I.C.M.S.C.

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

SOBRE TEOREMAS DE DIVISÃO

Maria Elizabeth Stafuzza Gonçalves

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

SÃO CARLOS - SÃO PAULO
BRASIL

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos

SOBRE TEOREMAS DE DIVISÃO

Maria Elizabeth Stafuzza Gonçalves

Orientador:

Prof. Dr. Paulo Ferreira da Silva Porto Junior

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de "Mestre em Matemática".

Departamento de Matemática
São Carlos
1981

Aos meus pais

Ao Elísio

Às minhas filhas

Elda Maria e Eline Maria

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Paulo F. S. Porto Junior, pela dedicação e objetividade na orientação deste trabalho e pelo constante apoio nos momentos difíceis a minha profunda gratidão.

Ao Prof. Dr. Wilson Maurício Tadini pelas constantes e valiosas sugestões.

Aos professores do ICM de São Carlos e aos colegas da pós-graduação pela compreensão e incentivo durante os cursos.

Aos professores do ITA pela solidariedade na fase final do trabalho.

A todos aqueles que direta ou indiretamente nos auxiliaram.

Agradeço também:

A CAPES que como bolsista realizei os cursos de pós-graduação.

Ao CNPq que com bolsa de pesquisa concluí o presente trabalho.

ABSTRACT

The Division Theorem is the essential analytic instrument in the characterization of C^∞ stable proper mappings set up by J. Mather.

Moreover, by using the Division Theorem one proves the Generalized Malgrange Preparation Theorem which is the most important analytic and algebraic tool in the study of local singularities.

Our purpose here is to gather the different statements and proofs of the Preparation Theorems and Division Theorems throughout the literature in a way made as complete as possible. Effort was taken in order to clarify and relate them, even recent versions of the Division Theorem on finitely differentiable maps such as those by M. G. Lassale, Pierre Milman, Edward Bierstone.

Finally, the last chapter is concerned with some applications.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

O Teorema de Divisão é o instrumento analítico essencial na caracterização das aplicações C^∞ estáveis próprias, que foi obtida por J. Mather.

Além disso, usando-se o Teorema de Divisão demonstra-se o Teorema de Preparação de Malgrange Generalizado que é o instrumento analítico-algébrico mais importante no estudo local das singularidades.

Por volta de 1880, o matemático alemão K. Weierstrass enunciou e provou o seguinte resultado (Vorbereitungsatz), clássico na teoria das funções analíticas de várias variáveis reais ou complexas.

"Sejam $B \subset \mathbb{C}$ e $U \subset \mathbb{C}^n$ vizinhanças da origem em $\mathbb{C}$ e $\mathbb{C}^n$ respectivamente e $g : B \times U \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica regular de ordem p em z. Então existem $B' \subset B$, $U' \subset U$ vizinhanças da origem em $\mathbb{C}$ e $\mathbb{C}^n$ e funções analíticas $h : U' \to \mathbb{C}^p$ e $q : B' \times U' \to \mathbb{C}$ tais que :

(i) $q(o,o) \neq o$

(ii) $g(z,w) = \left[z^p + h_1(w) z^{p-1} + \ldots + h_p(w)\right] q(z,w)$ em $B' \times U'$.

Além disso, numa vizinhança da origem, só existe um par de funções analíticas h e q com estas propriedades".

Tal teorema ficou conhecido como Teorema de Preparação de Weierstrass, porque a função g é "preparada" para o posterior estudo de seus zeros e este é também usado para re duzir questões sobre funções analíticas à questões sobre polinômios.

Observamos que no caso $p = o$ o resultado é trivial : basta tomar $q = g$. Observamos também que se $p = 1$, o resultado se reduz ao Teorema das Funções Implícitas (I.1.2 capítulo I), generalizando portanto este teorema.

O Teorema de Preparação de Weierstrass foi generalizado por H. Späth por volta de 1929 (Der Weierstraßsche Vorbereitungssatz), que provou o seguinte teorema :

"Sejam $B \subset \mathbb{C}$ e $U \subset \mathbb{C}^n$ como antes e $f : B \times U \longrightarrow \mathbb{C}$ analítica. Dada $g : B \times U \longrightarrow \mathbb{C}$ analítica regular de ordem p em z, existem $B' \subset B$, $U' \subset U$ vizinhanças da origem e funções analíticas $q : B' \times U' \longrightarrow \mathbb{C}$ $h : U' \longrightarrow \mathbb{C}^p$ tais que em $B' \times U'$ tem-se

$$f(z,w) = g(z,w)q(z,w) + h_1(w)z^{p-1} + h_2(w)z^{p-2} + \ldots + h_p(w).$$

Além disso, numa vizinhança da origem, o par (q,h) é único".

Este resultado generaliza o algorítmo da divisão para polinômios, daí seu nome : Teorema da Divisão(de Späth).

Verifica-se facilmente que o Teorema de Divisão de Späth implica o Teorema de Preparação de Weierstrass (I.1.5).

Enquanto a prova da unicidade de q e h usa somente resultados das funções analíticas, a prova da existência destas funções utiliza o teorema denominado Teorema da Divisão Polinomial (I.1.7).

A versão do Teorema de Divisão Polinomial demonstra o Teorema de Divisão de Späth, usando também o Teorema das Funções Implícitas (I.1.9). O Teorema da Divisão Polinomial também implica diretamente no Teorema de Preparação de Weierstrass (I.1.9).

O argumento usado nas provas encontradas em |9| ou |29| segue o original de Weierstrass, Para outras provas , vejam-se os livros : S.Bochner e W.T. Martin-Several Complex Variables, Princeton 1948 ou |10|. O primeiro deles dá também uma prova para o anel das séries de potências formais que também pode ser encontrado em |28|. Observa-se que o argumento nelas usado prova realmente um resultado global e não apenas local.

Observa-se também que embora o teorema local correspondente no caso real analítico siga trivialmente do caso complexo analítico, o teorema global é porém falso : as singularidades complexas de f e os zeros do polinômio $P_p(z,w) = z^p + z^{p-1} u_1(w) + \ldots + u_p(w)$ desempenham portanto papéis importantes.

Em 1959, R. Thom observou que uma adaptação do Teorema de Preparação para o caso de funções reais diferenciáveis facilitaria bastante a tarefa da obtenção de formas canônicas polinomiais para as singularidades genéricas. Tais formas haviam sido obtidas originalmente por H.Whitney em diversos casos, que hoje são clássicos (por exemplo os casos de dobra, cúspide, guarda-chuva, etc), a custa de uma longa e não trivial análise em cada caso.

A versão C^∞ real do Teorema de Preparação foi então obtida por B.Malgrange em 1962. Sua prova, essencialmente técnica, envolvia um estudo detalhado da estrutura geomé trica local de conjuntos analíticos e baseava-se também em um Teorema de Divisão local de funções C^∞ por funções analíticas. B. Malgrange obteve também uma versão algébrica que implica num teorema de divisão para funções C^∞ obtido da formulação de Späth, com as modificações óbvias. Assim sendo,do Teorema de Malgrange decorre também um Teorema de Preparação para funções C^∞.

Um resultado mais forte e não apenas local, mas global, foi obtido por J. Mather por volta de 1966, usando um método analítico mais direto. Esta versão do Teorema de Divisão para funções reais C^∞, devida a Mather,será apresentada detalhadamente. Ela implica também numa versão algébrica mais geral. (para $C_x^\infty(N)$ - módulos) que a obtida por Malgrange.

A versão global citada é essencial para a caracterização das aplicações próprias C^∞ estáveis. No caso particular de domínio compacto é possível demonstrar-se este resultado partindo da versão local de Malgrange. Por outro lado , domínios não compactos são essenciais na teoria da Estabilidade Topológica.

É interessante observar que a demonstração do Teorema de Divisão de Mather é inspirada parcialmente na prova do caso complexo-analítico, a grosso modo substituindo-se a Fórmula Integral de Cauchy do caso analítico pela Fórmula Integral de Fourier, juntamente com a utilização de uma versão do Teorema de Divisão para o caso particular da função cosseno.

Observe-se também, em |19|, o Teorema de Divisão

Polinomial local C^{∞} e como consequência os Teoremas de Preparação e de Divisão reais C^{∞} locais. Veja que, neste caso, as funções q e h não são únicas em geral. No entanto, se a) p=1, então a unicidade é verificada pois que então o Teorema de Divisão segue do Teorema das Funções Implícitas, b) n=o, isto é, estamos no caso de uma única variável, o resultado é trivial e vale a unicidade ou c) $t \longrightarrow P_p(t,x)$ possui todas as raízes reais, para cada x, também a unicidade de q e h é válida.

Outras provas deste teorema apareceram mais tarde, algumas delas distinguindo-se das primeiras citadas por se inspirarem mais de perto na prova do caso das funções de variáveis complexas já tratado.

Esta é a maneira como tais resultados se relacionam. Outra distinção trivial é conforme as funções tomem valores reais ou complexos, embora a questão de maior substância seja quando as variáveis tomadas sejam reais ou complexas. Por exemplo, as primeiras provas (de Malgrange e de Mather) bem como a de Lojasiewicz |13| tomam λ como real; já nos artigos de Nirenberg |25|, Glaeser |8| e na variante de Mather |20| ele pode ser tomado complexo.

Sem dúvida porém a distinção mais profunda está entre as formas local e global do teorema : a prova original de Malgrange, como já foi dito, e a de Nirenberg, são apenas locais enquanto as demais mencionadas são globais. Isto porém simplifica muito a demonstração : A prova de Nirenberg é bastante curta e esta versão local é suficiente para todas as aplicações conhecidas, exceto na caracterização global das aplicações próprias C^∞ estáveis.

Simultâneamente a esta, outra diferença se observa nos enunciados globais : o "quociente" q e o "resto" r são escolhidos dependendo linear e continuamente de f - adenda não trivial, já que no caso C^∞ a divisão não é única.

O Teorema de extensão utilizado nestas provas também as diferencia : o usado por Nirenberg |25|, que constitui a parte difícil de sua prova resulta num operador("extensor") não linear enquanto que o teorema de extensão usado por Mather |20| (alternativamente à prova de Nirenberg pelo método utilizado em |17|)encontra tal extensão através de um operador linear. Glaeser |8| não obteve porém uma extensão através de um operador linear; S. Lojasiewicz dá uma prova para este Teorema utilizando propriedades de campos de Whitney, especialmente os simétricos e novamente continuidade e linearidade são observadas. Uma prova mais recente (1976) devido a P. Milman |22| utiliza por sua vez um Teorema de Extensão de Stein e obtém continuidade e linearidade.

A versão simples do Teorema de Divisão Polinomial (clássico de Weierstrass) "se f é uma função analítica em $U \subset \mathbb{C}$, U vizinhança do o em $\mathbb{C}$ tal que todas as raízes do polinômio $P(t) = t^p + \sum_{i=1}^{p} c_i\, t^{p-i}$ pertencem a U, então existe uma única função analítica q em U e um único polinômio r de grau no máximo p-1, tal que $f(t) = P(t)\ q(t) + r(t)$" |3|, diz que no espaço H(U) das funções analíticas em U, o espaço vetorial dos polinômios de grau p-1 é um complemento algébrico do ideal $\langle P \rangle$, gerado pelo polinômio P.

Ainda, para $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ se ϕ é regular de ordem p em z no anel $\mathcal{O}_{1+n}$ das séries de potências convergentes, observa-se que $\dfrac{\mathcal{O}_{1+n}}{\phi\mathcal{O}_{1+n}}$ é um $\mathcal{O}_n$ - módulo, de posto p.

Da mesma forma que no caso analítico complexo, o Teorema de Divisão Polinomial para funções C^∞ implica num Teorema tipo Weierstrass, portanto, um teorema de divisão mais geral que pode ser estabelecido de uma maneira mais algébrica : seja ε_{1+n} a álgebra das funções C^∞ de 1+n variáveis e g uma função regular, de ordem p. O teorema resume-se em dizer que o quociente $\dfrac{\varepsilon_{1+n}}{<g>}$ como ε_n - módulo, é gerado pelas classes de funções t^i , $o \leq i < p$.

Enquanto a formulação algébrica do Teorema de Preparação de Malgrange refere-se a álgebras diferenciais, quocientes de $C_x^\infty(N)$, a formulação algébrica de Mather |19| é bem mais geral. Esta é conhecida como Teorema de Preparação de Malgrange Generalizado (III.1 do cap. III).

Demonstra-se que o Teorema de Preparação de Malgrange Generalizado é de fato uma generalização do Teorema de Preparação (de Malgrange) para o caso C^∞ real, o qual é por sua vez consequência do Teorema de Divisão (de Mather) para o caso C^∞ real. Para tanto, é mostrado que o Teorema de Preparação de Malgrange Generalizado implica no Teorema de Divisão de Mather (|4|, |9|, |15|, |16|).

Outras versões surgiram para o Teorema de Preparação de Malgrange Generalizado, como por exemplo uma extensão enunciada em |18| e também em |27 pag. 186|, que por sua vez depende de uma versão especial do Teorema de Divisão |27 pag. 195|. Tal versão é essencial na caracterizaçãs das apli cações próprias C^∞ estáveis.

Nova generalização do mesmo Teorema é estabelecida em |27 - pag. 203|, tomando-se $S \subset N$ uma subvariedade fechada e é dada em termos de $C_S^\infty(N)$.

Na prova do Teorema de Preparação de Malgrange Generalizado é utilizado (além do Teorema de Divisão) um lema algébrico muito importante conhecido como Lema de Nakayama. Existem diversas formulações deste lema, específicas para cada caso do Teorema de Preparação de Malgrange Generalizado a demonstrar, ou de acordo com a diferente visão do problema estudado. As mais comuns nos trabalhos de singularidades serão aqui tratadas.

Outras versões, formas e provas do Teorema de Divisão surgiram para o caso de funções finitamente diferenciáveis:

Em 1968 H. Hamm (não publicado) em Bonn, usando método de Mather, provou uma versão do Teorema de Divisão para o caso de funções de classe C^k. (MR 47 # 1077, 1974).

Em 1973 M.G. Lassale |12| deu uma prova para este teorema, usando um método que aperfeiçoou o resultado, com menor perda de derivações. Lassale deu ainda uma forma aperfeiçoada do teorema e indica como mudar a prova dada para tanto e conjectura que o resultado obtido é o melhor possível.

Independentemente de Lassale, Gerard Barbançon |2| obteve também, na mesma época, um Teorema de Divisão para funções finitamente diferenciáveis.

Mais recentemente (1976) Pierre Milman |22| apresentou nova prova para o "Teorema de Divisão de Malgrange - Mather". Consideravelmente curta e elementar, outro aspecto interessante de sua prova é que pode ser aplicada para os casos de funções C^∞, C^m ou analítico. Esta prova será apresentada detalhadamente numa versão dada por E. Bierstone em 1981.

Nosso objetivo é fazer um apanhado tão completo quanto possível das diferentes versões e provas dos Teoremas de Preparação e dos Teoremas de Divisão encontradas na literatura, procurando esclarecê-las, relacioná-las e principalmente uniformizá-las quanto a notações e nomenclatura. Além das distinções e das relações já apontadas, procuraremos associá-los com teoremas importantes como o Teorema da Função Implícita, ou o Lema de Nakayama, Teorema de Mather (da classificação de singularidades de aplicações diferenciáveis) e finalmente apresentaremos suas consequências e aplicações mais importantes.

Para tanto, nosso trabalho será assim dividido:

<u>No capítulo I</u> apresentaremos as diversas formas e provas do Teorema de Divisão com ênfase a duas delas : A prova devida a J.Mather, escolhida pela sua importância e pelo argumento usado : direto e (relativamente) simples; a prova devida a P. Milman talvez a mais recente delas, também considerada simples e finalmente porque o argumento usado pode ser copiado para o caso de funções C^m, C^∞ e analíticas.

<u>No capítulo II</u> serão tratadas as diferentes versões do Lema de Nakayama e suas consequências, após um parágrafo

inicial onde são desenvolvidos os pré-requisitos algébricos.

No capítulo III serão consideradas as formas algébricas mais comuns e importantes dos Teoremas de Preparação e Divisão complexas bem como do Teorema de Preparação de Malgrange Generalizado e suas consequências. Finalmente,

O capítulo IV será dedicado às aplicações daqueles teoremas. Serão tratadas as mais clássicas como as formas normais de Whitney, bem como a obtenção de outras formas normais, não sendo esquecido porém talvez a mais importante de todas : a caracterização das aplicações diferenciáveis estáveis. Esta última, no entanto, não será demonstrada tendo em vista que sua prova envolve elementos que fogem do nosso objetivo.

É claro que os números que aparecem entre colchetes indicam a referência bibliográfica onde o resultado em pauta pode ser encontrado.

CAPÍTULO I

TEOREMA DE DIVISÃO E DE PREPARAÇÃO

Pretendemos neste capítulo apresentar as diversas formas e provas dos Teoremas de Preparação e Divisão com ênfase a duas delas : a prova de J. Mather, escolhida pela sua importância e pelo argumento usado, direto e relativamente simples e a prova devida a Pierre Milman, talvez a mais recente delas, também considerada simples e cujo argumento usado pode ser copiado para os casos de funções analíticas, C^∞ e C^m.

I.1 O caso analítico

(1a) O caso complexo analítico

I.1.1 Teorema de Preparação de Weierstrass |27|

Sejam $B \subset \mathbb{C}$ e $U \subset \mathbb{C}^n$ vizinhanças da origem de $\mathbb{C}$ e $\mathbb{C}^n$ respectivamente e $g : B \times U \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica regular de ordem p em z no zero.

Então existem $B' \subset B$, $U' \subset U$ vizinhanças da origem em $\mathbb{C}$ e $\mathbb{C}^n$ e funções analíticas $h : U' \longrightarrow \mathbb{C}^p$ e $q : B' \times U' \rightarrow \mathbb{C}$ tais que

(i) $q(o,o) \neq o$ e

(ii) $g(z,w) = [z^p + h_1(w) z^{p-1} + \ldots + h_p(w)]q(z,w)$ em $B' \times U'$.

Além disso, numa vizinhança da origem, só existe um par de funções (h,q) com estas propriedades.

I.1.2 Observações

a) O teorema I.1.1, Weierstrass chamou de teorema de preparação porque g é "preparada" para posterior estudo da variedade dos seus zeros que é igual ao conjunto dos zeros da função $z^p + h_1(w)z^{p-1} + \ldots + h_p(w)$. Portanto, o resultado acima nos conduz a uma questão polinomial.

b) Se $p = o$, o resultado é trivial : $B' = B, U' = U$ e $q = g$.

Se $p = 1$, tem-se $g(o,o) = o$ e $\frac{\partial g}{\partial z}(o,o) \neq o$ e o resultado segue do Teorema da Função Implícita. De fato, como $g(o,o) = o$ e $\frac{\partial g}{\partial z}(o,o) \neq o$, pelo Teorema da Função Implícita, existe um aberto $B' \times U' \subset B \times U$ contendo (o,o) e uma única função analítica $h_1 : U' \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $g(z,w) = o$ num ponto $(z,w) \in B' \times U' \iff z = -h_1(w)$. Então $g(z-h_1(w),w)$ se anula em $o \times U' \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ e [4 - teor 4.2] temos que

$$g(z-h_1(w),w) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\, g(tz - h_1(w),w)\,dt = \int_0^1 z\,\frac{\partial g}{\partial z}(tz - h_1(w),w)\,dt =$$

$$= z\int_0^1 \frac{\partial g}{\partial z}(tz - h_1(w),w)\,dt = z\, q(z,w)$$

onde $q(z,w) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial q}{\partial z}(tz - h_1(w),w)\,dt$ é analítica em $B' \times U'$.

Colocando-se $t = z - h_1(w)$ ($\therefore$ $z = t + h_1(w)$), temos

$$g(t,w) = (t+h_1(w))q(t+h_1(w),w)$$

que é o Teorema de Preparação de Weierstrass no caso $p=1$. (|3|).

c) É interessante observar que o Teorema da Função Implícita é um corolário imediato do Teorema de Preparação de Weierstrass |10|. Para isso suponha que g seja regular de ordem 1 em z. Então, podemos escrever :

$$g(z,w_1,\ldots,w_n) = [z - h_1(w_1,\ldots,w_n)]q(z,w_1,\ldots,w_n)$$

onde q é analítica numa vizinhança do zero em $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n$, $q(o,o)\neq o$ e h_1 é analítica numa vizinhança do zero em $\mathbb{C}^n$ e tal decomposição é única. Consequentemente, $g(z,w_1,\ldots,w_n) = o$ numa vizinhança da origem se e somente se $z = h_1(w_1,\ldots,w_n)$.

d) De b) e c) podemos concluir que, no caso $p=1$, o Teorema de Preparação de Weirstrass é equivalente ao Teorema da Função Implícita.

Deste modo podemos afirmar que o Teorema de Preparação de Weierstrass generaliza o Teorema da Função Implícita.

I.1.3 Embora a prova do Teorema I.1.1 seja corolário do Teorema de Divisão de Späth que será enunciado posteriormente, ela pode ser também feita diretamente, como por exemplo em |10|, que demonstra que :

"Se $f \in \mathcal{O}_n$ é regular de ordem k em z_n, existe um único polinômio de Weierstrass $h \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ de grau k tal que $f = uh$ para alguma unidade $u \in \mathcal{O}_n$".

Vamos esclarecer as notações usadas e efetuar a demonstração deste resultado.

Seja $\mathcal{O}_n$ o anel dos germes de funções analíticas na origem de C^n, o qual é isomorfo ao anel das séries de potências convergentes centradas na origem. $\mathcal{O}_n$ é um anel local e seu único ideal maximal é o conjunto dos germes de funções que se anulam na origem. É claro que $\mathcal{O}_{n-1} \subset \mathcal{O}_{n-1}[z_n] \subset \mathcal{O}_n$.

<u>Definição</u> Dizemos que um germe $f \in \mathcal{O}_n$ é regular de ordem k em z_n se existe um representante de f que é regular de ordem k em z_n na origem.

<u>Definição</u> Um polinômio de Weierstrass de grau $k > 0$ em z_n é um elemento $h \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ da forma

$$h = z_n^k + a_1 z_n^{k-1} + \ldots + a_{k-1} z_n + a_k$$

onde os coeficientes $a_j \in \mathcal{O}_{n-1}$ são germes de funções que se anulam na origem, $j = 1,\ldots,k$. Se $h(z)$ é uma função analítica numa vizinhança aberta da origem e representa um polinômio de Weierstrass em z_n, então $h(z)$ tem a forma $h(z_1,\ldots,z_n) = z_n^k + a_1(z_1,\ldots,z_{n-1}) z_n^{k-1} + \ldots + a_k(z_1,\ldots,z_{n-1})$ onde, $a_j(0,\ldots 0)=0$; ainda $h(0,\ldots,0,z_n)=z_n^k$ e h é regular em z_n de grau k. Num sentido, um polinômio de Weierstrass é a forma genérica de um elemento que é regular em z_n, isto se torna preciso no resultado enunciado e que vamos agora prová-lo.

<u>Prova</u>

A prova é baseada na observação que, para cada

$(z_1,\dots,z_{n-1})$, as raízes de h como polinômio em z_n são os zeros de f como função de z_n (com as mesmas multiplicidades). A construção de h vai se reduzir, então, a construir um polinômio a partir de suas raízes.

Seja f uma função que representa o germe $f \in \mathcal{O}_n$, tal que f é analítica numa vizinhança do polidisco $\Delta(o;r)$ e é regular de ordem k em z_n na origem.

Pelo lema "Se f é uma função analítica no polidisco aberto $\Delta(w;r)$ e regular de ordem k em z_n, então existe um polidisco $\Delta(w;\delta) \subset \Delta(w;r)$ tal que para todo ponto $(a_1,\dots,a_{n-1})$ em $\Delta(w,\delta_1,\dots,\delta_{n-1})$ a função $f(a_1,\dots,a_{n-1},z_n)$, como função de uma única variável z_n, tem exatamente k zeros (contando a multiplicidade) no disco $|z_n - w_n| < \delta_n$": existe um polidisco $\Delta(o;\delta) \subset \Delta(o;r)$ tal que para todo ponto $(z_1,\dots,z_{n-1})$ em $\Delta(o;\delta_1,\dots,\delta_{n-1})$ a função $f(z_1,\dots,z_{n-1},z_n)$ tem k zeros em $|z_n| < \delta_n$ e estes zeros serão denotados por

$$\Psi_1(z_1,\dots,z_{n-1}),\dots,\ \Psi_k(z_1,\dots,z_{n-1})$$

com convenientes repetições conforme a multiplicidade. As funções $\Psi_j(z_1,\dots,z_{n-1})$ não são necessariamente contínuas, nem bem definidas; o que podemos assegurar é que $\Psi_j(o,o,\dots,o)=o$ e $|\Psi_j(z_1,\dots,z_{n-1})| < \delta_n$ para $(z_1,\dots,z_{n-1}) \in \Delta(o;\delta_1,\dots,\delta_{n-1})$ e $j = 1,\dots,k$.

Tome

$$h(z_1,\dots,z_n) = \prod_{j=1}^{k} [z_n - \Psi_j(z_1,\dots,z_{n-1})] =$$

$$= z_n^k + a_1(z_1,\dots,z_{n-1})\, z_n^{k-1} + \dots + a_k(z_1,\dots,z_{n-1})$$

onde os $a_\ell(z_1,\ldots,z_{n-1})$ são funções simétricas elementares nos valores $\Psi_j(z_1,\ldots,z_{n-1})$. É facil ver que as funções $a_\ell(z_1,\ldots,z_{n-1})$ são de fato analíticas em $\Delta(o;\delta_1,\ldots,\delta_{n-1})$. Para tanto, deixando $z_1,\ldots,z_{n-1}$ fixos e usando o resultado "Seja F uma função analítica em um domínio de $\mathbb{C}$ que contém o disco $|z| \leq r$. Suponha que F não tem zeros em $|z| = r$ e sejam $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ seus zeros em $|z| < r$ (cada um repetido segundo a sua multiplicidade). Então, para todo $q \in N$ vale

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j^q = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} \frac{z^q f'(z)}{f(z)}\, dz"$$ temos que

$$\sum_{j=1}^{k} \Psi_j(z_1,\ldots,z_{n-1})^r = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\delta_n} \frac{\partial f(z_1,\ldots,z_{n-1},z)}{\partial z}\, \frac{z^r}{f(z_1,\ldots,z_{n-1},z)}\, dz.$$

A função $f(z_1,\ldots,z_{n-1},z)$ é não nula para $|z_1|<\delta,\ldots,$ $|z_{n-1}| < \delta_{n-1}$, $|z| = \delta_n$ como notado acima; então $\sum_{j=1}^{k} \Psi_j(z_1,\ldots,z_{n-1})^r$ é analítica em $\Delta(o,\delta_1,\ldots,\delta_{n-1})$ para todo r. Como as funções simétricas elementares $a_\ell(z_1,\ldots,z_{n-1})$ são polinomiais nas somas $\sum_{j=1}^{k} \Psi_j(z_1,\ldots,z_{n-1})^r$, elas são também analíticas no mesmo polidisco. Ainda, $a_\ell(o,\ldots,o) = o$ pois $\Psi_j(o,\ldots,o) = o$. Consequentemente, a função h representa um polinômio de Weierstrass.

O polinômio h é claramente o único polinômio de Weierstrass tendo os mesmos zeros da função f em $\Delta(o;\delta)$. Para completar a prova do teorema, precisamos somente mostrar que o quociente $u = \frac{f}{h}$ é analítica e não se anula em $\Delta(o;\delta)$.

Para qualquer valor fixo de $(z_1,\ldots,z_{n-1})$ em $\Delta(o;\delta_1,\ldots,\delta_{n-1})$ o quociente

$$u(z_1,\ldots,z_n) = \frac{f(z_1,\ldots,z_n)}{h(z_1,\ldots,z_n)}$$

é por construção analítico e não se anula em $|z_n| < \delta_n$.

Seja M o módulo máximo de f em $\overline{\Delta}(o;\delta)$, e $m > o$ o módulo mínimo de h(z) para $|z_1| \leq \delta_1,\ldots,|z_{n-1}| \leq \delta_{n-1}$, $|z_n| = \delta_n$. Observe que $m > o$ pois h(z) não se anula neste conjunto.

Segue do Teorema do módulo máximo em uma variável, z_n, que $|u(z)| \leq \frac{M}{m}$, para todo $z \in \overline{\Delta}(o;\delta)$.

Então, pelo Teorema da Extensão de Riemann, a função u(z) é de fato analítica em $\Delta(o;\delta)$; ela não se anula como notado acima e portanto a prova está concluída.

I.1.4 <u>Teorema de Divisão de H. Späth</u> |27|

Sejam $B \subset \mathbb{C}$ e $U \subset \mathbb{C}^n$ vizinhanças da origem e $f : B \times U \longrightarrow \mathbb{C}$ analítica. Dada $g : B \times U \longrightarrow \mathbb{C}$ analítica, regular de ordem p em z, existem $B' \subset B$, $U' \subset U$ vizinhanças da origem e funções analíticas $q : B' \times U' \longrightarrow \mathbb{C}$, $h : U' \longrightarrow \mathbb{C}^p$ tais que $f(z,w) = g(z,w)q(z,w) + \sum_{i=1}^{p} h_i(w)\, z^{p-i}$.

Além disso, o par (q,h) é único numa vizinhança da origem.

I.1.5 Observações sobre I.1.4

a) Este resultado é quase o algorítmo da divisão, assim é chamado de teorema da divisão.

b) I.1.4 implica I.1.1. De fato, dadas $f(z,w) = z^p$ e g uma função analítica regular de ordem p em z, pelo Teorema I.1.4 obtemos,

$$z^p = g(z,w)\ q_1(z,w) + \sum_{i=1}^{p} h_i(w)\ z^{p-i} \qquad (\alpha)$$

onde q_1 e $h = (h_1,\dots,h_p)$ são funções analíticas numa vizinhança do zero em $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n$ e em $\mathbb{C}^n$ respectivamente.

Diferenciando p vezes a igualdade (α) em z, na origem obtemos :

$$p! = \frac{\partial^p g}{\partial z^p}(o,o)\ q_1(o,o),\ \text{de onde vem que}\ q_1(o,o) \neq o.$$

Mas, q_1 analítica numa vizinhança do zero e $q_1(o,o) \neq o$ acarretam que existe uma vizinhança de (o,o) em $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n$ tal que q_1, a ela restrita, não se anula. Então, nessa vizinhança $q = \frac{1}{q_1}$ é analítica e obviamente $q(o,o) \neq o$. Segue-se portanto de (α) que

$$g(z,w) = \left[z^p + (-h_1(w))z^{p-1} + \dots + (-h_p(w))\right]q(z,w),$$

concluindo a tese do Teorema I.1.1.

c) Quanto a unicidade do par (q,h) no Teorema da Divisão de Späth temos a seguinte prova, segundo |9 - pag.92|.

Suponha que $f = gq + r = gq_1 + r_1$ onde

$$r(z,w) = \sum_{i=1}^{p} h_i(w)\ z^{p-i} \quad \text{e} \quad r_1 = \sum_{i=1}^{p} \bar{h}_i(w)\ z^{p-i}$$

Então $(q - q_1)\ g = r_1 - r$.

Fixamos $w \in \mathbb{C}^n$; então $r_1 - r$ é um polinômio de grau $\leq p-1$ em z e tem no máximo p-1 raizes (incluindo a multiplicidade).

Mostremos que existe uma vizinhança do o em $\mathbb{C}^n$ tal que para todo w nesta vizinhança $(q - q_1)g$ tem no mínimo p zeros quando vista como uma função de z.

Assim podemos concluir que $r_1 = r$ e $q = q_1$ (pois $g \neq o$ numa vizinhança do zero).

É claramente suficiente mostrar que $g(.,w)$ tem p zeros.

Seja $\bar{g}\ (z) = g(z,o) = z^p g_1(z), g_1(o) \neq o$.

Como os zeros de uma função analítica de uma variável complexa não nula são isolados, e $\bar{g}(o) = o$, existe uma constante $\delta > o$ tal que $\bar{g}(z) \neq o$ sempre que $o < |z| \leq \delta$.

Seja $\varepsilon = \inf\limits_{|z|=\delta} |\bar{g}(z)|$.

Como g é contínua, existe uma constante $\sigma > o$ para a qual $|g(z,w) - \bar{g}(z)| < \varepsilon$ quando $|w_j| < \sigma$ para $j = 1,..,n$ onde $w = (w_1,...,w_n)$ e $|z| = \delta$.

Escolha um tal w e seja $\ell(z) = g(z,w)$. Como

$|\ell(z) - \bar{g}(z)| < \varepsilon \leq |\bar{g}(z)|$ quando $|z| = \delta$

podemos aplicar o Teorema de Rouché (pag. 152, Alfhors , Complex Analysis) e concluir que ℓ e $\bar{g}$ tem o mesmo número de zeros no disco $|z| < \delta$.

Como $\bar{g}(z) = z^p g_1(z)$ numa vizinhança do zero, sabemos que $\bar{g}$ tem p zeros (contando a multiplicidade) neste disco, concluindo que ℓ e portanto, $g(.,w)$ tem p zeros.

d) Já a demonstração do Teorema de Divisão de Späth quanto a existência decorre de um Teorema de Divisão especial, chamado de Teorema de Divisão Polinomial, que pode ser assim enunciado:

I.1.6 <u>Teorema de Divisão Polinomial</u> |29|

Seja $f(t,z,\lambda)$ uma função analítica numa vizinhança do o em $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p$. Então existem funções $q(t,z,\lambda)$ e $r(t,z,\lambda)$ definidas numa vizinhança do o em $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p$ tais que $f(t,z,\lambda) = P_p(t,\lambda)\, q(t,z,\lambda) + r(t,z,\lambda)$ onde $P_p(t,\lambda) = t^p + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i t^{p-i}$ é um polinômio mônico genérico em t de grau p e $r(t,z,\lambda) = \sum_{i=1}^{p} r_i(z,\lambda)\, t^{p-i}$ com r_i e q analíticas numa vizinhança do zero.

Ainda, q e r_i são únicas.

O Teorema de Divisão Polinomial pode ser enunciado de modo um pouco diferente, com f não dependendo de λ, tomando-se os λ_i como parâmetros extras z, o que, no entanto, não simplifica a prova.

I.1.7 <u>Teorema de Divisão Polinomial</u> |17|

Sejam $U \subset \mathbb{C}^n$ um aberto, $f: \mathbb{C} \times U \longrightarrow \mathbb{C}$ e $u: U \to \mathbb{C}^p$ duas funções analíticas. Então existem funções analíticas $q: \mathbb{C} \times U \longrightarrow \mathbb{C}$ e $h: U \longrightarrow \mathbb{C}^p$ tais que

(I.1.7.1) $f(t,z) = P_p(t,u(z))\, q(t,z) + r(t,h(z))$

para todo $z \in U$ e todo $t \in \mathbb{C}$ onde

$$P_p(t,u(z)) = t^p + \sum_{i=1}^{p} u_i(z)t^{p-i} \quad , \quad r(t,h(z)) = \sum_{i=1}^{p} h_i(z)\ t^{p-i}.$$

Ainda, q e h são únicas .

Prova

A prova que daremos desta versão se encontra em |16| e está relacionada com a prova original de Weierstrass |29|.

Para $w \neq t$ temos :

$$\frac{P_p(w,u) - P_p(t,u)}{w-t} = \sum_{i=1}^{p} P_{i-1}(w,u)\ t^{p-i}$$

Somando-se $\dfrac{P_p(t,u)}{w-t}$ a ambos os membros da igualdade e dividindo-se por $P_p(w,u)$ obtém-se :

$$\text{(I.1.7.2)} \quad \frac{1}{w-t} = \frac{P_p(t,u)}{P_p(w,u)(w-t)} + \sum_{i=1}^{p} \frac{P_{i-1}(w,u)}{P_p(w,u)}\ t^{p-i} \qquad .$$

Sejam $z \in U$ e $t \in \mathbb{C}$. Colocamos :

$$\text{(I.1.7.3)} \quad q(t,z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w,z)\ dw}{P_p(w,u(z))(w-t)}$$

onde γ é uma curva simples fechada em $\mathbb{C}$ orientada positivamente, tal que t e todos os zeros w de $P_p(w,u(z))$ estão na componente limitada do complementar de γ. Pela Fórmula Integral de Cauchy, $q(t,z)$ está bem definida. Claramente q é analítica.

Seja $z \in U$. Colocamos

$$(I.1.7.4) \quad h_j(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{P_{j-1}(w,u(z))f(w,z)dw}{P_p(w,u(z))}, \quad 1 \leq j \leq p$$

onde γ é uma curva simples fechada orientada positivamente em $\mathbb{C}$, tal que todos os zeros de $P_p(w,u(z))$ estão na componente limitada do complementar de γ. Pela Fórmula Integral de Cauchy, $h_j(z)$ está bem definida, para todo $j = 1,\ldots,p$.

Seja então $h = (h_1,\ldots,h_p) : U \longrightarrow \mathbb{C}^p$. Claramente h é analítica.

Sejam $z \in U$ e $t \in \mathbb{C}$. Seja γ uma curva simples fechada orientada positivamente em $\mathbb{C}$, tal que t e todos os zeros w de $P_p(w,u(z))$ estejam na componente limitada do complementar de γ. Pela Fórmula Integral de Cauchy e (I.1.7.2) vem:

$$f(t,z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w,z)}{w-t}\,dw =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} P_p(t,u(z)) \int_\gamma \frac{f(w,z)dw}{P_p(w,u(z))(w-t)} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{p} t^{p-j} \int_\gamma \frac{P_{j-1}(w,u(z))f(w,z)}{P_p(w,u(z))}\,dw$$

que por (I.1.7.3) e (I.1.7.4) nos fornece

$$f(t,z) = P_p(t,u(z)) \quad q(t,z) + \sum_{j=1}^{p} h_j(z)t^{p-j}$$

ou seja, $\forall$ z $\in$ U e $\forall$ t $\in$ C,

$f(t,z) = P_p(t,u(z))q(t,z) + r(t,h(z))$.

Prova da Unicidade |27| : É fácil ver que a solução (q,h) de (I.1.7.1) é única no caso analítico. De fato se tivermos também

$f(t,z) = P_p(t,u(z))\ q_1(t,z) + r(t,h_1(z))$, onde

$q_1 : \mathbb{C} \times U \longrightarrow \mathbb{C}$ e $h_1 : U \longrightarrow \mathbb{C}^p$ são analíticas obteremos :

$$o = P_p(t,u(z))\,[q(t,z) - q_1(t,z)] + r(t,h(z)) - r(t,h_1(z))$$

que pela definição de r nos dá

$$o = P_p(t,u(z))\,[q(t,z) - q_1(t,z)] + r(t,h(z) - h_1(z)).$$

Por esta igualdade vemos que é suficiente mostrar a unicidade no caso em que $f(t,z) = o$.

Suponha, então,

$$o = P_p(t,u(z))\ q(t,z) + r(t,h(z))\ .$$

Para cada $z_o \in U$, temos

$$r(t,h(z_o)) = \alpha_1\ t^{p-1} + \alpha_2\ t^{p-2} + \ldots + \alpha_p$$

$P_p(t,u(z_o)) = t^p + \beta_1\ t^{p-1} + \ldots + \beta_p$. Logo,

$$q(t,z_o) = -\frac{\alpha_1\ t^{p-1} + \alpha_2\ t^{p-2} + \ldots + \alpha_p}{t^p + \beta_1\ t^{p-1} + \ldots + \beta_p} \text{ é analítica}$$

para todo $t \in \mathbb{C}$ e isto só é possível quando $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_p = o$ ou seja $h_1(z_o) = \ldots = h_p(z_o) = o$. Como z_o é arbitrário, concluimos que $q \equiv o$ e $h \equiv o$, o que termina a prova.

I.1.8 Comentários sobre o Teorema de Divisão Polinomial

A prova da versão I.1.6 de |29| é exatamente esta prova de I.1.7 apresentada, conforme |17|. Para outras provas vide S. Bochener and W.T. Martin, Several Complex Variables, Princeton - 1948 ou |10|.

O argumento usado na prova do Teorema I.1.7 prova realmente um resultado global, não apenas um resultado local. Note entretanto, que embora o teorema local correspondente no caso real analítico siga trivialmente, o teorema global é falso (conforme mostraremos no parágrafo (1.b)) : as singularidades complexas de f e os zeros de P_p desempenham então um importante papel. (|29|)

I.1.9 Teorema I.1.6 implica Teorema I.1.1 |29|

Para deduzir o Teorema de Preparação de Weierstrass seja $z = o$ em I.1.6. Se g é regular de ordem p em t, $g(t,o,o) = c\,t^p$, $c \neq o$ e por I.1.6 :

$$g(t,o,\lambda) = [t^p + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, t^{p-i}]\,q(t,o,\lambda) + \sum_{i=1}^{p} r_i(o,\lambda)\,t^{p-i}$$

que facilmente nos fornece

$$\frac{\partial r_i}{\partial \lambda_j}(o,o) = \begin{cases} o & \text{se } j < i \\ -c & \text{se } j = i \end{cases}$$

e portanto, o jacobiano é não nulo. Pelo Teorema da Função Implícita, aplicado às funções r_i e lembrando que $r_i(o,o) = o$, $i = 1,\dots,p$, existem funções analíticas $\lambda_j = H_j(z)$ próximas de zero tal que $r_i(z,H_j(z)) = o$, $i = 1,\dots,p$.

Assim $g(t,z) = P_p(t,H(z))\ q(t,z,H(z))$

que é a forma desejada, como é facilmente visto, q assume o valor c na origem.

<u>Teorema I.1.6 implica Teorema I.1.4</u> |29|

Repete-se o argumento acima para g regular de ordem p e pelo Teorema I.1.6 escrevemos $f = P_p q' + r$. Substituindo-se $\lambda = H(z)$ temos $g = P_p q$. Então segue que $f = gq'' + r$ com $q'' = \dfrac{q'}{q}$.

(1.b) <u>O caso analítico real</u> |17|

Num segundo contexto podemos perguntar :

Se $U \subset R^n$ é aberto, $f: R \times U \longrightarrow R$ e $u : U \longrightarrow R^p$ são funções analíticas de variáveis reais então existem funções reais analíticas $q : R \times U \longrightarrow R$ e $h : U \longrightarrow R^p$ tais que (I.1.7.1) de I.1.7 se verifique, $\forall x \in U$ e $\forall t \in R$?

A resposta desta questão é : não. Suponha o contrário no seguinte exemplo : tome $p = 2$, $U = R$, $f : R^2 \longrightarrow R$ definida por $f(t,x) = \dfrac{1}{1+t^2}$, $u : R \longrightarrow R^2$, $u = (u_1,u_2)$ com $u_1(x) \equiv o$ e $u_2(x) = x$, $\forall x \in R$.

É claro que f e u são analíticas.

Temos que $P_2(t,x) = t^2 + u_1(x)t + u_2(x) = t^2 + x$.

Então vamos supor que existam funções analíticas $q : R^2 \longrightarrow R$ e $h : R \longrightarrow R^2$ tais que

$$(1) \quad \frac{1}{t^2+1} = (t^2 + x)q(t,x) + h_1(x)t + h_2(x), \ \forall (t,x) \in R^2$$

Para $x < o$, tomamos primeiro $t = \sqrt{-x}$ e depois $t = -\sqrt{-x}$ em (1) e obtemos

$$(1') \quad \frac{1}{1-x} = h_1(x)\sqrt{-x} + h_2(x)$$

$$(1'') \quad \frac{1}{1-x} = -h_1(x)\sqrt{-x} + h_2(x)$$

que são duas equações lineares em $h_1(x)$ e $h_2(x)$ independentes. A única solução deste sistema é

$$h_1 \equiv o \quad e \quad h_2(x) = \frac{1}{1-x}, \ \forall x < o \quad .$$

Assim, para funções q e $h = (h_1, h_2)$ que satisfazem (1) temos $h_2(x) = \frac{1}{1-x}$ para $x < o$. Claramente, h_2 não pode ser estendida a uma função analítica definida em todo o R, o que mostra que a resposta da questão é não.

Isto nos mostra que o Teorema da Divisão Global não vale no caso analítico real.

Porém uma versão local, análoga do Teorema I.1.7, é verdadeira para este caso, conforme |3 pag. 8-4 e 8-5|.

I.2 - O Caso C^∞

A já mencionada observação feita por R. Thom, por volta de 1959, motivou a procura de um teorema de divisão para o caso C^∞.

A primeira versão, obtida em 1962 por B. Malgrange foi uma versão local com uma prova bastante técnica que envolve um estudo detalhado da estrutura geométrica local de conjuntos analíticos.

Esta versão foi seguida por um resultado mais forte (uma versão global) obtido por J. Mather em 1966 (Teorema I.2.1) por um argumento direto e analítico.

Seja $N(u) = \{t \in R: (t,u) \in N\}$ onde $N \subset R \times R^p$ é uma vizinhança aberta do conjunto dos $(t,u) \in R \times R^p$ tais que $P_p(t,u) = 0$ e $N(X) = \bigcup_{u \in X} N(u)$ para $X \subset R^p$.

Denotemos por $C^\infty(R)$ a R-álgebra das funções de R em R. Temos:

I.2.1 - Teorema de Divisão Polinomial |17|

Existem funções $q = q_p: C^\infty(R) \times R \times R^p \longrightarrow R$ e $h = h_p: C^\infty(R) \times R^p \longrightarrow R^p$, tendo as seguintes propriedades:

(a) Quaisquer que sejam $f \in C^\infty(R)$, $t \in R$ e $u \in R^p$

$$f(t) = P_p(t,u)q_p(f,t,u) + r_p(t,h_p(f,u)). \qquad (I.2.1.1)$$

(b) q e h são lineares na primeira variável.

(c) Se $f \in C^\infty(R)$, $u \in R^p$ e f se anula em $N(u)$, então $h(f,u) = 0$.

(d) Para toda $f \in C^\infty(R)$, as funções $q_f: R \times R^p \to R$ e $h_f: R^p \to R^p$, definidas por $q_f(t,u) = q(f,t,u)$ e $h_f(u) = h(f,u)$, são C^∞.

(e) Para todo inteiro não negativo k, existe um inteiro não negativo $m(k)$ tal que:

(i) Para todo subconjunto compacto X de R^p, existe $C = C(k,X) \in R_{++}$ tal que, para toda $f \in C^\infty(R)$

$$\| h_f \|^*_{k,X} \leq C \| f \|^*_{m(k),N(X)} . \qquad (I.2.1.2)$$

(ii) Sejam $\pi_1: R \times R^p \to R$ e $\pi_2: R \times R^p \to R^p$ projeções.

Para todo subconjunto compacto Y de $R \times R^p$, existe $C = C(k,X) \in R_{++}$ tal que, para toda $f \in C^\infty(R)$

$$\| q_f \|^*_{k,Y} \leq C \| f \|^*_{k,Y'}, \text{ onde } Y' = N(\pi_2(Y)) \cup \pi_1(Y) \subset R.$$

$$(I.2.1.3)$$

I.2.2 - Notas sobre I.2.1

Mather chama este teorema de divisão polinomial de "o teorema de divisão" e afirma que com exceção do fato de que estabilidade infinitesimal implica estabilidade, tudo o que se obtêm, em seus trabalhos, usando o Teorema de Divisão poderá ser provado usando o Teorema de Preparação de

Malgrange, isto é, o Teorema de Divisão de Mather está estritamente ligado ao Teorema de Preparação de Malgrange. Porém, como afirma Mather, não é razoável que o Teorema de Divisão C^∞ possa ser deduzido do Teorema de Preparação de Malgrange.

O fato que uma afirmação análoga ao Teorema de Divisão C^∞ para funções reais analíticas seja falsa (conforme § 1.b) fornece um contraste com o "Teorema de Preparação" usual, que é verdadeiro para funções reais analíticas, bem como para funções holomorfas e C^∞. Naturalmente, o teorema de preparação usual é puramente um resultado local sobre germes.

Quanto a linha de demonstração de I.2.1, é a de |17| que embora seja consideravelmente longa, distingue-se por seu caráter profundamente natural e elementar. Esta prova inspira-se parcialmente naquela do caso complexo analítico; a grosso modo o caso C^∞ é obtido substituindo-se o emprego da Formula Integral de Cauchy do caso analítico pela Fórmula Integral de Fourier juntamente com uma versão do Teorema da Divisão para o caso particular da função cosseno.

A prova do Teorema I.2.1 pode ser encontrada no Apêndice 1.

I.2.3 - Notações usadas nas três versões seguintes

Sejam t e π germes no (0,0) das projeções de $R^n \times R$ em R e R^n respectivamente.

Para todo germe de função C^∞

$$u = (u_1,\dots,u_p): (R^n,0) \longrightarrow R^p$$

sejam

$$R_u = \sum_{i=1}^{p} (u_i \circ \pi)t^{p-i} \in C^\infty_{(0,0)}(R^n \times R)$$

e

$$P_u = t^p + R_u \in C^\infty_{(0,0)}(R^n \times R)$$

Do Teorema I.2.1, temos

I.2.4 - Versão local do Teorema de Divisão Polinomial para funções C^∞ |19|

Seja $g \in C^\infty_{(0,0)}(R^n \times R)$ e $u: (R^n,0) \to R^p$ germe de função C^∞.

Então existem $q \in C^\infty_{(0,0)}(R^r \times R)$ e germe da função C^∞ $h: (R^n,0) \to R^p$ tais que

$$g = P_u\, q + R_h \; . \tag{I.2.4.1}$$

Prova |19|

Sejam $\tilde{g}: R^n \times R \to R$ e $\tilde{u}: R^n \to R^p$ funções C^∞ cujos germes no $(0,0)$ e o são g e u, respectivamente. Para cada $z \in R^n$, vamos definir

$$\tilde{g}_z: R \to R \text{ por } \tilde{g}_z(b) = \tilde{g}(z,b).$$

Sejam $\tilde{q}: R^n \times R \to R$ e $\tilde{h}: R^n \to R^p$ dados por

$$\tilde{q}(z,b) = Q(\tilde{g}_z,b,\tilde{u}(z)) \quad , \quad \tilde{h}(z) = H(\tilde{g}_z,\tilde{u}(z))$$

quaisquer que sejam $z \in R^n$, $b \in R$, onde Q e H são como q e h do Teorema I.2.1, respectivamente.

No apêndice 1, onde se prova o teorema I.2.1 aparece o corolário 1.4 que mostra que as funções $\tilde{q}$ e $\tilde{h}$ são C^∞.

Da fórmula (I.2.1.1) segue que

$$\tilde{g}(z,b) = P(b,\tilde{u}(z))\, \tilde{q}(z,b) + R(b,\tilde{h}(z)).$$

Assim, os germes q de $\tilde{q}$ no (0,0) e h de $\tilde{h}$ no o são C^∞ e satisfazem (I.2.4.1).

I.2.5 - Versão local do Teorema de Preparação para funções C^∞ |19|

Se $f \in C^\infty_{(0,0)}(R^n \times R)$ é regular de ordem p, então existe $q \in C^\infty_{(0,0)}(R^n \times R)$ inversível e um germe de função C^∞ $u: (R^n,0) \to R^p$ tais que

$$f = q\, P_u. \qquad \text{(I.2.5.1)}$$

Prova

A idéia da prova é a mesma usada para mostrar que Teorema I.1.6 implica Teorema I.1.1.

Conforme o teorema I.2.4, existem $q_1 \in C^\infty_{(0,0)}(R^n \times R^p \times R)$ e germe de função C^∞ $h: (R^n \times R^p, (0,0)) \to R^p$ tais que

$$\tilde{f}(z,b) = \left[b^p + \sum_{i=1}^{p} a_i \, b^{p-i}\right] \tilde{q}_1(z,a,b) + \sum_{i=1}^{p} \tilde{h}_i(z,a) b^{p-i} \quad ,$$

para representantes convenientes $\tilde{f}: U \times W \to R$ de f, $\tilde{q}_1: U \times V \times W \to R$ de q_1 e $\tilde{h}: U \times V \to R^p$ de h, e todo $z \in U \subset R^n$, todo $a \in V \subset R^p$ e todo $b \in W \subset R$.

Como f é regular de ordem p segue que $\tilde{q}_1(0,0,0) \neq 0$, $h_i(0,0) = 0$ e ainda

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{h}_i}{\partial a_j}(0,0) = 0 \quad , \ i > j \\[2ex] \dfrac{\partial \tilde{h}_i}{\partial a_i}(0,0) \neq 0 \end{cases}$$

Então $\det\left(\dfrac{\partial \tilde{h}_i}{\partial a_j}(0)\right) \neq 0$ e pelo Teorema da Função Implícita, existe uma função C^∞ $\tilde{u}: U_1 \to R^p$ (onde U_1 é uma vizinhança do zero contida em U) tal que $\tilde{h}_i(z,\tilde{u}(z)) = 0$, para $1 \leq i \leq p$ e $z \in U_1$.

Seja $\tilde{q}(z,b) = \tilde{q}_1(z, u(z),b)$ e sejam q e u germes em $(0,0)$ e o de $\tilde{q}$ e $\tilde{u}$, respectivamente. Então (I.2.5.1) é satisfeita. É claro que como $\tilde{q}_1(0,0,0) \neq 0$, q é inversível.

I.2.6 - Versão local do Teorema de Divisão (de Mather) para funções C^∞ |19|

Sejam $f,g \in C^\infty_{(0,0)}(R^n \times R)$ e suponha f regular de ordem p. Então existem $q \in C^\infty_{(0,0)}(R^n \times R)$ e um germe de função C^∞ $h: (R^n,0) \to R^p$ tais que

$$g = fq + R_h \qquad (I.2.6.1)$$

Prova

Do teorema I.2.5, dada f regular de ordem p, existem um germe inversível $q_1 \in C^\infty_{(0,0)}(R^n \times R)$ e um germe de funçao C^∞ $u: (R^n,0) \to R^p$ tais que $f = q_1 P_u$. (I.2.6.2)

Do lema I.2.4, dadas $g \in C^\infty_{(0,0)}(R^n \times R)$ e $u: (R^n,0) \to R^p$ existem $q_2 \in C^\infty_{(0,0)}(R^n \times R)$ e um germe de função C^∞ $h: (R^n,0) \to R^p$ tais que $g = P_u q_2 + R_h$. (I.2.6.3)

Então, colocando $q = \frac{q_2}{q_1}$, de (I.2.6.2) e (I.2.6.3) seque que $g = P_u q_2 + R_h = \frac{f}{q_1} q_2 + R_h = fq + R_h$ isto é, vale (I.2.6.1). Observe que q é C^∞ visto que q_1 é inversível.

I.2.7 - **Observações: A unicidade no caso C^∞**

(a) Seja $f: R \times R \to R$ definida por $f(t,x) = t^2 + x$ que é regular de ordem 2. Seja $g: R \times R \to R$, $g(t,x) \equiv 0$. Mostremos que o par (q,h) não é único, neste caso.

É claro que $q(t,x) \equiv 0, h \equiv 0$ satisfazem (I.2.6.1) neste caso. No entanto este par não é único. De fato, as funções

$$r_2(t,x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & , x < 0 \\ 0 & , x \geq 0 \end{cases} \quad \text{e } q_2 = -\frac{r^2}{f} \text{ são } C^\infty \text{ numa}$$

vizinhança do zero e também satisfazem (I.2.6.1).

(b) Sobre a unicidade também podemos afirmar: se as raízes do polinômio $t \longmapsto P(t,x)$ são todas reais para cada x, então q e h de (I.2.4) são únicas |3 - pag 8-9,8-10|. De fato, por I.2.4, dada g em $C^\infty_{(0,0)}(R \times R^n)$ sabemos que existem germes de funções C^∞ h e q tais que $g(t,x) = P(t,x)q(t,x) + r(t,h(x))$.

Se para cada x_o as raízes de $x_o \longmapsto P(t,x_o)$ são todas reais temos que existem $t_1,\ldots,t_p$ reais tais que $P_{x_o}(t) = (t - t_1) \ldots (t - t_p)$.
Como o quociente $\dfrac{g(t,x_o) - r_{x_o}(t)}{P_{x_o}(t)}$ é C^∞ (pois este é igual a $q(t,x_o)$) e todos os t_i são reais sabemos que para $t = t_i$, $i = 1,\ldots,p$, $r_{x_o}(t) = g(t,x_o)$. Logo os p coeficientes do polinômio $r_{x_o}(t) = \sum_{i=1}^{p} h_i(x_o)t^{p-i}$ são determinados pelo sistema de p equações a p incógnitas

$$\begin{cases} r_{x_o}(t_1) = g(t_1,x_o) \\ r_{x_o}(t_2) = g(t_2,x_o) \\ \vdots \\ r_{x_o}(t_p) = g(t_p,x_o) \end{cases}$$

que obviamente, possui uma única solução. Assim, o polinômio $r_{x_o}(t)$ é unicamente determinado. A unicidade de $q(t,x_o) = \dfrac{g(t,x_o) - r_{x_o}(t)}{p_{x_o}(t)}$ segue então trivialmente.

(c) Para o caso de uma variável t (n = 0) o resultado (I.2.6) é trivial e q e h são unicamente determinadas.

De fato, se f e g são C^∞ numa vizinhança do zero e f é regular de ordem p em t no zero, isto é, $f(t) = t^p h(t)$ com h C^∞ e $h(0) \neq 0$ temos

(c.1) Pela fórmula de Taylor com resto de Lagrange aplicada a g temos que

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + \frac{g''(0)}{2!}t^2 + \dots + \frac{g^{(p-1)}(0)}{(p-1)!}t^{p-1} + \frac{g^{(p)}(\zeta)t^p}{p!}$$

para algum ζ numa vizinhança do zero.

Podemos então escrever

$$g(t) = r(t) + \frac{g^{(p)}(\zeta)}{p!}t^p \quad \text{onde} \qquad (c.1.1)$$

$$r(t) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i t^{p-i}, \quad \alpha_i = \frac{g^{(p-i)}(0)}{(p-i)!} \quad i=1,2,\dots,p$$

(c.2) h é C^∞ e $h(0) \neq 0$, sabemos que existe uma vizinhança do o onde $h(t) \neq 0$ e portanto nesta vizinhança a função $\frac{1}{h}$ é C^∞. Então, por (c.1.1) e do fato de $f(t) = t^p h(t)$ temos

$$g(t) = t^p h(t) \frac{g^{(p)}(\zeta)}{p!\ h(t)} + r(t)$$

$$= f(t)\ q(t) + r(t) \quad \text{onde } q(t) = \frac{g^{(p)}(\zeta)}{p!\ h(t)}$$

é obviamente , de classe C^∞.

Assim, vale o resultado I.2.6.

Resultados semelhantes aos de I.2.4, I.2.5 e I.2.6 são enunciados e demonstrados em |25| quando as funções assumem valores complexos:

I.2.8 - Teorema |25|

Seja f(t,x) uma função C^∞ com valores complexos definida numa vizinhança da origem no $R \times R^n$ sendo f regular de ordem p em t no zero. Então, numa vizinhança da origem temos a fatoração

$$f(t,x) = \left[t^p + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j(x) t^{p-i}\right] q(t,x) \qquad (I.2.8.1)$$

onde q e λ_j são funções C^∞ com valores complexos com $q(0,0) \neq 0$. Ainda, se f é real tal fatoração existe com q e λ_j reais.

I.2.9 - Notas sobre I.2.8

(a) Sua prova será dada posteriormente em (I.2.13).

(b) Para p = 1 o teorema afirma que se $f(0;0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial t}(0,0) \neq 0$ então tem-se a fatoração

$$f(t,x) = q(t,x)\left[t + \lambda_1(x)\right] \;,\; q(0,0) \neq 0 \qquad (I.2.9.1)$$

É claro que se f é real isto segue do Teorema da Função Implícita e a fatoração é única.

Entretanto para f complexa um simples resultado parecido não é tão trivial. Ainda, a fatoração não é única: para n = 1, a função

$f(t,x) = t + i(x + e^{-\frac{1}{x^2}})$ adimite as fatorações

$f = 1.f$ e $f(t,x) = q(t,x)(t + ix)$ onde facilmente vê-se que q é C^∞ e $q(0,0) = 1 \neq 0$.

I.2.10 - Teorema de Divisão Polinomial |25|

Seja f(t,x) uma função C^∞ com valores complexos numa vizinhança da origem do $R \times R^n$ e seja $P(t,\lambda) = t^p + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i t^{p-i}$, $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_p)$ um polinômio genérico em t com coeficientes constantes λ_j. Então numa vizinhança da origem tem-se a divisão por $P(t,\lambda)$:

$$f(t,x) = P(t,\lambda)\; q(t,x,\lambda) + r(t,x,\lambda) \qquad (I.2.10.1)$$

onde q e r são C^∞ com valores complexos numa vizinhança da origem em $R^{n+1} \times \mathbb{C}^p$ e r um polinômio em t de grau $\leq p$.

Novamente, se f e λ_j são reais pode-se obter este resultado com q e r reais.

<u>Prova</u>

Esta prova, feita por Nirenberg, é uma adaptação da prova de I.1.7 (que é o I.2.10 no caso analítico).

Para esta necessitamos do seguinte lema, denominado por |9| de Lema de Extensão de Nirenberg,

I.2.10.2 - <u>Lema de extensão</u> |25|

Seja f(t,x) uma função C^∞ com valores complexos, definida numa vizinhança da origem em $R \times R^n$. Então existe uma função C^∞ complexa $F(z,x,\lambda)$ definida numa vizinhança da origem de $\mathbb{C} \times R^n \times \mathbb{C}^p$, satisfazendo

(i) $F(t,x,\lambda) = f(t,x)$ para t real

(ii) $F_{\bar{z}}$ anula-se até ordem infinita em $\mathrm{Im} z = 0$ e em $P(z,\lambda) = 0$.

(|4| exige que supp f $\subset$ B(0,1): lema 5.10 pag. 47)

Seja F a extensão de f obtida pelo lema (I.2.10.2). Aplicando-se para F a Fórmula Integral de Cauchy Generalizada (|9| Lema 2.3 pag 96) temos:

$$f(t,x) = F(t,x,\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{F(z,x,\lambda)}{z-t}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\iint_D F_{\bar{z}}(z,x,\lambda)\,\frac{dz \wedge d\bar{z}}{z-t}$$

onde a área de integração é o disco D na origem contendo em seu interior o ponto t e todas as raízes z de $P(z,\lambda)$ para $|\lambda|$ pequeno.

Substituindo-se $\frac{1}{z - t}$ destas integrais por

$$\frac{P(t,\lambda)}{(z - t)P(z,\lambda)} + \frac{R(t,z,\lambda)}{P(z,\lambda)} \quad \text{(como na prova de I.1.7)}$$

obtém-se (I.2.10.1) com

$$q(t,x,\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{F(z,x,\lambda)dz}{(z-t)P(z,\lambda)} + \frac{1}{2\pi i}\iint_D \frac{F_{\bar{z}}(z,x,\lambda)}{(z-t)P(z,\lambda)} dz \wedge d\bar{z} ,$$

$$r(t,x,\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} F(z,x,\lambda)\, \frac{R(t,z,\lambda)}{P(z,\lambda)}\, dz + \frac{1}{2\pi i}\iint_D F_{\bar{z}}(z,x,\lambda)\, \frac{R(t,z,\lambda)}{P(z,\lambda)}\, dz \wedge d\bar{z} .$$

Os denominadores nas integrais duplas são nulos quando $z - t$ ou $P(z,\lambda)$ se anulam, mas pelo Lema (I.2.10.2), neste conjunto, o numerador se anula até ordem infinita. Então aquelas integrais convergem absolutamente. Além disso, podemos diferenciar com relação a t, x e λ sob o sinal de integral; as integrais resultantes são todas absolutamente convergentes. Assim, q e r são de classe C^∞ e o Teorema I.2.10 está provado.

No caso em que f é real usamos $\frac{1}{2}\left[F(z,x,\lambda) + F(\bar{z},x,\lambda)\right]$ no lugar de F do caso anterior; e verifica-se que q e r são reais para λ real.

I.2.11 - **Notas sobre I.2.10**

(a) A prova de I.2.10 dada por Nirenberg |25| não pro duz q e r dependendo linearmente de f. No caso real uma forma mais forte deste teorema foi provada por Mather |17|, conforme vimos na versão I.2.1.

(b) Em |9| encontramos esta versão I.2.10 com a pequena diferença de que q e r são definidas numa vizinhança da origem em $R \times R^n \times R^p$ ao invés de $R \times R^n \times \mathbb{C}^p$.

(c) Observamos que Hormander - On the singularities of solutions of partial differential equations. Conf. on Functional Analysis and Related Topics, Tokyo, 1969, 31-40, numa linha inteiramente diferente, usou um dispositivo de estender funções C^∞ em variáveis reais para variáveis complexas segundo funções satisfazendo as equações de Cauchy-Riemann para ordem infinita numa subvariedade real.

I.2.12 - Prova do Lema (I.2.10.2) |25| |4|

Na prova do lema (I.2.10.2) faremos uso de um caso especial do Teorema de Extensão de Whitney, do qual incluiremos a prova.

I.2.12.1 - Lema

Sejam u(y), v(y) funções C^∞ com valores complexos numa vizinhança da origem de $R^m \times R^n \times R^k$ satisfazendo (aqui D^α representa a derivada de ordem $|\alpha|$).

$$D^\alpha(u-v) = 0 \text{ em } y_1 = \ldots = y_{m+n} = 0 \text{ para todo } \alpha.$$

Então existe uma função C^∞, F(y), satisfazendo

$$D^\alpha(F-u) = 0 \text{ em } y_1 = \ldots = y_m = 0 \text{ para todo } \alpha,$$

$$D^\alpha(F-v) = 0 \text{ em } y_{m+1} = \ldots = y_{m+n} = 0 \text{ para todo } \alpha.$$

(neste lema |3| também exige que u e v tenham suporte na bola unitária)

Prova |25|

A função

$$F(y) = v(y) + \sum \frac{y^\alpha}{\alpha!} D^\alpha(u-v)(0,\ldots,0,y_{m+1},\ldots,y_{m+n+k}).\phi(t_{|\alpha|}\sum_1^m y_i^2),$$

onde a soma é sobre $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_m,0,\ldots,0)$, tem a propriedade desejada, onde $\phi(s)$ é uma função C^∞ em $s \geq 0$ que é 1 em $0 \leq s \leq \frac{1}{2}$ e zero para $s > 1$, onde $t_j \nearrow \infty$ é uma sequência rapidamente crescente tendendo para o infinito, de tal modo que a série é diferenciável termo a termo.

A escolha dos t_j depende das funções u e v, e a função F resultante não depende linearmente de u e v.

Passemos agora à prova do Lema (I.2.10.2): a prova é feita por indução sobre p.

Para p = 0, seja z = x + iy e tome a função

$$F(z) = \sum_{j=0}^{\infty} i\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^j f(x)\ \frac{y^j}{j!}\ \phi(t_j\ y),$$

onde

$$\phi(y) = \begin{cases} 1 \text{ se } |y| \leq \frac{1}{2} \\ \\ 0 \text{ se } |y| > 1 \end{cases}$$

e a sequência $\{t_j\}$ cresce tão rapidamente que a série é diferenciável termo a termo. Então F(x) = f(x) para x real.

Como $2\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} = \dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y} = i\left[-i\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y}\right]$, então

$$\frac{2}{i}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}F(z) = \sum_{j=0}^{\infty}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)^{j+1} f(x)\frac{y^j}{j!}\left[\phi(t_{j+1}y)-\phi(t_j y)\right] + \sum\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)^{j} f(x)\frac{y^j}{j!}\phi'(t_j y),$$

e em ambas as séries cada termo se anula numa vizinhança de $y = 0$, porque $\phi(t_j y)$ tem localmente o valor constante 1.

Supondo que o lema tenha sido provado para $p - 1$ vamos prová-lo para p.

Primeiramente efetuamos uma troca de variável no espaço $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^p$ no zero do seguinte modo: não mexemos em z e nem em $\lambda' = (\lambda_1,\ldots,\lambda_{p-1})$ e introduzimos uma nova variável μ para substituir λ_p onde $\mu = P(z,\lambda)$ sendo $P(z,\lambda) = z^p + \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i z^{p-i}$. Isto é,

$$(z,\lambda_1,\ldots,\lambda_p) \longmapsto (z,\lambda_1,\ldots,\lambda_{p-1},P(z,\lambda)) = (z,\lambda',\mu).$$

Então no espaço dos (z,λ',μ) a variedade $P = 0$ torna-se $\mu = 0$, e o operador $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$ torna-se, nas novas coordenadas,

$$L = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \overline{P'(z,\lambda)}\,\frac{\partial}{\partial \bar{\mu}} \qquad \text{(I.2.12.2)}$$

onde P' é a derivada de P em relação a z (note que P' independe de λ_p).

Vamos contruir duas funções C^∞ com valores complexos $v(z,x,\lambda')$ e $u(z,x,\lambda',\mu)$ onde $z \in \mathbb{C}$, $\lambda' \in \mathbb{C}^{p-1}$,

$\mu \in \mathbb{C}$, $x \in R^n$ tais que

$$v(t,x,\lambda') = f(t,x) \text{ , para } t \text{ real} \qquad (I.2.12.3)$$

$v_{\bar{z}}$ anula-se até ordem infinita em $\mathrm{Im}z = 0$ (I.2.12.4)

$$u = v \quad \text{em } \mu = 0 \qquad (I.2.12.5)$$

Lu anula-se até ordem infinita em $\mu = 0$ (I.2.12.6)

$D^\alpha(u - v) = o$ em $\mathrm{Im}z = \mathrm{Re}\,\mu = \mathrm{Im}\,\mu = 0$ para todo α. (I.2.12.7)

Com esta construção completa, o lema (I.2.12.1) fornecerá uma função diferenciável $F(z,x,\lambda',\mu)$ que satisfaz:

$F - v$ anula-se até ordem infinita em $\mathrm{Im}z = 0$, em particular, $L(F)$ se anula até ordem infinita e $F = v = f$ em $\mathrm{Im}z = 0$ (isto usa I.2.12.4 e o fato que $\frac{\partial v}{\partial \bar{\mu}} \equiv 0$). Ainda,

$F - u$ se anula até ordem infinita onde $\mu = 0$ e em particular, por (I.2.12.6), $L(F)$ se anula até ordem infinita onde $\mu = 0$.

A hipótese de indução é usada para construir v, isto é, $v(z,x,\lambda')$ é uma função C^∞ satisfazendo (I.2.12.3) e (I.2.12.4) e também

$V_{\bar{z}}$ se anula até ordem infinita em

$$P'(z,\lambda') = p\, z^{p-1} + (p-1)\,\lambda_1\, z^{p-2} + \dots + \lambda_{p-1} = 0 \,. \qquad (I.2.12.8)$$

Então colocamos

$$u = \sum_0^\infty \left(-\frac{1}{P'}\frac{\partial}{\partial \bar z}\right)^j v(z,\lambda')\, \frac{\mu^{-j}}{j!}\, \phi(|\mu|^2 t_j)$$

onde, por convenção, $\left(\frac{-1}{P'}\frac{\partial}{\partial \bar z}\right)^j v(z,\lambda')$ é zero quando $P' = 0$ e $j \geq 1$.

Nesta definição, ϕ é a função definida no caso $p = 0$ e $t_j \nearrow \infty$ é rapidamente crescente (dependendo da função v).

Como $v_{\bar z}$ se anula até ordem infinita no conjunto onde $P' = 0$ vê-se que para t_j rapidamente crescente a função u é C^∞ e satisfazendo (I.2.12.5) .

Agora Lu é calculado termo a termo

$$Lu = \bar P'\left[\frac{1}{P'}\frac{\partial}{\partial \bar z} - \frac{\partial}{\partial \bar\mu}\right] u =$$

$$= \overline{P'} \sum_0^\infty \left(\frac{-1}{P'}\frac{\partial}{\partial \bar z}\right)^{j+1} v(z,\lambda')\, \frac{\mu^{-j}}{j!} \left[\phi(|\mu|^2 t_{j+1}) - \phi(|\mu|^2 t_j)\right] +$$

$$\overline{P'} \sum_0^\infty \left(\frac{-1}{P'}\frac{\partial}{\partial \bar z}\right)^{j} v(z,\lambda')\, \frac{\mu^{-j}}{j!}\, t_j\, \mu\, \phi'(|\mu|^2 t_j) \,.$$

Agora, observe que ϕ é localmente constante perto de $\mu = 0$ e assim todas as parcelas se anulam localmente. Isto prova que Lu se anula até ordem infinita em $\mu = 0$, isto é, (I.2.12.6) ocorre.

Finalmente, para verificar (I.2.12.7) vê-se de (I.2.12.4) que

$$u(z,x,\lambda',\mu) - v(z,x,\lambda')\ \phi(|\mu|^2 t_o)$$

se anula até ordem infinita em Imz = 0. Como $v(z,x,\lambda')(\phi(|\mu|^2 t_o) - 1)$ se anula até ordem infinita em $\mu = 0$, conclui-se que (I.2.12.7) ocorre, e a prova de I.2.10.2 está completa.

Enquanto que nesta prova vista (|4|,|25|) F é construída, dependendo de f, mas não linearmente, Mather |20| prova uma versão global deste lema e obtém F dependendo linearmente de f.

I.2.13 - Prova do Teorema I.2.8 |25|

Nirenberg afirma que esta prova segue B. Malgrange no texto The preparation Theorem for differentiable functions Diferential Analysis, Oxford Univ. Press, 1964, 203-208.

Seja f como na hipótese de I.2.8 e considere a divisão (I.2.10.1) do Teorema I.2.10 pelo polinômio genérico P(t,λ). O resto r tem a forma

$$r(t,x,\lambda) = \sum_{1}^{p} r_j(x,\lambda) t^{p-j} \ .$$

Vamos resolver as p equações complexas:

$$r_j(x,\lambda) = 0 \qquad j = 1,\ldots,p \qquad \text{(I.2.13.1)}$$

para $\lambda = \lambda(x)$, considerando este sistema de 2p equações reais com 2p incógnitas reais Re λ_j, Im λ_j, $j = 1,\dots,p$.

E daí obtemos a fatoração desejada (I.2.8.1)

$$f(t,x) = q(t,x,\lambda(x))\ P(t,\lambda(x)).$$

Da definição de p, vê-se que $r_j(0,0) = 0$, $j = 1,\dots,p$ e $q(0,0,0) \neq 0$ então para se resolver (I.2.13.1) é suficiente mostrar que a matriz jacobiana

$$\frac{\partial(\text{Re } r_j\ ,\ \text{Im } r_j)}{\partial(\text{Re } \lambda_k,\ \text{Im } \lambda_k)}$$

é não singular em $x = 0$, $\lambda = 0$.

De fato, vamos mostrar que a matriz p x p complexa

$$\left(\frac{\partial r_j}{\partial \lambda_k}\ (0,0)\right)$$

é não singular enquanto que $\dfrac{\partial r_j}{\partial \bar{\lambda}_k}(0,0) = 0$, de onde o resultado desejado segue facilmente.

Aqui, para $\lambda_k = u_k + i\ v_k$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_k} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial u_k} - i\ \frac{\partial}{\partial v_k}\right] \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}_k} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial u_k} + i\ \frac{\partial}{\partial v_k}\right]$$

Aplicando-se $\dfrac{\partial}{\partial \bar{\lambda}_k}$ em (I.2.10.1), isto é, em

$$f(t,x) = q(t,x,\lambda)\ P(t,\lambda) + r(t,x,\lambda)$$

encontramos

$$\sum_{j=1}^{p} \frac{\partial r_j}{\partial \bar{\lambda}_k}(0,0)\, t^{p-j} = -t^p \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}_k} q(t,0,0) \quad , \; k = 1,\ldots,p$$

para todo t, de onde segue que $\frac{\partial r_j}{\partial \bar{\lambda}_k}(0,0) = 0$.

Aplicando-se $\frac{\partial}{\partial \lambda}$ em (I.2.10.1), encontramos para $k = 1,\ldots,p$

$$q(t,0,0)t^{p-k} + t^p \frac{\partial}{\partial \lambda_k} q(t,0,0) + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial r_j}{\partial \lambda_k}(0,0)t^{p-j} = 0 \quad .$$

Suponha que para algum vetor complexo

$\zeta = (\zeta_1,\ldots,\zeta_p)$,

$\sum_{k=1}^{p} \frac{\partial r_j}{\partial \lambda_k}(0,0)\zeta_k = 0$, $j = 1,\ldots,p$, então encontramos

$q(t,0,0) \sum_{1}^{p} t^{p-k} \zeta_k = O(t^p)$, quando $t \to 0$. Como $q(0,0,0) \neq 0$ isto implica que $\sum_{k=1}^{p} t^{p-k} \zeta_k \equiv 0$, $\forall t$ o que significa que $\zeta \equiv 0$.

Então $\left(\frac{\partial r_j}{\partial \lambda_k}(0,0)\right)$ é não singular.

I.2.14 - Um Teorema de Divisão Especial |27|

Para provarmos uma extensão do Teorema Generalizado de Malgrange (no capítulo III) para funções que dependem continuamente de um parâmetro necessitaremos de uma ver são do Teorema de Divisão mais complexa do que a usual que será dada neste parágrafo.

Primeiramente, fixaremos algumas notações:

(E, e_o): espaço topológico E com um ponto e_o distinguido.

N,P: variedades

$C^\infty(N)^E$: R - álgebra dos germes em e_o de funções contínuas de E em $C^\infty(N)$.

É claro que $C^\infty(N)$ pode ser visto como subanel de $C^\infty(N)^E$ através da injeção canônica i: $C^\infty(N) \to C^\infty(N)^E$
$f \longmapsto [f]$ onde $[f]$ é o germe da função constante que leva $e \in E$ em f.

$C^\infty(N,P)^E$ e $C^\infty_{pr}(N,P)^E$ são definidos analogamente como conjuntos de germes em e_o de funções contínuas de E em $C^\infty(N,P)$ e $C^\infty_{pr}(N,P)$ respectivamente.

I.2.14.1 - <u>Teorema de Divisão</u> |27| |18|

Seja N uma subvariedade fechada com bordo de R x P tal que seja própria a projeção π': $N \to P$.

Sejam $f \in C^\infty(N)^E$ e

$$\Omega = [t]^p + \sum_{j=1}^{p} u_j \circ [\pi'] \; [t]^{p-j} + \phi \in C^\infty(N)^E$$

com $u_j \in C^\infty(P)^E$, $\phi \in C^\infty(N)^E$ sendo $\phi_{e_o} = 0$ e t: $N \to R$ a projeção canônica.

Então pode-se encontrar $q \in C^\infty(N)^E$, $h_j \in C^\infty(P)^E$, $1 \leq j \leq p$ tais que

$$f = \Omega q + \sum_{j=1}^{p} h_j \circ [\pi'] \; [t]^{p-j}.$$

Este teorema será uma consequência do seguinte lema

I.2.14.2 - Lema |27|

Defina funções $q_{f,u} \in C^\infty(R \times P)$ e $h_{f,u} \in C^\infty(P,R^p)$ por $q_{f,u}(t,y) = Q(f_y,\ t,\ u(y))$ e $h_{f,u}(y) = H(f_y, u(y))$ onde Q e H são como q e h no teorema I.2.1 e $f_y\colon R \to R$ é dada por $f_y(t) = f(t,y)$. Todos os espaços estão munidos da topologia de Whitney ω_∞.

Então

(a) A função $h\colon C^\infty(R \times P) \times C^\infty(P,R^p) \to C^\infty(P,R^p)$ tal que $(f,u) \longmapsto h_{f,u}$ é contínua.

(b) Se $N \subset R \times P$ é uma subvariedade fechada cuja projeção em P é própria então é contínua a função $q\colon C^\infty(R \times P) \times C^\infty(P,R^p) \longrightarrow C^\infty(N)$ dada por $q\colon (f,u) \to q_{f,u}/N$.

Prova

(a) Dado $f \in C^\infty(R \times P)$, defina $h_f \in C^\infty(P \times R^p, R^p)$ por $h_f(y,v) = H(f_y,v)$. Afirmamos que:

(a') Se $M \subset P \times R^p$ é uma subvariedade fechada cuja projeção em P é própria então a função $f \longmapsto (h_f)/M$ de $C^\infty(R \times P)$ em $C^\infty(M,R^p)$ é contínua.

A idéia para se demonstrar (a') é construir ba ses de sistemas de vizinhanças convenientes de f em $C^\infty(RxP)$ e de $(h_f)/M$ em $C^\infty(M,R^p)$ de modo que possamos aplicar as estimativas válidas no teorema da divisão I.2.1.

Sejam $\{U^o_\alpha,\Phi^o_\alpha\}$ um atlas em P e $K^o = \{K^o_\alpha\}_{\alpha\in A}$ uma cobertura de P por compactos localmente finita e subordinada a $U^o = \{U^o_\alpha\}_{\alpha\in A}$ (isto é, $K^o_\alpha \subset U^o_\alpha$, $\forall\alpha \in A$).

Sejam π_1: $M \to P$ e π_2: $M \to R^p$ as projeções canônicas (π_1 é própria).

Para cada $\alpha \in A$, façamos

$$U_\alpha = \pi_1^{-1}(U^o_\alpha)\ , \qquad \Phi_\alpha = (\Phi^o_\alpha \circ \pi_1,\ \pi_2) \ \text{ e } K_\alpha = \pi_1^{-1}(K^o_\alpha).$$

Segue-se que $\{U_\alpha,\Phi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ é um atlas de M e $K = \{K_\alpha\}_{\alpha\in A}$ é uma cobertura localmente finita de M por compactos subordinada a $U = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ (K_α é compacto visto que π_1: $M \to P$ é própria).

Seja N uma vizinhança fechada de Z onde $Z = \{(t,u) \in R \times R^p\colon t^p + u_1t^{p-1} + \dots + u_p = 0\}$ em $R \times R^p$ como no teorema I.2.1 e $N(u) = \{t \in R\colon (t,u) \in N\}$.

Podemos supor também que a projeção π/N: $N \to R^p$ é própria, o que nos permite concluir que $N(\pi_\alpha K_\alpha) \subset R$ é compacto.

Sejam

$$L_\alpha = N(\pi_\alpha(K_\alpha)) \times K^o_\alpha \subset R \times P \ \text{ e } \ \Phi'_\alpha = (\rho_1, \Phi^o_\alpha \circ \rho_2) \quad \text{onde}$$
ρ_1: $R \times P \to R$ e ρ_2: $R \times P \to P$ são as projeções canônicas.

Claramente, $L = \{L_\alpha\}_{\alpha\in A}$ é uma família (não necessariamente uma cobertura) localmente finita de compactos contidos em $R \times P$.

Um sistema de vizinhanças de $(h_f)/M$ é dado por:

$$N_k = N_k((h_f)/M,K,\Phi,\varepsilon) = \{h' : \| h' \circ \Phi_\alpha^{-1} - (h_f)/M \circ \Phi_\alpha^{-1} \|^*_{k,\Phi_\alpha K_\alpha} < \varepsilon\}$$

onde $\varepsilon = (\varepsilon_\alpha)_{\alpha\in A}$ varia entre as famílias de números positivos indexadas em A e k varia entre os inteiros.

Dada N_k, desejamos encontrar

$$N'_k = N'_k(f,L,\Phi',\delta) = \{g \in C^\infty(R \times P) : \| g \circ \Phi'^{-1}_\alpha - f \circ \Phi'^{-1}_\alpha \|^*_{k,\Phi'_\alpha k_\alpha} < \delta_\alpha\}$$

(onde $\delta = (\delta_\alpha)_{\alpha\in A}$ é uma família de números positivos e $\Phi' = \{\Phi'_\alpha\}_{\alpha\in A}$) tal que para toda $g \in N'_k$ se tenha $(h_g)/M \in N_k$.

Fixemos $\varepsilon = (\varepsilon_\alpha)_{\alpha\in A}$ com $\varepsilon_\alpha > 0$ e seja k natural.

Para provar a continuidade de $f \longmapsto (h_f)/M$ basta encontrar um inteiro K_k e números $\delta_\alpha > 0$ tais que

$$\text{se } \| (g-f) \circ \Phi'^{-1}_\alpha \|^*_{K_k,\Phi'_\alpha L_\alpha} < \delta_\alpha \text{ então } \| (h_g-h_f) \circ \Phi_\alpha^{-1} \|^*_{k,\Phi_\alpha K_\alpha} < \varepsilon_\alpha \ .$$

Provar (a') reduz-se agora a estimar as derivadas de $(h_g - h_f) \circ \Phi_\alpha^{-1} = h_{(g-f)\circ\phi'^{-1}_\alpha}$ em $\Phi_\alpha(K_\alpha)$ em termos das derivadas de $(g - f) \circ \Phi'^{-1}_\alpha$ em $\Phi'(L_\alpha)$.

Seja $y_1,\dots,y_n$ o sistema de coordenadas de P correspondente a $\Phi^o_\alpha : U^o_\alpha \longrightarrow R^n$ e $v_1,\dots,v_p$ as coordenadas de R^p.

Sejam $\ell = (\ell_1,\dots,\ell_n)$ e $m = (m_1,\dots,m_p)$ multiíndices.

Dados $y \in \Phi_\alpha^o K_\alpha$ e $v \in R^p$, temos, pela linearidade de H que:

$$\frac{\partial^{|\ell|}}{\partial y^\ell} \frac{\partial^{|m|}}{\partial v^m} \left(h_{(g-f)} \circ \Phi_\alpha'^{-1} \right) (y,v) = \frac{\partial^{|m|}}{\partial v^m} H(F_y,v) \quad \text{onde}$$

$$F = \frac{\partial^{|\ell|}}{\partial y^\ell} (g - f) \circ \Phi_\alpha'^{-1} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^{|\ell|}}{\partial y^\ell} = \frac{\partial^{\ell_1+\ell_2+\ldots+\ell_n}}{\partial y_1^{\ell_1} \ldots \partial y_n^{\ell_n}} \quad \text{e}$$

$$\frac{\partial^{|m|}}{\partial v^m} = \frac{\partial^{m_1+m_2+\ldots+m_p}}{\partial v_1^{m_1} \ldots \partial v_p^{m_p}} .$$

Pelas estimativas em (I.2.1) existe $C_\alpha > 0$ tal que

$$\sup_{(y,v) \in \Phi_\alpha K_\alpha} \left\| \frac{\partial^{|m|}}{\partial v^m} H(f_y,v) \right\| \leq \| H_F \|^*_{|\ell|+|m|} \leq C_\alpha \; \| F \|^*_{k(m),\Phi_\alpha' L_\alpha} \leq$$

$$\leq C_\alpha \; \| (g - f) \circ \Phi_\alpha'^{-1} \|^*_{k(m)+|\ell|,\Phi_\alpha' L_\alpha}$$

Seja então $K_k = K(|k|) + |\ell|$ onde $K(|k|)$ é como no teorema I.2.1 (parte e) e $\delta_\alpha = \frac{1}{C_\alpha}$.

Isto completa a demonstração de (a').

Para mostrar (a) a partir de (a'), sejam $u_o \in C^\infty(P,R^p)$ e M uma vizinhança do gráfico de u_o em $P \times R^p$ cuja projeção em P é própria.

A existência de M é garantida pelo lema |27|:

"Se f: $N \to P$ é contínua e $K \subset N$ é um fechado tal que f/K é própria então existe uma vizinhança L de K em N tal que f/L é própria. Pode-se supor L uma subvariedade fechada com bordo".

Seja $U = \{u \in C^\infty(P,R^p): \text{graf } u \subset M\}$.

Como U é uma vizinhança de u_o em $C^\infty(P,R^p)$, para mostrar a continuidade de h basta fazê-lo para sua restrição a $C^\infty(R \times P) \times U$. Mas,

$$h_{f,u} = h \circ (Id_P,u) = (h_f)/M \circ (Id_P,u), \ \forall f \in C^\infty(R \times P) \ \text{e} \ \forall u \in U.$$

Isto demonstra (a). A demonstração de (b) é análoga e está feita em |18| pag 271 - 273.

Demonstração de I.2.14.1 |27|

Sejam $f \in C^\infty(N)^E$ e $\Omega = [t]^p + \sum u_j \circ [\pi']\circ[t]^{p-j} + \phi$, com $u_j \in C^\infty(P)^E$ e $\phi \in C^\infty(N)^E$ tal que $\phi_{e_o} = 0$.

Queremos encontrar $q \in C^\infty(N)^E$, $h_j \in C^\infty(P)^E$, $1 \leq j \leq p$, tais que

$$f = \Omega q + \sum h_j \circ [\pi'] \ [t]^{p-j}. \qquad (I.2.14.3)$$

Vamos considerar dois casos:

caso A: $\phi = 0$. Dado $f \in C^\infty(N)^E$, existe uma extensão $\dot{f}$ $\dot{f} \in C^\infty(R \times P)^E$ de f, isto é, $\dot{f}_e/N = \tilde{f}_e$ para representantes convenientes (a existência de $\dot{f}$ é garantida por J. Sotomayor em |27| exercício 2.3 pag 185 e exercício 4 pag 146). Sejam $(y_1,\ldots,y_p)$ coordenadas em R^p. Pelo teo rema da divisão I.2.1 teremos, para cada $e \in E$

$$\overset{*}{f}_e(t,x) = (t^p + \sum_{i=1}^{p} y_i t^{p-i})\ \tilde{\dot{q}}_e(t,x,y) + \sum_{i=1}^{p} \tilde{\dot{h}}_{i,e}(x,y)\ t^{p-i} \qquad (I.2.14.4)$$

quaisquer que sejam $(t,x) \in R \times P$ com

$$\tilde{\dot{q}}_e \in C^\infty(R \times P \times R^p) \quad e \quad \tilde{\dot{h}}_{i,e} \in C^\infty(P \times R^p).$$

Consideremos uma vizinhança M de graf u_o em $P \times R^p$ que seja uma subvariedade fechada com bordo de modo que a projeção $M \to P$ seja própria.

Coloquemos

$$\tilde{q}_e = \tilde{\dot{q}}_e/N \times R^p \cap R \times M \quad e \quad \tilde{h}_e = \tilde{\dot{h}}_e\ /M \quad .$$

Seja

$$V_{e_o} = \{e \in E:\ (x,\tilde{u}_e(x)) \in M\}\ .$$

Claramente V_{e_o} é vizinhança de e_o em E.

Se em (I.2.14.4) fizermos $\tilde{y}_i = \tilde{u}_{i,e}(x)$ teremos

$$\begin{aligned}\tilde{f}_e(t,x) &= ((\tilde{\dot{f}}_e)/N)(t,x) = \\ &= (t^p + \sum \tilde{u}_{i,e}(x)t^{p-i})\ \tilde{q}_e(t,x,\tilde{u}_e(x)) + \\ &+ \sum_{i=1}^{p} h_{i,e}(x,\tilde{u}_e(x))t^{p-i} \qquad (I.2.14.5)\end{aligned}$$

quaisquer que sejam $(t,x) \in N$ e $e \in V_{e_o}$.

Pelo Lema I.2.14.2, $\tilde{q}_e$ e $\tilde{h}_e$ são contínuas como função do parâmetro e em V_{e_o}, o que conclui a demonstração nesse caso.

<u>caso B</u>: ϕ qualquer. Argumentando da mesma forma teremos:

$$\tilde{\dot{\Psi}}_e(t,x) = (t^p + \sum_{i=1}^{p} y_i t^{p-i})\, \tilde{\dot{q}}_e(t,x,y) + \sum \tilde{\dot{h}}_{i,e}(t,x)t^{p-i} ,$$

onde $\dot{\Psi}$ $C^\infty(R \times P)^E$ é uma extensão de $\Psi \in C^\infty(N)^E$ e Ψ é um representante de ϕ.

Do fato que a extensão é linear podemos concluir que $\tilde{\dot{\Psi}}_{e_o} = 0$, e como a divisão também é linear, obtemos

$$\tilde{\dot{q}}_{e_o} = 0 \quad \text{e} \quad \tilde{\dot{h}}_{e_o} = 0.$$

Pela definição de Ω,

$$\tilde{\dot{\Omega}}_e(t,x) = t^p + \sum \tilde{u}_{i,e}(x)t^{p-i} + \tilde{\dot{\Psi}}_e(t,x) .$$

Tem-se

$$\tilde{\Omega}_e(t,x) = (t^p + \sum y_i t^{p-i})(1 + \tilde{q}_e(t,x,y)) + \sum_{i=1}^{p} \tilde{v}_{i,e}(x,y)t^{p-i} , \tag{I.2.14.6}$$

onde $\tilde{v}_{i,e}(x,y) = \tilde{u}_{i,e}(x) - y_i + \tilde{h}_{i,e}(x,y)$.

Sejam novamente M uma vizinhança do graf $\tilde{u}_{e_o}$ em $P \times R^p$ como no caso $\phi = 0$ e $V_{e_o} = \{e \in E: (x,\tilde{u}_e(x)) \in M\}$.

De (a'), na prova do lema I.2.14.2 temos que

$$\tilde{h}: V_{e_o} \to C^\infty(M) \text{ é contínua.}$$

Observe que $\tilde{v}_{e_o}(x, u_{e_o}(x)) = 0$, $D_2\, \tilde{v}_e(x,y) =$ $= Id_{R^p}$ e daí podemos concluir pelo Teorema da Função Implícita a existência de $\tilde{y}_e \in C^\infty(P,M) \subset C^\infty(P,R^p)$ dependendo continuamente de e em V_{e_o} e tal que

$$\tilde{v}_e(x, \tilde{y}_e(x)) = 0 \qquad (I.2.14.7)$$

De (I.2.14.6) e (I.2.14.7) podemos escrever:

$$\tilde{\dot{\Omega}}_e(t,x) = (t^p + \sum y_{i,e}(x) t^{p-i}) \; (1 + \tilde{\dot{q}}_e(t,x,\tilde{y}_e(x)))$$

Então, para concluir, dada uma $f \in C^\infty(N)^E$, pelo caso A, esta pode ser dividida por

$$t^p + \sum y_{i,e}(x) t^{p-i}$$

isto é, existem $g \in C^\infty(N)^E$ e $h_j \in C^\infty(P)^E$, $1 \leq j \leq p$ tais que

$$\tilde{f}_e(t,x) = (t^p + \sum y_{i,e}(x) t^{p-i}) \; \tilde{g}_e(t,x,y_{i,e}(x)) + \sum_{i=1}^{p} h_{i,e}(x, y_{i,e}(x)) t^{p-i}$$

$$(I.2.14.8)$$

Como $\tilde{\dot{q}}_{e_o} \equiv 0$ temos que $\dfrac{1}{1 + \tilde{\dot{q}}_e}$ é C^∞ e a igualdade de (I.2.14.8) é equivalente a

$$\tilde{f}_e(t,x) = (t^p+\sum y_{i,e}(x)t^{p-i})(1+\tilde{\dot{q}}_e(t,x,\tilde{y}_e(x)))\frac{\tilde{g}_e(t,x,y_{i,e}(x))}{1+\tilde{\dot{q}}_e(t,x,\tilde{y}_e(x))} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{p} h_{i,e}(x,y_{i,e}(x))t^{p-i}$$

$$= \tilde{\dot{\Omega}}_e(t,x)Q_e(t,x,y_{i,e}(x)) + \sum_{i=1}^{p} h_{i,e}(x,y_{i,e}(x))t^{p-i} ,$$

onde $Q_e(t,x,y_{i,e}(x)) = \dfrac{\tilde{g}_e(t,x,y_{i,e}(x))}{1+\tilde{\dot{q}}_e(t,x,\tilde{y}_e(x))}$ é C^∞, o que conclui a prova do teorema.

I.3 - Teorema de Preparação e de Divisão para álgebras de séries de potências formais |28|

I.3.1

Seja K um corpo e $F(X_1,...,X_n)$ uma série de potência formal não inversível (isto é, não unitário em $K[[X_1,...,X_n]]$) com coeficientes em K.

Suponha que $F(X_1,...,X_n)$ contém termos da forma aX_n^h com coeficiente a não nulo e denoto por p (≥ 1) o menor de todos os expoentes h tendo esta propriedade.

Então para toda série de potências $G(X_1,...,X_n)$ existe uma série de potências $U(X_1,...,X_n)$ e p séries de potências $R_i(X_1,...,X_{n-1})$ em $X_1,...,X_{n-1}$ $(0 \leq i \leq p-1)$ tais que

$$G(X_1,\ldots,X_n) = U(X_1,\ldots,X_n)F(X_1,\ldots,X_n) + \sum_{i=1}^{p} R_i(X_1,\ldots,X_{n-1})X_n^{p-i}.$$

As séries de potências U e R_i são unicamente determinadas por F e G.

I.3.2

Seja $F(X_1,\ldots,X_n)$ uma série de potências em $S = K[[X_1,\ldots,X_n]]$, K corpo, que é regular em X_n e seja $p \geq 1$ a ordem da série de potências $F(0,\ldots,0,X_n)$ (em outras palavras, supõe-se que F é não unitário).

Então existem séries de potências $E(X_1,\ldots,X_n)$ $R_i(X_1,\ldots,X_{n-1})$, $i = 0,1,\ldots,p-1$ tais que

$$F(X_1,\ldots,X_n) = E(X_1,\ldots,X_n)\left[X_n^p + \sum_{i=1}^{p} R_i(X_1,\ldots,X_{n-1})X_n^{p-i}\right]$$

As séries de potências E, R_i são unicamente determinadas por F; E é uma unidade e nenhum dos R_i é uma unidade.

A prova destes resultados, segundo |28|, pode ser encontrada no apêndice 2, no final deste capítulo. Outras provas podem ser vistas em Bochener-Martin, Several Complex Variables - 1948.

|28| denomina de Teorema de Preparação de Weierstrass, o resultado que conhecemos por Teorema de Divisão.

I.4 - Comentários Gerais sobre as provas do Teorema de Divisão que surgiram após a de Mather (I.2.1) |20||22||25| |29|

Depois da prova do Teorema de Divisão dada por Mather (I.2.1) outras quatro provas apareceram: de G. Glaeser |8|, S. Lojasiewicz |13|, L. Nirenberg |25| e de J. N. Mather |20|.

Uma diferença com as anteriores é que estas se inspiraram mais de perto na prova do caso das funções de variáveis complexas (usam uma extensão de funções f(t,x) $(t,x) \in R \times R^n$, para variável complexa t)

Outra diferença trivial é se as funções tomam valores reais ou complexos. De maior importância é a questão se as variáveis são consideradas como reais ou complexas. Lojasiewicz toma λ como real enquanto que Nirenberg, Mather e Glaeser tomam λ complexo.

Entretanto, a distinção real no fundo está nas formas global e local do teorema: a prova original de Malgrange (conforme já dissemos) e a de Nirenberg (conforme vimos em I.2.10) são somente locais, o que simplifica a prova: a de Nirenberg é a menor conhecida e a versão local é suficiente para toda aplicação conhecida, exceto o resultado de que estabilidade infinitesimal implica estabilidade (globalmente) para funções próprias.

Uma diferença concomitante é que nas afirmações globais q e r são escolhidas dependendo linearmente e continuamente de f. Isto é uma contribuição não trivial, visto que no caso C^∞ a divisão não é única.

Na verdade alguma forma do teorema de extensão de Whitney é usada em cada caso. Mas para o teorema completo, funções lineares contínuas não existem. Este ponto é discutido no parágrafo final do paper de Glaeser.

Conforme já comentamos, em I.2.11, a prova de Nirenberg do Teorema de Divisão, para funções C^∞ com valores complexos, não produz q e r dependendo linearmente de f e vimos alí que a parte difícil de sua prova é a prova de um lema de extensão. Em [20] Mather mostra como modificar esta prova (em particular, ele apresenta uma versão global do lema I.2.10.2 de Nirenberg) para se obter q e r dependendo linearmente de f.

Observa-se em [13] uma prova do Teorema de Divisão de Malgrange-Mather diferenciável usando propriedades dos campos de Whitney, especialmente os simétricos. Em [14] Lojasiewicz mostra como o método empregado em [13] funciona no simples caso analítico complexo ou formal, dando uma prova do Teorema de Preparação de Weierstrass clássico nestes dois casos.

Diferentemente destas quatro provas comentadas, uma prova mais recente para o caso C^∞ (que também se aplica para os casos analítico e C^k, conforme veremos no parágrafo seguinte), foi dada por Pierre Milman, onde, em lugar do Lema de Extensão de Whitney, é feito uso do Lema de Extensão de Stein.

I.5 - O caso C^m

Neste parágrafo vamos tratar de outras versões, formas e provas do Teorema de Divisão que são posteriores à versão I.2.1 de Mather, aplicáveis ao caso de funções finitamente diferenciáveis.

Em 1968, H. Hamm em Bonn, usando o método de Mather, provou uma versão do Teorema de Divisão para o caso de funções finitamente diferenciáveis. Este trabalho não foi publicado, segundo o comentário de J. Mather em MR 47 # 1077, 1974.

Em 1973, M.G. Lassale |12| deu uma prova para o Teorema de Divisão para o caso de funções finitamente diferenciáveis, usando um método que aperfeiçoou o resultado, com certa perda de derivações. Neste resultado, o dividendo possui apenas um número finito de derivadas e é preciso o grau de diferenciabilidade possuídas pelo resto e pelo quociente. O principal resultado de Lassale é o seguinte:

Para todo aberto W de um espaço numérico, e para todo inteiro p, designemos por $\varepsilon^p(W)$ o espaço vetorial das funções com valores complexos definidas e p vezes continuamente diferenciáveis sobre W, munido da topologia da convergência uniforme de todas as derivadas sobre todo compacto de W.

Seja U um aberto do espaço numérico R^n e seja $a_1,\dots,a_d$ uma sequência de d funções de $\varepsilon^\infty(U)$ (que é o limite projetivo de $\varepsilon^p(U)$), limitadas em U também como suas derivadas parciais de primeira ordem. Designemos por B a fun ção definida sobre $U \times \mathbb{C}$ por

$$B(x,z) = z^d + \sum_{i=1}^{d} a_i(x)\ z^{d-i}$$

e por X o conjunto das soluções da equação $B(x,z) = 0$ em $U \times \mathbb{C}$. B induz sobre $U \times R$, considerado como subespaço de $U \times \mathbb{C}$, uma função ainda denotada por B.

I.5.1 - Teorema |12|

Existe uma aplicação linear r de $\varepsilon^{d+1}(U \times R)$ em $[\varepsilon^0(U)]^d$ e uma aplicação linear Q de $\varepsilon^{d+1}(U \times R)$ em $\varepsilon^0(U\times R)$ tais que, qualquer que seja $p, p \geq d$ (finito ou ∞):

(a) Para toda função $f \in \varepsilon^{p+1}(U\times R)$, tem-se sobre $U \times R$ a igualdade:

$$f(x,t) = B(x,t)Q(f)(x,t) + \sum_{i=1}^{d} r_i(x)t^{d-i}$$

com $\quad r(f) = (r_1,\ldots,r_d)$

(b) r induz sobre $\varepsilon^{p+1}(U\times R)$ uma aplicação com valores em $[\varepsilon^k(U)]^d$, contínua para a topologia de $[\varepsilon^k(U)]^d$, com $k = \left[\frac{p+1}{d}\right] - 1$ ($[n]$ = parte inteira de n).

(c) Q induz $\varepsilon^{p+1}(U\times R)$ uma aplicação com valores em $\varepsilon^h(U\times R)$, contínua para a topologia de $\varepsilon^h(U\times R)$, com $h = \left[\frac{p-d}{d}\right]$

(d) Para todo ponto x de U, e para toda função f de $\varepsilon^{p+1}(U \times R)$, a função

$$t \longmapsto \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\,\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}} Q(f)(x,t)$$

de R em $\mathbb{C}$ é $p - d(1 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i)$ vezes continuamente diferenciável.

Além disso, se as funções $a_1,\dots,a_d$ tem valores reais, é possível escolher as aplicações r e Q de modo que r(f) e Q(f) tenham valores reais quando f tem valores reais.

Lassale dá ainda uma forma aperfeiçoada do teorema para quando se está interessado apenas nas funções de $\varepsilon^{p}(U \times R)$, para um inteiro p dado.

I.5.2 - <u>Teorema</u> |12|

Existe uma aplicação linear contínua r_p de $\varepsilon^{p}(U \times R)$ em $[\varepsilon^{k}(U)]^{d}$ $(p \geq d)$ e uma aplicação linear contínua Q_p de $\varepsilon^{p}(U \times R)$ em $\varepsilon^{h}(U \times R)$, tais que, para toda $f \in \varepsilon^{p}(U \times R)$, tem-se sobre U x R a igualdade:

$$f(x,t) = B(x,t)Q_p(f)(x,t) + \sum_{i=1}^{d} r_i(x)t^{d-i}$$

com $r_p(f) = (r_1,\dots,r_d)$, para $k = \left[\frac{p+1}{d}\right] - 1$ e $h = \left[\frac{p-d}{d}\right]$.

Lassale indica como mudar a prova de I.5.1 para se obter a de I.5.2 e conjectura que, para toda função de

$\varepsilon^p(U \times R)$, sem hipóteses suplementares, o resultado dado pelo teorema I.5.2 é o melhor possível.

Independentemente de Lassale, Gerard Barbançon obteve também, na mesma época, um Teorema de Divisão para funções finitamente diferenciáveis |2|.

Em seu trabalho, Barbançon, prova que uma função com valores reais de n variáveis que é simétrica nas n variáveis e de classe de diferenciabilidade C^{mr} pode ser expressa como uma função de (ao menos) classe C^r de funções simétricas elementares. O Teorema análogo para polinômios é devido a Newton, e o Teorema análogo para séries de potências formais (ou para funções analíticas) segue facilmente do teorema para polinômios. O Teorema para $r = \infty$ é devido a G. Glaeser e é significantemente mais difícil.

Como aplicação Barbançon prova uma versão do Teorema de Divisão de classe C^r:

Uma função de classe C^r pode ser dividida por um polinômio genérico; o dividendo é de classe $\left[\frac{r-m}{n}\right]$ e os coeficientes do resto são de classe $\left[\frac{r-n+1}{n}\right]$.

Mais recentemente (1976), Pierre Milman |22| apresentou nova prova para o "Teorema de Divisão de Malgrange Mather". Consideravelmente curta e elementar, outro aspecto interessante de sua prova é que pode ser aplicada para os casos de funções C^∞, C^m ou analíticas. Baseia-se no seguinte:

Seja $P^d(t,\lambda) = t^d + \sum_{j=1}^{d} \lambda_j t^{d-j}$ $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_d)$ um polinômio mônico genérico em t, com coeficientes constantes

λ_j . Seja $V^d \subset R^{d+1}$ o conjunto dos zeros de $P^d(t,\lambda)$, $\lambda \in R^d$ e $t \in R$, e π_d: $R^{d+1} \longrightarrow R^d$ a projeção natural isto é, $\pi_d(t,\lambda) = \lambda$. A aplicação $\hat{\pi}_d$: $R^d \longrightarrow V^d$ definida pela fórmula

$$\hat{\pi}_d(t,\lambda_1,\ldots,\lambda_{d-1}) = (t,\lambda_1,\ldots,\lambda_{d-1},\lambda_d) ,$$

onde $\lambda_d = \lambda_d(t,\lambda_1,\ldots,\lambda_{d-1}) = - t^d - \sum_{j=1}^{d-1} \lambda_j t^{d-j}$, é uma uniformização da hipersuperfície algébrica $V^d \subset R^{d+1}$, isto é, $(t,\lambda_1,\ldots,\lambda_{d-1}) = \hat{\pi}_d^{-1}(t,\lambda_1,\ldots,\lambda_{d-1},\lambda_d) \in R^d$ são coordenadas globais em V^d.

Por função C^∞,C^m, analítica ou polinomial em V^d queremos dizer respectivamente uma função C^∞,C^m, analítica ou polinomial nas coordenadas globais de V^d.

I.5.3 - <u>Teorema</u> |22|

Seja C^∞_π $(V^d \times R^n)$ o subespaço de $C^\infty(V^d \times R^n)$ consistindo de todas as funções constantes nas fibras $\pi_d^{-1}(\lambda)$. Então existe um operador linear contínuo

$$J\colon C^\infty_\pi (V^d \times R^n) \longrightarrow C^\infty(R^d \times R^n)$$

tal que para todo $(t,\lambda) \in V^d$ e $x \in R^n$

$$(J\phi)(\lambda,x) = \phi(t,\lambda,x).$$

Seja C^m_π o subespaço de C^m, A_π o subespaço do espaço A de todas as funções analíticas em $V^d \times R^n$ e P_π o subespaço do espaço P de todos os polinômios em $V^d \times R^n$ consistindo das funções que são constantes nas fibras $\pi_d^{-1}(\lambda) \cap V^d$ de π_d. Uma afirmação análoga ao Teorema I.5.3 ocorre.

(a) No caso C^m com um operador

$$J: C_\pi^m(V^d \times R^n) \longrightarrow C^{\left[\frac{m}{2}\right]}(R^d \times R^n)$$

onde $\left[\frac{m}{2}\right]$ é a parte inteira de $\frac{m}{2}$;

(b) No caso analítico com um operador

$$J: A_\pi(V^d \times R^n) \longrightarrow A(\pi_d(V^d) \times R^n) \ ;$$

(c) No caso polinomial com um operador

$$J: P_\pi(V^d \times R^n) \longrightarrow P(V^d \times R^n)$$

Vamos definir $(J\phi)(\lambda,x)$ para $\lambda \in \pi_d(V^d)$ e $x \in R^n$ por $(J\phi)(\lambda,x) = \phi(t,\lambda,x)$. A idéia principal da prova é

(a) A função $(J\phi)(\lambda,x)$ é uma função C^1 para $x \in R^n$ e λ num subconjunto aberto denso $\tilde{U}=\{\lambda \in R^d : \exists t \in R$ tal que $P^d(t,\lambda) = 0$ e $\frac{\partial P^d}{\partial t}(t,\lambda) \neq 0\} \subset \pi_d(V^d)$. A função $\phi^{new}(t,\lambda,x) = (d_\lambda J\phi)(\pi_d(t,\lambda),x)$ como uma função de $V^d \times R^n$ coincide com d-upla de funções C^∞.

(b) O par de funções $(J\phi, J\phi^{new})$ é uma função de Whitney de classe C^1 em $\pi_d(V^d) \times R^n$.

Repetindo-se o procedimento para a função $\phi^{new}(t,\lambda,x)$ obtém-se um operador linear contínuo de $C^{\infty}_{\pi}(V^d \times R^n)$ em corpos de Whitney sobre $\pi_d(V^d) \times R^n \subset R^d \times R^n$, isto é, $\phi(t,\lambda,x) \longmapsto \{(d^n_{\lambda}J\phi)\ (\lambda,x)\}_{n \in Z^+}$. Para p ímpar a prova está agora terminada pois $\pi_d\ (V^d) = R^d$. Para d par, devido a convexidade da região $R^d - \pi_d(V^d)$, podemos aplicar o teorema de extensão de Stein que completa a prova do Teorema I.5.3. O resultado de extensão necessário também segue da extensão de funções C^{∞} definidas em semi espaços.

Vamos considerar funções em $R^{d+1} \times R^n$ nas coordenadas $(t,\lambda_1,\ldots,\lambda_{d-1},p,x)$ onde $p = P^d(t,\lambda)$ e $\lambda \in R^d$, $t \in R$, $x \in R^n$. Uma função $f \in C^{\infty}_{\pi}(V^d \times R^n)$ em coordenadas $(t,\tilde{\lambda},p,x)$ onde $\tilde{\lambda} = (\lambda_1,\ldots,\lambda_{d-1})$, é definida para p = 0 e divide $\frac{\partial P^d}{\partial t}\ (t,\lambda)$ no espaço das funções C^{∞}.

I.5.4 - Teorema da Divisão de Malgrange-Mather |22|

Existem operadores lineares contínuos

"quociente" $q^d\colon C^{\infty}(R \times R^n) \longrightarrow C^{\infty}(R^{d+1} \times R^n)$ e

"resto" $r^d = \sum_{j=1}^{d} t^{d-j}\, r^d_j$ onde

$$r^d_j\colon C^{\infty}(R \times R^n) \longrightarrow C^{\infty}(R^d \times R^n)$$

tais que

$$f(t,x) = q^d_f\ (t,\lambda,x)\ P^d(t,\lambda) + \sum_{j=1}^{d} r^d_{if}\ (\lambda,x) t^{d-j}\ . \qquad (I.5.4.1)$$

Milman diz achar mais fácil provar o teorema de

Malgrange-Mather na forma mais precisa:

Seja $\lambda^d: R \times R^{d-1} \longrightarrow R^d$ uma função definida pela identidade de polinômios em z

$$P^d(z,\lambda^d(s,\mu)) = (z-s)\, P^{d-1}(z,\mu) \quad , \quad (s,\mu) \in R \times R^{d-1},$$

isto é,
$$\begin{cases} \lambda_1 = \mu_1 - s \\ \lambda_j = \mu_j - \mu_{j-1}s \quad \text{para } 2 \leq j \leq d-1 \\ \lambda_d = -\mu_{d-1}s \end{cases}$$

Então além de (3.4.1) o seguinte acontece

$$q_f^d(t,\lambda^d(s,\mu)) = \frac{q_f^{d-1}(t,\mu) - q_f^{d-1}(s,\mu)}{t - s} .$$

Teoremas análogos ocorrem com $q^d: C^m \longrightarrow C^{\ell_q(m)}$ e $r_j^d: C^m \longrightarrow C^{\ell_r(m)}$ no caso C^m e no caso analítico (somente versão local). Sobre a melhor escolha possível de $\ell_q(m)$ e $\ell_r(m)$, Milman manda que se consulte Lassale |12|.

No caso analítico a extensão é trivial e para o caso C^m (ou caso C^∞ sem linearidade e continuidade do quociente e do resto) o teorema de extensão de Whitney termina a prova. No caso C^∞, devido a convexidade da região $R^d - \pi_d(V^d)$, podemos aplicar o teorema de extensão de Stein, conforme pode ser visto na prova destes resultados, dada no apêndice 3 escritas por |3| de modo mais claro que |22|.

APÊNDICE 1

PROVA DO TEOREMA DE DIVISÃO: VERSÃO I.2.1 |17| |27|

Inicialmente fixaremos algumas notações.

Se $f : U \longrightarrow R^n$ é C^∞, $U \subset R^m$ aberto, denotamos para cada $x \in U$ e k inteiro positivo,

$$\|f\|^*_{k,x} = \|f(x)\| + \|D^1 f(x)\| + \ldots + \|D^k f(x)\| \ , \quad \|f\|^*_{o,x} = \|f(x)\|$$

$$\|f\|_{k,x} = \|D^1 f(x)\| + \ldots + \|D^k f(x)\| \ , \quad \|f\|_{o,x} = o$$

onde

$$\|D^j f(x)\| = \sup \left\{ \|D^j f(x)(y_1, \ldots, y_j)\| \ , \ y_i \in R^m, \ \|y_i\| \leq 1, \ 1 \leq i \leq j \right\}$$

Se $X \subset U$ poremos

$$\|f\|^*_{k,X} = \sup \left\{ \|f\|^*_{k,x} \ , \ x \in X \right\}$$

$$\|f\|_{k,X} = \sup \left\{ \|f\|_{k,x} \ , \ x \in X \right\}$$

Tomamos R^n dotado da norma

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\| = |x_1| + \ldots + |x_n| .$$

Denotamos por Z o conjunto dos pontos (t,u) de $R\times R^p$ tais que $P_p(t,u) = o$ e por N uma vizinhança aberta de Z em $R\times R^p$.

Para $u \in R^p$, seja $N(u) = \{t \in R : (t,u) \in N\} = \pi_1(\pi_2^{-1}(u))$, onde $\pi_1 : R\times R^p \longrightarrow R$ e $\pi_2 : R\times R^p \longrightarrow R^p$ são as projeções. Mais geralmente, se $X \subset R^p$, $N(X) = \bigcup_{u\in X} N(u) = \pi_1(\pi_2^{-1}(X))$.

Então N pode ser escolhida dependendo apenas de P_p de modo que $\pi_2 : \bar{N} \longrightarrow R^p$ dado por $\pi_2(t,x) = x$ é própria (|27| lema 3.9, pag. 118).

Para provar o teorema, faremos uso da Fórmula Integral de Fourier na forma

$$g(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty ds \int_{-\infty}^\infty g(x) \cos\,[s(x-t)]\,dx$$

que é válida para toda $g \in C^\infty(R)$ com suporte compacto, e para todo $t \in R$ [Courant - Diferential and Integral Calculus , V.II, pag. 319].

Como (I.2.1.1) é a representação de g como limite de somas de funções $t \longmapsto \cos\,[s(x-t)]$, é suficiente resolver o problema de divisão para tais funções, provando que certas estimativas são satisfeitas.

O seguinte lema estabelece o que é necessário.

1.1 <u>Lema de Divisão para a função cosseno</u>

Existem funções C^∞ $\bar{q} : R_+\times R\times R\times R^p \longrightarrow R$ e $\bar{h} : R_+\times R\times R^p \longrightarrow R^p$ que satisfazem as seguintes propriedades:

(a) Para todo $s \in R_+$, $x \in R$, $t \in R$ e $u \in R^p$, temos

(1.1.1) $\cos[s(x-t)] = P_p(t,u)\overline{q}(s,x,t,u) + r_p(t,\overline{h}(s,x,u))$.

(b) Para todo $s \in R_+$, $x \in R$, $t \in R$ e $u \in R^p$, temos

(1.1.2) $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\overline{h}(s,x,u) = -s^2\,\overline{h}(s,x,u)$

(1.1.3) $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\overline{q}(s,x,t,u) = -s^2\overline{q}(s,x,t,u)$

(c) Existe uma sequência $N_o \leq N_1 \leq \ldots \leq N_k \leq \ldots$ de inteiros não negativos com as seguintes propriedades :

(i) Para todo $X \subset R^p$ compacto, existe $C \in R_+^+$ tal que se $s \in R_+$, $x \in R$ e se $\overline{h}_{s,x}: R^p \longrightarrow R^p$ é definida por $\overline{h}_{s,x}(u) = \overline{h}(s,x,u)$ então

$$\|\overline{h}_{s,x}\|^*_{k,X} \leq C(1+s^N), \quad \text{onde } N = N_k.$$

(ii) Para todo $Y \subset R \times R^p$ compacto, existe $C \in R_{++}$ tal que se $s \in R_+$ e $x \in R$ e se $\overline{q}_{s,x} : R \times R^p \longrightarrow R$ é definida por $\overline{q}_{s,x}(t,u) = \overline{q}(s,x,t,u)$ então

$$\|\overline{q}_{s,x}\|^*_{k,Y} \leq C(1+s^N), \text{ onde } N = N_k.$$

1.2 Prova de que o Lema 1.1 implica o Teorema I.2.1

Como Z é fechado em $R \times R^p$ e N é uma vizinhança aberta de Z tal que $\pi_2 : \overline{N} \longrightarrow R^p$ é própria, seja N' outra vizinhança aberta de Z tal que $\overline{N}' \subset N$ e seja $\Psi : R \times R^p \longrightarrow R$ uma função C^∞ tal que

$$\Psi|_{N'} \equiv 1 \quad , \quad \Psi|_{R \times R^p - N} \equiv 0 \quad \text{e} \quad \Psi(t,u) > 0 \text{ se } (t,u) \in N.$$

Dados $f \in C^\infty(R)$, $t \in R$ e $u \in R^p$, definimos

$$(1.2.1)\quad q(f,t,u) = \frac{1-\Psi(t,u)}{P_p(t,u)} f(t) + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty f_q(s,t,u)\,ds \quad e$$

$$(1.2.2)\quad h(f,u) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty f_h(s,u)\,ds \qquad onde$$

$$(1.2.3)\quad f_q(s,t,u) = \int_{-\infty}^\infty \overline{q}(s,x,t,u) f(x)\Psi(x,u)\,dx \quad e$$

$$(1.2.4)\quad f_h(s,u) = \int_{-\infty}^\infty \overline{h}(s,x,u) f(x)\Psi(x,u)\,dx$$

O têrmo $\frac{1-\Psi(t,u)}{P_p(t,u)} f(t)$ é de classe C^∞ pois $1-\Psi(t,u)$ se anula na vizinhança N' de Z, e fora de N' $P_p(t,u)$ não se anula.

Note também que as integrais em (1.2.3) e (1.2.4) estão bem definidas, pois os integrandos são contínuos e se anulam fora de um compacto de R.

Mostremos, a seguir, que as integrais que aparecem em (1.2.1) e (1.2.2) estão bem definidas (no sentido de Lebesgue), e ao mesmo tempo verifiquemos (d) e (e) do Teorema I.2.1.

Vamos precisar do seguinte lema elementar

1.2.5 Lema Sejam E e F espaços de Banach, U um aberto de E e $f : U \times R \longrightarrow F$ uma função contínua com as seguintes propriedades :

(1) A derivada parcial de primeira ordem $D_1 f$ de f está definida em todo o $U \times R$ e é contínua.

(2) Para cada $u \in U$, existe uma vizinhança V de u e uma função $g : R \longrightarrow R_+$, Lebesgue integrável, tal que

$|f(v,t)| \leq g(t)$, $\|D_1 f(v,t)\| \leq g(t)$

para todo $v \in V$ e $t \in R$.

Então

(1.2.6) $u \longmapsto \int_R f(u,t)dt$ é diferenciável e

$$D \int_R f(u,t)dt = \int_R D_1 f(u,t)dt.$$

Este lema é uma simples consequência do teorema do valor médio e do teorema da convergência dominada de Lebesgue (Serg Lang - Real Analysis, pag. 249)

Seja k um inteiro não negativo. Seja $N = N_k$ como no lema 1.1, e seja $K = K_k$ o menor inteiro par $\geq N + 2$.

Integrando (1.2.3) por partes K vezes e usando (1.1.3), obtemos

$$(1.2.7)\quad f_q(s,t,u) = (-1)^{\frac{K}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^K(\Psi(x,u)f(x))}{\partial x^K} \frac{\bar{q}(s,x,t,u)}{s^K}\, dx$$

Para todo $s \in R_+$, seja $f_{q,s} : R \times R^p \longrightarrow R$ definida por $f_{q,s}(t,u) = f_q(s,t,u)$. Então $f_{q,s}$ é infinitamente diferenciável e por (1.2.6) e (1.2.7)

$$D^k f_{q,s}(t,u) = (-1)^{\frac{K}{2}} \sum_{\substack{o\leq i\leq k \\ o\leq j\leq K}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{ij}(x,u) \frac{\partial^j f(x)}{\partial x^j} \frac{D^i \bar{q}_{s,x}(t,u)}{s^K} dx$$

onde Ψ_{ij} depende somente de k e da escolha de Ψ, e tem suporte contido no suporte de Ψ.

Então pelo lema 1.1(c.ii), para cada subconjunto compacto Y do $R \times R^p$, existe $C_1 \in R_{++}$ tal que

(1.2.8) $\|f_{q,s}\|^*_{k,Y} \leq C_1 (\frac{1+s^N}{s^K}) \|f\|^*_{K,Y'}$

onde Y' é como em (e.ii) do Teorema I.2.1.

A diferenciabilidade de q_f de ordem k, e a estimativa (I.2.1.3) de I.2.1 agora seguem facilmente de (1.2.1), Lema 1.2.5 e (1.2.8). O ponto chave é que como (1.2.4) dá uma estimativa

$$\| \int_1^{\infty} D^{\ell} f_{q,s}(t,u) ds \| = C_2 \|f\|^*_{K,Y'}$$

($o \leq \ell \leq k$ e $(t,u) \in Y$), podemos usar o lema 1.2.5 para tomar D^{ℓ} fora do sinal de integral, obtendo uma estimativa da forma de (I.2.1.3) do teorema I.2.1 para $\int_1^{\infty} f_{q,s} ds$ em lugar de q_f.

Por (1.2.1), é então elementar obter a estimativa (I.2.1.3) para q_f.

A diferenciabilidade de h_f e (e.i) são mostradas analogamente (ver |27| pag. 122 - 125).

Assim, mostramos que q e h estão bem definidas, e que (d) e (e) do teorema I.2.1 ocorrem.

Multiplicando-se ambos os lados de (1.1.1) por $\Psi(x,u)f(x)$ e aplicando-se o operador integral $\int_{-\infty}^{\infty} dx$ e então $\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} ds$, obtém-se :

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} ds \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x,u)f(x)\cos\left[s(x-t)\right] dx =$$

$$= P(t,u)\ \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} f_q(s,t,u)ds + r(t,\ \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} f_h(s,u)ds)$$

onde usamos as definições de f_q e f_h (1.2.3) e (1.2.4) para obter o lado direito.

Aplicando a Fórmula Integral de Fourier no lado esquerdo obtém-se $\Psi(t,u)f(t)$. Daí, somando-se $\left[1-\Psi(t,u)\right]f(t)$ a ambos os lados, obtém-se

$$\Psi(t,u)f(t) + \left[1-\Psi(t,u)\right]f(t) =$$

$$= P(t,u)\left[\frac{1-\Psi(t,u)}{P(t,u)}\ f(t) + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} f_q(s,t,u)ds\right] + r(t,\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} f_h(s,u)ds)$$

que por (1.2.1) e (1.2.2) nos fornece

$f(t) = P(t,u)q(f,t,u) + r(t,h(f,u))$ que é a equação (I.2.1.1) do teorema I.2.1. Isto prova (a) do Teorema I.2.1.

É óbvio que q e h são lineares na primeira variável. Portanto, vale (b) do Teorema I.2.1.

A parte (c) segue imediatamente das equações(1.2.4) e (1.2.2), e do fato que $\Psi(x,u) = o$ para $x \notin N(u)$.

Isto completa a prova do Teorema I.2.1, supondo-se o Lema 1.1.

1.3 Prova do Lema 1.1

Antes de iniciar a prova, observemos que a construção feita no Teorema I.1.7 (caso analítico complexo do teorema de divisão polinomial) não pode ser usada para provar este teorema. A razão é que $|\cos[s(x-t)]|$ tem crescimento exponencial em s se t for complexo com parte imaginária não nula. Vejamos um exemplo : Façamos $p = 2$ e sejam $u \in R^p, s \in R^+$ e $t \in R$. Se definíssemos

$$\bar{q}(s,x,t,u) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\cos[s(x-w)]}{P_2(w,u)(w-t)}\,dw \text{ (como em 1.7), onde}$$

γ é uma curva fechada em C cujo interior contém t e os zeros z_1 e z_2 de $P_2(w,u) = w^2 + u_1w + u_2 = (w-z_1)(w-z_2)$, teríamos

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\cos[s(x-w)]dw}{(w-z_1)(w-z_2)(w-t)} =$$

$$= \frac{\cos[s(x-z_1)]}{(z_1-z_2)(z_1-t)} + \frac{\cos[s(x-z_2)]}{(z_2-z_1)(z_2-t)} + \frac{\cos[s(x-t)]}{(t-z_1)(t-z_2)}$$

pelo Teorema dos Resíduos (supondo $z_1 \neq z_2$). Como z_1 e z_2 são soluções da equação $w^2 + u_1 w + u_2 = o$, z_1 e z_2 são complexos com parte imaginária não nula se $u_1^2 - 4u_2 < o$, e neste caso

$$
\begin{aligned}
|\cos[s(x-z_1)]| = |\cos[s(x-a-bi)]| &= |\cos[s(x-a) - sbi]| \\
&= |\cos[s(x-a)]\cos[sbi] + \operatorname{sen}[s(x-a)]\operatorname{sen}[sbi]| \\
&= |\cos[s(x-a)]\cosh[sb] - i \operatorname{sen} [s(x-a)]\operatorname{senh}[sb]| \\
&\geq |\operatorname{senh}[sb]|
\end{aligned}
$$

que tem crescimento exponencial se $b \neq o$.

Vimos na observação acima a impossibilidade de se construir $\bar{q}$ e $\bar{h}$ como no caso analítico complexo. Portanto é necessário modificar aquela construção e tal modificação é possível, porque a curva γ precisa conter somente o ponto t e os zeros reais se apenas quisermos resolver o problema no eixo real.

Nossa modificação consiste em multiplicar a cada passo por uma função $\rho(\lambda,s,u)$, e integrar com relação a λ. Isto serve para eliminar a necessidade de se considerar (para $s \in R_+$ e $u \in R^p$ dados) as raízes z de $P(w,u)$ para as quais $|(1+s)\operatorname{Im} z| > 1$.

Vamos proceder então do seguinte modo.

Denotamos por $C_{a,b}$ o retângulo no plano complexo de vértices $a-bi$, $a+bi$, $-a+bi$, $-a-bi$ orientado no sentido dado por esta ordem dos pontos.

Defina q^* e h^* por

$$q^* (\lambda,s,x,t,u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{a,|\lambda|}} \frac{\cos[s(x-w)]}{P_p(w,u)(w-t)} dw$$

$$h_j^* (\lambda,s,x,u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{a,|\lambda|}} \frac{\cos[s(x-w)] P_{j-1}(w,u)}{P_p(w,u)} dw$$

e $h^* = (h_1^*,\dots,h_p^*)$ onde $\lambda \in R^+$, $s \in R^+$, $x \in R$, $u \in R^p$

(note que q^* e h^* não estão definidas em todo $\lambda \in R_+$, fixadas as últimas variáveis) e

$a >$ máx $\{|t|, |\mathrm{Re}\, z|$ para $z : P_p(z,u) = 0\}$.

Desta forma q^* e h^* independem de a ,logo estão bem definidas. Note que se existe algum zero $w = x \pm i|\lambda|$ de $P_p(w,u)$, q^* e h^* não estão definidas em (λ,s,x,t,u). Devemos então multiplicar q^* e h^* por uma função $\rho(\lambda,s,u)$ que se anule numa vizinhança dos pontos (λ,s,u) tais que $w = x \pm i|\lambda|$ e $P_p(w,u) = 0$.

Para que sejam verdadeiras as desigualdades (ci) e (cii) do enunciado do Lema 1.1, ρ deve depender de s e ainda λ deve variar em um intervalo compacto.

Para que (a) do Lema 1.1 seja verdadeiro devemos integrar ρq^* e ρh^* num intervalo compacto conveniente, com relação a λ, e a integral de ρ com relação a λ, neste intervalo, deve valer 1.

Construção formal de ρ : seja $\rho_0 : R_+ \longrightarrow R$ de classe C^∞ tal que

$$\begin{cases} \rho_o(x) = 1 \text{ se } o \leq x \leq 2\,p^3 \\ o \leq \rho_o(x) \leq 1 \text{ se } 2p^3 \leq x \leq 4p^3 \\ \rho_o(x) = o \text{ se } x \geq 4p^3 \end{cases}$$

onde p é o grau de P_p.

Para todo $\lambda \in R$, $u \in R^p$, defina

$$\sigma(\lambda,u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{d}{dx}\log P_p(x+\lambda_i,u)\right|^2 dx \quad .$$

Para $s \in R_+$, $\lambda \in R$, $u \in R^p$, pomos então

$$\rho(\lambda,s,u) = \frac{\rho_o\left(\frac{\sigma(\lambda,u)}{1+s}\right)}{\int_{I(s)}\rho_o\left(\frac{\sigma(\lambda,u)}{1+s}\right)d\lambda}, \text{ onde } I(s) = \left[\frac{1}{2(1+s)}\ ,\ \frac{1}{1+s}\right] \ .$$

Mais tarde provaremos que

$$\int_{I(s)}\rho_o\left(\frac{\sigma(\lambda,u)}{1+s}\right)d\lambda > o \Rightarrow \int_{I(s)}\rho(\lambda,s,u)d\lambda = 1$$

Para $s \in R_+$, $t,x,\lambda \in R$ e $u \in R^p$, $\lambda \neq o$, pomos

$$\overline{q}(s,x,t,u) = \int_{I(s)}\rho(\lambda,s,u)q^*(\lambda,s,x,t,u)d\lambda$$

$$\overline{h}(s,x,u) = \int_{I(s)} \rho(\lambda,s,u)h^*(\lambda,s,x,u)\,d\lambda$$

Suponha provado que $\overline{q}$ e $\overline{h}$ são C^∞ e satisfazem a condição (c) do lema 1.1. Temos

$$P_p(t,u)\overline{q}(s,x,t,u) + r_p(t,\overline{h}(s,x,u)) =$$

$$= \int_{I(s)} \left[P_p(t,u)\rho(\lambda,s,u)q^*(\lambda,s,x,t,u) + \sum t^{p-i}\,\rho(\lambda,s,u)h_i^*(\lambda,s,x,u)\right]d\lambda =$$

$$= \int_{I(s)} \rho(\lambda,s,u)\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{a,|\lambda|}} \cos[s(x-w)]\left[\frac{P_p(t,u)}{P_p(w,u)\,(w-t)} + \sum_{i=1}^{p}\frac{t^{p-i}\,P_{i-1}(w,u)}{P_p(w,u)}\right]dw\right\}d\lambda =$$

$$= \int_{I(s)} \rho(\lambda,s,u)\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{a,|\lambda|}} \frac{\cos[s(x-w)]}{w-t}\,dw\right]d\lambda =$$

$$= \int_{I(s)} \cos[s(x-t)]\;\rho(\lambda,s,u)\,d\lambda = \cos[s(x-t)]\int_{I(s)} \rho(\lambda,s,u)\,d\lambda = \cos[s(x-t)]$$

o que prova (a) de 1.1, observando que na primeira igualdade usamos as definições de $\overline{q}$ e $\overline{h}$, na segunda as definições de q^* e h^*, na terceira usamos (I.1.7.2), na quarta a Fórmula Integral de Cauchy e por último a definição de ρ.

Mostremos (b) de 1.1

$$\frac{\partial^2\overline{h}}{\partial x^2}(s,x,u) = \int_{I(s)} \rho(\lambda,s,u)\ \frac{\partial^2 h^*}{\partial x^2}(\lambda,s,x,u)d\lambda$$ e pela definição de

h^* temos que

$\frac{\partial^2 h^*}{\partial x^2}(\lambda,s,x,u) = - s^2 h^*(\lambda,s,x,u)$ quando $P_p(w,u)$ não se anula em $C_{a,|\lambda|}$, e caso contrário, $\rho(\lambda,s,u)\ \frac{\partial^2 h^*}{\partial x^2}(\lambda,s,x,u) = o$.Logo

$$\frac{\partial^2\overline{h}}{\partial x^2}(s,x,u) = - s^2\int_{I(s)} \rho(\lambda,s,u)h^*(\lambda,s,x,u)\,d\lambda = - s^2\overline{h}(s,x,u).$$

Analogamente, $\frac{\partial^2\overline{q}}{\partial x^2}(s,x,t,u) = - s^2\overline{q}(s,x,t,u)$, o que completa (b) .

Falta mostrar (c) e que $\overline{q}$ e $\overline{h}$ são C^∞.

Provemos (c).

Inicialmente, vejamos algumas estimativas para $\sigma(\lambda,u)$. Lembre que

$$\sigma(\lambda,u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{d}{dx}\log P_p(x+\lambda_i,u)\right|^2 dx$$

Fixando u e λ e pondo $w = x+\lambda i$, vem

$$P_p(w,u) = (x+i\lambda - z_1)\dots(x+i\lambda - z_p)$$

onde $z_1,\dots,z_p$ são os zeros de $P_p(w,u)$.

Logo

$$\frac{d}{dx}\log P_p(x+i\lambda,u) = \frac{1}{x+i\lambda-z_1}+\dots+\frac{1}{x+i\lambda-z_p},$$

o que implica que

$$\left|\frac{d}{dx}\log P_p(x+i\lambda,u)\right|^2 = \left(\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{x+i\lambda-z_j}\right)\left(\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{x-i\lambda-\bar{z}_j}\right) \quad .$$

Vamos calcular a integral de σ usando o método dos resíduos. Seja

$$P(z) = \frac{1}{2\pi}\left(\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{z+i\lambda-z_j}\right)\left(\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{z-i\lambda-\bar{z}_j}\right)$$

e assim, para $x \in R$,

$$P(x) = \frac{1}{2\pi}\left|\frac{d}{dx}\log P_p(x+i\lambda,u)\right|^2 \quad .$$

Claramente $P(z)$ é meromorfa e $|z|^2P(z)$ é limitada fora de um compacto conveniente. Se os polos de $P(z)$ não estão no eixo real (isto é, $-\lambda i+z_j \notin R$, $1 \leq j \leq p$), como o grau do denominador de $P(z)$ é igual ao grau do numerador mais dois, $\int_{-\infty}^{\infty} P(x)\,dx < \infty$. Supondo que $P(z)$ não possua polos de ordem 2, isto é, $-\lambda i+z_j \neq \lambda i+\bar{z}_\ell$ para todo j e todo ℓ, teremos :

$\int_{-\infty}^{\infty} P(x)dx = 2\pi i \sum$ resíduos de $P(z)$ nos polos que estão acima do eixo real (ou abaixo).

Os polos de $P(z)$ são da forma $z_j - \lambda i$ ou $\bar{z}_j + \lambda i$. Sejam os conjuntos :

$A = \{j : \operatorname{Im} z_j > \lambda\}$, que corresponde aos polos de $P(z)$ da forma $z_j - \lambda i$ acima do eixo real.

$B = \{j : \operatorname{Im} z_j < \lambda\}$, que corresponde aos polos da forma $\bar{z}_j + \lambda i$, acima do eixo real.

Defina

$$\delta(\lambda,u) = \min\{|\operatorname{Im} z_j - \lambda| : 1 \leq j \leq p\}$$

o qual dá uma medida de quanto os polos de $P(z)$ se afastam do eixo real. Vamos provar as desigualdades :

$$\frac{1}{2\,\delta(\lambda,u)} \leq \sigma(\lambda,u) \leq \frac{p^2}{2\,\delta(\lambda,u)}$$

Temos :

$$\operatorname{Res}(P(z),\ z_\ell - \lambda i) = \lim_{z \to z_\ell - \lambda i} P(z)(z - z_\ell + \lambda i) = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{p} \frac{1}{z_\ell - \bar{z}_j - 2\lambda i}$$

e

$$\operatorname{Res}(P(z),\ \bar{z}_\ell + \lambda i) = \frac{1}{2\pi}\sum \frac{1}{\bar{z}_\ell - z_j + 2\lambda i}\ ,\ \text{e portanto}\ ,$$

$$\sigma(\lambda,u) = i\left[\sum_{\ell\in A}\sum_{j=1}^{p} \frac{1}{z_\ell - \bar{z}_j - 2\lambda i} + \sum_{\ell\in B}\sum_{j=1}^{p} \frac{1}{\bar{z}_\ell - z_j + 2\lambda i}\right] =$$

$$= i\sum_{\ell,j} \beta_{\ell j}\,\frac{1}{z_\ell - \bar{z}_j - 2\lambda i}\ ,$$

onde

$$\beta_{\ell j} = \begin{cases} 1 \text{ se } \ell \in A \text{ e } j \in A \\ -1 \text{ se } \ell \in B \text{ e } j \in B \\ o \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Logo,

$$\sigma(\lambda,u) = i \sum_{\ell,j} \beta_{\ell j} \frac{\bar{z}_\ell - z_j + 2\lambda i}{|z_\ell - \bar{z}_j - 2\lambda i|^2} = \sum_{\ell,j} \beta_{\ell j} \frac{\text{Im } z_j + \text{Im } z_\ell - 2\lambda}{|z_\ell - \bar{z}_j - 2\lambda i|^2}$$

Note que $\beta_{\ell j}(\text{Im } z_j + \text{Im } z_\ell - 2\lambda) \geq o$, $1 \leq \ell, j \leq p$.

Por outro lado, existe ℓ tal que $\delta(\lambda,u) = |\text{Im } z_\ell - \lambda|$, o que implica

$$\beta_{\ell\ell} \frac{\text{Im } z_\ell + \text{Im } z_\ell - 2\lambda}{|z_\ell - \bar{z}_\ell - 2\lambda i|^2} = \frac{1}{2\delta(\lambda,u)}, \text{ e portanto}$$

$$\sigma(\lambda,u) \geq \frac{1}{2\delta(\lambda,u)} .$$

Temos também

$\beta_{\ell j}$ $(\text{Im } z_\ell + \text{Im } z_j - 2\lambda) \leq 2\delta(\lambda,u)$ e

$|z_\ell - \bar{z}_j - 2\lambda i|^2 \geq 4\delta(\lambda,u)^2$, donde

$\sigma(\lambda,u) \leq \dfrac{p^2}{2\delta(\lambda,u)}$ e portanto valem as desigualdades propostas, isto é, $\dfrac{1}{2\delta(\lambda,u)} \leq \sigma(\lambda,u) \leq \dfrac{p^2}{2\delta(\lambda,u)}$.

Pela continuidade de $\delta(\lambda,u)$ e dos z_j com u, as desigualdades valem em geral. Olhemos agora para a integral :

$$\int_{I(s)} \rho_o\left(\frac{\sigma(\lambda,u)}{1+s}\right) d\lambda$$

Temos

$$\mathcal{O} = \left\{ \lambda \in I(s) : \rho_o\left(\frac{\sigma(\lambda,u)}{1+s}\right) = 1 \right\} =$$

$$= \left\{ \lambda \in I(s) : \sigma(\lambda,u) \leq 2p^3(1+s) \right\} \supset$$

$$\supset \left\{ \lambda \in I(s) : \frac{p^2}{2\delta(\lambda,u)} \leq 2p^3(1+s) \right\} =$$

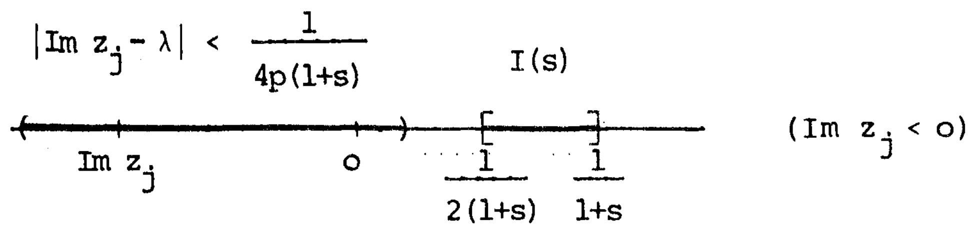
$$= \left\{ \lambda \in I(s) : \delta(\lambda,u) \geq \frac{1}{4p(1+s)} \right\} = U$$

Se μ é a medida usual na reta, temos que $\mu(\mathcal{O}) \geq \mu(U)$ e $\mu(U) \geq \dfrac{1}{4(1+s)}$, pois

$$I(s) - U = \left\{ \lambda \in I(s) : \delta(\lambda,u) < \frac{1}{4p(1+s)} \right\} \subset$$

$$\subset \left\{ \lambda \in I(s) : |\mathrm{Im}\, z_j - \lambda| < \frac{1}{4p(1+s)},\ \mathrm{Im}\, z_j \geq 0 \right\} =$$

$= V$, onde na primeira inclusão usamos a definição de $\delta(\lambda,u)$.



Por outro lado,

$$\mu(V) \leq \frac{p}{2}\,\frac{1}{2p(1+s)} = \frac{1}{4(1+s)} \Rightarrow \mu(I(s)-V) \geq \frac{1}{4(1+s)} \Rightarrow$$

$$\mu(\mathcal{O}) \geq \frac{1}{4(1+s)} \Rightarrow \int_{I(s)} \rho_o\left(\frac{\sigma(\lambda,u)}{1+s}\right) d\lambda \geq \frac{1}{4(1+s)} \qquad (1.3.\alpha)$$

Temos, além disso, que se $\delta(\lambda,u) \leq \dfrac{1}{8p(1+s)}$ então $\rho(\lambda,s,u) = o$. De fato, pela definição de ρ e de ρ_o temos

$$\left\{ \lambda : \rho(\lambda,s,u) = o \right\} = \left\{ \lambda : \rho_o\left(\frac{\sigma(\lambda,u)}{1+s}\right) = o \right\} = \left\{ \lambda : \frac{\sigma(\lambda,u)}{1+s} \geq 4p^3 \right\}$$

$$= \left\{ \lambda : \sigma(\lambda,u) \geq 4p^3(1+s) \right\} \subset$$

$$\subset \left\{ \lambda : \frac{p^2}{2\delta(\lambda,u)} \geq 4p^3(1+s) \right\} =$$

$$= \left\{ \lambda : \delta(\lambda,u) \leq \frac{1}{8p(1+s)} \right\}$$

Vamos determinar algumas estimativas para as derivadas de $\sigma(\lambda,u)$ e $\rho(\lambda,s,u)$.

Coloquemos $\sigma_\lambda(u) = \sigma(\lambda,u)$.

Afirmação 1.3.1

Seja $k \in N$ e $X \subset R^p$ compacto. Então existe $C > o$ tal que para todo $|\lambda| \leq 1$, σ_λ é C^∞ no conjunto dos $u \in R^p$ tais que $\delta(\lambda,u) \neq o$ (que é aberto em R^p) e ainda $\|\sigma_\lambda\|^*_{k,u} \leq C\,[1+\delta(\lambda,u)^{-2p(1+k)}]$ para todo $u \in X$ tal que $\delta(\lambda,u) \neq o$.

Prova

Vamos precisar da seguinte desigualdade

$$(1)\quad \frac{(x-a)^2+\delta^2}{x^2+1} \geq \frac{C(a)}{1+\delta^{-2}}, \text{ onde } C(a) = \frac{2+a^2-|a|\sqrt{a^2+4}}{2+a^2+|a|\sqrt{a^2+4}}.$$

Vemos que $C(a) > o$ para todo a e, portanto, se a varia em um intervalo fechado, temos $C(a) \geq C_1 > o$. A desigualdade (1) pode ser facilmente verificada bastando calcular o mínimo da função $\dfrac{(x-a)^2+\delta^2}{x^2+1}$. Outra desigualdade fácil de se verificar é a seguinte :
seja $h(x,\lambda,u) = \alpha_o(\lambda,u)x^{2r}+\alpha_1(\lambda,u)x^{2r-1}+\ldots+\alpha_{2r}(\lambda,u)$ onde $\alpha_o, \alpha_1,\ldots,\alpha_{2r}$ são contínuas em (λ,u). Então se $(\lambda,u) \in R \times R^p$ estão variando num compacto, (2) $|h(x,\lambda,u)| \leq A(x^2+1)^r$, para todo $x \in R$, onde $A > o$ é suficientemente grande.

Vamos agora provar a afirmação 1.3.1. Temos

$$\frac{d}{dx} P_p(x+i\lambda,u) = p(x+i\lambda)^{p-1}+(p-1)(x+i\lambda)^{p-1}u_1+\ldots+u_{p-1},$$

donde $$\left|\frac{d}{dx}\log P_p(x+i\lambda,u)\right|^2 = \frac{|p(x+i\lambda)^{p-1}+(p-1)(x+i\lambda)^{p-2}u_1+\ldots+u_{p-1}|^2}{|P_p(x+i\lambda,u)|^2}.$$

Se agora diferenciarmos parcialmente com relação a $u_{i_1},\ldots,u_{i_k}$ a igualdade acima, obtemos

$$D_{u_{i_1}\cdots u_{i_k}} \left| \frac{d}{dx} \log P_p(x+i\lambda,u) \right|^2 = \frac{R_k(x+i\lambda,u)}{|P_p(x+i\lambda,u)|^{2(k+1)}}, \text{ onde}$$

$R_k(x+i\lambda,u)$ é um polinômio em x,λ,u de grau no máximo $2p(k+1)-2$ em x e $|P_p(x+i\lambda,u)|^{2(k+1)}$ é um polinômio em x,λ,u de grau $2p(k+1)$, o que pode ser verificado por indução.

Por outro lado,

$$|P_p(x+i\lambda,u)|^2 = |x+i\lambda-z_1|^2 \ldots |x+i\lambda-z_p|^2 =$$

$$[(x-a_1)^2+(\lambda-\operatorname{Im} z_1)^2] \ldots [(x-a_p)^2+(\lambda-\operatorname{Im} z_p)^2] \geq$$

$$[(x-a_1)^2+\delta(\lambda,u)^2] \ldots [(x-a_p)^2+\delta(\lambda,u)^2]$$

onde $z_j = a_j + i \operatorname{Im} z_j = a_j + ib_j$ são as raízes de $P_p(w,u) = 0$.

Da desigualdade (1) temos

$$\frac{|P_p(x+i\lambda,u)|^{2(k+1)}}{(x^2+1)^{p(k+1)}} \geq \frac{[(x-a_1)^2+\delta(\lambda,u)^2]^{k+1} \ldots [(x-a_p)^2+\delta(\lambda,u)^2]^{k+1}}{(x^2+1)^{p(k+1)}} \geq$$

$$\frac{C'}{[1+\delta(\lambda,u)^{-2}]^{p(k+1)}} \geq \frac{B}{1+\delta(\lambda,u)^{-2p(k+1)}},$$

onde C' é uma constante suficientemente grande, $|\lambda| \leq 1$, $u \in X$ compacto de R^p e $B = 2^{p(k+1)}.C'$.

Concluímos então que se $|\lambda| \leq 1$, $u \in X$ compacto de R^p (na verdade, esta restrição não é necessária aqui),

$$(3)\ |P_p(x+i\lambda,u)|^{2(k+1)} \geq \frac{B(1+x^2)^{p(k+1)}}{1+\delta(\lambda,u)^{-2p(k+1)}}, \text{ para todo}$$

$x \in R$ e B uma constante conveniente.

Temos também que

$$|R_k(x+i\lambda,u)| \le \alpha_o(\lambda,u)x^{2p(k+1)-2}+\alpha_1(\lambda,u)x^{2p(k+1)-3}+\ldots+\alpha_{2p(k+1)-2}(\lambda,u)$$

onde os α_j são contínuas, e assim pela desigualdade (2), temos para $A > o$, $|\lambda| \le 1$ e $x \in X$ compacto

$|R_k(x+i\lambda,u)| \le A\ (x^2+1)^{p(k+1)-1}$. Isto implica

$$\frac{|R_k(x+i\lambda,u)|}{|P_p(x+i\lambda,u)|^{2(k+1)}} \le C'' \frac{1+\delta(\lambda,u)^{-2p(k+1)}}{1+x^2} \quad ,$$

e pelo Teorema da Convergência Dominada σ_λ é C^∞ onde for definida, isto é, quando $\sigma(\lambda,u) \le o$, e além disso :

$$\|\sigma_\lambda\|^*_{k,X} \le C''' \left[1+\delta(\lambda,u)^{-2p(k+1)}\right] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= C\ \left[1+\delta(\lambda,u)^{-2p(k+1)}\right]$$

onde $|\lambda| \le 1$, $u \in X$ compacto de R^p, e C depende de k e de X, o que prova a afirmação 1.3.1.

<u>Afirmação 1.3.2</u>

Seja $X \subset R^p$ compacto e defina $\rho_{s,\lambda}(u) = \rho(\lambda,s,u)$, λ, s fixos. Então para todo $k \in N$, existe $C > o$ e um inteiro positivo q tal que

$$\|\rho_{s,\lambda}\|^*_{k,X} \le C(1+s^q) \quad ,$$

para todo $s \in R^+$ e $\lambda \in I(s)$.

Na prova da afirmação 1.3.2 vamos precisar do

Lema 1.3.3

Sejam E, F, G e H espaços de Banach, $U \subset E$ aberto e $f : U \longrightarrow F$, $g : U \longrightarrow G$ funções C^∞.

Seja $B : F \times G \longrightarrow H$ uma função bilinear contínua e $u \in U$. Então

$$\|B\circ(f,g)\|^*_{k,u} \leq 2^k \|B\|^* \|f\|^*_{k,u} \|g\|^*_{k,u} .$$

Demonstraremos mais adiante este lema, bem como os corolá rios :

Corolário 1.3.4

Sejam $U \subset R^n$ e $V \subset R^m$ abertos, $f : U \longrightarrow V$ e $g : V \longrightarrow R^\ell$ de classe C^∞ e $u \in U$. Então

$$\|g\circ f\|_{k,u} \leq 2^{k!} \|g\|_{k,f(u)} \left[\|f\|_{k,u} + (\|f\|_{k,u})^k \right].$$

Corolário 1.3.5

Sejam $f : U \longrightarrow R$ e $g : U \longrightarrow R - \{o\}$ ambas C^∞, $U \subset R^n$ aberto. Então existe $C > o$ tal que para todo $u \in U$,

$$\left\|\frac{f}{g}\right\|^*_{k,u} \leq C\left[\frac{1}{|g(u)|} + \frac{1}{|g(u)|^{k+1}}\right]\left[1 + (\|g\|_{k,u})^{k+1}\right] \|f\|^*_{k,u}.$$

Prova da afirmação 1.3.2

Seja

$$\rho_{o,s,\lambda}(u) = \rho_o\left(\frac{\sigma(\lambda,u)}{1+s}\right) .$$

Conforme foi provado, $\rho_o(s,\lambda,u) = o$ se $\delta(\lambda,u) \leq \frac{1}{8p(1+s)}$.

Se $\delta(\lambda,u) > \frac{1}{8p(1+s)}$ já vimos que σ_λ é C^∞, o que implica $\frac{\sigma_\lambda}{1+s}$ é C^∞ em $R^+ \times \left\{u : \delta(\lambda,u) > \frac{1}{8p(1+s)}\right\}$. Isto implica que $\rho_{o,s,\lambda}$ é C^∞ em todo o R^p. Seja $X \subset R^p$ compacto e $|\lambda| \leq 1$. Usando os resultados acima e da afirmação 1.3.1 temos :

$$\|\rho_{o,s,\lambda}\|^*_{k,u} \leq C\left[1 + \delta(\lambda,u)^{-2pk(1+k)}\right]$$

para todo $x \in X$ e $|\lambda| \leq 1$.

Porém $\|\rho_{o,s,\lambda}\|^*_{k,u} = o$ onde $\delta(\lambda,u) \leq \frac{1}{8p(1+s)}$,

logo

$$\|\rho_{o,\lambda,s}\|^*_{k,u} \leq C'(1+s)^{2pk(1+k)} \quad \text{onde}$$

$$C' = C(2p)^{-2pk(1+k)} .$$

Por outro lado, $(1+s)^{2pk(1+k)} \leq A[1 + s^{2pk(1+k)}]$, $s \in R^+$ e A suficientemente grande.

Logo

$$\|\rho_{o,s,\lambda}\|^*_{k,u} \leq B\left[1 + s^{2pk(1+k)}\right] = B(1+s^\ell) .$$

Considere agora

$$\Psi(s,u) = \int_{I(s)} \rho_o\left(\frac{\sigma(\lambda,u)}{1+s}\right) d\lambda \quad \text{e} \quad \Psi_s(u) = \Psi(s,u) .$$

Temos

$$\rho(\lambda,s,u) = \rho_{\lambda,s}(u) = \frac{\rho_{o,\lambda,s}(u)}{\Psi_s(u)} .$$

Aplicando o corolário 1.3.5 do lema temos

$$\|\rho_{\lambda,s}\|^*_{k,u} \leq D\left[\frac{1}{|\Psi_s(u)|} + \frac{1}{|\Psi_s(u)|^{k+1}}\right]\left[1 + (\|\Psi_s\|_{k,u})^{k+1}\right] \|\rho_{o,\lambda,s}\|^*_{k,u} .$$

Temos

$$\|\Psi_s\|_{k,u} \leq \int_{I(s)} \|\rho_{o,s,\lambda}\|_{k,u}\, d\lambda \leq \int_{I(s)} \|\rho_{o,s,\lambda}\|^*_{k,u}\, d\lambda \leq \int_{I(s)} B(1+s^{\ell})d\lambda =$$

$$= \frac{B}{2}(1+s^{\ell})(1+s)^{-1} \leq B'(1+s^{\ell+1})$$

onde B' é suficientemente grande e $s \geq o$.

Temos pela definição de Ψ e por (1.3.α) que

$$|\Psi_s(u)| = \left|\int_{I(s)} \rho_o\left(\frac{\sigma(\lambda,u)}{1+s}\right)d\lambda\right| \geq \frac{1}{4(1+s)}$$ e temos também

$$\|\rho_{\lambda,s}\|^*_{k,u} \leq D\left[4(1+s) + 4^{k+1}(1+s)^{k+1}\right]\left[1+(B'(1+s^{\ell+1}))^{k+1}\right]\left[B(1+s^{\ell})\right] \leq$$

$$\leq K\left[1+s^q\right]$$

onde K é uma constante suficientemente grande e $q = 1+\ell+k+(k+1)(\ell+1)$, o que prova a afirmação 1.3.2.

As desigualdades acima no caso de um polinômio em

$s \geq o$ podem ser obtidas do seguinte fato geral : "Seja $s^r + \alpha_1 s^{r-1} + \ldots + \alpha_r$ um polinômio em s onde $\alpha_i \geq o$, $1 \leq i \leq r$, e $\alpha_r > o$. Então existe uma constante $C > o$ tal que $|s^r + \alpha_1 s^{r-1} + \ldots + \alpha_r| \leq C(1 + s^r)$, para todo $s \geq o$".

<u>Concluindo a prova do Teorema 1.1</u>

Para concluir 1.1 falta mostrar (c)i, (c)ii e que $\bar{q}$ e $\bar{h}$ são C^∞. Temos que $\bar{q}$ e $\bar{h}$ estão bem definidas, uma vez que ρ está bem definida, q^* e h^* estão definidas quando $\delta(\lambda,u) \neq o$ e ρ se anula em uma vizinhança do conjunto dos (λ,u) tais que $\delta(\lambda,u) = o$, e basta então examinar as relações :

$$\bar{q}(s,x,t,u) = \int_{I(s)} \rho(\lambda,s,u)q^*(\lambda,s,x,t,u)d\lambda$$

$$\bar{h}(s,x,u) = \int_{I(s)} \rho(\lambda,s,u)h^*(\lambda,s,x,u)d\lambda \quad .$$

Além disso q^* e h^* são C^∞ nos pontos em que $\delta(\lambda,u) \neq o$. Como ρ se anula numa vizinhança dos pontos (λ,s,u) para os quais $\delta(\lambda,u) = o$ (pois se $\delta(\lambda,u) < \dfrac{1}{8p(1+s)} \Rightarrow \rho(\lambda,s,u) = o$) ρq^* e ρh^* são C^∞ de onde vem que $\bar{q}$ e $\bar{h}$ são C^∞.

Consideremos agora

$$q^*(\lambda,s,x,t,u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{a,|\lambda|}} \frac{\cos[s(x-w)]}{P_p(w,u)(w-t)} dw \quad .$$

Nos pontos onde $\delta(\lambda,u) \neq o$, q^* é C^∞ e suas derivadas parciais com respeito a (t,u) se escrevem na forma

$$D_t^\ell D_{u_{i_1}} \cdots D_{u_{i_k}} q^*(\lambda,s,x,t,u) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{a,|\lambda|}} \frac{Q(w,u)\cos[s(x-w)]}{P_p(w,u)^{k+1}(w-t)^{\ell+1}}\, dw$$

onde $Q(w,u)$ é um polinômio em (w,u) de grau no máximo igual a $k(p-1)$ em w.

Seja agora $Y \subset R \times R^p$ compacto. Escolhendo $|\lambda| \leq 1$ e a tal que $a > |t| + 1$ e $a > |\mathrm{Re}\ w| + 1$ para todo w tal que $P_p(w,u) = o$, temos :

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{a,|\lambda|}} \frac{\cos[s(x-w)]\,Q(w,u)}{P_p(w,u)^{k+1}(w-t)^{\ell+1}}\, dw\right| \leq$$

$$\frac{2(a+|\lambda|)}{2\pi} \max_{C_{a,|\lambda|}} \left|\frac{\cos[s(s-w)]\ Q(w,u)}{P_p(w,u)^{k+1}(w-t)^{\ell+1}}\right|$$

Como

$$\cos[s(x-w)] = \begin{cases} \cos[s(x - t \pm i\lambda)] \\ \text{ou} \\ \cos[s(x \pm a + ti)] \end{cases} \quad \text{em } C_{a,|\lambda|}$$

(pela definição de $C_{a,|\lambda|}$) então

$$\max_{C_{a,|\lambda|}} |\cos[s(x-w)]| = \max_{C_{a,|\lambda|}} \left|\frac{e^{is(x-t+\lambda i)} + e^{-is(x-t+\lambda i)}}{2}\right| =$$

$$= \max_{C_{a,|\lambda|}} \left| \frac{e^{is(2-t)}e^{-\lambda s} + e^{-is(2-t)}e^{\lambda s}}{2} \right| \leq$$

$$\leq \left| \frac{e^{s\lambda} + e^{-s\lambda}}{2} \right| = \cosh(s\lambda)$$

Seja $A = \max_{\substack{w \in C_{a,|\lambda|} \\ u \in \pi_2 Y}} |Q(w,u)|$.

Pelos cálculos feitos em (3) na prova da afirmação 1.3.1, obtemos

$$\left| P_p(w,u) \right|^{k+1} \geq \frac{\sqrt{B}\,(\sqrt{1+t^2})^{p(k+1)}}{\sqrt{1+\delta\,(\mu,u)^{-2p(k+1)}}} \geq C'\ \delta(t,u)^{p(k+1)} \quad ,$$

onde $t = \operatorname{Re} w$ e $\mu = \operatorname{Im} w$ e C' é suficientemente grande. Como $a > |t| + 1 = |\operatorname{Re} w| + 1$ para todo w onde $P_p(w,u) = o$ e $|\lambda| \leq 1$, temos

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{a,|\lambda|}} \frac{\cos[s(x-w)]\,Q(w,u)}{P_p(w,u)^{k+1}(w-t)^{\ell+1}}\, dw \right| \leq C'' \frac{\cosh(s\lambda)\,\delta(\lambda,u)^{-p(k+1)}}{|\lambda|^{\ell+1}}.$$

Restringindo $|\lambda|$ a $I(s)$, temos $|\lambda| \leq \frac{1}{1+s}$ e daí , $|\lambda s| \leq \frac{s}{s+1} \leq 1$. Logo $\cosh(s\lambda) \leq \cosh(1)$.

Usando agora a afirmação 1.3.2, obtemos

$$\|\rho_{s,\lambda}\, q^*_{\lambda,s,x}\|_{k+\ell,Y} \leq \frac{C'''(1+s^q)\cosh 1}{|\lambda|^{\ell+k+1}}[8p(1+s)]^{p(k+1)} \quad , \text{ onde}$$

C''' é suficientemente grande e usamos acima que se $\delta(\lambda,u) \leq \frac{1}{8p(1+s)}$ então $\rho_{o,s,\lambda}(x) = o$ e que $\delta(\lambda,u) > \frac{1}{8p(1+s)}$ caso $\rho(\lambda,s,u) \neq o$ e $|\lambda| \leq 1$. Temos ainda que $(1+s^q)(1+s)^{p(k+1)} \leq C_1(1+s^{q+p(k+1)})$ para algum $C_1 > o$. Então, nestas condições

$$\|\rho_{s,\lambda}\, q^*_{\lambda,s,x}\|_{k+\ell,Y} \leq C_2 \frac{1+s^{q+p(k+1)}}{|\lambda|^{\ell+k+1}} \quad . \quad \text{Logo} \quad ,$$

$$\|\bar{q}_{s,x}\|_{k+\ell,Y} \leq C_2\left[1+s^{q+p(k+1)}\right] \int_{I(s)} \frac{d\lambda}{|\lambda|^{\ell+k+1}} \leq C(1+s^{N_{k+\ell}}) \quad ,$$

o que prova (c)(ii).

Para $\bar{h}$ a prova é semelhante.

Falta agora apenas provar o lema 1.3.3 e os corolários 1.3.4 e 1.3.5 usados na prova da afirmação 1.3.2.

Prova do Lema 1.3.3

Queremos provar que

$$\|Bo(f,g)\|^*_{k,u} \leq 2^k \|B\|^* \|f\|^*_{k,u} \|g\|^*_{k,u} \quad \text{e}$$

procederemos por indução sobre k.

Para $k = o$ a fórmula é trivial.

Suponha - a verdadeira para $k-1$.

$D(Bo(f,g)) : U \longrightarrow L(E,H)$ é dada por

$D(Bo(f,g)).\ v = B_1 o(Df(u),\ g(u)) + B_2 o(f(u),\ Dg(u))$, $\forall u \in U$, $\forall v \in E$, onde

$B_1 : L(E,F) \times G \longrightarrow L(E,H)$ e $B_2 : F \times L(E,G) \longrightarrow L(E,H)$

são funções bilineares induzidas por B. Note que

$$\|B_1\| = \|B_2\| = \|B\| .$$

Então

$$\|Bo(f,g)\|^*_{k,u} = \|Bo(f,g)\| + \|D(Bo(f,g))\|^*_{k-1,u} \leq$$

$$\leq \|B\| \, \|f(u)\| \, \|g(u)\| + 2^{k-1} \|B\| \, \|Df\|^*_{k-1,u} \|g\|^*_{k-1,u} + 2^{k-1} \|B\| \, \|f\|^*_{k-1,u} \|Dg\|^*_{k-1,u} \leq$$

$$\leq \|B\| \left[\|f(u)\| \, \|g(u)\| + 2^{k-1} \|Df\|^*_{k-1,u} \, \|g\|^*_{k-1,u} + 2^{k-1} \|f\|^*_{k-1,u} \, \|Dg\|^*_{k-1,u} \right] \leq$$

$$\leq \|B\| \, \|f\|^*_{k,u} \left[\|g(u)\| + 2^{k-1} \, \|g\|^*_{k-1,u} + 2^{k-1} \|Dg\|^*_{k-1,u} \right] \leq$$

$$\leq \|B\| \, \|f\|^*_{k,u} \left[2^{k-1} \|g(u)\| + 2^{k-1} \|Dg\|^*_{k-1,u} + 2^{k-1} \, \|g\|^*_{k,u} \right] =$$

$$= 2^{k-1} \|B\| \, \|f\|^*_{k,u} \cdot 2 \, \|g\|^*_{k,u} = 2^k \|B\| \, \|f\|^*_{k,u} \, \|g\|^*_{k,u} .$$

<u>Prova do Corolário 1.3.4</u>

Tese :

$$\|g o f\|_{k,u} \leq 2^{k!} \|g\|_{k,f(u)} \left[\|f\|_{k,u} + (\|f\|_{k,u})^k \right] .$$

Provaremos por indução sobre k.

Para k = 1 o resultado é trivial.

Para o caso geral usamos a fórmula $D(g o f) = B\, o(Dg o f, Df)$ onde B denota a composição $L(F,G) \times L(E,F) \longrightarrow L(E,G)$ dada por $B(A_1,A_2) = A_1 o A_2$. Note que $\|B\| = 1$ e sendo B bilinear podemos aplicar o lema acima. Então

$$\|g\circ f\|_{k,u} = \|D(g\circ f)\|^*_{k-1,u} = \|B\circ(Dg\circ f,\ Df)\|^*_{k-1,u} \leq$$

$$\leq 2^{k-1}\|E\|\ \|Dg\circ f\|^*_{k-1,u}\ \|Df\|^*_{k-1,u} =$$

$$= 2^{k-1}\|Dg\circ f\|^*_{k-1,u}\ \|Df\|^*_{k-1,u} \leq$$

$$\leq 2^{k-1}\left[\|Dg(f(u)\| + 2^{(k-1)!}\|Dg\|_{k-1,f(u)}(\|f\|_{k-1,u}+\|f\|^{k-1}_{k-1,u})\right]\|f\|_{k,u}\leq$$

$$\leq 2^{k-1}\|g\|_{k,f(u)}\left[\|f\|_{k,u}+2^{(k-1)!}\ \|f\|^2_{k,u} + 2^{(k-1)!}\ \|f\|^k_{k,u}\right] \leq$$

$$\leq 2^{k!}\ \|g\|_{k,f(u)}\left[\|f\|_{k,u} + \|f\|^k_{k,u}\right].$$

onde a primeira desigualdade segue do Lema, a segunda da hipótese de indução, e as igualdades e desigualdades restantes são simples cálculos.

<u>Prova do corolário 1.3.5</u>

Tese

$$\left\|\frac{f}{g}\right\|^*_{k,u} \leq C\left[\frac{1}{|g(u)|} + \frac{1}{|g(u)|^{k+1}}\right]\left[1+\|g\|^{k+1}_{k,u}\right]\|f\|^*_{k,u}.$$

Tomando-se $i : R-\{o\} \longrightarrow R-\{o\}$, $i(t) = \frac{1}{t}$ vem que $\frac{f}{g} = f\circ i\circ g$. A aplicação $(f,h) \xrightarrow{B} f\circ h$ é bilinear e temos $\frac{f}{g} = B\circ(f, i\circ g)$. Aplicamos então o lema e o corolário 1.3.4 para $i\circ g$:

$$\left\|\frac{f}{g}\right\|^*_{k,u} = \|B\circ(f,i\circ g)\|^*_{k,u} \leq 2^k\|B\|\ \|f\|^*_{k,u}\|i\circ g\|^*_{k,u} \leq$$

$$\leq 2^k\|B\|\ \|f\|^*_{k,u}\ 2^{k!}\|i\|_{k,g(u)}\left[\|g\|_{k,u} + \|g\|^k_{k,u}\right]$$

$$\leq C\left[\frac{1}{|g(u)|}+\frac{1}{|g(u)|^{k+1}}\right]\left[1+\|g\|_{k,u}^{k+1}\right]\|f\|_{k,u}^{*}$$

onde na última desigualdade usamos o fato que para uma constante $C_1 > 0$ conveniente

$$\|i\|_{k,t} \leq C_1\left[\frac{1}{|t|}+\frac{1}{|t|^{k+1}}\right]$$

1.4 Corolário do Teorema I.2.1 |17|

Seja V um subconjunto aberto num espaço E de Banach e $f : R \times V \longrightarrow R$, $u : V \longrightarrow R^p$ duas funções C^∞. Então existem $Q \in C^\infty(R \times V)$ e uma função C^∞ $H : V \longrightarrow R^p$ tais que

(1.4.1) $f(t,x) = P_p(t,u(x))Q(t,x) + R(t,H(x))$, $\forall x \in V$ e $\forall t \in R$.

Prova

Defina Q e H por

$$Q(t,x) = q(f_x,t,u(x)) \quad , \qquad H(x) = h(f_x,u(x))$$

para todo $x \in V$ e para todo $t \in R$.

A igualdade (1.4.1), $\forall x \in V$ e $\forall t \in R$ segue imediatamente de (I.2.1.1) do Teorema I.2.1.

Que Q e H são C^∞ segue do fato que q_f e h_f são C^∞ (Teorema I.2.1.(c)) pois

$$Q = q_f \circ u' \quad , \quad H = h_f \circ u''$$

onde $u'' = (u,id) : V \longrightarrow R^p$ e $u' = id \times u'' : R \times V \longrightarrow R \times R^p \times V$ são C^∞.

APÊNDICE 2

O TEOREMA DE PREPARAÇÃO E O TEOREMA DE DIVISÃO EM ANÉIS DE SÉRIES DE POTÊNCIAS FORMAIS |28|

2.1 - Definição

Seja A um anel comutativo com unidade e $\mathcal{R} = A[X_1,\ldots,X_n]$ o anel de polinômios nas n indeterminadas $X_1,\ldots,X_n$ sobre A. Por uma série de potência formal em n indeterminadas sobre A entendemos uma sequência infinita $f = (f_o, f_1,\ldots,f_q,\ldots)$ de polinômios homogêneos f_q em $\mathcal{R}$, cada polinômio f_q sendo nulo ou tendo grau q.

Definimos adição e multiplicação de duas séries de potências $f = (f_o,f_1,\ldots,f_q,\ldots)$ e $g = (g_o,g_1,\ldots,g_q,\ldots)$ como segue:

$$f + g = (f_o + g_o,\ f_1 + g_1,\ldots,f_q + g_q,\ldots)$$

$$f.g = (h_o,h_1,\ldots,h_q,\ldots) \quad \text{onde}$$

$$h_q = \sum_{i+j=q} f_i\, g_j \quad .$$

É fácil ver que com estas operações o conjunto S de todas as séries de potências em n indeterminadas sobre A torna-se um anel comutativo. Este anel S, chamado de anel das séries de potências formais em n indeterminadas sobre A, será denotado por $A[[X_1,\ldots,X_n]]$.

O zero de S é a sequência $(0,0,\ldots,0,\ldots)$ e $(1,0,\ldots,0,\ldots)$ é a identidade da segunda operação de S.

Observe ainda que, polinômios em $X_1, X_2, \ldots, X_n$ com coeficientes em A, podem ser identificados com séries de potências formais, como segue:

se $f \in A[X_1, \ldots, X_n]$ e

$f = f_o + f_1 + \ldots + f_m$ onde

cada f_i é um polinômio homogêneo que ou é nulo ou de grau i, então identificamos f com a série de potências $(f_o, f_1, \ldots, f_m, 0, 0, \ldots)$. Com esta identificação o anel dos polinômios $A[X_1, \ldots, X_n]$ torna-se um subanel do anel das séries de potências $S = A[[X_1, \ldots, X_n]]$.

2 .2 - <u>Nota</u>

Se o anel A é o corpo dos números reais ou dos complexos, o conjunto das séries de potências f que são convergentes numa vizinhança da origem $X_1 = \ldots = X_n = 0$ forma um subanel S' de S (é claro que este subanel contém todos os polinômios).

O Teorema de Divisão que veremos no anel S vale também em S'.

2 . 3 - <u>Definição</u>

Seja $f = (f_o, f_1, \ldots, f_q, \ldots)$ uma série de potências não nula. O menor índice q para o qual f_q é diferente de zero será chamado de <u>ordem de f</u> e denotado por $0(f)$. Se $0(f) = i$ então f_i é chamado de forma inicial de f.

2.4 - Teorema

Se f e $g \in A[[X_1,\ldots,X_n]]$ então $0(f+g) \geq \min(0(f), 0(g))$ e $0(f.g) \geq 0(f) + 0(g)$.

Ainda, se A é um domínio de integridade então S é também um domínio de integridade e $0(f.g) = 0(f) + 0(g)$.

2.5 - Teorema

Se $f = (f_o, f_1, \ldots, f_q, \ldots)$ é uma série de potências formal então f é uma unidade em $S \iff$ o elemento f_o de A é uma unidade em A.

2.6 - Corolário

Se K é um corpo, então as unidades do anel das séries de potências $K[[X_1,\ldots,X_n]]$ são as séries de potências de ordem zero.

O anel $K[[X_1,\ldots,X_n]]$ é um anel local e o ideal $\mathcal{M}$ gerado por $X_1,\ldots,X_n$ é o seu ideal maximal.

2.7 - Teorema de Divisão

Seja K um corpo e $F(X_1,\ldots,X_n)$ uma série de potências não inversível de $K[[X_1,\ldots,X_n]]$.

Suponha que $F(X_1,\ldots,X_n)$ contenha termos da forma $a\,X_n^h$ com $\underline{a}$ não nulo e denote por p $(p \geq 1)$ o menor de todos os expoentes h tendo esta propriedade.

Então para toda série de potências $G(X_1,\ldots, X_n)$ existe uma série de potências $U(X_1,\ldots,X_n)$ e p séries de potências $R_i(X_1,\ldots,X_{n-1})$ em $X_1,\ldots,X_{n-1}$ $(0 \leq i \leq p-1)$ tais que

$$G(X_1,\ldots,X_n) = U(X_1,\ldots X_n)\ F(X_1,\ldots,X_n) + $$
$$+ \sum_{i=0}^{p-1} R_i(X_1,\ldots,X_{n-1})\ X_n^i \qquad (2.7.1)$$

As séries de potências U e R_i são determinadas de modo único por G e F. (|28| denomina este resultado de Teorema de Preparação de Weierstrass).

Demonstração

Para toda série de potências $P(X_1,\ldots,X_n)$ denoto por $r(P)$ a soma de todos os termos em P que não tem X_n^p como fator, e por $h(P)$ o fator de X_n^p em $P - r(P)$. Em outras palavras temos

$$P = r(P) + X_n^s\ h(P) \qquad (2.7.2)$$

(observe que se $f = (f_o,f_1,\ldots,f_q,\ldots)_\infty \in S$ estamos escrevendo f como soma infinita, isto é, $f = \sum_{i=0} f_i$)
onde $r(P)$, $h(P) \in K[[X_1,\ldots,X_n]]$ e onde, ainda, $r(P)$ é um polinômio em X_n, de grau $\leq p - 1$ com coeficientes em $K[[X_1,\ldots,X_{n-1}]]$.

Note que se o anel das séries de potências $K[[X_1,\ldots,X_{n-1}]]$ é visto como um espaço vetorial sobre o corpo K, então ambas as operações r e h são transformações lineares neste espaço vetorial.

Por definição do inteiro p, $h(F)$ é uma unidade em $K[[X_1,\ldots,X_n]]$ e $r(F)$ visto como um polinômio em X_n, tem todos os seus coeficientes no ideal maximal do anel $K[[X_1,\ldots,X_{n-1}]]$. Vamos denotar este anel por $\mathfrak{m}$.

O problema de encontrar séries de potências U e R_o, R_1, ..., R_{p-1} tais que (2.7.1) acontece é equivalente ao problema de encontrar série de potências U tal que a seguinte relação acontece:

$$h(G) = h(UF) \qquad (2.7.1.a)$$

De fato, se (2.7.1) acontece, então $h(G - UF) = 0$, donde (2.7.1.a) se verifica pela linearidade de h. Reciprocamente, suponha que U é uma série de potências satisfazendo (2.7.1.a). Então $h(G - UF) = 0$, donde $G - UF = r(G - UF)$ por (2.7.2), isto é, $G - UF$ é um polinômio em X_n, de grau $\leq p - 1$, com coeficientes em $K[[X_1,\ldots,X_{n-1}]]$, e assim (2.7.1) se verifica.

Por (2.7.2) temos que

$$UF = Ur(F) + X_n^p\, Uh(F)$$

e então (2.7.1.a) pode ser escrito como segue:

$$h(G) = h(Ur(F)) + Uh(F) , \qquad (2.7.1.b)$$

e nosso problema é equivalente a encontrar uma série de potências U satisfazendo (2.7.1.b).

Como $h(F)$ é uma unidade em $K[[X_1,\ldots,X_n]]$ vamos construir séries de potências

$$V = Uh(F) \quad . \tag{2.7.3}$$

Colocamos

$$M = -r(F)\,|h(F)|^{-1} \quad . \tag{2.7.4}$$

Então, por (2.7.3), $Ur(F) = -MV$ e (2.7.1.b) é equivalente a

$$h(G) = -h(MV) + V \tag{2.7.1.c}$$

Para toda série de potências P, denoto por $m(P)$ a série de potências $h(MP)$. Note que m é novamente uma operação linear sobre séries de potências. Ainda, se P, considerado como uma série de potências em X_n sobre $K[[X_1,\ldots,X_{n-1}]]$ tem todos os seus coeficientes em alguma potência $\mathfrak{m}^j$ do ideal maximal $\mathfrak{m}$, então, $m(P)$ tem todos os seus coeficientes em $\mathfrak{m}^{j+1}$.

Por conveniência colocamos $H \equiv h(G)$. Com estas notações a condição (2.7.1.c) pode ser escrita como segue:

$$V = H + m(V) \tag{2.7.1.d}$$

Como m é linear, a condição (2.7.1.d) implica que

$$V = H + m(H + m(V)) = H + m(H) + m^2(V),$$

e por sucessivas aplicações:

$$V = H + m(H) + m^2(H) + \ldots + m^q(H) + m^{q+1}(V), \tag{2.7.1.e}$$

para qualquer inteiro $q \geq 0$.

A propriedade da operação m que evidenciamos acima mostra que $m^j(H)$ é pelo menos de ordem j, e $m^{q+1}(V)$ é pelo menos de ordem $q + 1$. Assim, a soma infinita

$$H + m(H) + m^2(H) + \ldots + m^q(H) + \ldots$$

converge, e, se existe uma série de potências V satisfazendo (2.7.1.d), ela deve ser a série

$$V = H + m(H) + m^2(H) + \ldots + m^q(H) + \ldots \tag{2.7.5}$$

e isto prova a unicidade de V, donde a unicidade de U e de R_i.

Provemos agora que a série V dada por (2.7.5) satisfaz a condição (2.7.1.d). Vamos escrever:

$$V = H + m(H) + \ldots + m^q(H) + W_q \quad .$$

Os coeficientes de W_q (W_q sendo considerado como uma série de potências em X_n) estão todos em $\mathfrak{m}^{q+1}$. Então, como m é linear,

$$V - H - m(V) = H + m(H) + \ldots + m^q(H) + W_q - H - m(H) - m^2(H) - \ldots -$$

$$- m^{q+1}(H) - m(W_q) = W_q - m^{q+1}(H) - m(W_q) \quad .$$

Assim, todos os coeficientes de $V - H - m(V)$ estão em $\mathfrak{m}^{q+1}$. Como isto é verdade para todo q, temos $V - H - m(V) = 0$ (visto que $\bigcap_{q\geq 1} \mathfrak{m}^q = \{0\}$), e a condição (2.7.1) se verifica.

Isto prova a existência de V, donde também de U e dos R_i.

2.8 - Observação sobre a prova de 2.7

Uma vantagem desta prova é que as questões de existência e unicidade são tratadas simultâneamente. Uma vantagem mais substancial é que o método dos majorantes é facilmente aplicável para resolver a fórmula (2.7.1.e), com o resultado que se F e G são séries de potências convergentes sobre o corpo dos números reais ou complexos, então as séries V, U e as R_i são também convergentes. Para mostrar isto, o autor faz um parênteses e prova o teorema de divisão para séries de potências convergentes (|28|, pag 142-145).

2.9 - Teorema de Preparação de Weierstrass

Seja $F(X_1,\dots,X_n)$ uma série de potências em $K[[X_1,\dots,X_n]]$ que é regular em X_n e seja $p \geq 1$ a ordem da série de potências $F(o,\dots,o,X_n)$ (isto é, F é não unitário). Então existem séries de potências $E(X_1,\dots,X_n)$, $R_i(X_1,\dots,X_{n-1})$ $i = o,1,\dots,p-1$ tais que

$$F(X_1,\dots,X_n)= E(X_1,\dots,X_n) \ [X_n^p + \sum_{i=0}^{p-1} R_i(X_1,\dots,X_{n-1}) \ X_n^i] \tag{2.9.1}$$

As séries de potências E, R_i são unicamente determinadas por F; E é uma unidade, e nenhum dos R_i é uma unidade.

Demonstração

Basta aplicar o teorema 2.7 para a série de potências $G = - X_n^p$ e encontramos

$$X_n^p + R_{p-1}(X_1,\dots,X_{n-1})X_n^{p-1} + \dots + R_o(X_1,\dots,X_{n-1}) =$$

$$= - U(X_1,\dots,X_n) \cdot F(X_1,\dots,X_n)$$

Tomando-se $X_1 = X_2 = \dots = X_{n-1} = 0$ nesta identidade, obtém-se do lado direito uma série de potências em X_n que tem ordem $\geq$ p.

Então $R_i(0,\dots,0) = 0$, $i = 0,1,\dots,p-1$ e nenhum R_i é uma unidade.

Ao mesmo tempo segue que $U(o,\dots,o,X_n)$ precisa ser de ordem zero, visto que do lado direito, conforme dissemos, dá uma série em X_n de ordem $\geq$ p e do lado esquerdo dá apenas X_n^p que é de ordem p. Logo, $0(U(0,\dots 0,X_n)) = 0$ (pelo teorema 2.4) e portanto $U(X_1,\dots,X_n)$ é uma unidade.

Se tomarmos $E = U^{-1}$, temos (2.9.1).

A unicidade de E e dos R_i também segue do teorema 2.7 no caso especial de $G = - X_n^p$.

APÊNDICE 3

A PROVA DO TEOREMA DE DIVISÃO DE PIERRE MILMAN DADA POR E. BIERSTONE |3|

O que vamos apresentar aqui são os capítulos 9 e 10 do trabalho de E. Bierstone |3| (a ser publicado) em sua íntegra.

No primeiro capítulo é apresentado o Teorema de Extensão de Elias Stein (3.1) e no segundo a prova do Teorema de Divisão (3.2) caso C^∞.

Escolhemos essa apresentação de Bierstone por ser mais clara e mais detalhada que a de Milman |22|.

3 . 1 - O Teorema de Extensão de E. Stein

Consideremos o problema de estender funções C^∞ definidas num domínio com fronteira no R^n, para funções C^∞ no R^n.

O Teorema de Elias Stein mostra que se a fronteira do domínio é localmente o gráfico de uma função que satisfaz a condição de Lipschitz, então existe um operador de extensão que é contínuo e linear na topologia C^∞. Este resultado será usado para provar o teorema de Divisão de Malgrange--Mather. O problema de extensão de funções C^∞ de conjuntos fechados data de Whitney.

Começaremos construindo uma "função de distância regularizada". A construção usa uma certa decomposição de um subconjunto aberto do R^n em cubos. Uma partição da unidade baseada nesta decomposição é exatamente a principal ferramenta no Teorema de Extensão de Whitney.

Seja X um subconjunto fechado do R^n. Denotamos por $d(x,X)$ a distância de x a X. A função $d(x,X)$ é em geral não mais diferenciável no $R^n - X$ do que a desigualdade de Lipschitz $|d(x,X) - d(y,X)| \leq d(x,y)$ pode indicar.

Queremos substituir $d(x,X)$ por uma "função de distância regularizada" que é C^∞ no $R^n - X$ e que tem essencialmente omesmo perfil de $d(x,X)$.

Para $U \subset R^n$ aberto, $E(U)$ denota o espaço das funções C^∞ em U, com a topologia C^∞. Então $E(U)$ tem estrutura de espaço de Frechet, isto é, é um espaço vetorial topológico, completo, metrizável, localmente convexo.

3 . 1.1 - <u>Teorema</u>

Existe uma função $\Delta \in E(R^n - X)$ e constantes b_k, $k \in N^n$, c_1, c_2 todas independentes de X, tais que

(1) $c_1 d(x,X) \leq \Delta(x) \leq c_2\, d(x,X)$, $\forall x \in R^n - X$

(2) $\left|\dfrac{\partial^k \Delta}{\partial x^k}(x)\right| \leq b_k\, d(x,X)^{1-|k|}$, $\forall\, k \in N^n$,

$\forall x \in R^n - X$.

A prova é baseada nos seguintes dois lemas. Diremos que uma coleção de cubos forma uma subdivisão do $R^n - X$ se seus interiores são disjuntos e sua união é $R^n - X$.

3 . 1.2 - Lema

Existe uma subdivisão de $R^n - X$ em uma coleção I de cubos fechados L com lados paralelos aos eixos coordenados, tais que

$$\text{diam } L \leq d(L,X) \leq 4 \text{ diam } L \quad .$$

Demonstração

Para cada inteiro p, subdividimos R^n em cubos fechados com lados de comprimento $\frac{1}{2^p}$, pelos hiperplanos

$$x_i = \frac{j_i}{2^p} \text{ , onde } 1 \leq i \leq n \text{ e } j_1, \ldots, j_n$$

cada um percorrendo os inteiros.

Seja $\sum_p$ o conjunto de tais cubos.

Seja $\Omega_p = \left\{ x \in R^n : \frac{c}{2^p} < d(x,X) < \frac{c}{2^{p-1}} \right\}$

(onde c é uma constante positiva que será fixada brevemente), e

seja $S_p \subset \sum_p$ o subconjunto de cubos que interceptam o conjunto Ω_p.

Se $L \in \sum_p$, então $\text{diam } L = \frac{\sqrt{n}}{2^p}$.

Se $L \in S_p$, então existe $x \in L \cap \Omega_p$, tal que

$$d(L,X) \leq d(x,X) \overset{x \in \Omega_p}{\leq} \frac{c}{2^{p-1}} \qquad \text{e}$$

$$d(L,X) \geq d(x,L) - \operatorname{diam} L \overset{x\in\Omega_p}{>} \frac{c}{2^p} - \frac{\sqrt{n}}{2^p} .$$

Então se escolhermos $c = 2\sqrt{n}$, obtém-se $\bigcup_p S_p = R^n - X$ e ainda,

$$\begin{cases} d(L,X) \leq \dfrac{2\sqrt{n}}{2^{p-1}} = \dfrac{\sqrt{n}}{2^{p-2}} \cdot \dfrac{4}{4} = 4\,\dfrac{\sqrt{n}}{2^p} = 4 \operatorname{diam} L \\ \text{e} \\ d(L,X) \geq \dfrac{2\sqrt{n}}{2^p} - \dfrac{\sqrt{n}}{2^p} = \dfrac{\sqrt{n}}{2^p} = \operatorname{diam} L \end{cases}$$

ou melhor, $\operatorname{diam} L \leq d(L,X) \leq 4 \operatorname{diam} L$ para todo $L \in \bigcup_p S_p$.

Entretanto, os cubos de $\bigcup_p S_p$ não tem necessariamente interiores disjuntos. Se $L_1 \in S_{p_1}$ e $L_2 \in S_{p_2}$ não tem interiores disjuntos, então um está contido no outro ($L_1 \subset L_2$ se $p_1 \geq p_2$). Dado um $L \in \bigcup_p S_p$, consideremos o máximo cubo em $\bigcup_p S_p$, que o contenha. De acordo com a última desigualdade, se $L' \supset L$, então $\operatorname{diam} L' \leq 4 \operatorname{diam} L$. Como quaisquer dois cubos contendo L tem obviamente uma intersecção não trivial, então cada cubo $L \in \bigcup_p S_p$ tem um único cubo maximal que o contenha. Estes cubos maximais tem interiores disjuntos. Seja I a coleção dos cubos maximais de $\bigcup_p S_p$.

3 . 1.3 - <u>Lema</u>

(a) Cada cubo $L \in I$ encontra somente cubos $L' \in I$ tais que $\frac{1}{4} \operatorname{diam} L' \leq \operatorname{diam} L \leq 4 \operatorname{diam} L'$.

(b) Se $L \in I$, então existem no máximo 12^n cubos em I que tocam L.

<u>Demonstração</u>

(a) Pelo Lema 3.1.2, $d(L,X) \leq 4 \operatorname{diam} L$. Então se L encontra L', então $d(L',X) \leq 4 \operatorname{diam} L + \operatorname{diam} L = 5 \operatorname{diam} L$, e assim $\operatorname{diam} L' \leq d(L',X) \leq 5 \operatorname{diam} L$.

Mas, $\operatorname{diam} L' = 2^K \operatorname{diam} L$ para algum inteiro K. Então, $\operatorname{diam} L' \leq 4 \operatorname{diam} L$.

A outra desigualdade segue por simetria.

(b) Se $L \in \sum_p$, então existem 3^n cubos (incluindo L) em $\sum_p$ que tocam L. Por outro lado, cada cubo de $\sum_p$ pode conter no máximo 4^n cubos de I de diâmetro pelo menos $\frac{1}{4}\operatorname{diam} L$. Então (b) segue de (a).

3 . 1.4 - <u>Prova do Teorema 3.1.1</u>

Se $L \in I$, seja x_L o centro de L e λ_L o comprimento de seus lados (portanto $\operatorname{diam} L = \sqrt{n}\ \lambda_L$). Fixamos δ, $0 < \delta < \frac{1}{4}$, e seja L^* o cubo que tem o mesmo centro de L, mas é expandido pelo fator $1 + \delta$, isto é,

$$L^* = (1 + \delta)\ (L - x_L) + x_L \ .$$

Cada ponto de $R^n - X$ está contido no máximo em 12^n cubos L^*. De fato se $L, L_1 \in I$, então L_1^* intercepta L se e só se L_1 intercepta L. Para ver isto, considere a união de L_1 com todos os cubos de I que tocam L_1. Como o diâmetro destes cubos são todos ao menos $\frac{1}{4}$ diam L_1, é claro que esta união contém L_1^*. Esta observação também mostra que todo ponto de $R^n - X$ tem uma vizinhança interceptando no máximo 12^n cubos L^*.

Agora seja L_o o cubo com lados de comprimento um, centrado na origem, e seja Ψ uma função C^∞ tal que $o \leq \Psi \leq 1$ e

$$\begin{cases} \Psi(x) = 1 \text{ se } x \in L_o \\ \Psi(x) = 0 \text{ se } x \notin (1+\delta)L_o \end{cases}$$

Para cada $L \in I$, definimos

$$\Psi_L(x) = \Psi\left[\frac{x - x_L}{\lambda_L}\right].$$

Então

$$\left|\frac{\partial^k \Psi_L}{\partial x^k}(x)\right| = \left|\frac{1}{\lambda_L^{|k|}} \frac{\partial^k \Psi}{\partial x^k}\left[\frac{x - x_L}{\lambda_L}\right]\right| \leq \frac{a_k}{(\text{diam } L)^{|k|}},$$

onde a_k depende somente de k e n.

Definimos agora

$$\Delta(x) = \sum_{L \in I} (\text{diam } L)\, \Psi_L(x)$$

Note que se $x \in L$, então, pelo lema 3.1.2 , $d(x,X) \leq d(L,X) + \text{diam } L \leq 5 \text{ diam } L$. Também, se $x \in L^*$, então, pelo lema 3.1.2, $d(x,X) \geq d(L,X) - \frac{1}{4} \text{ diam } L \geq \frac{3}{4} \text{ diam } L$. Mas, se $x \in L$, então $\Psi_L(x) = 1$, e assim

$$\Delta(x) \geq \text{diam } L \geq \frac{1}{5}\, d(x,X) \qquad (\alpha)$$

Como cada x está em no máximo 12^n cubos L^*, então

$$\Delta(x) \leq \sum_{x \in L^*} \text{diam } L \leq \frac{4}{3}\,(12)^n\, d(x,X) \qquad (\beta)$$

(α) e (β) provam a propriedade (1) do teorema 3.1.1 com $c_1 = \frac{1}{5}$ e $c_2 = \frac{4}{3}\,(12)^n$.

Para se obter a propriedade (2), observe que se $x \in L^*$, então $d(x,X) \leq 6$ diam L e assim,

$$\left|\frac{\partial^k \Delta}{\partial x^k}(x)\right| \leq 12^n \text{ diam } L \,\frac{a_k}{(\text{diam } L)^{|k|}} = 12^n a_k 6^{|k|-1} d(x,X)^{1-|k|}$$

Isto mostra que podemos tomar $b_k = 12^n a_k 6^{|k|-1}$.

Nota

Se colocarmos $\phi_L(x) = \dfrac{\Psi_L(x)}{\sum_{M \in I} \Psi_M(x)}$ (e $\therefore \sum_L \phi_L(x) = 1$) obtêm-se a "partição da unidade de Whitney" no $R^n - X$.

3.1.5 - Definição

(a) Seja ϕ: $R^{n-1} \to R$ uma função que satisfaz a condição de Lipschitz $|\phi(x) - \phi(x')| \leq M|x - x'|$ para todo $x, x' \in R^{n-1}$. Consideremos pontos no R^n como pares (x,y) , $x \in R^{n-1}$, $y \in R$.

O subconjunto aberto

$$\{(x,y) \in R^n \mid y > \phi(x)\}$$

é chamado de um <u>domínio especial de Lipschitz</u>. Uma rotação de tal domínio também será chamada de domínio especial de Lipschitz.

(b) Seja Ω um aberto do R^n e $\partial\Omega$ sua fronteira. Dizemos, mais geralmente, que Ω é <u>um domínio de Lipschitz</u> se para todo ponto a em $\partial\Omega$, existe uma vizinhança aberta U_a de a no R^n e um domínio especial de Lipschitz Ω_a, tal que $\Omega \cap U_a = \Omega_a \cap U_a$.

3 . 1.6 - <u>Definição</u>

Seja X o fecho de um domínio de Lipschitz Ω. Denoto por E(X) o espaço das funções contínuas f em X tais que

(1) $f/\Omega \in E(\Omega)$

(2) todas as derivadas parciais de f/Ω podem ser estendidas continuamente para X.

Então E(X) tem estrutura de espaço de Fréchet definida pelas seminormas

$$|f|_m^K = \sup_{\substack{x \in K \\ |\ell| \leq m}} |f^{\ell}(x)|$$

onde $K \subset X$ é compacto, $m \in N$ e onde f^{ℓ} denota a extensão $\dfrac{\partial^{\ell}(f/\Omega)}{\partial x^{\ell}}$ para X.

3 . 1.7 - Teorema de Extensão de Stein

Se X é o fecho de um domínio de Lipschitz Ω, então existe um operador de extensão

$$E: E(X) \to E(R^n)$$

isto é, uma função linear contínua $E:E(X) \to E(R^n)$ tal que $E(f)/X = f$, para toda $f \in E(X)$. Ainda, E pode ser escolhido tal que para todo subconjunto compacto L do R^n, existe um subconjunto K de X tal que E satisfaz a seguinte estimativa. Para cada $m \in N$, existe uma constante positiva C tal que

$$|E(f)|_m^L \leq C|f|_m^K$$

Nota

Seeley e Mityagim provaram este teorema acima no caso em que X é um semi-espaço fechado.

É suficiente provar 3.1.7 no caso de um domínio especial de Lipschitz. O caso geral segue usando uma partição da unidade.

É conveniente trabalhar em R^{n+1} ao invés de R^n . Considere pontos em R^{n+1} como pares (x,y), onde $x \in R^n$ e $y \in R$. Seja $\phi: R^n \to R$ uma função que satisfaz a condição de Lipschitz

$$|\phi(x) - \phi(x')| \leq M|x - x'| \text{ , } \forall x,x' \in R^n.$$

Seja $\Omega = \{(x,y) \in R^{n+1}: y > \phi(x)\}$ e $X = \Omega \cup \partial\Omega$. Vamos provar o seguinte teorema.

3 . 1.8 - Teorema

Existe um operador de extensão $E: E(X) \to E(R^{n+1})$ que satisfaz a seguinte estimativa. Para todo $m \in N$ e todo subconjunto compacto L do R^{n+1}, existe um compacto $K = K(L)$ de X e uma constante positiva C (dependendo somente de n, m e do M da desigualdade de Lipschitz) tal que

$$|E(f)|_m^L \leq C\, |f|_m^K \quad , \quad \forall\, f \in E(X).$$

Nosso problema neste teorema é definir $E(f)(x,y)$ quando $y < \phi(x)$, onde f é dada em X. Para x fixo, definimos $E(f)(x,y)$ para $y < \phi(x)$ em termos de uma média conveniente dos valores de f no segmento onde $y > \phi(x)$.

3 . 1.9 - Lema

Existe uma função contínua $\Psi: [1,\infty) \to R$ que é rapidamente decrescente no ∞; isto é, $\Psi(t) = O(t^{-m})$ quando $t \to \infty$, para todo m e tal que

$$\int_1^\infty \Psi(t)dt = 1, \quad \int_1^\infty t^k \Psi(t)dt = 0 \ , \ k = 1,2,\ldots$$

Demonstração

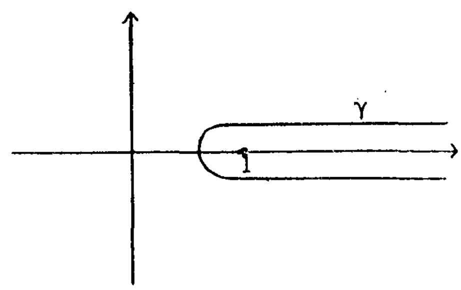
Podemos definir

$$\Psi(t) = \frac{e}{\pi t}\, I_m \left[e^{-\omega (t-1)^{\frac{1}{4}}}\right] \text{ onde } \omega = e^{-\frac{\pi i}{4}}.$$

Para ver que esta função satisfaz as condições do lema, consideremos a função holomorfa

$$e^{-\omega(z-1)^{\frac{1}{4}}}$$

no plano complexo cortado ao longo do eixo real de 1 ao ∞. Tomamos o contorno γ ilustrado no seguinte diagrama



Como $e^{-\omega(z-1)^{\frac{1}{4}}}$ decresce rapidamente quando $z \to \infty$ obtém-se pelo Teorema de Cauchy que

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{1}{z}\, e^{-\omega(z-1)^{\frac{1}{4}}}\, dz = e^{-\omega(z-1)^{\frac{1}{4}}}\Big|_{z=0} = e^{-1}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{z^k}{z}\, e^{-\omega(z-1)^{\frac{1}{4}}}\, dz = 0 \quad \text{para } k = 1,2,\ldots$$

3 . 1.10 - Lema

Seja $\Delta(x,y)$ a distância regularizada de X, como no teorema 3.1.1. Então existe uma constante c (dependendo somente da constante M de Lipschitz) tal que se $(x,y) \in R^n - X$, então

$$c\,\Delta(x,y) \geq \phi(x) - y\ .$$

<u>Prova</u>

Seja Γ (metade inferior) do cone com vértice no zero dado por

$$\Gamma = \{(x,y) : M\,|x| < |y|\ ,\ y < o\}\ .$$

Para todo $a \in R^{n+1}$, denote por $\Gamma(a)$ o cone Γ transladado tal que seu vértice é a.

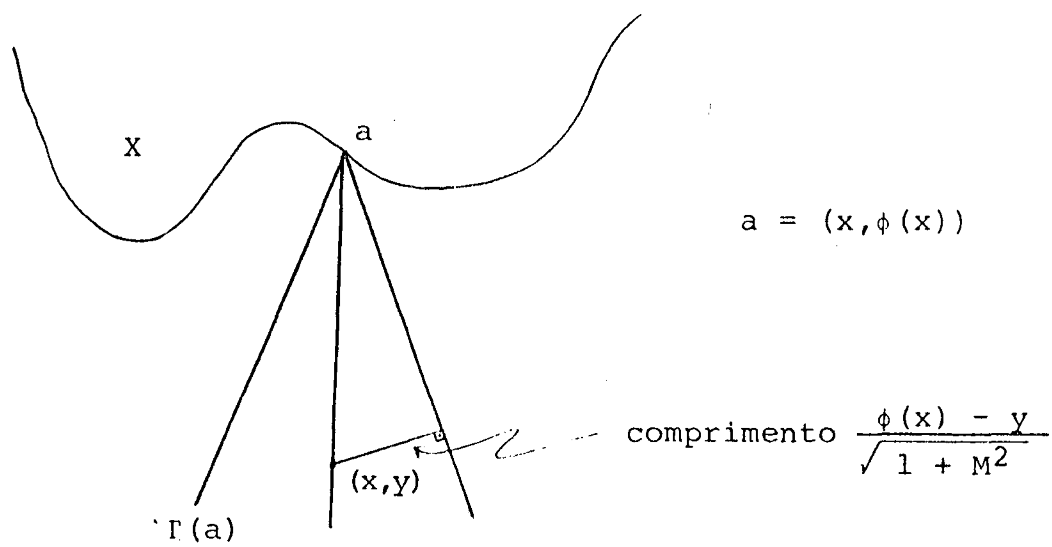
A condição de Lipschitz $|\phi(x) - \phi(x')| \leq M|x - x'|$ implica que se a é um ponto na fronteira de X, então $\Gamma(a) \subset R^n - \Omega$. Se $(x,y) \in R^n - X$, seja $a = (x, \phi(x))$. Então $(x,y) \in \Gamma(a)$ e nenhum ponto de X está tão perto de (x,y) do que a fronteira de $\Gamma(a)$. Da geometria vê-se que a distância mínima é pelo menos

$$\frac{\phi(x) - y}{\sqrt{1 + M^2}}\ .$$

Além disso, $d((x,y),X) \geq \dfrac{\phi(x) - y}{\sqrt{1 + M^2}}$, e portanto

$$c\,\Delta(x,y) \geq \phi(x) - y\ ,$$

onde $c = 5\sqrt{1 + M^2}$, pelo Teorema 3.1.1 .



3 . 1.11 - Prova do Teorema 3.1.8

Por conveniência vamos escrever $\delta = 2c\Delta$ e assim $\delta(x,y) \geq 2(\phi(x) - y)$ (visto que $c\Delta(x,y) \geq \phi(x) - y$).

É claramente suficiente definir nosso operador de extensão para funções $f \in E(X)$ tais que $f(x,y) = 0$ quando $y > \phi(x) + 1$. Dada uma tal f, colocamos

$$\begin{cases} E(f)(x,y) = f(x,y) \text{ se } (x,y) \in X \\ E(f)(x,y) = \displaystyle\int_1^\infty f(x,y + t\delta(x,y))\Psi(t)dt, \\ \qquad (x,y) \in R^n - X . \end{cases}$$

A integral está bem definida pois

$$y + t\delta(x,y) \geq y + 2(\phi(x) - y) = \phi(x) + \phi(x) - \\ - y > \phi(x),$$

se $t \geq 1$ (lembre que $y < \phi(x)$ no $R^n - X$).

É claro que $E(f)$ é C^∞ no $R^n - X$. Mostremos que $E(f)\Big|_{R^n-X}$ pode ser estendida, junto com todas as suas derivadas parciais, para a fronteira de Ω. O argumento é típico para, digamos, $\dfrac{\partial^2 E(f)}{\partial x_j^2}$. Temos

$$\frac{\partial^2 E(f)}{\partial x_j^2} = \int_1^\infty f_{jj}(.)\ \Psi(t)dt +$$

$$+ \int_1^\infty f_{jj}(.)t\delta_j\Psi(t)dt +$$

$$+ \int_1^\infty f_{yy}(.)\,(t\delta_j)^2\Psi(t)dt +$$

$$+ \int_1^\infty f_y(.)t\delta_{jj}\Psi(t)dt$$

(Aqui f_{jj} significa $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$, f_y significa $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, e (.) coloca-se para $(x,y + t\delta)$.

Seja (x,y) próximo de um ponto de fronteira (x^o,y^o) de Ω. Então $\delta(x,y) \to o$ e δ_j continua limitada pelo teorema 3.1.1, enquanto que

$$\int_1^\infty \Psi(t)dt = 1\ ,\int_1^\infty t\Psi(t)dt = 0\ ,\int_1^\infty t^2\Psi(t)dt = 0 \quad .$$

Então os três primeiros termos do lado direito convergem para um total que é igual

3 . 2 - Prova do Teorema de Divisão

3 . 2.1 - Teorema de Divisão de Malgrange-Mather

Seja U um aberto no R^n e $u_1,\dots,u_p \in E(U)$.

Seja $p(t,x) = t^p + \sum_{i=1}^{p} u_i(x)\, t^{p-i}$.

Então existe uma função linear contínua

$$E(R \times U) \to E(R \times U) \times (E(U))^p$$

$$f \mapsto (q_f, r_{1,f}, \dots, r_{p,f})$$

tal que para toda $f \in E(R \times U)$

$$f = pq_f + r_f$$

onde $$r_f(t,x) = \sum_{j=1}^{p} r_{j,f}(x) t^{p-j}$$

Na verdade os espaços acima são módulos sobre o anel E(U), e a função é E(U)-linear.

Este resultado é uma consequência do seguinte teorema de divisão genérica:

3 . 2.2 - Teorema

Seja P o polinômio genérico $P(t,\lambda)=t^p+\sum_{i=1}^{p}\lambda_i t^{p-i}$.

Então existe uma função contínua E(U)-linear

$$E(RxU) \to E(R^{1+p}xU) \times (E(R^p xU))^p$$

$$f \mapsto (Q_f, R_{1,f}, \dots, R_{p,f})$$

tal que para toda $f \in E(R \times U)$,

$$f(t,x) = P(t,\lambda)\, Q_f(t,\lambda,x) + R_f(t,\lambda,x),$$

onde $$R_f(t,\lambda,x) = \sum_{j=1}^{p} R_{j,f}(\lambda,x)\, t^{p-j} .$$

Para ver que o Teorema 3.2.1 segue do 3.2.2, tomamos $u = (u_1,\ldots,u_p)$ tal que $p(t,x) = P(t,u(x))$. Então

$$f(t,x) = p(t,x)\, q_f(t,x) + \sum_{j=1}^{p} r_{j,f}(x) t^{p-j},$$

onde $$q_f(t,x) = Q_f(t,u(x),x) \qquad \text{e}$$

$$r_{j,f}(x) = R_{j,f}(u(x),x).$$

Falta então provar o teorema 3.2.2, mas na verdade vamos provar um resultado mais preciso (devido a Pierre Milman) que é formulado com o objetivo de se provar o teorema de divisão por indução sobre o grau do polinômio genérico.

Consideremos o polinômio genérico

$$P^p(t,\lambda) = t^p + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, t^{p-i}$$

para qualquer inteiro não negativo p (colocamos $P^o(t,\lambda) = 1$). Então para cada inteiro positivo p, podemos definir a função

$$\lambda^p\colon R \times R^{p-1} \to R^p$$

pela seguinte identidade polinomial:

$$P^p(t,\lambda^p(s,\mu)) = (t - s)\ P^{p-1}(t,\mu),$$

onde $(s,\mu) \in R \times R^{p-1}$; isto é, a função λ^p é definida por

$$\begin{cases} \lambda_1 = \mu_1 - s \\ \lambda_j = \mu_j - \mu_{j-1}s\ , \ 2 \leq j \leq p-1\ . \\ \lambda_p = - \mu_{p-1}s \end{cases}$$

3 . 2.3 - <u>Teorema</u>

Seja U um aberto do R^n. Para cada $p \in N$, existe uma funçaõ E(U) - linear contínua

$$E(R \times U) \to E(R^{1+p} \times U) \times (E(R^p \times U))^p$$

$$f \longmapsto (Q_f^p,\ R_{1,f}^p,\dots,R_{p,f}^p)$$

tal que

(1) Para toda $f \in E(R \times U)$,

$$f(t,x) = P^p(t,\lambda)Q_f^p(t,\lambda,x) + R_f^p(t,\lambda,x)$$

onde $$R_f^p(t,\lambda,x) = \sum_{j=1}^{p} R_{j,f}^p\ (\lambda,x)t^{p-j}\ ;$$

(2) Para todo inteiro positivo p,

$$Q_f^p(t,\lambda^p(s,\mu),x)=\frac{Q_f^{p-1}(t,\mu,x) - Q_f^{p-1}(s,\mu,x)}{t-s}\quad .$$

Provaremos o Teorema 3.2.3 usando o Teorema 3.2.4 abaixo. A equação $P^p(t,\lambda) = 0$ define um subconjunto algébrico fechado não singular $X = X^p$ do R^{1+p}. De fato, X é o gráfico da função

$$\lambda_p = - t^p - \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i t^{p-i}$$

de maneira que a projeção $(t,\lambda) \longmapsto (t,\lambda_1,\ldots,\lambda_{p-1})$ do R^{1+p} sobre o R^p reduz-se a um sistema de coordenadas globais $\phi: X \to R^p$ sobre X.

Seja $\pi: R^{1+p} \to R^p$ a projeção canônica $\pi(t,\lambda) = \lambda$.

Denote por $E_\pi(X \times U)$ o subespaço fechado do $E(X\times U)$ formado por todas as funções que são constantes nas fibras $\pi^{-1}(\lambda) \times x$ da função $\pi \times id_u$.

3 . 2.4 - **Teorema**

Existe uma função contínua E(u) - linear

$$J: E_\pi(X \times U) \longrightarrow E(R^p \times U)$$

tal que se $h \in E_\pi(X \times U)$ então

$$J(h)(\lambda,x) = h(t,\lambda,x)$$

para todo $(t,\lambda) \in X$ e $x \in U$.

Primeiramente provaremos o Teorema 3.2.3, supondo o resultado do Teorema 3.2.4, e depois provaremos o Teorema 3.2.4. Como a variável $x = (x_1,\ldots,x_n)$ de U não entra em jogo na prova do outro teorema, vamos simplificar nossa notação desprezando U e x. É claro que as funções dadas em ambos os teoremas são E(U) - lineares.

Prova de 3.2.3

Primeiramente provemos o Teorema nos casos $p = 0$ e $p = 1$, e então argumentamos por indução sobre p.

Quando $p = 0$, o resultado desejado claramente acontece com

$$Q_f^o(t,\lambda) = f(t) \text{ e } R_f^o \equiv 0$$

Suponha $p = 1$, e assim o nosso polinômio genérico é $P^1(t,\lambda) = t + \lambda_1$. Temos

$$f(t) - f(-\lambda_1) = (t+\lambda_1)\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(st - (1-s)\lambda_1)ds \qquad (\alpha)$$

(esta é exatamente a fórmula de Hadamard).

Então podemos definir

$$Q_f^1(t,\lambda) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(st - (1-s)\lambda_1)ds$$

$$R_f^1(t,\lambda) = R_{1,f}^1(\lambda) = f(-\lambda_1) \quad .$$

Pela definição de λ^p temos que $\lambda_1(s,\mu) = - s$, e então

$$Q_f^1(t,\lambda^1(s,\mu)) = Q_f^1(t,-s) \overset{(\alpha)}{=} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} =$$

$$= \frac{Q_f^o(t,\lambda) - Q_f^o(s,\lambda)}{t - s} .$$

Suponha agora que o teorema tenha sido provado para $0,1,\ldots,p-1$ $(p \geq 2)$. Denotemos pontos do R^p, R^{p-1} e R^{p-2} respectivamente por $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_p)$, $\mu = (\mu_1,\ldots,\mu_{p-1})$, $\nu = (\nu_1,\ldots,\nu_{p-2})$ e escrevemos

$$\lambda(s,\mu) = \lambda^p(s,\mu) \ , \ (s,\mu) \in R \times R^{p-1}$$

$$\mu(r,\nu) = \lambda^{p-1}(r,\nu) \ , \ (r,\nu) \in R \times R^{p-2} .$$

Então

$$P^p(t,\lambda(s,\mu(r,\nu))) = (t - s)\ P^{p-1}(t,\mu(r,\nu)) =$$

$$= (t - s)(t - r)P^{p-2}(t,\nu) \tag{a}$$

e assim $\lambda(s,\mu(r,\nu))$ é simétrica em (s,r).

Pela hipótese de indução,

$$f(t) \overset{H.I}{=} P^{p-1}(t,\mu)Q_f^{p-1}(t,\mu) + R_f^{p-1}(t,\mu) =$$

$$= P^{p-1}(t,\mu)Q_f^{p-1}(t,\mu) - P^{p-1}(t,\mu)Q_f^{p-1}(s,\mu) +$$

$$+ P^{p-1}(t,\mu)Q_f^{p-1}(s,\mu) + R_f^{p-1}(t,\mu) =$$

$$= P^{p-1}(t,\mu) \left[Q_f^{p-1}(t,\mu) - Q_f^{p-1}(s,\mu)\right] +$$

$$+ P^{p-1}(t,\mu)Q_f^{p-1}(s,\mu) + R_f^{p-1}(t,\mu) \overset{(a)}{=}$$

$$= P^{p}(t,\lambda(s,\mu)) \frac{Q_f^{p-1}(t,\mu) - Q_f^{p-1}(s,\mu)}{t - s} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{p} R_{jf}(s,\mu)t^{p-j} \qquad (b)$$

onde $R_{1f},\ldots,R_{pf}$ são dados por

$$\sum_{j=1}^{p} R_{jf}(s,\mu)t^{p-j} = P^{p-1}(t,\mu)Q_f^{p-1}(s,\mu) +$$

$$+ R_f^{p-1}(t,\mu).$$

Vamos mostrar que

$$R_{jf}(s,\mu(r,\nu)) = R_{jf}(r,\mu(s,\nu)) \ , \quad 1 \leq j \leq p \ . \qquad (c)$$

De fato ,

$$\frac{Q_f^{p-1}(t,\mu(r,\nu)) - Q_f^{p-1}(s,\mu(r,\nu))}{t-s} =$$

$$\frac{\dfrac{Q_f^{p-2}(t,\nu) - Q_f^{p-2}(r,\nu)}{t-r} - \dfrac{Q_f^{p-2}(s,\nu) - Q_f^{p-2}(r,\nu)}{s-r}}{t-s} =$$

$$\frac{(s-r)Q_f^{p-2}(t,\nu)-(s-r)Q_f^{p-2}(r,\nu)-(t-r)Q_f^{p-2}(s,\nu)+(t-r)Q_f^{p-2}(r,\nu)}{(t-r)(t-s)(s-r)} =$$

$$\frac{(s-r)Q_f^{p-2}(t,\nu) - (t-r)Q_f^{p-2}(s,\nu) + (t-s)Q_f^{p-2}(r,\nu)}{(t-r)(t-s)(s-r)} =$$

$$\frac{Q_f^{p-1}(t,\mu(s,\nu)) - Q_f^{p-1}(r,\mu(s,\nu))}{t-r} .$$

Portanto (c) segue de (b) e do fato que

$$\lambda(s,\mu(r,\nu)) = \lambda(r,\mu(s,\nu)).$$

A função

$$(s,\mu_1,\ldots,\mu_{p-1}) \longmapsto (s,\lambda_1^p(s,\mu),\ldots,\lambda_{p-1}^p(s,\mu)) =$$

$$(s,\mu_1-s,\mu_2-\mu_1 s,\ldots,\mu_{p-1}-\mu_{p-2}s)$$

do $R \times R^{p-1}$ no R^p é uma função polinomial inversível. Denote por η sua inversa.

Para cada $j = 1,\ldots,p$ definimos a função

$$h_{jf} \in E(X) \quad \text{por} \quad h_{jf} = R_{jf} \circ \eta \circ \phi.$$

Mostremos que cada $h_{jf} \in E_\pi(X)$.

Considere dois pontos $(s,\lambda),(r,\lambda)$ em $X, s \neq r$. Então existe $\nu \in R^{p-2}$ tal que

$$P^p(t,\lambda) = (t-s)(t-r)P^{p-2}(t,\nu) \qquad \text{onde}$$

$$\lambda = \lambda(s,\mu(r,\nu)) = \lambda(r,\mu(s,\nu)).$$

Então

$$\eta \circ \phi(s,\lambda) = (s,\mu(r,\nu))$$

$$\eta \circ \phi(r,\lambda) = (r,\mu(s,\nu))$$

e temos

$$h_{jf}(s,\lambda) = R_{jf}(s,\mu(r,\nu)) = R_{jf}(r,\mu(s,\nu)) =$$

$$= h_{jf}(r,\lambda)$$

o que mostra que $h_{jf} \in E_\pi(X)$. Portanto podemos tomar

$$R^p_{jf} = J(h_{jf}) \ ; \ j = 1,\ldots,p$$

onde $J: E_\pi(X) \to E(R^p)$ é a função dada no teorema 3.2.4.

Para cada $j = 1,\ldots,p$, a função $f \longmapsto R^p_{jf}$ de $E(R)$ em $E(R^p)$ é contínua e linear (3.2.4).

Mostremos finalmente que $f(t) - \sum_{j=1}^{p} R^p_{jf}(\lambda)t^{p-j}$ é divisível por $P^p(t,\lambda)$.

Se $P^p(t,\lambda) = 0$, então $\lambda = \lambda(t,\mu)$ para algum $\mu \in R^{p-1}$, assim

$$R^p_{jf}(\lambda) = (Jh_{jf})\ (\lambda(t,\mu)) = h_{jf}(t,\lambda(t,\mu)) =$$

$$= R_{jf}(t,\mu)\ ,$$

(a última igualdade segue do fato que $(t,\lambda(t,\mu)) \in X$).

Então

$$f(t) - \sum_{j=1}^{p} R^p_{jf}(\lambda)t^{p-j} =$$

$$= f(t) - \sum_{j=1}^{p} R_{jf}(t,\mu)t^{p-j} = 0 \text{ por (b)}\ .$$

Em outras palavras, $f(t) - \sum_{j=1}^{p} R^p_{jf}(\lambda)t^{p-j}$ se anula no conjunto de zeros de $P^p(t,\lambda)$. Então esta função é divisível por $P^p(t,\lambda)$, pelo lema de Hadamard.

Temos agora

$$f(t) = P^p(t,\lambda)Q^p_f(t,\lambda) + \sum_{j=1}^{p} R^p_{jf}(\lambda)t^{p-j}$$

onde

$$Q^p_f(t,\lambda) = \frac{f(t) - \sum_{j=1}^{p} R^p_{jf}\ (\lambda)t^{p-j}}{P^t(t,\lambda)}\ .$$

Claramente temos que a função $f \longmapsto Q_f^p$ de $E(R)$ em $E(R^{p+1})$ é contínua e linear. Ainda, se $\lambda = \lambda(s,\mu)$, obtém se de (b)

$$Q_f^p(t,\lambda(s,\mu)) = \frac{Q_f^{p-1}(t,\mu) - Q_f^{p-1}(s,\mu)}{t - s} \quad .$$

Isto completa a prova do Teorema 3.2.3 supondo o resultado de 3.2.4.

Prova de 3.2.4

Seja $h \in E_\pi(X)$.

Definimos uma função $H = H^o$ em $\pi(X)$ por

$$H(\lambda) = h(t,\lambda)$$

onde $\lambda \in \pi(X)$ e t é um número real tal que $(t,\lambda) \in X$.

Como $\pi/X\colon X \to R^p$ é própria, então $h \longmapsto H$ define um isomorfismo linear contínuo do espaço $E_\pi^o(X)$ das funções contínuas em X que são constantes nas fibras de π, para o espaço $E^o(\pi(X))$ das funções contínuas nos suconjuntos fechados $\pi(X)$ do R^p. Esta é uma consequência do seguinte lema elementar.

3.2.4.1 - Lema

Seja f uma função contínua do conjunto compacto K sobre o compacto L. Uma função g de L num espaço topológico é contínua $\Longleftrightarrow$ $g \circ f$ é contínua.

Voltando à prova de 3.2.4, observe que se p é ímpar, então $\pi(X) = R^p$ pois para cada $\lambda \in R^p$, o polinômio $P(t,\lambda) = P^p(t,\lambda)$ tem pelo menos uma raíz real. Se p é par, por outro lado, então $\pi(X) \subsetneq R^p$. Neste caso, $R^p - \pi(X)$ é convexo pois P é linear em λ, e $\lambda \in R^p - \pi(X) \Longleftrightarrow P(t,\lambda) > 0$, para todo $t \in R$.

Note também que π/X é um difeomorfismo em alguma vizinhança de qualquer ponto $(t,x) \in X$ tal que $\frac{\partial P}{\partial t}(t,\lambda) \neq 0$. Sejam

$$U = \left\{(t,\lambda) \in X: \frac{\partial P}{\partial t}(t,\lambda) \neq 0\right\}$$

$$V = \pi(U) = \left\{\lambda \in R^p: P(t,\lambda) = 0 \text{ e } \frac{\partial P}{\partial t}(t,\lambda) \neq 0 \text{ para algum } t \in R\right\}$$

Então U e V são abertos em X e R^p, respectivamente e são densos em X e $\pi(X)$, respectivamente. Ainda, π/X é um difeomorfismo numa vizinhança de cada ponto de U. Então $H/V \in E(V)$.

Provemos as seguintes afirmações por indução sobre p.

(a) A função H é C^∞ no interior de $\pi(X)$, e todas as suas derivadas parciais estendidas continuamente para a fronteira.

(b) A função $h \longmapsto H$ de $E_\pi(X)$ em $E(\pi(X))$ é contínua e linear.

No caso de p ímpar, podemos definir $J(h) = H$, e a prova do nosso teorema está completa (visto que $\pi(X) = R^p$, neste caso).

Se p é par, podemos definir $J(h)$ estendendo H para uma função C^∞ no R^p, usando o teorema 3.1.7 da extensão de Stein.

Para provar as afirmações (a) e (b), é suficiente verificar as seguintes afirmações que serão provadas por indução sobre a ordem $m = |k|$ do multiíndice $k = (k_1,\ldots,k_p)$.

(1) Seja $|k| = m$. Então $\frac{\partial^k H}{\partial\lambda^k}$ (definida em V) se estende unicamente para uma função contínua H^k em $\pi(X)$. Ainda, $H^k \circ \pi \in E(X)$ e a função $h \longmapsto H^k \circ \pi$ de $E_\pi(X)$ nele mesmo é contínua e linear.

(2) Seja $|\ell| = m - 1$, e (j) denota o multi índice cuja j-ésima componente é 1 e todas as outras componentes são nulas. Então H^ℓ é continuamente diferenciável em int $\pi(X)$, e $\frac{\partial H^\ell}{\partial\lambda_j} = H^{\ell+(j)}$.

De fato será suficiente provar estas afirmações para $m = 1$ (podemos então repetir o argumento com cada $H^{(j)} \circ \pi$ no lugar de h, para obter as afirmações para $m = 2$, e assim por diante). Em outras palavras, devemos provar as seguintes afirmações.

(1') Cada derivada parcial $\frac{\partial H}{\partial\lambda_j}$, definida em V, se estende unicamente para uma função contínua $H^{(j)}$ em $\pi(X)$. Ainda, $H^{(j)} \circ \pi \in E(X)$ e a função $h \longmapsto H^{(j)} \circ \pi$ de $E_\pi(X)$ nele mesmo é contínua e linear.

(2') A função H é continuamente diferenciável no

$$\text{int }(\pi(X)) \text{ e } \frac{\partial H}{\partial \lambda_j} = H^{(j)}.$$

Para provar (1'), recorde que a projeção

$$(t,\lambda) \longmapsto (t,\tilde{\lambda}) = (t,\lambda_1,\ldots,\lambda_{p-1})$$

de R^{1+p} em $R \times R^{p-1}$ reduz-se ao sistema de coordenadas global $\phi : X \longrightarrow R^p$ sobre X. Compondo cada lado da equação $H \circ \pi/X =$ $= h$ com ϕ^{-1}, temos

$$H[\lambda_1,\ldots,\lambda_{p-1}, - t^p - \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i t^{p-i}] =$$

$$= (h \circ \phi^{-1})\ (t,\lambda_1,\ldots,\lambda_{p-1}).$$

Se $(\lambda_1,\ldots,\lambda_{p-1},\lambda_p) = (\lambda_1,\ldots,\lambda_{p-1}, - t^p - \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i t^{p-i}) \in V$, então

$$\left[\frac{\partial (h \circ \phi^{-1})}{\partial t}(t,\tilde{\lambda}), \frac{\partial (h \circ \phi^{-1})}{\partial \lambda_1}(t,\tilde{\lambda}),\ldots, \frac{\partial (h \circ \phi^{-1})}{\partial \lambda_{p-1}}(t,\tilde{\lambda})\right] =$$

$$= \left[\frac{\partial H}{\partial \lambda_1}(\lambda),\ldots,\frac{\partial H}{\partial \lambda_p}(\lambda)\right] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -\frac{\partial P}{\partial t}(t,\tilde{\lambda}) & -t^{p-1} & -t^{p-2} & \ldots & -t \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\frac{\partial P}{\partial t}(t,\tilde{\lambda}) \frac{\partial H}{\partial \lambda_p}(\lambda) \; , \; \frac{\partial H}{\partial \lambda_1}(\lambda) - t^{p-1} \frac{\partial H}{\partial \lambda_p}(\lambda), \ldots \right].$$

Para provar (1'), é claramente suficiente mostrar que $\frac{\partial (h \circ \phi^{-1})}{\partial t}$ é divisível por

$$\frac{\partial P}{\partial t}(t,\tilde{\lambda}) = pt^{-1} + \sum_{i=1}^{p-1} (p - i)\lambda_i \, t^{p-i-1}$$

(divisão é uma operação linear contínua). Pelo lema de Hadamard, é suficiente mostrar que $\frac{\partial (h \circ \phi^{-1})}{\partial t}$ se anula quando $\frac{\partial P}{\partial t}$ se anula.

Suponha $\frac{\partial P}{\partial t}(t,\tilde{\lambda}) = 0$. Então $P(t,\lambda) = 0$, onde $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_{p-1}, - t^p - \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i \, t^{p-i})$, de modo que t é uma raiz real de $P(.,\lambda) = 0$ de multiplicidade pelo menos 2. Então existem sequências $\{\lambda^k\}$ em R^p e $\{r^k\}$ $\{s^k\}$ em R, tais que $\lim_{\lambda} \lambda^k = \lambda$, $\lim_k r^k = t = \lim_k s^k$, e (r^k,λ^k), $(s^k,\lambda^k) \in X$ para todo k.

Como h é constante nas fibras de π, então

$$\frac{\partial (h \circ \phi^{-1})}{\partial t}(t,\lambda_1,\ldots,\lambda_{p-1}) =$$

$$= \lim_{k \to \infty} \frac{(h \circ \phi^{-1})(s^k,\tilde{\lambda}^k) - (h \circ \phi^{-1})(r^k,\tilde{\lambda}^k)}{s^k - r^k} = 0$$

como queríamos.

Falta provar (2').

Seja $\qquad \Gamma = \{\lambda \in \pi(X): P(t,\lambda) = (t - a)^p$ para algum $a \in R\}$.

Provemos inicialmente que H é continuamente diferenciável em todos os pontos do int $\pi(X) - \Gamma$. Isto completará a prova da afirmação (2') no caso em que p é par, pois Γ então cai na fronteira de $\pi(X)$ (e portanto, int $\pi(X) - \Gamma =$ = int $\pi(X)$ neste caso).

Considere $(t^o,\lambda^o) \in R \times R^p$ tal que t^o é uma raiz real de $P(t,\lambda^o)$ de multiplicidade $k < p$. Então

$$P(t,\lambda^o) = (t - t^o)^k \, P^{p-k}(t,\eta^o) \quad \text{para} \quad \text{algum}$$

$\eta^o \in R^{p-k}$ e $P^{p-k}(t^o,\eta^o) \neq 0$.

Definimos a função $\lambda\colon R^k \times R^{p-k} \longrightarrow R^p$ pela seguinte identidade polinomial

$$P^p(t,\lambda(\zeta,\eta)) = P^k(t,\zeta) \; P^{p-k}(t,\eta) \quad ,$$

onde $(\zeta,\eta) \in R^k \times R^{p-k}$. Então λ é um difeomorfismo local em todos os pontos (ζ,η) onde a resultante de $P^k(t,\eta)$ e $P^{p-k}(t,\eta)$ (como polinômio em t) é não nula, porque sua resultante é o determinante Jacobiano $\dfrac{D\lambda}{D(\zeta,\eta)}(\zeta,\eta)$. (Recorde que a resultante de dois polinômios é não nula $\Longleftrightarrow$ os polinômios não tem fator comum).

Defina $\zeta^o \in R^k$ por $P^k(t,\zeta^o) = (t - t^o)^k$. Então $\lambda^o = \lambda(\zeta^o,\eta^o)$, e as funções $\lambda(\zeta,\eta)$, $(t,\lambda(\zeta,\eta))$ são difeomorfismos em alguma vizinhança dos pontos $(\zeta^o,\eta^o),(t^o,\zeta^o,\eta^o)$ respectivamente.

Como $P^{p-k}(t^o,\eta^o) \neq 0$ então $P^{p-k}(t,\eta) \neq 0$ numa vizinhança de (t^o,η^o). Então se

$$P^p(t,\lambda(\zeta,\eta)) = P^k(t,\zeta)\, P^{p-k}(t,\eta) = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow P^k(t,\zeta) = 0 .$$

Então a função $(t,\zeta,\eta) \longrightarrow (t,\lambda(\zeta,\eta))$ induz um diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} X^k \times R^{p-k} & \longrightarrow & X^p \\ {\scriptstyle \pi^k x id}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi^p} \\ R^k \times R^{p-k} & \xrightarrow{\lambda} & R^p \end{array}$$

onde as flexas superior e inferior são difeomorfismos em alguma vizinhança dos pontos (t^o,ζ^o,η^o) e (ζ^o,η^o), respectivamente.

Pela hipótese de indução sobre p, segue que H é continuidade diferenciável em int $\pi(X) - \Gamma$.

No caso em que p é ímpar, ainda precisamos mostrar que H é diferenciável em todos os pontos de Γ, e $\frac{\partial H}{\partial \lambda_j} = H^{(j)}$, $j = 1,\ldots,p$. Em outras palavras, precisamos mostrar que para cada $\lambda^o \in \Gamma$

$$H(\lambda) - H(\lambda^o) = \sum_{j=1}^{p} H^{(j)}(\lambda)(\lambda_j - \lambda_j^o) +$$

$$+\, O(|\lambda - \lambda^o|) \text{ quando } \lambda \to \lambda^o.$$

Recorde que

$$\Gamma = \{\lambda \in \pi(X): P(t,\lambda) = (t - a)^p \text{ para algum } a \in R\},$$

isto é, Γ é a curva parametrizada definida por

$$\lambda_i = (-1)^i \binom{p}{i} a^i,\ i = 1,\dots,p. \text{ Segue que } \lambda,$$

λ^o podem ser ligados por um segmento de reta quebrado que, exceto para λ e λ^o, está em $R^p - \Gamma$, e tem comprimento no máximo $c|\lambda - \lambda^o|$, para alguma constante c. De fato existe $\mu \in R^p - \Gamma$ tal que os segmentos unindo λ^o a μ e μ a λ tem a propriedade exigida.

Como H é continuamente diferenciável e $\frac{\partial H}{\partial \lambda_j} = H^{(j)}$ em $R^p - \Gamma (= \pi(X) - \Gamma)$ então

$$H(\lambda) - H(\mu) = \sum_{j=1}^{p} H^{(j)}(\lambda)(\lambda_j - \mu_j) + \mathcal{O}(|\lambda-\mu|) \quad ,$$

$$H(\mu) - H(\lambda^o) = \sum_{j=1}^{p} H^{(j)}(\mu)\ (\mu_j - \lambda_j^o) + \mathcal{O}(|\mu-\lambda^o|).$$

Somando-se estas duas equações e usando o fato que $H^{(j)}(\lambda) - H^{(j)}(\mu) = \mathcal{O}(1)$ quando $|\lambda-\lambda^o| \to 0$ obtém-se o resultado desejado.

Isto completa a prova do Teorema 3.2.4.

CAPÍTULO II

O LEMA DE NAKAYAMA E CONSEQUÊNCIAS

II.1 Preliminares Algébricos

Neste parágrafo vamos recordar alguns conceitos e resultados de álgebra sobre anéis, ideais e módulos, estabelecer algumas notações necessárias na sequência , assim como fazer uma pequena motivação sobre o Teorema de Preparação de Malgrange Generalizado, que é o objeto de estudo do capítulo seguinte.

II.1.1. Proposição

Seja R um anel comutativo com unidade e I um ideal de R. Então

$$I \text{ é maximal} \iff \frac{R}{I} \text{ é um corpo.}$$

II.1.2. Definição

Seja R um anel comutativo com unidade. Dizemos que R é um anel local quando R possui um único ideal maximal.

II.1.3. Proposição |5|

Seja I um ideal próprio num anel comutativo com unidade. Então I não contém nenhum elemento inversível.

II.1.4. <u>Proposição</u> |5|

Seja R um anel comutativo com unidade. Então todo ideal próprio de R está contido num ideal maximal.

II.1.5. <u>Proposição</u> |5|

Seja R um anel comutativo com unidade. Um elemento $z \in R$ é inversível <=> z não pertence a nenhum ideal maximal de R.

II.1.6. <u>Definição</u> |5|

Seja R um anel comutativo com unidade. O radical de Jacobson do anel R é a interseção de todos os ideais maximais de R e é denotado por rad R.

II.1.7. <u>Proposição</u> |5|

Seja R um anel comutativo com unidade e I um seu ideal. Então

$$I \subset \text{rad } R \iff \forall z \in I,\ 1+z \text{ é inversível em } R.$$

<u>Prova</u>

(=>) Seja $I \subset$ rad R e suponha que exista $z \in I$ tal que $1+z$ é não inversível. Por (II.1.5), $1+z$ pertence a algum ideal maximal M do anel R. Como $z \in$ rad R, $z \in M$ e portanto, $1 = 1+z+(-z) \in M$. Mas, isto significa que $M = R$, o que é impossível. Portanto, $\forall z \in I$, $1+z$ é inversível em R.

(<=) Suponha que $\forall z \in I$, $1+z$ é inversível em R e que $I \not\subset$ rad R. Pela definição de radical, existe um ideal maximal M de R tal que $I \not\subset M$. Seja $a \in I$ e $a \notin M$. Como M é maximal vem que $(M,a) = R$. Assim o elemento unidade $1 \in R$ pode ser escrito na forma $1 = m + ra$ com $m \in M$ e $r \in R$ escolhidos convenientemente. Então $m = 1 - ra \in 1 + I$ é inversível em R (pela hipótese), o que é absurdo pois nenhum ideal próprio contém elementos inversíveis.

II.1.8. <u>Proposição</u> |5|

Num anel R um elemento $a \in \text{rad } R \iff 1 + ra$ tem inverso em R, $\forall r \in R$.

<u>Prova</u> Imediata a partir de II.1.7.

II.1.9. <u>Proposição</u>

Seja N o conjunto dos elementos não inversíveis do anel R comutativo com unidade. Então

N é um ideal em $R \iff N = \text{rad } R$.

<u>Prova</u>

($\Rightarrow$)(i) Mostremos que $\text{rad } R \subset N$. Seja $z \in \text{rad } R$.

Então z pertence a todos os ideais maximais de R. Então z é não inversível (por II.1.5) e portanto, $z \in N$.

(ii) Mostremos que $N \subset \text{rad } R$. Seja N ideal de R e $z \in N$. Então, $\forall r \in R$, $rz \in N$. Ainda, $1 + rz \notin N$ pois se $1 + rz \in N$ então $1 = 1 + rz + (-rz) \in N$, o que contraria a definição de N. Logo $1 + rz \notin N$, isto é $1 + rz$ é inversível em R, $\forall r \in R$. Portanto, por II.1.8, $z \in \text{rad } R$.

($\Leftarrow$) Trivial, pois o $\text{rad } R$ é sempre um ideal de R.

CAPÍTULO II

O LEMA DE NAKAYAMA E CONSEQUÊNCIAS

II.1 Preliminares Algébricos

Neste parágrafo vamos recordar alguns conceitos e resultados de álgebra sobre anéis, ideais e módulos, estabelecer algumas notações necessárias na sequência , assim como fazer uma pequena motivação sobre o Teorema de Preparação de Malgrange Generalizado, que é o objeto de estudo do capítulo seguinte.

II.1.1. Proposição

Seja R um anel comutativo com unidade e I um ideal de R. Então

$$I \text{ é maximal} \iff \frac{R}{I} \text{ é um corpo.}$$

II.1.2. Definição

Seja R um anel comutativo com unidade. Dizemos que R é um anel local quando R possui um único ideal maximal.

II.1.3. Proposição |5|

Seja I um ideal próprio num anel comutativo com unidade. Então I não contém nenhum elemento inversível.

Seja

$$\mathfrak{M} = \{\tilde{f} \in C^{\infty}_{x_o}(R^n) : f(x_o) = o\}$$

(a) $\mathfrak{M}$ é um <u>ideal</u> de $C^{\infty}_{x_o}(R^n)$:

(a.1) $\mathfrak{M}$ é um subgrupo aditivo de $C^{\infty}_{x_o}(R^n)$

Sejam $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ dois germes em $\mathfrak{M}$. Mostremos que $\tilde{h} = \tilde{f} - \tilde{g} \in \mathfrak{M}$. Um representante de $\tilde{h}$ é a função $h = f - g$ onde f e g são representantes dos germes $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$, respectivamente. Então $h(x_o) = (f - g)(x_o) = f(x_o) - g(x_o) = o - o = o$. Logo , $\tilde{h} \in \mathfrak{M}$.

(a.2) Se $\tilde{f} \in \mathfrak{M}$ e $\tilde{g} \in C^{\infty}_{x_o}(R^n)$ então $\tilde{g} . \tilde{f} \in \mathfrak{M}$: se f e g representam $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ respectivamente, então $(g\ f)(x_o) = g(x_o)\ f(x_o) = g(x_o) . o = o$. Logo $\tilde{g}\ \tilde{f} \in \mathfrak{M}$ pois $g\ f$ é um representante de $\tilde{g}\ \tilde{f}$ e $(g\ f)(x_o) = o$.

(b) $\mathfrak{M}$ é um ideal <u>maximal</u> de $C^{\infty}_{x_o}(R^n)$:

Seja $\mathfrak{a}$ um ideal de $C^{\infty}_{x_o}(R^n)$ tal que $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{a} \subset C^{\infty}_{x_o}(R^n)$ e $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{M}$. Então existe $\tilde{f} \in \mathfrak{a}$ tal que $\tilde{f} \notin \mathfrak{M}$. Sendo f um representante de $\tilde{f}$ sabemos então que $f(x_o) \neq o$. Pelo teorema da conservação do sinal existe um aberto U contendo x_o tal que f não se anula em U . Portanto, a função $g = \frac{1}{f}$ está definida em U e é C^{∞}. Então , como $\tilde{g} \in C^{\infty}_{x_o}(R^n)$ e $\tilde{f} \in \mathfrak{a}$ tem-se que $\tilde{g} . \tilde{f} \in \mathfrak{a}$. Mas, $\tilde{g} . \tilde{f} = \tilde{1}$. Logo, $\tilde{1} \in \mathfrak{a}$ e $\mathfrak{a} = C^{\infty}_{x_o}(R^n)$. Assim, $\mathfrak{M}$ é ideal maximal.

(c) $\mathfrak{M}$ é o único ideal maximal de $C^{\infty}_{x_o}(R^n)$:

Esta unicidade está provada em (b) pois se $\mathfrak{a}$ é um ideal maximal de $C^{\infty}_{x_o}(R^n)$, diferente de $\mathfrak{M}$ então existe $\tilde{f} \in \mathfrak{a}$ tal que $\tilde{f} \notin \mathfrak{M}$, isto é, tal que $f(x_o) \neq o$ onde f é um representante de $\tilde{f}$. Portanto, $\frac{1}{\tilde{f}} \in C^{\infty}_{x_o}(R^n)$ e $\tilde{1} = \frac{1}{\tilde{f}} \cdot \tilde{f} \in \mathfrak{a}$, isto é, $\mathfrak{a} = C^{\infty}_{x_o}(R^n)$ o que é absurdo.

Conclui-se então que $C^{\infty}_{x_o}(R^n)$ é um anel local e o seu ideal maximal, representado por $\mathfrak{m}$, é o conjunto dos germes com meta zero. Então podemos concluir também que todo ideal próprio I de $C^{\infty}_{x_o}(R^n)$ tem a propriedade : $\forall\ z \in I$, o elemento $1 + z$ é inversível em $C^{\infty}_{x_o}(R^n)$. De fato, como todo ideal próprio está contido num ideal maximal (II.1.4), vem que $I \subset \mathfrak{m}$ (visto que $\mathfrak{m}$ é o único ideal maximal neste anel). Logo $z \in \mathfrak{m}$ e portanto, por II.1.10, vem que $1 + z$ é inversível.

(d) Sendo $C^{\infty}_{x_o}(R^n)$ um anel comutativo com unidade e $\mathfrak{m}$ um ideal maximal conclui-se por (II.1.1) que o quociente $\dfrac{C^{\infty}_{x_o}(R^n)}{\mathfrak{m}}$ é um corpo.

Mostremos que este corpo é isomorfo ao corpo dos números reais. Para isto seja,

$\theta : C^{\infty}_{x_o}(R^n) \longrightarrow R$ a função definida por

$\theta(\tilde{f})$ = meta de $\tilde{f}$, isto é, se $f \in \tilde{f}$ então $\theta(\tilde{f}) = f(x_o)$. Mostremos que

(d.1) θ é homomorfismo de anéis

$$\theta(\tilde{f} + \tilde{g}) = (f + g)(x_o) = f(x_o) + g(x_o) = \theta(\tilde{f}) + \theta(\tilde{g})$$

$$\theta(\tilde{f} \cdot \tilde{g}) = (f \cdot g)(x_o) = f(x_o) \cdot g(x_o) = \theta(\tilde{f}) + \theta(\tilde{g})$$

onde $f \in \tilde{f}$, $g \in \tilde{g}$ e sabendo-se que

$$f + g \in \tilde{f} + \tilde{g} \quad \text{e} \quad f \cdot g \in \tilde{f} \cdot \tilde{g}.$$

(d.2) θ é sobrejetiva : é óbvio pois sempre existe uma função diferenciável que num dado ponto, assume determinado valor. Basta somar a função constante.

(d.3) Ker $\theta = \mathfrak{m}$ visto que, $\mathfrak{m}$ é o conjunto dos germes com meta zero.

Assim, pelo teorema do homomorfismo de anéis, vem que $\dfrac{C^{\infty}_{x_o}(R^n)}{\mathfrak{m}} \approx R$.

Quando $x_o = o$ ainda podemos afirmar o seguinte sobre o ideal maximal $\mathfrak{m}$:

(e) Se $x_1, \ldots, x_n$ são funções coordenadas, então $\mathfrak{m}$ é gerado pelos germes $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n$.

Seja $\tilde{f} \in \mathfrak{m}$. Então $f(o) = o$, onde f é um representante de $\tilde{f}$. Então

$$f(x_1,\ldots, x_n) = \int_0^1 \frac{df(tx_1,\ldots, tx_n)}{dt}\, dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1,\ldots tx_n)x_i dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1,\ldots,tx_n)\, dt = \sum_{i=1}^{n} x_i g_i(x_1,\ldots x_n)$$

onde $g_i(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\, dt$ é diferenciável. Logo $\tilde{f} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i \tilde{g}_i$

II.1.12. <u>Definição</u>

Seja $\mathcal{R}$ um anel comutativo com unidade.

Um <u>módulo</u> M sobre $\mathcal{R}$ (ou um $\mathcal{R}$ - módulo) é um grupo comutativo M, cuja operação denotaremos por +, munido de uma lei de composição externa

$$\mathcal{R} \times M \longrightarrow M$$

$$(a, x) \longrightarrow ax$$

tal que, quaisquer que sejam a, a_1, $a_2 \in R$ e x, x_1, $x_2 \in M$ valem

$$(a_1 + a_2)\, x = a_1 x + a_2 x$$

$$(a_1\, a_2)\, x = a_1\, (a_2 x)$$

$$a(x_1 + x_2) = ax_1 + ax_2$$

$$1\, x = x$$

Um <u>submódulo</u> S do $\mathcal{R}$ - módulo M é um subgrupo de M tal que $\mathcal{R} . S \subset S$.

II.1.13. <u>Definição e Propriedade</u>

Seja M um $\mathcal{R}$ - módulo e $I \subset \mathcal{R}$ um ideal de $\mathcal{R}$.

O conjunto IM, definido por

$$IM = \{m \in M : m = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i m_i,\ \alpha_i \in I,\ m_i \in M,\ \forall r\}$$

é um submódulo de M. Logo, podemos pensar no quociente $\frac{M}{IM}$. Sua estrutura de $\mathcal{R}$ - módulo se identifica então a uma estrutura de módulo sobre o anel quociente $\frac{\mathcal{R}}{I}$ (Com efeito, tem-se $\alpha m = o$ para todo $m \in \frac{M}{IM}$, desde que $\alpha \in I$).

Por exemplo, se M é um módulo sobre o anel $C^\infty_{x_o}(R^n)$ e $I = \mathfrak{m}$ o ideal maximal de $C^\infty_{x_o}(R^n)$, então a estrutura de $C^\infty_{x_o}(R^n)$ - módulo do quociente $\frac{M}{\mathfrak{m}M}$ se identifica a uma estrutura de espaço vetorial real

(visto que $\dfrac{C^\infty_{x_o}(R^n)}{\mathfrak{m}} \simeq \mathbb{R}$)

II.1.14. Definição

Dizemos que um R - módulo M é <u>finitamente gerado</u> quando existe um subconjunto finito $\{m_1, \ldots, m_r\}$ de elementos de M tal que para todo $m \in M$ existem $a_1, \ldots a_r \in R$ tais que $m = a_1m_1 + \ldots + a_rm_r$.

Observe que, neste caso, se I é um ideal de R então

$$IM = \{m \in M : m = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i m_i,\ \alpha_i \in I\}$$

II.1.15. Observações

O submódulo gerado por $x_1, \ldots, x_r$ é denotado por $< x_1, \ldots, x_r >_R$ e tem como elementos todas as combinações lineares dos x_i, $i = 1, \ldots, r$ com coeficientes em R.

Ao contrário do que ocorre na teoria dos espaços vetoriais (isto é, módulos sobre um corpo), a expressão de um elemento m em termos de "geradores" $m_1, \ldots, m_r$ em geral, não é única, mesmo que o conjunto $\{m_1, \ldots m_r\}$ seja minimal.

II.1.16. Definição

Sejam M e N dois R - módulos. Uma aplicação $\alpha : M \longrightarrow N$ é um homomorfismo de R - módulos quando para todo a, b $\in$ M e todo r $\in$ R

$$\alpha(a + b) = \alpha(a) + \alpha(b)$$
$$\alpha(ra) = r\alpha(a) \quad .$$

É claro que se α é homomorfismo dos R - módulos M e N então $\alpha(M)$ é um submódulo de N.

II.1.17. Proposição

Se M_1 e M_2 são submódulos do R - módulo M então

$$\frac{M_1}{M_1 \cap M_2} \simeq \frac{M_1 + M_2}{M_2}$$

II.1.18. Definição

Seja $\Psi : R \longrightarrow S$ um homomorfismo de anéis.

(a) Seja M um R - módulo e N um S - módulo. Uma aplicação $\alpha : M \longrightarrow N$ é dita um homomorfismo sobre Ψ se $\alpha(a + b) = \alpha(a) + \alpha(b)$ e $\alpha(ra) = \Psi(r)\alpha(a)$, para todo r $\in$ R e todo a, b $\in$ M.

(b) Um homomorfismo misto sobre Ψ é uma quíntupla (α, β, M, N, P) onde

M é um R - módulo

N e P são S - módulos

$\alpha : M \longrightarrow P$ é um homomorfismo sobre Ψ

$\beta : N \longrightarrow P$ é um homomorfismo de S - módulos

(c) Um <u>homomorfismo misto</u> é dito do <u>tipo finito</u> se M é finitamente gerado como R - módulo e P é finitamente gerado como S - módulo.

II.1.19. Seja M um R - módulo e $\Psi : S \longrightarrow R$ um homomorfismo de anéis.

Nesta situação, usando a estrutura induzida por Ψ, podemos considerar M também como um S - módulo. Isto é, definir a lei de composição externa $S \times M \longrightarrow M$ por $(s,m) \longrightarrow \Psi(s)m$.

Em particular, se $f : (R^n, o) \longrightarrow (R^p, o)$ é um germe com fonte e meta zero, de função diferenciável, existe um homomorfismo de anéis

$$f^* : C_o^\infty (R^p) \longrightarrow C_o^\infty (R^n)$$

dado por

$$\alpha \longmapsto f^*(\alpha) = \alpha o f, \ \forall\, \alpha \in C_o^\infty (R^p).$$

Podemos então considerar todo $C_o^\infty (R^n)$ - módulo como $C_o^\infty(R^p)$ - módulo via f^*. Observe que a passagem da estrutura de $C_o^\infty (R^n)$ - módulo de M à de $C_o^\infty (R^p)$ - módulo é uma "restrição dos escalares" : isto significa que não se considera mais, em $C_o^\infty(R^n)$, que o subanel $f^*(C_o^\infty (R^p))$. A estrutura de $C_o^\infty (R^p)$ - módulo é então, em geral, mais fina que a de $C_o^\infty (R^n)$ - módulo.

A formulação algébrica, do Teorema de Preparação , que estudaremos no capítulo seguinte, estabelece uma condição suficiente para que um $C_o^\infty (R^n)$ - módulo finitamente gera do seja também finitamente gerado como $C_o^\infty(R^p)$ - módulo via f^*. Veja os três exemplos que seguem.

II.1.20. <u>Exemplo A</u> |27|

Seja o germe $f:(R^n, o) \longrightarrow (R^p, o)$ onde $n \leq p$, com posto máximo.

Seja $M = C_o^\infty(R^n)$, o qual é obviamente um $C_o^\infty(R^n)$ - módulo finitamente gerado. Afirmo que M é um $C_o^\infty(R^p)$ - módulo finitamente gerado via o homomorfismo de anéis

$$f^* : C_o^\infty(R^p) \longrightarrow C_o^\infty(R^n)$$

De fato, como f tem posto máximo e $n \leq p$ existe um difeomorfismo $h : V_o \longrightarrow U_o \times W$ de uma vizinhança $V \subset R^p$ de $o = f(o)$ sobre um aberto $U_o \times W \subset R^n \times R^{p-n}$, ($(o,o) \in U \times W$, $f(U_o) \subset V_o$) tal que $(h \circ f)(x) = (x, o)$, para cada $x \in U_o$.

Seja $g \in C_o^\infty(R^n)$. Como

$$g(x) = g(\pi_1(x,o)) = (g \circ \pi_1 \circ h \circ f)(x) = (g \circ \pi_1 \circ h)(f(x)) =$$
$$= \mu(f(x)) = f^*(\mu)(x) = f^*(\mu)(x) \,.\, 1$$

onde $\pi_1 : R^n \times R^{p-n} \longrightarrow R^n$

$(x, y) \longrightarrow x$, é a projeção canônica,

$\mu = g \circ \pi_1 \circ h \in C_o^\infty(R^p)$ e é claro que a função constante $1(x) = 1$, $\forall\, x \in R^n$ é um elemento de $C_o^\infty(R^n)$.

Assim, M é um $C_o^\infty(R^p)$ - módulo finitamente gerado (o gerador é a função constante igual a 1) via f^*.

II.1.21. Exemplo B [27]

Seja $f : (R,o) \longrightarrow (R,o)$ germe de função tal que $f^{(k)}(o) = o$ para todo $k = 1,2,\ldots$.

Seja $M = C_o^\infty(R)$, o qual, obviamente, é um $C_o^\infty(R)$-módulo finitamente gerado.

Mostremos que como $C_o^\infty(R)$ - módulo via f^*, M não é finitamente gerado.

De fato, se fosse $M = < a_1, \ldots, a_r >$, dado qualquer $a \in M$, existiriam $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ em $C_o^\infty(R)$ tais que

$$a = \sum_{i=1}^{r} f^*(\alpha_i) a_i = \sum_{i=1}^{r} (\alpha_i \circ f) a_i \quad . \qquad (B_1)$$

Seja a matriz definida por

$$B = \begin{bmatrix} a_1(o) & a_2(o) & \ldots & a_r(o) \\ a_1'(o) & a_2'(o) & \ldots & a_r'(o) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{(r-1)}(o) & a_2^{(r-1)}(o) & \ldots & a_r^{(r-1)}(o) \end{bmatrix}$$

Derivando a igualdade (B_1) obtemos para todo j $j = 1,2, \ldots$

$$a^{(j)}(o) = \sum_{i=1}^{r} (\alpha_i \circ f)(o) a_i^{(j)}(o) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i(o) a_i^{(j)}(o) \quad (B_2)$$

visto que $f^{(k)}(o) = o$, $k = o,1,2, \ldots$.

Assim

$$\begin{bmatrix} a(o) \\ a'(o) \\ \vdots \\ a^{(r-1)}(o) \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} \alpha_1(o) \\ \alpha_2(o) \\ \vdots \\ \alpha_r(o) \end{bmatrix}.$$ Logo B é inversí-vel.

Se $a(t) = t^r$, temos que $a(o) = a'(o) = \ldots = a^{(r-1)}(o) = o$ e $a^{(r)}(o) = r! \neq o$ (B_3).

Portanto, neste caso temos

$$\begin{bmatrix} \alpha_1(o) \\ \alpha_2(o) \\ \vdots \\ \alpha_r(o) \end{bmatrix} = B^{-1} \begin{bmatrix} o \\ o \\ \vdots \\ o \end{bmatrix} = o.$$ De onde vem $\alpha_i(o) = o$, $i = 1,\ldots,r$

e de (B_2) vem que $a^{(r)}(o) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(o)\, a_i^{(j)}(o) = o$. (B_4)

Chegamos então a uma contradição entre (B_3) e (B_4). Logo M não é finitamente gerado como $C_o^\infty(R^n)$ - módulo via f^*.

II.1.22. <u>Exemplo C</u> |27|

Seja $\pi : (R^{n+1}, o) \longrightarrow (R^n, o)$ o germe da projeção canônica $\pi(t, y) = y$, o qual tem posto máximo.

Seja $M = C_o^\infty(R^{n+1})$, o qual, obviamente, é um $C_o^\infty(R^{n+1})$-módulo finitamente gerado.

Mostremos que M não é finitamente gerado como

$C_o^\infty(R^n)$ - módulo via π^*.

De fato, se M fosse finitamente gerado como $C_o^\infty(R^n)$-módulo via π^* existiriam $a_1, \ldots, a_r$ em M tais que, para todo $a \in C_o^\infty(R^{n+1})$ existiriam $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ em $C_o^\infty(R^n)$ tais que

$$a = \sum_{j=1}^{r} \pi^*(\alpha_j)\, a_j, \text{ isto é ,}$$

$$(C_1) \quad a(t,y) = \sum_{j=1}^{r} (\alpha_j \circ \pi)(t, y)\, a_j(t,y) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j(y) a_j(t, y)$$

numa vizinhança de $o = (o, o) \in R^{1+n}$.

Derivando sucessivamente a igualdade (C_1) em t, obteremos

$$(C_2) \quad \frac{\partial^i a}{\partial t^i}(o,o) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j(o) \frac{\partial^i a_j}{\partial t^i}(o, o).$$

$$\text{Se} \quad B = \begin{bmatrix} a_1(o,o) & \cdots & a_r(o,o) \\ \frac{\partial a_1}{\partial t}(o,o) & \cdots & \frac{\partial a_r}{\partial t}(o,o) \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \frac{\partial^{(r-1)} a_1}{\partial t^{r-1}}(o,o) & \cdots & \frac{\partial^{(r-1)} a_r}{\partial t^{r-1}}(o,o) \end{bmatrix}$$

então

$$(C_3) \quad \begin{bmatrix} a(o,o) \\ \frac{\partial a}{\partial t}(o,o) \\ \vdots \\ \frac{\partial^{(r-1)} a}{\partial t^{r-1}}(o,o) \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} \alpha_1(o) \\ \alpha_2(o) \\ \vdots \\ \alpha_r(o) \end{bmatrix},$$

logo B é inversível.

Tomando-se $a(t,y) = t^r$ obteremos

$$a(o,o) = \frac{\partial a}{\partial t}(o,o) = \ldots = \frac{\partial^{(r-1)}a}{\partial t^{r-1}}(o,o) = o \quad e$$

$$\frac{\partial^{(r)}a}{\partial t^r}(o,o) = r! \neq o$$

De (C_3) segue, para este caso, $\alpha_i(o) = (o), i=1,\ldots,r$ e de (C_2), $\frac{\partial^{(r)}a}{\partial t^r}(o,o) = o$, contrariando o fato de que

$$\frac{\partial^{(r)}a}{\partial t^r}(o,o) = r! \neq o.$$

Assim, $C_o^\infty(R^{n+1})$ não é finitamente gerado com $C_o^\infty(R^n)$ - módulo via π^*.

II.2. Lema de Nakayama e suas consequências

Faremos neste parágrafo um estudo sobre um lema de grande importância no capítulo seguinte. Embora este resultado seja conhecido como Lema de Nakayama, afirma Matsumura |21| que este é devido a T. Nakayama, G. Azumaya e W. Krull, sendo a prioridade obscura e que embora ele seja usualmente chamado de Lema de Nakayama, o falecido Prof. Nakayama era contrário ao nome.

II.2.1. Teorema |7|, |15|, |19|

Seja $\mathcal{R}$ um anel comutativo com unidade, $\alpha : A \longrightarrow B$ um homomorfismo de $\mathcal{R}$ - módulos e I um ideal em $\mathcal{R}$ tal que $1+z$ é inversível, $\forall\ z \in I$. Suponha B finitamente gerado e

$\alpha(A) + IB = B$.

Então $\alpha(A) = B$.

Prova

Como $\alpha : A \longrightarrow B$ é homomorfismo de R - módulos sabemos que $\alpha(A)$ é um submódulo de B e portanto podemos definir o R - módulo quociente $\frac{B}{\alpha(A)}$. Seja $C = \frac{B}{\alpha(A)}$ e portanto, C é R - módulo.

Mostremos que $C = \{o\}$.

Pela hipótese $\alpha(A) + IB = B$ e resultados da teoria dos módulos temos

$$C = \frac{B}{\alpha(A)} = \frac{\alpha(A) + IB}{\alpha(A)} = I \frac{B}{\alpha(A)} = IC, \text{ i.é, } C = IC .$$

Como B é finitamente gerado temos que C é também finitamente gerado e seja, portanto, $\{a_1, \ldots, a_n\}$ um conjunto de geradores de C como R - módulo. Como $a_i \in C$ e $C = IC$, existem $z_{ij} \in I$ tais que $a_i = \sum_{j=1}^{n} z_{ij} a_j$, $i = 1, \ldots, n$.

Então $\sum_{j=1}^{n} (\delta_{ij} - z_{ij}) a_j = o$, $i = 1, \ldots, n$.

Como $\det(\delta_{ij} - z_{ij}) = \pm 1 + z$, $z \in I$ segue, da hipótese, que $\det(\delta_{ij} - z_{ij})$ é inversível. Logo a matriz $(\delta_{ij} - z_{ij})$ é inversível e, portanto, o sistema homogêneo

$$\sum_{j=1}^{n} (\delta_{ij} - z_{ij}) a_j = o , \quad i = 1, \ldots, n$$

admite apenas a solução trivial $a_j = o$, $j = 1, \ldots, n$. Logo $C = \langle a_1, \ldots , a_n \rangle_R = \{o\}$. Então pela definição de C tem-se que $\alpha(A) = B$.

II.2.2. <u>Teorema</u> |4|, |9|

Seja $\mathcal{R}$ um anel local e $\mathfrak{m}$ o seu ideal maximal.

Suponha A um $\mathcal{R}$ - módulo finitamente gerado e $\mathfrak{m}A = A$. Então $A = \{o\}$.

Ainda, com as mesmas hipóteses, se B e C são também $\mathcal{R}$ - módulos tais que $A, B \subset C$ e $A \subset B + \mathfrak{m}A$ então $A \subset B$.

<u>Prova</u>

A primeira parte segue de II.2.1 tomando-se $\alpha : A \longrightarrow A$ o homomorfismo identicamente nulo e lembrando que o ideal $\mathfrak{m}$ satisfaz a propriedade : $1 + z$ é inversível , $\forall\ z \in \mathfrak{m}$ (ver II.1.10) exigida em II.2.1.

Para a segunda parte, supondo que $A \subset B + \mathfrak{m}A$ vem que $\dfrac{A}{A \cap B} \subset \dfrac{B + \mathfrak{m}A}{B}$ pois

a) por II.1.17 $\dfrac{A}{A \cap B} \simeq \dfrac{A + B}{B}$ e

b) $\dfrac{A + B}{B} \subset \dfrac{B + \mathfrak{m}A}{B}$

Logo, $\dfrac{A}{A \cap B} \subset \dfrac{B + \mathfrak{m}A}{B}$. Ainda podemos ver que

$\dfrac{B + \mathfrak{m}A}{B} \simeq \mathfrak{m}\dfrac{A}{A \cap B}$. De fato, seja a aplicação $\Psi : \mathfrak{m}A \rightarrow \dfrac{B+\mathfrak{m}A}{B}$ dada por $\Psi(ma) = ma + B$.

É claro que Ψ é um homomorfismo sobrejetor e $\operatorname{Ker} \Psi = A \cap B$. Como $\mathfrak{m}\dfrac{A}{A\ \ B} = \dfrac{\mathfrak{m}A}{A \cap B}$, conclui-se o isomorfismo acima.

Assim, $\frac{A}{A \cap B} \subset \mathfrak{m} \frac{A}{A \cap B}$. Logo, $\frac{A}{A \cap B} = \mathfrak{m} \frac{A}{A \cap B}$ e da primeira parte segue $\frac{A}{A \cap B} = \{o\}$, ou seja $A = A \cap B$ e portanto, $A \subset B$.

II.2.3. <u>Teorema</u> |15| |16|

Seja R um anel local e $\mathfrak{m}$ o seu ideal maximal.

Seja B um R - módulo finitamente gerado e A um submódulo de B tal que $A + \mathfrak{m}B = B$.

Então $B = A$.

<u>Prova</u>

Este resultado segue de II.2.1 tomando-se α = identidade restrita a A e $I = \mathfrak{m}$.

II.2.4. <u>Teorema</u> |16| |28| |30|

Seja R um anel comutativo com unidade e $I \subset R$ ideal de R tal que $1 + z$ é inversível em R, $\forall z \in I$.

Sejam A e B submódulos do R - módulo M com A finitamente gerado. Então

(i) $B + IA \supset A$ => (ii) $B \supset A$

Mais ainda, a igualdade em (i) acarreta a igualdade em (ii).

<u>Prova</u> |30|

Suponha $B \not\supset A$. Sendo A finitamente gerado e $B + A \supset A$ mas $B \not\supset A$, podemos encontrar $a_1, \ldots, a_k$ em A tais que

$B + < a_1, \ldots, a_k >_R \supset A$, mas $B + < a_2, \ldots, a_k >_R \not\supset A$.($\alpha$)

Seja $C = B + < a_2, \ldots, a_k >_R$.

Como $B + IA \supset A$ e $B + < a_2, \ldots, a_k >_R = C$ tem-se

$C + IA \supset A$ (β) e $C + < a_1 >_R \supset A$.(γ)

Assim,

$$A \underset{(\beta)}{\subset} C + IA \underset{(\delta)}{\subset} C + I\,[C + < a_1 >_R] = C + IC + I < a_1 >_R =$$

$$= C + Ia_1 \text{ isto é, } A \subset C + Ia_1.$$

Em particular, como $a_1 \in A$, $a_1 = c + za_1$ para algum $c \in C$ e algum $z \in I$. Daí, $(1-z)a_1 = c$ e como $-z \in I$, por hipótese, $1-z$ é inversível, de onde segue que $a_1 = (1-z)^{-1}c$, o que mostra que $a_1 \in C$.

Daí, $C + < a_1 >_R = C$ e, por (γ) conclui-se que $A \subset C$, o que contradiz (α). Portanto, $A \subset B$.

Ainda, se $B + IA = A$ vem que $B \subset A$ e como da primeira parte $A \subset B$ vem que $A = B$.

II.2.5. Teorema |6|

Seja R um anel, $Z \subset R$ um subanel de R e A um R-módulo. Se existir um inteiro positivo k tal que $Z^kA = o$ e se $ZA = A$ então $A = o$.

Prova

Sendo $ZA = A$ então

$$Z^2A = ZA, \quad Z^3A = Z^2A, \ \ldots\ , Z^kA = Z^{k-1}A, \ \ldots$$

Como por hipótese, $Z^kA = o$ conclui-se sucessivamen te que $Z^{k-1}A = o$, $Z^{k-2}A = o$, ..., $Z^2A = o$ e daí $ZA = o$. Como $ZA = A$ tem-se, portanto, que $A = o$.

II.2.6. Lema |21|

Seja R um anel comutativo, M um R - módulo finitamente gerado e I um ideal de R. Suponha $IM = M$.

Então existe um elemento $a \in R$ da forma $a = 1 + x$, $x \in I$, tal que $aM = o$.

Se ainda $I \subset \text{rad } R$ então $M = o$.

Matsumura enuncia e prova a versão II.2.6, mas faz uso do Lema na seguinte forma :

II.2.7. Teorema |21|

Seja R um anel, M um R - módulo, N e N' submódulos de M e I um ideal de R.

Suponha que $M = N + IN'$, e que ou (i) I é nilpotente ou (ii) $I \subseteq \text{rad } R$ e N' é finitamente gerado. Então $M = N$.

Prova

No caso (i) temos

$$\frac{M}{N} = I\,\frac{M}{N} = I^2\,\frac{M}{N} = \ldots = 0$$

No caso (ii) aplicamos a versão II.2.6 para $\frac{M}{N}$.

Em |25| encontramos a seguinte versão do Lema de Nakayama, denominada pelo autor de Lema de Krull - Azumaya simplesmente.

II.2.8. Teorema |25|

Seja M um R - módulo finitamente gerado e N um submódulo de M tal que $M = (\mathrm{rad}\ R)M + N$.

Então $M = N$.

Prova

Seja $M' = \frac{M}{N}$. Então M' é um R - módulo finitamente gerado e ainda, $M' = (\mathrm{rad}\ R)M'$. Então por II.2.6 temos $M'=o$ e, portanto, $M = N$.

Temos os seguintes corolários do Lema de Nakayama.

II.2.9. Corolário |7|

Seja R um anel comutativo com unidade, I um ideal de R tal que $1 + z$ é inversível, $\forall\ z \in I$ e que R contenha o corpo E.

Suponha A um R - módulo finitamente gerado e B um submódulo de A tal que para algum inteiro k, $\dim_E \frac{A}{I^{k+1}A+B} \leq K$. Então $I^kA \subset B$.

Prova

Seja $A' = \frac{A}{B}$ que é um R - módulo.

Como $\dim_E \frac{A}{I^{k+1}A + B} \leq k$ segue que $\dim_E \frac{A'}{I^{k+1}A'} \leq k$.

Então temos a sequencia de $k + 1$ espaços vetoriais sobre E

$$\frac{A'}{IA'} \subseteq \frac{A'}{I^2A'} \subseteq \dots \subseteq \frac{A'}{I^kA'} \subsetneq \frac{A'}{I^{k+1}A'}, \text{ sendo o}$$

maior deles de dimensão $\leq$ k e o menor deles de dimensão $\geq$ 1.

Logo, existe s, $1 \leq s \leq k$, tal que

$$I^s A' = I^{s+1} A' = I\ (I^s A')$$

Então, por (II.2.4), conclui-se que $I^s A' = o$.

Portanto $I^k A' = o$ e sendo $A' = \frac{A}{B}$ tem-se que $I^k A \subset B$.

II.2.10. Corolário |19|

Seja S um subconjunto finito do R^n.

Seja A um $C_S^\infty\ (R^n)$ - módulo finitamente gerado e B um submódulo de A tal que para algum inteiro k

(i) $\dim_R \dfrac{A}{\mathfrak{m}_S^{k+1} A + B} \leq k$. Então (ii) $\mathfrak{m}_S^k\ A \subset B$.

Prova

Este corolário é apenas um caso particular do corolário anterior para $R = C_S^\infty\ (R^n)$ e $I = \mathfrak{m}_S$.

Um outro caso particular bastante usado é dado por:

II.2.11. Corolário |30|

Seja A um $C_o^\infty\ (R^n)$ - módulo finitamente gerado e B um submódulo de A tal que para algum k $\dim_R \dfrac{A}{\mathfrak{m}^{k+1} A + B} \leq k$.
Então $\mathfrak{m}^k\ A \subset B$.

Nas condições do corolário II.2.10 é possível concluir que o submódulo B é também finitamente gerado como $C_S^\infty\ (R^n)$ - submódulo de A. Mais precisamente, II.2.12. <u>Corolário</u> |19|

Sob as hipóteses do corolário II.2.10, existe um conjunto de geradores de B (sobre $C^{\infty}_{S}(R^n)$) tendo não mais do que $a\binom{n+k}{k}$ elementos, onde a é o número mínimo de elementos num conjunto de geradores de A.

<u>Prova</u>

Primeiramente, consideremos o caso quando S é formado por um único ponto.

Como $\mathfrak{m}_S^k A$ é finitamente gerado e $\dfrac{A}{\mathfrak{m}_S^k A}$ é de dimensão finita, $\mathfrak{m}_S^k A + B$ é finitamente gerado. Então um conjunto de geradores do B - módulo $\mathfrak{m}_S B$ é um conjunto de geradores de B, pelo Lema de Nakayama. Mas,

$$\dim_R \frac{B}{\mathfrak{m}_S B} \leq \dim_R \frac{B}{\mathfrak{m}_S^{k+1} A} \leq \dim_R \frac{A}{\mathfrak{m}_S^{k+1} A} \leq a \binom{n+k}{k}$$

onde a primeira desigualdade segue do fato que $\mathfrak{m}_S B \supset \mathfrak{m}_S^{k+1} A$ (pelo corolário II.2.10) e a última de (|19|, lema 1.4).

A prova para S com um número finito de elementos segue por aplicação do seguinte resultado :

"Se $S = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset R^n$ então $C^{\infty}_S = C^{\infty}_{x_1} x \ldots x\, C^{\infty}_{x_n}$ (α

e $\mathfrak{m}_S = \mathfrak{m}_{x_1} \times \ldots \times \mathfrak{m}_{x_n}$ (produto cartesiano)

Seja $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Sejam

$$A_{x_i} = A \otimes C^{\infty}_{x_i} \ , \quad B_{x_i} = B \otimes C^{\infty}_{x_i}$$

(produto tensorial sobre $C^{\infty}_{x_i}$)

Assim, A_{x_i} é um $C^\infty_{x_i}$ - módulo e B_{x_i} é um $C^\infty_{x_i}$ - submódulo de A_{x_i}.

É fácil verificar que (II.2.10.(i)) é satisfeito para C_{x_i}, A_{x_i}, B_{x_i} em lugar de C^∞_s, A, B respectivamente. Assim, podemos concluir que B_{x_i} é gerado como $C^\infty_{x_i}$ - módulo por no máximo $a\binom{n+k}{k}$ elementos.

Como $C^\infty_s = C^\infty_{x_1} \times \ldots \times C^\infty_{x_n}$ onde para toda $f = (f_1, \ldots, f_s) \in C_S$ ($f_i \in C^\infty_{x_i}$) e para todo $b = (b_1, \ldots, b_s) \in B$ ($b_i \in B_{x_i}$)

$fb = (f_1 b_1, \ldots, f_s b_s)$.

Assim, o fato de que cada B_{x_i} é gerado por $a\binom{n+k}{k}$ elementos ou menos como um $C^\infty_{x_i}$ - módulo implica que B é gerado por $a\binom{n+k}{k}$ elementos ou menos como um C^∞_S - módulo.

II.2.13. Corolário |9|, |16|

Seja R um anel local e $\mathfrak{m}$ o seu ideal maximal.

Seja A um R - módulo finitamente gerado.

Entaõ $\frac{A}{\mathfrak{m}A}$ é um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo $\frac{R}{\mathfrak{m}}$.

Seja $\phi : A \longrightarrow \frac{A}{\mathfrak{m}A}$ a projeção natural e $v_1, \ldots, v_n$ base deste espaço. Escolha $e_1, \ldots, e_n$ em A tais que $\phi(e_i) = v_i$, $i = 1, \ldots, n$. Então $e_1, \ldots, e_n$ forma um conjunto de geradores de A.

<u>Prova</u> |9|

Como a ação de R em A claramente induz uma ação de $\frac{R}{\mathfrak{m}}$ em $\frac{A}{\mathfrak{m}A}$ vê-se que $\frac{A}{\mathfrak{m}A}$ é um módulo sobre o corpo $\frac{R}{\mathfrak{m}}$, isto é, um espaço vetorial

$$\frac{R}{\mathfrak{m}} \times \frac{A}{\mathfrak{m}A} \longrightarrow \frac{A}{\mathfrak{m}A}$$

$$(r + \mathfrak{m},\ a + \mathfrak{m}A) \longrightarrow ra + \mathfrak{m}A$$

Para mostrar que $\dim_{\frac{R}{\mathfrak{m}}} \frac{A}{\mathfrak{m}A} < \infty$, seja $\{a_1, \dots a_k\}$ um conjunto de geradores do R - módulo A e seja u um elemento de $\frac{A}{\mathfrak{m}A}$. Escolho a em A tal que $\phi(a) = u$ e escolho $r_i \in R$, $i = 1, \dots, k$ tais que

$$a = r_1 a_1 + \dots + r_k a_k \text{. Então}$$

$$u = [r_1]\phi(a_1) + \dots + [r_k]\phi(a_k) ,$$

onde $[r_i]$ denota a classe de equivalência de r_i em $\frac{R}{\mathfrak{m}}$. Assim, $\phi(a_1), \dots, \phi(a_k)$ forma um conjunto de geradores de $\frac{A}{\mathfrak{m}A}$.

Reciprocamente, seja $\{v_1, \dots v_n\}$ uma base do espaço vetorial $\frac{A}{\mathfrak{m}A}$ e $e_1, \dots, e_n$ escolhidos em A tais que $\phi(e_i) = v_i$, $i = 1, \dots, n$. Seja B o submódulo de A gerado por $e_1, \dots, e_n$.

Então $A = B + \mathfrak{m}A$ visto que a) $B + \mathfrak{m}A \subset A$ trivialmente e b) se $a \in A$, $\phi(a) = [r_1]\ v_1 + \dots + [r_n]\ v_n$ e então $a = r_1\ e_1 + \dots + r_n\ e_n + s$ com $s \in \mathfrak{m}A$, isto é, $a \in B + \mathfrak{m}A$.

Sendo A finitamente gerado, B submódulo de A tal que $A = B + \mathfrak{m}A$ segue pelo Teorema II.2.4. que $A = B$.

Logo A é gerado por $\{v_1, \ldots , v_n\}$.

II.2.14. Notas

(1) Quando $R = C^\infty_{x_o}(R^n)$ então $\frac{A}{\mathfrak{m}A}$ é um espaço vetorial real.

(2) Pelo corolário II.2.13 sabemos que se M é um $C^\infty_o(R^n)$ - módulo finitamente gerado, então $\frac{M}{\mathfrak{m}M}$ é um espaço vetorial real de dimensão finita.

A recíproca desta afirmação é falsa |16| : seja no anel $C^\infty_o(R)$ o ideal I dos germes f tais que f e todas as suas derivadas se anulam no zero. Este é um $C^\infty_o(R)$ - módulo. Tem-se que $I = \mathfrak{m}I$ e portanto $\frac{I}{\mathfrak{m}I} = \{o\}$. Mas, I não pode ser finitamente gerado , pois senão ele se reduziria a zero, conforme o corolário II.2.13.

II.2.15. Podemos aplicar o Lema de Nakayama para mostrar que o anel local $C^\infty_o(R^n)$ não é Noetheriano, isto é, $C^\infty_o(R^n)$ admite um ideal que não é finitamente gerado.

De fato, sabemos que $\mathfrak{m}^\infty = \bigcap_{k \geq 1} \mathfrak{m}^k$ é um ideal de $C^\infty_o(R^n)$.

Se $\mathfrak{m}^\infty$ fosse finitamente gerado e como $\mathfrak{m}^\infty = \mathfrak{m}.\mathfrak{m}^\infty$ viria por (II.2.2) que $\mathfrak{m}^\infty = o$, o que é absurdo. Portanto, $\mathfrak{m}^\infty$ é um ideal de $C^\infty_o(R^n)$ que não é finitamente gerado.

II.2.16. É fundamental, para o estudo das singularidades de aplicações diferenciáveis, a solução do seguinte problema :

se M é um $C^\infty_{x_o}(R^n)$ - módulo, em que condições M é finitamente gerado como $C^\infty_{y_o}(R^p)$ - módulo via o homomorfismo $f^* : C^\infty_{y_o}(R^p) \longrightarrow C^\infty_{x_o}(R^n)$ induzido por $f : (R^n, x_o) \longrightarrow (R^p, y_o)$?

É, evidentemente, necessário que M seja do tipo finito sobre $C^\infty_{x_o}(R^n)$, conforme exemplo em II.2.14. Ainda, de acordo com o corolário II.2.13, é necessário que $\dfrac{M}{\mathfrak{m}_{y_o} \cdot M}$ seja de dimensão finita sobre R. A resposta desta questão é o Teorema de Preparação de Malgrange generalizado que será estudado no capítulo seguinte, para o qual precisaremos das seguintes observações :

(a) $(f^*\mathfrak{m}_{y_o}) \cdot M$ é o mesmo que $\mathfrak{m}_{y_o} \cdot M$ onde o primeiro conjunto utiliza a estrutura de $C^\infty_{x_o}(R^n)$ - módulo enquanto que o segundo conjunto utiliza a estrutura de $C^\infty_{y_o}(R^p)$-módulo (via f^*).

(b) $f^*\mathfrak{m}_{y_o} = \langle f_1, \ldots, f_p \rangle \subset C^\infty_{x_o}(R^n)$ é o ideal gerado pelas funções componentes de f enquanto que $f^*(\mathfrak{m}_{y_o})$ é a imagem de $\mathfrak{m}_{y_o}$ por f^*, que nem sempre é ideal de $C^\infty_{x_o}(R^n)$.

CAPÍTULO III

FORMULAÇÕES ALGÉBRICAS DOS TEOREMAS DE PREPARAÇÃO E DIVISÃO

- O TEOREMA DE PREPARAÇÃO GENERALIZADO -

Neste capítulo procuramos dar as diferentes formas algébricas dos Teoremas de Preparação e Divisão incluindo versões para germes, multigermes, jatos, germes que dependem continuamente de um parâmetro, módulos que não são necessariamente $C_x^\infty(N)$ - módulos. Versões envolvendo álgebras diferenciais, álgebras analíticas e álgebras formais podem ser encontradas em |15|.

Procuramos dar suas consequências, bem como possíveis relações com os Teoremas de Divisão vistos no primeiro capítulo.

Podemos começar com uma versão bastante simples do Teorema de Divisão Polinomial que conforme o lema I.1.7 para n = 1 diz:

"No espaço das funções analíticas no aberto $U \subset \mathbb{C}$, o espaço vetorial dos polinômios de grau $p - 1$ é um complemento do ideal $< P >$ gerado pelo polinômio de grau p, $P(t) = t^p + \sum_{i=1}^{p} c_i t^{p-i}$, cujas raízes estão na vizinhança U do zero". |3|

No caso C^∞, de acordo com o Lema I.2.4 podemos dizer:

"Seja $g \in C^\infty_{(o,o)}(R \times R^n)$ uma função regular de ordem p em t. Considere o quociente $\dfrac{C^\infty_{(o,o)}(R \times R^n)}{< g >}$ de

$C^{\infty}_{(o,o)}(R \times R^n)$ pelo ideal gerado por g. O lema I.2.4 diz que este quociente, como $C^{\infty}_o(R^n)$ - módulo, é gerado pelas classes das funções t^i, $o \leq i \leq p$."

Conforme notação de I.1.3 podemos enunciar o Teorema de Divisão assim:

"Se $\phi \in \mathcal{O}_{1+n}$ é regular de ordem p em t então para toda $f \in \mathcal{O}_{1+n}$, existem $q \in \mathcal{O}_{1+n}$, $r \in \mathcal{O}_n[t]$ de grau $r < p$ tal que $f = \phi q + r$ (q e r únicas)"

ou

"O quociente $\dfrac{\mathcal{O}_{1+n}}{\phi.\mathcal{O}_{1+n}}$ é um $\mathcal{O}_n$ - módulo de posto p".

Lembramos que $\mathcal{O}_n = k\{x_1,\ldots,x_n\}$, $k = R$ ou $\mathbb{C}$, é o anel das séries de potências convergentes nas variáveis $x_1,\ldots,x_n$.

Conforme vimos, no corolário II.2.13 e observações subsequentes, sabemos que "Se M é um $C^{\infty}_{x_o}(R^n)$ - módulo finitamente gerado então $\dfrac{M}{\mathfrak{m}M}$ é um espaço vetorial real de dimensão finita" e que a recíproca desta afirmação é falsa. Passaremos agora ao estudo de uma versão algébrica do Teorema de Preparação, denominado Teorema de Preparação de Malgrange Generalizado, que dará condições necessárias e suficientes para que um $C^{\infty}_{x_o}(R^n)$ - módulo finitamente gerado seja um $C^{\infty}_{y_o}(R^p)$ - módulo finitamente gerado.

III.1 - Teorema de Preparação de Malgrange Generalizado |19|, |27|

Seja $f: (R^n,o) \longrightarrow (R^p,o)$ germe de função C^{∞}, $f(o) = o$.

Seja M um $C_o^\infty(R^n)$ - módulo finitamente gerado.

Então M é um $C_o^\infty(R^p)$ - módulo finitamente gerado via $f^* \iff \dfrac{M}{(f^*\mathfrak{m}_{y_o=o})M}$ é um espaço vetorial sobre R de dimensão finita.

<u>**Prova**</u>

Para que não haja confusão vamos denotar $o = x_o \in R^n$ e $o = y_o \in R^p$.

A prova será feita em dois passos.

<u>Passo 1</u>: Sejam as projeções $\pi: R^p \times R \longrightarrow R^p$ e $t: R^p \times R \longrightarrow R$. Provemos o teorema no caso em que $n = p+1$, $x_o = (y_o, o)$ e $f = \pi$. Seja $\{a_1, \ldots, a_q\}$ um conjunto finito de elementos de M que gera M como um $C_{x_o}^\infty(R^n)$ - módulo e cuja imagem em $\dfrac{M}{(f^*\mathfrak{m}_{y_o})M}$ geram-no como espaço vetorial sobre R.

Então, qualquer $a \in M$ pode ser escrito na forma

$$a = \sum_{i=1}^{q} c_i a_i + \sum_{i=1}^{q} z_i a_i$$

onde $c_i \in R$ e $z_i \in f^*(\mathfrak{m}_{y_o}) C_{x_o}^\infty(R^n)$.

Em particular, como cada $a_i \in M$, existem $c_{ij} \in R$, $z_{ij} \in f^*(\mathfrak{m}_{y_o}) C_{x_o}^\infty(R^n)$, $1 \leq i,j \leq q$ tais que

$$ta_i = \sum_{j=1}^{q} (c_{ij} + z_{ij}) a_j \qquad \text{(a)}$$

Seja Δ o determinante $|t\delta_{ij} - c_{ij} - z_{ij}|$ onde δ_{ij} é o símbolo de Kronecker.

Desenvolvendo-se o determinante, vemos que Δ é regular de ordem p onde $p \leq q$, visto que $\Delta\Big|_{y_o \times R, y_o \times o}$ é um polinômio mônico em t de ordem q. Então pelo Teorema de Divisão I.2.6 aplicado a Δ segue que para toda $f \in C^\infty_{x_o}(R^{p+1})$, existem $g \in C^\infty_{x_o}(R^n)$ e $h = (h_1,\ldots,h_p)$, $h_i \in C^\infty_{y_o}(R^p)$ tais que

$$f = g\,\Delta + \sum_{j=1}^{p} h_j\, t^{p-j} \,.$$

Ou seja, $\dfrac{C^\infty_{x_o}(R^{p+1})}{\Delta.C^\infty_{x_o}(R^{p+1})}$ é finitamente gerado como $C^\infty_{y_o}(R^p)$ - módulo via π^* (visto que $\dfrac{C^\infty_{x_o}(R^{p+1})}{\Delta C^\infty_{x_o}(R^{p+1})}$ é gerado por $t^{p-1}, t^{p-2},\ldots,1$ como $C^\infty_{y_o}(R^p)$ - módulo via π^*).

Por outro lado, da equação (a) acima e da regra de Cramer segue $\Delta a_i = 0$, $i = 1,\ldots,q$. Logo $\Delta M = 0$ e daí M é um $\dfrac{C^\infty_{x_o}(R^{p+1})}{\Delta.C^\infty_{x_o}(R^{p+1})}$ - módulo.

Ainda, o fato que M é finitamente gerado como um $\dfrac{C^\infty_{x_o}(R^{p+1})}{\Delta.C^\infty_{x_o}(R^{p+1})}$ - módulo implica que M é finitamente gerado como um $C^\infty_{y_o}(R^p)$ - módulo via π^*. De fato, qualquer que seja $a \in M$ temos

$$a = \sum_{i=1}^{q} w_i a_i = \sum_{i=1}^{q}\Big[q_i\Delta + \sum_{j=0}^{p-1} r_{ij} t^j\Big] a_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{q} q_i \Delta a_i + \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=0}^{p-1} r_{ij} t^j a_i$$

$$= \sum_{i,j} r_{ij} t^j a_i \quad \text{com } r_{ij} \in C^\infty_{y_o}(R^p)\,.$$

Portanto, $\{t^j a_i, j=0,\ldots,p-1, i=1,\ldots,q\}$ gera M como $C^\infty_{y_o}(R^p)$ - módulo via π^*.

<u>Passo 2</u>: Seja Φ: $(R^n,x_o) \longrightarrow (R^n,0)$ um germe de função C^∞ inversível. Fatoremos f como segue:

$$(R^n,x_o) \xrightarrow{(f,\Phi)} (R^p \times R^n,(y_o,0)) \xrightarrow{\pi_n} (R^p \times R^{n-1},\pi_n(y_o,0)) \longrightarrow \ldots \xrightarrow{\pi_2}$$

$$\xrightarrow{\pi_2} (R^p \times R,\pi_2(\pi_3\ldots\pi_n(y_o,0))) \xrightarrow{\pi_1} (R^p,y_o)$$

onde π_k: $(R^p \times R^k,(y_o,0)) \longrightarrow (R^p \times R^{k-1},\pi_k(y_o,0))$ é o germe da projeção canônica

$$R^p \times R^k \longrightarrow R^p \times R^{k-1}$$

$$(z,a_1,\ldots,a_k) \longmapsto (z,a_1,\ldots,a_{k-1}) \quad .$$

Para cada k, $0 \leq k < n$, damos a M a estrutura de $C^\infty_{(y_o,o)}(R^p \times R^k)$ - módulo induzida por

$$(\pi_{k+1} \circ \ldots \circ \pi_n \circ (f,\Phi))^* \quad .$$

Quando $k = 0$, esta é a estrutura de $C^\infty_{y_o}(R^p)$ - módulo via f* que demos a M no enunciado do teorema visto que

$$f = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \ldots \circ \pi_n \circ (f,\Phi) \quad .$$

Do fato que $(f,\Phi)^*$ é sobrejetiva e M é um $C^\infty_{x_o}(R^n)$ - módulo finitamente gerado segue que M é um $C^\infty_{(y_o,0)}(R^p \times R^n)$ - módulo finitamente gerado via $(f,\Phi)^*$.

Agora, por indução decrescente em k, provemos que M é um $C^{\infty}_{(y_o,0)}(R^p \times R^k)$ - módulo para todo k, $0 \leq k < n$. Assim é suficiente cumprir o passo de indução.

Suponha M finitamente gerado como $C^{\infty}_{(y_o,0)}(R^p x R^{k+1})$- - módulo. Então

$$(f^* \mathfrak{m}_{y_o}).M = (\pi^*_{k+1} \circ \ldots \circ \pi^*_1)\mathfrak{m}_{y_o}.M$$

(onde no lado esquerdo da igualdade M é considerado como um $C^{\infty}_{x_o}(R^n)$ - módulo e no lado direito M é considerado como $C^{\infty}_{(y_o,0)}(R^p \times R^{k+1})$ - módulo).

Assim, se $\mathfrak{n}$ denota o ideal maximal de $C^{\infty}_{(y_o,0)}(R^p \times R^k)$,

$$(f^* \mathfrak{m}_{y_o})M \subset (\pi^*_{k+1} \mathfrak{n})M \quad .$$

Em particular $\dfrac{M}{(\pi^*_{k+1}\mathfrak{n})M}$ é finitamente gerado como espaço vetorial sobre R.

Em particular, as hipóteses do teorema são satisfeitas para π_{k+1} em lugar de f.

Assim, podemos aplicar o passo 1 para ver que M é finitamente gerado como um $C^{\infty}_{(y_o,0)}(R^p \times R^k)$ - módulo.

Isto completa a prova do passo de indução, e também a prova, pois o caso k = 0 é exatamente a afirmação do teorema.

III.2 - Notas sobre Teorema III.1

III.2.1 - Esta primeira versão apresentada do Teorema de Preparação de Malgrange Generalizado, devida a Mather é mais geral do que a obtida por Malgrange que se refere a "álgebras diferenciais" que são quocientes de $C^{\infty}_{x_o}(R^n)$.

III.2.2 - O Teorema III.1 é uma generalização do teorema de divisão I.2.6: Seja no teorema III.1 $f = \pi: R \times R^n \longrightarrow R^n$ dada por $\pi(t,x) = x$. Sejam $x_o = 0 \in R^{n+1}$, $y_o = 0 \in R^n$ e $F \in C^{\infty}_o(R \times R^n)$ tal que $F(t,o) = t^p g(t)$ onde $g(o) \neq 0$.

Precisamos encontrar q e $h = (h_1,\ldots,h_p)$ satisfazendo as condições do Teorema de divisão I.2.6.

Seja $M = \dfrac{C^{\infty}_o(R \times R^n)}{< F >}$ onde $< F >$ é o ideal de $C^{\infty}_o(R \times R^n)$ gerado por F.

M é um $C^{\infty}_o(R \times R^n)$ - módulo e é finitamente gerado (é claro, visto que, ele é gerado pela imagem do 1 em M).

O espaço vetorial $\dfrac{M}{\mathfrak{m}_o(R^n)M} \simeq \dfrac{C^{\infty}_o(R \times R^n)}{<F,x_1,\ldots,x_n>}$ visto que $\mathfrak{m}_o(R^n) = <x_1,\ldots,x_n>$: ideal gerado pelos germes das funções C^{∞} indicadas.

(Para se obter a identificação desejada basta considerar a função de $M \longrightarrow \dfrac{C^{\infty}_o(R \times R^n)}{<F,x_1,\ldots,x_n>}$ dada por $g+<F> \longmapsto g+<F,x_1,\ldots,x_n>$.)

Mostremos que $\dfrac{M}{\mathfrak{m}_o(R^n)M}$ é um espaço vetorial de dimensão finita. Primeiramente, afirmamos que

$$<F,x_1,\ldots,x_n> = <t^p,x_1,\ldots,x_n> \quad .$$

Seja $\ell: R \longrightarrow R$ dada por $\ell(s) = F(t,sx)$ onde $(t,x) \in R \times R^n$ é fixo. Então

$$F(t,x) - F(t,0) = \ell(1)-\ell(0) = \int_0^1 \frac{d\ell}{ds}(s)ds = \int_0^1 \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(t,sx)ds =$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i g_i(t,x)$$

onde $g_i(t,x) = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial x_i}(t,sx)ds$ é de classe C^∞.

Assim, $F(t,x) = F(t,0) + \sum_{i=1}^n x_i g_i(t,x)$ isto é,

$$F(t,x) = t^p g(t) + r \ , \quad r \in \langle x_1,\ldots,x_n\rangle \ .$$

Como $g(o) \neq 0$, $g \in C^\infty$, g é inversível numa vizinhança do o e obtém-se

$$\langle F,x_1,\ldots,x_n\rangle = \langle t^p,x_1,\ldots,x_n\rangle \ .$$

Assim uma base para o espaço vetorial $\dfrac{C_o^\infty(R \times R^n)}{\langle F,x_1,\ldots,x_n\rangle}$ é dada pelas imagens de $[1]_o,[t]_o,\ldots,[t^{p-1}]_o$. Aplicando o Teorema III.1 deduzimos que M é finitamente gerado como $C_o^\infty(R^n)$ - módulo via π^*. Pelo corolário III.2.13 do Lema de Nakayama as imagens de $[1]_o,[t]_o,\ldots,[t^{p-1}]_o$, geram M como um $C_o^\infty(R^n)$ - módulo. Assim,

$$[G]_o = [r_o]_o[1]_o + [r_1]_o[t]_o + \ldots + [r_{p-1}]_o[t^{p-1}]_o + V$$

onde V está em $\langle F\rangle$. Seja $V = [qF]_o$ e então, numa vizinhança do o em $R \times R^n$ temos:

$G(t,x) = q(t,x)F(t,x) + r_o(x) + r_1(x)t + \ldots + r_{p-1}(x)t^{p-1}$.

(|4|,|9|,|15|,|16|).

Em |16 - pag. 174| podemos encontrar também uma situação particular onde o Teorema de Preparação de Malgrange Generalizado equivale ao Teorema de Divisão.

III.2.3 - A prova de que estabilidade sob deformações implica em estabilidade infinitesimal é um cálculo envolvendo nada mais sofisticado que integração de certos campos vetoriais. Isto não é verdade para a afirmação recíproca. A prova de que estabilidade infinitesimal implica em estabilidade sob k-deformações, para todo k, é feita em |[9]| |[16]| usando o Teorema de Preparação de Malgrange Generalizado III.1.

III.3 - <u>Corolário</u> |[27]|

Seja $f: (R^n,0) \longrightarrow (R^p,0)$ germe de função C^∞.

Dado um $C_o^\infty(R^n)$ - módulo finitamente gerado M e $\{a_1,\ldots,a_q\} \subset M$, denoto por $\bar{a}_i$, $i = 1,\ldots,q$ as projeções de a_i no quociente $\dfrac{M}{(f^*\mathfrak{m}_{y_o})M}$.

As afirmações são equivalentes:

(i) Os elementos a_i, $i = 1,\ldots,q$ geram M como $C_o^\infty(R^p)$ - módulo via f^*.

(ii) Os elementos $\bar{a}_i$, $i = 1,\ldots,q$ geram $\dfrac{M}{(f^*\mathfrak{m}_{y_o})M}$ como espaço vetorial real.

<u>**Prova**</u>

Imediata a partir de III.1 e do corolário II.2.13 do Lema de Nakayama aplicada ao $C_o^\infty(R^p)$ - módulo M (via f^*).

III.4 - <u>Corolário</u> |27|

Dados $f \in C^\infty_{(0,0)}(R^n,R^p)$ e $\Phi_1,\ldots,\Phi_r$ em $C^\infty_o(R^n)$, são equivalentes:

(i) Os elementos $\Phi_1,\ldots,\Phi_r$ geram $C^\infty_o(R^n)$ como $C^\infty_o(R^p)$ - módulo via f^*.

(ii) Os elementos $\overline{\Phi}_1,\ldots,\overline{\Phi}_r$ geram o espaço vetorial real $\dfrac{C^\infty_o(R^n)}{(f^*\mathfrak{m}_{y_o})C^\infty_o(R^n)}$.

($\overline{\Phi}_i$ é a imagem de Φ_i pela projeção $C^\infty_o(R^n) \longrightarrow \dfrac{C^\infty_o(R^n)}{(f^*\mathfrak{m}_{y_o})C^\infty_o(R^n)}$.)

<u>Prova</u>

Imediata, visto que este corolário é exatamente o corolário III.3 no caso em que $M = C^\infty_o(R^n)$.

III.5 - <u>Corolário</u> |30|

Seja $f: (R^n,0) \longrightarrow (R^p,0)$ um germe de função C^∞.

Seja C um $C^\infty_o(R^n)$ - módulo finitamente gerado.

Então C pode ser considerado como um $C^\infty_o(R^p)$ - módulo via f^*.

Seja A um $C^\infty_o(R^p)$ - submódulo de C finitamente gerado

B um $C^\infty_o(R^n)$ - submódulo de C

Se (i) $A + B + f^*\mathfrak{m}_p C = C$ então (ii) $A + B = C$.

<u>Prova</u>

Seja $C' = \dfrac{C}{B}$ e $\pi: C \longrightarrow C'$ a projeção canônica e seja $A' = \pi(A)$. Então (i) implica em (iii) $A' + f^*\mathfrak{m}_p C' = C'$ como $C^\infty_o(R^n)$ - módulos.

Agora, A' é um $C_0^\infty(R^p)$ - módulo via f* e se considerarmos C' como um $C_0^\infty(R^p)$ - módulo via f*, podemos escrever (iii) como (iv) $A' + \mathfrak{M}_p C' = C'$ (visto que $f^*\mathfrak{M}_p$ é igual a $\mathfrak{M}_p$ se no segundo considerarmos a estrutura via f*)

Como A' é finitamente gerado sobre $C_0^\infty(R^p)$ (visto que A é finitamente gerado sobre $C_0^\infty(R^p)$ - submódulo de C) segue que $\dfrac{C'}{\mathfrak{M}_p C'}$ é finitamente gerado sobre $C_0^\infty(R^p)$ e então é também de dimensão finita como espaço vetorial real.

Mas, $\dfrac{C'}{\mathfrak{M}_p C'}$ é exatamente $\dfrac{C'}{f^*\mathfrak{M}_p C'}$ e como C' é finitamente gerado como $C_0^\infty(R^n)$ - módulo o Teorema III.1 nos garante que C' é finitamente gerado como $C_0^\infty(R^p)$ - módulo via f*.

Então de (iv) e do Lema de Nakayama segue que A' = C', de onde vem que A + B = C.

III.5.1 - Notas sobre Teorema III.5

(a) Wassermann denomina o corolário III.5 de Teorema de Preparação de Malgrange e apesar de enunciar o Teorema III.1 ele faz uso da versão dada em III.5 e não daquela dada em III.1.

(b) O corolário III.5 é uma versão devida a Mather.

(c) O corolário III.5 é um caso particular da versão dada em III.6 a seguir.

III.6 - Corolário |30|

Seja $f: (R^n,0) \longrightarrow (R^p,0)$ um germe de função C^∞. Sejam C um $C_o^\infty(R^n)$ - módulo finitamente gerado, B um $C_o^\infty(R^n)$ - submódulo de C, A um $C_o^\infty(R^p)$ - submódulo de C finitamente gerado, $k = \dim_R \frac{A}{\mathfrak{m}_p \cdot A}$. Então

(i) $A + B + (f^*\mathfrak{m}_p + \mathfrak{m}_n^{k+1})C = C$ implica (ii) $A + B = C$.

Prova

Esta será omitida pois será repetição da prova dada em III.13.

III.7 - Lema |30|

Seja M um $C_o^\infty(R)$ - módulo cíclico. Então para todo inteiro não negativo k, $\mathfrak{m}^k M$ é um submódulo cíclico de M e $\dim_R \frac{M}{\mathfrak{m}^k \cdot M} \leq k$.

Ainda, se N é um $C_o^\infty(R)$ - submódulo de M e $\dim_R \frac{M}{N} = r < \infty$ então $N = \mathfrak{m}^r \cdot M$ ($\because$ é cíclico) e se $\dim_R \frac{M}{N} = \infty$ então $N \subset \mathfrak{m}^\infty M$.

(nota: um módulo cíclico é um módulo gerado por um único elemento)

Prova

Seja a um gerador de M e x o gerador canônico de $\mathfrak{m}$. Então $\mathfrak{m}^k$ é gerado sobre $C_o^\infty(R)$ por x^k e assim $\mathfrak{m}^k M$ é gerado sobre $C_o^\infty(R)$ por $x^k a$ e, portanto, é cíclico.

Ainda, $a, xa, x^2a, \ldots, x^{k-1}a$ gera $\frac{M}{\mathfrak{m}^k \cdot M}$ sobre R e daí, $\dim_R \frac{M}{\mathfrak{m}^k M} \leq k$.

Seja agora N um submódulo de M e suponha que $\dim_R \frac{M}{N} = r < \infty$.

Como $N \subset N + \mathfrak{m}^{r+1}M$, $\dim_R \frac{M}{N + \mathfrak{m}^{r+1}M} \leq \dim_R \frac{M}{N} = r$ e pelo corolário II.2.11 do Lema de Nakayama vem que $\mathfrak{m}^r M \subset N$. Logo $\dim_R \frac{M}{\mathfrak{m}^r M} \geq \dim_R \frac{M}{N} = r$. Mas, pela primeira parte, sabemos que $\dim_R \frac{M}{\mathfrak{m}^r M} \leq r$. Portanto temos:

$\dim_R \frac{M}{N} = r$, $\dim_R \frac{M}{\mathfrak{m}^r M} = r$ e $\mathfrak{m}^r M \subset N$. Logo, a inclusão $\mathfrak{m}^r M \subset N$ não pode ser própria, isto é, $\mathfrak{m}^r M = N$.

Suponha, agora, $\dim_R \frac{M}{N} = \infty$ e $N \not\subset \mathfrak{m}^\infty M$.

Então para algum elemento $b \in N$ existe um maior inteiro s tal que $b \in \mathfrak{m}^s M$. Mas, então existe um número real $c \neq 0$ e um elemento $w \in \mathfrak{m}$ tal que

$$b = [cx^s + x^s w(x)]a$$

Como $c + w(x)$ é uma unidade em $C_0^\infty(R)$ segue que $x^s a \in N$ e então $\mathfrak{m}^s N \subset N$. Mas isto implica que $\dim_R \frac{M}{N}$ é finita, o que contradiz a hipótese.

$$\therefore N \subset \mathfrak{m}^\infty . M \quad .$$

III.8 - Teorema |30|

Seja $f \in \mathfrak{m}_n$. Seja C um $C_0^\infty(R^n)$ - módulo finitamente gerado. Então C é também um $C_0^\infty(R)$ - módulo via f^*. Sejam

A um $C_0^\infty(R)$ - submódulo cíclico de C

B um $C_0^\infty(R^n)$ - submódulo de C

D um $C_0^\infty(R^n)$ - submódulo de C tal que $\dim_R \frac{C}{D}$ é finita.

Se (i) $A + B + [f^*\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_n^2]D \supset D$ então (ii) $A + B \supset D$

Ainda, se $f \in \mathfrak{m}_n^2$ então (iii) $\mathfrak{m}_n D \subset B$.

<u>Prova</u>

Seja $D' = B + D$ e $A' = A \cap D$. De (i) vem (iv) $A' + B + [f^*\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_n^2]D' = D'$.

Seja $k = \dim_R \frac{C}{D}$. Então $\dim_R \frac{C}{D'} \leq k$ e então pelo corolário II.2.11 do Lema de Nakayama $\mathfrak{m}_n^k C \subset D'$.

Agora, como C é finitamente gerado sobre $C_o^\infty(R^n)$ $\dim_R \frac{C}{\mathfrak{m}^k C}$ é finita e portanto $\dim_R \frac{D'}{\mathfrak{m}_n^k C}$ também é finita.

Ainda, $\mathfrak{m}_n^k C$ é finitamente gerado sobre $C_o^\infty(R^n)$ de onde vem que D' é finitamente gerado sobre $C_o^\infty(R^n)$.

Agora, A' é um $C_o^\infty(R)$ - submódulo de A e $\dim_R \frac{A}{A'} \leq \dim_R \frac{C}{D'} \leq k < \infty$. Assim, pelo Lema III.7, A' é um $C_o^\infty(R)$ - módulo cíclico e então $\dim_R \frac{A'}{\mathfrak{m}_1 A'} \leq 1$.

Então podemos aplicar o corolário III.6 para (iv) e concluir que (v) $A' + B = D'$. Mas, isto implica que $A + B \supset D$.

Agora suponha ainda que $f \in \mathfrak{m}_n^2$. Então $f^*\mathfrak{m}_1 \subset \mathfrak{m}_n^2$ e (v) implica que $A' + B + f^*\mathfrak{m}_1 D' = D'$ e como A' é um $C_o^\infty(R)$ - submódulo de D' tem-se que $\mathfrak{m}_1 A' \subset f^*\mathfrak{m}_1 D'$ e portanto, $\dim_R \frac{D'}{B + f^*\mathfrak{m}_1 D'} \leq \dim_R \frac{A'}{\mathfrak{m}_1 A'} \leq 1$.

Pelo corolário II.2.11 do Lema de Nakayama $\mathfrak{m}_n D' \subset B + f^*\mathfrak{m}_1 D' \subset B + \mathfrak{m}_n^2 D'$.

Mas então pelo Lema de Nakayama tem-se $\mathfrak{m}_n D' \subset B$

e daí $\mathfrak{m}_n D \subset B$ (pois $\mathfrak{m}_n D' \subset B \Rightarrow \mathfrak{m}_n(B+D) \subset B \Rightarrow \mathfrak{m}_n B + \mathfrak{m}_n D \subset B$ e como $\mathfrak{m}_n B \subset \mathfrak{m}_n B + \mathfrak{m}_n D$ segue o resultado).

III.8.1 - Mather prova um resultado semelhante a este com hipóteses mais gerais, mas com uma conclusão mais fraca (corolário III.14).

III.9 - Teorema de "Preparação" de Malgrange para Multigermes |19| |27|

Seja $f: (R^n,S) \longrightarrow (R^p,y)$ um germe de aplicação C^∞ onde S é um subconjunto finito do R^n.

Seja M um $C_S^\infty(R^n)$ - módulo finitamente gerado.

Se $\dfrac{M}{f^*\mathfrak{m}_y . M}$ é um espaço vetorial real de dimensão finita então M é finitamente gerado como $C_y^\infty(R^p)$ - módulo via f^*.

Prova

Basta usar o Teorema III.1 e o seguinte fato

$C_S^\infty(R^n) = C_{x_1}^\infty(R^n) \times \ldots \times C_{x_r}^\infty(R^n)$ (produto cartesiano)

$\mathfrak{m}_S = \mathfrak{m}_{x_1} \times \ldots \times \mathfrak{m}_{x_r}$ (produto cartesiano)

onde $S = \{x_1,\ldots,x_r\}$.

III.9.1 - Sotomayor |27| usa este teorema para provar que estabilidade infinitesimal de ordem p implica em estabilidade infinitesimal local.

O Teorema III.9 pode ainda ser generalizado: seja $S \subset R^n$ uma subvariedade fechada. Definimos $C_S^\infty(R^n)$ como o conjunto dos germes em S das funções de $C^\infty(R^n)$, e de finimos $\mathfrak{m}_S$ como o ideal de $C^\infty(R^n)$ formado pelas funções que se anulam em S. Podemos considerar $C_S^\infty(R^n) \subset C_{S\times R}^\infty(R^n \times R)$ e $\mathfrak{m}_S(R^n) \subset \mathfrak{m}_S(R^n \times R)$ através da projeção natural π^*.

Nestas condições vale o seguinte resultado:

III.10 - <u>Teorema</u> |27|

Sejam $f: R^n \longrightarrow R^p$, $S \subset R^n$ e $L \subset R^p$ subvariedades fechadas tais que $f(S) \subset L$. Seja M um $C_S^\infty(R^n)$ - módulo finitamente gerado tal que $\dfrac{M}{f^*\mathfrak{m}_L(R^p).M}$ é finitamente gerado como $\dfrac{C_L^\infty(R^p)}{f^*\mathfrak{m}_S(R^n)C_L^\infty(R^p)}$ - módulo via f^*. Então M é um $C_L^\infty(R^p)$ - módulo finitamente gerado via f^*.

III.11 - <u>Teorema de Preparação na forma de Malgrange</u> |4||15|

Seja $f: (R^n,0) \longrightarrow (R^p,0)$ germe de aplicação C^∞.

Este induz o homomorfismo de anéis

$$f^*: C_0^\infty(R^p) \longrightarrow C_0^\infty(R^n)$$

e o homomorfismo de anéis de séries de potências formais

$\hat{f}^*: \hat{\varepsilon}(p) \longrightarrow \hat{\varepsilon}(n)$ onde $\hat{\varepsilon}(s) = \dfrac{C_0^\infty(R^s)}{\mathfrak{m}_s^\infty} = R[[x_1,\ldots,x_s]]$.

As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) $\phi_1,\ldots,\phi_k \in C_0^\infty(R^n)$ geram $C_0^\infty(R^n)$ como $C_0^\infty(R^p)$ - módulo via f^*.

(ii) $\hat{\phi}_1,\ldots,\hat{\phi}_k$ geram $\hat{\varepsilon}(n)$ como $\hat{\varepsilon}(p)$ - módulo via $\hat{f}^*$.

(iii) $\phi_1,\ldots,\phi_k$ representam geradores do espaço vetorial real $\dfrac{C_o^\infty(R^n)}{f^*\mathfrak{m}_p C_o^\infty(R^n)}$.

(iv) $\hat{\phi}_1,\dots,\hat{\phi}_k$ representam geradores do espaço vetorial real $\dfrac{\hat{\varepsilon}(n)}{\hat{f}^*\hat{\mathfrak{m}}_p.\hat{\varepsilon}(n)}$.

Prova

A equivalência de (i) e (iii) é o corolário III.4.

[(i) $\Rightarrow$ (ii)] segue trivialmente quando passamos para jatos.

[(ii) $\Rightarrow$ (iv)] Esta é simples e basta proceder como na parte correspondente no Teorema III.1.

[(iii) $\Rightarrow$ (iv)] De $R\{\phi_1,\dots,\phi_k\} + f^*\mathfrak{m}_p C_o^\infty(R^n) = C_o^\infty(R^n)$ segue usando $j\colon C_o^\infty(R^n) \longrightarrow \hat{\varepsilon}(n)$ que $R\{\hat{\phi}_1+\dots+\hat{\phi}_k\} + \hat{f}^*\hat{\mathfrak{m}}_p\hat{\varepsilon}(n)=\hat{\varepsilon}(n)$.

[(iv) $\Rightarrow$ (iii)] De (iv) e lembrando que $\hat{\varepsilon}(n) = \dfrac{C_o^\infty(R^n)}{\mathfrak{m}_n^\infty}$ temos que $\dfrac{C_o^\infty(R^n)}{\mathfrak{m}_p C_o^\infty(R^n) + \mathfrak{m}_n^\infty}$ é de dimensão finita.

Pelo Lema de Nakayama deduz-se que

$$\frac{\mathfrak{m}_n^k}{\mathfrak{m}_p C_o^\infty(R^n) + \mathfrak{m}_n^\infty} \underset{\neq}{\supset} \frac{\mathfrak{m}_n^{k+1}}{\mathfrak{m}_p C_o^\infty(R^n) + \mathfrak{m}_n^\infty}$$

a menos que $\dfrac{\mathfrak{m}_n^k}{\mathfrak{m}_p C_o^\infty(R^n) + \mathfrak{m}_n^\infty} = 0$ de maneira que (para algum k) $\dfrac{\mathfrak{m}_n^k}{\mathfrak{m}_p C_o^\infty(R^n) + \mathfrak{m}_n^\infty} = 0$. Isto significa que

$\mathfrak{m}_n^k \subset \mathfrak{m}_p C_o^\infty(R^n) + \mathfrak{m}_n^\infty \subset \mathfrak{m}_p C_o^\infty(R^n) + \mathfrak{m}_n^{k+1}$, que pelo Lema de Nakayama vem que $\mathfrak{m}_n^k \subset \mathfrak{m}_p C_o^\infty(R^n)$, e portanto,

$$\frac{C_o^\infty(R^n)}{\mathfrak{m}_p C_o^\infty(R^n)} = \frac{C_o^\infty(R^n)}{\mathfrak{m}_p C_o^\infty(R^n) + \mathfrak{m}_n^k} .$$

O último espaço é a imagem de $\dfrac{C_o^\infty(R^n)}{\mathcal{M}_p C_o^\infty(R^n) + \mathcal{M}_n^\infty}$ pela projeção e assim é gerado sobre R por $\phi_1,\ldots,\phi_k$.

III.12 - <u>Teorema</u> |19|

Seja $f\colon (R^n,S) \longrightarrow (R^p,y)$ um germe de função C^∞.

Suponha que (α,β,A,B,C) é um homomorfismo do tipo finito sobre $f^*\colon C_y^\infty(R^p) \longrightarrow C_S^\infty(R^n)$. Então

(i) $\alpha(A) + \beta(B) + f^*\mathcal{M}_y C = C$ implica (ii) $\alpha(A) + \beta(B) = C$.

<u>Prova</u>

Sendo (α,β,A,B,C) homomorfismo do tipo finito sobre f^* sabemos que:

(a) A é um $C_y^\infty(R^p)$ - módulo finitamente gerado

(b) B e C são $C_S^\infty(R^n)$ - módulos

(c) $\alpha\colon A \longrightarrow C$ é homomorfismo sobre f^*

(d) $\beta\colon B \longrightarrow C$ é homomorfismo de $C_S^\infty(R^n)$ - módulos

(e) C é finitamente gerado como $C_S^\infty(R^n)$ - módulo.

Seja $C' = \dfrac{C}{\beta(B)}$ e $\rho\colon C \longrightarrow C'$ a projeção.

Então C' é finitamente gerado como $C_S^\infty(R^n)$ - módulo. De (i) segue que $(\rho \circ \alpha)(A) + f^*\mathcal{M}_y C' = C'$ e se considerarmos C' como um $C_y^\infty(R^p)$ - módulo via f^* então, a igualdade resulta que (iii) $(\rho \circ \alpha)(A) + \mathcal{M}_y C' = C'$.

Como A é finitamente gerado como $C_y^\infty(R^p)$ - módulo e $\rho \circ \alpha$ é um homomorfismo de $C_y^\infty(R^p)$ - módulos segue que $\dfrac{C'}{\mathcal{M}_y C'}$ é finitamente gerado como $C_y^\infty(R^p)$ - módulo e então de dimensão finita como R-espaço vetorial.

Mas, $\dfrac{C'}{\mathcal{M}_y C'} = \dfrac{C'}{f^*\mathcal{M}_y \cdot C}$ e então pelo Teorema III.10

C' é finitamente gerado como $C_y^\infty(R^p)$ - módulo.

Então pelo lema de Nakayama (iii) acarreta que $(\rho \circ \alpha)A = C'$. Como $C' = \frac{C}{\beta(B)}$ temos $(\rho \circ \alpha)A = \frac{C}{\beta(B)}$ e sendo ρ a projeção $C \longrightarrow \frac{C}{\beta(B)}$ vem que $\alpha(A) + \beta(B) = C$.

III.13 - **Teorema** |19|

Seja $f: (R^n,S) \longrightarrow (R^p,y)$ germe de função C^∞.

Suponha (α,β,A,B,C) um homomorfismo misto do tipo finito sobre $f^*: C_y^\infty(R^p) \to C_S^\infty(R^n)$. Seja $a = \dim_R \frac{A}{\mathfrak{m}_y \cdot A}$. Então,

(i) $\alpha(A) + \beta(B) + (f^*\mathfrak{m}_y + \mathfrak{m}_S^{a+1})C = C$ implica

(ii) $\alpha(A) + \beta(B) = C$.

Prova

Basta mostrar que (i) acarreta (i) do Teorema III.12 e daí teremos a tese.

Seja $B' = \beta(B) + f^*\mathfrak{m}_y . C$.

Para mostrar (i) de III.12, basta mostrar que $\mathfrak{m}_S^{a+1}C \subset B'$.

Note que $\alpha(\mathfrak{m}_y A) \subset f^*\mathfrak{m}_y . C \subset B'$ e ainda (i) implica em

(iii) $$\dim_R \frac{C}{\mathfrak{m}_S^{a+1}C+B'} \leq \dim_R \frac{\alpha(A)}{\alpha(\mathfrak{m}_y A)} \leq a$$

e então pelo corolário II.2.10 do Lema de Nakayama $\mathfrak{m}_S^a C \subset B'$. Portanto, $\mathfrak{m}_S^{a+1}C \subset B'$ o que acarreta em $\alpha(A)+\beta(B)+f^*\mathfrak{m}_y.C = C$. Então aplicando III.12, concluimos o resultado.

III.14 - Corolário |19|

Seja $f: (R^n,S) \longrightarrow (R^p,y)$ um germe de função C^∞.

Seja (α,β,A,B,C) um homomorfismo misto do tipo finito sobre f^*. Seja $a = \dim_R \frac{A}{\mathfrak{m}_y A}$. Seja C_o um $C_S^\infty(R^n)$-submódulo de C tal que $c = \dim_R \frac{C}{C_o}$ é finito.

Seja $\ell = a\binom{p+c}{c}$. Então

(i) $\alpha(A) + \beta(B) + \mathfrak{m}_S^{\ell+1} C_o \supseteq C_o$ implica (ii) $\alpha(A) + \beta(B) \supseteq C_o$.

Demonstração

Seja $C' = C_o + \beta(B)$, $A' = \alpha^{-1}(C')$, $\alpha' = \alpha/A'$. Então (i) implica em (iii) $\alpha'(A') + \beta(B) + \mathfrak{m}_S^{\ell+1} C' = C'$.

Como $\dim_R \frac{A}{A'} \leq \dim_R \frac{C}{C'} \leq c$, segue do corolário II.2.12 do Lema de Nakayama que A' é gerado como um $C_y^\infty(R^p)$-módulo por $\ell = a\binom{p+c}{c}$ elementos ou menos. Segue do Teorema III.13 aplicado ao homomorfismo misto (α',β,A',B,C'), observando que (iii) implica em (III.13.i), que vale (III.13.ii) para este homomorfismo misto, isto é, $\alpha'(A') + \beta(B) = C'$.

Mas isto claramente implica em (III.14.ii) conforme queríamos.

III.15 - De acordo com |9| pag 109 temos a afirmação:

Em todas as nossas aplicações do Teorema de Preparação de Malgrange trabalharemos com módulos de funções C^∞. O problema mais evidente ao se trabalhar com tais funções (diferentemente das funções analíticas) é que a série de Taylor num ponto não converge, necessariamente, para a função dada. Assim, para se mostrar que um módulo é finitamente gerado seria bom se mostrar que um provável conjunto de geradores necessitasse apenas gerar o módulo em questão até uma certa ordem finita, eliminando assim o problema do que acontece com as funções C^∞ no resto. Mostraremos que este é, de fato, o caso.

Considere em $C_o^\infty(R^n)$ a sequência de ideais $\mathfrak{m}^k$ e lembre que $\mathfrak{m}^k$ consiste exatamente dos germes de funções C^∞ f cuja série de Taylor no zero começa com termos de grau k, isto é, $\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(0) = 0$ para $|\alpha| \leq k - 1$ e assim $\frac{C_o^\infty(R^n)}{\mathfrak{m}^k(R^n)}$ pode ser identificado com o espaço vetorial das funções polinomiais em n-variáveis de grau $\leq k - 1$. Temos

III.16 - Teorema |9|

Seja M um $C_o^\infty(R^n)$ - módulo finitamente gerado.

Seja $f: R^n \longrightarrow R^p$ C^∞ com $f(o) = 0$ e $e_1, \ldots, e_k$ elementos de M.

Então $e_1, \ldots, e_k$ geram M como $C_o^\infty(R^p)$ - módulo se e só se $\eta(e_1), \ldots, \eta(e_k)$ geram $\frac{M}{\mathfrak{m}^{k+1}(n).M}$ como $C_o^\infty(R^p)$ - módulo onde $\eta : M \longrightarrow \frac{M}{\mathfrak{m}^{k+1}(n).M}$ é a projeção canônica.

Prova

A primeira implicação é óbvia.

Para a segunda suponha que $\eta(e_1), \ldots, \eta(e_k)$ geram $\frac{M}{\mathfrak{m}^{k+1}(n).M}$ como $C_o^\infty(R^p)$ - módulo via f^*.

Seja $N = \frac{M}{\mathfrak{m}^{k+1}(n)M + \mathfrak{m}(p)M}$.

Note que $\mathfrak{m}(p)$ age trivialmente sobre N; assim, podemos considerar N como um módulo sobre $\frac{C_o^\infty(R^p)}{\mathfrak{m}(p)} \simeq R$, isto é, espaço vetorial real.

Como as imagens de $e_1,\ldots,e_k$ geram N, $\dim_R N \leq k$.

Considere a sequência de espaços vetoriais

$N \supset \mathfrak{m}(n)N \supset \mathfrak{m}^2(n)N \supset \ \ldots \supset \mathfrak{m}^{k+1}(n)N = 0$.

São k + 2 espaços vetoriais nesta sequência decrescente e $\dim_R N \leq k$. Logo, existe $i \leq k$ tal que $\mathfrak{m}^i(n)N = \mathfrak{m}^{i+1}(n)N$.

Daí, $\mathfrak{m}^i(n)M + \mathfrak{m}(p)M = \mathfrak{m}^{i+1}(n)M + \mathfrak{m}(p)M$ pois $\mathfrak{m}^{k+1}(n) \subset \mathfrak{m}^{i+1}(n) \subset \mathfrak{m}^i(n)$.

Finalmente considere o $C_o^\infty(R^n)$ - módulo $N' = \frac{M}{\mathfrak{m}(p)M}$ e observe que $\mathfrak{m}^i(n)N' \subset \mathfrak{m}^{i+1}(n)N' = \mathfrak{m}(n)\mathfrak{m}^i(n)N'$ e assim, pelo Lema de Nakayama deduzimos que $\mathfrak{m}^i(n)N' = 0$.

(Observe que como $C_o^\infty(R^n)$ - módulo, $\mathfrak{m}^i(n)N'$ é finitamente gerado. Isto segue pois $\mathfrak{m}^i(n)$ é um ideal finitamente gerado no $C_o^\infty(R^n)$ e N' é um módulo finitamente gerado).

Mas, $N' = \frac{M}{\mathfrak{m}(p)M}$ e portanto $\mathfrak{m}^i(n)M \subset \mathfrak{m}(p)M$ para algum $i \leq k$. Como as imagens de $e_1,\ldots,e_k$ geram $\frac{M}{\mathfrak{m}^{k+1}(n)M}$, $\eta(e_1),\ldots,\eta(e_k)$ devem gerar $\frac{M}{\mathfrak{m}(p)M}$ como um $C_o^\infty(R^p)$ - módulo e portanto, como $\frac{C_o^\infty(R^p)}{\mathfrak{m}(p)} \simeq R$ - módulo. Ou seja $\dim_R \frac{M}{\mathfrak{m}(p)M} \leq k$.

Podemos aplicar agora o teorema de Preparação de Malgrange Generalizado III.1 para concluir que M é finitamente gerado como $C_o^\infty(R^p)$ - módulo e o corolário III.2.13 do lema de Nakayama para concluir que $e_1,\ldots,e_K$ geram M.

A vantagem do teorema acima é ilustrada pelo seguinte:

III.17 - Corolário |9|

Nas mesmas condições do Teorema acima, se as projeções de $e_1,\ldots,e_k$ formam um conjunto de geradores do espa ço vetorial $\dfrac{M}{\mathfrak{m}^{k+1}(n)M + \mathfrak{m}(p)M}$, então $e_1,\ldots,e_k$ formam um conjunto de geradores de M como um $C_0^\infty(R^p)$ - módulo.

Prova

A prova está feita na demonstração do teorema acima.

III.18 - O nosso objetivo agora será demonstrar um teorema que pode ser interpretado como uma extensão do Teorema Generalizado de Malgrange para funções que dependem continuamente de um parâmetro. Trata-se de uma extensão no sentido de que permite ampliar para uma vizinhança de f em $C_{pr}^\infty(N,P)$ a validade de propriedades de f relacionadas com o Teorema de Malgrange. Trata-se de um resultado bastante técnico e do único lugar na teoria da estabilidade das aplicações diferenciáveis no qual o teorema de divisão é utilizado com toda a sua força.

Este teorema é usado para mostrar que estabilidade infinitesimal implica estabilidade estrutural C^∞ para funções próprias de classe C^∞.

Recordemos algumas notações fixadas no capítulo I e fixemos outras.

(E,e_0): espaço topológico E com um ponto e_0 distinguido.

$C^\infty(N)^E$: R-álgebra dos germes em e_0 de funções contínuas de E em $C^\infty(N)$.

se $\phi \in C^{\infty}(N)^E$, denotemos por $\tilde{\phi}$: $e \in E \to \tilde{\phi}_e$

$\tilde{\phi}_e \in C^{\infty}(N)$ um seu representante.

$C^{\infty}(N)$ pode ser considerado como um subanel de $C^{\infty}(N)^E$ através da injeção canônica i: $C^{\infty}(N) \to C^{\infty}(N)^E$ $f \longmapsto [f]$ onde $[f]$ é o germe da função constante que leva $e \in E$ em f.

Seja av_N: $C^{\infty}(N)^E \to C^{\infty}(N)$ (avaliação em e_o) o homomorfismo definido por $av_N(\phi) = \tilde{\phi}_{e_o}$. Indiquemos por nuc av_N o núcleo da aplicação avaliação, isto é,

$$\text{nuc } av_N = \{\zeta \in C^{\infty}(N)^E \colon \tilde{\zeta}_{e_o} \equiv 0\}$$

Denotemos ainda,

$$C^{\infty}(N,P)^E = \{\text{germes em } e_o \text{ de funções } f\colon E \to C^{\infty}(N,P) \text{ contínuas}\}$$

$$C^{\infty}_{pr}(N,P)^E = \{\text{germes em } e_o \text{ de funções } f\colon E \to C^{\infty}_{pr}(N,P) \text{ contínuas}\}$$

Observe que para cada $f \in C^{\infty}_{pr}(N,P)^E$, para cada $e \in E$ $f(e)\colon N \to P$ é contínua e própria. E dado $F \in C^{\infty}_{pr}(N,P)^E$, isto é, $F\colon E \to C^{\infty}_{pr}(N,P)$ contínua define-se o homomorfismo $F^*\colon C^{\infty}(P)^E \longrightarrow C^{\infty}(N)^E$ por

$$(\widetilde{F^* \circ \phi})_e = \tilde{\phi}_e \circ \tilde{F}_e$$

(Note que a aplicação $e \longmapsto \tilde{\phi}_e \circ \tilde{F}_e$ é contínua apenas no caso em que $\tilde{F}_{e_o}$ é própria).

III.18.1 - Lema [27]

Seja $F \in C^{\infty}_{pr}(N,P)^E$. Então nuc $av_N = F^*$ nuc av_P.

Prova

a) Mostremos que F^* nuc $av_P \subset$ nuc av_N. Seja $h \in F^*$ nuc av_P. Então $h = F^*(\eta)$ para algum $\eta \in$ nuc av_P. Então $h = F^*(\eta)$ onde $\tilde{\eta}_{e_o} \equiv 0$. Assim, $h_{e_o} = \tilde{\eta}_{e_o} \circ \tilde{F}_{e_o} \equiv 0 \circ \tilde{F}_{e_o} \equiv$ $\equiv 0$ o que mostra que $h \in$ nuc av_N.

b) Mostremos que nuc $av_N \subset F^*$ nuc av_P. Seja $\tilde{\alpha}: E \to C^{\infty}(N)$ um representante de $\alpha \in$ nuc av_N ($\therefore \tilde{\alpha}_{e_o} \equiv 0$) e definimos $\bar{\Phi}: E \to R$ por $\bar{\Phi}(e) = \sup_{x \in N} \{|\tilde{\alpha}_e(x)|\}$

De $\tilde{\alpha}_{e_o} \equiv 0$ e do fato de $\tilde{\alpha}$ ser contínua vem que $\bar{\Phi}$ é contínua e $\bar{\Phi}(e_o) = 0$.

Seja $\Phi \in C^{\infty}(P)^E$ o germe em e_o da aplicação

$$\tilde{\Phi}: E \to C^{\infty}(P) \text{ onde } \tilde{\Phi}_e(p) = [\bar{\Phi}(e)]^{1/2},$$

$$\forall\, p \in P.$$

É claro que $\Phi \in$ nuc av_P (pois $\tilde{\Phi}_{e_o} \equiv \bar{\Phi}(e_o) = 0, \forall p$) e que existe $\beta \in C^{\infty}(N)^E$ tal que $\alpha = \beta F^*(\Phi)$.

III.18.2 -

Se $F \in C^{\infty}_{pr}(N,P)^E$ e M é um $C^{\infty}(N)^E$ - módulo podemos considerá-lo como $C^{\infty}(P)^E$ - módulo via F^* e como $C^{\infty}(P)$-módulo via $i \circ \tilde{F}^*_{e_o}$ de maneira natural.

$$\begin{tikzcd} C^\infty(P) \arrow[r, "F^*_{e_o}"] \arrow[rr, bend right, "i \circ F^*_{e_o}"'] & C^\infty(N) \arrow[r, "i"] & C^\infty(N)^E \end{tikzcd}$$

Por exemplo, se M é considerado como $C^\infty(P)$ - módulo via $i \circ F^*_{e_o} \approx F^*_{e_o}$, a multiplicação $\Phi.m$ onde $\Phi \in C^\infty(P)$ e $m \in M$, é dada por

$$\Phi.m = (i \circ F^*_{e_o})\ (\Phi).m = i(F^*_{e_o}\ (\Phi)).m =$$

$$= [F^*_{e_o}\ (\Phi)].m = [\Phi \circ F_{e_o}].m\ ,$$

$$\text{isto é, } \Phi.m = [\Phi \circ F_{e_o}].m \quad .$$

III.19 - Extensão do Teorema Generalizado de Malgrange

Sejam $F \in C^\infty_{pr}(R^n,R^p)^E$ e M um $C^\infty(R^n)^E$ - módulo finitamente gerado tal que $\dfrac{M}{\text{nuc } av_{R^n}.M}$ é finitamente gerado como $C^\infty(R^p)$ - módulo via $i \circ F^*_{e_o}$. Então M é finitamente gerado como $C^\infty(R^p)^E$ - módulo via F^*.

Prova

A prova será feita em etapas análogas às da demonstração do Teorema Generalizado de Malgrange. A diferença essencial reside na versão do Teorema de Divisão um pouco mais complexa que a usual (I.2.14.1) utilizada na 3ª etapa.

1ª Etapa

Suponha que $F \in C^{\infty}_{pr}(N,P)^{E}$ esteja fatorado na forma $F = G \circ H$ onde $G \in C^{\infty}(Q,P)^{E}$ e $H \in C^{\infty}(N,Q)^{E}$ isto é, $F_e = G_e \circ H_e$ para representantes convenientes de F, G e H.

Suponha ainda que o teorema seja verdadeiro para G e H. Então ele é também verdadeiro para F. De fato, seja M um $C^{\infty}(N)^{E}$ - módulo finitamente gerado com $\frac{M}{\text{nuc } av_N . M}$ finitamente gerado sobre $C^{\infty}(P)$ via $F^*_{e_o} = H^*_{e_o} \circ G^*_{e_o}$.

Queremos mostrar que nestas condições M é um $C^{\infty}(P)^{E}$ - módulo finitamente gerado via $F^* = H^* \circ G^*$.

Sejam $m_1,\ldots,m_s$ geradores de M como $C^{\infty}(N)^{E}$ - módulo cujas imagens em $\frac{M}{\text{nuc } av_N . M} = \frac{M}{F^*(\text{nuc } av_P).M}$ o geram como $C^{\infty}(P)$ - módulo via $i \circ F^*_{e_o}$.

Dado $m \in M$ podemos escrever

$$\begin{aligned} m &= \sum_{i=1}^{s} [F_{e_o}]^* \, [\zeta_i] m_i + F^*(\zeta).b = \\ &= \sum_{i=1}^{s} [H_{e_o}]^* \left([G_{e_o}]^* \, [\zeta_i] \right) m_i + H^*.G^*(\zeta).b \, , \end{aligned} \tag{a}$$

onde $\zeta_i \in C^{\infty}(P)$, $b \in M$ e $\zeta \in C^{\infty}(P)^{E}$ com $\tilde{\zeta}_{e_o} \equiv 0$.

Como $G^*(\zeta)_{e_o} = \zeta_{e_o} \circ G_{e_o} \equiv 0$ temos de (a) que

$\frac{M}{G^*(\text{nuc } av_P) M} = \frac{M}{\text{nuc } av_Q . M}$ é finitamente gerado como

$C^{\infty}(Q)$ - módulo via $H^*_{e_o}$. Como estamos supondo que o teorema verdadeiro para H segue que M é finitamente gerado como $C^{\infty}(Q)^E$ - módulo via H*.

Se denotarmos por M' o módulo M enquanto $C^{\infty}(Q)^E$ - - módulo via H*, teremos ainda por (a) que $\frac{M'}{\text{nuc } av_p M'}$ é finitamente gerado como $C^{\infty}(P)$ - módulo via $G^*_{e_o}$. Como o teorema é válido para G, podemos concluir que M' é finitamente gerado sobre $C^{\infty}(P)^E$ via G*, o que implica em M ser finitamente gerado sobre $C^{\infty}(P)^E$ via $F^* = (G \circ H)^* = H^* \circ G^*$.

2ª Etapa

O objetivo agora é decompor F* em um produto de homomorfismo mais simples. Necessitaremos do seguinte lema:

III.19.1 - Lema

Se $f: N \to P$ é contínua e $K \subset N$ é um fechado tal que f/K é própria então existe uma vizinhança L de K em N tal que f/L é própria. Pode-se supor que L é uma subvariedade fechada com bordo. (Para a prova vide |27| pág. 190)

Construiremos a fatoração da seguinte forma: seja $\ell: N \to R^n$ um mergulho (isto é, um difeomorfismo sobre uma subvariedade do R^n) que seja próprio.

Defina

$$N_r = (\tilde{F}_{e_o}, \pi_r \circ \ell)(N) \subset P \times R^r \quad \text{onde}$$

$$\pi_r: R^n \to R^r$$

é a projeção nas r primeiras coordenadas. Temos

$$N_n = (\tilde{F}_{e_o}, \ell)\ (N) \subset P \times R^n.$$

Pondo $P_o = R^P$, definimos indutivamente vizinhanças P_r de N_r em $P_{r-1} \times R$ de tal forma que P_r seja subvariedade com bordo e a projeção ρ_r

$$\rho_r\colon P_r \to P_{r-1}$$

seja própria, $1 \leq r \leq n$.

Além disso podemos construir P_n de modo que sua projeção ρ em R^n seja própria, o que é possível porque

$$\rho_r\colon N_r \to P \times R^r \quad \text{é própria.}$$

Dado

$$\tilde{F}\colon E \to C^\infty_{pr}(N,P)\ , \text{ definimos}$$

$$G \in C^\infty_{pr}\ (N,\ P \times R^n)^E \qquad \text{por}$$

$$\tilde{G}_e(x) = (F_e(x),\ \ell(x)), \text{ para todo } x \in N \quad \text{e}$$

$e \in E'$, onde E' é tal que $(F_e(x), \pi_r \circ \ell(x)) \in P_r$ para todo $e \in E'$.

Sejam ainda $f_r \in C^\infty_{pr}(P_r,\ P_{r-1})^E$, $f_r = [\rho_r/P_r]$.

Pela construção teremos $\tilde{F}_e = \rho_n \circ \ldots \circ \rho_1 \circ \tilde{G}_e$, o que implica em $F^* = G^* \circ f_1^* \circ \ldots \circ f_n^*$. (b)

3ª Etapa

Provaremos agora que cada um dos fatores de (b) satisfaz o teorema.

(α_1) Mostrando que $G^*: C^\infty(P \times R^n)^E \to C^\infty(N)^E$ é sobrejetiva conclui-se que G^* satisfaz o teorema. De fato, se supusermos M um $C^\infty(P_n)^E$ - módulo finitamente gerado, o fato de G^* ser sobre implica diretamente que M é também finitamente gerado como $C^\infty(N)^E$ - módulo via G^*.

Para ver que G^* é sobrejetiva, seja $\varepsilon: C^\infty(N) \longrightarrow C^\infty(R^n)$ uma aplicação linear contínua e tal que

$$\ell^* \circ \varepsilon = id_{C^\infty(N)} .$$

(lembre que ℓ é um mergulho, logo $\ell(N)$ é uma subvariedade de R^n)

Dado $h \in C^\infty(R^n)^E$, defino $h' \in C^\infty(P_n)^E$ como sendo o germe em e_o de

$$e \longmapsto (\rho/P_n)^* \ (\varepsilon(\tilde{h}_e)) \quad ,$$

esta definida por

$$(p,x) \in P_n \longmapsto \varepsilon(\tilde{h}_e \rho_n(p,x)) = (\varepsilon\tilde{h}_e) \ (x).$$

Para representantes convenientes em alguma vizinhança de e_o obtemos

$$(\tilde{G}^*h')_e = \tilde{h}'_e \circ (\tilde{F}_e,\ell) = \varepsilon(\tilde{h}_e(\rho(\tilde{F}_e,\ell))) =$$

$$= \varepsilon(\tilde{h}_e) \circ \ell = \ell^* \circ \varepsilon(\tilde{h}_e) = \tilde{h}_e$$

donde $\qquad h = G^*(h')$,

o que prova que G^* é sobrejetiva.

(α_2) Seja $N \subset P \times R$ uma subvariedade fechada com bordo tal que a projeção canônica $\pi' \colon N \to P$ seja própria.

Seja M um $C^\infty(N)^E$ - módulo finitamente gerado tal que $\dfrac{M}{\text{nuc } av_N.M}$ é um $C^\infty(P)$ - módulo finitamente gerado via π'^*. Então M é finitamente gerado como $C^\infty(P)^E$ - módulo via $[\pi']^*$.

De fato, seja $\{m_1,\ldots,m_s\}$ um conjunto de geradores de M como $C^\infty(N)^E$ - módulo cujas projeções em $\dfrac{M}{\text{nuc } av_N.M}$ o gerem como $C^\infty(P)$ - módulo via π'^*. Dado $m \in M$, existem $\Phi_j \in C^\infty(P)$, $1 \leq j \leq s$, $\phi \in \text{nuc } av_N$ e $b \in M$ tais que

$$m = \sum_{j=1}^{s} [\Phi_j \circ \pi'] m_j + \phi b.$$

Em particular podemos escolher

$$u_{ij} \in C^\infty(P)^E \text{ , } \phi_j \in \text{nuc } av_N \text{ e } b_j \in M$$

tais que se $t \colon N \to R$ indica a projeção canônica

$$(\alpha_3) \quad [t] m_j = \sum_{i=1}^{s} (u_{ij} \circ [\pi']) m_i + \phi_j b_j.$$

Seja $b_j = \sum_{i=1}^{s} \zeta_{ij} m_i$ com $\zeta_{ij} \in C^\infty(N)^E$ e δ_{ij} o símbolo de Kronecker.

Então de (α_3) vem

$$(\alpha_4) \quad 0 = \sum_{i=1}^{s} (\delta_{ij}[t] - u_{ij} \circ [\pi'] - \phi_j \zeta_{ij})\, m_i \ ,$$

$$j = 1,2,\ldots,s.$$

Indicando por

$$\Omega = \det(\delta_{ij}[t] - u_{ij} \circ [\pi'] - \phi_j \zeta_{ij})$$

vemos que Ω é da forma

$$\Omega = [t]^s + \sum u_j \circ [\pi'] \ [t]^{s-j} + \phi$$

onde $u_j \in C^\infty(R^P)^E$, $\phi \in C^\infty(N)^E$ com $\tilde{\phi}_{e_o} \equiv 0$.

Da regra de Cramer segue que

$$(\alpha_5) \quad \Omega m_j = 0 \quad , \quad 1 \leq j \leq s.$$

Então pelo Teorema de Divisão I.2.14.1 aplicado a Ω, segue que para toda $f \in C^\infty(N)^E$, podemos encontrar $q \in C^\infty(N)^E$ e $h_j \in C^\infty(P)^E$ tais que

$$(\alpha_6) \ f = \Omega q + \sum_{j=1}^{s} h_j \circ [\pi'][t]^{p-j}.$$

Seja $m \in M$.

Sendo $\{m_1,\ldots,m_s\}$ um conjunto de geradores de M como $C^\infty(N)^E$ - módulo, existem $b_1,\ldots,b_s \in C^\infty(N)^E$ tais que

$$m = \sum_{j=1}^{s} b_j m_j \ . \quad \text{De } (\alpha_5) \text{ segue que}$$

$$(\alpha_7) \ m = \sum_{j=1}^{s} \left[\Omega q_j + \sum_{i=1}^{s} h_i \circ [\pi'][t]^{s-i}\right] m_j \ .$$

De (α_5) e (α_7) obtemos finalmente

$$m = \sum_{j=1}^{s} \left(\sum_{i=1}^{s} h_i \circ [\pi'][t]^{s-i} \right) m_j$$

o que implica ser $\{[t]^{s-i} m_j\}_{\substack{1 \leq i \leq s \\ 1 \leq j \leq s}}$ um conjunto de geradores de M como um $C^\infty(R^p)^E$ - módulo via $[\pi']^*$.

Isto conclui a prova.

III.20 - Corolário

Sejam $F \in C^\infty_{pr}(N,P)^E$, $A = C^\infty(P)^E$, $B = C^\infty(N)^E$, $J = \text{nuc av}_N$, $I = \text{nuc av}_P$,

M_A um A - módulo finitamente gerado

M_B e N_B B - módulos finitamente gerados

Sejam α: $M_A \to N_B$ um homomorfismo sobre F^* e β: $M_B \to N_B$ um homomorfismo de B - módulos.

Se (i) $\alpha(M_A) + \beta(M_B) + JN_B = N_B$ então

(ii) $\alpha(M_A) + \beta(M_B) = N_B$.

Prova

Combinando a hipótese e o Lema III.18.1 temos

$$N_B = \alpha(M_A) + \beta(M_B) + F^*(I)N_B \quad .$$

Sejam

$$N = \frac{N_B}{\beta(M_B)} \quad \text{e } \pi\colon N_B \to N \text{ a projeção canônica.}$$

Temos que $\pi \circ \alpha$ induz canonicamente um homomorfismo sobrejetor

$$\overline{\pi \circ \alpha}\colon \frac{M_A}{I\, M_A} \to \frac{N}{J\, N} .$$

Daí resulta que $\frac{N}{J\,N}$ é finitamente gerado como $\frac{C^\infty(P)}{I\, C^\infty(P)} = C^\infty(P)$ - módulo via $F^*_{e_o}$.

Em virtude do Teorema III.19, N é finitamente gerado como $C^\infty(P)^E$ - módulo via F^*. Como

$$N = (\pi \circ \alpha)M_A + F^*(I)\; N$$

e como N é um $C^\infty(P)^E$ - módulo finitamente gerado, aplicando-se o Lema de Nakayama podemos concluir que

$$N = (\pi \circ \alpha)M_A \qquad \text{donde}$$

$$N_B = \alpha(M_A) + \beta(M_B), \text{ o que conclui a prova.}$$

III.21 - <u>Um refinamento do Teorema de Preparação de Malgrange Generalizado</u> |7|

No estudo sobre a ordem de determinação para germes finitamente determinados a ferramenta decisiva de Mather é o Teorema de Preparação de Malgrange enquanto que a de

Gaffney |7| é uma versão mais refinada deste teorema dada por:

Teorema

Sejam $f: (R^n,0) \to (R^p,0)$, $g: (R^n,0) \to (R^{p'},0)$ germes C^∞.

Seja M um $(f,g)^* C^\infty_{(0,0)} (R^p \times R^{p'})$ - módulo finitamente gerado.

Se $\dfrac{M}{g^*(\mathfrak{m}_{p'}).M}$ é um espaço vetorial real de dimensão finita, então M é finitamente gerado como $g^*(C^\infty_o (R^{p'}))$-- módulo.

Prova

A prova depende do Teorema da Divisão de Mather , versão I.2.6.

Fatore g pondo

$$R^n \xrightarrow{(f,g)} R^p \times R^{p'} \xrightarrow{\pi_1} R^{p-1} \times R^{p'} \xrightarrow{\pi_2} \ldots \longrightarrow R \times R^{p'} \xrightarrow{\pi_p} R^{p'}$$

e escolha elementos $m_1, m_2, \ldots, m_q$ que geram M como $(f,g)^* C^\infty_{(0,0)} (R^p \times R^{p'})$ - módulo cujas imagens em

$$\frac{M}{[(\pi_1 \circ (f,g))^* \mathfrak{m}(R^{p-1} \times R^{p'})]M}$$

o geram como espaço vetorial sobre R.

(Como $(\pi_1 \circ (f,g))^* \mathfrak{m}(R^{p-1} \times R^{p'}) \supseteq g^*(\mathfrak{m}_{p'})$,

$\dfrac{M}{((\pi_1 \circ (f,g))^* \mathfrak{m}(R^{p-1} \times R^{p'})M}$ é também um espaço vetorial sobre R de dimensão finita).

Qualquer $m \in M$ pode ser escrito por

(a) $$m = \sum_{i=1}^{q} c_i m_i + \sum_{i=1}^{q} z_i m_i$$ onde $c_i \in R$ e z_i está em

$(\pi_1 \circ (f,g)^*)\mathfrak{m}(R^{p-1} \times R^{p'})\ (f,g)^*\ C^{\infty}_{(0,0)}(R^p \times R^{p'})$. Assim,

$z_i = \sum_{\ell} \bar{z}_{i,\ell} \circ (\pi_1 \circ (f,g)).\ \bar{\bar{z}}_{i,\ell} \circ (f,g)$ com

$\bar{z}_{i,\ell} \in \mathfrak{m}(R^{p-1} \times R^{p'})$ e $\bar{\bar{z}}_{i,\ell} \in C^{\infty}_{(0,0)}(R^p \times R^{p'})$.

Seja $t: (R^p \times R^{p'}, (0,0)) \longrightarrow (R,0)$ a projeção complementar de π_1. Então

$$(f,g)^* t.m_i = t\circ(f,g).m_i \overset{(a)}{=} \sum_{j=1}^{q} (c_{ij} + z_{ij})m_j$$

e daí

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \left[t \circ (f,g)\ \delta_{ij} - c_{ij} - z_{ij} \right] \begin{bmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_q \end{bmatrix}$$

Seja $\Delta = \det \left[t\ \delta_{ij} - c_{ij} - \sum_{\ell} (\bar{z}_{i,\ell,j} \circ \pi_1)(\bar{\bar{z}}_{i,\ell,j}) \right]$

Então, pela regra de Cramer, $\Delta(f,g)m_i = 0$, $i = 1,\dots,q$ e desenvolvendo o determinante vê-se que Δ é regu lar de ordem r onde $r \leq q$ visto que $\Lambda \Big|_{(\ker \pi_1, 0)}$ é um polinômio mônico em t de ordem q.

Como $\Delta \circ (f,g)M = 0$, temos que M é um

$$\frac{(f,g)^* C^\infty_{(0,0)} (R^p \times R^{p'})}{(f,g)^*(\Delta . C^\infty_{(0,0)} (R^p \times R^{p'})} \text{ - módulo.}$$

Mas, dado $h \in C^\infty_{(0,0)} (R^p \times R^{p'})$, pelo teorema da divisão I.2.6 aplicado a Δ, existem s em $C^\infty_{(0,0)} (R^p \times R^{p'})$, $u: (R^p \times R^{p'}) \longrightarrow R^r$ tais que $h = s\,\Lambda + R_u$. Então M é gerado como um $(\pi_1 \circ (f,g)^*)\ C^\infty_{(0,0)} (R^{p-1} \times R')$-módulo por $t^i \circ (f,g)m_j$, $0 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq q$ (visto que $\Delta(f,g)m_j = 0$, $j = 1, \ldots, q$) isto é M é um $(\pi_1 \circ (f,g)^*)\ C^\infty_{(0,0)} (R^{p-1} \times R^{p'})$ - módulo finitamente gerado.

Procedendo deste modo, mostra-se que M é um $(\pi_n \circ \ldots \circ \pi_1 \circ (f,g))^*\ C^\infty_o (R^{p'})$ - módulo finitamente gerado e portanto um $g^*\ C^\infty_o (R^{p'})$ - módulo finitamente gerado.

III.22 - Nota sobre Teorema III.21

(a) A principal diferença entre este teorema e o usual é que M pode não ser um $C^\infty_{(x,x')} (R^p \times R^{p'})$ módulo. O teorema usual é um corolário deste se substituirmos f por um germe de difeomorfismo $\pi: (R^n, x) \longrightarrow (R^n, x)$.

(b) Comparando o resultado de Mather com o de Gaffney em |7| sobre a estimativa da ordem de determinação para germes finitamente determinados temos: - se f é um germe estável, então a ordem de determinação de f encontrada por T. Gaffney usando o Teorema III.21 coincide com a de Mather, que é a melhor possível. No entanto, a estimativa de T. Gaffney para germes finitamente determinados, não estáveis, usando o Teorema III.21 foi muito melhorada. Veja o exemplo:

T. Gaffney mostra que $f(x,y) = (x,y^3 + x^2y)$ é 6 - determinada enquanto que pela estimativa de Mather ela é da ordem de 10^{24} - determinada, que é uma estimativa astronômica.

CAPÍTULO IV

EXEMPLOS DE APLICAÇÕES DO TEOREMA DE PREPARAÇÃO DE MALGRANGE

Exemplo IV.1

Dado um germe f de função real de variável real, na origem, diferenciável existe um germe g de função diferenciável tal que

$$f\ (x) = \begin{cases} g(x^2) & \text{se } f \text{ é par} \\ x\ g(x^2) & \text{se } f \text{ é ímpar} \end{cases}$$

(Este resultado é fácil de se provar se f é uma função analítica real ou complexa perto do zero usando série de Taylor, mas não é totalmente óbvio neste caso. Este resultado foi provado primeiramente por H. Whitney).

Solução

Sejam $x_o = o$ no domínio e $y_o = o$ na imagem de f. Seja $M = C^\infty_{x_o}(R)$ o qual é, obviamente, um $C^\infty_{x_o}(R)$ - módulo finitamente gerado.

Seja $\phi : R \longrightarrow R$ dada por $\phi(x) = x^2$ e então via $\phi^*: C^\infty_{y_o}(R) \longrightarrow C^\infty_{x_o}(R)$, M torna-se um $C^\infty_{y_o}(R)$ - módulo (isto é, a ação externa é dada por

$(b\,m)(x) = b(x^2)\,m(x)$ onde $b \in C^\infty_{y_o}(R)$ e $m \in M = C^\infty_{y_o}(R)$.

Observe que $\phi^* \mathfrak{m}_{y_o} C^\infty_{x_o}(R) = < x^2 >$ e segue portan to que $\dfrac{C^{\infty}_{x_o}(R)}{\phi^*\mathfrak{M}_{y_o} C^{\infty}_{x_o}(R)}$ é gerado pelas imagens de 1 e x neste quociente.

Então, aplicando-se o Teorema de Preparação de Malgrange Generalizado III.1 e o corolário II.2.13 do Lema de Nakayama podemos concluir que 1 e x geram $M = C^{\infty}_{x_o}(R)$ como $C^{\infty}_{y_o}(R)$ - módulo via ϕ^*, isto é,

$\forall f \in C^{\infty}_{x_o}(R)$, $\exists$ a, b $\in C^{\infty}_{y_o}(R)$ tais que

(α) $f(x) = \phi^*(a)(x) . 1 + \phi^*(b)(x) . x = a(x^2) . 1 + b(x^2) . x$

Agora, (1) <u>se f é par</u> então $f(x) = f(-x), \forall x \in R$ e da igualdade (α) acima segue que

$$a(x^2).1 + b(x^2)(x) = a(-x)^2).1 + b((-x)^2)(-x) \Rightarrow$$

$$2b(x^2)(x) = 0, \forall x \in R \Rightarrow b \equiv 0.$$

Portanto, numa vizinhança do zero $f(x) = a(x^2)$.

(2) <u>se f é impar</u> então $f(x) = -f(-x), \forall x \in R$ e da igualdade (α) acima segue que

$$a(x^2) . 1 + b(x^2).x = -a((-x)^2).1 - b((-x)^2)(-x) \Rightarrow$$

$$2a(x^2).1 = 0, \forall x \in R \Rightarrow a = 0$$

Portanto, $f(x) = b(x^2).x$ numa vizinhança do zero.

<u>Exemplo IV.2</u>

Denotemos por S_n o grupo de permutações do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$. Se $f \in C^{\infty}_o(R^n)$ e $\sigma \in S_n$ definimos uma ação de S_n em $C^{\infty}_o(R)$ por

$$(\sigma . f)(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}).$$

Diremos que f é simétrica quando $\sigma . f = f$, $\forall f \in S_n$.

Chamaremos de funções simétricas elementares definidas no R^n, às seguintes funções simétricas :

se $x = (x_1 , \dots , x_n) \in R^n$

$$S_1(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$S_2(x) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i \; x_j$$

$$\vdots$$

$$S_n(x) = x_1 \, x_2 \, \dots \, x_n$$

Demonstraremos agora um resultado devido a G.Gleaser que garante que

"Toda função simétrica f em C_o^∞ (R) é da forma

(A) $f(x) = g(S_1(x), \dots, S_n(x))$ onde $g \in C_o^\infty (R^n)$".

Para isto utilizaremos o seguinte resultado devido a Newton "Se f é uma função polinomial simétrica, existe uma única g também polinomial que satisfaz (A)".(Jacy Monteiro - corolário pag. 337).

Seja $S : (R^n, o) \longrightarrow (R^n, o)$ definida por

$$S = (S_1, \dots , S_n)$$

onde as S_i são as funções simétricas elementares.

Seja $M = C_o^\infty (R^n)$, o qual é um $C_o^\infty (R^n)$ - módulo finitamente gerado. Mostremos que M é também finitamente gerado como $C_o^\infty (R^n)$ - módulo via S^*. Para isto, mostremos que $\dfrac{M}{S^*\mathfrak{m} . M} = \dfrac{C_o^\infty (R^n)}{S^*\mathfrak{m} . C_o^\infty(R^n)}$ é gerado pelas classes de equivalên cia de monômios com grau < n^n.

De fato, como

$$(B) \quad \prod_{i=1}^{n} (t - x_i) = t^n + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \, t^{n-i} \, S_i(x)$$

(Jacy Monteiro, lema pag. 336)

fazendo-se $t = x_j$ vem

$$0 = \prod_{i=1}^{n} (x_j - x_i) = x_j^n + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \, x_j^{n-i} \, S_i(x)$$

ou seja

$$(C) \quad x_j^n = - \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \, x_j^{n-i} \, S_i(x) \quad , \quad j = 1,2,\ldots, n$$

o que mostra que x_j^n pertence a $S^*\mathfrak{m} . C_0^\infty(R^n)$ $\forall\, j = 1, \ldots, n$.
De fato, $h \in S^*\mathfrak{m} \iff h = S^*g, \; g \in \mathfrak{m}$.

Mas $g \in \mathfrak{m} = \langle x_1, \ldots , x_n \rangle \; C_0^\infty(R^n) \iff$

$$g(x) = a_1(x)x_1 + a_2(x)x_2 + \ldots + a_n(x)x_n \, ,$$

onde $a_i \in C_0^\infty (R^n)$,

Então

$$\begin{aligned} h(x) &= S^*(g)(x) = (g \circ S)(x) = g(S(x)) = \\ &= g(S_1(x), \ldots , S_n(x)) = \\ &= b_1(x)S_1(x) + b_2(x)S_2(x) + \ldots + b_n(x)S_n(x) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} b_i(x) S_i(x) , \; b_i \in C_0^\infty(R^n) . \end{aligned}$$

Como $x_j^n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \, x_j^{n-i} \, S_i(x)$ e $b_i(x) = (-1)^{i+1} \, x_j^{n-i}$, $i = 1, \ldots , n$ são tais que $b_i \in C_0 \, (R^n)$, concluimos que $x_j^n \in S^*\mathfrak{m} . C_0^\infty \, (R^n)$, $\forall j = 1, \ldots , n$.

Então qualquer monômio em x_j que contenha um expoente $\geq n$ está em $S^*\mathfrak{m} \cdot C_0^\infty(R^n)$. Resulta, portanto, que $\forall\, k \geq n^n$, $\mathfrak{m}^k \subset S^*\mathfrak{m}\, C_0^\infty(R^n)$.

Como os monômios de grau $< k$ geram o espaço vetorial $\dfrac{C_0^\infty(R^n)}{\mathfrak{m}^k}$ então $\dfrac{C_0^\infty(R^n)}{S^*\mathfrak{m}\, C_0^\infty(R^n)}$ será gerado pelas classes de monômios de grau $< n^n$.

Aplicando o Teorema de Preparação de Malgrange e o corolário II.2.13 do Lema de Nakayama vem que os monômios de grau $< n^n$ geram $M = C_0^\infty(R^n)$ como um $C_0^\infty(R^n)$ - módulo via S^*.

Sejam $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_\ell$ estes monômios.

Então dada $f \in C_0^\infty(R^n)$ existirão $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\ell$ em $C_0^\infty(R^n)$ tais que:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^{\ell} S^*(\alpha_i)(x)\, \Psi_i(x) = \\ &= \sum_{i=1}^{\ell} \Psi_i(x)\, \alpha_i(S(x)) \,. \end{aligned} \tag{D}$$

Como f e S_i, $i = 1, \ldots, n$ são funções simétricas tem-se

$$f(x) = \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^{\ell} \Big(\sum_{\sigma \in S_n} \Psi_i(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) \Big)\, \alpha_i(S(x))$$

[aplicando o operador de simetrização que é dado por

$$Lg(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} g(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) \Big]$$

e os polinômios $P_i(x) = \dfrac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \Psi_i(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$ são obviamente simétricos.

Aplicando-se o Teorema de Newton a cada um dos polinômios P_i, $i = 1, \ldots, \ell$ então existirão polinômios Q_i tais que $P_i(x) = Q_i(S_1(x), \ldots, S_n(x))$ ou seja $P_i = Q_i \circ S$.

Assim, como $f(x) = \sum_{i=1}^{\ell} P_i(x)\alpha_i(S(x))$ tem-se

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\ell} Q_i(S(x)) \ \alpha_i(S(x)) = \sum_{i=1}^{\ell} (Q_i\alpha_i)(S(x)) =$$

$$= g(S(x))$$

onde $g = \sum_{i=1}^{\ell} Q_i\alpha_i$ é obviamente um elemento de $C_o^\infty(R^n)$. Assim provamos que

$$f(x) = g(S_1(x), \ldots, S_n(x)) \text{ onde } g \in C_o^\infty(R^n)$$ e

as S_i são as funções simétricas elementares.

<u>Nota</u>: Vide comentário na página 64 sobre o trabalho de Gerard Barbançon |2|.

<u>Exemplo IV.3</u>

Seja $f \in C_o(R^n)$ e $f(x_1,\ldots,x_n) = f(x_1,\ldots,x_{i-1},-x_i,x_{i+1},\ldots,x_n)$ para $1 \leq i \leq n$. Então existe $g \in C_o^\infty(R^n)$ tal que $f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_i^2, \ldots, x_n)$.

<u>Solução</u>

Seja $\phi_i : R^n \longrightarrow R^n$ a aplicação C^∞ definida por

$$\phi_i(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_i^2, \ldots, x_n).$$

Então, se $M = C_o^\infty(R^n)$, o qual é um $C_o^\infty(R^n)$ - módulo finitamente gerado, M pode ser visto como um $C_o^\infty(R^n)$ - módulo via o homomorfismo ϕ_i^*,

$$\phi_i^* : C_o^\infty (R^n) \longrightarrow C_o^\infty (R^n) \quad .$$

Como $\phi_i^* \mathcal{M} C_o^\infty (R^n) = < x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i^2, x_{i+1}, \ldots, x_n >$ segue que $\dfrac{M}{\phi_i^* \mathcal{M} . M}$ é gerado pelas imagens de 1 e x_i neste quociente. Então por III.1 e II.2.13 podemos concluir que 1, x_i geram $M = C_o^\infty (R^n)$ como $C_o^\infty (R^n)$ - módulo via ϕ_i^* , isto é , $\forall$ $f \in C_o^\infty (R^n)$, $\exists$ $g, h \in C_o^\infty (R^n)$ tais que

$f(x) = \phi_i^*(g)(x).1 + \phi_i^*(h)(x)x_i$, isto é,

$f(x) = (g \circ \phi_i)(x) . 1 + (h \circ \phi_i)(x)x_i$, ou ainda

$f(x) = g(x_1, \ldots , x_i^2, \ldots, x_n) . 1 + h(x_1, \ldots, x_i^2, \ldots, x_n) . x_i \ (\alpha)$

Agora, se f é tal que $f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, -x_i, \ldots, x_n)$ então de (α) segue que $h \equiv 0$.

Logo, neste caso, $f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_i^2, \ldots, x_n)$ conforme queríamos mostrar.

<u>Exemplo IV.4</u> (Funções Genéricas do plano no plano)

Sejam X e Y duas cópias do R^2 com coordenadas (x_1, x_2), (y_1, y_2) respectivamente.

Seja Ω um aberto em X e seja $F = (f_1, f_2)$ uma função C^∞ de Ω em Y. Então

(a) Existe F' tão perto quanto desejarmos de F em $C^\infty (\Omega, Y)$ tendo a seguinte propriedade: para todo ponto $(x_1, x_2) \in \Omega$, o posto da matriz jacobiana de F' é ≥ 1.

De fato, considere a função

$$H = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right) : \Omega \longrightarrow R^4 \ , \ H \in C^\infty .$$

Pelo Teorema de Sard, sua imagem tem medida nula . Seja então $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ um ponto que não seja da imagem (o qual pode ser escolhido arbitrariamente pequeno). Podemos tomar

$$F' : \begin{cases} f_1' = f_1 - \lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 \\ f_2' = f_2 - \lambda_3 x_1 - \lambda_3 x_2 \end{cases}$$

. É claro que

1) posto $J(F') \geq 1$, $\forall \ (x_1, x_2) \in \Omega$ pois sendo

$$J(F') = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} - \lambda_1 & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} - \lambda_2 \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} - \lambda_3 & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} - \lambda_4 \end{bmatrix}$$

, se existir $(a,b) \in \Omega$

tal que posto $J\ (F') = o$ então $\lambda_1 = \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a,b)$, $\lambda_2 = \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(a,b)$ $\lambda_3 = \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(a,b)$ e $\lambda_4 = \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(a,b)$, o que significa que $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = H(a,b) \in \operatorname{Im} H$, o que contraria a escolha de $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$.

2) F' está suficientemente próximo de F (devido a definição de F' e a escolha de $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ arbitrariamente pequeno).

(b) Supondo que o posto de F é ≥ 1 em qualquer ponto de Ω e tomando Ω pequeno, podemos supor que $f_1 = x_1$.

De fato, sendo posto $F \geq 1$, sem perda de generalidade podemos supor que $\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(P_o) \neq o$. Pela continuidade de

$\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}$ existe uma vizinhança V_1 de P_o na qual esta se conserva diferente de zero. Efetuando em V_1 a mudança de coordenadas

$$(x_1,x_2) \xrightarrow{\Psi} (x_1',x_2') = (f_1(x_1,x_2),x_2)$$

temos que nas novas coordenadas F se escreve

$$F : \begin{cases} f_1' = x_1' \\ f_2' = f_2'(x_1',x_2') \end{cases}$$

Abandonando as linhas concluimos que F nas vizinhanças de um ponto de singularidade possui sistemas de coordenadas na fonte e na meta nos quais se escreve na forma :

$$F : \begin{cases} f_1 = x_1 \\ f_2 = f_2(x_1,x_2) \end{cases}$$ ou tomando $f_2 = f$ tem-se

$$F(x_1,x_2) = (x_1,f(x_1,x_2))$$

Vamos mostrar que existe f' arbitrariamente próxima de f em $C^\infty(\Omega, R)$ com a seguinte propriedade :

(c) $\forall$ a $\in \Omega$ onde $\dfrac{\partial f'}{\partial x_2}(a) = \dfrac{\partial^2 f'}{\partial x_2^2}(a) = o$ tem-se

$$\frac{\partial^2 f'}{\partial x_1\, \partial x_2}(a) \neq o \quad e \quad \frac{\partial^3 f'}{\partial x_2^3}(a) \neq o$$

A prova é como segue : usando o Teorema de Sard mostra-se que "o conjunto dos $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in R^4$ para os quais $f' = f - \lambda_1 x_2 - \lambda_2 x_1 x_2 - \lambda_3 x_2^2 - \lambda_4 x_2^3$ não satisfaz (c) é de medida nula".

Dizer que $f' = f - \lambda_1 x_2 - \lambda_2 x_1 x_2 - \lambda_3 x_2^2 - \lambda_4 x_2^3$ não satisfaz (c) significa que existe $a = (a_1, a_2) \in \Omega$ tal que

$$\begin{cases} (1) \quad \dfrac{\partial f'}{\partial x_2}(a) = \dfrac{\partial^2 f'}{\partial x_2^2}(a) = \dfrac{\partial^2 f'}{\partial x_1 \partial x_2}(a) = 0 \\ \qquad\qquad\qquad \text{ou} \\ (2) \quad \dfrac{\partial f'}{\partial x_2}(a) = \dfrac{\partial^2 f'}{\partial x_2^2}(a) = \dfrac{\partial^3 f'}{\partial x_2^3}(a) = 0 \end{cases}$$

Suponha que (1) ocorre. Então (1) acarreta em

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a) = \lambda_1 + a_1 \lambda_2 + 2\, a_2 \lambda_3 + 3\, a_2^2 \lambda_4 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2}(a) = 2\lambda_3 + 6\, a_2 \lambda_4 \qquad \Rightarrow \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) = \lambda_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a) - a_1 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) - a_2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) + 3a_2^2 \lambda_4 \\ \lambda_2 = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) \\ \lambda_3 = \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) - 3\, a_2 \lambda_4 \end{cases}$$

Usando estas equações definimos uma aplicação $\Psi_{\lambda_4} : R^2 \longrightarrow R^3$ de classe C^∞ e independente de λ_4 pondo $\Psi_{\lambda_4}(a_1, a_2) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

A partir de Ψ_{λ_4} podemos definir $\Psi : \Omega \times R \longrightarrow R^4$ de classe C^∞ pondo

$$\Psi(a_1, a_2, \lambda_4) = (\Psi_{\lambda_4}(a_1, a_2), \lambda_4) .$$

Usando o Teorema de Sard vemos que a imagem de Ψ tem medida nula. Então escolhendo $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ no complementar da imagem de Ψ evitaremos que (1) ocorra.

Usando (a) e (b) prova-se o seguinte :

Sejam M e N duas variedades C^∞ de dimensão 2 que são enumeráveis no infinito e seja K um subconjunto compacto de M. Seja $C^\infty(M, N)$ com a topologia da convergência uniforme em qualquer conjunto compacto de funções e suas derivadas de todas as ordens. Então o conjunto L das funções de $C^\infty(M,N)$ cujos pontos críticos em K satisfazem (c) é aberto e denso. De fato, para toda a vizinhança compacta parametrizada $U = \{(x_1, x_2)\}$ de M o conjunto dos $F \in C^\infty(M, N)$ com posto de $F \geq 1$ tais que (i) F/U tem a forma $y_1 = x_1$, $y_2 = f(x_1, x_2)$

(ii) f satisfaz a propriedade (c)

é aberto em $C^\infty(M, N)$, o que mostra que L é aberto. Além disso, se $a \in K$ e F é tal que posto $F \geq 1$ existe uma vizinhança V de a e uma vizinhança W de F tal que para todo H em W pode ser aproximado por F' em W tal que F'/V satisfaz (c), devido ao resultado provado em (b).

Vamos olhar mais de perto para estes pontos críti cos. Tomaremos por simplicidade o em M e em N. Existem dois tipos que não podem ser reduzidos um ao outro.

<u>Tipo I</u>

$$F(x_1,x_2) = (x_1,f(x_1,x_2) \ , \ \frac{\partial f}{\partial x_2}(o) = o, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(o) \neq o \ (\alpha_1)$$

Sabemos que $M = C_o^\infty(R^2)$ é um $C_o^\infty(R^2)$ - módulo via o o homomorfismo induzido por F

$$F^* : C_o^\infty(R^2) \longrightarrow C_o^\infty(R^2) \quad .$$

Encontremos os geradores do espaço vetorial

$$\frac{C_o^\infty(R^2)}{F^*(\mathfrak{m})C_o^\infty(R^2)} = \frac{M}{F^*(\mathfrak{m}).M}$$

Como $g \in F^*(\mathfrak{m}) \iff \exists\, h \in \mathfrak{m} = \langle x_1, x_2\rangle$ tal que $g = F^*(h)$ com $h(x_1,x_2) = a_1(x_1,x_2)\ x_1 + a_2(x_1,x_2)\ x_2$, com $a_1, a_2 \in C_o^\infty(R^2)$. Então

$$g(x_1,x_2) = (h \circ F)(x_1,x_2) = h(F(x_1,x_2) = h(x_1,f(x_1,x_2))$$
$$= b_1(x_1,x_2)x_1 + b_2(x_1,x_2)\,f(x_1,x_2)$$

com $b_1, b_2 \in C_o^\infty(R^2)$. Assim, dividir por $F^*(\mathfrak{m}_o)C_o^\infty(R^2)$ equivale a escrever $x_1 = o$ e $f(x_1,x_2) = o$, $\forall\ (x_1,x_2)$. Então as classes de 1 e x_2 geram $\dfrac{C_o^\infty(R^2)}{F^*(\mathfrak{m})C_o^\infty(R^2)}$ e pelo corolário III.3 do Teorema de Preparação de Malgrande vem que 1, x_2 geram $M = C_o^\infty(R^2)$ como $C_o^\infty(R^2)$ - módulo via F^*.

Em particular, como $x_2^2 \in M = C_o^\infty(R^2)$ existirão ϕ, $\Psi \in C_o^\infty(R^2)$ tais que

$$x_2^2 = \phi(x_1,f(x_1,x_2)) \cdot 1 + 2\Psi(x_1,f(x_1,x_2))x_2 \quad . \qquad (\alpha_2)$$

Temos que $\phi(o) = \Psi(o) = o$. De fato, de (α_2) segue $o = \phi(o,o) + 2\Psi(o,o) \cdot o \Rightarrow \phi(o,o) = o$. Ainda, derivando (α_2) em x_2 vem :

$$2x_2 = \frac{\partial\phi}{\partial x_2}(x_1,f(x_1,x_2))\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2) + 2\frac{\partial\Psi}{\partial x_2}(x_1,f(x_1,x_2))\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2)x_2$$

$$+ 2\Psi(x_1,f(x_1,x_2))$$

que no ponto $(x_1,x_2) = (o,o)$ dá :

$$o = \left[\frac{\partial\phi}{\partial x_2}(o,o) + 2\frac{\partial\Psi}{\partial x_2}(o,o)\right]\frac{\partial f}{\partial x_2}(o,o) + 2\Psi(o,o) \Rightarrow \Psi(o,o) = o \quad .$$

Empregando as mudanças de coordenadas

$$\mu : \begin{cases} x_1' = x_1 \\ x_2' = x_2 - \Psi(x_1,f(x_1,x_2)) \end{cases}$$

$$\eta : \begin{cases} y_1' = y_1 \\ y_2' = \phi(y_1,y_2) + \Psi^2(y_1,y_2) \end{cases}$$

deduzimos de (α_1) e (α_2) que (x_1,x_2') e (y_1,y_2') são coordenadas locais no zero e que neste sistema de coordenadas nossa função toma a forma canônima de Tipo I : $f_1 = x_1$, $f_2 = x_2^2$.

De fato

1)
$$\begin{tikzcd} (x_1,x_2) & R^2,o \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\mu"'] & R^2,o \arrow[d, "\eta"] & (y_1,y_2) \\ (x_1',x_2') & R^2,o \arrow[r, "G"'] & R^2,o & (y_1',y_2') \end{tikzcd}$$

Se $G(x_1', x_2') = (x_1', x_2'^2)$ mostremos que $\eta \circ F \circ \mu^{-1} = G$

$$(\eta \circ F)(x_1,x_2) = \eta(F(x_1,x_2)) = \eta(x_1,f(x_1,x_2)) =$$

$$= (x_1, \phi(x_1,f(x_1,x_2)) + \Psi^2(x_1,f(x_1,x_2)) \qquad \text{(I)}$$

$$(G \circ \mu)(x_1,x_2) = G(\mu(x_1,x_2)) = G(x_1,x_2 - \Psi(x_1,f(x_1,x_2))) =$$

$$= (x_1, (x_2 - \Psi(x_1,f(x_1,x_2)))^2)$$

$$= (x_1, x_2^2 - 2x_2\Psi(x_1,f(x_1,x_2)) + \Psi^2(x_1,f(x_1,x_2)))$$

$$= (x_1, \phi(x_1,f(x_1,x_2)) + \Psi^2(x_1,f(x_1,x_2)) \qquad \text{(II)}$$

(I) = (II) $\Rightarrow G = \eta \circ F \circ \mu^{-1}$

2) μ é mudança de coordenadas

$$\mu : \begin{cases} x_1' = x_1 \\ x_2' = x_2 - \Psi(x_1, f(x_1, x_2)) \end{cases} \Rightarrow$$

$$J\mu = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -D_1\Psi.1 - D_1\Psi \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & 1 - D_2\Psi \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix}.$$

No ponto (o, o)

$$J\mu(o,o) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -D_1\Psi(o) - D_1\Psi(o)\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(o) & 1 - D_2\Psi(o) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \det J\mu(o,o) = 1 \neq o \Rightarrow \mu$ é mudança de coordenadas.

3) η é mudança de coordenadas

$$\eta : \begin{cases} y_1' = y_1 \\ y_2' = \phi(y_1, y_2) + \Psi^2(y_1, y_2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$J\eta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ D_1\phi + 2\Psi\ D_1\Psi & D_2\phi + 2\Psi\ D_2\Psi \end{bmatrix}.$$ No ponto (o,o)

$$J\eta(o,o) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ D_1\phi & D_2\phi \end{bmatrix}$$ visto que $\Psi(o,o) = o$.

det $J\eta(o,o) = D_2\phi(o,o)$. Mostremos que $D_2\phi(o,o) \neq o$. Derivando (α_2) duas vezes em relação a x_2 tem-se :

$$2x_2 = D_2\phi(x_1,f)\frac{\partial f}{\partial x_2} + 2\Psi(x_1,f) + 2x_2\ D_2\Psi(x_1,f)\frac{\partial f}{\partial x_2}$$

$$2 = D_2(D_2\phi)\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 + D_2\phi\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + 4\ D_2\Psi\frac{\partial f}{\partial x_2} + 2x_2\ D_2(D_2\Psi)\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2$$

$$+ 2x_2 D_2\ \Psi\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$$, que no ponto (o,o) nos fornece :

$$2 = D_2\ \phi(o,o)\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(o,o) \Rightarrow D_2\ \phi(o,o) \neq o.$$

Assim η é também mudança de coordenadas.

<u>Tipo II</u>

$F(x_1,x_2) = (x_1, f(x_1,x_2))$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}(o) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(o) = o$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(o) \neq o$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x_2^3}(o) \neq o$ (β_1)

Temos que f é regular de ordem 3 em x_2. Da 3 - regularidade de f segue que

$$<x_1, f>_{C_o^\infty(R^2)} = <x_1, x_2^3>_{C_o^\infty(R^2)} \text{ e portanto,}$$

$$\frac{C_o^\infty(R^2)}{F^* \mathfrak{m}\, C_o^\infty(R^2)}$$ é um espaço vetorial de dimensão finita gerado pelas classes das funções 1, x_2, x_2^2 .

Logo pelo corolário III.3 do Teorema de Preparação de Malgrange $\{1, x_2, x_2^2\}$ gera o $C_o^\infty(R^2)$ como $C_o^\infty(R^2)$ - módulo via F*.

Em particular, como $x_2^3 \in C_o^\infty(R^2)$ existem funções ϕ, Ψ, $\Theta \in C_o^\infty(R^2)$ tais que

$$x_2^3 = \phi(x_1, f(x_1,x_2)) + \Psi(x_1, f(x_1,x_2))x_2 + 3\theta(x_1, f(x_1,x_2))\, x_2^2 \quad (\beta_2)$$

Temos que $\phi(o) = \Psi(o) = \Theta(o) = o$. De fato, (β_2) no zero => $o = \phi(o, o) + \Psi(o, o) . o + 3\Theta(o, o) . o$ =>

$o = \phi(o, o)$

Derivando (β_2) em x_2 e depois calculando a derivada no zero :

$$3x_2^2 = D_2\phi \frac{\partial f}{\partial x_2} + D_2\Psi \frac{\partial f}{\partial x_2} . x_2 + \Psi + 6\Theta\, x_2 + 3D_2\Theta \frac{\partial f}{\partial x_2} . x_2^2 \quad (\beta_3)$$

tem-se $\Psi(o, o) = o$.

Derivando (β_3) em x_2 novamente tem-se

$$6x_2 = D_2(D_2\phi)\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 + D_2\phi \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + D_2\Psi \frac{\partial f}{\partial x_2} + D_2(D_2\Psi)\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 x_2 +$$

$$+ D_2\Psi \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} x_2 + D_2\Psi \frac{\partial f}{\partial x_2} + 6D_2\Theta \frac{\partial f}{\partial x_2} + 6\Theta +$$

$$+ 6x_2 D_2 \Theta \frac{\partial f}{\partial x_2} + 3D_2 (D_2\Theta)\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 x_2^2 + 3D_2 \Theta \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} x_2^2 \qquad (\beta_4)$$

e lembrando que $\frac{\partial f}{\partial x_2}(o) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(o) = f(o) = o$ vem $o = 6\Theta(o,o)$, isto é, $\Theta(o,o) = o$.

Além disso podemos, sem perda de generalidade, supor que $\Theta \equiv o$. Para ver isto consideremos a mudança de coordenadas locais em M

$$\alpha : \begin{cases} x_1' = x_1 \\ x_2' = x_2 - \Theta(x_1, f(x_1,x_2)) \end{cases}$$

1) $$J\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -D_1\Theta - D_2\Theta \frac{\partial f}{\partial x_1} & 1 - D_2\Theta \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix} \Rightarrow J\alpha(o,o) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \det J\alpha(o,o) = 1 \neq o \Rightarrow \alpha$ é mudança de coordenadas.

2) A mudança α faz com que o termo em x_2^2, na expressão (β_2) de x_2^3, desapareça. De fato,

$$x_2'^3 = (x_2 - \Theta(x_1, f(x_1,x_2)))^3 = x_2^3 - 3x_2^2\Theta + 3x_2\Theta^2 - \Theta^3 =$$

$$= \phi + x_2\Psi + 3x_2\Theta^2 - 3\Theta^3 + 2\Theta^3 =$$

$$= \phi + x_2\Psi + 3\Theta^2 [x_2 - \Theta] + 2\Theta^3 =$$

$$= \phi + x_2\Psi - \Psi\Theta + \Psi\Theta + 3\Theta^2 [x_2 - \Theta] + 2\Theta^3 =$$

$$= \phi + 2\Theta^3 + \Psi\Theta + \Psi [x_2 - \Theta] + 3\Theta^2 [x_2 - \Theta] =$$

$$= \phi + \theta\,[2\theta^2 + \Psi] + [\Psi + 3\theta^2]\,[x_2 - \theta] =$$

$$= \phi + \theta\,[2\theta^2 + \Psi] + [\Psi + 3\theta^2]\,x_2' \quad .$$

As condições (β_1) e (β_2) mostram que podemos tomar as coordenadas :

$$\mu : \begin{cases} x_1' = \Psi(x_1, f(x_1,x_2) \\ \\ x_2' = x_2 \end{cases} \qquad \text{em} \quad M$$

$$\eta : \begin{cases} y_1' = \Psi(y_1,y_2) \\ \\ y_2' = \phi(y_1,y_2) \end{cases} \qquad \text{em} \quad N \; .$$

De fato,

$$J\mu = \begin{bmatrix} D_1\Psi + D_2\Psi \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & D_2\Psi \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det J\mu(o) = D_1\Psi(o) + D_2\Psi(o)\frac{\partial f}{\partial x_1}(o) \; .$$

Derivando (β_3) em x_1, obtêm-se :

$$o = D_1(D_2\phi)\,\frac{\partial f}{\partial x_2} + D_2\phi\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + D_1\Psi + D_2\Psi\frac{\partial f}{\partial x_1} +$$

$$x_2 D_1\,(D_2\Psi\,\frac{\partial f}{\partial x_2}) + 6x_2(D_1\theta + D_2\theta\frac{\partial f}{\partial x_1}) + 3x_2^2\,D_1\,(D_2\theta \ldots)$$

que no zero nos dá

$$o = D_2\phi(o)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(o) + D_1\Psi(o) + D_2\Psi(o)\,\frac{\partial f}{\partial x_1}(o) \qquad \Rightarrow$$

$$D_1\Psi(o) + D_2\Psi(o)\,\frac{\partial f}{\partial x_1}(o) = -\,D_2\phi(o)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(o) \neq o \Rightarrow$$

det $J\mu(o) \neq o \Rightarrow \mu$ é mudança de coordenadas.

Analogamente, mostra-se para η.

Finalmente, com estas mudanças de coordenadas, obtém-se a forma canônica do tipo II :

$$f_1 = x_1 \qquad f_2 = -\,x_1x_2 + x_2^3$$

De fato

$$\begin{tikzcd}
(x_1,\ x_2) & R^2,o \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\mu \circ \alpha"'] & R^2,\ o \arrow[d, "\eta"] & (y_1,\ y_2) \\
(x_1',\ x_2') & R^2,o \arrow[r, "F'"'] & R^2,\ o & (y_1',\ y_2')
\end{tikzcd}$$

$F' = (x_1, -x_1x_2 + x_2^3)$ mostremos que $F' = \eta \circ F \circ (\mu \circ \alpha)^{-1}$

$(\eta \circ F)(x_1, x_2) = \eta(x_1, f(x_1,x_2)) = (\Psi(x_1, f(x_1,x_2)), \phi(x_1, f(x_1,x_2)))$.

$(F' \circ \Psi)(x_1,x_2) = F'(\Psi(x_1, f(x_1,x_2)), x_2) =$

$= (\Psi(x_1, f(x_1,x_2)),\ -\,x_2\Psi(x_1, f(x_1,x_2)) + x_2^3) =$

$= (\Psi(x_1, f(x_1,x_2)),\ \phi(x_1, f(x_1,x_2)) - 3\Theta(x_1, f(x_1,x_2)))$

Mas como foi efetuada a mudança de coordenadas α que equivale a tomar $\Theta \equiv 0$ (β_2) temos que

$(F' \circ \mu)(x_1,x_2) = (\Psi(x_1,\ f(x_1,x_2))\ ,\ \phi(x_1,\ f(x_1,x_2)))$.

Assim, $F' = \eta \circ F \circ \mu^{-1}$ e portanto temos a forma canônica do tipo II.

IV.5 -

Para os dois exemplos seguintes (sobre formas canônicas para as singularidades de Morin) precisamos de algumas definições e resultados que seguem :

IV.5.1. Seja $f : (X, x) \longrightarrow (Y, y)$ germe de função C^{∞}.

O anel local de f é o anel quociente $\dfrac{C_X^{\infty}(X)}{C_X^{\infty}(X)\ f^*\mathfrak{m}_Y}$, o qual é denotado por $\mathbb{R}_f$.

Se $f : X \longrightarrow Y$ é simplesmente uma função, não um germe de função , então para cada ponto $x \in X$ temos o anel local do germe de f que será denotado por $\mathbb{R}_f\ (x)$ e chamado de anel local de f em x.

IV.5.2. Seja $\mathbb{R}_f^k\ (p) = \dfrac{\mathbb{R}_f(p)}{\mathfrak{m}_p^{k+1}(X)}$. Se σ é um k - jato com fonte p, definimos $\mathbb{R}_\sigma = \mathbb{R}_f^k\ (p)$ onde $j^k f(p) = \sigma$.

IV.5.3. Uma função $C^{\infty} f : X \longrightarrow Y$ tem uma singularidade de Morin em p se para algum k

$$\mathbb{R}_f\ (p) \simeq \frac{R[t]}{<t^{k+1}>}$$

IV.5.4. Denotemos por S_{1_k} a classe de contato em $J^k(X,Y)$ determinada pelo anel $\dfrac{R[t]^k}{<t^{k+1}>}$, isto é ,

$$S_{1_k} = \left\{ \sigma \in j^k(X,Y)\ /\ R_\sigma (= R_g^k\ (p) = \frac{R_g(p)}{\mathfrak{m}^{k+1}(X)}) \simeq \frac{R[t]}{<t^{k+1}>} \right\}$$

Os principais resultados sobre estas singularidades são devido a B. Morin |23| e H. Levine. Não vamos discutir estes resultados de maneira geral : vamos nos restringir ao caso dim X = dim Y.

Denotemos por $S_{1_k}(f)$ os pontos onde f admite uma singularidade de Morin do tipo k, isto é, $S_{1_k}(f) = (j^k f)^{-1} S_{1_k} =$
$= \left\{ x \in X : j^k f(x) \in S_{1_k} \right\}$.

Valem os resultados :

IV.5.5. Sendo dim X = dim Y, S_{1_k} é uma subvariedade de $J^k(X,Y)$ de codimensão k.

IV.5.6. Para um conjunto residual de função f, $S_{1_k}(f)$ é uma subvariedade de X de codimensão k..

Lembrando que para uma função $f : X, p \longrightarrow Y, q$
$p \in S_1(f) \Longleftrightarrow$ f tem corank 1 em p e que $p \in S_{1,1}(f) \Leftrightarrow f/S_1(f)$ tem corank 1 em p (supondo $S_1(f)$ uma subvariedade de X), podemos continuar esta construção indutiva de $S_{1,\underset{k}{\dots},1}(f)$ desde que em cada estágio $S_{1,\underset{k}{\dots},1}(f)$ seja uma subvariedade de X.

IV.5.7. Se $j^k f \pitchfork S_{1_k}$ para todo $k \leq \dim X + 1$, então $S_{1_k}(f) = S_{\underbrace{1,\dots,1}_{k}}(f)$.

As provas dos resultados enunciados acima podem ser encontradas em |9 - cap. VII|.

IV.5.7. Da prova de IV.5.5 vemos que se $p \in S_{1_k}(f)$ existem sistemas de coordenadas em X centrados em p e em Y centrados em $f(p)$ com $p = f(p) = o$ tais que $f(x_1, \ldots, x_n) = (h(x_1, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n)$ onde $\frac{\partial^s h}{\partial x_1^s}(o) = o$ para $s \leq k$.

Exemplo IV.6

Seja $f : X \longrightarrow y$ com dim X = dim Y satisfazendo a condição de transversalidade : $j^k f \pitchfork S_{1_k}$ e seja $x_o \in S_{1_k}(f)$. Então existem sistemas de coordenadas $x_1, \ldots, x_n$ centrados em x_o e $y_1, \ldots, y_n$ centrados em $f(x_o)$ tais que f tem a forma:

$$\begin{cases} f^*y_1 = x_2 x_1 + x_3 x_1^2 + \ldots + x_k x_1^{k-1} + x_1^{k+1} \\ f^* y_2 = x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f^*y_n = x_n \end{cases}$$

(Este resultado é devido a B. Morin e generaliza o caso das aplicações estáveis do plano no plano de Whitney (IV.4)).

Solução

Como vimos em IV.5.7 podemos escolher sistemas de coordenadas $x_1, \ldots, x_n$ centrados em x_o e $y_1, \ldots, y_n$ centrados em $f(x_o)$ tais que

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (h(x_1,\ldots,x_n), x_2, \ldots, x_n).$$

Como x_o é uma singularidade do tipo S_{1_k}, então $\mathcal{R}_f(x_o)$ é gerado , como espaço vetorial sobre R, por 1, $x_1,\ldots,x_1^k$. Pelo Teorema de Preparação de Malgrange (III.1) cada germe de função em x_o pode ser escrito como uma combinação linear de 1, x_1, ..., x_1^k tendo como coeficientes funções diferenciáveis dos y.

Em particular, podemos escrever

$$x_1^{k+1} = f^*a_1 + f^*a_2\, x_1 + \ldots + f^*a_k\, x_1^{k-1} + f^*\, a_{k+1}\, x_1^k$$

onde os a_i são funções diferenciáveis dos y. Podemos também tomar $f^*\, a_{k+1} = 0$. Para tanto, basta que se escreva a igualdade acima com a mudança : $x_1 \longrightarrow x_1 + \frac{1}{k} f^*\, a_{k+1}$ deixando os outros x_i fixos, e daí, multiplicando-se a igualdade obtida por k observa-se que, ao somá-la com a primeira, os termos em x_1^k se cancelam. Como f^* é homomorfismo de anéis vem que

$$x_1^{k+1} = f^*\, \bar{a}_1 + f^*\, \bar{a}_2\, x_1 + \ldots + f^*\, \bar{a}_k\, x_1^{k-1} . \qquad \text{(IV.6.1)}$$

Ainda, comparando-se os dois conjuntos de (IV.6.1) vê-se que $\bar{a}_1(o) = \bar{a}_2(o) = \ldots = \bar{a}_k(o) = o$.

Em (IV.6.1) vamos tomar $x_2 = \ldots = x_n = y_2 = \ldots = y_n = o$. Então temos :

$$x_1^{k+1} = \bar{a}_1(h(x_1,\ldots,o),o,\ldots,o) + \bar{a}_2(h(x_1,\ldots,o),o,\ldots,o)x_1 + \ldots + \bar{a}_k(h(x_1,\ldots,o),o,\ldots,o)x_1^{k-1}$$

e desenvolvemos ambos os lados em potências de x_1. Por hipótese, $f^*\, y_1 = h(x_1,o,\ldots,o) = c\, x_1^{k+1} + \ldots$, $c \neq o$ e os pontos indicam termos em x_1 de grau > k + 1.

Então como os termos em x_1^{k+1} devem ser iguais devemos ter :

$$\bar{a}_1\ (y_1, o, \ldots, o) = x_1^{k+1} = \frac{1}{c}\ c\ x_1^{k+1} = \frac{1}{c}\ y_1 + \ldots \quad .$$

Em particular, $\dfrac{\partial \bar{a}_1}{\partial y_1} \neq o$, donde a aplicação

$(y_1, \ldots, y_n) \longmapsto (\bar{a}_1(y), y_2, \ldots, y_n)$ (IV.6.2) é uma boa mudança de coordenadas no espaço "dos y". Assim poderemos começar supondo que nossos "x" e "y" satisfazem :

$$f^* y_1 = f^*\ \bar{a}_2\ x_1 + \ldots + f^*\ \bar{a}_k\ x_1^{k-1} + x_1^{k+1}$$

(esta é obtida de (IV.6.1) isolando-se $f^*\ \bar{a}_1$, trocando - se os sinais, por facilidade, e usando a mudança de coordenadas (IV.6.2)).

$$f^*\ y_2 = x_2$$

$$\vdots$$

$$f^*\ y_n = x_n$$

Como para uma aplicação do tipo

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (h(x_1, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n)$$

a condição de transversalidade $j^k\ f \pitchfork S_{1_k}$ diz que

$d\ (\dfrac{\partial f^* y_1}{\partial x_1})(o), \ldots, d\ (\dfrac{\partial f^* y_1}{\partial x_1^k})(o)$, são linearmente independentes | 9 . exercício 7 pag. 145 | então

$d\ (f^*\ \bar{a}_2)(o), \ldots, d\ (f^*(\bar{a}_k)(o), d(x_1)(o)$ são linearmente independentes e disto podemos concluir que as diferenciais das funções

$$\bar{a}_2\ (o, y_2, \ldots, y_n), \ldots, \bar{a}_k\ (o, y_2, \ldots, y_n) \qquad \text{(IV.6.3)}$$

são linearmente independentes no zero. Permutando, se necessário, os y_i podemos supor que a matriz

$$\left(\frac{\partial \bar{a}_i}{\partial y_j}(o)\right)_{2 \leq i,\, j \leq k}$$

seja não singular, donde, a aplicação

$$(y_1, \ldots, y_n) \longrightarrow (y_1, a_2, \ldots, a_k, y_{k+1}, \ldots, y_n)$$

é uma boa mudança de coordenadas.

Também de (IV.6.3), temos que as diferenciais das funções x_1, $f^*\bar{a}_2(x)$, ..., $f^*\bar{a}_k(x)$ são linearmente independentes em zero, donde a aplicação

$$(x_1, \ldots, x_n) \longrightarrow (x_1, f^*\bar{a}_2, \ldots, f^*\bar{a}_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$$

também é uma boa mudança de coordenadas.

É fácil verificar que relativamente a estas novas coordenadas , f tem a forma desejada.

IV.7. Morin obteve formas canônicas para todas as singularidades de Morin, não apenas para o caso equidimensional . Vamos agora tomar um exemplo onde dim X = n e dim Y = 2n-1 : guarda-chuva (cross cap). Esta forma canônica é devida a Whitney embora esta prova que daremos aqui é devido a B.Morin. Precisamos da definição :

IV.7.1. Sejam X e Y variedades tais que dimX = n e dimY = 2n - 1 e $f : X \longrightarrow Y$ uma função C^∞. Um ponto x_o em $S_1(f)$ é chamado de cross-cap se $j^1 f \pitchfork S_1$ em x_o. Observe que para estas dimensões, codim S_1 = n e portanto, pontos tipo cross - cap aparecem como pontos isolados de X.

Exemplo IV.8

Se $f : X \longrightarrow Y$ tem uma singularidade do tipo guarda chuva em x_o, existem sistemas de coordenadas $x_1, \ldots, x_n$ centrados em x_o e $y_1, \ldots, y_{2n-1}$ centrados em $f(x_o)$ tais que f tem a forma :

$$\begin{cases} f^* y_1 = x_1^2 \\ f^* y_i = x_i \ , \ i = 2, \ldots, n \\ f^* y_{n+j} = x_1 x_j, \ j = 1, \ldots, n-1 \end{cases}$$

Solução

Podemos escolher coordenadas $x_1, \ldots, x_n$ centradas em x_o e $y_1, \ldots, y_{2n-1}$ centradas em $f(x_o)$ tais que $f^*y_i = x_i$ para $i = 2, \ldots, n$.

O conjunto $S_1(f)$ é o lugar dos pontos para os quais

$$\text{(IV.8.1)} \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_1} = \ldots = \frac{\partial f_{2n-1}}{\partial x_1} = 0$$

onde $f_i = f^*y_i$

A condição de transversalidade ($j^1 f \pitchfork S_1$ em x_o) é equivalente a dizer que

$$\text{(IV.8.2)} \quad d\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right), d\left(\frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_1}\right), \ldots, d\left(\frac{\partial f_{2n-1}}{\partial x_1}\right)$$

são linearmente independentes nos pontos onde (IV.8.1) é válido. (Sugestão : usar lema 5.2 cap II e exercício 7 página 145 de |9|). Isto significa, em particular, que uma das diferenciais acima deve ser não nula quando calculada sobre $\frac{\partial}{\partial x_1}$. Por uma transformação linear dos y, podemos supor :

$$\text{(IV.8.3)}\quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} \neq 0, \quad \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_1^2} = 0 \text{ para } i > n.$$

de onde segue que o anel local $\mathcal{R}_f\ (x_o)$ é gerado por 1 e x_1.. Pelo Teorema de Preparação de Malgrange podemos escrever :

(IV.8.4) $x_1^2 = f^* a_1 + f^* a_2\, x_1$

onde a_1 e a_2 são funções C^∞ das variáveis y.

Podemos tomar $f^*a_2 = o$ em (IV.8.4). Para tanto , basta que se efetue a mudança $x_1 \longrightarrow x_1 + \frac{1}{2} f^*a_2$ deixando os outros x_i fixos e portanto podemos escrever

(IV.8.5) $f^*\bar{a}_1 = x_1^2$

Em (IV.8.5) tomemos $x_2 = \ldots = x_n = y_2 = \ldots = y_n = 0$ e a expansão do lado esquerdo em potências de x_1.

Por (IV.8.4), $f_1 = f^*y_1 = c\, x_1^2 + \ldots$ e $f_s(x_1,o,\ldots,o) = O(x_1^3)$ para $s > n$, com $c \neq o$, assim devemos ter

$$\bar{a}_1\ (y_1,o,\ldots,\ o) = \frac{1}{c}\, y_1.$$

Em particular , $\frac{\partial \bar{a}_1}{\partial y_1} \neq o$, e a função

$$(y_1,\ y_2,\ldots,\ y_{2n-1}) \longrightarrow (\bar{a}_1(y),y_2,\ldots,\ y_{2n-1})$$

é uma boa mudança de coordenadas. Substituindo-se as velhas coordenadas y pelas novas temos $f^*y_1 = x_1^2$ e continuamos a ter $f^*y_i = x_i$, $2 \leq i \leq n$. As demais $f_i = f^*y_i$ para $i > n$, podem ser escritas na forma (usando o Teorema de Preparação de Malgrange)

$$f_i = g_i(x_1^2,\ x_2,\ldots,\ x_n) + x_1\, h_i(x_1^2,x_2,\ldots,\ x_n)\,.$$

Substituindo y_i por $y_i - g_i(y_i,\ \ldots,\ y_n)$ para $i = n + 1,\ \ldots,\ 2n-1$ e deixando os outros fixos, obtemos o sistema de equações :

$$f^*y_1 = x_1^2$$

$$f^*y_i = x_i \quad i = 2, \ldots, n$$

$$f^*y_{n+j} = x_1 \, h_{n+j} \, (x_1^2, x_2, \ldots, x_n), \; j=1,\ldots,n-1.$$

Esta é quase a forma desejada. De fato se mostrarmos que as funções abaixo são boas mudanças de coordenadas

$$(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (x_1, h_{n+1}(x_1^2, x_2, \ldots, x_n), \ldots, h_{2n-1}(x_1^2 x_2, \ldots, x_n))$$

$$(y_1, \ldots, y_{2n-1}) \longmapsto (y_1, h_{n+1}(y), \ldots, h_{2n-1}(y), y_{n+1}, \ldots, y_{2n-1})$$

então teremos exatamente a forma desejada. Para tanto devemos voltar à condição de transversalidade (IV.8.2). Em $x_1 = o$ isto se reduz a condição que

$$dh_{n+1} \, (x_1^2, x_2, \ldots, x_n), \; \ldots, \; dh_{2n-1}(x_1^2, x_2, \ldots, x_n)$$

são linearmente independentes no zero, ou, em outras palavras, que a matriz

$$\left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{n+1 \le i \le 2n-1 \\ 2 \le j \le n}}$$

é não singular. Entretanto é precisamente isto que se faz necessário para fazer a mudança de coordenadas acima uma boa mudança.

<u>Nota</u>: Outros exemplos de aplicação do Teorema de Preparação semelhantes a estes podem ser encontrados em | 9 - cap. VII |.

Exemplo IV.9

Uma importante aplicação do Teorema de Preparação de Malgrange, talvez a mais importante delas, aparece no Teorema de Mather que estabelece a equivalência de estabilidade C^∞ com estabilidade infinitesimal para o caso de aplicações próprias. Esta caracterização das aplicações próprias C^∞ estáveis pode ser enunciada mais explicitamente como segue :

"Seja $f \in C^\infty_{pr}(N,P)$, $\dim N = n$, $\dim P = p$. Se $r \geq p+1$ e $k \geq p$, as seguintes condições são equivalentes :

a) f é C^∞ - estável

b) f é infinitesimalmente estável

c) ${}_r j^k f$ é transversal a todas as órbitas de ${}_r J^k(N,P)$.

d) Para todo $S \subset N$ com card $S \leq r$ tal que card $(f(S) = y) = 1$

$$\theta(f)_S = tf[\theta(N)_S] + wf\,[\theta(P)_y] + [f^*(\mathfrak{m}_y) + \mathfrak{m}_S^{k+1}]\,\theta(f)_S\ .$$

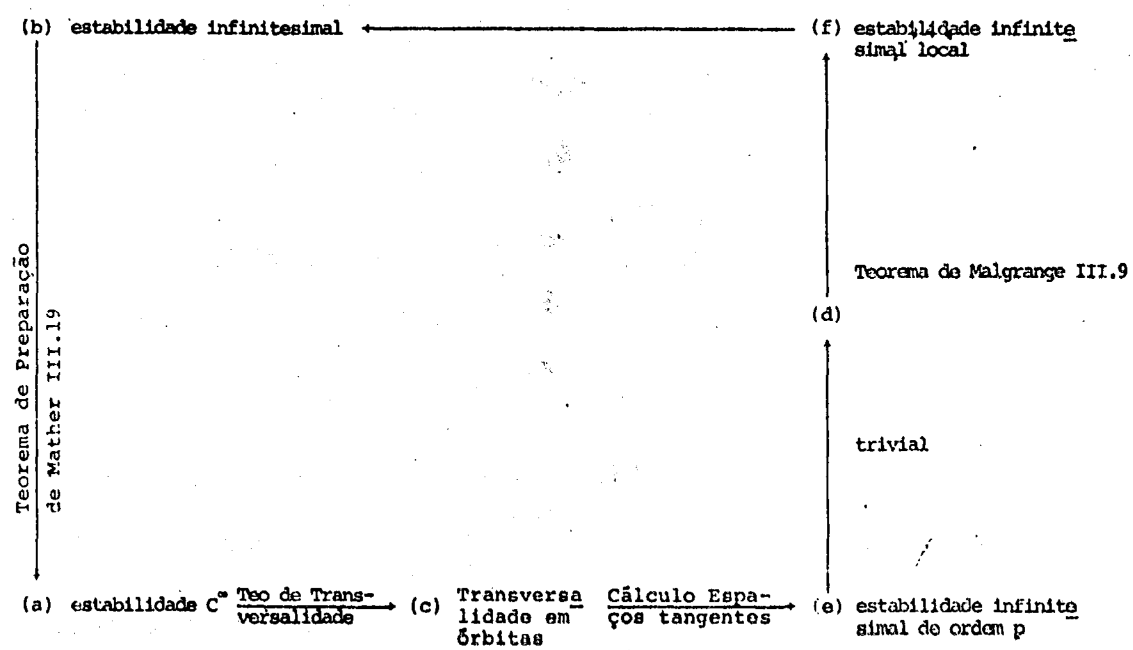
e) Nas mesmas condições de d) f_S é infinitesimalmente estável em ordem k, isto é,

$$\theta(f)_S = tf\,[\theta(N)_S] + wf\,[\theta(P)_y] + \mathfrak{m}_S^{k+1}\ \theta(f)_S.$$

f) Nas mesmas condições de d) f_S é infinitesimalmente estável, isto é ,

$$\theta(f)_S = tf\,[\theta(N)_S] + wf\,[\theta(P)_y]\ .$$

Tendo em vista que a prova deste Teorema é longa , trabalhosa e envolve elementos que fogem do nosso objetivo , vamos nos limitar aqui a dar um roteiro da demonstração deste Teorema sintetizado no quadro abaixo. As setas indicam as implicações e indicam os resultados mais importantes usados na demonstração. Observe que são usadas as versões III.9 e III.19 do Teorema de Preparação de Malgrange, conforme indica o diagrama.



BIBLIOGRAFIA

|1| Arnold, V.I - Singularities of Smooth Mappings, Russian Math. Surveys, 1968 (1-43), Vol. 23, Nº 1, Jan-Feb 1968

|2| Barbançon, Gerard - Théorème de Newton pour les fonctions de classe C^r. Ann. Scient Norm. Sup. 4ª série, t.5, 1972 (435-458)

|3| Bierstone, Edward - An Introduction to Singularities of Smooth Mappings (a aparecer)

|4| Bröcker, T.H and Lander, L - Differentiable Germs and Catastrophes. London Math. Soc. Lecture Note Series 17 Cambridge University Press - 1975

|5| Burton, David M. - Introduction to Modern Abstract Algebra. Addison-Wesley Publishing Company - 1967

|6| Du Plessis, Nicolaas - On the determinancy of Smooth Map Germs.Inventiones Mathematical Vol. 58 - F - 2 pag 107, 1980

|7| Gaffney, Terence - On the order of determination of a Finitely Determined Germ - Inventiones Math. 37, 83-92 (1976) Spring-Verlag

|8| Glaeser, G. - Sur le Théorème de Préparation Différentiable. Proceedings of Liverpool Singularities I, Springer Lectures Notes 192, 121-132, 1971

|9| Golubitsky, M - Guillemin, V. Stable Mappings and Their Singularities, Springer Verlag, N. York (1973)

|10| Gunning, Robert C. and Rossi, Hugo - Analytic Functions of Several Complex Variables. Prentice-Hall, INC, N.J. (1965)

|11| Hormander, Lars - An Introduction to Complex Analysis Several Variables - North. Holland Publishing Company - London (1973)

|12| Lassale, M.G. - Une Demonstration du Theoreme de Division pour les fonctions differentiables. Topology.Vol. 12 (41-62) Pergamon Press, 1973.

|13| Lojasiewicz, S. - Whitney Fields and the Malgrange-Mather Preparation Theorem. Proceedings of Liverpool Singularities I, Springer Lectures Notes 192 (106-115)

|14| Lojasiewicz, S. - On the Weierstrass Preparation Theorem. Proceedings of the III Latin Amer. School of Math., Inst. Mat. Pura Aplicada CNPq, Rio de Janeiro, 1976, pp. 358-360. Lecture Notes in Math., Vol. 597, Springer, Berlin, 1977.

|15| Malgrange, B. - Ideals of Differentiable Functions. Oxford University Press, 1966.

|16| Martinet, Jean-Singularités des Fonctions et Applications Différentiables, PUC, RJ, 1977

|17| Mather, J.N. - Stability of C^∞ mappings I: The Division Theorem. Annals of Math., Vol 87, Nº 1, Jan 1968, (89-104)

|18| Mather, J.N - Stability of C^{∞} mappings II: Infinitesimal Stability implies Stability. Annals of Math., Vol. 89, March 1969 (254-291)

|19| Mather, J.N - Stability of C^{∞} mappings III: Finitely determined map germs. Publ. Math. I.H.E.S. 35 (1968) (127-156)

|20| Mather, J.N - On Nirenberg's Proof of Malgranges's Preparation Theorem. Proceedings of Liverpool Singularities I, Springer Lectures Notes 192 (116-120)

|21| Matsumura, Hideyuki - Commutative Algebra. W. A. Benjamin, INC New York, 1970

|22| Milman, Pierre - The Malgrange-Mather Division Theorem. Topology. Vol. 16 (395-401). Pergamon Press. 1977.

|23| Morin, B. - Formes Canoniques des Singularities d'une application différentiable. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris 260 (5662-5665) (6503-6506), 1965.

|24| Nagata, Masayoshi - Local Rings. R.E. Krieger Publishing Company. Huntington, New York. 1975

|25| Nirenberg, L. - A proof of the Malgrange Preparation Theorem. Proceedings of Liverpool Singularities I, Springer Lectures Notes 192, 97-105. 1971

|26| Sebastiani, Marcos - Funções Analíticas de Várias Variáveis Complexas - 12º Colóquio Brasileiro de Matemática. Poços de Caldas. 1979.

|27| Sotomayor, Jorge - Singularidades de Aplicações Diferenciáveis. III Escola Latino Americana de Matemática. 1976.

|28| Zariski, O. and Samuel, P. - Commutative Algebra, Vol 2. D.Van Nostrand Company,INC 1960, Princeton.

|29| Wall, C.T.C. - Introduction to the Preparation Theorem. Proceedings of Liverpool Singularities I, Springer Lectures Notes 192, 90-96, 1971

|30| Wassermann, Gordon - Stability of Unfoldings.Springer Lectures Notes - 1974