, y, z) = (x, y, z^2, xz, 0)$ nas mesmas condições do item anterior, o locus de curvatura para todo ponto da forma $p = (0, y, 0, 0, 0)$, com $y \in \mathbb{R}$ é uma região parabólica dada por $\Delta_p = \{(0, 0, 2\gamma^2, 2\alpha\gamma, 0); \alpha^2 + \beta^2 = 1\}$

(iii) A 3-variedade dada por $g(x, y, z) = (x, y, z^2, 0, 0)$ é tal que seu locus de curvatura na origem p é uma semirreta, $\Delta_p = \{(0, 0, 2\gamma^2, 0, 0); \alpha^2 + \beta^2 = 1\}$.

Observação 6.14. Seja $M \subset \mathbb{R}^5$ uma 3-variedade singular de coposto 1 em $p \in M$ dada como na construção inicial desta seção. Uma vez que a aplicação $g : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^5$ é de coposto 1 em

$q \in \tilde{M}$, podemos escolher um sistema de coordenadas ϕ e fazer rotações na meta de modo que a parametrização local f de M em p seja dada por

$$f(x, y, z) = (x, y, f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z)),$$

com $f_i \in \mathcal{M}_3^2$, para $i = 1, 2, 3$. Além disso f satisfaz as condições de que $\frac{\partial f_i}{\partial x}(\phi(q)) = \frac{\partial f_i}{\partial y}(\phi(q)) = \frac{\partial f_i}{\partial z}(\phi(q)) = 0$, para $i = 1, 2, 3$. Conseqüentemente, os coeficientes da primeira forma fundamental são dados por $E = G = 1$ e $F = H = I = J = 0$. Isto posto, tomando $\mathbf{u} = \alpha \partial_x + \beta \partial_y + \gamma \partial_z \in C_q \subset T_q \tilde{M}$, temos que $I(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 1$ se, e somente se, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, ou seja, o subconjunto dos vetores tangentes unitários C_q é dado por um cilindro infinito de raio 1 paralelo ao eixo ∂_z em $T_q \tilde{M}$. Fixando um referencial ortonormal $\{v_1, v_2, v_3\}$ de $N_p M$, podemos parametrizar o locus de curvatura Δ_p da seguinte maneira:

$$(\alpha, \beta, \gamma) \mapsto \sum_{i=1}^3 (\alpha^2 l_{v_i} + 2\alpha\beta m_{v_i} + \beta^2 l_{v_i} + \gamma^2 p_{v_i} + 2\alpha\gamma q_{v_i} + 2\beta\gamma r_{v_i}) v_i,$$

com $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

A ação do grupo \mathcal{A}^2 particiona o espaço dos dois jatos de aplicações $f: (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^5, 0)$ de coposto 1, $\Sigma^1 J^2(3, 5)$, em seis órbitas.

Proposição 6.15. (RUAS; SACRAMENTO, 2018) Existem seis \mathcal{A}^2 -órbitas em $\Sigma^1 J^2(3, 5)$, a saber:

$$(x, y, xz, yz, z^2), (x, y, z^2, xz, 0), (x, y, xz, yz, 0), (x, y, z^2, 0, 0), (x, y, xz, 0, 0) \text{ e } (x, y, 0, 0, 0).$$

Observação 6.16. Dado um 2-jato de aplicação em $\Sigma^1 J^2(3, 5)$,

$$j^2 f(0) = (x, y, a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{21}z^2 + a_{22}xz + a_{12}yz, b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + b_{21}z^2 + b_{22}xz + b_{12}yz, c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2 + c_{21}z^2 + c_{22}xz + c_{12}yz)$$

podemos listar condições para que o germe pertença à uma determinada órbita. Na Tabela 11 estão listadas tais condições. Aqui, representamos por A a seguinte matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} & b_{12} \\ c_{21} & c_{22} & c_{12} \end{pmatrix}$$

e $D = \det(A)$.

Vimos no Teorema 3.3, que a parábola de curvatura de uma superfície singular de coposto 1 em \mathbb{R}^3 distingue completamente as quatro órbitas da \mathcal{A}^2 -classificação dos 2-jatos de aplicações em $\Sigma^1 J^2(2, 3)$. Além disso, mostramos no Teorema 4.9 que um resultado análogo é válido para superfícies singulares de coposto 1 em \mathbb{R}^4 . Seria então natural esperar que o locus de curvatura de uma 3-variedade singular de coposto 1 em \mathbb{R}^5 compartilhasse dessa propriedade.

Tabela 11 – Condições para \mathcal{A}^2 -classificação em $\Sigma^1 J^2(3, 5)$.

Forma normal	Condições
(x, y, xz, yz, z^2)	$D \neq 0$
$(x, y, z^2, xz, 0)$	$D = 0$, $\text{posto}(A) = 2$ e $a_{21}^2 + b_{21}^2 + c_{21}^2 > 0$
$(x, y, xz, yz, 0)$	$D = 0$, $\text{posto}(A) = 2$ e $a_{21} = b_{21} = c_{21} = 0$
$(x, y, z^2, 0, 0)$	$D = 0$, $\text{posto}(A) = 1$ e $a_{21}^2 + b_{21}^2 + c_{21}^2 > 0$
$(x, y, xz, 0, 0)$	$D = 0$, $\text{posto}(A) = 1$ e $a_{21} = b_{21} = c_{21} = 0$
$(x, y, 0, 0, 0)$	$a_{21} = a_{22} = a_{12} = b_{21} = b_{22} = b_{12} = c_{21} = c_{22} = c_{12} = 0$

No entanto, isso não ocorre. No primeiro item do Exemplo 6.13, mostramos que o locus de curvatura na origem da 3-variedade localmente parametrizada por $f_1(x, y, z) = (x, y, xz, yz, z^2)$ é um parabolóide. Considere agora a 3-variedade dada por $f_2(x, y, z) = (x, y, xz + y^2, yz, z^2)$. Muito embora $j^2 f_2(0) \sim_{\mathcal{A}^2} j^2 f_1(0)$, o locus de curvatura da 3-variedade dada por f_2 é dado por $\{(0, 0, 2\alpha\gamma + 2\beta^2, 2\beta\gamma, 2\gamma^2); \alpha^2 + \beta^2 = 1\}$, que não é um parabolóide. As Figuras 26 e 27 ilustram o locus de curvatura na origem da 3-variedade localmente parametrizada por f_2 .

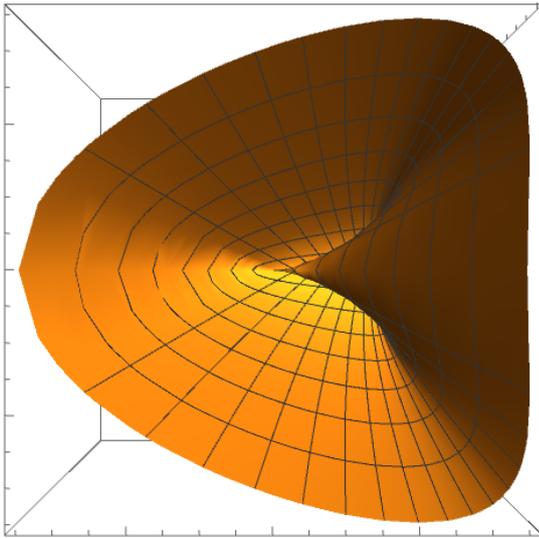


Figura 26 – Vista superior do locus de curvatura.

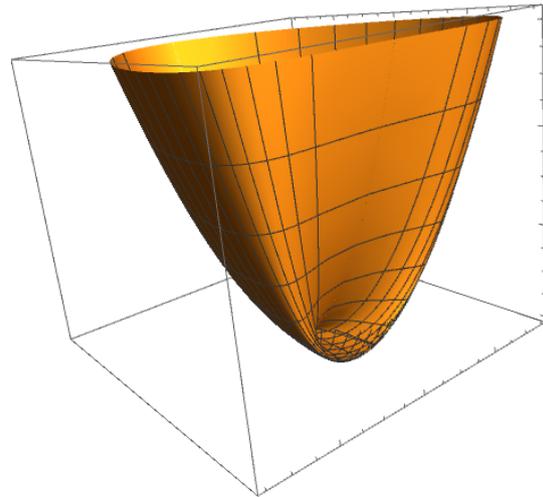


Figura 27 – Vista lateral do locus de curvatura.

O grupo $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{O}(5)$ também age em $\Sigma^1 J^2(3, 5)$, produzindo, para cada órbita listada na Proposição 6.15, uma forma normal genérica de grau 2 obtida por mudanças de coordenadas na fonte que preservam a geometria de segunda ordem e por isometrias na meta.

Proposição 6.17. (RUAS; SACRAMENTO, 2018) Seja $f : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^5, 0)$ um germe de aplicação de coposto 1. Utilizando mudanças de coordenadas suaves na fonte e isometrias na meta, podemos escrever f em uma das seguintes formas normais:

$$(i) \quad (x, y, z) \mapsto (x, y, a_1x^2 + a_3y^2 + xz + a_6yz + p(x, y, z), b_1x^2 + b_2xy + b_3y^2 + b_6yz + q(x, y, z), c_1x^2 + c_2xy + c_3y^2 + c_4z^2 + c_5xz + c_6yz + r(x, y, z)), \text{ se } j^2 f(0) \sim_{\mathcal{A}^2} (x, y, xz, yz, z^2);$$

- (ii) $(x, y, z) \mapsto (x, y, a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4z^2 + a_5xz + p(x, y, z), b_1x^2 + b_2xy + b_3y^2 + xz + q(x, y, z), c_1x^2 + c_2xy + c_3y^2 + r(x, y, z))$, se $j^2f(0) \sim_{\mathcal{A}^2} (x, y, z^2, xz, 0)$;
- (iii) $(x, y, z) \mapsto (x, y, a_1x^2 + a_3y^2 + xz + p(x, y, z), b_1x^2 + b_3y^2 + b_5xz + b_6yz + q(x, y, z), c_1x^2 + c_3y^2 + r(x, y, z))$, se $j^2f(0) \sim_{\mathcal{A}^2} (x, y, xz, yz, 0)$;
- (iv) $(x, y, z) \mapsto (x, y, a_x^2 + a_2xy + a_3y^2 + z^2 + p(x, y, z), b_1x^2 + b_2xy + b_3y^2 + q(x, y, z), c_1x^2 + c_2xy + c_3y^2 + r(x, y, z))$, se $j^2f(0) \sim_{\mathcal{A}^2} (x, y, z^2, 0, 0)$;
- (v) $(x, y, z) \mapsto (x, y, a_3y^2 + xz + p(x, y, z), b_1x^2 + b_2xy + b_3y^2 + q(x, y, z), c_1x^2 + c_2xy + c_3y^2 + r(x, y, z))$, se $j^2f(0) \sim_{\mathcal{A}^2} (x, y, xz, 0, 0)$;
- (vi) $(x, y, z) \mapsto (x, y, a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + p(x, y, z), b_1x^2 + b_2xy + b_3y^2 + q(x, y, z), c_1x^2 + c_2xy + c_3y^2 + r(x, y, z))$, se $j^2f(0) \sim_{\mathcal{A}^2} (x, y, 0, 0, 0)$,

com $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, 6$ constantes, $a_4, c_4 > 0$, $b_6 \neq 0$ e $p, q, r \in \mathcal{M}_3^3$.

Seja $M \subset \mathbb{R}^5$ uma 3-variedade singular de coposto 1 em $p \in M$. Considere também um vetor tangente não nulo $\mathbf{w} \in T_pM$ (note que não estamos nos referindo ao espaço $T_q\tilde{M}$). Tomando coordenadas (X, Y, Z, W, T) em \mathbb{R}^5 e escrevendo uma parametrização local f de M como na Observação 6.14, podemos escrever $\mathbf{w} = \alpha X + \beta Y \in T_pM$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ não simultaneamente nulos. Consideremos a seção normal de M dada pelo quatro espaço $\alpha X + \beta Y = 0$. Supondo, sem perda de generalidade, que $\beta \neq 0$ (o outro caso é análogo), escrevemos

$$Y = -\frac{\alpha}{\beta}X = \gamma X, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

Dessa forma, obtemos de M , via seção normal $Y = \gamma X$, uma superfície singular de coposto 1 contida em um 4-espaço, que pode ser localmente parametrizada por

$$\tilde{f}(x, z) = (x, \gamma x, f_1(x, \gamma x, z), f_2(x, \gamma x, z), f_3(x, \gamma x, z)).$$

Feitas estas considerações podemos demonstrar o próximo teorema, este de nossa autoria, em que relacionamos o locus de curvatura de uma 3-variedade singular de coposto 1 em \mathbb{R}^5 com as parábolas de curvatura de superfícies singulares em \mathbb{R}^4 dadas por suas seções normais.

Teorema 6.18. Seja $M \subset \mathbb{R}^5$ uma 3-variedade singular de coposto 1 em $p \in M$. O locus de curvatura de M em p é gerado pela união não disjunta de parábolas de curvatura em p das superfícies singulares de coposto 1 em \mathbb{R}^4 obtidas pelas seções normais dadas por direções tangentes da 3-variedade M .

Demonstração. Seja M como tomada acima. Note, inicialmente, que dada uma superfície singular de coposto 1 em \mathbb{R}^4 , ao mergulhá-la canonicamente em \mathbb{R}^5 , sua parábola de curvatura no ponto singular não se altera. Considere $\mathbf{w} \in T_pM$ e note que $(dg_q)^{-1}(\mathbf{w}) \subset T_q\tilde{M}$ é um plano que

contém o subconjunto $\ker(dg_q)$, com g sendo a aplicação de coposto 1 em q dada na construção inicial desta seção e que satisfaz a condição $g(q) = p$.

Dessa forma, o subconjunto $C'_q = (dg_q)^{-1}(\mathbf{w}) \cap C_q$ é um par de retas contido no cilindro C_q e tal que $\eta_q(C'_q)$ é a parábola de curvatura da superfície singular contida no 4-espaço dado pela seção normal $\mathbf{w} = 0$ e que por sua vez, está contida no locus de curvatura de M . De fato, isso ocorre pois a segunda forma fundamental de M restrita à $(dg_q)^{-1}(\mathbf{w}) \subset T_q\tilde{M}$ é exatamente a segunda forma fundamental da superfície obtida pela seção normal de M . A Figura 28 ilustra a construção anterior.

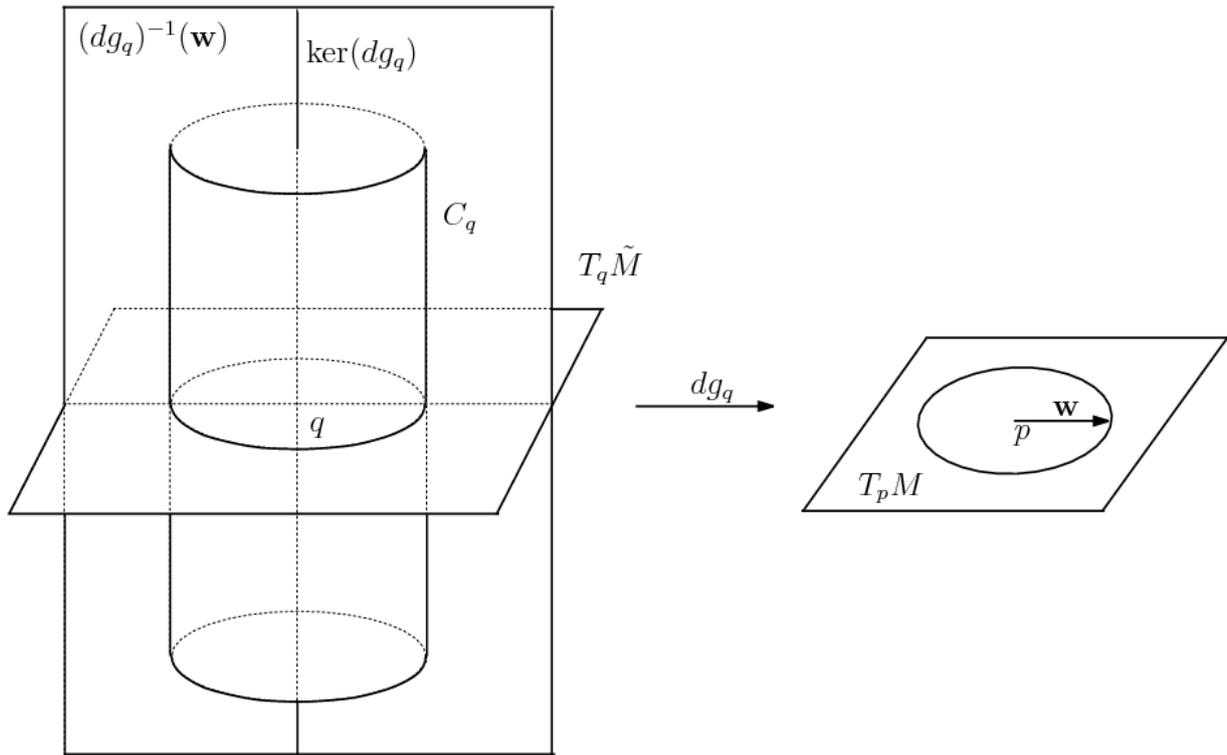


Figura 28 – Ilustração do Teorema 6.18.

Ao variarmos $\mathbf{w} \in T_pM$ em todo o plano, obtemos todo cilindro C_q em $T_q\tilde{M}$ e consequentemente, todo o locus de curvatura da 3-variedade. Portanto, como cada seção normal nos dá uma parábola de curvatura contida no locus de curvatura de M em p , temos que este último é gerado pelas parábolas de curvatura.

□

Exemplo 6.19. (i) Considere a 3-variedade $M \subset \mathbb{R}^5$ de coposto 1 na origem p localmente parametrizada por

$$f(x, y, z) = (x, y, x^2 - 2yz, y^2 - 2xz, z^2 - 2xy),$$

cujo locus de curvatura é o conjunto

$$\{(2\alpha^2 - 4\beta\gamma, 2\beta^2 - 4\alpha\gamma, 2\gamma^2 - 4\alpha\beta) \in N_p M; \alpha^2 + \beta^2 = 1\},$$

ilustrado nas Figuras 29 e 30. Faremos seções normais em M e olharemos para as parábolas

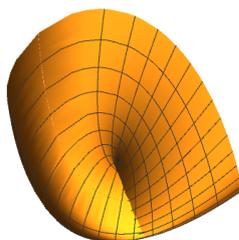


Figura 29 – Vista lateral do locus de curvatura.

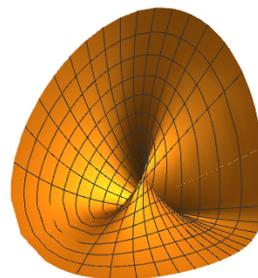


Figura 30 – Vista superior do locus de curvatura.

de curvatura das superfícies de coposto 1 obtidas através destas seções. Para a seção normal $X = 0$, obtemos a superfície de coposto 1 dada por $\tilde{f}(x, y) = (y, -2yz, y^2, z^2)$ e sua parábola de curvatura na origem pode ser parametrizada por $\tilde{\eta}(z) = (-4z, 2, 2z^2)$. Já a seção normal $Y = 0$, tem como parametrização da superfície singular $\tilde{f}(x, z) = (x, x^2, -2xz, z^2)$ e sua parábola de curvatura na origem é dada por $\tilde{\eta}(z) = (2, -4z, 2z^2)$. Por fim, considere a seção normal $X + aY = 0$, com $a \neq 0$. Obtemos

$$f_a(y, z) = (-ay, y, a^2y^2 - 2yz, y^2 + 2ayz, z^2 + 2ay^2).$$

Após aplicarmos a isometria

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) & 0 & 0 & 0 \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

com $\theta = -\arctan(a)$ e a mudança de coordenadas na fonte $(y, z) \mapsto (\frac{\sqrt{a^2+1}}{a^2+1}y, z)$, obtemos a seguinte parametrização local para a superfície dada pela seção normal:

$$\left(0, y, \frac{(a^2\sqrt{a^2+1}y^2 - 2(a^2+1)yz)}{(a^2+1)^{3/2}}, \frac{(\sqrt{a^2+1}y^2 + 2a(a^2+1)yz)}{(a^2+1)^{3/2}}, \frac{(a^2+1)z^2 + 2ay^2}{a^2+1} \right).$$

O locus de curvatura desta última pode ser parametrizado por:

$$\eta_a(z) = \left(\frac{2a^2\sqrt{a^2+1} - 4(a^2+1)z}{(a^2+1)^{3/2}}, \frac{2\sqrt{a^2+1} + 4a(a^2+1)z}{(a^2+1)^{3/2}}, \frac{4a + 2(a^2+1)z^2}{a^2+1} \right)$$

e para todo valor de $a \in \mathbb{R}$ é uma parábola não degenerada. Portanto, o locus de curvatura de M pode ser gerado por parábola de curvatura, todas não degeneradas. Na Figura 31, apresentamos o traço de algumas parábolas de curvatura que geram o locus de M em p .

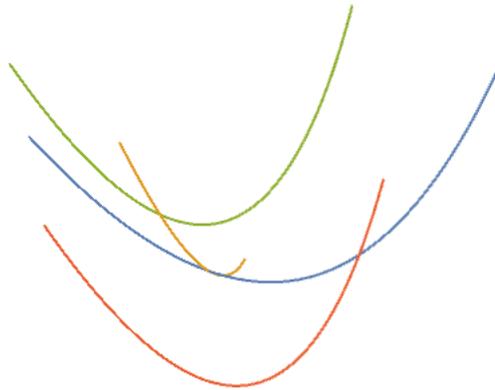


Figura 31 – Parábolas de curvatura contidas no locus de curvatura.

(ii) Considere agora a 3-variedade $M \subset \mathbb{R}^5$ localmente parametrizada na origem por

$$f(x, y, z) = (x, y, z^2, xz, 0).$$

Seu locus de curvatura na origem é dada pelo conjunto

$$\{(2\gamma^2, 2\alpha\gamma, 0) \in N_p M; \alpha^2 + \beta^2 = 1\},$$

que corresponde a uma região parabólica plana, como na Figura 32. Do mesmo modo

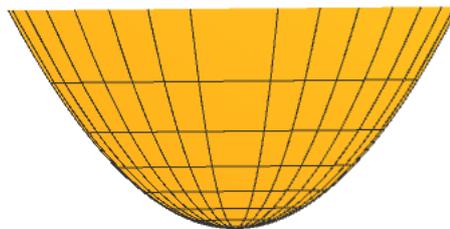


Figura 32 – Região parabólica.

como fizemos no item anterior, vamos tomar seções normais. A seção normal $X = 0$ nos dá

uma superfície singular de coposto 1 localmente parametrizada por $\tilde{f}(y, z) = (y, z^2, 0, 0)$, cuja parábola de curvatura é a semirreta dada por $\bar{\eta}(z) = (2z^2, 0, 0)$. As seções normais $Y + aX = 0$, com $a \in \mathbb{R}$ dão origem a superfícies localmente parametrizadas pela família $\tilde{f}_a(x, z) = (x, -ax, z^2, xz, 0)$, que após uma isometria e uma reparametrização (tal como feito no item anterior), pode ser reescrita como

$$(x, z) \mapsto \left(0, x, z^2, \frac{\sqrt{a^2+1}}{a^2+1}xz \right).$$

As parábolas de curvatura são dadas por $\eta_a(z) = (2z^2, \frac{2\sqrt{a^2+1}}{a^2+1}z, 0)$, e para todo $a \in \mathbb{R}$ o traço é uma parábola não degenerada. Na Figura 33, ilustramos parábolas de curvatura na região parabólica.

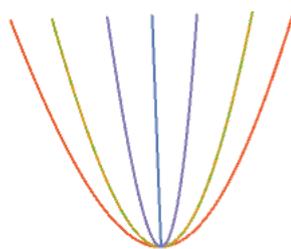


Figura 33 – Parábolas de curvatura na região parabólica.

Observação 6.20. É possível determinar exatamente quais são as parábolas de curvatura que geram o locus de curvatura de uma 3-variedade de coposto 1 em \mathbb{R}^5 parametrizada localmente por $f : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^5, 0)$. Isso pode ser determinado pela $\mathcal{R}^2 \times \mathcal{O}(5)$ -forma normal de f , dada na Proposição 6.17. Tomaremos aqui coordenadas $XYZWT$ em \mathbb{R}^5 .

(i) Se o 2-jato de f pode ser escrito como

$$(x, y, z) \mapsto (x, y, a_1x^2 + a_3y^2 + xz + a_6yz, b_1x^2 + b_2xy + b_3y^3 + b_6yz, c_1x^2 + c_2xy + c_3y^2 + c_4z^2 + c_5xz + c_6yz),$$

com $c_4 > 0$ e $b_6 \neq 0$, as parábolas de curvatura de qualquer seção normal são parábolas não degeneradas. De fato, tome, inicialmente, a seção normal dada por $Y + \alpha X = 0$, com $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$. Obtemos então uma superfície singular de coposto 1 em \mathbb{R}^4 localmente parametrizada por:

$$(x, z) \mapsto (x, -\alpha x, a_3 \alpha^2 x^2 - a_6 \alpha xz + a_1 x^2 + xz, -\alpha b_2 x^2 + \alpha b_3 x^2 - \alpha b_6 xz + b_1 x^2, c_3 \alpha^2 x^2 - c_2 \alpha x^2 - c_6 \alpha xz + c_1 x^2 + c_4 z^2 + c_5 xz)$$

Considere a isometria na fonte dada pela matriz

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) & 0 & 0 & 0 \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

com $\theta = \arctan(\alpha)$. Após aplicarmos a isometria, obtemos

$$(x, z) \mapsto \left(\frac{(\alpha^2+1)x}{\sqrt{\alpha^2+1}}, 0, (\alpha^2+1)x^2 + (1-\alpha a_6)xz, (\alpha b_3 - \alpha b_2 + b_1)x^2 - \alpha b_6xz, \right. \\ \left. (c_3\alpha^2 - c_2\alpha + c_1)x^2 + (c_5 - c_6\alpha)xz + c_4z^2 \right).$$

Com a mudança na fonte $(x, z) \mapsto \left(\frac{\sqrt{\alpha^2+1}x}{\alpha^2+1}, z \right)$ temos,

$$(x, z) \mapsto \left(x, 0, \frac{\sqrt{\alpha^2+1}(\alpha^2 a_3 + a_1)x^2 + (\alpha^2+1)(1-a_6\alpha)xz}{(\alpha^2+1)^{3/2}}, -\frac{\sqrt{\alpha^2+1}(b_2\alpha - b_3\alpha - b_1)x^2 + b_6\alpha(\alpha^2+1)xz}{(\alpha^2+1)^{3/2}}, \right. \\ \left. \frac{\sqrt{\alpha^2+1}(c_3\alpha^2 - c_2\alpha + c_1)x^2 + (\alpha^2+1)(c_5 - \alpha c_6)xz + c_4\sqrt{\alpha^2+1}(\alpha^2+1)z^2}{(\alpha^2+1)^{3/2}} \right).$$

Considerando a superfície no 4-espço $XZWT$, o 2-jato acima é \mathcal{A}^2 -equivalente à $(x, xz, z^2, 0)$ pois o coeficiente que acompanha z^2 é não nulo, e portanto pelo Teorema 4.9, a parábola de curvatura é uma parábola não degenerada, para todo $\alpha \neq 0$. Por outro lado, as seções normais $X = 0$ e $Y = 0$ nos dão superfícies singulares localmente parametrizadas por

$$(y, z) \mapsto (0, y, a_3y^2 + a_6yz, b_3y^2 + b_6yz, c_3y^2 + c_4z^2 + c_6yz),$$

e

$$(x, z) \mapsto (x, 0, a_1x^2 + xz, b_1x^2, c_1x^2 + c_4z^2 + c_5xz)$$

respectivamente. Tomando-as como superfícies nos 4-espços dados, respectivamente, por $YZWT$ e $XZWT$, temos que os 2-jatos das parametrizações são \mathcal{A}^2 -equivalentes à $(x, xy, y^2, 0)$, nos permitindo concluir novamente que as parábolas de curvatura são parábolas não degeneradas.

(ii) Considere agora o 2-jato da $\mathcal{R}^2 \times \mathcal{O}(5)$ forma normal dada por

$$(x, y, z) \mapsto (x, y, a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4z^2 + a_5xz, b_1x^2 + b_2xy + b_3y^2 \\ + xz, c_1x^2 + c_2xy + c_3y^2),$$

com $a_4 > 0$. Neste caso, temos uma seção normal cuja parábola de curvatura é uma semirreta, todas as outras são parábolas não degeneradas. Procedendo de maneira análoga, considerando inicialmente a seção normal dada por $Y + \alpha X = 0$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, obtemos então uma superfície singular de coposto 1 em \mathbb{R}^4 localmente parametrizada por:

$$(x, z) \mapsto \left(x, 0, f_3(x, z), xz, \frac{x^2(\alpha^2 c_3 - \alpha c_2 + c_1)}{\alpha^2 + 1} \right),$$

com

$$f_3(x, z) = a_4 z^2 + \frac{(-2a_4 \alpha^4 b_3 + 2a_4 \alpha^3 b_2 - 2a_4 \alpha^2 b_1 - 2a_4 \alpha^2 b_3 + 2a_4 \alpha b_2 + a_5 \alpha^2 - 2a_4 b_1 + a_5) xz}{\alpha^2 + 1} + \frac{(a_4 \alpha^4 b_3^2 - 2a_4 \alpha^3 b_2 b_3 + 2a_4 \alpha^2 b_1 b_3 + a_4 \alpha^2 b_2^2 - 2a_4 \alpha b_1 b_2 - a_5 \alpha^2 b_3 + a_3 \alpha^2 + a_4 b_1^2 + a_5 \alpha b_2 - a_2 \alpha - a_5 b_1 + a_1) x^2}{\alpha^2 + 1}$$

Mais uma vez, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, tomando a superfície contida no 4-espço $XZWT$, o 2-jato de sua parametrização local é \mathcal{A}^2 -equivalente à $(x, xz, z^2, 0)$, o que garante que sua parábola de curvatura na origem é uma parábola não degenerada. Tomando, no entanto, a seção normal $X = 0$, obtemos a parametrização local

$$(y, z) \mapsto (0, y, a_3 y^2 + a_4 z^2, b_3 y^2, c_3 y^2),$$

com $a_4 > 0$ para a superfície singular. Tomando-a no 4-espço $YZWT$, temos que seu 2-jato é \mathcal{A}^2 -equivalente à $(y, z^2, 0, 0)$. Portanto, sua parábola de curvatura na origem é uma semirreta.

(iii) Neste caso, considerando o 2-jato da forma normal dado por

$$(x, y) \mapsto (x, y, a_1 x^2 + a_3 y^2 + xz, b_1 x^2 + b_3 y^2 + b_5 xz + b_6 yz, c_1 x^2 + c_2 xy + c_3 y^2)$$

com $b_6 \neq 0$, todas as parábolas de curvatura das seções normais são retas. Fazendo a seção normal $Y + \alpha X = 0$ com $\alpha \in \mathbb{R}$, obtemos após mudanças de coordenadas como nos casos anteriores

$$(x, z) \mapsto \left(x, 0, xz, x^2 \frac{(a_3 \alpha^3 b_6 - a_3 \alpha^2 b_5 + a_1 \alpha b_6 + \alpha^2 b_3 - a_1 b_5 + b_1)}{(\alpha^2 + 1) \sqrt{\alpha^2 b_6^2 - 2\alpha b_5 b_6 + b_5^2 + 1}}, x^2 \frac{(\alpha^2 c_3 - \alpha c_2 + c_1)}{(\alpha^2 + 1)} \right).$$

Tomando essa parametrização no espço $XZWT$, temos que ela é \mathcal{A}^2 -equivalente à $(x, xz, 0, 0)$. Fazendo a seção normal $X = 0$, seguida de mudanças de coordenadas, obtemos

$$(y, z) \mapsto (0, y, a_3 y^2, yz, c_3 y^2),$$

que pelo mesmo argumento utilizado acima, é \mathcal{A}^2 -equivalente à $(y, yz, 0, 0)$, ou seja, em todos os casos a parábola de curvatura é dada por uma reta.

(iv) Ao tomarmos o 2-jato da forma normal dado por

$$(x, y, z) \mapsto (x, y, a_1 x^2 + a_2 xy + a_3 y^2 + z^2, b_1 x^2 + b_2 xy + b_3 y^2, c_1 x^2 + c_2 xy + c_3 y^2),$$

todas as parábolas de curvatura de seções normais são semirretas. Fazendo a seção normal dada por $Y + \alpha X = 0$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:

$$(x, z) \mapsto \left(x, 0, \frac{a_3 \alpha^2 - a_2 \alpha + a_1}{\alpha^2 + 1} x^2 + z^2, \frac{\alpha^2 b_3 - \alpha b_2 + b_1}{\alpha^2 + 1} x^2, \frac{\alpha^2 c_3 - \alpha c_2 + c_1}{\alpha^2 + 1} x^2 \right).$$

Por outro lado, fazendo a seção $X = 0$, obtemos

$$(y, z) \mapsto (0, y, a_3 y^2 + z^2, b_3 y^2, c_3 y^2).$$

Em ambos os casos, as parametrizações tomadas nos respectivos 4-espacos em que as superfícies estão contidas, são \mathcal{A}^2 -equivalentes à $(x, y^2, 0, 0)$, ou seja, todas as parábolas de curvatura são semirretas.

(v) No penúltimo caso, quando o 2-jato da forma normal é dado por

$$(x, y, z) \mapsto (x, y, a_3y^2 + xz, b_1x^2 + b_2xy + b_3y^2, c_1x^2 + c_2xy + c_3y^2),$$

a parábola de curvatura é um ponto para uma seção normal e em todas as outras é uma reta. Considerando a seção normal dada por $Y + \alpha X = 0$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:

$$(x, z) \mapsto \left(x, 0, xz, \frac{\alpha^2 b_3 - \alpha b_2 + b_1}{\alpha^2 + 1} x^2, \frac{\alpha^2 c_3 - \alpha c_2 + c_1}{\alpha^2 + 1} x^2 \right),$$

de modo que tomando-a em $XZWT$, é \mathcal{A}^2 -equivalente à $(x, xz, 0, 0)$. Por outro lado, quando fazemos a seção $X = 0$, obtemos:

$$(y, z) \mapsto (0, y, a_3y^2, b_3y^2, c_3y^2),$$

cujas parábolas de curvatura são pontos.

(vi) Por fim, quando o 2-jato da forma normal é dado por

$$(x, y, z) \mapsto (x, y, a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2, b_1x^2 + b_2xy + b_3y^2, c_1x^2 + c_2xy + c_3y^2),$$

todas as parábolas de curvatura são pontos. Fazendo a seção normal dada por $Y + \alpha X = 0$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:

$$(x, z) \mapsto \left(x, 0, \frac{\alpha^2 a_3 - \alpha a_2 + a_1}{\alpha^2 + 1} x^2, \frac{\alpha^2 b_3 - \alpha b_2 + b_1}{\alpha^2 + 1} x^2, \frac{\alpha^2 c_3 - \alpha c_2 + c_1}{\alpha^2 + 1} x^2 \right),$$

e quando fazemos a seção $X = 0$, obtemos:

$$(y, z) \mapsto (0, y, a_3y^2, b_3y^2, c_3y^2).$$

Como ambas parametrizações tomadas nos respectivos 4-espacos em que a superfície está contida são \mathcal{A}^2 -equivalentes à $(x, 0, 0, 0)$, as parábolas de curvatura são sempre pontos.

Já sabemos que o locus de curvatura não é capaz de distinguir as seis \mathcal{A}^2 -órbitas em $\Sigma^1 J^2(3, 5)$. No entanto, as parábolas de curvatura das seções normais de 3-variedades são capazes de fazer essa distinção.

Teorema 6.21. Seja $M \subset \mathbb{R}^5$ uma 3-variedade com uma singularidade de coposto 1 em $p \in M$. Vamos assumir $p = (0, 0, 0, 0, 0)$ e denotar por $j^2 f(0)$ o 2-jato de uma parametrização local $f : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^5, 0)$ de M . São válidas as seguintes equivalências:

(i) Δ_p é gerado exclusivamente por parábolas não degeneradas $\Leftrightarrow j^2 f(0) \sim_{\mathcal{A}^2} (x, y, xz, yz, z^2)$;

- (ii) Δ_p é gerado por parábolas não degeneradas e uma semirreta $\Leftrightarrow j^2 f(0) \sim_{\mathcal{A}^2} (x, y, z^2, xz, 0)$;
- (iii) Δ_p é gerado exclusivamente por retas $\Leftrightarrow j^2 f(0) \sim_{\mathcal{A}^2} (x, y, xz, yz, 0)$;
- (iv) Δ_p é gerado exclusivamente por semirretas $\Leftrightarrow j^2 f(0) \sim_{\mathcal{A}^2} (x, y, z^2, 0, 0)$;
- (v) Δ_p é gerado por retas e um ponto $\Leftrightarrow j^2 f(0) \sim_{\mathcal{A}^2} (x, y, xz, 0, 0)$;
- (vi) Δ_p é gerado exclusivamente por pontos $\Leftrightarrow j^2 f(0) \sim_{\mathcal{A}^2} (x, y, 0, 0, 0)$.

Demonstração. A prova deste resultado segue como uma consequência da Observação 6.20. Mostremos a primeira equivalência. Suponha que a parametrização f , como dada no enunciado seja tal que $j^2 f(0) \sim_{\mathcal{A}^2} (x, y, xz, yz, z^2)$. Dessa forma, temos uma $\mathcal{R}^2 \times \mathcal{O}(5)$ -forma normal para f , como na Proposição 6.17. Logo, pelo primeiro item da Observação 6.20, todas as parábolas de curvatura das seções normais são parábolas não degeneradas. Por outro lado, se todas as parábolas de curvatura são parábolas não degeneradas, a única forma normal na qual isso ocorre é a primeira listada na Proposição 6.17, que por sua vez é \mathcal{A}^2 -equivalente à (x, y, xz, yz, z^2) . As demonstrações dos outros itens são absolutamente análogas e serão omitidas. \square

REFERÊNCIAS

APÉRY, F. **Models of the real projective plane**. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1987. xii+156 p. Computer graphics of Steiner and Boy surfaces, With a preface by Egbert Brieskorn. ISBN 3-528-08955-5. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/978-3-322-89569-1>>. Citado nas páginas 120 e 124.

ARNOL'D, V. I. Normal forms of functions in the neighborhood of degenerate critical points. **Uspehi Mat. Nauk**, v. 29, n. 2(176), p. 11–49, 1974. ISSN 0042-1316. Collection of articles dedicated to the memory of Ivan Georgievič Petrovskii (1901–1973), I. Citado na página 34.

ARNOL'D, V. I.; GUSEIN-ZADE, S. M.; VARCHENKO, A. N. Singularities of differentiable maps, vol. ii. **Monogr. Math**, v. 83, 1985. Citado nas páginas 27 e 33.

BAYARD, P.; SÁNCHEZ BRINGAS, F. Geometric invariants of surfaces in \mathbb{R}^4 . **Topology Appl.**, v. 159, n. 2, p. 405–413, 2012. ISSN 0166-8641. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.topol.2011.09.014>>. Citado na página 35.

BENEDINI RIUL, P.; OSET SINHA, R. The flat geometry of the I_1 singularity: $(x, y) \mapsto (x, xy, y^2, y^3)$. **arXiv preprint arXiv:1804.11220**, 2018. Citado nas páginas 25 e 95.

_____. A relation between the curvature ellipse and the curvature parabola. **Adv. Geom.**, 2019. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1708.04651>>. Citado nas páginas 24 e 54.

BENEDINI RIUL, P.; RUAS, M. A. S.; OSET SINHA, R. The geometry of corank 1 surfaces in \mathbb{R}^4 . **The Quarterly Journal of Mathematics**, p. hay064, 2018. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1093/qmath/hay064>>. Citado nas páginas 25, 26, 40, 63 e 126.

BINOTTO, R. R.; COSTA, S. I. R.; ROMERO FUSTER, M. C. The curvature Veronese of a 3-manifold immersed in Euclidean space. In: **Real and complex singularities**. [S.l.]: Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2016, (Contemp. Math., v. 675). p. 25–44. Citado nas páginas 117, 119, 120 e 121.

_____. Geometry of 3-manifolds in Euclidean space. In: **Theory of singularities of smooth mappings and around it**. [S.l.]: Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2016, (RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B55). p. 1–15. Citado na página 117.

BIRBRAIR, L.; MENDES, R.; NUÑO BALLESTEROS, J. J. Metrically un-knotted corank 1 singularities of surfaces in \mathbb{R}^4 . **The Journal of Geometric Analysis**, Springer, p. 1–10, 2017. Citado na página 111.

BRUCE, J. W.; GIBLIN, P. **Curves and Singularities: a geometrical introduction to singularity theory**. [S.l.]: Cambridge university press, 1992. Citado na página 27.

BRUCE, J. W.; KIRK, N. P.; PLESSIS, A. A. du. Complete transversals and the classification of singularities. **Nonlinearity**, v. 10, n. 1, p. 253–275, 1997. ISSN 0951-7715. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/0951-7715/10/1/017>>. Citado na página 23.

- BRUCE, J. W.; NOGUEIRA, A. C. Surfaces in \mathbb{R}^4 and duality. **Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)**, v. 49, n. 196, p. 433–443, 1998. ISSN 0033-5606. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/qjmath/49.196.433>>. Citado nas páginas 24, 35, 37 e 41.
- BRUCE, J. W.; ROBERTS, R. M. Critical points of functions on analytic varieties. **Topology**, v. 27, n. 1, p. 57–90, 1988. ISSN 0040-9383. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0040-9383\(88\)90007-9](https://doi.org/10.1016/0040-9383(88)90007-9)>. Citado nas páginas 25 e 96.
- BRUCE, J. W.; TARI, F. Families of surfaces in \mathbb{R}^4 . **Proc. Edinb. Math. Soc. (2)**, v. 45, n. 1, p. 181–203, 2002. ISSN 0013-0915. Disponível em: <<https://doi.org/10.1017/S0013091500000213>>. Citado na página 35.
- BRUCE, J. W.; WEST, J. M. Functions on a crosscap. **Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.**, v. 123, n. 1, p. 19–39, 1998. ISSN 0305-0041. Disponível em: <<https://doi.org/10.1017/S0305004197002132>>. Citado nas páginas 23, 25, 96, 100 e 101.
- CARMO, M. P. do. **Differential geometry of curves and surfaces**. [S.l.]: Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1976. viii+503 p. Translated from the Portuguese. Citado nas páginas 67 e 70.
- COSTA, S. I. R.; MORAES, S. M.; ROMERO FUSTER, M. C. Geometric contacts of surfaces immersed in \mathbb{R}^n , $n \geq 5$. **Differential Geom. Appl.**, v. 27, n. 3, p. 442–454, 2009. ISSN 0926-2245. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.difgeo.2008.10.020>>. Citado nas páginas 25, 43, 45, 86 e 121.
- DAMON, J. N. Topological triviality and versality for subgroups of \mathcal{A} and \mathcal{K} . **Mem. Amer. Math. Soc.**, v. 75, n. 389, p. x+106, 1988. ISSN 0065-9266. Disponível em: <<https://doi.org/10.1090/memo/0389>>. Citado nas páginas 25 e 96.
- DIAS, F. S.; TARI, F. On the geometry of the cross-cap in the minkowski 3-space and binary differential equations. **Tohoku Mathematical Journal**, Tohoku University, v. 68, n. 2, p. 293–328, 2016. Citado na página 23.
- DREIBELBIS, D. Self-conjugate vectors of immersed 3-manifolds in \mathbb{R}^6 . **Topology Appl.**, v. 159, n. 2, p. 450–456, 2012. ISSN 0166-8641. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.topol.2011.09.019>>. Citado na página 117.
- FUKUI, T.; HASEGAWA, M. Fronts of Whitney umbrella—a differential geometric approach via blowing up. **J. Singul.**, v. 4, p. 35–67, 2012. ISSN 1949-2006. Disponível em: <<https://doi.org/10.5427/jsing.2012.4c>>. Citado na página 23.
- _____. Height functions on Whitney umbrellas. In: **Singularity theory, geometry and topology**. [S.l.]: Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2013, (RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B38). p. 153–168. Citado na página 23.
- GARCIA, R. A. Hyperbolic principal cycles on hypersurfaces of R^4 . **Ann. Global Anal. Geom.**, v. 11, n. 2, p. 185–196, 1993. ISSN 0232-704X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF00773456>>. Citado na página 117.
- GARCIA, R. A.; MOCHIDA, D. K. H.; ROMERO FUSTER, M. D. C.; RUAS, M. A. S. Inflection points and topology of surfaces in 4-space. **Trans. Amer. Math. Soc.**, v. 352, n. 7, p. 3029–3043, 2000. ISSN 0002-9947. Disponível em: <<https://doi.org/10.1090/S0002-9947-00-02404-1>>. Citado na página 35.

GARCIA, R. A.; SÁNCHEZ BRINGAS, F. Closed principal lines of surfaces immersed in the Euclidean 4-space. **J. Dynam. Control Systems**, v. 8, n. 2, p. 153–166, 2002. ISSN 1079-2724. Disponível em: <<https://doi.org/10.1023/A:1015365309326>>. Citado na página 35.

GIBSON, C.; HOBBS, C. Simple singularities of space curves. In: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS. **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**. [S.l.], 1993. v. 113, n. 2, p. 297–310. Citado na página 93.

GIBSON, C. G. **Singular points of smooth mappings**. [S.l.]: Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, Mass.-London, 1979. v. 25. iv+239 p. (Research Notes in Mathematics, v. 25). ISBN 0-273-08410-0. Citado nas páginas 27, 33 e 37.

HASEGAWA, M.; HONDA, A.; NAOKAWA, K.; UMEHARA, M.; YAMADA, K. Intrinsic invariants of cross caps. **Selecta Math. (N.S.)**, v. 20, n. 3, p. 769–785, 2014. ISSN 1022-1824. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00029-013-0134-6>>. Citado na página 23.

HASEGAWA, M.; HONDA, A.; NAOKAWA, K.; SAJI, K.; UMEHARA, M.; YAMADA, K. Intrinsic properties of surfaces with singularities. **Internat. J. Math.**, v. 26, n. 4, p. 1540008, 34, 2015. ISSN 0129-167X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1142/S0129167X1540008X>>. Citado na página 23.

IZUMIYA, S.; ROMERO FUSTER, M. d. C.; RUAS, M. A. S.; TARI, F. **Differential geometry from a singularity theory viewpoint**. [S.l.]: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2016. xiii+368 p. ISBN 978-981-4590-44-0. Citado nas páginas 27, 34, 35, 37, 38, 39, 40, 42, 43, 46 e 86.

KLINGENBERG, W. **A course in differential geometry**. [S.l.]: Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1978. xii+178 p. Translated from the German by David Hoffman, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 51. ISBN 0-387-90255-4. Citado na página 67.

KLOTZ, C.; POP, O.; RIEGER, J. H. Real double-points of deformations of A -simple map-germs from \mathbb{R}^n to \mathbb{R}^{2n} . **Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.**, v. 142, n. 2, p. 341–363, 2007. ISSN 0305-0041. Disponível em: <<https://doi.org/10.1017/S0305004106009911>>. Citado nas páginas 25, 47, 86, 94, 95 e 110.

KOKUBU, M.; ROSSMAN, W.; SAJI, K.; UMEHARA, M.; YAMADA, K. Addendum: Singularities of flat fronts in hyperbolic space. **Pacific J. Math.**, v. 294, n. 2, p. 505–509, 2018. ISSN 0030-8730. Disponível em: <<https://doi.org/10.2140/pjm.2018.294.505>>. Citado na página 23.

LITTLE, J. A. On singularities of submanifolds of higher dimensional euclidean spaces. **Annali di Matematica Pura ed Applicata**, v. 83, n. 1, p. 261–335, Dec 1969. ISSN 1618-1891. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF02411172>>. Citado nas páginas 24, 35 e 36.

MARAR, W.; NUNO BALLESTEROS, J. Slicing corank 1 map germs from \mathbb{C}^2 to \mathbb{C}^3 . **The Quarterly Journal of Mathematics**, Oxford University Press, v. 65, n. 4, p. 1375–1395, 2014. Citado na página 93.

MARTINET, J. **Singularities of smooth functions and maps**. [S.l.]: Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1982. v. 58. xiv+256 p. (London Mathematical Society Lecture Note Series, v. 58). Translated from the French by Carl P. Simon. ISBN 0-521-23398-4. Citado na página 27.

MARTINS, L. F.; NUÑO BALLESTEROS, J. J. Contact properties of surfaces in \mathbb{R}^3 with corank 1 singularities. **Tohoku Math. J. (2)**, v. 67, n. 1, p. 105–124, 2015. ISSN 0040-8735. Disponível em: <<https://doi.org/10.2748/tmj/1429549581>>. Citado nas páginas 23, 24, 25, 26, 49, 51, 52, 53, 54, 63, 66, 83, 86 e 125.

MARTINS, L. F.; SAJI, K. Geometric invariants of cuspidal edges. **Canad. J. Math.**, v. 68, n. 2, p. 445–462, 2016. ISSN 0008-414X. Disponível em: <<https://doi.org/10.4153/CJM-2015-011-5>>. Citado nas páginas 23, 25 e 86.

_____. Geometry of cuspidal edges with boundary. **Topology Appl.**, v. 234, p. 209–219, 2018. ISSN 0166-8641. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.topol.2017.11.024>>. Citado nas páginas 23, 25 e 86.

MATHER, J. N. Stability of C^∞ mappings. I. The division theorem. **Ann. of Math. (2)**, v. 87, p. 89–104, 1968. ISSN 0003-486X. Disponível em: <<https://doi.org/10.2307/1970595>>. Citado na página 29.

_____. Stability of C^∞ mappings. III. Finitely determined mapgerms. **Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.**, n. 35, p. 279–308, 1968. ISSN 0073-8301. Disponível em: <http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1968__35__279_0>. Citado na página 29.

_____. Stability of C^∞ mappings. II. Infinitesimal stability implies stability. **Ann. of Math. (2)**, v. 89, p. 254–291, 1969. ISSN 0003-486X. Disponível em: <<https://doi.org/10.2307/1970668>>. Citado na página 29.

_____. Stability of C^∞ mappings. IV. Classification of stable germs by R -algebras. **Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.**, n. 37, p. 223–248, 1969. ISSN 0073-8301. Disponível em: <http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1969__37__223_0>. Citado na página 29.

_____. Stability of C^∞ mappings. V. Transversality. **Advances in Math.**, v. 4, p. 301–336 (1970), 1970. ISSN 0001-8708. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0001-8708\(70\)90028-9](https://doi.org/10.1016/0001-8708(70)90028-9)>. Citado na página 29.

MENDES, R.; NUÑO BALLESTEROS, J. J. Knots and the topology of singular surfaces in \mathbb{R}^4 . In: **Real and complex singularities**. [S.l.]: Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2016, (Contemp. Math., v. 675). p. 229–239. Citado nas páginas 24 e 67.

MOCHIDA, D.; ROMERO FUSTER, M.; RUAS, M. A. S. Inflection points and nonsingular embeddings of surfaces in \mathbb{R}^5 . **The Rocky Mountain journal of mathematics**, JSTOR, p. 995–1009, 2003. Citado nas páginas 43, 44 e 47.

MOCHIDA, D. K. H.; ROMERO FUSTER, M. C.; RUAS, M. A. S. Osculating hyperplanes and asymptotic directions of codimension two submanifolds of Euclidean spaces. **Geom. Dedicata**, v. 77, n. 3, p. 305–315, 1999. ISSN 0046-5755. Disponível em: <<https://doi.org/10.1023/A:1005145104603>>. Citado na página 35.

MOCHIDA, D. K. H.; ROMERO FUSTER, M. D. C.; RUAS, M. A. S. The geometry of surfaces in 4-space from a contact viewpoint. **Geom. Dedicata**, v. 54, n. 3, p. 323–332, 1995. ISSN 0046-5755. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF01265348>>. Citado na página 35.

MOND, D. **Classification of certain singularities and applications to differential geometry**. Tese (Doutorado) — Ph. D. thesis, The University of Liverpool, 1982. Citado na página 41.

MOND, D. On the classification of germs of maps from \mathbb{R}^2 to \mathbb{R}^3 . **Proc. London Math. Soc.** (3), v. 50, n. 2, p. 333–369, 1985. ISSN 0024-6115. Disponível em: <<https://doi.org/10.1112/plms/s3-50.2.333>>. Citado nas páginas 24, 41, 51 e 52.

MORAES, S.; ROMERO FUSTER, M. Convexity and semiumbilicity for surfaces in \mathbb{R}^5 . In: **Differential Geometry, Valencia 2001**. [S.l.]: World Scientific, 2002. p. 222–234. Citado na página 43.

NABARRO, A. C. Duality and contact of hypersurfaces in \mathbb{R}^4 with hyperplanes and lines. **Proc. Edinb. Math. Soc.** (2), v. 46, n. 3, p. 637–648, 2003. ISSN 0013-0915. Disponível em: <<https://doi.org/10.1017/S0013091502000883>>. Citado na página 117.

NABARRO, A. C.; ROMERO FUSTER, M. d. C. 3-manifolds in Euclidean space from a contact viewpoint. **Comm. Anal. Geom.**, v. 17, n. 4, p. 755–776, 2009. ISSN 1019-8385. Disponível em: <<https://doi.org/10.4310/CAG.2009.v17.n4.a8>>. Citado na página 117.

NAOKAWA, K.; UMEHARA, M.; YAMADA, K. Isometric deformations of cuspidal edges. **Tohoku Math. J.** (2), v. 68, n. 1, p. 73–90, 2016. ISSN 0040-8735. Disponível em: <<http://projecteuclid.org/euclid.tmj/1458248863>>. Citado na página 23.

NUÑO BALLESTEROS, J. J.; TARI, F. Surfaces in \mathbb{R}^4 and their projections to 3-spaces. **Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A**, v. 137, n. 6, p. 1313–1328, 2007. ISSN 0308-2105. Disponível em: <<https://doi.org/10.1017/S0308210506000758>>. Citado nas páginas 23, 35 e 56.

OSET SINHA, R.; SAJI, K. On the geometry of folded cuspidal edges. **Rev. Mat. Complut.**, v. 31, n. 3, p. 627–650, 2018. ISSN 1139-1138. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s13163-018-0257-6>>. Citado na página 25.

OSET SINHA, R.; TARI, F. Projections of surfaces in \mathbb{R}^4 to \mathbb{R}^3 and the geometry of their singular images. **Rev. Mat. Iberoam.**, v. 31, n. 1, p. 33–50, 2015. ISSN 0213-2230. Disponível em: <<https://doi.org/10.4171/RMI/825>>. Citado nas páginas 23, 35, 55, 56 e 62.

_____. On the flat geometry of the cuspidal edge. **Osaka Journal of Mathematics**, Osaka University and Osaka City University, Departments of Mathematics, v. 55, n. 3, p. 393–421, 2018. Citado nas páginas 23 e 25.

ROMERO FUSTER, M.; RUAS, M.; TARI, F. Asymptotic curves on surfaces in \mathbb{R}^5 . **Communications in Contemporary Mathematics**, World Scientific, v. 10, n. 03, p. 309–335, 2008. Citado nas páginas 25, 43 e 48.

RUAS, M. A. S.; SACRAMENTO, A. d. J. Singular 3-manifolds in \mathbb{R}^5 . **preprint**, 2018. Citado nas páginas 26, 117, 125, 129 e 130.

SAJI, K. Normal form of the swallowtail and its applications. **Internat. J. Math.**, v. 29, n. 7, p. 1850046, 17, 2018. ISSN 0129-167X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1142/S0129167X18500465>>. Citado na página 23.

SAJI, K.; UMEHARA, M.; YAMADA, K. The geometry of fronts. **Ann. of Math.** (2), v. 169, n. 2, p. 491–529, 2009. ISSN 0003-486X. Disponível em: <<https://doi.org/10.4007/annals.2009.169.491>>. Citado na página 23.

SHAFAREVICH, I. R. **Basic algebraic geometry**. Study. [S.l.]: Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977. xv+439 p. Translated from the Russian by K. A. Hirsch, Revised printing of Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 213, 1974. Citado na página 111.

- SICHACÁ, M. B.; KABATA, Y. Projection of crosscap. **arXiv preprint arXiv:1806.02270**, 2018. Citado na página 23.
- WALL, C. T. C. Finite determinacy of smooth map-germs. **Bull. London Math. Soc.**, v. 13, n. 6, p. 481–539, 1981. ISSN 0024-6093. Disponível em: <<https://doi.org/10.1112/blms/13.6.481>>. Citado nas páginas 31, 32 e 47.
- WEST, J. M. **The differential geometry of the crosscap**. Tese (Doutorado) — University of Liverpool, 1995. Citado nas páginas 56 e 111.
- WHITNEY, H. On singularities of mappings of euclidean spaces. I. Mappings of the plane into the plane. **Ann. of Math. (2)**, v. 62, p. 374–410, 1955. ISSN 0003-486X. Disponível em: <<https://doi.org/10.2307/1970070>>. Citado na página 27.
- _____. Local properties of analytic varieties. In: **Differential and Combinatorial Topology (A Symposium in Honor of Marston Morse)**. [S.l.]: Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1965. p. 205–244. Citado na página 110.
- _____. Tangents to an analytic variety. **Ann. of Math. (2)**, v. 81, p. 496–549, 1965. ISSN 0003-486X. Disponível em: <<https://doi.org/10.2307/1970400>>. Citado na página 110.

- aplicação
 - de Gauss, 42
 - de Weingarten, 42
- codimensão, 31
- cone tangente, 110
- curvatura
 - de Gauss-Kronecker, 42
 - umbílica de sup. de coposto 1 em \mathbb{R}^3 , 54
 - umbílica de sup. de coposto 1 em \mathbb{R}^4 , 87
 - umbílica de superfícies regulares em \mathbb{R}^5 , 45
- deformação, 32
- Derlog, 96
- desdobramento, 32
 - induzido, 32
 - versal, 32
- determinação finita, 31
- direção
 - assintótica, 38
 - binormal, 40
 - normal degenerada, 46
- elipse de curvatura
 - de superfícies regulares em \mathbb{R}^4 , 36
- espaço de k -jatos, 28
- forma de Monge, 39
- função altura, 39
- germe, 28
 - de aplicação, 28
- grupo de Mather, 29
- hiperplano osculador, 40
- hipersuperfície canal, 42
- Lema de Separação de Arnol'd, 33
- locus de curvatura
 - de 3-variedades regulares, 119
 - de uma 3-var. de coposto 1 em \mathbb{R}^5 , 128
- matriz Hessiana, 33
- parábola de curvatura
 - de sup. de coposto 1 em \mathbb{R}^3 , 51
 - de sup. de coposto 1 em \mathbb{R}^4 , 66
- ponto, 29
 - de inflexão, 37
 - elíptico, 37
 - hiperbólico, 37
 - parabólico, 37
 - regular, 29
 - semiumbílico, 37
 - singular, 29
- primeira forma fundamental, 50
- pseudométrica Riemanniana, 50
- referencial adaptado, 54
- resultante, 36
- reta tangente, 49
- segunda forma fundamental, 35
 - de uma 3-var. de coposto 1 em \mathbb{R}^5 , 127
 - de uma sup. de coposto 1 em \mathbb{R}^4 , 64
 - de uma superfície regular em \mathbb{R}^4 , 35
 - de uma superfície regular em \mathbb{R}^5 , 44
- superfície
 - modelo, 95
- superfície associada, 79

transversal completa, 100
trivialidade, 101

Veronese, 120

