
Sequências espectrais e aplicações para módulos

Wellington Marques de Souza

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Wellington Marques de Souza

Sequências espectrais e aplicações para módulos

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Víctor Hugo Jorge Pérez

USP – São Carlos
Fevereiro de 2017

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S719s Souza, Wellington Marques de
Sequências espectrais e aplicações para módulos /
Wellington Marques de Souza; orientador Victor Hugo
Jorge Pérez. -- São Carlos, 2017.
82 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação
em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas
e de Computação, Universidade de São Paulo, 2017.

1. Sequências Espectrais. 2. Álgebra Homológica.
3. Complexos Simples e Duplos. 4. Homologias
Iteradas. 5. Aplicações. I. Pérez, Victor Hugo
Jorge, orient. II. Título.

Wellington Marques de Souza

Spectral sequences and applications to modules

Master dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Master Program in Mathematics.
FINAL VERSION

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Victor Hugo Jorge Pérez

USP – São Carlos
February 2017

Para minha família.

A felicidade pode ser encontrada mesmo nas horas mais difíceis, se você lembrar de acender a luz. - ALVO DUMBLEDORE

Agradecimentos

Percorrer o caminho que nos conduz à realização de um sonho é, apesar de extremamente árduo, uma satisfação imensa. Concluir o Mestrado em Matemática foi um desafio imenso e só me resta a sensação de dever cumprido. Entretanto, seria muito egoísmo de minha parte não creditar à pessoas deveras importantes as devidas contribuições a todo esse processo.

Sou eternamente grato a Deus por ter me concedido a bênção de existir e de poder realizar os desejos do meu coração. Acredito profundamente que, se não fosse da vontade Dele, jamais chagaria onde cheguei hoje. Agradeço a Jesus por ter se oferecido em sacrifício vivo em meu lugar para que eu tivesse o dom gratuito da vida eterna e por ser meu amigo verdadeiro nas horas que eu mais necessitei de ajuda. Ah, Espírito Santo, como posso agradecê-lo por ser aquele que me consola, que me dá o discernimento que preciso e por traduzir as minhas petições junto ao Pai? Deixo aqui registradas as minhas singelas palavras, que acredito jamais serem suficientes de descrever o tamanho da minha gratidão.

Agradeço à toda a minha família pelo suporte e apoio que sempre obtive em todos os momentos de alegrias e tristezas.

À minha mãe, que sempre acreditou que eu era capaz, mesmo quando nem eu acreditava em mim mesmo. Sou muito grato por todas as horas que gastou em oração, de joelhos, por mim. Saiba que eu sempre sinto a sua presença ao meu lado, apesar da distância. Sei que suas orações me alcançam onde eu estiver. Sem você eu jamais teria conseguido.

Ao meu pai, que nunca me deixou desistir. Sempre com palavras de ânimo e de encorajamento. Sempre que precisei, nunca se negou a me ajudar, seja financeiramente como emocionalmente. Sem você eu também jamais teria conseguido.

Ao meu irmão, que apesar da distância eu sei que se importa e sempre me mantém em sua memória através das suas orações. Muito obrigado.

Às minhas igrejas: a Terceira Igreja Batista em Campo Grande e a Igreja Batista Betel em São Carlos. Sinto-me privilegiado por congregar em duas igrejas e por fazer parte, junto a

essas duas instituições, da Igreja de Jesus Cristo. Muito obrigado a todos que me acolheram e me receberam de braços abertos. Deixo aqui registrado a minha gratidão ao pastor Leonardo Modesto e família, que se empenhou em me ajudar em alguns momentos de dificuldade. Aos demais irmãos da igreja, muito obrigado.

Aos meus amigos e colegas de curso, que sempre estiveram comigo, me ajudaram e contribuíram para a minha formação acadêmica. Nunca me esquecerei dos momentos de estudo em grupo, onde compartilhávamos os nossos conhecimentos e dos nossos momentos de descontração. Com vocês, a caminhada foi um pouco mais suave. Deixo aqui, também, meus agradecimentos à professora Luciana Gonçalves por ser responsável por aprimorar o meu talento musical. Muito obrigado.

Aos meus amigos de longa distância, que sempre me mandam mensagens de apoio e de incentivo, sejam pelas redes sociais, pelo WhatsApp e até mesmo pelos poucos momentos que pudemos desfrutar pessoalmente. Cito, aqui, a Wani Nascimento, a Maryene Beatriz, a Ana d'Amore e a Mariana Viudes. Muito obrigado por nossa amizade.

Ao meu orientador, o prof. Dr. Victor Hugo Jorge Pérez, por me proporcionar um ambiente acadêmico e de pesquisa muito interessante. Agradeço por sua paciência e sua disponibilidade em me ajudar sempre que precisei. Sou muito grato por ter caminhado ao seu lado durante esses dois anos. Pude aprender muito contigo. Obrigado!

Aos meus professores do Mestrado: Adalberto, Leandro Aurichi, Herivelto Borges, Daniel Smania e Farid Tari que se dedicaram a oferecer o que possuem de melhor: o seu conhecimento. Aprendi muito com todos vocês.

E, por fim, agradeço à todos aqueles que de, alguma forma, me ajudaram e fizeram parte de todo esse percurso. Não poderia terminar sem citar um trecho de uma das minhas músicas favoritas:

*I pray you'll be our eyes and watch us where we go
And help us to be wise in times when we don't know.
Let this be our prayer when we lose our way.
Lead us to a place, guide us with your grace
To a place where we'll be safe - The Prayer*

Resumo

As sequências espectrais foram criadas por Jean Leray num campo de concentração durante a Segunda Guerra Mundial motivado por problemas inerentes à Topologia Algébrica. Num primeiro momento, surge como uma ferramenta para auxiliar no cálculo da cohomologia de um feixe. Porém, Jean-Louis Koszul apresenta uma formulação puramente algébrica para tais sequências, que consiste basicamente no cálculo da homologia de um complexo total associado a um complexo duplo. Concentraremos nosso trabalho nas definições e resultados que nos permitem demonstrar os seguintes resultados conhecidos da Álgebra usando sequências espectrais: o Lema dos Cinco, o Lema da Serpente, Balanceamento para o Funtor Tor, Mudança de Base para o Funtor Tor e o Teorema dos Coeficientes Universais. Apresentamos, ao final do trabalho, uma generalização que nos permite entender melhor os funtores derivados à esquerda: as Sequências Espectrais de Grothendieck.

Palavras-chaves: Sequências Espectrais. Homologia. Complexos. Álgebra.

Abstract

Spectral sequences were created by Jean Leray in a concentration camp during World War II motivated by problems of Algebraic Topology. At first, it appears as a tool to assist in calculating the cohomology of a sheaf. However, Jean-Louis Koszul presents a purely algebraic formulation for these sequences, which basically consists in calculating a total of homology complex associated with a double complex. We will focus our work on the definitions and results that allow us to demonstrate known results of algebra using spectral sequences: The Five Lemma, The Snake Lemma, Balancing of functor Tor, Base Change for Tor and Universal Coefficient Theorem. We present, at the end of this work, a generalization that allows us to better understand the left derivative functors: the Spectral Sequence of Grothendieck.

Key-words: Spectral Sequences. Homology. Complex. Algebra.

SUMÁRIO

Introdução	xiii
1 Preliminares	1
1.1 Conjuntos e Classes	1
1.2 Categorias e Módulos	2
1.2.1 Módulos Projetivos	11
1.3 Complexos	17
1.3.1 Sequência Exata Longa de Homologias	18
1.4 Complexos Duplos	24
1.5 Funtores	26
1.5.1 Funtores Derivados à Esquerda	28
1.5.2 Funtores Tor e tor	31
2 Sequências Espectrais	34
2.1 Filtrações e Pares Exatos	34
2.2 Sequências Espectrais	44
2.3 Homologia do Complexo Total	54
3 Aplicações	63
3.1 O Lema dos Cinco	63
3.2 Lema da Serpente	65
3.3 O Problema de Balanceamento do Funtor Tor	67

3.4	Mudança de Base para o Funtor Tor	70
3.5	O Teorema dos Coeficientes Universais	72
3.6	Sequências Espectrais de Grothendieck	76
	Referências	83

INTRODUÇÃO

Em Dezembro de 1946, a Universidade de Princeton realizou uma conferência para celebrar seu bicentenário. A sessão de matemática traziam como título “ Os Problemas da Matemática” e a Universidade de Princeton liderou a subseção de Topologia e propôs, dentre outros, o seguinte problema: “*Quais são as relações que conectam a estrutura homológica de um fibrado, espaço base, fibra e um grupo?*” Tal problema, proposto por S. Eilenberg (1913-1998), foi recebido pelo “*Annals of Mathematics*” em Julho de 1947 e foi publicado no volume 50 (1949).

Menos de sete anos depois, em Maio de 1953, a Universidade de Cornell sediou uma conferência internacional intitulada “Fibrados Tangentes e Geometria Diferencial”, que, por sua vez, apresentou dois conjuntos de problemas da Topologia Algébrica; um deles foi preparado por F. Hirzerbruch (1927-2012) e trata de questões inerentes à Topologia Diferencial, cujo foco eram classes características; e o outro conjunto, preparado por W. S. Massey (1920-), tratava de problemas da Teoria Homotópica. Dentre esses problemas, Massey inseriu o seguinte comentário: “*Agora se tornou abundantemente claro que as sequências espectrais são uma das estruturas algébricas fundamentais para tratar problemas topológicos.*”

As sequências espectrais foram criadas por Jean Leray (1906-1998), um oficial do Exército Francês. Depois que a França foi ocupada pelos alemães, ele foi preso e levado à prisão de oficiais em Edelbach, na Áustria, onde permaneceu até o fim da guerra. “*Uma Universidade em Cativoiro*” foi organizada com o tenente Leray como diretor, uma vez que seus captores providenciaram o livre acesso à biblioteca da Universidade de Viena. Entretanto, por medo de que a sua especialidade em matemática aplicada fosse utilizada para oferecer suporte aos esforços de guerra do Exército Alemão, Leray admitiu apenas a sua experiência na topologia como foco de pesquisa e ensino.

Os estudos de Leray apareceram numa publicação denominada “*Comptes Rendus*” (algo como “prestação de contas” em português), onde ele introduz o conceito de *feixes*, de sequências espectrais e de outras ferramentas que permitem estudar melhor os espaços de fibras. Um *feixe* pode ser entendido como um funtor contravariante da categoria dos abertos de um espaço topológico X na categoria dos grupos abelianos que satisfaz a duas propriedades de colagem. Um dos problemas enfrentados por Leray era o cálculo da cohomologia de um feixe, que consiste na análise das seções globais de um feixe num espaço topológico. Para resolver tal problema, ele desenvolveu uma técnica computacional denominada “Sequência Espectral de Leray”, que envolve um processo de aproximações sucessivas. Tal ferramenta relaciona a cohomologia de grupos com a cohomologia dos grupos do *pushforward* do feixe. Leray descobriu que os grupos de cohomologia do *pushforward* do feixe formam um complexo, então é natural calcular novamente a cohomologia (a cohomologia da cohomologia). Tal processo, quando repetido indefinidamente, resulta numa estrutura que consiste, basicamente, na cohomologia original. Podemos pensar numa sequência espectral como sendo um livro de infinitas páginas de forma que, para se trocar de página, basta calcular a homologia da página em que se está. Tal ferramenta, embora pareça extremamente robusta (e de fato é), esbarra no fato de que nem sempre podemos encontrar explicitamente todos os termos da sequência espectral. Por causa da quantidade de informações que são necessárias para se formar uma sequência espectral, podemos dizer que, de uma maneira geral, é bem complicado usar tal ferramenta para resolver problemas. Porém, existem alguns casos especiais em que as sequências colapsam e, com isso, podemos chegar a conclusões mais satisfatórias. Sabendo disso, existem alguns truques que podem ser usados para se obter informações interessantes a partir de uma sequência espectral.

Um matemático francês chamado Jean-Louis Koszul (1921-) conseguiu transformar as sequências espectrais em uma ferramenta puramente algébrica. Para isso, ele considerou anéis graduados e módulos bigraduados como objetos principais de estudo. Os tópicos principais da pesquisa de Koszul foram: homologia e cohomologia das Álgebras de Lie; cohomologia relativa; ações próprias e diferenciais de grupos de Lie; formas hermitianas em domínios homogêneos complexos; formalização do conceito de sequências espectrais. Koszul se tornou um dos membros da segunda geração dos Bourbaki, um grupo francês com contribuições

notáveis para a matemática. Mais tarde, alguns matemáticos como H. Cartan (1904-2008) e Eilenberg, propuseram uma generalização que permite construir sequências espectrais em categorias abelianas quaisquer: as Resoluções de Cartan-Eilenberg. Entranto, nosso trabalho se restringe apenas ao estudo das sequências espectrais na categoria de R -módulos (onde R é um anel comutativo e com unidade).

No primeiro capítulo deste trabalho, trazemos todas as definições essenciais ao desenvolvimento do nosso objeto de estudo. Começamos com alguns conceitos básicos da teoria de conjuntos, definimos a categoria dos R -módulos e apresentamos os módulos projetivos. Logo em seguida, definimos a homologia de um complexo e apresentamos uma generalização para complexos duplos. O capítulo termina com as definições básicas e exemplos de funtores que serão amplamente discutidos nas aplicações.

No segundo capítulo, fornecemos uma construção puramente algébrica para as sequências espectrais, começando com filtrações de R -módulos, que nos fornece um par exato, por meio da sequência exata longa de homologias e dá origem a uma sequência espectral. O nome sequência sugere, naturalmente, uma discussão acerca da convergência. Como que uma sequência espectral converge? E, se uma sequência espectral converge, qual é o objeto limite? Apresentamos resultados que exibem tais objetos. Finalizamos este capítulo com a construção das homologias iteradas. Por se tratar de conceitos muito abstratos, procuramos inserir vários diagramas para facilitar a visualização dos conceitos e definições.

O terceiro capítulo trata da demonstração de diversos resultados famosos da Álgebra Comutativa/Homológica usando a poderosa técnica das sequências espectrais combinadas com as homologias iteradas. O processo consiste basicamente em calcular as duas homologias iteradas. Uma delas nos dirá para onde a nossa sequência espectral converge e a outra dirá quem é a sequência espectral. Finalizamos o trabalho com uma generalização que nos permite tratar os funtores derivados à esquerda como uma espécie de derivada para R -módulos e apresentar um teorema que pode ser interpretado como uma regra da cadeia para funtores derivados.

Preliminares

1.1 Conjuntos e Classes

“Um conjunto é qualquer coleção, dentro de um todo de objetos definidos e distinguíveis, chamados elementos, de nossa intuição ou pensamento”. Tal definição, apresentada por Georg Cantor (1845-1918), nos parece um tanto quanto despreocupada com o rigor que a matemática nos exige. Não nos atreveremos a entrar numa abordagem axiomática complicada da *Teoria dos Conjuntos* uma vez que esse não é o objetivo do presente trabalho. Por isso, assumiremos que os leitores estejam familiarizados com os conceitos elementares da *Teoria dos Conjuntos*.

Embora seja um conceito simples, precisamos ter um pouco de cautela ao lidar com os conjuntos. Por um longo período de tempo, a existência de um conjunto universal (o “conjunto” de todos os conjuntos) era tida como quase certa. Entretanto, o famoso filósofo inglês Bertrand Russel chocou a comunidade matemática ao provar que admitir a existência de um “conjunto” de todos os conjuntos resulta em uma contradição. A seguir, apresentaremos uma breve justificativa para o *Paradoxo de Russel*.

Defina um conjunto de *Russel* como sendo um conjunto S que não é elemento de si próprio, ou seja, $S \notin S$ e defina R como sendo a coleção de todos os conjuntos de *Russel*. Existem duas possibilidades: R é um conjunto de *Russel* ou R não é um conjunto de *Russel*. Se R é um conjunto de *Russel*, então $R \notin R$, por definição. Entretanto, todos os conjuntos de *Russel* estão em R , donde segue que $R \in R$, uma contradição. Assim, R não é um conjunto de *Russel*, ou seja, $R \notin R$. Porém, esta última condição caracteriza R como conjunto de *Russel*, uma contradição.

Sendo assim, para resolver o problema da existência de um conjunto universal, é necessário definir o conceito de *classe*. Resumidamente, chamamos a coleção U de todos os conjuntos de *classe universal* e definimos uma *classe* como sendo subcoleções de U .

1.2 Categorias e Módulos

Definição 1.2.1. Uma *categoria* \mathcal{C} consiste de três ingredientes: uma classe de objetos $\text{Obj}(\mathcal{C})$, um conjunto de **morfismos** $\text{Hom}(A, B)$ para cada par ordenado (A, B) de objetos e uma **lei de composição** $\text{Hom}(A, B) \times \text{Hom}(B, C) \longrightarrow \text{Hom}(A, C)$, denotada por

$$(f, g) \mapsto gf$$

para cada tripla ordenada A, B, C de objetos. Estes ingredientes estão sujeitos aos seguintes axiomas:

1. Os conjuntos Hom são dois a dois disjuntos, ou seja, cada $f \in \text{Hom}(A, B)$ tem um único **domínio** A e único **contradomínio** B ;
2. Para cada objeto X , existe um **morfismo identidade** $1_X \in \text{Hom}(X, X)$. Mais ainda, $f1_A = f$ e $1_B f = f$ para todo morfismo $f \in \text{Hom}(A, B)$;
3. A composição é associativa: dados os morfismos $f \in \text{Hom}(A, B)$, $g \in \text{Hom}(B, C)$, $h \in \text{Hom}(C, D)$, então

$$h(gf) = (hg)f.$$

Um exemplo natural de categorias surge a partir da definição de um *módulo*, que, grosseiramente falando, se trata de um espaço vetorial sobre um anel. Em todo o nosso trabalho, sempre que nos referirmos a um *anel* (comumente denotado por R), estamos nos referindo a um anel comutativo e com identidade 1_R .

Definição 1.2.2. Um **R -módulo à esquerda** é um grupo abeliano aditivo M dotado de uma multiplicação por escalar $R \times M \longrightarrow M$, denotada por $(r, m) \mapsto rm$, tal que, para todo $m, m' \in M$ e $r, r' \in R$, valem:

1. $r(m + m') = rm + rm'$;
2. $(r + r')m = rm + r'm$;
3. $(rr')m = r(r'm)$ e,
4. $1_R m = m$.

De maneira análoga, definimos:

Definição 1.2.3. Um **R -módulo à direita** é um grupo abeliano aditivo M dotado de uma multiplicação por escalar $M \times R \rightarrow M$, denotada por $(m, r) \mapsto mr$, tal que, para todo $m, m' \in M$ e $r, r' \in R$, valem:

1. $(m + m')r = mr + m'r$;
2. $m(r + r') = mr + m'r$;
3. $m(rr') = (mr)r'$ e,
4. $m1_R = m$.

Como R é um anel comutativo, podemos considerar cada R -módulo à direita M como um R -módulo à esquerda definindo $rm = mr$ para todo $r \in R$ e $m \in M$. Com isso, diremos apenas que M é um **R -módulo**.

Definição 1.2.4. Se M e M' são R -módulos, então um **R -homomorfismo** é uma aplicação $f: M \rightarrow M'$ tal que, para todo $m, m' \in M$ e $r \in R$, valem:

1. $f(m + m') = f(m) + f(m')$ e,
2. $f(rm) = rf(m)$.

A classe de todos os R -módulos juntamente com os R -homomorfismos formam uma categoria ao considerarmos a composição usual de aplicações. Denotamos a categoria dos R -módulos por **Mod_R** .

Nesta seção, colocaremos os principais teoremas e resultados importantes para o desenvolvimento dos capítulos subsequentes. Inicialmente, observamos que as primeiras propriedades

de grupos abelianos e de espaços vetoriais valem para os módulos de uma maneira geral. Seja R um anel fixo (sempre comutativo com identidade). Adotaremos para um R -módulo a notação de R -módulo à esquerda.

Definição 1.2.5. *Se M é um R -módulo, então um **submódulo** de M ($M' \subseteq M$) é um subgrupo que é fechado sobre a multiplicação por escalar:*

$$m' \in M' \quad \text{implica} \quad rm' \in M', \quad \forall r \in R.$$

Seja $f : M \rightarrow N$ um R -homomorfismo. Então

$$\ker(f) = \{m \in M : f(m) = 0\}$$

é um submódulo de M , chamado de **núcleo** de f e

$$\text{im}(f) = \{f(m), \forall m \in M\}$$

é um submódulo de N , chamado de **imagem** de f .

Dados M_1 e M_2 dois R -módulos, é possível definir $M_1 + M_2$ como sendo um R -módulo da seguinte forma:

$$M_1 + M_2 = \{m_1 + m_2, \forall m_1 \in M_1 \text{ e } m_2 \in M_2\}.$$

Definição 1.2.6. *Seja X um subconjunto de um R -módulo M . O submódulo de M **gerado** por X é o menor submódulo de M que contém X , isto é, $\bigcap_{j \in J} M'_j$, onde $\{M'_j : j \in J\}$ é a família de submódulos de M que contém X . Denotamos este submódulo por $\langle X \rangle$.*

Teorema 1.2.7. *Seja X um subconjunto de um R -módulo M . Se $X = \emptyset$, então $\langle X \rangle = 0$; se $X \neq \emptyset$, então $\langle X \rangle = \{\sum r_i x_i : r_i \in R, x_i \in X\}$.*

Demonstração. Se $X = \emptyset$, então 0 é um submódulo de M que contém X , donde segue que $\langle \emptyset \rangle = 0$. Se $X \neq \emptyset$, então definimos o subconjunto $S = \{\sum r_i x_i : r_i \in R, x_i \in X\}$. Como R tem identidade, nós temos $X \subset S$. É fácil mostrar que S é um submódulo de M , e, sendo assim, segue que $\langle X \rangle \subseteq S$. Para a inclusão reversa, é suficiente mostrar que se M' é um submódulo qualquer que contém X , então $S \subseteq M'$ (S estará contido na interseção de todos os tais M' , que, por definição, é $\langle X \rangle$). Portanto, se $x_i \in M'$, para todo i , então $\sum r_i x_i \in M'$ para todo $r_i \in R$.

□

Definição 1.2.8. Um R -módulo M é dito **finitamente gerado** se existe um subconjunto finito $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ de M tal que $\langle X \rangle = M$.

Definição 1.2.9. Se M' é um submódulo de M , definimos o **módulo quociente** $\frac{M}{M'}$ como sendo o grupo quociente $\frac{M}{M'}$ olhado como um R -módulo considerando

$$r(m + M') = rm + M'.$$

Dados dois R -módulos M e N , definimos o **conúcleo** de $f : M \rightarrow N$ como sendo o quociente:

$$\text{coker}(f) = \frac{N}{\text{im}(f)}.$$

Proposição 1.2.10. Sejam M, N dois R -módulos, $M_1, M_2 \subseteq M$ submódulos e $f : M \rightarrow N$ um R -homomorfismo. Então valem as seguintes propriedades:

1. f é um homomorfismo injetor se, e somente se, $\ker(f) = 0$;
2. f é um homomorfismo sobrejetor se, e somente se, $\text{coker}(f) = 0$;
3. (**Primeiro Teorema de Isomorfismo**) A aplicação $m + \ker(f) \mapsto f(m)$ é um isomorfismo entre $\frac{M}{\ker(f)}$ e $\text{im}(f)$;
4. (**Segundo Teorema de Isomorfismo**) A aplicação $m_1 + (M_1 \cap M_2) \mapsto m_1 + M_2$ é um isomorfismo entre

$$\frac{M_1}{M_1 \cap M_2} \quad e \quad \frac{(M_1 + M_2)}{M_2};$$

5. (**Terceiro Teorema de Isomorfismo**) $\frac{M/M_2}{M_1/M_2} \cong \frac{M}{M_1}$ e,

6. (**Teorema de Correspondência**) Existe uma bijeção $\phi : S \mapsto \frac{S}{M_1}$ determinada por $\phi : \{\text{módulos intermediários } M_1 \subseteq S \subseteq M\} \rightarrow \left\{ \text{submódulos de } \frac{M}{M_1} \right\}$.

Mais ainda, $M_1 \subseteq S \subseteq S'$ em M se, e somente se, $\frac{S}{M_1} \subseteq \frac{S'}{M_1}$ em $\frac{M}{M_1}$.

Demonstração. A prova dos itens 1 ao 5 são exercícios interessantes deixados ao leitor e podem ser encontradas em [6], páginas 43,44 e 45. Provaremos o item 6.

Como cada módulo é um grupo abeliano aditivo, cada submódulo é um subgrupo e, com isso, o Teorema de Correspondência para Grupos nos garante que ϕ é uma aplicação injetora que preserva inclusões: $S \subseteq S'$ em M se, e somente se, $\frac{S}{M_1} \subseteq \frac{S'}{M_1}$ em $\frac{M}{M_1}$. Mais ainda, ϕ é sobrejetora: se $S^* \subseteq \frac{M}{M_1}$, então existe um único submódulo $S \supseteq M_1$ tal que $S^* = \frac{S}{M_1}$. O restante desta demonstração é idêntica à versão de grupos, só é preciso checar que a imagem e a imagem inversa de submódulos são submódulos. \square

O teorema de correspondência é usado da seguinte forma: um submódulo S^* de $\frac{M}{M_1}$ é igual a $S^* = \frac{S}{M_1}$ para algum módulo único intermediário S .

Definição 1.2.11. *Seja $\{M_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ uma família de R -módulos e $\{f_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ uma família de R -homomorfismos. Dizemos que*

$$\cdots \longrightarrow M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

é uma **sequência exata** se $\text{im}(f_{n+1}) = \ker(f_n)$ para todo n . Caso a igualdade for trocada por uma inclusão, ou seja, se $\text{im}(f_{n+1}) \subseteq \ker(f_n)$, diremos que a sequência trata-se de um **complexo**.

Denote por 0 o R -módulo nulo. Não é necessário rotular as flechas $0 \xrightarrow{f} A$ ou $B \xrightarrow{g} 0$, uma vez que f denota a inclusão do módulo 0 em A e g é a aplicação nula.

Proposição 1.2.12. *Sejam A, B, C três R -módulos.*

1. $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B$ é exata $\Leftrightarrow f$ é homomorfismo injetor;
2. $B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ é exata $\Leftrightarrow g$ é homomorfismo sobrejetor e,
3. $0 \longrightarrow A \xrightarrow{h} B \longrightarrow 0$ é exata $\Leftrightarrow h$ é isomorfismo.

Demonstração.

1. A imagem de $0 \longrightarrow A$ é o módulo nulo e, como a sequência dada é exata, temos que $\ker(f) = 0$, donde segue que f é injetora. Reciprocamente, dada $f : A \longrightarrow B$, existe uma sequência exata $\ker(f) \xrightarrow{i} A \xrightarrow{f} B$, onde i denota a inclusão. Se f é injetora, então $\ker(f) = 0$.

2. O núcleo de $C \longrightarrow 0$ é C e, como a sequência é exata, $\text{im}(g) = C$, donde segue que g é sobrejetora. Reciprocamente, dada $g: B \longrightarrow C$, existe uma sequência exata

$$B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{\pi} \frac{C}{\text{im}(g)}, \text{ onde } \pi \text{ é a projeção canônica. Se } g \text{ é sobrejetora, então } C = \text{im}(g) \text{ e } \frac{C}{\text{im}(g)} = 0.$$

3. Consequência imediata dos itens anteriores.

□

Definição 1.2.13. Uma **sequência exata curta** é uma sequência exata da forma

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0.$$

Em geral, se N é um submódulo de um R -módulo M , então a sequência

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow \frac{M}{N} \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata curta.

Dados dois R -módulos M e N , podemos obter um novo R -módulo considerando o conjunto de todos os pares ordenados da forma (m, n) com $m \in M$ e $n \in N$ definindo, para todo $m_1, m_2 \in M$, $n_1, n_2 \in N$ e $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$(m_1, n_1) + (m_2, n_2) = (m_1 + m_2, n_1 + n_2) \text{ e}$$

$$\alpha(m_1, n_1) = (\alpha m_1, \alpha n_1).$$

Sejam $\{M_i\}_{i \in I}$ uma família de R -módulos e $\prod_{i \in I} M_i$ o produto cartesiano dos membros desta família. Podemos introduzir uma estrutura de R -módulo em $\prod_{i \in I} M_i$ como segue:

Dados $a_i, b_i \in M_i$, identificamos:

$$a = (a_i)_{i \in I} \text{ e } b = (b_i)_{i \in I} \text{ e consideramos as operações:}$$

$$a + b = (a_i)_{i \in I} + (b_i)_{i \in I} = (a_i + b_i)_{i \in I}$$

$$ra = r(a_i)_{i \in I} = (ra_i)_{i \in I}, \text{ para todo } r \in R.$$

O R -módulo $\prod_{i \in I} M_i$ é chamado **produto direto** da família de R -módulos $\{M_i\}_{i \in I}$. Cada R -módulo M_i é chamado **fator** de $\prod_{i \in I} M_i$. Se I for um conjunto finito, denotamos $\prod_{i \in I} M_i = M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$.

Definição 1.2.14. *Seja $\{M_i\}_{i \in I}$ uma família de R -módulos. Uma família $(m_i)_{i \in I} \in \{M_i\}_{i \in I}$ é dita uma **família quase nula** se $m_i = 0$ exceto para um número finito de índices.*

Definição 1.2.15. *Seja $\{M_i\}_{i \in I}$ uma família de R -módulos. O conjunto das famílias quase nulas de $\prod_{i \in I} M_i$, com estrutura de R -módulo induzida pelas operações de $\prod_{i \in I} M_i$ é chamado **soma direta externa** e é indicada por $\overline{\bigoplus}_{i \in I} M_i$. Cada M_i é chamado **somando**. Se o conjunto I é finito, denotamos*

$$\overline{\bigoplus}_{i \in I} M_i = M_1 \overline{\oplus} M_2 \overline{\oplus} \cdots \overline{\oplus} M_n.$$

Proposição 1.2.16. *Seja $\{M_i\}_{i \in I}$ uma família de submódulos de um R -módulo M . As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $m \in M$ é escrito de modo único como $m = \sum_{i \in I} m_i$, com $m_i \in M_i$ para todo $i \in I$, onde $(m_i)_{i \in I}$ é uma família quase nula.
2. $M = \sum_{i \in I} M_i$ e se $\sum_{i \in I} m_i = 0$, então $m_i = 0$ para todo i .
3. $M = \sum_{i \in I} M_i$ e $M_j \cap (\sum_{i \neq j} M_i) = 0$ para todo $j \in I$.

Demonstração. Com efeito,

(1 \Rightarrow 2) Por hipótese, $0 = \sum_{i \in I} 0_i = \sum_{i \in I} m_i$. Sendo assim, pela unicidade, temos que $m_i = 0$ para todo $i \in I$.

(2 \Rightarrow 3) Seja $m \in M_j \cap (\sum_{i \neq j} M_i)$. Como $m \in M_j$, podemos escrever $m = m_j \in M_j$. Por outro lado, $m \in \sum_{i \neq j} M_i$. Sendo assim, podemos escrever $m = \sum_{i \neq j} m_i$. Portanto, $\sum_{i \neq j} m_i - m_j = 0$, donde segue que $m_i = 0$, ou ainda, que $m = 0$.

(3 \Rightarrow 1) Suponha que m tenha duas formas de ser escrito, ou seja $m = \sum_{i \in I} m_i$ e $m = \sum_{i \in I} m'_i$. Sendo assim, $\sum_{i \in I} m_i - \sum_{i \in I} m'_i = 0$. Reescrevendo, temos que $\underbrace{m_j - m'_j}_{\in M_j} = \underbrace{\sum_{i \neq j} m'_i - \sum_{i \neq j} m_i}_{\in \sum_{i \neq j} M_i}$. Portanto, $m_j - m'_j = 0$ para todo j , donde segue que as duas formas são iguais.

□

Definição 1.2.17. Dizemos que um R -módulo M é a **soma direta interna** de uma família de submódulos $\{M_i\}_{i \in I}$ se satisfaz qualquer uma das condições da proposição anterior e denotamos $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$. Se I for finito, denotamos por

$$M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n.$$

Ao longo deste trabalho, não faremos distinção entre a soma direta *interna* e *externa*, uma vez que, tomados os devidos cuidados, os dois conceitos são equivalentes em um certo sentido:

Proposição 1.2.18. Nas mesmas condições da definição anterior, temos que

$$\bigoplus_{i \in I} M_i \cong \overline{\bigoplus_{i \in I} M_i}.$$

Definição 1.2.19. Um R -módulo F é dito **livre** se F é isomorfo à uma soma direta de cópias de R , ou seja, existe um conjunto de índices (possivelmente infinito) $B \subseteq F$ com $F = \bigoplus_{b \in B} R_b$, onde $R_b = \langle b \rangle \cong R$ para todo $b \in B$. Dizemos que B é uma **base** de F .

Pela definição de soma direta, cada $m \in F$ tem uma única decomposição

$$m = \sum_{b \in B} r_b b,$$

onde $r_b \in R$ e quase todos os r_b são nulos (exceto um número finito). Disso, segue que $F = \langle B \rangle$.

Uma base de um módulo livre tem uma forte semelhança à uma base de um espaço vetorial. Se \mathbb{K} é um corpo, então cada espaço vetorial V sobre \mathbb{K} possui uma base (Álgebra Linear). Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base para V e $\{w_1, \dots, w_n\}$ é uma lista (possivelmente com repetições) de vetores de um espaço W , então existe uma única transformação linear $T : V \rightarrow W$ com $T(v_i) = w_i$ para todo i . Como T satisfaz

$$T(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) = a_1 w_1 + \cdots + a_n w_n,$$

dizemos que T é totalmente determinada a partir de uma *extensão por linearidade*. Esta ideia pode ser estendida para R -módulos livres.

Proposição 1.2.20. *Seja R um anel e seja F um módulo livre com base X . Se M é um módulo qualquer e se $f : X \rightarrow M$ uma aplicação qualquer, então existe um único R -homomorfismo $\tilde{f} : F \rightarrow M$ tal que $\tilde{f} \circ i = f$, onde $i : X \rightarrow F$ é a inclusão; isto é, $\tilde{f}(x) = f(x)$ para todo $x \in X$. Neste caso, \tilde{f} é a extensão linear de f .*

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ & \uparrow i & \searrow \tilde{f} \\ X & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

Demonstração. Para todo $v \in F$, existem únicos $\{r_x\}_{x \in X}$ não nulos em um número finito de índices, tais que:

$$v = \sum_{x \in X} r_x x.$$

Sendo assim, existe uma função bem definida $\tilde{f} : F \rightarrow M$ dada por $\tilde{f}(v) = \sum_{x \in X} r_x f(x)$.

Claramente, \tilde{f} estende f . Se $v' = \sum_{x \in X} r'_x x$, temos que

$$v + v' = \sum_{x \in X} (r_x + r'_x) x \Rightarrow \tilde{f}(v + v') = \sum_{x \in X} (r_x + r'_x) f(x) = \sum_{x \in X} r_x f(x) + \sum_{x \in X} r'_x f(x) = \tilde{f}(v) + \tilde{f}(v').$$

Dado $s \in R$, temos que:

$$sv = \sum_{x \in X} sr_x x \Rightarrow \tilde{f}(sv) = \sum_{x \in X} sr_x f(x) = s \sum_{x \in X} r_x f(x) = s\tilde{f}(v),$$

o que mostra que \tilde{f} é um R -homomorfismo. Se $g : X \rightarrow M$ também é tal que $g \circ i = f$, temos que, para todo $x \in X$, $g(x) = g \circ i(x) = f(x) = \tilde{f}(x)$, donde segue que g e \tilde{f} coincidem na base X . Porém, dois R -homomorfismos que coincidem numa base são iguais. Sendo assim, obtemos a unicidade. \square

Observação 1.2.21. *Em geral, não é verdade que todo subconjunto linearmente independente de um módulo livre pode ser ampliado à uma base. Para ver isso, basta considerarmos o conjunto $\{2\} \subset \mathbb{Z}$, onde \mathbb{Z} é um \mathbb{Z} -módulo.*

Observação 1.2.22. *Também não é verdade que todo conjunto de geradores contém uma base. Para ver isso, basta notar que $\langle 2, 3 \rangle = \mathbb{Z}$.*

Observação 1.2.23. *Nem sempre um submódulo de um módulo livre é livre. Considere o seguinte exemplo: considere \mathbb{Z}_6 um \mathbb{Z}_6 -módulo. O submódulo $M = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ não é livre, pois $\bar{3} \cdot \bar{2} = \bar{0}$, mas $\bar{3} \neq \bar{0}$.*

Observação 1.2.24. *Seja M um R -módulo livre e $S \subsetneq M$ um submódulo livre. Não é verdade que o número de elementos de uma base de S é menor que os da base de M . Exemplo: $M = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $A = \{(1, 1), (-1, 1)\}$ e $S = \langle A \rangle$. É fácil verificar que $S \subsetneq M$ ($(1, 0) \notin S$) e que $M = \langle (1, 0), (0, 1) \rangle$.*

Observação 1.2.25. *Nem todo quociente entre módulos livres é livre. De fato, considere \mathbb{Z} como um \mathbb{Z} -módulo, cuja base é $\{1\}$ e considere o submódulo $\langle n \rangle$, com $n > 1$. Observamos que $\frac{\mathbb{Z}}{\langle n \rangle} = \mathbb{Z}_n$ não é livre como \mathbb{Z} -módulo, pois $n\bar{k} = \overline{nk} = \bar{0}$.*

1.2.1 Módulos Projetivos

Definição 1.2.26. *Um R -módulo P é dito **projetivo** se para quaisquer R -módulos G e H , homomorfismo $\alpha : P \rightarrow H$ e homomorfismo sobrejetor $\beta : G \rightarrow H$, existe um homomorfismo $\phi : P \rightarrow G$ tal que $\beta\phi = \alpha$. Ou seja, o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ \phi \swarrow & \downarrow \alpha & \\ G & \xrightarrow{\beta} & H \longrightarrow 0 \end{array}$$

Vale a pena notar que a linha inferior do diagrama é uma sequência exata.

Proposição 1.2.27. *Todo R -módulo livre é projetivo.*

Demonstração. Seja P um R -módulo livre, $B = \{b_i : i \in I\}$ uma base para P e α, β como na definição anterior. Como β é sobrejetora, para cada $b_i \in B$ existe um $g_i \in G$ tal que $\beta(g_i) = \alpha(b_i)$. Definimos $\phi : B \rightarrow G$ por $\phi(b_i) = g_i$ (o Axioma da Escolha nos permite esta construção) e estendemos a P por linearidade (Proposição 1.2.20). Para verificar que o diagrama comuta, considere $a = \sum_i r_i b_i \in P$. Então

$$\beta\phi(a) = \beta\phi\left(\sum_i r_i b_i\right) = \beta\left(\sum_i r_i \phi(b_i)\right) = \sum_i r_i \beta(g_i) = \sum_i r_i \alpha(b_i) = \alpha(a),$$

como esperávamos. □

Definição 1.2.28. *Seja $X = \{x_i : i \in I\}$ uma base de um R -módulo livre F e $Y = \{\sum_i r_{ji} x_i : j \in J \subseteq I\}$ um subconjunto de F . Se K é o submódulo de F gerado por Y , dizemos que*

o módulo $M \cong \frac{F}{K}$ tem **geradores** X e **relações** Y . Também dizemos que o par ordenado $(X|Y)$ é uma **apresentação** de M .

Dado um módulo M , podemos considerar o módulo livre F gerado pelos elementos de M . Ao definir $\phi: F \rightarrow M$ como sendo a extensão linear da aplicação identidade de M a F , percebemos que ϕ é sobrejetora. Sendo assim, pelo 1^o Teorema de Isomorfismo, temos que $M \cong \frac{F}{\ker(\phi)}$, ou ainda, que $(F|\ker(\phi))$ é uma apresentação de M . Obtemos, então, o seguinte resultado:

Proposição 1.2.29. *Todo R -módulo admite uma apresentação. Ou ainda, todo R -módulo pode ser escrito como quociente de um módulo livre.*

Uma apresentação nos permite tratar equações em M como se estivéssemos em um módulo livre F . O trabalho de determinar quais elementos de F se encontram em $K = \ker(\phi)$ se torna simples quando Y é uma base e K também é livre. Entretanto, nem todo submódulo de um módulo livre é livre. É natural considerar a iteração do processo de tomar apresentações: caso o módulo K não seja livre, consideramos uma apresentação pra ele e repetimos o processo. Obtemos, assim, uma sequência (talvez infinita) de módulos livres a partir de M e passamos a tratar as equações em M como sequência de equações em módulos livres. Isso nos leva à seguinte definição:

Definição 1.2.30. *Uma **resolução projetiva** de um R -módulo A é uma sequência exata*

$$P_{\bullet} = \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} A \longrightarrow 0$$

na qual cada R -módulo P_n é projetivo. Teremos uma **resolução livre** se cada R -módulo P_n for livre.

Se P_{\bullet} é uma resolução projetiva de A , então dizemos que o complexo

$$P_A = \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \longrightarrow 0$$

é a **resolução projetiva deletada** de A .

Uma resolução projetiva deletada nem sempre é uma sequência exata. De fato, se $A \neq 0$, temos que $\text{im}(d_1) = \ker(\epsilon) \neq \ker(P_0 \rightarrow 0) = P_0$. Quando deletamos o módulo A , não há

perda de informação, pois $A \cong \text{coker}(d_1)$. A “operação” de readmitir A em P_A é chamada de **aumento**. Uma vez que não há perda de informações, não faz diferença permutar os conceitos quando necessário. Podemos dizer que resoluções deletadas são apresentações melhoradas pelo seguinte resultado:

Proposição 1.2.31. *Todo R -módulo A tem uma resolução projetiva.*

Demonstração. Mostraremos que A admite uma resolução livre, uma vez que todo R -módulo livre é projetivo. Sabemos que A admite uma apresentação $(X_0|Y_1)$, ou seja, se F_0 é gerado por X_0 e K_1 por Y_1 , temos que $A \cong \frac{F_0}{K_1}$, o que dá origem à seguinte sequência exata curta:

$$0 \longrightarrow K_1 \xrightarrow{i_1} F_0 \xrightarrow{\epsilon} A \longrightarrow 0.$$

O módulo K_1 admite uma apresentação $(X_1|Y_2)$. Desta forma, se F_1 é gerado por X_1 e K_2 por Y_2 , teremos:

$$0 \longrightarrow K_2 \xrightarrow{i_2} F_1 \xrightarrow{\epsilon_1} K_1 \longrightarrow 0.$$

Juntamos essas duas sequências, teremos:

$$0 \longrightarrow K_2 \xrightarrow{i_2} F_1 \xrightarrow{i_1\epsilon_1} F_0 \xrightarrow{\epsilon} A \longrightarrow 0.$$

Precisamos verificar se a sequência é exata em F_1 e em F_0 . Note que, como ϵ_1 é sobrejetora, temos que:

$$i_1\epsilon_1(F_1) = i_1(K_1) = \ker(\epsilon).$$

Como i_1 é injetora, temos $\ker(i_1\epsilon_1) = \ker(\epsilon_1) = \text{im}(\epsilon_2)$. Então, a sequência é exata. Este processo pode ser repetido infinitamente e, desse modo, obteremos uma resolução projetiva de A .

□

Quando temos uma sequência exata curta tal que, para os dois R -módulos não nulos das extremidades, são dadas resoluções projetivas, é natural perguntarmos se existe uma

resolução projetiva para o módulo central que se comunica com as resoluções projetivas dadas. O próximo resultado, conhecido como *Lema da Ferradura* (pela semelhança do diagrama com uma ferradura), responde afirmativamente a essa pergunta.

Lema 1.2.32. (*Lema da Ferradura*) *Considere o diagrama, constituído por R -módulos e por R -homomorfismos:*

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \downarrow \alpha_2 & & \downarrow \gamma_2 & & \\
 & & P_1 & & R_1 & & \\
 & & \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \gamma_1 & & \\
 & & P_0 & & R_0 & & \\
 & & \downarrow \alpha_0 & & \downarrow \gamma_0 & & \\
 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & & & \downarrow \gamma \\
 & & 0 & & & & 0
 \end{array}$$

onde a sequência $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ é exata e P_\bullet e R_\bullet são resoluções projetivas de L e N respectivamente. Então, existe uma resolução projetiva Q_\bullet de M e aplicações de complexos $f : P_\bullet \rightarrow Q_\bullet$ e $g : Q_\bullet \rightarrow R_\bullet$ tal que:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \downarrow \alpha_2 & & \beta_2 \downarrow & & \downarrow \gamma_2 \\
 0 & \longrightarrow & P_1 & \xrightarrow{f_1} & Q_1 & \xrightarrow{g_1} & R_1 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \alpha_1 & & \beta_1 \downarrow & & \downarrow \gamma_1 \\
 0 & \longrightarrow & P_0 & \xrightarrow{f_0} & Q_0 & \xrightarrow{g_0} & R_0 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \alpha_0 & & \beta_0 \downarrow & & \downarrow \gamma_0 \\
 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

é um diagrama comutativo e com linhas exatas. Além disso, $Q_i = P_i \oplus R_i$, para cada $i \geq 0$.

Demonstração. Provaremos por indução. Considere o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
& & P_0 & \xrightarrow{i_0} & Q_0 & \xrightarrow{g_0} & R_0 \\
& & \downarrow \alpha_0 & & \downarrow \beta_0 & \swarrow h & \downarrow \gamma_0 \\
0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & & & \downarrow \gamma \\
& & 0 & & & & 0
\end{array}$$

e seja $Q_0 = P_0 \oplus R_0$. Como R_0 é projetivo, existe um R -homomorfismo $h : R_0 \rightarrow M$ tal que $g \circ h = \gamma_0$. Então sejam $f_0 = i_0 : P_0 \rightarrow Q_0$ a injeção canônica e $g_0 = \pi_2 : Q_0 \rightarrow R_0$ a projeção canônica. Agora, seja $\beta_0 : Q_0 \rightarrow M$ um homomorfismo definido por $\beta_0(x, y) = f \circ \alpha_0(x) + h(y)$.

Afirmção: β_0 é sobrejetiva.

De fato, se $z \in M$, então $g(z) \in N$, logo existe um $y \in R_0$ tal que $\gamma_0(y) = g(z)$. Agora como $g(z - h(y)) = g(z) - (g \circ h)(y) = g(z) - \gamma_0(y) = g(z) - g(z) = 0$, então $z - h(y) \in \ker(g) = \text{im}(f)$. Segue que existe um $x \in P_0$ tal que $f \circ \alpha_0(x) = z - h(y)$. Assim, $\beta_0(x, y) = z$.

Facilmente podemos ver que $0 \longrightarrow P_0 \xrightarrow{f_0} Q_0 \xrightarrow{g_0} R_0 \longrightarrow 0$ é exata. Portanto temos o diagrama comutativo e a linha é exata.

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & P_0 & \xrightarrow{f_0} & Q_0 & \xrightarrow{g_0} & R_0 \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow \alpha_0 & & \downarrow \beta_0 & & \downarrow \gamma_0 \\
0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & 0 & & 0 & & 0.
\end{array}$$

Agora suponhamos por indução, que tenhamos construído até a n -ésima componente da resolução projetiva Q_\bullet de M , isto é,

$$0 \longrightarrow Q_{n-1} = P_{n-1} \oplus R_{n-1} \xrightarrow{\beta_{n-1}} \dots \longrightarrow Q = P_0 \oplus R_0 \xrightarrow{\beta_0} M \longrightarrow 0$$

e também tenhamos encontrado os homomorfismos f_0, f_1, \dots, f_{n-1} e g_0, g_1, \dots, g_{n-1} tal que o diagrama comuta e as linhas e colunas são exatas. Na n -ésima linha temos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
& & P_n & & R_n & & \\
& & \downarrow p_n^\alpha & & \downarrow p_n^\gamma & & \\
0 & \longrightarrow & \ker(\alpha_{n-1}) & \xrightarrow{\bar{f}_{n-1}} & \ker(\beta_{n-1}) & \xrightarrow{\bar{g}_{n-1}} & \ker(\gamma_{n-1}) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow \gamma & & \\
& & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

com $p_n^\alpha = \alpha_n : P_n \rightarrow \text{im}(\alpha_n) = \ker(\alpha_{n-1})$ e $p_n^\gamma = \gamma_n : R_n \rightarrow \text{im}(\gamma_n) = \ker(\gamma_{n-1})$ e onde \bar{f}_{n-1} e \bar{g}_{n-1} são restrições de $f_{n-1} : P_{n-1} \rightarrow Q_{n-1}$ e $g_{n-1} : Q_{n-1} \rightarrow R_{n-1}$ para $\ker(\alpha_{n-1})$ e $\ker(\beta_{n-1})$ respectivamente. Uma sobrejeção $p_n^\beta : Q_n = P_n \oplus R_n \rightarrow \ker(\beta_{n-1})$ e as aplicações $0 \longrightarrow P_n \xrightarrow{f_n} Q_n$ e $Q_n \xrightarrow{g_n} R_n \longrightarrow 0$ podem ser construídas exatamente como β_0 , f_0 e g_0 foram construídos.

Obtemos o diagrama comutativo com as linhas e colunas exatas

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & P_n & \xrightarrow{f_n} & Q_n & \xrightarrow{g_n} & R_n \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow p_n^\alpha & & \downarrow p_n^\beta & & \downarrow p_n^\gamma \\
0 & \longrightarrow & \ker(\alpha_{n-1}) & \xrightarrow{\bar{f}_{n-1}} & \ker(\beta_{n-1}) & \xrightarrow{\bar{g}_{n-1}} & \ker(\gamma_{n-1}) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & 0 & & 0 & & 0.
\end{array}$$

Se $i_{n-1}^\alpha : \ker(\alpha_{n-1}) \rightarrow P_{n-1}$, $i_{n-1}^\beta : \ker(\beta_{n-1}) \rightarrow Q_{n-1}$ e $i_{n-1}^\gamma : \ker(\gamma_{n-1}) \rightarrow R_{n-1}$ são injeções canônicas, então $\alpha_n = i_{n-1}^\alpha \circ p_n^\alpha$, $\beta_n = i_{n-1}^\beta \circ p_n^\beta$ e $\gamma_n = i_{n-1}^\gamma \circ p_n^\gamma$. Com isto temos o seguinte diagrama comutativo com linhas e colunas exatas

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & P_n & \xrightarrow{f_n} & Q_n & \xrightarrow{g_n} & R_n \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow \alpha_n & & \downarrow \beta_n & & \downarrow \gamma_n \\
0 & \longrightarrow & P_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & Q_{n-1} & \xrightarrow{g_{n-1}} & R_{n-1} \longrightarrow 0 \\
& & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & 0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

e então o lema segue por indução. □

1.3 Complexos

Definição 1.3.1. Um **módulo graduado** é uma família $M = (M_p)_{p \in \mathbb{Z}}$ de R -módulos.

Definição 1.3.2. Sejam M, N dois R -módulos graduados e $a \in \mathbb{Z}$. Uma **aplicação graduada com grau a** , denotada por $f : M \rightarrow N$, é uma família de R -homomorfismos $f = (f_p : M_p \rightarrow N_{p+a})_{p \in \mathbb{Z}}$. Dizemos que a é o grau de f e denotamos $\text{grau}(f) = a$.

Proposição 1.3.3. Se $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$ são aplicações graduadas de graus a e b , respectivamente, então gf é uma aplicação graduada de grau $a + b$.

Demonstração. Por definição, $f_p : M_p \rightarrow N_{p+a}$ e $g_{p+a} : N_{p+a} \rightarrow P_{p+a+b}$. Então, temos que $gf : M_p \rightarrow P_{p+a+b}$ e, portanto, que o grau de gf é $a + b$. \square

Definição 1.3.4. Sejam M e M' dois R -módulos graduados. Dizemos que M' é um **submódulo graduado** de M , denotado simplesmente por $M' \subseteq M$, se cada M'_p é um submódulo de M_p $\forall p \in \mathbb{Z}$.

Se M' é um submódulo de M , podemos definir o quociente $M/M' = (M_p/M'_p)_{p \in \mathbb{Z}}$. Se $f : M \rightarrow N$ é uma aplicação graduada com $\text{grau}(f) = a$, então o **núcleo** de f é o módulo graduado $\ker(f) = (\ker(f_p))_{p \in \mathbb{Z}} \in M$ e a **imagem** de f é o módulo graduado $\text{im}(f) = (\text{im}(f_{p-a}))_{p \in \mathbb{Z}} \in N$. Uma sequência de aplicações graduadas

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

é exata se $\text{im}(f) = \ker(g)$, isto é, se $\text{im}(f_{p-a}) = \ker(g_p) \forall p \in \mathbb{Z}$.

Definição 1.3.5. Um **complexo** é um par ordenado (C, d) , no qual C é um módulo graduado e d é uma aplicação graduada com $\text{grau}(d) = -1$ que satisfaz $dd = 0$ (aplicação nula). A aplicação d é denominada **diferencial**. Denotamos $(C, d) := C_\bullet$ e representamos:

$$C_\bullet : \cdots \xrightarrow{d_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots$$

A condição $dd = 0$ nos diz que $\text{im}(d_{n+1}) \subseteq \ker(d_n) \forall n \in \mathbb{Z}$. Isso nos permite definir:

Definição 1.3.6. *Seja (C, d) um complexo. A n -ésima homologia de (C, d) é definida como*

$$H_n(C_\bullet) = \frac{\ker(d_n)}{\operatorname{im}(d_{n+1})}.$$

Podemos definir, também, o módulo graduado das homologias $H(C_\bullet)$:

$$H(C_\bullet) = \bigoplus_n H_n(C_\bullet).$$

1.3.1 Sequência Exata Longa de Homologias

A seguir, faremos uma generalização de sequências exatas de R -módulos para sequências exatas de complexos de R -módulos. Isto é, podemos construir uma sequência exata do tipo: $L_\bullet \xrightarrow{f} M_\bullet \xrightarrow{g} N_\bullet$.

Sejam $M_\bullet = (M, \alpha)$ e $N_\bullet = (N, \beta)$ dois complexos. Então dizemos que $f : M_\bullet \rightarrow N_\bullet$, $f = \{f_i : M_i \rightarrow N_{i+k}\}$, é uma **aplicação entre complexos de grau k** , se o seguinte diagrama comuta para todo $i \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{\alpha_{i+1}} & M_i & \xrightarrow{\alpha_i} & M_{i-1} & \xrightarrow{\alpha_{i-1}} & \dots \\ & & \downarrow f_i & & \downarrow f_{i-1} & & \\ \dots & \xrightarrow{\beta_{i+k+1}} & N_{i+k} & \xrightarrow{\beta_{i+k}} & N_{i+k-1} & \xrightarrow{\beta_{i+k-1}} & \dots \end{array}$$

Proposição 1.3.7. *Se $f : M_\bullet \rightarrow N_\bullet$ é uma aplicação de complexos de cadeias, então para cada $i \in \mathbb{Z}$, existe uma aplicação R -linear $H_i(f) : H_i(M_\bullet) \rightarrow H_i(N_\bullet)$ definida por*

$$H_i(f)(x + \operatorname{im}(\alpha_{i+1})) = f_i(x) + \operatorname{im}(\beta_{i+1}),$$

para todo $x + \operatorname{im}(\alpha_{i+1}) \in H_i(M_\bullet)$.

Demonstração. Para cada $i \in \mathbb{Z}$, temos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{\alpha_{i+1}} & M_i & \xrightarrow{\alpha_i} & M_{i-1} & \xrightarrow{\alpha_{i-1}} & \dots \\ & & \downarrow f_i & & \downarrow f_{i-1} & & \\ \dots & \xrightarrow{\beta_{i+k+1}} & N_{i+k} & \xrightarrow{\beta_{i+k}} & N_{i+k-1} & \xrightarrow{\beta_{i+k-1}} & \dots \end{array}$$

Se $x \in \ker(\alpha_i)$, então

$$\beta_i(f_i(x)) = f_{i-1}(\alpha_i(x)) = 0$$

então, $f_i(x) \in \ker(\beta_i)$. Com isto, podemos ver que $H_i(f)$ aplica $\ker(\alpha_i)/\text{im}(\alpha_{i+1})$ em $\ker(\beta_i)/\text{im}(\beta_{i+1})$.

Agora, demonstraremos que a aplicação $H_i(f)$ está bem definida. Sejam $x, x' \in \ker(\alpha_i)$ e suponha que $x + \text{im}(\alpha_{i+1}) = x' + \text{im}(\alpha_{i+1})$. Então $x - x' \in \text{im}(\alpha_{i+1})$. Logo, existe $y \in M_{i+1}$ tal que $\alpha_{i+1}(y) = x - x'$.

Assim,

$$f_i(x) - f_i(x') = f_i(x - x') = f_i(\alpha_{i+1}(y)) = \beta_{i+1}(f_{i+1}(y)),$$

e portanto, $f_i(x) - f_i(x') \in \text{im}(\beta_{i+1})$. Isto mostra que $H_i(f)$ está bem definida. Somente resta provar que $H_i(f)$ é R -linear, mas isto segue facilmente pelo fato de que cada f_i é R -linear. \square

Uma seqüência $L_\bullet \xrightarrow{f} M_\bullet \xrightarrow{g} N_\bullet$ de complexos é dita ser exata, se $L_i \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{g_i} N_i$ é uma seqüência exata de R -módulos, para cada $i \in \mathbb{Z}$.

A seqüência de complexos $0 \rightarrow L_\bullet \xrightarrow{f} M_\bullet \xrightarrow{g} N_\bullet \rightarrow 0$ é uma seqüência exata curta se o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & L_{i+1} & \xrightarrow{f_{n+1}} & M_{i+1} & \xrightarrow{g_{n+1}} & N_{i+1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \alpha_{i+1} & & \downarrow \beta_{i+1} & & \downarrow \gamma_{i+1} \\
 0 & \longrightarrow & L_i & \xrightarrow{f_i} & M_i & \xrightarrow{g_i} & N_i \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \alpha_i & & \downarrow \beta_i & & \downarrow \gamma_i \\
 0 & \longrightarrow & L_{i-1} & \xrightarrow{f_{i-1}} & M_{i-1} & \xrightarrow{g_{i-1}} & N_{i-1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

onde as linhas são seqüências exatas curtas de R -módulos e de R -homomorfismos e as colunas são os complexos de cadeias L_\bullet , M_\bullet e N_\bullet , respectivamente.

Para cada seqüência de complexos de cadeias $0 \rightarrow L_\bullet \xrightarrow{f} M_\bullet \xrightarrow{g} N_\bullet \rightarrow 0$, existe uma seqüência exata longa de módulos de homologia:

$$\cdots \rightarrow H_{i+1}(N_\bullet) \xrightarrow{\Phi_{i+1}} H_i(L_\bullet) \xrightarrow{H_i(f)} H_i(M_\bullet) \xrightarrow{H_i(g)} H_i(N_\bullet) \xrightarrow{\Phi_i} H_{i-1}(L_\bullet) \rightarrow \cdots$$

Para garantir a existência desta seqüência exata longa, faremos antes uma seqüência

de alguns lemas auxiliares. Mas, primeiramente notemos que, se o seguinte diagrama for comutativo

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & \ker(\alpha) & \longrightarrow & M_1 & \xrightarrow{\alpha} & M_2 & \longrightarrow & \operatorname{coker}(\alpha) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \bar{f} \downarrow \text{dotted} & & f \downarrow & & g \downarrow & & \bar{g} \downarrow \text{dotted} & & \\
 0 & \longrightarrow & \ker(\beta) & \longrightarrow & N_1 & \xrightarrow{\beta} & N_2 & \longrightarrow & \operatorname{coker}(\beta) & \xrightarrow{i} & 0
 \end{array}$$

então existem aplicações induzidas $\bar{f} : \ker(\alpha) \rightarrow \ker(\beta)$ e $\bar{g} : \operatorname{coker}(\alpha) \rightarrow \operatorname{coker}(\beta)$ definidas por $\bar{f}(x) = f(x)$ para todo $x \in \ker(\beta)$ e $\bar{g}(x + \operatorname{im}(\alpha)) = x + \operatorname{im}(\beta)$, respectivamente.

Lema 1.3.8. (Lema da Serpente) *Seja*

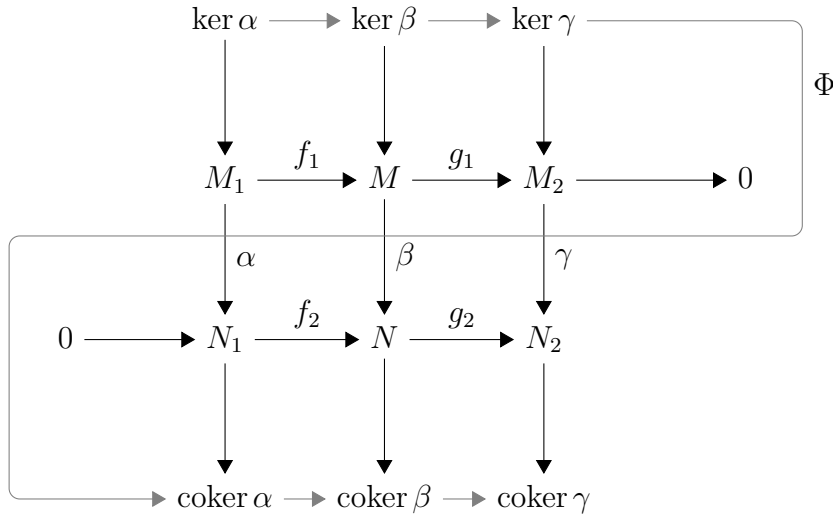
$$\begin{array}{ccccccc}
 M_1 & \xrightarrow{f_1} & M & \xrightarrow{g_1} & M_2 & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\
 0 & \longrightarrow & N_1 & \xrightarrow{f_2} & N & \xrightarrow{g_2} & N_2
 \end{array}$$

um diagrama comutativo com linhas exatas de R -módulos e de R -homomorfismos. Então, existe uma aplicação R -linear $\Phi : \ker(\gamma) \rightarrow \operatorname{coker}(\alpha)$ tal que a seqüência de R -módulos, dada por:

$$\ker(\alpha) \xrightarrow{\bar{f}_1} \ker(\beta) \xrightarrow{\bar{g}_1} \ker(\gamma) \xrightarrow{\Phi} \operatorname{coker}(\alpha) \xrightarrow{\bar{f}_2} \operatorname{coker}(\beta) \xrightarrow{\bar{g}_2} \operatorname{coker}(\gamma)$$

é uma seqüência exata.

O nome de tal resultado se dá pela semelhança do diagrama com uma serpente:



Demonstração. É fácil mostrar que cada sequência

$$\ker(\alpha) \xrightarrow{\bar{f}_1} \ker(\beta) \xrightarrow{\bar{g}_1} \ker(\gamma) \quad \text{e}$$

$$\text{coker}(\alpha) \xrightarrow{\bar{f}_2} \text{coker}(\beta) \xrightarrow{\bar{g}_2} \text{coker}(\gamma)$$

é exata, pois elas são formadas pelas aplicações dadas na sequência exata. Somente resta provar que Φ existe e provar que é exato em $\ker(\gamma)$ e em $\text{coker}(\alpha)$.

- Definição de Φ :

A aplicação $\Phi : \ker(\gamma) \rightarrow \text{coker}(\alpha)$ é definida como segue. Se $z \in \ker(\gamma)$, seja $x \in M$ tal que $g_1(x) = z$. Então $\gamma \circ g_1(x) = 0$, logo $g_2 \circ \beta(x) = 0$. Segue que $\beta(x) \in \ker(g_2) = \text{im}(f_2)$. Como f_2 é injetiva, existe um único $y \in N_1$ tal que $f_2(y) = \beta(x)$. Agora, definamos $\Phi(z) = y + \text{im}(\alpha)$. Para demonstrar que Φ está bem definida, precisamos demonstrar que Φ independe da escolha de x . Seja $x' \in M$ um outro elemento tal que $g_1(x') = z$ e suponhamos que $y' \in N_1$ é tal que $f_2(y') = \beta(x')$. Então, $x - x' \in \ker(g_1) = \text{im}(f_1)$. Logo, existe $w \in M_1$ tal que $f_1(w) = x - x'$. Com isto temos,

$$f_2(y) - f_2(y') = \beta(x) - \beta(x') = \beta \circ f_1(w) = f_2 \circ \alpha(w)$$

o qual dá $y - y' - \alpha(w) \in \ker(f_2) = 0$. Portanto, $y - y' = \alpha(w) \in \text{im}(\alpha)$. Logo $y + \text{im}(\alpha) = y' + \text{im}(\alpha)$. Como cada função envolvida é um R -homomorfismo, então Φ é um R -homomorfismo.

- Prova de exatidão em $\ker(\gamma)$ e em $\text{coker}(\alpha)$:

Seja $z \in \ker(\gamma)$ tal que $z \in \ker(\Phi)$ e suponha que $x \in M$ e $y \in N_1$ são como acima. Então $0 = \Phi(z) = y + \text{im}(\alpha)$, logo $y \in \text{im}(\alpha)$. Disto, existe $u \in M_1$ tal que $\alpha(u) = y$. Assim, $\beta \circ f_1(u) = f_2 \circ \alpha(u) = f_2(y) = \beta(x)$. Então temos que $x - f_1(u) \in \ker(\beta)$. Se $x - f_1(u) = w \in \ker(\beta)$, então $z = g_1(x) = g_1(x) - g_1 \circ f_1(u) = g_1(w)$, portanto $z \in \text{im}(\bar{g}_1)$, assim $\ker(\Phi) \subseteq \text{im}(\bar{g}_1)$.

Reciprocamente, seja $z \in \ker(\gamma)$ tal que $z \in \text{im}(\bar{g}_1) \subseteq \text{im}(g_1)$. Então existe um $x \in \ker(\beta)$ tal que $g_1(x) = z$ e $y \in N_1$ tal que $f_2(y) = \beta(x) = 0$. Assim, $y = 0$, pois f_2 é injetiva e temos que $\Phi(z) = y + \text{im}(\alpha) = 0$. Com isto segue que $\text{im}(\bar{g}_1) \subseteq \text{Ker}(\Phi)$. Portanto, temos $\text{im}(\bar{g}_1) = \ker(\Phi)$.

Deixamos como exercício mostrar que a sequência é exata em $\text{coker}(\alpha)$.

□

Lema 1.3.9. *Se M_\bullet é um complexo de R -módulos e R -homomorfismos, então a aplicação $\alpha_i : M_i \rightarrow M_{i-1}$ induz um homomorfismo $\bar{\alpha}_i : \text{coker}(\alpha_{i+1}) \rightarrow \text{ker}(\alpha_{i-1})$ de R -módulos. Além disso, $H_i(M_\bullet) = \text{ker}(\bar{\alpha}_i)$ e $H_{i-1}(M_\bullet) = \text{coker}(\bar{\alpha}_i)$.*

Demonstração. Como $\text{im}(\alpha_{i+1}) \subseteq \text{ker}(\alpha_i)$, podemos definir um R -homomorfismo sobrejetivo $\bar{\alpha}_i : M_i/\text{im}(\alpha_{i+1}) \rightarrow M_i/\text{ker}(\alpha_i)$ da seguinte forma $x + \text{im}(\alpha_{i+1}) \mapsto x + \text{ker}(\alpha_i)$. Mas, pelo 1º teorema do isomorfismo, como $M_i/\text{ker}(\alpha_i) \cong \text{im}(\alpha_i) \subseteq \text{ker}(\alpha_{i-1})$, segue que nós temos a aplicação $\bar{\alpha}_i : \text{coker}(\alpha_{i+1}) \rightarrow \text{ker}(\alpha_{i-1})$.

Agora, $H_i(M_\bullet) = \frac{\text{ker}(\alpha_i)}{\text{im}(\alpha_{i+1})} = \text{ker}(\bar{\alpha}_i)$, pois a primeira igualdade segue da definição e a segunda do fato de $\bar{\alpha}_i$ ser sobrejetiva. Também temos que $H_{i-1}(M_\bullet) = \frac{\text{ker}(\alpha_{i-1})}{\text{im}(\alpha_i)} = \text{coker}(\bar{\alpha}_i)$, pois a primeira igualdade também segue da definição e a segunda igualdade pelo isomorfismo acima e a definição do conúcleo de $\bar{\alpha}_i$. □

No Lema da Serpente 1.3.8, se f_1 for injetiva e g_2 for sobrejetiva, então \bar{f}_1 é injetiva e \bar{g}_2 é sobrejetiva.

Consideremos uma sequência exata de complexos $0 \rightarrow L_\bullet \xrightarrow{f} M_\bullet \xrightarrow{g} N_\bullet \rightarrow 0$. Então, para cada $i \in \mathbb{Z}$ temos o seguinte diagrama comutativo com as linhas sendo sequências exatas curtas:

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & 0 & & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \ker(\alpha_i) & \longrightarrow & \ker(\beta_i) & \longrightarrow & \ker(\gamma_i) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & L_i & \longrightarrow & M_i & \longrightarrow & N_i \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow \alpha_i & & \downarrow \beta_i & & \downarrow \gamma_i \\
0 & \longrightarrow & L_{i-1} & \longrightarrow & M_{i-1} & \longrightarrow & N_{i-1} \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \text{coker}(\alpha_i) & \longrightarrow & \text{coker}(\beta_i) & \longrightarrow & \text{coker}(\gamma_i) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & 0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

Usando este diagrama e o Lema 1.3.9, conseguimos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & & & & H_i(N_\bullet) = \ker(\bar{\gamma}_i) \\
& & & & & & \downarrow \\
& & \text{coker}(\alpha_{i+1}) & \longrightarrow & \text{coker}(\beta_{i+1}) & \longrightarrow & \text{coker}(\gamma_{i+1}) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \ker(\alpha_{i-1}) & \longrightarrow & \ker(\beta_{i-1}) & \longrightarrow & \ker(\gamma_{i-1}) \\
& & \downarrow & & & & \\
& & H_{i-1}(L_\bullet) = \text{coker}(\bar{\alpha}_i) & & & &
\end{array}$$

para cada $i \in \mathbb{Z}$.

Assim, pelo Lema da Serpente 1.3.8 temos o R -homomorfismo conectante $\Phi_i : H_i(N_\bullet) \rightarrow H_{i-1}(L_\bullet)$.

Portanto, temos as seqüências exatas longas de R -módulos de homologia:

Teorema 1.3.10. *Considere a seqüência exata curta de complexos de cadeias*

$$0 \rightarrow L_\bullet \xrightarrow{f} M_\bullet \xrightarrow{g} N_\bullet \rightarrow 0.$$

Então, existe uma seqüência exata longa de R -módulos de homologia:

$$\cdots \rightarrow H_{i+1}(N_\bullet) \xrightarrow{\Phi_{i+1}} H_i(L_\bullet) \xrightarrow{H_i(f_\bullet)} H_i(M_\bullet) \xrightarrow{H_i(g_\bullet)} H_i(N_\bullet) \xrightarrow{\Phi_i} H_{i-1}(L_\bullet) \rightarrow \cdots.$$

A aplicação Φ_i é um R -homomorfismo conectante de R -módulos de homologia, para cada $i \in \mathbb{Z}$.

1.4 Complexos Duplos

Definição 1.4.1. Um **módulo bigraduado** é uma família $M = (M_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$ duplamente indexada de R -módulos.

Definição 1.4.2. Sejam M, N dois R -módulos bigraduados e $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Uma **aplicação bigraduada de grau** (a, b) , denotada por $f : M \rightarrow N$, é uma família de R -homomorfismos $f : (f_{p,q} : M_{p,q} \rightarrow N_{p+a, q+b})_{(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$. Dizemos que (a, b) é o **(bi)grau** de f e denotamos por $\text{grau}(f) = (a, b)$.

Definição 1.4.3. Sejam M e M' dois R -módulos bigraduados. Dizemos que M' é um **submódulo bigraduado** de M , denotado simplesmente por $M' \subseteq M$, se cada $M'_{p,q}$ é um submódulo de $M_{p,q}$, para todo $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Se M' é um submódulo de M , podemos definir o quociente $M/M' = (M_{p,q}/M'_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$. Se $f : M \rightarrow N$ é uma aplicação bigraduada com $\text{grau}(f) = (a, b)$, então o **núcleo** de f é o módulo bigraduado $\ker(f) = (\ker(f_{p,q}))_{(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} \in M$ e a **imagem** de f é o módulo bigraduado $\text{im}(f) = (\text{im}(f_{p-a, q-b}))_{(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} \in N$. Uma sequência de aplicações graduadas

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

é exata se $\text{im}(f) = \ker(g)$, isto é, se $\text{im}(f_{p-a, q-b}) = \ker(g_{p,q}) \forall (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Definição 1.4.4. Um **módulo bigraduado diferencial** é um par ordenado (M, d) , em que M é um módulo bigraduado e $d : M \rightarrow M$ é uma aplicação bigraduada com $dd = 0$. A aplicação d é denominada **diferencial**. Sendo (a, b) o grau de d , definimos a **homologia** $H(M, d)$ como o módulo bigraduado cujo (p, q) -ésimo termo é

$$H(M, d)_{(p,q)} = \frac{\ker(d_{p,q})}{\text{im}(d_{p-a, q-b})}.$$

Definição 1.4.5. Um **complexo duplo** é uma terna ordenada (M, d', d'') , onde $M = (M_{p,q})$ é um módulo bigraduado, $d', d'' : M \rightarrow M$ são aplicações bigraduadas cujos graus são, respectivamente, $(-1, 0)$ e $(0, -1)$ e que satisfazem:

1. $d'd' = 0$;
2. $d''d'' = 0$;
3. $d'_{p,q-1}d''_{p,q} + d''_{p-1,q}d'_{p,q} = 0$

Uma representação esquemática seria:

$$\begin{array}{ccc}
 M_{p-2,q-1} & \xleftarrow{d'_{p-1,q+1}} & M_{p-1,q+1} \\
 & & \downarrow d''_{p-1,q+1} \\
 & & M_{p-1,q} \xleftarrow{d'_{p,q}} M_{p,q} \\
 & \downarrow d''_{p-1,q} & \downarrow d''_{p,q} \\
 & M_{p-1,q-1} & \xleftarrow{d'_{p,q-1}} M_{p,q-1}
 \end{array}$$

Um complexo duplo pode ser esquematizado como uma família de R -módulos no p, q -plano, onde cada $M_{p,q}$ se situa no ponto (p, q) do diagrama. Para cada p, q , o diferencial $d'_{p,q} : M_{p,q} \rightarrow M_{p-1,q}$ aponta para a esquerda, e o diferencial $d''_{p,q} : M_{p,q} \rightarrow M_{p,q-1}$ aponta pra baixo. Desta forma, obtemos os complexos $M_{*,q}$ e $M_{p,*}$. A identidade $d'_{p,q-1}d''_{p,q} = -d''_{p-1,q}d'_{p,q}$ nos diz que cada quadrado do diagrama é anticomutativo.

Definição 1.4.6. *Se (M, d', d'') é um complexo duplo, então seu **complexo total**, denotado por $\text{Tot}(M)$, é o complexo cujo n -ésimo termo é:*

$$\text{Tot}(M)_n = \bigoplus_{p+q=n} M_{p,q}$$

e com diferenciais $D_n : \text{Tot}(M)_n \rightarrow \text{Tot}(M)_{n-1}$ dados por

$$D_n = \sum_{p+q=n} (d'_{p,q} + d''_{p,q})$$

Lema 1.4.7. *Se (M, d', d'') é um complexo duplo, então $(\text{Tot}(M), D)$ é um complexo.*

Demonstração. Os somandos de $\text{Tot}(M)$ são os módulos $M_{p,q}$ com $p + q = n$. Note que $\text{im}(d'_{p,q}) \subseteq M_{p-1,q}$ e $\text{im}(d''_{p,q}) \subseteq M_{p,q-1}$. Em ambos os casos, a soma dos índices é $p + q - 1 = n - 1$. Sendo assim, $\text{im}(D) \subseteq \text{Tot}(M)_{n-1}$. Resta mostrar que D é um diferencial.

De fato,

$$DD = \sum_{p,q} (d' + d'')(d' + d'') = \sum d'd' + \sum (d'd'' + d''d') + \sum d''d'' = 0,$$

uma vez que cada parcela é nula.

□

1.5 Funtores

A teoria de funtores é muito importante para fazer uma conexão entre muitas subáreas da matemática, tais como álgebra comutativa, geometria algébrica e topologia algébrica. O funtor leva informações de uma tal categoria para outra preservando determinadas propriedades interessantes. Podemos pensar num funtor como uma generalização de morfismos. Nesta seção, descreveremos os funtores da categoria dos R -módulos (\mathbf{Mod}_R).

Definição 1.5.1. *Sejam R, R' anéis. Um **funtor aditivo covariante** de (da categoria de) R -módulos para (a categoria de) R' -módulos é entendido como sendo*

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\bullet) : (M \xrightarrow{h} N) \rightsquigarrow (\mathfrak{F}(M) \xrightarrow{\mathfrak{F}(h)} \mathfrak{F}(N)),$$

o qual, para cada R -módulo M , leva à um R' -módulo $\mathfrak{F}(M)$ e, para cada R -homomorfismo $h : M \rightarrow N$, leva à um R' -homomorfismo $\mathfrak{F}(h) : \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(N)$ tal que valem as seguintes propriedades:

1. $\mathfrak{F}(\text{id}_M) = \text{id}_{\mathfrak{F}(M)}$ para cada R -módulo M ;
2. $\mathfrak{F}(\ell \circ h) = \mathfrak{F}(\ell) \circ \mathfrak{F}(h)$, onde $h \in \text{Hom}_R(M, N)$ e $\ell \in \text{Hom}_R(N, P)$;
3. $\mathfrak{F}(\ell + h) = \mathfrak{F}(\ell) + \mathfrak{F}(h)$, onde $\ell, h \in \text{Hom}_R(M, N)$.

Definição 1.5.2. *Sejam R, R' anéis. Um **funtor aditivo contravariante** de (da categoria de) R -módulos para (a categoria de) R' -módulos é entendido como sendo*

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\bullet) : (M \xrightarrow{h} N) \rightsquigarrow (\mathfrak{F}(N) \xrightarrow{\mathfrak{F}(h)} \mathfrak{F}(M)),$$

o qual, para cada R -módulo M , leva à um R' -módulo $\mathfrak{F}(M)$ e para cada R -homomorfismo $h : M \rightarrow N$, leva à um R' -homomorfismo $\mathfrak{F}(h) : \mathfrak{F}(N) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$ tal que valem as seguintes propriedades:

1. $\mathfrak{F}(\text{id}_M) = \text{id}_{\mathfrak{F}(M)}$ para cada R -módulo M ;
2. $\mathfrak{F}(\ell \circ h) = \mathfrak{F}(h) \circ \mathfrak{F}(\ell)$, onde $h \in \text{Hom}_R(M, N)$ e $\ell \in \text{Hom}_R(N, P)$;
3. $\mathfrak{F}(\ell + h) = \mathfrak{F}(\ell) + \mathfrak{F}(h)$, onde $\ell, h \in \text{Hom}_R(M, N)$.

Exemplo 1.5.3. (Functor identidade) Partindo da categoria de R -módulos e R -homomorfismos para ela mesma, entendemos o functor identidade como sendo

$$\text{Id} = \text{Id}(\bullet) : (M \xrightarrow{h} N) \rightsquigarrow (M \xrightarrow{\text{Id}(h)} N),$$

o qual, para cada R -módulo M leva ao R -módulo $\text{Id}(M) = M$ e para cada R -homomorfismo $h : M \rightarrow N$ leva ao homomorfismo $h : M \rightarrow N$ de R -módulos.

Exemplo 1.5.4. (Functor localização) Seja $S \subset R$ um conjunto multiplicativamente fechado de R e seja $\eta_S : R \rightarrow S^{-1}R$ o homomorfismo canônico definido por $x \mapsto \frac{xs}{s}$ para todo $x \in R$ e qualquer $s \in S$. Entendemos como sendo o functor localização com respeito à η_S de R -módulos para $S^{-1}R$ -módulos

$$S^{-1} = S^{-1}(\bullet) : (M \xrightarrow{h} N) \rightsquigarrow (S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}(h)} S^{-1}N),$$

o qual, para cada R -módulo M leva a um $S^{-1}R$ -módulo $S^{-1}M$ e para cada R -homomorfismo $h : M \rightarrow N$ leva a um $S^{-1}R$ -homomorfismo $S^{-1}h : S^{-1}M \rightarrow S^{-1}N$, de $S^{-1}R$ -módulos.

Exemplo 1.5.5. (Functor contravariante $\text{Hom}_R(-, X)$) Seja X um R -módulo fixo. Então, $\text{Hom}_R(-, X)$ é um functor da categoria de R -módulos para a categoria de R -módulos, que entendemos como sendo

$$\text{Hom}_R(-, X) = \text{Hom}_R(\bullet, X) : (M \xrightarrow{f} N) \rightsquigarrow (\text{Hom}_R(N, X) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}_R(M, X)),$$

o qual, para cada R -módulo M , leva a um R -módulo $\text{Hom}_R(M, X)$ e para cada R -homomorfismo $f : M \rightarrow N$ leva a um R -homomorfismo $\text{Hom}_R(f, X) : \text{Hom}_R(N, X) \rightarrow \text{Hom}_R(M, X)$, onde $\text{Hom}_R(f, X) := h \circ f$, para todo $h \in \text{Hom}_R(N, X)$.

Exemplo 1.5.6. (Functor covariante $\text{Hom}_R(X, -)$) Seja X um R -módulo fixo. Então, $\text{Hom}_R(X, -)$ é um functor da categoria de R -módulos para a categoria de R -módulos, que entendemos como sendo

$$\text{Hom}_R(X, -) = \text{Hom}_R(X, \bullet) : (M \xrightarrow{f} N) \rightsquigarrow (\text{Hom}_R(X, M) \xrightarrow{f_*} \text{Hom}_R(X, N)),$$

o qual, para cada R -módulo M , leva a um R -módulo $\text{Hom}_R(X, M)$ e para cada R -homomorfismo $f : M \rightarrow N$ leva a um R -homomorfismo $\text{Hom}_R(X, f) : X \rightarrow N$, onde $\text{Hom}_R(X, f) := f \circ h$, para todo $h \in \text{Hom}_R(X, M)$.

Definição 1.5.7. *Sejam $\mathfrak{F}, \mathfrak{G} : \mathbf{Mod}_R \rightarrow \mathbf{Mod}_S$ dois funtores e suponha que para cada $M \in \mathbf{Mod}_R$ existe um homomorfismo $\eta_M : \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathfrak{G}(M)$ em \mathbf{Mod}_S tal que para cada R -homomorfismo $f : M \rightarrow N$ o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{F}(M) & \xrightarrow{\eta_M} & \mathfrak{G}(M) \\ \mathfrak{F}(f) \downarrow & & \downarrow \mathfrak{G}(f) \\ \mathfrak{F}(N) & \xrightarrow{\eta_N} & \mathfrak{G}(N) \end{array}$$

é comutativo. A classe de homomorfismos $\eta = \{\eta_M : \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathfrak{G}(M)\}$ no \mathbf{Mod}_R é chamado de **transformação natural** de \mathfrak{F} para \mathfrak{G} . Se η_M é um isomorfismo em \mathbf{Mod}_S para cada $M \in \mathbf{Mod}_R$, então η é chamado de **isomorfismo natural** de \mathfrak{F} e \mathfrak{G} , denotado por $\mathfrak{F} \cong \mathfrak{G}$.

1.5.1 Funtores Derivados à Esquerda

Definição 1.5.8. *Um functor \mathfrak{F} é dito **exato** se ele preservar a exatidão de seqüências, ou seja, sempre que*

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{\psi} M \xrightarrow{\phi} N \longrightarrow 0$$

for uma seqüência exata, então a seqüência

$$0 \longrightarrow \mathfrak{F}(L) \xrightarrow{\mathfrak{F}(\psi)} \mathfrak{F}(M) \xrightarrow{\mathfrak{F}(\phi)} \mathfrak{F}(N) \longrightarrow 0$$

também é exata.

Definição 1.5.9. *Diremos que um functor é exato à direita (analogamente à esquerda) sempre que*

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{\psi} M \xrightarrow{\phi} N \longrightarrow 0$$

for uma seqüência exata, então a seqüência

$$\mathfrak{F}(L) \xrightarrow{\mathfrak{F}(\psi)} \mathfrak{F}(M) \xrightarrow{\mathfrak{F}(\phi)} \mathfrak{F}(N) \longrightarrow 0$$

também é exata (neste caso, o módulo nulo encontra-se à direita).

Dado um R -módulo A , escolhamos uma resolução projetiva deletada de A :

$$P_A = \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \longrightarrow 0$$

Então, aplicamos o funtor exato à direita \mathfrak{F} à P_A e obtemos o complexo $\mathfrak{F}(P_A)$:

$$\mathfrak{F}(P_A) = \cdots \longrightarrow \mathfrak{F}(P_2) \xrightarrow{\mathfrak{F}(d_2)} \mathfrak{F}(P_1) \xrightarrow{\mathfrak{F}(d_1)} \mathfrak{F}(P_0) \longrightarrow 0.$$

Agora, para cada R -módulo A , os funtores

$$(\mathcal{L}_n \mathfrak{F})A := H_n(\mathfrak{F}(P_A))$$

são chamados de **funtores derivados à esquerda** de \mathfrak{F} .

Pela construção que fizemos acima, temos a impressão de que a definição de um funtor exato à esquerda depende da resolução projetiva considerada. Porém, o próximo resultado nos diz que tal funtor está bem definido:

Proposição 1.5.10. *Seja A um R -módulo e suponha que P_A e \tilde{P}_A sejam duas resoluções projetivas deletadas de A cujos funtores derivados à esquerda são denotados por $\mathcal{L}_n \mathfrak{F}$ e $\tilde{\mathcal{L}}_n \mathfrak{F}$, respectivamente. Então*

$$(\mathcal{L}_n \mathfrak{F})A \cong (\tilde{\mathcal{L}}_n \mathfrak{F})A \quad \text{para todo } n \geq 0.$$

Demonstração. Vide [6] páginas 346 e 347.

□

O próximo resultado nos traz a ideia de que módulos projetivos funcionam como constantes para funtores derivados exatos à direita (como se a derivada de um módulo fosse “nula”):

Proposição 1.5.11. *Se \mathfrak{F} um funtor aditivo exato à direita, então $\mathfrak{L}_0\mathfrak{F}(M) \cong \mathfrak{F}(M)$, para cada R -módulo M . Além disso, $\mathfrak{L}_0\mathfrak{F}$ e \mathfrak{F} são funtores naturalmente equivalentes. Se M é um R -módulo projetivo, então $\mathfrak{L}_i\mathfrak{F}(M) = 0$, para todo $i = 1, 2, \dots$.*

Demonstração. Se P_\bullet é uma resolução projetiva do R -módulo M , então

$$P_\bullet = \dots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\alpha_1} P_0 \xrightarrow{\alpha_0} M \longrightarrow 0,$$

é sequência exata, por definição. Como \mathfrak{F} é exato à direita, temos que

$$\dots \longrightarrow \mathfrak{F}(P_1) \xrightarrow{\mathfrak{F}(\alpha_1)} \mathfrak{F}(P_0) \xrightarrow{\mathfrak{F}(\alpha_0)} \mathfrak{F}(M) \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata (note que, estamos considerando que \mathfrak{F} é um funtor covariante). Agora, consideremos

$$\dots \longrightarrow \mathfrak{F}(P_1) \xrightarrow{\mathfrak{F}(\alpha_1)} \mathfrak{F}(P_0) \longrightarrow 0$$

e calculemos:

$$\mathfrak{L}_0\mathfrak{F}(M) = H_0(\mathfrak{F}(P)) = \frac{\ker(\mathfrak{F}(P_0) \rightarrow 0)}{\operatorname{im}(\mathfrak{F}(\alpha_1))} = \frac{\mathfrak{F}(P_0)}{\ker(\mathfrak{F}(\alpha_0))} \cong \mathfrak{F}(M)$$

pelo Primeiro Teorema de Isomorfismo. Com isto, existe um isomorfismo de S -módulos $\eta_M : \mathfrak{L}_0\mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$.

Afirmamos que a família $\{\eta_M : \mathfrak{L}_0\mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)\}$ constituída por estes R -isomorfismos naturais nos fornece um isomorfismo natural $\eta : \mathfrak{L}_0\mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}$. De fato, seja $f : M \rightarrow N$ um homomorfismo de R -módulos e suponhamos que Q_\bullet é uma resolução projetiva do R -módulo N . Se $f : P_M \rightarrow Q_N$ é uma aplicação de complexos gerada por f , então temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{L}_0\mathfrak{F}(M) & \xrightarrow{\eta_M} & \mathfrak{F}(M) \\ \mathfrak{L}_0\mathfrak{F}(f) \downarrow & & \downarrow \mathfrak{F}(f) \\ \mathfrak{L}_0\mathfrak{F}(N) & \xrightarrow{\eta_N} & \mathfrak{F}(N) \end{array}$$

onde η_M e η_N são isomorfismos de R -módulos. Assim, $\mathfrak{L}_0\mathfrak{F}$ e \mathfrak{F} são funtores naturalmente equivalentes (isto segue somente pela definição de equivalência natural).

Se M é um R -módulo projetivo, então seja:

$$P_\bullet : \dots \rightarrow 0 \rightarrow M \xrightarrow{\operatorname{Id}_M} M \rightarrow 0,$$

uma resolução projetiva de M (observe que como M é um R -módulo projetivo, todos os R -módulos colocados para trás de M na resolução anterior podem ser considerados como os R -módulos nulos). Com isto, temos um complexo de cadeias:

$$\mathfrak{F}(P_M) : \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathfrak{F}(M) \longrightarrow 0,$$

e conseguimos, portanto, que $\mathfrak{L}_i \mathfrak{F}(M) = 0$, para todo $i = 1, 2, 3, \dots$ □

1.5.2 Funtores Tor e tor

O objetivo desta seção é encontrar o funtor derivado à esquerda relacionado aos funtores $\mathfrak{T} : \square \otimes_R B$ e $\mathfrak{S} : A \otimes_R \square$.

Proposição 1.5.12. *Os funtores \mathfrak{T} e \mathfrak{S} são exatos à direita.*

Demonstração. Vide [6] páginas 84 e 85. □

Definição 1.5.13. *Se B é um R -módulo e $\mathfrak{T} : \square \otimes_R B$, definimos:*

$$\mathrm{Tor}_n^R(\square, B) = L_n(\mathfrak{T}).$$

Vamos dar uma descrição completa do funtor $\mathrm{Tor}_n^R(\square, B)$. Para isso, escolhamos uma resolução projetiva deletada de A :

$$P_A = \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \longrightarrow 0.$$

Aplicando o funtor \mathfrak{T} , teremos:

$$P_A \otimes_R B = \cdots \longrightarrow P_2 \otimes_R B \xrightarrow{d_2 \otimes 1} P_1 \otimes_R B \xrightarrow{d_1 \otimes 1} P_0 \otimes_R B \longrightarrow 0.$$

Então:

$$\mathrm{Tor}_n^R(A, B) = H_n(P_A \otimes_R B)$$

Definição 1.5.14. *Seja A um R -módulo e $\mathfrak{S} : A \otimes_R \square$, definimos $\mathrm{tor}_n^R(A, \square) = L_n(\mathfrak{S})$.*

Vamos dar uma descrição completa do funtor $\text{tor}_n^R(A, \square)$. Para isso, escolhamos uma resolução projetiva deletada de B:

$$Q_B = \cdots \longrightarrow Q_2 \xrightarrow{d_2} Q_1 \xrightarrow{d_1} Q_0 \longrightarrow 0.$$

Aplicando o funtor \mathfrak{S} , teremos

$$A \otimes_R Q_B = \cdots \longrightarrow A \otimes_R Q_2 \xrightarrow{1 \otimes d_2} A \otimes_R Q_1 \xrightarrow{1 \otimes d_1} A \otimes_R Q_0 \longrightarrow 0.$$

Com isso,

$$\text{tor}_n^R(A, B) = H_n(A \otimes_R Q_B).$$

Definição 1.5.15. Um R -módulo A é dito **plano** se os funtores $\mathfrak{S} : A \otimes_R \square$ e $\mathfrak{T} : \square \otimes_R B$ são exatos.

Proposição 1.5.16. Todo R -módulo projetivo é plano.

Demonstração. Vide [6] página 132. □

Lema 1.5.17. Seja A um módulo plano, então se

$$L \xrightarrow{\psi} M \xrightarrow{\phi} N$$

é exata em M , então

$$A \otimes_R L \xrightarrow{1 \otimes \psi} A \otimes_R M \xrightarrow{1 \otimes \phi} A \otimes_R N$$

é exata em $A \otimes_R M$.

Demonstração. A partir da sequência dada, obtemos a seguinte sequência exata:

$$0 \longrightarrow \text{im}(\psi) \longrightarrow M \longrightarrow \text{im}(\phi) \longrightarrow 0.$$

Como A é um módulo plano, nós obtemos a seguinte sequência exata curta

$$0 \longrightarrow A \otimes_R \text{im}(\psi) \longrightarrow A \otimes_R M \longrightarrow A \otimes_R \text{im}(\phi) \longrightarrow 0.$$

Portanto:

$$\frac{\ker(1 \otimes \phi)}{\operatorname{im}(1 \otimes \psi)} = \frac{A \otimes_R \ker(\phi)}{A \otimes_R \operatorname{im}(\psi)} = 0.$$

□

O resultado similar para o funtor $\mathfrak{T} : \square \otimes_R B$ também vale.

Sequências Espectrais

Neste capítulo, veremos as sequências espectrais de um ponto de vista puramente algébrico, percorrendo um caminho cuja caracterização não dependa de conceitos inerentes à topologia e geometria. Na seção 1, traremos a definição de uma filtração de um complexo e como fabricar, a partir de tais filtrações, um par exato e a partir disso obter uma sequência espectral. Na seção 2, discutiremos as sequências espectrais e mostraremos que a sequência espectral que surge de uma filtração de um complexo converge para a homologia do complexo. Na seção 3, redirecionaremos nosso foco ao caso do complexo total de um complexo duplo e exibiremos como encontrar as duas primeiras páginas da sequência espectral que surge de tais filtrações usando a homologia.

2.1 Filtrações e Pares Exatos

Uma das formas de se estudar um grupo é recorrendo à ferramenta de *séries normais*. Relembrando, uma sequência de subgrupos $(G_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $G_i \subseteq G$, é uma **série normal** se

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq G_2 \supseteq \cdots \supseteq G_n = \{e\}$$

onde cada G_{i+1} é normal em G_i . Os grupos fatores dessa série normal são

$$\frac{G_0}{G_1}, \frac{G_1}{G_2}, \dots, \frac{G_{n-1}}{G_n}.$$

Os grupos fatores de uma série normal de um grupo G podem não determinar G . Entretanto, algumas informações podem ser adquiridas a partir dos grupos fatores: se G for finito, então $|G| = \prod_i |G_i/G_{i+1}|$. Vamos generalizar essa noção para módulos.

Definição 2.1.1. Uma **filtração** de um R -módulo M é uma família $(M_p)_{p \in \mathbb{Z}}$ de submódulos de M tais que

$$\cdots \subseteq M_{p-1} \subseteq M_p \subseteq M_{p+1} \subseteq \cdots.$$

Para cada $p \in \mathbb{Z}$, o módulo $\frac{M_p}{M_{p-1}}$ é chamado de **módulo fator** da filtração.

Definição 2.1.2. Uma **filtração** de um complexo (C, d) é uma seqüência de submódulos graduados $(F^p(C))_{p \in \mathbb{Z}}$ de C tais que

$$\cdots \subseteq F^{p-1}(C) \subseteq F^p(C) \subseteq F^{p+1}(C) \subseteq \cdots$$

que satisfazem

$$d : (F^p(C))_n \longrightarrow (F^p(C))_{n-1}$$

$\forall n, p \in \mathbb{Z}$.

Neste caso, os fatores são $\cdots, \frac{F^p(C)}{F^{p-1}(C)}, \frac{F^{p+1}(C)}{F^p(C)}, \cdots$. Para simplificar a notação, denotaremos $(F^p(C))_n$ por F_n^p . Podemos dizer que uma filtração de um complexo C é um diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & F_{n+1}^{p-1} & \longrightarrow & F_{n+1}^p & \longrightarrow & F_{n+1}^{p+1} \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & F_n^{p-1} & \longrightarrow & F_n^p & \longrightarrow & F_n^{p+1} \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & F_{n-1}^{p-1} & \longrightarrow & F_{n-1}^p & \longrightarrow & F_{n-1}^{p+1} \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

As aplicações horizontais são inclusões e as aplicações verticais são as restrições de d aos F_n^p . A n -ésima linha forma uma filtração de C_n .

Definição 2.1.3. Seja (M, d', d'') um complexo duplo. A **primeira filtração** (ou **filtração vertical**) de $\text{Tot}(M)$ é dada por

$$({}^I F^p(\text{Tot}(M)))_n = \bigoplus_{i \leq p} M_{i, n-i} = \cdots \bigoplus M_{p-2, q+2} \bigoplus M_{p-1, q+1} \bigoplus M_{p, q}.$$

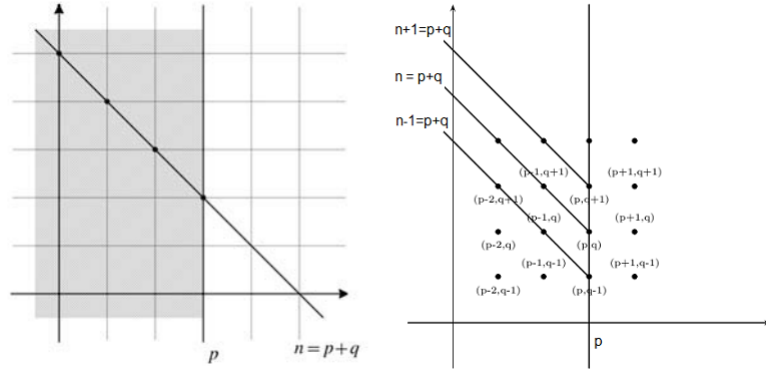


Figura 2.1: Filtração vertical.

Usando a convenção $n = p + q$, temos:

$$\dots \subseteq ({}^I F^{p-1}(\text{Tot}(M)))_n \subseteq ({}^I F^p(\text{Tot}(M)))_n \subseteq ({}^I F^{p+1}(\text{Tot}(M)))_n \subseteq \dots$$

uma filtração de $\text{Tot}(M)_n$.

Definição 2.1.4. *Seja (M, d', d'') um complexo duplo. A **segunda filtração** (ou **filtração horizontal**) de $\text{Tot}(M)$ é dada por*

$$({}^{II} F^p(\text{Tot}(M)))_n = \bigoplus_{j \leq p} M_{n-j, j} = \dots \bigoplus M_{q+2, p-2} \bigoplus M_{q+1, p-1} \bigoplus M_{q, p}.$$

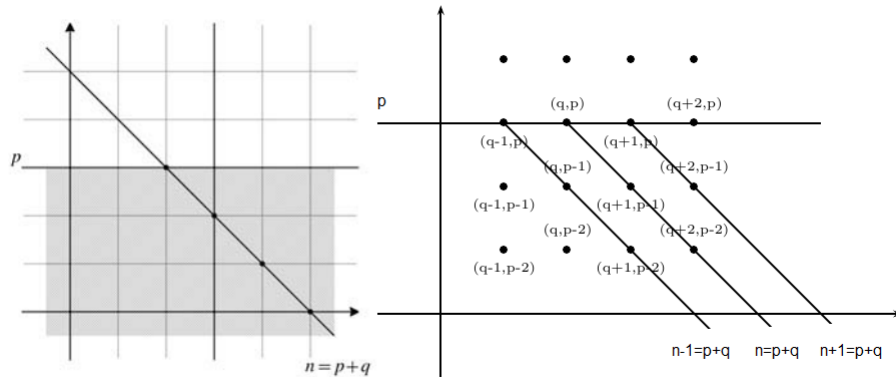


Figura 2.2: Filtração horizontal.

Do modo como foi feito anteriormente, obtemos uma filtração de $\text{Tot}(M)_n$:

$$\dots \subseteq ({}^{II} F^{p-1}(\text{Tot}(M)))_n \subseteq ({}^{II} F^p(\text{Tot}(M)))_n \subseteq ({}^{II} F^{p+1}(\text{Tot}(M)))_n \subseteq \dots$$

Lema 2.1.5. $({}^IF^p)_{n \geq 0}$ e $({}^{II}F^p)_{n \geq 0}$ são subcomplexos de $\text{Tot}(M)$.

Demonstração. Vamos mostrar apenas que $({}^IF^p)_{n \geq 0}$ é um subcomplexo de $\text{Tot}(M)$, o outro é análogo. Sendo assim, temos que mostrar que D define uma aplicação diferencial de $(F^p(\text{Tot}(M)))_n$ em $(F^p(\text{Tot}(M)))_{n-1}$ (ou seja, que $D : (F^p(\text{Tot}(M)))_n \rightarrow (F^p(\text{Tot}(M)))_{n-1}$ é uma aplicação diferencial bem definida). De fato, reescrevendo $D_n = \sum_i D_{i,n-i} = \sum_i (d'_{i,n-i} + d''_{i,n-i})$ temos:

$$\begin{aligned} D_{i,n-i}(M_{i,n-i}) &= (d'_{i,n-i} + d''_{i,n-i})(M_{i,n-i}) \subseteq d'_{i,n-i}(M_{i,n-i}) + d''_{i,n-i}(M_{i,n-i}) \\ &\subseteq M_{i-1,n-i} \oplus M_{i,n-i-1} \subseteq ({}^IF^{p+1}(\text{Tot}(M)))_{n-1}. \end{aligned}$$

□

Definição 2.1.6. Seja (M, d', d'') um complexo duplo. O **transposto** de (M, d', d'') é o complexo duplo (M^t, δ', δ'') , onde $M^t_{p,q} = M_{q,p}$, $\delta'_{p,q} = d''_{q,p}$ e $\delta''_{p,q} = d'_{q,p}$.

Lema 2.1.7. Seja (M, d', d'') um complexo duplo. Então:

1. $\text{Tot}(M) = \text{Tot}(M^t)$ e,
2. A segunda filtração de $\text{Tot}(M)$ é igual à primeira filtração de $\text{Tot}(M^t)$, ou seja:

$$({}^{II}F^p(\text{Tot}(M)))_n = ({}^IF^p(\text{Tot}(M^t)))_n.$$

Demonstração. A demonstração consiste em manipular os índices.

- 1.

$$\text{Tot}(M^t)_n = \bigoplus_{p+q=n} M^t_{p,q} = \bigoplus_{p+q=n} M_{q,p} = \text{Tot}(M)_n.$$

- 2.

$$({}^{II}F^p(\text{Tot}(M)))_n = \bigoplus_{j \leq p} M_{n-j,j} = \bigoplus_{j \leq p} M^t_{j,n-j} = ({}^IF^p(\text{Tot}(M^t)))_n.$$

□

Existem vários meios para introduzir seqüências espectrais. Iremos definí-la a partir da construção natural de um *par exato*:

Definição 2.1.8. Um **par exato** é uma quintupla ordenada $(D, E, \alpha, \beta, \gamma)$, no qual D e E são módulos bigraduados, α, β, γ são aplicações bigraduadas de grau $(a, a'), (b, b'), (c, c')$, respectivamente, e cujo diagrama seguinte é exato em cada vértice:

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\alpha} & D \\ & \searrow \gamma & \swarrow \beta \\ & & E \end{array}$$

Ou seja, $\ker(\alpha) = \text{im}(\gamma)$, $\ker(\beta) = \text{im}(\alpha)$ e $\ker(\gamma) = \text{im}(\beta)$.

Um par exato é equivalente à uma coleção de seqüências exatas; para cada $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ temos uma seqüência exata:

$$\cdots \longrightarrow D_{p,q} \longrightarrow D_{p+a,q+a'} \longrightarrow E_{p+a+b,q+a'+b'} \longrightarrow D_{p+a+b+c,q+a'+b'+c'} \longrightarrow \cdots$$

Proposição 2.1.9. Cada filtração $(F^p(C))_{p \in \mathbb{Z}}$ de um complexo (C, d) determina um par exato cujas aplicações bigraduadas possuem os graus como no diagrama:

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\alpha (1,-1)} & D \\ & \searrow \gamma (-1,0) & \swarrow \beta (0,0) \\ & & E \end{array}$$

Demonstração. Para cada $p \in \mathbb{Z}$, temos as seqüências exatas curtas:

$$0 \longrightarrow F^{p-1}C \longrightarrow F^p \longrightarrow \frac{F^p}{F^{p-1}} \longrightarrow 0$$

que, de forma expandida, resulta em:

$$\begin{array}{ccccccc}
& \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 & \longrightarrow & F_{n+1}^{p-1} & \hookrightarrow & F_{n+1}^p & \twoheadrightarrow & \frac{F_{n+1}^p}{F_{n+1}^{p-1}} \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & F_n^{p-1} & \hookrightarrow & F_n^p & \twoheadrightarrow & \frac{F_n^p}{F_n^{p-1}} \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & F_{n-1}^{p-1} & \hookrightarrow & F_{n-1}^p & \twoheadrightarrow & \frac{F_{n-1}^p}{F_{n-1}^{p-1}} \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

Aplicando a homologia, temos a seguinte sequência exata longa:

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & H_{n+1}(F^{p-1}) & \longrightarrow & H_{n+1}(F^p) & \longrightarrow & H_{n+1}\left(\frac{F^p}{F^{p-1}}\right) \\
& & & & \searrow \delta & & \\
& & H_n(F^{p-1}) & \longrightarrow & H_n(F^p) & \longrightarrow & H_n\left(\frac{F^p}{F^{p-1}}\right) \\
& & & & \searrow \delta & & \\
& & H_{n-1}(F^{p-1}) & \longrightarrow & H_{n-1}(F^p) & \longrightarrow & H_{n-1}\left(\frac{F^p}{F^{p-1}}\right) \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

onde δ é a aplicação de conexão fornecida pelo Lema da Serpente. Juntando estas informações por meio de somas diretas, obtemos um par exato:

$$\begin{array}{ccc}
\bigoplus_{p+q=n} H_{p+q}(F^p) & \longrightarrow & \bigoplus_{p+q=n} H_{p+q}(F^p) \\
& \searrow & \swarrow \\
& \bigoplus_{p+q=n} H_{p+q}\left(\frac{F^p}{F^{p-1}}\right) &
\end{array}$$

Agora, para cada $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, definimos:

$$D_{p,q} = H_{p+q}(F^p), \quad E_{p,q} = H_{p+q}\left(\frac{F^p}{F^{p-1}}\right)$$

Então, obtemos a sequência exata longa:

$$\cdots \longrightarrow D_{p-1,q+2} \longrightarrow D_{p,q+1} \longrightarrow E_{p,q+1} \longrightarrow D_{p-1,q+1} \longrightarrow D_{p,q} \longrightarrow E_{p,q} \longrightarrow D_{p-1,q} \longrightarrow D_{p,q-1} \longrightarrow \cdots$$

que é equivalente ao par exato:

$$\begin{array}{ccc} D = \bigoplus_{p+q=n} D_{p,q} & \xrightarrow{\alpha} & D = \bigoplus_{p+q=n} D_{p,q} \\ & \searrow \gamma & \swarrow \beta \\ & E = \bigoplus_{p+q=n} E_{p,q} & \end{array}$$

cujas aplicações α , β e γ possuem os graus desejados.

□

Para obtermos as sequências espectrais, é necessário calcular uma sequência de *pares derivados* de determinados pares complexos. Para isso, é necessário definir:

Proposição 2.1.10. *Se $(D, E, \alpha, \beta, \gamma)$ é um par exato, então $d^1 = \beta\gamma$ é uma aplicação diferencial (de E em E) e existe um par exato $(D^2, E^2, \alpha^2, \beta^2, \gamma^2)$, chamado de **par exato derivado**, com $E^2 = H(E, d^1)$.*

$$\begin{array}{ccc} D^2 & \xrightarrow{\alpha^2} & D^2 \\ & \searrow \gamma^2 & \swarrow \beta^2 \\ & E^2 & \end{array}$$

Demonstração. Pelo que obtemos na proposição anterior, vamos assumir que os graus de α , β e γ são, respectivamente, $(1, -1)$, $(0, 0)$ e $(-1, 0)$. Definimos, então, a aplicação bigraduada $d^1 : E \rightarrow E$ por $d^1 = \beta\gamma$. Como $(D, E, \alpha, \beta, \gamma)$ é um par exato, temos que $\gamma\beta = 0$ e, assim, segue que $d^1 d^1 = (\beta\gamma)(\beta\gamma) = \beta(\gamma\beta)\gamma = 0$. Pela Proposição 1.3.3 (ajustada ao contexto aplicações bigraduadas), temos que o grau de d^1 é $(-1, 0)$. Definindo:

$$E^2 = H(E, d^1), \quad D^2 = \text{im}(\alpha) \subseteq D.$$

Com isso,

$$E_{p,q}^2 = \frac{\ker(d_{p,q}^1)}{\text{im}(d_{p+1,q}^1)} \text{ e } D_{p,q}^2 = \text{im}(\alpha_{p-1,q+1}) \subseteq D_{p,q}.$$

Definamos, agora, as aplicações bigraduadas:

- $\alpha^2 : D^2 \longrightarrow D^2$ é tal que: $\alpha^2 = \alpha|_{D^2}$, ou seja, $\alpha^2 = \alpha i$, onde $i : D^2 \longrightarrow D$ é a inclusão. Sendo assim, $\text{grau}(\alpha^2) = \text{grau}(\alpha)$. Se $x \in D_{p,q}^2$, então $x = \alpha(u)$, com $u \in D_{p-1,q+1}$. Assim:

$$\alpha_{p,q}^2 : x = \alpha(u) \longmapsto \alpha(x) = \alpha(\alpha(u))$$

- $\beta^2 : D^2 \longrightarrow E^2$ é definida como segue. Se $y \in D_{p,q}^2$, então $y = \alpha(v)$, para algum $v \in D_{p+1,q-1}$ e $\beta(v) \in \ker(d^1)$, pois $d^1(\beta(v)) = \beta((\gamma\beta)(v)) = 0$. Definimos, então,

$$\beta^2(y) = \beta^2(\alpha(v)) = \overline{\beta(v)}.$$

Note que:

$$\text{grau}(\beta) = \text{grau}(\beta^2) + \text{grau}(\alpha) \iff \text{grau}(\beta^2) = (0,0) - (1,-1) = (-1,1)$$

- $\gamma^2 : E^2 \longrightarrow D^2$; seja $\bar{z} \in E_{p,q}^2$, então $z \in E_{p,q}$ e $d^1(z) = \beta\gamma(z) = 0$. Então, $\gamma(z) \in \ker(\beta) = \text{im}(\alpha) = D^2$. Definimos:

$$\gamma^2(\bar{z}) = \gamma(z).$$

Para verificar que tal aplicação está bem definida, temos que provar que: dado $x \in E^2$, $\gamma^2(\bar{x})$ pertence à $\alpha(D)$ e que a imagem não depende do representante da classe. De fato, dado $\bar{x} \in H(E)$, temos que

$$d(x) = 0 \therefore \beta\gamma(x) = 0 \therefore \gamma(x) \in \ker(\beta) = \text{im}(\alpha).$$

Ainda, dados $x, y \in \ker(d)$ tais que $\bar{x} = \bar{y}$, temos:

$$x - y \in \text{im}(d) \therefore \exists z \in E \text{ tal que } x - y = \beta\gamma(z).$$

Portanto:

$$\gamma(x) - \gamma(y) = \gamma(x - y) = \gamma(\beta\gamma(z)) = 0 \therefore \gamma(x) = \gamma(y).$$

Note que o grau de γ^2 é o mesmo grau de γ , ou seja, $\text{grau}(\gamma^2) = (-1,0)$.

Agora, só nos resta provar que o triângulo é um par exato. Para isso, mostraremos que:

- $\text{im}(\cdot) \subseteq \ker(\cdot)$;

$$\beta^2\alpha^2 : x = \alpha(u) \mapsto \alpha(\alpha(u)) \mapsto \overline{\beta(\alpha(u))} = \bar{0};$$

$$\gamma^2\beta^2 : x = \alpha(u) \mapsto \overline{\beta(u)} \mapsto \gamma\beta(u) = 0;$$

$$\alpha^2\gamma^2 : \bar{z} \mapsto \gamma(z) \mapsto \alpha(\gamma(z)) = 0.$$

- $\ker(\alpha^2) \subseteq \text{im}(\gamma^2)$.

Se $x \in \ker(\alpha^2)$, então $\alpha(x) \in D^2 = \text{im}(\alpha)$ e $\alpha(x) = 0$. Então, $x \in \ker(\alpha) = \text{im}(\gamma)$ e, assim $x = \gamma(y)$ para algum $y \in E$. Agora, $x \in \text{im}(\alpha) = \ker(\beta)$ e $0 = \beta(x) = \beta(\gamma(y)) = d^1(y)$. Portanto, $y \in \ker(d)$ e $x = \gamma(y) = \gamma^2(\bar{y}) \in \text{im}(\gamma^2)$.

- $\ker(\beta^2) \subseteq \text{im}(\alpha^2)$.

Se $x \in \ker(\beta^2)$, então $x \in D^2 = \text{im}(\alpha)$ e $\beta^2(x) = 0$. Então, $x = \alpha(u)$ e $0 = \beta^2(x) = \overline{\beta(u)}$. Então, $\beta(u) \in \text{im}(d^1)$, ou seja, $\beta(u) = d^1(w) = \beta\gamma(w)$ para algum $w \in E$. Agora, $u - \gamma(w) \in \ker(\beta) = \text{im}(\alpha) = D^2$ e $\alpha^2(u - \gamma(w)) = \alpha(u) - \alpha(\gamma(w)) = \alpha(u) = x$. Portanto, $x \in \text{im}(\alpha)$.

- $\ker(\gamma^2) \subseteq \text{im}(\beta^2)$.

Se $\bar{z} \in \ker(\gamma^2)$, então $\gamma^2(\bar{z}) = \gamma(z) = 0$. Assim, $z \in \ker(\gamma) = \text{im}(\beta)$, ou seja, $\exists v \in D$ tal que $z = \beta(v)$. Com isso: $\beta^2(\alpha(v)) = \overline{\beta(v)} = \bar{z}$. Portanto $\bar{z} \in \text{im}(\beta^2)$.

□

Observação 2.1.11. *Do modo pelo qual as aplicações α , β e γ foram definidas, é imediato verificar que se seus graus forem, respectivamente, (a, a') , (b, b') e (c, c') , então $\text{grau}(\alpha^2) = (a, a')$, $\text{grau}(\beta^2) = (b - a, b' - a')$ e $\text{grau}(\gamma^2) = (c, c')$. Ou seja, somente o grau de β é alterado pela passagem ao derivado complexo.*

Podemos prosseguir a construção por indução, ou seja, dado um r -ésimo par complexo $(D^r, E^r, \alpha^r, \beta^r, \gamma^r)$, podemos obter o $(r + 1)$ -ésimo par derivado como feito anteriormente. Feito isso, obtemos o seguinte resultado:

Corolário 2.1.12. *Seja $(D, E, \alpha, \beta, \gamma)$ o complexo obtido a partir de uma filtração (F^p) de um complexo (C, d) . Então, temos as seguintes propriedades para o r -ésimo par complexo derivado:*

1. *As aplicações bigraduadas α^r , β^r e γ^r têm grau $(1, -1)$, $(1 - r, r - 1)$ e $(-1, 0)$, respectivamente;*
2. *A aplicação diferencial tem grau $(-r, r - 1)$ e é induzida pela aplicação $\beta\alpha^{-r+1}\gamma$;*

$$3. E_{p,q}^{r+1} = \frac{\ker(d_{p,q}^r)}{\text{im}(d_{p+r,q-r+1}^r)};$$

4. $D_{p,q}^r = \text{im}(\alpha_{p-1,q+1}\alpha_{p-2,q+2}\cdots\alpha_{p-r+1,q+r-1})$; em particular, para o par exato da Proposição 2.1.9,

$$D_{p,q}^r = \text{im}[(j^{p-1}j^{p-2}\cdots j^{p-r+1})_* : H_n(F^{p-r+1}) \longrightarrow H_n(F^p)]$$

onde j^p denota a inclusão $F^p \hookrightarrow F^{p+1}$.

Demonstração. Seja $(D, E, \alpha, \beta, \gamma)$ um par exato que surge de uma filtração.

1. Decorre imediatamente da Observação 2.1.11.

2. Como o $\text{grau}(\beta^r) = (1-r, r-1)$ e $\text{grau}(\gamma^r) = (-1, 0)$, temos que: $\text{grau}(d^r) = \text{grau}(\beta^r\gamma^r) = \text{grau}(\beta^r) + \text{grau}(\gamma^r) = (1-r, r-1) + (-1, 0) = (-r, r-1)$. Resta mostrar que $\beta\alpha^{-r+1}\gamma$ induz d^r .

Para $r = 1$, imediato.

Para $r = 2$: Temos que, $\forall \bar{x} \in E^2$, $d^2(\bar{x}) = \beta^2\gamma^2(\bar{x})$. Como $\gamma^2(\bar{x}) \in D^2 = \text{im}(\alpha)$, temos que $\exists y \in D$ tal que $\gamma^2(\bar{x}) = \alpha(y)$. Sendo assim: $d^2(\bar{x}) = \beta^2(\alpha(y)) = \beta(y) = \beta(\alpha^{-1}(\gamma^2(\bar{x})))$. Por definição, $\gamma^2(\bar{x}) = \gamma(x)$. Sendo assim: $d^2(\bar{x}) = \beta\alpha^{-2+1}\gamma(x) = \beta\alpha^{-1}\gamma(x)$.

Para r qualquer: $\beta\alpha^{1-r}\gamma(x) = \beta\alpha^{1-r}\gamma^2(\bar{x}) = \beta^2\alpha(\alpha^{1-r}\gamma^2(\bar{x})) = \beta^2\alpha^{2-r}\gamma^2(\bar{x}) = \cdots = \beta^{r-1}\alpha^{(r-1)-r}\gamma^{r-1} = \beta^r\alpha^{r-r}\gamma^r(\bar{x}) = \beta^r\gamma^r = d^r(\bar{x}) \therefore d^r = \beta\alpha^{1-r}\gamma$.

3. Pelos itens anteriores, obtemos o seguinte complexo:

$$\cdots \longrightarrow E_{p+r,q-r+1}^r \xrightarrow{d_{p+r,q-r+1}^r} E_{p,q}^r \xrightarrow{d_{p,q}^r} E_{p-r,q+r-1}^r \longrightarrow \cdots$$

E, por construção, $E^{r+1} = H(E^r, d)$. Logo, $E_{p,q}^{r+1} = \frac{\ker(d_{p,q}^r)}{\text{im}(d_{p+r,q-r+1}^r)}$.

4. Sabemos que $D_{p,q}^2 = \alpha_{p-1,q+1}(D_{p-1,q+1})$. Então,

$$D_{p,q}^3 = \alpha_{p-1,q+1}(D_{p-1,q+1}^2) = \alpha_{p-1,q+1}(\alpha_{p-2,q+2}(D_{p-2,q+2})).$$

Prosseguindo o argumento, concluímos que $D_{p,q}^r = \text{im}(\alpha_{p-1,q+1}\alpha_{p-2,q+2}\cdots\alpha_{p-r+1,q+r-1})$.

Pela seqüência exata da Proposição 2.1.9, sabemos que $D_{p,q} = H_{p+q}(F^p)$ e que $\alpha_{p,q} :$

$H_{p+q}(F^p) \longrightarrow H_{p+q}(F_{p+1})$ é a aplicação induzida pela inclusão $j^p : F^p \longrightarrow F^{p+1}$. Com isso,

$$D_{p,q}^r = \text{im}(j^{p-1}j^{p-2}\dots j^{p-r+1})_*,$$

como queríamos.

□

2.2 Sequências Espectrais

Definição 2.2.1. Uma *sequência espectral* é uma sequência $(E^r, d^r)_{r \geq 1}$ de módulos bigraduados diferenciais de modo que $E^{r+1} = H(E^r, d^r)$ para todo r .

Sendo este o objeto de maior importância neste trabalho, apresentamos uma definição mais formal para as sequências espectrais, porém, equivalente à dada anteriormente.

Definição 2.2.2. Seja $a \geq 1$ um inteiro. Uma *sequência espectral que começa na página a* consiste de:

1. Uma família de R -módulos $\{E_{p,q}^r\}$, com $p, q, r \in \mathbb{Z}$ e $r \geq a$;
2. Uma família de morfismos $\{d_{p,q}^r\}$ (denominados **diferenciais**):

$$d_{p,q}^r : E_{p,q}^r \longrightarrow E_{p-r, q+r-1}^r$$

que cumprem

$$d_{p-r, q+r-1}^r \circ d_{p,q}^r = 0$$

3. Uma família de isomorfismos $\{\alpha_{p,q}^r\}$:

$$\alpha_{p,q}^r : E_{p,q}^{r+1} \longrightarrow \frac{\ker(d_{p,q}^r)}{\text{im}(d_{p+r, q-r+1}^r)} := H(E_{p,q}^r)$$

Nestas condições, dizemos que, para cada r fixo, $E_{p,q}^r$ são as páginas da sequência espectral, cujo grau é $n := p + q$. De acordo com a Definição 2.2.1, tomamos $a = 1$.

Perceba que, pela definição dada, para mudarmos a página de uma sequência espectral, basta calcularmos a homologia do complexo definido pelos diferenciais. A seguir, temos o diagrama de tais complexos nas páginas $r = 1$ e $r = 2$:

- Para $r = 1$ temos $d_{p,q}^1 : E_{p,q}^1 \rightarrow E_{p-1,q}^1$. Diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longleftarrow & E_{0,3}^1 & \longleftarrow & E_{1,3}^1 & \longleftarrow & E_{2,3}^1 & \longleftarrow & E_{3,3}^1 & \longleftarrow & \dots \\ \dots & \longleftarrow & E_{0,2}^1 & \longleftarrow & E_{1,2}^1 & \longleftarrow & E_{2,2}^1 & \longleftarrow & E_{3,2}^1 & \longleftarrow & \dots \\ \dots & \longleftarrow & E_{0,1}^1 & \longleftarrow & E_{1,1}^1 & \longleftarrow & E_{2,1}^1 & \longleftarrow & E_{3,1}^1 & \longleftarrow & \dots \\ \dots & \longleftarrow & E_{0,0}^1 & \longleftarrow & E_{1,0}^1 & \longleftarrow & E_{2,0}^1 & \longleftarrow & E_{3,0}^1 & \longleftarrow & \dots \end{array}$$

- Para $r = 2$ temos $d_{p,q}^2 : E_{p,q}^2 \rightarrow E_{p-2,q+1}^2$. Diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} E_{0,3}^2 & & E_{1,3}^2 & & E_{2,3}^2 & & E_{3,3}^2 \\ & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\ E_{0,2}^2 & & E_{1,2}^2 & & E_{2,2}^2 & & E_{3,2}^2 \\ & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\ E_{0,1}^2 & & E_{1,1}^2 & & E_{2,1}^2 & & E_{3,1}^2 \\ & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\ E_{0,0}^2 & & E_{1,0}^2 & & E_{2,0}^2 & & E_{3,0}^2 \end{array}$$

Se denotarmos $(D, E, \alpha, \beta, \gamma)$ por $(D^1, E^1, \alpha^1, \beta^1, \gamma^1)$, então cada par exato dá origem à uma sequência espectral. As seções anteriores nos mostram que:

Teorema 2.2.3. *Cada filtração de um complexo dá origem à uma sequência espectral.*

Demonstração. Consequência imediata das Proposições 2.1.9, 2.1.10 e Corolário 2.1.12.

□

Dada uma sequência espectral, nós observamos que cada $E_{p,q}^{r+1}$ é um subquociente do R -módulo anterior $E_{p,q}^r$. Definindo $Z^r = \ker(d^r)$ e $B^r = \text{im}(d^r)$, podemos provar que $Z^r = \gamma^{-1}(\alpha^r(D))$ e $B^r = \beta(\ker(\alpha^r))$. De fato,

- $Z^r = \ker(d^r) = \ker(\beta^{(r)}\gamma^{(r)}) = \ker(\beta(\alpha^{r-1})^{-1}\gamma) = \ker(\beta(\alpha^{-r+1})\gamma) = \gamma^{-1}(\ker(\beta\alpha^{-r+1})) = \gamma^{-1}(\alpha^{r-1}(\ker(\beta))) = \gamma^{-1}(\alpha^{r-1}(\text{im}(\alpha))) = \gamma^{-1}(\alpha^r(D));$
- $B^r := \text{im}(d^r) = \text{im}(\beta^{(r)}\gamma^{(r)}) = \text{im}(\beta\alpha^{-r+1}\gamma) = \beta(\alpha^{-r+1}\gamma(E)) = \beta(\alpha^{-r+1}(\text{im}(\gamma))) = \beta(\alpha^{-r+1}(\ker(\alpha))) = \beta(\alpha^{-r}(0)) = \beta(\ker(\alpha^r)).$

Como $\ker(\alpha^r) \subseteq \ker(\alpha^{r+1})$ e $\alpha^{r+1}(D) \subseteq \alpha^r(D)$, temos que: $\beta(\ker(\alpha^r)) \subseteq \beta(\ker(\alpha^{r+1}))$ e $\gamma^{-1}(\alpha^{r+1}(D)) \subseteq \gamma^{-1}(\alpha^r(D))$, donde segue que $B^r \subseteq B^{r+1}$ e $Z^{r+1} \subseteq Z^r$. Sendo assim, obtemos a seguinte cadeia de R -módulos:

$$B^2 \subseteq \dots \subseteq B^r \subseteq Z^r \subseteq \dots \subseteq Z^2 \subseteq E^1.$$

Definindo $Z^\infty = \bigcap_r Z^r$ e $B^\infty = \bigcup_r B^r$, podemos perceber que $B^\infty \subseteq Z^\infty$. Sabemos, por definição, que

$$E^r = \frac{Z^r}{B^r}.$$

Sendo assim, podemos definir

$$E^\infty = \frac{Z^\infty}{B^\infty}.$$

Definição 2.2.4. *Uma filtração $(F^p(C))$ de um complexo (C, d) é dita **limitada** se, para cada n , existem inteiros $s = s(n)$ e $t = t(n)$ tais que*

$$(F^s(C))_n = \{0\} \text{ e } (F^t(C))_n = C_n.$$

O seguinte resultado justifica o uso da definição anterior:

Lema 2.2.5. *Seja (E^r, d^r) a sequência espectral que surge de uma filtração limitada de um complexo. Então, para cada $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, existe um inteiro $r = r(p, q)$ tais que $E_{p,q}^s = E_{p,q}^r$ para todo $s > r$.*

Demonstração. Por convenção, $n = p + q$. Pela Proposição 2.1.9, $E_{p,q} = H_n(\frac{F^p}{F^{p-1}})$. Para $p > t(n)$, $\frac{F^p}{F^{p-1}} = 0$. Portanto,

$$E_{p,q} = H_n\left(\frac{F^p}{F^{p-1}}\right) \subseteq \frac{F_n^p}{F_n^{p-1}} = 0.$$

Então, $E_{p,q} = 0$. Disso, segue que $E_{p,q}^r = 0 \forall r \geq 1$ e $p > t(n)$ uma vez que $E_{p,q}^r = H_{p,q}(E^{r-1})$. Se $p < s(n)$, então $F_n^p = 0$ e, com isso $\frac{F_n^p}{F_n^{p-1}} = 0$. Então $E_{p,q}^r = 0, \forall r \geq 1$ e $p < s(n)$.

Escolhendo r suficientemente grande de modo que $p+r > t(n+1)$ e $p-r < s(n-1)$ e pelo grau do diferencial d^r ser $(-r, r-1)$ temos que:

$$E_{p,q}^{r+1} = \frac{\ker(d_{p,q}^r)}{\text{im}(d_{p+r,q-r+1}^r)} = \frac{E_{p,q}^r}{\{0\}}$$

porque $E_{p-r,q+r-1}^r = 0$ e $E_{p+r,q-r+1}^r = 0$.

□

Dada uma filtração limitada, é natural esperarmos que exista alguma relação entre E^∞ e o termo que se estabiliza (o elemento $E_{p,q}^s$ do lema anterior). O próximo resultado estabelece tal relação entre tais conjuntos:

Lema 2.2.6. *Seja (E^r, d^r) uma sequência espectral. Então*

1. $E^{r+1} = E^r$ se, e somente se $Z^{r+1} = Z^r$ e $B^{r+1} = B^r$;
2. Se $E^{r+1} = E^r \forall r \geq s$, então $E^s = E^\infty$.

Demonstração.

1. Se $\frac{X}{Y}$ é um subquociente de Z , então $Y \subseteq X \subseteq Z$ e, então $\frac{X}{Y} = Z$ se, e somente se $Y = \{0\}$ e $X = Z$. Se $E^{r+1} = \frac{Z^{r+1}}{B^{r+1}} = E^r$, então $B^{r+1} = \{0\}$ em $E^r = \frac{Z^r}{B^r}$, ou seja $B^{r+1} = B^r$. Portanto, $E^{r+1} = \frac{Z^{r+1}}{B^{r+1}} = \frac{Z^{r+1}}{B^r} = E^r = \frac{Z^r}{B^r}$, donde segue que $Z^{r+1} = Z^r$. A recíproca é imediata.

2. Se $E^r = E^{r+1}$, então, pelo item anterior, $Z^s = Z^r$ e $B^s = B^r \forall r \geq s$. Sendo assim, $Z^s = \bigcap_{r \geq s} Z^r = Z^\infty$ e $B^s = \bigcup_{r \geq s} B^r = B^\infty$. Portanto, $E^s = \frac{Z^s}{B^s} = \frac{Z^\infty}{B^\infty} = E^\infty$.

□

Dada uma filtração $(F^p(C))_{p \in \mathbb{Z}}$ de um complexo (C, d) com inclusões $i_n^p : (F^p(C))_n \rightarrow C_n$, então $i_*^p : H(F^p) \rightarrow H(C)$. Como $F^p \subseteq F^{p+1}$, temos que $\text{im}(i_*^p) \subseteq \text{im}(i_*^{p+1})$, uma vez que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} & H(F^{p+1}) & \\ & \uparrow & \searrow^{i_*^{p+1}} \\ H(F^p) & \xrightarrow{i_*^p} & H(C) \end{array}$$

comuta. Ou seja, $\text{im}(i_*^p)$ é uma filtração de $H(C)$.

Definição 2.2.7. *Seja $(F^p(C))_{p \in \mathbb{Z}}$ uma filtração para um complexo (C, d) e $i^p : F^p(C) \rightarrow C$ são inclusões. Defina*

$$\Phi^p(H_n(C)) = \text{im}(i_*^p), \quad i_*^p : H_n(F^p) \rightarrow H_n(C).$$

$(\Phi^p(H_n(C)))_{p \in \mathbb{Z}}$ é chamada de **filtração induzida** de $H_n(C)$.

Ao considerarmos uma filtração limitada de um complexo, é natural esperar que a filtração induzida da homologia também seja limitada. O próximo resultado justifica essa expectativa:

Lema 2.2.8. *Se $(F^p(C))_{p \in \mathbb{Z}}$ é uma filtração limitada de um complexo (C, d) , então a filtração induzida $(\Phi^p(H_n(C)))_{p \in \mathbb{Z}}$ na homologia também é limitada e com os mesmos limitantes. Mais precisamente, se para $n \in \mathbb{Z}$ existem $s=s(n)$ e $t=t(n)$ tais que*

$$\{0\} = F^s(C)_n \subseteq F^{s+1}(C)_n \subseteq \dots \subseteq F^t(C)_n = C_n$$

então

$$\{0\} = \Phi^s(H_n(C)) \subseteq \Phi^{s+1}(H_n(C)) \subseteq \dots \subseteq \Phi^t(H_n(C)) = H_n(C).$$

Demonstração. Por hipótese, $F_n^s = 0$, o que significa que $H_n(F^s) = 0$ e, então, que $\text{im}(i_*^s) = 0 = \Phi^s(H_n(C))$. Da mesma forma, como $F_n^t = C_n$, temos que $i^t : F^t(C)_n \rightarrow C_n$ é a aplicação identidade. Sendo assim, a aplicação $i_*^t : H_n(F^t) \rightarrow H_n(C)$ também é a identidade. Portanto, $i_*^t(H_n(F^t)) = H_n(C) = \Phi^t(H_n(C))$.

□

Definição 2.2.9. Uma sequência espectral $(E^r, d^r)_{r \geq 1}$ **converge** para um módulo graduado H se existe uma filtração limitada $(\Phi^p(H))_{p \in \mathbb{Z}}$ de H tal que

$$E_{p,q}^\infty \cong \frac{\Phi^p(H_n)}{\Phi^{p-1}(H_n)}$$

para todo $n = p + q$. Denotamos a convergência por

$$E_{p,q}^2 \xrightarrow[p]{} H_n$$

O significado do índice p , denominado **grau da filtração**, na notação anterior, é que o isomorfismo envolve o termo limite $E_{p,q}^\infty$, que não é necessariamente isomorfo à $E_{q,p}^\infty$.

Teorema 2.2.10. Seja $(F^p(C))_{p \in \mathbb{Z}}$ uma filtração limitada de um complexo (C, d) e $(E^r, d^r)_{r \geq 1}$ a sequência espectral correspondente. Então,

$$E_{p,q}^2 \xrightarrow[p]{} H_n(C).$$

Demonstração. Seja $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Considere a sequência exata obtida do r -ésimo par derivado (focaremos no primeiro índice, por isso o símbolo $\#$):

$$D_{p+r-2, \#}^r \xrightarrow{\alpha^r} D_{p+r-1, \#}^r \xrightarrow{\beta^r} E_{p,q}^r \xrightarrow{\gamma^r} D_{p-1,q}.$$

Pelo Corolário 2.1.12,

$$D_{p,q}^r = \text{im}[(j^{p-1}j^{p-2}\dots j^{p-r+1})_* : H_n(F^{p-r+1}) \longrightarrow H_n(F^p)].$$

Trocando p por $p + r - 1$ e por $p + r - 2$, obtemos:

$$D_{p+r-1, \#}^r = \text{im}[(j^{p+r-2}j^{p+r-3}\dots j^p)_* : H_n(F^p) \longrightarrow H_n(F^{p+r-1})]$$

e

$$D_{p+r-2, \#}^r = \text{im}[(j^{p+r-3}j^{p+r-4}\dots j^{p-1})_* : H_n(F^{p-1}) \longrightarrow H_n(F^{p+r-2})].$$

Para r suficientemente grande tal que $p + r - 2 > t(n)$, teremos: $F_n^{p+r-1} = F_n^{p+r-2} = C_n$ e a composta $(j^{p+r-2}j^{p+r-3}\dots j^p)$ é a inclusão $i^p : F_n^p \longrightarrow C_n$. Sendo assim, $D_{p+r-1, \#}^r = \text{im}(i_*^p) = \Phi^p(H_n)$.

De modo análogo, $D_{p+r-2, \#}^r = \Phi^{p-1}(H_n)$. Então, a sequência exata fornecida anteriormente pode ser reescrita como:

$$\Phi^{p-1}(H_n) \longrightarrow \Phi^p(H_n) \longrightarrow E_{p,q}^r \longrightarrow D_{p-1,q}^r.$$

Também sabemos que:

$$D_{p-1,q}^r = \text{im}[(j^{p-2}j^{p-3}\dots j^{p-r})_* : H_n(F^{p-r}) \longrightarrow H_n(F^{p-1})].$$

Reescolhendo r suficientemente grande de forma que $p-r < s(n)$, teremos $F_n^{p-r} = 0$ e $D_{p-1,q}^r = 0$.

Pelo primeiro teorema de isomorfismo,

$$E_{p,q}^r = \frac{\Phi^p(H_n)}{\Phi^{p-1}(H_n)}.$$

□

Definição 2.2.11. *Uma sequência espectral com $E_{p,q}^r = 0$ para $p < 0$ ou $q < 0$ é chamada de sequência espectral no 1^o quadrante.*

Observe que, para r suficientemente grande (fixo), podemos conseguir que o diferencial $d_{p+r,q-r+1}^r$ tenha domínio nulo e que o diferencial $d_{p,q}^r$ tenha contradomínio nulo. Ou seja:

$$\dots \longrightarrow 0 = E_{p+r,q-r+1}^r \xrightarrow{d_{p+r,q-r+1}^r} E_{p,q}^r \xrightarrow{d_{p,q}^r} E_{p-r,q+r-1}^r = 0 \longrightarrow \dots.$$

Sabemos que

$$E_{p,q}^{r+1} \cong \frac{\ker(d_{p,q}^r)}{\text{im}(d_{p+r,q-r+1}^r)} = \frac{E_{p,q}^r}{0} = E_{p,q}^r.$$

Portanto, para r suficientemente grande, $E_{p,q}^r = E_{p,q}^\infty$. Em outras palavras, uma sequência espectral de primeiro quadrante sempre converge para um módulo graduado. Para obtermos um melhor entendimento acerca da convergência, apresentaremos duas proposições:

Proposição 2.2.12. *Seja uma sequência espectral que converge para H com $E_{p,q}^2 = 0$, exceto para $p = 0, 1$. Então, para cada n , existe uma sequência exata curta*

$$0 \longrightarrow E_{0,n}^2 \longrightarrow H_n \longrightarrow E_{1,n-1}^2 \longrightarrow 0$$

Demonstração. Vejamos o que acontece na segunda página da sequência espectral:

$$\begin{array}{cccccc}
0 & 0 & E_{0,3}^2 & E_{1,3}^2 & 0 & 0 \\
& \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow \\
0 & 0 & E_{0,2}^2 & E_{1,2}^2 & 0 & 0 \\
& \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow \\
0 & 0 & E_{0,1}^2 & E_{1,1}^2 & 0 & 0 \\
& \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow \\
0 & 0 & E_{0,0}^2 & E_{1,0}^2 & 0 & 0
\end{array}$$

Com isso, $E_{p,q}^2 = E_{p,q}^\infty$ e, por hipótese, a sequência espectral converge. Então, existe uma filtração $\{\Phi_p(H_n)\}_{p \in \mathbb{Z}}$ tal que

$$E_{p,q}^\infty \cong \frac{\Phi_p(H_{p+q})}{\Phi_{p-1}(H_{p+q})}$$

Se $p \neq 0, 1$, temos que

$$0 = E_{p,q}^2 = E_{p,q}^\infty \cong \frac{\Phi_p(H_{p+q})}{\Phi_{p-1}(H_{p+q})} \Rightarrow \Phi_p(H_{p+q}) = \Phi_{p-1}(H_{p+q})$$

Sendo $q = n - p$, temos que, para $p \leq -1$: $\Phi_{-1}(H_n) = \Phi_p(H_n)$ e, para $p \geq 2$, temos que: $\Phi_1(H_n) = \Phi_p(H_n)$.

Sendo assim, a filtração fica:

$$\dots \Phi_{-2}(H_n) = \Phi_{-1}(H_n) \subseteq \Phi_0(H_n) \subseteq \Phi_1(H_n) = \Phi_2(H_n) = \dots$$

Por outro lado, sabemos que $H_n = \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} \Phi_p(H_n)$ e $\bigcap_{p \in \mathbb{Z}} \Phi_p(H_n) = 0$. Então, olhando para a filtração, concluímos que $\Phi_{-1}(H_n) = \Phi_{-2}(H_n) = \dots = 0$ e que $\Phi_1(H_n) = \Phi_2(H_n) = \dots = H_n$.

Agora,

- Para $p = 0$, temos:

$$E_{0,n}^2 = E_{0,n}^\infty \cong \frac{\Phi_0(H_n)}{\Phi_{-1}(H_n)} = \frac{\Phi_0(H_n)}{0} = \Phi_0(H_n)$$

- Para $p = 1$, temos:

$$E_{1,n-1}^2 = E_{1,n-1}^\infty \cong \frac{\Phi_1(H_n)}{\Phi_0(H_n)} = \frac{H_n}{\Phi_0(H_n)}$$

Portanto, pela sequência exata curta:

$$0 \longrightarrow \Phi_0(H_n) \hookrightarrow H_n \twoheadrightarrow \frac{H_n}{\Phi_0(H_n)} \longrightarrow 0$$

temos a sequência exata curta desejada:

$$0 \longrightarrow E_{0,n}^2 \longrightarrow H_n \longrightarrow E_{1,n-1}^2 \longrightarrow 0$$

□

Proposição 2.2.13. *Seja uma sequência espectral convergindo para H com $E_{p,q}^r = 0$, exceto para $q = 0, 1$. Então, existe uma sequência exata longa*

$$\dots \longrightarrow H_{p+1} \longrightarrow E_{p+1,0}^2 \xrightarrow{d} E_{p-1,1}^2 \longrightarrow H_p \longrightarrow E_{p,0}^2 \xrightarrow{d} E_{p-2,1}^2 \longrightarrow H_{p-1} \longrightarrow \dots$$

Demonstração. Vamos analisar as páginas 2 e 3 da sequência espectral:

$$\begin{array}{cccc}
 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\
 E_{0,2}^2 & & E_{1,2}^2 & & E_{2,2}^2 & & E_{3,2}^2 \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\
 E_{0,1}^2 & & E_{1,1}^2 & & E_{2,1}^2 & & E_{3,1}^2 \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\
 0 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

e vemos que os objetos da 3ª página são os $E_{p,q}^\infty$. Observe:

$$E_{p-3,q+2}^3 \longrightarrow E_{p,q}^3 \longrightarrow E_{p+3,q-2}^3$$

- $q = 0$

$$0 = E_{p-3,2}^3 \longrightarrow E_{p,0}^3 \longrightarrow E_{p+3,-2}^3 = 0$$

- $q = 1$

$$0 = E_{p-3,3}^3 \longrightarrow E_{p,1}^3 \longrightarrow E_{p+3,-1}^3 = 0$$

Assim, para $q \neq 0, 1$:

$$\frac{\Phi_p(H_{p+q})}{\Phi_{p-1}(H_{p+q})} \cong E_{p,q}^\infty = E_{p,q}^3 \cong \frac{\ker(d_{p,q}^2)}{\text{im}(d_{p+2,q-1}^2)} = \frac{0}{\text{im}(d_{p+2,q-1}^2)} = 0$$

donde segue que

$$\Phi_p(H_{p+q}) = \Phi_{p-1}(H_{p+q}).$$

Sendo $p = n - q$, temos que, para $p \leq n - 2$: $\Phi_{n-2}(H_n) = \Phi_p(H_n)$. E, para $p \geq n + 1$: $\Phi_{n+1}(H_n) = \Phi_p(H_n)$. Com isso, obtemos a seguinte filtração:

$$\dots = \Phi_{n-3}(H_n) = \Phi_{n-2}(H_n) \subseteq \Phi_{n-1}(H_n) \subseteq \Phi_n(H_n) = \Phi_{n+1}(H_n) = \dots$$

Por outro lado, sabemos que $H_n = \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} \Phi_p(H_n)$ e $\bigcap_{p \in \mathbb{Z}} \Phi_p(H_n) = 0$. Então, olhando para a filtração, concluímos que $\Phi_r(H_n) = 0$, $\forall r \leq n - 2 = p + q - 2$ e que $\Phi_r(H_n) = H_n$, $\forall r \geq n = p + q$.

Agora,

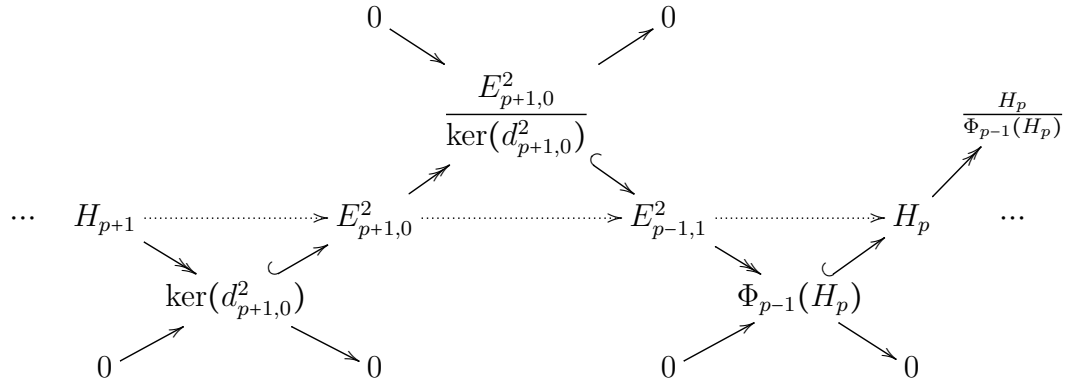
- Para $q = 0$, temos:

$$\frac{H_p}{\Phi_{p-1}(H_p)} = \frac{\Phi_p(H_p)}{\Phi_{p-1}(H_p)} \cong E_{p,0}^\infty = E_{p,0}^3 = \frac{\ker(d_{p,0}^2)}{\text{im}(d_{p+2,-1}^2)} = \frac{\ker(d_{p,0}^2)}{0} = \ker(d_{p,0}^2)$$

- $q = 1$, temos:

$$\Phi_p(H_{p+1}) = \frac{\Phi_p(H_{p+1})}{\Phi_{p-1}(H_{p+1})} \cong E_{p,1}^\infty = E_{p,1}^3 = \frac{\ker(d_{p,1}^2)}{\text{im}(d_{p+2,0}^2)} = \frac{E_{p,1}^2}{\text{im}(d_{p+2,0}^2)}$$

Juntando essas informações, temos:



□

2.3 Homologia do Complexo Total

Nesta seção, construiremos as sequências espectrais que surgem das filtrações vertical e horizontal de um complexo total proveniente de um tipo especial de complexo duplo: os *complexos duplos de primeiro quadrante*.

Definição 2.3.1. Um complexo duplo (M, d', d'') é denominado **Complexo Duplo de Primeiro Quadrante** se $M_{p,q} = 0$ sempre que $p < 0$ ou $q < 0$.

Relembrando, a primeira e a segunda filtrações são dadas por:

$$({}^I F^p(\text{Tot}(M)))_n = \bigoplus_{i \leq p} M_{i, n-i} \quad \text{e} \quad ({}^{II} F^p(\text{Tot}(M)))_n = \bigoplus_{j \leq p} M_{n-j, j}.$$

Lema 2.3.2. Se $(\text{Tot}(M), D)$ é o complexo total de um complexo duplo de primeiro quadrante (M, d', d'') , então a primeira e segunda filtrações são limitadas.

Demonstração. Como $M_{p,q} = 0$ para $p < 0$ ou $q < 0$, temos que o complexo total é dado por $\text{Tot}(M)_n = \bigoplus_{p+q=n} M_{p,q} = M_{0,n} \oplus M_{1,n-1} \oplus \dots \oplus M_{n-1,1} \oplus M_{n,0}$. Sendo assim, temos que

$$({}^I F^{-1}(\text{Tot}(M)))_n = \{0\}, \quad ({}^I F^n(\text{Tot}(M)))_n = \text{Tot}(M)_n \quad \text{e que}$$

$$({}^{II} F^{-1}(\text{Tot}(M)))_n = \{0\}, \quad ({}^{II} F^n(\text{Tot}(M)))_n = \text{Tot}(M)_n.$$

□

Teorema 2.3.3. *Sejam M um complexo duplo de primeiro quadrante, ${}^I E^r$ e ${}^{II} E^r$ as seqüências espectrais que surgem da primeira e segunda filtrações de $\text{Tot}(M)$, respectivamente. Então*

$${}^I E_{p,q}^2 \xrightarrow[p]{\cong} H_n(\text{Tot}(M)) \quad e \quad {}^{II} E_{p,q}^2 \xrightarrow[p]{\cong} H_n(\text{Tot}(M)).$$

Demonstração. Consequência imediata do Teorema 2.2.10 e do Lema 2.3.2. \square

Dado um complexo duplo (M, d', d'') , é possível calcular ${}^I E_{p,q}^r$ e ${}^{II} E_{p,q}^r$ para $r = 1, 2$. Porém, são necessárias algumas construções, que serão detalhadas a seguir.

Seja (M, d', d'') um complexo duplo. Cada p -ésima coluna $(M_{p,*}, d'')$ forma um complexo:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & \downarrow d'' & & \downarrow d'' & & \downarrow d'' \\ \cdots & & M_{p-1,q+1} & & M_{p,q+1} & & M_{p+1,q+1} & & \cdots \\ & & \downarrow d'' & & \downarrow d'' & & \downarrow d'' & & \\ \cdots & & M_{p-1,q} & & M_{p,q} & & M_{p+1,q} & & \cdots \\ & & \downarrow d'' & & \downarrow d'' & & \downarrow d'' & & \\ \cdots & & M_{p-1,q-1} & & M_{p,q-1} & & M_{p+1,q-1} & & \cdots \\ & & \downarrow d'' & & \downarrow d'' & & \downarrow d'' & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \end{array}$$

Com isso, podemos calcular a homologia de cada p -ésima coluna e obter um módulo bigraduado, que denotamos por $H''(M)$:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \cdots & & H_{q+1}(M_{p-1,*}) & & H_{q+1}(M_{p,*}) & & H_{q+1}(M_{p+1,*}) & & \cdots \\ \cdots & & H_q(M_{p-1,*}) & & H_q(M_{p,*}) & & H_q(M_{p+1,*}) & & \cdots \\ \cdots & & H_{q-1}(M_{p-1,*}) & & H_{q-1}(M_{p,*}) & & H_{q-1}(M_{p+1,*}) & & \cdots \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \end{array}$$

Agora, cada q -ésima linha desse novo módulo bigraduado pode se tornar um complexo se definirmos $\bar{d}'_{p,q} : H_q(M_{p,*}) \longrightarrow H_q(M_{p-1,*})$ por:

$$\bar{d}'_{p,q}(\bar{z}) = \overline{d'_{p,q}(z)}, \quad \text{com } \bar{z} \in H_q(M_{p,*}).$$

Tal aplicação está bem definida. De fato, considere $z_1, z_2 \in \ker(d''_{p,q})$ tais que $z_1 - z_2 \in \text{im}(d''_{p,q+1})$. Sendo assim, existe $z_3 \in M_{p,q+1}$ de forma que $z_1 - z_2 = d''_{p,q+1}(z_3)$. Como $d'_{p,q}d''_{p,q+1} + d''_{p-1,q+1}d'_{p,q+1} = 0$ teremos, então, $d'_{p,q}(z_1 - z_2) = d'_{p,q}(d''_{p,q+1}(z_3)) = -d''_{p-1,q+1}(d'_{p,q+1}(z_3))$. Sendo assim, $d'_{p,q}(z_1 - z_2) \in \text{im}(d''_{p-1,q+1})$, ou seja $\bar{d}'_{p,q}(z_1) = \bar{d}'_{p,q}(z_2)$.

Obtemos, então, uma cadeia de complexos:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & \\ \dots & \longleftarrow & H''(M)_{p-1,q+1} & \xleftarrow{\bar{d}'} & H''(M)_{p,q+1} & \xleftarrow{\bar{d}'} & H''(M)_{p+1,q+1} & \longleftarrow \dots \\ & & & & & & \\ \dots & \longleftarrow & H''(M)_{p-1,q} & \xleftarrow{\bar{d}'} & H''(M)_{p,q} & \xleftarrow{\bar{d}'} & H''(M)_{p+1,q} & \longleftarrow \dots \\ & & & & & & \\ \dots & \longleftarrow & H''(M)_{p-1,q-1} & \xleftarrow{\bar{d}'} & H''(M)_{p,q-1} & \xleftarrow{\bar{d}'} & H''(M)_{p+1,q-1} & \longleftarrow \dots \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

Novamente, podemos calcular a homologia das q -ésimas linhas de $(H''(M), \bar{d}')$ e obter um novo módulo bigraduado, que denotamos por $H'H''(M)$:

$$\begin{array}{ccccccc}
& & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\cdots & & H_{p-1}(H''(M)_{*,q+1}) & & H_p(H''(M)_{*,q+1}) & & H_{p+1}(H''(M)_{*,q+1}) & & \cdots \\
\cdots & & H_{p-1}(H''(M)_{*,q}) & & H_p(H''(M)_{*,q}) & & H_{p+1}(H''(M)_{*,q}) & & \cdots \\
\cdots & & H_{p-1}(H''(M)_{*,q-1}) & & H_p(H''(M)_{*,q-1}) & & H_{p+1}(H''(M)_{*,q-1}) & & \cdots \\
& & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

Definição 2.3.4. Dado um complexo duplo (M, d', d'') , chamamos de **primeira homologia iterada** ao módulo bigraduado $H'H''(M)$ cujo (p, q) -ésimo termo $H'_p H''_q(M)$ é $H_p(H''(M)_{*,q})$.

Procederemos com uma construção análoga. Seja (M, d', d'') um complexo duplo. Cada p -ésima linha $(M_{*,p}, d')$ forma um complexo:

$$\begin{array}{ccccccc}
& & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\cdots & \longleftarrow & M_{q-1,p+1} & \xleftarrow{d'} & M_{q,p+1} & \xleftarrow{d'} & M_{q+1,p+1} & \longleftarrow & \cdots \\
\cdots & \longleftarrow & M_{q-1,p} & \xleftarrow{d'} & M_{q,p} & \xleftarrow{d'} & M_{q+1,p} & \longleftarrow & \cdots \\
\cdots & \longleftarrow & M_{q-1,p-1} & \xleftarrow{d'} & M_{q,p-1} & \xleftarrow{d'} & M_{q+1,p-1} & \longleftarrow & \cdots \\
& & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

Com isso, podemos calcular a homologia de cada p -ésima linha e obter um módulo bigraduado, que denotamos por $H'(M)$:

$$\begin{array}{ccccccc}
& & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\cdots & & H_{q-1}(M_{*,p+1}) & & H_q(M_{*,p+1}) & & H_{q+1}(M_{*,p+1}) & & \cdots \\
& & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
\cdots & & H_{q-1}(M_{*,p}) & & H_q(M_{*,p}) & & H_{q+1}(M_{*,p}) & & \cdots \\
& & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
\cdots & & H_{q-1}(M_{*,p-1}) & & H_q(M_{*,p-1}) & & H_{q+1}(M_{*,p-1}) & & \cdots \\
& & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

Agora, cada q -ésima coluna desse novo módulo bigraduado pode se tornar um complexo se definirmos $\overline{d''}_{p,q} : H_q(M_{*,p}) \longrightarrow H_q(M_{*,p-1})$ por:

$$\overline{d''}_{p,q}(\bar{z}) = \overline{d''_{p,q}(z)}, \quad \text{com } \bar{z} \in H_q(M_{*,p}).$$

Tal aplicação está bem definida pela mesma argumentação da construção anterior.

Obtemos, então, uma cadeia de complexos:

$$\begin{array}{ccccccc}
& & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\cdots & & H'(M)_{q-1,p+1} & & H'(M)_{q,p+1} & & H'(M)_{q+1,p+1} & & \cdots \\
& & \downarrow \overline{d''} & & \downarrow \overline{d''} & & \downarrow \overline{d''} & & \\
\cdots & & H'(M)_{q-1,p} & & H'(M)_{q,p} & & H'(M)_{q+1,p} & & \cdots \\
& & \downarrow \overline{d''} & & \downarrow \overline{d''} & & \downarrow \overline{d''} & & \\
\cdots & & H'(M)_{q-1,p-1} & & H'(M)_{q,p-1} & & H'(M)_{q+1,p-1} & & \cdots \\
& & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

Novamente, podemos calcular a homologia das q -ésimas colunas de $(H'(M), \overline{d''})$ e obter um novo módulo bigraduado, que denotamos por $H''H'(M)$:

$$\begin{array}{ccccccc}
& & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\cdots & H_{p-1}(H'(M)_{q+1,*}) & & H_p(H'(M)_{q+1,*}) & & H_{p+1}(H'(M)_{q+1,*}) & \cdots \\
\cdots & H_{p-1}(H'(M)_{q,*}) & & H_p(H'(M)_{q,*}) & & H_{p+1}(H'(M)_{q,*}) & \cdots \\
\cdots & H_{p-1}(H'(M)_{q-1,*}) & & H_p(H'(M)_{q-1,*}) & & H_{p+1}(H'(M)_{q-1,*}) & \cdots \\
& & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

Definição 2.3.5. Dado um complexo duplo (M, d', d'') , chamamos de **segunda homologia iterada** ao módulo bigraduado $H''H'(M)$ cujo (p, q) -ésimo termo $H''_p H'_q(M)$ é $H_p(H'(M)_{q,*})$.

Proposição 2.3.6. Seja (M, d', d'') um complexo duplo de primeiro quadrante. Temos, então, que

$${}^I E_{p,q}^1 = H_q(M_{p,*}) \quad e \quad {}^I E_{p,q}^2 = H'_p H''_q(M) \xrightarrow{p} H_n(\text{Tot}(M)).$$

Demonstração. Relembramos que ${}^I E^r$ é a sequência espectral que surge da primeira filtração ${}^I F^p(\text{Tot}(M))$ do complexo total $(\text{Tot}(M), D)$ de M . Simplificando a notação, omitiremos o índice I e adotaremos a notação ${}^I F^p(\text{Tot}(M))_n = F_n^p$. Pela construção feita na Proposição 2.1.9:

$$E_{p,q}^1 = H_n \left(\frac{F^p}{F^{p-1}} \right).$$

Sabemos que:

$$\begin{aligned}
F_n^p &= \cdots \oplus M_{p-2,q+2} \oplus M_{p-1,q+1} \oplus M_{p,q} \\
F_n^{p-1} &= \cdots \oplus M_{p-2,q+2} \oplus M_{p-1,q+1}
\end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned}
F_{n-1}^p &= \cdots \oplus M_{p-2,q+1} \oplus M_{p-1,q} \oplus M_{p,q-1} \\
F_{n-1}^{p-1} &= \cdots \oplus M_{p-2,q+1} \oplus M_{p-1,q}
\end{aligned}$$

Sendo assim, $\frac{F_n^p}{F_n^{p-1}} = M_{p,q}$ e $\frac{F_{n-1}^p}{F_{n-1}^{p-1}} = M_{p,q-1}$ ($n = p + q$).

A aplicação $\bar{D}_n : \frac{F_n^p}{F_n^{p-1}} \longrightarrow \frac{F_{n-1}^p}{F_{n-1}^{p-1}}$, dada por $\bar{D}_n : a_n + F_n^{p-1} \mapsto D_n a_n + F_{n-1}^{p-1}$, $a_n \in F_n^p$, é induzida pela restrição de D_n a F_n^p , onde $D_n : \text{Tot}(M)_n \longrightarrow \text{Tot}(M)_{n-1}$, que por sua vez é dada por: $D_n = \sum_{p+q=n} (d'_{p,q} + d''_{p,q})$ (ou seja, $D_n : F_n^p \longrightarrow F_{n-1}^p$). Podemos assumir que $a_n \in M_{p,q}$.

Agora: $D_n(a_n) = (d'_{p,q} + d''_{p,q})(a_n) = d'_{p,q}(a_n) + d''_{p,q}(a_n) \in M_{p-1,q} \oplus M_{p,q-1}$. Entretanto, $M_{p-1,q} \subseteq F_n^{p-1}$ e, com isso, temos que $D_n a_n \equiv d''_{p,q}(a_n) \pmod{F_n^{p-1}}$. De uma certa forma, podemos pensar que apenas o diferencial d'' “sobrevive” em $\frac{F^p}{F^{p-1}}$. Então, podemos dizer que $\bar{D}_n = d''_{p,q}$ e, com isso, teremos:

$$E_{p,q}^1 = H_n \left(\frac{F^p}{F^{p-1}} \right) = \frac{\ker \bar{D}_n}{\text{im } \bar{D}_{n+1}} = \frac{\ker d''_{p,q}}{\text{im } d''_{p,q+1}} = H_q(M_{p,*}) = H''(M)_{p,q}.$$

Para calcular $E_{p,q}^2$, recordamos da Proposição 2.1.10 que o diferencial $d^1 : E_{p,q}^1 \longrightarrow E_{p-1,q}^1$ é dado por

$$E_{p,q}^1 \xrightarrow{\gamma} D_{p-1,q} \xrightarrow{\beta} E_{p-1,q}^1,$$

onde $E_{p,q}^1 = H_n \left(\frac{F^p}{F^{p-1}} \right)$, $D_{p-1,q} = H_{n-1}(F^{p-1})$, $E_{p-1,q}^1 = H_{n-1} \left(\frac{F^{p-1}}{F^{p-2}} \right)$. Tome $\bar{z} \in H_q(M_{p,*})$, com $z \in M_{p,q}$ tal que $d''_{p,q}(z) = 0$. O homomorfismo de conexão γ surge do diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} & & M_{p,q} & \longrightarrow & M_{p,q} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow D_n & & & & \\ 0 & \longrightarrow & M_{p-1,q} & \longrightarrow & M_{p-1,q} & & \end{array}$$

que nós podemos perceber que se trata de $d'_{p,q}$. Portanto, a aplicação

$d^1 : E_{p,q}^1 = H_q(M_{p,*}) \longrightarrow E_{p-1,q}^1 = H_q(M_{p-1,*})$ é dada por

$$d^1(\bar{z}) = \overline{d'_{p,q}(z)}, \text{ com } \bar{z} \in H_q(M_{p,*}).$$

Logo, temos que

$$E_{p,q}^2 = \frac{\ker \bar{d}'_{p,q}}{\text{im } \bar{d}'_{p+1,q}} = H'_p H''_q(M),$$

como desejado. □

Enunciamos, agora, uma versão análoga para a sequência espectral ${}^{II}E^r$, que surge da segunda filtração do complexo total de M :

Proposição 2.3.7. *Seja (M, d', d'') um complexo duplo de primeiro quadrante. Temos, então, que*

$${}^{II}E_{p,q}^1 = H_q(M_{*,p}) \quad e \quad {}^{II}E_{p,q}^2 = H_p'' H_q'(M) \xrightarrow[p]{=} H_n(\text{Tot}(M)).$$

Demonstração. Sabemos que a segunda filtração de $\text{Tot}(M)$ coincide com a primeira filtração de $\text{Tot}(M^t)$. Com isso, temos que ${}^{II}E^r$ é igual a ${}^I\tilde{E}^r$, que denota a sequência espectral que surge da primeira filtração de $\text{Tot}(M^t)$. Vale a pena notar que M^t também é um complexo duplo de primeiro quadrante. Pela Proposição 2.3.6, temos que

$${}^{II}E_{p,q}^1 = {}^I\tilde{E}_{p,q}^1 = H_q(M_{p,*}^t) = H_q(M_{*,p})$$

e

$${}^{II}E_{p,q}^2 = {}^I\tilde{E}_{p,q}^2 = H_p(H''(M^t)_{*,q}) = H_p(H'(M)_{q,*}) = H_p'' H_q'(M).$$

□

Definição 2.3.8. *Dizemos que uma sequência espectral **colapsa** no eixo p se $E_{p,q}^2 = 0$ para todo $q \neq 0$, ou seja, se todos os módulos não nulos estão no eixo p . Uma sequência espectral **colapsa** no eixo q se $E_{p,q}^2 = 0$ para todo $p \neq 0$, ou seja, se todos os módulos não nulos estão no eixo q .*

A proposição a seguir justifica a definição anterior, uma vez que correlaciona a convergência de sequências espectrais de primeiro quadrante ao seu “colapsamento”.

Proposição 2.3.9. *Seja (E^r, d^r) uma sequência espectral de primeiro quadrante. Então*

1. *Se (E^r, d^r) colapsa em qualquer eixo, então $E_{p,q}^\infty = E_{p,q}^2$, para todo p, q ;*
2. *Se (E^r, d^r) colapsa no eixo q , então $H_n(\text{Tot}(M)) \cong E_{0,n}^2$ e,*
3. *Se (E^r, d^r) colapsa no eixo p , então $H_n(\text{Tot}(M)) \cong E_{n,0}^2$.*

Demonstração. Adotamos a convenção $n = p + q$.

1. Suponha que (E^r, d^r) colapsa no eixo p . Considere uma posição (p, q) . Se $q \neq 0$, temos que $E_{p,q}^2 = 0$, donde segue que $E_{p,q}^\infty = E_{p,q}^2 = 0$. Se $q = 0$, sabemos que o grau da aplicação

diferencial d^r é $(-r, r-1)$ e isto nos diz que o complexo formado pelos $E_{p,q}^r$ não é horizontal para $r \geq 2$ (não temos informação sobre os módulos que moram no eixo p).

Sendo assim,

$$E_{p,0}^{r+1} = \frac{\ker(d_{p,q}^r)}{\operatorname{im}(d_{p+r,q-r+1}^r)} = E_{p,0}^r, \text{ para } r \geq 2$$

porque o domínio de $d_{p+r,q-r+1}^r$ e o contradomínio de $d_{p,q}^r$ são ambos nulos. Então, $E_{p,0}^\infty = E_{p,0}^2$. A mesma argumentação é válida para o caso em que a sequência espectral colapsa no eixo q .

2. Suponha que (E^r, d^r) colapsa no eixo q . Sendo M o complexo de primeiro quadrante que dá origem à esta sequência espectral, temos a seguinte filtração de $H_n(\operatorname{Tot}(M))$:

$$0 = \Phi^{-1}(H_n) \subseteq \Phi^0(H_n) \subseteq \dots \subseteq \Phi^n(H_n) = H_n.$$

Do Teorema 2.3.3, sabemos que $E_{p,q}^2 \xrightarrow[p]{\cong} H_n(\operatorname{Tot}(M))$. Em outras palavras,

$$\frac{\Phi^p(H_n)}{\Phi^{p-1}(H_n)} = E_{p,q}^\infty.$$

Pelo item anterior, como a sequência colapsa no eixo q , temos $E_{p,q}^\infty$ para $p > 0$. Disso segue que

$$\Phi^0(H_n) = \Phi^1(H_n) = \dots = \Phi^n(H_n) = H_n.$$

Quando $p = 0$, temos que $E_{0,q}^\infty = E_{0,q}^2$. Portanto,

$$E_{0,q}^2 = \frac{\Phi^0(H_n)}{\Phi^{-1}(H_n)} = \Phi^0(H_n).$$

Então $E_{0,q}^2 = H_n(\operatorname{Tot}(M))$.

3. Análogo ao caso anterior.

□

Aplicações

Neste capítulo apresentaremos algumas demonstrações de teoremas famosos da Álgebra Comutativa/Homológica usando a técnica das sequências espectrais.

3.1 O Lema dos Cinco

Como primeira aplicação, provaremos o seguinte resultado:

Teorema 3.1.1. *Dado o diagrama comutativo*

$$\begin{array}{ccccccccc}
 A & \xrightarrow{f} & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D & \xrightarrow{g} & E \\
 \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow & & \delta \downarrow & & \epsilon \downarrow \\
 A' & \xrightarrow{f'} & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & D' & \xrightarrow{g'} & E'
 \end{array}$$

cujas linhas formam sequências exatas, valem:

1. *Se α é um homomorfismo sobrejetor e β, δ são homomorfismos injetores, então γ é um homomorfismo injetor;*
2. *Se β, δ são homomorfismos sobrejetores e ϵ é um homomorfismo injetor, então γ é um homomorfismo sobrejetor e,*
3. *Se α, β, δ e ϵ são isomorfismos, então γ é um isomorfismo.*

Demonstração. Para obtermos um complexo duplo, nós invertemos o diagrama, inserimos \ker e coker de maneira conveniente e preenchemos os outros espaços com zeros:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
0 & \leftarrow 0 & \leftarrow 0 & \leftarrow 0 & \leftarrow 0 & \leftarrow 0 & \leftarrow 0 & \leftarrow 0 & \leftarrow 0 & \leftarrow 0 & \leftarrow \dots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\text{coker}(g) & \leftarrow E & \leftarrow D & \leftarrow C & \leftarrow B & \leftarrow A & \leftarrow \ker(f) & \leftarrow 0 & \leftarrow \dots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\text{coker}(g') & \leftarrow E' & \leftarrow D' & \leftarrow C' & \leftarrow B' & \leftarrow A' & \leftarrow \ker(f') & \leftarrow 0 & \leftarrow \dots
\end{array}$$

Sendo assim, percebemos que a primeira página ${}^{II}E^1$ da sequência espectral é nula, uma vez que, pela Proposição 2.3.6, a primeira página é obtida pelo cálculo da homologia dos complexos na direção horizontal. Sendo assim, concluímos que ${}^{II}E^r$ converge para o módulo nulo e, pelo Teorema 2.3.3, ${}^I E^r$ também converge para o módulo nulo. Para determinar ${}^I E^r$, tomamos a homologia na direção vertical e obtemos:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
* & \leftarrow \ker(\epsilon) & \leftarrow \ker(\delta) & \leftarrow \ker(\gamma) & \leftarrow \ker(\beta) & \leftarrow \ker(\alpha) & \leftarrow * \\
* & \leftarrow \text{coker}(\epsilon) & \leftarrow \text{coker}(\delta) & \leftarrow \text{coker}(\gamma) & \leftarrow \text{coker}(\beta) & \leftarrow \text{coker}(\alpha) & \leftarrow *
\end{array}$$

Aqui, colocamos “*” para indicar que não precisamos da informação que está ali. Agora, vamos demonstrar o que é pedido:

1. Sabemos que $\ker(\delta) = \ker(\beta) = \text{coker}(\alpha) = 0$. Temos, então, o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
* & \leftarrow \ker(\epsilon) & \leftarrow 0 & \leftarrow \ker(\gamma) & \leftarrow 0 & \leftarrow \ker(\alpha) & \leftarrow * \\
* & \leftarrow \text{coker}(\epsilon) & \leftarrow \text{coker}(\delta) & \leftarrow \text{coker}(\gamma) & \leftarrow \text{coker}(\beta) & \leftarrow 0 & \leftarrow *
\end{array}$$

Calculando a segunda homologia iterada, obtemos a segunda página ${}^I E^2$ da sequência espectral:

$$\begin{array}{cccccccc}
 * & * & * & \ker(\gamma) & * & * & * \\
 \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow \\
 * & * & * & * & * & 0 & *
 \end{array}$$

Como a sequência espectral converge para 0, temos que $\ker(\gamma) = 0$.

2. Sabemos que $\text{coker}(\beta) = \text{coker}(\delta) = \ker(\epsilon) = 0$. Temos, então, o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{cccccccc}
 * & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & \ker(\delta) & \longleftarrow & \ker(\gamma) & \longleftarrow & \ker(\beta) & \longleftarrow & \ker(\alpha) & \longleftarrow & * \\
 * & \longleftarrow & \text{coker}(\epsilon) & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & \text{coker}(\gamma) & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & \text{coker}(\alpha) & \longleftarrow & *
 \end{array}$$

Calculando a segunda homologia iterada, obtemos a segunda página ${}^I E^2$ da sequência espectral:

$$\begin{array}{cccccccc}
 * & 0 & * & * & * & * & * \\
 \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow \\
 * & * & * & \text{coker}(\gamma) & * & * & *
 \end{array}$$

Como a sequência espectral converge para o módulo nulo, temos que $\text{coker}(\gamma) = 0$.

3. Consequência imediata dos itens anteriores.

□

3.2 Lema da Serpente

A próxima aplicação será a prova do Lema da Serpente. Vamos relembrar o enunciado:

Lema 3.2.1. (Lema da Serpente) *Seja*

$$\begin{array}{ccccccc}
 A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\
 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C'
 \end{array}$$

um diagrama comutativo com linhas exatas, tanto à direita como à esquerda, de R -módulos e de R -homomorfismos. Então, existe uma aplicação R -linear $\delta : \ker(\gamma) \rightarrow \text{coker}(\alpha)$ tal que a sequência de R -módulos, dada por:

$$\ker(\alpha) \xrightarrow{\bar{f}} \ker(\beta) \xrightarrow{\bar{g}} \ker(\gamma) \xrightarrow{\delta} \text{coker}(\alpha) \xrightarrow{\bar{f}'} \text{coker}(\beta) \xrightarrow{\bar{g}'} \text{coker}(\gamma)$$

é uma sequência exata.

Demonstração. Procedendo como na aplicação anterior, obtemos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{cccccccc}
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 0 & \leftarrow 0 & \leftarrow 0 & \leftarrow 0 & \leftarrow 0 & \leftarrow 0 & \leftarrow 0 & \leftarrow \dots \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 0 & \leftarrow 0 & \leftarrow C & \leftarrow B & \leftarrow A & \leftarrow \ker(f) & \leftarrow 0 & \leftarrow \dots \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 0 & \leftarrow \text{coker } g' & \leftarrow C' & \leftarrow B & \leftarrow A' & \leftarrow 0 & \leftarrow 0 & \leftarrow \dots
 \end{array}$$

Como as linhas são exatas, o cálculo da homologia das linhas nos retorna o módulo nulo e, portanto, concluímos que ambas as sequências espectrais ${}^I E^r$ e ${}^{II} E^r$ convergem para 0. Tomando a homologia na direção vertical, obtemos ${}^{II} E^1$:

$$0 \longleftarrow \ker(\gamma) \xleftarrow{\phi} \ker(\beta) \longleftarrow \ker(\alpha) \longleftarrow \ker(f) \longleftarrow 0$$

$$0 \longleftarrow \text{coker}(g') \longleftarrow \text{coker}(\gamma) \xleftarrow{\psi} \text{coker}(\beta) \longleftarrow \text{coker}(\alpha) \longleftarrow 0$$

Aqui, vemos parte do lema da serpente nas duas linhas e por meio de uma argumentação simples podemos mostrar que tais partes são exatas. Finalmente, tomamos a segunda homologia iterada para visualizarmos a segunda página ${}^{II} E^2$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \text{coker}(\phi) & 0 & 0 & 0 & & \\
 \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & & \\
 0 & 0 & 0 & \ker(\psi) & 0 & &
 \end{array}$$

Como na página E^∞ todos os módulos envolvidos são nulos, o mapa não nulo do diagrama anterior trata-se de um isomorfismo. A aplicação δ que procuramos surge pelo diagrama:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
0 & \rightarrow & \ker(f) & \rightarrow & \ker(\alpha) & \rightarrow & \ker(\beta) & \rightarrow & \ker(\gamma) & & \operatorname{coker}(\alpha) & \rightarrow & \operatorname{coker}(\beta) & \rightarrow & \operatorname{coker}(\gamma) & \rightarrow & \operatorname{coker}(g') & \rightarrow & 0 \\
& & & & & & & & \downarrow & & \uparrow & & & & & & & & & \\
& & & & & & & & \operatorname{coker}(\phi) & \xleftarrow{\cong} & \ker(\psi) & & & & & & & & &
\end{array}$$

como desejado. □

3.3 O Problema de Balanceamento do Funtor Tor

Apresentaremos, aqui, o resultado que diz que o funtor Tor independe da escolha da variável para ser resolvido.

Dados dois complexos

$$P_A = \cdots \rightarrow P_p \xrightarrow{\Delta'_p} P_{p-1} \xrightarrow{\Delta'_{p-1}} P_{p-2} \rightarrow \cdots \rightarrow P_0 \rightarrow 0$$

e

$$Q_B = \cdots \rightarrow Q_q \xrightarrow{\Delta''_q} Q_{q-1} \xrightarrow{\Delta''_{q-1}} Q_{q-2} \rightarrow \cdots \rightarrow Q_0 \rightarrow 0,$$

podemos formar um complexo duplo de primeiro quadrante (M, d', d'') cujos termos são dados por

$$M_{p,q} = P_p \otimes_R Q_q, \quad d'_{p,q} = \Delta'_p \otimes 1, \quad d''_{p,q} = (-1)^p 1 \otimes \Delta''_q.$$

O complexo total de M é chamado de **produto tensorial de complexos** e é denotado por $\operatorname{Tot}(M) = P_A \otimes_R Q_B$.

$$\begin{array}{ccccccc}
& \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\cdots & \longleftarrow & P_0 \otimes Q_2 & \longleftarrow & P_1 \otimes Q_2 & \longleftarrow & P_2 \otimes Q_2 \longleftarrow \cdots \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\cdots & \longleftarrow & P_0 \otimes Q_1 & \longleftarrow & P_1 \otimes Q_1 & \longleftarrow & P_2 \otimes Q_1 \longleftarrow \cdots \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\cdots & \longleftarrow & P_0 \otimes Q_0 & \longleftarrow & P_1 \otimes Q_0 & \longleftarrow & P_2 \otimes Q_0 \longleftarrow \cdots \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
& \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

Para verificar que M é um complexo duplo, precisamos mostrar que $d'_{p,q-1}d''_{p,q} + d''_{p-1,q}d'_{p,q} = 0$. Pela definição desses diferenciais, obtemos:

$$\begin{aligned}
& (\Delta'_p \otimes 1)(-1)^p(1 \otimes \Delta''_q) + (-1)^{p-1}(1 \otimes \Delta''_q)(\Delta'_p \otimes 1) = (-1)^p \Delta'_p \otimes \Delta''_q + (-1)^{p-1} \Delta'_p \otimes \Delta''_q = \\
& ((-1)^p \Delta'_p + (-1)^{p-1} \Delta'_p) \otimes \Delta''_q = 0 \otimes \Delta''_q = 0.
\end{aligned}$$

Teorema 3.3.1. (Teorema de Balanceamento) *Sejam P_A e Q_B as resoluções projetivas deletadas dos R -módulos A e B . Então, $\text{Tor}_n^R(A, B) \cong \text{tor}_n^R(A, B)$.*

Demonstração. Seja (M, d', d'') o complexo duplo como na construção anterior cujo complexo total é $P_A \otimes_R Q_B$. Primeiramente, determinaremos ${}^I E^r$ usando a primeira homologia iterada. A p -ésima coluna de M é

$$M_{p,*} = \cdots \longrightarrow P_p \otimes_R Q_{q+1} \longrightarrow P_p \otimes_R Q_q \longrightarrow P_p \otimes_R Q_{q-1} \longrightarrow \cdots.$$

Como cada P_p é projetivo, e então plano, esta sequência é exata em cada $q > 0$. Sendo assim, $H_q(M_{p,*}) = 0$ para $q > 0$ e

$$H_0(M_{p,*}) = \text{coker}(P_p \otimes_R Q_1 \longrightarrow P_p \otimes_R Q_0)$$

pelo primeiro teorema de isomorfismo. Juntando estas informações, temos:

$${}^I E_{p,q}^1 = H_q(M_{p,*}) = \begin{cases} 0 & \text{if } q > 0, \\ P_p \otimes_R B & \text{if } q = 0. \end{cases}$$

Portanto,

$${}^I E_{p,q}^2 = H'_p H''_q(M) = \begin{cases} 0 & \text{se } q > 0, \\ H_p(P_A \otimes_R B) = \text{Tor}_p^R(A, B) & \text{se } q = 0. \end{cases}$$

Sendo assim, a sequência espectral (${}^I E^r$) colapsa no eixo p . Pela Proposição 2.3.9, temos que

$$H_n(\text{Tot}(M)) = {}^I E_{n,0}^2 = \text{Tor}_n^R(A, B)$$

.

Agora, determinaremos ${}^{II} E^r$ usando a segunda homologia iterada. A p -ésima linha de M é

$$M_{*,p} = \cdots \longrightarrow P_{q+1} \otimes Q_p \longrightarrow P_p \otimes Q_p \longrightarrow P_{q-1} \otimes Q_p \longrightarrow \cdots$$

Como Q_p é projetivo, e então plano, esta sequência é exata para cada $q > 0$. Sendo assim $H_q(M_{*,p}) = 0$ para $q > 0$ e

$$H_0(M_{*,p}) = \text{coker}(P_1 \otimes_R Q_p \longrightarrow P_0 \otimes_R Q_p) = P_p \otimes_R B = A \otimes_R Q_B$$

pelo primeiro teorema de isomorfismo. Juntando estas informações, temos:

$${}^{II} E_{p,q}^1 = H_q(M_{*,p}) = \begin{cases} 0 & \text{se } q > 0, \\ A \otimes_R Q_p & \text{se } q = 0. \end{cases}$$

Portanto,

$${}^{II} E_{p,q}^2 = H_p'' H_q'(M) = \begin{cases} 0 & \text{se } q > 0, \\ H_q(A \otimes_R Q_B) = \text{tor}_p^R(A, B) & \text{se } q = 0. \end{cases}$$

Assim, a sequência espectral (${}^{II} E^r$) colapsa no eixo p . Pela 2.3.9 segue que

$$H_n(\text{Tot}(M)) = {}^{II} E_{0,n}^2 = \text{tor}_n^R(A, B).$$

Portanto, concluímos que

$$\text{Tor}_n^R(A, B) = H_n(\text{Tot}(M)) = \text{tor}_n^R(A, B).$$

□

Corolário 3.3.2. *Os funtores $\text{Tor}_n^R(A, \square)$ e $\text{Tor}_n^R(\square, B)$ podem ser calculados usando resoluções projetivas (então planas) de qualquer uma das variáveis; mais precisamente, para todas as resoluções projetivas F_A e G_B de A e B , respectivamente, e para todo $n \leq 0$,*

$$H_n(F_A \otimes_R B) \cong \text{Tor}_n^R(A, B) \cong H_n(A \otimes_R G_B).$$

Demonstração. A única propriedade das resoluções P_A e Q_B que foi usada na demonstração do teorema anterior foi a de que todos os termos P_p e Q_q são módulos planos. □

3.4 Mudança de Base para o Funtor Tor

Sejam R, S anéis, $f : R \rightarrow S$ um homomorfismo entre anéis, A um R -módulo e B um S -módulo. Podemos, por meio da aplicação f , considerar B como um R -módulo definindo para todo $r \in R$ e $b \in B$: $rb := f(r)b$. Considere as seguintes resoluções projetivas deletadas e o complexo duplo como na seção anterior:

$$P_A = \cdots P_2 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow 0$$

$$Q_B = \cdots Q_2 \rightarrow Q_1 \rightarrow Q_0 \rightarrow 0$$

$$C_{p,q} = P_p \otimes_R Q_q.$$

Neste caso, Q_q não precisa ser projetivo como um R -módulo. Entretanto, cada P_p é projetivo e, com isso, $P_p \otimes \square$ é um funtor exato. Quando consideramos a sequência espectral ${}^I E_{p,q}^r$, vemos pelo mesmo argumento da seção anterior que ela converge para $\text{Tor}_{p+q}^R(A, B)$. Olhando para o diagrama de $C_{p,q}$:

$$\begin{array}{ccccc}
 \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 P_2 \otimes_R Q_0 & & P_2 \otimes_R Q_1 & & P_2 \otimes_R Q_2 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 P_1 \otimes_R Q_0 & & P_1 \otimes_R Q_1 & & P_1 \otimes_R Q_2 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 P_0 \otimes_R Q_0 & & P_0 \otimes_R Q_1 & & P_0 \otimes_R Q_2 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

Calculando a homologia, temos:

$$\dots \longleftarrow H_2(P_A \otimes_R Q_0) \longleftarrow H_2(P_A \otimes_R Q_1) \longleftarrow H_2(P_A \otimes_R Q_2) \longleftarrow \dots$$

$$\dots \longleftarrow H_1(P_A \otimes_R Q_0) \longleftarrow H_1(P_A \otimes_R Q_1) \longleftarrow H_1(P_A \otimes_R Q_2) \longleftarrow \dots$$

$$\dots \longleftarrow H_0(P_A \otimes_R Q_0) \longleftarrow H_0(P_A \otimes_R Q_1) \longleftarrow H_0(P_A \otimes_R Q_2) \longleftarrow \dots$$

Sabemos que para todo R -módulo M : $M \cong R \otimes_R M$. Usando a propriedade associativa do produto tensorial, temos que $P_p \otimes_R Q_q = P_p \otimes_R (S \otimes_S Q_q) = (P_p \otimes_R S) \otimes_S Q_q$. Reescrevendo o diagrama acima utilizando essas relações, teremos:

$$\dots \longleftarrow H_2((P_A \otimes_R S) \otimes_S Q_0) \longleftarrow H_2((P_A \otimes_R S) \otimes_S Q_1) \longleftarrow H_2((P_A \otimes_R S) \otimes_S Q_2) \longleftarrow \dots$$

$$\dots \longleftarrow H_1((P_A \otimes_R S) \otimes_S Q_0) \longleftarrow H_1((P_A \otimes_R S) \otimes_S Q_1) \longleftarrow H_1((P_A \otimes_R S) \otimes_S Q_2) \longleftarrow \dots$$

$$\dots \longleftarrow H_0((P_A \otimes_R S) \otimes_S Q_0) \longleftarrow H_0((P_A \otimes_R S) \otimes_S Q_1) \longleftarrow H_0((P_A \otimes_R S) \otimes_S Q_2) \longleftarrow \dots$$

Sabemos que $H_n((P_A \otimes_R S) \otimes_S Q_q) \cong H_n(P_A \otimes_R S) \otimes_S Q_q$ para todo q . Sendo assim, obtemos o seguinte diagrama:

$$\dots \longleftarrow \text{Tor}_2^R(A, S) \otimes_S Q_0 \longleftarrow \text{Tor}_2^R(A, S) \otimes_S Q_1 \longleftarrow \text{Tor}_2^R(A, S) \otimes_S Q_2 \longleftarrow \dots$$

$$\dots \longleftarrow \text{Tor}_1^R(A, S) \otimes_S Q_0 \longleftarrow \text{Tor}_1^R(A, S) \otimes_S Q_1 \longleftarrow \text{Tor}_1^R(A, S) \otimes_S Q_2 \longleftarrow \dots$$

$$\dots \longleftarrow \text{Tor}_0^R(A, S) \otimes_S Q_0 \longleftarrow \text{Tor}_0^R(A, S) \otimes_S Q_1 \longleftarrow \text{Tor}_0^R(A, S) \otimes_S Q_2 \longleftarrow \dots$$

Os complexos acima são usados para calcular os funtores derivados de $\square \otimes_S B$. Isto significa que a (p, q) -ésima entrada da segunda página na sequência espectral é dada por $\text{Tor}_p^S(\text{Tor}_q^R(A, S), B)$. Portanto

$$\text{Tor}_p^S(\text{Tor}_q^R(A, S), B) \xrightarrow[p]{} H_n(\text{Tot}(C)) = \text{Tor}_n^R(A, B).$$

Acabamos de provar o seguinte resultado:

Teorema 3.4.1. (*Mudança de Base do Tor*) *Existe uma seqüência espectral $(E_{p,q}^r)$ tal que*

$$E_{p,q}^2 = \text{Tor}_p^S(\text{Tor}_q^R(A, S), B) \xrightarrow[p]{\implies} \text{Tor}_n^R(A, B).$$

Considere o caso em que S é um R -módulo plano. Então $\text{Tor}_i^R(A, S) = 0$ para todo $i > 0$ e disso segue que a única linha não nula no diagrama é a que possui o fator Tor_0 . Com isso, temos que a seqüência espectral colapsa no eixo q , donde segue que $E_{0,n}^2 \cong H_n(\text{Tot}(C)) = \text{Tor}_n^R(A, B)$. Obtemos, então, o seguinte resultado:

Corolário 3.4.2. *Se S é um R -módulo plano, então $\text{Tor}_i^S(A \otimes_R S, B) \cong \text{Tor}_i^R(A, B)$.*

3.5 O Teorema dos Coeficientes Universais

Seja A um grupo abeliano qualquer (todo grupo abeliano é um \mathbb{Z} -módulo) e $C_\bullet = (C, d)$ um complexo formado por grupos abelianos e livres quando olhados como R -módulos. O que podemos dizer sobre $H(C_\bullet)$ e $H(C_\bullet \otimes A)$? Será que eles possuem alguma relação?

Escolhemos uma resolução projetiva deletada para A :

$$P_A = \cdots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow 0$$

e consideramos o complexo duplo $M_{p,q} = P_p \otimes C_q$. Primeiramente, olhamos para a seqüência espectral $({}^I E_{p,q}^r)$, que surge do seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ P_0 \otimes C_2 & & P_1 \otimes C_2 & & P_2 \otimes C_2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ P_0 \otimes C_1 & & P_1 \otimes C_1 & & P_2 \otimes C_1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ P_0 \otimes C_0 & & P_1 \otimes C_0 & & P_2 \otimes C_0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

Calculando a homologia, teremos:

$$\dots \longleftarrow H_2(P_0 \otimes C_\bullet) \longleftarrow H_2(P_1 \otimes C_\bullet) \longleftarrow H_2(P_2 \otimes C_\bullet) \longleftarrow \dots$$

$$\dots \longleftarrow H_1(P_0 \otimes C_\bullet) \longleftarrow H_1(P_1 \otimes C_\bullet) \longleftarrow H_1(P_2 \otimes C_\bullet) \longleftarrow \dots$$

$$\dots \longleftarrow H_0(P_0 \otimes C_\bullet) \longleftarrow H_0(P_1 \otimes C_\bullet) \longleftarrow H_0(P_2 \otimes C_\bullet) \longleftarrow \dots$$

Como o funtor $P_p \otimes \square$ é exato para todo p (cada P_p é projetivo/plano), temos o diagrama:

$$\dots \longleftarrow P_0 \otimes H_2(C_\bullet) \longleftarrow P_1 \otimes H_2(C_\bullet) \longleftarrow P_2 \otimes H_2(C_\bullet) \longleftarrow \dots$$

$$\dots \longleftarrow P_0 \otimes H_1(C_\bullet) \longleftarrow P_1 \otimes H_1(C_\bullet) \longleftarrow P_2 \otimes H_1(C_\bullet) \longleftarrow \dots$$

$$\dots \longleftarrow P_0 \otimes H_0(C_\bullet) \longleftarrow P_1 \otimes H_0(C_\bullet) \longleftarrow P_2 \otimes H_0(C_\bullet) \longleftarrow \dots$$

Como cada linha do diagrama forma o complexo usado para calcular os funtores derivados de $A \otimes \square$, então a (p, q) -ésima entrada da segunda página da sequência espectral é $\text{Tor}_q^{\mathbb{Z}}(A, H_p(C_\bullet))$. Para um estudo mais detalhado deste novo objeto, aplicamos o funtor $A \otimes \square$ à sequência exata de módulos graduados:

$$0 \longrightarrow \text{im}(d) \longrightarrow \ker(d) \longrightarrow H(C_\bullet) \longrightarrow 0$$

que, em cada nível, é escrita como:

$$0 \longrightarrow \text{im}(d_{n+1}) \longrightarrow \ker(d_n) \longrightarrow H_n(C_\bullet) \longrightarrow 0$$

Considerando resoluções projetivas para esses módulos de acordo com o Lema da Ferradura 1.2.32, podemos aplicar $A \otimes \square$ para calcular os funtores derivados e obter a Tor-sequência exata longa:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & \text{Tor}_2(A, \text{im}(d_{n+1})) & \longrightarrow & \text{Tor}_2(A, \text{ker}(d_n)) & \longrightarrow & \text{Tor}_2(A, H_n(C_\bullet)) \\
 & & & & \searrow^{\delta} & & \\
 & & \text{Tor}_1(A, \text{im}(d_{n+1})) & \longrightarrow & \text{Tor}_1(A, \text{ker}(d_n)) & \longrightarrow & \text{Tor}_1(A, H_n(C_\bullet)) \\
 & & & & \searrow^{\delta} & & \\
 & & \text{Tor}_0(A, \text{im}(d_{n+1})) & \longrightarrow & \text{Tor}_0(A, \text{ker}(d_n)) & \longrightarrow & \text{Tor}_0(A, H_n(C_\bullet)) \longrightarrow \dots
 \end{array}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Entretanto, como $\text{im}(d_{n+1})$ e $\text{ker}(d_n)$ são subgrupos do grupo abeliano livre C_n , eles também são livres e os Tor-grupos relacionados a eles são nulos para índices maiores que 1. Pela exatidão da sequência, $\text{Tor}_i(A, H_n(C_\bullet)) = 0$ para todo $i \geq 2$. Sendo assim, a segunda página da sequência espectral resulta em:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
 & & & & & & & & \\
 \text{Tor}_0(A, H_2(C_\bullet)) & & \text{Tor}_1(A, H_2(C_\bullet)) & & 0 & & 0 & & \dots \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\
 \text{Tor}_0(A, H_1(C_\bullet)) & & \text{Tor}_1(A, H_1(C_\bullet)) & & 0 & & 0 & & \dots \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\
 \text{Tor}_0(A, H_0(C_\bullet)) & & \text{Tor}_1(A, H_0(C_\bullet)) & & 0 & & 0 & & \dots
 \end{array}$$

Agora, olhamos a sequência espectral $({}^I E_{p,q}^r)$, que surge do diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 P_2 \otimes C_0 & & P_2 \otimes C_1 & & P_2 \otimes C_2 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 P_1 \otimes C_0 & & P_1 \otimes C_1 & & P_1 \otimes C_2 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 P_0 \otimes C_0 & & P_0 \otimes C_1 & & P_0 \otimes C_2 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

Sabemos que (p, q) -ésima entrada da primeira página desta sequência é $\text{Tor}_q(A, C_p)$. Para $q > 0$, $\text{Tor}_q(A, C_p) = 0$, uma vez que cada C_p é livre. Então, o diagrama da primeira página é:

$$\begin{array}{ccccccc} & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ & & & & & & \\ 0 & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & \dots \\ & & & & & & \\ & \text{Tor}_0(A, C_0) & \longleftarrow & \text{Tor}_0(A, C_1) & \longleftarrow & \text{Tor}_0(A, C_2) & \longleftarrow \dots \end{array}$$

Agora, sabemos que $\text{Tor}_0(A, C_i) \cong A \otimes C_i$. Sendo assim:

$$\begin{array}{ccccccc} & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ & & & & & & \\ 0 & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & \dots \\ & & & & & & \\ & A \otimes C & \longleftarrow & A \otimes C_1 & \longleftarrow & A \otimes C_2 & \longleftarrow \dots \end{array}$$

Para obter a segunda página, calculamos a homologia novamente e percebemos que todas as linhas, exceto a linha “zero”, são nulas. Ou seja, temos a linha:

$$H_0(A \otimes C_\bullet) \quad H_1(A \otimes C_\bullet) \quad H_2(A \otimes C_\bullet) \quad \dots$$

Sendo assim, a sequência espectral colapsa no eixo q e, pela Proposição 2.3.9 temos que ${}^H E_{0,n}^2 \cong H_n(\text{Tot}(M)) = H_n(A \otimes C_\bullet)$. Sabemos que ${}^I E_{0,n}^2 \cong \text{Tor}_0(A, H_n(C_\bullet)) \cong H_n(C_\bullet) \otimes A$ e que ${}^I E_{1,n-1}^2 = \text{Tor}_1(H_{n-1}(C_\bullet), A)$. Portanto, pela Proposição 2.2.12, temos:

Teorema 3.5.1. (Teorema dos Coeficientes Universais) *Existe uma sequência exata curta dada por*

$$0 \longrightarrow H_n(C_\bullet) \otimes A \longrightarrow H_n(C_\bullet \otimes A) \longrightarrow \text{Tor}_1(H_{n-1}(C_\bullet), A) \longrightarrow 0.$$

Como a sequência exata acima cinde (vide [6]), temos que

$$H_n(C_\bullet \otimes A) \cong (H_n(C_\bullet) \otimes A) \oplus \text{Tor}_1(H_{n-1}(C_\bullet), A).$$

3.6 Sequências Espectrais de Grothendieck

Os funtores derivados possuem esse nome por se comportarem de uma forma muito parecida com os operadores derivações em análise. As sequências espectrais de Grothendieck fornecem uma ideia de regra da cadeia para funtores derivados. Para enunciar o teorema principal dessa seção, precisamos de algumas definições e resultados auxiliares:

Definição 3.6.1. *Seja \mathfrak{F} um funtor aditivo exato à direita. Um R -módulo M é dito \mathfrak{F} -acíclico à esquerda se $L_n\mathfrak{F}(M) = 0$ para cada $n > 0$.*

Lema 3.6.2. *Funtores aditivos preservam somas diretas. Ou seja, se $\mathfrak{F} : \mathbf{Mod}_R \rightarrow \mathbf{Mod}_S$ é um funtor aditivo, então*

$$\mathfrak{F}(A \oplus B) \cong \mathfrak{F}(A) \oplus \mathfrak{F}(B).$$

Demonstração. Vide [6]. □

Teorema 3.6.3. *(Sequência Espectral de Grothendieck) Sejam $\mathfrak{F} : \mathbf{Mod}_R \rightarrow \mathbf{Mod}_S$ e $\mathfrak{G} : \mathbf{Mod}_S \rightarrow \mathbf{Mod}_T$ funtores aditivos exatos à direita tais que $\mathfrak{F}(M)$ é \mathfrak{G} -acíclico à esquerda para todo R -módulo projetivo M . Então, para qualquer R -módulo A , temos uma sequência espectral do primeiro quadrante (E^r, d^r) tal que:*

$$E_{p,q}^2 = (L_p\mathfrak{G})(L_q\mathfrak{F})A \xrightarrow[p]{\implies} (L_{p+q}\mathfrak{G}\mathfrak{F})A.$$

Demonstração. A estratégia consiste em considerar uma resolução projetiva P_\bullet para A , aplicar \mathfrak{F} a P_\bullet e construir um complexo de complexos, que podem ser pensados como se fosse uma resolução projetiva de $\mathfrak{F}(P_\bullet)$. Com isso, consideramos o complexo duplo associado e as filtrações vertical e horizontal para aplicar as Proposições 2.3.6 e 2.3.7. Uma das sequências espectrais possui, na segunda página, o que queremos e a outra converge para o que estamos procurando. Como as duas convergem para o mesmo módulo (o complexo total), a demonstração está feita.

Considere, então, uma resolução projetiva P_\bullet de A (estamos olhando para o complexo invertido):

$$0 \leftarrow A \leftarrow P_0 \leftarrow P_1 \leftarrow P_2 \leftarrow \dots$$

Aplicando \mathfrak{F} à P_\bullet , temos:

$$0 \longleftarrow \mathfrak{F}(A) \longleftarrow \mathfrak{F}(P_0) \longleftarrow \mathfrak{F}(P_1) \longleftarrow \mathfrak{F}(P_2) \longleftarrow \dots$$

Podemos inserir mais informações nessa resolução e obter:

$$0 \longleftarrow \mathfrak{F}(A) \longleftarrow \mathfrak{F}(P_0) \longleftarrow \supset B_0 \longleftarrow \mathfrak{F}(P_1) \longleftarrow \supset Z_1 \longleftarrow \supset B_1 \longleftarrow \mathfrak{F}(P_2) \longleftarrow \supset Z_2 \longleftarrow \supset B_2 \longleftarrow \dots$$

onde

$$B_n = \text{im}(\mathfrak{F}(P_{n+1}) \longrightarrow \mathfrak{F}(P_n))$$

$$Z_{n+1} = \ker(\mathfrak{F}(P_{n+1}) \longrightarrow \mathfrak{F}(P_n)).$$

Agora, preencheremos este diagrama com resoluções projetivas utilizando o Lema da Ferradura (Lema 1.2.32). Para isso, precisamos quebrar esta sequência exata em várias sequências exatas menores e depois juntar as informações obtidas. Considere, então as seguintes sequências exatas curtas:

$$(a) \quad 0 \longleftarrow \frac{\mathfrak{F}(P_0)}{B_0} \longleftarrow \mathfrak{F}(P_0) \longleftarrow \supset B_0 \longleftarrow 0;$$

$$(b) \quad 0 \longleftarrow \frac{Z_1}{B_1} \longleftarrow Z_1 \longleftarrow \supset B_1 \longleftarrow 0;$$

$$(c) \quad 0 \longleftarrow B_0 \longleftarrow \mathfrak{F}(P_1) \longleftarrow \supset Z_1 \longleftarrow 0.$$

Para a sequência exata dada em (a), considere resoluções projetivas para os módulos $\frac{\mathfrak{F}(P_0)}{B_0}$, B_0 :

$$\begin{array}{ccccccc} & & \vdots & & \vdots & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & T_{0,1} & & R_{0,1} & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & T_{0,0} & & R_{0,0} & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longleftarrow & \frac{\mathfrak{F}(P_0)}{B_0} & \longleftarrow & \mathfrak{F}(P_0) & \longleftarrow \supset & B_0 \longleftarrow 0 \end{array}$$

Aplicando o Lema da Ferradura, obtemos uma resolução projetiva para $\mathfrak{F}(P_0)$ de forma que o diagrama seja comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longleftarrow & T_{0,1} & \longleftarrow & Q_{0,1} & \longleftarrow & R_{0,1} \longleftarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longleftarrow & T_{0,0} & \longleftarrow & Q_{0,0} & \longleftarrow & R_{0,0} \longleftarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longleftarrow & \frac{\mathfrak{F}(P_0)}{B_0} & \longleftarrow & \mathfrak{F}(P_0) & \longleftarrow & B_0 \longleftarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Para a sequência exata dada em (b), considere resoluções projetivas para os módulos $\frac{Z_1}{B_1}$, B_1 :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 & T_{1,1} & & R_{1,1} & & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 & T_{1,0} & & R_{1,0} & & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 0 & \longleftarrow & \frac{Z_1}{B_1} & \longleftarrow & Z_1 & \longleftarrow & B_1 \longleftarrow 0
 \end{array}$$

Aplicando o Lema da Ferradura, obtemos uma resolução projetiva para Z_1 de forma que o diagrama seja comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longleftarrow & T_{1,1} & \longleftarrow & K_{1,1} & \longleftarrow & R_{1,1} \longleftarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longleftarrow & T_{1,0} & \longleftarrow & K_{1,0} & \longleftarrow & R_{1,0} \longleftarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longleftarrow & \frac{Z_1}{B_1} & \longleftarrow & Z_1 & \longleftarrow & B_1 \longleftarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Agora, para a sequência exata dada em (c), considere as resoluções projetivas obtidas nos itens anteriores para os módulos B_0, Z_1 :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 & R_{0,1} & & K_{1,1} & & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 & R_{0,0} & & K_{1,0} & & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 0 & \longleftarrow & B_0 & \longleftarrow & \mathfrak{F}(P_1) & \longleftarrow & Z_1 \longleftarrow 0
 \end{array}$$

Aplicando o Lema da Ferradura, obtemos uma resolução projetiva para $\mathfrak{F}(P_1)$ de forma que o diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longleftarrow R_{0,1} & \longleftarrow & Q_{1,1} & \longleftarrow & K_{1,1} & \longleftarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longleftarrow R_{0,0} & \longleftarrow & Q_{1,0} & \longleftarrow & K_{1,0} & \longleftarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longleftarrow B_0 & \longleftarrow & \mathfrak{F}(P_1) & \longleftarrow & Z_1 & \longleftarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & 0 & & 0 & & 0 &
 \end{array}$$

Obtemos, então, o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 Q_{0,1} & \longleftarrow & R_{0,1} & \longleftarrow & Q_{1,1} & \longleftarrow & K_{1,1} \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 Q_{0,0} & \longleftarrow & R_{0,0} & \longleftarrow & Q_{1,0} & \longleftarrow & K_{1,0} \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 \mathfrak{F}(P_0) & \longleftarrow & B_0 & \longleftarrow & (P_1) & \longleftarrow & Z_1 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & 0 & & 0 & & 0 &
 \end{array}$$

Prosseguindo indutivamente, obtemos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 Q_{0,*} & \longleftarrow & R_{0,*} & \longleftarrow & Q_{1,*} & \longleftarrow & K_{1,*} & \longleftarrow & R_{1,*} & \longleftarrow & Q_{2,*} & \longleftarrow & K_{2,*} & \longleftarrow & R_{2,*} & \longleftarrow & \dots \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathfrak{F}(P_0) & \longleftarrow & B_0 & \longleftarrow & \mathfrak{F}(P_1) & \longleftarrow & Z_1 & \longleftarrow & B_1 & \longleftarrow & \mathfrak{F}(P_2) & \longleftarrow & Z_2 & \longleftarrow & B_2 & \longleftarrow & \dots \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

com $Q_{i,*}$, $R_{i,*}$, $K_{i,*}$ complexos (“resoluções projetivas”).

Considerando o complexo duplo $G(Q)$, que é obtido aplicando-se G ao complexo de

complexos:

$$Q_{0,*} \longleftarrow Q_{1,*} \longleftarrow Q_{2,*} \longleftarrow \dots$$

Notamos que $G(Q)_{p,q} = G((Q_p)_q)$. Este complexo é de primeiro quadrante. Sendo assim, podemos aplicar a Proposição 2.3.6. Como $\mathfrak{F}(M)$ é \mathfrak{G} -acíclico à esquerda para todo módulo projetivo M e $L_0\mathfrak{G} = \mathfrak{G}$ pela Proposição 1.5.11, quando calculamos a primeira homologia iterada, obtemos a segunda página da sequência espectral ${}^I E_{p,q}^2$:

$$\begin{array}{cccc} \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \mathfrak{G}\mathfrak{F}A & (L_1\mathfrak{G}\mathfrak{F})A & (L_2\mathfrak{G}\mathfrak{F})A & \dots \end{array}$$

Sendo assim, ${}^I E_{p,q}^2 = {}^I E_{p,q}^\infty$ e, pela Proposição 2.3.9, temos que $H_n(\text{Tot}\mathfrak{G}(Q)) = (L_n\mathfrak{G}\mathfrak{F})A$.

Agora, considere a sequência espectral que surge da filtração horizontal ${}^{II} E_{p,q}^r$.

Cada aplicação horizontal que obtivemos por meio do Lema da Ferradura era uma inclusão ou uma projeção vindas de uma soma direta. Como funtores aditivos preservam somas diretas, temos que \mathfrak{G} preservará estas inclusões e projeções. Sendo assim, temos o seguinte diagrama de complexos:

$$\mathfrak{G}(Q_0) \longleftarrow \mathfrak{G}(R_0) \longleftarrow \mathfrak{G}(Q_1) \longleftarrow \mathfrak{G}(K_1) \longleftarrow \mathfrak{G}(R_1) \longleftarrow \mathfrak{G}(Q_2) \longleftarrow \dots$$

Como $\ker(Q_p \rightarrow Q_{p-1}) = \mathfrak{G}(K_p)$ e $\text{im } Q_{p+1} \rightarrow Q_p = \mathfrak{G}(R_p)$, então, quando calculamos a homologia na direção horizontal, obtemos $\frac{\mathfrak{G}(K_p)}{\mathfrak{G}(R_p)} = \mathfrak{G}(T_p)$, uma vez que $K_{p,q} = R_{p,q} \oplus T_{p,q}$ e $\mathfrak{G}(R_{p,q} \oplus T_{p,q}) = \mathfrak{G}(R_{p,q}) \oplus \mathfrak{G}(T_{p,q})$. Entretanto, T_p foi escolhido como resolução projetiva de $\frac{Z_p}{B_p} = (L_p\mathfrak{F})A$. Portanto, quando tomamos a segunda homologia iterada, chegamos à $(L_p\mathfrak{G})(L_q\mathfrak{F})A$. Sendo assim, pelo Teorema 2.3.3, temos:

$$(L_p\mathfrak{G})(L_q\mathfrak{F})A \xrightarrow[p]{} (L_{p+q}\mathfrak{G}\mathfrak{F})A$$

como desejado.

□

REFERÊNCIAS

- [1] Caenepeel, F., *Spectral Sequences: An introduction*, Notes,
<https://anagrams-seminar.github.io/ss/intro.pdf>
- [2] Fütterer, M., Schwab, M., *Spectral Sequences*, Notes, 2013,
<https://www.mathi.uni-heidelberg.de/~mfuetterer/texts/specseq.pdf>.
- [3] McCleary, J., *A user's guide to spectral sequences*, Second Edition, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 58. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [4] Murfet, D., *Spectral Sequences*, Notes, 2006,
<http://therisingsea.org/notes/SpectralSequences.pdf>.
- [5] Rotman, J.J., *Advanced Modern Algebra*, American Mathematical Society, Second Edition, 2010.
- [6] Rotman, J.J., *An Introduction to Homological Algebra*, Second Edition, Academic Press, Orlando, FL, 1979.
- [7] Weibel, C.A., *An Introduction to Homological Algebra*, Cambridge University Press, (1994).
- [8] Weston, T., *The Inflation-Restriction Sequence: An Introduction to Spectral Sequences*, Notes,
<http://www.math.mcgill.ca/goren/SeminarOnCohomology/infres.pdf>.