I.C.M.S.C.

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

SOBRE COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS FUNCIONAIS

José Luiz Magalhães de Freitas

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

SÃO CARLOS - SÃO PAULO
BRASIL

SOBRE COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS FUNCIONAIS

José Luiz Magalhães de Freitas

Orientador
Prof. Dr. Cerino Ewerton de Avellar

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, da Universidade de São Paulo, para obtenção do Título de Mestre em Ciências (Matemática).

SÃO CARLOS
1982

DEDICAÇÃO

Esta Dissertacão é dedicada à minha esposa Sônia e aos meus três filhos, Samuel, Raquel e Juliana.

AGRADECIMENTOS

Vārias pessoas contribuiram para a realização deste trabalho, a elas desejo externar meus agradecimentos.

Inicialmente, meus sinceros agradecimentos ao Prof. Dr. Cerino Ewerton de Avellar que, com dedicação, amizade e encorajamento, orientou e supervisionou a elaboração desta dissertação.

Ao Prof. Ivo Machado da Costa, pelo constante incentivo que me proporcionou desde o início deste trabalho.

Aos professores Antônio Acra Freiria e Aldo Ventura, membros da banca de qualificação, cujas observações foram preciosas para a forma final do trabalho.

Ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, pela oportunidade de realizar o curso de Pós-Graduação em Matemática e pelas facilidades proporcionadas.

Finalmente aos colegas da EEPG "Prof. Victor Lacorte" de Araraquara, pela acolhida, apoio e estímulo durante meus estudos.

José Luiz Magalhães de Freitas

Este trabalho dependeu
parcialmente de auxílio
concedido pela CAPES.

SUMMARY

It is studied the relationship between the solutions of the linear functional differential equation

$$(1) \qquad \frac{d}{dt} Dx_t = Lx_t$$

and its perturbed equation

$$\frac{d}{dt}\left[Dx_t - G(t,x_t)\right] = Lx_t + F(t,x_t)$$

and it is proved, under certain hypotheses on $G(t,\phi)$ and $F(t,\phi)$, that if $\mu \in R$ is a double characteristic root of (1) such that there is no other characteristic root of (1) with $\mathrm{Re}\,\lambda \geq \mu$, then there are two solutions $x_1(t)$ and $x_2(t)$ of (2) such that $x_1(t) \to e^{\mu t}$ and $x_2(t) \to te^{\mu t}$ as $t \to \infty$.

ÍNDICE

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

O sistema de equações diferenciais de tipo neutro

$$(1.1) \qquad \dot{x}(t) = \left[A_o + A(t)\right] x(t) + \left[B_o + B(t)\right] \dot{x}(t-r) + \left[C_o + C(t)\right] x(t-r)$$

onde r é uma constante real não negativa, x é um vetor de dimensão n, A_o, B_o, C_o são matrizes constantes $n x n$, $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ são matrizes $n x n$, cujos elementos, são funções contínuas de t para $t \geqslant 0$ tem sido extensivamente estudado, veja [5] para referências. Para $r = 0$, isto é, equações diferenciais ordinárias, o comportamento assintótico das soluções de (1.1) já foi estudado completamente. Para $r > 0$ e $B_o + B(t) \equiv 0$, isto é, equações diferenciais funcionais retardadas, dois trabalhos se destacam (Bellman e Cooke [2] e Hale [3]).

O sistema não perturbado associado a (1.1) é

$$(1.2) \qquad \dot{x}(t) = A_o x(t) + B_o \dot{x}(t-r) + C_o x(t-r)$$

Uma parte das dificuldade encontradas no estudo das soluções de (1.1) é devido ao fato que (1.2) representa basicamente um problema num espaço de dimensão infinita, visto que uma solução de (1.2) pode ser obtida somente especificando uma função sobre um intervalo de comprimento r. Quando $B_o = 0$, isto é, no caso retardado, Hale, em [4] mostrou que o espaço de soluções de (1.2) pode ser decomposto em dois subespaços invariantes P e Q onde P é de dimensão finita e em P as soluções de (1.2) se comportam como uma equação diferencial ordinária. Usando esta decomposição e a teoria do ponto fixo, Hale em [3] dá um tratamento mais geral do que Bellman e Cooke [2] .

Quando B_0 é diferente de zero, o estudo das propriedades de (1.1) é mais complexo, alguns resultados foram obtidos por Izé e Molfetta [10] .

Particularmente, para o estudo das propriedades assintóticas de (1.1) aparece a dificuldade a mais, devido ao fato de que a decomposição do espaço de soluções no subespaço invariante P não ser uma equação diferencial ordinária , mas uma equação integral de Stieltjes como pode ser visto no próximo capítulo.

No capítulo II, damos algumas definições, e notações e fazemos um resumo de resultados conhecidos.

No capítulo III, vamos considerar sistemas de equações diferenciais do tipo neutro

$$\frac{d}{dt} Dx_t = Lx_t \qquad (L)$$

e

$$\frac{d}{dt}\left[Dx_t - G(t,x_t)\right] = Lx_t + F(t,x_t) \qquad (P)$$

onde D é um operador linear contínuo de C em R^n , $D\phi =$

$$\phi(0) - \int_{-r}^{0} \left[d\,\mu(\theta)\right] \phi(\theta), \; F,\; G: \left[\sigma,\infty\right) X C \rightarrow R^n ,$$

contínuas e $Dx_t - G(t,x_t)$ atômica em zero com $G(t,x_t)$

independente de $\phi(0)$, e estudar o comportamento assintótico de (P) sob certas condições para F e G, generalizando resultados de Hale ([3] , [5]).

Em particular, mostramos que se λ_o é uma raiz dupla da equação característica de (L), então, existem soluções $x_1(t)$ e $x_2(t)$ de (P) tais que $x_1(t) \rightarrow e^{\lambda_o t}$

$x_2(t) \longrightarrow te^{\lambda_o t}$ quando $t \rightarrow \infty$.

CAPÍTULO II

NOTAÇÕES E RESUMO DE RESULTADOS BÁSICOS

Seja R^n um espaço vetorial normado de vetores coluna, de dimensão n. Seja $C = C([-r,0], R^n)$, $r > 0$, o espaço das funções contínuas $\phi : [-r,0] \to R^n$ com norma $\|\phi\| = \sup \{|\phi(\theta)| : -r \leq \theta \leq 0\}$. Se x é uma função contínua $x: [\sigma-r, a) \to R^n$, então, para cada t, $\sigma \leq t < a$, $x_t \in C$ é dado por $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $-r \leq \theta \leq 0$.

Consideremos a equação diferencial funcional linear autônoma, EDFN(D,L)

$$\frac{d}{dt} Dx_t = Lx_t \qquad t \geq 0 \tag{2.1}$$

onde $D, L: C \to R^n$ são contínuas e linear, representadas por integrais de Stieltjes

$$\begin{cases} D\phi = \phi(0) - \int_{-r}^{0} [d\mu(\theta)] \, \phi(\theta) \\ \\ L\phi = \int_{-r}^{0} [d\eta(\theta)] \, \phi(\theta) \end{cases} \tag{2.2}$$

onde μ , η são funções matriciais nxn, de variação limitada, que se anulam na origem e são contínuas pela esquerda em $[-r,0]$, $\mathrm{Var}_{[-\varepsilon,0)} \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$.

Vamos supor ainda que D seja tal que μ não possua parte singular, isto é, exista uma matriz nxn integrável A e matrizes constantes A_k , nxn tais que

$$(2.3) \qquad D\phi = D_o\phi + \int_{-r}^{0} A(\theta)\,\phi(\theta)d\theta$$

D_o o operador de diferença

$$(2.4) \qquad D_o\phi = \phi(0) - \sum_{k=1}^{N} A_k\,\phi(-r_k)$$

onde

$$0 < r_k < r, \qquad \int_{-r}^{0} |A(\theta)|d\theta < \infty$$

Se $x_t(\theta)$ é solução da equação (2.1), com $x_o(\phi) = \phi$ e $x_t(\phi) = T_{D,L}(t)\phi$ para $t \geq 0$, $\phi \in C$, sabemos (Hale [5]) que o operador solução de (2.1); $T_{D,L}(t): C \to C$, $t \geq 0$ é um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados, isto é:

i) $T_{D,L}(0) = I$

ii) $T_{D,L}(t+s) = T_{D,L}(t).T_{D,L}(s)$ para todo $t \geq 0$, $s \geq 0$.

iii) $T_{D,L}(t)$ é limitado para todo $t \geq 0$.

iv) $\lim\limits_{t\to s} \| T_{D,L}(t)\phi - T_{D,L}(s)\phi \| = 0$

A equação característica de (2.1) é dada por

$$\det \Delta(\lambda) = 0$$

$$\Delta(\lambda) = \left[I - \sum_{k=1}^{N} A_k e^{-\lambda r_k} + \int_{-r}^{0} A(\theta)e^{\lambda\theta}\,d\theta \right] - - \int_{-r}^{0} [d\eta(\theta)]\, e^{\lambda\theta}$$

Enunciaremos agora um importante resultado devido a

$$
(2.7)\quad \begin{cases} T_{D,L}(t)\ \Phi_\Lambda a = \Phi_\Lambda e^{B_\Lambda t} a \\ \Phi_\Lambda(\theta) = \Phi_\Lambda(0)\, e^{B_\Lambda \theta}, \quad -r \leq \theta \leq 0 \end{cases}
$$

Finalmente, existe um subespaço Q_Λ de C tal que $T_{D,L}(t)Q_\Lambda \subseteq Q_\Lambda$, $t \geq 0$ e $C = P_\Lambda \oplus Q_\Lambda$ onde,

$P_\Lambda = \{ \phi \in C: \ \phi = \Phi_\Lambda a$ para algum vetor $a\}$

A equação adjunta formal de (2.1) é dada por:

$$
(2.8)\qquad \frac{d}{ds}\left[u(s) - \int_{-r}^{0} y(s-\theta)\,d\mu(\theta) \right] = -\int_{-r}^{0} y(s-\theta)\,d\eta(\theta)
$$

onde $y \in R^{n^*}$, R^{n^*} espaço vetorial normado dos vetores linha, de dimensão n. Se $C^* = C([0,r], R^{n^*})$, para $\phi \in C, \psi$, $\dot{\phi} \in C^*$ definimos a forma bilinear

$$
(2.9)\qquad (\psi,\phi) = \psi(0)D\phi + \int_{-r}^{0}\int_{0}^{\theta} \dot{\psi}(\xi-\theta)\,[d\mu(\theta)]\,\phi(\xi)\,d\xi - \int_{-r}^{0}\int_{0}^{\theta} \psi(\xi-\theta)\,[d\eta(\theta)]\,\phi(\xi)\,d\xi
$$

O próximo teorema dá uma caracterização explícita da decomposição (2.6), através da equação adjunta formal de (2.1).

<u>Teorema 2.2</u>

Se $\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ é um conjunto finito de elementos de $\sigma(A_{D,L})$ e P_Λ é a extensão linear de $\mathcal{M}_{\lambda_j}(A_{D,L})$, $j = 1, 2, \ldots, p$, com base Ψ_Λ e P_Λ^* é a extensão linear do correspondente auto-espaço generalizado da equação adjunta formal com base Ψ_Λ, então podemos escolher Ψ_Λ tal que $(\Psi_\Lambda, \Phi_\Lambda) = I$, a identidade, e

$$C = P_\Lambda \oplus Q_\Lambda$$

(2.10) $$P_\Lambda = \{ \phi \in C \mid \phi = \Phi_\Lambda a \text{ para algum vetor } a \}$$

$$Q_\Lambda = \{ \phi \in C \mid (\Psi_\Lambda, \phi) = 0 \}$$

O teorema acima encontra-se em [5], pág. 309, teorema 10.2.

Se o conjunto Λ é definido como no teorema 2.2 e C é decomposto como nas equações (2.10), nós dizemos que C é decomposto por Λ.

Se C é decomposto por Λ como $C = P_\Lambda \oplus Q_\Lambda$, então $\sigma(T_{D,L}(t)|_{P_\Lambda}) = \sigma(e^{B_\Lambda t})$ onde $A_{D,L}\Phi_\Lambda = \Phi_\Lambda B_\Lambda$.

Consideremos agora, as seguintes equações

(2.11) $$Dx_t = 0 \ , \quad t \geq 0$$

(2.12) $$D_o x_t = 0 \ , \quad t \geq 0$$

onde D e D_o são dados por (2.3) e (2.4).

Sejam $C_D = \{ \phi \in C \mid D\phi = 0 \}$, $C_{D_o} = \{ \phi \in C \mid D_o\phi = 0 \}$, então as equações (2.11) e (2.12) definem um semigrupo fortemente contínuo de transformações lineares limitadas $T_D(t): C_D \to C_D$, $t \geq 0$, onde $T_D(t)\phi = x_t(\phi)$, $t \geq 0$, $\phi \in C_D$ e $x(\phi)$ é a solução da equação (2.11) através de $(0, \phi)$. $T_{D_o}(t): C_{D_o} \to C_{D_o}$, $t \geq 0$, onde $T_{D_o}(t)\phi = x_t(\phi)$, $t \geq 0$, $\phi \in C_{D_o}$ e $x(\phi)$ é a solução da equação (2.12) através de $(0, \phi)$.

Henry [8] estimou a ordem a_D, a_{D_o} e $a_{D,L}$ dos semi-

Hale e Meyer [6] ,

Teorema 2.1

(i) O gerador infinitesimal $A_{D,L}$ do semigrupo $\{T_{D,L}(t),\ t > 0\}$, da equação (2.1), tem domínio $\mathcal{D}(A_{D,L})$ e imagem dados por

$$\mathcal{D}(A_{D,L}) = \{\phi \in C:\ \dot{\phi} \in C,\ D\dot{\phi} = L\phi\}$$

$$A_{D,L}\,\phi = \dot{\phi} \quad \text{para} \quad \phi \in \mathcal{D}(A_{D,L})$$

(ii) O espectro $\sigma(A_{D,L})$ de $A_{D,L}$ é espectro pontual e $\lambda \in \sigma(A_{D,L})$ se e somente se λ satisfaz a equação característica (2.5)

(iii) As raizes da equação (2.5) tem parte real limitada e se $\lambda \in \sigma(A_{D,L})$ então, o auto espaço generalizado $\mathcal{M}_\lambda(A_{D,L})$ é de dimensão finita e existe um inteiro $k = k(\lambda)$ tal que $\mathcal{M}_\lambda(A_{D,L}) = \mathcal{N}(A_{D,L} - \lambda I)^k$ e

$$(2.6)\qquad C = \mathcal{N}(A_{D,L} - \lambda I)^k \oplus \mathcal{R}(A_{D,L} - \lambda I)^k$$

(iv) Se Λ é um conjunto finito $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$ de elementos de $\sigma(A_{D,L})$ e $\Phi_\Lambda = (\Phi_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}, \dots, \Phi_{\lambda_p})$, $B = \operatorname{diag}(B_{\lambda_1}, B_{\lambda_2}, \dots, B_{\lambda_p})$ onde Φ_{λ_j} é o auto espaço generalizado de λ_j e B_{λ_j} é a matriz definida por $A_{D,L}\Phi_{\lambda_j} = \Phi_{\lambda_j}B_{\lambda_j}$, $j = 1,2,\dots,p$. Então, o único auto valor de B_{λ_j} é λ_j e, para qualquer vetor a com a mesma dimensão de Φ_Λ, a solução $T_{D,L}(t)\,\Phi_\Lambda a$ da Equação (2.1) com condição inicial $\Phi_\Lambda a$ em $t = 0$, pode ser definida em $(-\infty, \infty)$ pela relação grupos $\{T_D(t),\ t \geq 0\}$, $\{T_D(t),\ t \geq 0$ e $\{T_{D,L}(t),\ t \geq 0\}$, respectivamente como

(2.13) $\quad a_D = \sup \{\operatorname{Re} \lambda \mid \det \Delta_D(\lambda) = 0\}$

onde

(2.14) $\quad \Delta_D(\lambda) = I - \sum_{k=1}^{N} A_k e^{-\lambda r_k} + \int_{-r}^{0} e^{\lambda\theta} A(\theta)\, d\theta$

e

(2.15) $\quad a_{D_o} = \sup\{\operatorname{Re}\lambda \mid \det \Delta_{D_o}(\lambda) = 0\}$

onde

(2.16) $\quad \Delta_{D_o}(\lambda) = I - \sum_{k=1}^{N} A_k e^{-\lambda r_k}$

(2.17) $\quad a_{D,L} = \sup\{\operatorname{Re} \lambda \mid \det \Delta_{D,L}(\lambda) = 0\}$

onde

$\Delta_{D,L}(\lambda)$ foi dado em (2.5).

<u>Definição 2.1</u> Se $D: C \to R^n$, dado pela equação (2.3) é tal que $a_D < 0$ então dizemos que D é estável.

<u>Definição 2.2</u> Se $D_o: C \to R^n$, dado pela equação (2.4) tal que $a_{D_o} < 0$ então dizemos que D_o é estável.

<u>Definição 2.3</u> Se $D,L: C \to R^n$, são dados por (2.1) e $a_{D,L} < 0$ então dizemos que (2.1) é uniformemente assintoticamente estável.

As seguintes afirmativas são consequências do Teorema 2.1 de Avellar [1]

1. $a_{D,L} \geq a_{D_o}$

2. Se $a_{D,L} > a_{D_o}$ então existe apenas um número finito de raízes λ da equação característica (2.5) tal

que Re $\lambda = a_{D,L}$.

Seja, agora, $X(t)$, $t \geq -r$ a matriz nxn de funções de variação limitada e contínua em t à direita tal que

(2.18)
$$D(X_t) = I + \int_0^t L(X_s)ds \,, \quad t \geq 0 \,,$$
$$X_0(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{se } -r \leq \theta < 0 \,, \\ I & \text{se } \theta = 0 \end{cases}$$

Vamos agora enunciar o seguinte

<u>Lema 2.1</u> Se a solução $x = 0$ do sistema linear EDFN(D,L) é uniformemente assintoticamente estável, então ela é exponencialmente assintoticamente estável e a matriz solução X das equações (2.18) satisfaz

(2.19) $$|X(t)| \leq Ke^{-\alpha t} \,, \quad \operatorname{Var}_{[t-1,t]} X \leq Ke^{-\alpha t}$$

para constantes $K > 0$, $\alpha > 0$ e todo $t \geq 0$.

O lema acima encontra-se em Hale [5], pág. 303, lema 9.1.

<u>Definição 2.4</u> Seja Λ um subconjunto aberto de um espaço métrico. Dizemos que $L: \Lambda \rightarrow \mathcal{L}(C, R^n)$ tem regularidade na medida se para qualquer β real existe uma função escalar $\gamma(\lambda, s)$ contínua para $\lambda \in \Lambda$, $s \in \mathbb{R}$, $\gamma(\lambda, 0) = 0$ tal que se

$$L(\lambda)\phi = \int_{-r}^{0} [d\,\eta(\lambda, \theta)]\, \phi(\theta), \lambda \in \Lambda, \; 0 < s, \text{ então,}$$

$$\left| \lim_{h \to 0^+} \int_{\beta+h}^{\beta+s} + \int_{\beta-s}^{\beta+h} [d\,\eta(\lambda, \theta)]\, \phi(\theta) \right| \leq \gamma(\lambda, s) \|\phi\|$$

Se β $\mathbb{R}$ e a matriz $A(\lambda\,; \beta\,, L) = \eta(\lambda, \beta^+) - \eta(\lambda, \beta^-)$ é não singular em $\lambda = \lambda_0$, dizemos que $L(\lambda)$ é atômica em β em λ_o. Se $A(\lambda;\beta, L)$ é não singular, sobre um conjunto $K \subset \Lambda$, dizemos que $L(\lambda)$ é atômica em β sobre K.

Definição 2.5 Seja $\Omega \subset \mathbb{R}XC$ e $G: \Omega \to R^n$. Dizemos que $G(t, \phi)$ é independente de $\phi(0)$ se existe um $\varepsilon \in [-r,0)$ tal que $G(t, \phi)$ depende somente dos valores de $\phi(\theta)$ da função ϕ para $\theta \in [-r,\varepsilon]$.

Vamos agora considerar o sistema perturbado

$$(2.20) \qquad \frac{d}{dt}\left[Dx_t - G(t,x_t)\right] = Lx_t + F(t,x_t)$$

onde D e L satisfazem (2.2), $[Dx_t - G(t,x_t)]$ é atômica em zero e $G(t,x_t)$ independe de $\phi(0)$ e $F(t,\phi)$ e $G(t,\phi)$ são lineares em ϕ.

Então, de acordo com Hale [5], uma solução de (2.20), com valor inicial ϕ, em 0, satisfaz a fórmula de variação das constantes

$$(2.21) \qquad \begin{aligned} x_t - X_oG(t,x_t) &= T(t)\left[\phi - X_oG(0,\phi)\right] + \\ &+ \int_0^t T(t-s)X_oF(s,x_s)ds - \int_0^t \left[d_sT(t-s)X_o\right]G(s,x_s) \end{aligned}$$

para $t \geq 0$.

onde $T(t)\left[\phi - X_oG(0,\phi)\right]$ é definido como $T(t) - X_tG(0,\phi)$ e $T(t)X_o = X_t$.

As integrais em (2.21) são calculadas para cada $\theta \in [-r,0]$ como integrais ordinárias no R^n. Também se C é decomposto por Λ como $C = P \oplus Q$, então a equação (2.21) é equivalente a

$$
(2.22)\quad \begin{cases} x_t^P - X_0^P G(t,x_t) = T(t)\left[\phi^P - X_0^P G(0,\phi)\right] + \\ \quad + \int_0^t T(t-s)X_0^P F(s,x_s)\,ds - \int_0^t \left[d_s T(t-s)X_0^P\right] G(s,x_s) \\ x_t^Q - X_0^Q G(t,x_t) = T(t)\left[\phi^Q - X_0^Q G(0,\phi)\right] + \\ \quad + \int_0^t T(t-s)X_0^Q F(s,x_s)\,ds - \int_0^t \left[d_s T(t-s)X_0^Q\right] G(s,x_s) \end{cases}
$$

onde os expoentes P e Q designam as projeções das correspondentes funções sobre os subespaços P e Q, respectivamente.

Devemos observar, entretanto, que na relação (2.22) tudo está bem definido exceto o significado das projeções X_0^P, X_0^Q uma vez que X_0 não é contínua. Pode-se obter projeções levando C sobre P e Q, por meio da equação diferencial adjunta (2.8) e a forma bilinear (2.9). Pode-se mostrar que $(\Psi , X_0) = \Psi(0)$.

Portanto, se colocarmos

$$(2.23)\qquad X_0^P = \Phi \Psi(0), \quad X_0^Q = X_0 - X_0^P$$

A fórmula de variação das constantes (2.21) sugere a possibilidade de uma mudança formal de variável. Contudo precisamos tomar um certo cuidado, pois a nova variável poderá não ser uma função contínua sobre $[-r,0]$.

<u>Definição 2.5</u> Seja PC o espaço das funções $\phi : [-r,0] \to R^n$ uniformemente contínuas sobre $[-r,0)$ e para os quais $\phi(0_-)$ existe.

Tornamos PC um espaço de Banach, definindo
$\|\phi\| = |\phi(0)| + \sup\{ |\phi(\theta)| , -r \leq \theta < 0 \}$.

Seja PC_G o conjunto fechado em PC definido por

$PC_G = \{ \phi \quad PC \mid \quad \phi(0) = \phi(0_-) - X_0 G(t, \phi) \}$.

Como $G(t, \phi)$ independe de $\phi(0)$, as aplicações

$$
(2.24) \qquad
\begin{aligned}
h&: C \to PC_G , \quad h(\psi) = \psi - X_0 G(t, \psi) \\
H&: PC_G \to C , \quad H(\phi) = \phi + X_0 G(t, \phi)
\end{aligned}
$$

são homeomorfismos e $h.H = H.h$ é a identidade

De fato

$$h(\psi) = \psi - X_0 G(t, \psi)$$

$$H.h(\psi) = \psi - X_0 G(t, \psi) + X_0 G[t, \psi - X_0 G(t, \psi)] =$$

$$= \psi - X_0 G[t, X_0 G(t, \psi)] = \psi$$

pois $X_0 = 0$ em $[-r, 0)$, $X_0(0) = I$ e $G(t, \psi)$ não depende de $\psi(0)$.

Analogamente, temos que $h.H(\psi) = \psi$, o que prova que $h.H = H.h = I$.

Para cada ϕ em PC_G existe uma única função $\psi \in C$ tal que $\phi = \psi - X_0 G(t, \psi)$ e reciprocamente .

A fórmula de variação das constantes (2.21), para as soluções de (2.19), sugere a mudança de variáveis $x_t - X_0 G(t, x_t) = z_t$ e obtemos assim uma nova equação para z_t em PC. Esta transformação de C para PC é bem definida e $G(t, x_t)$ depende somente dos valores $x_t(\theta)$ para $-r \leq \theta < 0$. Portanto $G(t, x_t) = G(t, z_t)$.

Assim se

$$z_t = x_t - X_0 G(t, x_t)$$

ou

$$x_t = z_t + X_0 G(t,x_t) = z_t + X_0 G(t,z_t) \overset{def.}{=} H(t,z_t)$$

A equação (2.21) fica

$$(2.25) \qquad \begin{aligned} z_t = T(t)z_0 &+ \int_0^t T(t-s)X_0 F(s,H(s,z_s)) - \\ &- \int_0^t \left[d_s T(t-s)X_0\right] G(s,z_s) \end{aligned}$$

A seguir enunciaremos um resultado que será utilizado nas aplicações do capítulo seguinte:

<u>Lema 2.2</u>

Se u e α são funções contínuas de valores reais definidas sobre $[a, b]$, e $\beta \geqslant 0$ é integrável sobre $[a,b]$ com

$$(2.26) \qquad u(t) \leqslant \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)u(s)ds, \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

então

$$(2.27) \qquad u(t) \leqslant \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\alpha(s) \left[\exp \int_s^t \beta(\tau)d\tau\right] ds,$$

$$a \leqslant t \leqslant b .$$

se, além disso, α é não decrescente, então

$$(2.28) \qquad u(t) \leqslant \alpha(t) \exp\left(\int_a^t \beta(s)ds\right), \quad a \leqslant t \leqslant b .$$

O lema acima encontra-se em Hale [5], pág. 15.

CAPÍTULO III

COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO

Consideremos os sistemas

$$(3.1) \qquad \frac{d}{dt} Dx_t = Lx_t$$

e

$$(3.2) \qquad \frac{d}{dt} \left[Dx_t - G(t,x_t) \right] = Lx_t + F(t,x_t)$$

com D e L como em (2.2), F e G contínuas, lineares em relação à segunda variável, G não atômica no zero.

Nosso objetivo será, estudar o comportamento de soluções de (3.2) quando $t \to \infty$, com hipóteses de que F e G são "pequenas" quando $t \to \infty$.

Em primeiro lugar vamos demonstrar um resultado que irá simplificar algumas demonstrações mais adiante.

<u>Lema 3.1</u>

A mudança de variável $x(t) = e^{\alpha t} \tilde{x}(t)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, transforma a equação (3.1) na equação

$$(3.3) \qquad \frac{d}{dt} \tilde{D}\tilde{x}_t = \tilde{L}\tilde{x}_t$$

$$(3.4) \qquad \tilde{D}\phi = \phi(0) - \int_{-r}^{0} \left[d\mu(\theta) \right] e^{\alpha\theta} \phi(\theta)$$

$$(3.5) \qquad \tilde{L}\phi = \int_{-r}^{0} [d\eta(\theta)]\, e^{\alpha\theta}\, \phi(\theta) - \alpha\left(\phi(0) - \int_{-r}^{0} [d\mu(\theta)]\, e^{\alpha\theta}\phi(\theta)\right)$$

Além disso, se $h(\lambda)$ e $\tilde{h}(\lambda)$ são as funções características de (3.1) e (3.3), respectivamente, então, $\tilde{h}(\lambda) = h(\alpha + \lambda)$.

Prova

Temos que (3.1) é equivalente a

$$\frac{d}{dt}\left[x(t) - \int_{-r}^{0} [d\mu(\theta)]\, x(t+\theta)\right] = \int_{-r}^{0} [d\eta(\theta)]\, x(t+\theta)$$

Fazendo a mudança de variável $x(t) = e^{\alpha t}\, \tilde{x}(t)$,

temos:

$$\frac{d}{dt}\left[e^{\alpha t}\, \tilde{x}(t) - \int_{-r}^{0} [d\mu(\theta)]\, e^{\alpha(t+\theta)}\tilde{x}(t+\theta)\right] =$$

$$= \int_{-r}^{0} [d\eta(\theta)]\, e^{\alpha(t+\theta)}\, \tilde{x}(t+\theta) \quad \Longleftrightarrow$$

$$\alpha\, e^{\alpha t}\left[\tilde{x}(t) - \int_{-r}^{0} [d\mu(\theta)]\, e^{\alpha\theta}\, \tilde{x}(t+\theta)\right] +$$

$$+\, e^{\alpha t}\, \frac{d}{dt}\left[\tilde{x}(t) - \int_{-r}^{0} [d\mu(\theta)]\, e^{\alpha\theta}\, \tilde{x}(t+\theta)\right] =$$

$$= e^{\alpha t} \int_{-r}^{0} [d\;(\theta)]\, e^{\alpha\theta}\, \tilde{x}(t+\theta) \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left[\tilde{x}(t) - \int_{-r}^{0} [d\mu(\theta)]\, e^{\alpha\theta}\, \tilde{x}(t+\theta)\right] =$$

$$= \int_{-r}^{0} [d\eta(\theta)]\, e^{\alpha\theta}\, \tilde{x}(t+\theta) - \alpha\left[\tilde{x}(t) - \int_{-r}^{0} [d\mu(\theta)\, e^{\alpha\theta}\tilde{x}(t+\theta)\right]$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\tilde{D}\tilde{x}_t = \tilde{L}\tilde{x}_t$$

O que mostra a primeira parte do Lema.

A segunda parte também é trivial, pois

$$h(\lambda) = \det \left\{ \lambda \left[I - \int_{-r}^{0} d\,(\theta)\; e^{\lambda\theta} \right] - \int_{-r}^{0} [d\eta(\theta)]\; e^{\lambda\theta} \right\}$$

$$\bar{h}(\lambda) = \det \left\{ \lambda \left[I - \int_{-r}^{0} [d\mu(\theta)\; e^{(\lambda+\alpha)\theta} \right] - \right.$$

$$\left. - \int_{-r}^{0} [d\eta(\theta)]\; e^{(\lambda+\alpha)\theta} + \alpha(I - \int_{-r}^{0} [d\mu(\theta)]\; e^{(\alpha+\lambda)\theta} \right\} =$$

$$= \det \left\{ (\alpha+\lambda) \left[I - \int_{-r}^{0} [d\mu(\theta)]\; e^{(\alpha+\lambda)\theta} \right] - \right.$$

$$\left. - \int_{-r}^{0} [d\eta(\theta)]\; e^{(\alpha+\lambda)} \right\} =$$

$$= h\,(\alpha+\lambda)\,.$$

Uma consequência imediata do lema acima é a seguinte:

Se $a_{D,L} = \alpha$, então $a_{\bar{D},\bar{L}} = 0$.

Vamos agora demonstrar um teorema sobre comportamento assintótico, que é uma simples generalização do Teorema 9.1, de Hale ([5] , pág. 304).

Teorema 3.1

Suponhamos que $D,L\colon C \to R^n$ são lineares e contínuas e que a solução nula da EDFN(D,L) é uniformemente assintoticamente estável. Se $F,G\colon [\sigma,\infty) \times C \to R^n$ são contínuas e $G(t,\phi)$ independe de $\phi(0)$, suponhamos ainda que $|F(t,\phi)| \leqslant \gamma(t)\|\phi\|$, $|G(t,\phi)| \leqslant \pi(t)\|\phi\|$, com

$$\int^{\infty} \gamma(t)dt < \infty \quad , \quad \int^{\infty} \pi(t)dt < \infty \quad , \quad \gamma(t) \geq 0 \ ,$$

$\pi(t) \geq 0$ são contínuas, então a solução nula da equação

$$\frac{d}{dt}\left[Dx_t - G(t,x_t)\right] = Lx_t + F(t,x_t)$$

é exponencialmente assintoticamente estável.

<u>Prova</u>

Como no capítulo II, seja

$$PC_G = \{ \psi \in PC \mid \psi(0) = \psi(0_-) - X_0G(t,\psi)\} \ .$$

Vimos que existe um homeomorfismo $h: C \to PC_G$, definido por (2.24) numa vizinhança de $\phi = 0 \in C$, $\psi = 0 \in PC_G$.

Portanto, existem constantes $k_1 > 0$ e $k_2 > 0$ tais que, nesta vizinhança, $\psi = h(\phi)$ implica $|\psi| < k_1|\phi|$ e $|\phi| \leq k_2|\psi|$.

Para a equação $\frac{d}{dt}\left[Dx_t - G(t,x_t)\right] = Lx_t + F(t,x_t)$ a fórmula de variação das constantes é

$$x_t - X_0G(t,x_t) = T(t)\left[\phi - X_0G(t,\phi)\right] + \int_0^t T(t-s)X_0F(s,x_s)ds - \int_0^t \left[d_sT(t-s)X_0\right]G(s,x_s)$$

Se $z_t = h(x_t)$ e $\psi = h(\phi)$, então z_t satisfaz a equação

$$z_t = T(t)\psi + \int_0^t T(t-s)X_0F(s,h^{-1}(z_s)) - \int_0^t \left[d_sT(t-s)X_0\right]G(s,h^{-1}(z_s))$$

Pelo Lema 2.1 sabemos que

$$|X(t)| \leq Ke^{-\alpha t}, \quad Var_{[t-1,t]} X \leq Ke^{-\alpha t}$$

para algumas constantes $K > 0$, $\alpha > 0$ e todo $t \geq 0$

Logo

$$|z_t| \leq Ke^{-\alpha t}|\psi| + \int_0^t Ke^{-\alpha(t-s)}\gamma(s)|x_s|\,ds + \int_0^t Ke^{-\alpha(t-s)}\pi(s)|x_s|\,ds$$

$$|z_t| \leq Ke^{-\alpha t}|\psi| + \int_0^t Ke^{-\alpha(t-s)}|x_s|\left[\gamma(s)+\pi(s)\right]ds$$

$$|z_t|e^{\alpha t} \leq K|\psi| + \int_0^t Ke^{\alpha s}|x_s|\left[\gamma(s)+\pi(s)\right]ds$$

Como $z_s = h(x_s)$, então $|x_s| \leq k_2|z_s|$

Chamando $\Gamma(s) = \gamma(s) + \pi(s)$, então $\int^{\infty} \Gamma(s)ds < \infty$

Temos então que

$$|z_t|\,e^{\alpha t} \leq K|\psi| + \int_0^t k_2Ke^{\alpha s}\,\Gamma(s)|z_s|\,ds$$

Aplicando o Lema 2.2 à desigualdade

$$|z_t|e^{\alpha t} \leq K|\psi| + \int_0^t k_2K\Gamma(s)|z_s|e^{\alpha s}\,ds$$

onde

$$u(t) = |z_t|\,e^{\alpha t}$$

$$\alpha(t) = K$$

$$\beta(s) = k_2K\Gamma(s)$$

temos

$$|z_t|\, e^{\alpha t} \leq K|\psi|\, e^{\int_0^t k_2 K\Gamma(s)\,ds} < K\bar{K}|\psi|$$

onde

$$\bar{K} = e^{\int_0^\infty k_2 K\Gamma(s)\,ds}$$

Logo

$$\frac{1}{k_2}\,|x_t| \leq |z_t| < K\bar{K}k_1|\phi|\, e^{-\alpha t}$$

o que prova o teorema.

Vamos agora enunciar e demonstrar o principal teorema deste trabalho, sobre comportamento assintótico da solução do sistema (3.2), num caso particular.

Teorema 3.2

Consideremos o sistema

$$(3.1) \qquad \frac{d}{dt} Dx_t = Lx_t$$

Suponhamos que $\mu = a_{D,L} > a_D$ seja raiz dupla de (3.1), suponhamos ainda que não existam raízes λ da equação característica tal que $\mathrm{Re}\,\lambda = \mu$.

Além disso, vamos supor que o sistema

$$(3.2) \qquad \frac{d}{dt}\left[Dx_t - G(t,x_t)\right] = Lx_t + F(t,x_t)$$

seja tal que existam funções contínuas $\gamma(t)$ e $\pi(t)$ tais que F e G satisfaçam

$$(3.6) \qquad |F(t,\phi)| \leq \gamma(t)\|\phi\| \quad \text{e} \quad |G(t,\phi)| \leq \pi(t)\|\phi\| \,, \qquad t \geq \sigma$$

com

$$(3.7) \qquad \int^{\infty} t^j \, \gamma(t)dt < \infty \quad , \quad \int^{\infty} t^j \, \pi(t)dt < \infty$$

$$\int^{\infty} t^j \, \gamma(t) \, \pi(t)dt < \infty \quad , \quad j = 0, 1, 2 .$$

Sob estas hipóteses, então existem duas soluções $x_1(t)$ e $x_2(t)$ de (3.2) tais que

$$x_1(t) \to e^{\mu t} \text{ , quando } t \to \infty$$

$$x_2(t) \to t\, e^{\mu t} \text{ , quando } t \to \infty$$

Prova

Para simplificar a demonstração, vamos fazer a mudança de variável $x(t) = e^{\mu t}\tilde{x}(t)$. Pelo lema anterior e sua consequência, 0 é raiz dupla da equação característica de

$$(3.3) \qquad \frac{d}{dt} \tilde{D}\tilde{x}_t = \tilde{L}\tilde{x}_t$$

com $\tilde{D}$ e $\tilde{L}$ dados em (3.4) e (3.5), respectivamente.

Por outro lado, do fato de F e G serem lineares em ϕ essa mudança de variável transforma (3.2) em

$$(3.8) \qquad \frac{d}{dt} \left[\tilde{D}\tilde{x}_t - \tilde{G}(t,\tilde{x}_t) \right] = \tilde{L}\tilde{x}_t + \tilde{F}(t,\tilde{x}_t)$$

onde:

$$\tilde{G}(t,\phi) = G(t, \nu_0 \phi)$$

$$\tilde{D}\phi = D(\nu_0 \phi)$$

$$\tilde{F}(t,\phi) = F(t, \nu_0\phi) + \mu\, G(t, \nu_0 \phi)$$

$\nu_o : [-r,0] \to R$ é tal que $\nu_o(\theta) = e^{\mu\theta}$

É claroque se F e G satisfazem as condições do teorema, $\tilde{F}$ e $\tilde{G}$ também satisfazem.

Mostremos agora que existem duas soluções $\tilde{x}_1(t)$ e $\tilde{x}_2(t)$ de (3.8) tais que

$$\tilde{x}_1(t) \to 1 \quad \text{e} \quad \tilde{x}_2(t) \to t \quad \text{quando} \quad t \to \infty$$

Nas condições do Teorema, uma base de soluções correspondente ao autovalor $\mu = 0$ para a equação (3.3) é $(\phi_1(\theta), \phi_2(\theta)) = (1,\theta)$, $-r \leq \theta \leq 0$. Podemos tomar $\Psi = \text{col}\ (\psi_1(\tau), \psi_2(\tau))$, $0 \leq \tau \leq r$, base para o auto-espaço generalizado da adjunta tal que a matriz $(\Psi,\Phi) = (\psi_i, \phi_j)$, $i,j = 1,2$ seja a identidade, teorema (2.2) do capítulo II.

Temos também que

$$\Phi(\theta) = \Phi(0)e^{B\theta} \quad , -r \leq \theta \leq 0 \quad \text{com} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, podemos escrever

$$(3.9) \qquad z_t = \Phi\, y(t) + z_t^Q \ , \quad \text{onde} \quad x_t = z_t + X_o G(t,z_t)$$

com $y(t) = \text{col}\ (y_1(t), y_2(t)) = (\Psi, \tilde{x}_t) =$

$$= e^{Bt}y(0) + \int_0^t Be^{B(t-s)}\Psi(0)G(s,z_s)ds +$$

$$+ \int_0^t e^{B(t-s)}\Psi(0)F(s,z_s+X_oG(s,z_s))ds$$

então,

$$
(3.10)\quad
\begin{aligned}
\dot{y}(t) &= Be^{Bt}y(0) + B\Psi(0)G(t,z_t) + \\
&+ B\int_0^t Be^{B(t-s)}\ \Psi(0)G(s,z_s)ds + \\
&+ \Psi(0)F(t,z_t + X_0G(t,z_t)) + \\
&+ B\int_0^t e^{B(t-s)}\ \Psi(0)F(s,z_s+X_0G(s,z_s))ds = \\
&= By(t) + B\Psi(0)G(t,z_t) + \Psi(0)F(t,z_t+X_0G(t,z_t))
\end{aligned}
$$

e consideremos o sistema

$$
(3.11)\quad
\begin{cases}
\dot{y}(t) = By(t) + B\Psi(0)G(t,z_t) + \Psi(0)F(t,z_t+X_0G(t,z_t)) \\
z_t^Q = \displaystyle\int_\sigma^t \left[-d_sT(t-s)X_0^Q\right] G(s,z_s) + \\
\qquad + \displaystyle\int_\sigma^t T(t-s)X_0^QF(s,z_s+X_0G(s,z_s))ds\ , \\
\qquad\qquad t \geq \sigma
\end{cases}
$$

Seja $u(t)$ tal que $y(t) = e^{Bt}u(t)$. Então

$$
(3.12)\quad \dot{y}(t) = Be^{Bt}u(t) + e^{Bt}\dot{u}(t) = By(t) + e^{Bt}\dot{u}(t)
$$

Comparando as expressões (3.10) e (3.12) para $\dot{y}(t)$, obtemos

$$
(3.13)\quad \dot{u}(t) = e^{-Bt}B\Psi(0)G(t,z_t) + e^{-Bt}\Psi(0)F(t,z_t)
$$

Integrando de σ até t, obtemos

$$
(3.14)\quad
\begin{aligned}
u(t) = u(\sigma) &+ \int_\sigma^t e^{-Bs}B\ \Psi(0)G(s,z_s)ds + \\
&+ \int_\sigma^t e^{-Bs}\Psi(0)F(s,z_s+X_0G(s,z_s))ds
\end{aligned}
$$

Portanto se para alguma constante $u(\sigma)$ encontrarmos a solução z_t do sistema

$$
(3.15)\quad \begin{cases}
z_t = \Phi\, e^{Bt}u(t) + z_t^Q \\
u(t) = u(\sigma) + \displaystyle\int_\sigma^t e^{-Bs}B\,\Psi(0)G(s,z_s)ds\; + \\
\qquad + \displaystyle\int_\sigma^t e^{-Bs}\,\Psi(0)F(s,z_s+X_oG(s,z_s))ds \\
z_t^Q = \displaystyle\int^t \left[-d_sT(t-s)X_o^Q\right] G(s,z_s) \; + \\
\qquad + \displaystyle\int_\sigma^t T(t-s)X_o^Q F(s,z_s+X_oG(s,z_s))ds
\end{cases}
$$

implicará numa solução de (3.11) e portanto de (3.8)

$$\tilde{x}_t = \Phi\, e^{Bt}u(t) + X_oG(t,z_t) + z_t^Q$$

Desde que $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, temos que

$$|e^{Bt}| \leqslant t, \quad t \geqslant 0$$

Por hipótese, temos que

$$\int^\infty t^j\gamma(t)dt < \infty, \quad \int^\infty t^j\pi(t)dt < \infty,$$

$$\int^\infty t^j\gamma(t)\,\pi(t)dt < \infty, \quad j = 0, 1, 2$$

e pelo lema (2.2) existem constantes $K > 0$ e $\alpha > 0$ tais que

$$(3.16)\quad \|T(t)X_o^Q\| \leqslant Ke^{-\alpha t}, \quad \mathrm{Var}_{[t-1,t]}X \leqslant Ke^{-\alpha t}, \quad t \geqslant 0$$

Consideremos a classe S de funções z(t) definidas sobre $[\sigma, \infty)$, $\sigma \geq 0$, tal que

$$z_t = \Phi\, e^{Bt}u(t) + z_t^Q, \quad |u(t) - c| \leq \delta, \quad \|z_t^Q\| \leq \beta,$$

para $t \geq \sigma$ onde α, β, σ são constantes a serem determinadas depois.

Para qualquer z em S, consideremos a aplicação Tz definida por

$$(3.17)\quad \begin{cases} (Tz)_t = \Phi\, e^{Bt}\,\bar{u}(t) + \bar{z}_t^Q, \\ \bar{u}(t) = c - \displaystyle\int_t^{\infty} e^{-Bs}B\,\Psi(0)G(s,z_s)ds - \\ \qquad - \displaystyle\int_t^{\infty} e^{-Bs}\,\Psi(0)F(s,z_s+X_0G(s,z_s))ds \\ \bar{z}_t^Q = \displaystyle\int_\sigma^t -d_sT(t-s)X_0^Q\; G(s,z_s) + \\ \qquad + \displaystyle\int_\sigma^t T(t-s)X_0^QF(s,z_s+X_0G(s,z_s))ds, \\ \qquad\qquad t \geq \sigma \end{cases}$$

Para qualquer z em S, as funções $\bar{u}(t)$, $\bar{z}_t^Q$ são majoradas por

$$\|\bar{z}_t^Q\| \leq kK\int_\sigma^t e^{-\alpha(t-s)}\,\pi(s)\left[s(|c|+\delta)+\beta\right] +$$
$$+ kK\int_\sigma^t e^{-\alpha(t-s)}\,\gamma(s)\left\{s(|c|+\delta)+s\beta + \right.$$
$$\left. + \pi(s)\left[s^2(|c|+\delta)+s\beta\right]\right\} ds$$

$$(3.18)\quad |\bar{u}(t)-c| \leq k\int_t^{\infty} \pi(s)\left[s^2(|c|+\delta)+s\beta\right] ds +$$
$$+ k\int_t^{\infty} \gamma(s)\left\{s^2(|c|+\delta)+s\beta + \right.$$
$$\left. + \pi(s)\left[s^2(|c|+\delta)+s\beta\right]\right\} ds$$

A hipótese (3.7) nos permite escolher σ suficientemente grande tal que $|\overline{u}(t) - c| \leq \delta$, $|\overline{z}_t^Q| \leq \beta$ para $t \geq \sigma$.

Assim, T aplica S em S e além disso é uma contração e é contínua. Portanto T tem um único ponto fixo, digamos z, em S.

De (3.7), (3.17) e (3.18), seque que $u(t) \to c$, $z_t^Q \to 0$ quanto $t \to \infty$.

A última relação segue por causa de (3.7) e porque $\alpha > 0$.

Se $u = \text{col}\,(u_1,u_2)$, $c = \text{col}\,(c_1,c_2)$, vamos mostrar que $t|u_2(t) - c_2| \to 0$ quanto $t \to \infty$.

De fato, desde que

$$u(t) = c - \int_t^\infty e^{-Bs}B\;\Psi(0)G(s,z_s)ds + \int_0^t e^{-Bs}\,\Psi(0)F(s,z_s+X_0G(s,z_s))ds,$$

isto é,

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} - \int_t \begin{pmatrix} {}_2(0) \\ 0 \end{pmatrix} G(s,z_s)ds - \int_t^\infty \begin{pmatrix} \psi_1(0)-s\psi_2(0) \\ \psi_2(0) \end{pmatrix} F(s,z_s+X_0G(s,z_s))ds$$

o que implica que

$$u_1(t) = c_1 - \int_t^\infty \psi_2(0) G(s, z_s) ds -$$

$$- \int_t^\infty (\psi_1(0) - s\, \psi_2(0)) F(s, z_s + X_0 G(s, z_s)) ds$$

$$u_2(t) = c_2 - \int_t^\infty \psi_2(0) F(s, z_s + X_0 G(s, z_s)) ds$$

$$|u_2(t) - c_2| \leqslant \int_t^\infty |\psi_2(0) F(s, z_s + X_0 G(s, z_s))| \, ds$$

$$\leqslant k \int_t^\infty \gamma(s) \left[s|u| + \| z_s^Q \| + \pi(s) \| z_s \| \right] ds$$

Como $u(t)$ e z_t^Q são limitadas e vale (3.7) implica que $t|u_2(t) - c_2| \to 0$ quando $t \to \infty$.

É claro, pois

$$t|u_2(t) - c_2| \leqslant K \int_t^\infty t\, \gamma(s) \left| s|u| + \| z_s^Q \| + \pi(s) \| z_s \| \right| ds$$

$$\leqslant K \int_t^\infty s\, \gamma(s) \left| s|u| + \| z_s^Q \| + \pi(s) \| z_s \| \right| ds$$

Do fato de $u(t)$ e z_t^Q serem limitadas e valer (3.7) então $t|u_2(t) - c_2| \to 0$ quando $t \to \infty$.

Analogamente verifica-se que

$$|u_1(t) - c_1| \to 0 \quad \text{quando} \quad t \to \infty$$

Isto implica que $\phi\, e^{Bt} \left| u(t) - c \right| \to 0$ quando $t \to \infty$ para todo vetor constante c. Desde que $z_t^Q \to 0$ e $X_0 G(t, z_t) \to 0$ quando $t \to \infty$, temos que $z_t + X_0 G(t, z_t) - \Phi\, e^{Bt} c \to 0$ quando $t \to \infty$. Como $\tilde{x}_t = z_t + X_0 G(t, z_t)$, então $\tilde{x}_t - \Phi\, e^{Bt} c \to 0$ quando $t \to \infty$.

Se tomarmos constantes

$$c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

as soluções de (3.8) obtidas são $\tilde{x}_1(t)$ e $\tilde{x}_2(t)$ com $\tilde{x}_1(t) \to 1$ e $\tilde{x}_2(t) \to t$ quando $t \to \infty$.

Pela mudança de variável efetuada, tínhamos que $x(t) = e^{\mu t}\tilde{x}(t)$

Portanto, existem duas soluções $x_1(t)$ e $x_2(t)$ de (3.2) tais que

$$x_1(t) = e^{\mu t}\tilde{x}_1(t) \to e^{\mu t} \quad \text{quando} \quad t \to \infty$$

$$x_2(t) = e^{\mu t}\tilde{x}_2(t) \to te^{\mu t} \quad \text{quando} \quad t \to \infty$$

Assim o teorema fica provado.

OBSERVAÇÃO

A hipótese do teorema de supor que μ seja raiz dupla real, que $\mu = a_{D,L}$ e que não exista raizes λ da equação característica tal que $\text{Re}\,\lambda = \mu$; apesar de ser bastante restritiva, em alguns casos é satisfeita como mostra o exemplo abaixo.

Sejam

$$D\,\phi = \phi(0) - \frac{1}{2}\phi(-1)$$

$$L\,\phi = \frac{1}{2}\phi(0) - \frac{1}{2}\phi(-1)$$

e consideremos o sistema

$$\frac{d}{dt}\left[x(t) - \frac{1}{2}x(t-1)\right] = \frac{1}{2}x(t) - \frac{1}{2}x(t-1)$$

cuja equação característica é

$$h(\lambda) = \lambda(1 - \frac{1}{2} e^{-\lambda}) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-\lambda}$$

é claro que $h(0) = h'(0) = 0$. Portanto zero é raiz dupla de $h(\lambda) = 0$.

Vamos mostrar que não existe raiz imaginária pura, isto é, vamos mostrar que a equação $h(\alpha i) = 0$, $\alpha \in R - \{0\}$ não tem solução.

De fato:

$$h(\alpha i) = \alpha i \left[1 - \frac{1}{2} (\cos\alpha - i \operatorname{sen}\alpha) \right] - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (\cos\alpha - i \operatorname{sen}\alpha)$$

$h(\alpha i) = 0 \Longrightarrow$

$$\alpha i \left[(2 - \cos\alpha) + i\operatorname{sen}\alpha \right] + (\cos\alpha - 1) - i\operatorname{sen}\alpha = 0$$

$$\left[\cos\alpha - 1 - \alpha\operatorname{sen}\alpha\right] + i\left[(2-\cos\alpha)\alpha - \operatorname{sen}\alpha\right] = 0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \cos\alpha - 1 - \alpha\operatorname{sen}\alpha = 0 \\ (2-\cos\alpha)\alpha - \operatorname{sen}\alpha = 0 \end{cases}$$

Mas a segunda equação não tem solução para α real desde que

$$(2 - \cos\alpha)\alpha \geqslant \alpha \quad ; \quad \alpha > 0$$

$$(2 - \cos\alpha)\alpha \leqslant \alpha \quad ; \quad \alpha < 0$$

e $\operatorname{sen}\alpha < \alpha$ para $\alpha > 0$

$\operatorname{sen}\alpha > \alpha$ para $\alpha < 0$

Mostremos agora que $h(\lambda) = 0$ não possui raiz da forma $\lambda = u + iv$ com $u > 0$.

De fato:

Suponhamos $h(u + iv) = 0$, $u > 0$

$h(u + iv) = 0 \iff$

$$u + iv = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-(u+iv)}}{1 - \frac{1}{2} e^{-(u+iv)}} = \frac{1 - e^{-(u+iv)}}{2 - e^{-(u+iv)}} \iff$$

$$u + iv = \frac{(1 - e^{-u}\cos v) + i e^{-u} \operatorname{sen} v}{(2 - e^{-u}\cos v) + i e^{-u} \operatorname{sen} v} =$$

$$= \frac{(e^{u} - \cos v) + i \operatorname{sen} v}{(2e^{u} - \cos v) + i \operatorname{sen} v}$$

$$u + iv = \frac{\left[(e^{u} - \cos v) + i \operatorname{sen} v\right] \left[(2e^{u} - \cos v) - i \operatorname{sen} v\right]}{(2 e^{u} - \cos v)^2 + \operatorname{sen}^2 v} \Longrightarrow$$

$$u + iv = \frac{2 e^{2u} - 3 e^{u} \cos v + 1}{4 e^{2u} - 4 e^{u} \cos v + 1} + i \frac{e^{u} \operatorname{sen} v}{4e^{2u} - 4e^{u}\cos v + 1} \iff$$

$$\begin{cases} u = \dfrac{2 e^{2u} - 3 e^{u}\cos v + 1}{4 e^{2u} - 4 e^{u}\cos v + 1} \\[2ex] v = \dfrac{e^{u} \operatorname{sen} v}{4 e^{2u} - 4 e^{u}\cos v + 1} \end{cases} \xLeftrightarrow{e^{u} = z}$$

$$\begin{cases} \ln z = \dfrac{2z^2 - 3z\cos v + 1}{4z^2 - 4z\cos v + 1} \\[2ex] v = \dfrac{z \operatorname{sen} v}{4z^2 - 4z\cos v + 1} \end{cases}$$

A segunda equação não tem solução para $v = \pi + k\pi$, $k \neq -1$, e, para $v \neq \pi + k\pi$ ela é equivalente a:

$$(*) \qquad \frac{v}{\operatorname{sen} v} = \frac{z}{4z^2 - 4z\cos v + 1}$$

O segundo membro dessa equação atinge seu máximo quando $z = \frac{1}{2}$ e como $z = e^u \geq 1$

$$\frac{z}{4z^2 - 4z\cos v + 1} \leq \frac{1}{5 - 4\cos v}$$

Por outro lado $\left|\dfrac{v}{\operatorname{sen} v}\right| > 1 \quad v \neq \pi + k\pi$

e como, $\dfrac{1}{5 - 4\cos v} \leq 1$, a equação (*) não tem solução.

BIBLIOGRAFIA

1 - Avellar, C.E. - " Effects of delays in Differential Difference Equations" Ph.D. Thesis - Brown University Junho de 1979.

2 - Bellman, R. and Cooke, K. L. - "Asymptotic behavior of Solutions of Differential - Difference Equations" - Mem. Amer. Math. Soc., nº 35, (1959).

3 - Hale, J.K. - "Linear Asymptotically Autonomous Functional Differential Equations" - Rend. Circ. Mat. Palermo, (2), 15, (1966), pp 331 - 351.

4 - Hale, J.K. - "Linear functional Differential equations with constant coefficients", Contribuitions to Differential Equations, 3 (1964), pp 351 - 375.

5 - Hale, J.K. - "Theory of Functional Differential Equations", Springer - Verlag, New York, 1977.

6 - Hale, J.K. and K. R. Meyer, A Class of Functional Equations of Neutral Type. Mem. Amer. Math. Soc., nº 76, 1967.

7 - Hale, J. K. and Cruz, M. A. - "Asymptotic Behavior of Neutral Functional Differential Equations" - Arch. Rat. Mech. Ana., Vol. 34, nº 5, (1969), 331-353.

8 - Henry, D., "Linear Autonomous Neutral Functional Differential Equations", J. Diff. Eq. 15 (1974), pp. 106-128.

9 - Izé, A. F. - "Linear Functional Differential Equations of Neutral Type Asymptotically Autonomous" - Annali di Matematica pura ed applicata (IV), Vol XCVI, pp. 21 - 39 (1973)

10 - Izé, A. F. e Molfetta, N.A. "Asymptotically autonomous neutral functional differential equations with time - dependent lag". - Jour. Math. Ana. and Aplic. Vol. 51 - nº 2 (1975)

11 - Taylor, A. E., "Introduction to Functional Analysis", John Wiley and Sons, Inc., New York, 1958.