Sobre a existência de pontos periódicos para homeomorfismos do anel fechado

Walter T. Huaraca Vargas

Orientador: *Carlos Alberto Maquera Apaza*

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

USP - São Carlos
Julho/2006

À meus pais, Urbano e Felicinda
que me ensinaram a admirá-los.

À Ruth Mery por seu amor
e sua lealdade.

Agradecimentos

À Prof. Dr. Carlos Alberto Maquera Apaza, pela orientação, confiança e incentivo recebidos durante toda a minha estada em São Carlos, pelos valiosos ensinamentos, dedicação, acompanhamento e amizade.

Aos Professores Dr Carlos Gutierrez Vidalon e a Dr. Ali Tahzibi pela ajuda desinteressada no desenvolvimento do presente trabalho.

A todos meus colegas do ICMC-USP, que tornaram esta caminhada mais agradável.

Aos grandes amigos, Alex, Gloria, Ivan, Judith, Lília, Lizandro, Romenique, Sandra, Sandro, Vanessa, Wesley, obrigado pelo companheirismo e lealdade. Sou grato pelos conselhos e bons momentos de descontração proporcionados.

Aos funcionários do ICMC-USP, pela amizade e atenção dispensada.

A todos meus amigos de graduação, que embora estejam distantes, sempre serão lembrados.

Mais que agradecer, eu dedico este trabalho à minha família:

Ao Homer, Willy, América, Wilber e Alex que além de serem meus irmãos, são meus grandes amigos.

A meus sobrinhos, Helen, Ingrid, Abigail, Sabrina, Carlos, Rocio, América, pelos seus sorrisos e sua simplicidade.

Especialmente a meus pais; Urbano e Felicinda e a minha noiva e cúmplice; Ruth Mery; pelo incentivo, encorajamento e, principalmente, pela oportunidade de estudar e completar mais esta etapa em minha vida. Se cheguei até aqui, foi graças a eles.

À CAPES pelo apoio financeiro recebido durante este trabalho.

Abstract

The well known Poincaré's Theorem state: *The rotation number of an orientation preserving circle homeomorphism is rational if, only if, the homeomorphism has a periodic point of period equal to denominator of the rational.* In this monograph we study results analogous, to the result above mentioned, for homeomorphisms of $\mathbb{A} = S^1 \times I$ homotophics to the identity. More precisely, we study the famous Poincaré - Birkhoff Theorem and some versions obtained by J. Franks [13]. This it will be done imposing some conditions in the rotation set, which is generalization of the rotation number for circle homeomorphisms.

Resumo

O conhecido Teorema de Poincaré afirma: *O número de rotação de homeomorfismo do círculo S^1 que preserva orientação é racional se, e somente se, o homeomorfismo possui um ponto periódico cujo período é igual ao denominador de tal racional.* Na presente dissertação estudamos resultados análogos, ao resultado acima mencionado, para homeomorfismos do anel $\mathbb{A} = S^1 \times I$ homotópicos à identidade. Mais precisamente, estudaremos o famoso Teorema de Poincaré - Birkhoff e algumas versões devidas a J. Franks [13]. Isto será feito impondo algumas condições no conjunto de rotação, o qual é uma generalização do número de rotação para homeomorfismos do círculo.

Sumário

Introdução

Os conceitos de número de translação e número de rotação para homeomorfismos do círculo S^1 foram introduzidos primeiro por Henri Poincaré em [25] quando estudava um problema da mecânica celeste, conhecido como *o problema dos três corpos*. Estes conceitos tem tido uma historia rica no estudo do comportamento assintótico de alguns sistemas dinâmicos (no círculo, anel e toro).

Quando o conceito de número de rotação é generalizado para homeomorfismos homotópicos a identidade do anel fechado $\mathbb{A}$ e do toro $\mathbb{T}^2$ obtemos um conjunto chamado conjunto de rotação. É esperado, como no caso de homeomorfismos do círculo, que o conjunto de rotação nos proporcione informações sobre a existência de pontos periódicos de tais homeomorfismos. Na literatura existem muitos trabalhos nessa direção. Veja por exemplo, [4],[3],[10]-[15], [6], [19], [20], entre outros.

O seguinte resultado conhecido, Teorema de Poincaré, pode ser encontrado em [17].

O número de rotação de homeomorfismo do círculo S^1 que preserva orientação é racional se, e somente se, o homeomorfismo possui um ponto periódico cujo período é igual ao denominador de tal racional.

O objetivo da presente dissertação é estudar resultados análogos, ao resultado acima mencionado, para homeomorfismos do anel $\mathbb{A} = S^1 \times I$, onde $I = [0, 1]$, homotópicos à identidade.

O primeiro resultado que estudaremos é o famoso **Teorema de Poincaré - Birkhoff**, o qual enunciamos a seguir.

Teorema A (Teorema de Poincaré - Birkhoff). *Suponha que $f \in Homeo^+(\mathbb{A})$ preserva as componentes da fronteira e preserva área e seja $F : \widetilde{\mathbb{A}} \to \widetilde{\mathbb{A}}$ um levantamento para f. Se $F_0(x) = F(x, 0)$, $F_1(x) = F(x, 1)$ e $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ são tais que*

$$\tau(F_0) \leq \frac{p}{q} \leq \tau(F_1),$$

então F tem pelo menos dois pontos com número de translação $\frac{p}{q}$ os quais são levanta-

mentos de pontos periódicos de f de órbitas distintas, de período q.

Onde $\tau(F_i)$ é o número de translação de um levantamento do homeomorfismo do círculo $f|_{S^1\times\{i\}}$, para $i = 1, 2$

Este resultado, também chamado de **último teorema geométrico de Poincaré** foi formulado e conjeturado por Poincaré e provado por ele, em casos especiais, um pouco antes de sua morte. Em 1913 George Birkhoff [4], provou esta conjetura, mas ele mesmo encontrou um erro na sua prova em relação à existência do segundo ponto fixo. 12 anos depois o erro foi corrigido em seu artigo [3] em 1925, no qual uma generalização do teorema em questão é provado, onde *preserva área* foi trocado por uma condição puramente topológica e *homeomorfismo* foi substituído por uma situação mais geral. Alguns matemáticos afirmavam que esta prova ainda estava errada.

Nos, no Capítulo 2, apresentaremos uma prova devida a M. Brown e W. D. Neumann [6], a qual, segundo os autores é uma simple modificação da prova original de Birkhoff.

Finalmente, o segundo resultado que estudamos, no capitulo 3, é um resultado devido a J. Franks [13] e que enunciamos a seguir.

Teorema B. *Suponha que $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ é um homeomorfismo do anel o qual é homotópico a identidade e $\Lambda \subseteq \mathbb{A}$ é uma cadeia transitiva compacta invariante. Seja $F : \widetilde{\mathbb{A}} \to \widetilde{\mathbb{A}}$ um levantamento de f, então uma das seguintes afirmações é satisfeita:*

(a) *F tem um ponto fixo.*

(b) *Para todo $x \in \widetilde{\pi}^{-1}(\Lambda)$*
$$\lim_{n\to\infty} (F^n(x) - x)_1 = +\infty$$
onde $\widetilde{\pi} : \widetilde{\mathbb{A}} \to \mathbb{A}$ definido por $\widetilde{\pi}(x, y) = (e^{2\pi i x}, y)$ é a projeção recobrimento e $(\cdot, \cdot)_1$ denota a primeira componente, ou

(c) *Para todo $x \in \widetilde{\pi}^{-1}(\Lambda)$*
$$\lim_{n\to\infty} (F^n(x) - x)_1 = -\infty$$

Em (b) e (c) os limites são uniformes em x.

O conceito de cadeia transitiva é dado na Definição 3.1. Informalmente o Teorema B diz que se f é um homeomorfismo do anel fechado com um conjunto invariante, compacto e transitivo por cadeias Λ então, ou f tem ponto fixo, ou qualquer órbita de f por um ponto de Λ se move uniformemente em uma direção: horária ou anti-horária.

Ainda no Capítulo 3, provamos alguns conseqüências do Teorema B, Corolários 3.2.1 e 3.2.2, que na realidade são algumas versões do Teorema A (Teorema de Poincaré - Birkhoff). Além disso,mostra-se na Observação 3.2, que se f preserva área, então $\mathbb{A}$ é um conjunto invariante, compacto e transitivo por cadeias. Consequentemente, usando o Teorema B obtemos só um ponto fixo (nem sempre dois, veja Exemplo 3.1).

No Capítulo 1, são descritas as noções básicas dos sistemas, em particular, os definidos por difeomorfismos do círculo que preservam orientação. E finalmente é feito um análise em paralelo para homeomorfismos de $\mathbb{A}$ que são homotópicos à identidade.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo inicial recordaremos algumas noções e resultados básicos da teoria dos sistemas dinâmicos e da teoria ergódica, e apresentaremos algumas provas relacionadas ao conceito de número de rotação para homeomorfismos do círculo S^1 e do anel fechado $\mathbb{A}$ para ressaltar as principais semelhanças.

1.1 Noções de sistemas dinâmicos e teoria ergódica

Nesta seção daremos as definições e os principais resultados da dinâmica topológica, e áreas relacionadas, que serão usados ao longo da monografia. A maioria deles sem demonstrações, serão feitas apenas observações quando necessário. Maiores detalhes podem ser encontrados na extensa bibliografia existente, pode-se consultar por exemplo: [17] (também pode-se ver: [27], [26], [20] e [18]).

Definição 1.1. Um *sistema dinâmico* é um par (X, f), onde X é um espaço métrico, chamado de *espaço de fase* e $f : X \to X$ é uma aplicação contínua.

Definição 1.2. Seja (X, f) um sistema dinâmico;

(a) Se $Y \subseteq X$, então Y é chamado de *conjunto invariante por f*, se $f(Y) \subseteq Y$.

(b) A *órbita* de um ponto $x \in X$ é $\mathcal{O}(x) = \{f^n(x) : n > 0\}$. Claramente $\mathcal{O}(x)$ é um conjunto invariante.

(c) Um ponto $x \in X$ é *periódico* se existe $p > 0$ com $f^p(x) = x$. O menor p com esta propriedade é chamado de *período de x*. O conjunto dos pontos periódicos da aplicação f, será denotado por $\mathrm{Per}(f)$.

(d) Um ponto *fixo* é um ponto periódico de período 1 e o conjunto dos pontos fixos da aplicação f será denotada por $\mathrm{Fix}(f)$.

(e) Um ponto $x \in X$ é chamado *recorrente para f*, se para todo $\epsilon > 0$ existe $n > 0$ tal que $|f^n(x) - x| < \epsilon$. Observe que todo ponto periódico é um ponto recorrente.

A seguir daremos algumas definições e teoremas da teoria da medida e da teoria ergódica sem demonstração, para mais detalhes pode-se consultar [28].

Definição 1.3. Seja M um conjunto.

(a) Uma *álgebra* de subconjuntos de M é uma família $\mathcal{B}$ de subconjuntos de M que satisfaz:

  (i) $M \in \mathcal{B}$.

  (ii) $A \in \mathcal{B}$, então $A^c \in \mathcal{B}$.

  (iii) $A, B \in \mathcal{B}$, então $A \cup B \in \mathcal{B}$.

(b) Uma álgebra diz-se uma *σ-álgebra* de subconjuntos de M se, além disso, for fechada para uniões enumeráveis.

(c) Chama-se *σ-álgebra gerada* por uma família $\mathcal{E}$ de subconjuntos de M a menor σ-álgebra que contem $\mathcal{E}$.

(d) Se M é um espaço topológico, chama-se *σ-álgebra Boreliana* de M a σ - álgebra gerada pela família de todos os subconjuntos abertos de M.

(e) Um *espaço mensurável* é uma dupla $(M, \mathcal{B})$ onde M é um conjunto e $\mathcal{B}$ é uma σ-álgebra de subconjuntos de M. Os elementos de $\mathcal{B}$ são chamados *conjuntos mensuráveis*.

Definição 1.4. Uma *medida* em um espaço mensurável $(M, \mathcal{B})$ é uma função μ definida em $\mathcal{B}$ e com valores em $[0, +\infty]$ satisfazendo:

(a) $\mu(\emptyset) = 0$;

(b) $\mu(\cup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$ para quaisquer $A_j \in \mathcal{B}$ disjuntos dois-a-dois.

Chamamos $(M, \mathcal{B}, \mu)$ *um espaço de medida*. Dizemos que a medida μ é finita, se $\mu(M) < \infty$. Quando $\mu(M) = 1$, μ é uma *probabilidade* e nesse caso dizemos que $(M, \mathcal{B}, \mu)$ é um espaço de probabilidade.

Definição 1.5. Seja $(M, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida, e $f : M \to M$ uma aplicação. Dizemos que f *é mensurável* se para qualquer conjunto mensurável $A \in M$, $f^{-1}(A)$ é mensurável.

Definição 1.6. Seja $(M, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida e P uma propriedade referente aos elementos de M. Dizemos que P *é verdadeiro em μ-quase todo ponto,* o qual denotamos por μ-qtp, se P é verdadeiro para o complementar de um conjunto de medida(μ) nula.

Teorema 1.1 (Teorema de Recorrência de Poincaré)**.** *Suponhamos que X admite uma base enumerável de abertos, seja $f : X \to X$ uma aplicação mensurável e μ uma medida invariante finita. Então μ-quase todo ponto $x \in X$ é recorrente para f.*

Teorema 1.2 (Teorema Ergódico de Birkhoff)**.** *Seja $f : X \to X$ uma aplicação mensurável e μ uma medida invariante por f. Dada qualquer função integrable $\varphi : X \to \mathbb{R}$ o limite*

$$\widetilde{\varphi}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x))$$

existe em μ - quase todo ponto $x \in X$. Além disso,

$$\int_X \widetilde{\varphi} d\mu = \int_X \varphi d\mu$$

Definição 1.7. Uma aplicação $f : X \to X$ diz-se *ergódica* para uma probabilidade invariante μ (Também dizemos que a medida μ é ergódica para f, ou que o sistema (f, μ) é ergódico) se:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) = \int_X \varphi d\mu$$

para toda função μ - integrable $\varphi : X \to \mathbb{R}$ e μ - quase todo $x \in X$.

1.2 Homeomorfismos do círculo e número de rotação

Nesta seção, enunciaremos alguns resultados básicos sobre homeomorfismos do círculo. Um conceito de grande importância é o número de rotação, o qual serve de critério para a existência de pontos periódicos das aplicações do círculo. Agora estudaremos estes resultados.

O círculo S^1 também pode ser identificado como o quociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

A aplicação $\pi : \mathbb{R} \to S^1$, definida por $\pi(t) = e^{2\pi i t}$ é uma aplicação de recobrimento universal.

Observação 1.1. A função π tem a seguintes propriedades:

(i) π é contínua.

(ii) Para todo $t, s \in \mathbb{R}$, $\pi(t) = \pi(s)$ se e somente se $t = s \mod 1$

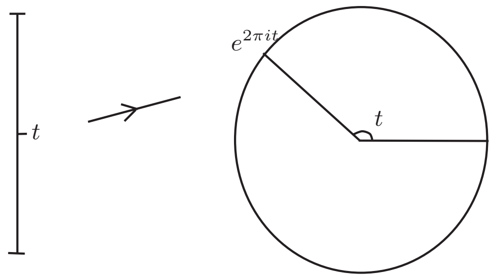

Figura 1.1: Projeção Natural

As aplicações no círculo podem ser representadas por meio de funções reais com valores reais.

Teorema 1.3. *Seja f uma aplicação contínua do círculo. Então existem uma função contínua $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e um inteiro $k(f)$ tal que:*

(a) *Para cada $t \in \mathbb{R}$, $F(t+1) = F(t) + k(f)$.*

(b) *$\pi \circ F = f \circ \pi$, isto é, o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "\pi"] \\ S^1 \arrow[r, "f"] & S^1 \end{tikzcd}$$

Observação 1.2. Sejam f e F como no Teorema 1.3, então:

(i) F é chamado de *levantamento* de f. O inteiro $k(f)$ é chamado de *grau* da aplicação f.

(ii) Se f é uma aplicação do círculo de grau k então para todo levantamento F de f se tem:

$$F(t+m) = f(t) + km, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R} \text{ e } \text{ para todo } m \in \mathbb{Z}.$$

(iii) Se F_1 e F_2 são levantamentos de f, então $F_1 - F_2 \in \mathbb{Z}$, isto é, $F_1 = F_2 + l$ com $l \in \mathbb{Z}$.

Teorema 1.4. *Suponhamos que $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, k um inteiro e*

$$F(t+1) = F(t) + k$$

para $t \in \mathbb{R}$. Então existe uma única aplicação f do círculo tal que F é um levantamento de f. Além disso, f é de grau k.

Observação 1.3. Sejam f e F como no Teorema 1.4, então:

(i) Os iterados f^n de uma aplicação de grau k tem grau kn.

(ii) F^n é um levantamento de f^n.

Para posterior referência fazemos as seguintes observações:

Observação 1.4. Sejam f, g aplicações do círculo de grau k e F, G levantamentos de f e g respectivamente, então:

(i) para todo $t \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{Z}$, $F^n(t) - G^n(t)$ é um levantamento de uma função de grau zero, isto é, uma função periódica.

(ii) Se f é um homeomorfismo do círculo, então F é um homeomorfismo e mais ainda, F^{-1} é um levantamento de f^{-1}.

A *ordem* natural do círculo é tal que $x < y$, se percorrendo de um ponto de referência arbitrário, no sentido anti-horário, encontraremos primeiro x e depois con o ponto y.

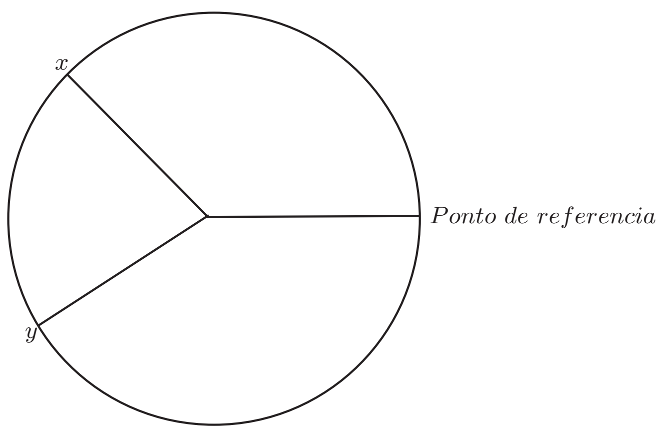

Figura 1.2: Ordem Natural da Circunferência

Definição 1.8. Um homeomorfismo f do círculo *preserva a orientação* se sempre que $x, y \in S^1$, $x < y$ implica que $f(x) < f(y)$, com a ordem natural do círculo.

Proposição 1.1. *Seja f um homeomorfismo que preserva orientação então todo levantamento F de f é estritamente crescente e o grau de f é um, isto é:*

$$F(t+1) = F(t) + 1, \quad \textit{para todo } t \in \mathbb{R}$$

Observação 1.5. Seja f é um homeomorfismo do círculo, então:

(i) Pela Proposição 1.1, se f preserva orientação então para todo levantamento F de f se tem:

$$F(t+m) = F(t) + m, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R} \ e \ \text{ para todo } m \in \mathbb{Z}.$$

(ii) Se f é um homeomorfismo que inverte a orientação, se pode provar de forma análoga que todo levantamento F de f é uma função estritamente decrescente e $f(t+1) = F(t) - 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Em relação à existência de pontos periódicos que invertem orientação temos o seguinte resultado:

Teorema 1.5. *Seja f um homeomorfismo do círculo que inverte a orientação, então ele deve ter exatamente dois pontos fixos.*

Demonstração:

Pela observação anterior temos que se F é um levantamento de f, então

$$F(t+1) = F(t) - 1$$

Tomemos um levantamento F tal que:

$$F(0) \in [0, 1)$$

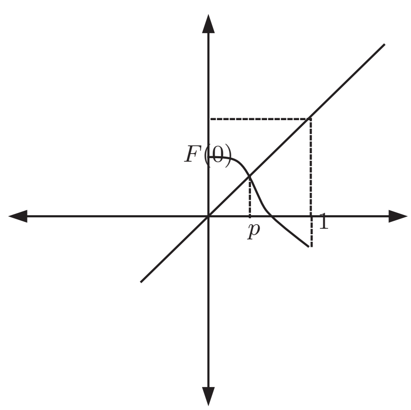

Figura 1.3:

Aplicando o teorema do valor intermediário para $F - Id$ sobre $[0, 1]$ então F deve ter um ponto fixo em S^1.

Seja p tal ponto. Escolhamos un levantamento tal que: $F(p)$ está acima da diagonal e $F(p+1)$ embaixo.

Repetindo o argumento mostramos que f deve ter um segundo ponto fixo. ■

No caso de homeomorfismos que preservam orientação é necessário introduzir o conceito de número de rotação, pois ele nos fornecerá informações sobre à existência de pontos periódicos.

Definição 1.9. Seja f um homeomorfismo do círculo que preserva orientação, o qual denotaremos por $f \in Hom_+(S^1)$, e F um levantamento de f. *O número de translação* de um ponto $x \in \mathbb{R}$ por F é:

$$\tau(x, F) = \lim_{n \to \infty} \frac{F^n(x) - x}{n} \quad \text{quando tal limite existe.}$$

Observação 1.6. Suponhamos que f tenha um ponto periódico $\pi(x)$ de período $q \in \mathbb{Z}^+$ então $\tau(x, F) = \frac{p}{q}$ onde $p \in \mathbb{Z}$.

De fato: $f^q(\pi(x)) = \pi(x)$ mas $\pi(F^q(x)) = f^q(\pi(x))$. Logo,

$$F^q(x) - x = p \in \mathbb{Z}.$$

então,

$$F^q(x) = x + p$$

donde obtemos que $F^{nq}(x) = x + np$.
Portanto

$$\lim_{n \to \infty} \frac{F^{nq}(x) - x}{nq} = \frac{p}{q}.$$

Dado $r \in \mathbb{Z}$ com $0 \leq r < q$, existe M tal que

$$|F^r(x) - x| \leq M \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Por outro lado, dado $n \geq 0$ temos que

$$n = mq + r \quad 0 \leq r < q.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\tfrac{F^n(x)-x}{n} &= \tfrac{F^r(F^{mq}(x))-x}{n} \\
&= \tfrac{F^r(F^{mq}(x))-F^{mq}(x)}{n} + \tfrac{F^{mq}(x)-x}{n} \\
&\leq \tfrac{M}{n} + \tfrac{mq}{n}\tfrac{F^{mq}(x)-x}{mq}
\end{aligned}$$

e

$$\lim_{n \to \infty} \frac{M}{n} + \frac{mq}{n}\frac{F^{mq}(x) - x}{mq} = \frac{p}{q}.$$

Portanto $\tau(x, F) = \frac{p}{q}$.

Proposição 1.2. *Seja* $f \in Hom_+(S^1)$ *e* F *um levantamento de* f *temos que:*

(a) *A existência de $\tau(x,F)$ é independente de x;*

(b) *O limite $\tau(x,F)$ existe para todo $x \in \mathbb{R}$;*

(c) $\tau(x,F^n) = n\tau(x,F)$ *para todo $n \in \mathbb{Z}$;*

(d) $\tau(x,F+m) = \tau(x,F) + m$ *para todo $m \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração:

(a) Se $x, y \in [0,1)$ então $|F(x) - F(y)| < 1$ logo

$$\left|\frac{F(x)-x}{n} - \frac{F(y)-y}{n}\right| < \frac{2}{n}, \ \textit{para todo } n \in \mathbb{Z}^+.$$

Portanto,$\tau(F,x)$ existe, se e somente se, $\tau(F,y)$ existe. Alem disso, quando existem são iguais.

(b) Suponhamos que f tenha um ponto periódico $\pi(x)$ de período q.

Afirmação: $\tau(x,F) = \frac{p}{q}$ para algum $p \in \mathbb{Z}$

Com efeito, temos que existe $\pi(x) \in S^1$ com $f^q(\pi(x)) = \pi(x)$, mas $\pi(F^q(x)) = f^q(\pi(x))$, de onde obtemos

$$F^p(x) - x = p \in \mathbb{Z},$$

então $F^p(x) = x + p$ logo, temos que $F^n p(x) = x + np$

Portanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F^{np}(x) - x}{np} = \frac{p}{q}.$$

Seja

$$r \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq r < q$$

então existe M tal que

$$|F^r(x) - x| \leq M \ \ \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

se $n \geq 0$ então

$$n = mq + r0 \leq r < q$$

portanto

$$\frac{F^n(x)-x}{n} = \frac{F^r(F^m q(x)) - x}{n} = \frac{F^r(F^m q(x)) - F^m q(x)}{n} + \frac{F^m q(x) - x}{n} \leq$$

$$\leq \frac{M}{n} + \frac{mq}{n}\frac{F^m q(x) - x}{mq} \to \frac{p}{q}$$

logo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x) - x}{n} = \frac{p}{q}$$

O qual prova nossa afirmação.

Agora suponhamos que f não tenha pontos periódicos, então

$$F^m(x) - x \notin \mathbb{Z} \text{ para todo } x \in \mathbb{R} e \text{ para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Logo, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe $p_m \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$p_m < F^m(x) - x < p_m + 1 \text{ para cada } x \in \mathbb{R}.$$

Pela parte (a) é suficiente mostrar que $\lim_{n\to\infty} \frac{F^n(0)}{n}$ existe. Tomando

$$x \in \left\{0, F^m(0), \ldots, F^{m(n-1)}(0)\right\}$$

obtemos:

$$\begin{gathered}
p_m < F^m(0) < p_m + 1 \\
p_m < F^{2m}(0) - F^m(0) < p_m + 1 \\
\vdots \\
p_m < F^{nm}(0) - F^{m(n-1)}(0) < p_m + 1
\end{gathered}$$

Somando membro a membro:

$$np_m < F^{nm}(0) < n(p_m + 1)$$

o qual implica que

$$\frac{p_m}{m} < \frac{F^{nm}(0)}{nm} < \frac{p_m}{m} + \frac{1}{m}$$

Em particular para $n = 1$ temos:

$$\frac{p_m}{m} < \frac{F^m(0)}{m} < \frac{p_m}{m} + \frac{1}{m}$$

logo

$$\left|\frac{F^{nm}(0)}{nm} - \frac{F^m(0)}{m}\right| < \frac{1}{m} \tag{1.1}$$

Similarmente, trocando m por n, obtemos:

$$\left|\frac{F^{nm}(0)}{nm} - \frac{F^n(0)}{n}\right| < \frac{1}{n} \tag{1.2}$$

das Equações 1.1 e 1.2 segue-se:

$$\left|\frac{F^n(0)}{n} - \frac{F^m(0)}{m}\right| < \frac{1}{n} + \frac{1}{m}.$$

Portanto $\{\frac{F^n(0)}{n}\}$ é uma seqüência de Cauchy e conseqüêntemente existe

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F^n(0)}{n}.$$

(c) $\tau(F^n) = \lim_{m\to\infty} \frac{F^{nm}(0)}{m} = n \lim_{m\to\infty} \frac{F^{nm}(0)}{nm} = n\tau(F).$

(d) $\tau(F+m) = \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(0)+nm}{n} = \tau(F) + m$ ■

Observação 1.7. Seja f um homeomorfismo do círculo que preserva orientação e F um levantamento de f, então:

Pelo item (d) da proposição 1.2, τ independe do levantamento F de f, (a menos de um inteiro).

O resultado principal desta seção é o seguinte:

Teorema 1.6. *Seja $f \in Hom_+(S^1)$ e F um levantamento de f então:*

(a) $\tau(F) = 0$ *se e somente se F tem um ponto fixo.*

(b) *f tem um ponto fixo se e somente se $\tau(F) \in \mathbb{Z}$*

(c) *f tem um ponto periódico de período q se e somente se $\tau(F) = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$*

Pela observação 1.7 o seguinte conceito está bem definido:

Definição 1.10. Seja $f \in Hom_+(S^1)$ e seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um levantamento de f. Então o *número de rotação* de f é o elemento de S^1 definido por $\rho(f) = \pi(\tau(F))$.

Temos a partir da Teorema 1.6 o seguinte resultado; o qual dá condições necessárias e suficientes para a existência de pontos periódicos.

Teorema 1.7. *Se $f \in Hom_+(S^1)$ então:*

(a) $\rho(f^n) = n\rho(f)$ *para todo $n \in \mathbb{Z}$*

(b) *f tem um ponto periódico de período q se e somente se $\rho(f) = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}\ \mathbb{Z}\ mod1$ onde p e q são primos relativos.*

Observação 1.8. Se $\rho = \frac{p}{q}$ com p e q primos entre sim, então todos os pontos periódicos tem período q. De fato, seja F é um levantamento de f tal que $\tau(F) = \frac{p}{q}$ e seja $\pi(x)$ um ponto periódico de f então existe $r \in \mathbb{N}$ tal que:

$$f^r(\pi(x)) = \pi(x)$$

logo

$$\pi(F^r(x)) = \pi(x)$$

portanto existe $s \in \mathbb{N}$ tal que

$$F^r(x) = x + s, \tag{1.3}$$

usando o mesmo argumento dado no item (b) da Proposição 1.2, se tem

$$\rho(f) = \frac{p}{q} = \frac{s}{r}$$

então existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $s = mp$ e $r = mq$

Vamos mostrar que $F^q(x) - p = x$, suponhamos que $F^q(x) - p > x$ então:

$$\begin{aligned} F^{2q}(x) - 2p &= F^q(F^q(x)) - p - p \\ &= F^q(F^q(x) - p) - p \\ &> F^q(x) - p \\ &> x \end{aligned}$$

logo

$$x < F^{mq}(x) - mp = F^r(x) - s \tag{1.4}$$

Analogamente provamos que

$$x > F^{mq}(x) - mp = F^r(x) - s \tag{1.5}$$

Mais as Equações 1.4 e 1.5, contradizem a equação 1.3

Portanto $\pi(x)$ é periódico para f de período q.

Vejamos o que acontece quando o homeomorfismo considerado preserva medida.

Definição 1.11. Seja $f \in Hom_+(S^1)$ e $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um levantamento de f, definimos a *função deslocamento* $\Phi : S^1 \to \mathbb{R}$ de F, por:

$$\Phi(\pi(x)) = F(x) - x.$$

Observação 1.9. Como $F - Id$ é periódica de período 1, então Φ é bem definida.

Teorema 1.8. *Seja $f \in Hom_+(S^1)$ preservando uma medida de probabilidade μ. Seja F um levantamento de f e suponha que $\Phi : S^1 \to \mathbb{R}$ é a função deslocamento de F. Então,*

$$\tau(F) = \int_{S^1} \Phi d\mu$$

Demonstração:

Seja $z \in S^1$, pelo Teorema Ergódico de Birkhoff, a função $\widehat{\Phi}$ definido por:

$$\widehat{\Phi}(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \Phi(f^i(z))$$

existe em quase todo ponto de S^1. Além disso é integrable e satisfaz:

$$\int_{S^1} \widehat{\Phi} d\mu = \int_{S^1} \Phi d\mu$$

Mas se $z = \pi(x)$, então:

$$f^i(z) = \pi(F^i(z))$$

e

$$\Phi(f^i(z)) = F(F^i(x)) - F^i(x)$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \Phi(f^i(z)) = F^n(x) - x$$

e coseqüêntemente,

$$\widehat{\Phi}(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x) - x}{n} = \tau(F)$$

Portanto, $\widehat{\Phi}$ é uma função constante com valor $\tau(F)$ e resulta que

$$\tau(F) = \int_{S^1} \Phi d\mu.$$

■

1.3 Homeomorfismos do anel e número de rotação

De forma análoga ao caso do círculo, definiremos as ferramentas a serem usadas para garantir a existência de pontos periódicos em homeomorfismos do anel.

Sejam $\mathbb{A} = S^1 \times I$ e $\widetilde{\mathbb{A}} = \mathbb{R} \times I$ seu recobrimento universal onde $I = [0, 1]$.

A aplicação $\widetilde{\pi} : \widetilde{\mathbb{A}} \to \mathbb{A}$, definido como:

$$\widetilde{\pi}(t, y) = (\pi(t), y) = (e^{2\pi i t}, y)$$

é chamada *aplicação de recobrimento*.

Observação 1.10. É fácil verificar:

(i) $\widetilde{\pi}$ é contínua.

(ii) Para cada $t, s \in \mathbb{R}$ e $y, z \in I$, temos:

$$\widetilde{\pi}(t, y) = \widetilde{\pi}(s, z) \text{ se e somente se } y = z \ e \ t = s \ (mod 1).$$

Teorema 1.9. *Seja $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ uma aplicação contínua. Então existe uma aplicação contínua*

$$F : \widetilde{\mathbb{A}} \to \widetilde{\mathbb{A}}$$

e um inteiro $k = k(f)$ tal que:

(a) *Para cada $t \in \mathbb{R}$ se tem:*

$$F(t + 1, y) = F(t, y) + (k, 0)$$

(b) $f \circ \widetilde{\pi} = \widetilde{\pi} \circ F$ *isto é, o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathbb{A}} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\widetilde{\pi}"'] & \widetilde{\mathbb{A}} \arrow[d, "\widetilde{\pi}"] \\ \mathbb{A} \arrow[r, "f"] & \mathbb{A} \end{tikzcd}$$

Observação 1.11. Seja f uma aplicação do anel $\mathbb{A}$. Então:

(i) Qualquer aplicação contínua F que satisfaz as condições da proposição anterior chama-se *levantamento da aplicação f*, e $k = k(f)$ chama-se *grau da aplicação f*.

(ii) Se f é uma aplicação do anel $\mathbb{A}$ de grau k então para todo levantamento F de f temos:

$$F(t + m, y) = F(t, y) + (mk, 0).$$

(iii) Se f é um homeomorfismo do anel $\mathbb{A}$ e F é um levantamento contínuo de f, então F é um homeomorfismo e mais ainda, F^{-1} é um levantamento de f^{-1}.

Seja $Hom_+(\mathbb{A})$ o conjunto de todos os homeomorfismos de $\mathbb{A}$ que preservam orientação.

Definição 1.12. Suponha que $f \in Hom_+(\mathbb{A})$ preserva as componentes da fronteira e seja $F : \widetilde{\mathbb{A}} \to \widetilde{\mathbb{A}}$ um levantamento de f. *O número de translação* de um ponto $w \in \widetilde{\mathbb{A}}$ por F é:

$$\tau(w, F) = \lim_{n \to \infty} \frac{P_1(F^n(w) - w)}{n}, \text{ quando este limite existir.}$$

onde $P_1 : \widetilde{\mathbb{A}} \to \mathbb{R}$ é a projeção na primeira coordenada.

Observação 1.12. Gostaríamos que esta definição satisfizesse propriedades análogas às do círculo, infelizmente, isto não é possível. Em particular $\tau(w,F)$ pode não existir para qualquer $w \in \widetilde{\mathbb{A}}$, além disso, se existir, raramente independe de w, como mostra o seguinte exemplo.

Exemplo 1.1. Seja $F : \widetilde{\mathbb{A}} \to \widetilde{\mathbb{A}}$ dado por:

$$F(x,y) = (x + y\alpha + (1-y)\beta, y)$$

com $0 < \alpha, \beta < 1$.
Temos que

$$F^n(0,0) - (0,0) = (n\beta, 0).$$

Logo

$$\tau((0,0),F) = \beta$$

por outro lado

$$F^n(0,1) - (0,1) = (n\alpha, 0)$$

donde

$$\tau((0,1),F) = \alpha,$$

Mais ainda, para qualquer

$$\zeta \in [\alpha, \beta]$$

se $\alpha < \beta$, existe um ponto w tal que

$$\tau(w,F) = \zeta$$

Observação 1.13.

(i) No exemplo F preserva área.

Proposição 1.3. *Seja $f \in Hom_+(\mathbb{A})$ que preserva as componentes da fronteira e seja $F : \widetilde{\mathbb{A}} \to \widetilde{\mathbb{A}}$ um levantamento de f. Então,*

(a) *Se $\tau(w,F)$ existe , então $\tau(w,F^n) = n\tau(w,F)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

(b) *Se $\tau(w,F)$ existe , então $\tau(w,F+(m,0)) = \tau(w,F) + m$ para todo $m \in \mathbb{Z}$.*

(c) *Se f preserva uma medida boreliana finita μ e $\widetilde{\mu}$ é o levantamento desta medida para $\widetilde{\mathbb{A}}$ então $\tau(w,F)$ existe para cada $w \in \mathbb{A}$ exceto em um conjunto de $\widetilde{\mu}$ - medida zero.*

Demonstração:

(a) $\tau(w, F^n) = \lim_{k\to\infty} \dfrac{P_1(F^{kn}(w) - w)}{k} = n \lim_{m\to\infty} \dfrac{P_1(F^m(w) - w)}{m} = n\tau(w, F)$.

(b) $\tau(w, F + (m, 0)) = \lim_{k\to\infty} \dfrac{P_1(F^k(w) + (km, 0) - w}{k} = \tau(w, F) + m$.

(c) Provaremos no Teorema 1.10. ■

Da Proposição 1.3 podemos ter a seguinte definição:

Definição 1.13. Seja $f \in Hom_+(\mathbb{A})$ e $F : \widetilde{\mathbb{A}} \to \widetilde{\mathbb{A}}$ um levantamento de f. *O número de rotação* de f no ponto $\pi(x)$ é o elemento de S^1 definido por :

$$\rho(\widetilde{\pi}(x), f) = \pi(\tau(x, F))$$

Com esta definição e a Proposição 1.3 podemos mostrar o seguinte resultado:

Proposição 1.4. *Suponha que $f \in Hom_+(\mathbb{A})$ preserva as componentes da fronteira e seja $F : \widetilde{\mathbb{A}} \to \widetilde{\mathbb{A}}$ um levantamento de f. Temos que:*

(a) *Se $\tau(w, F)$ existe, então $\rho(\widetilde{\pi}(x), f)$ existe e está bem definido, isto é, independe do levantamento de f.*

(b) *Se $\rho(x, f)$ existe, então $\rho(x, f^n)$ existe e $\rho(x, f^n) = n\rho(x, f)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

(c) *Se f preserva uma medida de Borel finita, então $\rho(x, f)$ está ben definido para todo $x \in \mathbb{A}$ exceto em um conjunto de medida zero.*

Observação 1.14. Seja $f \in Hom_+(\mathbb{A})$:

(i) Se $(\pi(x), t) \in \mathbb{A}$ é um ponto periódico de f de período q. Então $\rho(x, f) = \frac{p}{q}$, com $p \in \mathbb{Z}$.

De fato, como

$$f^q(\pi(x), t) = (\pi(x), t)$$

então

$$f^q(\widetilde{\pi}(x, t)) = \widetilde{\pi}((x, t)).$$

Portanto,

$$\widetilde{\pi}(F^q(x, t)) = \widetilde{\pi}((x, t))$$

logo

$$P_1(F^q(x, t)) = P_1(x, t) + q = x + p$$

$$P_2(F^q(x, t)) = P_2(x, t) = t$$

onde P_i é a projeção na i- ésima coordenada, para $i = 1, 2$.

Como $f^{nq}(\pi(x), t) = f^q(\pi(x), t)$ então

$$P_1(F^{nq}(x, t)) = P_1(F^q(x, t)) + p = x + np.$$

Portanto,

$$P_1(F^{nq}(x, t) - (x, t)) = np$$

e, conseqüêntemente,

$$\frac{P_1(F^{nq}(x, t) - (x, t))}{nq} = \frac{p}{q}.$$

Por outro lado, existe $M > 0$ tal que

$$|P_1(F^r(x, t) - (x, t))| \leq M \quad \text{para cada } (x, t) \in \widetilde{\mathbb{A}} \ e \ 0 \leq r < q.$$

Assim, dado $n \geq 0$ existem $m, r \in \mathbb{Z}$ tais que $n = mq + r$. Portanto,

$$\left|\frac{P_1[F^n(x,t)-(x,t)]}{n}\right| \leq \left|\frac{P_1[F^r(F^{mq}(x,t))-F^{mq}(x,t)]}{n}\right| + \frac{mq}{n}\left|\frac{P_1[F^{mq}(x,t)-(x,t)]}{mq}\right|$$

Passando ao limite a expressão acima, obtemos:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{P_1[F^r(F^{mq}(x,t))-F^{mq}(x,t)]}{n}\right| + \frac{mq}{n}\left|\frac{P_1[F^{mq}(x,t)-(x,t)]}{mq}\right| = \frac{p}{q},$$

Logo $\rho(x, f) = \frac{p}{q}$.

(ii) O estudo do número de rotação de f ou translação, para provar a existência de pontos periódicos, é muito mais sutil que no caso do círculo e isto será estudado nos Capítulos 2 e 3.

Definição 1.14. Seja $f \in Hom_+(\mathbb{A})$ que preserva as componentes da fronteira e seja $F : \widetilde{\mathbb{A}} \to \widetilde{\mathbb{A}}$ um levantamento para f, definimos a *função deslocamento*

$$\Phi : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$$

por $\Phi(\widetilde{\pi}(w)) = P_1(F(w) - w)$ para $w \in \widetilde{\mathbb{A}}$.

Observação 1.15. Se $w, z \in \widetilde{\mathbb{A}}$ satidforzem $\widetilde{\pi}(w) = \widetilde{\pi}(z)$ então $z = w + (m, 0)$. Logo, $F(w) - w = F(z) - z$ portanto a função Φ está bem definida.

Teorema 1.10. *Seja $f \in Hom_+(\mathbb{A})$ que preserva uma medida de probabilidade μ e seja $F : \widetilde{\mathbb{A}} \to \widetilde{\mathbb{A}}$ um levantamento para f, então o número de rotação $\rho(x, F)$ existe para $\mu - qpt$ e é uma função integrable. Além disso, se*

$$\Phi : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$$

é a função deslocamento de F então

$$\int_{\mathbb{A}} \rho(x,F)d\mu = \int_{\mathbb{A}} \Phi d\mu$$

O valor desta integral é denotado por $\tau_\mu(F)$ e é chamado o número médio de translação de F.

Demonstração: Pelo Teorema Ergódico de Birkhoff se $x = \widetilde{\pi}(w)$ então:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1} \Phi(f^i(x)) &= \sum_{i=0}^{n-1} \Phi(\widetilde{\pi}(F^i(w))) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \Phi(f^i(\widetilde{\pi}(w))) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} P_1(F(F^i(w)) - F^i(w)) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} P_1(F^{i+1}(w) - F^i(w)) = P_1(F^n(w) - w)
\end{aligned}$$

Logo, $\widetilde{\Phi}(x) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{P_1(F^n(w) - w)}{n}$ existe μ-qtp além disso

$$\int_{\mathbb{A}} \rho(x,F)d\mu = \int_{\mathbb{A}} \widetilde{\Phi} d\mu = \int_{\mathbb{A}} \Phi d\mu$$

■

Capítulo 2

O Teorema de Poincaré-Birkhoff: Teorema A

O objetivo deste capítulo é demonstrar o Teorema A (Teorema de Poincaré - Birkhoff). A prova apresentada é devida a M. Brown e W. D. Neumann em [6]. Para demonstrar este teorema precisamos de algumas propriedades de índices de curvas por um homeomorfismo sem ponto fixos, dada na Seção 2.1.

2.1 Índice de uma curva por um homeomorfismo

A seguir definiremos o conceito de índice de uma curva por um homeomorfismo sem ponto fixo e listamos algumas de suas propriedades.

Sejam p e q pontos distintos em $\mathbb{R}^2$, a direção de p à q é

$$D(p,q) = \frac{q-p}{\|q-p\|}$$

Seja $X \subseteq \mathbb{R}^2$ um subconjunto e $h : X \to \mathbb{R}^2$ uma aplicação contínua de X em $\mathbb{R}^2$ sem pontos fixos, isto é, $h(p) \neq p$ para todo $p \in X$. Se C é qualquer curva em X, então intuitivamente, o índice de C com respeito a h será a rotação total que a direção $D(p, h(p))$ realiza quando p se move ao longo da curva C.

Por exemplo, na figura 2.1, a direção faz um total de 1 e $\frac{1}{2}$ voltas no sentido horário, isto é, negativo; então o índice é -$(1 + \frac{1}{2}.)$

Definição 2.1. Sejam $C : [0,1] \to X$ uma curva simples, $h : X \to \mathbb{R}$ um homeomorfismo sem pontos fixos,

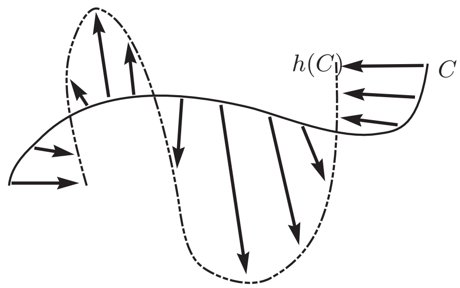

Figura 2.1:

e seja $H : [0,1] \to S^1$ dada por:

$$H(t) = \frac{h(C(t)) - C(t)}{\|h(C(t)) - C(t)\|}.$$

Se $\widetilde{H} : [0,1] \to \mathbb{R}$ é um levantamento de H, então *o índice de C com relação ao homeomorfismo h será:*

$$Ind(C|_h) = \widetilde{H}(1) - \widetilde{H}(0)$$

Proposição 2.1. *Seja $X \subseteq \mathbb{R}^2$ um subconjunto e $h : X \to \mathbb{R}^2$ um homeomorfismo de X em $\mathbb{R}^2$ sem pontos fixos. Temos:*

(a) *O índice $Ind(C|_h)$ não depende do levantamento.*

(b) *Para qualquer família contínua de curvas C a um parâmetro ou homeomorfismos h como acima, $Ind(C|_h)$ varia continuamente com respeito ao parâmetro.*

(c) *Se C é uma curva que liga os pontos A e B, então:*

$$Ind(C|_h) = \frac{1}{2\pi}\angle(D(A,h(A)), D(B,h(B)))\ mod 1$$

onde $\angle(D(A,h(A)), D(B,h(B)))$ denota o ângulo agudo entre $D(A,h(A))$ e $D(B,h(B))$.

(d) *Seja $C = C_1C_2$ a curva justaposição das curvas C_1 e C_2, então:*

$$Ind(C|_h) = Ind(C_1|_h) + Ind(C_2|_h)$$

$$Ind(C^*|_h) = -Ind(C|_h)$$

onde C^* denota C percorrida na direção inversa.

(e) $Ind(h(C)|_{h^{-1}}) = Ind(C|_h)$.

2.2 Prova do Teorema A

Nesta seção provaremos o Teorema A, o qual é análogo ao Teorema 1.7, no sentido de que a partir de algumas hipóteses impostas sobre o número de translação podemos concluir a existência de um ponto periódico.

Teorema A. *Suponha que* $f \in Hom_+(\mathbb{A})$ *preserva as componentes da fronteira e preserva área e seja* $F : \widetilde{\mathbb{A}} \to \widetilde{\mathbb{A}}$ *um levantamento para* f. *Se* $F_0(x) = F(x,0)$, $F_1(x) = F(x,1)$ *e* $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ *são tais que*

$$\tau(F_0) \leq \frac{p}{q} \leq \tau(F_1),$$

então F *tem pelo menos dois pontos com número de translação* $\frac{p}{q}$ *os quais são levantamentos de pontos periódicos de* f *de órbitas distintas, de período* q *e número de rotação* $\frac{p}{q} + \mathbb{Z} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Observação 2.1. Suponha que $f \in Hom_+(\mathbb{A})$ e seja $F : \widetilde{\mathbb{A}} \to \widetilde{\mathbb{A}}$ um levantamento para f, satisfazendo as hipóteses do teorema A. Então:

(i) Fazendo $G = F^q$ e $G_j = F_j^q$ com $j = 0, 1$, basta provar que existem dois pontos fixos distintos de G.

(ii) A hipótese de f ser um homeomorfismo que preserva área não pode ser relaxada, como mostra o seguinte exemplo.

Exemplo 2.1. Seja $f \in Hom_+(\mathbb{A})$ definido por: $f(x,y) = (x + \frac{1}{2} - y, \sqrt{y})$ então $f_0(x,0) = (x + \frac{1}{2}, 0)$ e $f_1(x,1) = (x - \frac{1}{2}, 1)$ f não preserva área(veja Figura 2.2.).

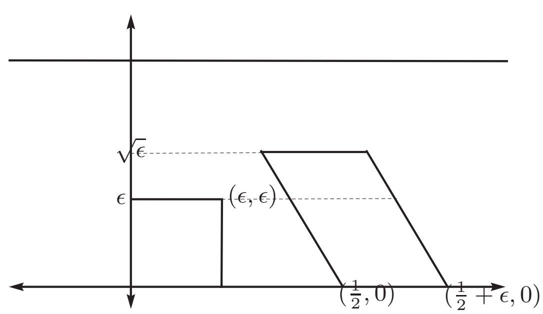

Figura 2.2:

Mais ainda, $\tau(F_0) = -\frac{1}{2} \leq 0 \leq \frac{1}{2} = \tau(F_1)$, mais f não tem pontos fixos.

Demonstração: A prova será feita em duas etapas, na primeira provaremos a existência do primeiro ponto fixo, e com um argumento similar , finalmente provaremos a existência do segundo ponto fixo.

Primeira Etapa (Existência do primeiro ponto fixo): Suponhamos que f não tem pontos fixos. Como A é compacto, existe $\delta > 0$ tal que:

$$|f(x,y)-(x,y)| > \delta, \quad \text{para todo } (x,y) \in \mathbb{A}.$$

A aplicação $\widetilde{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$\widetilde{F}(x,y) = \begin{cases} F(x,1) + (0, y-1), & \text{se} \quad y > 1 \\ F(x,y), & \text{se} \quad 0 \leq y \leq 1 \\ F(x,0) + (0,y), & \text{se} \quad y < 0 \end{cases}$$

é um homeomorfismo, que estende F, tal que:

$$|\widetilde{F}(x,y) - (x,y)| > \delta.$$

Sejam $H_- = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 0\}$ e $H_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 1\}$ então
Afirmação: Existe uma curva simple β, cujo ponto inicial e final, respectivamente, pertencem a H_- e H_+ tal que:

(i) $Ind(\beta|_{\widetilde{F}}) = -\frac{1}{2}$.

(ii) $Ind(\widetilde{F}(\beta)|_{\widetilde{F}^{-1}}) = \frac{1}{2}$.

Mas esta afirmação contradiz o item (e) da Proposição 2.1. Portanto f possui pelo menos um ponto fixo.

Agora vamos mostrar a nossa afirmação. De fato, dado $\epsilon \in (0,\delta)$, consideremos a seguinte perturbação de $\widetilde{F}$

$$\widetilde{F}_\epsilon(z) = \widetilde{F}(z) + (0,\epsilon), \text{onde } z = (x,y).$$

Como $|\widetilde{F}_\epsilon(z) - z| = |\widetilde{F}(z) - z + (0,\epsilon)| \geq |\widetilde{F}(z) - z| - \epsilon > 0$ e $\widetilde{F}(\mathbb{R}\times\{0\}) = \mathbb{R}\times\{0\}$, então $\widetilde{F}_\epsilon$ não tem pontos fixos e $\widetilde{F}_\epsilon(\mathbb{R}\times\{0\}) = \mathbb{R}\times\{\epsilon\}$. Além disso, como $\widetilde{F}_\epsilon|_{\mathbb{R}\times I}$ preserva área e $\widetilde{F}_\epsilon(\mathbb{R}\times[0,\epsilon)) \cap (\mathbb{R}\times[0,\epsilon)) = \emptyset$ temos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\widetilde{F}_\epsilon^{n-1}(\mathbb{R}\times[0,\epsilon)) \cap (\mathbb{R}\times\{1\}) \neq \emptyset.$$

Ou seja, existe $z_0 \in H_-$ tal que $\widetilde{F}_\epsilon^n(z_0) = z_n \in \mathbb{R}\times\{1\}$. Seja

$$\Gamma_\epsilon = r_0 \cup \widetilde{F}_\epsilon(r_0) \cup ... \cup \widetilde{F}_\epsilon^{n-1}(r_0)$$

a curva cujo ponto inicial é z_0 e ponto final é z_n, onde r_0 é o segmento de reta com ponto inicial z_0 ao ponto final $z_1 = \widetilde{F}_\epsilon(z_0)$. Seja $z_{n+1} = \widetilde{F}_\epsilon^{n+1}(z_0)$. Como $\widetilde{F}_\epsilon(\Gamma_\epsilon) \subset \Gamma_\epsilon \cup \widetilde{F}_\epsilon^n(r_0)$, então (ver Figura 2.3.):

$$Ind(\Gamma_\epsilon|_{\widetilde{F}_\epsilon}) = \frac{1}{2\pi}\angle(\overrightarrow{z_0z_1}, \overrightarrow{z_nz_{n+1}}) = \frac{1}{2\pi}\{-\pi - [\arctan(\frac{\epsilon}{\widetilde{F}(z_n)}) + \arctan(\frac{\epsilon}{\widetilde{F}(z_0)})]\} \quad (2.1)$$

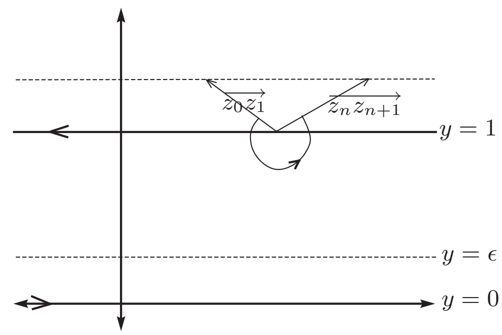

Figura 2.3:

Por outro lado, sejam $\eta = \eta(\epsilon) = P_2(z_0)$ e β_ϵ um segmento de reta vertical cujo ponto inicial está em $\mathbb{R} \times \{\eta\}$ e ponto final esta em $\mathbb{R} \times \{1\}$ tal que $\Gamma_\epsilon \cap \beta_\epsilon = \emptyset$, veja Figura 2.4. Se $\beta = \beta_\epsilon \cap \mathbb{R} \times I$, como $\eta \to 0$ quando $\epsilon \to 0$, então $\lim_{\epsilon\to 0}\beta_\epsilon = \beta$. A seguir mostraremos que β satisfaz (i) e (ii) de nossa afirmação.

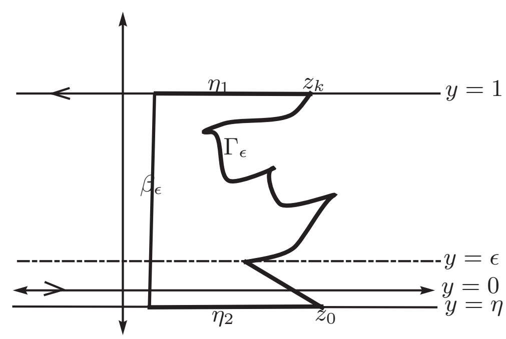

Figura 2.4:

Seja Ω a curva fechada simple, orientada positivamente, formada por β_ϵ, Γ_ϵ e dois segmentos horizontais $\eta_0 \subset \mathbb{R} \times \{\eta\}$, $\eta_1 \subset \mathbb{R} \times \{1\}$. Então

$$Ind(\Omega|_{\widetilde{F}_\epsilon}) = 0 = Ind(\Gamma_\epsilon|_{\widetilde{F}_\epsilon}) + Ind(\eta_1|_{\widetilde{F}_\epsilon}) + Ind(\beta_\epsilon^*|_{\widetilde{F}_\epsilon}) + Ind(\eta_2|_{\widetilde{F}_\epsilon})$$

onde β_ϵ^* denota o caminho inverso de β_ϵ. Mas, $Ind(\eta_1|_{\widetilde{F}_\epsilon}) = Ind(\eta_2|_{\widetilde{F}_\epsilon}) = 0$, então temos

$$Ind(\beta_\epsilon|_{\widetilde{F}_\epsilon}) = Ind(\Gamma_\epsilon|_{\widetilde{F}_\epsilon})$$

Logo da Equação 2.1 obtemos que

$$Ind(\beta|_{\widetilde{F}}) = \lim_{\epsilon \to 0} Ind(\beta_\epsilon|_{\widetilde{F}_\epsilon}) = -\frac{1}{2}$$

Isto mostra (i) da afirmação.

Agora mostraremos o item (ii). Procedendo da mesma forma do que no item anterior e utilizando $\widetilde{F_\epsilon}^{-1}$ ao invés de $\widetilde{F_\epsilon}$ e $\widetilde{F_\epsilon}(\beta_\epsilon)$ ao invés de β_ϵ temos

$$Ind(\Gamma_\epsilon|_{\widetilde{F}_\epsilon^{-1}}) = \frac{1}{2\pi}\left\{\pi - \left[\arctan\left(\frac{\epsilon}{\widetilde{F}^{-1}(z_{n-1})}\right) + \arctan\left(\frac{\epsilon}{\widetilde{F}^{-1}(z_1)}\right)\right]\right\}$$

e

$$Ind(\widetilde{F_\epsilon}(\beta_\epsilon)|_{\widetilde{F}_\epsilon^{-1}}) = Ind(\Gamma_\epsilon|_{\widetilde{F}_\epsilon^{-1}})$$

E daí,

$$Ind(\widetilde{F}(\beta)|_{\widetilde{F}^{-1}}) = \lim_{\epsilon \to 0} Ind(\widetilde{F_\epsilon}(\beta_\epsilon)|_{\widetilde{F}_\epsilon^{-1}}) = \frac{1}{2}$$

Isto conclui a prova de nossa afirmação.

Segunda Etapa (existência do segundo ponto fixo): Pela primeira etapa, existe p um ponto fixo de $\widetilde{F}$. Por contradição, suponhamos que f possui um único ponto fixo, o qual naturalmente é $\widetilde{\pi}(p)$. Então os únicos pontos fixos de $\widetilde{F}$ são $p + (k, 0)$ onde $k \in \mathbb{Z}$.

Construiremos uma curva simples $C : I \to \mathbb{R}^2 \setminus Fix(\widetilde{F})$ tal que $C(0) \in H_-$, $C(1) \in H_+$ e

$$Ind(C|_{\widetilde{F}}) = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad Ind(\widetilde{F}(C)|_{\widetilde{F}^{-1}}) = -\frac{1}{2}. \tag{2.2}$$

Isto será uma contradição com a seguinte afirmação, e concluirá a prova do Teorema A.

Afirmação: *O índice $Ind(C|_{\widetilde{F}})$ é constante para qualquer curva simples $C : I \to \mathbb{R}^2 \setminus Fix(\widetilde{F})$ com $C(0) \in H_-$ e $C(1) \in H_+$.*

De fato, sejam $C_1, C_2 : I \to \mathbb{R}^2 \setminus Fix(\widetilde{F})$ duas curvas simples tais que $C_1(0), C_2(0) \in H_-$ e $C_1(1), C_2(1) \in H_+$. Vamos mostrar que:

$$Ind(C_1|_{\widetilde{F}}) = Ind(C_2|_{\widetilde{F}})$$

Sejam $A_i = C_i(0)$, $B_i = C_i(1)$ para $i = 1, 2$, e $C_3 : I \to H_+ - Fix(\widetilde{F})$, $C_4 : I \to H_- - Fix(\widetilde{F})$ tais que $C_3(0) = B_1$, $C_3(1) = B_2$, $C_4(0) = A_2$ e $C_4(1) = A_1$, ver Figura 2.5., Escolhendo de forma apropriada as curvas C_1, C_2, C_3 e C_4, podemos supor que C', a curva fechada orientada positivamente formada pelas curvas C_1, C_2, C_3 e C_4, é simples.

Como $\overrightarrow{P\widetilde{F}(P)}$ é constante em H_- e em H_+ temos que:

$$Ind(C'|_{\widetilde{F}}) = Ind(C_1|_{\widetilde{F}}) - Ind(C_2|_{\widetilde{F}})$$

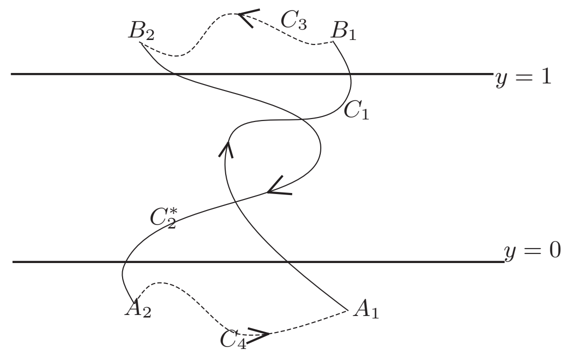

Figura 2.5:

Logo para concluir a prova da afirmação é suficiente mostrar que $Ind(C'|_{\widetilde{F}}) = 0$. Para cada $k \in \mathbb{Z}$ existe γ_k um caminho simples e fechado, contendo no seu interior o único ponto fixo $p + (k, 0)$ de $\widetilde{F}$, tal que $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus Fix(\widetilde{F}), A_1)$ é gerado por $\gamma_1, \ldots, \gamma_i, \ldots$. Podemos supor que γ_i é como na Figura 2.6. Neste caso, como $Ind(\delta_3|_{\widetilde{F}}) = -Ind(\delta_1|_{\widetilde{F}})$ e $Ind(\delta_2|_{\widetilde{F}}) = 0 = Ind(\delta_4|_{\widetilde{F}})$, temos

$$Ind(\gamma_i|_{\widetilde{F}}) = Ind(\delta_1|_{\widetilde{F}}) + Ind(\delta_2|_{\widetilde{F}}) + Ind(\delta_3|_{\widetilde{F}}) + Ind(\delta_4|_{\widetilde{F}}) = 0$$

Conseqüentemente, como C' é uma composição dos γ_i's, então $Ind(C'|_{\widetilde{F}}) = 0$.

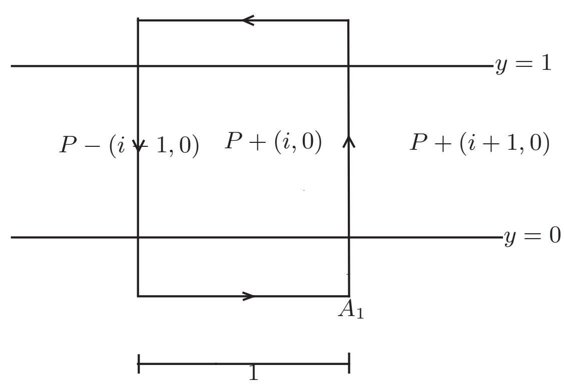

Figura 2.6:

Finalmente construiremos a curva C.

Construção da curva C: a menos de uma composição de $\widetilde{F}$ com uma translação, podemos supor que $p = (0, 0)$. O conjunto

$$W = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : k + \frac{1}{4} \leq x \leq k + \frac{3}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

não contém nenhum ponto fixo de $\widetilde{F}$. Logo, pela periodicidade de $\widetilde{F}$ e a compacidade

$\left\{(x,y) : \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}, 0 \leq y \leq 1\right\}$, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$|z - F(z)| > \epsilon \text{ para cada } z \in W.$$

.

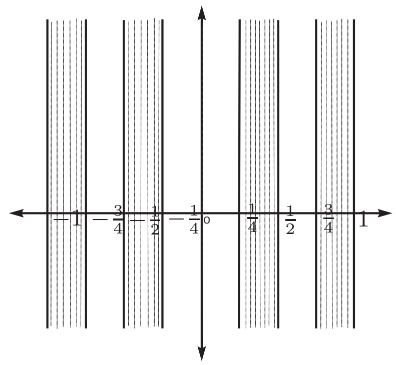

Figura 2.7:

A aplicação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y) = (x, y + \frac{\epsilon}{2}[|\cos(2\pi x)| - \cos(2\pi x)])$ tem as seguintes propriedades:

(1) Preserva área, pois $det(DT_{(x,y)}) = 1$

(2) É constante em cada linha vertical, mais ainda, T só move pontos de W, e ele move uma distância no máximo ϵ

(3) $T \circ \widetilde{F}$ não tem ponto fixo em W, pois caso contrário, se $T \circ \widetilde{F}(q) = q$ com $q \in W$, então:

$$\epsilon \geq \left|T \circ \widetilde{F}(q) - \widetilde{F}(q))\right| = \left|\widetilde{F}(q) - q\right| > \epsilon$$

Vamos encontrar a curva C satisfazendo a Equação 2.2. Os conjuntos

$$D_0 = H_- - (T \circ \widetilde{F})^{-1}(H_-) \text{ e } D_i = (T \circ \widetilde{F})^i D_0 \text{ para } i \in \mathbb{Z}$$

satisfazem

$$D_i \subset Int(\mathbb{R} \times I) \cup H_+, \quad i \geq 1 \text{ e } D_i \subset H_-, \quad i \leq 0$$

em particular temos:

$$D_i \cap D_0 = \emptyset, \text{ para } i > 0$$

Como T e $\widetilde{F}$ preservam área, $T \circ \widetilde{F}$ também preserva área, então $Area(D_0) = Area(D_i)$ para cada $i \in \mathbb{Z}$ Daí, existe $n > 0$ tal que

$$(T \circ \widetilde{F})^n(H_-) \cap H_+ \neq \emptyset,$$

ou seja, existe $p_0 \in H_-$ tal que $p_n = (T \circ \widetilde{F})^n(p_0) \in H_+$. Pondo $p_{-1} = (T \circ \widetilde{F})^{-1}(p_0)$ e $p_{n+1} = (T \circ \widetilde{F})(p_n)$ temos $p_{-1}, p_0 \in H_-$ *e* $p_n, p_{n+1} \in H_+$. Sejam C_0, o segmento de reta com ponto inicial p_{-1} e ponto final p_0, e $C_i = (T \circ \widetilde{F})^i(C_0)$, para todo $i \in \mathbb{N}$.

Consideremos a curva $C = C_0C_1 \cdots C_{n-1}$ que é a composição das curvas $C_0, C_1, ..., C_{n-1}$. Como

$$T \circ \widetilde{F}(C) = C_1C_2...C_n,$$

temos que C é uma curva simples. Por construção, o ângulo entre $\overrightarrow{p_{-1}p_0}$ e $\overrightarrow{p_np_{n+1}}$, ver Figura 2.8, é:

$$\theta = \pi - [\arctan(\frac{\epsilon}{|\widetilde{F}(p_n)|}) + \arctan(\frac{\epsilon}{|\widetilde{F}(p_1)|})],$$

portanto

$$Ind(C|_{T\circ\widetilde{F}}) = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi}[\arctan(\frac{\epsilon}{|\widetilde{F}(p_n)|}) + \arctan(\frac{\epsilon}{|\widetilde{F}(p_1)|})]$$

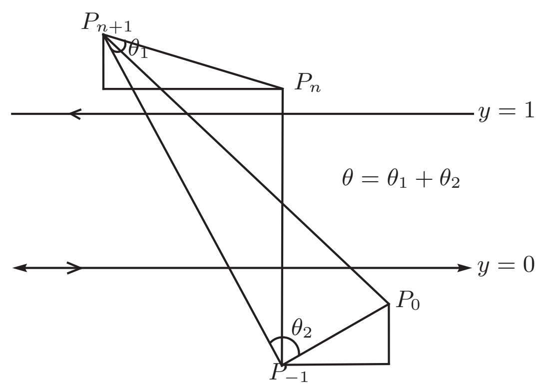

Figura 2.8:

A aplicação $T_s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T_s(x, y) = (x, y + \frac{s\epsilon}{2}(|\cos(2\pi x)| - \cos(2\pi x)))$ é uma deformação contínua de Id com relação a $s \in [0, 1]$ tal que $T_1 = T$. logo

$$Ind(C|_{T_s\circ\widetilde{F}}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi}[\arctan(\frac{s\epsilon}{|\widetilde{F}(p_n)|}) + \arctan(\frac{s\epsilon}{|\widetilde{F}(P_1)|})].$$

Em particular, tomando $s = 0$, temos

$$Ind(C|_{\widetilde{F}}) = \frac{1}{2}$$

De maneira análoga, usando o mesmo argumento para $\widetilde{F}^{-1}$ em lugar de $\widetilde{F}$ e $\widetilde{F}(C)$ em lugar de C, obtemos que

$$Ind(\widetilde{F}(C)|_{\widetilde{F}^{-1}}) = -\frac{1}{2}$$

$\blacksquare$

Capítulo 3

Algumas versões do Teorema de Poincaré - Birkhoff

No presente capítulo mostraremos o Teorema B e usando este são dados dois corolários, Corolário 3.2.1 e Corolário 3.2.2, os quais de alguma forma são "versões" do Teorema de Poincaré-Birkhoff. Em todos estes resultados, os quais foram obtidos por J. Franks em [13], os conceitos de pontos recorrentes por cadeias e cadeia transitiva são fundamentais e serão estudados na Seção 3.1.

3.1 Lema Fundamental

Nesta seção apresentamos o conceito ponto recorrente por cadeias e cadeia transitiva. Em seguida algumas propriedades envolvendo estes conceitos para finalmente mostrar o Lema Fundamental, Lema 3.1.

Definição 3.1. Se $f : X \to X$ é um homeomorfismo de um espaço métrico (X, d), uma ϵ-cadeia de x a y é uma seqüência: $\{x_0 = x, x_1, x_2, ..., x_n = y\}$ $n \geq 1$ tal que:

$$d(f(x_i) - x_{i+1}) < \epsilon \text{ para } i = 0, \ldots, n-1$$

Um conjunto invariante Λ é chamado *transitivo por cadeias* se para qualquer $\epsilon > 0$ e qualquer $x, y \in \Lambda$ existe uma ϵ-cadeia de x a y. Um ponto $x \in X$ é *recorrente por cadeias*, se para qualquer $\epsilon > 0$ existe uma ϵ-cadeia de x a x.

Observação 3.1. Se $f : X \to X$ é um homeomorfismo de um espaço métrico:

(i) Se x é um ponto periódico para f então x é um ponto recorrente por cadeias para f.

(ii) Se x é um ponto recorrente para f então x é um ponto recorrente por cadeias para f.

O objetivo principal desta seção é provar o seguinte lemma.

Lema 3.1 (Lema Fundamental do Teorema B)**.** *Suponha que $f : M^2 \to M^2$ é um homeomorfismo de uma superfície compacta M cujo recobrimento universal $\widetilde{M}$ é $\mathbb{R}^2$ ou $\widetilde{\mathbb{A}}$. Se $F : \widetilde{M} \to \widetilde{M}$ é um levantamento de f o qual tem um ponto recorrente por cadeias, então F tem um ponto fixo, e portanto f.*

Para provar este lema precisamos de alguns resultados, os quais, enunciamos e provamos a seguir.

Proposição 3.1. *Suponha que Λ é um subconjunto invariante, fechado e conexo de X e que qualquer ponto de Λ é recorrente por cadeias, então Λ é transitivo por cadeias.*

Demonstração: Dado $x \in \Lambda$ e $\epsilon > 0$, o conjunto

$$A_x = \{y \in \Lambda | \text{ existe uma } \epsilon - \text{cadeia de } x \ a \ y\}$$

é aberto. Se provarmos que A_x é fechado, já que Δ é conexo, teremos $A_x = \Delta$. Conseqüentemente, Δ será transitivo por cadeias.

Mostramos a seguir que A_x é fechado. De fato, suponhamos que $y' \in \overline{A_x}$. Para $\epsilon > 0$ existe $y \in A_x$ tal que:

$$|y - y'| < \frac{\epsilon}{2}$$

Como Λ é recorrente por cadeias existe uma $\frac{\epsilon}{2}$-cadeia de y para y. Daí, como $|y-y'| < \frac{\epsilon}{2}$, existe uma ϵ-cadeia de y para y'. Além disso, existe uma ϵ-cadeia de x para y, pois $y \in A_x$. Resumindo existe:

1. uma ϵ-cadeia de y para y';

2. uma ϵ-cadeia de x para y.

Conseqüentemente, existe uma ϵ-cadeia de x para y', ou seja, $y' \in A_x$. Isto mostra que A_x é fechado, terminando assim a prova. ■

Definição 3.2. Seja $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um homeomorfismo, um arco $\alpha = p_0p_1$ é um *arco de translação para h* se:

(a) $h(p_0) = p_1$;

(b) $\alpha \cap h(\alpha) = \{p_1\}$.

Em [5], M. Brown, prova o seguinte corolário:

Corolário 3.1.1. *Seja $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um homeomorfismo sem pontos fixos que preserva orientação e seja $\alpha = p_0p_1$ um arco tal que $h(p_0) = p_1$ e $(\alpha - \{p_1\}) \cap h(\alpha - \{p_1\}) = \emptyset$ então α é um arco de translação.*

Para provar o seguinte resultado é necessário o seguinte Lema devido a Brouwer [5].

Lema 3.2. *Seja $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um homeomorfismo sem pontos fixos que preserva orientação e seja $\alpha = p_0p_1$ um arco de translação para h. Então para cada inteiro $n \geq 2$, $h^n(\alpha) \cap \alpha = \emptyset$.*

Teorema 3.1. *Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é um homeomorfismo que preserva orientação e possui um ponto periódico p, então f possui um ponto fixo.*

Demonstração: Seja p um ponto periódico não fixo de f e seja

$$a = sup\{r | B_r(p) \bigcap f(B_r(p)) = \emptyset\}.$$

A existência de a está garantida pois, como $B_r(p) \bigcap f(B_r(p)) \neq \emptyset$ para $r = 2|f(p) - p|$, temos que $2|f(p) - p|$ é um limite superior do conjunto $\{r|B_r(p) \bigcap f(B_r(p)) = \emptyset\}$.

Afirmação: $\partial B_a(p) \bigcap \partial f(B_a(p)) \neq \emptyset$
De fato, se $\partial B_a(p) \bigcap \partial f(B_a(p)) = \emptyset$, então para $\eta = dist(\partial B_a(p), \partial f(B - a(p))) > 0$ temos que

$$B_{a+\frac{\eta}{4}}(p) \cap f(B_{a+\frac{\eta}{4}}(p)) = \emptyset.$$

Mas isto contradiz a escolha de a.

Sejam $x \in \partial B_a(p) \bigcap \partial f(B_a(p))$ e γ um arco que liga $f^{-1}(x) \in \partial B_a(p)$ a x cujo interior contém p e está contido no interior de $B_a(p)$, como na figura 3.3. Isto implica que

$$\gamma \cap f(\gamma) \subseteq \left\{x, f^{-1}(x)\right\}$$

Pelo Lema de Brouwer, Lema 3.2, temos que

$$f^n(\gamma) \cap \gamma = \emptyset \ \ \forall\, n \geq 2 \ \ ou \ \ f \text{ tem ponto fixo.}$$

A primeira possibilidade não é verdadeira pois γ contém o ponto periódico p. Portanto, f tem um ponto fixo. ■

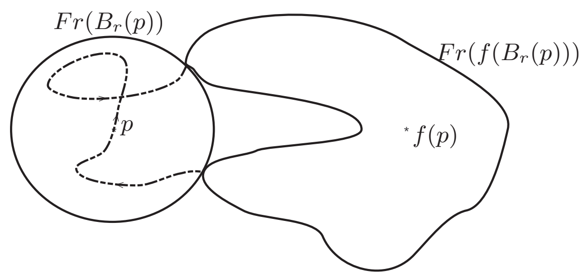

Figura 3.1:

Finalmente, para poder provar o Lema 3.1, precisamos do seguinte teorema devido a John C. Oxtoby cuja prova pode ser encontrada em [23] (Teorema 4).

Teorema 3.2. *Sejam $\{p_j, q_j\}$ $j = 1, 2, ..., m$ pares disjuntos de pontos no plano e seja U um conjunto aberto que contém arcos circulares, maiores que um semicírculo, ligando p_j com q_j. Então existem arcos poligonais disjuntos $A_1, A_2, ..., A_m$ tais que A_j liga os pontos p_j com q_j, $A_j \subset U$, e $|p - q| < |p_j - q_j|$ para todo $p, q \in A_j$, com $\{p, q\} \neq \{p_j, q_j\}$*

Demonstração do Lema 3.1: Suponhamos que F não tem ponto fixo, como M é compacta, então existe $\delta > 0$ tal que:

$$|F(x) - x| > \delta \;\text{ para }\; \text{todo } \; x \in \widetilde{M}$$

portanto cada $G : \widetilde{M} \to \widetilde{M}$ tal que $|G(x) - F(x)| < \frac{\delta}{2}$ para todo $x \in \widetilde{M}$, não tem pontos fixos.

Usando os Teoremas 3.2 e 3.1 mostraremos que existe uma G, como acima, a qual tem ponto fixo. Esta contradição terminará a prova do lema.

De fato, seja $\{x_0, x_1, ..., x_{n+1} = x_0\}$ uma $\frac{\delta}{4}$-cadeia para F, isto é,

$$|F(x_i) - x_{i+1}| < \frac{\delta}{4}, \quad 0 \leq i \leq n$$

Podemos supor que os pares $\{F(x_i), x_{i+1}\}$ são disjuntos, se necessário perturbamos F. Pelo Teorema 3.2 é possível achar arcos poligonais disjuntos γ_i ligando $F(x_i)$ e x_{i+1} ($F(x_n)$ com x_0 no caso de γ_n) tal que

$$diam(\gamma_i) < \frac{\delta}{4} \text{ com } i = 0, \ldots, n$$

Por outro lado, pelo Lema de Isotopia (ver página 512 de [8]), podemos achar um difeomorfismo

$$h_j : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

suportado em vizinhanças simplesmente conexas de γ_j, disjuntas, tais que $h_j(F(x_j)) = x_{j+1}$, para $j = 1, 2, ..., m$, logo se consideramos

$$h = h_0 \circ h_1 \circ ... \circ h_m$$

teremos construído un homeomorfismo (de fato um difeomorfismo) definido en $\mathbb{R}^2$, tais que $|h(x) - x| < \frac{\delta}{3}$.
Logo, se definimos $G(x) = h(F(x))$, temos que

$$|F(x) - G(x)| < \frac{\delta}{2}, \quad \text{para todo } x \in \widetilde{M}$$

Além disso também temos que $G^m(x_0) = x_0$. Portanto, segue do Lema 3.1 que G tem ponto fixo, o que é uma contradição. Conseqüêntemente, F tem ponto fixo. ■

3.2 O Teorema B e suas conseqüências

Nesta seção provaremos o Teorema B e algumas de suas conseqüências. O seguinte lema será necessário.

Lema 3.3. *Suponha que $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ é um homeomorfismo do anel homotópico a identidade e seja $\Lambda \subseteq \mathbb{A}$ é um compacto invariante transitivo por cadeia. Se $F : \widetilde{\mathbb{A}} \to \widetilde{\mathbb{A}}$ é um levantamento de f então, dado $M > 0$, uma das seguintes possibilidades é satisfeita:*

(a) *F tem um ponto fixo;*

(b) $\lim_{n\to\infty}(F^n(x) - x)_1 = +\infty$ *para todo* $x \in \widetilde{\pi}^{-1}(\Lambda)$,*;*

(c) $\lim_{n\to\infty}(F^n(x) - x)_1 = -\infty$ *para todo* $x \in \widetilde{\pi}^{-1}(\Lambda)$,*;*

(d) *Existem $y_1, y_2 \in \widetilde{\pi}^{-1}(\Lambda)$ tais que:*

$$(F^p(y_1) - y_1)_1 > M \; e \; (F^q(y_2) - y_2)_1 < -M \quad \text{para alguns } p, q > 0.$$

Demonstração: De fato, suponhamos que para algum M uma das desigualdades do item (d) não é satisfeita (digamos a segunda, o outro caso é similar). Logo, para todo $y \in \widetilde{\pi}^{-1}(\Lambda)$ e para todo $n > 0$,

$$(F^n(y) - y)_1 \geq -M, \text{ ou seja, limitado inferiormente.}$$

Se para todo $y \in \widetilde{\pi}^{-1}(\Lambda)$ o conjunto $\{(F^n(y) - y)_1 : n \in \mathbb{N}\}$ é ilimitado, então é ilimitado superiormente. Agora, de

(1) F comuta com a translação $h(x) = x + (1, 0)$ e

(2) $\widetilde{\pi}^{-1}(\Lambda)\bigcap([0,1]\times I)$ é compacto,

segue que $\lim_{n\to\infty}(F^n(x))_1 = \infty$. Isto prova o item (b)

Finalmente, se para algum $x \in \widetilde{\pi}^{-1}(\Lambda)$ o conjunto $\{(F^n(x)-x)_1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ é limitado, então mostraremos que F possui um ponto recorrente por cadeias. Conseqüentemente, pelo Lema 3.1, (a) é verdadeiro.

De fato, neste caso $\{F^n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$ é necessariamente limitado, pois ele é limitado na segunda coordenada. Logo existem x_0 e $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ (podemos supor que esta seqüência é crescente) tais que

$$\lim_{k\to\infty} F^{n_k}(x) = x_0.$$

Mostraremos que x_0 é recorrente por cadeias. Dado $\epsilon > 0$, segue da continuidade uniforme de F que existe $\delta < \frac{\epsilon}{2}$ tal que

$$|x-y| < \delta \Rightarrow |F(x) - F(y))| < \epsilon.$$

Mas para $\delta > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq k_0$

$$|F^{n_k}(x) - x_0| < \delta < \epsilon$$

.

Como $n_{k_0+1} > n_{k_0}$, existe $r > 0$ tal que $n_{k_0} + r = n_{k_0+1}$. Logo se

$$y_k = \begin{cases} x_0, & k = 0 \\ F^{n_{k_0}+j}(x), & j = 1, 2, ..., r-1 \\ x_0, & k = r \end{cases},$$

então $\{y_0, \ldots, y_r\}$ é uma ϵ-cadeia de x_0 a x_0, pois, $|F(y_0) - y_1| = \left|F(x_0) - F^{n_{k_0}+1}(x)\right| < \epsilon$ e $|F(y_{r-1}) - y_r| = \left|F^{n_{k_0}+r}(x)x_0\right| = |F^{n_{k_0+1}}(x) - x_0| < \epsilon$. ∎

Teorema B. *Suponha que $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ é um homeomorfismo do anel o qual é homotópico a identidade e $\Lambda \subseteq \mathbb{A}$ é um compacto invariante transitivo por cadeias. Seja $F : \widetilde{\mathbb{A}} \to \widetilde{\mathbb{A}}$ um levantamento de f, então uma das seguintes afirmações é satisfeita:*

(a) *F tem um ponto fixo;*

(b) *Para todo $x \in \widetilde{\pi}^{-1}(\Lambda)$*

$$\lim_{n\to\infty}(F^n(x) - x)_1 = +\infty$$

onde $\widetilde{\pi} : \widetilde{\mathbb{A}} \to \mathbb{A}$ definido por $\widetilde{\pi}(x,y) = (e^{2\pi i x}, y)$ é a projeção recobrimento e $(\cdot,\cdot)_1$ denota a primeira componente;

(c) *Para todo* $x \in \widetilde{\pi}^{-1}(\Lambda)$

$$\lim_{n\to\infty}(F^n(x)-x)_1 = -\infty.$$

Em (b) e (c) os limites são uniformes em x.

Demonstração: Usando o Lema 3.3 é suficiente mostrar que o item (d) do Lema 3.3, implica a existência de um ponto fixo para F. Para isto, mostraremos que existe um ponto recorrente por cadeias para F. Da transitividade por cadeias de Λ obtemos:

(1) Dados $u, v \in \pi_{-1}(\Lambda)$, arbitrários, existe uma ϵ-cadeia $\{\pi(u_i)\}_{i=0}^n$ ligando $\pi(u)$ e $\pi(v)$. Levantando esta ϵ-cadeia para $\widetilde{\mathbb{A}}$ temos que existe uma ϵ-cadeia de F ligando u com $v+(r,0)$, para algum $r \in \mathbb{Z}$.

Mais ainda, pela continuidade uniforme de F e a compacidade do domínio fundamental de F, temos que

(2) para qualquer r como no item (1) temos $|r| < D$ para algum $D = D(\epsilon) > 0$.

Para $M > 4D$, sejam $y_1, y_2 \in \pi^{-1}(\Delta)$ dados pelo item (d) do Lema 3.3. Logo de (1) e (2) para qualquer ponto $x_0 \in \pi^{-1}(\Delta)$ temos as seguintes propriedades:

(3) existe uma ϵ-cadeia de F que liga x_0 a $y_1+(r_1,0)$ para algum $r_1 \in \mathbb{Z}$ com $|r_1| < D$.

(4) existe uma ϵ-cadeia F que liga $F^p(y_1+(r_1,0))$ a $x_0+(r_2,0)$ para algum $r_2 \in \mathbb{Z}$ com $|r_2| < D$.

Como $\{F^j(y_1+(r_1,0))\}_{j=0}^p$ é uma ϵ-cadeia de F que liga $y_1+(r_1,0)$ com $F^p(y_1+(r_1,0))$ e, pelo item (d) do Lema 3.3,

$$\big(F^p(y_1+(r_1,0)) - (y_1+(r_1,0))\big)_1 > 4D,$$

temos que

(5) existe uma ϵ-cadeia de F ligando x_0 e $x_0+(r,0)$ para algum $r \in \mathbb{Z}$ com $r > 2D$.

Com argumentos similares para a segunda desigualdade de (d) e considerando $x_0 + (r,0)$ em lugar de x_0 mostramos que

(6) existe uma ϵ-cadeia de F ligando $x_0+(r,0)$ e $x_0+(r,0)-(s,0)$ para algum $s \in \mathbb{Z}$ com $s > 2D$.

Se $r = s$, de (5) e (6) obtemos uma ϵ-cadeia que liga x_0 com $x_0+(r,0)-(s,r) = x_0$. Isto mostra que x_0 é recorrente por cadeias.

Finalmente, assumamos que $r \neq s$. Transladando por $(r, 0)$, $(s-1)$-vezes, a ϵ-cadeia dada em (5), obtemos uma ϵ-cadeia ligando x_0 a $x_0 + (sr, 0)$. Analogamente, transladando s-vezes por $(r, 0)$ e $(r-1)$-vezes por $(-s, 0)$ a ϵ-cadeia dada em (6), obtemos uma ϵ-cadeia ligando $x_0 + (rs, 0)$ a $x_0 + (rs, 0) - (sr, 0) = x_0$. Daqui, obtemos uma ϵ-cadeia ligando x_0 a ele mesmo. Portanto x_0 é um ponto recorrente por cadeias, concluindo a prova do teorema. ■

Na seguinte observação mostramos que a hipótese de recorrência por cadeias é mais fraca do que preservar área.

Observação 3.2. *Se $T : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ preserva área então:*

(i) Todo ponto de $\mathbb{A}$ é recorrente por cadeia;

(ii) $\mathbb{A}$ é uma cadeia transitiva.

Com efeito,

Provando (i): Dado $\epsilon > 0$, pela continuidade uniforme de f, existe $\delta > 0$ com $\delta < \frac{\epsilon}{2}$ tal que;

$$\text{se } |x - u| < \delta \text{ então } |f(x) - f(u)| < \frac{\epsilon}{2}$$

Por outro lado, desde que $\mathbb{A}$ é compacto,

$$\mathbb{A} = \bigcup_{i=1}^{N} B(z_i, \delta)$$

com $z_i \in \mathbb{A}$.

Se f preserva área, para cada $i = 1, 2, ..., N$ existe $n_i \in \mathbb{N}$ tal que:

$$f^{-n_i}(B(z_i, \delta)) \bigcap B(z_i, \delta) \neq \emptyset$$

Seja $u_i \in f^{-n_i}(B(z_i, \delta)) \bigcap B(z_i, \delta)$ e

$$x_k = \begin{cases} z_i, & k = 0 \\ T^k(u_i), & k = 1, 2, ..., n_{i-1} \\ z_i, & k = n_i \end{cases}$$

então afirmamos que $\{x_0, \ldots, x_{n_i}\}$ é uma $\frac{\epsilon}{2}$-cadeia de z_i em z_i. De fato,

(1) $|f(x_0) - x_1| = |f(z_i) - f(u_i)| < \frac{\epsilon}{2}$ pois $|z_i - u_i| < \delta$

(2) se $f(x_{n_{i-1}}) = f^{n_i}(u_i) \in B(z_i, \delta)$, então $\left|f(x_{n_{i-1}}) - z_i\right| < \delta < \frac{\epsilon}{2}$.

Agora seja $z \in \mathbb{A}$ arbitrário, então existe $i \in \{1, 2, ..., N\}$ tal que $z \in B(z_i, \delta)$. Seja

$$x_k = \begin{cases} z, & k = 0 \\ f^j(u_i), & k = 1, 2, ..., n_{i-1} \\ z, & k = n_i \end{cases}$$

Afirmamos que $\{x_0, \ldots, x_{n_i}\}$ é uma $\frac{\epsilon}{2}$-cadeia de z em z. De fato, como

$$|f(x_0) - x_1| = |f(z) - f(u_i)| \leq |f(z) - f(z_i) + f(z_i) - f(u_i)| < \epsilon$$

e

$$\left|f(x_{n_{i-1}}) - x_{n_i}\right| = \left|f^{n-i}(u_i) - z\right| \leq \left|f(x_{n_{i-1}}) - z_i\right| + |z_i - z| < \epsilon$$

temos que

$$|f(x_0) - x_1| = |f(z) - f(u_i)| < \epsilon \;\text{ e }\; \left|f(x_{n_{i-1}}) - x_{n_i}\right| < \epsilon,$$

respectivamente.

Provando (ii): Sejam $x, u \in \mathbb{A}$, podemos escolher $z_{i_0}, z_{i_1}, ..., z_{i_n}$ tal que:

1. $x \in B(z_{i_0}, \delta)$
2. $B(z_{i_j}, \delta) \cap B(z_{i_{j+1}}, \delta) \neq \emptyset$
3. $u \in B(z_{i_n}, \delta)$

Por (i) existe $\left\{z_{i_0} = x_0^0, x_1^0, ..., x_{n_0}^0 = z_{i_0}\right\}$ uma $\frac{\epsilon}{2}$-cadeia de z_{i_0} a z_{i_0}. Logo, se

$$x_1 \in B(z_{i_0}, \delta) \cap B(z_{i_1}, \delta),$$

então $\left\{x, x_1^0, ..., x_{n_0-1}^0, x_1\right\}$ é uma ϵ -cadeia ligando x e x_1, pois:

$$\left|f(x) - x_1^0\right| \leq |f(x) - f(z_{i_0})| + \left|f(z_{i_0})) - x_1^0\right| < \delta + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

e

$$|f(x_{n_0-1}) - x_1| \leq |f(x_{n_0-1}) - z_{i_0}| + |z_{i_0} - x_1| < \frac{\epsilon}{2} + \delta < \epsilon$$

implicam

$$\left|f(x) - x_1^0\right| < \epsilon \;\text{ e }\; |f(x_{n_0-1}) - x_1| < \epsilon.$$

Analogamente construiremos uma ϵ-cadeia ligando x_1 com x_2 onde:

$$x_2 \in B(z_{i_1}, \delta) \cap B(z_{i_2}, \delta)$$

Indutivamente construiremos uma ϵ-cadeia ligando x_{i_n} com u, ligando estas cadeias teremos uma ϵ-cadeia ligando x com u. ∎

Conseqüências do Teorema B.

A seguir provamos alguns corolários do Teorema B. Entre eles, os Corolários 3.2.1 e 3.2.2 tem espírito do Teorema de Poincaré - Birkhoff (Teorema A), pois ambos em condições semelhantes garantem a existência de pontos periódicos de aplicações do anel $\mathbb{A}$. Ao contrário do Teorema A, nestes corolários, não é necessário que o homeomorfismo preserve área.

Corolário 3.2.1. *Sejam F e Λ como no Teorema B e $x, y \in \pi^{-1}(\Lambda)$. Se*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}(F^n(x) - x)_1 \leq \frac{p}{q} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}(F^n(y) - y)_1.$$

então f possui um ponto periódico cujo número de rotação é $\frac{p}{q}$.

Demonstração: Se $T : \widetilde{\mathbb{A}} \to \widetilde{\mathbb{A}}$ é definida por $T(x) = x + (1, 0)$, então $G = T^{-p} \circ F^q$ é um levantamento de f^q e

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}(G^n(x) - x)_1 \leq 0 \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}(G^n(y) - y)_1. \tag{3.1}$$

Pelo Teorema B, uma das seguintes propriedades é satisfeita:

(1) G tem um ponto fixo.

(2) $\lim_{n\to\infty}(G^n(x) - x)_1 = +\infty$ para todo $x \in \widetilde{\pi}^{-1}(\Lambda)$.

(3) $\lim_{n\to\infty}(G^n(x) - x)_1 = -\infty$ para todo $x \in \widetilde{\pi}^{-1}(\Lambda)$.

Para mostrar o corolário é suficiente mostrar que (2) e (3) não são satisfeitos. Por contradição, se (2) é verdadeiro, então, já que $\lim(G^n(x) - x)_1 = \infty$ é uniforme em x, existe $N > 0$ tal que $(G^N(x) - x)_1 > 1$ para todo $x \in \pi^{-1}(\Lambda)$. Para $n_k = kN$ temos

$$(G^{n_k}(x) - x)_1 = \Sigma_{j=1}^{k}(G^{jN}(x) - G^{(j-1)N}(x))_1 \geq k.$$

Daí,

$$\frac{(G^{n_k}(x) - x)_1}{kN} \geq \frac{1}{N},$$

o que contradiz a relação (3.1). De forma análoga, podemos provar que o item (3) não pode ocorrer. Isto termina a demonstração do corolário. ∎

Para o próximo resultado precisamos da seguinte definição.

Seja (X, f) um sistema dinâmico. Um ponto $y \in X$ é chamado de *ponto ω-limite para $x \in X$* (*ponto α-limite para $x \in X$*) se existe uma seqüencia $n_k \to \infty$ (respectivamente, $n_k \to -\infty$) tal que $\lim_{x\to\infty} f^{n_k}(x) = y$. O conjunto de todos os pontos ω-limite para x (α-limite para x) é denotado por $\omega(x, f)$ (respectivamente, $\alpha(x, f)$).

Corolário 3.2.2. *Suponha que $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ é um homeomorfismo homotópico a identidade. Se $F : \mathbb{R} \times I \to \mathbb{R} \times I$ é um levantamento de f e para algum $x \in \mathbb{R} \times I$*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}(F^n(x) - x)_1 \leq \frac{p}{q} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}(F^n(x) - x)_1\,,$$

então f tem um ponto periódico com número de rotação $\frac{p}{q}$.

Demonstração: Se $T : \widetilde{\mathbb{A}} \to \widetilde{\mathbb{A}}$ é definida por $T(x) = x + (1, 0)$, então $G = T^{-p} \circ F^q$ é um levantamento de f^q.

Seja $\Lambda = \omega(\pi(x), f)$, então Λ é um conjunto compacto, invariante e conexo. Logo pela Proposição 3.1, Λ é transitivo por cadeias.

Pelo Teorema B é suficiente mostrar que (2) e (3), deste teorema, não ocorrem. Por contradição, suponhamos que $\lim_{n\to\infty}(G^n(y) - y)_1 = \pm\infty$, uniformemente em $y \in \pi^{-1}(\Lambda)$. Usando os mesmos argumento da prova do Corolário 3.2.1 chegamos a uma contradição. Portanto f^q possui um ponto fixo. ■

Corolário 3.2.3. *Suponha que $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ é um homeomorfismo homotópico a identidade e que entre todos os pontos periódicos de f existe só um número finito de períodos. Então qualquer ponto de $\mathbb{A}$ tem número de rotação. Se f é transitivo por cadeias, então todos esses números de rotação são iguais.*

Demonstração: Suponhamos que exista um ponto $x \in \mathbb{A}$ que não tenha número de rotação, ou seja

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}(F^n(x) - x)_1 < \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}(F^n(x) - x)_1.$$

Daí, pelo Corolário 3.2.2, temos que existem infinitos períodos. A segunda afirmação segue-se do Corolário 3.2.1 e o Teorema B ■

Com as hipóteses dos Corolários 3.2.1 e 3.2.2 nem sempre dá para garantir a existência de pelo menos dois pontos periódicos, como mostra o seguinte exemplo. Neste exemplo o homeomorfismo do anel não preserva área, já no Teorema B é parte da hipótese preservar área.

Exemplo 3.1. *Seja $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ definido por:*

$$f(x, y) = (x - (1 - y + \sqrt{2}y) + \epsilon sen(\frac{x}{2}), \sqrt{y})$$

onde $0 < \epsilon < 2$, este exemplo tem a seguintes propriedades de fácil verificação:

i. f *é um homeomorfismo do anel* $\mathbb{A}$ *em ele mesmo.*

ii. f *é homotópico a identidade.*

iii. f *só tem um ponto fixo; pois os únicos círculos invariantes são* $S^1 \times \{1\}$ *e* $S^1 \times \{0\}$. $f|_{S^1\times\{1\}}$ *tem número de rotação igual a* $\sqrt{2}$*, logo não tem ponto fixo.* $f|_{S^1\times\{0\}}$ *se tem um único ponto fixo.*

Referências Bibliográficas

[1] S. Alpern, V. S. Prasad; Combinatorial Proofs of the Conley-Zehnder-Franks Theorem on a fixed Point for Torus Homeomophisms, Advances in Mathematics, 99, 238-247(1993).

[2] S. Kh. Aranson, G. R. Belitsky, E. V. Zhuzhoma, Introduction on the Qualitative Theory of Dynamical Systems on Surfaces, Translations of mathematical Monographs, vol. 153.

[3] G. D. Birkhoff, An Extension of Poincaré's Last Geometric Theorem, Acta Math., December, 1925, Vol. 43, 297-311.

[4] G. D. Birkhoff, Proof of Poincaré's geometric Theorem, Trans. Amer. Math. Soc., January, 1913, Vol. 14, 14-22.

[5] M. Brown, A New proof of Brouwer's Lemma on Translation Arcs, Houston Journal of Mathematics, Vol. 10, No., 1, 1984.

[6] M. Brown, W. D. Neumann; Proof of the Poincaré-Birkhoff Fixed Point Theorem, Michigan Math. Journal, 1977 24, 21-31.

[7] C. Conley, E. Zehnder; The Poincaré-Lewis Fixed Point Theorem and a Conjeture of V. I. Arnold, Inventiones Mathematicae 73 (1983), 33-49.

[8] Elon L. Lima, curso de Análise vol. 2, Projeto Euclides, 2000 Impa.

[9] M. Flucher, Fixed Points of measure Preserving torus Homeomorphisms, Manuscripta mathematica, 68, 271-293(1990).

[10] John Franks, Generalizations of the Poincaré's Birkhoff Theorem, The Annals of mathematics, 2nd Ser, Vol. 128, No 1 (Jul., 1988), 139-151.

[11] John franks Geodesics on S^2 and periodic points of annulus homeomorphisms. Invent. Math. 108 (1992), no. 2, 403-418.

[12] John Franks, Realizing Rotation Vectors For Torus Homeomorphisms, Transactions of the Americam mathematical Society, Vol. 311, No 1, January 1989.

[13] John Franks, Recurrence and fixed points of the surface homeomorphisms, Ergodic Theory and Dynamical Systems, (1988), 8*, 99-107.

[14] John Franks, Rotation Number and Inestability sets, Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society, Vol. 40, No 3 (2003), 263-279.

[15] J. Franks, The Rotation Set and Periodic Points for Torus Homeomophisms Dynamical systems and chaos, Vol. 1 (Hachioji, 1994), 41–48, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1995.

[16] H. Hadwiger, H. Debrunner e V. Klee; Combinatorial Geometry in the Plane, Holt Rinehart and Winston, New York, 1964.

[17] A. Katok, B. Hasselblatt; Introduction to the moderm theory of Dynamical Systems, Cambridge University Press, 1999.

[18] Kurka Petr, Topological and Symbolic Dynamics, Cours Spécialisès, Collection SMF, 11.

[19] J. Kwapisz, Every Convex Polygon With Raacional Vertices is a Rotation Set, Ergodic Theory and Dynamical Systems, 12, (1992), 333-339.

[20] Patrice Le Calvez, Propriétés Dynamiques Des Difféomorphismes de L'Anneau et du Tore, Asterisque, 204 (1991).

[21] Ricardo Mañe, Teoría Ergódica, Projeto Euclides, Impa.

[22] M. Misiurewicz and K. Ziemian, Rotation Sets for Maps of Tori J. London Math. Soc. (2)40, (1989), 490-506.

[23] John C. Oxtoby, Diameters of Arcs and the Gerrymandering Problem, The American Mathematical Monthly, Vol. 84, No. 3 (Mar., 1977)155-162.

[24] J. C. Oxtoby, S. M. Ulam; Measure-Preserving Homeomorphisms and Metrical Transitisity, The Annals of Mathematics, 2nd. Ser., Vol. 42, No. 4, (Oct., 1941), 874-920.

[25] Poincaré Henri, Oeuvres Complètes. Tome I, Gauthier - Villars, Paris, (1952), 137 - 158.

[26] M. Pollicott, M. Yuri; Dynamical Systems and Ergodic Theory, London Mathematical Society, Student Text, 40.

[27] C. G. Ragazzo, M. J. D. Carneiro, S. A. Zanata; Introdução à Dinámica de Aplicações do Tipo Twist, 25 Colóquio Brasileiro de Matemática, Impa (2005).

[28] K. Oliveira, M. Viana, Introdução à Teoria Ergódica, Notas de aula.

mathematical Society, Vol., 347, No. 6 (Jun., 1995), 2111-2126.