

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Esferas hiperbólicas com pontos cônicos

João dos Reis Junior

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em
Matemática (PPG-Mat)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

João dos Reis Junior

Esferas hiperbólicas com pontos cônicos

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Matemática. *EXEMPLAR DE DEFESA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Carlos H. Grossi Ferreira

USP – São Carlos
Novembro de 2020

João dos Reis Junior

Hyperbolic spheres with cone singularities

Master dissertation submitted to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Master Program in Mathematics. *EXAMINATION BOARD PRESENTATION COPY*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Carlos H. Grossi Ferreira

USP – São Carlos
November 2020

Dedico este trabalho às pessoas que, mesmo tentadas pelo flerte da loucura, preferem continuar seguindo o caminho da razão e sobriedade, embora mantendo a sua loucura como um hobby.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer meus dois grandes mentores em toda minha jornada científica, Sasha Ananin e Carlos H. Grossi, pacientes orientadores que me deram o prazer de conhecer matemática pela primeira vez.

Igualmente importantes nessa jornada foram meus amigos na universidade. Dentre todos os muitos deles, valem a menção Christian V. B. Lemos, Rafael F. Pereira, Philip V. Chiovetto e Uirá N. Matos, sendo o último meu parceiro de discussões matemáticas mais frequentes, que guardo com nostalgia.

Agradeço a minha família pela melhor educação que poderiam me dar, pelo carinho e pela confiança que sempre tiveram em mim.

Agradeço a Natane Neves, minha companheira, pela confiança, paciência, carinho e companhia.

E agradeço a todos aqueles que dedicaram suas vidas a essa nobre ciência, a invenção mais elaborada da humanidade, tornando-a este corpo de conhecimento curioso e intrincado, que tive o prazer de experienciar.

Esse trabalho foi realizado com o apoio financeiro do CNPq, processo número 131527/2018-5, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

“The players listen very carefully and respectfully to all that the clever men have to say about what is to happen in the next generation. The players then wait until all the clever men are dead, and bury them nicely. They then go and do something else.”
(The Napoleon of Notting Hill, Gilbert K. Chesterton)

RESUMO

JOÃO DOS REIS JR. **Esferas hiperbólicas com pontos cônicos**. 2020. 80 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2020.

A presente dissertação tem como tema principal o estudo de esferas métricas com pontos cônicos, e em especial, os espaços classificadores de tais esferas. Na primeira seção é feita uma breve exposição do tratamento de geometrias clássicas utilizando formas hermitianas, que é o framework utilizado na parte principal do texto. A seguir, é apresentada uma versão (traduzida para o português) do artigo que se originou do trabalho de colaboração do autor dessa dissertação com outros 3 coautores. O artigo foi publicado no periódico *Topology and its applications*, 272 (2020), 107073. O preprint que deu origem à publicação também encontra-se anexado à dissertação.

Palavras-chave: Esferas hiperbólicas, Pontos cônicos, Geometria.

ABSTRACT

JOÃO DOS REIS JR. **Hyperbolic spheres with cone singularities**. 2020. 80 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2020.

This essay has as its main theme the study of metric spheres with cone singularities, and specially, the classifying spaces of such spheres. In the first section we present a brief exposition of the treatment using hermitian forms for classical geometries, the framework utilized in the principal part of the text. Next, it is presented a version (translated to Portuguese) of the paper originated from the collaboration work between the author and another 3 co-authors. The paper has been published in the journal *Topology and its applications*, 272 (2020), 107073. The preprint that gave origin to the publication is also attached to this essay.

Keywords: Hyperbolic spheres, Cone singularities, Geometry.

SUMÁRIO

1	FUNDAMENTOS DE GEOMETRIA CLÁSSICA	17
1.1	Conceitos iniciais	17
1.1.1	<i>Definições básicas.</i>	17
1.1.2	<i>Algumas construções geométricas.</i>	19
1.1.3	<i>Fatos preliminares.</i>	19
1.2	Geodésicas	20
1.3	Conexão de Levi-Civita	21
1.3.1	<i>Transporte paralelo ao longo de geodésicas.</i>	23
2	ESFÉRICAS HIPERBÓLICAS COM PONTOS CÔNICOS	27
2.1	Introdução	27
2.1.1	<i>Caso geral</i>	28
2.1.2	<i>2n-gonos hiperbólicos convexos</i>	29
2.1.3	<i>Geometria em $C(a_0, a_1, \dots, a_n)$ e outros espaços relacionados</i>	29
2.1.4	<i>Breve esboço da exposição</i>	29
2.1.5	<i>Trabalhos relacionados</i>	31
2.2	Fatos preliminares	31
2.3	Lemas técnicos	35
2.4	O espaço $S(a_0, a_1, a_2, a_3)$ de hexágonos, $\sigma = -1$	38
2.4.1	<i>Pequeno n</i>	40
2.4.2	<i>Topologia de $S(a_0, a_1, a_2, a_3)$</i>	41
2.4.3	<i>Discretude de M_3</i>	51
2.5	Esferas hiperbólicas com $n + 1$ pontos cônicos e $2n$ -gonos convexos	53
3	REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA	79

FUNDAMENTOS DE GEOMETRIA CLÁSSICA

1.1 Conceitos iniciais

1.1.1 Definições básicas.

Seja \mathbb{K} um dos seguintes corpos: \mathbb{R} (números reais) ou \mathbb{C} (números complexos). A aplicação $a \mapsto \bar{a}$ denota a conjugação no caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e a aplicação idêntica no caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Definição 1. Uma *geometria clássica* é um \mathbb{K} -espaço vetorial V munido de uma *forma hermitiana* $\langle -, - \rangle$. Por definição, isto significa que a forma assume valores em \mathbb{K} , é biaditiva, e satisfaz as identidades $\langle kv_1, v_2 \rangle = k \langle v_1, v_2 \rangle$ e $\langle v_1, v_2 \rangle = \overline{\langle v_2, v_1 \rangle}$ para todos $v_1, v_2 \in V$, $k \in \mathbb{K}$.

Denotamos $V^\times = V - \{0\}$ o espaço vetorial sem origem e $\pi : V^\times \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V$ a projeção natural para a projetivização de V . O espaço tangente num ponto $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V$ pode ser descrito como o \mathbb{K} -espaço vetorial

$$T_p \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V = \text{Lin}_{\mathbb{K}}(p, V/p)$$

de transformações lineares de $\mathbb{K}p$ para $V/\mathbb{K}p$. Vamos entender como funciona essa identificação. Seja $U \subset \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V$ aberto. Denotamos $U^* \subset V$ o aberto saturado de U em V , isto é, $\pi^{-1}U$. Dados $f : U \rightarrow \mathbb{K}$ suave e $\varphi \in \text{Lin}_{\mathbb{K}}(p, V/p)$ vetor tangente em p , seja $\hat{\varphi} \in \text{Lin}_{\mathbb{K}}(p, V)$ um levantamento de φ . A derivação de f por φ em p é dada por

$$\varphi_p f = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f \circ \pi([1 + t\hat{\varphi}]p).$$

note que (como é necessário) a fórmula não depende do representante de p e do levantamento $\hat{\varphi}$.

Aqui, e no que segue, frequentemente não faremos distinção na notação de um ponto em $\mathbb{P}_{\mathbb{K}} V$, de um representante deste em V e do espaço 1-dimensional correspondente, quando o conceito ou expressão não depende da interpretação. Por exemplo, o subespaço $p^\perp \leq V$ é bem definido para todo $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V$.

Se p é não-isotrópico, isto é, se $\langle p, p \rangle \neq 0$, podemos identificar naturalmente V/p com p^\perp . Neste caso, nós interpretamos o espaço tangente como $T_p \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V = \text{Lin}_{\mathbb{K}}(p, p^\perp)$. Este, por sua vez, herda a forma \mathbb{R} -bilinear

$$(t_1, t_2) := \pm \frac{\text{tr}_{\mathbb{R}}(t_1^* t_2)}{\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}}$$

onde $t_1, t_2 : p \mapsto p^\perp$ são vetores tangentes, $t_1^* : p^\perp \rightarrow p$ é o mapa adjunto de t_1 com respeito a forma hermitiana, $\text{tr}_{\mathbb{R}}(t_1^* t_2)$ denota o traço da aplicação \mathbb{R} -linear $t_1^* t_2 : p \rightarrow p$ e o sinal pode ser escolhido de forma conveniente. Vamos nos referir a esta forma como a *métrica* da geometria clássica. No caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, temos também a *métrica hermitiana*

$$\langle t_1, t_2 \rangle := \pm \text{tr}_{\mathbb{C}}(t_1^* t_2)$$

É fácil ver que $\text{Re}\langle t_1, t_2 \rangle = (t_1, t_2)$. Obviamente, a métrica (hermitiana) depende suavemente de p não-isotrópico. Se a forma hermitiana em V é não-degenerada, então a métrica é não-degenerada.

A assinatura dos pontos dividem $\mathbb{P}_{\mathbb{K}} V$ em três partes: *pontos negativos*, *pontos isotrópicos* e *pontos positivos*, definidos respectivamente como

$$\begin{aligned} BV &:= \{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V \mid \langle p, p \rangle < 0\}, \\ SV &:= \{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V \mid \langle p, p \rangle = 0\}, \\ EV &:= \{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V \mid \langle p, p \rangle > 0\} \end{aligned}$$

Exemplo 1. Tome

(1) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\dim_{\mathbb{C}} V = 2$, a forma com assinatura $++$ e o sinal $+$ na definição da métrica hermitiana. Obtemos a esfera 2-dimensional redonda.

(2) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\dim_{\mathbb{C}} V = 2$, a forma com assinatura $+-$ e o sinal $-$ na definição da métrica hermitiana. Seja $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V$ não-isotrópico. Pela decomposição ortogonal $V = p \oplus p^\perp$ segue que a métrica hermitiana em $T_p \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V$ é positivo definida. Ganhamos dois discos de Poincaré hiperbólicos BV e EV , colados pelo absoluto SV .

(3) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\dim_{\mathbb{R}} V = 3$, a forma com assinatura $++-$ e o sinal $-$. O disco BV é o disco hiperbólico de Beltrami-Klein.

(4) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\dim_{\mathbb{C}} V = 3$, a forma com assinatura $++-$ e o sinal $-$. A 4-bola aberta BV é o plano hiperbólico complexo $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$.

De maneira similar, podemos descrever muitas outras geometrias: Esféricas, Fubini-Study, hiperbólicas incluindo as de curvatura seccional constante e curvatura holomorfa constante, algumas geometrias lorentzianas como espaços de de Sitter e anti de Sitter.

1.1.2 Algumas construções geométricas.

Exemplo 2. Tomemos $W \leq V$, $\dim_{\mathbb{R}} W = 2$ tal que W não é \mathbb{C} -espaço vetorial (caso contrário, $\mathbb{P}_{\mathbb{C}} W$ é simplesmente um ponto em $\mathbb{P}_{\mathbb{C}} V$). Suponhamos que a forma hermitiana, restrita a W , é real e não nula. É fácil entender que $\mathbb{K}W \simeq \mathbb{K} \otimes_{\mathbb{R}} W$. Então, o círculo

$$G W := \mathbb{P}_{\mathbb{K}} W = \mathbb{P}_{\mathbb{R}} W \simeq \mathbb{S}^1$$

é dito uma *geodésica* em $\mathbb{P}_{\mathbb{K}} V$. A linha projetiva $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}W)$ é dita a *linha projetiva* da geodésica. De fato, conforme provaremos na seção 1.3.1, tal construção é de fato uma geodésica no sentido usual com respeito a métrica nos pontos não isotrópicos, e toda geodésica em $\mathbb{P}_{\mathbb{K}} V$ tem essa mesma origem.

Exemplo 3. Seja $W \leq V$, $\dim_{\mathbb{R}} W = 2$ nas condições de (2) do exemplo 1. A parte real da forma hermitiana restrita a W pode ser indefinida não-degenerada, definida, não-nula degenerada, ou nula. O círculo $\mathbb{P}_{\mathbb{K}} W$ é chamado respectivamente hiperciclo, círculo métrico, horociclo e absoluto. Dentro de cada um dos discos de Poincaré EV e BV , estes são os usuais hiperciclos, círculos métricos e horociclos.

1.1.3 Fatos preliminares.

Seja $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V$ não-isotrópico. Iremos utilizar a seguinte notação para a decomposição ortogonal:

$$V = p \oplus p^{\perp}, \quad v = \pi'[p] + \pi[p]v, \quad (1.1)$$

onde

$$\pi'[p]v := \frac{\langle p, v \rangle}{\langle p, p \rangle} p \in \mathbb{K}p \quad \text{e} \quad \pi[p]v := v - \frac{\langle p, v \rangle}{\langle p, p \rangle} p \in p^{\perp} \quad (1.2)$$

não dependem da escolha de representante para p .

A forma hermitiana restrita a um \mathbb{K} -subespaço bidimensional $W \leq V$ pode ser nula, definida, indefinida não-degenerada ou não-nula degenerada. A correspondente linha projetiva $\mathbb{P}_{\mathbb{K}} W$ será chamada respectivamente nula, esférica, hiperbólica ou euclidiana.

Lema 1. (1) Seja L uma linha projetiva. Para todo $p \in L$ não-isotrópico existe um único $q \in L$ ortogonal a p , isso é, $\langle p, q \rangle = 0$.

(2) Pontos isotrópicos numa linha projetiva hiperbólica formam uma $(n-1)$ -esfera, onde $n = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}$. Linhas projetivas euclidianas possuem um único ponto isotrópico. \square

Quando $p \in V$ é não isotrópico, temos a identificação $T_p \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V = \text{Lin}_{\mathbb{K}}(p, p^{\perp}) = p^{\perp} \langle p, - \rangle$. Em termos dessa caracterização, o mapa adjunto e o traço de um vetor tangente são facilmente calculado.

Lema 2. (1) O mapa adjunto a $v\langle p, - \rangle$ é dado por $(v\langle p, - \rangle)^* = p\langle v, - \rangle$.

(2) Seja $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$ não-isotrópico e seja $v \in V$. Então o traço do mapa \mathbb{R} -linear $t := v\langle p, - \rangle$ é dado por $\text{tr}_{\mathbb{R}} t = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K} \cdot \text{Re}\langle p, v \rangle$ \square

Definição 2. Seja $W \subset V$ \mathbb{R} -subespaço vetorial. Dizemos que um ponto $p \in W$ é *projetivamente suave* em W se $\dim_{\mathbb{K}}(p\mathbb{K} \cap W) = \min_{0 \neq w \in W} \dim_{\mathbb{R}}(\cap W)$.

Não é difícil provar que os pontos projetivamente suaves em W formam uma região aberta em $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}W$. Além disso, temos

Lema 3. [AGG, Lemma 4.2.2] Seja $W \subset V$ um \mathbb{R} -subespaço vetorial, seja $p \in W$ ponto projetivamente suave em W , e seja $\varphi \in \text{Lin}_{\mathbb{K}}(p, V)$. Então $t_{\varphi} \in T_p \mathbb{P}_{\mathbb{K}}W$ se e somente se $\varphi p \in W + \mathbb{K}p$ \square

O vetor tangente de uma curva suave pode ser expressado em termos da identificação $T_p \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V = \text{Lin}_{\mathbb{K}}(p, p^{\perp})$:

Lema 4. Seja $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$ uma curva suave e seja $c_0 : [a, b] \rightarrow V$ um levantamento suave de c para V . Se o ponto $c(t_0)$ é não-isotrópico, então o vetor tangente $\dot{c}(t_0) : c_0(t_0) \rightarrow c_0(t_0)^{\perp}$ é dado por $\dot{c}(t_0) : c_0(t_0) \mapsto \pi[c(t_0)]\dot{c}_0(t_0)$ \square

1.2 Geodésicas

Vamos relembrar a definição do exemplo 1 (1). Tome um \mathbb{R} -subespaço bidimensional $W \subset V$ tal que a forma hermitiana, restrita a W , é real e não nula. É imediato que $\mathbb{K}W \simeq \mathbb{K} \otimes_{\mathbb{R}} W$. Logo, $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}W = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}W$. O círculo $GW := \mathbb{P}_{\mathbb{K}}W$ é, por definição, uma geodésica. (O corolário X.X relaciona esta definição com a tradicional). A geodésica W gera a linha projetiva $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}W)$. Uma geodésica é dita esférica, hiperbólica ou euclidiana a depender da natureza de sua linha projetiva. Começamos provando alguns fatos elementares sobre geodésicas:

Lema 5. (1) Sejam $g_1, g_2 \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$ pontos distintos e não ortogonais. Então existe uma única geodésica contendo g_1 e g_2 .

(2) Seja $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$ não-isotrópico e seja $0 \neq t \in T_p \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$, $t : p \rightarrow p^{\perp}$. Então existe uma única geodésica com vetor tangente t em p . Essa geodésica é dada pelo subespaço $W = \mathbb{R}p + \mathbb{R}tp$.

Demonstração. (1) Seja $W = \mathbb{R}g_1 + \mathbb{R}\langle g_1, g_2 \rangle g_2$. É claro que $g_1, g_2 \in GW$. Se $g_1, g_2 \in W'$, então $W' = \mathbb{R}k_1g_1 + \mathbb{R}k_2g_2$ para certos $k_1, k_2 \in \mathbb{K}$ tais que $k_1\bar{k}_2\langle g_1, g_2 \rangle \in \mathbb{R}^*$ (pois W' é geodésica). Então, $W' = \mathbb{R}k_1g_1 + \mathbb{R}k_1\bar{k}_2\langle g_1, g_2 \rangle k_2g_2 = k_1W$, isso é, $GW' = GW$.

(2) A geodésica GW , onde $W = \mathbb{R}p + \mathbb{R}tp$, não depende da escolha de $p \in \mathbb{K}p$. Pelo lema 3, t é vetor tangente a GW em p . Seja GW' uma geodésica com vetor tangente t . Podemos

escolher W' tal que $p \in W'$. Pelo lema 3, $tp \in W' + \mathbb{K}p$. Então, $tp \in p^\perp$ implica $tp \in W'$. Ou seja, $W' = \mathbb{R}p + \mathbb{R}tp$ \square

Denotamos por $G\langle g_1, g_2 \rangle$ a geodésica que contem os pontos distintos e não ortogonais $g_1, g_2 \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$.

Tomemos $g_1, g_2 \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$ distintos e ortogonais. Assuma que a linha projetiva L gerada por $G\langle g_1, g_2 \rangle$ é não nula. Ao menos um dos g_1, g_2 é não-isotrópico — digamos, g_1 . Toda geodésica em L passando por g_1 tem a forma GW com $W = \mathbb{R}q + \mathbb{R}g_1$, onde $g_1 \neq q \in L$, e $\langle q, g_1 \rangle \in \mathbb{R}^*$. Então, $\pi[g_1]q \in GW$. Pelo lema 1 (1), g_2 é o único ponto em L ortogonal a g_1 . Portanto, $\pi[g_1]q = g_2$ em $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$. Ou seja, toda geodésica em L que passa por g_1 necessariamente passa por g_2 . Em particular, toda geodésica numa linha projetiva euclidiana passa por seu ponto isotrópico (veja lema 1 (2)). Neste caso, no mapa afim \mathbb{K} de pontos não-isotrópicos de L , as geodésicas correspondem a linhas retas. Isto justifica o termo 'euclidiana'. Como a métrica é na realidade nula nas linhas projetivas euclidianas, talvez o termo mais apropriado fosse *linha afim*.

1.3 Conexão de Levi-Civita

No que segue, assumimos que a forma hermitiana $\langle -, - \rangle$ é não-degenerada. Em particular, BV e EV são munidos de métrica pseudo-riemanniana. Além disso, usaremos as seguintes convenções:

Seja $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$ não-isotrópico. Estendendo por zeros, podemos considerar qualquer vetor tangente $t : p \rightarrow p^\perp$ como uma aplicação linear $t \in \text{Lin}_{\mathbb{K}}(V, V)$. Dessa forma, $T_p \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V = \text{Lin}_{\mathbb{K}}(p, p^\perp) \subset \text{Lin}_{\mathbb{K}}(V, V)$. É fácil entender que valem $t = t\pi'[p]$, $t = \pi[p]t$, $t\pi[p] = \pi'[p]t = 0$, e $st = 0$ para todos vetores tangentes $s, t \in \text{Lin}_{\mathbb{K}}(V, V)$ em p . Podemos fazer o mesmo no caminho inverso; Dado $t \in \text{Lin}_{\mathbb{K}}(V, V)$ arbitrário, definimos o vetor tangente

$$t_p := \pi[p]t\pi'[p]$$

em p (neste caso dizemos que o vetor tangente t é *observado* em p).

Seja $U \subset V$ um aberto saturado (i.e., $\mathbb{K}^*U \subset U$) sem pontos isotrópicos. Um *campo levantado* sobre U é uma aplicação suave $X : U \rightarrow \text{Lin}_{\mathbb{K}}(V, V)$ tal que $X(p)_p = X(p)$ and $X(kp) = X(p)$ para todo $p \in U$ e $k \in \mathbb{K}^*$. Em outras palavras, X consistentemente define um campo suave sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}U$.

Definição 3. Toda aplicação $t \in \text{Lin}_{\mathbb{K}}(V, V)$ dá origem a seu campo (levantado) T *espalhado*: Este é dado pela regra $T(p) = t_p$, que é definido para todo p não-isotrópico.

Para $t \in \text{Lin}_{\mathbb{K}}(V, V)$ e X campo levantado, definimos

$$\nabla_t X(p) := \left(\frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} X((1 + \varepsilon t)p) \right)_p.$$

Como $\pi[kp] = \pi[p]$ e $\pi'[kp] = \pi'[p]$ para todo $p \in U$ e $k \in \mathbb{K}^*$, o campo $p \mapsto \nabla_{Y(p)}X$ é um campo levantado para arbitrários X, Y campos levantados sobre U . Segue da definição que ∇ é uma conexão afim.

Lema 6. Seja $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$ não-isotrópico e seja t vetor tangente em p . Então vale

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \pi'[p + \varepsilon t p] = - \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \pi[p + \varepsilon t p] = t + t^*.$$

Demonstração. Pela definição de π' , temos $\pi'[p + \varepsilon t p] = \frac{\langle p + \varepsilon t p, - \rangle}{\langle p, p \rangle + \varepsilon^2 \langle t p, t p \rangle} (p + \varepsilon t p)$. Derivando a fórmula, temos

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \frac{\langle p + \varepsilon t p, - \rangle}{\langle p, p \rangle + \varepsilon^2 \langle t p, t p \rangle} (p + \varepsilon t p) = \frac{\langle t p, - \rangle}{\langle p, p \rangle} p + \frac{\langle p, - \rangle}{\langle p, p \rangle} t p.$$

O segundo termo é $t\pi'[p] = t$. Denotando $\varphi := \frac{\langle t p, - \rangle}{\langle p, p \rangle} p$, temos

$$\langle t x, y \rangle = \langle t \pi'[p] x, y \rangle = \left\langle \frac{\langle p, x \rangle}{\langle p, p \rangle} t p, y \right\rangle = \frac{\langle x, p \rangle}{\langle p, p \rangle} \langle t p, y \rangle = \left\langle x, \frac{\langle t p, y \rangle}{\langle p, p \rangle} p \right\rangle = \langle x, \varphi y \rangle$$

para todos $x, y \in V$. Logo, $t^* = \varphi$ □

Lema 7. Seja $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$ não-isotrópico. Sejam s e t vetores tangentes em p . Então

$$\nabla_T S(x) = (s\pi[x]t - t\pi'[x]s)_x$$

para todo $x \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$ não-isotrópico, onde os campos S e T são respectivamente campos espalhados de s e t . Em particular, $\nabla_T S(p) = 0$.

Demonstração. Pelo lema anterior,

$$\begin{aligned} \nabla_T S(x) &= \nabla_{t_x} S(x) = \left(\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} S(x + \varepsilon t_x x) \right)_x = \left(\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \pi[x + \varepsilon t_x x] s \pi'[x + \varepsilon t_x x] \right)_x = \\ &= \left(- (t_x + (t_x)^*) s \pi'[x] + \pi[x] s (t_x + (t_x)^*) \right)_x = (s\pi[x]t - t\pi'[x]s)_x \end{aligned}$$

já que $\pi[x](t_x)^* = (t_x)^* \pi'[x] = 0$ ■ □

Lema 8. ∇ é a conexão de Levi-Civita da métrica (hermitiana) de toda componente de $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}V \setminus SV$.

Demonstração. Seja $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$ não-isotrópico. Sejam S e T campos levantados locais com $S(p) := s$ e $T(p) := t$. Para mostrar que $(\nabla_S T - \nabla_T S - [S, T])(p) = 0$, lembramos que a torção é um tensor e que portanto podemos assumir que S e T são espalhados respectivamente por s e t (veja Definição 3). Segue do lema 7 que $\nabla_S T(p) = \nabla_T S(p) = 0$. O fato que $[S, T](p) = 0$ segue assim: Seja f função suave e seja \hat{f} seu levantamento para V . Por definição, $T(x)f = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \hat{f}(x + \varepsilon \pi[x]t x)$. Logo

$$\begin{aligned}
S(p)(Tf) &= \frac{d}{d\delta} \Big|_{\delta=0} \left(\frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \hat{f}(p + \delta sp + \varepsilon \pi[p + \delta sp]t(p + \delta sp)) \right) = \\
&= \frac{d}{d\delta} \Big|_{\delta=0} \left(\frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \hat{f}(p + \delta sp + \varepsilon \pi[p + \delta sp]tp) \right) = \\
&= \frac{d}{d\delta} \Big|_{\delta=0} \left(\frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \hat{f} \left(p + \delta sp + \varepsilon tp - (p + \delta sp) \frac{k_0 \varepsilon \delta}{1 + \delta^2 \langle sp, sp \rangle / \langle p, p \rangle} \right) \right),
\end{aligned}$$

onde denotamos $k_0 := \langle sp, tp \rangle / \langle p, p \rangle$. Como $\hat{f}(pk) = \hat{f}(p)$ para todo $k \in \mathbb{K}^*$, segue que

$$\hat{f}((1 - k_0 \varepsilon \delta)p + \delta(1 - k_0 \varepsilon \delta)sp + \varepsilon tp) = \hat{f} \left(p + \delta sp + \frac{\varepsilon}{1 - k_0 \varepsilon \delta} tp \right).$$

Sendo f suave,

$$\begin{aligned}
S(p)(Tf) &= \frac{d}{d\delta} \Big|_{\delta=0} \left(\frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \hat{f}(p + \delta sp + \varepsilon tp - k_0 \varepsilon \delta(p + \delta sp)) \right) = \\
&= \frac{d}{d\delta} \Big|_{\delta=0} \left(\frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \hat{f} \left(p + \delta sp + \frac{\varepsilon}{1 - k_0 \varepsilon \delta} tp \right) \right) = \frac{d}{d\delta} \Big|_{\delta=0} \left(\frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \hat{f}(p + \delta sp + \varepsilon tp) \right).
\end{aligned}$$

Logo, $S(p)(Tf) = T(p)(Sf)$, isto é, $[S, T](p) = 0$.

Para verificar que $v(S, T)(p) = (\nabla_v S(p), T(p)) + (S(p), \nabla_v T(p))$ para um vetor tangente v em p , definimos $\varphi_1 := \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} S(p + \varepsilon v p)$ e $\varphi_2 := \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} T(p + \varepsilon v p)$. Então,

$$\pm \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}(\nabla_v S(p), T(p)) = \pm \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}(\pi[p] \varphi_1 \pi'[p], T(p)) = \text{tr}_{\mathbb{R}} \left((\pi[p] \varphi_1 \pi'[p])^* T(p) \right) = \text{tr}_{\mathbb{R}} (\varphi_1^* T(p)),$$

$$\pm \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}(S(p), \nabla_v T(p)) = \text{tr}_{\mathbb{R}} (S^*(p) \varphi_2), \text{ e}$$

$$\pm \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}v(S, T)(p) = \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \text{tr}_{\mathbb{R}} (S^*(p + \varepsilon v p) T(p + \varepsilon v p)) = \text{tr}_{\mathbb{R}} (\varphi_1^* T(p)) + \text{tr}_{\mathbb{R}} (S^*(p) \varphi_2).$$

Por um argumento similar se prova o caso hermitiano. \square

1.3.1 Transporte paralelo ao longo de geodésicas

Definição 4. Sejam $p, q \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V$. Definimos como a *tância* entre p e q a expressão:

$$\text{ta}(p, q) := \frac{\langle p, q \rangle \langle q, p \rangle}{\langle p, p \rangle \langle q, q \rangle}$$

Note que essa expressão não depende de representantes de p e q .

A tância recebe esse nome por ser intimamente relacionada com a distância nas geometrias clássicas¹

¹ De fato, a distância é uma função monótona da tância. Por ser algébrica, envolvendo apenas a forma hermitiana, é frequentemente útil utilizá-la em detrimento da própria distância, quando o contexto permite. Essa abordagem será utilizada no próximo capítulo

Definição 5. Seja $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$ não-isotrópico, seja t vetor tangente em p , e seja T o campo espalhado por t . O campo levantado suave

$$\text{Tn}(t)(-) := \frac{T(-)}{\text{ta}(p, -)}$$

é definido para todo ponto fora de $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}p^{\perp} \cup SV$.

Lema 9. Seja G uma geodésica e seja t um vetor tangente não nulo de G num ponto não-isotrópico $p \in G$. Então o campo $\text{Tn}(t)$ é não nulo e tangente a G em todo ponto em que $\text{Tn}(t)$ é definido.

Demonstração. Seja $g \in G$ não-isotrópico e não ortogonal a p . Claramente $\varphi := \text{Tn}(t)(g) \neq 0$, já que $\pi[g]t\pi'[g] = 0$ implicaria $g \in p^{\perp}$. Pelo lema 5 (2), $G = G\varphi$ com $W = \mathbb{R}p + \mathbb{R}t$. Podemos assumir que $g \in W$. Logo, $\varphi g \in W$ e $\text{Tn}(t)(g)$ é tangente a G em g pelo lema 3. \square

Lema 10. Sejam $p, q \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$ distintos e não-ortogonais, com p não-isotrópico. Denotamos por $G[p, q]$ o segmento orientado² da geodésica $G\langle p, q \rangle$ que não contém o ponto ortogonal a p . Seja $\varphi : V \rightarrow V$ dada por $\varphi = q\langle p, q \rangle^{-1}\langle p, - \rangle$. Então φ_p é tangente ao segmento orientado $G[p, q]$ em p .

Demonstração. O vetor tangente φ_p não depende da escolha de representantes para p e q . Podemos assumir que $\langle p, p \rangle = \sigma$ e $\langle p, q \rangle = \sigma a$, onde $\sigma \in \{-1, +1\}$ e $a > 0$. Claramente, $\varphi_p : p \mapsto (1/a)\pi[p]q(1/a)$. A curva $c_0(t) := (1-t)p + tq$, $t \in [0, 1]$, parametriza um levantamento de $G[p, q]$. De fato, $\langle p, (1-t)p + tq \rangle = 0$ significa que $(1-a)t = 1$, o que é impossível. Pelo lema 4, a aplicação linear $\dot{c}(0) : p \mapsto \pi[p]q$ é tangente a $G[p, q]$ em p . \square

Lema 11. Seja $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$ não-isotrópico, seja t um vetor tangente em p e seja T o campo espalhado de t . Então, para todo x não-isotrópico, vale

$$T(x)(\text{ta}(p, -)) = -2\text{ta}(p, x) \text{Re} \frac{\langle tx, x \rangle}{\langle x, x \rangle}$$

Demonstração. A prova é um cálculo direto:

$$\begin{aligned} T(x)(\text{ta}(p, -)) &= \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \frac{\langle p, x + \varepsilon\pi[x]tx \rangle \langle x + \varepsilon\pi[x]tx, p \rangle}{\langle p, p \rangle (\langle x, x \rangle + \varepsilon^2 \langle \pi[x]tx, \pi[x]tx \rangle)} = \frac{\langle p, \pi[x]tx \rangle \langle x, p \rangle + \langle p, x \rangle \langle \pi[x]tx, p \rangle}{\langle p, p \rangle \langle x, x \rangle} = \\ &= -\frac{\langle p, x \rangle \langle x, tx \rangle \langle x, p \rangle + \langle p, x \rangle \langle tx, x \rangle \langle x, p \rangle}{\langle p, p \rangle \langle x, x \rangle^2} = -2\text{ta}(p, x) \text{Re} \frac{\langle tx, x \rangle}{\langle x, x \rangle} \end{aligned}$$

\square

² no caso particular de $G\langle p, q \rangle$ esférica, o segmento $G[p, q]$ é o menor ligando p e q .

Lema 12. Seja G uma geodésica, seja t um vetor tangente não nulo a G num ponto não isotrópico $p \in G$, e seja $h \in T_p L$, onde L é a linha projetiva de G . Então, para todo ponto $g \in G$ não-isotrópico não ortogonal a p , vale

$$\nabla_{Tn(t)(g)} Tn(h) = 0.$$

Demonstração. Denote por H e T os campos respectivamente espalhados por h e t . É suficiente mostrar que $\left(\nabla_{T(g)} \frac{H(-)}{\text{ta}(p, -)}\right)g = 0$. Pelo lema 5 (2), $G = GW$ com $W = \mathbb{R}p + \mathbb{R}t$. Podemos tomar W tal que $g \in W$. Pelos lemas 6 e 11,

$$\begin{aligned} \left(\nabla_{T(g)} \frac{H(-)}{\text{ta}(p, -)}\right)g &= T(g) \left(\frac{1}{\text{ta}(p, -)}\right)H(g)g + \frac{1}{\text{ta}(p, g)} (\nabla_{T(g)} H)g = \\ &= \frac{1}{\text{ta}(p, g)} \pi[g] \left(2 \frac{\langle tg, g \rangle}{\langle g, g \rangle} hg + h\pi[g]tg - t\pi'[g]hg\right). \end{aligned}$$

Segue do lema 3 que $hp = ktp$ para algum $k \in \mathbb{K}$ já que ambos h e t são tangentes a L em p . De $hp^\perp = tp^\perp = 0$, concluímos que $hg = ktg$. Por fim, de $\pi[g] = 1 - \pi'[g]$, $htg = 0$, $\langle tg, g \rangle \in \mathbb{R}$, e $hg = ktg$, obtemos

$$h\pi[g]tg = -h\pi'[g]tg = -hg \frac{\langle g, tg \rangle}{\langle g, g \rangle} = -\frac{\langle tg, g \rangle}{\langle g, g \rangle} hg$$

e

$$t\pi'[g]hg = kt\pi'[g]tg = ktg \frac{\langle g, tg \rangle}{\langle g, g \rangle} = \frac{\langle tg, g \rangle}{\langle g, g \rangle} hg$$

□

Os lemas 12, 9 e 5 (2) tem como consequência o seguinte

Corolário 1. Fora dos pontos isotrópicos, uma geodésica no sentido do exemplo 2 é uma geodésica no sentido da conexão de Levi-Civita ∇ . Toda geodésica dessa conexão têm essa natureza. □

ESFÉRICAS HIPERBÓLICAS COM PONTOS CÔNICOS

2.1 Introdução

No trabalho germinal [Thu], W. P. Thurston estudou o espaço de 2-esferas planas com pontos cônicos de curvatura prescrita. Tais espaços possuem estrutura de variedade hiperbólica complexa, mas em geral não são completos. Seu completamento tem uma estrutura natural de variedade cônica complexa hiperbólica que é *orbifold* exatamente quando as curvaturas prescritas satisfazem uma simples condição. Dessa forma, Thurston recriou os célebres 7 quocientes compactos não-aritméticos da 2-bola holomorfa (abreviando, *quocientes* não-aritméticos) que foram construídos por Deligne-Mostow [DM1], [DM2] a 30–35 anos atrás. Já que não queremos distinguir um quociente Q de um recobrimento (não-ramificado) finito de Q , assumimos Q variedade. Recentemente, 4 novos quocientes não-aritméticos foram construídos em [DPP]. Estes 4 exemplos são muito similares aos outros 7. Cada um dos 11 contém ao menos quatro *curvas* \mathbb{C} -*fuchsianas*, i.e., curvas suaves compactas holomorfas totalmente geodésicas.

Por sua vez, os quocientes aritméticos são conhecidos por serem de 2 tipos [McR]: O *primeiro* tipo e o *segundo* tipo que é relacionado à álgebras com divisão. Levando em conta a rigidez (Mostow-Prasad) dos quocientes, o número de quocientes é contável para cada tipo. Os tipos podem ser distinguidos pela presença de uma curva \mathbb{C} -fuchsiana: um quociente do primeiro tipo possui uma tal curva, enquanto um do segundo tipo não. Usando curvas \mathbb{C} -fuchsianas, definimos o tipo de um quociente arbitrário pelo mesmo critério e chegamos às seguintes questões.

Problema 1. Existe algum quociente não-aritmético do segundo tipo? Existem infinitos quocientes não-aritméticos do primeiro/segundo tipo?

Esboço Neste artigo, nós desenvolvemos algumas ferramentas que permitem o estudo do espaço $C(a_0, a_1, \dots, a_n)$ de 2-esferas com pontos cônicos de curvaturas prescritas $2a_0, 2a_1, \dots, 2a_n$, onde o conjunto dos demais pontos é dotado de geometria esférica de curvatura $\sigma := 1$ ou hiperbólica de curvatura $\sigma := -1$. Com sorte, $C(a_0, a_1, \dots, a_n)$ ou espaços relacionados podem jogar alguma luz no problema enunciado.

Exemplo 1 (Toy example.). De modo a esclarecer o panorama geral, nós primeiro olhamos para o caso mais simples de 4 pontos cônicos de fixadas curvaturas $2a, \pi, \pi, \pi$, onde $a \in]0, \frac{\pi}{2}[$ quando $\sigma = 1$ e $a \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$ quando $\sigma = -1$. Nessa situação em particular, cada 2-esfera hiperbólica ou esférica pode ser cortada num triângulo sólido (disco fechado) limitado por um triângulo e morando no espaço modelo, i.e., na esfera redonda ou no plano hiperbólico. De fato, basta ligar o ponto cônico p de curvatura $2a$ com os outros 3 pontos cônicos por segmentos geodésicos simples tais que estes se interceptem apenas em p (por exemplo, tomando os segmentos mais curtos) e então cortar a 2-sphere ao longo destes segmentos. O ponto p se divide nos vértices do triângulo e os outros 3 pontos cônicos serão pontos médios dos lados do triângulo. Se dividirmos o triângulo sólido ao longo de uma mediana e então colar as correspondentes metades, nós *modificamos* o triângulo original com respeito a essa mediana. Ao fazê-lo, as 2-esferas correspondentes aos triângulos t_1 and t_2 são isométricas (orientação preservada) se e somente se t_1 e t_2 diferem por um número finito de tais modificações. Isso nos permite descrever o espaço $C(a, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ como o quociente de um disco topológico S , o espaço de triângulos orientados no sentido anti-horário de área fixada $\sigma(\pi - 2a)$, pelo grupo M_3 gerado por 3 involuções que são nada mais que modificações agindo em S . Em certo sentido, essa construção relembra a de [WaW].

2.1.1 Caso geral

Denotamos por G o grupo de Lie de isometrias preservando orientação (=holomorfas) do espaço modelo. Então, $G := \text{PU}(2)$ quando $\sigma = 1$ e $G := \text{PU}(1, 1)$ quando $\sigma = -1$. Sejam c_0, c_1, \dots, c_n pontos cônicos de alguma 2-sphere $\Sigma \in C(a_0, a_1, \dots, a_n)$. Ganhamos uma representação de holonomia $\rho : F_n \rightarrow G$, onde $F_n := \pi_1(\Sigma \setminus \{c_0, c_1, \dots, c_n\})$ é o grupo livre de posto n . Desse modo, obtemos um mapa de holonomia bem definido $h : C(a_0, a_1, \dots, a_n) \rightarrow \text{Rep}(F_n, G)/G$, $\Sigma \mapsto [\rho]$, para o espaço de representações $\text{Rep}(F_n, G)$ considerado módulo conjugação por G .

Como no exemplo 1, podemos ligar c_0 com c_1, \dots, c_n por n segmentos geodésicos simples que se interceptam apenas em c_0 e então cortar Σ ao longo de tais segmentos, ganhando um $2n$ -gono P que limita um disco topológico fechado não necessariamente mergulhável no espaço modelo. Nomeando os vértices ímpares de P que se originam de c_1, \dots, c_n com os mesmos símbolos e os pares, que se originam de c_0 , de p_1, \dots, p_n , vemos que o ângulos internos de P nos p_j 's somam $2\pi - 2a_0$, que os ângulos interiores de P em c_j serão $2\pi - 2a_j$, e que os lados de P adjacentes à c_j têm mesmo comprimento para todo $j = 1, \dots, n$. De certa maneira,, P limita um domínio fundamental para Σ .

Uma escolha de tais segmentos distingue geradores r_0, r_1, \dots, r_n de F_n tal que $F_n = \langle r_0, r_1, \dots, r_n \mid r_n \dots r_1 r_0 = 1 \rangle$. Um apropriado grupo de tranças \overline{M}_n (veja Definição 2) age em F_n e preserva o conjunto de classes de conjugação dos r_j 's. Uma outra escolha destes segmentos é dada no nível de representações por um elemento $m \in \overline{M}_n$ que transforma $[\rho]$ em $[\rho \circ m]$. (Em geral, tais elementos m não formam um subgrupo.) Portanto, a imagem do mapa de holonomia h vive em uma espécie de variedade relativa de caracteres $R(a_0, a_1, \dots, a_n) \subset \text{Rep}(F_n, G)/G$ formada por todas as representações $[\rho]$ tais que as classes de conjugação de $\rho r_0, \rho r_1, \dots, \rho r_n$ são as rotações em sentido anti-horário no espaço modelo pelos ângulos $2a_0, 2a_1, \dots, 2a_n$, listados talvez em ordem diferente. Noutras palavras, $R(a_0, a_1, \dots, a_n)$ é o espaço de relações entre rotações de classe de conjugação prescrita (a ordem das classes não é fixada).

2.1.2 $2n$ -gonos hiperbólicos convexos

Vamos olhar mais carinhosamente para o caso $\sigma = -1$ com $a_0, a_1, \dots, a_n \in [\frac{\pi}{2}, \pi[$ tais que $\sum_j a_j > 2\pi$. Aqui, qualquer $2n$ -gono P é convexo, i.e., todos seus ângulos interiores estão em $]0, \pi]$, e portanto, o disco fechado correspondente é mergulhável no espaço modelo. Nesse caso, o espaço $C(a_0, a_1, \dots, a_n)$ de 2-esferas hiperbólicas com pontos cônicos de curvatura $2a_0, 2a_1, \dots, 2a_n$ pode ser descrito como o quociente de uma componente de $R(a_0, a_1, \dots, a_n)$ pela ação de \overline{M}_n (veja Seção 2.5 e Teorema 2; veja também Seção 2.1.5).

2.1.3 Geometria em $C(a_0, a_1, \dots, a_n)$ e outros espaços relacionados

Como esperamos munir $C(a_0, a_1, \dots, a_n)$ com uma estrutura de orbifold hiperbólico complexo, é natural conjecturar que tal geometria descende de uma componente C de $R(a_0, a_1, \dots, a_n)$ e que \overline{M}_n age discretamente em C por isometrias. (Existe uma maneira mais astuta de construir espaços com geometria de forma similar, mas limitaremos inicialmente para essa variante mais simples.)

Na verdade, mesmo no primeiro caso considerado por Thurston, pode não existir nenhuma geometria hiperbólica em C . (No caso plano, podemos sempre escolher a estrutura advinda da área orientada; esta providencia uma estrutura complexa hiperbólica.) A escolha de uma ‘boa’ estrutura hiperbólica em C é o principal desafio do projeto, e o primeiro passo é descrever as componentes de $R(a_0, a_1, \dots, a_n)$ onde \overline{M}_n age discretamente.

Podemos estabelecer a inexistência de geometria de curvatura constante numa componente de $R(a_0, a_1, a_2, a_3)$, compatível com a ação de \overline{M}_3 , se essa ação é não discreta.

2.1.4 Breve esboço da exposição

Toda representação $[\rho] \in R(a_0, a_1, \dots, a_n)$ pode ser interpretada como um $2n$ -gon marcado, um caminho geodésico por partes fechado e orientado, cujos vértices consecutivos $c_1, p_1, \dots, c_n, p_n := c_0$ são dados por $p_j := R_j p_{j-1}$ para todo $1 \leq j \leq n$ (índices módulo n),

onde c_j é o ponto fixo da rotação $R_j := \rho r_j$, $0 \leq j \leq n$, e, sem perda de generalidade, R_0 é uma rotação anti-horária de ângulo $2a_0$.

É conveniente lidar com os $2n$ -gonos com uma marcação esquecida c_0 . Em outras palavras, consideramos o quociente $S(a_0, a_1, \dots, a_n)$ de $R(a_0, a_1, \dots, a_n)$ por um adequado grupo cíclico de ordem n em \overline{M}_n . Assim, nós podemos colocar o ponto fixo da rotação R_0 em qualquer vértice p_j . Em termos de relações, o gerador do grupo cíclico transforma a relação $R_n \dots R_1 R_0 = 1$ na relação $R_1 R_n \dots (R_1 R_0 R_1^{-1}) = 1$. Um certo grupo de tranças M_n (veja Definição 3) gerado por modificações simples (cirurgias) nos $2n$ -gonos age em $S(a_0, a_1, \dots, a_n)$ de tal forma que o mapa $R(a_0, a_1, \dots, a_n) \rightarrow S(a_0, a_1, \dots, a_n)$ induz uma bijeção entre as \overline{M}_n -órbitas e as M_n -órbitas. Obviamente, a discretude de \overline{M}_n é equivalente a a discretude de M_n .

O próximo passo é descrever as componentes de $S(a_0, a_1, \dots, a_n)$. A ordem cíclica de a_1, \dots, a_n em P define o *tipo* de um $2n$ -gono P e M_n age transitivamente nos tipos. Portanto, precisamos descrever as componentes de um dado tipo e encontrar aquelas componentes onde M , o subgrupo de índice $(n-1)!$ de elementos que preservam o tipo de M_n , age discretamente.

Procedemos por indução em n . Sem perda de generalidade, assumimos que R_0 e R_n são rotações no sentido anti-horário por $2a_0$ e $2a_n$. A classe de conjugação de $R_0 R_n$ é dada exatamente pela distância d_n entre c_n e p_n . Portanto, por indução, nós sabemos a topologia das fibras da aplicação $d_n : S(a_0, a_1, \dots, a_n) \rightarrow [0, \infty[$. De fato, se $R_0 R_n$ é uma rotação em sentido anti-horário por $2a$, $a \in]0, \pi[$, então a fibra em questão é $S(a, a_1, \dots, a_{n-1}) \times C_{R_0 R_n}$, onde $C_{R_0 R_n}$ é o centralizador de $R_0 R_n$ in G , topologicamente um círculo. Se $R_0 R_n = 1$ (logo, $d_n = 0$), então a fibra é $S(a_1, \dots, a_{n-1})$. Se $R_0 R_n$ é uma isometria parabólica ou hiperbólica, então a fibra é $S(a^*, a_1, \dots, a_{n-1}) \times C_{R_0 R_n}$, onde a^* é a classe de conjugação de $R_0 R_n$ e $C_{R_0 R_n}$ é topologicamente uma linha. (Isso significa que, para a indução, precisamos considerar as relações entre isometrias de classes de conjugação prescritas, não necessariamente elípticas. Nós não o fazemos nesse artigo em particular porque o que estudamos aqui é principalmente o caso de $n = 3$ e $\sigma = -1$.) Coletando informações sobre a topologia das fibras de d_n , incluindo aquelas sobre pontos singulares de d_n , nós chegamos a descrição das componentes e suas respectivas topologias (veja Proposição 1).

Também, no caso $n = 3$ e $\sigma = -1$, enxergamos 3 curvas A_1, A_2, A_3 que são respectivamente o conjunto de pontos fixos das involuções n_1, n_2, n_3 que geram o grupo M_3 (aqui identificamos as componentes dos dois tipos). Mostramos que M_3 não age discretamente numa componente se a componente não é suave (veja observação 1) ou se um par de tais curvas se interceptam na componente. Finalmente, descrevemos todas as componentes onde M_3 age discretamente (veja Teorema 1) : para quaisquer $a_0, a_1, a_2, a_3 \in]0, \pi[$, a menos que $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = \frac{\pi}{2}$ (o caso onde $S(a_0, a_1, a_2, a_3)$ é não suave), existe uma componente (de um dado tipo) onde M_3 age discretamente se e somente se $a_j + a_k \leq \pi$ para todo $j \neq k$ ou $\pi \leq a_j + a_k$ para todo $j \neq k$, e tal componente é única. Tomando um triângulo ideal no plano hiperbólico e o grupo gerado pelas reflexões em seus lados A_1, A_2, A_3 , ganhamos uma imagem topológica adequada da ação de M_3

na componente em questão.

Vale mencionar que qualquer componente de $S(a_0, a_1, a_2, a_3)$ é uma superfície em \mathbb{R}^3 dada por uma das equações (2.3.3) ou (2.3.4).

2.1.5 Trabalhos relacionados

Voltando ao exemplo 1, levando em conta as equações (2.3.3) e (2.3.4), $a_1 = a_2 = a_3 := \frac{\pi}{2}$, e fazendo a mundaça de variáveis $x_j := \pm 2s(2t_j - 1)$, chegamos à equação $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2x_3 - 2 = t$, onde $s := \sin a_0$, $t := -\operatorname{tr} R_{c,k}$, $k := e^{a_0 i}$, e $R_{c,k} \in \operatorname{SU}(1, 1)$ (veja a definição no início da Seção 2.2) representa a rotação em sentido anti-horário por $2a_0$ em torno de c no plano hiperbólico. Em outras palavras, nosso grupo M_3 neste caso é comensurável ao grupo Γ de [Gol] no caso $|t| < 2$. Se admitirmos no *toy example* uma isometria parabólica ou hiperbólica no lugar de $R_{c,k}$, poderíamos de fato lidar com o caso geral estudo por W. M. Goldman [Gol] (a isometria parabólica corresponderia ao caso estudado por P. Waterman e S. Wolpert [WaW]).

A condição $\sum_{j=0}^n a_j > 2\pi$ (ou $\sum_{j=0}^n a_j < 2\pi$) nas curvaturas dos pontos cônicos, necessária para a existência de uma 2-esfera hiperbólica (respectivamente, esférica) Σ com as singularidades indicadas, é claramente suficiente. Ainda mais, A. D. Alexandrov provou que, para qualquer tal Σ , existe um único poliedro convexo compacto P no 3-espço hiperbólico real de curvatura -1 (respectivamente, na 3-esfera redonda de curvatura 1) cujo bordo ∂P é isométrico a Σ com respeito à métrica induzida em ∂P (veja [Ale, 3.6.4, p. 190] para a unicidade e [Ale, 5.3.1, p. 261] para a existência).

G. Mondello e D. Panov [MPa] encontraram condições necessárias e quase suficientes para a existência de uma 2-esfera esférica com pontos cônicos de dados ângulos, cada qual permitido a exceder 2π . O espaço correspondente pode ser bastante útil quando lidamos com o problema 1. No contexto de poliedros convexos no 3-espço hiperbólico real, C. D. Hodgson e I. Rivin [HRi] descreveram todas 2-esferas esféricas com todos ângulos cônicos $> 2\pi$ e todas geodésicas fechadas de comprimento $> 2\pi$.

2.2 Fatos preliminares

Nós iremos utilizar as seguintes convenções e notação similar às encontradas em [AGr].

Seja $\sigma = \pm 1$. No que se segue, V denota um espaço \mathbb{C} -linear 2-dimensional munido de uma forma hermitiana $\langle -, - \rangle$ de assinatura $(1 + \frac{\sigma+1}{2}, \frac{\sigma-1}{2})$. Denotamos $BV := \{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}V \mid \langle p, p \rangle > 0\}$. Assim BV é o espaço modelo de curvatura σ , a esfera redonda se $\sigma = 1$ e o disco hiperbólico se $\sigma = -1$. De fato, quando $\sigma = -1$, a *esfera de Riemann-Poincaré* $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$ é colada de dois discos hiperbólicos BV and $B'V := \{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}V \mid \langle p, p \rangle < 0\}$ ao longo do *absoluto* $\partial BV := \{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}V \mid \langle p, p \rangle = 0\}$.

A distância $\operatorname{dist}(p_1, p_2)$ entre pontos $p_1, p_2 \in BV$ é dada pela fórmula $\cos^2 \frac{\operatorname{dist}(p_1, p_2)}{2} =$

$\text{ta}(p_1, p_2)$ para $\sigma = 1$ e $\cosh^2 \frac{\text{dist}(p_1, p_2)}{2} = \text{ta}(p_1, p_2)$ para $\sigma = -1$. Então, a distância é uma função monótona da *tancia* definida por $\text{ta}(p_1, p_2) := \frac{\langle p_1, p_2 \rangle \langle p_2, p_1 \rangle}{\langle p_1, p_1 \rangle \langle p_2, p_2 \rangle}$.

Para $z \in \mathbb{C} \setminus 0$, denotamos por $\arg z$ e $\text{Arg} z$ as funções argumento tomando valores em $]-\pi, \pi]$ e em $[0, 2\pi[$, respectivamente.

Fato 1. [AGr, Exemplo 6.1]. A área orientada de um triângulo com vértices dois a dois não-ortogonais $p_1, p_2, p_3 \in BV$ é igual a $\text{area}(p_1, p_2, p_3) = -2\sigma \arg(g_{12}g_{23}g_{31})$, onde $[g_{jk}]$ é a matriz de Gram dos p_j 's. Se $\sigma = -1$, é possível ver que \arg assume valores em $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ quando calculamos a área pela fórmula acima se $\sigma = 1$, então \arg pode assumir qualquer valor. Em particular, o triângulo é orientado no sentido anti-horário se e somente se $-\sigma \text{Im}(g_{12}g_{23}g_{31}) > 0$. \square

Para $c \in BV$ e $k \in \mathbb{C}$ tal que $|k| = 1$, a regra $R_{c,k} : p \mapsto (\bar{k} - k) \frac{\langle p, c \rangle}{\langle c, c \rangle} c + kp$ define uma aplicação \mathbb{C} -linear $R_{c,k} : V \rightarrow V$.

Fato 2. Sejam $c, p \in BV$ e sejam $k, k' \in \mathbb{C}$ tais que $|k| = |k'| = 1$. Então $R_{c,k}$ providencia uma rotação em BV . Mais precisamente, $R_{c,k}$ é a rotação por $\text{Arg} k^2$ no sentido anti-horário em torno de c . Além disso, $R_{c,k} \in \text{SUV}$, $R_{c,-k} = -R_{c,k}$, $R_{c,k}R_{c,k'} = R_{c,kk'}$, $\langle c, R_{c,k}p \rangle = k\langle c, p \rangle$, e $\langle R_{c,k}p, p \rangle = (\text{ta}(p, c)(\bar{k} - k) + k)\langle p, p \rangle$. Se $\sigma = 1$ e $\langle c, c' \rangle = 0$, então $R_{c,k}R_{c',k} = 1$.

Demonstração. Seja $c' \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$ o ponto ortogonal à c e tomemos representantes tais que $\langle c, c \rangle = 1$ e $\langle c', c' \rangle = \sigma$. Todo ponto $x \in BV$ pode ser escrito na forma $x = c + \eta c'$ para algum único $\eta \in \mathbb{C}$. Quando $\sigma = -1$, temos $|\eta| < 1$ e isso corresponde a identificar BV com o disco unitário em \mathbb{C} centrado na origem; quando $\sigma = 1$, identificamos $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}V \setminus c'$ com \mathbb{C} (em ambos casos, o ponto c é levado para a origem). Nessa identificação, $R_{c,k}$ manda o ponto x para $c + k^2\eta c'$, i.e., é apenas a multiplicação pelo número complexo unitário k^2 . Na base ortonormal c, c' , a aplicação $R_{c,k}$ tem a forma $\begin{bmatrix} \bar{k} & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$, e portanto pertence à SUV . As igualdades $R_{c,-k} = -R_{c,k}$, $R_{c,k}R_{c,k'} = R_{c,kk'}$, $\langle c, R_{c,k}p \rangle = k\langle c, p \rangle$, e $\langle R_{c,k}p, p \rangle = (\text{ta}(p, c)(\bar{k} - k) + k)\langle p, p \rangle$ seguem por cálculos automáticos. Finalmente, para mostrar que $R_{c,k}R_{c',k} = 1$, é suficiente notar que $R_{c,k}R_{c',k}c = c$ e $R_{c,k}R_{c',k}c' = c'$. \square

Seja γ uma geodésica em BV . Denotamos por I_γ a reflexão (antiholomorfa) em γ . Dado um par de geodésicas γ, γ' interceptando em $c \in BV$, denotamos por $\alpha_c(\gamma, \gamma') \in [0, \pi[$ o ângulo orientado em c de γ para γ' medido no sentido anti-horário.

Fato 3. Seja $1 \neq R \in \text{PUV}$ uma isometria preservando orientação não-trivial de BV . Então existem duas geodésicas distintas γ, γ' tais que $R = I_{\gamma'}I_\gamma$ em PUV .

As geodésicas são ultraparalelas, tangentes ou concorrentes se e somente se R é respectivamente hiperbólica, parabólica ou elíptica. O par de geodésicas é único a menos de ação do centralizador C_R de R em PUV e a ação do centralizador é livre no caso hiperbólico e parabólico. No caso elíptico, o estabilizador do par é dado pela reflexão no ponto de intersecção

das geodésicas, i.e., por $R_{c,i}$, onde c é o ponto de intersecção. Nesse caso, $I_{\gamma'}I_{\gamma} = R_{c,k} \in \text{PUV}$, onde $k := e^{i\alpha_c(\gamma;\gamma')}$.

Topologicamente, C_R é um círculo se R é elíptica e uma linha, se R é hiperbólica ou parabólica.

Fato 4. Seja $\sigma = -1$. Para quaisquer $a_1, a_2 \in]0, \pi[$ tais que $a_1 + a_2 \neq \pi$, existe um único $t_0(a_1, a_2) > 1$ com a propriedade seguinte. Dados dois pontos distintos $q_1, q_2 \in \text{BV}$, denotamos por γ_1, γ_2 as geodésicas tais que $q_j \in \gamma_j$, $\alpha(\gamma, \gamma_1) = a_1$, e $\alpha(\gamma_2, \gamma) = a_2$, onde γ é a geodésica ligando q_1, q_2 . As geodésicas γ_1, γ_2 se interceptam, são tangentes ou são ultraparalelas se $\text{ta}(q_1, q_2) < t_0(a_1, a_2)$, $\text{ta}(q_1, q_2) = t_0(a_1, a_2)$, ou $\text{ta}(q_1, q_2) > t_0(a_1, a_2)$, respectivamente. No caso $a_1 + a_2 = \pi$, as geodésicas γ_1, γ_2 são sempre ultraparalelas e definimos $t_0(a_1, a_2) := 1$ neste caso.

Fato 5. Sejam γ_1, γ_2 geodésicas ultraparalelas e sejam $a_1, a_2 \in]0, \pi[$. Então existe uma única geodésica γ , dependendo suavemente de γ_1, γ_2 , tal que $\alpha(\gamma_1, \gamma) = a_1$ e $\alpha(\gamma, \gamma_2) = a_2$.

Demonstração. Sejam v_1, v'_1 e v_2, v'_2 vértices de γ_1 e γ_2 tais que os triângulos (v'_1, v_1, v_2) e (v'_1, v_2, v'_2) são ambos orientados no sentido horário. Então o ângulo de $[v'_1, c]$ para $[c, v_2]$ cresce monotonicamente de 0 até π enquanto $c \in \gamma_1$ percorre de v_1 para v'_1 . Em algum $c \in \gamma_1$, este ângulo vale a_1 . Similarmente, existe $c' \in [c, v'_1]$ tal que o ângulo de $[v'_1, c']$ para $[c', v'_2]$ vale a_1 . Segue então que, para qualquer $p \in [c, c']$, a geodésica γ_p que passa por p e que satisfaz $\alpha(\gamma_1, \gamma_p) = a_1$ intercepta γ_2 . Para $p = c$, essa intersecção é v_2 e, para $p = c'$, é v'_2 . Logo, o ângulo $\alpha(\gamma_p, \gamma_2)$ varia de 0 até π . Por continuidade, obtemos a existência da γ desejada. Se tivermos uma outra γ' , então γ e γ' são ultraparalelas. Então, nós ganhamos um quadrilátero simples cujos ângulos interiores somam 2π , uma contradição. \square

Fato 6. Seja $\sigma = -1$ e $a_0, a_1, a_2, a_3 \in]0, \pi[$. Então, para qualquer $t > t_0(a_0, a_3)$, existe geodésicas geometricamente únicas $\gamma, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ tais que $\alpha(\gamma_0, \gamma_1) = a_0$, $\alpha(\gamma_1, \gamma) = a_1$, $\alpha(\gamma, \gamma_2) = a_2$, $\alpha(\gamma_2, \gamma_0) = a_3$, and $\text{ta}(c_3, c_0) = t$ portanto, γ_1, γ_2 são ultraparalelas, onde c_0 e c_3 são os pontos de intersecção de γ_0, γ_1 e γ_0, γ_2 , respectivamente. Além disso, as quatro geodésicas dependem suavemente de $t > t_0(a_0, a_3)$.

Demonstração. Pelo Fato 4, tomando pontos c_0, c_3 com tância $\text{ta}(c_0, c_3) = t$, ganhamos geodésicas ultraparalelas γ_1, γ_2 tais que $c_0 \in \gamma_1$ com $\alpha(\gamma_0, \gamma_1) = a_0$ e $c_3 \in \gamma_2$ com $\alpha(\gamma_2, \gamma_0) = a_3$, onde γ_0 é a geodésica ligando c_0, c_3 . Pelo Fato 5, existe uma única geodésica γ tal que $\alpha(\gamma_1, \gamma) = a_1$ e $\alpha(\gamma, \gamma_2) = a_2$. \square

Fato 7. Seja $\sigma = -1$. Dadas duas geodésicas distintas γ_1, γ_2 interceptando em algum ponto $c \in \text{BV}$, denotamos $a := \alpha(\gamma_2, \gamma_1)$ e escolhemos $a_1, a_2 \in]0, \pi[$. Então existe um par de geodésicas γ, γ' sujeitas a $\gamma' = R_{c,i}\gamma$ tais que $\alpha(\gamma_1, \gamma) = \alpha(\gamma_1, \gamma') = a_1$ e $\alpha(\gamma, \gamma_2) = \alpha(\gamma', \gamma_2) = a_2$ se e somente se

• $a + a_1 + a_2 \leq \pi$, onde o triângulo (c, c_1, c_2) é orientado em sentido horário ou degenerado i.e., $c = c_1 = c_2$, ou

• $2\pi \leq a + a_1 + a_2$, quando o triângulo (c, c_1, c_2) é orientado em sentido anti-horário ou degenerado,

onde c_j é o ponto de intersecção de γ e γ_j . Tais geodésicas γ, γ' são únicas quando existem e dependem continuamente de γ_1, γ_2 , e a .

A condição $\gamma = \gamma'$ é equivalente à $a + a_1 + a_2 = \pi$ ou $a + a_1 + a_2 = 2\pi$. Equivalentemente, isto significa que $c = c_1 = c_2$.

Fato 8. Seja $\sigma = -1$. Suponhamos que $a_0, a_1, a_2, a_3 \in]0, \pi[$ satisfaça $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 < \pi$ ou $3\pi < a_0 + a_1 + a_2 + a_3$. Então existem geodésicas $\gamma, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ tais que γ_1, γ_2 se interceptam, $\alpha(\gamma_0, \gamma_1) = a_0$, $\alpha(\gamma_1, \gamma) = a_1$, $\alpha(\gamma, \gamma_2) = a_2$, e $\alpha(\gamma_2, \gamma_0) = a_3$.

Demonstração. Se $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 < \pi$, então $0 < a_0 + a_3 < \pi - a_1 - a_2 < \pi$. Logo, podemos escolher $a \in]0, \pi[$ tais que $a_0 + a_3 < a < \pi - a_1 - a_2$. Portanto, existe um triângulo orientado no sentido anti-horário (c, c_0, c_3) com ângulos interiores $\pi - a, a_0, a_3$, respectivamente. Denote por $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ as geodésicas tais que $c_0, c_3 \in \gamma_0$, $c, c_0 \in \gamma_1$, and $c_3, c \in \gamma_2$. Como $a = \alpha(\gamma_2, \gamma_1)$ e $a + a_1 + a_2 < \pi$, pelo Fato 7, existe uma geodésica γ com $\alpha(\gamma_1, \gamma) = a_1$ e $\alpha(\gamma, \gamma_2) = a_2$.

Se $3\pi < a_0 + a_1 + a_2 + a_3$, então $0 < 2\pi - a_1 - a_2 < a_0 + a_3 - \pi < \pi$. Logo, podemos escolher $a \in]0, \pi[$ tal que $2\pi - a_1 - a_2 < a < a_0 + a_3 - \pi$. Portanto, existe um triângulo orientado no sentido horário (c, c_0, c_3) com ângulos interiores $a, \pi - a_0, \pi - a_3$, respectivamente. Denote por $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ as geodésicas tais que $c_0, c_3 \in \gamma_0$, $c, c_0 \in \gamma_1$, e $c_3, c \in \gamma_2$. Como $a = \alpha(\gamma_2, \gamma_1)$ e $2\pi < a + a_1 + a_2$, pelo Fato 7, existe uma geodésica γ com $\alpha(\gamma_1, \gamma) = a_1$ e $\alpha(\gamma, \gamma_2) = a_2$. \square

Fato 9. Sejam γ_1, γ_2 geodésicas tangentes distintas e seja $a_1, a_2 \in]0, \pi[$. Denote por v_1, v e por v, v_2 os vértices de γ_1 e de γ_2 , respectivamente. Então existe uma geodésica γ tal que $\alpha(\gamma_1, \gamma) = a_1$ e $\alpha(\gamma, \gamma_2) = a_2$ se e somente se $a_1 + a_2 < \pi$ e o triângulo (v_1, v, v_2) é orientado em sentido anti-horário ou $\pi < a_1 + a_2$ e o triângulo (v_1, v, v_2) é orientado em sentido horário. Tal geodésica γ é única se existir.

Em particular, qualquer deformação suficientemente pequena de γ_1, γ_2 ainda permite uma geodésica (um par de geodésicas) com os ângulos requeridos.

Fato 10. Seja $\sigma = -1$. Suponhamos que $a_0, a_1, a_2, a_3 \in]0, \pi[$ satisfazem $a_0 + a_3 < \pi < a_1 + a_2$ ou $a_1 + a_2 < \pi < a_0 + a_3$. Então existem geodésicas $\gamma, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ tais que γ_1, γ_2 são tangentes, $\alpha(\gamma_0, \gamma_1) = a_0$, $\alpha(\gamma_1, \gamma) = a_1$, $\alpha(\gamma, \gamma_2) = a_2$, e $\alpha(\gamma_2, \gamma_0) = a_3$.

Demonstração. Escolhemos um par de geodésicas tangentes distintas γ_1, γ_2 tais que, em termos do Fato 9, o triângulo (v_1, v, v_2) é orientado em sentido horário se $a_0 + a_3 < \pi$ e orientado em sentido anti-horário se $\pi < a_0 + a_3$. Pelo Fato 9, existe uma única geodésica γ_0 com $\alpha(\gamma_2, \gamma_0) = a_3$

De modo a provar a unicidade, nós podemos assumir sem perda de generalidade que os c_j 's são normalizados de forma que (2.3.2) é a matriz de Gram de $p_2, c_3, c_0, c_1, p_1, c_2$. Note que os pontos $p_2, c_0, p_1 \in V$ cuja matriz de Gram é M são únicos a menos de ação de UV . De fato, a afirmação é simples $t_j \neq 1$ para algum $1 \leq j \leq 3$ porque, nesse caso, $|u_j| \neq 1$, onde $u_j := t_j(\bar{k}_j - k_j) + k_j$. Se $t_1 = t_2 = t_3 = 1$, então os pontos p_2, c_0, p_1 coincidem em BV e, novamente, a afirmação segue.

Considere as matrizes de Gram

$$M_3 := \begin{bmatrix} 1 & a_3 k_3 & t_3(k_3 - \bar{k}_3) + \bar{k}_3 \\ a_3 \bar{k}_3 & 1 & a_3 \\ t_3(\bar{k}_3 - k_3) + k_3 & a_3 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_1 := \begin{bmatrix} 1 & a_1 & t_1(k_1 - \bar{k}_1) + \bar{k}_1 \\ a_1 & 1 & a_1 k_1 \\ t_1(\bar{k}_1 - k_1) + k_1 & a_1 \bar{k}_1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$M_2 := \begin{bmatrix} 1 & (t_2(\bar{k}_2 - k_2) + k_2) \bar{k}_0 & a_2 \bar{k}_0 \bar{k}_2 \\ (t_2(k_2 - \bar{k}_2) + \bar{k}_2) k_0 & 1 & a_2 \\ a_2 k_0 k_2 & a_2 & 1 \end{bmatrix}$$

das triplas $p_2, c_3, c_0, c_0, c_1, p_1$, e p_2, p_1, c_2 . Dados $p_2, c_0, p_1 \in V$ com matriz de Gram M , o ponto $c_j \in V$ é unicamente determinado por M_j se $|u_j| \neq 1$. Ainda, c_j é unicamente determinado por M_j se $a_j = 1$. Resta observar que $|u_j| = 1$ é equivalente à $t_j = 0, 1$ ou $k_j = \pm 1$.

Finalmente, vamos mostrar a existência dos c_j 's. Supondo que (2.3.1) seja válida, $\det M = 0$. Como $|u_j|^2 - 1 = 2t_j(t_j - 1)(1 - \operatorname{Re} k_j^2)$, temos que $|u_j| \geq 1$ se $\sigma = -1$ e $|u_j| \leq 1$ se $\sigma = 1$. Isto significa que existem pontos $p_2, c_0, p_1 \in V$ cuja matriz de Gram é M . Estes pontos geram V se $\operatorname{rk} M = 2$ e coincidem em BV se $\operatorname{rk} M = 1$. Por uma razão similar, as igualdades $\det M_3 = \det M_1 = \det M_2 = 0$ implicam que existem c_3, c_1, c_2 tais que M_3, M_1, M_2 são as matrizes de Gram das triplas $p_2, c_3, c_0, c_0, c_1, p_1$, e p_2, p_1, c_2 , respectivamente. De $[k_3 \ a_3(1 - k_3^2) \ -1] M_3 = 0$, obtemos $k_3 p_2 + a_3(1 - k_3^2) c_3 - c_0 = 0$, i.e., $R_{c_3, k_3} p_2 = c_0$. De $[k_1 \ a_1(\bar{k}_1 - k_1) \ -1] M_1 = 0$, concluimos que $k_1 c_0 + a_1(\bar{k}_1 - k_1) c_1 - p_1 = 0$, i.e., $R_{c_1, k_1} c_0 = p_1$. Segue então de $[k_0 \ -k_2 \ a_2(k_2 - \bar{k}_2)] M_2 = 0$ que $k_0 p_2 - k_2 p_1 + a_2(k_2 - \bar{k}_2) c_2 = 0$, i.e., $R_{c_2, k_2} p_1 = k_0 p_2$. Como $R_{c_0, k_0} c_0 = \bar{k}_0 c_0$, obtemos $R_{c_3, k_3} R_{c_2, k_2} R_{c_1, k_1} R_{c_0, k_0} c_0 = c_0$. Levando em conta que $R_{c_3, k_3} R_{c_2, k_2} R_{c_1, k_1} R_{c_0, k_0} \in \operatorname{SUV}$ e $\langle c_0, c_0 \rangle \neq 0$, nós chegamos à $R_{c_3, k_3} R_{c_2, k_2} R_{c_1, k_1} R_{c_0, k_0} = 1$. \square

A relação $R_{c_3, k_3} R_{c_2, k_2} R_{c_1, k_1} R_{c_0, k_0} = 1$ em PUV significa $R_{c_3, k_3} R_{c_2, k_2} R_{c_1, k_1} R_{c_0, k_0} = \pm 1$ no nível de SUV . Dados números complexos unitários $k_0, k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{C}$, os próximos dois lemas tratam das soluções, no nível de SUV , das equações $R_{c_3, k_3} R_{c_2, k_2} R_{c_1, k_1} R_{c_0, k_0} = \pm 1$. (Note que, pelo Lema 1 e Fato 2, a equação (2.3.3) diz que $R_{c_3, k_3} R_{c_2, k_2} R_{c_1, k_1} R_{c_0, k_0} = 1$ para alguns $c_0, c_1, c_2, c_3 \in BV$ enquanto a equação (2.3.4) diz que $R_{c_3, k_3} R_{c_2, k_2} R_{c_1, k_1} R_{c_0, k_0} = -1$ para alguns $c_0, c_1, c_2, c_3 \in BV$.)

Lema 2. Dados $a_0, a_1, a_2, a_3 \in]0, \pi[$, definimos $k_j := e^{a_j i}$ e $u_j := t_j(\bar{k}_j - k_j) + k_j$ para todo $0 \leq j \leq 3$. Então a equação

$$(2.3.3) \quad 1 + 2 \operatorname{Re}(\bar{k}_0 u_1 u_2 u_3) = |u_1|^2 + |u_2|^2 + |u_3|^2$$

em $t_1, t_2, t_3 \geq 1$ não possui soluções com $t_3 = 1$ se $\sum_j a_j \leq \pi$ ou $3\pi \leq \sum_j a_j$.

Demonstração. Como $u_3 = \bar{k}_3$ quando $t_3 = 1$, a equação toma a forma $2 \operatorname{Re}(\bar{k}_0 \bar{k}_3 u_1 u_2) = |u_1|^2 + |u_2|^2$, que é equivalente à $|u_2 - \bar{u}_1 k_0 k_3|^2 = 0$, i.e., a $u_2 = \bar{u}_1 k_0 k_3$. Note que, trocando a_j por $\pi - a_j$, nós trocamos k_j por $-\bar{k}_j$ e a última equação se torna $-\bar{u}_2 = -u_1 \bar{k}_0 \bar{k}_3$, i.e., se mantém a mesma. Portanto, podemos assumir que $\sum_j a_j \leq \pi$.

Denote $s := \sin(a_0 + a_3)$, $b := \cos(a_0 + a_3)$, $s_j := \sin a_j$, e $b_j := \cos a_j$ para $j = 1, 2$. Segue de $\sum_j a_j \leq \pi$ que $s, s_1, s_2 > 0$. Nestes termos, a equação $u_2 = \bar{u}_1 k_0 k_3$ toma a forma $-2s_2 t_2 i + b_2 + s_2 i = (2s_1 t_1 i + b_1 - s_1 i)(b + si)$. Logo, $b_2 = b_1 b + s_1 s(1 - 2t_1)$ e $s_2(1 - 2t_2) = b_1 s + s_1 b(2t_1 - 1)$. Isto significa que $2t_1 - 1 = \frac{b_1 b - b_2}{s_1 s}$ e $2t_2 - 1 = \frac{b_2 b - b_1}{s_2 s}$ pois $b^2 + s^2 = 1$. Como $s_1 s, s_2 s > 0$, de $t_1, t_2 \geq 1$, concluímos que $b_1 b - s_1 s \geq b_2$ e $b_2 b - s_2 s \geq b_1$, i.e., $\operatorname{Re}(k_0 k_1 k_3) \geq \operatorname{Re} k_2$ e $\operatorname{Re}(k_0 k_2 k_3) \geq \operatorname{Re} k_1$. Em vista de $\sum_j a_j \leq \pi$, obtemos $a_0 + a_1 + a_3 \leq a_2$ e $a_0 + a_2 + a_3 \leq a_1$, implicando $a_1 < a_2$ e $a_2 < a_1$, uma contradição. \square

Lema 3. Dados $a_0, a_1, a_2, a_3 \in]0, \pi[$, definimos $k_j := e^{a_j i}$ e $u_j := t_j(\bar{k}_j - k_j) + k_j$ para todo $0 \leq j \leq 3$. Então as soluções da equação

$$(2.3.4) \quad 1 - 2 \operatorname{Re}(\bar{k}_0 u_1 u_2 u_3) = |u_1|^2 + |u_2|^2 + |u_3|^2$$

em $t_1, t_2, t_3 \geq 1$ formam um conjunto compacto.

Demonstração. Tomamos $\sigma = -1$. Seja t a tância que corresponde a distância d . Segue de $\cosh^2 \frac{\operatorname{dist}(p_1, p_2)}{2} = \operatorname{ta}(p_1, p_2)$ que $(2t - 1)^2$ é a tância que corresponde à distância $2d$. Consequentemente, $64t(t - \frac{1}{2})^2(t - 1) + 1 = (2(2t - 1)^2 - 1)^2$ é a tância que corresponde à distância $4d$.

Pelo Lema 1 e Fato 2, a equação (2.3.4) diz que, para alguns pontos $c_0, c_1, c_2, c_3 \in BV$, a relação $R_{c_3, k_3} R_{c_2, k_2} R_{c_1, k_1} R_{c_0, -k_0} = 1$ é válida em SUV , onde $t_1 := \operatorname{ta}(c_0, c_1) = \operatorname{ta}(c_1, p_1)$, $t_2 := \operatorname{ta}(p_1, c_2) = \operatorname{ta}(c_2, p_2)$, $t_3 := \operatorname{ta}(p_2, c_3) = \operatorname{ta}(c_3, c_0)$, $p_1 := R_{c_1, k_1} c_0$, e $p_2 := R_{c_3, k_3}^{-1} c_0$. Denotando as correspondentes distâncias por d_1, d_2, d_3 , obtemos $2d_1 + 2d_2 \geq \operatorname{dist}(p_2, c_0)$. Logo, se $d_2 = \max(d_1, d_2)$, então $4d_2 \geq \operatorname{dist}(p_2, c_0)$. Pelo Fato 2, $\operatorname{ta}(p_2, c_0) = |t_3(\bar{k}_3 - k_3) + k_3|^2 = 2t_3(t_3 - 1)(1 - \operatorname{Re} k_3^2) + 1$. Portanto, $32(t_2 - \frac{1}{2})^2 t_2(t_2 - 1) \geq t_3(t_3 - 1)(1 - \operatorname{Re} k_3^2)$. Já que $(t_2 - \frac{1}{2})^2 \geq t_2(t_2 - 1)$ e $t_3(t_3 - 1) \geq (t_3 - 1)^2$, obtemos que $t_2 - \frac{1}{2} \geq (t_3 - 1)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1 - \operatorname{Re} k_3^2}{32}\right)^{\frac{1}{4}}$, implicando $\max(t_1, t_2) \geq m(t_3 - 1)^{\frac{1}{2}}$, onde $m := \min\left(\left(\frac{1 - \operatorname{Re} k_1^2}{32}\right)^{\frac{1}{4}}, \left(\frac{1 - \operatorname{Re} k_2^2}{32}\right)^{\frac{1}{4}}, \left(\frac{1 - \operatorname{Re} k_3^2}{32}\right)^{\frac{1}{4}}\right) > 0$.

Sem perda de generalidade, nós podemos assumir que $t_3 \geq t_2 \geq t_1 \geq 1$.

Suponha que o conjunto de soluções de (2.3.4) é não compacto. Então existem soluções com t_3 arbitrariamente grande, i.e., $t_3 \gg 0$. A desigualdade $\max(t_1, t_2) \geq m(t_3 - 1)^{\frac{1}{2}}$ implica $t_2 \gg 0$.

Denote $s_j := \sin a_j$, $b_j := \cos a_j$, e $x_j := s_j(2t_j - 1)$. Então $\bar{k}_0 = b_0 - s_0 i$, $u_j = b_j - x_j i$, e $x_j \geq s_j > 0$ pois $t_j \geq 1$ e $a_j \in]0, \pi[$. Note que $t_2 \gg 0$ e $t_3 \gg 0$ implica $x_2 \gg 0$ e $x_3 \gg 0$. Nessas

termos introduzidos, a equação (2.3.4) toma a forma

$$\begin{aligned} 1 - 2b_0b_1b_2b_3 + 2s_0(b_2b_3x_1 + b_3b_1x_2 + b_1b_2x_3) + 2b_0(b_3x_1x_2 + b_1x_2x_3 + b_2x_3x_1) - 2s_0x_1x_2x_3 = \\ = b_1^2 + x_1^2 + b_2^2 + x_2^2 + b_3^2 + x_3^2, \end{aligned}$$

que pode ser escrita como

$$(2.3.5) \quad x_1^2 + 2p(x_2, x_3)x_1 + q(x_2, x_3) = 0,$$

onde

$$\begin{aligned} p(x_2, x_3) &:= s_0x_2x_3 - b_0b_3x_2 - b_0b_2x_3 - s_0b_2b_3 = s_0(x_2 - b_0b_2s_0^{-1})(x_3 - b_0b_3s_0^{-1}) - b_2b_3s_0^{-1}, \\ q(x_2, x_3) &:= x_2^2 - 2b_0b_1x_2x_3 + x_3^2 - 2s_0b_1b_3x_2 - 2s_0b_1b_2x_3 + 2b_0b_1b_2b_3 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - 1. \end{aligned}$$

Segue de $x_2 \gg 0$ e $x_3 \gg 0$ que $p(x_2, x_3) \gg 0$. Portanto, o fato que a equação (2.3.5) possui raízes $x_1 \geq s_1$ implica $s_1^2 + 2p(x_2, x_3)s_1 + q(x_2, x_3) \leq 0$. Consequentemente, obtemos

$$\begin{aligned} s_1^2 + 2s_0s_1x_2x_3 - 2b_0s_1b_3x_2 - 2b_0s_1b_2x_3 - 2s_0s_1b_2b_3 + \\ + x_2^2 - 2b_0b_1x_2x_3 + x_3^2 - 2s_0b_1b_3x_2 - 2s_0b_1b_2x_3 + 2b_0b_1b_2b_3 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - 1 \leq 0, \end{aligned}$$

que é equivalente a

$$\begin{aligned} 2(1 + s_0s_1 - b_0b_1)x_2x_3 + (x_2 - x_3)^2 - 2(b_0s_1 + s_0b_1)(b_3x_2 + b_2x_3) + \\ + 2(b_0b_1 - s_0s_1)b_2b_3 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + s_1^2 - 1 \leq 0, \end{aligned}$$

i.e., a

$$2(1 - \operatorname{Re}(k_0k_1))x_2x_3 + (x_2 - x_3)^2 - 2 \operatorname{Im}(k_0k_1)(b_3x_2 + b_2x_3) + 2 \operatorname{Re}(k_0k_1)b_2b_3 + b_2^2 + b_3^2 \leq 0.$$

Mas como $1 - \operatorname{Re}(k_0k_1) > 0$ and $x_2, x_3 \gg 0$, chegamos a uma contradição. \square

2.4 O espaço $\mathcal{S}(a_0, a_1, a_2, a_3)$ de hexágonos, $\sigma = -1$

Nesta seção, nós estudamos em detalhes o espaço $R(a_0, a_1, \dots, a_n)$ de relações entre isometrias elípticas como classes de conjugação fixadas para $n = 3$.

Daqui em diante, nós assumimos $\sigma = -1$ e as isometrias são consideradas como elementos em PUV, ao menos que o contrário seja dito.

Definição 1. Sejam $a_0, a_1, \dots, a_n \in]0, \pi[$ dados. Denotemos por $R := R(a_0, a_1, \dots, a_n)$ o espaço de relações $R_n \dots R_1 R_0 = 1$ em PUV considerado a menos de conjugação em PUV, onde as classes de conjugação de $R_0, R_1, \dots, R_n \in \text{PUV}$ são exatamente aquelas de $R_{c,k_0}, R_{c,k_1}, \dots, R_{c,k_n}$, listadas talvez em ordem diferente, e $k_j := e^{aj}$. Mesmo que alguns a_j 's coincidam, nós ainda consideramos as classes correspondentes como diferentes; em outras palavras, as classes são rotuladas com os j 's. Sem perda de generalidade, assumimos que a classe de conjugação de R_0 é a de R_{c,k_0} .

Podemos ver R como uma *variedade relativa de caracteres*, i.e., formado por todas PUV-representações $\rho : F_n \rightarrow \text{PUV}$ do grupo livre $F_n := \langle r_0, r_1, \dots, r_n \mid r_n \dots r_1 r_0 = 1 \rangle$ de posto n tal que a classe de conjugação de ρr_0 é a de R_{c, k_0} e a classe de conjugação de ρr_j é a de $R_{c, k_{\beta_j}}$ para todo $1 \leq j \leq n$, onde β é uma permutação de $\{1, 2, \dots, n\}$; as representações são consideradas a menos de conjugação em PUV.

Além disso, podemos interpretar R como o espaço de $2n$ -gonos marcados P da maneira seguinte. Seja $\rho : F_n \rightarrow \text{PUV}$ uma representação como acima e seja c_j o ponto fixo de $R_j := \rho r_j$. Os vértices consecutivos do caminho geodésico por partes P são $c_1, p_1, c_2, p_2, \dots, c_n, p_n := c_0$, onde $p_j := R_j p_{j-1}$ (os índices são módulo n). Cada vértice c_j é marcado com uma classe de conjugação (de R_{c, k_l} , $l \neq 0$) e p_n é marcada com a classe de conjugação de R_{c, k_0} .

Definição 2. Denotamos por $m_0 : F_n \rightarrow F_n$ o automorfismo de F_n dado por $r_0 \mapsto r_1 r_0 r_1^{-1}$, $r_j \mapsto r_{j+1}$ para todo $0 < j < n$, e $r_n \mapsto r_1$; para todo $0 < l < n$, denotamos por $m_l : F_n \rightarrow F_n$ o automorfismo de F_n dado por $r_l \mapsto r_{l+1}$, $r_{l+1} \mapsto r_{l+1} r_l r_{l+1}^{-1}$, e $r_j \mapsto r_j$ para todo $j \neq l, l+1$; e denotamos por $m_n : F_n \rightarrow F_n$ o automorfismo de F_n dado por $r_0 \mapsto r_1 r_n^{-1} r_0 r_n r_1^{-1}$, $r_1 \mapsto r_1 r_n r_1^{-1}$, $r_j \mapsto r_j$ para todo $1 < j \leq n$, e $r_n \mapsto r_1$. O grupo \overline{M}_n gerado por m_0, m_1, \dots, m_n age pela direita em $R(a_0, a_1, \dots, a_n)$ por composição no nível de representações.

Em termos de $2n$ -gonos marcados, a ação de m_0 é apenas trocar a marca c_0 de p_n para p_1 .

Note que $m_0 m_l = m_{l+1} m_0$ para todo $0 < l < n$. Além disso, por indução em l , o automorfismo m_0^l aumenta por l (módulo n) os índices dos r_j 's para $1 \leq j \leq n$ e $m_0^l : r_0 \mapsto (r_1 \dots r_2 r_1) r_0 (r_1 \dots r_2 r_1)^{-1}$. Em particular, $m_0^n = 1$.

Nosso principal interesse nessa seção é entender quando a ação de \overline{M}_n numa componente de R é discreta.

Definição 3. Denotamos por $S := S(a_0, a_1, \dots, a_n)$ o quociente de $R(a_0, a_1, \dots, a_n)$ pela ação do grupo cíclico de ordem n gerado por m_0 . Em outras palavras, S é formado por $2n$ -gonos com uma marcação esquecida c_0 nos p_j 's.

Sejam $1 \leq j, l \leq n$ tais que $j \neq l-1, l$ (os índices são módulo n) e seja $P \in S$ um $2n$ -gono com vértices consecutivos $c_1, p_1, c_2, p_2, \dots, c_n, p_n$. A *modificação* $Pm_{j,l}$ de P é definida da seguinte forma. O segmento geodésico $[p_j, c_l]$ corta P em dois polígonos P_1 e P_2 cujos vértices consecutivos são respectivamente $p_j, c_{j+1}, p_{j+1}, \dots, p_{l-1}, c_l$ e $c_l, p_l, c_{l+1}, p_{l+1}, \dots, c_j, p_j$. Rodamos P_1 por R_l de tal forma que $R_l P_1$ e P_2 se colem ao longo de $[c_l, p_l]$ (e removemos este lado), dando origem a um novo $2n$ -gono $Pm_{j,l} \in S$ que possui dois novos lados consecutivos, $[p_k, c_l]$ e $R_l[c_l, p_j] = [c_l, R_l p_j]$.

O grupo M_n gerado por todas modificações $m_{j,l}$ age pela direita em S . É fácil ver que a aplicação $R \rightarrow S$ é uma bijeção no nível das \overline{M}_n -orbitas e M_n -orbitas. (Para uma prova rigorosa, pode-se usar as relações $m_0 m_l = m_{l+1} m_0$.)

Seja $P \in S$ um $2n$ -gono com vértices consecutivos $c_1, p_1, c_2, p_2, \dots, c_n, p_n$. Então os lados $[p_{j-1}, c_j]$ e $[c_j, p_j]$ tem mesmo comprimento e os ângulos ‘exteriores’ em c_j , i.e., o ângulo de $[c_j, p_{j-1}]$ até $[c_j, p_j]$ em c_j medido em sentido anti-horário, é igual a $2a_j$ (a menos que $p_{j-1} = c_j = p_j$). Segue da relação $R_n \dots R_1 R_0 = 1$ que os ângulos ‘interiores’ em p_j ’s somam $2\pi - 2a_0$ módulo 2π . Inversamente, se um $2n$ -gono P satisfaz as condições listadas, nós obtemos $P \in S$.

Se $a_j \geq \frac{\pi}{2}$ para todo $0 \leq j \leq n$ e os ângulos ‘interiores’ em p_j ’s somam $2\pi - 2a_0$, então P é convexo. Nesse caso, o $2n$ -gono P permanece convexo depois de qualquer modificação $m \in M_n$.

2.4.1 Pequeno n

Claramente, $S(a_0) = \emptyset$ pois $a_0 \in]0, \pi[$. Pelo Fato 2, o espaço $S(a_0, a_1)$ consiste de apenas um ponto se e somente se $a_0 + a_1 = \pi$; caso contrário, $S(a_0, a_1) = \emptyset$.

Lema 4. Sejam $a_0, a_1, a_2 \in]0, \pi[$ fixos. Então $S(a_0, a_1, a_2)$ é não vazio exatamente nos seguintes casos:

- $\sum_j a_j = \pi$ ou $\sum_j a_j = 2\pi$,
- $\sum_j a_j < \pi$,
- $2\pi < \sum_j a_j$.

Nesses casos, $S(a_0, a_1, a_2)$ consiste de apenas um ponto e o correspondente quadrilátero (c_1, p_1, c_2, p_2) é respectivamente degenerado i.e., $c_1 = p_1 = c_2 = p_2$, orientado no sentido horário, e orientado no sentido anti-horário.

Demonstração. Se $c_0 = c_1 = c_2$, então $k_0^2 k_1^2 k_2^2 = 1$ pelo Fato 2 e $\sum_j a_j \equiv 0 \pmod{\pi}$. Mais adiante, veremos que o inverso também é verdadeiro.

Não pode ocorrer que apenas dois dos c_0, c_1, c_2 coincide. Então, assumimos que estes são todos distintos dois a dois. Denote por I_j a reflexão na geodésica γ_j ligando c_{j-1} e c_j (os índices são módulo 3). Então $R_j = I_{j+1} I_j$. De fato, é suficiente mostrar isto para $j = 1$. No quadrilátero $P = (c_1, p_1, c_2, p_2)$, os triângulos (c_1, p_2, c_2) e (c_1, p_1, c_2) são congruentes via I_2 porque $p_1 = R_1 p_2 \neq p_2$ em vista de $a_1 \in]0, \pi[$ (caso contrário, R_1 teria dois pontos fixos distintos c_1 e $p_2 = c_0$). Portanto, $I_2 c_0 = R_1 c_0$, o que implica que $I_2 I_1 c_0 = R_1 c_0$ e $I_2 I_1 c_1 = R_1 c_1$. As isometrias (que preservam a orientação) $I_2 I_1$ e R_1 coincidem em dois pontos distintos. São, portanto iguais.

Pelo Fato 3, $a_j = \alpha(\gamma_j, \gamma_{j+1})$ é o ângulo orientado de γ_j para γ_{j+1} . É fácil ver que, se o triângulo (c_0, c_1, c_2) é orientado em sentido horário (anti-horário), então a_j (respectivamente, $\pi - a_j$) é o ângulo interior em c_j . Então, chegamos em $\sum_j a_j < \pi$ e $2\pi < \sum_j a_j$, respectivamente. Obviamente, nessas condições, o quadrilátero (c_1, p_1, c_2, p_2) é geometricamente único. \square

2.4.2 Topologia de $S(a_0, a_1, a_2, a_3)$

Agora, trocamos a convenção a respeito da marcação dos vértices c_j 's de um ponto $P \in S(a_0, a_1, a_2, a_3)$ de tal forma que c_j e R_j correspondem às classes de conjugação de R_{c,k_j} para todo $1 \leq j \leq 3$. Portanto, temos dois tipos de hexágonos: aqueles com vértices consecutivos $c_1, p_1, c_2, p_2, c_3, p_3$, onde $p_1 = R_1 p_3$, $p_2 = R_2 p_1$, e $p_3 = R_3 p_2$, e aqueles com vértices consecutivos $p_3, c_3, p_2, c_2, p_1, c_1$, onde $p_1 = R_1^{-1} p_3$, $p_2 = R_2^{-1} p_1$, e $p_3 = R_3^{-1} p_2$. Para cada hexágono P , nós associamos uma tripla $(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3$, onde $t_j := \text{ta}(c_j, p_j)$. No que segue, frequentemente colocaremos a marca c_0 em p_3 portanto ganhando a relação $R_3 R_2 R_1 R_0 = 1$ para os hexágonos do primeiro tipo e a relação $R_0 R_1 R_2 R_3 = 1$ para os hexágonos do segundo tipo.

De acordo com a nova convenção, o grupo M_3 , anteriormente gerado por $m_{1,3}$, $m_{2,1}$, $m_{3,2}$ é agora gerado pelas modificações n_1, n_2, n_3 que transformam respectivamente a relação $R_3 R_2 R_1 R_0 = 1$ nas relações $R_0^{R_3^{-1}} R_1 R_2^{R_1^{-1}} R_3 = 1$, $R_0^{R_3^{-1}} R_1^{R_2} R_2 R_3 = 1$, $R_0^{R_1} R_1 R_2^{R_3} R_3 = 1$ e a relação $R_0 R_1 R_2 R_3 = 1$ nas relações $R_3 R_2^{R_1} R_1 R_0^{R_3} = 1$, $R_3 R_2 R_1^{R_2^{-1}} R_0^{R_3} = 1$, $R_3 R_2^{R_3^{-1}} R_1 R_0^{R_1^{-1}} = 1$, portanto alterando o tipo do hexágono. É fácil verificar que $n_j^2 = 1$ para todo $j = 1, 2, 3$ e que n_j mantém todos os t_l 's exceto talvez t_j .

Dizemos que um ponto $P \in S(a_0, a_1, a_2, a_3)$ é *degenerado* com respeito a t_3 se o único ponto $P' \in S(a_0, a_1, a_2, a_3)$ do mesmo tipo que P tal que $t_3 P' = t_3 P$ é o próprio ponto P . Isso implica que $t_3 P = 1$ ou $c_1 = c_2$ em P já que, caso contrário, conseguiríamos outros infinitos pontos com mesmo t_3 dados por $p_3, g c_1, g c_2, c_3$, onde $g \in C_R$ percorre o centralizador C_R em PUV de $R := R_0 R_3$ (quando P é do primeiro tipo) ou de $R := R_3 R_0$ (quando P é do segundo tipo) e a marcação c_0 é colocada em p_3 . Um ponto $P \in S(a_0, a_1, a_2, a_3)$ é dito ser *fronteira* com respeito a t_3 se P é não degenerado com respeito a t_3 e $t_3 P = 1$. Um ponto $P \in S(a_0, a_1, a_2, a_3)$ é *regular* com respeito a t_3 se ele não é degenerado nem de fronteira com respeito a t_3 .

Lema 5. Um ponto $P \in S(a_0, a_1, a_2, a_3)$ é regular com respeito a t_3 se e somente se $t_3 P \neq 1$ e $c_1 \neq c_2$ em P .

A seguir uma lista completa de pontos em $S(a_0, a_1, a_2, a_3)$ degenerados ou de fronteira com respeito a t_3 :

a. Sejam $\sum_j a_j < \pi$ ou $3\pi < \sum_j a_j$. Então existem exatamente 2 pontos degenerados P_1 e P_2 de cada tipo. Estes pontos satisfazem $t_3 P_1 = 1$, $c_1 \neq c_2$ para P_1 , $t_3 P_2 \neq 1$, e $c_1 = c_2$ para P_2 .

b. Sejam $\sum_j a_j = \pi$ ou $\sum_j a_j = 3\pi$. Então existe exatamente 1 ponto degenerado de cada tipo. Este ponto satisfaz $c_1 = p_1 = c_2 = p_2 = c_3 = p_3$.

c. Sejam $a_0 + a_3 < \pi < a_1 + a_2$ ou $a_1 + a_2 < \pi < a_0 + a_3$. Então existe exatamente 1 ponto degenerado P_0 de cada tipo. A condição $c_1 = p_1 = c_2 = p_2 = c_3 = p_3$ para P_0 é equivalente a $\sum_j a_j = 2\pi$.

d. Sejam $a_0 + a_3 = a_1 + a_2 = \pi$. Então não existem pontos degenerados. Este é o único caso onde existem pontos de fronteira com respeito a t_3 . Tais pontos, que formam um espaço homeomorfo

a um raio $[1, \infty[$, são dados pela condição $t_3P = 1$.

e. Não existem pontos degenerados nos demais casos, i.e., nos casos

- $\pi < \sum_j a_j$ com $a_0 + a_3 < \pi$ e $a_1 + a_2 < \pi$,
- $\sum_j a_j < 3\pi$ com $\pi < a_0 + a_3$ e $\pi < a_1 + a_2$,
- $a_0 + a_3 = \pi$ com $a_1 + a_2 \neq \pi$,
- $a_1 + a_2 = \pi$ com $a_0 + a_3 \neq \pi$.

Demonstração. Se $t_3P = 1$ e $c_1 \neq c_2$ em P , então, pelo Lema 4, P é degenerado com respeito a t_3 . Se $t_3P \neq 1$, $c_1 = c_2$ para P , e P' é um ponto do mesmo tipo que P com $t_3P' = t_3P$, podemos assumir que P e P' compartilham os vértices c_3, p_3 ; então, os vértices $c_3, p_3, c_1 = c_2$ determinam P e os vértices c_3, p_3, c'_1, c'_2 determinam P' . Colocando a marcação c_0 em p_3 , ganhamos as relações $(R_2R_1)R_0R_3 = 1$ para P e $R'_2R'_1R_0R_3 = 1$ para P' no caso do primeiro tipo, e as relações $(R_1R_2)R_3R_0 = 1$ para P e $R'_1R'_2R_3R_0 = 1$ para P' no caso do segundo tipo. Como $c_0 \neq c_3$ implica $a_1 + a_2 \neq \pi$, a relação $R'_2R'_1(R_2R_1)^{-1} = 1$ ou $R'_1R'_2(R_1R_2)^{-1} = 1$, respectivamente, providencia $c_1 = c'_1 = c'_2$ pelo Lema 4. Portanto, P é degenerado com respeito a t_3 se $t_3P = 1$ e $c_1 \neq c_2$ para P ou se $t_3P \neq 1$ e $c_1 = c_2$ para P .

Como $t_3P \neq 1$ e $c_1 = c_2$ para P implica $a_1 + a_2 \neq \pi$, pelo Lema 4, existe um (único) ponto $P \in S(a_0, a_1, a_2, a_3)$ de cada tipo com $t_3P \neq 1$ e $c_1 = c_2$ (portanto, degenerado com respeito a t_3) exatamente nos seguintes casos

- $\sum_j a_j < \pi$,
- $\sum_j a_j < 2\pi$ e $\pi < a_1 + a_2$,
- $2\pi < \sum_j a_j$ e $a_1 + a_2 < \pi$,
- $3\pi < \sum_j a_j$.

Seja $a_0 + a_3 \neq \pi$. Novamente pelo Lema 4, a relação $R_2R_1R_0R_3 = 1$ ou $R_1R_2R_3R_0 = 1$, respectivamente, juntamente com $t_3P = 1$ determinam unicamente um ponto $P \in S(a_0, a_1, a_2, a_3)$ de cada tipo. Então, P é degenerado com respeito a t_3 quando $t_3P = 1$. Além disso, pelo Lema 4, existe um (único) ponto P_0 de cada tipo com $t_3P_0 = 1$ (e portanto, degenerado com respeito a t_3) exatamente nos seguintes casos

- $\sum_j a_j = \pi$,
- $\sum_j a_j = 2\pi$ e $a_0 + a_3 \neq \pi$,
- $\sum_j a_j = 3\pi$,
- $\sum_j a_j < \pi$,
- $\sum_j a_j < 2\pi$ e $\pi < a_0 + a_3$,
- $2\pi < \sum_j a_j$ e $a_0 + a_3 < \pi$,
- $3\pi < \sum_j a_j$.

Note que $c_1 = c_2$ com $t_3P = 1$ é possível exatamente nos primeiros 3 casos pois $a_0 + a_3 \neq \pi$. Nestes casos, $c_1 = p_1 = c_2 = p_2 = c_3 = p_3$.

No caso $a_0 + a_3 = \pi \neq a_1 + a_2$, não existe ponto P com $t_3P = 1$.

Seja $a_0 + a_3 = a_1 + a_2 = \pi$. Então $t_3P = 1$ implica $c_0 = c_3$ e $c_1 = c_2$. Agora $t_1P = t_2P$ pode ser um número arbitrário em $[1, \infty[$. Noutras palavras, a condição $t_3P = 1$ providencia um ponto de fronteira com respeito a t_3 . Dessa forma, listamos todos os possíveis pontos de fronteira com respeito a t_3 .

Em resumo, chegamos a lista descrita no lema. □

Assumindo que a marcação c_0 colocada em p_3 , para cada ponto $P \in S(a_0, a_1, a_2, a_3)$, associamos a isometria $R := R_0R_3$ se P é do primeiro tipo e a isometria $R := R_3R_0$, se P é do segundo tipo. Segue imediatamente do Lema 5 que a isometria R é elíptica (ou idêntica) se P é degenerado ou de fronteira com respeito a t_3 .

Na proposição seguinte, para qualquer ponto $P \in S(a_0, a_1, a_2, a_3)$, colocamos a marcação c_0 em p_3 .

Proposição 1. Segue uma lista completa de componentes conexas de $S := S(a_0, a_1, a_2, a_3)$ de dado (cada) tipo apresentadas seguindo os casos listados no Lema 5.

a. Neste caso, existem duas componentes. Uma é topologicamente uma 2-esfera e a isometria R_0R_3 é elíptica para todo ponto nessa componente. A outra componente é topologicamente um plano e a isometria R_0R_3 é hiperbólica para todo ponto nessa componente.

b. Neste caso, existem duas componentes. Uma é um único ponto, degenerado com respeito a t_3 , e a isometria R_0R_3 é elíptica para esse ponto. A outra componente é topologicamente um plano e a isometria R_0R_3 é hiperbólica para todo ponto nessa componente.

c. Neste caso, existe uma única componente, topologicamente um plano. Existem pontos na componente cuja isometria R_0R_3 é elíptica, parabólica e hiperbólica.

d. Neste caso, existem uma única componente, topologicamente um plano. A isometria R_0R_3 é hiperbólica ou idêntica para todo ponto nessa componente.

e. Neste caso, existe uma única componente, topologicamente um plano. A isometria R_0R_3 é hiperbólica para todo ponto nessa componente.

Toda componente C , com exceção daquela consistindo de um único ponto, contém uma curva $L_2 \subset C$ dividindo C em 2 partes tais que $t_3C = t_3L_2$ e toda fibra de $L_2 \xrightarrow{t_3} \mathbb{R}$ contém no máximo 2 pontos, com a única exceção no caso **d** onde a fibra sobre $t_3 = 1$ é topologicamente um raio. A curva L_2 é topologicamente um círculo ou uma linha quando C é topologicamente uma 2-esfera ou um plano, respectivamente. A curva L_2 admite uma parametrização suave por t_3 nos pontos onde a isometria R_0R_3 é hiperbólica.

Demonstração. Seja C uma componente conexa de S . Os hexágonos em C são todos do mesmo tipo. Iremos tratar do primeiro tipo, indicando em parênteses o que acontece no caso do segundo tipo. Denotamos $t_0 := t_0(a_0, a_3)$ (veja Fato 4). Pelo Lema 5, $t_3P < t_0$ se $P \in S$ é degenerado com respeito a t_3 .

Seja $P \in C$. Se P é degenerado com respeito a t_3 , então a fibra de $C \xrightarrow{t_3} \mathbb{R}$ em P consiste de apenas um ponto.

Se P é de fronteira com respeito a t_3 , então a fibra de $C \xrightarrow{t_3} \mathbb{R}$ em P é homeomorfa ao raio $[1, \infty[$ pelo Lema 5.

Suponha que P é regular com respeito a t_3 . Denote por γ_0 a geodésica que liga c_0 com c_3 . Pelo Fato 3, existem únicas geodésicas γ_1, γ_2 tais que $R_0 = I_1 I_0$ e $R_3 = I_0 I_2$ (tais que $R_0 = I_0 I_1$ e $R_3 = I_2 I_0$ para o segundo tipo) pois $R_0 \neq 1$ e $R_3 \neq 1$, onde I_j é a reflexão em γ_j . Note que, pelo Fato 3, $\alpha(\gamma_0, \gamma_1) = a_0$ e $\alpha(\gamma_2, \gamma_0) = a_3$ (para o segundo tipo, $\alpha(\gamma_1, \gamma_0) = a_0$ e $\alpha(\gamma_0, \gamma_2) = a_3$).

Como c_1 e c_2 não são ambos fixos por $R := R_0 R_3 = I_1 I_2 \neq 1$ (por $R := R_3 R_0 = I_2 I_1 \neq 1$ para o segundo tipo), os pontos $c_0, g c_1, g c_2, c_3$, onde g percorre C_R , providenciam os hexágonos formando a fibra de $C \xrightarrow{t_3} \mathbb{R}$ e esta fibra é homeomorfa ao centralizador C_R . De fato, seja I' a reflexão numa geodésica ligando c_1 e c_2 (aqui admitindo que os pontos c_1 e c_2 poderiam coincidir, o que é na verdade impossível). Então, pelo Fato 3, $R_1 = I' I'_1$ e $R_2 = I'_2 I'$ ($R_1 = I'_1 I'$ e $R_2 = I' I'_2$ para o segundo tipo) para certas (únicas) reflexões em geodésicas I'_1 e I'_2 . A relação $R_2 R_1 R_0 R_3 = 1$ (a relação $R_1 R_2 R_3 R_0 = 1$ para o segundo tipo) implica $I'_2 I'_1 = I_2 I_1 \neq 1$ (implica $I'_1 I'_2 = I_1 I_2 \neq 1$ para o segundo tipo). Agora a afirmação segue do Fato 3. De fato, agindo por C_R , obtemos $I'_1 = I_1$ e $I'_2 = I_2$ devido ao Fato 3. Como $c_1 \neq c_2$, de $g c_1 = c_1$ e $g c_2 = c_2$ para $g \in C_R$, concluímos que $g = 1$.

Denote por $L_2 \subset C$ o subconjunto de todos os pontos $P \in C$ degenerados ou de fronteira com respeito a t_3 e de todos os pontos $P \in C$ regulares com respeito a t_3 que satisfazem $I'_1 = I_1$ e $I'_2 = I_2$. Pelo Fato 3, a fibra de $C \xrightarrow{t_3} \mathbb{R}$ em $P \in C$ ou é apenas um ponto $P \in L_2$ (quando P é degenerado), ou é incluído em L_2 e homeomorfo a $[1, \infty[$ (quando P é de fronteira), ou é um círculo e contém exatamente dois pontos em L_2 (quando P é regular e R é elíptica), ou é uma linha e contém exatamente um ponto em L_2 (quando R é parabólica ou hiperbólica).

Qualquer ponto regular $P \in L_2$ pode ser descrito como 4 geodésicas $\gamma, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ tais que $c_0 = \gamma_1 \cap \gamma_0$, $c_1 = \gamma \cap \gamma_1$, $c_2 = \gamma_2 \cap \gamma$, $c_3 = \gamma_0 \cap \gamma_2$, $\alpha(\gamma_0, \gamma_1) = a_0$, $\alpha(\gamma_1, \gamma) = a_1$, $\alpha(\gamma, \gamma_2) = a_2$, $\alpha(\gamma_2, \gamma_0) = a_3$, $R_0 = I_1 I_0$, $R_1 = I I_1$, $R_2 = I_2 I$, $R_3 = I_0 I_2$ (para o segundo tipo, $\alpha(\gamma_1, \gamma_0) = a_0$, $\alpha(\gamma, \gamma_1) = a_1$, $\alpha(\gamma_2, \gamma) = a_2$, $\alpha(\gamma_0, \gamma_2) = a_3$, $R_0 = I_0 I_1$, $R_1 = I_1 I$, $R_2 = I I_2$, $R_3 = I_2 I_0$), onde I, I_0, I_1, I_2 são reflexões em geodésicas, respectivamente $\gamma, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$.

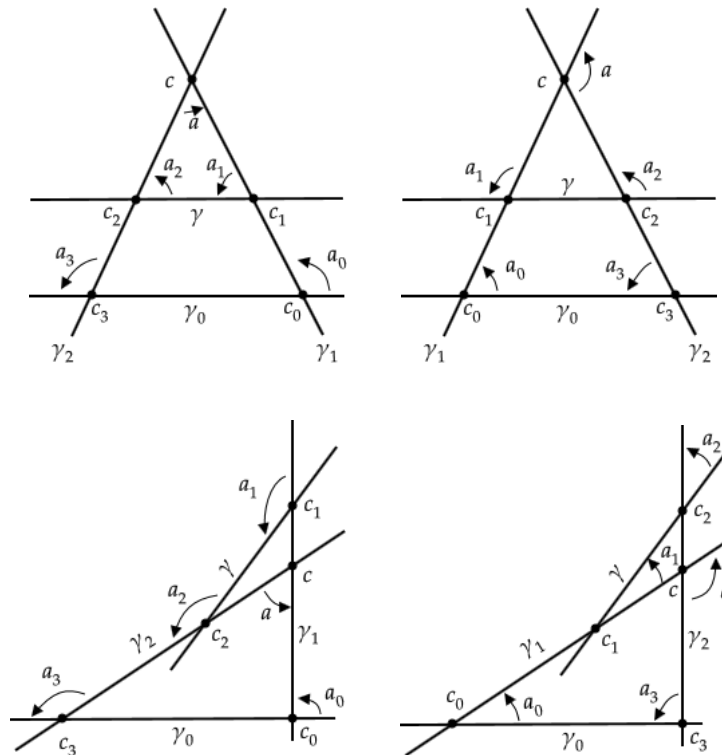
Suponha que exista um ponto $P \in L_2$ com R hiperbólica. Então, pelo Fato 5, podemos deformar continuamente P em L_2 fazendo t_3 arbitrariamente grande pois a tância $t_3 = \text{ta}(c_0, c_3)$ é maior ou igual do que a tância entre as geodésicas γ_1 e γ_2 . Da mesma maneira, podemos deformar continuamente P diminuindo t_3 até o momento quando as geodésicas γ_1 e γ_2 se tornam tangentes. Noutras paravras, $]t_0, \infty[\subset t_3 C$ se R puder ser hiperbólica em algum ponto em L_2 .

Suponha que exista um ponto $P \in L_2$ com R parabólico. Então, pelo Fato 9, existe uma pequena deformação contínua de P providenciando pontos em L_2 com R hiperbólica bem com com R elíptica. Logo, $t_0 \in]b, \infty[\subset t_3 C$ neste caso. Nos termos do Fato 9, se o triângulo (v_1, v, v_2) é orientado no sentido horário (anti-horário, no segundo caso) então $a_0 + a_3 < \pi$ e $\pi < a_1 + a_2$. Se o triângulo (v_1, v, v_2) é orientado no sentido anti-horário (horário, no segundo caso), então $\pi < a_0 + a_3$ e $a_1 + a_2 < \pi$. Portanto, um ponto $P \in L_2$ com R parabólico pode existir apenas no caso **c** do Lema 5.

Suponha que exista um ponto regular $P \in L_2$ com R elíptico. Denote $a := \alpha(\gamma_2, \gamma_1)$ (denote $a := \alpha(\gamma_1, \gamma_2)$ no segundo caso) e seja c o ponto de intersecção das geodésicas γ_1, γ_2 . Pelo Fato 7, quando o triângulo (c, c_0, c_3) é orientado no sentido horário (anti-horário, no segundo caso), temos $a + \pi < a_0 + a_3$, e quando é orientado no sentido anti-horário (horário, no segundo caso), temos $a_0 + a_3 < a$. Novamente pelo Fato 7, obtemos $a + a_1 + a_2 < \pi$ ou $2\pi < a + a_1 + a_2$. Mais uma vez pelo Fato 7, podemos variar a continuamente pelo intervalo $]0, \pi[$, assim ganhando pontos em L_2 , se mantermos as duas desigualdades estritas, i.e., as desigualdades em uma das 4 variantes seguintes:

- $a + \pi \leq a_0 + a_3$ e $a + a_1 + a_2 \leq \pi$,
- $a + \pi \leq a_0 + a_3$ e $2\pi \leq a + a_1 + a_2$,
- $a_0 + a_3 \leq a$ e $a + a_1 + a_2 \leq \pi$,
- $a_0 + a_3 \leq a$ e $2\pi \leq a + a_1 + a_2$.

(As primeiras duas figuras abaixo ilustram a primeira e a quarta variante; as outras duas ilustram a segunda e a terceira variante.)



Tal deformação pode ser realizada variando a tância t_3P no intervalo $[1, t_0[$. Note que a depende monotonicamente de t_3P enquanto t_3P varia no intervalo $]1, t_0[$ e $P \in L_2$ permanece regular e do mesmo tipo. Reescrevendo as desigualdades de forma mais conveniente, chegamos em

- $a \leq a_0 + a_3 - \pi$ e $a \leq \pi - a_1 - a_2$,
- $2\pi - a_1 - a_2 \leq a \leq a_0 + a_3 - \pi$,
- $a_0 + a_3 \leq a \leq \pi - a_1 - a_2$,
- $a_0 + a_3 \leq a$ e $2\pi - a_1 - a_2 \leq a$.

Em todas variantes, existe algum $0 < a < \pi$ tal que as duas desigualdades são estritas. Isso implica

- $a_1 + a_2 < \pi < a_0 + a_3$ com $0 < a_0 + a_3 - \pi < \pi$ e $0 < \pi - a_1 - a_2 < \pi$,
- $3\pi < \sum_j a_j$ com $0 < 2\pi - a_1 - a_2 < a_0 + a_3 - \pi < \pi$,
- $\sum_j a_j < \pi$ com $0 < a_0 + a_3 < \pi - a_1 - a_2 < \pi$,
- $a_0 + a_3 < \pi < a_1 + a_2$ com $0 < a_1 + a_2 - \pi < \pi$ e $0 < \pi - a_0 - a_3 < \pi$.

Em particular, para dados a_j 's, apenas uma variante é possível, i.e., as quatro variantes são disjuntas.

Na segunda e terceira variantes, nós estamos no caso **a** do Lema 5 e podemos atingir ambos valores $2\pi - a_1 - a_2, a_0 + a_3 - \pi$ e $a_0 + a_3, \pi - a_1 - a_2$, respectivamente, variando a . Como as desigualdades se tornam igualdades para tais pontos em L_2 , ganhamos pelo Fato 7 os dois pontos degenerados distintos P_1, P_2 mencionados no Lema 5 **a**. Como C é conexo, nós obtemos $[t_3P_1, t_3P_2] \subset t_3C$. Afirmamos que $[t_3P_1, t_3P_2] = t_3C$. De fato, caso contrário, existiria um ponto regular extra $P \in L_2$ com R elíptico. Os valores de a para tal P deveriam cair em uma das quatro variantes, e, como estas são disjuntas, a variante deveria permanecer a mesma que começamos. Isso contradiz o fato que a depende monotonicamente de t_3P . Agora visualizamos C como uma 2-esfera topológica e L_2 , como um círculo topológico dividindo C em duas partes.

Na primeira e quarta variantes, procedemos de maneira similar. Podemos atingir os valores $\min(a_0 + a_3 - \pi, \pi - a_1 - a_2)$ e $\max(a_0 + a_3, 2\pi - a_1 - a_2)$, respectivamente, variando a . Como uma das desigualdades se torna uma igualdade para um tal ponto em L_2 , nós obtemos pelo Fato 7 um ponto degenerado P_0 mencionado no Lema 5 **c**. Por um argumento similar, $t_3C = [t_3P_0, b]$ ou $t_3C = [t_3P_0, b[$ ou $t_3C = [t_3P_0, \infty[$ para algum $t_3P_0 < b$. No último caso, nós visualizamos C como um plano topológico e L_2 , como uma linha topológica dividindo C em duas partes.

Agora podemos fazer o caso **c**. Pelo Fato 10, existem geodésicas $\gamma, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ tais que γ_1, γ_2 são tangentes, $\alpha(\gamma_0, \gamma_1) = a_0$, $\alpha(\gamma_1, \gamma) = a_1$, $\alpha(\gamma, \gamma_2) = a_2$, e $\alpha(\gamma_2, \gamma_0) = a_3$ (para o segundo tipo, $\alpha(\gamma_0, \gamma_2) = a_3$, $\alpha(\gamma_2, \gamma) = a_2$, $\alpha(\gamma, \gamma_1) = a_1$, e $\alpha(\gamma_1, \gamma_0) = a_0$). Denote por I, I_0, I_1, I_2 as reflexões em $\gamma, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$. Pelo Fato 3, obtemos isometrias elípticas $R_0 := I_1I_0, R_1 := II_1, R_2 := I_2I, R_3 := I_0I_2$ ($R_0 := I_0I_1, R_1 := I_1I, R_2 := II_2, R_3 := I_2I_0$ para o segundo caso) de classes de conjugação $R_{c,k_0}, R_{c,k_1}, R_{c,k_2}, R_{c,k_3}$ sujeitas a $R_2R_1R_0R_3 = 1$ (a $R_1R_2R_3R_0 = 1$ para o segundo tipo) com R parabólica. Então, nós construímos um ponto $P \in S$ com R parabólica. Este ponto pertence a alguma componente C . Portanto, existe um ponto regular $P' \in L_2 \subset C$ com R elíptica. Como vimos anteriormente, C deveria conter o ponto degenerado P_0 considerado acima. Portanto, tal componente (de dado tipo) é única e nós terminamos o caso **c** porque já sabemos que a presença de um ponto $P \in L_2$ com R hiperbólica (induzido pela presença de um ponto com R parabólica) implica $]t_0, \infty[\subset t_3C$.

Pelos Fatos 6, 4, e 3, num caso arbitrário **a–e**, conseguimos de forma similar um ponto $P_t \in S$ de dado tipo, dependendo suavemente de $t > t_0$, com R hiperbólica tal que $t_3P_t = t$. Este ponto gera uma componente conexa C de S tal que $P_t \in L_2$ e nós já sabemos que $t_3C \supset]t_0, \infty[$.

Logo, pela unicidade do Fato 6, existe uma única componente conexa C de S (de dado tipo) contendo um ponto com R hiperbólica. No caso **c**, tal componente já havia sido construída acima. No caso **d**, obtemos $t_3C = [t_0, \infty[$ pelo Lema 5. Em todos os outros casos, temos que $t_3C =]t_0, \infty[$ porque $t_0 \in t_3C$ implicaria na existência de um ponto com R parabólica e nós já vimos que isso é possível apenas no caso **c**. Além disso, como P_t depende suavemente de $t > t_0$, a curva L_2 ganha uma parametrização suave por t_3 nos pontos com R hiperbólica.

Dessa forma finalizamos os casos **b** e **e**. De fato, nestes casos, não pode existir um ponto regular $P \in L_2$ com R parabólica ou elíptica já que isso é possível apenas nos casos **c** e **a**, respectivamente. Como $t_3P' < t_0$ para qualquer ponto $P' \in S$ degenerado com respeito a t_3 , concluímos que, no caso **b**, existe uma única componente conexa C de S , $t_3C =]t_0, \infty[$, cujos pontos possuem R hiperbólica e uma única componente consistindo de apenas um único ponto degenerado. Similarmente, no caso **e**, ganhamos uma única componente conexa C de S , $t_3C =]t_0, \infty[$, cujos pontos possuem R hiperbólica. Portanto, nos casos **b** e **e**, visualizamos a única componente conexa C de S contendo pontos com R hiperbólica como um plano topológico e L_2 , como uma linha topológica dividindo C em duas partes.

Existe uma única componente conexa C , $]1, \infty[\subset t_3C$, no caso **d**. Pelo Lema 5, $t_3C = [1, \infty[$. Claramente, (t_1P, t_2P, t_3P) tende a $(t_1, t_2, 1)$ com $t_1 = t_2$ quando um ponto $P \in C$ tende a um ponto fronteira com respeito a t_3 porque $c_0 = c_3$ e $c_1 = c_2$ para um ponto fronteira. Dado $t \in]1, \infty[$, existe um único ponto $P_t \in L_2$, dependendo continuamente de t , tal que $t_3P_t = t$. Qualquer ponto $P \in C$ com $t_3P = t$ tem a forma $P = gP_t$ para uma certa (única) isometria $g \in C_R$. Note que, para t perto de 1, temos $t_1(gP_t)$ perto de $t_1(g^{-1}P_t)$ apenas porque c_0 e c_1 são próximos de P_t . Isto significa que os pontos gP_t e $g^{-1}P_t$ tendem ao mesmo ponto fronteira quando gP_t tende a um. Noutras palavras, na fibra de $t_3 = 1$, dois pontos distintos com $t > 1$ tendem a coincidir quando t tende a 1 (a menos que g tenda a 1). Então, no caso **d**, visualizamos C como um plano topológico e L_2 , como uma linha topológica dividindo C em duas partes.

Finalmente, no caso **a**, é suficiente construir um ponto regular $P \in S$ com R elíptica pois, como vimos acima, um tal ponto P providencia os dois pontos degenerados P_1 e P_2 na componente conexa contendo P , implicando a existência e unicidade de uma componente conexa de S cujos pontos possuem R elíptica.

Pelo Fato 8, existem geodésicas $\gamma, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ tais que γ_1, γ_2 interceptam, $\alpha(\gamma_0, \gamma_1) = a_0$, $\alpha(\gamma_1, \gamma) = a_1$, $\alpha(\gamma, \gamma_2) = a_2$, e $\alpha(\gamma_2, \gamma_0) = a_3$ (para o segundo tipo, $\alpha(\gamma_0, \gamma_2) = a_3$, $\alpha(\gamma_2, \gamma) = a_2$, $\alpha(\gamma, \gamma_1) = a_1$, e $\alpha(\gamma_1, \gamma_0) = a_0$). Denote por I, I_0, I_1, I_2 a reflexão em $\gamma, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$. Pelo Fato 3, as isometrias $R_0 := I_1I_0$, $R_1 := II_1$, $R_2 := I_2I$, $R_3 := I_0I_2$ (as isometrias $R_0 := I_0I_1$, $R_1 := I_1I$, $R_2 := II_2$, $R_3 := I_2I_0$ para o segundo tipo) de classes de conjugação R_{c,k_0} , R_{c,k_1} , R_{c,k_2} , R_{c,k_3} sujeitas a $R_2R_1R_0R_3 = 1$ (a $R_1R_2R_3R_0 = 1$ para o segundo tipo) providenciam um ponto regular $P \in S$ com R elíptica. \square

Para dados $a_0, a_1, a_2, a_3 \in]0, \pi[$, denotamos $k_j := e^{aj_i} \neq \pm 1$ e $u_j := t_j(\bar{k}_j - k_j) + k_j$.

Seja $C \subset S := S(a_0, a_1, a_2, a_3)$ uma componente conexa de S e seja $P \in S$. Então, colocando a marca c_0 em p_3 , a relação $R_{c_3, k_3} R_{c_2, k_2} R_{c_1, k_1} R_{c_0, k_0} = 1$ vale em PUV se P é do primeiro tipo e a relação $R_{c_1, k_1} R_{c_2, k_2} R_{c_3, k_3} R_{c_0, k_0} = 1$ vale em PUV se P é do segundo tipo. No nível de SUV, obtemos respectivamente as relações $R_{c_3, k_3} R_{c_2, k_2} R_{c_1, k_1} R_{c_0, k_0} = \pm 1$ e $R_{c_1, k_1} R_{c_2, k_2} R_{c_3, k_3} R_{c_0, k_0} = \pm 1$ em SUV. Estas podem ser reescritas como as relações $R_{c_3, k_3} R_{c_2, k_2} R_{c_1, k_1} R_{c_0, \pm k_0} = 1$ e $R_{c_1, k_1} R_{c_2, k_2} R_{c_3, k_3} R_{c_0, \pm k_0} = 1$ em SUV. Pelo Lema 1, chegamos a equação (2.3.3) (quando $\pm k_0 = k_0$) ou a equação (2.3.4) (quando $\pm k_0 = -k_0$) independentemente do tipo de P . Isso significa que C satisfaz a equação (2.3.3) ou a equação (2.3.4).

O corolário seguinte afirma o contrário, i.e., que as componentes de S são dadas pelo tipo do hexágono e por uma das equações (2.3.3) ou (2.3.4).

Corolário 1. Seja $a_0, a_1, a_2, a_3 \in]0, \pi[$. Denotamos $k_j := e^{a_j i}$ e $u_j := t_j(\bar{k}_j - k_j) + k_j$.

Para qualquer tipo de hexágono, as soluções da equação (2.3.3) em $t_1, t_2, t_3 \geq 1$ formam uma componente conexa C_1 de $S := S(a_0, a_1, a_2, a_3)$ do primeiro tipo, topologicamente um plano, com isometria hiperbólica $R_0 R_3$ para algum ponto na componente.

A equação (2.3.4) em $t_1, t_2, t_3 \geq 1$ não possui soluções nos casos **c–e** do Lema 3.4.7. No caso **b**, a equação (2.3.4) em $t_1, t_2, t_3 \geq 1$ tem uma única solução que constitui uma componente conexa C_0 de S de cada tipo dado e a isometria $R_0 R_3$ é elíptica para esse ponto. No caso **a**, as soluções da equação (2.3.4) em $t_1, t_2, t_3 \geq 1$ formam uma componente conexa C_0 de S de cada tipo dado, topologicamente uma 2-esfera, e a isometria $R_0 R_3$ é elíptica para todo ponto nesta componente.

O exposto acima é uma lista completa das componentes conexas de S .

Demonstração. Observamos primeiro que um ponto $P \in S$ degenerado com respeito a t_3 não satisfaz a equação (2.3.3) nos casos **a–b**. De fato, se $t_3 P = 1$, a afirmação é apenas o Lema 2. Se $c_1 = c_2$, podemos tratar o ponto P como um ponto no espaço $S' := S(a_2, a_3, a_0, a_1)$: se P corresponde à relação $R_3 R_2 R_1 R_0 = 1$ (à relação $R_0 R_1 R_2 R_3 = 1$ para o segundo tipo), então P' corresponde à relação $R_1 R_0 R_3 R_2 = 1$ (à relação $R_2 R_3 R_0 R_1 = 1$ para o segundo tipo), e a afirmação segue do Lema 2 aplicado a S' , onde $t_3 P'$ se torna 1, pois a equação (2.3.3) e os casos **a–b** se mantêm os mesmos para S' .

Num caso arbitrário **a–e**, existe uma única componente conexa C_1 de S (de cada tipo dado) possuindo um ponto com $R_0 R_3$ hiperbólica. Tal componente C_1 não pode ser compacta já que $]t_0, \infty[\subset t_3 C_1$. Pelo Lema 3, C_1 deve satisfazer a equação (2.3.3). Pela Proposição 1, existe uma única componente conexa (de cada tipo dado) nos casos **c–e**; então, nós terminamos estes casos.

Nos casos seguintes **a–b**, existem duas componentes conexas C_0, C_1 (de cada tipo dado) e C_0 , a componente compacta, não satisfaz a equação (2.3.3) pois, pelo Lema 5, ela contém um ponto P degenerado com respeito a t_3 . Por outro lado, a componente C_1 contendo um ponto com

R_0R_3 hiperbólica não pode ser compacta pois $]t_0, \infty[\subset t_3C_1$, e portanto, C_1 não pode satisfazer a equação (2.3.4) pelo Lema 3. Consequentemente, C_0 satisfaz (2.3.4) e C_1 satisfaz (2.3.3) \square

Nós já sabemos (veja o segundo parágrafo em 2.4.2) que o grupo M_3 é gerado pelas modificações n_1, n_2, n_3 e que n_j altera o tipo do hexágono e mantém t_l quando $l \neq j$. Escrevemos as equações (2.3.3) e (2.3.4) na forma $e_1(t_1, t_2, t_3) = 0$ e $e_0(t_1, t_2, t_3) = 0$, respectivamente. Como n_j transforma a relação $R_{c_3, k_3} R_{c_2, k_2} R_{c_1, k_1} R_{c_0, k_0} = 1$ em SUV na relação $R_{c_1, k_1} R_{c_2, k_2} R_{c_3, k_3} R_{c_0, k_0} = 1$ em SUV e vice-versa (analogamente, para a relação $R_{c_3, k_3} R_{c_2, k_2} R_{c_1, k_1} R_{c_0, -k_0} = 1$ e SUV), essa modificação preserva as equações $e_l(t_1, t_2, t_3) = 0$ pelo Lema 1. É fácil ver que $e_l(t_1, t_2, t_3) = 4t_j^2 \sin^2 a_j +$ termos menores em t_j com $\sin a_j \neq 0$, i.e., a equação $e_l(t_1, t_2, t_3) = 0$ é quadrática em t_j . Portanto, no nível dos t_k 's, a modificação n_j apenas permuta as raízes de $e_l(t_1, t_2, t_3) = 0$ em t_j . No que segue, não iremos mais distinguir os tipos dos hexágonos e dessa forma iremos identificar os hexágonos de tipos diferentes com mesmos (t_1, t_2, t_3) . Dessa forma, n_j age como uma involução em cada componente C_l de S , onde C_l é agora dada pela equação $e_l(t_1, t_2, t_3) = 0$. (Talvez fosse mais correto passar para o subgrupo de índice 2 M de M_3 . No entanto, é mais conveniente lidar com involuções e isto não faz nenhuma diferença quanto ao problema de discretude da ação de M_3 em S .)

Definição 4. Seja $1 \leq j \leq 3$. Denote por $A_j \subset S := S(a_0, a_1, a_2, a_3)$ o conjunto de pontos fixos da involução n_j . Pelo exposto acima, na componente conexa C_l de S dada pela equação $e_l(t_1, t_2, t_3) = 0$, o conjunto A_j é dado pela equação $\frac{\partial}{\partial t_j} e_l(t_1, t_2, t_3) = 0$. Em particular, $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ é o conjunto de todos pontos singulares de S .

Na prova da proposição 1, colocando a marca c_0 em p_3 , nós definimos a curva $L_2 \subset S$ de todos os pontos $P \in S$ degenerados ou fronteira com respeito a t_3 e de todos pontos $P \in S$ regulares com respeito a t_3 que estão sujeitos a $R_0 = I_1 I_0, R_1 = II_1, R_2 = I_2 I, R_3 = I_0 I_2$ quando P é do primeiro tipo ou sujeitos a $R_0 = I_0 I_1, R_1 = I_1 I, R_2 = II_2, R_3 = I_2 I_0$ quando P é do segundo tipo, onde I, I_0, I_1, I_2 são reflexões em geodésicas adequadas.

Lema 6. 3.4.11 $A_2 = L_2$.

Demonstração. Se $P \in S$ é degenerado com respeito a t_3 , então P é claramente um ponto fixo de n_2 pois P é o único ponto em S com o valor $t_3 P$ para t_3 e n_2 mantém o valor de t_3 .

A Definição 4 diz que $P \in A_2$ se e somente se $\text{ta}(c_2, p_2) = \text{ta}(p_3, c_2)$ para P . Para um ponto $P \in S$ de fronteira com respeito a t_3 , esta condição é vazia já que $p_2 = p_3$ neste caso.

Então, assumimos que $P \in S$ é regular com respeito a t_3 . Então $c_0 \neq c_3$ (colocamos a marca c_0 em p_3) e $c_1 \neq c_2$.

Suponha que $P \in L_2$. Então $R_1 = II_1$ se P é do primeiro tipo e $R_1 = I_1 I$ se P é do segundo tipo, onde $Ic_2 = c_2, p_1 = R_1 p_3 = II_1 c_0 = Ic_0$ para P do primeiro tipo, e $p_1 = R_1^{-1} p_3 = II_1 c_0 = Ic_0$ para P do segundo tipo. Portanto, $\text{ta}(c_2, p_2) = \text{ta}(p_1, c_2) = \text{ta}(Ic_0, Ic_2) = \text{ta}(p_3, c_2)$, i.e., $P \in A_2$.

Inversamente, seja $P \in A_2$, i.e., $\text{ta}(c_2, p_2) = \text{ta}(p_3, c_2)$. Denote por I e I_0 as reflexões nas geodésicas ligando c_1, c_2 e c_0, c_3 , respectivamente. Já que $\text{ta}(c_0, c_1) = \text{ta}(c_1, p_1)$ e $\text{ta}(p_1, c_2) = \text{ta}(c_2, p_2) = \text{ta}(c_0, c_2)$, os triângulos (c_1, c_0, c_2) e (c_1, p_1, c_2) são congruentes. Como $p_1 = c_0$ implica $c_0 = c_1 = p_1$ devido a $p_1 = R_1 c_0$ (quando P é do primeiro tipo) ou $c_0 = R_1 p_1$ (quando P é do segundo tipo), nós obtemos $p_1 = I c_0$.

Suponha que $c_2 \neq c_3$ e denote por I_2 a reflexão na geodésica ligando c_2 e c_3 . Como $\text{ta}(c_2, p_2) = \text{ta}(c_0, c_2)$ e $\text{ta}(p_2, c_3) = \text{ta}(c_3, c_0)$, os triângulos (c_2, p_2, c_3) e (c_2, c_0, c_3) são congruentes. Como $c_0 = R_3 p_2$ ou $p_2 = R_3 c_0$, a igualdade $p_2 = c_0$ implicaria que $p_2 = c_0 = c_3$. Portanto, $p_2 = I_2 c_0$ e $p_2 \neq c_2$ pois $p_2 = c_2$ e $\text{ta}(c_2, p_2) = \text{ta}(c_0, c_2)$ implicariam $p_2 = c_0$.

Seja P do primeiro tipo. Então $R_3 p_2 = c_0$, $R_3 c_3 = c_3$, $I_0 I_2 p_2 = I_0 I_2 I_2 c_0 = c_0$, $I_0 I_2 c_3 = c_3$, $R_2 p_1 = p_2$, $R_2 c_2 = c_2$, $I_2 I p_1 = I_2 I c_0 = I_2 c_0 = p_2$, $I_2 I c_2 = c_2$ com $c_0 \neq c_3$ e $p_2 \neq c_2$. Logo, $R_3 = I_0 I_2$ e $R_2 = I_2 I$. Escrevendo R_0 como $R_0 = I_1 I_0$, onde I_1 é uma reflexão numa geodésica adequada, concluímos pela relação $R_3 R_2 R_1 R_0 = 1$ que $R_1 = I I_1$. Portanto, $P \in L_2$.

Seja P do segundo tipo. Então $R_3 c_0 = p_2$, $R_3 c_3 = c_3$, $I_2 I_0 c_0 = I_2 c_0 = p_2$, $I_2 I_0 c_3 = c_3$, $R_2 p_2 = p_1$, $R_2 c_2 = c_2$, $I I_2 p_2 = I I_2 I_2 c_0 = I c_0 = p_1$, $I I_2 c_2 = c_2$ com $c_0 \neq c_3$ e $p_2 \neq c_2$. Logo, $R_3 = I_2 I_0$ e $R_2 = I I_2$. Escrevendo R_0 como $R_0 = I_0 I_1$, onde I_1 é uma reflexão numa geodésica adequada, concluímos pela relação $R_1 R_2 R_3 R_0 = 1$ que $R_1 = I_1 I$. Portanto, $P \in L_2$.

Suponha que $c_2 = c_3$ e $c_0 \neq c_1$. Denote por I_1 a geodésica ligando c_0 e c_1 .

Se P é do primeiro tipo, então $R_1 = I I_1$ pois $R_1 c_0 = p_1$, $R_1 c_1 = c_1$, $I I_1 c_0 = I c_0 = p_1$, $I I_1 c_1 = c_1$ com $c_0 \neq c_1$. Temos $R_2 = I_2 I$ e $R_3 = I'_0 I_2$, onde I_2 e I'_0 são reflexões em geodésicas adequadas. Pela relação $R_3 R_2 R_1 R_0 = 1$, nós obtemos $R_0 = I_1 I'_0$, e portanto, $I'_0 c_0 = c_0$. Como $c_0 \neq c_3$ e $I'_0 c_3 = c_3$, concluímos que $I'_0 = I_0$. Portanto, $P \in L_2$.

Se P é do segundo tipo, então $R_1 = I_1 I$ pois $R_1 p_1 = c_0$, $R_1 c_1 = c_1$, $I_1 I p_1 = I_1 I c_0 = c_0$, $I_1 I c_1 = c_1$ com $c_0 \neq c_1$. Temos $R_2 = I I_2$ e $R_3 = I_2 I'_0$, onde I_2 e I'_0 são reflexões em geodésicas adequadas. Pela relação $R_1 R_2 R_3 R_0 = 1$, nós obtemos $R_0 = I'_0 I_1$, e portanto, $I'_0 c_0 = c_0$. Como $c_0 \neq c_3$ e $I'_0 c_3 = c_3$, concluímos que $I'_0 = I_0$. Portanto, $P \in L_2$.

Finalmente, suponha que $c_0 = c_1$ e $c_2 = c_3$. Então $I = I_0$. Como $c_0 \neq c_3$, ganhamos $R_1 R_0 = 1$ e $R_3 R_2 = 1$. Como $R_0 = I_1 I_0$, $R_3 = I_0 I_2$ para P do primeiro tipo e $R_0 = I_0 I_1$, $R_3 = I_2 I_0$ para P do segundo tipo, onde I_1 e I_2 são reflexões em geodésicas adequadas, nós chegamos a $R_1 = I_0 I_1$, $R_2 = I_2 I_0$ e a $R_1 = I_1 I_0$, $R_2 = I_0 I_2$, respectivamente. Portanto, $P \in L_2$. \square

Lema 7. Um ponto $P \in S := S(a_0, a_1, a_2, a_3)$ pertence a $A_1 \cap A_2$ se e somente se P é degenerado ou de fronteira com respeito a t_3 .

Um ponto $P \in S$ é singular se e somente se $c_1 = p_1 = c_2 = p_2 = c_3 = p_3$ para P . Portanto, S é não suave se e somente se $\sum_j a_j = 2\pi$. Neste caso, existe um único ponto singular em S ele pertence à componente não compacta C_1 .

Demonstração. Observamos inicialmente que existe no máximo um ponto equidistante de 3

pontos dois a dois distintos. Claramente, $P \in A_j$ se e somente se c_j é equidistante de p_1, p_2, p_3 .

Seja $P \in A_1 \cap A_2$. Se os pontos p_1, p_2, p_3 são dois a dois distintos, então $c_1 = c_2$. Se $p_1 = p_2$, então $p_1 = c_2 = p_2$, logo, $p_3 = c_2$, portanto, $c_1 = p_1 = c_2$ novamente. Se $p_1 = p_3$, então $p_1 = c_1 = p_3$, logo, $p_2 = c_1$, portanto, $c_1 = c_2$ novamente. Se $p_2 = p_3$, então $c_3 = p_3$. Logo, P é degenerado ou fronteira com respeito a t_3 . É fácil ver que o inverso também é verdade: se $c_1 = c_2$ ou $c_3 = p_3$ para P , então $P \in A_1 \cap A_2$.

Nós agora sabemos que P é singular se e somente se $c_1 = c_2$ ou $c_3 = p_3$ e, simultaneamente, $c_2 = c_3$ ou $c_1 = p_1$. Se $c_1 = c_2 = c_3$, então, colocando a marca c_0 em p_3 , segue de $R_3R_2R_1R_0 = 1$ ou de $R_1R_2R_3R_0 = 1$ que $c_0 = c_1$ porque $R_0 \neq 1$. Logo, $c_1 = p_1 = c_2 = p_2 = c_3 = p_3$. Se $c_1 = p_1 = c_2$ (ou $c_2 = c_3 = p_3$), então $p_3 = c_1$ (respectivamente, $p_2 = c_3$) e, novamente $c_1 = p_1 = c_2 = p_2 = c_3 = p_3$. Se $c_1 = p_1$ e $c_3 = p_3$, então $p_3 = c_1$ e $p_2 = c_3$, implicando $c_1 = p_1 = c_2 = p_2 = c_3 = p_3$ pois R_2 tem um único ponto fixo. \square

2.4.3 Discretude de M_3

Colocando a marca c_0 em p_3 , um hexágono arbitrário $P \in S(a_0, a_1, a_2, a_3)$ do primeiro tipo corresponde à relação $R_3R_2R_1R_0 = 1$. É fácil ver que, o hexágono Pn_2n_1 corresponde à relação $R_3R_2^{(R_1^{R_2})}R_1^{R_2}R_0 = 1$, i.e., à relação $R_3R_2^{R_2R_1}R_1^{R_2R_1}R_0 = 1$. Por indução em l , $P(n_2n_1)^l$ corresponde à relação $R_3R_2^{(R_2R_1)^l}R_1^{(R_2R_1)^l}R_0 = 1$. Já que $R_0R_3 = (R_2R_1)^{-1}$, a ação de n_2n_1 preserva as fibras de $S(a_0, a_1, a_2, a_3) \xrightarrow{t_3} \mathbb{R}$.

Em particular, se P é regular com respeito a t_3 com R_0R_3 elíptica e a ação de M_3 na componente conexa contendo P é discreta, então R_0R_3 tem que ser periódica e o período deve ser o mesmo quando nós variamos levemente t_3P . Isto é impossível pois o triângulo (c_0, c, c_3) que corresponde a relação $R_0^{-1}(R_0R_3)R_3^{-1} = 1$ (veja, por exemplo, a prova do Lema 4) é completamente determinado por seus ângulos e, portanto, não admite nenhuma variação de t_3 , onde c é o ponto fixo de R_0R_3 . Consequentemente, o grupo M não pode agir discretamente numa componente contendo um ponto regular com respeito a t_3 com R_0R_3 elíptica. (Denotamos por M o subgrupo de índice 2 do grupo M_3 .)

Lema 8. Se M age discretamente numa componente conexa de $S(a_0, a_1, a_2, a_3)$, então a componente é a não-compacta (nós ignoramos a componente de apenas um ponto) e

- $a_j + a_k \leq \pi$ para todos $j \neq k$ ou $\pi \leq a_j + a_k$ para todo $j \neq k$.

Demonstração. Suponha que $a_j + a_k < \pi < a_l + a_m$ com $j \neq k$ e $l \neq m$. Assumindo sem perda de generalidade que $a_0 \leq a_3 \leq a_1 \leq a_2$, obtemos que $a_0 + a_3 < \pi < a_1 + a_2$, i.e., nós estamos no caso **c**. Pela Proposição 1, nós ganhamos uma única componente. Esta possui um ponto regular com respeito a t_3 com R_0R_3 elíptica. Como vimos acima, M não pode agir discretamente nesta componente. \square

Na sequência, nós lidaremos apenas com os casos listados no Lema ?? e com as componentes conexas não-compactas C_1 .

Pelo lema 7, a componente C_1 é não-suave apenas no caso $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = \frac{\pi}{2}$. Como, pelo Lema 7, $A_1 \cap A_2 \cap C_1 \neq \emptyset$ apenas no caso **d** do Lema 5, as curvas A_j são duas a duas disjuntas em C_1 se C_1 é suave.

Para $1 \leq j \leq 3$ e $P \in S(a_0, a_1, a_2, a_3)$, denotemos $t'_j P := \text{ta}(c_j, p_{j+1})$ (os índices são considerados módulo 3). Então, a condição $t_j P = t'_j P$ é equivalente a $P \in A_j$. Pela Proposição 1 e Lema ??, assumindo C_1 suave, a curva A_j é uma linha suave em C_1 e divide o plano suave C_1 em duas partes H_j e H'_j dadas pelas desigualdades $t_j \leq t'_j$ e $t_j \geq t'_j$, respectivamente.

Lema 9. Suponha que

- $a_j + a_k \leq \pi$ para todo $j \neq k$ ou $\pi \leq a_j + a_k$ para todo $j \neq k$.

Então a componente não-compacta C_1 de $S(a_0, a_1, a_2, a_3)$, i.e., a componente dada pela equação $e_1(t_1, t_2, t_3) = 0$, é suave a menos que $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = \frac{\pi}{2}$. Assumindo C_1 suave, as curvas A_1, A_2, A_3 em C_1 são linhas suaves duas a duas disjuntas, cada uma dividindo o plano suave C_1 em duas partes e, mais ainda, $A_k \cap C_1 \subset H_j \cap C_1$ para todo j e k .

Demonstração. Suponha que, digamos, $A_2 \cap C_1 \not\subset H_1 \cap C_1$. Note que as desigualdades $0 < a_j < \pi$ e $a_j + a_k \leq \pi$ para todo $j \neq k$ define em \mathbb{R}^4 uma região convexa que se mantém conexa depois da remoção do ponto $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (similarmente, para as desigualdades $\pi \leq a_j + a_k$). Logo, podemos variar os a_j 's mantendo C_1 suave. Como $A_1 \cap A_2 \cap C_1 = \emptyset$ durante a deformação e a equação $e_1(t_1, t_2, t_3) = 0$ bem como as funções t'_1, t'_2 dependem continuamente dos a_j 's, obtemos $A_2 \cap C_1 \not\subset H_1 \cap C_1$ para o caso especial de $a_1 = a_2 = a_3 = \frac{\pi}{2}$ e $a_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Neste caso, um hexágono é apenas um triângulo com vértices p_1, p_2, p_3 cujos ângulos interiores somam $2a_0$, e c_1, c_2, c_3 são respectivamente os pontos médios dos lados $[p_3, p_1]$, $[p_1, p_2]$, $[p_2, p_3]$ do triângulo. Como $A_2 \cap C_1 \not\subset H_1 \cap C_1$ implica $A_2 \cap H_1 \cap C_1 = \emptyset$, o triângulo isósceles (p_1, p_2, p_3) com $\text{dist}(p_1, p_3) = \text{dist}(p_2, p_3)$ e $\text{dist}(p_1, p_2) = 2 \text{dist}(c_2, p_3)$ cujos ângulos interiores somam $2a_0$ satisfaz $2 \text{dist}(c_1, p_2) < \text{dist}(p_1, p_3)$, o que é impossível. \square

Teorema 1. O grupo M_3 gerado pelas modificações age discretamente numa componente C de $S(a_0, a_1, a_2, a_3)$ exatamente quando C é não-compacta,

- $a_j + a_k \leq \pi$ para todo $j \neq k$ ou $\pi \leq a_j + a_k$ para todo $j \neq k$,

e $a_j \neq \frac{\pi}{2}$ para algum $0 \leq j \leq 3$. Neste caso, o quociente C/M é uma 2-esfera com 3 buracos e M é o grupo livre de posto 2, onde M é o subgrupo de índice 2 de M_3 .

Demonstração. Suponha que $a_j \neq \frac{\pi}{2}$ para algum $0 \leq j \leq 3$. Pelo Lema ??, é suficiente mostrar que M_3 age discretamente na componente não-compacta C_1 nos casos mencionados no teorema.

Denotemos $T := H_1 \cap H_2 \cap H_3$. Pelo Lema 9 e proposição 1, as cópias Tn_1, Tn_2, Tn_3 são duas a duas disjuntas interceptam T apenas nas linhas A_1, A_2, A_3 , respectivamente. Ainda mais, A_j vive na intersecção de $T_1 := T \cup Tn_1 \cup Tn_2 \cup Tn_3$ e T_1 é fechado, conectado, e limitado pelas linhas disjuntas duas a duas $A_3n_1, A_2n_1, A_1n_2, A_3n_2, A_2n_3, A_1n_3$. Aplicando para T_1 as involuções $n_1n_3n_1, n_1n_2n_1, n_2n_1n_2, n_2n_3n_2, n_3n_2n_3, n_3n_1n_3$ correspondenes à estas linhas, obtemos cópias disjuntas duas a duas de T_1 . Elas interceptam T_1 apenas nas linhas listadas. Denotemos por T_2 a união de T_1 com as cópias listadas de T_1 , e assim por diante. Um argumento padrão irá mostrar que o grupo M_3 age discretamente em C_1 e que T é sua região fundamental se observarmos que $D := \bigcup_j T_j$ coincide com C_1 .

Como D é M_3 -estável e aberto em C_1 , sua fronteira $\partial D := \overline{D} \setminus D$ é M_3 -estável e fechada em \mathbb{R}^3 . É suficiente mostrar que $\partial D = \emptyset$.

Suponha que a intersecção D_r de ∂D com a bola fechada de raio $r > 1$ centrada na origem em \mathbb{R}^3 é não-vazia. Já que D_r é compacto, existe um ponto $P \in D_r$ com um valor minimal de $t_1t_2t_3$. Como $T \cap \partial D = \emptyset$, nós temos, digamos, $t'_3P < t_3P$. Então $t_1(Pn_3) = t_1P$, $t_2(Pn_3) = t_2P$, $t_3(Pn_3) = t'_3P < t_3P$, e $Pn_3 \in D_r$. Mas isso contradiz a escolha de P .

O caso restante $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = \frac{\pi}{2}$ é considerada na próxima observação. \square

Observação 1. A componente conexa C de $S := S(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ com a ação do grupo M é isomorfa ao espaço $\mathbb{R}^2 / \pm 1$ com a ação natural do subgrupo de congruência Γ_2 em $\text{SL}_2 \mathbb{Z}$ que é sabido ser gerado por $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Portanto, quase toda M -órbita é densa em C .

Demonstração. Todo vértice de um hexágono arbitrário $P \in S$ vive numa geodésica. Logo, vendo um hexágono com uma tripla (c_1, c_2, c_3) , podemos interpretar isso como uma tripla de números reais considerados a menos de isometrias da reta real. Nestes termos, $R_j : r \mapsto 2c_j - r$. Já que as modificações n_2n_1 e n_3n_1 transformam a relação $R_3R_2R_1R_0 = 1$ (colocamos a marca c_0 em p_3) na relação $R_3R_2^{R_2R_1}R_1^{R_2}R_0 = 1$ e $R_3R_2^{R_1R_3}R_1R_0^{R_3R_1} = 1$, respectivamente, assumindo $c_3 := 0 \in \mathbb{R}$, podemos ver que $n_2n_1 : (c_1, c_2) \mapsto (2c_2 - c_1, 2c_2 - (2c_1 - c_2)) = (-c_1 + 2c_2, -2c_1 + 3c_2)$ e $n_3n_1 : (c_1, c_2) \mapsto (c_1, 2c_1 + c_2)$. Em outras palavras, nós identificamos S com $\mathbb{R}^2 / \pm 1$ onde n_2n_1 age como $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ e n_3n_1 , as $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Resta observar que $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. \square

2.5 Esferas hiperbólicas com $n + 1$ pontos cônicos e $2n$ -gonos convexos

Dados $a_0, a_1, \dots, a_n \in [\frac{\pi}{2}, \pi[$ tais que $\sum_j a_j > 2\pi$, nós consideramos o espaço $C(a_0, a_1, \dots, a_n)$ de 2-esferas hiperbólicas Σ com singularidades cônicas marcadas c_0, c_1, \dots, c_n tais que a curvatura em c_j vale $2a_j$ para todo j ; as 2-esferas são consideradas a menos de orientação- e isometrias preservando marcas.

Seja $\Sigma \in C$. Escolhemos segmentos geodésicos $[c_0, c_j] \subset \Sigma$ cujas intersecções dois a dois são apenas c_0 (digamos, escolhendo os mais curtos) e cortamos Σ ao longo desses segmentos. Nós ganhamos um $2n$ -gono hiperbólico com vértices consecutivos $c_1, p_1, \dots, c_n, p_n$ tal que o ângulo interior em c_j é $2\pi - 2a_j \leq \pi$ para todo $1 \leq j \leq n$ e os ângulos interiores nos p_j 's somam $2\pi - 2a_0 \leq \pi$. Segue que P é uma região tipo estrela, logo, é mergulhável pelo Fato 11 no plano hiperbólico como um 2 -gono convexo. Aplicando a P a modificação $m_{j,l}$ (veja Definição 3), obtemos outro $2n$ -gono convexo $Pm_{j,l}$ tal que a esfera Σ é colada de $Pm_{j,l}$.

Nesta seção, mostramos que $C(a_0, a_1, \dots, a_n) = S_0(a_0, a_1, \dots, a_n)/M_n$, onde M_n é o grupo gerado pelas modificações $m_{j,l}$ e $S(a_0, a_1, \dots, a_n) \supset S_0(a_0, a_1, \dots, a_n)$ é a união das $(n-1)!$ componentes formadas por todos $2n$ -gonos convexos em $S(a_0, a_1, \dots, a_n)$. As componentes em questão correspondem a tipos de $2n$ -gonos (veja Subseção 2.1.4 para a definição de tipo). As outras componentes de $S(a_0, a_1, \dots, a_n)$ são formadas pelos $2n$ -gonos que são não-simples como curvas fechadas. É fácil ver que tais $2n$ -gonos também podem ser caracterizados como aqueles que 'limitam' uma área diferente de $2\sum_j a_j - (n+4)\pi$ (veja [Ana1] para a definição da área 'limitada' por uma curva fechada não-simples).

Teorema 2. Sejam $a_0, a_1, \dots, a_n \in [\frac{\pi}{2}, \pi[$ tais que $\sum_j a_j > 2\pi$. Dados $2n$ -gonos convexos $P, P' \in S_0(a_0, a_1, \dots, a_n)$ tais que as correspondentes 2-esferas Σ, Σ' são isométricas com orientação e marcas preservadas, existe $m \in M_n$ tal que $P' = Pm$.

Observação 2. Tomamos um $2n$ -gono $P \in S_0(a_0, a_1, \dots, a_n)$ com vértices consecutivos $c_1, p_1, \dots, c_n, p_n$. Sem perda de generalidade, assumimos que os ângulos interiores a P nos p_j 's somam $2\pi - 2a_0$ e os ângulos interiores de P nos c_j são $2\pi - 2a_j$ para todo $1 \leq j \leq n$. Denote por D o disco fechado limitado no plano hiperbólico por P , seja Σ a 2-esfera colada de P , e sejam $p, c_1, \dots, c_n \in \Sigma$ respectivamente os pontos cônicos de curvaturas $2a_0, 2a_1, \dots, 2a_n$. Os lados de P (depois da colagem) correspondem a segmentos geodésicos simples $s_j \subset \Sigma$ ligando respectivamente p e c_j , $1 \leq j \leq n$, com intersecção dois a dois igual a p .

Qualquer $2n$ -gono $P' \in S_0(a_0, a_1, \dots, a_n)$ que produz o mesmo Σ depois da colagem é portanto nada mais que segmentos geodésicos simples $s'_j \subset \Sigma$ ligando respectivamente p e c_j , $1 \leq j \leq n$, e p é a intersecção dois a dois destes. Alguns dos s'_j 's podem coincidir com alguns dos s_j '. Denotemos por $0 \leq u \leq n$ o número de não-coincidentes. É claro que, $P' = P$ se $u = 0$.

Em termos do disco fechado D , um segmento arbitrário s'_j é dado por finitos segmentos geodésicos disjuntos $[q_0, q'_1], [q_1, q'_2], \dots, [q_{v-1}, q'_v] \subset D$, onde $1 \leq v$, $q_0 = p_k$ para algum $1 \leq k \leq n$, $q'_v = c_j$, o interior de $[q_l, q'_{l+1}]$ vive no interior de D para todo $0 \leq l \leq v-1$ a menos quando $v = 1$ e $k = j-1$, j , e, para todo $1 \leq l \leq v-1$, os pontos $q'_l \neq q_l$ estão no interior de diferentes lados de P (colados em Σ), simétricos em relação ao vértice comum c_{w_l} , $1 \leq w_l \leq n$, i.e., $\text{dist}(q'_l, c_{w_l}) = \text{dist}(c_{w_l}, q_l)$. Claramente, $s'_j = s_j$ se $v = 1$ e $k = j-1, j$.

Demonstração do Teorema 2 Trabalharemos no cenário da observação 2 e iremos proceder por indução em u e então, por indução no número de intersecções dos segmentos

não-coincidentes vindos de P' com aqueles vindos de P . Como não contamos como intersecções os pontos p, c_1, \dots, c_n , as intersecções em questão são representadas por pontos no interior de D ou no interior dos lados de P .

O caso $u = 0$ foi feito na observação 2. Portanto, assumimos $u \geq 1$. Isso significa que existe $1 \leq j \leq n$ tal que $s'_j \neq s_j$. Portanto, obtemos $v \geq 1$ segmentos geodésicos disjuntos como na observação 2.

Afirmamos que os $2n$ -gonos $Pm_{k,w}$ e P' satisfazem a hipótese de indução, onde $w := w_1$ se $v > 1$ e $w := j$ se $v = 1$.

Suponha que $v = 1$. Como $s'_j \neq s_j$, concluímos que $k \neq j - 1, j$ (veja observação 2) e que $m_{k,j}$ é de fato aplicável. Ainda mais, quando passamos de P para $Pm_{k,j}$, o segmento $s_j \subset \Sigma$ é substituído pelo segmento $s'_j \subset \Sigma$ e o resto dos segmentos vindos de P se mantêm os mesmos. Noutras palavras, u decresce.

Suponha que $v > 1$. Então $k \neq w_1 - 1, w_1$ pois o interior de $[q_0, q'_1] = [p_k, q'_1]$ vive no interior de D . Então, $m_{k,w}$ é aplicável. Quando passamos de P para $Pm_{k,w}$, nós simplesmente trocamos s_w pelo segmento s representado por $[c_w, q_0]$. Então, u não pode crescer e de fato se mantêm o mesmo. Toda intersecção com s pode ser vista como uma intersecção com $[c_w, q_0]$ vivendo no interior de D . Olhando mais de perto no triângulo com vértices q_0, q'_1, c_w , nós entendemos que toda intersecção de algum s'_l com s pode ser vista como uma intersecção de $s' \subset D$, um dos segmentos relacionado a s'_l (como em 5.2), com $[c_w, q_0]$. O último induz uma intersecção de s' com $[q'_1, c_w]$ porque s' e $[q_0, q'_1]$ são disjuntas: elas são relacionadas a diferentes segmentos vindo de P' . Resta observar que as intersecções correspondendo a q'_1 desaparecem quando passamos de P para $Pm_{k,w}$. \square

HYPERBOLIC 2-SPHERES WITH CONE SINGULARITIES

SASHA ANAN'IN, CARLOS H. GROSSI, JAEJEONG LEE, JOÃO DOS REIS JR.

ABSTRACT. We study the space $C(a_0, a_1, \dots, a_n)$ of hyperbolic 2-spheres with cone points of prescribed apex curvatures $2a_0, 2a_1, \dots, 2a_n \in]0, 2\pi[$ and some related spaces. For $n = 3$, we get a detailed description of such spaces. The euclidean 2-spheres were considered by W. P. Thurston: for $n = 4$, the corresponding spaces provide the famous 7 examples of nonarithmetic compact holomorphic 2-ball quotients previously constructed by Deligne-Mostow.

To Misha Kapovich, a geometric geometer

1. Introduction

In the seminal work [Thu], W. P. Thurston studied the space of flat 2-spheres with cone points of prescribed apex curvatures. Such a space possesses a structure of complex hyperbolic manifold, though, is not in general complete. Its completion has a natural structure of complex hyperbolic cone manifold which turns out to be an orbifold exactly when satisfies a certain simple *orbifold condition* on the prescribed apex curvatures. In this way, Thurston reobtained the celebrated 7 nonarithmetic compact holomorphic 2-ball quotients (for short, nonarithmetic *quotients*) that were constructed by Deligne-Mostow [DM1], [DM2] about 30–35 years ago. As we are not going to distinguish a quotient Q from a unramified finite cover of Q , we assume Q to be a manifold. Recently, 4 more nonarithmetic quotients were constructed in [DPP]. The latter 4 are quite similar to the former 7. Each of 11 contains at least four \mathbb{C} -fuchsian curves, i.e., smooth holomorphic totally geodesic compact curves.

In turn, the arithmetic quotients are known to be of 2 types [McR]: the *first* type and the *second* type which is related to division algebras. Taking into account the Mostow-Prasad rigidity of quotients, there are countably many arithmetic quotients of either type. The types can be distinguished by the presence of a \mathbb{C} -fuchsian curve: a quotient of the first type possesses such a curve, whereas that of the second one does not. Using \mathbb{C} -fuchsian curves, we define the type of an arbitrary quotient with the same criterion and arrive at the following questions.

1.1. Problem. Is there any nonarithmetic quotient of the second type? Do there exist infinitely many nonarithmetic quotients of the first/second type?

1.2. Outline. In this paper, we develop a few tools allowing to study the space $C(a_0, a_1, \dots, a_n)$ of 2-spheres with cone points of prescribed apex curvatures $2a_0, 2a_1, \dots, 2a_n$, where the set of the other points is endowed with the *spherical* geometry of curvature $\sigma := 1$ or with the *hyperbolic* geometry of curvature $\sigma := -1$. Hopefully, $C(a_0, a_1, \dots, a_n)$ or related spaces can shed some light on the above problem.

1.2.1. Toy example. In order to clarify the general picture, we first glance at the toy case of 4 cone points of the fixed apex curvatures $2a, \pi, \pi, \pi$, where $a \in]0, \frac{\pi}{2}[$ when $\sigma = 1$ and $a \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$ when

2000 *Mathematics Subject Classification.* 30F60 (22E40, 20H10).

Key words and phrases. Nonarithmetic/arithmetic compact holomorphic 2-ball quotients, spaces of spherical/hyperbolic structure with prescribed cone singularities on a 2-sphere, discrete actions, braid groups.

$\sigma = -1$. In this particular situation, each spherical or hyperbolic 2-sphere can be cut into a solid triangle (closed disc) bounded by a triangle and living in the model space, i.e., in the round sphere or in the hyperbolic plane. Indeed, we simply join the cone point p of apex curvature $2a$ with the other 3 cone points by means of simple geodesic segments so that the segments intersect only in p (say, taking the shortest ones) and then cut the 2-sphere along the segments. The point p turns into the vertices of the triangle and the other 3 cone points, into the middle points of the sides of the triangle. By splitting the solid triangle along a median and then gluing the corresponding half-sides, we *modify* the original triangle with respect to the median. As it happens, the 2-spheres corresponding to triangles t_1 and t_2 are isometric (orientation preserved) iff t_1 and t_2 differ by finitely many such modifications. This allows us to describe the space $C(a, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ as the quotient of a topological disc S , the space of counterclockwise oriented triangles of the fixed area $\sigma(\pi - 2a)$, by the group M_3 generated by 3 involutions which are nothing but the modifications acting on S . In a certain sense, this construction is reminiscent of [WaW].

1.2.2. General case. Denote by G the Lie group of orientation-preserving (= holomorphic) isometries of the model space. So, $G := \text{PU}(2)$ when $\sigma = 1$ and $G := \text{PU}(1, 1)$ when $\sigma = -1$. Let c_0, c_1, \dots, c_n stand for the cone points of some 2-sphere $\Sigma \in C(a_0, a_1, \dots, a_n)$. Then we get a holonomy representation $\varrho : F_n \rightarrow G$, where $F_n := \pi_1(\Sigma \setminus \{c_0, c_1, \dots, c_n\})$ is the free group of rank n . In this way, we obtain a well-defined holonomy map $h : C(a_0, a_1, \dots, a_n) \rightarrow \text{REP}(F_n, G)/G$, $\Sigma \mapsto [\varrho]$, to the space of representations $\text{REP}(F_n, G)$ considered modulo conjugation by G .

As in 1.2.1, we can join c_0 with c_1, \dots, c_n by means of n simple geodesic segments so that the segments intersect only in c_0 (say, taking the shortest ones) and then cut Σ along the segments thus getting a $2n$ -gon P that bounds a topological closed disc not necessarily embeddable into the model space. Labeling the odd vertices of P that originate from c_1, \dots, c_n with the same symbols and the even ones, that originate from c_0 , with p_1, \dots, p_n , we see that the interior angles of P at the p_j 's sum to $2\pi - 2a_0$, that the interior angle of P at c_j equals $2\pi - 2a_j$, and that the sides of P adjacent at c_j have equal length for all $j = 1, \dots, n$. In some sense, P bounds a fundamental domain for Σ .

A choice of the above segments distinguishes some generators r_0, r_1, \dots, r_n of F_n such that $F_n = \langle r_0, r_1, \dots, r_n \mid r_n \dots r_1 r_0 = 1 \rangle$. A suitable braid group \overline{M}_n (see Definition 4.2) acts on F_n and preserves the set of conjugacy classes of the r_j 's. Another choice of the segments is given at the level of representations by an element $m \in \overline{M}_n$ that transforms $[\varrho]$ into $[\varrho \circ m]$. (In general, such elements m do not form a subgroup.) Hence, the image of the holonomy map h lives in a sort of relative character variety $R(a_0, a_1, \dots, a_n) \subset \text{REP}(F_n, G)/G$ formed by all the representations $[\varrho]$ such that the conjugacy classes of $\varrho r_0, \varrho r_1, \dots, \varrho r_n$ are the counterclockwise rotations in the model space by the angles $2a_0, 2a_1, \dots, 2a_n$, listed perhaps in different order. In alternative words, $R(a_0, a_1, \dots, a_n)$ is the space of relations between rotations in prescribed conjugacy classes (the order of the classes is not fixed).

1.2.3. Convex hyperbolic $2n$ -gons. Let us look more closely at the case of $\sigma = -1$ with $a_0, a_1, \dots, a_n \in [\frac{\pi}{2}, \pi[$ such that $\sum_j a_j > 2\pi$. Here, any $2n$ -gon P is convex, i.e., its interior angles are all in $]0, \pi]$, hence, the corresponding closed disc is embeddable into the model space. In this case, the space $C(a_0, a_1, \dots, a_n)$ of hyperbolic 2-spheres with cone points of apex curvatures $2a_0, 2a_1, \dots, 2a_n$ can be described as the quotient of a component of $R(a_0, a_1, \dots, a_n)$ by the action of \overline{M}_n (see Section 5 and Theorem 5.1; see also Section 1.3).

1.2.4. Geometry on $C(a_0, a_1, \dots, a_n)$ and on the related spaces. Since we hope to endow $C(a_0, a_1, \dots, a_n)$ with a structure of complex hyperbolic orbifold, it is natural to conjecture that such a geometry descends from a component C of $R(a_0, a_1, \dots, a_n)$ and that \overline{M}_n acts discretely on C by isometries. (There is a more subtle approach to constructing spaces with geometry in a similar vein, but let us stick first to a simplest variant.)

Actually, even in the flat case considered by Thurston, there may exist no preferred hyperbolic geometry on C . (Well, in the flat case, one can always choose the structure related to the oriented area

function; it does provide a complex hyperbolic structure.) The choice of a ‘good’ hyperbolic structure on C is the principal challenge in our project, and the first step is to describe the components of $R(a_0, a_1, \dots, a_n)$ where \overline{M}_n acts discretely.

One can establish the lack of geometry of constant curvature on a component of $R(a_0, a_1, a_2, a_3)$, compatible with the action of \overline{M}_3 , if this action is not discrete.

1.2.5. Brief sketch of the exposition. Every representation $[\rho] \in R(a_0, a_1, \dots, a_n)$ can be interpreted as a labeled $2n$ -gon, a closed piecewise geodesic oriented path, whose consecutive vertices $c_1, p_1, \dots, c_n, p_n := c_0$ are given by $p_j := R_j p_{j-1}$ for all $1 \leq j \leq n$ (the indices are modulo n), where c_j stands for the fixed point of the rotation $R_j := \rho r_j$, $0 \leq j \leq n$, and, without loss of generality, R_0 is a counterclockwise rotation by $2a_0$.

It is convenient to deal with the $2n$ -gons with a forgotten label c_0 . In other words, we consider the quotient $S(a_0, a_1, \dots, a_n)$ of $R(a_0, a_1, \dots, a_n)$ by a suitable order n cyclic subgroup in \overline{M}_n . Thus, we are allowed to place the fixed point of the rotation R_0 at any vertex p_j . In terms of relations, the generator of the cyclic group transforms the relation $R_n \dots R_1 R_0 = 1$ into the relation $R_1 R_n \dots (R_1 R_0 R_1^{-1}) = 1$. A certain braid group M_n (see Definition 4.3) generated by simple modifications (surgeries) of the $2n$ -gons acts on $S(a_0, a_1, \dots, a_n)$ so that the map $R(a_0, a_1, \dots, a_n) \rightarrow S(a_0, a_1, \dots, a_n)$ induces a bijection between the \overline{M}_n -orbits and the M_n -orbits. Clearly, the discreteness of \overline{M}_n is equivalent to that of M_n .

Next step is to describe the components of $S(a_0, a_1, \dots, a_n)$. The cyclic order of a_1, \dots, a_n in P defines the *type* of a $2n$ -gon P and M_n acts transitively on the types. Thus, we need to describe the components of a given type and to find those components where M , the index $(n-1)!$ subgroup of the type-preserving elements of M_n , acts discretely.

We proceed by induction on n . Without loss of generality, we assume R_0 and R_n to be counterclockwise rotations by $2a_0$ and $2a_n$. The conjugacy class of $R_0 R_n$ is given exactly by the distance d_n between c_n and p_n . Therefore, by induction, we know the topology of a fibre of the map $d_n : S(a_0, a_1, \dots, a_n) \rightarrow [0, \infty[$. Indeed, if $R_0 R_n$ is a counterclockwise rotation by $2a$, $a \in]0, \pi[$, then the fibre in question is $S(a, a_1, \dots, a_{n-1}) \times C_{R_0 R_n}$, where $C_{R_0 R_n}$ stands for the centralizer of $R_0 R_n$ in G , topologically a circle. If $R_0 R_n = 1$ (hence, $d_n = 0$), then the fibre equals $S(a_1, \dots, a_{n-1})$. If $R_0 R_n$ is a parabolic or hyperbolic isometry, then the fibre is $S(a^*, a_1, \dots, a_{n-1}) \times C_{R_0 R_n}$, where a^* stands for the conjugacy class of $R_0 R_n$ and $C_{R_0 R_n}$ is topologically a line. (This means that, for the sake of induction, we need to consider the relations between isometries in prescribed conjugacy classes, not necessarily elliptic ones. We do not do so in this particular paper because we study here mostly the case of $n = 3$ and $\sigma = -1$.) Gathering information about the topology of the fibres of d_n , including that at the singular points of d_n , we arrive at the description of the components and their topology (see Proposition 4.5.2).

Also, in the case $n = 3$ and $\sigma = -1$, we visualize 3 curves A_1, A_2, A_3 that are respectively fixed point sets of the involutions n_1, n_2, n_3 that generate the group M_3 (here we identify the components of both types). We show that M_3 does not act discretely on a component if the component is not smooth (see Remark 4.6.4) or if a couple of the above curves intersects in the component. Finally, we describe all components where M_3 acts discretely (see Theorem 4.6.3) : for any $a_0, a_1, a_2, a_3 \in]0, \pi[$, unless $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = \frac{\pi}{2}$ (the case of nonsmooth $S(a_0, a_1, a_2, a_3)$), there exists a component (of a given type) where M_3 acts discretely iff $a_j + a_k \leq \pi$ for all $j \neq k$ or $\pi \leq a_j + a_k$ for all $j \neq k$, and such a component is unique. Taking an ideal triangle on the hyperbolic plane and the group generated by the reflections in its sides A_1, A_2, A_3 , we get an adequate topological picture of the action of M_3 on a component in question.

It is worthwhile mentioning that any component of $S(a_0, a_1, a_2, a_3)$ is a surface in \mathbb{R}^3 given by one of the equations (3.5) or (3.7).

1.3. Related works. Being back to the toy example 1.2.1, hence, taking in the equations (3.5) and (3.7) $a_1 = a_2 = a_3 := \frac{\pi}{2}$, and changing the variables with respect to $x_j := \pm 2s(2t_j - 1)$, we arrive at the equation $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_2 x_3 - 2 = t$, where $s := \sin a_0$, $t := -\text{tr } R_{c,k}$, $k := e^{a_0 i}$, and $R_{c,k} \in \text{SU}(1, 1)$

(see the definition in the beginning of Section 2) represents the counterclockwise rotation by $2a_0$ about c in the hyperbolic plane. In other words, our group M_3 in this case is commensurable with the group Γ from [Gol] in the case $|t| < 2$. If we would admit in the toy example a parabolic or hyperbolic isometry in place of $R_{c,k}$, we could deal in fact with the general case studied by W. M. Goldman [Gol] (the parabolic isometry would correspond to the case studied by P. Waterman and S. Wolpert [WaW]).

The condition $\sum_{j=0}^n a_j > 2\pi$ (or $\sum_{j=0}^n a_j < 2\pi$) on the prescribed apex curvatures, necessary for the existence of a hyperbolic (respectively, spherical) 2-sphere Σ with the indicated cone singularities, is clearly sufficient. Moreover, A. D. Alexandrov proved that, for any such Σ , there exists a unique convex compact polyhedron P in the real hyperbolic 3-space of curvature -1 (respectively, in the round 3-sphere of curvature 1) whose boundary ∂P is isometric to Σ with respect to the inner metric on ∂P (see [Ale, 3.6.4, p. 190] for the uniqueness and [Ale, 5.3.1, p. 261] for the existence).

G. Mondello and D. Panov [MPa] found necessary and almost sufficient conditions for the existence of a spherical 2-sphere with cone points of given cone angles, each of the angles is allowed to exceed 2π . The corresponding space can be quite useful when dealing with Problem 1.1. In the context of convex polyhedra in real hyperbolic 3-space, C. D. Hodgson and I. Rivin [HRi] described all spherical 2-spheres with all cone angles $> 2\pi$ and all closed geodesics of length $> 2\pi$.

Acknowledgements. We are very grateful to KIAS and to professor Sungwoon Kim for organizing ‘Workshop on geometric structures, Hitchin components, and representation varieties’ and supporting our collaboration (see <http://home.kias.re.kr/MKG/h/WGS2015/>). We also thank the referee for remarks that improved our exposition. The first three authors were supported by FAPESP, grant 2015/25809-2. The forth author was partially supported by FAPESP, grant 2014/26295-0.

2. Preliminary remarks

We are going to use the following settings and notation similar to those in [AGr].

Let $\sigma = \pm 1$. In what follows, V denotes a 2-dimensional \mathbb{C} -linear space equipped with a hermitian form $\langle -, - \rangle$ of signature $(1 + \frac{\sigma+1}{2}, \frac{\sigma-1}{2})$. Denote $BV := \{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}V \mid \langle p, p \rangle > 0\}$. Then BV is the model space of curvature σ , a round sphere if $\sigma = 1$ and a hyperbolic disc if $\sigma = -1$. In fact, when $\sigma = -1$, the *Riemann-Poincaré sphere* $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$ is glued from two hyperbolic discs BV and $B'V := \{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}V \mid \langle p, p \rangle < 0\}$ along the *absolute* $\partial BV := \{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}V \mid \langle p, p \rangle = 0\}$.

The distance $\text{dist}(p_1, p_2)$ between points $p_1, p_2 \in BV$ is given by the formulae $\cos^2 \frac{\text{dist}(p_1, p_2)}{2} = \text{ta}(p_1, p_2)$ for $\sigma = 1$ and $\cosh^2 \frac{\text{dist}(p_1, p_2)}{2} = \text{ta}(p_1, p_2)$ for $\sigma = -1$. So, the distance is a monotonic function of the *tance* defined as $\text{ta}(p_1, p_2) := \frac{\langle p_1, p_2 \rangle \langle p_2, p_1 \rangle}{\langle p_1, p_1 \rangle \langle p_2, p_2 \rangle}$.

For $z \in \mathbb{C} \setminus 0$, we denote by $\arg z$ and $\text{Arg } z$ the argument functions taking values in $] -\pi, \pi]$ and in $[0, 2\pi[$, respectively.

2.1. Remark [AGr, Example 6.1]. *The oriented area of a triangle with pairwise nonorthogonal vertices $p_1, p_2, p_3 \in BV$ equals $\text{area}(p_1, p_2, p_3) = -2\sigma \arg(g_{12}g_{23}g_{31})$, where $[g_{jk}]$ stands for the Gram matrix of the p_j 's. (If $\sigma = -1$, it is possible to observe that \arg takes values in $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ when calculating area by the above formula; if $\sigma = 1$, then \arg can take any value.) In particular, the triangle is counterclockwise oriented iff $-\sigma \text{Im}(g_{12}g_{23}g_{31}) > 0$.*

For $c \in BV$ and $k \in \mathbb{C}$ such that $|k| = 1$, the rule $R_{c,k} : p \mapsto (\bar{k} - k) \frac{\langle p, c \rangle}{\langle c, c \rangle} c + kp$ defines a \mathbb{C} -linear map $R_{c,k} : V \rightarrow V$.

2.2. Remark. *Let $c, p \in BV$ and let $k, k' \in \mathbb{C}$ be such that $|k| = |k'| = 1$. Then $R_{c,k}$ provides a rotation in BV . More precisely, $R_{c,k}$ is the rotation by $\text{Arg } k^2$ in the counterclockwise sense about c . Moreover, $R_{c,k} \in \text{SU } V$, $R_{c,-k} = -R_{c,k}$, $R_{c,k}R_{c,k'} = R_{c,kk'}$, $\langle c, R_{c,k}p \rangle = k\langle c, p \rangle$, and $\langle R_{c,k}p, p \rangle = (\text{ta}(p, c)(\bar{k} - k) + k)\langle p, p \rangle$. If $\sigma = 1$ and $\langle c, c' \rangle = 0$, then $R_{c,k}R_{c',k} = 1$.*

Proof. Let $c' \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$ be the point orthogonal to c and take representatives such that $\langle c, c \rangle = 1$ and $\langle c', c' \rangle = \sigma$. Every point $x \in BV$ can be written in the form $x = c + \eta c'$ for some unique $\eta \in \mathbb{C}$. When $\sigma = -1$, we have $|\eta| < 1$ and this corresponds to identifying BV with the unitary disc in \mathbb{C} centred at the origin; when $\sigma = 1$, we identified $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}V \setminus c'$ with \mathbb{C} (in both cases, the point c is mapped to the origin). Under this identification, $R_{c,k}$ sends the point x to $c + k^2 \eta c'$, i.e., it is nothing but multiplication by the unitary complex number k^2 . In the orthonormal basis c, c' , the map $R_{c,k}$ has the form $\begin{bmatrix} \bar{k} & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$, so it belongs to SUV . The equalities $R_{c,-k} = -R_{c,k}$, $R_{c,k}R_{c,k'} = R_{c,kk'}$, $\langle c, R_{c,k}p \rangle = k\langle c, p \rangle$, and $\langle R_{c,k}p, p \rangle = (\operatorname{ta}(p, c)(\bar{k} - k) + k)\langle p, p \rangle$ follow from straightforward calculations. Finally, in order to show that $R_{c,k}R_{c',k} = 1$, it suffices to note that $R_{c,k}R_{c',k}c = c$ and $R_{c,k}R_{c',k}c' = c'$.

Let γ be a geodesic in BV . We denote by I_{γ} the (antiholomorphic) reflection in γ . Given a couple of geodesics γ, γ' intersecting at $c \in BV$, denote by $\alpha_c(\gamma, \gamma') \in [0, \pi[$ the *oriented angle* at c from γ to γ' counted in the counterclockwise sense.

2.3. Remark. Let $1 \neq R \in \operatorname{PU}V$ be a nontrivial orientation-preserving isometry of BV . Then there exist distinct geodesics γ, γ' such that $R = I_{\gamma'}I_{\gamma}$ in $\operatorname{PU}V$.

The geodesics are ultraparallel, tangent, or intersecting iff R is respectively hyperbolic, parabolic, or elliptic. The couple of geodesics is unique up to the action of the centralizer C_R of R in $\operatorname{PU}V$ and the action of the centralizer is free in the hyperbolic and parabolic cases. In the elliptic case, the stabilizer of the couple is given by the reflection in a point of the intersection of the geodesics, i.e., by $R_{c,i}$, where c is a point of the intersection. In this case, $I_{\gamma'}I_{\gamma} = R_{c,k} \in \operatorname{PU}V$, where $k := e^{i\alpha_c(\gamma, \gamma')}$.

Topologically, C_R is a circle if R is elliptic and a line, if R is hyperbolic or parabolic.

2.4. Remark. Let $\sigma = -1$. For any $a_1, a_2 \in]0, \pi[$ such that $a_1 + a_2 \neq \pi$, there exists unique $t_0(a_1, a_2) > 1$ satisfying the following property. Given distinct points $q_1, q_2 \in BV$, denote by γ_1, γ_2 the geodesics such that $q_j \in \gamma_j$, $\alpha(\gamma, \gamma_1) = a_1$, and $\alpha(\gamma_2, \gamma) = a_2$, where γ stands for the geodesic joining q_1, q_2 . The geodesics γ_1, γ_2 intersect, are tangent, or are ultraparallel if $\operatorname{ta}(q_1, q_2) < t_0(a_1, a_2)$, $\operatorname{ta}(q_1, q_2) = t_0(a_1, a_2)$, or $\operatorname{ta}(q_1, q_2) > t_0(a_1, a_2)$, respectively. In the case $a_1 + a_2 = \pi$, the geodesics γ_1, γ_2 are always ultraparallel and we put $t_0(a_1, a_2) := 1$ in this case.

2.5. Remark. Let γ_1, γ_2 be ultraparallel geodesics and let $a_1, a_2 \in]0, \pi[$. Then there exists a unique geodesic γ , depending smoothly on γ_1, γ_2 , such that $\alpha(\gamma_1, \gamma) = a_1$ and $\alpha(\gamma, \gamma_2) = a_2$.

Proof. Let v_1, v'_1 and v_2, v'_2 be vertices of γ_1 and of γ_2 such that the triangles (v'_1, v_1, v_2) and (v'_1, v_2, v'_2) are both clockwise oriented. Then the angle from $[v'_1, c]$ to $[c, v_2]$ grows monotonically from 0 to π while $c \in \gamma_1$ runs from v_1 to v'_1 . At some $c \in \gamma_1$, this angle equals a_1 . Similarly, there exists $c' \in [c, v'_1]$ such that the angle from $[v'_1, c']$ to $[c', v'_2]$ equals a_1 . It follows that, for any $p \in [c, c']$, the geodesic γ_p that passes through p and such that $\alpha(\gamma_1, \gamma_p) = a_1$ intersects γ_2 . For $p = c$, this intersection is v_2 and, for $p = c'$, it is v'_2 . Hence, the angle $\alpha(\gamma_p, \gamma_2)$ varies from 0 to π . By continuity, we obtain the existence of the desired γ . If we have another γ' , then γ and γ' are ultraparallel. So, we get a simple quadrangle whose interior angles sum to 2π , a contradiction.

2.6. Remark. Let $\sigma = -1$ and $a_0, a_1, a_2, a_3 \in]0, \pi[$. Then, for any $t > t_0(a_0, a_3)$, there exist geometrically unique geodesics $\gamma, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ such that $\alpha(\gamma_0, \gamma_1) = a_0$, $\alpha(\gamma_1, \gamma) = a_1$, $\alpha(\gamma, \gamma_2) = a_2$, $\alpha(\gamma_2, \gamma_0) = a_3$, and $\operatorname{ta}(c_3, c_0) = t$ (hence, γ_1, γ_2 are ultraparallel), where c_0 and c_3 stand for the intersection points of γ_0, γ_1 and of γ_0, γ_2 , respectively. Moreover, the four geodesics depend smoothly on $t > t_0(a_0, a_3)$.

Proof. By Remark 2.4, taking points c_0, c_3 on the tance $\operatorname{ta}(c_0, c_3) = t$, we get ultraparallel geodesics γ_1, γ_2 such that $c_0 \in \gamma_1$ with $\alpha(\gamma_0, \gamma_1) = a_0$ and $c_3 \in \gamma_2$ with $\alpha(\gamma_2, \gamma_0) = a_3$, where γ_0 stands for the geodesic joining c_0, c_3 . By Remark 2.5, there exists a unique geodesic γ such that $\alpha(\gamma_1, \gamma) = a_1$ and $\alpha(\gamma, \gamma_2) = a_2$.

2.7. Remark. Let $\sigma = -1$. Given distinct geodesics γ_1, γ_2 intersecting at some point $c \in BV$, denote $a := \alpha(\gamma_2, \gamma_1)$ and pick some $a_1, a_2 \in]0, \pi[$. Then there exists a couple of geodesics γ, γ' (subject to $\gamma' = R_{c,i}\gamma$) such that $\alpha(\gamma_1, \gamma) = \alpha(\gamma_1, \gamma') = a_1$ and $\alpha(\gamma, \gamma_2) = \alpha(\gamma', \gamma_2) = a_2$ iff

- $a + a_1 + a_2 \leq \pi$, when the triangle (c, c_1, c_2) is clockwise oriented or degenerate (i.e., $c = c_1 = c_2$), or

- $2\pi \leq a + a_1 + a_2$, when the triangle (c, c_1, c_2) is counterclockwise oriented or degenerate,

where c_j stands for the intersection point of γ and γ_j . Such geodesics γ, γ' are unique when exist and depend continuously on γ_1, γ_2 , and a .

The condition $\gamma = \gamma'$ is equivalent to $a + a_1 + a_2 = \pi$ or $a + a_1 + a_2 = 2\pi$; equivalently, this means that $c = c_1 = c_2$.

2.8. Remark. Let $\sigma = -1$. Suppose that $a_0, a_1, a_2, a_3 \in]0, \pi[$ satisfy $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 < \pi$ or $3\pi < a_0 + a_1 + a_2 + a_3$. Then there exist geodesics $\gamma, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ such that γ_1, γ_2 intersect, $\alpha(\gamma_0, \gamma_1) = a_0$, $\alpha(\gamma_1, \gamma) = a_1$, $\alpha(\gamma, \gamma_2) = a_2$, and $\alpha(\gamma_2, \gamma_0) = a_3$.

Proof. If $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 < \pi$, then $0 < a_0 + a_3 < \pi - a_1 - a_2 < \pi$. So, we can pick $a \in]0, \pi[$ such that $a_0 + a_3 < a < \pi - a_1 - a_2$. Hence, there is a counterclockwise oriented triangle (c, c_0, c_3) with the interior angles $\pi - a, a_0, a_3$, respectively. Denote by $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ the geodesics such that $c_0, c_3 \in \gamma_0$, $c, c_0 \in \gamma_1$, and $c_3, c \in \gamma_2$. As $a = \alpha(\gamma_2, \gamma_1)$ and $a + a_1 + a_2 < \pi$, by Remark 2.7, there exists a geodesic γ with $\alpha(\gamma_1, \gamma) = a_1$ and $\alpha(\gamma, \gamma_2) = a_2$.

If $3\pi < a_0 + a_1 + a_2 + a_3$, then $0 < 2\pi - a_1 - a_2 < a_0 + a_3 - \pi < \pi$. So, we can pick $a \in]0, \pi[$ such that $2\pi - a_1 - a_2 < a < a_0 + a_3 - \pi$. Hence, there is a clockwise oriented triangle (c, c_0, c_3) with the interior angles $a, \pi - a_0, \pi - a_3$, respectively. Denote by $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ the geodesics such that $c_0, c_3 \in \gamma_0$, $c, c_0 \in \gamma_1$, and $c_3, c \in \gamma_2$. As $a = \alpha(\gamma_2, \gamma_1)$ and $2\pi < a + a_1 + a_2$, by Remark 2.7, there exists a geodesic γ with $\alpha(\gamma_1, \gamma) = a_1$ and $\alpha(\gamma, \gamma_2) = a_2$.

2.9. Remark. Let γ_1, γ_2 be distinct tangent geodesics and let $a_1, a_2 \in]0, \pi[$. Denote by v_1, v and by v, v_2 the vertices of γ_1 and of γ_2 , respectively. Then there exists a geodesic γ such that $\alpha(\gamma_1, \gamma) = a_1$ and $\alpha(\gamma, \gamma_2) = a_2$ iff $a_1 + a_2 < \pi$ and the triangle (v_1, v, v_2) is counterclockwise oriented or $\pi < a_1 + a_2$ and the triangle (v_1, v, v_2) is clockwise oriented. Such a geodesic γ is unique if exists.

In particular, any sufficiently small deformation of γ_1, γ_2 still allows a geodesic (a couple of geodesics) with the required angles.

2.10. Remark. Let $\sigma = -1$. Suppose that $a_0, a_1, a_2, a_3 \in]0, \pi[$ satisfy $a_0 + a_3 < \pi < a_1 + a_2$ or $a_1 + a_2 < \pi < a_0 + a_3$. Then there exist geodesics $\gamma, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ such that γ_1, γ_2 are tangent, $\alpha(\gamma_0, \gamma_1) = a_0$, $\alpha(\gamma_1, \gamma) = a_1$, $\alpha(\gamma, \gamma_2) = a_2$, and $\alpha(\gamma_2, \gamma_0) = a_3$.

Proof. Pick a couple of distinct tangent geodesics γ_1, γ_2 such that, in terms of Remark 2.9, the triangle (v_1, v, v_2) is clockwise oriented if $a_0 + a_3 < \pi$ and counterclockwise oriented if $\pi < a_0 + a_3$. By Remark 2.9, there exists a unique geodesic γ_0 with $\alpha(\gamma_2, \gamma_0) = a_3$ and $\alpha(\gamma_0, \gamma_1) = a_0$. Again by Remark 2.9, there exists a unique geodesic γ with $\alpha(\gamma_1, \gamma) = a_1$ and $\alpha(\gamma, \gamma_2) = a_2$ because $a_0 + a_3 < \pi$ implies $\pi < a_1 + a_2$ and $\pi < a_0 + a_3$ implies $a_1 + a_2 < \pi$.

2.11. Remark. Let Σ be a hyperbolic 2-sphere with cone points ($\sigma = -1$) and let $R \subset \Sigma$ be a connected and simply connected region containing no cone points. Then there is a locally isometric immersion from R into BV . If R is a star-like region, then the immersion is an embedding.

3. Technical lemmas

3.1. Lemma. Let $k_0, k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{C}$ with $|k_j| = 1$ be fixed. Pick some $c_j \in BV$, $0 \leq j \leq 3$, and denote $t_1 := \text{ta}(c_0, c_1)$, $t_2 := \text{ta}(R_{c_1, k_1} c_0, c_2)$, and $t_3 := \text{ta}(c_0, c_3)$. If the relation $R_{c_3, k_3} R_{c_2, k_2} R_{c_1, k_1} R_{c_0, k_0} = 1$

holds in SUV , then

$$(3.2) \quad \det \begin{bmatrix} 1 & t_3(k_3 - \bar{k}_3) + \bar{k}_3 & (t_2(\bar{k}_2 - k_2) + k_2)\bar{k}_0 \\ t_3(\bar{k}_3 - k_3) + k_3 & 1 & t_1(k_1 - \bar{k}_1) + \bar{k}_1 \\ (t_2(k_2 - \bar{k}_2) + \bar{k}_2)k_0 & t_1(\bar{k}_1 - k_1) + k_1 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Conversely, given $0 \leq t_1, t_2, t_3 \leq 1$ (the case $\sigma = 1$) or $1 \leq t_1, t_2, t_3$ (the case $\sigma = -1$) satisfying (3.2), there exist c_j 's subject to the relations $R_{c_3, k_3} R_{c_2, k_2} R_{c_1, k_1} R_{c_0, k_0} = 1$ in SUV , $t_1 = \text{ta}(c_0, c_1)$, $t_2 = \text{ta}(R_{c_1, k_1} c_0, c_2)$, and $t_3 = \text{ta}(c_0, c_3)$. Such $c_0, c_1, c_2, c_3 \in BV$ are unique up to the action of UV if $k_j \neq \pm 1$ and $t_j \neq 0$ for all j .

Proof. We assume that $\langle c_j, c_j \rangle = 1$ for all j . Denote $a_j := \sqrt{t_j}$ and choose representatives of c_1, c_3 such that $\langle c_0, c_j \rangle = a_j$ for all $j = 1, 3$. Let $p_2 := R_{c_3, k_3}^{-1} c_0$ and $p_1 := R_{c_1, k_1} c_0$. We choose a representative of c_2 such that $\langle p_1, c_2 \rangle = a_2$. By Remark 2.2, the Gram matrix of the chosen $p_2, c_3, c_0, c_1, p_1, c_2 \in V$ equals

$$G := \begin{bmatrix} 1 & a_3 k_3 & t_3(k_3 - \bar{k}_3) + \bar{k}_3 & & & & \\ a_3 \bar{k}_3 & 1 & a_3 & & & & \\ t_3(\bar{k}_3 - k_3) + k_3 & a_3 & 1 & a_1 & t_1(k_1 - \bar{k}_1) + \bar{k}_1 & & \\ & & a_1 & 1 & a_1 k_1 & & \\ & & t_1(\bar{k}_1 - k_1) + k_1 & a_1 \bar{k}_1 & 1 & a_2 & \\ & & & & a_2 & 1 & \end{bmatrix}.$$

Since $R_{c_3, k_3} R_{c_2, k_2} R_{c_1, k_1} R_{c_0, k_0} c_0 = c_0$ is equivalent to $R_{c_2, k_2} p_1 = k_0 p_2$ in these terms, we conclude by Remark 2.2 that

$$(3.3) \quad G = \begin{bmatrix} 1 & a_3 k_3 & t_3(k_3 - \bar{k}_3) + \bar{k}_3 & * & (t_2(\bar{k}_2 - k_2) + k_2)\bar{k}_0 & a_2 \bar{k}_0 \bar{k}_2 \\ a_3 \bar{k}_3 & 1 & a_3 & * & * & * \\ t_3(\bar{k}_3 - k_3) + k_3 & a_3 & 1 & a_1 & t_1(k_1 - \bar{k}_1) + \bar{k}_1 & * \\ * & * & a_1 & 1 & a_1 k_1 & * \\ (t_2(k_2 - \bar{k}_2) + \bar{k}_2)k_0 & * & t_1(\bar{k}_1 - k_1) + k_1 & a_1 \bar{k}_1 & 1 & a_2 \\ a_2 k_0 k_2 & * & * & * & a_2 & 1 \end{bmatrix}.$$

The matrix $M := \begin{bmatrix} 1 & t_3(k_3 - \bar{k}_3) + \bar{k}_3 & (t_2(\bar{k}_2 - k_2) + k_2)\bar{k}_0 \\ t_3(\bar{k}_3 - k_3) + k_3 & 1 & t_1(k_1 - \bar{k}_1) + \bar{k}_1 \\ (t_2(k_2 - \bar{k}_2) + \bar{k}_2)k_0 & t_1(\bar{k}_1 - k_1) + k_1 & 1 \end{bmatrix}$ is a submatrix of G . It is the Gram matrix of $p_2, c_0, p_1 \in V$; since $\dim_{\mathbb{C}} V = 2$, these points must be linearly dependent and their Gram matrix, degenerate. Thus, we arrive at (3.2).

In order to prove the uniqueness, we can assume without loss of generality that the c_j 's are normalized so that (3.3) is the Gram matrix of $p_2, c_3, c_0, c_1, p_1, c_2$. Note that the points $p_2, c_0, p_1 \in V$ whose Gram matrix equals M are unique up to the action of UV . Indeed, the claim is easy if $t_j \neq 1$ for some $1 \leq j \leq 3$ because, in this case, $|u_j| \neq 1$, where $u_j := t_j(\bar{k}_j - k_j) + k_j$. If $t_1 = t_2 = t_3 = 1$, then the points p_2, c_0, p_1 coincide in BV and, again, the claim follows.

Consider the Gram matrices

$$M_3 := \begin{bmatrix} 1 & a_3 k_3 & t_3(k_3 - \bar{k}_3) + \bar{k}_3 \\ a_3 \bar{k}_3 & 1 & a_3 \\ t_3(\bar{k}_3 - k_3) + k_3 & a_3 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_1 := \begin{bmatrix} 1 & a_1 & t_1(k_1 - \bar{k}_1) + \bar{k}_1 \\ a_1 & 1 & a_1 k_1 \\ t_1(\bar{k}_1 - k_1) + k_1 & a_1 \bar{k}_1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$M_2 := \begin{bmatrix} 1 & (t_2(\bar{k}_2 - k_2) + k_2)\bar{k}_0 & a_2 \bar{k}_0 \bar{k}_2 \\ (t_2(k_2 - \bar{k}_2) + \bar{k}_2)k_0 & 1 & a_2 \\ a_2 k_0 k_2 & a_2 & 1 \end{bmatrix}$$

of the triples p_2, c_3, c_0 , c_0, c_1, p_1 , and p_2, p_1, c_2 . Given $p_2, c_0, p_1 \in V$ with the Gram matrix M , the point $c_j \in V$ is uniquely determined by M_j if $|u_j| \neq 1$. Yet, c_j is uniquely determined by M_j if $a_j = 1$. It remains to observe that $|u_j| = 1$ is equivalent to $t_j = 0, 1$ or $k_j = \pm 1$.

Finally, let us show the existence of c_j 's. Suppose that (3.2) is valid, $\det M = 0$. Since $|u_j|^2 - 1 = 2t_j(t_j - 1)(1 - \operatorname{Re} k_j^2)$, we have $|u_j| \geq 1$ if $\sigma = -1$ and $|u_j| \leq 1$ if $\sigma = 1$. This means that there exist points $p_2, c_0, p_1 \in V$ whose Gram matrix equals M . These points generate V if $\operatorname{rk} M = 2$ and coincide in BV if $\operatorname{rk} M = 1$. For a similar reason, the equalities $\det M_3 = \det M_1 = \det M_2 = 0$ imply that there exist c_3, c_1, c_2 such that M_3, M_1, M_2 are the Gram matrices of the triples p_2, c_3, c_0 , c_0, c_1, p_1 , and p_2, p_1, c_2 , respectively. From $[k_3 \ a_3(1 - k_3^2) \ -1] M_3 = 0$, we obtain $k_3 p_2 + a_3(1 - k_3^2)c_3 - c_0 = 0$, i.e., $R_{c_3, k_3} p_2 = c_0$. From $[k_1 \ a_1(\bar{k}_1 - k_1) \ -1] M_1 = 0$, we deduce $k_1 c_0 + a_1(\bar{k}_1 - k_1)c_1 - p_1 = 0$, i.e., $R_{c_1, k_1} c_0 = p_1$. It follows from $[k_0 \ -k_2 \ a_2(k_2 - \bar{k}_2)] M_2 = 0$ that $k_0 p_2 - k_2 p_1 + a_2(k_2 - \bar{k}_2)c_2 = 0$, i.e., $R_{c_2, k_2} p_1 = k_0 p_2$. As $R_{c_0, k_0} c_0 = \bar{k}_0 c_0$, we obtain $R_{c_3, k_3} R_{c_2, k_2} R_{c_1, k_1} R_{c_0, k_0} c_0 = c_0$. Taking into account $R_{c_3, k_3} R_{c_2, k_2} R_{c_1, k_1} R_{c_0, k_0} \in \operatorname{SUV}$ and $\langle c_0, c_0 \rangle \neq 0$, we arrive at $R_{c_3, k_3} R_{c_2, k_2} R_{c_1, k_1} R_{c_0, k_0} = 1$ ■

The relation $R_{c_3, k_3} R_{c_2, k_2} R_{c_1, k_1} R_{c_0, k_0} = 1$ in PUV means $R_{c_3, k_3} R_{c_2, k_2} R_{c_1, k_1} R_{c_0, k_0} = \pm 1$ at the level of SUV . Given some unitary complex numbers $k_0, k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{C}$, the next two lemmas concern the solutions, at the level of SUV , of the equations $R_{c_3, k_3} R_{c_2, k_2} R_{c_1, k_1} R_{c_0, k_0} = \pm 1$. (Note that, by Lemma 3.1 and Remark 2.2, equation (3.5) says that $R_{c_3, k_3} R_{c_2, k_2} R_{c_1, k_1} R_{c_0, k_0} = 1$ for some $c_0, c_1, c_2, c_3 \in BV$ while equation (3.7) says that $R_{c_3, k_3} R_{c_2, k_2} R_{c_1, k_1} R_{c_0, k_0} = -1$ for some $c_0, c_1, c_2, c_3 \in BV$.)

3.4. Lemma. *Given $a_0, a_1, a_2, a_3 \in]0, \pi[$, we put $k_j := e^{a_j i}$ and $u_j := t_j(\bar{k}_j - k_j) + k_j$ for all $0 \leq j \leq 3$. Then the equation*

$$(3.5) \quad 1 + 2 \operatorname{Re}(\bar{k}_0 u_1 u_2 u_3) = |u_1|^2 + |u_2|^2 + |u_3|^2$$

in $t_1, t_2, t_3 \geq 1$ has no solution with $t_3 = 1$ if $\sum_j a_j \leq \pi$ or $3\pi \leq \sum_j a_j$.

Proof. Since $u_3 = \bar{k}_3$ when $t_3 = 1$, the equation takes the form $2 \operatorname{Re}(\bar{k}_0 \bar{k}_3 u_1 u_2) = |u_1|^2 + |u_2|^2$, which is equivalent to $|u_2 - \bar{u}_1 k_0 k_3|^2 = 0$, i.e., to $u_2 = \bar{u}_1 k_0 k_3$. Note that, replacing a_j by $\pi - a_j$, we change k_j by $-\bar{k}_j$ and the last equation becomes $-\bar{u}_2 = -u_1 \bar{k}_0 \bar{k}_3$, i.e., it remains the same. Therefore, we may assume that $\sum_j a_j \leq \pi$.

Denote $s := \sin(a_0 + a_3)$, $b := \cos(a_0 + a_3)$, $s_j := \sin a_j$, and $b_j := \cos a_j$ for $j = 1, 2$. It follows from $\sum_j a_j \leq \pi$ that $s, s_1, s_2 > 0$. In these terms, the equation $u_2 = \bar{u}_1 k_0 k_3$ takes the form $-2s_2 t_2 i + b_2 + s_2 i = (2s_1 t_1 i + b_1 - s_1 i)(b + s i)$. Hence, $b_2 = b_1 b + s_1 s(1 - 2t_1)$ and $s_2(1 - 2t_2) = b_1 s + s_1 b(2t_1 - 1)$. This means that $2t_1 - 1 = \frac{b_1 b - b_2}{s_1 s}$ and $2t_2 - 1 = \frac{b_2 b - b_1}{s_2 s}$ because $b^2 + s^2 = 1$. Since $s_1 s, s_2 s > 0$, from $t_1, t_2 \geq 1$, we conclude that $b_1 b - s_1 s \geq b_2$ and $b_2 b - s_2 s \geq b_1$, i.e., $\operatorname{Re}(k_0 k_1 k_3) \geq \operatorname{Re} k_2$ and $\operatorname{Re}(k_0 k_2 k_3) \geq \operatorname{Re} k_1$. In view of $\sum_j a_j \leq \pi$, we obtain $a_0 + a_1 + a_3 \leq a_2$ and $a_0 + a_2 + a_3 \leq a_1$, implying $a_1 < a_2$ and $a_2 < a_1$, a contradiction ■

3.6. Lemma. *Given $a_0, a_1, a_2, a_3 \in]0, \pi[$, we put $k_j := e^{a_j i}$ and $u_j := t_j(\bar{k}_j - k_j) + k_j$ for all $0 \leq j \leq 3$. Then the solutions of the equation*

$$(3.7) \quad 1 - 2 \operatorname{Re}(\bar{k}_0 u_1 u_2 u_3) = |u_1|^2 + |u_2|^2 + |u_3|^2$$

in $t_1, t_2, t_3 \geq 1$ constitute a compact.

Proof. We take $\sigma = -1$. Let t be the tance that corresponds to the distance d . It follows from $\cosh^2 \frac{\operatorname{dist}(p_1, p_2)}{2} = \operatorname{ta}(p_1, p_2)$ that $(2t - 1)^2$ is the tance that corresponds to the distance $2d$. Consequently, $64t(t - \frac{1}{2})^2(t - 1) + 1 = (2(2t - 1)^2 - 1)^2$ is the tance that corresponds to the distance $4d$.

By Lemma 3.1 and Remark 2.2, the equation (3.7) says that, for some points $c_0, c_1, c_2, c_3 \in BV$, the relation $R_{c_3, k_3} R_{c_2, k_2} R_{c_1, k_1} R_{c_0, -k_0} = 1$ holds in SUV , where $t_1 := \operatorname{ta}(c_0, c_1) = \operatorname{ta}(c_1, p_1)$, $t_2 := \operatorname{ta}(p_1, c_2) = \operatorname{ta}(c_2, p_2)$, $t_3 := \operatorname{ta}(p_2, c_3) = \operatorname{ta}(c_3, c_0)$, $p_1 := R_{c_1, k_1} c_0$, and $p_2 := R_{c_3, k_3}^{-1} c_0$. Denoting the corresponding distances by d_1, d_2, d_3 , we obtain $2d_1 + 2d_2 \geq \operatorname{dist}(p_2, c_0)$. So, if $d_2 = \max(d_1, d_2)$,

then $4d_2 \geq \text{dist}(p_2, c_0)$. By Remark 2.2, $\text{ta}(p_2, c_0) = |t_3(\bar{k}_3 - k_3) + k_3|^2 = 2t_3(t_3 - 1)(1 - \text{Re } k_3^2) + 1$. Therefore, $32(t_2 - \frac{1}{2})^2 t_2(t_2 - 1) \geq t_3(t_3 - 1)(1 - \text{Re } k_3^2)$. Since $(t_2 - \frac{1}{2})^2 \geq t_2(t_2 - 1)$ and $t_3(t_3 - 1) \geq (t_3 - 1)^2$, we obtain $t_2 - \frac{1}{2} \geq (t_3 - 1)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1 - \text{Re } k_3^2}{32}\right)^{\frac{1}{4}}$, implying $\max(t_1, t_2) \geq m(t_3 - 1)^{\frac{1}{2}}$, where $m := \min\left(\left(\frac{1 - \text{Re } k_1^2}{32}\right)^{\frac{1}{4}}, \left(\frac{1 - \text{Re } k_2^2}{32}\right)^{\frac{1}{4}}, \left(\frac{1 - \text{Re } k_3^2}{32}\right)^{\frac{1}{4}}\right) > 0$.

Without loss of generality, we may assume that $t_3 \geq t_2 \geq t_1 \geq 1$.

Suppose that the set of solutions of (3.7) is not compact. Then there exist solutions with arbitrary big t_3 , i.e., $t_3 \gg 0$. The inequality $\max(t_1, t_2) \geq m(t_3 - 1)^{\frac{1}{2}}$ implies $t_2 \gg 0$.

Denote $s_j := \sin a_j$, $b_j := \cos a_j$, and $x_j := s_j(2t_j - 1)$. Then $\bar{k}_0 = b_0 - s_0 i$, $u_j = b_j - x_j i$, and $x_j \geq s_j > 0$ because $t_j \geq 1$ and $a_j \in]0, \pi[$. Note that $t_2 \gg 0$ and $t_3 \gg 0$ imply $x_2 \gg 0$ and $x_3 \gg 0$. In the introduced terms, the equation (3.7) takes the form

$$\begin{aligned} 1 - 2b_0 b_1 b_2 b_3 + 2s_0(b_2 b_3 x_1 + b_3 b_1 x_2 + b_1 b_2 x_3) + 2b_0(b_3 x_1 x_2 + b_1 x_2 x_3 + b_2 x_3 x_1) - 2s_0 x_1 x_2 x_3 = \\ = b_1^2 + x_1^2 + b_2^2 + x_2^2 + b_3^2 + x_3^2, \end{aligned}$$

which can be written as

$$(3.8) \quad x_1^2 + 2p(x_2, x_3)x_1 + q(x_2, x_3) = 0,$$

where

$$\begin{aligned} p(x_2, x_3) &:= s_0 x_2 x_3 - b_0 b_3 x_2 - b_0 b_2 x_3 - s_0 b_2 b_3 = s_0(x_2 - b_0 b_2 s_0^{-1})(x_3 - b_0 b_3 s_0^{-1}) - b_2 b_3 s_0^{-1}, \\ q(x_2, x_3) &:= x_2^2 - 2b_0 b_1 x_2 x_3 + x_3^2 - 2s_0 b_1 b_3 x_2 - 2s_0 b_1 b_2 x_3 + 2b_0 b_1 b_2 b_3 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - 1. \end{aligned}$$

It follows from $x_2 \gg 0$ and $x_3 \gg 0$ that $p(x_2, x_3) \gg 0$. Hence, the fact that the equation (3.8) possesses a root $x_1 \geq s_1$ implies $s_1^2 + 2p(x_2, x_3)s_1 + q(x_2, x_3) \leq 0$. Consequently, we obtain

$$\begin{aligned} s_1^2 + 2s_0 s_1 x_2 x_3 - 2b_0 s_1 b_3 x_2 - 2b_0 s_1 b_2 x_3 - 2s_0 s_1 b_2 b_3 + \\ + x_2^2 - 2b_0 b_1 x_2 x_3 + x_3^2 - 2s_0 b_1 b_3 x_2 - 2s_0 b_1 b_2 x_3 + 2b_0 b_1 b_2 b_3 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - 1 \leq 0, \end{aligned}$$

which is equivalent to

$$2(1 + s_0 s_1 - b_0 b_1)x_2 x_3 + (x_2 - x_3)^2 - 2(b_0 s_1 + s_0 b_1)(b_3 x_2 + b_2 x_3) + 2(b_0 b_1 - s_0 s_1)b_2 b_3 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + s_1^2 - 1 \leq 0,$$

i.e., to

$$2(1 - \text{Re}(k_0 k_1))x_2 x_3 + (x_2 - x_3)^2 - 2 \text{Im}(k_0 k_1)(b_3 x_2 + b_2 x_3) + 2 \text{Re}(k_0 k_1)b_2 b_3 + b_2^2 + b_3^2 \leq 0.$$

Since $1 - \text{Re}(k_0 k_1) > 0$ and $x_2, x_3 \gg 0$, we arrive at a contradiction ■

4. The space $S(a_0, a_1, a_2, a_3)$ of hexagons, $\sigma = -1$

In this section, we study in detail the space $R(a_0, a_1, \dots, a_n)$ of relations between elliptic isometries of fixed conjugacy classes for $n = 3$.

From now on, we assume $\sigma = -1$ and the isometries are considered as elements in PUV , unless the contrary is stated.

4.1. Definition. Let $a_0, a_1, \dots, a_n \in]0, \pi[$ be given. Denote by $R := R(a_0, a_1, \dots, a_n)$ the space of relations $R_n \dots R_1 R_0 = 1$ in PUV considered up to conjugation in PUV , where the conjugacy classes

of $R_0, R_1, \dots, R_n \in \text{PUV}$ are exactly those of $R_{c,k_0}, R_{c,k_1}, \dots, R_{c,k_n}$, listed perhaps in different order, and $k_j := e^{a_j i}$. Even if some a_j 's coincide, we still consider the corresponding classes as different; in other words, the classes are labeled with the j 's. Without loss of generality, we assume that the conjugacy class of R_0 is that of R_{c,k_0} .

One can view R as a *relative character variety*, i.e., formed by all PUV -representations $\varrho : F_n \rightarrow \text{PUV}$ of the free group $F_n := \langle r_0, r_1, \dots, r_n \mid r_n \dots r_1 r_0 = 1 \rangle$ of rank n such that the conjugacy class of ϱr_0 is that of R_{c,k_0} and the conjugacy class of ϱr_j is that of $R_{c,k_{\beta j}}$ for all $1 \leq j \leq n$, where β is a permutation on $\{1, 2, \dots, n\}$; the representations are considered up to conjugation in PUV .

Also, we can interpret R as the space of labeled $2n$ -gons P as follows. Let $\varrho : F_n \rightarrow \text{PUV}$ be a representation as above and let c_j stand for the fixed point of $R_j := \varrho r_j$. The consecutive vertices of the closed piecewise geodesic path P are $c_1, p_1, c_2, p_2, \dots, c_n, p_n := c_0$, where $p_j := R_j p_{j-1}$ (the indices are modulo n). Each vertex c_j is labeled with some conjugacy class (of R_{c,k_l} , $l \neq 0$) and p_n is labeled with the conjugacy class of R_{c,k_0} .

4.2. Definition. Denote by $m_0 : F_n \rightarrow F_n$ the automorphism of F_n given by $r_0 \mapsto r_1 r_0 r_1^{-1}$, $r_j \mapsto r_{j+1}$ for any $0 < j < n$, and $r_n \mapsto r_1$; for any $0 < l < n$, denote by $m_l : F_n \rightarrow F_n$ the automorphism of F_n given by $r_l \mapsto r_{l+1}$, $r_{l+1} \mapsto r_{l+1} r_l r_{l+1}^{-1}$, and $r_j \mapsto r_j$ for any $j \neq l, l+1$; and denote by $m_n : F_n \rightarrow F_n$ the automorphism of F_n given by $r_0 \mapsto r_1 r_n^{-1} r_0 r_n r_1^{-1}$, $r_1 \mapsto r_1 r_n r_1^{-1}$, $r_j \mapsto r_j$ for all $1 < j \leq n$, and $r_n \mapsto r_1$. The group \overline{M}_n generated by m_0, m_1, \dots, m_n acts from the right on $R(a_0, a_1, \dots, a_n)$ by composition at the level of representations.

In terms of labeled $2n$ -gons, the action of m_0 is just replacing the label c_0 from p_n to p_1 .

Note that $m_0 m_l = m_{l+1} m_0$ for all $0 < l < n$. Also, by induction on l , the automorphism m_0^l shifts by l (modulo n) the indices of the r_j 's for $1 \leq j \leq n$ and $m_0^l : r_0 \mapsto (r_l \dots r_2 r_1) r_0 (r_l \dots r_2 r_1)^{-1}$. In particular, $m_0^n = 1$.

Our main interest in this section is to understand when the action of \overline{M}_n on a component of R is discrete.

4.3. Definition. Denote by $S := S(a_0, a_1, \dots, a_n)$ the quotient of $R(a_0, a_1, \dots, a_n)$ by the action of the cyclic group of order n generated by m_0 . In other words, S is formed by $2n$ -gons with a forgotten label c_0 at the p_j 's.

Let $1 \leq j, l \leq n$ be such that $j \neq l-1, l$ (the indices are modulo n) and let $P \in S$ be $2n$ -gon with consecutive vertices $c_1, p_1, c_2, p_2, \dots, c_n, p_n$. The *modification* $P m_{j,l}$ of P is defined as follows. The geodesic segment $[p_j, c_l]$ cuts P into two polygons P_1 and P_2 whose consecutive vertices are respectively $p_j, c_{j+1}, p_{j+1}, \dots, p_{l-1}, c_l$ and $c_l, p_l, c_{l+1}, p_{l+1}, \dots, c_j, p_j$. We rotate P_1 with R_l so that $R_l P_1$ and P_2 become glued along $[c_l, p_l]$ (and remove this side), thus providing a new $2n$ -gon $P m_{j,l} \in S$ that has two new (consecutive) sides $[p_k, c_l]$ and $R_l[c_l, p_j] = [c_l, R_l p_j]$.

The group M_n generated by all modifications $m_{j,l}$ acts from the right on S . It is easy to see that the map $R \rightarrow S$ is a bijection at the level of the \overline{M}_n -orbits and the M_n -orbits. (For a formal proof, one can use the relations $m_0 m_l = m_{l+1} m_0$.)

Let $P \in S$ be a $2n$ -gon with consecutive vertices $c_1, p_1, c_2, p_2, \dots, c_n, p_n$. Then the sides $[p_{j-1}, c_j]$ and $[c_j, p_j]$ have equal length and the 'exterior' angle at c_j , i.e., the angle from $[c_j, p_{j-1}]$ to $[c_j, p_j]$ at c_j counted in the counterclockwise sense, equals $2a_j$ (unless $p_{j-1} = c_j = p_j$). It follows from the relation $R_n \dots R_1 R_0 = 1$ that the 'interior' angles at the p_j 's sum to $2\pi - 2a_0$ modulo 2π . Conversely, if a $2n$ -gon P satisfies the listed conditions, we obtain $P \in S$.

If $a_j \geq \frac{\pi}{2}$ for all $0 \leq j \leq n$ and the 'interior' angles at the p_j 's sum to $2\pi - 2a_0$, then P is convex. In this case, the $2n$ -gon P remains convex after any modification $m \in M_n$.

4.4. Small n . Clearly, $S(a_0) = \emptyset$ because $a_0 \in]0, \pi[$. By Remark 2.2, the space $S(a_0, a_1)$ consists of a single point iff $a_0 + a_1 = \pi$; otherwise, $S(a_0, a_1) = \emptyset$.

4.4.1. Lemma (folklore). *Let $a_0, a_1, a_2 \in]0, \pi[$ be fixed. Then $S(a_0, a_1, a_2)$ is nonempty exactly in the following cases:*

- $\sum_j a_j = \pi$ or $\sum_j a_j = 2\pi$,
- $\sum_j a_j < \pi$,
- $2\pi < \sum_j a_j$.

In these cases, $S(a_0, a_1, a_2)$ consists of a single point and the corresponding quadrangle (c_1, p_1, c_2, p_2) is respectively degenerate (i.e., $c_1 = p_1 = c_2 = p_2$), clockwise oriented, and counterclockwise oriented.

Proof. If $c_0 = c_1 = c_2$, then $k_0^2 k_1^2 k_2^2 = 1$ by Remark 2.2 and $\sum_j a_j \equiv 0 \pmod{\pi}$. A bit later, we will see that the converse is also true.

It cannot happen that only two of c_0, c_1, c_2 coincide. So, we assume these points pairwise distinct. Denote by I_j the reflection in the geodesic γ_j joining c_{j-1} and c_j (the indices are modulo 3). Then $R_j = I_{j+1}I_j$. Indeed, it suffices to show this for $j = 1$. In the quadrangle $P = (c_1, p_1, c_2, p_2)$, the triangles (c_1, p_2, c_2) and (c_1, p_1, c_2) are congruent by means of I_2 because $p_1 = R_1 p_2 \neq p_2$ in view of $a_1 \in]0, \pi[$ (otherwise, R_1 would have two distinct fixed points c_1 and $p_2 = c_0$). Therefore, $I_2 c_0 = R_1 c_0$, implying $I_2 I_1 c_0 = R_1 c_0$ and $I_2 I_1 c_1 = R_1 c_1$. The orientation-preserving isometries $I_2 I_1$ and R_1 coincide on two distinct points. Hence, they are equal.

By Remark 2.3, $a_j = \alpha(\gamma_j, \gamma_{j+1})$ is the oriented angle from γ_j to γ_{j+1} . It is easy to see that, if the triangle (c_0, c_1, c_2) is clockwise (counterclockwise) oriented, then a_j (respectively, $\pi - a_j$) is its interior angle at c_j . So, we arrive at $\sum_j a_j < \pi$ and $2\pi < \sum_j a_j$, respectively. Obviously, under this condition, the quadrangle (c_1, p_1, c_2, p_2) is geometrically unique ■

4.5. Topology of $S(a_0, a_1, a_2, a_3)$. Now, we change the convention concerning labeling the vertices c_j 's of a point $P \in S(a_0, a_1, a_2, a_3)$ so that c_j and R_j correspond to the conjugacy class of R_{c, k_j} for all $1 \leq j \leq 3$. Thus, we have two types of hexagons: those with consecutive vertices $c_1, p_1, c_2, p_2, c_3, p_3$, where $p_1 = R_1 p_3$, $p_2 = R_2 p_1$, and $p_3 = R_3 p_2$, and those with consecutive vertices $p_3, c_3, p_2, c_2, p_1, c_1$, where $p_1 = R_1^{-1} p_3$, $p_2 = R_2^{-1} p_1$, and $p_3 = R_3^{-1} p_2$. To each hexagon P , we associate a triple $(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3$, where $t_j := \text{ta}(c_j, p_j)$. In what follows, we frequently use to place the label c_0 at p_3 thus getting the relation $R_3 R_2 R_1 R_0 = 1$ for the hexagons of the first type and the relation $R_0 R_1 R_2 R_3 = 1$ for the hexagons of the second type.

According to the new convention, the group M_3 , previously generated by $m_{1,3}, m_{2,1}, m_{3,2}$ is now generated by the modifications n_1, n_2, n_3 that transform respectively the relation $R_3 R_2 R_1 R_0 = 1$ into the relations $R_0^{R_3^{-1}} R_1 R_2^{R_1^{-1}} R_3 = 1$, $R_0^{R_3^{-1}} R_1^{R_2} R_2 R_3 = 1$, $R_0^{R_1} R_1 R_2^{R_3} R_3 = 1$ and the relation $R_0 R_1 R_2 R_3 = 1$ into the relations $R_3 R_2^{R_1} R_1 R_0^{R_3} = 1$, $R_3 R_2 R_1^{R_2^{-1}} R_0^{R_3} = 1$, $R_3 R_2^{R_3^{-1}} R_1 R_0^{R_1^{-1}} = 1$, thus altering the type of a hexagon. It is easy to verify that $n_j^2 = 1$ for all $j = 1, 2, 3$ and that n_j keeps all the t_l 's except perhaps the t_j .

We say that a point $P \in S(a_0, a_1, a_2, a_3)$ is *degenerate* with respect to t_3 if the only point $P' \in S(a_0, a_1, a_2, a_3)$ of the same type as P such that $t_3 P' = t_3 P$ is the point P . This implies that $t_3 P = 1$ or $c_1 = c_2$ for P as, otherwise, we get infinitely many points with the same t_3 provided by $p_3, g c_1, g c_2, c_3$, where $g \in C_R$ runs over the centralizer C_R in PUV of $R := R_0 R_3$ (when P is of the first type) or of $R := R_3 R_0$ (when P is of the second type) and the label c_0 is placed at p_3 . A point $P \in S(a_0, a_1, a_2, a_3)$ is said to be *boundary* with respect to t_3 if P is not degenerate with respect to t_3 and $t_3 P = 1$. A point $P \in S(a_0, a_1, a_2, a_3)$ is *regular* with respect to t_3 if it is not degenerate nor boundary with respect to t_3 .

4.5.1. Lemma. *A point $P \in S(a_0, a_1, a_2, a_3)$ is regular with respect to t_3 iff $t_3 P \neq 1$ and $c_1 \neq c_2$ for P .*

It follows a complete list of the points in $S(a_0, a_1, a_2, a_3)$ degenerate or boundary with respect to t_3 :

a. *Let $\sum_j a_j < \pi$ or $3\pi < \sum_j a_j$. Then there exist exactly 2 degenerate points P_1 and P_2 of a given type. These points satisfy $t_3 P_1 = 1$, $c_1 \neq c_2$ for P_1 , $t_3 P_2 \neq 1$, and $c_1 = c_2$ for P_2 .*

- b.** Let $\sum_j a_j = \pi$ or $\sum_j a_j = 3\pi$. Then there exists exactly 1 degenerate point of a given type. This point satisfies $c_1 = p_1 = c_2 = p_2 = c_3 = p_3$.
- c.** Let $a_0 + a_3 < \pi < a_1 + a_2$ or $a_1 + a_2 < \pi < a_0 + a_3$. Then there exists exactly 1 degenerate point P_0 of a given type. The condition $c_1 = p_1 = c_2 = p_2 = c_3 = p_3$ for P_0 is equivalent to $\sum_j a_j = 2\pi$.
- d.** Let $a_0 + a_3 = a_1 + a_2 = \pi$. Then there is no degenerate point. This case is the only one when there are points boundary with respect to t_3 . Such points, forming a space homeomorphic to the ray $[1, \infty[$, are given by the condition $t_3P = 1$.
- e.** There is no degenerate point in the remaining cases, i.e., in the cases
- $\pi < \sum_j a_j$ with $a_0 + a_3 < \pi$ and $a_1 + a_2 < \pi$,
 - $\sum_j a_j < 3\pi$ with $\pi < a_0 + a_3$ and $\pi < a_1 + a_2$,
 - $a_0 + a_3 = \pi$ with $a_1 + a_2 \neq \pi$,
 - $a_1 + a_2 = \pi$ with $a_0 + a_3 \neq \pi$.

Proof. If $t_3P = 1$ and $c_1 \neq c_2$ for P , then, by Lemma 4.4.1, P is degenerate with respect to t_3 . If $t_3P \neq 1$, $c_1 = c_2$ for P , and P' is a point of the same type as P with $t_3P' = t_3P$, then we can assume that P and P' share the vertices c_3, p_3 ; so, the vertices $c_3, p_3, c_1 = c_2$ determine P and the vertices c_3, p_3, c'_1, c'_2 determine P' . Placing the label c_0 at p_3 , we get the relations $(R_2R_1)R_0R_3 = 1$ for P and $R'_2R'_1R_0R_3 = 1$ for P' in the case of the first type, and the relations $(R_1R_2)R_3R_0 = 1$ for P and $R'_1R'_2R_3R_0 = 1$ for P' in the case of the second type. Since $c_0 \neq c_3$ implies $a_1 + a_2 \neq \pi$, the relation $R'_2R'_1(R_2R_1)^{-1} = 1$ or $R'_1R'_2(R_1R_2)^{-1} = 1$, respectively, provides $c_1 = c'_1 = c'_2$ by Lemma 4.4.1. Thus, P is degenerate with respect to t_3 if $t_3P = 1$ and $c_1 \neq c_2$ for P or if $t_3P \neq 1$ and $c_1 = c_2$ for P .

Since $t_3P \neq 1$ and $c_1 = c_2$ for P imply $a_1 + a_2 \neq \pi$, by Lemma 4.4.1, there exists a (unique) point $P \in S(a_0, a_1, a_2, a_3)$ of a given type with $t_3P \neq 1$ and $c_1 = c_2$ (hence, degenerate with respect to t_3) exactly in the following cases

- $\sum_j a_j < \pi$,
- $\sum_j a_j < 2\pi$ and $\pi < a_1 + a_2$,
- $2\pi < \sum_j a_j$ and $a_1 + a_2 < \pi$,
- $3\pi < \sum_j a_j$.

Let $a_0 + a_3 \neq \pi$. Again by Lemma 4.4.1, the relation $R_2R_1R_0R_3 = 1$ or $R_1R_2R_3R_0 = 1$, respectively, together with $t_3P = 1$ determine uniquely a point $P \in S(a_0, a_1, a_2, a_3)$ of a given type. So, P is degenerate with respect to t_3 when $t_3P = 1$. Moreover, by Lemma 4.4.1, there exists a (unique) point P_0 of a given type with $t_3P_0 = 1$ (hence, degenerate with respect to t_3) exactly in the following cases

- $\sum_j a_j = \pi$,
- $\sum_j a_j = 2\pi$ and $a_0 + a_3 \neq \pi$,
- $\sum_j a_j = 3\pi$,
- $\sum_j a_j < \pi$,
- $\sum_j a_j < 2\pi$ and $\pi < a_0 + a_3$,
- $2\pi < \sum_j a_j$ and $a_0 + a_3 < \pi$,
- $3\pi < \sum_j a_j$.

Note that $c_1 = c_2$ with $t_3P = 1$ is possible exactly in the first 3 cases because $a_0 + a_3 \neq \pi$. In these cases, $c_1 = p_1 = c_2 = p_2 = c_3 = p_3$.

In the case $a_0 + a_3 = \pi \neq a_1 + a_2$, there is no point P with $t_3P = 1$.

Let $a_0 + a_3 = a_1 + a_2 = \pi$. Then $t_3P = 1$ implies $c_0 = c_3$ and $c_1 = c_2$. Now $t_1P = t_2P$ can be an arbitrary number in $[1, \infty[$. In other words, the condition $t_3P = 1$ provides a point boundary with respect to t_3 . In this way, we listed all possible points boundary with respect to t_3 .

Summarizing, we arrive at the list in the lemma ■

Assuming the label c_0 placed at p_3 , to every point $P \in S(a_0, a_1, a_2, a_3)$, we associate the isometry $R := R_0R_3$ if P is of the first type and the isometry $R := R_3R_0$, if P is of the second type. It follows immediately from Lemma 4.5.1 that the isometry R is elliptic (or the identity) if P is degenerate or boundary with respect to t_3 .

In the following proposition, for any point $P \in S(a_0, a_1, a_2, a_3)$, we place the label c_0 at p_3 .

4.5.2. Proposition. *It follows a full list of connected components of $S := S(a_0, a_1, a_2, a_3)$ of a given (either) type presented with respect to the cases listed in Lemma 4.5.1:*

a. *In this case, there are two components. One is topologically a 2-sphere and the isometry R_0R_3 is elliptic for every point in this component. The other component is topologically a plane and the isometry R_0R_3 is hyperbolic for every point in this component.*

- b.** In this case, there are two components. One is a single point, degenerate with respect to t_3 , and the isometry R_0R_3 is elliptic for this point. The other component is topologically a plane and the isometry R_0R_3 is hyperbolic for every point in this component.
- c.** In this case, there is a unique component, topologically a plane. There are points in the component whose isometry R_0R_3 is elliptic, parabolic, or hyperbolic.
- d.** In this case, there is a unique component, topologically a plane. The isometry R_0R_3 is hyperbolic or the identity for every point in this component.
- e.** In this case, there is a unique component, topologically a plane. The isometry R_0R_3 is hyperbolic for every point in this component.

Every component C , except of the one consisting of a single point, contains a curve $L_2 \subset C$ dividing C into 2 parts such that $t_3C = t_3L_2$ and every fibre of $L_2 \xrightarrow{t_3} \mathbb{R}$ contains at most 2 points with the unique exception in the case **d** where the fibre over $t_3 = 1$ is topologically a ray. The curve L_2 is topologically a circle or a line when C is topologically a 2-sphere or a plane, respectively. The curve L_2 admits a smooth parameterization by t_3 at the points where the isometry R_0R_3 is hyperbolic.

Proof. Let C be a connected component of S . The hexagons in C are all of a same type. We will deal with the first type indicating in parentheses what happens to the case of the second one. Denote $t_0 := t_0(a_0, a_3)$ (see Remark 2.4). By Lemma 4.5.1, $t_3P < t_0$ if $P \in S$ is degenerate with respect to t_3 .

Let $P \in C$. If P is degenerate with respect to t_3 , then the fibre of $C \xrightarrow{t_3} \mathbb{R}$ at P consists of a single point.

If P is boundary with respect to t_3 , then the fibre of $C \xrightarrow{t_3} \mathbb{R}$ at P is homeomorphic to the ray $[1, \infty[$ by Lemma 4.5.1.

Suppose that P is regular with respect to t_3 . Denote by γ_0 the geodesic that joins c_0 with c_3 . By Remark 2.3, there exist unique geodesics γ_1, γ_2 such that $R_0 = I_1I_0$ and $R_3 = I_0I_2$ (such that $R_0 = I_0I_1$ and $R_3 = I_2I_0$ for the second type) because $R_0 \neq 1$ and $R_3 \neq 1$, where I_j stands for the reflection in γ_j . Note that, by Remark 2.3, $\alpha(\gamma_0, \gamma_1) = a_0$ and $\alpha(\gamma_2, \gamma_0) = a_3$ (for the second type, $\alpha(\gamma_1, \gamma_0) = a_0$ and $\alpha(\gamma_0, \gamma_2) = a_3$).

Since c_1 or c_2 is not a fixed point of $R := R_0R_3 = I_1I_2 \neq 1$ (of $R := R_3R_0 = I_2I_1 \neq 1$ for the second type), the points c_0, gc_1, gc_2, c_3 , where g runs over C_R , provide the hexagons forming the fibre of $C \xrightarrow{t_3} \mathbb{R}$ and this fibre is homeomorphic to the centralizer C_R . Indeed, let I' stand for the reflection in a geodesic joining c_1 and c_2 (here admitting that the points c_1 e c_2 may coincide, which is in fact impossible). Then, by Remark 2.3, $R_1 = I'I'_1$ and $R_2 = I'_2I'$ ($R_1 = I'_1I'$ and $R_2 = I'I'_2$ for the second type) for suitable (unique) reflections in geodesics I'_1 and I'_2 . The relation $R_2R_1R_0R_3 = 1$ (the relation $R_1R_2R_3R_0 = 1$ for the second type) implies $I'_2I'_1 = I_2I_1 \neq 1$ (implies $I'_1I'_2 = I_1I_2 \neq 1$ for the second type). Now the assertion follows from Remark 2.3. Indeed, acting by C_R , we obtain $I'_1 = I_1$ and $I'_2 = I_2$ due to Remark 2.3. Since $c_1 \neq c_2$, from $gc_1 = c_1$ and $gc_2 = c_2$ for $g \in C_R$, we conclude $g = 1$.

Denote by $L_2 \subset C$ the subset of all points $P \in C$ degenerate or boundary with respect to t_3 and of all those points $P \in C$ regular with respect to t_3 that satisfy $I'_1 = I_1$ and $I'_2 = I_2$. By Remark 2.3, the fibre of $C \xrightarrow{t_3} \mathbb{R}$ at $P \in C$ either is a single point $P \in L_2$ (when P is degenerate), or is included in L_2 and homeomorphic to $[1, \infty[$ (when P is boundary), or is a circle and contains exactly two points in L_2 (when P is regular and R is elliptic), or is a line and contains exactly one point in L_2 (when R is parabolic or hyperbolic).

Any regular point $P \in L_2$ can be described as 4 geodesics $\gamma, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ such that $c_0 = \gamma_1 \cap \gamma_0$, $c_1 = \gamma \cap \gamma_1$, $c_2 = \gamma_2 \cap \gamma$, $c_3 = \gamma_0 \cap \gamma_2$, $\alpha(\gamma_0, \gamma_1) = a_0$, $\alpha(\gamma_1, \gamma) = a_1$, $\alpha(\gamma, \gamma_2) = a_2$, $\alpha(\gamma_2, \gamma_0) = a_3$, $R_0 = I_1I_0$, $R_1 = II_1$, $R_2 = I_2I$, $R_3 = I_0I_2$ (for the second type, $\alpha(\gamma_1, \gamma_0) = a_0$, $\alpha(\gamma, \gamma_1) = a_1$, $\alpha(\gamma_2, \gamma) = a_2$, $\alpha(\gamma_0, \gamma_2) = a_3$, $R_0 = I_0I_1$, $R_1 = I_1I$, $R_2 = II_2$, $R_3 = I_2I_0$), where I, I_0, I_1, I_2 stand respectively for the reflections in $\gamma, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$.

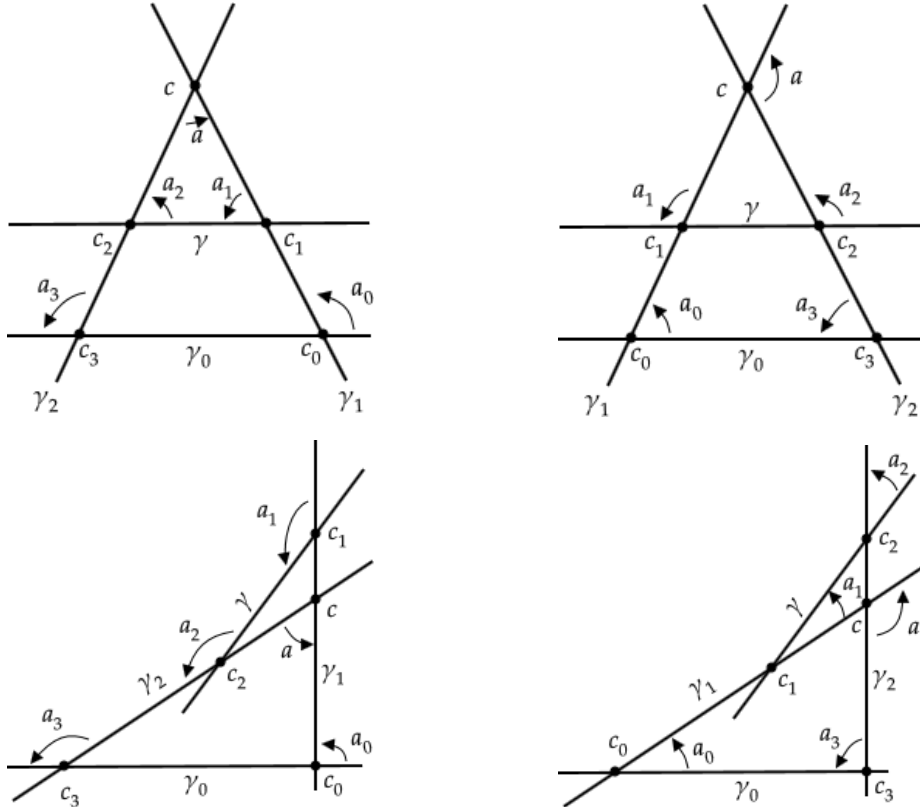
Suppose that there exists a point $P \in L_2$ with hyperbolic R . Then, by Remark 2.5, we can continuously deform P in L_2 making t_3 arbitrarily big because the tance $t_3 = \text{ta}(c_0, c_3)$ is greater or equal than that between the geodesics γ_1 and γ_2 . As well, we can continuously deform P diminishing t_3 till the moment when the geodesics γ_1 and γ_2 are becoming tangent. In other words, $]t_0, \infty[\subset t_3 C$ if R can be hyperbolic for a point in L_2 .

Suppose that there exists a point $P \in L_2$ with parabolic R . Then, by Remark 2.9, there is a small continuous deformation of P providing points in L_2 with hyperbolic R as well as with elliptic R . Therefore, $t_0 \in]b, \infty[\subset t_3 C$ in this case. In terms of Remark 2.9, if the triangle (v_1, v, v_2) is clockwise (counterclockwise, for the second type) oriented, then $a_0 + a_3 < \pi$ and $\pi < a_1 + a_2$. If the triangle (v_1, v, v_2) is counterclockwise (clockwise, for the second type) oriented, then $\pi < a_0 + a_3$ and $a_1 + a_2 < \pi$. Hence, a point $P \in L_2$ with parabolic R can exist only in the case **c** of Lemma 4.5.1.

Suppose that there exists a regular point $P \in L_2$ with elliptic R . Denote $a := \alpha(\gamma_2, \gamma_1)$ (denote $a := \alpha(\gamma_1, \gamma_2)$ for the second type) and let c stand for the intersection point of the geodesics γ_1, γ_2 . By Remark 2.7, when the triangle (c, c_0, c_3) is clockwise (counterclockwise, for the second type) oriented, we have $a + \pi < a_0 + a_3$, and when it is counterclockwise (clockwise, for the second type) oriented, we have $a_0 + a_3 < a$. Again by Remark 2.7, we obtain $a + a_1 + a_2 < \pi$ or $2\pi < a + a_1 + a_2$. Once again by Remark 2.7, we can continuously vary a within the interval $]0, \pi[$, thus getting points in L_2 , if we keep the two nonstrict inequalities, i.e., the inequalities in one of the following 4 variants:

- $a + \pi \leq a_0 + a_3$ and $a + a_1 + a_2 \leq \pi$,
- $a + \pi \leq a_0 + a_3$ and $2\pi \leq a + a_1 + a_2$,
- $a_0 + a_3 \leq a$ and $a + a_1 + a_2 \leq \pi$,
- $a_0 + a_3 \leq a$ and $2\pi \leq a + a_1 + a_2$.

(The first two pictures below illustrate the first and the fourth variants; the other two illustrate the second and the third variants.)



Such a deformation can be performed by varying the tance t_3P within the interval $[1, t_0[$. Note that a depends monotonically on t_3P while t_3P varies within the interval $]1, t_0[$ and $P \in L_2$ remains regular of the same type. Rewriting the inequalities in a more convenient form, we arrive at

- $a \leq a_0 + a_3 - \pi$ and $a \leq \pi - a_1 - a_2$,
- $2\pi - a_1 - a_2 \leq a \leq a_0 + a_3 - \pi$,
- $a_0 + a_3 \leq a \leq \pi - a_1 - a_2$,
- $a_0 + a_3 \leq a$ and $2\pi - a_1 - a_2 \leq a$.

In either variant, there is some $0 < a < \pi$ such that both inequalities are strict. This implies

- $a_1 + a_2 < \pi < a_0 + a_3$ with $0 < a_0 + a_3 - \pi < \pi$ and $0 < \pi - a_1 - a_2 < \pi$,
- $3\pi < \sum_j a_j$ with $0 < 2\pi - a_1 - a_2 < a_0 + a_3 - \pi < \pi$,
- $\sum_j a_j < \pi$ with $0 < a_0 + a_3 < \pi - a_1 - a_2 < \pi$,
- $a_0 + a_3 < \pi < a_1 + a_2$ with $0 < a_1 + a_2 - \pi < \pi$ and $0 < \pi - a_0 - a_3 < \pi$.

In particular, for given a_j 's, only one variant is possible, i.e., the four variants are disjoint.

In the second and third variants, we are in the case **a** of Lemma 4.5.1 and we can reach both values $2\pi - a_1 - a_2, a_0 + a_3 - \pi$ and $a_0 + a_3, \pi - a_1 - a_2$, respectively, by varying a . Since the inequalities become equalities for such points in L_2 , we get by Remark 2.7 the two distinct degenerate points P_1, P_2 mentioned in Lemma 4.5.1 **a**. As C is connected, we obtain $[t_3P_1, t_3P_2] \subset t_3C$. We claim that $[t_3P_1, t_3P_2] = t_3C$. Indeed, otherwise, there would exist an extra regular point $P \in L_2$ with elliptic R . The values of a for such P should fall into one of the four variants and, since the variants are disjoint, the variant should be the same as the one we started with. This contradicts the fact that a depends monotonically on t_3P . Now we visualize C as a topological 2-sphere and L_2 , as a topological circle dividing C into 2 parts.

In the first and fourth variants, we act similarly. We can reach the values $\min(a_0 + a_3 - \pi, \pi - a_1 - a_2)$ and $\max(a_0 + a_3, 2\pi - a_1 - a_2)$, respectively, by varying a . Since one of the inequalities becomes an equality for such a point in L_2 , we obtain by Remark 2.7 a degenerate point P_0 mentioned in Lemma 4.5.1 **c**. For a similar argument, $t_3C = [t_3P_0, b]$ or $t_3C = [t_3P_0, b[$ or $t_3C = [t_3P_0, \infty[$ for some $t_3P_0 < b$. In the last case, we visualize C as a topological plane and L_2 , as a topological line dividing C into 2 parts.

Now we may accomplish the case **c**. By Remark 2.10, there exist geodesics $\gamma, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ such that γ_1, γ_2 are tangent, $\alpha(\gamma_0, \gamma_1) = a_0$, $\alpha(\gamma_1, \gamma) = a_1$, $\alpha(\gamma, \gamma_2) = a_2$, and $\alpha(\gamma_2, \gamma_0) = a_3$ (for the second type, $\alpha(\gamma_0, \gamma_2) = a_3$, $\alpha(\gamma_2, \gamma) = a_2$, $\alpha(\gamma, \gamma_1) = a_1$, and $\alpha(\gamma_1, \gamma_0) = a_0$). Denote by I, I_0, I_1, I_2 the reflections in $\gamma, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$. By Remark 2.3, we obtain elliptic isometries $R_0 := I_1I_0$, $R_1 := II_1$, $R_2 := I_2I$, $R_3 := I_0I_2$ (elliptic isometries $R_0 := I_0I_1$, $R_1 := I_1I$, $R_2 := II_2$, $R_3 := I_2I_0$ for the second type) of the conjugacy classes $R_{c,k_0}, R_{c,k_1}, R_{c,k_2}, R_{c,k_3}$ subject to $R_2R_1R_0R_3 = 1$ (to $R_1R_2R_3R_0 = 1$ for the second type) with parabolic R . So, we have constructed a point $P \in S$ with parabolic R . This point belongs to some component C . Hence, there is a regular point $P' \in L_2 \subset C$ with elliptic R . As we saw earlier, C should contain the degenerate point P_0 considered above. Therefore, such a component (of a given type) is unique and we are done in the case **c** because we already know that the presence of a point $P \in L_2$ with hyperbolic R (induced by the presence of a point with parabolic R) implies $]t_0, \infty[\subset t_3C$.

By Remarks 2.6, 2.4, and 2.3, in an arbitrary case **a–e**, we get in a similar way a point $P_t \in S$ of a given type, depending smoothly on $t > t_0$, with hyperbolic R such that $t_3P_t = t$. This point generates a connected component C of S such that $P_t \in L_2$ and we already know that $t_3C \supset]t_0, \infty[$. Hence, by the uniqueness in Remark 2.6, there exists a unique connected component C of S (of a given type) containing a point with hyperbolic R . In the case **c**, such a component was already constructed above. In the case **d**, we obtain $t_3C = [t_0, \infty[$ by Lemma 4.5.1. In all the other cases, we have $t_3C =]t_0, \infty[$ because $t_0 \in t_3C$ would imply the existence of a point with parabolic R and we have already seen that this is possible only in the case **c**. Moreover, as P_t depends smoothly on $t > t_0$, the curve L_2 gets a smooth parameterization by t_3 at the points with hyperbolic R .

We have now accomplished the cases **b** and **e**. Indeed, in these cases, there cannot exist a regular point $P \in L_2$ with parabolic or elliptic R since this is possible only in the cases **c** and **a**, respectively. As $t_3P' < t_0$ for any point $P' \in S$ degenerate with respect to t_3 , we conclude that, in the case **b**,

there exist a unique connected component C of S , $t_3C =]t_0, \infty[$, whose points have hyperbolic R and a unique component consisting of a single degenerate point. Similarly, in the case **e**, we get a unique connected component C of S , $t_3C =]t_0, \infty[$, whose points have hyperbolic R . Thus, in the cases **b** and **e**, we visualize the unique connected component C of S containing points with hyperbolic R as a topological plane and L_2 , as a topological line dividing C into 2 parts.

There is a unique connected component C , $]1, \infty[\subset t_3C$, in the case **d**. By Lemma 4.5.1, $t_3C = [1, \infty[$. Clearly, (t_1P, t_2P, t_3P) tends to $(t_1, t_2, 1)$ with $t_1 = t_2$ when a point $P \in C$ tends to a point boundary with respect to t_3 because $c_0 = c_3$ and $c_1 = c_2$ for a boundary point. Given $t \in]1, \infty[$, there exists a unique point $P_t \in L_2$, depending continuously on t , such that $t_3P_t = t$. Any point $P \in C$ with $t_3P = t$ has the form $P = gP_t$ for a suitable (unique) isometry $g \in C_R$. Note that, for t close to 1, we have $t_1(gP_t)$ close to $t_1(g^{-1}P_t)$ just because c_0 and c_1 are close for P_t . This means that the points gP_t and $g^{-1}P_t$ tend to a same boundary point when gP_t tends to a boundary point. In other words, in the fibre over $t_3 = 1$, two distinct points over $t > 1$ tend to collide when t tends to 1 (unless g tends to 1). So, in the case **d**, we visualize C as a topological plane and L_2 , as a topological line dividing C into 2 parts.

Finally, in the case **a**, it suffices to construct a regular point $P \in S$ with elliptic R because, as we have seen above, such a point P provides the two degenerate points P_1 and P_2 in the connected component containing P , implying the existence and uniqueness of a connected component of S whose points have elliptic R .

By Remark 2.8, there exist geodesics $\gamma, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ such that γ_1, γ_2 intersect, $\alpha(\gamma_0, \gamma_1) = a_0$, $\alpha(\gamma_1, \gamma) = a_1$, $\alpha(\gamma, \gamma_2) = a_2$, and $\alpha(\gamma_2, \gamma_0) = a_3$ (for the second type, $\alpha(\gamma_0, \gamma_2) = a_3$, $\alpha(\gamma_2, \gamma) = a_2$, $\alpha(\gamma, \gamma_1) = a_1$, and $\alpha(\gamma_1, \gamma_0) = a_0$). Denote by I, I_0, I_1, I_2 the reflection in $\gamma, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$. By Remark 2.3, the isometries $R_0 := I_1I_0$, $R_1 := II_1$, $R_2 := I_2I$, $R_3 := I_0I_2$ (the isometries $R_0 := I_0I_1$, $R_1 := I_1I$, $R_2 := II_2$, $R_3 := I_2I_0$ for the second type) of the conjugacy classes $R_{c,k_0}, R_{c,k_1}, R_{c,k_2}, R_{c,k_3}$ subject to $R_2R_1R_0R_3 = 1$ (to $R_1R_2R_3R_0 = 1$ for the second type) provide a regular point $P \in S$ with elliptic R . ■

For given $a_0, a_1, a_2, a_3 \in]0, \pi[$, we denote $k_j := e^{a_j i} \neq \pm 1$ and $u_j := t_j(\bar{k}_j - k_j) + k_j$.

Let $C \subset S := S(a_0, a_1, a_2, a_3)$ be a connected component of S and let $P \in S$. Then, placing the label c_0 at p_3 , the relation $R_{c_3,k_3}R_{c_2,k_2}R_{c_1,k_1}R_{c_0,k_0} = 1$ holds in PUV if P is of the first type and the relation $R_{c_1,k_1}R_{c_2,k_2}R_{c_3,k_3}R_{c_0,k_0} = 1$ holds in PUV if P is of the second type. At the level of SUV , we obtain respectively the relations $R_{c_3,k_3}R_{c_2,k_2}R_{c_1,k_1}R_{c_0,k_0} = \pm 1$ and $R_{c_1,k_1}R_{c_2,k_2}R_{c_3,k_3}R_{c_0,k_0} = \pm 1$ in SUV . They can be rewritten as the relations $R_{c_3,k_3}R_{c_2,k_2}R_{c_1,k_1}R_{c_0,\pm k_0} = 1$ and $R_{c_1,k_1}R_{c_2,k_2}R_{c_3,k_3}R_{c_0,\pm k_0} = 1$ in SUV . By Lemma 3.1, we arrive at the equation (3.5) (when $\pm k_0 = k_0$) or at the equation (3.7) (when $\pm k_0 = -k_0$) independently of the type of P . This means that C satisfies the equation (3.5) or the equation (3.7).

The following corollary claims the converse, i.e., that the components of S are given by the type of hexagons and by one of the equations (3.5) and (3.7).

4.5.3. Corollary. *Let $a_0, a_1, a_2, a_3 \in]0, \pi[$. Denote $k_j := e^{a_j i}$ and $u_j := t_j(\bar{k}_j - k_j) + k_j$.*

For any type of hexagons, the solutions of the equation (3.5) in $t_1, t_2, t_3 \geq 1$ form a connected component C_1 of $S := S(a_0, a_1, a_2, a_3)$ of this type, topologically a plane, with hyperbolic isometry R_0R_3 for some point in the component.

*The equation (3.7) in $t_1, t_2, t_3 \geq 1$ has no solutions in the cases **c–e** of Lemma 4.5.1. In the case **b**, the equation (3.7) in $t_1, t_2, t_3 \geq 1$ has a unique solution that constitutes a connected component C_0 of S of any given type and the isometry R_0R_3 is elliptic for this point. In the case **a**, the solutions of the equation (3.7) in $t_1, t_2, t_3 \geq 1$ form a connected component C_0 of S (of either type), topologically a 2-sphere, and the isometry R_0R_3 is elliptic for every point in this component.*

The above is a full list of connected components of S .

Proof. Let us first observe that a point $P \in S$ degenerate with respect to t_3 does not satisfy the equation (3.5) in the cases **a–b**. Indeed, if $t_3P = 1$, this assertion is just Lemma 3.4. If $c_1 = c_2$,

we can treat the point P as a point in the space $S' := S(a_2, a_3, a_0, a_1)$: if P corresponds to the relation $R_3R_2R_1R_0 = 1$ (to the relation $R_0R_1R_2R_3 = 1$ for the second type), then P' corresponds to the relation $R_1R_0R_3R_2 = 1$ (to the relation $R_2R_3R_0R_1 = 1$ for the second type), and the assertion follows from Lemma 3.4 applied to S' , where t_3P' becomes 1, because the equation (3.5) and the cases **a–b** remain the same for S' .

In an arbitrary case **a–e**, there exists a unique connected component C_1 of S (of either type) possessing a point with hyperbolic R_0R_3 . Such a component C_1 cannot be compact since $]t_0, \infty[\subset t_3C_1$. By Lemma 3.6, C_1 has to satisfy the equation (3.5). By Proposition 4.5.2, there is a unique connected component (of either type) in the cases **c–e**; so, we are done in these cases.

In the remaining cases **a–b**, there are two connected components C_0, C_1 (of either type) and C_0 , the compact one, does not satisfy the equation (3.5) because, by Lemma 4.5.1, it contains a point P degenerate with respect to t_3 . On the other hand, the component C_1 containing a point with hyperbolic R_0R_3 is not compact because $]t_0, \infty[\subset t_3C_1$, hence, C_1 cannot satisfy the equation (3.7) by Lemma 3.6. Consequently, C_0 satisfies (3.7) and C_1 satisfies (3.5) and we are done ■

We already know (see the second paragraph in 4.5) that the group M_3 is generated by the modifications n_1, n_2, n_3 and that n_j alters the type of a hexagon and keeps t_l for $l \neq j$. Let us write the equations (3.5) and (3.7) in the form $e_1(t_1, t_2, t_3) = 0$ and $e_0(t_1, t_2, t_3) = 0$, respectively. Since n_j transforms the relation $R_{c_3, k_3} R_{c_2, k_2} R_{c_1, k_1} R_{c_0, k_0} = 1$ in SUV into the relation $R_{c_1, k_1} R_{c_2, k_2} R_{c_3, k_3} R_{c_0, k_0} = 1$ in SUV and vice-versa (analogously, for the relation $R_{c_3, k_3} R_{c_2, k_2} R_{c_1, k_1} R_{c_0, -k_0} = 1$ in SUV), this modification preserves the equations $e_l(t_1, t_2, t_3) = 0$ by Lemma 3.1. It is easy to see that $e_l(t_1, t_2, t_3) = 4t_j^2 \sin^2 a_j + \text{lower terms in } t_j$ with $\sin a_j \neq 0$, i.e., the equation $e_l(t_1, t_2, t_3) = 0$ is quadratic in t_j . Therefore, at the level of the t_k 's, the modification n_j simply interchanges the roots of $e_l(t_1, t_2, t_3) = 0$ in t_j . In what follows, we may not distinguish anymore the types of hexagons and we may identify the hexagons of different types with the same (t_1, t_2, t_3) . In this way, n_j acts as an involution on every component C_l of S , where C_l is now given by the equation $e_l(t_1, t_2, t_3) = 0$. (Perhaps, it would be more correct to pass to the index 2 subgroup M of the group M_3 . However, it is more convenient to deal with the involutions and this makes no difference in the problem of the discreteness of the action of M_3 on S .)

4.5.4. Definition. Let $1 \leq j \leq 3$. Denote by $A_j \subset S := S(a_0, a_1, a_2, a_3)$ the set of fixed points of the involution n_j . By the above, in the connected component C_l of S given by the equation $e_l(t_1, t_2, t_3) = 0$, the set A_j is given by the equation $\frac{\partial}{\partial t_j} e_l(t_1, t_2, t_3) = 0$. In particular, $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ is the set of all singular points of S .

In the proof of Proposition 4.5.2, placing the label c_0 at p_3 , we defined a curve $L_2 \subset S$ of all points $P \in S$ degenerate or boundary with respect to t_3 and of all those points $P \in S$ regular with respect to t_3 that are subject to $R_0 = I_1I_0, R_1 = II_1, R_2 = I_2I, R_3 = I_0I_2$ when P is of the first type and are subject to $R_0 = I_0I_1, R_1 = I_1I, R_2 = II_2, R_3 = I_2I_0$ when P is of the second type, where I, I_0, I_1, I_2 are suitable reflections in geodesics.

4.5.5. Lemma. $A_2 = L_2$.

Proof. If $P \in S$ is degenerate with respect to t_3 , then P is clearly a fixed point of n_2 because P is a unique point in S with the value t_3P of t_3 and n_2 keeps the values of t_3 .

Definition 4.5.4 says that $P \in A_2$ iff $\text{ta}(c_2, p_2) = \text{ta}(p_3, c_2)$ for P . For a point $P \in S$ boundary with respect to t_3 , this condition is empty since $p_2 = p_3$ in this case.

So, we assume $P \in S$ to be regular with respect to t_3 . Then $c_0 \neq c_3$ (we place the label c_0 at p_3) and $c_1 \neq c_2$.

Suppose that $P \in L_2$. Then $R_1 = II_1$ if P is of the first type and $R_1 = I_1I$ if P is of the second type, where $Ic_2 = c_2, p_1 = R_1p_3 = II_1c_0 = Ic_0$ for P of the first type, and $p_1 = R_1^{-1}p_3 = II_1c_0 = Ic_0$ for P of the second type. Therefore, $\text{ta}(c_2, p_2) = \text{ta}(p_1, c_2) = \text{ta}(Ic_0, Ic_2) = \text{ta}(p_3, c_2)$, i.e., $P \in A_2$.

Conversely, let $P \in A_2$, i.e., $\text{ta}(c_2, p_2) = \text{ta}(p_3, c_2)$. Denote by I and I_0 the reflections in the geodesics joining c_1, c_2 and c_0, c_3 , respectively. Since $\text{ta}(c_0, c_1) = \text{ta}(c_1, p_1)$ and $\text{ta}(p_1, c_2) = \text{ta}(c_2, p_2) = \text{ta}(c_0, c_2)$, the triangles (c_1, c_0, c_2) and (c_1, p_1, c_2) are congruent. As $p_1 = c_0$ implies $c_0 = c_1 = p_1$ due to $p_1 = R_1c_0$ (when P is of the first type) or $c_0 = R_1p_1$ (when P is of the second type), we obtain $p_1 = Ic_0$.

Suppose that $c_2 \neq c_3$ and denote by I_2 the reflection in the geodesic joining c_2 and c_3 . Since $\text{ta}(c_2, p_2) = \text{ta}(c_0, c_2)$ and $\text{ta}(p_2, c_3) = \text{ta}(c_3, c_0)$, the triangles (c_2, p_2, c_3) and (c_2, c_0, c_3) are congruent. As $c_0 = R_3p_2$ or $p_2 = R_3c_0$, the equality $p_2 = c_0$ would imply $p_2 = c_0 = c_3$. Hence, $p_2 = I_2c_0$ and $p_2 \neq c_2$ because $p_2 = c_2$ and $\text{ta}(c_2, p_2) = \text{ta}(c_0, c_2)$ would imply $p_2 = c_0$.

Let P be of the first type. Then $R_3p_2 = c_0$, $R_3c_3 = c_3$, $I_0I_2p_2 = I_0I_2I_2c_0 = c_0$, $I_0I_2c_3 = c_3$, $R_2p_1 = p_2$, $R_2c_2 = c_2$, $I_2Ip_1 = I_2IIc_0 = I_2c_0 = p_2$, $I_2Ic_2 = c_2$ with $c_0 \neq c_3$ and $p_2 \neq c_2$. Hence, $R_3 = I_0I_2$ and $R_2 = I_2I$. Writing R_0 as $R_0 = I_1I_0$, where I_1 is a suitable reflection in a geodesic, we conclude from the relation $R_3R_2R_1R_0 = 1$ that $R_1 = II_1$. Therefore, $P \in L_2$.

Let P be of the second type. Then $R_3c_0 = p_2$, $R_3c_3 = c_3$, $I_2I_0c_0 = I_2c_0 = p_2$, $I_2I_0c_3 = c_3$, $R_2p_2 = p_1$, $R_2c_2 = c_2$, $II_2p_2 = II_2I_2c_0 = Ic_0 = p_1$, $II_2c_2 = c_2$ with $c_0 \neq c_3$ and $p_2 \neq c_2$. Hence, $R_3 = I_2I_0$ and $R_2 = II_2$. Writing R_0 as $R_0 = I_0I_1$, where I_1 is a suitable reflection in a geodesic, we conclude from the relation $R_1R_2R_3R_0 = 1$ that $R_1 = I_1I$. Therefore, $P \in L_2$.

Suppose that $c_2 = c_3$ and $c_0 \neq c_1$. Denote by I_1 the geodesic joining c_0 and c_1 .

If P is of the first type, then $R_1 = II_1$ because $R_1c_0 = p_1$, $R_1c_1 = c_1$, $II_1c_0 = Ic_0 = p_1$, $II_1c_1 = c_1$ with $c_0 \neq c_1$. We have $R_2 = I_2I$ and $R_3 = I'_0I_2$, where I_2 and I'_0 are suitable reflections in geodesics. From the relation $R_3R_2R_1R_0 = 1$, we obtain $R_0 = I_1I'_0$, hence, $I'_0c_0 = c_0$. Since $c_0 \neq c_3$ and $I'_0c_3 = c_3$, we conclude that $I'_0 = I_0$. Therefore, $P \in L_2$.

If P is of the second type, then $R_1 = I_1I$ because $R_1p_1 = c_0$, $R_1c_1 = c_1$, $I_1Ip_1 = I_1IIc_0 = c_0$, $I_1Ic_1 = c_1$ with $c_0 \neq c_1$. We have $R_2 = II_2$ and $R_3 = I_2I'_0$, where I_2 and I'_0 are suitable reflections in geodesics. From the relation $R_1R_2R_3R_0 = 1$, we obtain $R_0 = I'_0I_1$, hence, $I'_0c_0 = c_0$. Since $c_0 \neq c_3$ and $I'_0c_3 = c_3$, we conclude that $I'_0 = I_0$. Therefore, $P \in L_2$.

Finally, suppose that $c_0 = c_1$ and $c_2 = c_3$. Then $I = I_0$. Since $c_0 \neq c_3$, we get $R_1R_0 = 1$ and $R_3R_2 = 1$. Since $R_0 = I_1I_0$, $R_3 = I_0I_2$ for P of the first type and $R_0 = I_0I_1$, $R_3 = I_2I_0$ for P of the second type, where I_1 and I_2 are suitable reflections in geodesics, we arrive at $R_1 = I_0I_1$, $R_2 = I_2I_0$ and at $R_1 = I_1I_0$, $R_2 = I_0I_2$, respectively. Therefore, $P \in L_2$ ■

4.5.6. Lemma. *A point $P \in S := S(a_0, a_1, a_2, a_3)$ belongs to $A_1 \cap A_2$ iff P is degenerate or boundary with respect to t_3 .*

A point $P \in S$ is singular iff $c_1 = p_1 = c_2 = p_2 = c_3 = p_3$ for P . Therefore, S is not smooth iff $\sum_j a_j = 2\pi$. In this case, there exists a unique singular point in S ; it belongs to the noncompact component C_1 .

Proof. We observe first that there exists at most one point equidistant from 3 pairwise distinct points. Clearly, $P \in A_j$ iff c_j is equidistant from p_1, p_2, p_3 .

Let $P \in A_1 \cap A_2$. If the points p_1, p_2, p_3 are pairwise distinct, then $c_1 = c_2$. If $p_1 = p_2$, then $p_1 = c_2 = p_2$, hence, $p_3 = c_2$, therefore, $c_1 = p_1 = c_2$ again. If $p_1 = p_3$, then $p_1 = c_1 = p_3$, hence, $p_2 = c_1$, therefore, $c_1 = c_2$ again. If $p_2 = p_3$, then $c_3 = p_3$. So, P is degenerate or boundary with respect to t_3 . It is easy to see that the converse is also true: if $c_1 = c_2$ or $c_3 = p_3$ for P , then $P \in A_1 \cap A_2$.

We know now that P is singular iff $c_1 = c_2$ or $c_3 = p_3$ and, simultaneously, $c_2 = c_3$ or $c_1 = p_1$. If $c_1 = c_2 = c_3$, then, placing the label c_0 at p_3 , it follows from $R_3R_2R_1R_0 = 1$ or from $R_1R_2R_3R_0 = 1$ that $c_0 = c_1$ because $R_0 \neq 1$. Therefore, $c_1 = p_1 = c_2 = p_2 = c_3 = p_3$. If $c_1 = p_1 = c_2$ (or $c_2 = c_3 = p_3$), then $p_3 = c_1$ (respectively, $p_2 = c_3$) and, again, $c_1 = p_1 = c_2 = p_2 = c_3 = p_3$. If $c_1 = p_1$ and $c_3 = p_3$, then $p_3 = c_1$ and $p_2 = c_3$, implying $c_1 = p_1 = c_2 = p_2 = c_3 = p_3$ because R_2 has a unique fixed point ■

4.6. Discreteness of M_3 . Placing the label c_0 at p_3 , an arbitrary hexagon $P \in S(a_0, a_1, a_2, a_3)$ of the first type corresponds to a relation $R_3R_2R_1R_0 = 1$. It is easy to see that, the hexagon Pn_2n_1 corresponds

to the relation $R_3 R_2^{(R_1^{R_2})} R_1^{R_2} R_0 = 1$, i.e. to the relation $R_3 R_2^{R_2 R_1} R_1^{R_2 R_1} R_0 = 1$. By induction on l , $P(n_2 n_1)^l$ corresponds to the relation $R_3 R_2^{(R_2 R_1)^l} R_1^{(R_2 R_1)^l} R_0 = 1$. Since $R_0 R_3 = (R_2 R_1)^{-1}$, the action of $n_2 n_1$ preserves the fibres of $S(a_0, a_1, a_2, a_3) \xrightarrow{t_3} \mathbb{R}$.

In particular, if P is regular with respect to t_3 with elliptic $R_0 R_3$ and the action of M_3 on the connected component containing P is discrete, then $R_0 R_3$ has to be periodic and the period has to be the same when we slightly vary $t_3 P$. This is impossible because the triangle (c_0, c, c_3) that corresponds to the relation $R_0^{-1} (R_0 R_3) R_3^{-1} = 1$ (see, for instance, the proof of Lemma 4.4.1) is completely determined by its angles and, hence, does not admit any variation of t_3 , where c stands for the fixed point of $R_0 R_3$. Consequently, the group M cannot act discretely on a component containing a point regular with respect to t_3 with elliptic $R_0 R_3$. (We denote by M the index 2 subgroup in the group M_3 .)

4.6.1. Lemma. *If M act discretely on a connected component of $S(a_0, a_1, a_2, a_3)$, then the component is the noncompact one (we drop the component of a single point) and*

- $a_j + a_k \leq \pi$ for all $j \neq k$ or $\pi \leq a_j + a_k$ for all $j \neq k$.

Proof. Suppose that $a_j + a_k < \pi < a_l + a_m$ with $j \neq k$ and $l \neq m$. Assuming without loss of generality that $a_0 \leq a_3 \leq a_1 \leq a_2$, we obtain $a_0 + a_3 < \pi < a_1 + a_2$, i.e., we are in the case **c**. By Proposition 4.5.2, we get a unique component. It possesses a point regular with respect to t_3 with elliptic $R_0 R_3$. As we saw above, M cannot act discretely on this component ■

In the sequel, we deal only with the cases listed in Lemma 4.6.1 and with the noncompact connected component C_1 .

By Lemma 4.5.6, the component C_1 is not smooth only in the case $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = \frac{\pi}{2}$. Since, by Lemma 4.5.6, $A_1 \cap A_2 \cap C_1 \neq \emptyset$ only in the case **d** of Lemma 4.5.1, the curves A_j are pairwise disjoint in C_1 if C_1 is smooth.

For $1 \leq j \leq 3$ and $P \in S(a_0, a_1, a_2, a_3)$, denote $t'_j P := \text{ta}(c_j, p_{j+1})$ (the indices are modulo 3). So, the condition $t_j P = t'_j P$ is equivalent to $P \in A_j$. By Proposition 4.5.2 and Lemma 4.5.5, assuming C_1 smooth, the curve A_j is a smooth line in C_1 and divides the smooth plane C_1 into two parts H_j and H'_j given by the inequalities $t_j \leq t'_j$ and $t_j \geq t'_j$, respectively.

4.6.2. Lemma. *Suppose that*

- $a_j + a_k \leq \pi$ for all $j \neq k$ or $\pi \leq a_j + a_k$ for all $j \neq k$.

Then the noncompact connected component C_1 of $S(a_0, a_1, a_2, a_3)$, i.e., the one given by the equation $e_1(t_1, t_2, t_3) = 0$, is smooth unless $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = \frac{\pi}{2}$. Assuming C_1 smooth, the curves A_1, A_2, A_3 in C_1 are smooth pairwise disjoint lines, each divides the smooth plane C_1 into two parts, and, moreover, $A_k \cap C_1 \subset H_j \cap C_1$ for all j and k .

Proof. Suppose that, say, $A_2 \cap C_1 \not\subset H_1 \cap C_1$. Note that the inequalities $0 < a_j < \pi$ and $a_j + a_k \leq \pi$ for all $j \neq k$ define in \mathbb{R}^4 a convex region that remains connected after removing the point $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (similarly, for the inequalities $\pi \leq a_j + a_k$). Thus, we can vary the a_j 's keeping C_1 smooth. Since $A_1 \cap A_2 \cap C_1 = \emptyset$ during the deformation and the equation $e_1(t_1, t_2, t_3) = 0$ as well as the functions t'_1, t'_2 depend continuously on the a_j 's, we obtain $A_2 \cap C_1 \not\subset H_1 \cap C_1$ for the special case of $a_1 = a_2 = a_3 = \frac{\pi}{2}$ and $a_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$. In this case, a hexagon are just a triangle with the vertices p_1, p_2, p_3 whose interior angles sum to $2a_0$, and c_1, c_2, c_3 are respectively the middle points of the sides $[p_3, p_1]$, $[p_1, p_2]$, $[p_2, p_3]$ of the triangle. As $A_2 \cap C_1 \not\subset H_1 \cap C_1$ implies $A_2 \cap H_1 \cap C_1 = \emptyset$, the isosceles triangle (p_1, p_2, p_3) with $\text{dist}(p_1, p_3) = \text{dist}(p_2, p_3)$ and $\text{dist}(p_1, p_2) = 2 \text{dist}(c_2, p_3)$ whose interior angles sum to $2a_0$ satisfies $2 \text{dist}(c_1, p_2) < \text{dist}(p_1, p_3)$, which is impossible ■

4.6.3. Theorem. *The group M_3 generated by the modifications acts discretely on a component C of $S(a_0, a_1, a_2, a_3)$ iff C is noncompact,*

• $a_j + a_k \leq \pi$ for all $j \neq k$ or $\pi \leq a_j + a_k$ for all $j \neq k$,
and $a_j \neq \frac{\pi}{2}$ for some $0 \leq j \leq 3$. In this case, the quotient C/M is a 3-holed 2-sphere and M is a free group of rank 2, where M stands for the index 2 subgroup in M_3 .

Proof. Suppose that $a_j \neq \frac{\pi}{2}$ for some $0 \leq j \leq 3$. By Lemma 4.6.1, it suffices to show that M_3 acts discretely on the noncompact component C_1 in the cases mentioned in the theorem.

Denote $T := H_1 \cap H_2 \cap H_3$. By Lemma 4.6.2 and Proposition 4.5.2, the copies Tn_1, Tn_2, Tn_3 are pairwise disjoint and intersect T only in the lines A_1, A_2, A_3 , respectively. Moreover, A_j lies in the interior of $T_1 := T \cup Tn_1 \cup Tn_2 \cup Tn_3$ and T_1 is closed, connected, and limited by the pairwise disjoint lines $A_3n_1, A_2n_1, A_1n_2, A_3n_2, A_2n_3, A_1n_3$. Applying to T_1 the involutions $n_1n_3n_1, n_1n_2n_1, n_2n_1n_2, n_2n_3n_2, n_3n_2n_3, n_3n_1n_3$ corresponding to these lines, we obtain pairwise disjoint copies of T_1 . They intersect T_1 only in the listed lines. Denote by T_2 the union of T_1 with the listed copies of T_1 , and so on. The standard arguments will show that the group M_3 acts discretely on C_1 and that T is its fundamental region if we observe that $D := \bigcup_j T_j$ coincides with C_1 .

As D is M_3 -stable and open in C_1 , its boundary $\partial D := \overline{D} \setminus D$ is M_3 -stable and closed in \mathbb{R}^3 . It suffices to show that $\partial D = \emptyset$.

Suppose that the intersection D_r of ∂D with the closed ball of radius $r > 1$ centred at the origin in \mathbb{R}^3 is nonempty. Since D_r is compact, there is a point $P \in D_r$ with a minimal value of $t_1t_2t_3$. As $T \cap \partial D = \emptyset$, we have, say, $t_3P < t_3P$. Then $t_1(Pn_3) = t_1P$, $t_2(Pn_3) = t_2P$, $t_3(Pn_3) = t_3P < t_3P$, and $Pn_3 \in D_r$. This contradicts the choice of P .

The remaining case $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = \frac{\pi}{2}$ is considered in the next remark ■

4.6.4. Remark. The connected component C of $S := S(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ with the action of the group M is isomorphic to the space $\mathbb{R}^2 / \pm 1$ with the natural action of the congruence subgroup Γ_2 in $\mathrm{SL}_2 \mathbb{Z}$ (known to be generated by $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ and $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$). Therefore, almost every M -orbit is dense in C .

Proof. All vertices of an arbitrary hexagon $P \in S$ lie on a geodesic. Therefore, seeing a hexagon as a triple (c_1, c_2, c_3) , we can interpret it as a triple of real numbers considered up to isometries of the real line. In these terms, $R_j : r \mapsto 2c_j - r$. Since the modifications n_2n_1 and n_3n_1 transform the relation $R_3R_2R_1R_0 = 1$ (we place the label c_0 at p_3) into the relations $R_3R_2^{R_2R_1}R_1^{R_2}R_0 = 1$ and $R_3R_2^{R_1R_3}R_1^{R_3R_1} = 1$, respectively, assuming $c_3 := 0 \in \mathbb{R}$, we can see that $n_2n_1 : (c_1, c_2) \mapsto (2c_2 - c_1, 2c_2 - (2c_1 - c_2)) = (-c_1 + 2c_2, -2c_1 + 3c_2)$ and $n_3n_1 : (c_1, c_2) \mapsto (c_1, 2c_1 + c_2)$. In other words, we identify S with $\mathbb{R}^2 / \pm 1$ where n_2n_1 acts as $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ and n_3n_1 , as $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. It remains to observe that $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ and $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

5. Hyperbolic 2-spheres with $n + 1$ cone singularities and convex $2n$ -gons

Given $a_0, a_1, \dots, a_n \in [\frac{\pi}{2}, \pi[$ such that $\sum_j a_j > 2\pi$, we deal with the space $C(a_0, a_1, \dots, a_n)$ of hyperbolic 2-spheres Σ with labeled cone singularities c_0, c_1, \dots, c_n such that the apex curvature at c_j equals $2a_j$ for all j ; the 2-spheres are considered up to orientation- and label-preserving isometries.

Let $\Sigma \in C$. We pick geodesic segments $[c_0, c_j] \subset \Sigma$ whose pairwise intersections are just c_0 (say, the shortest ones) and cut Σ along these segments. We get a hyperbolic $2n$ -gon P with consecutive vertices $c_1, p_1, \dots, c_n, p_n$ such that the interior angle at c_j equals $2\pi - 2a_j \leq \pi$ for all $1 \leq j \leq n$ and the interior angles at the p_j 's sum to $2\pi - 2a_0 \leq \pi$. It follows that P is star-like, hence, it is embeddable by Remark 2.11 into the hyperbolic plane as a convex $2n$ -gon. Applying to P the modification $m_{j,l}$ (see Definition 4.3), we obtain another convex $2n$ -gon $Pm_{j,l}$ such that the sphere Σ is glued from $Pm_{j,l}$.

In this section, we show that $C(a_0, a_1, \dots, a_n) = S_0(a_0, a_1, \dots, a_n)/M_n$, where M_n is the group generated by the modifications $m_{j,l}$ and $S(a_0, a_1, \dots, a_n) \supset S_0(a_0, a_1, \dots, a_n)$ is the union of $(n - 1)!$ components formed by all convex $2n$ -gons in $S(a_0, a_1, \dots, a_n)$. Components in question correspond

to types of $2n$ -gons (see Subsection 1.2.5 for the definition of the type). The other components of $S(a_0, a_1, \dots, a_n)$ are formed by the $2n$ -gons that are nonsimple as closed curves. It is easy to see that such $2n$ -gons can also be characterized as those that ‘limit’ area different from $2\sum_j a_j - (n + 4)\pi$ (see [Ana1] for the definition of the area ‘limited’ by a nonsimple closed curve).

5.1. Theorem. *Let $a_0, a_1, \dots, a_n \in [\frac{\pi}{2}, \pi[$ be such that $\sum_j a_j > 2\pi$. Given convex $2n$ -gons $P, P' \in S_0(a_0, a_1, \dots, a_n)$ such that the corresponding 2-spheres Σ, Σ' are isometric (the orientation and the labels are preserved), there exists $m \in M_n$ such that $P' = Pm$.*

5.2. We take a $2n$ -gon $P \in S_0(a_0, a_1, \dots, a_n)$ with consecutive vertices $c_1, p_1, \dots, c_n, p_n$. Without loss of generality, we assume that the interior angles of P at the p_j 's sum to $2\pi - 2a_0$ and the interior angle of P at c_j equals $2\pi - 2a_j$ for all $1 \leq j \leq n$. Denote by D the closed disc in the hyperbolic plane limited by P , let Σ stand for the 2-sphere glued from P , and let $p, c_1, \dots, c_n \in \Sigma$ be respectively the cone points of apex curvatures $2a_0, 2a_1, \dots, 2a_n$. The sides of P (after gluing) provide simple geodesic segments $s_j \subset \Sigma$ joining respectively p and c_j , $1 \leq j \leq n$, with pairwise intersection p .

Any $2n$ -gon $P' \in S_0(a_0, a_1, \dots, a_n)$ that produces the same Σ after gluing is therefore nothing but simple geodesic segments $s'_j \subset \Sigma$ joining respectively p and c_j , $1 \leq j \leq n$, and p is their pairwise intersection. Some of the s_j 's can coincide with some of the s'_j . Denote by $0 \leq u \leq n$ the number of noncoinciding ones. Clearly, $P' = P$ if $u = 0$.

In terms of the closed disc D , an arbitrary segment s'_j is given by finitely many disjoint geodesic segments $[q_0, q'_1], [q_1, q'_2], \dots, [q_{v-1}, q'_v] \subset D$, where $1 \leq v$, $q_0 = p_k$ for some $1 \leq k \leq n$, $q'_v = c_j$, the interior of $[q_l, q'_{l+1}]$ lives in the interior of D for all $0 \leq l \leq v - 1$ unless $v = 1$ and $k = j - 1, j$, and, for all $1 \leq l \leq v - 1$, the points $q'_l \neq q_l$ are in the interiors of different sides of P (glued in Σ), symmetric relatively their common vertex c_{w_l} , $1 \leq w_l \leq n$, i.e., $\text{dist}(q'_l, c_{w_l}) = \text{dist}(c_{w_l}, q_l)$. Clearly, $s'_j = s_j$ if $v = 1$ and $k = j - 1, j$.

Proof of Theorem 5.1. We work in the settings of 5.2 and proceed by induction on u and then, by induction on the number of intersections of the noncoinciding segments provided by P' with those provided by P . As we do not count as intersections the points p, c_1, \dots, c_n , the intersections in question are represented by points in the interior of D or in the interiors of the sides of P .

The case $u = 0$ was done in 5.2. Therefore, we assume $u \geq 1$. This means that there exists $1 \leq j \leq n$ such that $s'_j \neq s_j$. Hence, we obtain $v \geq 1$ disjoint geodesic segments as in 5.2.

We claim that the $2n$ -gons $Pm_{k,w}$ and P' satisfy the induction hypothesis, where $w := w_1$ if $v > 1$ and $w := j$ if $v = 1$.

Suppose that $v = 1$. Since $s'_j \neq s_j$, we conclude that $k \neq j - 1, j$ (see 5.2) and that $m_{k,j}$ is indeed applicable. Moreover, when we pass from P to $Pm_{k,j}$, the segment $s_j \subset \Sigma$ is substituted by the segment $s'_j \subset \Sigma$ and the rest of the segments provided by P remains the same. In other words, u diminishes.

Suppose that $v > 1$. Then $k \neq w_1 - 1, w_1$ because the interior of $[q_0, q'_1] = [p_k, q'_1]$ lives in the interior of D . So, $m_{k,w}$ is applicable. When passing from P to $Pm_{k,w}$, we simply replace s_w by the segment s represented by $[c_w, q_0]$. So, u cannot grow and in fact remains the same. Every intersection with s can be seen as an intersection with $[c_w, q_0]$ living inside the interior of D . Looking more closely at the triangle with the vertices q_0, q'_1, c_w , we understand that every intersection of some s'_l with s can be seen as an intersection of $s' \subset D$, one of the disjoint segments related to s'_l (as in 5.2), with $[c_w, q_0]$. The latter induces an intersection of s' with $[q'_1, c_w]$ because s' and $[q_0, q'_1]$ are disjoint: they are related to different segments provided by P' . It remains to observe that the intersection corresponding to q'_1 disappears when passing from P to $Pm_{k,w}$ ■

References

[Ale] A. D. Alexandrov, *Convex polyhedra*, Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2005. Translated from the 1950 Russian edition by N. S. Dairbekov, S. S. Kutateladze, and

A. B. Sossinsky, with comments and bibliography by V. A. Zalgaller and appendices by L. A. Shor and Yu. A. Volkov

[AGr] S. Anan'in, C. H. Grossi, *Coordinate-free classic geometries*, Moscow Math. J. **11** (2011), no. 4, 633–655

[Ana1] S. Anan'in, E. C. B. Goncalves *A hyperelliptic view on Teichmüller space. I*, arXiv: 0709.1711

[Ana2] S. Anan'in, *Reflections, bendings, and pentagons*, arXiv: 1201.1582

[DM1] P. Deligne, G. D. Mostow, *Monodromy of hypergeometric functions and non-lattice integral monodromy*, Publ. Math. IHES, no. 63 (1986), 5–89

[DM2] P. Deligne, G. D. Mostow, *Commensurabilities among lattices in $PU(1, n)$* , Annals of Math. Studies **132** (1993)

[DPP] M. Deraux, J. R. Parker, J. Paupert, *New non-arithmetic complex hyperbolic lattices*, Invent. Mat. **203** (2016), no. 3, 681–771

[FaW] E. Falbel, R. A. Wentworth, *On products of isometries of hyperbolic space*, Topology and its Applications **156** (2009), 2257–2263

[GhP] S. Ghazouani, L. Piroio, *Moduli spaces of flat tori with prescribed holonomy*, arXiv: 1604.01812

[GMST] W. M. Goldman, G. McShane, G. Stantchev, S. P. Tan, *Automorphisms of two-generator free groups and spaces of isometric actions on the hyperbolic plane*, arXiv: 1509.03790v2

[Gol] W. M. Goldman, *The modular group action on real $SL(2)$ -characters of a one-holed torus*, Geometry & Topology **7** (2003), 443–486

[HRi] C. D. Hodgson, I. Rivin, *A characterization of compact convex polyhedra in hyperbolic 3-space*, Invent. Mat. **111** (1993), 77–111

[Kui] N. H. Kuiper, *Hyperbolic 4-manifolds and tessellations*, Publ. Math. IHES, no. 68 (1988), 47–76

[McR] D. B. McReynolds, *Arithmetic lattices in $SU(n, 1)$* , 2015, <http://www.its.caltech.edu/~dmcreyn/ComplexArithmeticI.pdf>

[MPa] G. Mondello, D. Panov, *Spherical metrics with conical singularities on a 2-sphere: angle constraints*, arXiv: 1505.01994

[Thu] W. P. Thurston, *Shapes of polyhedra and triangulations of the sphere*, Geometry & Topology Monographs **1** (1998), 511–549

[WaW] P. Waterman, S. Wolpert, *Earthquakes and tessellations of Teichmüller space*, TAMS **278** (1983), no. 1, 157–167

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ICMC, UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, CAIXA POSTAL 668,
13560-970-SÃO CARLOS-SP, BRASIL
E-mail address: `sasha_a@icmc.usp.br`

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ICMC, UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, CAIXA POSTAL 668,
13560-970-SÃO CARLOS-SP, BRASIL
E-mail address: `grossi@icmc.usp.br`

KOREA INSTITUTE FOR ADVANCED STUDY (KIAS)
85 HOEGIRO DONGDAEMUN-GU, SEOUL 02455, REPUBLIC OF KOREA
E-mail address: `jjlee@kias.re.kr`

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ICMC, UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, CAIXA POSTAL 668,
13560-970-SÃO CARLOS-SP, BRASIL
E-mail address: `joao.reis.reis@usp.br`

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

- [Ale] A. D. Alexandrov, *Convex polyhedra*, Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2005. Translated from the 1950 Russian edition by N. S. Dairbekov, S. S. Kutateladze, and A. B. Sossinsky, with comments and bibliography by V. A. Zalgaller and appendices by L. A. Shor and Yu. A. Volkov
- [AGr] S. Anan'in, C. H. Grossi, *Coordinate-free classic geometries*, *Moscow Math. J.* **11** (2011), no. 4, 633–655
- [Ana1] S. Anan'in, E. C. B. Goncalves *A hyperelliptic view on Teichmüller space. I*, arXiv: 0709.1711
- [Ana2] S. Anan'in, *Reflections, bendings, and pentagons*, arXiv: 1201.1582
- [DM1] P. Deligne, G. D. Mostow, *Monodromy of hypergeometric functions and non-lattice integral monodromy*, *Publ. Math. IHES*, no. 63 (1986), 5–89
- [DM2] P. Deligne, G. D. Mostow, *Commensurabilities among lattices in $PU(1, n)$* , *Annals of Math. Studies* **132** (1993)
- [DPP] M. Deraux, J. R. Parker, J. Paupert, *New non-arithmetic complex hyperbolic lattices*, *Invent. Mat.* **203** (2016), no. 3, 681–771
- [FaW] E. Falbel, R. A. Wentworth, *On products of isometries of hyperbolic space*, *Topology and its Applications* **156** (2009), 2257–2263
- [GhP] S. Ghazouani, L. Pirio, *Moduli spaces of flat tori with prescribed holonomy*, arXiv: 1604.01812
- [GMST] W. M. Goldman, G. McShane, G. Stantchev, S. P. Tan, *Automorphisms of two-generator free groups and spaces of isometric actions on the hyperbolic plane*, arXiv: 1509.03790v2

- [Gol] W. M. Goldman, *The modular group action on real $SL(2)$ -characters of a one-holed torus*, *Geometry & Topology* **7** (2003), 443–486
- [HRi] C. D. Hodgson, I. Rivin, *A characterization of compact convex polyhedra in hyperbolic 3-space*, *Invent. Mat.* **111** (1993), 77–111
- [Kui] N. H. Kuiper, *Hyperbolic 4-manifolds and tessellations*, *Publ. Math. IHES*, no. 68 (1988), 47–76
- [McR] D. B. McReynolds, *Arithmetic lattices in $SU(n, 1)$* , 2015, <http://www.its.caltech.edu/~dmcreyn/ComplexArithmeticI.pdf>
- [MPa] G. Mondello, D. Panov, *Spherical metrics with conical singularities on a 2-sphere: angle constraints*, arXiv: 1505.01994
- [Thu] W. P. Thurston, *Shapes of polyhedra and triangulations of the sphere*, *Geometry & Topology Monographs* **1** (1998), 511–549
- [WaW] P. Waterman, S. Wolpert, *Earthquakes and tessellations of Teichmüller space*, *TAMS* **278** (1983), no. 1, 157–167

