UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

# Regularidade de soluções periódicas para operadores diferenciais parciais de primeira ordem

**Nguyen Thi Hoang Yen**

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPG-Mat)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

**Nguyen Thi Hoang Yen**

# Regularidade de soluções periódicas para operadores diferenciais parciais de primeira ordem

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestra em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Adalberto Panobianco Bergamasco

**USP – São Carlos**
**Março de 2023**

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

Nguyen, Thi Hoang Yen
N576r Regularidade de soluções periódicas para operadores diferenciais parciais de primeira ordem / Thi Hoang Yen Nguyen; orientador Adalberto Panobianco Bergamasco. -- São Carlos, 2023.
95 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2023.

1. Soluções periódicas. 2. Hipoeliticidade global. 3. Resolubilidade global. 4. Perturbações. 5. Teoria das distribuições. I. Panobianco Bergamasco, Adalberto, orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

**Nguyen Thi Hoang Yen**

# Regularity of periodic solutions for first order partial differential operators

Dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP – in accordance with the requirements of the Mathematics Graduate Program, for the degree of Master in Science. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Adalberto Panobianco Bergamasco

**USP – São Carlos**
**March 2023**

*Aos meus pais,*
*Nguyen Dinh e Ngo Thi Lan.*

# AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, Nguyen Dinh e Ngo Thi Lan, pelo amor, carinho e incentivo nos estudos.

Ao meu irmão e às minhas irmãs, especificamente Thuy, por sempre me apoiar e ajudar.

Agradeço ao meu companheiro, Lucas, pelo amor e por todos os momentos de carinho.

Aos professores da graduação, em especial, a professora Cleonice Fátima Bracciali e o professor Alagacone Sri Ranga pela atenção e dedicação.

Agradeço a todos os professores e os funcionários do ICMC, pelo entusiasmo e profissionalismo.

Sou muito grata ao meu professor e orientador Adalberto Panobianco Bergamasco pelo incentivo e ensinamentos que muito contribuíram para o meu desenvolvimento.

Agradeço ao apoio financeiro da FAPESP, processo número 2020/14135-9.

# RESUMO

YEN, N. T. H. **Regularidade de soluções periódicas para operadores diferenciais parciais de primeira ordem**. 2023. 95 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2023.

Consideremos a equação $Lu = f$, sendo $L$ um operador diferencial parcial linear agindo em funções (ou distribuições) periódicas.

Um problema de interesse é o seguinte: dada uma função $f$ periódica e suave (satisfazendo condições naturais), encontrar uma função $u$ periódica e suave satisfazendo a equação $Lu = f$.

Por outro lado, se para toda distribuição periódica $u$ tal que $Lu = f$ é suave, temos $u$ suave, dizemos que o operador $L$ é globalmente hipoelítico. Analisaremos a hipoeliticidade global de alguns operadores.

Por fim, estudaremos o efeito, na hipoeliticidade global, de perturbações de ordem inferior. Mais precisamente, se $L$ é globalmente hipoelítico, então $L - c$, onde $c$ é um número complexo, também é globalmente hipoelítico?

A maioria dos resultados aqui apresentados trata de operadores de primeira ordem em duas variáveis. Em alguns dos resultados o operador pode ser de ordem arbitrária ou agir em mais variáveis.

**Palavras-chave:** Soluções periódicas, Hipoeliticidade global, Resolubilidade global, Perturbações, Teoria das distribuições.

# ABSTRACT

YEN, N. T. H. **Regularity of periodic solutions for first order partial differential operators**. 2023. 95 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2023.

We consider the equation $Lu = f$, where $L$ is a linear partial differential operator acting on periodic functions (or distributions).

A problem of interest is the following: given a smooth periodic function $f$ (satisfying some natural conditions), find a smooth periodic function $u$ satisfying $Lu = f$.

On the other hand, let $u$ be a periodic distribution such that $Lu = f$ is smooth. If, for every choice of $f$, we have $u$ smooth, we say that the operator $L$ is globally hypoelliptic. We will analyze the global hypoellipticity of some operators.

Finally, we will study the effect, on the global hypoellipticity, of lower order perturbations. More precisely, if $L$ is globally hypoelliptic, then $L - c$, where $c$ is a complex number, is likewise globally hypoelliptic?

Most of the results presented here deal with first-order operators in two variables. In some of the results the operators may either be of arbitrary order or act on more variables.

**Keywords:** Periodic solutions, Global hypoellipticity, Global solvability, Perturbations, Distribution theory.

# SUMÁRIO

CAPÍTULO

1

# INTRODUÇÃO

Um de nossos objetivos é estudar a regularidade das soluções periódicas de equações diferenciais parciais lineares. Esta propriedade recebe o nome de hipoeliticidade global.

Existe um número muito maior de artigos sobre hipoeliticidade local do que sobre hipoeliticidade global. A chamada hipoeliticidade (local) refere-se à regularidade de todas as soluções locais. A hipoeliticidade global refere-se à regularidade apenas das solucões globais. Assim, hipoeliticidade local implica hipoeliticidade global, mas a recíproca não é verdadeira.

A hipoeliticidade global significa a regularidade de soluções sempre que o segundo membro de uma equação diferencial parcial é regular, ou seja, infinitamente diferenciável. Mais precisamente, no nosso caso, se $P$ é um operador diferencial parcial linear, a propriedade de nosso interesse é a seguinte: para toda distribuição $2\pi-$periódica $u$ tal que $Pu$ é $C^\infty$ tem-se que $u$ é $C^\infty$.

Outro objetivo importante é estudar a resolubilidade global de alguns operadores diferenciais parciais lineares (especialmente os de primeira ordem). Desejamos verificar sob quais condições a imagem do operador: $P : C^\infty(\mathbb{T}^n) \to C^\infty(\mathbb{T}^n)$ é um subespaço vetorial fechado.

Estudaremos a hipoeliticidade global das perturbações $P-\lambda$, onde $\lambda \in \mathbb{C}$ e $P$ é um operador globalmente hipoelítico.

A ferramenta principal para nosso estudo consiste nas séries de Fourier. A questão básica dessa teoria é representar funções de $n$ variáveis como séries de Fourier. Se $f$ é uma função suave em $\mathbb{R}^n$ que é $2\pi$-periódica em cada variável, temos a representação

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k e^{ik\cdot x}. \tag{1.1}$$

Um fato importante é que essa representação vale não somente para tais funções, mas também para objetos mais complexos e gerais, as distribuições periódicas.

Uma distribuição periódica é um funcional linear contínuo definido no espaço das funções testes periódicas. O espaço das funções testes periódicas é formado pelas funções $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ infinitamente diferenciáveis e $2\pi$-periódicas em cada variável.

Existem muitas questões relacionadas a vários modos de convergência para a série (1.1) acima. Discutiremos três casos particulares: convergência em $L^2$, convergência na topologia do espaço das funções testes periódicas e convergência no sentido das distribuições.

Utilizaremos a teoria de Fourier para estudar algumas propriedades de uma classe de operadores diferenciais parciais sendo alguns com coeficientes constantes e outros com coeficientes variáveis.

O primeiro capítulo trata de um conjunto de resultados que são de fundamental importância para o desenvolvimento do trabalho.

No segundo capítulo, introduzimos as noções sobre séries de Fourier e teoria das distribuições. Usamos principalmente as referências (KREYSZIG, 1978) e (RUDIN, 1976) para entender que a série de Fourier de uma função $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$, onde $\mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n$ é o toro $n-$dimensional, converge na norma de $L^2(\mathbb{T}^n)$ para a própria $f$. Em (SALO, 2013), mostra-se que a série de Fourier de uma função $u \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ converge na topologia de $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ para a própria $u$ e também que a série de Fourier de uma distribuição periódica $u$ converge para a própria $u$ no sentido das distribuições. Também apresentamos as noções e alguns resultados sobre espaços de Sobolev, destacando-se o Teorema 2.5.11., (SALO, 2013), que mostra que todo operador elítico a coeficientes constantes é globalmente hipoelítico.

No terceiro capítulo, apresentamos alguns exemplos de resolubilidade e hipoeliticidade global, aqui usando a caracterização de distribuições periódicas e de funções periódicas suaves por meio de suas séries de Fourier.

Por fim, no quarto capítulo, apresentamos a demonstração da Proposição 3.2, (BERGAMASCO, 1994), a qual mostra que para estudar a hipoeliticidade global do operador

$$L = D_t + \beta(t)D_x - \lambda(t,x),$$

no caso em que $\beta \in C^\infty\left(\mathbb{T}^1, \mathbb{R}\right)$, $\lambda \in C^\infty\left(\mathbb{T}^2\right)$ e a média $\beta_0$ de $\beta$ é um número irracional não Liouville, basta estudar a hipoeliticidade global de

$$L = D_t + \beta_0 D_x - \lambda,$$

onde $\beta_0 \in \mathbb{R}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Pelo artigo (BERGAMASCO; ZANI, 1994), para a maioria das perturbações de ordem zero (no sentido da medida de Lebesgue), os operadores são de fato globalmente hipoelíticos. Os autores provaram isto no caso bidimensional. Apresentamos no capítulo 4 a demonstração do caso bidimensional e apresentamos também a prova no caso de dimensão arbitrária. Por outro lado, no caso de primeira ordem a maioria das perturbações (no sentido da categoria Baire) $P_1 - \lambda = D_t + \beta D_x - \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, não são globalmente hipoelíticos - ver (BERGAMASCO, 1994). Também apresentamos a demonstração deste resultado.

Muitas vezes usaremos "(GH)" no lugar de globalmente hipoelítico.

Será usado de forma recorrente o teorema de Greenfield e Wallach - ver Teorema 3.5.15.

CAPÍTULO

# 2

# PRELIMINARES

Neste capítulo introduziremos alguns resultados preliminares que serão utilizados na dissertação.

## 2.1 Alguns resultados sobre séries

**Definição 2.1.1.** Seja $\{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}^2}$ uma sequência de números complexos. Dizemos que $\{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}^2}$ converge para $s\in\mathbb{C}$ se para qualquer $\varepsilon>0$ dado, existe $n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ tal que para todo $k=(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^2$ com $|k_1|+|k_2|>n_0$, tem-se

$$|a_k-s|<\varepsilon.$$

Escreve-se $s=\lim\limits_{|k|\to\infty}a_k$.

**Definição 2.1.2.** Seja $\{f_k\}_{k\in\mathbb{Z}^2}$ uma sequência cujos termos são funções $f_k:X\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{C}$. Diz-se que $\{f_k\}_{k\in\mathbb{Z}^2}$ converge uniformemente para uma função $f:X\to\mathbb{C}$ se para qualquer $\varepsilon>0$ dado, existe $n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ tal que para todo $k=(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^2$ com $|k_1|+|k_2|>n_0$, e para todo $\theta\in X$, tem-se

$$|f_k(\theta)-f(\theta)|<\varepsilon.$$

**Definição 2.1.3.** Seja $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^2}a_k$ uma série de números complexos. Dizemos que $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^2}a_k$ converge para $s\in\mathbb{C}$ se para todo $\varepsilon>0$ dado, existe $n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ tal que para todo $n>n_0$ tem-se

$$\left|\sum_{k\in A_n}a_k-s\right|<\varepsilon,$$

onde $A_n=\{(k_1,k_2):|k_1|+|k_2|\leq n\}$.

**Definição 2.1.4.** Seja $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^2}f_k$ uma série cujos termos são funções $f_k:X\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{C}$. Diz-se que $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^2}f_k$ converge uniformemente para uma função $f:X\to\mathbb{C}$ se para todo $\varepsilon>0$ dado, existe

$n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$ e para todo $\theta \in X$ tem-se

$$\left| \sum_{k \in A_n} f_k(\theta) - f(\theta) \right| < \varepsilon,$$

onde $A_n = \{(k_1, k_2) : |k_1| + |k_2| \leq n\}$.

**Teorema 2.1.5. (Teste M de Weierstrass)** Se para cada $k \in \mathbb{Z}^2$ e cada $\theta \in X \subset \mathbb{R}^2$, tem-se $|f_k(\theta)| < c_k$, onde $\sum\limits_{k \in \mathbb{Z}^2} c_k$ é uma série convergente de números reais positivos, então a série $\sum\limits_{k \in \mathbb{Z}^2} f_k$, cujos termos são funções $f_k : X \to \mathbb{C}$, converge uniformemente.

*Demonstração.* Pelo critério de comparação, para todo $\theta \in X$ a série $\sum\limits_{k \in \mathbb{Z}^2} f_k(\theta)$ é convergente. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\sum\limits_{|k_1|+|k_2|>n_0} c_k < \varepsilon$. Temos

$$\left| \sum_{|k_1|+|k_2|>n} f_k(\theta) \right| \leq \sum_{|k_1|+|k_2|>n} c_k \leq \sum_{|k_1|+|k_2|>n_0} c_k < \varepsilon,$$

para todo $n > n_0$. Logo, $\sum\limits_{k \in \mathbb{Z}^2} f_k$ converge uniformemente.

□

**Teorema 2.1.6. (Derivação Termo a Termo para Séries)** Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto e conexo. Se a série $\sum_{k \in \mathbb{Z}^2} f_k$, de aplicações diferenciáveis $f_k : U \to \mathbb{R}^n$, converge num ponto $c \in U$ e a série $\sum_{k \in \mathbb{Z}^2} f_k'$ das derivadas converge uniformemente em $U$, para a soma $g = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} f_k'$, então tem-se convergência uniformemente $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} f_k$ em $U$, a soma $f : U \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável e $f' = g$.

*Demonstração.* Adaptamos a demonstração do Teorema da Derivação Termo a Termo, (LIMA, 2014), palavra por palavra. □

## 2.2 Alguns resultados sobre integração de funções não negativas

Seja $(X, \mathscr{M}, \mu)$ um espaço de medida. Denotemos por

$$L^+ = \{f : X \to [0, +\infty]; f \text{ é mensurável}\}.$$

**Proposição 2.2.1. (Teorema da Convergência Monótona)** Se $\{f_n\}$ é uma sequência em $L^+$ tal que $f_j \leq f_{j+1}$ para todo $j$, e $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, então $\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n$.

*Demonstração.* Ver Teorema 2.14, (FOLLAND, 1999). □

**Proposição 2.2.2.** Se $f \in L^+$ e $\int f < \infty$, então $\{x : f(x) = \infty\}$ é um conjunto de medida nula.

*Demonstração.* Ver Proposição 2.20, (FOLLAND, 1999). □

## 2.3 Alguns resultados sobre espaços de Hilbert

**Definição 2.3.1.** Dizemos que um espaço com produto interno $X$ é um *espaço de Hilbert* se for completo.

**Exemplo 2.3.2.** Para $f, g \in L^2([-\pi, \pi])$ definimos

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\overline{g(\theta)}d\theta.$$

Pelo livro (RUDIN, 1976) segue que $L^2([-\pi, \pi])$ é um espaço de Hilbert.

**Definição 2.3.3.** Seja $X$ um espaço com produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

1. Dizemos que dois vetores $x, y$ de $X$ são *ortogonais* se $\langle x, y\rangle = 0$.

2. Dizemos que um subconjunto $A$ de $X$ é um *conjunto ortogonal*, se quaisquer dos vetores distintos de $A$ são ortogonais entre si. Um *conjunto ortonormal* $A$ é um conjunto ortogonal em $X$ cujos elementos têm norma 1, ou seja,

$$\langle x, y\rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } x \neq y, \\ 1, & \text{se } x = y, \end{cases}$$

para todo $x, y \in A$,

**Exemplo 2.3.4.** A sequência $\{e^{ik\theta}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ é ortonormal em $L^2([-\pi, \pi])$ pois

$$\begin{aligned}\left\langle e^{ik\theta}, e^{ij\theta}\right\rangle_{L^2} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\theta}e^{-ij\theta}d\theta \\ &= \begin{cases} 0, & \text{se } k \neq j, \\ 1, & \text{se } k = j. \end{cases}\end{aligned}$$

**Teorema 2.3.5.** Dada qualquer sequência ortonormal $\{e_k\}$ em um espaço de Hilbert $X$, considere as séries da forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k, \tag{2.1}$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ são escalares. Então:

(a) A série (2.1) converge (na norma em $X$) se, e somente se, a seguinte série converge:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2.$$

(b) Se (2.1) converge, então os coeficientes $\alpha_k$ são os coeficientes de Fourier $\langle x, e_k\rangle$, onde $x$ denota a soma de (2.1). Neste caso, (2.1) pode ser escrito da segunite forma:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle e_k.$$

(c) Para qualquer $x \in X$, a série (2.1) com $\alpha_k = \langle x, e_k \rangle$ converge (na norma de $X$).

*Demonstração.* Ver (KREYSZIG, 1978). □

**Definição 2.3.6.** Um subconjunto $M$ de um espaço normado $X$ é dito um *conjunto total* se $\overline{\operatorname{span} M} = X$.

**Definição 2.3.7.** Seja $X$ um espaço com produto interno. Um subconjunto $B \subseteq X$ é chamado uma *base de Hilbert* se for um conjunto ortonormal total.

**Teorema 2.3.8.** Seja $M$ um subconjunto do espaço com produto interno $X$. Se $M$ é total então $M^{\perp} = \{0\}$, onde $M^{\perp} = \{x \in X : \langle x, y \rangle = 0, \text{ para todo } y \in M\}$.

*Demonstração.* Ver (KREYSZIG, 1978). □

## 2.4 Desigualdade de Holder

**Teorema 2.4.1.** (**Desigualdade de Holder**) Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e $q$ o expoente conjugado de $p$ definido por $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ então $fg \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_{\Omega} |fg| \leqslant \left( \int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{1/p} \left( \int_{\Omega} |g|^q d\mu \right)^{1/q}.$$

*Demonstração.* Ver Teorema 3.8, (RUDIN, 1987). □

**Teorema 2.4.2.** (**Desigualdade de Holder para séries**) Se $1 < p, q < \infty$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $\{a_k\} \in \ell^p$ e $\{b_k\} \in \ell^q$ então $\{a_k b_k\} \in \ell^1$ e

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \right| \leqslant \left( \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^q \right)^{1/q}.$$

Usando o lema abaixo na demonstração do Teorema 2.4.2.

**Lema 2.4.3.** Considere o espaço de medida $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}), \mu)$, onde $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ é o conjunto de partes de $\mathbb{N}$ e $\mu$ é a medida de contagem. Seja $f : \mathbb{N} \to [0, \infty]$. Então

$$\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

*Demonstração.* Se $J \subset \mathbb{N}$ e $f = \chi_J$, onde

$$\chi_J(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \in J, \\ 0, & \text{se } n \notin J, \end{cases}$$

então

$$\int f d\mu = \int \chi_J d\mu = \mu(J) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_J(n) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

Por aditividade vale para funções simples não negativas. Usando o Teorema da Convergência Monótona, o lema é válido para funções não negativas. □

*Demonstração do Teorema 2.4.2.* Sejam $f(k) = |a_k|$ e $g(k) = |b_k|$. Pelo Teorema 2.4.1 e Lema 2.4.3 temos

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k\right| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k b_k| = \int_{\mathbb{N}} |fg|\, d\mu \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{N}} |f|^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{N}} |g|^q d\mu\right)^{1/q} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^q\right)^{1/q}.\end{aligned}$$

□

## 2.5 Teorema de Baire

Um conjunto $\mathscr{G}_\delta$ é um subconjunto de um espaço topológico que é uma interseção enumerável de conjuntos abertos. Um conjunto $\mathscr{F}_\sigma$ é o complementar de um conjunto $\mathscr{G}_\delta$.

**Teorema 2.5.1. (Teorema de Baire)** Seja $X$ um espaço métrico completo. Se $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de subconjuntos abertos densos de $X$, então $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ é $\mathscr{G}_\delta$ denso em $X$.

*Demonstração.* Ver Teorema 5.6, (RUDIN, 1987). □

## 2.6 Teorema da aplicação aberta para espaços de Fréchet

Por definição, um espaço de Fréchet é um espaço vetorial topológico de Hausdorff localmente convexo cuja topologia é dada por uma métrica invariante e que é completa como um espaço métrico (uma métrica $d$ em um espaço vetorial é dita invariante se $d(u+w, v+w) = d(u, v)$ para todos os $u, v, w$).

**Teorema 2.6.1.** (**Teorema da aplicação aberta para espaços de Frechet**)

(a) Se $f$ for uma aplicação linear contínua e sobrejetora de um espaço de Fréchet $X$ em um espaço de Fréchet $Y$, então $f$ é aberta.

(b) Se $f$ satisfaz (a) e é $1-1$, então $f^{-1} : Y \to X$ é contínua.

*Demonstração.* Ver (RUDIN, 1991). □

## 2.7 Números de Liouville

**Definição 2.7.1.** Um número real $\alpha$ é chamado um número de Liouville se existir uma sequência $\left\{\frac{p_j}{q_j}\right\}$, onde $q_j > 0$, e mdc $(p_j, q_j) = 1$, com todos os elementos diferentes, e tal que

$$\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{q_j^j}. \tag{2.2}$$

**Teorema 2.7.2.** Todo número de Liouville é transcendente.

*Demonstração.* Ver o Teorema 5.4, (FIGUEIREDO, 1985). □

Pelo teorema acima segue que um número de Liouville é um número irracional.

**Lema 2.7.3.** Seja $\alpha$ um número irracional tal que

$$\left|\alpha - \frac{v_j}{u_j}\right| < \frac{1}{u_j^j},$$

onde $\left\{\frac{v_j}{u_j}\right\}$ é uma sequência de racionais diferentes com $u_j > 0$. (Atenção: não exigimos que mdc$(v_j, u_j)$ seja 1). Então $\alpha$ é um número de Liouville.

*Demonstração.* Ver o Lema 5.1, (FIGUEIREDO, 1985). □

**Exemplo 2.7.4.** Seja

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}}.$$

Consideremos a sequência de racionais definida por

$$\frac{v_j}{u_j} = \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{10^{k!}}.$$

Temos

$$\left|\alpha - \frac{v_j}{u_j}\right| = \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}} = \frac{1}{10^{(j+1)!}}\left(1 + \frac{1}{10^{(j+2)!-(j+1)!}} + \cdots\right). \tag{2.3}$$

A expressão em parênteses é majorada por

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots = \frac{10}{9}.$$

Logo, o último membro de (2.3) é majorada por

$$\frac{1}{(10^{j!})^j\, 10^{j!}} \cdot \frac{10}{9} < \frac{1}{(10^{j!})^j},$$

e portanto

$$\left|\alpha - \frac{v_j}{u_j}\right| < \frac{1}{(10^{j!})^j}.$$

Como podemos tomar $u_j = 10^{j}$, segue-se que $\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}}$ é um número de Liouville.

**Lema 2.7.5.** Seja $\alpha$ um número irracional. Então $\alpha$ é um número de Liouville se, e somente se, para todo $N \in \mathbb{N}$, existem infinitos racionais $\frac{p}{q}$, onde $q > 0$, satisfazendo a seguinte condição de aproximabilidade

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^N}. \tag{2.4}$$

(Em outras palavras, $\alpha$ é um número de Liouville se, e somente se, para todo $N \in \mathbb{N}$, a inequação (2.4) tem infinitas soluções racionais).

*Demonstração.* Suponha que $\alpha$ é um número de Liouville. Assim, existe uma sequência $\left\{\frac{p_j}{q_j}\right\}$, onde $q_j > 0$, e $\operatorname{mdc}\left(p_j, q_j\right) = 1$, com todos os elementos diferentes, e tal que

$$\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{q_j^j}.$$

Dado $N \in \mathbb{N}$. Para cada $j > N$, temos $q_j^j > q_j^N$. Isto decorre que

$$\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{q_j^j} < \frac{1}{q_j^N}.$$

Portanto, para cada $N \in \mathbb{N}$, existem infinitos racionais $\frac{p}{q}$, onde $q > 0$, satisfazendo (2.4).

Reciprocamente, suponha que existem infinitos racionais $\frac{p}{q}$, onde $q > 0$, satisfazendo (2.4). Mostremos que $\alpha$ é um número de Liouville. De fato, para $N = 1$, existe $\frac{p_1}{q_1}$, com $q_1 > 0$ tal que

$$\left|\alpha - \frac{p_1}{q_1}\right| < \frac{1}{q_1^1}.$$

Para $N = 2$, existe $\frac{p_2}{q_2}$, com $q_2 > 0$ e $\frac{p_2}{q_2} \neq \frac{p_1}{q_1}$, tal que

$$\left|\alpha - \frac{p_2}{q_2}\right| < \frac{1}{q_2^2}.$$

A existência de $\frac{p_2}{q_2}$ segue do fato que existem infinitos racionais $\frac{p}{q}$, onde $q > 0$, satisfazendo (2.4). Continuando o mesmo processo, para $N \in \mathbb{N}$, existe $\frac{p_N}{q_N}$, com $q_N > 0$ e $\frac{p_N}{q_N} \neq \frac{p_k}{q_k}$, para todo $k < N$, tal que

$$\left|\alpha - \frac{p_N}{q_N}\right| < \frac{1}{q_N^N}.$$

Desta forma obtemos uma sequência $\left\{\frac{p_j}{q_j}\right\}$, onde $q_j > 0$, com todos os elementos diferentes, e tal que

$$\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{q_j^j}.$$

Portanto, o Lema 2.7.3 garante que $\alpha$ é um número de Liouville.

$\square$

Pelo Lema 2.7.5, podemos afirmar que um número irracional $\alpha$ não é um número de Liouville se, e somente se, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que não existem infinitos racionais $\frac{p}{q}$, onde $q > 0$, satisfazendo a condição (2.4). Em outras palavras, $\alpha$ não é um número de Liouville se, e somente se, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que a inequação

$$|q\alpha - p| \geq \frac{1}{q^N} \tag{2.5}$$

vale para todos números racionais $\frac{p}{q}$, onde $q > 0$, exceto um número finito deles.

**Lema 2.7.6.** Seja $\alpha$ um número irracional. Então $\alpha$ não é um número de Liouville se, e somente se, existem $N \in \mathbb{N}$, e $c > 0$ tais que a inequação

$$|q\alpha - p| \geq \frac{c}{q^N}, \tag{2.6}$$

vale para todos números racionais $\frac{p}{q}$, onde $q > 0$.

*Demonstração.* Suponha que $\alpha$ não é um número de Liouville. Assim, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que a inequação (2.5) vale para todos números racionais $\frac{p}{q}$, onde $q > 0$, exceto o conjunto $F = \left\{\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots, \frac{p_\ell}{q_\ell}\right\}$, onde $q_k > 0$, para $k = 1, \ldots, \ell$, para algum $\ell \in \mathbb{N}$. Seja

$$c = \min\{1, |q_1\alpha - p_1|, |q_2\alpha - p_2|, \ldots, |q_\ell\alpha - p_\ell|\}.$$

Note que $c > 0$, uma vez que $\alpha$ é um número irracional. Temos

$$|q_k\alpha - p_k| \geq c \geq \frac{c}{q_k^N},$$

para $k = 1, \ldots, \ell$. Além disso, para $\frac{p}{q} \notin F$, com $q > 0$, temos

$$|q\alpha - p| \geq \frac{1}{q^N} \geq \frac{c}{q^N}.$$

Portanto, a inequação (2.6) vale para todos números racionais $\frac{p}{q}$, onde $q > 0$.

Reciprocamente, suponha que existem $N \in \mathbb{N}$, e $c > 0$ tais que a inequação (2.6) vale para todos números racionais $\frac{p}{q}$, onde $q > 0$. Vejamos que $\alpha$ não é um número de Liouville. De fato, escolhemos $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$2^{N_0 - N} > \frac{1}{c}.$$

Para $q \geq 2$ temos

$$q^{N_0 - N} \geq 2^{N_0 - N} > \frac{1}{c}.$$

Disso decorre que

$$|q\alpha - p| \geq \frac{c}{q^N} > \frac{1}{q^{N_0}}.$$

Para $q=1$, e para $p\in\mathbb{Z}$, com $|p|>|\alpha|+1$, temos

$$|q\alpha-p|=|p-\alpha|\geq|p|-|\alpha|>1=\frac{1}{q^{N_0}}.$$

Logo,

$$|q\alpha-p|\geq\frac{1}{q^{N_0}}, \tag{2.7}$$

para $\frac{p}{q}$, com $q>1,\ p\in\mathbb{Z}$ e para $\frac{p}{q}$, com $q=1$ e $|p|>|\alpha|+1$. Em outras palavras, a inequação (2.7) vale para todos números racionais $\frac{p}{q}$, onde $q>0$, exceto um número finito deles. Portanto, $\alpha$ não é um número de Liouville.

□

Defina

$$X=\{\alpha\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}:\exists N>0 \text{ e } c>0 \text{ tais que } |q\alpha-p|\geq\frac{c}{(1+|p|^2+|q|^2)^{\frac{N}{2}}},$$
$$\text{para todo } (p,q)\in\mathbb{Z}^2\backslash\{(0,0)\}\}.$$

**Lema 2.7.7.** Seja $\alpha$ um número irracional. Se $\alpha$ não é um número de Liouville, então $\alpha\in X$.

*Demonstração.* Como $\alpha$ não é um número de Liouville, então pelo Lema 2.7.6 existem $N\in\mathbb{N}$, e $c>0$ tais que a desigualdade

$$|q\alpha-p|\geq\frac{c}{q^N},$$

vale para todos números racionais $\frac{p}{q}$, onde $q>0$. Como $q^N=\left(|q|^2\right)^{\frac{N}{2}}\leq\left(1+|p|^2+|q|^2\right)^{\frac{N}{2}}$, então

$$|q\alpha-p|\geq\frac{c}{q^N}\geq\frac{c}{(1+|p|^2+|q|^2)^{\frac{N}{2}}},$$

para todo $(p,q)\in\mathbb{Z}^2\backslash\{(0,0)\}$, onde $q>0$. Para $(p,q)\in\mathbb{Z}^2\backslash\{(0,0)\}$, onde $q<0$, temos

$$|q\alpha-p|=|(-q)\alpha-(-p)|\geq\frac{c}{(1+|-p|^2+|-q|^2)^{\frac{N}{2}}}=\frac{c}{(1+|p|^2+|q|^2)^{\frac{N}{2}}}.$$

Portanto, $\alpha\in X$. □

**Lema 2.7.8.** Se $\alpha\in X$, então $\alpha$ não é um número de Liouville.

*Demonstração.* Como $\alpha\in X$, então existem $N_0\in\mathbb{N}$ e $c>0$ tais que

$$|q\alpha-p|\geq\frac{c}{(1+|p|^2+|q|^2)^{\frac{N_0}{2}}}, \tag{2.8}$$

para todo $(p,q)\in\mathbb{Z}^2\backslash\{(0,0)\}$.

Considere os seguinte conjuntos

$$Q_1 = \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} : q > 0 \ \text{ e } \ |q\alpha - p| \geq 1 \right\}$$

e

$$Q_2 = \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} : q > 0 \ \text{ e } \ |q\alpha - p| < 1 \right\}.$$

Se $\frac{p}{q} \in Q_1$, temos

$$|q\alpha - p| \geq 1 \geq \frac{1}{q^{N_0}}. \tag{2.9}$$

Se $\frac{p}{q} \in Q_2$, temos

$$|p| = |p - q\alpha + q\alpha| \leq |q\alpha - p| + |q\alpha| < 1 + q|\alpha| \leq q + q|\alpha|.$$

Disso decorre que

$$1 + |p| + |q| \leq 3q + q|\alpha| = (3 + |\alpha|)q.$$

Assim,

$$\left(1 + |p|^2 + |q|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq 1 + |p| + |q| \leq (3 + |\alpha|)q.$$

Logo,

$$\frac{1}{(1 + |p|^2 + |q|^2)^{\frac{N_0}{2}}} \geq \frac{1}{(3 + |\alpha|)^{N_0}} \frac{1}{q^{N_0}}. \tag{2.10}$$

De (2.8) e (2.10) obtemos

$$|q\alpha - p| \geq \frac{c}{(1 + |p|^2 + |q|^2)^{\frac{N_0}{2}}} \geq \frac{c}{(3 + |\alpha|)^{N_0}} \frac{1}{q^{N_0}}. \tag{2.11}$$

Seja $c_0 = \min\left\{1, \frac{c}{(3 + |\alpha|)^{N_0}}\right\} > 0$. De (2.9) e (2.11) segue que

$$|q\alpha - p| \geq \frac{c_0}{q^{N_0}},$$

para todos $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, onde $q > 0$. Concluímos pelo Lema 2.7.6 que $\alpha$ não é um número de Liouville. $\square$

## 2.8 Frações contínuas

A cada número irracional $\alpha$, com $0 < \alpha < 1$, corresponde uma sequência única $a_1, a_2, \ldots$ com $a_n \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha$ é igual a fração contínua (infinita)

$$\alpha = 1/\left(a_1 + \frac{1}{a_2 + \cdots}\right),$$

a qual se escreve mais simplesmente como

$$\alpha = [a_1, a_2, \ldots].$$

Os convergentes para $\alpha$ são as somas parciais $p_n/q_n = [a_1, \ldots, a_n]$; com

$$\begin{array}{ll} p_1 = 1 & q_1 = a_1 \\ p_2 = a_2 & q_2 = a_2 a_1 + 1 \\ p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} & q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}, \quad n = 3, 4, \ldots \end{array}$$

**Proposição 2.8.1.** Os convergentes são frações irredutíveis e satisfazem

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{a_{n+1} q_n^2}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.12}$$

*Demonstração.* Ver Proposição 3.4, (MOREIRA *et al.*, 2010). □

**Proposição 2.8.2.** Os convergentes são frações irredutíveis e satisfazem

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| \leqslant \frac{1}{q_n q_{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.13}$$

*Demonstração.* Ver Teorema 3.11, (MOREIRA *et al.*, 2010). □

**Teorema 2.8.3.** (**Teorema de Legendre**) Se um número racional $p/q$ satisfaz

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2q^2}$$

então $\frac{p}{q}$ é igual a um dos convergentes $\frac{p_n}{q_n}$.

*Demonstração.* Ver (SCHMIDT, 1980). □

**Teorema 2.8.4.** (**Teorema de Dirichlet**) Se $\alpha$ é irracional então a desigualdade

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$$

tem infinitas soluções racionais $\frac{p}{q}$.

*Demonstração.* Ver (SCHMIDT, 1980). □

CAPÍTULO

3

# SÉRIES DE FOURIER E TEORIA DAS DISTRIBUIÇÕES

Neste capítulo, veremos resultados sobre séries de Fourier e teoria das distribuições. Um fato importante é que a série de Fourier de uma função $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$, onde $\mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n$ é o toro $n$-dimensional, converge na norma de $L^2(\mathbb{T}^n)$ para a própria $f$. Em (SALO, 2013), mostra-se que a série de Fourier de uma função $u \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ converge na topologia de $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ para a própria $u$ e vale o resultado análogo para distribuições periódicas. Além disso, veremos a noção de espaços de Sobolev e alguns resultados a respeito destes espaços, destacando-se o Teorema 2.5.11., (SALO, 2013), que mostra que todo operador elítico a coeficientes constantes é globalmente hipoelítico.

## 3.1 Notações

Para vetores em $\mathbb{R}^n$ a expressão $|x|$ denota o comprimento euclidiano. Também usaremos a notação $\langle x\rangle = (1+|x|^2)^{1/2}$.

Para facilitar a discussão de funções em várias variáveis, a notação de multi-índice é usada. O conjunto de multi-índices é denotado por $\mathbb{N}^n$ e consiste de todas as $n-$uplas $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ onde os $\alpha_i$ são inteiros não negativos; em outros trabalhos, utilizada a notação $\mathbb{Z}^n_+$ para este conjunto. Escrevemos $|\alpha| = \alpha_1+\cdots+\alpha_n$ e $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}$.

Para derivadas parciais, a notação

$$\partial^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$$

será usada. Também escreveremos $D_j = \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial}{\partial x_j}$, e correspondentemente

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1}\cdots D_n^{\alpha_n}.$$

O Laplaciano em $\mathbb{R}^n$ é definido como

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}.$$

## 3.2 Teorema de Stone-Weierstrass e séries relacionadas a sequências ortonormais

Esta seção usa as principais referências (KREYSZIG, 1978) e (RUDIN, 1976). O objetivo desta seção é enunciar uma generalização do teorema de Weierstrass, a saber, Teorema de Stone-Weierstrass, e usar este teorema para mostrar que a série de Fourier de uma função $f \in L^2([-\pi,\pi])$ converge na norma de $L^2([-\pi,\pi])$ e ainda converge para a própria função $f$.

**Teorema 3.2.1.** (**Teorema de Weierstrass**) Se $f$ é uma função complexa contínua em $[a,b]$, existe uma sequência de polinômios $P_n$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x)$$

uniformemente em $[a,b]$. Se $f$ é real, o $P_n$ pode ser escolhido real.

*Demonstração.* Ver o livro (RUDIN, 1976). □

**Definição 3.2.2.** Uma família $\mathscr{A}$ de funções complexas definidas em um conjunto $E$ é chamada uma *álgebra* se

(i) $f+g \in \mathscr{A}$,

(ii) $fg \in \mathscr{A}$,

(iii) $cf \in \mathscr{A}$,

para todo $f,g \in \mathscr{A}$ e $c \in \mathbb{C}$, isto é, se $\mathscr{A}$ for fechado sob adição, multiplicação e multiplicação por escalar.

Se $\mathscr{A}$ tem a propriedade de que $f \in \mathscr{A}$ sempre que $f_n \in \mathscr{A}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $f_n \to f$ uniformemente em $E$, então $\mathscr{A}$ é chamado *uniformemente fechado*.

Seja $\mathscr{B}$ o conjunto de todas as funções que são limites de sequências uniformemente convergentes de elementos de $\mathscr{A}$. Então $\mathscr{B}$ é chamado de *fecho uniforme* de $\mathscr{A}$.

**Definição 3.2.3.** Seja $\mathscr{A}$ uma família de funções em um conjunto $E$. Diremos que $\mathscr{A}$ *separa pontos* em $E$ se para cada par de pontos distintos $x_1,x_2 \in E$, existe uma função $f \in \mathscr{A}$ tal que $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Se para cada $x \in E$, existe uma função $g \in \mathscr{A}$ tal que $g(x) \neq 0$, diz-se que $\mathscr{A}$ *não se anula em nenhum ponto de $E$*.

**Definição 3.2.4.** Uma família $\mathscr{A}$ é chamada *auto-adjunta* se para todo $f \in \mathscr{A}$, tem-se $\overline{f} \in \mathscr{A}$, onde $\overline{f}(x) = \overline{f(x)}$.

**Teorema 3.2.5.** (**Teorema de Stone-Weierstrass**) Suponha que $\mathscr{A}$ seja uma álgebra auto-adjunta de funções contínuas complexas em um conjunto compacto $K$ tal que $\mathscr{A}$ separa pontos em $K$ e $\mathscr{A}$ não se anula em nenhum ponto de $K$. Então o fecho uniforme $\mathscr{B}$ de $\mathscr{A}$ é formado por todas as funções contínuas complexas em $K$. Em outras palavras, $\mathscr{A}$ é denso em $C(K)$.

*Demonstração.* Ver o livro (RUDIN, 1976). □

**Teorema 3.2.6.** $C(\mathbb{T}^1)$ é denso em $L^2(\mathbb{T}^1)$.

*Demonstração.* Ver Teorema 3.14, (RUDIN, 1987). □

**Exemplo 3.2.7.** Vejamos que $\overline{\operatorname{span}\mathscr{B}} = L^2([-\pi,\pi])$, onde $\mathscr{B} = \{e^{ik\theta}\}_{k\in\mathbb{Z}}$. De fato, considere a álgebra

$$\mathscr{A} = \left\{ \sum_{-N}^{N} c_n e^{in\theta} : N \in \mathbb{N} \right\}.$$

Note que $\mathscr{A} = \operatorname{span}\mathscr{B}$. Além disso,

- $\mathscr{A}$ é auto-adjunta pois se $f(\theta) = \sum_{-N}^{N} c_n e^{in\theta} \in \mathscr{A}$, então $\overline{f}(\theta) = \sum_{-N}^{N} \overline{c}_n e^{-in\theta} \in \mathscr{A}$,

- $\mathscr{A}$ separa pontos em $\mathbb{T}^1$. De fato, para $e^{i\theta_1} \neq e^{i\theta_2}$, considere $f(e^{i\theta}) = e^{i\theta}$ e temos $f(e^{i\theta_1}) \neq f(e^{i\theta_2})$,

- $\mathscr{A}$ não se anula em nenhum ponto de $\mathbb{T}^1$. Com efeito, para cada $e^{i\theta_0} \in \mathbb{T}^1$, considere $g(e^{i\theta}) = 1$, tem-se $g(e^{i\theta_0}) = 1 \neq 0$.

Pelo Teorema de Stone-Weierstrass, segue que $\mathscr{A}$ é denso em $C(\mathbb{T}^1)$.

Dado $u \in C(\mathbb{T}^1)$. Temos

$$\int_{[-\pi,\pi]} |u(x)|^2 dx \leq ||u||_\infty^2 \int_{[-\pi,\pi]} dx = 2\pi\, ||u||_\infty^2,$$

ou seja,

$$||u||_2 = \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]} |u(x)|^2 dx \right]^{1/2} \leq M ||u||_\infty, \tag{3.1}$$

para algum $M > 0$ e para toda $u \in C(\mathbb{T}^1)$.

Dados $f \in L^2(\mathbb{T}^1)$ e $\varepsilon > 0$, usando o Teorema 3.2.6 temos que existe $g \in C(\mathbb{T}^1)$ de modo que

$$||f - g||_2 < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.2}$$

Por outro lado, pela densidade de $\mathscr{A}$ em $C(\mathbb{T}^1)$, existe $b_N \in \mathscr{A}$ tal que

$$||g - b_N||_\infty < \frac{\varepsilon}{2M}. \tag{3.3}$$

De (3.1), (3.2) e (3.3) segue que

$$\begin{aligned} ||f - b_N||_2 &\leq ||f - g||_2 + ||g - b_N||_2 \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + M||g - b_N||_\infty \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $\overline{\operatorname{span}\mathscr{B}} = L^2([-\pi, \pi])$.

**Exemplo 3.2.8.** Devido ao Exemplo 2.3.4 e ao Exemplo 3.2.7 temos que $\mathscr{B} = \{e^{ik\theta}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ é uma base de Hilbert de $L^2([-\pi, \pi])$. Seja $f \in L^2([-\pi, \pi])$, o Teorema 2.3.5 garante que a série

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left\langle f, e^{ik\theta} \right\rangle e^{ik\theta}$$

converge para alguma $g \in L^2([-\pi, \pi])$, isto é,

$$g = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left\langle f, e^{ik\theta} \right\rangle e^{ik\theta}.$$

Vejamos que $g = f$. Para isto basta mostrar que $f - g \in \mathscr{B}^\perp = \{0\}$ e desta forma concluir que $f = g$. De fato, observe que para $j \in \mathbb{Z}$ tem-se

$$\begin{aligned} \left\langle f - g, e^{ji\theta} \right\rangle &= \left\langle f, e^{ji\theta} \right\rangle - \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left\langle f, e^{ki\theta} \right\rangle \left\langle e^{ik\theta}, e^{ji\theta} \right\rangle \\ &= \left\langle f, e^{ji\theta} \right\rangle - \left\langle f, e^{ji\theta} \right\rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, $g = f$. Concluímos que a série de Fourier de uma função $f \in L^2([-\pi, \pi])$ converge na norma de $L^2([-\pi, \pi])$ e ainda converge para própria função $f$.

Usando a mesma ideia acima, mostra-se que a série de Fourier de uma função $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$, onde $\mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n$ é o toro $n$-dimensional, converge na norma de $L^2(\mathbb{T}^n)$ e mais, ela converge para a própria $f$. Logo, para $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$ temos

$$f(\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \left\langle f, e^{ik\cdot\theta} \right\rangle e^{ik\cdot\theta}. \tag{3.4}$$

A fórmula (3.4) é chamada fórmula de inversão.

## 3.3 Funções testes periódicas

Esta seção usa principalmente a referência (SALO, 2013).

O primeiro passo na teoria das distribuições é considerar classes de funções muito boas, chamadas funções testes, e operações nelas. Posteriormente, as distribuições serão definidas como elementos do espaço dual de funções testes. O espaço das funções testes relevante para a série de Fourier é o seguinte.

**Definição 3.3.1.** Seja $\mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n$ o toro $n$-dimensional. $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ é o espaço de todas as funções suaves de valor complexo definidas no $\mathbb{T}^n$. Os elementos de $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ são chamados de funções testes periódicas.

**Exemplo 3.3.2.** Qualquer polinômio trigonométrico $\sum_{|k|\leq N} c_k e^{ik\cdot x}$ está em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$.

O conjunto $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ é um espaço vetorial de dimensão infinita sob a adição usual e multiplicação por escalar de funções. Para obter um espaço dual razoável, precisamos de uma topologia adequada. Na prática será suficiente saber como as sequências convergem, e gostaríamos de dizer que uma sequência $(u_j)_{j=1}^\infty$ converge para $u$ se para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$,

$$\partial^\alpha u_j \to \partial^\alpha u \quad \text{uniformemente em } \mathbb{R}^n.$$

Seja

$$\|u\|_{C^N} = \sum_{|\alpha|\leq N} \|\partial^\alpha u\|_{L^\infty}.$$

**Lema 3.3.3.** Denote

$$C_{2\pi}^N = \{u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \mid u \text{ é de classe } C^N \text{ e } 2\pi\text{-periódica em cada variável}\}.$$

Então, $(C_{2\pi}^N, \ ||.||_{C^N})$ é completo.

*Demonstração.* Seja $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $(C_{2\pi}^N, \ ||.||_{C^N})$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que para todo $j,k \geq n_0$ tem-se

$$\sum_{|\alpha|\leq N} \left\|\partial^\alpha(u_j - u_k)\right\|_{L^\infty} < \varepsilon.$$

Assim,

$$\left\|\partial^\alpha(u_j - u_k)\right\|_{L^\infty} < \varepsilon,$$

para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$, com $|\alpha| \leq N$. Ou seja, $\{\partial^\alpha u_j\}$ é de Cauchy em $(C_{2\pi}^N, ||.||_{C^0})$, para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$, com $|\alpha| \leq N$. Como $(C_{2\pi}^0, ||.||_{C^0})$ é completo, então para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$, com $|\alpha| \leq N$, existe $u_\alpha \in C_{2\pi}^0$ tal que $\partial^\alpha u_j \to u_\alpha$ com respeito a norma $||.||_{C^0}$. Seja $u := u_0$. Vejamos que

$u \in C^N_{2\pi}$. Para isso, basta mostrar que $\partial^\alpha u = u_\alpha$, para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$, com $|\alpha| \leq N$. De fato, como $u_j \to u$ e $\partial^\alpha u_j \to u_\alpha$, usando o Teorema da Derivação Termo a Termo temos

$$\partial^\alpha u = u_\alpha,$$

para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$, com $|\alpha| \leq N$. Logo, $u \in C^N_{2\pi}$. Além disso, $||u_j - u||_{C^N} \to 0$ pois

$$\lim_{j\to+\infty} ||u_j - u||_{C^N} = \lim_{j\to+\infty} \sum_{|\alpha|\leq N} \left\|\partial^\alpha u_j - \partial^\alpha u\right\|_{L^\infty} = \sum_{|\alpha|\leq N} \lim_{j\to+\infty} \left\|\partial^\alpha u_j - u_\alpha\right\|_{L^\infty} = 0.$$

Portanto, $(C^N_{2\pi},\ ||.||_{C^N})$ é completo. □

**Teorema 3.3.4.** Se $u, v \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, defina

$$d(u,v) = \sum_{N=0}^{\infty} 2^{-N} \frac{||u-v||_{C^N}}{1+||u-v||_{C^N}}.$$

Então $(C^\infty(\mathbb{T}^n), d)$ é um espaço métrico. Além disso, $u_j \to u$ em $(C^\infty(\mathbb{T}^n), d)$ se, e somente se, para qualquer multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$,

$$\left\|\partial^\alpha u_j - \partial^\alpha u\right\|_{L^\infty} \to 0.$$

*Demonstração.* Note que $d(u,v)$ está bem definida para todo $u, v \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, pois $d(u,v) \leq \sum_{N=0}^\infty 2^{-N} = 2$. Temos

- $d(u,v) \geq 0$, para todo $u, v \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$.
- Se $u = v$, então $||u-v||_{C^N} = 0$, para todo $N \in \mathbb{N}$. Assim, $d(u,v) = 0$. Reciprocamente, se $d(u,v) = 0$, então $||u-v||_{C^N} = 0$, para todo $N \in \mathbb{N}$. Em particular para $N = 0$, temos $||u-v||_{L^\infty} = 0$, isto é, $u = v$.
- $d(u,v) = d(v,u)$, para todo $u, v \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$.
- $d(u,w) \leq d(u,v) + d(v,w)$, para todo $u, v, w \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$. De fato,

$$\begin{aligned}
\frac{||u-w||_{C^N}}{1+||u-w||_{C^N}} &= \frac{1+||u-w||_{C^N}-1}{1+||u-w||_{C^N}} = 1 - \frac{1}{1+||u-w||_{C^N}} \\
&\leq 1 - \frac{1}{1+||u-v||_{C^N}+||v-w||_{C^N}} = \frac{||u-v||_{C^N}+||v-w||_{C^N}}{1+||u-v||_{C^N}+||v-w||_{C^N}} \\
&= \frac{||u-v||_{C^N}}{1+||u-v||_{C^N}+||v-w||_{C^N}} + \frac{||v-w||_{C^N}}{1+||u-v||_{C^N}+||v-w||_{C^N}} \\
&\leq \frac{||u-v||_{C^N}}{1+||u-v||_{C^N}} + \frac{||v-w||_{C^N}}{1+||v-w||_{C^N}}.
\end{aligned}$$

  Logo,

$$\sum_{N=0}^{\infty} 2^{-N} \frac{||u-w||_{C^N}}{1+||u-w||_{C^N}} \leq \sum_{N=0}^{\infty} 2^{-N} \frac{||u-v||_{C^N}}{1+||u-v||_{C^N}} + \sum_{N=0}^{\infty} 2^{-N} \frac{||v-w||_{C^N}}{1+||v-w||_{C^N}}.$$

  Portanto, $d(u,w) \leq d(u,v) + d(v,w)$, para todo $u, v, w \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$.

  Concluímos que $(C^\infty(\mathbb{T}^n), d)$ é um espaço métrico.

Seja $(u_j)$ uma sequência em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Se $u_j \to u$ em $(C^\infty(\mathbb{T}^n), d)$ então $d(u_j, u) \to 0$. Fixe $N_0 \in \mathbb{N}$; temos

$$2^{-N_0} \frac{||u_j - u||_{C^{N_0}}}{1 + ||u_j - u||_{C^{N_0}}} \leq d(u_j, u).$$

Assim,

$$\frac{||u_j - u||_{C^{N_0}}}{1 + ||u_j - u||_{C^{N_0}}} \leq 2^{N_0} d(u_j, u),$$

o que implica que $\dfrac{||u_j - u||_{C^{N_0}}}{1 + ||u_j - u||_{C^{N_0}}} \to 0$. Assim, dado $0 < \tilde{\varepsilon} < \dfrac{1}{2}$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $j \geq j_0$ tem-se

$$\frac{||u_j - u||_{C^{N_0}}}{1 + ||u_j - u||_{C^{N_0}}} < \tilde{\varepsilon},$$

ou seja,

$$||u_j - u||_{C^{N_0}} < \tilde{\varepsilon}\left(1 + ||u_j - u||_{C^{N_0}}\right).$$

Disso decorre que

$$||u_j - u||_{C^{N_0}} < \frac{\tilde{\varepsilon}}{1 - \tilde{\varepsilon}} < 1,$$

para todo $j \geq j_0$. Dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, novamente usando a convegência $\dfrac{||u_j - u||_{C^{N_0}}}{1 + ||u_j - u||_{C^{N_0}}} \to 0$, para $j$ suficientemente grande, obtemos

$$||u_j - u||_{C^{N_0}} < \frac{\varepsilon}{2}\left(1 + ||u_j - u||_{C^{N_0}}\right) < \frac{\varepsilon}{2}(1+1) < \varepsilon.$$

Logo, $||u_j - u||_{C^{N_0}} \to 0$. Como $N_0$ é qualquer, então $\left\|u_j - u\right\|_{C^N} \to 0$, para todo $N \in \mathbb{N}$. Portanto, $||\partial^\alpha u_j - \partial^\alpha u||_{L^\infty} \to 0$, para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Reciprocamente, suponha que $||\partial^\alpha u_j - \partial^\alpha u||_{L^\infty} \to 0$, para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Disso decorre que $||u_j - u||_{C^N} \to 0$, para todo $N \in \mathbb{N}$. Dado $\varepsilon > 0$. Tome $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\displaystyle\sum_{N=N_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^N} < \frac{\varepsilon}{2}$. Assim

$$\sum_{N=N_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^N} \frac{||u_j - u||_{C^N}}{1 + ||u_j - u||_{C^N}} < \sum_{N=N_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^N} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.5}$$

Por outro lado, como $||u_j - u||_{C^N} \to 0$, para $N = 0, 1, \ldots, N_0$, então para cada $N \in \{0, 1, \ldots, N_0\}$, existe $j_N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $j \geq j_N$ tem-se

$$||u_j - u||_{C^N} < \frac{\varepsilon}{2c},$$

onde $c := \displaystyle\sum_{N=0}^{N_0} \frac{1}{2^N}$. Tomando $j_0 = \displaystyle\max_{0 \leq N \leq N_0} j_N$. Para $j \geq j_0$ temos

$$\frac{1}{2^N} \frac{||u_j - u||_{C^N}}{1 + ||u_j - u||_{C^N}} \leq \frac{1}{2^N} ||u_j - u||_{C^N} < \frac{1}{2^N} \frac{\varepsilon}{2c},$$

com $N \in \{0, 1, \ldots, N_0\}$. Disso decorre que

$$\sum_{N=0}^{N_0} \frac{1}{2^N} \frac{||u_j - u||_{C^N}}{1 + ||u_j - u||_{C^N}} < \frac{\varepsilon}{2c} \sum_{N=0}^{N_0} \frac{1}{2^N} = \frac{\varepsilon}{2}, \tag{3.6}$$

para $j \geq j_0$. De (3.5) e (3.6) segue que

$$
\begin{aligned}
d(u_j,u) &= \sum_{N=0}^{\infty} 2^{-N} \frac{||u_j - u||_{C^N}}{1+||u_j-u||_{C^N}} \\
&= \sum_{N=0}^{N_0} 2^{-N} \frac{||u_j - u||_{C^N}}{1+||u_j-u||_{C^N}} + \sum_{N=N_0+1}^{\infty} 2^{-N} \frac{||u_j - u||_{C^N}}{1+||u_j-u||_{C^N}} \\
&< \varepsilon,
\end{aligned}
$$

para $j \geq j_0$. Portanto, $d(u_j,u) \to 0$.

□

O teorema anterior é uma instância de um fenômeno geral: um espaço vetorial complexo $X$ cuja topologia é dada por uma família enumerável de seminormas é na verdade um espaço métrico. Aqui, uma função $p : X \to \mathbb{R}$ é chamada de *seminorma* se para qualquer $u, v \in X$ e para $\alpha \in \mathbb{C}$,

- $p(u) \geq 0$,
- $p(\alpha u) = |\alpha| p(u)$,
- $p(u+v) \leq p(u) + p(v)$.

Assim, uma seminorma $p$ é quase como uma norma, mas é permitido que $p(u) = 0$ para alguns elementos não nulos $u \in X$.

Uma família $\{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é chamada de *separante* se para qualquer $u \in X$ diferente de zero existe $\alpha \in A$ com $p_\alpha(u) \neq 0$.

**Teorema 3.3.5.** Seja $X$ um espaço vetorial e seja $\{p_N\}_{N=0}^{\infty}$ uma família enumerável separante de seminormas. A função

$$
d(u,v) = \sum_{N=0}^{\infty} 2^{-N} \frac{p_N(u-v)}{1+p_N(u-v)}, \quad u,v \in X,
$$

é uma métrica em $X$. Além disso, $u_j \to u$ em $(X,d)$ se, e somente se, para qualquer $N \in \mathbb{N}$,

$$
p_N\left(u_j - u\right) \to 0.
$$

*Demonstração.* Usando o mesmo raciocínio do Teorema 3.3.4.

□

Se $X$ e $\{p_N\}$ são como no teorema acima, dizemos que a topologia do espaço métrico $(X,d)$ é a topologia em $X$ *induzida* pela família de seminormas $\{p_N\}$. Essa noção será usada várias vezes mais tarde. Em particular, a topologia em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ é aquela induzida pelas seminormas (na verdade normas) $\{||.||_{C^N}\}$, e também é igual à topologia induzida pelas seminormas $\{||\partial^\alpha .||_{L^\infty}\}_{\alpha\in\mathbb{N}^n}$. A partir de agora vamos sempre considerar $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ com esta topologia.

Será importante que o espaço das funções testes esteja completo.

**Teorema 3.3.6.** (**Completude**) Qualquer sequência de Cauchy em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ converge.

*Demonstração.* Seja $(u_j) \subset C^\infty(\mathbb{T}^n)$ uma sequência de Cauchy, ou seja, para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$d\left(u_j, u_k\right) < \varepsilon,$$

para $j,k \geq M$. Em particular, para cada $N \in \mathbb{N}$,

$$2^{-N}\frac{\left\|u_j - u_k\right\|_{C^N}}{1+\left\|u_j - u_k\right\|_{C^N}} < \varepsilon,$$

para $j,k \geq M$. Para $0 < \tilde{\varepsilon} < \frac{1}{2^{N+1}}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $j,k \geq n_0$ tem-se

$$2^{-N}\frac{||u_j - u_k||_{C^N}}{1+||u_j - u_k||_{C^N}} < \tilde{\varepsilon},$$

ou seja,

$$||u_j - u_k||_{C^N} < \tilde{\varepsilon}\ 2^N\left(1+||u_j - u_k||_{C^N}\right).$$

Disso decorre que

$$||u_j - u_k||_{C^N} < \frac{\tilde{\varepsilon}\ 2^N}{1-\tilde{\varepsilon}\ 2^N} < 1,$$

para todo $j,k \geq n_0$. Dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, para $j,k$ suficientemente grande, obtemos

$$||u_j - u_k||_{C^N} < \frac{\varepsilon}{2}\left(1+||u_j - u_k||_{C^N}\right) < \frac{\varepsilon}{2}(1+1) < \varepsilon.$$

Logo, $||u_j - u_k||_{C^N} \to 0$. Segue que $(u_j)$ é de Cauchy em $C^N_{2\pi}$ para qualquer $N \in \mathbb{N}$. Como $C^N_{2\pi}$ é completo para qualquer $N$, então existe $u(N) \in C^N_{2\pi}$ tal que $u_j \to u(N)$ em $C^N_{2\pi}$. Mas $u(N) = u(0) =: u$ para todo $N$, e assim $u_j \to u$ em $C^N_{2\pi}$, para todo $N$. Pelo Teorema 3.3.4 temos $u_j \to u$ em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$.

□

**Observação 3.3.7.** Os resultados anteriores mostram que $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ é um espaço de Fréchet.

**Teorema 3.3.8.** (**Operações em funções testes**) Se $f,u \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, então as seguintes operações são mapas contínuos de $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ para $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ :

1. $u \mapsto \partial^\alpha u$ (derivação)

2. $u \mapsto fu$ (multiplicação).

*Demonstração.* Como $(C^\infty(\mathbb{T}^n), d)$ é um espaço métrico, então a continuidade é equivalente a continuidade sequencial.

1. Seja $\{u_j\}$ uma sequência tal que $d(u_j, u) \to 0$ em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Pelo Teorema 3.3.4 segue que $||\partial^\gamma u_j - \partial^\gamma u||_{L^\infty} \to 0$, para todo $\gamma \in \mathbb{N}^n$. Seja $\beta \in \mathbb{N}^n$. Temos
$$\begin{aligned} ||\partial^\beta \left(\partial^\alpha u_j\right) - \partial^\beta \left(\partial^\alpha u\right)||_{L^\infty} &= ||\partial^{\alpha+\beta} u_j - \partial^{\alpha+\beta} u||_{L^\infty} \\ &= ||\partial^\gamma u_j - \partial^\gamma u||_{L^\infty}, \end{aligned}$$
onde $\gamma = \alpha + \beta$. Como $||\partial^\gamma u_j - \partial^\gamma u||_{L^\infty} \to 0$, novamente pelo Teorema 3.3.4 segue que $d(\partial^\alpha u_j, \partial^\alpha u) \to 0$. Logo, a aplicação derivação é contínua.

2. Seja $\{u_j\}$ uma sequência tal que $d(u_j, u) \to 0$ em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Pelo Teorema 3.3.4 segue que $||\partial^\gamma u_j - \partial^\gamma u||_{L^\infty} \to 0$, para todo $\gamma \in \mathbb{N}^n$. Seja $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Usando a regra de Leibniz temos
$$\begin{aligned} ||\partial^\alpha (f(u_j - u))||_{L^\infty} &= \left\| \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta f \, \partial^{\alpha-\beta}(u_j - u) \right\|_{L^\infty} \\ &\le \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} ||\partial^\beta f||_{L^\infty} ||\partial^{\alpha-\beta}(u_j - u)||_{L^\infty}. \end{aligned}$$
Como $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, então $||\partial^\beta f||_{L^\infty} < \infty$, para todo $\beta \le \alpha$. Além disso, $||\partial^{\alpha-\beta}(u_j - u)||_{L^\infty} \to 0$, para todo $\beta \le \alpha$. Logo, tomando o limite dos dois lados da última desigualdade quando $j \to \infty$, otbemos $||\partial^\alpha (f(u_j - u))||_{L^\infty} \to 0$. Novamente pelo Teorema 3.3.4 segue que $d(fu_j, fu) \to 0$. Portanto, a aplicação multiplicação é contínua.

□

Passamos para o estudo da série de Fourier de funções testes. Claramente as funções testes estão em $L^2$ e, portanto, seus coeficientes de Fourier são sequências em $\ell^2$ e suas séries de Fourier convergem em $L^2$. Começamos com a definição de sequências decaindo rapidamente.

**Definição 3.3.9.** Diz-se que uma sequência $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}^n}$ *decai rapidamente* se para qualquer $N > 0$ existe $C_N > 0$ tal que
$$|c_k| \le C_N \langle k \rangle^{-N}.$$
Aqui $\langle k \rangle := (1 + |k|^2)^{1/2}$. O conjunto de sequências decaindo rapidamente é denotado por $\mathscr{S} = \mathscr{S}(\mathbb{Z}^n)$, e é equipado com a topologia induzida pelas normas
$$(c_k) \mapsto \sup_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle k \rangle^N |c_k|.$$

**Lema 3.3.10.** A série
$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle k \rangle^{-s}$$
converge se $s > n$.

*Demonstração.* Este lema foi demonstrado em (WARNER, 1983), apresentamos a prova.

Seja
$$S_j = \{k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n : \max_{1\leq i\leq n} |k_i| = j\},$$
para $j \geq 1$. O número de elementos de $S_j$ é no máximo $2n(2j+1)^{n-1}$. De fato, como $\max_{1\leq i\leq n} |k_i| = j$, então existe $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tal que $|k_{i_0}| = j$. Sem perda de generalidade, suponha que $i_0 = 1$. Assim, $k_1 = j$ ou $k_1 = -j$. Para $i \in \{2, \dots, n\}$, temos $|k_i| \leq j$, ou seja, $k_i \in \{-j, \dots, -1, 0, 1, \dots, j\}$. Em outras palavras, temos $2j+1$ escolhas para cada $k_i$, com $i \in \{2, \dots, n\}$. Então, se $|k_1| = j$, temos $2(2j+1)^{n-1}$ escolhas para $k = (k_1, \dots, k_n)$. Analogamente, se $|k_2| = j$, temos $2(2j+1)^{n-1}$ escolhas para $(k_1, \dots, k_n)$, e assim por diante. Logo, o número de elementos de $S_j$ é no máximo $2n(2j+1)^{n-1}$.

Para cada $k \in S_j$, $|k|^2 \geq j^2$, então
$$s_j = \sum_{k\in S_j} \frac{1}{(1+|k|^2)^{s/2}} \leq \frac{2n(2j+1)^{n-1}}{(1+j^2)^{s/2}} \leq c\, j^{n-1-s},$$
para $j \geq 1$, onde $c$ é uma constante dependente apenas de $n$. Consequentemente,
$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \frac{1}{(1+|k|^2)^{s/2}} = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} s_j \leq 1 + c \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{1+s-n}},$$
e a série $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k\rangle^{-s}$ converge sempre que $1+s-n > 1$, ou seja, $s > n$.

□

**Lema 3.3.11.** Se $f \in \mathscr{S}(\mathbb{Z}^n)$ então $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(k)$ converge absolutamente.

*Demonstração.* Fixe $N > n$. Temos
$$M := \sup_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k\rangle^N |f(k)| < \infty.$$
Logo,
$$|f(k)| \leq M \langle k\rangle^{-N}.$$
Pelo Lema 3.3.10 a série $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k\rangle^{-N}$ converge, uma vez que $N > n$. Do teste da comparação segue que $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(k)$ converge absolutamente. □

Seja $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$. Defina
$$\widehat{f}(k) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{T}^n} f(x) e^{-ik\cdot x} dx, \quad k \in \mathbb{Z}^n.$$

**Teorema 3.3.12. (Lema de Riemann-Lebesgue)** Se $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$, então $\widehat{f}(k) \to 0$, quando $|k| \to +\infty$.

*Demonstração.* Ver (RUDIN, 1987). □

Denotamos por $\mathscr{F}$ a aplicação ("transformada de Fourier") que leva uma função teste à sua sequência de coeficientes de Fourier. Desta forma,

$$\mathscr{F} : C^\infty(\mathbb{T}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{Z}^n); \ \mathscr{F}u = \{\widehat{u}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^n}.$$

**Proposição 3.3.13.** Se $u \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ então

$$\widehat{D^\alpha u}(k) = k^\alpha \widehat{u}(k). \tag{3.7}$$

*Demonstração.* Se $u \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ então $D^\alpha u \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Usaremos repetidamente a fórmula de integração por partes. Temos

$$\begin{aligned} k^\alpha \widehat{u}(k) &= k^\alpha \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} u(\theta) e^{-ik\cdot\theta} d\theta \\ &= k^\alpha \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \dots \left( \int_{-\pi}^{\pi} u(\theta)\, e^{-ik\cdot\theta} d\theta_n \right) \dots \right) d\theta_1. \end{aligned}$$

Usando a integral por partes no caso $k_n \neq 0$, obtemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} u(\theta)\, e^{-ik\cdot\theta} d\theta_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{ik_n}\, e^{-ik\cdot\theta}\, \frac{\partial}{\partial\theta_n} u(\theta) d\theta_n,$$

pois $u$ e $e^{-ik\dot{\theta}}$ são $2\pi$-periódica na variável $\theta_n$, então o termo sem integral é nulo. Repetindo este processo segue que

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} u(\theta)\, e^{-ik\cdot\theta}\, d\theta_n &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{(ik_n)^{\alpha_n}}\, e^{-ik\cdot\theta}\, \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial\theta_n^{\alpha_n}} u(\theta) d\theta_n \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{k_n^{\alpha_n}}\, e^{-ik\cdot\theta}\, D_n^{\alpha_n} u(\theta) d\theta_n. \end{aligned}$$

Além disso, usando o Teorema de Fubini temos

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} u(\theta)\, e^{-ik\cdot\theta}\, d\theta_n \right) d\theta_{n-1} &= \int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{k_n^{\alpha_n}}\, e^{-ik\cdot\theta}\, D_n^{\alpha_n} u(\theta) d\theta_n \right) d\theta_{n-1} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{k_n^{\alpha_n}}\, e^{-ik\cdot\theta}\, D_n^{\alpha_n} u(\theta) d\theta_{n-1} \right) d\theta_n \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{k_{n-1}^{\alpha_{n-1}} k_n^{\alpha_n}}\, e^{-ik\cdot\theta}\, D_{n-1}^{\alpha_{n-1}} D_n^{\alpha_n} u(\theta) d\theta_{n-1} \right) d\theta_n. \end{aligned}$$

Repetindo o raciocínio, mostra-se que

$$\begin{aligned} k^\alpha \widehat{u}(k) &= k^\alpha \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \dots \left( \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{k^\alpha}\, e^{-ik\cdot\theta}\, D^\alpha u(\theta) d\theta_1 \right) \dots \right) d\theta_n \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} (D^\alpha u)(\theta) e^{-ik\cdot\theta} d\theta = \widehat{D^\alpha u}(k). \end{aligned}$$

$\square$

**Teorema 3.3.14.** **(Séries de Fourier de funções testes)** $\mathscr{F}$ é um isomorfismo de $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ a $\mathscr{S}(\mathbb{Z}^n)$. Qualquer $u \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ pode ser escrita como a série de Fourier

$$u = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \widehat{u}(k) e^{ik\cdot\theta}$$

com convergência em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$.

*Demonstração.* Considere o operador de Laplace $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2}$. Assim,

$$(1-\Delta)^N = \left(1 - \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right)^N = \left(1 + \sum_{j=1}^n D_j^2\right)^N.$$

Vejamos que

$$\mathscr{F}\big((1-\Delta)^N u\big)(k) = \langle k\rangle^{2N}\widehat{u}(k).$$

De fato, para $N=1$ temos

$$\mathscr{F}((1-\Delta)u)(k) = \mathscr{F}\left(\left(1+\sum_{j=1}^n D_j^2\right)u\right)(k) = (1+|k|^2)\widehat{u}(k).$$

onde a última igualdade segue da fórmula (3.7). Para $N=2$ temos

$$\mathscr{F}\big((1-\Delta)^2 u\big)(k) = \mathscr{F}((1-\Delta)v)(k),$$

onde $v = (1-\Delta)u$. Pelo caso acima temos

$$\begin{aligned}\mathscr{F}((1-\Delta)v)(k) &= (1+|k|^2)\ \widehat{v}(k)\\ &= (1+|k|^2)\ \mathscr{F}((1-\Delta)u)(k)\\ &= (1+|k|^2)\ (1+|k|^2)\widehat{u}(k),\end{aligned}$$

assim,

$$\mathscr{F}\big((1-\Delta)^2 u\big)(k) = (1+|k|^2)^2\ \widehat{u}(k).$$

Continuando o mesmo processo obtemos

$$\mathscr{F}\big((1-\Delta)^N u\big)(k) = (1+|k|^2)^N\widehat{u}(k) = \langle k\rangle^{2N}\widehat{u}(k),$$

para qualquer $N\in\mathbb{N}$. Logo,

$$|\widehat{u}(k)| \leq \langle k\rangle^{-2N}\left|\mathscr{F}\big((1-\Delta)^N u\big)(k)\right| \leq \langle k\rangle^{-2N}\left\|(1-\Delta)^N u\right\|_{L^\infty([-\pi,\pi]^n)},$$

a última desigualdade vale pois se $g = (1-\Delta)^N u$, então $\widehat{g}(k) = \dfrac{1}{(2\pi)^n}\displaystyle\int_{\mathbb{T}^n} g(\theta)e^{-ik\cdot\theta}d\theta$, assim, $|\widehat{g}(k)| \leq \dfrac{1}{(2\pi)^n}||g||_{L^\infty(\mathbb{T}^n)}\displaystyle\int_{\mathbb{T}^n} d\theta = ||g||_{L^\infty(\mathbb{T}^n)}$. Isto mostra que para $u\in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, a sequência

$\{\widehat{u}(k)\}$ está em $\mathscr{S}$.

Reciprocamente, se $(c_k) \in \mathscr{S}$, defina

$$u(\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k e^{ik\cdot\theta}.$$

Como $|c_k e^{ik\cdot\theta}| \leq C_N \langle k\rangle^{-N}$ para $N > n$, a série converge uniformemente pelo Lema 3.3.10 e pelo teste M de Weierstrass. Por um argumento semelhante vemos que $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} D^\alpha \left(c_k e^{ik\cdot\theta}\right)$ converge uniformemente para qualquer $\alpha$. (Aqui, $D^\alpha(c_k e^{ik\cdot\theta}) = k^\alpha c_k e^{ik\cdot\theta}$). Escrevemos $u_j = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^n,\ |k|\leq j} c_k e^{ik\cdot\theta}$ e $\lim\limits_{j\to+\infty} u_j = u$. Usando o Teorema da Derivação Termo a Termo, segue que $D^\alpha(\lim u_j) = \lim D^\alpha u_j$. Logo, $D^\alpha u = \lim D^\alpha u_j$. Isso mostra que $u \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ e a série converge em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$, e também que $c_k = \widehat{u}(k)$ pois

$$\widehat{u}(k) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{T}^n} \sum_{j\in\mathbb{Z}^n} c_j e^{ij\cdot\theta} e^{-ik\cdot\theta} d\theta = \sum_{j\in\mathbb{Z}^n} c_j \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{T}^n} e^{ij\cdot\theta} e^{-ik\cdot\theta} d\theta = c_k,$$

uma vez que $\{e^{ij\cdot\theta}\}_{j\in\mathbb{Z}^n}$ é uma sequência ornonormal em $L^2(\mathbb{T}^n)$.

Mostramos que $\mathscr{F} : C^\infty(\mathbb{T}^n) \to \mathscr{S}$ é bijetiva, e claramente é linear. Resta mostrar que $\mathscr{F}$ é contínua com inversa contínua. Se $u_j \to 0$ em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$, os argumentos acima implicam que

$$\langle k\rangle^{2N} \left|\widehat{u}_j(k)\right| \leq \left|\mathscr{F}\left((1-\Delta)^N u_j\right)(k)\right| \leq \left\|(1-\Delta)^N u_j\right\|_{L^\infty} \leq C \left\|u_j\right\|_{C^{2N}},$$

para algum $C > 0$. Logo, $\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k\rangle^{2N} |\widehat{u}_j(k)| \to 0$ quando $j \to \infty$ para qualquer $N$ fixo. Isso mostra que $\mathscr{F}$ é contínua. Pelo teorema da aplicação aberta para espaços de Fréchet segue que $\mathscr{F}^{-1}$ é contínua.

□

## 3.4 Distribuições periódicas

Esta seção usa principalmente a referência (SALO, 2013).

Conforme já dissemos, gostaríamos de definir "distribuições" $u$ como objetos que podem ser testados em relação a "funções testes" $\varphi$ como na fórmula

$$\int u(x)\varphi(x)dx.$$

Na situação atual usaremos elementos de $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ como funções testes, e as distribuições correspondentes são apenas elementos do espaço dual.

**Definição 3.4.1.** Seja $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$ o conjunto de todos os funcionais lineares contínuos em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$, ou seja,

$$\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n) = \left\{T : C^\infty(\mathbb{T}^n) \to \mathbb{C};\ T \text{ é linear e } T\left(\varphi_j\right) \to 0 \text{ se } \varphi_j \to 0 \text{ em } C^\infty(\mathbb{T}^n)\right\}.$$

Os elementos de $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$ são chamados de *distribuições periódicas*. Denotamos

$$\langle T, \varphi \rangle := T(\varphi).$$

Fazemos uma observação neste ponto: para verificar que um funcional linear $T : C^\infty(\mathbb{T}^n) \to \mathbb{C}$ é contínuo, basta verificar que

$$\varphi_j \to 0 \text{ em } C^\infty(\mathbb{T}^n) \Longrightarrow T\left(\varphi_j\right) \to 0.$$

Isso segue imediatamente da linearidade de $T$ e será usado muitas vezes abaixo.

**Exemplo 3.4.2.** (**Funções interpretadas como distribuições**) Considere o cubo $Q = [-\pi, \pi]^n$. Se $u \in L^1(Q)$, defina $T_u : C^\infty(\mathbb{T}^n) \to \mathbb{C}$ dada por

$$T_u(\varphi) := \int_Q u\varphi dx.$$

Então $T_u$ é uma distribuição periódica: claramente é linear, e se $\varphi_j \to 0$ em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ então

$$\left|T_u\left(\varphi_j\right)\right| \leq \int_Q |u| \left|\varphi_j\right| dx \leq \|u\|_{L^1} \left\|\varphi_j\right\|_{L^\infty} \to 0.$$

**Exemplo 3.4.3.** Para $a \in \mathbb{R}^n$, defina a medida de Dirac $\delta_a$ por

$$\delta_a(\varphi) = \varphi(a),$$

para toda $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Claramente que $\delta_a$ é uma distribuição periódica.

É um fato notável que existe uma noção natural de derivada em $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$. Para $u \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ o requisito usual de que $\partial^\alpha T_u$ seja igual a $T_{\partial^\alpha u}$ leva a

$$\begin{aligned}
\left(\partial^\alpha T_u\right)(\varphi) = T_{\partial^\alpha u}(\varphi) &= \int_Q \left(\partial^\alpha u\right)(x)\ \varphi(x) dx \\
&= (-1)^{|\alpha|} \int_Q u(x)\ \partial^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} T_u\left(\partial^\alpha \varphi\right),
\end{aligned}$$

onde integramos repetidamente por partes.

**Definição 3.4.4.** Para qualquer $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$ definimos a distribuição $\partial^\alpha T$ por

$$\left(\partial^\alpha T\right)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T\left(\partial^\alpha \varphi\right).$$

A distribuição $\partial^\alpha T$ é chamada de $\alpha$-ésima *derivada distribucional* ou *derivada fraca* de $T$.

Note que $\partial^\alpha T$ é um funcional linear contínuo em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ já que a diferenciação é contínua em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Segue que *qualquer distribuição tem derivadas bem definidas de qualquer ordem* mesmo se ela surgir de uma função que não é diferenciável no sentido clássico.

**Exemplo 3.4.5.** Se $u$ é uma função periódica de classe $C^k$, as derivadas $\partial^\alpha u$ existem como funções periódicas contínuas se $|\alpha| \leq k$. Por outro lado, $u$ dá origem a uma distribuição $T_u$, que tem derivadas distribucionais $\partial^\alpha T_u$ para qualquer $\alpha$. É fácil mostrar que

$$\partial^\alpha T_u = T_{\partial^\alpha u}, \quad |\alpha| \leq k,$$

ou seja, as derivadas distribucionais até a ordem $k$ coincidem com as derivadas clássicas correspondentes.

Passamos para a série de Fourier de distribuições periódicas. A teoria também funciona lindamente aqui, e *qualquer distribuição periódica, não importa quão irregular seja, tem uma série de Fourier que converge no sentido das distribuições.* Além disso, os coeficientes de Fourier correspondentes às distribuições periódicas acabam por coincidir com as sequências de crescimento polinomial.

Observe que se $u \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ é uma função teste, os coeficientes de Fourier de $u$ são dados por

$$\widehat{u}(k) = (2\pi)^{-n} \int_Q u(x) e^{-ik\cdot x} dx, \quad k \in \mathbb{Z}^n.$$

Se $T_u$ é a distribuição correspondente a $u$, segue que

$$\widehat{u}(k) = (2\pi)^{-n}\, T_u\left(e^{-ik\cdot x}\right), \quad k \in \mathbb{Z}^n.$$

Isso motiva a seguinte definição.

**Definição 3.4.6.** Se $T$ é uma distribuição periódica, seus coeficientes de Fourier são definidos por

$$\widehat{T}(k) := (2\pi)^{-n}\, T\left(e^{-ik\cdot x}\right), \quad k \in \mathbb{Z}^n.$$

Denotamos por $\mathscr{F}$ a aplicação ("transformada de Fourier") que leva um elemento $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$ à sua sequência de coeficientes de Fourier $(\widehat{T}(k))_{k\in\mathbb{Z}^n}$.

Dizemos que uma sequência complexa $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}^n}$ tem *crescimento polinomial* se existem $N > 0$ e $C > 0$ tais que

$$|a_k| \leq C\langle k\rangle^N, \quad k \in \mathbb{Z}^n.$$

Denotamos por $\mathscr{S}'(\mathbb{Z}^n)$ o conjunto de sequências com crescimento polinomial.

**Exemplo 3.4.7.** (**Série de Fourier da medida de Dirac**) Considere a medida periódica de Dirac $\delta$ em $\mathbb{R}$, que dá origem à distribuição definida por $\delta(\varphi) = \varphi(0)$. Os coeficientes de Fourier da medida de Dirac são

$$\widehat{\delta}(k) = \frac{1}{2\pi}\delta\left(e^{-ikx}\right) = \frac{1}{2\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Assim, a série de Fourier de $\delta$ deve ser

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx}.$$

Esta série não converge em nenhum ponto $x \in \mathbb{R}$. De fato, $\lim_{k\to+\infty} \left|e^{ikx}\right| = 1 \neq 0$. Mas veremos que esta série converge para $\delta$ no sentido das distribuições.

**Exemplo 3.4.8.** (**Série de Fourier de $\delta'$**) A derivada da medida de Dirac em $\mathbb{R}$ é a distribuição agindo em funções testes por $\delta'(\varphi) = -\varphi'(0)$, assim seus coeficientes de Fourier são

$$\widehat{(\delta')}(k) = \frac{1}{2\pi}\delta'\left(e^{-ikx}\right) = \frac{1}{2\pi}ik, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Assim $\delta'$ tem série de Fourier é dada por

$$\frac{i}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} ke^{ikx}.$$

O seguinte é o resultado principal da série de Fourier de distribuições.

**Teorema 3.4.9.** (**Série de Fourier de distribuições periódicas**) Os coeficientes de Fourier de qualquer distribuição periódica são uma sequência de crescimento polinomial e, reciprocamente, qualquer sequência de crescimento polinomial surge como os coeficientes de Fourier de alguma distribuição periódica. (Ou seja, $\mathscr{F}$ é uma aplicação bijetiva de $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$ em $\mathscr{S}'(\mathbb{Z}^n)$). Qualquer $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$ pode ser escrita como a série de Fourier

$$T = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \widehat{T}(k)e^{ik\cdot x},$$

que converge no sentido das distribuições, isto é

$$\lim_{N\to\infty}\left\langle \sum_{|k|\leq N} \widehat{T}(k)e^{ik\cdot x}, \varphi \right\rangle = \langle T, \varphi\rangle, \quad \text{para todo } \varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n).$$

Para a prova, precisamos do seguinte resultado.

**Lema 3.4.10.** (**Qualquer distribuição periódica tem ordem finita**) Para qualquer $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$, existem $N \in \mathbb{N}$ e $C > 0$ tais que

$$|T(\varphi)| \leq C \sum_{|\alpha|\leq N} \|\partial^\alpha \varphi\|_{L^\infty}.$$

**Observação 3.4.11.** Se $T$ e $N$ são como no lema, dizemos que *a distribuição $T$ tem ordem menor ou igual a $N$*. O lema afirma que qualquer distribuição periódica tem ordem finita.

*Demonstração do Lema 3.4.10.* Seja $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$. Mostramos por contradição e assumimos que para qualquer $N \in \mathbb{N}^*$ existe $\varphi_N \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ tal que

$$|T(\varphi_N)| > N \sum_{|\alpha|\leq N} \|\partial^\alpha \varphi_N\|_{L^\infty}.$$

Defina

$$\psi_N := \frac{1}{N}\left(\sum_{|\alpha|\leq N} \|\partial^\alpha \varphi_N\|_{L^\infty}\right)^{-1} \varphi_N.$$

Note que $\sum_{|\alpha|\leq N}\|\partial^\alpha \varphi_N\|_{L^\infty}\neq 0$, pois se $\sum_{|\alpha|\leq N}\|\partial^\alpha \varphi_N\|_{L^\infty}=0$, tem-se $|T(\varphi_N)|>0$, por outro lado, $\sum_{|\alpha|\leq N}\|\partial^\alpha \varphi_N\|_{L^\infty}=0$, implica que $||\varphi_N||_{L^\infty}=0$, como $\varphi_N$ é contínua, então $\varphi_N=0$. Logo, $T(\varphi_N)=0$, absurdo.

Para qualquer $\beta\in\mathbb{N}^n$ fixo, temos

$$\left\|\partial^\beta \psi_N\right\|_{L^\infty}\leq\frac{1}{N},\quad N \text{ suficientemente grande.}$$

Assim, para cada $\beta$, $\partial^\beta\psi_N\to 0$ uniformemente quando $N\to+\infty$, o que mostra que $\psi_N\to 0$ em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Como $T$ é um funcional linear contínuo, também temos

$$T(\psi_N)\to 0\quad \text{quando } N\to\infty.$$

Mas $|T(\psi_N)|>1$, para todo $N$ pela desigualdade acima, que dá uma contradição.

□

*Demonstração do Teorema 3.4.9.* Seja $T\in\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$. Pelo Lema 3.4.10, existem $N>0$ e $C>0$ tais que

$$|T(\varphi)|\leq C\sum_{|\alpha|\leq N}\|\partial^\alpha\varphi\|_{L^\infty}.$$

Escolhendo $\varphi(x)=e^{-ik\cdot x}$, temos

$$\left|T(e^{-ik\cdot x})\right|\leq C\sum_{|\alpha|\leq N}|k|^{|\alpha|}\leq\widetilde{C}\langle k\rangle^N,$$

para alguma constante $\widetilde{C}$. Assim, os coeficientes de Fourier de $T$ formam uma sequência de crescimento polinomial.

Reciprocamente, seja $(a_k)$ de crescimento polinomial de modo que para algum inteiro $N>0$,

$$|a_k|\leq C\langle k\rangle^{2N},\quad k\in\mathbb{Z}^n.$$

Seja $s$ um inteiro com $2s>n$, e defina

$$b_k:=a_k\langle k\rangle^{-2N-2s},\quad k\in\mathbb{Z}^n.$$

Pelo Lema 2.3.7 a série $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}|b_k|$ converge. Portanto, podemos definir

$$f(x):=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}b_ke^{ik\cdot x}.$$

Pelo teste M de Weierstrass, esta série converge uniformemente e $f$ é contínua, pois todos os termos da série são contínuos. Assim $f$ define um elemento $T_f\in\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$, e podemos definir a distribuição periódica

$$T:=(1-\Delta)^{N+s}T_f.$$

Então $T$ terá coeficientes de Fourier

$$\begin{aligned}\widehat{T}(k) &= (2\pi)^{-n}\, T\left(e^{-ik\cdot x}\right) = (2\pi)^{-n}\, T_f\left((1-\Delta)^{N+s} e^{-ik\cdot x}\right)\\ &= (2\pi)^{-n}\, T_f\left(\langle k\rangle^{2N+2s} e^{-ik\cdot x}\right) = \langle k\rangle^{2N+2s}\widehat{f}(k),\end{aligned}$$

onde $\widehat{f}(k) = (2\pi)^{-n}\int_Q f(x)e^{-ik\cdot x}dx$. Usando a teoria $L^2$ da série de Fourier, $\widehat{f}(k) = b_k$, e assim $\widehat{T}(k) = \langle k\rangle^{2N+2s}\, b_k = a_k$ como queríamos.

Resta mostrar que se $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$, a série de Fourier de $T$ converge no sentido das distribuições. Para fazer isso, fixe $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ e defina

$$\varphi_N := \sum_{|k|\leq N} \widehat{\varphi}(k)e^{ik\cdot x}.$$

Pelo Teorema 3.3.14 temos $\varphi_N \to \varphi$ em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Assim segue que

$$\begin{aligned}\left\langle \sum_{|k|\leq N} \widehat{T}(k)e^{ik\cdot x}, \varphi\right\rangle &= \int_Q \sum_{|k|\leq N} \widehat{T}(k)e^{ik\cdot x}\varphi(x)dx\\ &= (2\pi)^n \sum_{|k|\leq N} \widehat{T}(k)\widehat{\varphi}(-k)\\ &= \sum_{|k|\leq N} T\left(e^{-ik\cdot x}\right)\widehat{\varphi}(-k)\\ &= \sum_{|k|\leq N} T\left(e^{ik\cdot x}\right)\widehat{\varphi}(k)\\ &= T\left(\varphi_N\right).\end{aligned}$$

Como $T$ é contínua, a última expressão converge para $T(\varphi)$ quando $N \to \infty$. Isso conclui a prova.

$\square$

A prova anterior contém um argumento que também mostra um *teorema de estrutura* para elementos de $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$: mesmo que as distribuições periódicas possam ser muito irregulares, elas sempre surgem como uma derivada distribucional de uma função periódica contínua.

**Teorema 3.4.12.** (**Teorema da estrutura para distribuições periódicas**) Qualquer $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$ pode ser escrita como

$$T = (1-\Delta)^N f$$

para alguma função $2\pi$-periódica contínua $f$ em $\mathbb{R}^n$ e algum inteiro $N \geq 0$.

*Demonstração.* Como $\{\widehat{T}(k)\} \in \mathscr{S}'(\mathbb{Z}^n)$ então existem $C > 0$ e $M \in \mathbb{N}$ tais que

$$|\widehat{T}(k)| \leq C(1+|k|^2)^M.$$

Tomamos $N \in \mathbb{N}$ tal que $2N - 2M > n$. Pelo Lema 3.3.10 a série $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \frac{\widehat{T}(k)}{(1+|k|^2)^N}$ converge.

Defina

$$f(x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \frac{\widehat{T}(k)}{(1+|k|^2)^N}\, e^{ik\cdot x}.$$

Note que $f$ é contínua pois a série converge uniformemente pelo teste M de Weierstrass e todos os termos da série são contínuos. Além disso,

$$\widehat{f}(k) = \frac{\widehat{T}(k)}{(1+|k|^2)^N}.$$

Logo,

$$\widehat{T}(k) = (1+|k|^2)^N\, \widehat{f}(k) = \mathscr{F}\big((1-\Delta)^N f\big)(k).$$

Portanto,

$$T = (1-\Delta)^N f.$$

□

Outro corolário do Teorema 3.4.9 é o seguinte teorema de unicidade para a transformada de Fourier em $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$.

**Teorema 3.4.13.** (**As distribuições são determinadas exclusivamente por seus coeficientes de Fourier**) Se $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$ e se $\widehat{T}(k) = 0$, para todo $k \in \mathbb{Z}^n$, então $T = 0$.

*Demonstração.* Se $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$ então pelo Teorema 3.4.9

$$T = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \widehat{T}(k) e^{ik\cdot x}.$$

Como $\widehat{T}(k) = 0$, para todo $k \in \mathbb{Z}^n$, então $T = 0$. □

O próximo resultado mostra que as séries de Fourier de distribuições periódicas podem ser diferenciadas termo a termo, e a série resultante ainda convergirá no sentido das distribuições.

**Teorema 3.4.14.** (**Série de Fourier de derivadas**) Seja $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$ com série de Fourier

$$T = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \widehat{T}(k) e^{ik\cdot x},$$

então para qualquer $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tem-se

$$D^\alpha T = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} k^\alpha \widehat{T}(k) e^{ik\cdot x},$$

com convergência no sentido das distribuições.

*Demonstração.* Como $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$, então $D^\alpha T \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$. Pelo Teorema 3.4.9, segue que

$$D^\alpha T = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \widehat{D^\alpha T}(k) e^{ik \cdot x}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\widehat{(D^\alpha T)}(k) &= (2\pi)^{-n} (D^\alpha T)(e^{-ik\cdot x}) = (2\pi)^{-n}(-1)^{|\alpha|}\, T(D^\alpha e^{-ik\cdot x}) \\
&= (2\pi)^{-n}(-1)^{|\alpha|}\, T(k^\alpha (-1)^{|\alpha|} e^{-ik\cdot x}) \\
&= k^\alpha (2\pi)^{-n}\, T(e^{-ik\cdot x}) = k^\alpha \widehat{T}(k).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$D^\alpha T = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} k^\alpha \widehat{T}(k) e^{ik\cdot x}.$$

□

## 3.5 Espaços de Sobolev

Nesta seção consideramos espaços $L^2$ Sobolev de funções periódicas. Esses espaços são parecidos com os espaços $C^k$ de funções continuamente diferenciáveis, mas medem a regularidade em termos de derivadas estarem em $L^2$ em vez de serem contínuas. Os espaços de Sobolev são um conceito central na teoria das equações diferenciais parciais.

**Definição 3.5.1.** **(Espaço de Sobolev $W^{m,2}(\mathbb{T}^n)$)** Se $m \geq 0$ é um inteiro, denotamos por $W^{m,2}(\mathbb{T}^n)$ o espaço de todas as $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$ tais que $D^\alpha u \in L^2(\mathbb{T}^n)$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ satisfazendo $|\alpha| \leq m$.

Na definição, a afirmação $D^\alpha u \in L^2(\mathbb{T}^n)$ significa que $D^\alpha u$, que é um elemento de $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$, na verdade coincide com $T_v$ para algum $v$ em $L^2(\mathbb{T}^n)$. Neste caso, identificamos $D^\alpha u$ com $v$ e dizemos que $D^\alpha u$ é uma função em $L^2(\mathbb{T}^n)$. O índice $m$ em $W^{m,2}$ mede a regularidade (número de derivadas), e o índice 2 reflete o fato de considerarmos espaços de Sobolev baseados em espaços $L^2$.

**Exemplo 3.5.2.** Claramente $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ é um subconjunto de $W^{m,2}(\mathbb{T}^n)$ para qualquer $m$. De fato, se $u \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ então

$$\partial^\alpha T_u = T_{\partial^\alpha u},$$

para qualquer $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Como $\partial^\alpha u$ é contínua, logo $\partial^\alpha u \in L^2(\mathbb{T}^n)$.

**Lema 3.5.3.** $W^{m,2}(\mathbb{T}^n)$ é um espaço de Hilbert quando equipado com o produto interno

$$\langle u, v \rangle_{W^{m,2}(\mathbb{T}^n)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2(\mathbb{T}^n)}.$$

*Demonstração.* A norma associada com o produto interno acima é dada por

$$||u||_{W^{m,2}(\mathbb{T}^n)} = \left(\langle u,u\rangle_{W^{m,2}(\mathbb{T}^n)}\right)^{1/2} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} ||D^\alpha u||^2_{L^2(\mathbb{T}^n)}\right)^{1/2}.$$

Seja $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $W^{m,2}(\mathbb{T}^n)$. Assim, para cada $\alpha$ tal que $|\alpha|\leq m$, a sequência $\{D^\alpha u_j\}$ é uma sequência de Cauchy em $L^2(\mathbb{T}^n)$. Como $L^2(\mathbb{T}^n)$ é completo, existe $u_\alpha$ tal que $D^\alpha u_j \to u_\alpha$ em $L^2(\mathbb{T}^n)$, para $|\alpha|\leq m$. Em particular, para $\alpha = 0$, temos $u_j \to u_0$ em $L^2(\mathbb{T}^n)$. Mostremos que $u_0 \in W^{m,2}(\mathbb{T}^n)$.

Temos, $u_j \to u_0$ no sentido das distribuições. De fato, dada $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, usando a desigualdade de Holder temos

$$\begin{aligned}
\left|\left\langle u_j - u_0, \varphi\right\rangle\right| &\leq \int_Q |u_j - u_0|\ |\varphi| dx \leq \max_Q |\varphi| \int_Q |u_j - u_0| dx \\
&\leq \max_Q |\varphi| \left(\int_Q |u_j - u_0|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_Q 1^2 dx\right)^{1/2} \\
&= \max_Q |\varphi|\ (m(Q))^{1/2}\ ||u_j - u_0||_{L^2} \to 0,
\end{aligned}$$

quando $j \to +\infty$.

Ficou mostrado que $u_j \to u_0$ em $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$. Consequentemente, para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$, com $|\alpha|\leq m$, $D^\alpha u_j \to D^\alpha u_0$, em $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$, uma vez que $D^\alpha$ é contínua.

Até agora, para $|\alpha|\leq m$, temos dois fatos

1. $D^\alpha u_j \to u_\alpha$ em $L^2(\mathbb{T}^n)$.

2. $D^\alpha u_j \to D^\alpha u_0$ em $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$.

Vejamos que $D^\alpha u_0 = u_\alpha$ em $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$, para $|\alpha|\leq m$. Novamente usando a desigualdade de Holder temos

$$\begin{aligned}
\left|\left\langle D^\alpha u_j - u_\alpha, \varphi\right\rangle\right| &= \left|\int_Q \left(D^\alpha u_j - u_\alpha\right) \varphi dx\right| \\
&\leq \max_Q |\varphi| \int_Q \left|D^\alpha u_j - u_\alpha\right| dx \\
&\leq \max_Q |\varphi| \left(\int_Q |D^\alpha u_j - u_\alpha|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_Q 1^2 dx\right)^{1/2} \\
&= \max_Q |\varphi|\ (m(Q))^{1/2} ||D^\alpha u_j - u_\alpha||_{L^2},
\end{aligned}$$

para todo $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Tomando limite quando $j \to +\infty$, temos

$$\lim_{j\to+\infty} \left|\left\langle D^\alpha u_j - u_\alpha, \varphi\right\rangle\right| = 0.$$

Logo, $\left|\lim_{j\to+\infty} \left\langle D^\alpha u_j, \varphi\right\rangle - \langle u_\alpha, \varphi\rangle\right| = 0$, isto é, $D^\alpha u_0 = u_\alpha$ em $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$.

Como $u_\alpha \in L^2(\mathbb{T}^n)$, então $D^\alpha u_0 \in L^2(\mathbb{T}^n)$, para todo $|\alpha| \leq m$. Consequentemente $u_0 \in W^{m,2}(\mathbb{T}^n)$.

Além disso, temos

$$\begin{aligned} ||u_j - u_0||^2_{W^{m,2}(\mathbb{T}^n)} &= \sum_{|\alpha|\leq m} ||D^\alpha u_j - D^\alpha u_0||^2_{L^2(\mathbb{T}^n)} \\ &= \sum_{|\alpha|\leq m} ||D^\alpha u_j - u_\alpha||^2_{L^2(\mathbb{T}^n)} \to 0. \end{aligned}$$

Logo, $u_j \to u_0$ em $W^{m,2}\left(\mathbb{T}^n\right)$.

□

Seja $f \in L^2(Q)$. Assim, $f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \widehat{f}(k) e^{ik\cdot x}$ em norma de $L^2(Q)$. Disso decorre que

$$\|f\|^2_{L^2(Q)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\widehat{f}(k)|^2.$$

A igualdade acima é chamada *identidade de Parseval*.

**Lema 3.5.4.** Seja $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$. Então $u \in W^{m,2}(\mathbb{T}^n)$ se, e somente se, $\{\langle k\rangle^m \widehat{u}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^n} \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$.

*Demonstração.* Pela identidade de Parseval, tem-se

$$\begin{aligned} u \in W^{m,2}\left(\mathbb{T}^n\right) &\Leftrightarrow D^\alpha u \in L^2\left(\mathbb{T}^n\right), \quad \text{ para } |\alpha| \leq m \\ &\Leftrightarrow \{k^\alpha \widehat{u}(k)\} \in \ell^2\left(\mathbb{Z}^n\right), \quad \text{ para } |\alpha| \leq m \\ &\Leftrightarrow \left(k_1^2, \ldots, k_n^2\right)^\alpha |\widehat{u}(k)|^2 \in \ell^1\left(\mathbb{Z}^n\right), \quad \text{ para } |\alpha| \leq m. \end{aligned}$$

Se a última condição for satisfeita, então

$$\begin{aligned} \langle k\rangle^{2m} |\widehat{u}(k)|^2 = (1 + |k|^2)^m \, |\widehat{u}(k)|^2 &= \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} |k|^{2l} \, |\widehat{u}(k)|^2 \\ &= \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} \left(|k_1| + \cdots + |k_n|\right)^{2l} \, |\widehat{u}(k)|^2 \\ &= \sum_{|\beta|\leq m} c_\beta \left(k_1^2, \ldots, k_n^2\right)^\beta |\widehat{u}(k)|^2 \in \ell^1\left(\mathbb{Z}^n\right). \end{aligned}$$

Logo, $\langle k\rangle^m \widehat{u}(k) \in \ell^2\left(\mathbb{Z}^n\right)$.

Reciprocamente, se $\langle k\rangle^m \widehat{u}(k) \in \ell^2\left(\mathbb{Z}^n\right)$, então $k^\alpha \widehat{u}(k) \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$, para $|\alpha| \leq m$, pois como $|k_j| \leq \langle k\rangle$, então

$$|k^\alpha| = |k_1^{\alpha_1} \ldots k_n^{\alpha_n}| \leq \langle k\rangle^{\alpha_1} \ldots \langle k\rangle^{\alpha_n} = \langle k\rangle^{|\alpha|} \leq \langle k\rangle^m.$$

Pelas equivalências no início da demonstração, segue que $u \in W^{m,2}(\mathbb{T}^n)$.

□

O resultado anterior motiva a seguinte definição, que define espaços de Sobolev também para índices de regularidade negativos e não inteiros.

**Definição 3.5.5. (Espaço de Sobolev $H^s(\mathbb{T}^n)$)** Se $s \in \mathbb{R}$, denotamos por $H^s(\mathbb{T}^n)$ o espaço de toda $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$ para a qual a sequência $\{\langle k\rangle^s \widehat{u}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ está em $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$.

**Exemplo 3.5.6.** A medida de Dirac periódica $\delta$ em $\mathbb{R}$ tem coeficientes de Fourier

$$\widehat{\delta}(k) = \frac{1}{2\pi},$$

para $k \in \mathbb{Z}$, assim $\delta \in H^{-1/2-\varepsilon}(\mathbb{T}^1)$ para qualquer $\varepsilon > 0$ mas $\delta \notin H^{-1/2}(\mathbb{T}^1)$. De fato, $\delta \in H^{-1/2-\varepsilon}(\mathbb{T}^1)$ pois

$$\left|\langle k\rangle^{-1/2-\varepsilon}\, \widehat{\delta}(k)\right|^2 = \frac{1}{4\pi^2}(1+|k|^2)^{-1/2-\varepsilon},$$

e a série $\sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+|k|^2)^{-1/2-\varepsilon}$ converge uma vez que $1+2\varepsilon > 1$, para todo $\varepsilon > 0$. Mas $\delta \notin H^{-1/2}(\mathbb{T}^1)$ pois

$$\left|\langle k\rangle^{-1/2}\, \widehat{\delta}(k)\right|^2 = \frac{1}{4\pi^2}(1+|k|^2)^{-1/2} > \frac{c}{|k|+1},$$

para algum $c > 0$, e $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|k|+1}$ diverge.

**Exemplo 3.5.7.** Se $u \in H^s(\mathbb{T}^n)$, segue que $D^\alpha u \in H^{s-|\alpha|}(\mathbb{T}^n)$. De fato, se $u \in H^s(\mathbb{T}^n)$, então $\{\langle k\rangle^s \widehat{u}(k)\} \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$. Assim, $\{\langle k\rangle^{s-|\alpha|}\, \widehat{D^\alpha u}(k)\} \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$, pois

$$\left|\langle k\rangle^{s-|\alpha|}\, \widehat{D^\alpha u}(k)\right|^2 = \left|\langle k\rangle^{s-|\alpha|}\, k^\alpha\ \widehat{u}(k)\right|^2 \leq \left|\langle k\rangle^{s-|\alpha|}\, \langle k\rangle^{|\alpha|}\ \widehat{u}(k)\right|^2 = |\langle k\rangle^s\ \widehat{u}(k)|^2.$$

Assim, as derivadas da medida de Dirac pertencerão aos espaços de Sobolev com grande índice de regularidade negativo.

**Lema 3.5.8.** $\ell^2(\mathbb{Z}^n) \subset \mathscr{S}'(\mathbb{Z}^n)$.

*Demonstração.* Dado $u \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$. Assim, $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |u(k)|^2 < \infty$. Assim o termo geral $|u(k)|^2 \to 0$. Isso implica que $|u(k)| \to 0$. Logo, $\{|u(k)|\}$ é limitada. Ou seja, existe $M > 0$ tal que $|u(k)| \leq M$, para todo $k \in \mathbb{Z}^n$. Escolher $N > 0$, $C > 0$ grande suficientemente tal que $M \leq C\langle k\rangle^N$, para todo $k \in \mathbb{Z}^n$. Portanto,

$$|u(k)| \leq M \leq C\langle k\rangle^N,$$

para todo $k \in \mathbb{Z}^n$. Disso decorre que $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{Z}^n)$. □

**Lema 3.5.9.** $H^s(\mathbb{T}^n)$ é um espaço de Hilbert quando equipado com o produto interno

$$\langle u, v\rangle_{H^s(\mathbb{T}^n)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k\rangle^{2s}\widehat{u}(k)\overline{\widehat{v}(k)}.$$

*Demonstração.* A norma associada com o produto interno acima é dada por

$$||u||_{H^s(\mathbb{T}^n)} = ||\, \langle k\rangle^s\, \widehat{u}(k)||_{\ell^2(\mathbb{Z}^n)}.$$

Seja $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $H^s(\mathbb{T}^n)$. Assim, a sequência $\{\langle k\rangle^s \widehat{u_j}(k)\}$ é uma sequência de Cauchy em $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$. Como $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$ é completo, existe $u \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$ tal que $\langle k\rangle^s \widehat{u_j}(k) \to u$ em $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$. Pelo lema anterior, $\ell^2(\mathbb{Z}^n) \subset \mathscr{S}'(\mathbb{Z}^n)$ então $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{Z}^n)$. Assim, $\langle k\rangle^{-s} u \in \mathscr{S}'(\mathbb{Z}^n)$. Como $\mathscr{F} : \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n) \to \mathscr{S}'(\mathbb{Z}^n)$ é uma bijeção então existe $v \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$ tal que $\widehat{v}(k) = \langle k\rangle^{-s} u(k)$. Note que $v \in H^s(\mathbb{T}^n)$ pois

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\langle k\rangle^s \widehat{v}(k)|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |u(k)|^2 < \infty.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} ||u_j - v||^2_{H^s(\mathbb{T}^n)} &= ||\langle k\rangle^s \widehat{u_j}(k) - \langle k\rangle^s \widehat{v}(k)||^2_{\ell^2(\mathbb{Z}^n)} \\ &= ||\langle k\rangle^s \widehat{u_j}(k) - u(k)||^2_{\ell^2(\mathbb{Z}^n)} \to 0, \end{aligned}$$

quando $j \to \infty$. Portanto, $H^s(\mathbb{T}^n)$ é um espaço de Hilbert quando equipado com o produto interno

$$\langle u, v\rangle_{H^s(\mathbb{T}^n)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k\rangle^{2s} \widehat{u}(k)\overline{\widehat{v}(k)}.$$

□

Acontece que os espaços de Sobolev capturam todas as distribuições periódicas, no sentido de que a união $\bigcup_{s\in\mathbb{R}} H^s(\mathbb{T}^n)$ é toda $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$.

**Teorema 3.5.10.** Qualquer distribuição periódica pertence a $H^s(\mathbb{T}^n)$ para algum $s \in \mathbb{R}$.

*Demonstração.* Se $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$, a sequência $\{\widehat{T}(k)\}$ tem crescimento polinomial, então existem $C > 0$ e $N \in \mathbb{N}^*$,

$$|\widehat{T}(k)| \leq C\langle k\rangle^N, \quad k \in \mathbb{Z}^n.$$

Segue que a sequência $\{\langle k\rangle^{-N-n/2-\varepsilon}\, \widehat{T}(k)\}$ é de $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$ para qualquer $\varepsilon > 0$, pois

$$\left|\langle k\rangle^{-N-n/2-\varepsilon}\, \widehat{T}(k)\right|^2 \leq C^2 \langle k\rangle^{2N} \langle k\rangle^{-2N-n-2\varepsilon} = C^2 \langle k\rangle^{-n-2\varepsilon},$$

e $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k\rangle^{-n-2\varepsilon} < \infty$, uma vez que $n + 2\varepsilon > n$. Logo, $T \in H^{-N-n/2-\varepsilon}(\mathbb{T}^n)$ para qualquer $\varepsilon > 0$.

□

### 3.5.1 Imersão de Sobolev

Esta seção usa principalmente a referência (SALO, 2013).

O próximo resultado permite obter a diferenciabilidade clássica de $C^l$ da regularidade de $H^s$ se $s$ for suficientemente grande.

**Teorema 3.5.11.** **(Teorema da imersão de Sobolev)** Se $s > n/2 + l$ onde $l \in \mathbb{N}$, então $H^s(\mathbb{T}^n) \subset C^l(\mathbb{T}^n)$.

*Demonstração.* Seja $u \in H^s(\mathbb{T}^n)$, assim $\{\langle k\rangle^s \widehat{u}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^n} \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$. Podemos escrever

$$u(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \widehat{u}(k)e^{ik\cdot x}.$$

Seja $M_k = |\widehat{u}(k)e^{ik\cdot x}| = \langle k\rangle^{-s}\left(\langle k\rangle^s|\widehat{u}(k)|\right)$. Pela desigualdade de Holder para somas temos

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} M_k \leq \left\|\langle k\rangle^{-s}\right\|_{\ell^2(\mathbb{Z}^n)} \|\langle k\rangle^s\widehat{u}(k)\|_{\ell^2(\mathbb{Z}^n)} < \infty,$$

pelo Lema 3.3.10 desde que $s > n/2$. Como os termos da série de Fourier de $u$ são funções contínuas, esta série de Fourier converge uniformemente para uma função contínua em $\mathbb{T}^n$ pelo teste M de Weierstrass. Além disso, se $|\alpha| \leq l$ podemos repetir o argumento acima para

$$D^\alpha u(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} k^\alpha\widehat{u}(k)e^{ik\cdot x},$$

e a condição $s > n/2 + l$ garante que $D^\alpha u$ é uma função periódica contínua para $|\alpha| \leq l$.

□

Para ser preciso, a afirmação $H^s(\mathbb{T}^n) \subset C^l(\mathbb{T}^n)$ significa que qualquer distribuição $u$ que pertence a $H^s(\mathbb{T}^n)$ satisfaz $u = T_v$ para algum $v$ em $C^l(\mathbb{T}^n)$, e identificamos a distribuição $u$ com a função $v$ de classe $C^l$. A prova também implica a estimativa da norma

$$\|u\|_{C^l(\mathbb{T}^n)} \leq C\|u\|_{H^s(\mathbb{T}^n)}, \quad u \in H^s(\mathbb{T}^n),$$

o que significa que a imersão $H^s(\mathbb{T}^n) \subset C^l(\mathbb{T}^n)$ é contínua.

### 3.5.2 Regularidade elítica

Esta seção usa principalmente a referência (SALO, 2013).

O resultado final nesta seção será a regularidade elítica no caso periódico. Considere um operador diferencial com coeficientes constantes $P(D)$ de ordem $m$ atuando em funções $2\pi$-periódicas em $\mathbb{R}^n$,

$$P(D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D^\alpha,$$

onde $a_\alpha$ são constantes complexas. A *parte principal* de $P(D)$ é

$$P_m(D) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha D^\alpha.$$

O *símbolo* de $P(D)$ é o polinômio

$$P(\xi) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha\xi^\alpha, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

e o *símbolo principal* de $P(D)$ é o polinômio

$$P_m(\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \xi^\alpha, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Dizemos que $P(D)$ é *elítico* se

$$P_m(\xi) \neq 0, \text{ sempre que } \xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}.$$

A demonstração a seguir também indica como as séries de Fourier são usadas na solução de equações diferenciais parciais.

**Teorema 3.5.12. (Regularidade elítica em $H^s$)** Seja $P(D)$ um operador diferencial elítico com coeficientes constantes de ordem $m$, e suponha que $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$ é uma solução da equação

$$P(D)u = f,$$

para algum $f \in H^s(\mathbb{T}^n)$. Então $u \in H^{s+m}(\mathbb{T}^n)$.

*Demonstração.* Tomando os coeficientes de Fourier de ambos os lados de $P(D)u = f$ dá

$$P(k)\widehat{u}(k) = \widehat{f}(k), \quad k \in \mathbb{Z}^n. \tag{3.8}$$

Agora $P_m(\xi)$ é um polinômio homogêneo de grau $m$, então temos

$$|P_m(k)| = |k|^m |P_m(k/|k|)| \geq c|k|^m,$$

para algum $c > 0$, já que a condição de eliticidade implica que $P_m(\xi) \neq 0$ no conjunto compacto $\{\xi \in \mathbb{R}^n; |\xi| = 1\}$. Então para $|k| \geq 1$,

$$\begin{aligned} |P(k)| &= |P_m(k) + \sum_{|\alpha| \leq m-1} a_\alpha k^\alpha| \\ &\geq |P_m(k)| - \sum_{|\alpha| \leq m-1} |a_\alpha||k|^{|\alpha|} \\ &\geq c|k|^m - C|k|^{m-1}. \end{aligned}$$

Escolhemos $N > \dfrac{2C}{c}$. Para $|k| \geq N$ temos $C|k|^{m-1} < \frac{1}{2}c|k|^m$. Disso decorre que

$$|P(k)| \geq \frac{1}{2}c|k|^m, \quad |k| \geq N.$$

De (3.8) obtemos

$$|\widehat{u}(k)| = \left|\frac{\widehat{f}(k)}{P(k)}\right| \leq \frac{2}{c|k|^m}|\widehat{f}(k)|, \quad |k| \geq N.$$

Como $\langle k \rangle^s \widehat{f}(k) \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$ isso mostra que $\langle k \rangle^{s+m} \widehat{u}(k) \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$, que implica $u \in H^{s+m}(\mathbb{T}^n)$, como queríamos.

$\square$

Uma combinação do teorema anterior e do teorema da imersão de Sobolev, produz imediatamente um resultado de regularidade elítica correspondente para dados $C^\infty$.

**Teorema 3.5.13.** **(Regularidade elítica em $C^\infty$)** Se $f$ é $C^\infty$ no teorema anterior, então $u$ também é $C^\infty$.

*Demonstração.* Como $f$ é $C^\infty$ então $\{\widehat{f}(k)\}$ decai rapidamente. Assim, $\{\langle k\rangle^s \widehat{f}(k)\} \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$, para todo $s \in \mathbb{R}$. Disso decorre que $f \in H^s(\mathbb{T}^n)$, para todo $s \in \mathbb{R}$. Pelo teorema acima, $u \in H^{s+m}(\mathbb{T}^n)$, para todo $s \in \mathbb{R}$.

Dado $k \in \mathbb{N}$. Existe $s_0 \in \mathbb{R}$ tal que $s_0 > n/2 + k$, pelo teorema da imersão de Sobolev, segue que $H^{s_0}(\mathbb{T}^n) \subset C^k(\mathbb{T}^n)$. Logo, $u \in C^k(\mathbb{T}^n)$. Como $k$ é qualquer, então $u$ é $C^\infty$. $\square$

**Definição 3.5.14.** Dizemos que um operador $P(D)$ é *globalmente hipoelítico* no toro (em resumo, $P(D)$ é (GH)) se as condições $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$ e $P(D)u \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ implicam $u \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$.

Pelo Teorema 3.5.13 segue que a eliticidade implica a hipoeliticidade global.

Recordamos o resultado clássico de Greenfield e Wallach (GREENFIELD; WALLACH, 1972) em $\mathbb{T}^2$.

**Teorema 3.5.15.** (**Teorema de Greenfield e Wallach**) Um operador com coeficientes constantes $P$ é (GH) se, e somente se, existem números reais positivos $C, K$ tais que

$$|P(m,n)| \geq C\left(m^2+n^2\right)^{-K},$$

para todos $|m|, |n|$ suficientemente grandes.

CAPÍTULO

4

# EXEMPLOS DE RESOLUBILIDADE GLOBAL E HIPOELITICIDADE GLOBAL

Considere uma equação do tipo

$$P(D)u = f, \tag{4.1}$$

sendo $P(D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D^\alpha$ um operador diferencial atuando em funções $2\pi$-periódicas em $\mathbb{R}^n$, onde $a_\alpha \in \mathbb{C}$.

Um problema de interesse é o seguinte: dada $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ (satisfazendo condições naturais), encontrar uma solução $u \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ satisfazendo a equação (4.1). Este é o problema da resolubilidade global.

Por outro lado, se para toda distribuição periódica $u$ tal que $P(D)u = f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, temos $u \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, dizemos que o operador $P(D)$ é globalmente hipoelítico (GH).

Neste capítulo, apresentamos alguns exemplos de $P(D)$, onde podemos analisar a resolubilidade global e a hipoeliticidade global do operador $P(D)$.

## 4.1 Exemplos de resolubilidade global

**Exemplo 4.1.1.** Seja $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{C}$ uma função de classe $C^\infty$. Considere a seguinte equação diferencial parcial:

$$\partial_t u(t,x) - \beta \partial_x u(t,x) = f(t,x), \tag{4.2}$$

onde $\beta = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

Queremos encontrar as soluções da EDP (4.2).

Seja $u : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{C}$ uma solução qualquer, de classe $C^\infty$, da EDP (4.2), caso existam tais soluções. Usando as notações $D_t = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}$ e $D_x = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}$, podemos reescrever (4.2) da seguinte forma:

$$iD_t u - i\beta D_x u = f.$$

Calculando os coeficientes de Fourier de ambos os lados da equação acima e usando a linearidade da transformada de Fourier, obtemos

$$i\widehat{D_t u}(k) - i\beta\widehat{D_x u}(k) = \widehat{f}(k).$$

Usando as propriedades $\widehat{D_t u}(k) = k_1\widehat{u}(k)$ e $\widehat{D_x u}(k) = k_2\widehat{u}(k)$, com $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$, obtemos

$$i(k_1 - \beta k_2)\widehat{u}(k) = \widehat{f}(k). \tag{4.3}$$

Vamos dividir o estudo de (4.2) em três casos, segundo o valor do coeficiente $\beta$.

*Caso 1:* $\beta = a + bi$, com $b \neq 0$. Neste caso, a equação (4.2) torna-se

$$\partial_t u - (a+bi)\partial_x u = f. \tag{4.4}$$

Podemos reescrever (4.3) da seguinte forma:

$$i(k_1 - (a+bi)k_2)\widehat{u}(k) = \widehat{f}(k). \tag{4.5}$$

Note que $i(k_1 - (a+bi)k_2) = 0$ se, e somente se, $k_1 = k_2 = 0$. Substituindo $k = 0$ em (4.5) obtemos

$$0.\widehat{u}(0) = \widehat{f}(0), \tag{4.6}$$

logo

$$\widehat{f}(0) = 0.$$

Para que (4.4) admita solução, devemos ter

$$\widehat{f}(0) = 0. \tag{4.7}$$

A condição (4.7) é chamada *condição de compatibilidade.*

Segundo os cálculos feitos até agora, o valor de $\widehat{u}(0)$ pode ser qualquer número complexo.

Para cada índice $k \neq 0$, concluímos que existe um único valor possível para $\widehat{u}(k)$, a saber,

$$\widehat{u}(k) = \frac{1}{i(k_1 - (a+bi)k_2)}\widehat{f}(k). \tag{4.8}$$

Vamos agora usar as informações obtidas acima para definir uma função e mostrar que ela é solução da EDP (4.4). Dada $f \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{T}^2)$, com $\widehat{f}(0) = 0$, definamos a função $u : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{C}$, por meio de

$$u(t,x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} c_k e^{ik_1t+ik_2x}, \tag{4.9}$$

com

$$c_k = \begin{cases} 0, & \text{se } k = 0, \\ \dfrac{1}{i(k_1 - (a+bi)k_2)}\widehat{f}(k), & \text{se } k \neq 0, \end{cases}$$

onde $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$. Primeiro, mostremos que $u \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{T}^2)$. Como $f \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{T}^2)$ então $\{\widehat{f}(k)\} \in \mathscr{S}(\mathbb{Z}^2)$. Por outro lado, para todo $k = (k_1, k_2) \neq (0,0)$ tem-se $|i(k_1 - (a+bi)k_2)| \geq \delta_0$, com $\delta_0 > 0$. Com efeito, se $k_2 = 0$, temos $k_1 \neq 0$, logo, $|k_1| \geq 1$, e

$$|i(k_1 - (a+bi)k_2)| = |k_1| \geq 1.$$

No caso $k_2 \neq 0$, temos $|k_2| \geq 1$ e

$$|i(k_1 - (a+bi)k_2)| = \sqrt{(k_1 - ak_2)^2 + b^2k_2^2} \;\geq\; |b||k_2| \geq |b|.$$

Logo,

$$|i(k_1 - (a+bi)k_2| \geq \delta_0, \tag{4.10}$$

onde $\delta_0 = \min\{1, |b|\} > 0$. De (4.10) segue que

$$|c_k| = \left|\frac{1}{i(k_1 - (a+bi)k_2)}\widehat{f}(k)\right| \leq \frac{1}{\delta_0}\,|\widehat{f}(k)|,$$

para $k \neq 0$. Logo, $\{c_k\} \in \mathscr{S}(\mathbb{Z}^2)$. Isto segue que $u \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$.

Vejamos que $u$ definida em (4.9) é solução da EDP (4.4). Para $k \neq 0$,

$$|c_k e^{ik_1t + ik_2x}| = \left|\frac{1}{i(k_1 - (a+bi)k_2)}\widehat{f}(k)e^{ik_1t+ik_2x}\right| \leq \frac{1}{\delta_0}\left|\widehat{f}(k)\right|.$$

Como $\widehat{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{Z}^2)$, então $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^2}\left|\widehat{f}(k)\right| < \infty$, pelo Lema 3.3.11. Do teste M de Weierstrass segue que $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^2} c_k e^{ik_1t+ik_2x}$ converge uniformemente. Além disso,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(c_k e^{ik_1t+ik_2x}\right) = \sum_{k\neq 0}\frac{ik_1}{i(k_1 - (a+bi)k_2)}\widehat{f}(k)e^{ik_1t+ik_2x}$$

é convergente uniformemente pois

$$\left|\frac{ik_1}{i(k_1 - (a+bi)k_2)}\widehat{f}(k)e^{ik_1t+ik_2x}\right| = \left|\frac{k_1}{(k_1 - (a+bi)k_2)}\widehat{f}(k)\right| \leq \frac{1}{\delta_0}|k_1\widehat{f}(k)|,$$

onde $k_1\widehat{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{Z}^2)$, logo, $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^2}\left|k_1\widehat{f}(k)\right| < \infty$, novamente o teste M de Weierstrass implica que $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(c_k e^{ik_1t+ik_2x}\right)$ converge uniformemente. Analogamente, mostra-se que $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(c_k e^{ik_1t+ik_2x}\right)$

é convergente uniformemente. Usando o Teorema da Derivação Termo a Termo para Séries, podemos derivar termo a termo a função $u$ e obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} \frac{ik_1}{i(k_1-(a+bi)k_2)}\widehat{f}(k)e^{ik_1t+ik_2x}$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} \frac{ik_2}{i(k_1-(a+bi)k_2)}\widehat{f}(k)e^{ik_1t+ik_2x}.$$

Logo,

$$\frac{\partial u}{\partial t}-(a+bi)\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} \widehat{f}(k)e^{ik_1t+ik_2x} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^2}\widehat{f}(k)e^{ik_1t+ik_2x},$$

pois $\widehat{f}(0)=0$. Portanto,

$$\frac{\partial u}{\partial t}-(a+bi)\frac{\partial u}{\partial x} = f.$$

Acabamos de mostrar que $u$ definida em (4.9) é solução de classe $C^\infty$ da EDP (4.4).

Deste modo, no caso 1, o operador em estudo é globalmente resolúvel.

*Caso 2:* $\beta = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ irredutível, com $q>0$. Neste caso, a equação (4.2) torna-se:

$$\partial_t u - \frac{p}{q}\,\partial_x u = f. \tag{4.11}$$

Podemos reescrever (4.3) da seguinte forma:

$$i\left(k_1-\frac{p}{q}k_2\right)\widehat{u}(k) = \widehat{f}(k). \tag{4.12}$$

Note que $i\left(k_1-\dfrac{p}{q}k_2\right)=0$ se, e somente se, $qk_1-pk_2=0$. Podemos decompor $\mathbb{Z}^2$ como $\mathbb{Z}^2 = A\cup B$, onde

$$A=\{k\in\mathbb{Z}^2 : qk_1-pk_2=0\},\quad B=\{k\in\mathbb{Z}^2 : qk_1-pk_2\neq 0\},$$

com $A\cap B=\varnothing$. Para $k\in A$, a equação (4.12) implica em

$$0.\widehat{u}(k)=\widehat{f}(k).$$

Logo, a condição de compatibilidade de (4.11) é

$$\widehat{f}(k)=0,$$

para todo $k\in A$.

Segundo os cálculos feitos até agora, o valor de $\widehat{u}(k)$, onde $k\in A$, pode ser qualquer número complexo.

Para cada índice $k$ em $B$, concluímos que existe um único valor possível para $\widehat{u}(k)$, a saber,

$$\widehat{u}(k) = \frac{1}{i\left(k_1 - \frac{p}{q}k_2\right)}\widehat{f}(k).$$

Vamos agora usar as informações obtidas acima para definir uma função e mostrar que ela é solução da EDP (4.11). Dada $f \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{T}^2)$, com $\widehat{f}(k) = 0$, para todo $k \in A$, definamos a função $u : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{C}$, por meio de

$$u(t,x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} c_k e^{ik_1t+ik_2x}, \tag{4.13}$$

com

$$c_k = \begin{cases} 0, & \text{se } k \in A, \\ \dfrac{1}{i\left(k_1 - \frac{p}{q}k_2\right)}\widehat{f}(k), & \text{se } k \in B. \end{cases}$$

Primeiro, mostremos que $u \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{T}^2)$. Para $k = (k_1,k_2) \in B$ tem-se $\left|i\left(k_1 - \frac{p}{q}k_2\right)\right| \geq \frac{1}{q}$. Com efeito, se $k \in B$, então $|qk_1 - pk_2| \geq 1$, logo,

$$\left|i\left(k_1 - \frac{p}{q}k_2\right)\right| = \frac{1}{q}|qk_1 - pk_2| \geq \frac{1}{q}. \tag{4.14}$$

De (4.14) segue que

$$|c_k| = \left|\frac{1}{i\left(k_1 - \frac{p}{q}k_2\right)}\widehat{f}(k)\right| \leq q\,|\widehat{f}(k)|,$$

para $k \in B$. Como $f \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{T}^2)$ então $\{\widehat{f}(k)\} \in \mathscr{S}(\mathbb{Z}^2)$. Assim, $\{c_k\}_{k\in B} \in \mathscr{S}(B)$. Portanto, $\{c_k\} \in \mathscr{S}(\mathbb{Z}^2)$. Isto segue que $u \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$.

Vejamos que $u$ definida em (4.13) é uma solução da EDP (4.11). Para $k \in B$,

$$|c_k e^{ik_1t+ik_2x}| = \left|\frac{1}{i\left(k_1 - \frac{p}{q}k_2\right)}\widehat{f}(k)e^{ik_1t+ik_2x}\right| \leq q\left|\widehat{f}(k)\right|.$$

Como $\widehat{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{Z}^2)$, então $\sum_{k\in\mathbb{Z}^2}\left|\widehat{f}(k)\right| < \infty$, pelo Lema 3.3.11. Do teste M de Weierstrass segue que $\sum_{k\in B} c_k e^{ik_1t+ik_2x}$ converge uniformemente. Além disso,

$$\sum_{k\in B}\frac{\partial}{\partial t}\left(c_k e^{ik_1t+ik_2x}\right) = \sum_{k\in B}\frac{ik_1}{i\left(k_1 - \frac{p}{q}k_2\right)}\widehat{f}(k)e^{ik_1t+ik_2x}$$

é convergente uniformemente pois

$$\left| \frac{ik_1}{i\left(k_1 - \dfrac{p}{q}k_2\right)} \widehat{f}(k) e^{ik_1t+ik_2x} \right| = \left| \frac{k_1}{\left(k_1 - \dfrac{p}{q}k_2\right)} \widehat{f}(k) \right| \leq q|k_1\widehat{f}(k)|,$$

onde $k_1\widehat{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{Z}^2)$, logo, $\sum_{k\in\mathbb{Z}^2} \left|k_1\widehat{f}(k)\right| < \infty$, novamente o teste M de Weierstrass implica que $\sum_{k\in B} \frac{\partial}{\partial t}\left(c_k e^{ik_1t+ik_2x}\right)$ converge uniformemente. Analogamente, mostra-se que $\sum_{k\in B} \frac{\partial}{\partial x}\left(c_k e^{ik_1t+ik_2x}\right)$ é convergente uniformemente. Usando o Teorema da Derivação Termo a Termo para Séries, podemos derivar termo a termo a função $u$ e obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k\in B} \frac{ik_1}{i\left(k_1 - \dfrac{p}{q}k_2\right)} \widehat{f}(k) e^{ik_1t+ik_2x}$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{k\in B} \frac{ik_2}{i\left(k_1 - \dfrac{p}{q}k_2\right)} \widehat{f}(k) e^{ik_1t+ik_2x}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{p}{q}\frac{\partial u}{\partial x} &= \sum_{k\in B} \widehat{f}(k) e^{ik_1t+ik_2x} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} \widehat{f}(k) e^{ik_1t+ik_2x}, \end{aligned}$$

pois $\widehat{f}(k) = 0$, para todo $k \in A$. Portanto,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{p}{q}\frac{\partial u}{\partial x} = f.$$

Acabamos de mostrar que $u$ definida em (4.13) é solução de classe $C^\infty$ da EDP (4.11).

Deste modo, no caso 2, o operador em estudo é globalmente resolúvel.

*Caso 3.* $\beta \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Neste caso, a equação (4.2) torna-se:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \beta\frac{\partial u}{\partial x} = f. \tag{4.15}$$

Podemos reescrever (4.3) da seguinte forma:

$$i(k_1 - \beta k_2)\widehat{u}(k) = \widehat{f}(k). \tag{4.16}$$

Note que $i(k_1 - \beta k_2) = 0$ se, e somente se, $k_1 = k_2 = 0$. Sustituindo $k_1 = k_2 = 0$ em (4.16), obtemos

$$0.\widehat{u}(0) = \widehat{f}(0).$$

Logo, a condição de compatibilidade de (4.15) é

$$\widehat{f}(0) = 0.$$

Segundo os cálculos feitos até agora, o valor de $\widehat{u}(0)$ pode ser qualquer número complexo.

Para cada índice $k \neq 0$, concluímos que existe um único valor possível para $\widehat{u}(k)$, a saber,

$$\widehat{u}(k) = \frac{1}{i(k_1 - \beta k_2)}\widehat{f}(k).$$

Vamos investigar os casos em que $\beta$ é um número de Liouville e quando $\beta$ não é um número de Liouville.

Recordamos, pelo Lema 2.7.7 e Lema 2.7.8, que $\beta \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ não é um número de Liouville se, e somente se, existem $N \in \mathbb{N}^*$ e $c > 0$ tais que

$$|q\beta - p| \geq \frac{c}{(1+|p|^2+|q|^2)^{\frac{N}{2}}},$$

para todo $(p,q) \in \mathbb{Z}^2\backslash\{(0,0)\}$.

- Se $\beta$ é um número de Liouville, então existe uma sequência de racionais $\left\{\dfrac{p_n}{q_n}\right\}$ satisfazendo

$$|p_n - \beta q_n| < \frac{1}{(1+p_n^2+q_n^2)^{n/2}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Vamos apresentar um exemplo de uma função $f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$, com $\widehat{f}(0) = 0$, tal que a equação (4.15) não possui solução $u \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$.

Defina

$$f(t,x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} d_k e^{ik_1t+ik_2x},$$

com

$$d_k = \begin{cases} |p_n - \beta q_n|, & \text{se } k = (p_n,q_n), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que $f \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{T}^2)$. De fato, para cada $N \in \mathbb{N}$ temos

$$\begin{aligned} \sup_{k\in\mathbb{Z}^2}(1+k_1^2+k_2^2)^{N/2}|d_k| &= \sup_{(p_n,q_n)} \left(1+p_n^2+q_n^2\right)^{N/2}|p_n - \beta q_n| \\ &< \sup_{(p_n,q_n)} \left(1+p_n^2+q_n^2\right)^{N/2}\frac{1}{(1+p_n^2+q_n^2)^{n/2}} < \infty, \end{aligned}$$

pois $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+p_n^2+q_n^2\right)^{N/2}\dfrac{1}{(1+p_n^2+q_n^2)^{n/2}} = 0.$

Suponha, por absurdo, que a equação (4.15) possui uma solução $u \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$. Podemos escrever

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} \widehat{u}(k) e^{ik_1t+ik_2x}.$$

Para $k = (p_n, q_n)$ temos

$$|\widehat{u}(p_n,q_n)| = \frac{1}{|i(p_n - \beta q_n)|} |\widehat{f}(p_n,q_n)| = 1,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $|\widehat{u}(k)| = 1$, para $k = (p_n, q_n)$, então $|\widehat{u}(k)| \not\to 0$. Isso contradiz o Lema de Riemann-Lebesgue. Portanto, se $\beta$ é um número de Liouville, o operador em estudo não é globalmente resolúvel.

- Se $\beta$ não é um número de Liouville, existem $c_0 > 0$ e $N_0 > 0$ tais que

$$|i(k_1 - \beta k_2)| \geq \frac{c_0}{(1+|k_1|^2+|k_2|^2)^{\frac{N_0}{2}}}, \tag{4.17}$$

para $(k_1,k_2) \neq 0$.

Vamos agora usar as informações obtidas acima para definir uma função e mostrar que ela é solução da EDP (4.15). Dada $f \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{T}^2)$, com $\widehat{f}(0) = 0$, definamos a função $u : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{C}$, por meio de

$$u(t,x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} a_k e^{ik_1t+ik_2x}, \tag{4.18}$$

onde

$$a_k = \begin{cases} 0, & \text{se } k = 0, \\ \dfrac{1}{i(k_1-\beta k_2)} \widehat{f}(k), & \text{se } k \neq 0. \end{cases}$$

Primeiro, mostremos que $u \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{T}^2)$. De (4.17) segue que

$$|a_k| = \left| \frac{1}{i(k_1-\beta k_2)} \widehat{f}(k) \right| \leq \frac{1}{c_0} \left(1+|k_1|^2+|k_2|^2\right)^{\frac{N_0}{2}} |\widehat{f}(k)|,$$

para $(k_1,k_2) \neq 0$. Logo, $\{a_k\} \in \mathscr{S}(\mathbb{Z}^2)$. De fato, para cada $N \in \mathbb{N}$, temos

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} (1+|k_1|^2+|k_2|^2)^{N/2+N_0/2} |\widehat{f}(k)| < \infty,$$

uma vez que $\widehat{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{Z}^2)$. Além disso,

$$\begin{aligned}(1+|k_1|^2+|k_2|^2)^{N/2}|a_k| &\leq \frac{1}{c_0}(1+|k_1|^2+|k_2|^2)^{N/2} \left(1+|k_1|^2+|k_2|^2\right)^{\frac{N_0}{2}} |\widehat{f}(k)| \\ &\leq \frac{1}{c_0}(1+|k_1|^2+|k_2|^2)^{N/2+N_0/2}|\widehat{f}(k)|,\end{aligned}$$

para todo $(k_1,k_2) \neq 0$. Logo,

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} (1+|k_1|^2+|k_2|^2)^{N/2}|a_k| < \infty,$$

para todo $N \in \mathbb{N}$, isto é, $\{a_k\} \in \mathscr{S}(\mathbb{Z}^2)$. Logo, $u \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$.

Vejamos que $u$ definida em (4.18) é solução da EDP (4.15). Para $k \neq 0$,

$$|a_k e^{ik_1t+ik_2x}| = \left| \frac{1}{i(k_1-\beta k_2)} \widehat{f}(k) e^{ik_1t+ik_2x} \right| \leq \frac{1}{c_0} \left(1+|k_1|^2+|k_2|^2\right)^{\frac{N_0}{2}} \left| \widehat{f}(k) \right|,$$

onde $g := \frac{1}{c_0} \left(1+|k_1|^2+|k_2|^2\right)^{\frac{N_0}{2}} \widehat{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{Z}^2)$, logo, $\sum_{k\in\mathbb{Z}^2} |g(k)| < \infty$, pelo Lema 3.3.11.

Portanto, o teste M de Weierstrass afirma que $\sum_{k\in\mathbb{Z}^2} a_k e^{ik_1t+ik_2x}$ converge uniformemente.

Além disso,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( a_k e^{ik_1t+ik_2x} \right) = \sum_{k\neq 0} \frac{ik_1}{i(k_1-\beta k_2)} \widehat{f}(k) e^{ik_1t+ik_2x}$$

é convergente uniformemente pois

$$\left| \frac{ik_1}{i(k_1-\beta k_2)} \widehat{f}(k) e^{ik_1t+ik_2x} \right| = \left| \frac{k_1}{(k_1-\beta k_2)} \widehat{f}(k) \right| \leq \frac{1}{c_0} \left(1+|k_1|^2+|k_2|^2\right)^{\frac{N_0}{2}} \left| k_1 \widehat{f}(k) \right|,$$

onde $h := \frac{1}{c_0} \left(1+|k_1|^2+|k_2|^2\right)^{\frac{N_0}{2}} k_1 \widehat{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{Z}^2)$, logo, $\sum_{k\in\mathbb{Z}^2} |h(k)| < \infty$, pelo Lema 3.3.11.

Novamente o teste M de Weierstrass afirma que $\sum_{k\in\mathbb{Z}^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( a_k e^{ik_1t+ik_2x} \right)$ converge uniformemente. Analogamente, mostra-se que $\sum_{k\in\mathbb{Z}^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( a_k e^{ik_1t+ik_2x} \right)$ é convergente uniformemente. Usando o Teorema da Derivação Termo a Termo, podemos derivar termo a termo a função $u$ e obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k\neq 0} \frac{ik_1}{i(k_1-\beta k_2)} \widehat{f}(k) e^{ik_1t+ik_2x}$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{k\neq 0} \frac{ik_2}{i(k_1-\beta k_2)} \widehat{f}(k) e^{ik_1t+ik_2x}.$$

Logo,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{k\neq 0} \widehat{f}(k) e^{ik_1t+ik_2x} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} \widehat{f}(k) e^{ik_1t+ik_2x},$$

pois $\widehat{f}(k) = 0$, para $k = 0$. Portanto,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial u}{\partial x} = f.$$

Acabamos de mostrar que $u$ definida em (4.18) é solução de classe $C^\infty$ da EDP (4.15).

Deste modo, se $\beta$ é um irracional não-Liouville, o operador em estudo é globalmente resolúvel.

**Exemplo 4.1.2.** Seja $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{C}$ uma função de classe $C^\infty$. Considere a seguinte equação diferencial parcial:

$$\Delta u = f, \tag{4.19}$$

onde $\Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} = -\sum_{j=1}^{n} D_j^2$ é o operador de Laplace. Dada $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, com $\widehat{f}(0) = 0$, definamos

$$u(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k e^{ik\cdot x}, \tag{4.20}$$

com

$$c_k = \begin{cases} 0, & \text{se } k = 0, \\ -\frac{1}{|k|^2}\widehat{f}(k), & \text{se } k \neq 0. \end{cases}$$

A função $u$ definida em (4.20) é solução de classe $C^\infty$ da EDP (4.19). Deste modo, o operador de Laplace é globalmente resolúvel.

## 4.2 Exemplos de hipoeliticidade global

**Exemplo 4.2.1.** Se $L = iD_t - i\beta D_x$ é como no Exemplo 4.1.1, então $L$ é elítico no caso 1. Pois o seu símbolo principal é $L(\xi) = i\xi_1 - i(a+bi)\xi_2$ e $\xi_1 - (a+bi)\xi_2 = 0$ se, e somente se, $\xi_1 = \xi_2 = 0$. Portanto, $L$ é (GH) se $\beta = a+bi$, com $b \neq 0$.

No caso 2, $L = iD_t - ip/qD_x$ não é elítico pois $L(\xi) = i\,\xi_1 - i(p/q)\xi_2$ e para $\xi = (p/q, 1) \neq 0$ temos $L(\xi) = 0$. Vejamos que $L$ não é (GH) neste caso. Para isto, apresentamos uma distribuição $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^2)$ com $u \notin C^\infty(\mathbb{T}^2)$ e $Lu \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$. Decompor $\mathbb{Z}^2$ como $\mathbb{Z}^2 = A \cup B$, onde

$$A = \{k \in \mathbb{Z}^2 : qk_1 - pk_2 = 0\}, \quad B = \{k \in \mathbb{Z}^2 : qk_1 - pk_2 \neq 0\},$$

com $A \cap B = \varnothing$. Seja

$$u(t,x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} c_k e^{ik_1 t + ik_2 x},$$

com

$$c_k = \begin{cases} 1, & \text{se } k \in A, \\ 0, & \text{se } k \in B. \end{cases}$$

Note que $\sum_{k\in\mathbb{Z}^2} c_k e^{ik_1 t + ik_2 x} \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^2)$, uma vez que $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}^2}$ tem crescimento polinomial. No entanto, $\sum_{k\in\mathbb{Z}^2} c_k e^{ik_1 t + ik_2 x}$ não define uma função $C^\infty(\mathbb{T}^2)$ pois $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}^2}$ não decai rapidamente. Temos

$$\begin{aligned} \widehat{Lu}(k) &= i\left(k_1 - \frac{p}{q}k_2\right)\widehat{u}(k) \\ &= i\left(k_1 - \frac{p}{q}k_2\right)c_k. \end{aligned}$$

Se $k \in A$, então $\left(k_1 - \dfrac{p}{q}k_2\right) = 0$. Assim, $\widehat{Lu}(k) = 0$. Se $k \in B$, também temos $\widehat{Lu}(k) = 0$. Disso decorre que $\{\widehat{Lu}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^2}$ decai rapidamente. Portanto, $Lu \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$. Concluímos que $L$ não é (GH) no caso 2.

No caso 3, $L = iD_t - i\beta D_x$ não é elítico, onde $\beta \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, pois $L(\xi) = i\,\xi_1 - i\,\beta\,\xi_2$ e para $\xi = (\beta, 1) \neq 0$ temos $L(\xi) = 0$. Vamos investigar a hipoeliticidade global do operador $L$ nos casos em que $\beta$ é um número de Liouville e quando $\beta$ não é um número de Liouville.

- Se $\beta$ não é um número de Liouville, existem $c_0 > 0$ e $N_0 > 0$ tais que
$$|i(k_1 - \beta k_2)| \geq \frac{c_0}{(1+|k_1|^2+|k_2|^2)^{\frac{N_0}{2}}}, \tag{4.21}$$
para $(k_1,k_2) \neq 0$. Mostremos que $L$ é (GH). De fato, seja $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^2)$ com $Lu = f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$. Temos
$$\widehat{f}(k) = \widehat{Lu}(k) = i(k_1 - \beta k_2)\widehat{u}(k).$$
Note que $i(k_1 - \beta k_2) = 0$ se, e somente se, $k = 0$. Para $k \neq 0$,
$$\widehat{u}(k) = \frac{\widehat{f}(k)}{i\,(k_1 - \beta k_2)}.$$
Pela desigualdade (4.21) temos
$$|\widehat{u}(k)| \leq \frac{1}{c_0}\left(1+|k_1|^2+|k_2|^2\right)^{\frac{N_0}{2}}\ |\widehat{f}(k)|.$$
Como $f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$, então $\{\widehat{f}(k)\}$ decai rapidamente. Isso implica que $\{\widehat{u}(k)\}$ também decai rapidamente. Logo, $u \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$. Portanto, $L$ é (GH), sempre que $\beta$ é um irracional não-Liouville.

- Se $\beta$ é um número de Liouville, existe uma sequência de racionais $\left\{\dfrac{p_n}{q_n}\right\}$ satisfazendo
$$|p_n - \beta q_n| < \frac{1}{(1+p_n^2+q_n^2)^{n/2}}, \tag{4.22}$$
para todo $n \in \mathbb{N}$. Vejamos que $L$ não é (GH) neste caso. Para isto, apresentamos uma distribuição $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^2)$ com $u \notin C^\infty(\mathbb{T}^2)$ e $Lu \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$. Seja
$$u(t,x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} c_k e^{ik_1t+ik_2x},$$
com
$$c_k = \begin{cases} 1, & \text{se } k = (p_n, q_n), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que $\sum_{k\in\mathbb{Z}^2} c_k e^{ik_1t+ik_2x} \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^2)$, uma vez que $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}^2}$ tem crescimento polinomial. No entanto, $\sum_{k\in\mathbb{Z}^2} c_k e^{ik_1t+ik_2x}$ não define uma função $C^\infty(\mathbb{T}^2)$ pois $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}^2}$ não decai rapidamente. Temos

$$\begin{aligned}\widehat{Lu}(k) &= i\,(k_1-\beta k_2)\,\widehat{u}(k)\\ &= i\,(k_1-\beta k_2)\,c_k.\end{aligned}$$

Se $k\in W$, onde $W=\{(p_n,q_n):n\in\mathbb{N}\}$, então $\{\widehat{Lu}(k)\}_{k\in W}\in\mathscr{S}(W)$. De fato, para cada $N\in\mathbb{N}$, usando a desigualdade (4.22) temos

$$\begin{aligned}\sup_{k\in W}(1+k_1^2+k_2^2)^{N/2}|\widehat{Lu}(k)| &= \sup_{(p_n,q_n)}\left(1+p_n^2+q_n^2\right)^{N/2}|p_n-\beta q_n|\\ &< \sup_{(p_n,q_n)}\left(1+p_n^2+q_n^2\right)^{N/2}\frac{1}{(1+p_n^2+q_n^2)^{n/2}}<\infty,\end{aligned}$$

pois $\lim_{n\to+\infty}\left(1+p_n^2+q_n^2\right)^{N/2}\dfrac{1}{(1+p_n^2+q_n^2)^{n/2}}=0.$

Se $k\notin W$, então $\widehat{Lu}(k)=0$.

Logo, $\{\widehat{Lu}(k)\}\in\mathscr{S}(\mathbb{Z}^2)$. Concluímos que $Lu\in C^\infty(\mathbb{T}^2)$. Portanto, $L$ não é (GH), se $\beta$ é um número de Liouville.

Estes resultados sobre (GH) estão contidos nos resultados de Greenfield-Wallach, mas escolhemos incluir a demonstração direta.

**Exemplo 4.2.2.** Dado $\lambda\in\mathbb{C}$, o operador

$$P=\Delta-\lambda=-D_1^2-D_2^2-\lambda$$

é elítico pois o seu símbolo principal é $P_2(\xi)=-\xi_1^2-\xi_2^2$ e $P_2(\xi)=0$ se, e somente se, $\xi=0$. Logo, $P$ é (GH), para todo $\lambda\in\mathbb{C}$.

CAPÍTULO

# 5

# PERTURBAÇÕES DE OPERADORES DE PRIMEIRA ORDEM

Neste capítulo consideramos operadores (GH) de primeira ordem, com coeficientes variáveis, da forma $L_1 = D_t + \beta(t)D_x$, com $\beta \in C^\infty(\mathbb{T}^1, \mathbb{R})$ e estudamos a hipoeliticidade global de suas perturbações, $L_1 - \lambda(t,x)$, por funções suaves.

A seguir, consideramos principalmente operadores de primeira ordem, em duas variáveis, com coeficientes constantes. Esta classe já exibe vários resultados interessantes sobre a propriedade de (GH) para perturbações de ordem zero.

Um fato interessante é que a maioria das perturbações (no sentido da medida de Lebesgue) dos operadores com coeficientes constante de qualquer ordem é de fato (GH) - ver (BERGAMASCO; ZANI, 1994) para a prova no caso bidimensional; o argumento pode ser adaptado para produzir o resultado em geral.

Um outro fato que, num certo sentido, contrasta com o resultado acima é que a maioria das perturbações (no sentido da categoria de Baire) $P_1 - \lambda = D_t - \beta D_x - \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, não é (GH) - ver (BERGAMASCO, 1994).

Neste trabalho apresentamos as demonstrações destes resultados.

Com o objetivo de fornecer um esclarecimento adicional sobre a complexidade do problema de perturbações, apresentamos exemplos mostrando que se $\beta$ é irracional e se $L_1 = D_t - \beta D_x$ não é (GH), então suas perturbações por racional $\lambda$ (por exemplo, $D_t - \beta D_x - 1/2$) podem ou não ser (GH).

As referências principais para este capítulo são (BERGAMASCO, 1994) e (BERGAMASCO; ZANI, 1994).

## 5.1 Perturbações de operadores de primeira ordem

Vamos introduzir as noções de séries parciais de Fourier para uma função em $C^\infty(\mathbb{T}^2)$, e para uma distribuição em $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^2)$, para usá-las em breve. Seja $\mathbb{T}^2 = \mathbb{T}^1_t \times \mathbb{T}^1_x$. A série parcial de Fourier, na variável $x$, de uma função $u \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ é dada por

$$u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{u}_n(t)e^{inx},$$

onde

$$\widehat{u}_n(t) = \frac{1}{(2\pi)} \int_{\mathbb{T}^1} u(t,x)\, e^{-inx}dx, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

A série parcial de Fourier de uma distribuição $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^2)$ é dada por

$$u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{u}_n(t)e^{inx},$$

onde

$$\widehat{u}_n(t) = (2\pi)^{-1} \left\langle u(t,x), e^{-inx} \right\rangle, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Para demonstrações dos resultados de séries parciais de Fourier - ver (ZANI, 1988).

Apresentamos a seguir um caso em que a perturbação tem coeficientes variáveis.

**Proposição 5.1.1.** Seja $L = D_t - ib_0D_x - \lambda(t,x)$, onde $b_0$ é uma constante complexa com parte real não nula, e $\lambda \in C^\infty\left(\mathbb{T}^2\right)$. Então $L$ é (GH) em $\mathbb{T}^2$.

*Demonstração.* Denote $L_1 = D_t - ib_0D_x$ a parte principal do operador $L$. Assim,

$$L = L_1 - \lambda(t,x).$$

Dada $f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ com $\widehat{f}(0,0) = 0$, pelo Exemplo 4.1.1 existe $h \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ tal que $L_1h = f$.

Defina uma nova função

$$\widetilde{\lambda}(t,x) = \lambda(t,x) - \lambda_{00},$$

onde

$$\lambda_{00} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \lambda(t,x)dtdx.$$

Temos $\lambda_{00} = \widehat{\lambda}(0,0)$. Assim,

$$\widehat{\widetilde{\lambda}}(0,0) = \widehat{\lambda}(0,0) - \lambda_{00} = 0.$$

Logo, existe $g \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ tal que $L_1 g = \widetilde{\lambda}(t,x)$.

Primeiro mostramos a seguinte afirmação: Se $L_1 - \lambda_{00}$ é (GH), então $L_1 - \lambda(t,x)$ é (GH). Suponha que $L_1 - \lambda_{00}$ é (GH). Seja $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^2)$ tal que $(L_1 - \lambda(t,x))u = f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$. Vejamos que $u \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$. Defina

$$v = e^{-g}u.$$

Usando a regra de Leibniz temos

$$\begin{aligned}(L_1 - \lambda_{00})(v) &= (L_1 - \lambda_{00})(e^{-g}u)\\ &= uL_1(e^{-g}) + e^{-g}L_1(u) - \lambda_{00}e^{-g}u.\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}L_1(e^{-g}) = (D_t - ib_0D_x)(e^{-g}) &= -e^{-g}D_tg + e^{-g}ib_0D_xg\\ &= -e^{-g}(D_t - ib_0D_x)(g) = -e^{-g}L_1(g)\\ &= -e^{-g}\,\widetilde{\lambda}(t,x),\end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned}(L_1 - \lambda_{00})(v) &= -ue^{-g}\,\widetilde{\lambda}(t,x) + e^{-g}L_1(u) - \lambda_{00}e^{-g}u\\ &= e^{-g}(-u\widetilde{\lambda}(t,x) + L_1(u) - \lambda_{00}u)\\ &= e^{-g}(L_1(u) - \lambda(t,x)u)\\ &= e^{-g}(L_1 - \lambda(t,x))u.\end{aligned}$$

Como $(L_1 - \lambda(t,x))u = f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$, então $e^{-g}(L_1 - \lambda(t,x))u \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$. Disso decorre que $(L_1 - \lambda_{00})(v) \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$. Logo $v \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$, uma vez que $L_1 - \lambda_{00}$ é (GH). Como $u = e^g v$ então $u \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$. Portanto, $L_1 - \lambda(t,x)$ é (GH).

Para finalizar a demonstração, basta mostrar que $L_1 - \lambda_{00}$ é (GH). Como o único zero do símbolo principal de $L_1 - \lambda_{00}$ é zero, então $L_1 - \lambda_{00}$ é elítico. Pelo Teorema 3.5.13, segue que $L_1 - \lambda_{00}$ é (GH). □

Agora vamos estudar uma classe de operadores com coeficientes variáveis.

**Proposição 5.1.2.** Seja

$$L = D_t + \beta(t)D_x - \lambda(t,x),$$

com $\beta \in C^\infty\left(\mathbb{T}^1, \mathbb{R}\right)$ e $\lambda \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$.

Definamos

$$\begin{aligned}&\beta_0 = (2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi}\beta(t)dt,\\ &\lambda_{00} = (2\pi)^{-2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\lambda(t,x)dtdx,\\ &\widetilde{L} = D_t + \beta(t)D_x - \lambda_{00},\\ &\widetilde{\widetilde{L}} = D_t + \beta_0D_x - \lambda_{00}.\end{aligned}$$

Suponha que $\beta_0$ seja um irracional não-Liouville. Então as afirmações seguintes são equivalentes:

$$L \text{ é } (GH) \tag{5.1}$$

$$\widetilde{L} \text{ é } (GH) \tag{5.2}$$

$$\widetilde{\widetilde{L}} \text{ é } (GH) \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned}&\text{existe } C>0 \text{ tal que as condições } (m,n)\in\mathbb{Z}^2 \text{ e } |m|+|n|\geqslant C\\ &\text{implica } |m+\beta_0 n-\lambda_{00}|\geqslant(|m|+|n|)^{-C}.\end{aligned} \tag{5.4}$$

Para provar a Proposição 5.1.2, usaremos o seguinte resultado sobre a resolubilidade global em $C^\infty\left(\mathbb{T}^2\right)$.

**Lema 5.1.3.** Seja $\beta\in C^\infty\left(S^1;\mathbb{R}\right)$ com sua média igual a um $\beta_0$ irracional não-Liouville. Então, dada $f\in C^\infty\left(\mathbb{T}^2\right)$, uma condição necessária e suficiente para a equação

$$L_1 g=(D_t+\beta(t)D_x)g=f$$

ter uma solução $g\in C^\infty\left(\mathbb{T}^2\right)$ é que

$$f_{00}=(2\pi)^{-2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t,x)dtdx=0.$$

*Demonstração.* Para ver que $f_{00}=0$ é uma condição necessária, basta integrar $L_1 g=f$ e usar a periodicidade de $g$ :

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t,x)dtdx &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}(D_t+\beta(t)D_x)g\;dtdx\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}D_t g\;dtdx+\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\beta(t)D_x g\;dtdx\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\beta(t)D_x g\;dtdx,\\ &= \int_0^{2\pi}\beta(t)\int_0^{2\pi}D_x g\;dxdt,\\ &= 0.\end{aligned}$$

Para a suficiência usaremos o automorfismo de $C^\infty\left(\mathbb{T}^2\right)$, definido por $Su=v$, onde os coeficientes parciais de Fourier $\widehat{u}_n(t),\ \widehat{v}_n(t)$ estão relacionados por

$$\widehat{v}_n(t)=\widehat{u}_n(t)\exp\left[\text{in}\left(\int_0^t\beta(s)ds-\beta_0 t\right)\right].$$

Mostremos que

$$SL_1S^{-1}=D_t+\beta_0 D_x.$$

De fato, escrevemos $(t,x)\in\mathbb{T}^1\times\mathbb{T}^1$ e

$$v=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{v}_n(t)\;e^{inx}.$$

Temos

$$\begin{aligned}
S^{-1}v &= S^{-1}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{v}_n(t)\, e^{inx}\right) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{v}_n(t)\, e^{-\mathrm{in}\left(\int_0^t \beta(s)ds-\beta_0 t\right)}\, e^{inx}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
L_1S^{-1}v &= (D_t+\beta(t)D_x)\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{v}_n(t)\, e^{-\mathrm{in}\left(\int_0^t \beta(s)ds-\beta_0 t\right)}\, e^{inx}\right) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} D_t(\widehat{v}_n(t))\, e^{-\mathrm{in}\left(\int_0^t \beta(s)ds-\beta_0 t\right)}\, e^{inx} \\
&\qquad - \sum_{n\in\mathbb{Z}} in(\beta(t)-\beta_0)\widehat{v}_n(t)\, e^{-\mathrm{in}\left(\int_0^t \beta(s)ds-\beta_0 t\right)}\, e^{inx} \\
&\qquad\qquad + \sum_{n\in\mathbb{Z}} in\beta(t)\widehat{v}_n(t)\, e^{-\mathrm{in}\left(\int_0^t \beta(s)ds-\beta_0 t\right)}\, e^{inx} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left[D_t(\widehat{v}_n(t))\, e^{-\mathrm{in}\left(\int_0^t \beta(s)ds-\beta_0 t\right)}\, e^{inx} + in\beta_0\widehat{v}_n(t)\, e^{-\mathrm{in}\left(\int_0^t \beta(s)ds-\beta_0 t\right)}\, e^{inx}\right].
\end{aligned}$$

Disso decorre que

$$\begin{aligned}
SL_1S^{-1}v &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left[D_t(\widehat{v}_n(t))\, e^{inx} + in\beta_0\widehat{v}_n(t)\, e^{inx}\right] \\
&= (D_t+\beta_0 D_x)v.
\end{aligned}$$

Portanto, $SL_1S^{-1} = D_t+\beta_0 D_x$.

Se $f\in C^\infty\left(\mathbb{T}^2\right)$ e $f_{00}=0$ então a função $F=Sf$ satisfaz $F\in C^\infty\left(\mathbb{T}^2\right)$ e $F_{00}=0$. Assim, basta encontrar $G=Sg$ tal que $(D_t+\beta_0 D_x)G=F$.

Para $(m,n)\in\mathbb{Z}^2\backslash\{0\}$, os coeficientes de Fourier (completos) satisfazem $(m+\beta_0 n)\,G_{mn} = F_{mn}$. Note que $m+\beta_0 n\neq 0$, para todo $(m,n)\in\mathbb{Z}^2\backslash\{0\}$, pois $\beta_0$ é irracional. Logo, $G_{mn} = F_{mn}/\,(m+\beta_0 n)$.

Resta ver que $(G_{mn})$ realmente define uma função $C^\infty$; como $\beta_0$ não é Liouville, existe $K>0$ tal que $|m|+|n|\geqslant K$ implica $|m+\beta_0 n|\geqslant (|m|+|n|)^{-K}$. Como $F$ é $C^\infty$, a cada $j\in\mathbb{N}$ corresponde $C>0$ tal que $|m|+|n|\geqslant C$ implica $|F_{mn}|\leqslant (|m|+|n|)^{-K-j}$. Assim $|m|+|n|\geqslant \max\{K,C\}$ implica

$$|G_{mn}| = \frac{1}{|m+\beta_0 n|}\,|F_{mn}| \leq (|m|+|n|)^K(|m|+|n|)^{-K-j} = (|m|+|n|)^{-j}$$

e então $G$ é $C^\infty$.

$\square$

*Demonstração da Proposição 5.1.2.* Para ver que (5.1) e (5.2) são equivalentes, definimos $\widetilde{\lambda}(t,x) = \lambda(t,x)-\lambda_{00}$; então $\widetilde{\lambda}_{00}=0$ e, pelo Lema 5.1.3, existe $g\in C^\infty\left(\mathbb{T}^2\right)$ tal que $L_1 g = \widetilde{\lambda}$.

Usando o mesmo processo da demonstração da Proposição 5.1.1 para finalizar a equivalência entre (5.1) e (5.2).

Baseado da demonstração do Lema 5.1.3, podemos chegar à conclusão de que (5.2) e (5.3) são equivalentes. Primeiro, usando o automorfismo $S$ de $\mathscr{D}'\left(\mathbb{T}^2\right)$, definido por $Su = v$, onde os coeficientes parciais de Fourier $\widehat{u}_n(t)$, $\widehat{v}_n(t)$ estão relacionados por

$$\widehat{v}_n(t) = \widehat{u}_n(t)\exp\left[\mathrm{i}n\left(\int_0^t \beta(s)ds - \beta_0 t\right)\right],$$

mostra-se que $SL_1S^{-1} = D_t + \beta_0 D_x$. Além disso, $S\widetilde{L}S^{-1} = \widetilde{\widetilde{L}}$. De fato,

$$S\widetilde{L}S^{-1} = S(L_1 - \lambda_{00})S^{-1} = SL_1S^{-1} - \lambda_{00}SS^{-1} = D_t + \beta_0 D_x - \lambda_{00} = \widetilde{\widetilde{L}}.$$

Suponha que $\widetilde{L}$ é (GH). Mostremos que $\widetilde{\widetilde{L}}$ é (GH). Seja $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^2)$ tal que $\widetilde{\widetilde{L}}u = f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$. Temos

$$S\widetilde{L}S^{-1}u = \widetilde{\widetilde{L}}u = f,$$

ou seja,

$$\widetilde{L}\left(S^{-1}u\right) = S^{-1}f.$$

Como $f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$, então $\widetilde{L}\left(S^{-1}u\right) = S^{-1}f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$. Usando a hipoeliticidade global de $\widetilde{L}$ segue que $S^{-1}u \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$. Logo, $u \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$. Disso decorre que $\widetilde{\widetilde{L}}$ é (GH). Reciprocamente, suponha que $\widetilde{\widetilde{L}}$ é (GH). Vejamos que $\widetilde{L}$ é (GH). Seja $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^2)$ tal que $\widetilde{L}u = f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$. Temos

$$\widetilde{\widetilde{L}}(Su) = S\widetilde{L}S^{-1}(Su) = S\widetilde{L}u = Sf \in C^\infty(\mathbb{T}^2).$$

Usando a hipoeliticidade global de $\widetilde{\widetilde{L}}$, segue que $Su \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$. Logo, $u \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$. Disso decorre que $\widetilde{L}$ é (GH).

A equivalência entre (5.3) e (5.4) é um caso particular do teorema de Greenfield e Wallach; apresentamos a prova. Usa (5.4) para mostrar que $\widetilde{\widetilde{L}}$ é (GH). De fato, seja $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^2)$ tal que $\widetilde{\widetilde{L}}u = f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$. Os coeficientes de Fourier satisfazem

$$(k_1 + \beta_0 k_2 - \lambda_{00})\widehat{u}(k) = \widehat{f}(k),$$

com $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$. Se $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ e $|m| + |n| \geq C$, temos

$$|\widehat{u}(m,n)| = \frac{1}{|m + \beta_0 n - \lambda_{00}|}\,|\widehat{f}(m,n)| \leq (|m| + |n|)^C |\widehat{f}(m,n)|.$$

Como $\{\widehat{f}(k)\}$ decai rapidamente, então $\{\widehat{u}(k)\}$ decai rapidamente. Portanto, $u \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$. Concluímos que $\widetilde{\widetilde{L}}$ é (GH). Para ver que, (5.3) implica (5.4) procede-se por contradição. Suponha por absurdo que (5.4) seja falsa, existe uma sequência $\{(m_j, n_j)\} \subset \mathbb{Z}^2$ tal que

$$|m_j + \beta_0 n_j - \lambda_{00}| \leq \frac{1}{(|m_j| + |n_j|)^j}$$

e $(m_j,n_j) \to +\infty$. Seja
$$u(t,x) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{im_jt+in_jx}.$$
Assim,
$$\widehat{u}(m,n) = \begin{cases} 1, & \text{se } (m,n) = (m_j,n_j) \text{ para algum } j \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$
Como $\{\widehat{u}(m,n)\}$ tem crescimento polinomial, então $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^2)$. Mas $u \notin C^\infty(\mathbb{T}^2)$, uma vez que $\{\widehat{u}(m,n)\}$ não decai rapidamente. Por outro lado, os coeficientes de Fourier de $\widetilde{\widetilde{L}}u$ são
$$(m+\beta_0 n-\lambda_{00})\widehat{u}(m,n) = \begin{cases} m_j+\beta_0 n_j-\lambda_{00}, & \text{se } (m,n) = (m_j,n_j) \text{ para algum } j \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$
Como
$$|m_j+\beta_0 n_j-\lambda_{00}| \leq \frac{1}{(|m_j|+|n_j|)^j},$$
então a sequência de coeficientes de Fourier de $\widetilde{\widetilde{L}}u$ decai rapidamente. Logo, $\widetilde{\widetilde{L}}u \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$. Portanto, $\widetilde{\widetilde{L}}$ não é (GH).

□

Quando o operador é da forma $L = D_t + \beta(t)D_x - \lambda(t,x)$, com $\beta \in C^\infty\left(\mathbb{T}^1,\mathbb{R}\right)$ e $\lambda \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$, a Proposição 5.1.2 diz que podemos nos restringir ao estudo da propriedade da hipoeliticidade global para operadores com coeficientes constantes; simplificamos nossa notação e escrevemos
$$L = D_t + \beta D_x - \lambda,$$
onde $\beta \in \mathbb{R}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$.

Observe que $L$ é (GH) se $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$. De fato, escrevemos $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 i$, com $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e $\lambda_2 \neq 0$. Seja $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^2)$ com $Lu = f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$. Calculando os coeficientes de Fourier de ambos os lados da equação $f = Lu = D_t u + \beta D_x u - (\lambda_1 + \lambda_2 i)u$, obtemos
$$(k_1 + \beta k_2 - (\lambda_1 + \lambda_2 i))\,\widehat{u}(k) = \widehat{f}(k).$$
Note que $k_1 + \beta k_2 - (\lambda_1 + \lambda_2 i) \neq 0$, para todo $k = (k_1,k_2) \in \mathbb{Z}^2$. Além disso,
$$|k_1 + \beta k_2 - (\lambda_1 + \lambda_2 i)| \geq |\lambda_2 i| = |\lambda_2| > 0,$$
então
$$|\widehat{u}(k)| \leq \frac{1}{|\lambda_2|}\,|\widehat{f}(k)|,$$
para todo $k \in \mathbb{Z}^2$. Como $f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$, então $\{\widehat{f}(k)\}$ decai rapidamente. Logo, $\{\widehat{u}(k)\}$ também decai rapidamente, isto é, $u \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$. Portanto, $L$ é (GH) se $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$; assim podemos assumir $\lambda \in \mathbb{R}$.

Seja $\beta$ um número real e defina

$$L = D_t + \beta D_x - \lambda = L_1 - \lambda.$$

Também definimos

$$\mathscr{L} = \text{ conjunto de números de Liouville.}$$

**Proposição 5.1.4.** (i) Se $\lambda \in \mathbb{Z} + \beta\mathbb{Z}$ então temos que $L_1$ é (GH) se, e somente se, $L_1 - \lambda$ é (GH).

(ii) Se $\beta \in \mathscr{L}$ e $\lambda \in \mathbb{Z} + \beta\mathbb{Z}$ então $L_1 - \lambda$ não é (GH).

(iii) Se $\beta \notin \mathbb{Q} \cup \mathscr{L}$ e $\lambda \in \mathbb{Q} + \beta\mathbb{Q}$ então $L_1 - \lambda$ é (GH).

Usaremos o seguinte lema na demonstração da Proposição 5.1.4.

**Lema 5.1.5.** Se $a, b \in \mathbb{Z}$, com $a, b > 1$, então $a + b \leq ab$.

*Demonstração.* De fato,

$$a \geq 2 \geq 1 + \frac{1}{b-1} = \frac{b}{b-1},$$

i.e,

$$ab - a \geq b.$$

Logo, $a + b \leq ab$. □

*Demonstração da Proposição 5.1.4*

(i) Escrevemos $\lambda = m_0 + \beta n_0$. Suponha que $L_1$ é (GH). Mostremos que $L_1 - \lambda$ é (GH). Como $L_1$ é (GH), pelo Greenfield e Wallach existem $C, K > 0$ tais que

$$|m + \beta n| \geq \frac{C}{(|m| + |n|)^K},$$

para $|m|, |n|$ suficientemente grande. Temos

$$|m + \beta n - \lambda| = |(m - m_0) + \beta(n - n_0)| \geq \frac{C}{(|m - m_0| + |n - n_0|)^K},$$

para $|m|, |n|$ suficientemente grande. Pelo Lema 5.1.5 temos

$$\begin{aligned} |m - m_0| + |n - n_0| &\leq |m| + |m_0| + |n| + |n_0| \leq (|m| + |n|) + (|m| + |n|) \\ &\leq (|m| + |n|)(|m| + |n|) = (|m| + |n|)^2, \end{aligned}$$

para $|m|, |n|$ suficientemente grande. Logo,

$$|m + \beta n - \lambda| \geq \frac{C}{(|m - m_0| + |n - n_0|)^K} \geq \frac{C}{(|m| + |n|)^{2K}}$$

para $|m|, |n|$ suficientemente grande. Novamente, do Teorema de Greenfield e Wallach segue que $L_1 - \lambda$ é (GH).

Reciprocamente, suponha que $L_1 - \lambda$ é (GH). Repetindo o mesmo processo acima, mostra-se que $L_1$ é (GH).

(ii) Se $\beta \in \mathscr{L}$, $L_1$ não é (GH) devido ao Exemplo 4.2.1. Como $\lambda \in \mathbb{Z}+\beta\mathbb{Z}$, o item (i) acima implica que $L_1-\lambda$ não é (GH).

(iii) Escrevemos $\lambda = \dfrac{m}{n}+\beta\dfrac{p}{q}$. Se $\beta$ não é um número de Liouville, pelo Lema 2.7.6 existem $c_0>0$ e $N_0>0$ tais que

$$|k_1-\beta k_2| \geq \frac{c_0}{|k_2|^{N_0}}, \tag{5.5}$$

para todo $k_1,k_2 \in \mathbb{Z}$, com $k_2 \neq 0$. Mostremos que $L_1-\lambda$ é (GH). De fato, seja $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^2)$ com $(L_1-\lambda)u = f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$. Temos

$$\begin{aligned}\widehat{f}(k) &= \left(k_1+\beta k_2-\frac{m}{n}-\beta\frac{p}{q}\right)\widehat{u}(k)\\ &= \frac{1}{nq}(nqk_1-mq+\beta(nqk_2-pn))\,\widehat{u}(k).\end{aligned}$$

Como $\beta \notin \mathbb{Q}$ então $nqk_1-mq+\beta(nqk_2-pn) \neq 0$, para todo $(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^2$. Usando a desigualdade (5.5) temos

$$|nqk_1-mq+\beta(nqk_2-pn)| \geq \frac{c_0}{|nqk_2-pn|^{N_0}}.$$

Para $k_2$ grande suficientemente,

$$|nqk_2-pn| \leq |nq||k_2|+|pn| \leq |k_2|^2+|k_2| \leq |k_2|^3,$$

usando o Lema 5.1.5. Logo,

$$|nqk_1-mq+\beta(nqk_2-pn)| \geq \frac{c_0}{|k_2|^{3N_0}}.$$

Disso decorre que

$$|\widehat{u}(k)| \leq \frac{1}{c_0}|nq||k_2|^{3N_0}|\widehat{f}(k)|.$$

Como $\{\widehat{f}(k)\}$ decai rapidamente, então $\{\widehat{u}(k)\}$ também decai rapidamente. Logo, $u \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$. Portanto, $L_1-\lambda$ é (GH).

□

A proposição abaixo diz que existem muitas (no sentido da categoria de Baire) perturbações $L_1-\lambda$ que não são (GH).

**Proposição 5.1.6.** Seja $\beta$ irracional e defina

$$\mathscr{N} = \{\lambda \in \mathbb{R}; D_t+\beta D_x-\lambda \text{ não é } (GH)\}.$$

Então $\mathscr{N}$ é $\mathscr{G}_\delta$ denso em $\mathbb{R}$.

*Demonstração.* Para $j \in \mathbb{N}$ e $m,n \in \mathbb{Z}$, defina

$$\mathscr{N}_{jmn} = \{\lambda \in \mathbb{R}; |m+\beta n - \lambda| < (|m|+|n|)^{-j},\ \text{com } |m|+|n| \geq 2\},$$
$$\mathscr{N}_j = \bigcup_{\substack{(m,n)\in\mathbb{Z}^2,\\ |m|+|n|\geq 2}} \mathscr{N}_{jmn}.$$

Sejam

$$\mathscr{R} = \{\lambda = m+\beta n \in \mathbb{R}; m,n \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}+\beta\mathbb{Z}$$

e

$$\mathscr{N}_\infty = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} \mathscr{N}_j.$$

Temos, quando $\beta \notin \mathscr{L}$,

$$\mathscr{N} = \mathscr{N}_\infty \cap \mathscr{R}^C. \tag{5.6}$$

Também temos, quando $\beta \in \mathscr{L}$,

$$\mathscr{N} = \mathscr{N}_\infty. \tag{5.7}$$

Primeiro, justificaremos (5.6). Se $\lambda \in \mathscr{N}$, então $D_t + \beta D_x - \lambda$ não é (GH). Pelo Greenfield e Wallach, existe $\{(m_j,n_j)\} \subset \mathbb{Z}^2$, com $|m_j|+|n_j| \geq 2$, tal que

$$|m_j+\beta n_j - \lambda| < \frac{1}{(|m_j|+|n_j|)^j},$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Disso decorre que $\lambda \in \mathscr{N}_j$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Então, $\lambda \in \mathscr{N}_\infty$. Logo, $\mathscr{N} \subseteq \mathscr{N}_\infty$. Vejamos que $\mathscr{R} \subseteq \mathscr{N}^C$. Seja $\lambda \in \mathscr{R} = \mathbb{Z}+\beta\mathbb{Z}$. Se $\beta$ não é um número de Liouville, então $D_t + \beta D_x$ é (GH). Pelo item (i) da Proposição 5.1.4, segue que $D_t+\beta D_x - \lambda$ é (GH). Disso decorre que $\lambda \notin \mathscr{N}$. Logo, $\mathscr{R} \subseteq \mathscr{N}^C$, ou seja, $\mathscr{N} \subseteq \mathscr{R}^C$. Portanto, $\mathscr{N} \subseteq \mathscr{N}_\infty \cap \mathscr{R}^C$. Reciprocamente, seja $\lambda \in \mathscr{N}_\infty \cap \mathscr{R}^C$. Como $\lambda \in \mathscr{N}_\infty$, então $\lambda \in \mathscr{N}_j$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Para cada $j \in \mathbb{N}$, existe $(m_j,n_j) \in \mathbb{Z}^2$, $|m_j|+|n_j| \geq 2$, tal que $\lambda \in \mathscr{N}_{jm_jn_j}$. Disso decorre que

$$|m_j+\beta n_j - \lambda| < \frac{1}{(|m_j|+|n_j|)^j},$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Além disso, $|m_j+\beta n_j-\lambda| > 0$, uma vez que $\lambda \in \mathscr{R}^C$. Logo,

$$0 < |m_j+\beta n_j - \lambda| < \frac{1}{(|m_j|+|n_j|)^j},$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Vejamos que o conjunto

$$F = \left\{k > j : 0 < |m_j+\beta n_j-\lambda| < \frac{1}{(|m_j|+|n_j|)^k}\right\}$$

é finito. De fato, como $|m_j+\beta n_j-\lambda| > 0$, então $|m_j+\beta n_j-\lambda| \geq c$, para algum $c > 0$. Existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{(|m_j|+|n_j|)^{k_0}} \leq c$, pois $|m_j|+|n_j| \geq 2$. Logo,

$$\frac{1}{(|m_j|+|n_j|)^{k_0}} \leq c \leq |m_j+\beta n_j - \lambda|.$$

Disso decorre que o conjunto $F$ é finito. Então, existe infinito $(m_j, n_j) \in \mathbb{Z}^2$ tal que

$$|m_j + \beta n_j - \lambda| < \frac{1}{(|m_j| + |n_j|)^j}.$$

Pelo Greenfield e Wallach, $\lambda \in \mathscr{N}$. Logo, $\mathscr{N}_\infty \cap \mathscr{R}^C \subseteq \mathscr{N}$. Portanto, $\mathscr{N} = \mathscr{N}_\infty \cap \mathscr{R}^C$, se $\beta \notin \mathscr{L}$.

Justificaremos (5.7). Repetindo os passos acima, mostra-se que, $\mathscr{N} \subseteq \mathscr{N}_\infty$. Reciprocamente, seja $\lambda \in \mathscr{N}_\infty$. Temos $\lambda \in \mathscr{N}_j$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Para cada $j \in \mathbb{N}$, existe $(m_j, n_j) \in \mathbb{Z}^2$, com $|m_j| + |n_j| \geq 2$, tal que $\lambda \in \mathscr{N}_{jm_jn_j}$. Disso decorre que

$$|m_j + \beta n_j - \lambda| < \frac{1}{(|m_j| + |n_j|)^j},$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Se $\lambda \in \mathscr{R}$ e $\beta \in \mathscr{L}$, então $\lambda \in \mathscr{N}$, pela Proposição 5.1.4. Se $\lambda \in \mathscr{R}^C$, obtemos

$$0 < |m_j + \beta n_j - \lambda| < \frac{1}{(|m_j| + |n_j|)^j},$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Usando o mesmo o processo acima, mostra-se que $\lambda \in \mathscr{N}$. Logo, $\mathscr{N}_\infty \subseteq \mathscr{N}$. Portanto, $\mathscr{N} = \mathscr{N}_\infty$.

Cada $\mathscr{N}_{jmn}$ é um intervalo aberto, portanto, cada $\mathscr{N}_j$ é aberto e assim, $\mathscr{N}_\infty$ é um $\mathscr{G}_\delta$. Como $\mathscr{R}$ é enumerável, então é um $\mathscr{F}_\sigma$, então $\mathscr{R}^C$ é um $\mathscr{G}_\delta$. Logo, $\mathscr{N}$ é um $\mathscr{G}_\delta$.

Para mostrar que $\mathscr{N}$ é denso em $\mathbb{R}$, basta mostrar que cada $\mathscr{N}_j$ é denso em $\mathbb{R}$, e $\mathscr{R}^C$ é denso em $\mathbb{R}$, do Teorema de Baire segue que $\mathscr{N}$ também é denso em $\mathbb{R}$.

Primeiro, vejamos que $\mathscr{N}_j$ é denso em $\mathbb{R}$. Como $\mathscr{N}_j$ contém $\mathscr{R}$, então basta ver que $\mathscr{R}$ é denso em $\mathbb{R}$. Seja $a \in \mathbb{R}$. Sem perda de generalidade, suponha que $0 \leq a \leq 1$, pois no caso contrário, faremos uma translação. Dado $\varepsilon > 0$. Mostremos que $B(a, \varepsilon) \cap \mathbb{Z} + \beta\mathbb{Z} \neq \varnothing$. Escolhemos $n \in \mathbb{N}$ grande tal que $\left(\frac{k_0}{n}, \frac{k_0+1}{n}\right) \subset (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, para algum $0 \leq k_0 \leq n-1$. Partimos o intervalo $[0,1]$ em $n$ sub-intervalos $[0, 1/n], [1/n, 2/n], \ldots, [(n-1)/n, 1]$. Pelo Teorema de Dirichlet, a desigualdade

$$|\beta - m/n| < 1/n^2$$

tem infinitas soluções racionais $m/n$, uma vez que $\beta$ é irracional. Disso decorre que a desigualdade

$$|n\beta - m| < 1/n$$

tem infinitas soluções $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$. Em outras palavras, existem infinitos elementos de $\mathbb{Z} + \beta\mathbb{Z}$ no intervalo $(0, 1/n)$. Analogamente, fazemos uma translação, mostra-se que existem infinitos elementos de $\mathbb{Z} + \beta\mathbb{Z}$ no intervalo $\left(\frac{k_0}{n}, \frac{k_0+1}{n}\right)$. Como $\left(\frac{k_0}{n}, \frac{k_0+1}{n}\right) \subset (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, então $B(a, \varepsilon) \cap \mathbb{Z} + \beta\mathbb{Z} \neq \varnothing$. Portanto, $\mathscr{R}$ é denso em $\mathbb{R}$.

Mostremos que $\mathscr{R}^C$ é denso em $\mathbb{R}$. Note que $\mathbb{Q} \backslash \mathbb{Z} \subset \mathscr{R}^C$. De fato, dado $p/q \in \mathbb{Q} \backslash \mathbb{Z}$ então $p/q \notin \mathscr{R}$ pois se $p/q \in \mathscr{R}$, temos $p/q = m_0 + \beta n_0$, com $n_0 \neq 0$. Assim, $\beta \in \mathbb{Q}$, absurdo. Agora, vejamos que $\mathbb{Q} \backslash \mathbb{Z}$ é denso em $\mathbb{R}$. Dado $a \in \mathbb{R}$, com $k_0 \leq a < k_0 + 1$, para algum $k_0$

inteiro. Existe uma sequência $(x_n) \subset \mathbb{Q}$ com $k_0 < x_n < k_0 + 1$ tal que $x_n \to a$. Logo, $(x_n) \subset \mathbb{Q} \backslash \mathbb{Z}$ e $x_n \to a$. Portanto, $\mathbb{Q} \backslash \mathbb{Z}$ é denso em $\mathbb{R}$. Disso decorre que $\mathscr{R}^C$ é denso em $\mathbb{R}$.

□

**Observação 5.1.7.** Para $\beta$ racional, a Proposição 5.1.6 não é válida; na verdade $\mathscr{N}$ é, neste caso, um conjunto discreto infinito, por exemplo $\mathscr{N} = \mathbb{Z}$ se $\beta = 0$. De fato, seja $m \in \mathbb{Z}$. Queremos mostrar que $m \in \mathscr{N}$, ou seja, $D_t - m$ não é (GH). Para isto, apresentamos uma distribuição $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^2)$ com $u \notin C^\infty(\mathbb{T}^2)$ e $(D_t - m)u \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$. Decompor $\mathbb{Z}^2$ como $\mathbb{Z}^2 = A \cup B$, onde

$$A = \{(k_1,k_2) \in \mathbb{Z}^2 : k_1 = m\}, \quad B = \{(k_1,k_2) \in \mathbb{Z}^2 : k_1 \neq m\},$$

com $A \cap B = \varnothing$. Seja

$$u(t,x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} c_k e^{ik_1 t + ik_2 x},$$

com

$$c_k = \begin{cases} 1, & \text{se } k \in A, \\ 0, & \text{se } k \in B. \end{cases}$$

Note que $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^2)$, uma vez que $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}^2}$ tem crescimento polinomial. No entanto, $u \notin C^\infty(\mathbb{T}^2)$ pois $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}^2}$ não decai rapidamente. Temos

$$\mathscr{F}((D_t - m)u)(k) = (k_1 - m)\widehat{u}(k).$$

Se $k \in A$, então $(k_1 - m)\widehat{u}(k) = 0$. Se $k \in B$, também temos $(k_1 - m)\widehat{u}(k) = 0$. Disso decorre que $\{\mathscr{F}((D_t - m)u)(k)\}_{k \in \mathbb{Z}^2}$ decai rapidamente. Assim, $(D_t - m)u \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$. Logo $D_t - m$ não é (GH), i.e, $m \in \mathscr{N}$. Portanto, $\mathbb{Z} \subseteq \mathscr{N}$.

Reciprocamente, suponha que $\lambda \notin \mathbb{Z}$. Mostremos que $D_t - \lambda$ é (GH). De fato, seja $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^2)$ tal que $(D_t - \lambda)u = f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$. Calculando os coeficientes de Fourier, obtemos

$$(k_1 - \lambda)\widehat{u}(k) = \widehat{f}(k).$$

Como $\lambda \notin \mathbb{Z}$, então $k_1 - \lambda \neq 0$, para todo $k_1 \in \mathbb{Z}$. Logo,

$$|\widehat{u}(k)| = \frac{1}{|k_1 - \lambda|}|\widehat{f}(k)|.$$

A distância $|k_1 - \lambda| \geq \min\{\lceil \lambda \rceil - \lambda, \lambda - \lfloor \lambda \rfloor\} > 0$, uma vez que $\lambda \notin \mathbb{Z}$. Seja $c_0 := \min\{\lceil \lambda \rceil - \lambda, \lambda - \lfloor \lambda \rfloor\}$. Temos

$$|\widehat{u}(k)| \leq \frac{1}{c_0}|\widehat{f}(k)|.$$

Como $\{\widehat{f}(k)\}$ decai rapidamente, então $\{\widehat{u}(k)\}$ também decai rapidamente. Logo, $u \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$. Assim, $D_t - \lambda$ é (GH), i.e, $\lambda \notin \mathscr{N}$, Logo, $\mathbb{Z}^C \subseteq \mathscr{N}^C$, ou seja, $\mathscr{N} \subseteq \mathbb{Z}$.

Portanto, $\mathscr{N} = \mathbb{Z}$, se $\beta = 0$.

Analogamente, mostra-se que $\mathscr{N} = s^{-1}\mathbb{Z}$ se $\beta = r/s \neq 0$ é irredutível.

Como mencionamos na introdução deste capítulo, quase todas (no sentido da medida de Lebesgue) as perturbações $P-\lambda$ são (GH), onde $P$ é um operador diferencial parcial, com coeficientes constantes, de qualquer ordem. Vamos provar isto agora.

**Teorema 5.1.8.** Seja $P$ um operador diferencial parcial, com coeficientes constantes, atuando no toro bidimensional. Então, para quase todo $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\lambda \in \mathbb{C}$), o operador $P_\lambda = P - \lambda$ é (GH).

*Demonstração.* Mostremos o teorema com os quatros casos:

- o operador $P$ com símbolo real e $\lambda$ real,
- o operador $P$ com símbolo complexo e $\lambda$ real,
- o operador $P$ com símbolo real e $\lambda$ complexo,
- o operador $P$ com símbolo complexo e $\lambda$ complexo.

1. Suponha o operador $P$ com símbolo real e $\lambda \in \mathbb{R}$.

   Devemos mostrar que o conjunto $B$ que consiste em todos os $\lambda \in \mathbb{R}$ para os quais $P_\lambda = P - \lambda$ não é (GH) tem medida nula.

   Provaremos apenas que $B \cap [0,1]$ tem medida nula; uma modificação fácil produz o mesmo resultado para $B \cap [k, k+1]$, para todos os inteiros $k$.

   Seja $A = \{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \backslash \{0\}; |P(m,n)| < 2\}$. Podemos escrever $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ onde $a_j = (m_j, n_j)$ e $|m_j| + |n_j| \leq |m_{j+1}| + |n_{j+1}|,\ j = 1, 2, \ldots$.

   Defina, para cada $k = 1, 2, \ldots$,

$$f_k(\lambda) = \sum_{j=1}^{k} \left|P_\lambda\left(m_j, n_j\right)\right|^{-1/2} |(m_j, n_j)|^{-3}.$$

   Seja $g_j(\lambda) = \left|P_\lambda\left(m_j, n_j\right)\right|^{-1/2},\ \lambda \in [0,1],\ j = 1, 2, \ldots$

   Cada $g_j$ é integrável em $[0,1]$ e $\int_0^1 g_j(\lambda) d\lambda \leq 8$; para ver isso, primeiro vejamos que $g_j$ é Lebesgue mensurável. De fato, seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Se $\alpha > 0$, temos

$$\begin{aligned}
g_j^{-1}((\alpha, +\infty)) &= \{\lambda \in \mathbb{R} \backslash \{P(m_j, n_j)\} : g_j(\lambda) > \alpha\} \\
&= \left\{\lambda \in \mathbb{R} \backslash \{P(m_j, n_j)\} : \frac{1}{|P(m_j, n_j) - \lambda|^{1/2}} > \alpha\right\} \\
&= \left\{\lambda \in \mathbb{R} \backslash \{P(m_j, n_j)\} : |P(m_j, n_j) - \lambda| < \frac{1}{\alpha^2}\right\} \\
&= \left(-\frac{1}{\alpha^2} + P(m_j, n_j), P(m_j, n_j)\right) \cup \left(P(m_j, n_j), \frac{1}{\alpha^2} + P(m_j, n_j)\right),
\end{aligned}$$

que é um aberto em $\mathbb{R}\backslash\{P(m_j,n_j)\}$. Se $\alpha \leq 0$, temos

$$g_j^{-1}((\alpha,+\infty)) = \{\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{P(m_j,n_j)\} : g_j(\lambda) > \alpha\} = \mathbb{R}\backslash\{P(m_j,n_j)\},$$

que é um aberto em $\mathbb{R}\backslash\{P(m_j,n_j)\}$. Logo, $g_j$ é Lebesgue mensurável.

Mostremos que $\int_0^1 g_j(\lambda)d\lambda \leq 8$. Analisamos três casos, de acordo com qual dos seguintes intervalos $P\left(m_j,n_j\right)$ pertence: $(-2,0),[0,1],(1,2)$.

Caso i: Se $P(m_j,n_j) \in (-2,0)$, então $P_\lambda(m_j,n_j) = P(m_j,n_j) - \lambda < 0$, onde $\lambda \in [0,1]$. Temos

$$\begin{aligned}
\int_0^1 g_j(\lambda)d\lambda &= \int_0^1 \frac{1}{\left(\lambda - P(m_j,n_j)\right)^{1/2}}d\lambda \\
&= 2(1-P(m_j,n_j))^{1/2} - 2(-P(m_j,n_j))^{1/2} \\
&\leq 2(1-P(m_j,n_j))^{1/2} < 2\sqrt{3} < 8.
\end{aligned}$$

Caso iii: Se $P(m_j,n_j) \in (1,2)$, então $P_\lambda(m_j,n_j) = P(m_j,n_j) - \lambda > 0$, onde $\lambda \in [0,1]$. Temos

$$\begin{aligned}
\int_0^1 g_j(\lambda)d\lambda &= \int_0^1 \frac{1}{\left(P(m_j,n_j) - \lambda\right)^{1/2}}d\lambda \\
&= 2(P(m_j,n_j))^{1/2} - 2(P(m_j,n_j)-1)^{1/2} \\
&\leq 2(P(m_j,n_j))^{1/2} < 2\sqrt{2} < 8.
\end{aligned}$$

Caso ii: Consideremos $P(m_j,n_j) = 0$, $P(m_j,n_j) = 1$ e $0 < P(m_j,n_j) < 1$.

- Suponha que $P(m_j,n_j) = 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina

$$h_{n,j}(\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{se } \lambda \in \left[0,\frac{1}{n}\right), \\ \dfrac{1}{\lambda^{1/2}}, & \text{se } \lambda \in \left[\frac{1}{n},1\right]. \end{cases}$$

  Note que $h_{n,j} \leq h_{n+1,j}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, $h_{n,j} \to g_j$, para quase todo $\lambda$. Usando o Teorema da Convergência Monótona temos

$$\int_0^1 g_j(\lambda)d\lambda = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 h_{n,j}(\lambda)d\lambda.$$

  Além disso,

$$\int_0^1 h_{n,j}(\lambda)d\lambda = \int_{1/n}^1 \frac{1}{\lambda^{1/2}}d\lambda = 2\left[1-\left(\frac{1}{n}\right)^{1/2}\right].$$

  Logo,

$$\int_0^1 g_j(\lambda)d\lambda = \lim_{n\to\infty} 2\left[1-\left(\frac{1}{n}\right)^{1/2}\right] = 2 < 8.$$

- Suponha que $P(m_j,n_j)=1$. Para cada $n\in\mathbb{N}$, defina

$$h_{n,j}(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1-\lambda)^{1/2}}, & \text{se } \lambda\in\left[0,1-\frac{1}{n}\right],\\ 0, & \text{se } \lambda\in\left(1-\frac{1}{n},1\right].\end{cases}$$

Note que $h_{n,j}\le h_{n+1,j}$, para todo $n\in\mathbb{N}$. Além disso, $h_{n,j}\to g_j$, para quase todo $\lambda$. Usando o Teorema da Convergência Monótona temos

$$\int_0^1 g_j(\lambda)d\lambda=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 h_{n,j}(\lambda)d\lambda.$$

Além disso,

$$\int_0^1 h_{n,j}(\lambda)d\lambda=\int_0^{1-1/n}\frac{1}{(1-\lambda)^{1/2}}d\lambda=2\left[1-\left(\frac{1}{n}\right)^{1/2}\right].$$

Logo,

$$\int_0^1 g_j(\lambda)d\lambda=\lim_{n\to\infty}2\left[1-\left(\frac{1}{n}\right)^{1/2}\right]=2<8.$$

- Suponha que $0<P(m_j,n_j)<1$. Existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{n_0}<P(m_j,n_j)<1-\dfrac{1}{n_0}$. Para cada $n\ge n_0$, defina

$$h_{n,j}(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{1}{|P(m_j,n_j)-\lambda|^{1/2}}, & \text{se } \lambda\in\left[0,P(m_j,n_j)-\frac{1}{n}\right],\\ 0, & \text{se } \lambda\in\left(P(m_j,n_j)-\frac{1}{n},P(m_j,n_j)+\frac{1}{n}\right),\\ \dfrac{1}{|P(m_j,n_j)-\lambda|^{1/2}}, & \text{se } \lambda\in\left[P(m_j,n_j)+\frac{1}{n},1\right].\end{cases}$$

Note que $h_{n,j}\le h_{n+1,j}$, para todo $n\ge n_0$. Além disso, $h_{n,j}\to g_j$, para quase todo $\lambda$. Usando o Teorema da Convergência Monótona temos

$$\int_0^1 g_j(\lambda)d\lambda=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 h_{n,j}(\lambda)d\lambda.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\int_0^1 h_{n,j}(\lambda)d\lambda&=\int_0^{P(m_j,n_j)-\frac{1}{n}}\frac{1}{\left(P(m_j,n_j)-\lambda\right)^{1/2}}d\lambda+\int_{P(m_j,n_j)+\frac{1}{n}}^1\frac{1}{\left(\lambda-P(m_j,n_j)\right)^{1/2}}d\lambda\\&=2\left[P(m_j,n_j)^{1/2}-\left(\frac{1}{n}\right)^{1/2}\right]+2\left[\left(1-P(m_j,n_j)\right)^{1/2}-\left(\frac{1}{n}\right)^{1/2}\right].\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_0^1 g_j(\lambda)d\lambda&=\lim_{n\to\infty}2\left[P(m_j,n_j)^{1/2}+\left(1-P(m_j,n_j)\right)^{1/2}-2\left(\frac{1}{n}\right)^{1/2}\right]\\&=2\left[P(m_j,n_j)^{1/2}+\left(1-P(m_j,n_j)\right)^{1/2}\right]\le 4<8.\end{aligned}$$

Logo, $\int_0^1 g_j(\lambda)d\lambda \leq 8$.

A sequência $(f_k)$ cresce para a função

$$f(\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} \left|P\left(m_j,n_j\right) - \lambda\right|^{-1/2} \left|\left(m_j,n_j\right)\right|^{-3}.$$

O Teorema da Convergência Monótona implica que

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(\lambda)d\lambda &= \sum_{j=1}^{\infty} \left|\left(m_j,n_j\right)\right|^{-3} \int_0^1 \left|P\left(m_j,n_j\right) - \lambda\right|^{-1/2} d\lambda \\ &\leq 8 \sum_{j=1}^{\infty} \left|\left(m_j,n_j\right)\right|^{-3} < \infty.\end{aligned}$$

A Proposição 2.2.2 implica que $f(\lambda)$ é finito para quase todo $\lambda \in [0,1]$. Portanto, para tal $\lambda$, existe $M = M(\lambda) > 0$ com

$$\left|P\left(m_j,n_j\right) - \lambda\right|^{-1/2} \left|\left(m_j,n_j\right)\right|^{-3} \leq M, \quad j = 1,2,\ldots,$$

ou

$$\left|P\left(m_j,n_j\right) - \lambda\right| \geq M^{-2} \left|\left(m_j,n_j\right)\right|^{-6}, \quad j = 1,2,\ldots$$

Agora observe que se $(m,n) \notin A$ e $(m,n) \neq 0$ então $|P(m,n)| \geq 2$ e assim, para $\lambda \in [0,1]$, $|P_\lambda(m,n)| \geq |P(m,n)| - |\lambda| \geq 1$.

Se definirmos $c = \min\left\{1, M^{-2}\right\}$ obtemos

$$|P(m,n) - \lambda| \geq c|(m,n)|^{-6}, \quad \forall (m,n) \in \mathbb{Z}^2 \backslash \{0\}$$

que implica

$$|P(m,n) - \lambda| \geq |(m,n)|^{-7}, \text{ se } |(m,n)| \geq c^{-1}.$$

Assim, $P_\lambda$ é (GH) para quase todo $\lambda \in [0,1]$.

2. Mostremos o teorema no caso em que o operador $P$ com símbolo complexo, e $\lambda \in \mathbb{R}$.

   Devemos mostrar que o conjunto $B$ que consiste em todos os $\lambda \in \mathbb{R}$ para os quais $P_\lambda = P - \lambda$ não é (GH) tem medida nula.

   Provaremos apenas que $B \cap [0,1]$ tem medida nula; uma modificação fácil produz o mesmo resultado para $B \cap [k,k+1]$, para todos os inteiros $k$.

   Seja $A = \{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \backslash \{0\}; |P(m,n)| < 2\}$. Podemos escrever $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ onde $a_j = (m_j,n_j)$ e $|m_j| + |n_j| \leq |m_{j+1}| + |n_{j+1}|, \ j = 1,2,\ldots$.

   Definamos, para cada $k = 1,2,\ldots,$

$$f_k(\lambda) = \sum_{j=1}^{k} \left|P_\lambda\left(m_j,n_j\right)\right|^{-1/2} |(m_j,n_j)|^{-3}.$$

Seja $g_j(\lambda) = \left|P_\lambda\left(m_j,n_j\right)\right|^{-1/2}$, $\lambda \in [0,1]$, $j = 1,2,\dots$

Cada $g_j$ é integrável em $[0,1]$ e $\int_0^1 g_j(\lambda)d\lambda \leq 8$; pois

$$\left|P_\lambda\left(m_j,n_j\right)\right| = \left|\mathrm{Re}P\left(m_j,n_j\right) - \lambda + i\,\mathrm{Im}P\left(m_j,n_j\right)\right| \geq \left|\mathrm{Re}P\left(m_j,n_j\right) - \lambda\right|,$$

i.e.,

$$\left|P_\lambda\left(m_j,n_j\right)\right|^{-1/2} \leq \left|\mathrm{Re}P\left(m_j,n_j\right) - \lambda\right|^{-1/2}.$$

Usando o mesmo processo acima, podemos analisar $\mathrm{Re}P\left(m_j,n_j\right)$ em $(-2,0)$, $[0,1]$, $(1,2)$ e obtemos

$$\int_0^1 \left|P_\lambda\left(m_j,n_j\right)\right|^{-1/2} d\lambda \leq \int_0^1 \left|\mathrm{Re}P\left(m_j,n_j\right) - \lambda\right|^{-1/2} d\lambda < 8.$$

Repetindo o mesmo procedimento acima, segue que $P_\lambda$ é (GH) para quase todo $\lambda \in [0,1]$.

3. Mostremos o teorema no caso em que o operador $P$ com símbolo real, e $\lambda = a+bi$, com $b \neq 0$. Vejamos que $P-\lambda$ é (GH). Seja $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^2)$ com $(P-\lambda)u = f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$. Calculando os coeficientes de Fourier de ambos os lados da equação $(P-\lambda)u = f$, obtemos

$$(P(m,n) - (a+bi))\,\widehat{u}(m,n) = \widehat{f}(m,n).$$

Note que $P(m,n) - (a+bi) \neq 0$, para todo $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$. Além disso,

$$|P(m,n) - (a+bi)| = |(P(m,n) - a) - bi| \geq |bi| = |b| > 0,$$

uma vez que $P(m,n) \in \mathbb{R}$. Temos

$$|\widehat{u}(m,n)| \leq \frac{1}{|b|}\,|\widehat{f}(m,n)|.$$

Como $f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$, então $\{\widehat{f}(m,n)\}$ decai rapidamente. Logo, $\{\widehat{u}(m,n)\}$ também decai rapidamente, i.e, $u \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$. Portanto, $P-\lambda$ é (GH).

4. Mostremos o teorema no caso em que o operador $P$ com símbolo complexo, e $\lambda = a+bi$, com $b \neq 0$.

Seja

$$R = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : P - (a+bi) \text{ não é (GH)}\}.$$

Devemos mostrar que o conjunto $R$ tem medida nula em $\mathbb{R}^2$.

Provaremos apenas que $R \cap [0,1] \times [0,1]$ tem medida nula em $\mathbb{R}^2$; uma modificação fácil produz o mesmo resultado para $R \cap [k,k+1] \times [\ell,\ell+1]$, para todos os inteiros $k,\ell$.

Seja $A = \{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \backslash \{0\}; |P(m,n)| < 2\}$. Podemos escrever $A = \{a_1,a_2,\dots\}$ onde $a_j = (m_j,n_j)$ e $|m_j| + |n_j| \leq |m_{j+1}| + |n_{j+1}|$, $j = 1,2,\dots$

Defina, para cada $k = 1,2,\dots,$

$$f_k(a,b) = \sum_{j=1}^{k} \left|P\left(m_j,n_j\right) - (a+bi)\right|^{-1/2} |(m_j,n_j)|^{-3}.$$

Seja $g_j(a,b) = \left|P\left(m_j,n_j\right)-(a+bi)\right|^{-1/2}$, $(a,b)\in[0,1]\times[0,1]$, $j=1,2,\ldots$
Cada $g_j$ é integrável em $[0,1]\times[0,1]$ e $\displaystyle\int_{[0,1]\times[0,1]} g_j(a,b)\,d(a,b)\leq 8$ pois

$$\begin{aligned}\left|P\left(m_j,n_j\right)-(a+bi)\right| &= \left|\operatorname{Re}P\left(m_j,n_j\right)-a+i\left(\operatorname{Im}P\left(m_j,n_j\right)-b\right)\right|\\ &\geq \left|\operatorname{Re}P\left(m_j,n_j\right)-a\right|,\end{aligned}$$

i.e.,

$$\left|P\left(m_j,n_j\right)-(a+bi)\right|^{-1/2}\leq\left|\operatorname{Re}P\left(m_j,n_j\right)-a\right|^{-1/2}.$$

Usando o mesmo processo no primeiro caso, podemos analisar $\operatorname{Re}P\left(m_j,n_j\right)$ em $(-2,0),[0,1],(1,2)$ e obtemos

$$\int_0^1\left|P\left(m_j,n_j\right)-(a+bi)\right|^{-1/2}da\leq\int_0^1\left|\operatorname{Re}P\left(m_j,n_j\right)-a\right|^{-1/2}da<8.$$

Logo,

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} g_j(a,b)\,d(a,b)=\int_0^1\int_0^1\left|P\left(m_j,n_j\right)-(a+bi)\right|^{-1/2}dadb\leq 8.$$

A sequência $(f_k)$ cresce para a função

$$f(a,b)=\sum_{j=1}^{\infty}\left|P\left(m_j,n_j\right)-(a+bi)\right|^{-1/2}\left|\left(m_j,n_j\right)\right|^{-3}.$$

O Teorema da Convergência Monótona implica que

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^1 f(a,b)dadb &= \sum_{j=1}^{\infty}\left|\left(m_j,n_j\right)\right|^{-3}\int_0^1\int_0^1\left|P\left(m_j,n_j\right)-(a+bi)\right|^{-1/2}dadb\\ &\leq 8\sum_{j=1}^{\infty}\left|\left(m_j,n_j\right)\right|^{-3}<\infty.\end{aligned}$$

A Proposição 2.2.2 implica que $f(a,b)$ é finito para quase todo $(a,b)\in[0,1]\times[0,1]$. Portanto, para tal $(a,b)$, existe $M=M(a,b)>0$ com

$$\left|P\left(m_j,n_j\right)-(a+bi)\right|^{-1/2}\left|\left(m_j,n_j\right)\right|^{-3}\leq M,\quad j=1,2,\ldots$$

ou

$$\left|P\left(m_j,n_j\right)-(a+bi)\right|\geq M^{-2}\left|\left(m_j,n_j\right)\right|^{-6},\quad j=1,2,\ldots$$

Agora observe que se $(m,n)\notin A$ e $(m,n)\neq 0$ então $|P(m,n)|\geq 2$ e assim, para $(a,b)\in[0,1]\times[0,1]$, $|P(m,n)-(a+bi)|\geq|P(m,n)|-|a+bi|\geq 2-\sqrt{2}$.
Se definirmos $c=\min\left\{2-\sqrt{2},M^{-2}\right\}$ obtemos

$$|P(m,n)-(a+bi)|\geq c|(m,n)|^{-6},\quad\forall(m,n)\in\mathbb{Z}^2\backslash\{0\}$$

que implica

$$|P(m,n)-(a+bi)|\geq|(m,n)|^{-7},\ \text{ se } |(m,n)|\geq c^{-1}.$$

Assim, $P-(a+bi)$ é (GH) para quase todo $(a,b)\in[0,1]\times[0,1]$.

$\square$

Apresentamos a demonstração do Teorema 5.1.8 em dimensão arbitrária.

**Teorema 5.1.9.** Seja $P$ um operador diferencial parcial, com coeficientes constantes, atuando no toro $\mathbb{T}^\ell$, $\ell \geq 1$. Então, para quase todo $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\lambda \in \mathbb{C}$), o operador $P_\lambda = P - \lambda$ é (GH).

*Demonstração.* Consideramos os seguintes casos:

1. o operador $P$ com símbolo real e $\lambda$ real,
2. o operador $P$ com símbolo complexo e $\lambda$ real,
3. o operador $P$ com símbolo real e $\lambda$ complexo,
4. o operador $P$ com símbolo complexo e $\lambda$ complexo.

Mostremos somente o primeiro caso. Os outros casos são análogos.

Seja
$$B = \{\lambda \in \mathbb{R} : P_\lambda = P - \lambda \text{ não é (GH)}\}.$$

Mostremos que o conjunto $B$ tem medida nula. Para isto, basta mostrar que $B \cap [0,1]$ tem medida nula; uma modificação fácil produz o mesmo resultado para $B \cap [k, k+1]$, para todos os inteiros $k$.

Seja $A = \{(m_1, \ldots, m_\ell) \in \mathbb{Z}^\ell \backslash \{0\}; |P(m_1, \ldots, m_\ell)| < \ell + 1\}$. Podemos escrever $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ onde $a_j = (m_{j,1}, \ldots, m_{j,\ell})$ e $|m_{j,1}| + \cdots + |m_{j,\ell}| \leq |m_{j+1,1}| + \cdots + |m_{j+1,\ell}|$, $j = 1, 2, \ldots$.

Defina, para cada $k = 1, 2, \ldots$,
$$f_k(\lambda) = \sum_{j=1}^{k} \left|P_\lambda(m_{j,1}, \ldots, m_{j,\ell})\right|^{-1/2} |(m_{j,1}, \ldots, m_{j,\ell})|^{-(\ell+1)}.$$

Seja $g_j(\lambda) = \left|P_\lambda(m_{j,1}, \ldots, m_{j,\ell})\right|^{-1/2}$, $\lambda \in [0,1]$, $j = 1, 2, \ldots$

Cada $g_j$ é integrável em $[0,1]$ e $\int_0^1 g_j(\lambda) d\lambda \leq 4(2+\ell)$; para ver isso, primeiro vejamos que $g_j$ é Lebesgue mensurável. De fato, seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Se $\alpha > 0$, temos
$$\begin{aligned} g_j^{-1}((\alpha, +\infty)) &= \{\lambda \in \mathbb{R} \backslash \{P(m_{j,1}, \ldots, m_{j,\ell})\} : g_j(\lambda) > \alpha\} \\ &= \left\{\lambda \in \mathbb{R} \backslash \{P(m_{j,1}, \ldots, m_{j,\ell})\} : \frac{1}{|P(m_{j,1}, \ldots, m_{j,\ell}) - \lambda|^{1/2}} > \alpha\right\} \\ &= \left\{\lambda \in \mathbb{R} \backslash \{P(m_{j,1}, \ldots, m_{j,\ell})\} : |P(m_{j,1}, \ldots, m_{j,\ell}) - \lambda| < \frac{1}{\alpha^2}\right\}, \end{aligned}$$
que é um aberto em $\mathbb{R} \backslash \{P(m_{j,1}, \ldots, m_{j,\ell})\}$. Se $\alpha \leq 0$, temos
$$\begin{aligned} g_j^{-1}((\alpha, +\infty)) &= \{\lambda \in \mathbb{R} \backslash \{P(m_{j,1}, \ldots, m_{j,\ell})\} : g_j(\lambda) > \alpha\} \\ &= \mathbb{R} \backslash \{P(m_{j,1}, \ldots, m_{j,\ell})\}, \end{aligned}$$

que é um aberto em $\mathbb{R}\backslash\{P(m_{j,1},\ldots,m_{j,\ell})\}$. Logo, $g_j$ é Lebesgue mensurável.

Mostremos que $\int_0^1 g_j(\lambda)d\lambda \leq 4(2+\ell)$. Analisamos três casos, de acordo com qual dos seguintes intervalos $P(m_{j,1},\ldots,m_{j,\ell})$ pertence: $(-\ell-1,0)$, $[0,1]$, $(1,\ell+1)$.

Caso i: Se $P(m_{j,1},\ldots,m_{j,\ell}) \in (-\ell-1,0)$, então $P(m_{j,1},\ldots,m_{j,\ell})-\lambda<0$, onde $\lambda\in[0,1]$. Temos

$$\begin{aligned}\int_0^1 g_j(\lambda)d\lambda &= \int_0^1 \frac{1}{\big(\lambda-P(m_{j,1},\ldots,m_{j,\ell})\big)^{1/2}}d\lambda\\ &= 2(1-P(m_{j,1},\ldots,m_{j,\ell}))^{1/2}-2(-P(m_{j,1},\ldots,m_{j,\ell}))^{1/2}\\ &\leq 2(1-P(m_{j,1},\ldots,m_{j,\ell}))^{1/2}<2\sqrt{\ell+2}<4(2+\ell).\end{aligned}$$

Caso iii: Se $P(m_{j,1},\ldots,m_{j,\ell})\in(1,\ell+1)$, então $P(m_{j,1},\ldots,m_{j,\ell})-\lambda>0$, onde $\lambda\in[0,1]$. Temos

$$\begin{aligned}\int_0^1 g_j(\lambda)d\lambda &= \int_0^1 \frac{1}{\big(P(m_{j,1},\ldots,m_{j,\ell})-\lambda\big)^{1/2}}d\lambda\\ &= 2(P(m_{j,1},\ldots,m_{j,\ell}))^{1/2}-2(P(m_{j,1},\ldots,m_{j,\ell})-1)^{1/2}\\ &\leq 2(P(m_{j,1},\ldots,m_{j,\ell}))^{1/2}<2\sqrt{\ell+1}<4(2+\ell).\end{aligned}$$

Caso ii: Consideremos $P(m_{j,1},\ldots,m_{j,\ell})=0, P(m_{j,1},\ldots,m_{j,\ell})=1$ e $0<P(m_{j,1},\ldots,m_{j,\ell})<1$.

- Suponha que $P(m_{j,1},\ldots,m_{j,\ell})=0$. Para cada $n\in\mathbb{N}$, defina

$$h_{n,j}(\lambda)=\begin{cases}0, & \text{se } \lambda\in\left[0,\frac{1}{n}\right),\\ \dfrac{1}{\lambda^{1/2}}, & \text{se } \lambda\in\left[\frac{1}{n},1\right].\end{cases}$$

  Note que $h_{n,j}\leq h_{n+1,j}$, para todo $n\in\mathbb{N}$. Além disso, $h_{n,j}\to g_j$, para quase todo $\lambda$. Usando o Teorema da Convergência Monótona temos

$$\int_0^1 g_j(\lambda)d\lambda=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 h_{n,j}(\lambda)d\lambda.$$

  Além disso,

$$\int_0^1 h_{n,j}(\lambda)d\lambda=\int_{1/n}^1\frac{1}{\lambda^{1/2}}d\lambda=2\left[1-\left(\frac{1}{n}\right)^{1/2}\right].$$

  Logo,

$$\int_0^1 g_j(\lambda)d\lambda=\lim_{n\to\infty}2\left[1-\left(\frac{1}{n}\right)^{1/2}\right]=2<4(2+\ell).$$

- Suponha que $P(m_{j,1},\ldots,m_{j,\ell})=1$. Para cada $n\in\mathbb{N}$, defina

$$h_{n,j}(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1-\lambda)^{1/2}}, & \text{se } \lambda\in\left[0,1-\frac{1}{n}\right],\\ 0, & \text{se } \lambda\in\left(1-\frac{1}{n},1\right].\end{cases}$$

Note que $h_{n,j} \leq h_{n+1,j}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, $h_{n,j} \to g_j$, para quase todo $\lambda$. Usando o Teorema da Convergência Monótona temos

$$\int_0^1 g_j(\lambda)d\lambda = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 h_{n,j}(\lambda)d\lambda.$$

Além disso,

$$\int_0^1 h_{n,j}(\lambda)d\lambda = \int_0^{1-1/n}\frac{1}{(1-\lambda)^{1/2}}d\lambda = 2\left[1-\left(\frac{1}{n}\right)^{1/2}\right]$$

Logo,

$$\int_0^1 g_j(\lambda)d\lambda = \lim_{n\to\infty} 2\left[1-\left(\frac{1}{n}\right)^{1/2}\right] = 2 < 4(2+\ell).$$

- Suponha que $0 < P(m_{j,1},\ldots,m_{j,\ell}) < 1$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{n_0} < P(m_{j,1},\ldots,m_{j,\ell}) < 1-\dfrac{1}{n_0}$. Para cada $n \geq n_0$, defina

$$h_{n,j}(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{1}{|P(m_{j,1},\ldots,m_{j,\ell})-\lambda|^{1/2}}, & \text{se } \lambda \in \left[0, P(m_{j,1},\ldots,m_{j,\ell})-\frac{1}{n}\right], \\ 0, & \text{se } \lambda \in \left(P(m_{j,1},\ldots,m_{j,\ell})-\frac{1}{n}, P(m_{j,1},\ldots,m_{j,\ell})+\frac{1}{n}\right), \\ \dfrac{1}{|P(m_{j,1},\ldots,m_{j,\ell})-\lambda|^{1/2}}, & \text{se } \lambda \in \left[P(m_{j,1},\ldots,m_{j,\ell})+\frac{1}{n}, 1\right]. \end{cases}$$

Note que $h_{n,j} \leq h_{n+1,j}$, para todo $n \geq n_0$. Além disso, $h_{n,j} \to g_j$, para quase todo $\lambda$. Usando o Teorema da Convergência Monótona temos

$$\int_0^1 g_j(\lambda)d\lambda = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 h_{n,j}(\lambda)d\lambda.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \int_0^1 h_{n,j}(\lambda)d\lambda &= \int_0^{P(m_{j,1},\ldots,m_{j,\ell})-\frac{1}{n}} \frac{1}{\big(P(m_{j,1},\ldots,m_{j,\ell})-\lambda\big)^{1/2}}d\lambda + \\ &\quad + \int_{P(m_{j,1},\ldots,m_{j,\ell})+\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{\big(\lambda-P(m_{j,1},\ldots,m_{j,\ell})\big)^{1/2}}d\lambda \\ &= 2\left[P(m_{j,1},\ldots,m_{j,\ell})^{1/2}-\left(\frac{1}{n}\right)^{1/2}\right] + \\ &\quad + 2\left[\big(1-P(m_{j,1},\ldots,m_{j,\ell})\big)^{1/2}-\left(\frac{1}{n}\right)^{1/2}\right]. \end{aligned}$$

Disso decorre que

$$\begin{aligned} \int_0^1 g_j(\lambda)d\lambda &= \lim_{n\to\infty} 2\left[P(m_{j,1},\ldots,m_{j,\ell})^{1/2}+\big(1-P(m_{j,1},\ldots,m_{j,\ell})\big)^{1/2}-2\left(\frac{1}{n}\right)^{1/2}\right] \\ &= 2\left[P(m_{j,1},\ldots,m_{j,\ell})^{1/2}+\big(1-P(m_{j,1},\ldots,m_{j,\ell})\big)^{1/2}\right] \leq 4 < 4(2+\ell). \end{aligned}$$

Logo, $\int_0^1 g_j(\lambda)d\lambda \leq 4(2+\ell)$.

A sequência $(f_k)$ cresce para a função

$$f(\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} \left|P\left(m_{j,1},\ldots,m_{j,\ell}\right) - \lambda\right|^{-1/2} \left|\left(m_{j,1},\ldots,m_{j,\ell}\right)\right|^{-(\ell+1)}.$$

O Teorema da Convergência Monótona implica que

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(\lambda)d\lambda &= \sum_{j=1}^{\infty} \left|\left(m_{j,1},\ldots,m_{j,\ell}\right)\right|^{-(\ell+1)} \int_0^1 \left|P\left(m_{j,1},\ldots,m_{j,\ell}\right) - \lambda\right|^{-1/2} d\lambda \\ &\leq 4(2+\ell) \sum_{j=1}^{\infty} \left|\left(m_{j,1},\ldots,m_{j,\ell}\right)\right|^{-(\ell+1)} < \infty.\end{aligned}$$

A Proposição 2.2.2 implica que $f(\lambda)$ é finito para quase todo $\lambda \in [0,1]$. Portanto, para tal $\lambda$, existe $M = M(\lambda) > 0$ com

$$\left|P\left(m_{j,1},\ldots,m_{j,\ell}\right) - \lambda\right|^{-1/2} \left|\left(m_{j,1},\ldots,m_{j,\ell}\right)\right|^{-(\ell+1)} \leq M, \quad j = 1,2,\ldots$$

ou

$$\left|P\left(m_{j,1},\ldots,m_{j,\ell}\right) - \lambda\right| \geq M^{-2} \left|\left(m_{j,1},\ldots,m_{j,\ell}\right)\right|^{-2\ell-2}, \quad j = 1,2,\ldots$$

Agora observe que se $(m_1,\ldots,m_\ell) \notin A$ e $(m_1,\ldots,m_\ell) \neq 0$ então $|P(m_1,\ldots,m_\ell)| \geq \ell+1$ e assim, para $\lambda \in [0,1]$, $|P_\lambda(m_1,\ldots,m_\ell)| \geq |P(m_1,\ldots,m_\ell)| - |\lambda| \geq \ell+1-1 = \ell > 0$.

Se definirmos $c = \min\left\{\ell, M^{-2}\right\}$ obtemos

$$|P(m_1,\ldots,m_\ell) - \lambda| \geq c|(m_1,\ldots,m_\ell)|^{-2\ell-2}, \quad \forall (m_1,\ldots,m_\ell) \in \mathbb{Z}^\ell \backslash \{0\}$$

que implica

$$|P(m_1,\ldots,m_\ell) - \lambda| \geq |(m_1,\ldots,m_\ell)|^{-2\ell-3}, \text{ se } |(m_1,\ldots,m_\ell)| \geq c^{-1}.$$

Assim, $P_\lambda$ é (GH) para quase todo $\lambda \in [0,1]$.

$\square$

**Exemplo 5.1.10.** Considere o operador $P(D) = \frac{1}{i}\partial_t = D_t$. Este operador é muito fraco do ponto de vista de hipoeliticidade, pois o operador não tem a derivada em $x$ e assim, qualquer função $u \in C^1(\mathbb{T}^1_x) \backslash C^2(\mathbb{T}^1_x)$, por exemplo $u = \sin x\, |\sin x|$, é tal que $P(D)u = 0 \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$. Logo, o operador não é (GH). No entanto, $P(D) - \lambda = D_t - \lambda$ é (GH) para quase todo $\lambda \in \mathbb{C}$, pelo Teorema 5.1.9.

## 5.2 Exemplos de perturbações de operadores de primeira ordem

**Exemplo 5.2.1.** Se $\beta = \sqrt{2}$ então $D_t + \sqrt{2}D_x - (3/5 - 4\sqrt{2}/7)$ é (GH), pelo caso (iii) da Proposição 5.1.4. Se $\beta = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!}$ então $D_t - \beta D_x - (3 - 4\beta)$ não é (GH), pelo caso (ii) da Proposição 5.1.4.

Ao comparar (ii) e (iii) na Proposição 5.1.4 somos levados à seguinte questão: se $\beta \in \mathscr{L}$ e $\lambda \in \mathbb{Q} + \beta\mathbb{Q}$, $L$ pode ser (GH)? Em (BERGAMASCO, 1994), foram exibidos dois exemplos mostrando que $L$ pode ou não ser (GH). Apresentamos tais exemplos aqui.

**Exemplo 5.2.2.** Um número de Liouville $\beta$ tal que $L = D_t - \beta D_x - 1/2$ não seja (GH).

Desejamos encontrar $\beta$ com $0 < \beta < 1$ tal que existem duas sequências de números racionais positivos $(p_n/q_n)$, $(r_n/s_n)$ satisfazendo

$$|\beta - p_n/q_n| < q_n^{-n}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{5.8}$$

e

$$|r_n - \beta s_n - 1/2| < (r_n + s_n)^{-n}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{5.9}$$

Do Teorema de Greenfield e Wallach segue-se que $L_1 = D_t - \beta D_x$ e $L = D_t - \beta D_x - 1/2$ não são (GH).

Construiremos $\beta$ por meio de sua fração contínua: $\beta = [a_1, a_2, \ldots]$.

Suponha que já foram escolhidos $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$. Escolhemos $a_{n+1} > q_n^n$, então os convergentes, $p_n/q_n$, de $\beta$ irão verificar (5.8). De fato, pela Proposição 2.8.1 temos

$$|\beta - p_n/q_n| < \frac{1}{a_{n+1}q_n^2}.$$

Além disso,

$$\frac{1}{a_{n+1}q_n^2} \leq \frac{1}{a_{n+1}} < \frac{1}{q_n^n}.$$

Logo,

$$|\beta - p_n/q_n| < \frac{1}{q_n^n}.$$

Também exigimos que $a_n$ seja par para todos os $n$; segue que os convergentes $p_n/q_n$ são do tipo ímpar/par para $n$ ímpar, portanto para estes $n$ podemos escrever $p_n = 2r_n - 1$, $q_n = 2s_n$. Temos, de (2.13),

$$p_n \leqslant |\beta q_n - p_n| + |\beta q_n| \leqslant 1/q_{n+1} + \beta q_n < 1 + \beta q_n < q_n,$$

a última desigualdade vale porque $a_1 \geqslant 2$ que implica $\beta < 1/2$, então $(1-\beta)q_n \geqslant \frac{1}{2}a_1 > 1$.

Assim,

$$p_n + q_n \leqslant 2q_n,$$

isso implica que

$$(p_n + q_n)^n \leqslant 2^n q_n^n.$$

Ou seja,

$$\frac{1}{q_n^{n+1}} \leqslant \frac{1}{q_n}\left(\frac{2}{p_n + q_n}\right)^n.$$

Logo,

$$\frac{1}{2}\frac{1}{q_n^{n+1}} \leqslant \frac{2^{n-1}}{q_n}\frac{1}{(p_n+q_n)^n} \leqslant \frac{1}{(p_n+q_n)^n}, \tag{5.10}$$

já que $q_n > 2^{n-1}$.

Pela Proposição 2.8.1 temos

$$\begin{aligned} |r_n - \beta s_n - 1/2| &= s_n \left|\beta - \frac{2r_n - 1}{2s_n}\right| \\ &= s_n \left|\beta - \frac{p_n}{q_n}\right| \\ &\leqslant \frac{s_n}{q_n^2 a_{n+1}}. \end{aligned}$$

De $a_{n+1} > q_n^n$ e (5.10) implica que

$$\begin{aligned} |r_n - \beta s_n - 1/2| &\leqslant \frac{s_n}{q_n^2 a_{n+1}} < \frac{s_n}{q_n^2 q_n^n} = \frac{s_n}{q_n}\frac{1}{q_n^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{q_n^{n+1}} < \frac{1}{(p_n+q_n)^n} \\ &< \frac{1}{(r_n+s_n)^n}, \qquad \text{para todos os } n \text{ ímpares}, \end{aligned}$$

a última desigualdade vale porque

$$\begin{aligned} r_n + s_n &= \frac{p_n+1}{2} + \frac{q_n}{2} \\ &= \frac{p_n + q_n + 1}{2} \\ &< \frac{p_n + q_n + p_n + q_n}{2} \\ &= p_n + q_n. \end{aligned}$$

Logo, a (5.9) é satisfeita.

**Exemplo 5.2.3.** Um número de Liouville $\beta$ tal que $L = D_t - \beta D_x - 1/2$ seja (GH).

Desejamos construir $\beta$ com $0 < \beta < 1$ tal que exista uma sequência $(p_n/q_n)$ de números racionais positivos satisfazendo

$$|\beta - p_n/q_n| < q_n^{-n}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{5.11}$$

enquanto, para todo $p, q \in \mathbb{Z}$ com $q \neq 0$,

$$|p - \beta q - 1/2| \geqslant (8|q|)^{-1}. \tag{5.12}$$

Do Teorema de Greenfield e Wallach segue que $L_1 = D_t - \beta D_x$ não é (GH) mas $L = D_t - \beta D_x - 1/2$ é (GH).

Suponha que já foram escolhidos $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$. Escolhemos $a_{n+1} > q_n^n$ então os convergentes, $p_n/q_n$, de $\beta$ irão verificar (5.11). De fato, pela Proposição 2.8.1 temos

$$|\beta - p_n/q_n| < \frac{1}{a_{n+1}q_n^2}.$$

Além disso,

$$\frac{1}{a_{n+1}q_n^2} \leq \frac{1}{a_{n+1}} < \frac{1}{q_n^n}.$$

Logo,

$$|\beta - p_n/q_n| < \frac{1}{q_n^n}.$$

Também exigiremos que $a_1$ seja ímpar e que todos os outros, $a_2, a_3, \ldots$, sejam pares. Então $p_2, p_4, \ldots$ será par enquanto $p_1, p_3, \ldots$ e $q_1, q_2, \ldots$ será ímpar. Assim, os convergentes $p_n/q_n$ nunca têm a paridade ímpar/par.

Por outro lado, se $p, q \in \mathbb{Z}$ e $|p - \beta q - 1/2| < (8|q|)^{-1}$ então $|(2p-1) - \beta(2q)| < (4|q|)^{-1}$ e então $|\beta - (2p-1)/2q| < 2^{-1}|2q|^{-2}$; portanto, pelo Teorema de Legendre, $(2p-1)/2q$ deveria ser um dos convergentes de $\beta$, mas isso é impossível em vista do argumento de paridade acima. A conclusão é que (5.12) é válida.

# REFERÊNCIAS


BERGAMASCO, A. Perturbations of globally hypoelliptic operators. **Journal of Differential Equations**, 1994. Citado nas páginas 16, 69 e 91.

BERGAMASCO, A.; ZANI, S. L. Global hypoellipticity of a class of second order operators. **Canadian Mathematical Bulletin**, 1994. Citado nas páginas 16 e 69.

FIGUEIREDO, D. G. **Números Irracionais e Transcendentes**. [S.l.]: Rio de Janeiro: SBM. Coleção Fundamentos da Matemática elementar, 1985. Citado na página 22.

FOLLAND, G. B. **Real analysis : modern techniques and their applications**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1999. Citado na página 18.

GREENFIELD, S.; WALLACH, N. Global hypoellipticity and liouville numbers. **Proc. Am. Math. Soc. 31**, 1972. Citado na página 56.

KREYSZIG, E. **Introductory Functional Analysis with Applications**. [S.l.]: John Wiley & Sons. Inc., 1978. Citado nas páginas 16, 20 e 30.

LIMA, E. L. **Curso de análise**. [S.l.]: Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2014. v. 2. Citado na página 18.

MOREIRA, C. G. T. A.; TENGAN, E.; MARTINEZ, F. E. B.; SALDANHA, N. C. **Teoria dos Números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro**. [S.l.]: Rio de Janeiro: IMPA, 2010. Citado na página 27.

RUDIN, W. **Principles of mathematical analysis**. [S.l.]: McGraw-Hill, 1976. Citado nas páginas 16, 19, 30 e 31.

____. **Real and Complex Analysis**. [S.l.]: McGraw-Hill, 1987. Citado nas páginas 20, 21, 31 e 39.

____. **Functional Analysis**. [S.l.]: McGraw-Hill, 1991. Citado na página 21.

SALO, M. **Fourier analysis and distribution theory**. Lecture notes: [s.n.], 2013. Citado nas páginas 16, 29, 33, 42, 53 e 54.

SCHMIDT, W. **Diophantine Approximation**. [S.l.]: Lecture Notes in Mathematics, Vol. 785, Springer-Verlag, New York, 1980. Citado na página 27.

WARNER, F. W. **Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups**. [S.l.]: Springer, 1983. Citado na página 39.

ZANI, S. L. **Hipoeliticidade Global para Operadores de Segunda Ordem**. dissertação de mestrado, ICMC-USP: [s.n.], 1988. Citado na página 70.

ICMC USP
SÃO CARLOS