UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Subvariedades com curvatura de Moebius constante e fibrado normal plano

Mateus da Silva Rodrigues Antas

Tese de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPG-Mat)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

Mateus da Silva Rodrigues Antas

Subvariedades com curvatura de Moebius constante e fibrado normal plano

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Ruy Tojeiro de Figueiredo Junior

USP – São Carlos
Abril de 2023

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

A627s

Antas, Mateus da Silva Rodrigues
Subvariedades com curvatura de Moebius constante e fibrado normal plano / Mateus da Silva Rodrigues Antas; orientador Ruy Tojeiro de Figueiredo Junior. -- São Carlos, 2023.
88 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2023.

1. Geometria de Moebius. 2. Subvariedades com curvatura de Moebius constante. 3. Subvariedades isoparamétricas de Moebius. 4. Subvariedades com fibrado normal plano. 5. Subvariedades conformemente Euclidianas. I. Junior, Ruy Tojeiro de Figueiredo , orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Mateus da Silva Rodrigues Antas

Submanifolds with constant Moebius curvature and flat normal bundle

Thesis submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP – in accordance with the requirements of the Mathematics Graduate Program, for the degree of Doctor in Science. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Ruy Tojeiro de Figueiredo Junior

USP – São Carlos
April 2023

AGRADECIMENTOS

Meus sinceros agradecimentos a todos que contribuíram para a conclusão do meu doutorado, e em especial:

- Aos meus pais, Antonio e Vanderlene, por sempre me apoiarem e me ensinarem que o melhor caminho é sempre estudar, embora eles nunca tiveram essa oportunidade.
- Ao Prof. Ruy Tojeiro por sugerir o tópico desta tese e por todo esforço e paciência dedicado em me ajudar inúmeras vezes. Sou eternamente grato a ele.
- Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática do ICMC/USP com os quais tive aulas.
- Aos professores: Martha Dussan (IME-USP), José Nazareno (UFSCar) e Fernando Manfio (ICMC-USP) por comporem a banca de defesa e proporem correções nesta tese.
- À FAPESP pelo apoio financeiro no processo 2019/04027-7 referente ao período de 01/05/2019 à 28/02/2023 e à CAPES, processo: 88887.342509/2019-00, durante o recebimento de uma bolsa referente aos meses de março e abril de 2019.

RESUMO

ANTAS, M. S. R. **Subvariedades com curvatura de Moebius constante e fibrado normal plano**. 2023. 88 p. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2023.

Nesta tese, classificamos as subvariedades $f: M^n \to \mathbb{R}^{n+p}$, $n \geq 5$ e $p = 2$ ou $n \geq 6$ e $2p \leq n$, que possuem curvatura de Moebius constante e fibrado normal plano. Também classificamos as subvariedades $f: M^n \to \mathbb{R}^{n+p}$, $n-3 \geq p \geq 1$, conformemente Euclidianas e isoparamétricas de Moebius.

Palavras-chave: geometria de Moebius, métrica de Moebius, subvariedades com curvatura de Moebius constante, subvariedades isoparamétricas de Moebius, forma de Moebius fechada, subvariedades com fibrado normal plano, subvariedades conformemente Euclidianas.

ABSTRACT

ANTAS, M. S. R. **Submanifolds with constant Moebius curvature and flat normal bundle**. 2023. 88 p. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2023.

In this thesis, we classify submanifolds $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+p}$, $n \geq 5$ and $p = 2$ or $n \geq 6$ and $2p \leq n$, with constant Moebius curvature and flat normal bundle. We also classify the class of conformally flat submanifolds $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+p}$, $n-3 \geq p \geq 1$, which are Moebius isoparametric.

Keywords: Moebius geometry, Moebius metric, submanifolds with constant Moebius curvature, Moebius isoparametric submanifolds, closed Moebius form, submanifolds with flat normal bundle, conformally flat submanifolds.

LISTA DE SÍMBOLOS

T_xM — espaço tangente a variedade diferenciável M^n em x

$C^\infty(M)$ — anel das funções reais de classe C^∞ definidas em M

span — subespaço gerado

$K(X,Y) = \frac{\langle R(X,Y)Y,X\rangle}{\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle - \langle X,Y\rangle^2}$ — curvatura seccional do plano $\operatorname{span}\{X,Y\} \subset T_xM$

$\partial/\partial u_i$ — campo coordenado

$\operatorname{Hess}\omega(X,Y) = g(\nabla_X \operatorname{grad}\omega, Y)$ — hessiano de $\omega \in C^\infty(M)$ com respeito à métrica g

grad — gradiente

tr — traço

$\operatorname{Hom}^2(TM,TM;N_fM)$ — fibrado vetorial dos homomorfismos de $TM \times TM$ em N_fM

$\operatorname{End}(TM)$ — fibrado vetorial dos endomorfismos de TM

SUMÁRIO

CAPÍTULO

1

INTRODUÇÃO

Os resultados desta tese se inserem na chamada *Geometria de Moebius*, na qual as propriedades de interesse são aquelas invariantes pelas *transformações de Moebius*, ou seja, as transformações conformes do espaço Euclidiano.

Em um artigo seminal, Wang introduziu em (WANG, 1998) um conjunto completo de invariantes por transformações de Moebius. Um de tais invariantes é a chamada *métrica de Moebius* associada a uma imersão $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+p}$, $n \geq 2$, sem pontos umbílicos, definida por

$$\langle\,,\rangle^* = \rho^2 \langle\,,\rangle_f,$$

em que $\rho := \sqrt{\frac{n}{n-1}(||\alpha^f||^2 - n||\mathscr{H}^f||^2)}$, $||\alpha^f||$ denota a norma da segunda forma fundamental de f e $\mathscr{H}^f$ é o campo curvatura média de f. Veja a Proposição 2.13 para uma demonstração de que tal métrica é invariante por transformações conformes de $\mathbb{R}^{n+p}$.

Outro importante invariante por transformações conformes de $\mathbb{R}^{n+p}$ associado a uma imersão $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+p}$, $n \geq 2$, sem pontos umbílicos, é a chamada *segunda forma fundamental de Moebius* $\beta = \beta^f : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \Gamma(N_f M)$, definida por

$$\beta(X,Y) = \rho(\alpha(X,Y) - \langle X,Y\rangle \mathscr{H}^f),$$

cujo *operador de forma de Moebius* associado em relação a $\xi \in \Gamma(N_f M)$ é dado por

$$B^f_\xi := \rho^{-1}(A_\xi - \langle \mathscr{H}^f, \xi\rangle \mathrm{Id}) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M).$$

Duas imersões isométricas $f, g : M^n \to \mathbb{R}^{n+p}$ são ditas *conformemente congruentes* se existe uma transformação conforme $\tau : \mathbb{R}^{n+p} \to \mathbb{R}^{n+p}$ tal que $g = \tau \circ f$. Um fato crucial mostrado em (WANG, 1998) foi o seguinte:

Teorema 1.1 ((WANG, 1998)). *Duas hipersuperfícies $f, g : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 2$, sem pontos umbílicos, são conformemente congruentes se e somente se as métricas de Moebius determinadas* *por f e g coincidem e os operadores de forma de Moebius B^f_N e $B^g_{\Phi(N)}$ de f e g coincidem em cada $x \in M^n$, em que $N \in N_fM$ é um campo normal unitário a f e $\phi : N_fM \to N_gM$ é uma das duas possíveis isometrias entre os fibrados normais a f e g.*

Além da métrica de Moebius e da segunda forma fundamental de Moebius, Wang introduziu ainda outros importantes invariantes de Moebius: a *forma de Moebius* e o *tensor de Blaschke*, que serão definidos no Capítulo 2. Uma versão do teorema anterior para imersões $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+p}$ sem pontos umbílicos e codimensão arbitrária está enunciada no Teorema 2.6.

O trabalho de Wang motivou diversos autores a estudar imersões $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+p}$ sem pontos umbílicos cujos invariantes associados possuem estruturas simples ou têm propriedades particulares relevantes. Por exemplo, sugerimos ao leitor consultar (LI; WANG, 2003), (RODRIGUES; TENENBLAT, 2009), (HU; ZHAI, 2011), (LI; GUO, 2015), (GUO; LI; WANG, 2015), (LI; QING; WANG, 2017), (HU; ZHAI, 2018) e (LIN; GUO, 2018).

Dizemos que uma imersão $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+p}$ sem pontos umbílicos possui *curvatura de Moebius constante* se $(M^n, \langle\, , \rangle^*)$ possui curvatura seccional constante. A classificação local das hipersuperfícies $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 4$, que possuem curvatura de Moebius constante foi obtida originalmente em (GUO *et al.*, 2012), mas uma prova alternativa deste resultado pode ser encontrada em (LI; MA; WANG, 2014). O ponto de partida para se obter tal classificação é o fato de que toda subvariedade com curvatura de Moebius constante é conformemente Euclidiana. Lembramos que uma variedade Riemanniana (M^n, g) é *conformemente Euclidiana* se todo ponto de M^n possui uma vizinhança aberta que é conforme a um subconjunto aberto do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$. Em particular, por um resultado devido a Cartan (CARTAN, 1917), uma hipersuperfície $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, com $n \geq 4$, sem pontos umbílicos, deve ter uma curvatura principal λ de multiplicidade $n-1$. Não é difícil mostrar então que a forma de Moebius de uma tal hipersuperfície deve ser fechada.

Esses fatos permitiram aos autores, usando o método do referencial móvel, reduzir o problema a mostrar que qualquer hipersuperfície conformemente Euclidiana cuja forma de Moebius é fechada deve ser localmente conformemente congruente a um cilindro, a um cone ou a uma hipersuperfície de rotação sobre uma curva $\gamma : I \to \mathbb{Q}^2_c$, em que $\mathbb{Q}^2_c$ padroniza os espaços formas de curvatura seccional constante c, com $c = 0, 1$ ou -1, respectivamente.

Nesta tese damos início à investigação das imersões $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+p}$, sem pontos umbílicos e com codimensão arbitrária, cuja curvatura de Moebius é constante. Como o caso geral mostrou-se bastante complexo, iniciamos tal estudo sob a hipótese adicional de que f tem fibrado normal plano.

Em nosso principal resultado, classificamos as imersões isométricas $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+p}$, com $n \geq 5$ e $p = 2$, ou $n \geq 6$ e $2p \leq n$, que possuem curvatura de Moebius constante e fibrado normal plano. Veja o Teorema 4.1 para o enunciado preciso. Como caso particular, estendemos e obtivemos uma demonstração substancialmente mais simples daquela obtida em (GUO *et al.*,

2012) e (LI; MA; WANG, 2014) para o caso de hipersuperfícies.

Para a demonstração do teorema, fazemos novamente uso do fato de que uma subvariedade com curvatura de Moebius constante é conformemente Euclidiana, a partir do qual podemos lançar mão da extensão, obtida por Moore em (MOORE, 1977), do Teorema de Cartan mencionando anteriormente, a qual afirma que uma imersão isométrica $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+p}$, $n-3 \geq p \geq 1$, de uma variedade Riemanniana conformemente Euclidiana, admite sempre um campo normal principal com multiplicidade maior do que ou igual a $n-p$. Em seguida, mostramos que a forma de Moebius de uma subvariedade com curvatura de Moebius constante e fibrado normal plano é fechada, e conseguimos obter expressões para os invariantes de Moebius das subvariedades $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+p}$, $n-3 \geq p \geq 1$, as quais são essenciais para os argumentos utilizados na demonstração do teorema.

Uma hipersuperfície $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ é *isoparamétrica de Moebius* se a forma de Moebius de f se anula em M^n e os autovalores do operador de forma de Moebius B_N de f são funções constantes em M^n. Este conceito foi introduzido em (LI; LIU; WANG, 2002), onde se mostrou que, se f possui duas curvaturas principais distintas λ e μ, então os autovalores de B_N, $\bar{\lambda} = \rho^{-1}(\lambda - H)$ e $\bar{\mu} := \rho^{-1}(\mu - H)$, são funções constantes. Em particular, sob essas hipóteses, f é uma hipersuperfície isoparamétrica de Moebius se e somente se é uma hipersuperfície de Dupin, ou seja, λ e μ são constantes ao longo das folhas das auto-distribuições E_λ e E_μ. Logo, se f é uma hipersuperfície de Dupin com duas curvaturas principais distintas, então f é uma hipersurperfície isoparamétrica de Moebius. Assim, a classificação das hipersuperfícies isoparamétricas de Moebius com duas curvaturas principais distintas obtida em (LI; LIU; WANG, 2002) pode ser vista como uma versão local da classificação das hipersuperfícies de Dupin com duas curvaturas principais distintas obtida em (CECIL; RYAN, 1985).

No capítulo 5, introduzimos a definição de *subvariedades isoparamétricas de Moebius* $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+p}$ com codimensão $p > 1$, e classificamos aquelas para as quais M^n é conformemente Euclidiana e $p \leq n-3$, em particular aquelas que admitem apenas dois campos normais principais distintos, generalizando o resultado obtido em (LI; LIU; WANG, 2002).

Os capítulos desta tese estão organizados do seguinte modo. Primeiro, no Capítulo 2 relembramos alguns resultados sobre subvariedades conformemente Euclidianas e apresentamos os invariantes de Moebius das subvariedades Euclidianas. No Capítulo 3, obtemos os invariantes de Moebius de uma subvariedade conformemente Euclidiana com fibrado normal plano e forma de Moebius fechada, os quais são essenciais nas demonstrações dos resultados principais da tese. No capítulo 4, apresentamos uma demonstração do resultado central desta tese, a saber, a classificação local das imersões isométricas com curvatura de Moebius constante e fibrado normal plano. Por fim, no Capítulo 5 classificamos as subvariedades conformemente Euclidianas e isoparamétricas de Moebius.

CAPÍTULO

2

PRELIMINARES

O objetivo deste capítulo é introduzir os fatos e conceitos necessários para se entender os resultados dos capítulos seguintes, que constituem a parte central desta tese. A teoria aqui exposta é conhecida na literatura como a *Teoria das subvariedades*, e a referência principal sobre o assunto usada neste capítulo será (DAJCZER; TOJEIRO, 2019). Entretanto, faremos menções aos autores que obtiveram resultados relevantes de interesse para esse trabalho.

2.1 A segunda forma fundamental de uma imersão isométrica

Uma aplicação diferenciável $f : M^n \to \tilde{M}^m$ entre variedades diferenciáveis de dimensões n e m é dita ser uma *imersão* se a diferencial $f_*(x) : T_xM \to T_{f(x)}\tilde{M}$ é injetiva para qualquer $x \in M^n$. Logo, necessariamente, $n < m$, e o número $m-n$ é chamado a *codimensão* de f. É usual dizer que f, ou $f(M^n)$, é uma *subvariedade* de $\tilde{M}^m$.

Uma imersão $f : M^n \to \tilde{M}^m$ entre variedades Riemannianas com métricas $\langle\, , \rangle_M$ e $\langle\, , \rangle_{\tilde{M}}$ é dita ser uma *imersão isométrica* se

$$\langle X, Y\rangle_M = \langle f_*(x)X, f_*(x)Y\rangle_{\tilde{M}}, \tag{2.1}$$

para quaisquer $x \in M^n$ e $X, Y \in T_xM$.

Se $f : M^n \to \tilde{M}^m$ é uma imersão e $\tilde{M}^m$ é munida com uma métrica Riemanniana $\langle\, , \rangle_{\tilde{M}}$, então podemos definir uma métrica $\langle\, , \rangle_f$ em M^n por (2.1). A métrica $\langle\, , \rangle_f$ é chamada de *métrica induzida por* f e, munindo-se M^n com tal métrica, então f torna-se uma imersão isométrica.

Seja $f : M^n \to \tilde{M}^m$ uma imersão isométrica. Lembramos que o *fibrado vetorial induzido* por f sobre M^n é definido por

$$f^*T\tilde{M}^m := \bigcup_{x\in M} \{x\} \times T_{f(x)}\tilde{M} = \{(x, \tilde{X}) \in M^n \times T_{f(x)}\tilde{M} \,:\, f(x) = \pi(\tilde{X})\},$$

em que $\pi : T\tilde{M} \to \tilde{M}^m$ é a projeção canônica dada por $\pi(q,v) = q$ para quaisquer $q \in \tilde{M}^m$ e $v \in T_q\tilde{M}$.

Notação 2.1. Seja U um subconjunto aberto de uma variedade diferenciável M.

i. Denotaremos por $\mathfrak{X}(U)$ o conjunto dos campos vetoriais diferenciáveis em U.

ii. Denotaremos por $\Gamma(U,E)$ o conjunto das seções diferenciáveis em U de um fibrado vetorial $\pi : E \to M$. Quando $U = M$, escreveremos $\Gamma(E)$.

A conexão de Levi-Civita $\tilde{\nabla}$ de $\tilde{M}^m$ induz uma única conexão ${}^f\tilde{\nabla}$ em $f^*T\tilde{M}$, chamada a *conexão induzida*, definida por
$$ {}^f\tilde{\nabla}_X(Z\circ f) = \tilde{\nabla}_{f_*X}Z $$
para quaisquer $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $Z \in \mathfrak{X}(\tilde{M})$. A partir daqui, sempre identificaremos ${}^f\tilde{\nabla}$ com $\tilde{\nabla}$.

O complemento ortogonal de f_*T_xM em $T_{f(x)}\tilde{M}$ é chamado o *espaço normal de f em x* e é denotado por $N_fM(x)$. O fibrado normal N_fM de f é o subfibrado vetorial de $f^*T\tilde{M}$ cuja fibra em $x \in M^n$ é $N_fM(x)$.

Considerando a decomposição ortogonal
$$ f^*T\tilde{M} = f_*TM \oplus N_fM, $$
temos
$$ \tilde{\nabla}_X f_*Y = (\tilde{\nabla}_X f_*Y)^T + (\tilde{\nabla}_X f_*Y)^{\perp}, $$
para quaisquer $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$.

A aplicação $\alpha^f : \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M) \to \Gamma(N_fM)$ definida por
$$ \alpha^f(X,Y) = (\tilde{\nabla}_X f_*Y)^{\perp} \tag{2.2} $$
é chamada a *segunda forma fundamental de f*. Decorre da definição de conexão que α^f é $C^\infty(M)$-bilinear, e portanto o valor de $\alpha^f(X,Y)$ em $x \in M^n$ depende apenas dos valores de X e Y em x. Tomando a componente normal em
$$ \tilde{\nabla}_X f_*Y - \tilde{\nabla}_Y f_*X = f_*[X,Y], $$
em que $[X,Y]$ é o colchete de Lie de X e Y, obtemos
$$ \alpha^f(X,Y) = \alpha^f(Y,X) \quad \forall\, X,Y \in \mathfrak{X}(M). $$

Definindo
$$ \nabla_X Y := f_*^{-1}(\tilde{\nabla}_X f_*Y)^T \quad \forall\, X,Y \in \mathfrak{X}(M), \tag{2.3} $$
obtemos que ∇ é uma conexão compatível com a métrica de M^n e simétrica, logo do Teorema de Levi-Civita decorre que ∇ é a conexão Riemanniana de M^n.

As equações (2.2) e (2.3) produzem a conhecida *fórmula de Gauss*

$$\tilde{\nabla}_X f_* Y = f_* \nabla_X Y + \alpha(X,Y). \tag{2.4}$$

O *operador de forma* de f com respeito à $\xi \in \Gamma(N_f M)$ é o operador auto-adjunto $A_\xi : TM \to TM$ dado por

$$\langle A_\xi X, Y\rangle_f = \langle \alpha(X,Y), \xi\tilde{\rangle} \quad \forall\, X,Y \in TM.$$

Observe que

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\nabla}_X \xi, f_* Y\tilde{\rangle} &= -\langle \xi, \tilde{\nabla}_X f_* Y\tilde{\rangle} \\ &= -\langle \xi, \alpha^f(X,Y)\tilde{\rangle} \\ &= -\langle A_\xi X, Y\rangle_f, \end{aligned}$$

para quaisquer $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $\xi \in \Gamma(N_f M)$. Portanto

$$(\tilde{\nabla}_X \xi)^T = -f_* A_\xi X.$$

A componente normal

$$\nabla^\perp_X \xi := (\tilde{\nabla}_X \xi)^\perp$$

define uma conexão compatível com a métrica $\langle\,,\tilde{\rangle}$ em $N_f M$, denominada a *conexão normal* de f. Portanto, temos a conhecida *fórmula de Weingarten*

$$\tilde{\nabla}_X \xi = -f_* A_\xi X + \nabla^\perp_X \xi. \tag{2.5}$$

A seguinte proposição é uma simples interpretação da segunda forma fundamental α de uma imersão isométrica f, que mostra que α mede o quanto as geodésicas em M deixam de ser geodésicas em N.

Proposição 2.1. *Se $\gamma : I \to M$ é uma geodésica e $f : M \to N$ é uma imersão isométrica, então*

$$\alpha^f(v,v) = (f\circ\gamma)''(0),$$

em que $\gamma(0) = p$ e *$\gamma'(0) = v$.*

Demonstração. Existe um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(U)$, com U um subconjunto aberto de M, tal que $X\circ\gamma = \gamma'$.

Note que

$$(\nabla_X X)\circ\gamma = \nabla_{X\circ\gamma} X = \nabla_{\gamma'} X = \nabla_{\gamma_* \frac{d}{dt}} X = {}^\gamma\nabla_{\frac{d}{dt}} X\circ\gamma = {}^\gamma\nabla_{\frac{d}{dt}}\gamma' := \gamma''.$$

Logo

$$(f\circ\gamma)'' := {}^f\bar{\nabla}_{\frac{d}{dt}}(f\circ\gamma)' = ({}^f\bar{\nabla}_X f_* X)\circ\gamma = (f_*\nabla_X X + \alpha^f(X,X))\circ\gamma = \alpha^f(\gamma',\gamma').$$

Então $\alpha^f(v,v) = (f\circ\gamma)''(0)$. $\square$

Finalizamos esta seção relembrando as equações de compatibilidade de uma imersão isométrica $f : M^n \to \tilde{M}^m_c$, em que $\tilde{M}^m_c$ denota uma variedade Riemanniana com curvatura seccional constante c. Sejam $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ e $\xi, \eta \in \Gamma(N_f M)$, e denote por R e $R^\perp$ os tensores de curvatura de TM e $N_f M$, respectivamente,

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z,$$
$$R^\perp(X,Y)\xi = \nabla^\perp_X \nabla^\perp_Y \xi - \nabla^\perp_Y \nabla^\perp_X \xi - \nabla^\perp_{[X,Y]} \xi.$$

Equação de Gauss

$$\langle R(X,Y)Z, W\rangle = c\langle (X \wedge Y)Z, W\rangle + \langle \alpha(X,W), \alpha(Y,Z)\rangle - \langle \alpha(X,Z), \alpha(Y,W)\rangle,$$

para $\wedge$ definido por $(X \wedge Y)Z = \langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y$.

Equação de Codazzi

$$(\nabla^\perp_X \alpha)(Y,Z) = (\nabla^\perp_Y \alpha)(X,Z),$$

sendo $(\nabla^\perp_X \alpha)(Y,Z) = \nabla^\perp_X \alpha(Y,Z) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z)$.

Equação de Ricci

$$\langle R^\perp(X,Y)\xi, \eta\rangle = \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y\rangle,$$

em que $[A_\xi, A_\eta] = A_\xi \circ A_\eta - A_\eta \circ A_\xi$.

2.2 Normais principais e subvariedades com fibrado normal plano

Os resultados desta seção são baseados em (RECKZIEGEL, 1976), cujas demonstrações serão incluídas apenas por simplicidade e completeza da exposição.

Um vetor normal $\eta \in N_f M(x)$ é dito ser um *vetor normal principal* de uma imersão isométrica $f : M^n \to \tilde{M}^m$ em $x \in M^n$ com *multiplicidade* s, se o subespaço vetorial definido por

$$E_\eta(x) = \{X \in T_x M : \alpha^f(X,Y) = \langle X, Y\rangle \eta \quad \forall\, Y \in T_x M\}$$

possui dimensão $s > 0$.

Um campo vetorial normal $\eta \in \Gamma(N_f M)$ é chamado um *campo normal principal* de f com *multiplicidade* s, se $\dim E_\eta(x) = s$ para todo $x \in M^n$.

Proposição 2.2. *Se $f : M^n \to \tilde{M}^m$ é uma imersão isométrica com um campo normal principal η de multiplicidade s, então a distribuição*

$$x \mapsto E_\eta(x)$$

é diferenciável.

Demonstração. Observamos que

$$E_\eta^\perp(x) = \text{span}\{A_\xi X : X \in T_xM \text{ e } \xi \in N_fM(x)\}.$$

Fixemos $x_0 \in M^n$. Como $\dim E_\eta(x_0) = s$, então existem vetores $X_1, \dots X_{n-s} \in T_{x_0}M$ e $\xi_1, \dots, \xi_{n-s} \in N_fM(x_0)$ tais que

$$E_\eta^\perp(x_0) = \text{span}\{A_{\xi_i}X_i : 1 \leq i \leq n-s\}.$$

Considerando extensões diferenciáveis de (X_i, ξ_i) em uma vizinhança de x_0 para $1 \leq i \leq n-s$, decorre do fato de que a independência linear de um conjunto de vetores é preservada por extensões contínuas, que

$$\{A_{\xi_i}X_i : 1 \leq i \leq n-s\}$$

permanece linearmente independente em uma vizinhança de x_0.

Como x_0 é um ponto arbitrário de M^n, segue que a distribuição $E_\eta^\perp$, e portanto E_η, são diferenciáveis em M^n. □

Equivalentemente,

$$E_\eta(x) = \bigcap_{\mu \in N_fM(x)} \ker(A_\mu - \langle \mu, \eta \rangle \text{Id}). \tag{2.6}$$

Em particular, se $f : M^n \to \tilde{M}^{n+1}$ é uma hipersuperfície e $N \in N_fM(x)$ é um vetor normal unitário em x, então $\eta = \lambda N$ é um vetor normal principal de f em x se e somente se λ é uma curvatura principal de f em x. Assim, o conceito de campos normais principais é uma generalização natural para subvariedades de codimensão maior do que 1 da noção de curvaturas principais de hipersuperfícies.

Observamos que se um vetor normal principal η de f em x é trivial, isto é, $\eta = 0$, então

$$E_\eta(x) := \bar{\Delta}(x) = \{X \in T_xM : \alpha^f(X,Y) = 0, \quad \forall\, Y \in T_xM\}$$

é chamado o subespaço de *nulidade relativa* de f em $x \in M^n$ e $\nu(x) = \dim \bar{\Delta}(x)$ é o *índice de nulidade relativa* de f em x.

Definição 2.1. Uma distribuição diferenciável E em uma variedade Riemanniana M é dita ser *totalmente geodésica* se $\nabla_T S \in \Gamma(E)$ para quaisquer $T, S \in \Gamma(E)$, em que ∇ é a conexão Riemanniana de M.

Logo, decorre da simetria da conexão, que se E é uma distribuição totalmente geodésica em M, então

$$[T,S] = \nabla_T S - \nabla_S T \in \Gamma(E), \quad \forall\, T,S \in \Gamma(E).$$

Portanto, E é uma distribuição involutiva, donde temos que E é integrável.

É usual chamar as subvariedades integráveis de uma distribuição integrável $D \subset TM$ de *folhas* de D.

Afirmação 2.1. Se E é uma distribuição totalmente geodésica em M, então as folhas de E são subvariedades totalmente geodésicas de M.

Demonstração. Seja $p \in M$ e N uma subvariedade de M contendo p tal que $T_qN = E_q$ para todo $q \in N$. Logo, se $T,S \in \Gamma(TN)$ então

$$\alpha^N(T,S) = (\nabla_T S)_{TN^\perp} = 0,$$

pois $\nabla_T S \in \Gamma(TN)$. $\square$

Definição 2.2. Uma distribuição diferenciável E em uma variedade Riemanniana M é chamada *umbílica* se existe $\delta \in \Gamma(E^\perp)$ tal que

$$(\nabla_T S)_{E^\perp} = \langle T,S\rangle \delta,$$

para quaisquer $T,S \in \Gamma(E)$. O campo δ é chamado de *campo curvatura média* de E. Em particular, se $\delta \equiv 0$ em M então E é uma distribuição totalmente geodésica.

Proposição 2.3. *Uma distribuição E de posto k é umbílica se e somente se $\nabla_T S \in \Gamma(E)$ para quaisquer $T,S \in \Gamma(E)$ tais que $\langle T,S\rangle = 0$.*

Demonstração. Sejam $T,S \in E$ ortonormais. Então, tomando a componente em $E^\perp$ de

$$\nabla_{T+S}(T-S) = \nabla_T T - \nabla_S S - [T,S],$$

obtemos

$$(\nabla_T T)_{E^\perp} = (\nabla_S S)_{E^\perp}.$$

Defina

$$\delta = (\nabla_T T)_{E^\perp} = (\nabla_S S)_{E^\perp}.$$

Observemos que $(X,Y) \in E \times E \overset{\varphi}{\mapsto} (\nabla_X Y)_{E^\perp}$ é um tensor simétrico. De fato, das propriedades da conexão, segue φ é $C^\infty(M)$-bilinear. Seja $p \in M$ e considere $\{e_1,\dots,e_k\}$ uma base ortonormal de E_p. Então

$$\varphi(e_i,e_j) = (\nabla_{e_i} e_j)_{E^\perp} = (\nabla_{X_i} X_j)_{E^\perp}(p) = 0 = (\nabla_{X_j} X_i)_{E^\perp}(p) = \varphi(e_j,e_i),$$

em que X_i,X_j são extensões ortogonais de e_i,e_j em E.

Logo

$$\varphi(T,S)(p) = \varphi(\sum f_i e_i, \sum g_j e_j) = \sum f_i g_j \varphi(e_i,e_j) = \sum_i f_i g_i \delta(p) = \langle T,S\rangle \delta(p),$$

para quaisquer $T,S \in E$.

Portanto, E é uma distribuição umbílica com campo curvatura média δ. $\square$

Observe que, se E é uma distribuição umbílica, então

$$\langle \nabla_T S - \nabla_S T, X\rangle = \langle T,S\rangle\langle \delta, X\rangle - \langle S,T\rangle\langle \delta, X\rangle = 0,$$

para quaisquer $T,S \in \Gamma(E)$ e $X \in \Gamma(E^{\perp})$, ou seja, E é integrável.

Afirmação 2.2. Se E é uma distribuição umbílica em M, então as folhas de E são subvariedades umbílicas de M.

Demonstração. Seja N uma subvariedade de M tal que $T_qN = E_q$ para todo $q \in N$. Então, se $T,S \in \Gamma(TN)$ temos

$$\alpha^N(T,S) = (\nabla_T S)_{TN^{\perp}} = (\nabla_T S)_{E^{\perp}} = \langle T,S\rangle \delta|_N.$$

Portanto, N é uma subvariedade umbílica de M cujo campo curvatura média é $\delta|_N$. □

Definição 2.3. Uma distribuição umbílica E com campo curvatura média $\delta \in \Gamma(E^{\perp})$ é dita ser *esférica* se

$$(\nabla_T\, \delta)_{E^{\perp}} = 0,$$

para todo $T \in \Gamma(E)$.

Em particular, se E é uma distribuição esférica com campo curvatura média δ, então as folhas de E são subvariedades umbílicas de M cujo campo curvatura média $\mathscr{H} = \delta$ é paralelo na conexão normal. Estas folhas são chamadas de *esferas extrínsecas*.

Definição 2.4. Um campo normal principal $\eta \in \Gamma(N_f M)$ é dito ser um *campo normal principal de Dupin* se η é paralelo na conexão normal de f ao longo de E_η, isto é,

$$\nabla^{\perp}_X \eta = 0,$$

para todo $X \in E_\eta$.

Denotamos por $\mathbb{Q}_c^m$ o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^m$ se $c = 0$, a esfera $\mathbb{S}_c^m$ se $c > 0$ ou o espaço hiperbólico $\mathbb{H}_c^m$ se $c < 0$.

Proposição 2.4. *Seja $f : M^n \to \mathbb{Q}_c^m$ uma imersão isométrica com um campo normal principal η de multiplicidade $q > 0$. Então as seguintes afirmações são satisfeitas*:

1. *Se $q \geq 2$, então η é um campo normal principal de Dupin.*

2. *Se o campo normal principal η é de Dupin então E_η é uma distribuição umbílica.*

Demonstração. Escreva $\eta = \lambda\zeta$, em que $\zeta \in \Gamma(N_f M)$ possui norma unitária.

É conveniente observar que a equação de Codazzi de uma imersão isométrica arbitrária $f: M^n \to \tilde{M}_c^m$ é equivalente à

$$(\nabla_X A)(Y,\xi) = (\nabla_Y A)(X,\xi),$$

em que

$$(\nabla_X A)(Y,\xi) = \nabla_X A_\xi Y - A_\xi \nabla_X Y - A_{\nabla_X^\perp \xi} Y,$$

para quaisquer $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $\xi \in \Gamma(N_f M)$.

Como $q \geq 2$, sejam $S,T \in \Gamma(E_\eta)$ ortogonais com $||S|| = 1$. Então, o produto interno da equação de Codazzi de f para (S,T,ζ) com S implica $T(\lambda) = 0$, enquanto o produto interno da equação de Codazzi de f para a terna (S,T,μ) com S, em que $\langle \mu, \zeta \rangle = 0$, implica $\nabla_T^\perp \zeta = 0$. Portanto, η é um campo normal principal de Dupin.

De acordo com a Proposição 2.3, para provar o item 2 é suficiente mostrar que

$$\nabla_S T \in \Gamma(E_\eta),$$

para quaisquer $T,S \in \Gamma(E_\eta)$ com $\langle T,S \rangle = 0$. De fato, fazendo o produto interno da equação de Codazzi de f para (T,X,ζ) com S, para $T,S \in \Gamma(E_\eta)$ e $X \in \mathfrak{X}(M)$ com $\langle T,S \rangle = 0$, obtemos

$$A_\zeta \nabla_T S = \lambda \nabla_T S.$$

Por outro lado, fazendo o produto interno da equação de Codazzi de f para (T,X,ξ) com S, para $\xi \in \Gamma(N_f M)$ ortogonal a η, obtemos

$$A_\xi \nabla_T S = 0.$$

Portanto, de (2.6) temos que $\nabla_T S \in \Gamma(E_\eta)$. □

Dizemos que uma imersão isométrica $f: M^n \to \tilde{M}^m$ possui *fibrado normal plano* em $x \in M^n$ se $R^\perp(x) = 0$. Se $R^\perp \equiv 0$ em M^n, então dizemos que f é uma imersão isométrica com fibrado normal plano.

Seja $f: M^n \to \tilde{M}_c^m$ uma imersão isométrica com fibrado normal plano. Decorre da equação de Ricci de f que

$$R^\perp \equiv 0 \Longleftrightarrow [A_\eta, A_\xi] = 0,$$

para quaisquer $\xi, \eta \in \Gamma(N_f M)$. Isso é equivalente a dizer que, para cada $x \in M^n$, existe uma base ortonormal $X_1, \ldots, X_n$ de $T_x M$ tal que

$$\alpha^f(X_i, X_j) = 0, \quad 1 \leq i \neq j \leq n.$$

Logo, em cada $x \in M^n$ tal que $R^\perp(x) = 0$, temos uma decomposição ortogonal de $T_x M$ como

$$T_x M = E_1(x) \oplus \ldots \oplus E_s(x),$$

em que, para cada $\xi \in N_fM(x)$, existem números reais $\lambda_i(\xi)$, $1 \leq i \leq s = s(x)$, tais que

$$A_\xi|_{E_i(x)} = \lambda_i(\xi)\mathrm{Id}$$

e as aplicações $\xi \mapsto \lambda_i(\xi)$ são duas a duas distintas. Como o lado esquerdo da equação anterior é linear em ξ, segue que as aplicações $\xi \mapsto \lambda_i(\xi)$ são lineares, e então existem vetores $\eta_i(x) \in N_fM(x)$ unicamente determinados, tais que

$$\lambda_i(\xi) = \langle \eta_i(x), \xi \rangle \quad 1 \leq i \leq s.$$

Portanto,

$$E_i(x) = E_{\eta_i}(x) = \bigcap_{\xi \in N_fM(x)} \ker(A_\xi - \langle \xi, \eta_i(x) \rangle \mathrm{Id}).$$

Isto mostra que $\eta_i(x)$ são vetores normais principais de f em x.

A segunda forma fundamental de f admite a seguinte forma

$$\alpha^f = \sum_{i=1}^{s} \langle \pi_i, \cdot \rangle \eta_i(x),$$

em que $\pi_i := \pi_{E_i} : T_xM \to E_i(x)$ é a projeção ortogonal.

Um referencial ortonormal $\{X_1, \ldots, X_n\}$ de T_xM tal que

$$\alpha^f(X_i, X_j) = \delta_{ij}\eta_i$$

é chamado de *referencial principal* de f.

A equação de Gauss de f é dada por

$$R(X,Y) = \sum_{i,j=1}^{s} (c + \langle \eta_i(x), \eta_j(x) \rangle) \pi_i X \wedge \pi_j Y, \tag{2.7}$$

para quaisquer $X, Y \in T_xM$. Em particular, a curvatura seccional de f em $x \in M^n$ ao longo do subespaço bidimensional $\sigma = \mathrm{span}\{X,Y\}$ é

$$K(\sigma) = \begin{cases} c + \langle \eta_i(x), \eta_j(x) \rangle & \text{se } X \in E_i(x) \text{ e } Y \in E_j(x), \\ c + ||\eta_i(x)||^2 & \text{se } X, Y \in E_i(x). \end{cases} \tag{2.8}$$

Uma imersão isométrica $f : M^n \to \tilde{M}^m_c$ com fibrado normal plano é dita ser *própria* se $s(x) = k \in \{1, \ldots, n\}$ para todo $x \in M^n$, ou seja, f possui um número constante de campos normais principais distintos. Neste caso, os campos normais $x \in M^n \mapsto \eta_i(x)$ e as distribuições $x \in M^n \mapsto E_{\eta_i}(x)$, $1 \leq i \leq k$, são diferenciáveis. Portanto, η_i, $1 \leq i \leq k$, são campos normais principais de f.

No caso em que f é própria, a equação de Codazzi de f é equivalente à

$$\nabla^\perp_T \eta_i = 0 \quad \forall\ T \in E_{\eta_i}, \text{ se } \dim E_{\eta_i} \geq 2, \tag{2.9}$$

$$\langle X_j, Y_j \rangle \nabla^\perp_{X_i} \eta_j = \langle \nabla_{X_j} Y_j, X_i \rangle (\eta_j - \eta_i), \tag{2.10}$$

$$\langle \nabla_{X_j} X_i, X_l \rangle (\eta_i - \eta_l) = \langle \nabla_{X_i} X_j, X_l \rangle (\eta_j - \eta_l), \tag{2.11}$$

se $X_i \in \Gamma(E_{\eta_i})$, $X_j, Y_j \in \Gamma(E_{\eta_j})$ e $X_l \in \Gamma(E_{\eta_l})$ para $1 \leq i \neq j \neq l \neq i \leq k$.

Proposição 2.5. *Seja $g : M^n_c \to \mathbb{Q}^m_c$ uma imersão isométrica com fibrado normal plano e $\nu^g \equiv 0$ em M^n_c. Então f admite exatamente n campos normais principais não nulos e distintos $\eta_1, \ldots, \eta_n$ tais que $\langle \eta_i, \eta_j \rangle = 0$ se $1 \leq i \neq j \leq n$.*

Além disso, existe, localmente, um sistema de coordenadas $(u_1, \ldots, u_n)$ de um aberto U de M^n e funções positivas $\lambda_i \in C^\infty(U)$ tais que

$$\partial/\partial u_i = \lambda_i^{-1} X_i,$$

em que $\{X_i\}_{i=1}^n$ é o referencial principal de g.

Demonstração. O espaço tangente T_xM decompõem-se ortogonalmente como

$$T_xM = E_{\eta_1}(x) \oplus \ldots \oplus E_{\eta_s}(x),$$

em que $\eta_1, \ldots, \eta_s$ são os vetores normais principais de g em x e $s = s(x)$.

Se algum $\eta_i(x)$ possui dimensão maior do que 2, a equação de Gauss de g,

$$c = K(X,Y) = c + ||\eta_i(x)||^2 \quad X, Y \in E_{\eta_i}(x),$$

mostra que $\eta_i(x)$ deve ser necessariamente 0, o que contradiz o fato de que $\nu^g(x) = 0$. Portanto, $\dim E_{\eta_i}(x) = 1$ para todo $1 \leq i \leq s$, ou seja, $s(x) = n$ para todo $x \in M^n$.

Aplicando novamente a equação de Gauss de g,

$$c = K(X,Y) = c + \langle \eta_i(x), \eta_j(x) \rangle \quad X \in E_{\eta_i}(x) \quad \text{e} \quad Y \in E_{\eta_j}(x)$$

com $1 \leq i \neq j \leq n$, obtemos $\langle \eta_i(x), \eta_j(x) \rangle = 0$.

Escreva, então, $\eta_i = \lambda_i \xi_i$, em que $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ forma um subconjunto ortonormal de $\Gamma(N_gM)$ e λ_i são funções positivas em M^n.

A equação de Codazzi, aplicada ao referencial principal $\{X_i\}_{i=1}^n$ de g, produz

$$\nabla^\perp_{X_j} \eta_i = \langle \nabla_{X_i} X_i, X_j \rangle (\eta_i - \eta_j) \iff X_j(\lambda_i)\xi_i + \lambda_i \nabla^\perp_{X_j} \xi_i = \langle \nabla_{X_i} X_i, X_j \rangle (\lambda_i \xi_i - \lambda_j \xi_j).$$

Logo

$$\langle \nabla_{X_i} X_i, X_j \rangle = \frac{1}{\lambda_i} X_j(\lambda_i) \iff \langle \nabla_{X_i} X_j, X_i \rangle = \lambda_i X_j(1/\lambda_i),$$

para cada $1 \leq i \neq j \leq n$. Da equação (2.11) obtemos $\langle \nabla_{X_i} X_j, X_l \rangle = 0$, então

$$\nabla_{X_i} X_j = \lambda_i X_j(1/\lambda_i) X_i.$$

Note que

$$\begin{aligned}
[\lambda_i^{-1} X_i, \lambda_j^{-1} X_j] &= \nabla_{\lambda_i^{-1} X_i} \lambda_j^{-1} X_j - \nabla_{\lambda_j^{-1} X_j} \lambda_i^{-1} X_i \\
&= \frac{1}{\lambda_i}(X_i(\frac{1}{\lambda_j}) X_j + \frac{1}{\lambda_j} \nabla_{X_i} X_j) - \frac{1}{\lambda_j}(X_j(\frac{1}{\lambda_i}) X_i + \frac{1}{\lambda_i} \nabla_{X_j} X_i) \\
&= \frac{1}{\lambda_i}(X_i(\frac{1}{\lambda_j}) X_j + \frac{1}{\lambda_j} \lambda_i X_j(\frac{1}{\lambda_i}) X_i) - \frac{1}{\lambda_j}(X_j(\frac{1}{\lambda_i}) X_i + \frac{1}{\lambda_i} \lambda_j X_i(\frac{1}{\lambda_j}) X_j) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Então existem localmente coordenadas $(u_1,\ldots,u_n)$ em um aberto U de M^n tais que $\partial/\partial u_i = \lambda_i^{-1}X_i$, para cada $1 \le i \le n$. $\square$

2.3 Produtos Twisted

Os principais objetivos desta seção consistem em apresentar o conceito de *métrica produto twisted* em uma variedade produto e um teorema de decomposição local que permite determinar quando uma variedade Riemanniana pode ser identificada, via uma isometria, com uma variedade produto munida de uma métrica twisted. Outros detalhes sobre o conceito de produtos twisted podem ser encontrados em (MEUMERTZHEIM; RECKZIEGEL; SCHAAF, 1999) e (TOJEIRO, 2006).

Seja $M = \prod_{i=0}^{k} M_i$ o produto das variedades diferenciáveis $M_0,\ldots,M_k$. Uma métrica $\langle\,,\rangle$ em M é dita ser uma *métrica produto twisted* em M, se existem métricas Riemannianas $\langle\,,\rangle_i$ em M_i e funções diferenciáveis $\rho_i : M \to \mathbb{R}_+$, $0 \le i \le k$, tais que

$$\langle\,,\rangle = \sum_{i=0}^{k} \rho_i^2 \pi_i^* \langle\,,\rangle_i,$$

em que $\pi_i : M \to M_i$ denota a projeção canônica e $\pi_i^*\langle\,,\rangle_i := \langle\,,\rangle_{\pi_i}$. Então $(M,\langle\,,\rangle)$ é dita ser um *produto twisted* e é denotado por ${}^{\rho}\prod_{i=0}^{k}(M_i,\langle\,,\rangle_i)$, em que $\rho = (\rho_0,\ldots,\rho_k)$. Quando $\rho_1,\ldots,\rho_k$ são independentes de $M_1,\ldots,M_k$, isto é, existe $\tilde{\rho}_a \in C^\infty(M_0)$ tal que $\rho_a = \tilde{\rho}_a \circ \pi_0$ para $a = 1,\ldots,k$, e, além disso, $\rho_0 \equiv 1$, então $\langle\,,\rangle$ é denominada uma *métrica produto warped* e $(M,\langle\,,\rangle) := (M_0,\langle\,,\rangle_0) \times_\rho \prod_{a=1}^{k}(M_a,\langle\,,\rangle_a)$ um *produto warped* com *função warping* $\rho = (\rho_1,\ldots,\rho_k)$.

Observamos que, se $\rho_i = 1$ para todo $i = 0,\ldots,k$, então $\langle\,,\rangle$ é uma *métrica produto Riemanniana*.

Definição 2.5. Uma rede $\mathscr{E} = (E_i)_{i=0}^{r}$ em uma variedade diferenciável M é uma decomposição $TM = \oplus_{i=0}^{r} E_i$ do fibrado tangente a M como uma soma de Whitney de distribuições integráveis E_i em M. Se M é uma variedade Riemanniana e as distribuições E_i são duas a duas ortogonais, então $\mathscr{E}$ é dita ser uma *rede ortogonal*.

Seja M uma variedade produto. A *rede produto* de M, $\mathscr{E} = (E_i)_{i=0}^{k}$, é definida por

$$E_i(x) = \tau^x_{i\,*} T_{x_i} M_i, \quad 0 \le i \le k,$$

para qualquer $x = (x_0,\ldots,x_k) \in M$, em que $\tau_i^x : M_i \to M$ é a inclusão de M_i em M definida por

$$\tau_i^x(\bar{x}_i) = (x_0,\ldots,\bar{x}_i,\ldots,x_k), \quad 0 \le i \le k.$$

O próximo resultado de (MEUMERTZHEIM; RECKZIEGEL; SCHAAF, 1999) relaciona as conexões de Levi-Civita de uma métrica produto twisted e da corresponde métrica produto Riemanniana em uma variedade produto.

Proposição 2.6 ((MEUMERTZHEIM; RECKZIEGEL; SCHAAF, 1999)). *Sejam* $(M,\langle\,,\,\rangle) = {}^{\rho}\prod_{i=0}^{k}(M_i,\langle\,,\,\rangle_i)$ *um produto twisted com função twist* $\rho = (\rho_0,\ldots,\rho_k)$ *e uma rede produto* $\mathscr{E} = (E_i)_{i=0}^{k}$. *Denote por* ∇ *e* $\tilde{\nabla}$ *as conexões de Levi-Civita de* $\langle\,,\,\rangle$ *e da métrica produto Riemanniana* $\langle\,,\,\tilde{\rangle}$, *respectivamente, e seja* $U_i = -grad(\log\circ\rho_i)$, $0 \leq i \leq k$, *em que o gradiente é calculado com respeito à* $\langle\,,\,\rangle$. *Então*

$$\nabla_X Y = \tilde{\nabla}_X Y + \sum_{i=0}^{k}(\langle X^i, Y^i\rangle U_i - \langle X, U_i\rangle Y^i - \langle Y, U_i\rangle X^i), \tag{2.12}$$

em que $X \mapsto X^i$ *é a projeção ortogonal sobre* E_i.

Decorre de (2.12) que, se $X_i, Y_i \in E_i$, então

$$(\nabla_{X_i} Y_i)_{E_i^{\perp}} = \langle X_i, Y_i\rangle (U_i)_{E_i^{\perp}}. \tag{2.13}$$

Portanto, E_i é uma distribuição umbílica com campo curvatura média $(U_i)_{E_i^{\perp}}$. Além disso, como

$$[X,Y] = \tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X,$$

segue que $E_i^{\perp} = \oplus_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{k} E_j$ é integrável para todo $0 \leq i \leq k$.

Definição 2.6. Uma rede ortogonal $\mathscr{E} = (E_i)_{i=0}^{k}$ em uma variedade Riemanniana M é denominada uma TP-rede se E_i é umbílica e $E_i^{\perp}$ é integrável para todo $i = 0,\ldots,k$.

Portanto, temos que a rede produto de um produto twisted é uma TP-rede. Além disso, a contrapositiva é verdadeira (veja a Proposição 4 de (MEUMERTZHEIM; RECKZIEGEL; SCHAAF, 1999)):

Proposição 2.7 ((MEUMERTZHEIM; RECKZIEGEL; SCHAAF, 1999)). *Em uma variedade produto e conexa* $M = \prod_{i=0}^{k} M_i$, *a rede produto* $\mathscr{E} = (E_i)_{i=0}^{k}$ *é uma TP-rede com respeito à uma métrica Riemanniana* $\langle\,,\,\rangle$ *se e somente se* $\langle\,,\,\rangle$ *é uma métrica produto twisted.*

Definição 2.7. Seja $\mathscr{F} = \{F_i\}_{i=0}^{k}$ uma rede em uma variedade diferenciável N. Então $\bar{\Phi} : \prod_{i=0}^{k} M_i \to N$ é dita ser uma *representação produto* de $\mathscr{F}$ se $\bar{\Phi}$ é um difeomorfismo diferenciável e $\bar{\Phi}_* E_i(x) = F_i(\bar{\Phi}(x))$ para cada $x \in M := \prod_{i=0}^{k} M_i$ e cada $i = 0,\ldots,k$, em que $\mathscr{E} = (E_i)_{i=0}^{k}$ é a rede produto de M.

Teorema 2.1 ((MEUMERTZHEIM; RECKZIEGEL; SCHAAF, 1999)). *Seja* $\mathscr{E} = (E_i)_{i=0}^{k}$ *uma TP-rede em uma variedade Riemanniana* M. *Então, para cada ponto* $p \in M$ *existe uma representação produto local* $\bar{\Phi} : \prod_{i=0}^{k} M_i \to U$ *de* $\mathscr{E}$ *com* $p \in U \subset M$ *que é uma isometria com respeito à uma métrica produto twisted em* $\prod_{i=0}^{k} M_i$.

Como qualquer distribuição totalmente geodésica é integrável, temos que se uma rede ortogonal $\mathscr{E} = (E_i)_{i=0}^{k}$ em uma variedade Riemanniana M é tal que E_i e $E_i^{\perp}$ são totalmente geodésicas, $0 \leq i \leq k$, então $\mathscr{E}$ é uma TP-rede. Logo o Teorema 2.1 se aplica. Porém, como E_i é totalmente geodésica, concluímos de (2.13) que ρ_i, $0 \leq i \leq k$, são funções independentes de M_j, se $j \neq i$. Portanto, a métrica produto twisted em $\prod_{i=0}^{k} M_i$ é uma métrica produto Riemanniana. Em suma, temos a seguinte consequência:

Teorema 2.2 (Teorema de decomposição de de Rham). *Seja M uma variedade Riemanniana munida de uma rede ortogonal $\mathscr{E} = (E_i)_{i=0}^{k}$ tal que E_i e $E_i^{\perp}$ são totalmente geodésicas para $0 \leq i \leq k$. Então, para cada ponto $p \in M$ existe uma representação produto local $\bar{\Phi} : \prod_{i=0}^{k} M_i \to U$ de $\mathscr{E}$ com $p \in U \subset M$ que é uma isometria com respeito à uma métrica produto Riemanniana em $\prod_{i=0}^{k} M_i$.*

Finalizamos esta seção com um resultado que permite descrever o tensor de curvatura de uma métrica ortogonal de uma forma conveniente em termos de certas funções h_{ij}. Em particular, tal representação implicará que uma métrica ortogonal possui curvatura seccional constante se e somente se as funções h_{ij} satisfazem um certo sistema de equações diferenciais parciais.

Proposição 2.8. *Seja $(u_1, \ldots, u_n)$ coordenadas locais em uma variedade Riemanniana M^n cuja métrica é dada por*

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 du_i^2.$$

As seguintes afirmações são satisfeitas:

i. *A conexão de Levi-Civita de M^n satisfaz*

$$\nabla_{\partial/\partial u_i} X_j = h_{ji} X_i, \quad 1 \leq i \neq j \leq n, \tag{2.14}$$

em que $X_j = (1/v_j)\partial/\partial u_j$ e

$$h_{ji} = \frac{1}{v_j}\frac{\partial v_i}{\partial u_j}. \tag{2.15}$$

ii. *O tensor de curvatura de M^n é dado por*

$$R(\partial/\partial u_i, \partial/\partial u_j)X_k = \left(\frac{\partial h_{kj}}{\partial u_i} - h_{ki}h_{ij}\right)X_j - \left(\frac{\partial h_{ki}}{\partial u_j} - h_{kj}h_{ji}\right)X_i, \quad se\ i \neq j \neq k \neq i$$

e

$$-\langle R(\partial/\partial u_i, \partial/\partial u_j)X_j, X_i\rangle = \frac{\partial h_{ij}}{\partial u_i} + \frac{\partial h_{ji}}{\partial u_j} + \sum_{k \neq i,j} h_{ki}h_{kj}, \quad \text{se } i \neq j.$$

Demonstração. Como $[\partial/\partial u_i, \partial/\partial u_j] = 0$ para todos $1 \leq i \neq j \leq n$, temos

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{\partial/\partial u_i}\partial/\partial u_j, \partial/\partial u_k\rangle &= -\langle \nabla_{\partial/\partial u_i}\partial/\partial u_k, \partial/\partial u_j\rangle \\
&= -\langle \nabla_{\partial/\partial u_k}\partial/\partial u_i, \partial/\partial u_j\rangle \\
&= \langle \nabla_{\partial/\partial u_k}\partial/\partial u_j, \partial/\partial u_i\rangle \\
&= \langle \nabla_{\partial/\partial u_j}\partial/\partial u_k, \partial/\partial u_i\rangle \\
&= -\langle \nabla_{\partial/\partial u_j}\partial/\partial u_i, \partial/\partial u_k\rangle \\
&= -\langle \nabla_{\partial/\partial u_i}\partial/\partial u_j, \partial/\partial u_k\rangle.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\langle \nabla_{\partial/\partial u_i} X_j, X_k \rangle = 0 \text{ se } i \neq j \neq k \neq i.$$

Então (2.14) segue de

$$\begin{aligned} v_i v_j \langle \nabla_{\partial/\partial u_i} X_j, X_i \rangle &= \langle \nabla_{\partial/\partial u_i} \partial/\partial u_j, \partial/\partial u_i \rangle \\ &= \langle \nabla_{\partial/\partial u_j} \partial/\partial u_i, \partial/\partial u_i \rangle \\ &= v_i \partial v_i / \partial u_j. \end{aligned}$$

A prova de ii. decorre de (2.14). □

Corolário 2.1. *Uma métrica ortogonal $ds^2 = \sum_{i=1}^n v_i^2 du_i^2$ possui curvatura seccional constante c se e somente se*

$$\begin{cases} \frac{\partial h_{ij}}{\partial u_i} + \frac{\partial h_{ji}}{\partial u_j} + \sum_{k \neq i,j} h_{ki} h_{kj} + c v_i v_j = 0, \\ \frac{\partial h_{ik}}{\partial u_j} = h_{ij} h_{jk}, \end{cases}$$

em que $1 \leq i \neq j \neq k \neq i \leq n$.

2.4 Subvariedades conformemente Euclidianas

Seja M^n uma variedade diferenciável. Dizemos que duas métricas g_1 e g_2 em M^n são *conformes* se existe uma função positiva $\lambda \in C^\infty(M)$ tal que

$$g_2 = \lambda^2 g_1.$$

A função λ é denominada o *fator conforme de g_2 com respeito à g_1.*

As conexões de Levi-Civita ∇^2 e ∇^1 de g_2 e g_1 são relacionadas por

$$\nabla_X^2 Y = \nabla_X^1 Y + \frac{1}{\lambda}(Y(\lambda)X + X(\lambda)Y - g_1(X,Y)\mathrm{grad}_1 \lambda) \tag{2.16}$$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, em que grad_1 representa o gradiente calculado na métrica g_1.

Proposição 2.9. *Sejam $\tilde{g}$ e g métricas Riemannianas em uma variedade M^n tais que $\tilde{g} = e^{2\omega} g$ para alguma função $\omega \in C^\infty(M)$. Se X, Y são vetores ortonormais em $(T_x M, g(x))$, então as curvaturas seccionais de $\tilde{g}$ e g se relacionam por*

$$\tilde{K}(X,Y) = e^{-2\omega}(K(X,Y) - Q(X,X) - Q(Y,Y) - ||grad\, \omega||^2),$$

em que $Q(X,X) = Hess\, \omega(X,X) - (X(\omega))^2$ e Hess e grad são o hessiano e o gradiente calculados na métrica g.

Demonstração. Temos de (2.16) que

$$\tilde{\nabla}_V W = \nabla_V W + V(\omega) W + W(\omega) V - g(V,W)\mathrm{grad}_g\, \omega,$$

com $V, W \in \mathfrak{X}(M)$. Logo, derivando a expressão anterior com relação a $U \in \mathfrak{X}(M)$, temos

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_U \tilde{\nabla}_V W =& \tilde{\nabla}_U \nabla_V W + U(V(\omega))W + V(\omega)\tilde{\nabla}_U W + U(W(\omega))V + W(\omega)\tilde{\nabla}_U V \\ &- U(g(V,W))\operatorname{grad}_g \omega - g(V,W)\tilde{\nabla}_U \operatorname{grad}_g \omega.\end{aligned}$$

Para $V = X$ e $W = Y = U$ com X, Y ortonormais em uma vizinhança de x, obtemos

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Y &= \tilde{\nabla}_Y \nabla_X Y + Y(X(\omega))Y + X(\omega)\tilde{\nabla}_Y Y + Y(Y(\omega))X + Y(\omega)\tilde{\nabla}_Y X \\ &= \nabla_Y \nabla_X Y + Y(\omega)\nabla_X Y + (\nabla_X Y)(\omega)Y + Y(X(\omega))Y \\ &+ X(\omega)(\nabla_Y Y + 2Y(\omega)Y - \operatorname{grad}_g \omega) + Y(Y(\omega))X \\ &+ Y(\omega)(\nabla_Y X + Y(\omega)X + X(\omega)Y).\end{aligned}$$

Se $U = X$ e $V = W = Y$, então

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Y &= \tilde{\nabla}_X \nabla_Y Y + 2X(Y(\omega))Y + 2Y(\omega)\tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_X \operatorname{grad}_g \omega \\ &= \nabla_X \nabla_Y Y + X(\omega)\nabla_Y Y + \nabla_Y Y(\omega)X - g(X, \nabla_Y Y)\operatorname{grad}_g \omega + 2X(Y(\omega))Y \\ &+ 2Y(\omega)(\nabla_X Y + X(\omega)Y + Y(\omega)X) \\ &- (\nabla_X \operatorname{grad}_g \omega + \operatorname{grad}_g \omega(\omega)X).\end{aligned}$$

Por fim,

$$\tilde{\nabla}_{[X,Y]} Y = \nabla_{[X,Y]} Y + [X,Y](\omega)Y + Y(\omega)[X,Y] + g(\nabla_Y X, Y)\operatorname{grad}_g \omega.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\tilde{R}(X,Y)Y &= \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Y - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_{[X,Y]} Y \\ &= R(X,Y)Y + X(\omega)\operatorname{grad}_g \omega + \nabla_Y Y(\omega)X + X(Y(\omega))Y + (Y(\omega))^2 X \\ &- \nabla_X \operatorname{grad}_g \omega - ||\operatorname{grad}_g \omega||^2 X - Y(Y(\omega))X - X(\omega)Y(\omega)Y.\end{aligned}$$

Assim, em $x \in M^n$

$$\begin{aligned}\tilde{K}(X,Y) = \frac{\tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)Y,X)}{e^{4\omega}} &= e^{-2\omega} g(\tilde{R}(X,Y)Y,X) \\ &= e^{-2\omega}(K(X,Y) + (X(\omega))^2 + \nabla_Y Y(\omega) \\ &+ (Y(\omega))^2 - \operatorname{Hess}_g \omega(X,X) - ||\operatorname{grad}_g \omega||^2 \\ &- Y(Y(\omega))) \\ &= e^{-2\omega}(K(X,Y) - Q(X,X) - Q(Y,Y) - ||\operatorname{grad}_g \omega||^2).\end{aligned}$$

□

O seguinte resultado fornece condições para que uma métrica warped em uma variedade produto $M^p \times N^{n-p}$, $n-2 \geq p \geq 1$, possua curvatura seccional constante.

Lema 2.1. *Sejam* (M^p, g_1) *e* (N^{n-p}, g_2) *variedades Riemannianas com* $n-2 \geq p \geq 1$. *A métrica* $g_1 + \mu^2 g_2$ *em* $M^p \times N^{n-p}$, *em que* $\mu \in C^\infty(M^p)$, *possui curvatura constante* c *se e somente se*

(i) g_1 *possui curvatura constante* c *(caso* $p \geq 2$*);*

(ii) $Hess\,\mu + c\mu g_1 = 0$*;*

(iii) g_2 *possui curvatura constante* $||grad\,\mu||^2 + c\mu^2$,

para Hess e grad calculados na métrica g_1.

Demonstração. Escreva

$$g_1 + \mu^2 g_2 = \mu^2(\tilde{g}_1 + g_2),$$

em que $\tilde{g}_1 = \mu^{-2} g_1$.

Sejam $X_1, \ldots, X_p$ e $X_{p+1}, \ldots, X_n$ referenciais ortonormais de $(T_x M^p, g_1(x))$ e $(T_y N^{n-p}, g_2(y))$, respectivamente.

Então $g_1 + \mu^2 g_2$ possui curvatura constante c se e somente se

$$K^*(\mu X_a, \mu X_b) = K^*(\mu X_a, X_i) = K^*(X_i, X_j) = c,$$

para $1 \leq a \neq b \leq p$ e $p+1 \leq i \neq j \leq n$.

Usando a Proposição 2.9 e o fato de que $Q(X_i, X_i) = 0$ obtemos

$$\begin{aligned}
c &= \frac{1}{\mu^2}(K_{g_2}(X_i, X_j) - ||\mathrm{grad}_{\tilde{g}_1} \log \mu||^2) \\
&= \frac{1}{\mu^2}(K_{g_2}(X_i, X_j) - \tilde{g}_1(\frac{\mathrm{grad}_{\tilde{g}_1} \mu}{\mu}, \frac{\mathrm{grad}_{\tilde{g}_1} \mu}{\mu}) \\
&= \frac{1}{\mu^2}(K_{g_2}(X_i, X_j) - \frac{1}{\mu^4} g_1(\mu^2 \mathrm{grad}_{g_1} \mu, \mu^2 \mathrm{grad}_{g_1} \mu)) \\
&= \frac{1}{\mu^2}(K_{g_2}(X_i, X_j) - ||\mathrm{grad}_{g_1} \mu||^2_{g_1}).
\end{aligned}$$

Logo g_2 possui curvatura constante $||\mathrm{grad}_{g_1} \mu||^2_{g_1} + c\mu^2$.

Agora calcularemos $K^*(\mu X_a, X_i) = c$. A Proposição 2.9 mostra que

$$c = \frac{1}{\mu^2}(-Q(\mu X_a, \mu X_a) - ||\mathrm{grad}_{g_1} \mu||^2_{g_1}). \tag{2.17}$$

Usando que

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{X_a} \mathrm{grad}_{g_1} \mu &= \nabla_{X_a} \mathrm{grad}_{g_1} \mu + \mu(X_a(\mu^{-1}) \mathrm{grad}_{g_1} \mu + \mathrm{grad}_{g_1} \mu(\mu^{-1}) X_a \\
&\quad - X_a(\mu) \mathrm{grad}_{g_1} \mu^{-1}) \\
&= \nabla_{X_a} \mathrm{grad}_{g_1} \mu + \mu\, \mathrm{grad}_{g_1} \mu(\mu^{-1}) X_a,
\end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hess}_{\tilde{g}_1} \log\mu(\mu X_a, \mu X_a) &= \tilde{g}_1(\tilde{\nabla}_{\mu X_a}(\mu\,\mathrm{grad}_{g_1}\mu), \mu X_a)\\
&= g_1(\tilde{\nabla}_{X_a}(\mu\,\mathrm{grad}_{g_1}\mu), X_a)\\
&= (X_a(\mu))^2 + \mu\, g_1(\tilde{\nabla}_{X_a}\mathrm{grad}_{g_1}\mu, X_a)\\
&= (X_a(\mu))^2 + \mu\,\mathrm{Hess}_{g_1}\mu(X_a,X_a) + \mu^2 g_1(\mathrm{grad}_{g_1}\mu, \mathrm{grad}_{g_1}\mu^{-1})\\
&= (X_a(\mu))^2 + \mu\,\mathrm{Hess}_{g_1}\mu(X_a,X_a) - ||\mathrm{grad}_{g_1}\mu||_{g_1}^2.
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
Q(\mu X_a, \mu X_a) &= \mathrm{Hess}_{\tilde{g}_1}\log\mu(\mu X_a,\mu X_a) - (\mu X_a(\log\mu))^2\\
&= \mu\,\mathrm{Hess}_{g_1}\mu(X_a,X_a) - ||\mathrm{grad}_{g_1}\mu||_{g_1}^2.
\end{aligned}$$

Portanto, (2.17) torna-se

$$\mathrm{Hess}_{g_1}\mu(X_a,X_a) + c\mu = 0.$$

Em particular,

$$-c\mu + \mathrm{Hess}_{g_1}\mu(X_a,X_b) = \mathrm{Hess}_{g_1}\mu\left(\frac{X_a+X_b}{\sqrt{2}}, \frac{X_a+X_b}{\sqrt{2}}\right) = -c\mu,$$

ou seja,

$$\mathrm{Hess}_{g_1}\mu(X_a,X_b) = 0.$$

Portanto,

$$\mathrm{Hess}_{g_1}\mu + c\mu g_1 = 0.$$

Por fim, calcularemos $K^*(\mu X_a, \mu X_b) = c$ para $p \geq 2$. De fato,

$$\begin{aligned}
c &= \frac{1}{\mu^2}(\tilde{K}(\mu X_a,\mu X_b) - Q(\mu X_a,\mu X_a) - Q(\mu X_b,\mu X_b) - ||\mathrm{grad}_{g_1}\mu||_{g_1}^2)\\
&= \frac{1}{\mu^2}(\tilde{K}(\mu X_a,\mu X_b) - \mu\mathrm{Hess}_{g_1}\mu(X_a,X_a) - \mu\mathrm{Hess}_{g_1}\mu(X_b,X_b) + ||\mathrm{grad}_{g_1}\mu||_{g_1}^2).
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Como $\tilde{g}_1 = \mu^{-2}g_1$, temos da Proposição 2.9 que

$$\tilde{K}(\mu X_a,\mu X_b) = \mu^2(K_{g_1}(X_a,X_b) - Q_{g_1}(X_a,X_a) - Q_{g_1}(X_b,X_b) - ||\mathrm{grad}_{g_1}\log\mu||_{g_1}^2).$$

Notando que $\mathrm{Hess}_{g_1}\log\mu(X_a,X_a) = -\frac{1}{\mu^2}(X_a(\mu))^2 + \frac{1}{\mu}\mathrm{Hess}_{g_1}\mu(X_a,X_a)$, então

$$Q_{g_1}(X_a,X_a) = -\mathrm{Hess}_{g_1}\log\mu(X_a,X_a) - (X_a(\log\mu))^2 = -\frac{1}{\mu}\mathrm{Hess}_{g_1}\mu(X_a,X_a).$$

Assim, de (2.18) obtemos que $K_{g_1}(X_a,X_b) = c$. □

Definição 2.8. Uma variedade Riemanniana M^n é denominada *conformemente Euclidiana* se, para cada ponto $x \in M^n$, existem uma vizinhança aberta $U \subset M^n$, com $x \in U$, e um difeomorfismo $\Phi : U \subset M^n \to V \subset \mathbb{R}^n$, V aberto, tais que a métrica induzida por Φ é conforme a métrica de M^n.

Exemplo 2.1. Qualquer variedade Riemanniana de dimensão 2 é conformemente Euclidiana, pois admite, localmente, coordenadas isotérmicas.

Exemplo 2.2. Qualquer variedade Riemanniana M_c^n com curvatura seccional constante c é conformemente Euclidiana, pois M_c^n é localmente isométrica a $\mathbb{Q}_c^n$, e estes espaços formas são, por sua vez, conformemente Euclidianos. Basta considerar a projeção estereográfica de $\mathbb{Q}_c^n$ (menos um ponto se $c > 0$) sobre $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 2.3. Seja

$$\mathbb{H}^p := \{(z_1, \ldots, z_p) \in \mathbb{R}^p : z_p > 0\}$$

munido da métrica hiperbólica

$$dz^2 = \frac{1}{z_p^2}(dz_1^2 + \ldots + dz_p^2).$$

Em particular, $(\mathbb{H}^p, dz^2)$ é uma variedade Riemanniana conformemente Euclidiana.

Considere a aplicação

$$\Theta : \mathbb{H}^p \times \mathbb{S}^{n-p} \to \mathbb{R}^n$$

dada por

$$\Theta(z, y) = (z_1, \ldots, z_{p-1}, z_p y). \tag{2.19}$$

Temos que Θ é um difeomorfismo cuja diferencial é $d\Theta = (dz_1, \ldots, dz_{p-1}, dz_p y + z_p dy)$. Logo

$$\langle \, , \rangle_\Theta = \langle d\Theta, d\Theta \rangle = dz_1^2 + \ldots + dz_p^2 + z_p^2 dy^2 = z_p^2(dz^2 + dy^2),$$

em que dy^2 denota a métrica canônica de $\mathbb{S}^{n-p}$.

Portanto, $(\mathbb{H}^p \times \mathbb{S}^{n-p}, dz^2 + dy^2)$ é uma variedade Riemanniana conformemente Euclidiana.

A próxima proposição generaliza o que vimos no exemplo acima, pois permite decidir quando um produto Riemanniano de duas variedades diferenciáveis é conformemente Euclidiano. Para provar este resultado, introduzimos o *tensor de Schouten* de uma variedade Riemanniana M^n, $n \geq 3$,

$$L(X,Y) = \frac{1}{n-2}(\mathrm{Ric}(X,Y) - (1/2)ns\langle X, Y \rangle),$$

em que $\mathrm{Ric}(X,Y) = \mathrm{tr}(Z \to R(Z,X)Y)$ e $s = \frac{1}{n(n-1)}\mathrm{tr}\,\mathrm{Ric}$ denotam o *tensor de Ricci* e a *curvatura escalar* de M^n, e o *tensor de Weyl*

$$\begin{aligned}\langle C(X,Y)Z, W \rangle = \langle R(X,Y)Z, W \rangle - L(X,W)\langle Y, Z \rangle - L(Y,Z)\langle X, W \rangle \\ + L(X,Z)\langle Y, W \rangle + L(Y,W)\langle X, Z \rangle,\end{aligned}$$

para quaisquer $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$. Um resultado devido a Weyl (ver Teorema 16.3 de (DAJCZER; TOJEIRO, 2019)) afirma que uma variedade Riemanniana M^n, $n \geq 3$, é conformemente Euclidiana se e somente se

i. $C = 0$.

ii. L é um tensor de Codazzi.

Além disso, **i.** implica **ii.** se $n \geq 4$, e **i.** é automaticamente satisfeito se $n = 3$.

Proposição 2.10 ((YAU, 1973)). *Um produto Riemanniano $(M_1, g_1) \times (M_2, g_2) = (M_1 \times M_2, g_1 + g_2)$ de dimensão $n \geq 3$ é conformemente Euclidiano se e somente se uma das seguintes possibilidades é satisfeita:*

i) *(M_i, g_i) tem dimensão 1 e (M_j, g_j), $i \neq j$, possui curvatura seccional constante.*

ii) *(M_1, g_1) e (M_2, g_2) possuem dimensões no mínimo 2 e possuem curvaturas seccionais ambas nulas ou ambas constantes com mesmo módulo e sinais opostos.*

Demonstração. Provaremos a afirmação direta da proposição. Sejam $(p,q) \in M_1^{m_1} \times M_2^{n-m_1}$ e considere $\{X_i\}_{i=1}^{m_1}$ e $\{X_j\}_{j=m_1+1}^{n}$ bases ortonormais de $(T_pM_1, g_1(p))$ e $(T_qM_2, g_2(q))$. Suponha inicialmente que $m_1 \geq 2$ e $n - m_1 \geq 2$. Então, como $C = 0$, temos

$$\begin{aligned} K_{M_1}(X_i, X_j) &= L(X_i, X_i) + L(X_j, X_j) \\ 0 = K(X_i, X_k) &= L(X_i, X_i) + L(X_k, X_k) \\ K_{M_2}(X_k, X_l) &= L(X_k, X_k) + L(X_l, X_l), \end{aligned}$$

em que $1 \leq i \neq j \leq m_1$ e $m_1 + 1 \leq k \neq l \leq n$. Portanto, $L(X_i, X_i) = -L(X_k, X_k)$ e $L(X_j, X_j) = -L(X_l, X_l)$, donde obtemos que

$$K_{M_1}(X_i, X_j) = -K_{M_2}(X_k, X_l) \tag{2.20}$$

e que as curvaturas seccionais de $M_1^{m_1}$ em p e $M_2^{n-m_1}$ em q não dependem dos subespaços bidimensionais que são escolhidos em T_pM_1 e T_qM_2. Se $m_1 > 2$ e $n - m_1 > 2$, a partir de (2.20) concluímos do Lema de Schur que as curvaturas seccionais de $(M_1^{m_1}, g_1)$ e $(M_2^{n-m_1}, g_2)$ ou são ambas nulas ou ambas constantes com mesmo módulo e sinais opostos.

Se $m_1 > 2$ e $n - m_1 = 2$, então fixando $q \in M_2^2$ e $m_1 + 1 \leq k \neq l \leq n$ obtemos de (2.20) que $M_1^{m_1}$ é isotrópica, logo o Lema de Schur garante que $M_1^{m_1}$ possui curvatura seccional constante $-K_{M_2}(T_qM_2)$. Por outro lado, fixando $p \in M_1^{m_1}$ e $1 \leq i \neq j \leq m_1$, então M_2^2 admite curvatura seccional constante $-K_{M_1}(X_i, X_j)$.

Se $m_1 = 2$, $n = 4$ e $q \in M_2$ é fixado então

$$K_{M_1}(T_pM_1^2) = -K_{M_2}(T_qM_2^2) \tag{2.21}$$

para qualquer $p \in M_1^2$, logo M_1^2 possui curvatura seccional constante $-K_{M_2}(T_qM_2)$. Da mesma forma, fixando $p \in M_1^2$ e variando $q \in M_2^2$, a partir de (2.21) vemos que M_2^2 possui curvatura seccional constante igual a $-K_{M_1}(T_pM_1^2)$.

Agora, se $m_1 = 2$ e $n - m_1 > 2$, para qualquer $p \in M_1^2$ temos

$$K_{M_1}(T_pM_1^2) = -K_{M_2}(X_k, X_l), \tag{2.22}$$

para $3 \leq k \neq l \leq n$ e $q \in M_2^{n-m_1}$ fixados, logo M_1^2 possui curvatura seccional constante $-K_{M_2}(X_k, X_l)$. Por outro lado, fixando $p \in M_1^2$ e variando $3 \leq k \neq l \leq n$, segue de (2.22) que $M_2^{n-m_1}$ é isotrópica, portanto o Lema de Schur mostra que $M_2^{n-m_1}$ possui curvatura seccional constante $-K_{M_1}(T_pM_1^2)$.

Analogamente, se $m_1 = 1$ e $n = 3$, então $C = 0$ implica que

$$0 = K(X_1, X_j) = L(X_1, X_1) + L(X_j, X_j) \tag{2.23}$$

para $2 \leq j \leq 3$. Logo

$$K_{M_2}(T_qM_2^2) = -2L(X_1, X_1),$$

e, portanto, fixando $p \in M_1$ segue que M_2^2 possui curvatura seccional constante.

Agora, se $m_1 = 1$, $n - m_1 > 2$ e p é fixado, de (2.23) obtemos

$$K_{M_2}(X_i, X_j) = -2L(X_1, X_1)$$

para quaisquer $2 \leq i \neq j \leq n$. Logo, o Lema de Schur mostra que $M_2^{n-m_1}$ possui curvatura seccional constante $-2L(X_1, X_1)$.

Reciprocamente, se (M_1, g_1) e (M_2, g_2) possuem curvaturas seccionais constantes, então (M_1, g_1) e (M_2, g_2) são conformemente Euclidianas. Logo, o produto Riemanniano $(M_1 \times M_2, g_1 + g_2)$ é conformemente Euclidiano, pois se Φ_1 e Φ_2 são, localmente, difeomorfismos conformes de (M_1, g_1) e (M_2, g_2) então $\Phi_1 \times \Phi_2$ é localmente um difeomorfismo conforme de $(M_1 \times M_2, g_1 + g_2)$. □

Proposição 2.11 ((KULKARNI, 1969))**.** *Seja M^n, $n \geq 4$, uma variedade Riemaniana. Então as seguintes afirmações são equivalentes*:

(i) *M^n é conformemente Euclidiana.*

(ii) *Para cada $p \in M^n$ e para qualquer subespaço $S \subset T_pM$ de dimensão 4, existe uma constante $C(S)$ tal que*

$$K(\sigma_1) + K(\sigma_2) = C(S)$$

para quaisquer dois planos mutuamente ortogonais σ_1 e σ_2 gerando S.

(iii) *Para cada $p \in M^n$*

$$K(X_1, X_2) + K(X_3, X_4) = K(X_1, X_3) + K(X_2, X_4), \tag{2.24}$$

para quaisquer $X_1, X_2, X_3, X_4 \in T_pM$ dois a dois ortogonais.

Demonstração. **(i) $\Rightarrow$ (ii)** Como (M^n,g) é conformemente Euclidiana, dado um ponto $p\in M^n$, existe um subconjunto aberto U de M^n com $p\in U$ tal que $g|_U=e^{2\omega}g_0$, para g_0 denotando a métrica Euclidiana e $\omega\in C^\infty(U)$.

Seja $\{X_1,X_2,X_3,X_4\}$ um conjunto ortonormal gerando S. Defina $\sigma_1=\mathrm{span}\{X_1,X_2\}$ e $\sigma_2=\mathrm{span}\{X_3,X_4\}$, logo da Proposição 2.9 obtemos

$$K(\sigma_1)+K(\sigma_2)=-e^{-2\omega}(\mathrm{tr}\,Q|_S+2||\mathrm{grad}_{g_0}\omega||_{g_0}^2),$$

que é uma constante $C(S)$ dependendo apenas de S.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) É imediato.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Como $n\geq 4$, basta mostrar que o tensor de Weyl é nulo, isto é, $C=0$.

Defina $\mathrm{Ric}_C(X,Y)=\mathrm{tr}(Z\mapsto C(Z,X)Y)$. Afirmamos que $\mathrm{tr}\,\mathrm{Ric}_C\equiv 0$. De fato, para se provar isso, é suficiente mostrar que $\mathrm{Ric}_C(X_j,X_j)=0$ para todo $j=1,\dots,n$, em que $\{X_1,\dots,X_n\}$ é uma base ortonormal de T_pM^n. Temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}_C(X_j,X_j)&=\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\langle C(X_i,X_j)X_j,X_i\rangle\\
&=\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}(\langle R(X_i,X_j)X_j,X_i\rangle-L(X_i,X_i)-L(X_j,X_j))\\
&=\mathrm{Ric}(X_j,X_j)-\frac{1}{n-2}\left(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\mathrm{Ric}(X_i,X_i)+(n-1)\mathrm{Ric}(X_j,X_j)-n(n-1)s\right)\\
&=\mathrm{Ric}(X_j,X_j)-\frac{1}{n-2}\big(n(n-1)s+(n-2)\mathrm{Ric}(X_j,X_j)-n(n-1)s\big)\\
&=0.
\end{aligned}$$

Portanto, está provado a nossa afirmação.

Agora, mostraremos que $\langle C(X_i,X_j)X_j,X_i\rangle=d$ é constante em $p\in M^n$, para todo $1\leq i\neq j\leq n$. Basta provar que

$$\langle C(X_1,X_2)X_2,X_1\rangle=\langle C(X_1,X_3)X_3,X_1\rangle. \tag{2.25}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\langle C(X_1,X_2)X_2,X_1\rangle-\langle C(X_1,X_3)X_3,X_1\rangle&=K(X_1,X_2)-K(X_1,X_3)-L(X_2,X_2)+L(X_3,X_3)\\
&=K(X_1,X_2)-K(X_1,X_3)-\frac{1}{n-2}\left(\sum_{i\neq 2,3}K(X_i,X_2)-K(X_i,X_3)\right).
\end{aligned}$$

Observe que, a partir da hipótese (2.24), temos

$$K(X_1,X_2)-K(X_1,X_3)=K(X_4,X_2)-K(X_4,X_3)=\ldots=K(X_i,X_2)-K(X_i,X_3).$$

Então, provamos (2.25).

Note, agora, que $\operatorname{tr}\operatorname{Ric}_C = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Ric}_C(X_i, X_i) = n(n-1)d$. Logo $d = 0$, donde concluímos que $C(p) = 0$. Porém, p é um ponto arbitrário de M^n, assim, $C = 0$.

$\square$

Definição 2.9. Uma imersão $f : M^n \to \tilde{M}^m$ é dita ser conformemente Euclidiana se $(M^n, \langle \, , \rangle_f)$ é uma variedade Riemanniana conformemente Euclidiana.

Agora, apresentaremos resultados que determinam a estrutura da segunda forma fundamental de uma imersão isométrica conformemente Euclidiana de codimensão baixa.

Élie Cartan provou em (CARTAN, 1917) o seguinte resultado:

Teorema 2.3 ((CARTAN, 1917))**.** *Uma hipersuperfície $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 4$, é conformemente Euclidiana se e somente se possui uma curvatura principal λ de multiplicidade no mínimo $n-1$ em todo ponto de M^n.*

Além disso, se $f : M^3 \to \mathbb{R}^4$ possui uma curvatura principal de multiplicidade no mínimo 2, então $(M^n, \langle \, , \rangle_f)$ é conformemente Euclidiana (veja Corolário 16.8 de (DAJCZER; TOJEIRO, 2019)). Porém, a afirmação direta do Teorema 2.3 não é verdadeira para $n = 3$, pois uma hipersuperfície conformemente Euclidiana $f : M^3 \to \mathbb{R}^4$ pode admitir três curvaturas principais distintas (veja exemplos na seção 16.5 de (DAJCZER; TOJEIRO, 2019)).

John Moore estendeu em (MOORE, 1977) o resultado de Cartan para subvariedades de codimensão maior do que 1.

Teorema 2.4 ((MOORE, 1977))**.** *Seja $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+p}$, $n \geq 4$, uma imersão isométrica conformemente Euclidiana. Se $p \leq n-3$, então para cada $x \in M^n$ existe um vetor normal principal $\eta(x) \in N_f M(x)$ tal que* $\dim E_\eta(x) \geq n - p \geq 3$.

Se uma imersão isométrica conformemente Euclidiana $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+p}$, $n \geq 4$, possui fibrado normal plano temos o seguinte resultado adicional provado em (DAJCZER; ONTI; VLACHOS, 2020).

Teorema 2.5 ((DAJCZER; ONTI; VLACHOS, 2020))**.** *Seja $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+p}$, $n \geq 4$, uma imersão isométrica conformemente Euclidiana com fibrado normal plano e própria. Então f é localmente holonômica e possui no máximo um campo normal principal com multiplicidade maior do que* 1.

2.5 Os invariantes de Moebius de uma subvariedade Euclidiana

Os resultados e definições desta seção são baseados no capítulo 9 de (DAJCZER; TOJEIRO, 2019) e em (WANG, 1998), nos quais mais detalhes podem ser encontrados.

Seja $\mathbb{L}^{m+2}$ o *espaço de Minkowski* de dimensão $m+2$, isto é, $\mathbb{R}^{m+2}$ é munido com a métrica dada por

$$\langle v,w\rangle = -v_0w_0 + v_1w_1 + \ldots + v_{m+1}w_{m+1},$$

para $v = (v_0,\ldots,v_{m+1})$ e $w = (w_0,\ldots,w_{m+1})$ pertencentes a $\mathbb{R}^{m+2}$.

O *cone de luz* $\mathbb{V}^{m+1}$ de $\mathbb{L}^{m+2}$ é uma das duas componentes conexas do conjunto de vetores

$$\{v \in \mathbb{L}^{m+2} : \langle v,v\rangle = 0 \text{ e } v \neq 0\}$$

munida com uma métrica degenerada induzida de $\mathbb{L}^{m+2}$. Então

$$\mathbb{E}^m = \mathbb{E}^m_w = \{p \in \mathbb{V}^{m+1} : \langle p,w\rangle = 1\}$$

é um modelo do espaço Euclidiano de dimensão m para cada $w \in \mathbb{V}^{m+1}$ fixado. De fato, fixe $p_0 \in \mathbb{E}^m$ e uma isometria linear $C : \mathbb{R}^m \to (\text{span}\{p_0,w\})^\perp \subset \mathbb{L}^{m+2}$, então a tripla (p_0,w,C) determina um mergulho isométrico $\Psi = \Psi_{p_0,w,C} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{L}^{m+2}$ definido por

$$\Psi(x) = p_0 + Cx - \frac{1}{2}||x||^2 w, \tag{2.26}$$

tal que $\Psi(\mathbb{R}^m) = \mathbb{E}^m$.

Proposição 2.12. *O mergulho isométrico $\Psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{L}^{m+2}$ satisfaz:*

i. *Ψ é um campo vetorial normal e paralelo com respeito à conexão normal tal que $\langle\Psi,\Psi\rangle = 0$.*

ii. *$N_\Psi\mathbb{R}^m = span\{\Psi,w\}$.*

iii. *A segunda forma fundamental de Ψ é dada por*

$$\alpha^\Psi(X,Y) = -\langle X,Y\rangle w,$$

para quaisquer $X,Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^m)$.

Demonstração. Denote por $\tilde{\nabla}$ a conexão de Levi-Civita de $\mathbb{L}^{m+2}$. Como $\tilde{\nabla}_X\Psi = \Psi_*X$ para todo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^m)$, temos que **i**. é satisfeito.

Notamos que $\langle\Psi,w\rangle = 1$ e $w \perp \Psi_*X$, pois

$$\Psi_*(x)X = CX - \langle X,x\rangle w,$$

então **ii**. é satisfeito.

Agora,

$$0 = X\langle\Psi,w\rangle = \langle\Psi_*X,w\rangle.$$

Diferenciando novamente, obtemos

$$0 = \langle \tilde{\nabla}_Y \Psi_* X, w\rangle = \langle (\tilde{\nabla}_Y \Psi_* X)^\perp, w\rangle = \langle \alpha^\Psi(X,Y), w\rangle, \tag{2.27}$$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^m)$. Além disso,

$$\langle \alpha^\Psi(X,Y), \Psi\rangle = \langle \tilde{\nabla}_X \Psi_* Y, \Psi\rangle = -\langle \Psi_* Y, \Psi_* X\rangle = -\langle X, Y\rangle. \tag{2.28}$$

Logo, de (2.27) e (2.28) concluímos que

$$\begin{aligned} \alpha^\Psi(X,Y) &= \langle \alpha^\Psi(X,Y), \Psi\rangle w + \langle \alpha^\Psi(X,Y), w\rangle \Psi \\ &= -\langle X, Y\rangle w \end{aligned}$$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^m)$. □

Seja $f : M^n \to \mathbb{R}^m$ uma imersão sem pontos umbílicos. Então, a função $\rho : M^n \to \mathbb{R}_+$ definida por

$$\rho^2 = \frac{n}{n-1}(||\alpha^f||^2 - n||\mathscr{H}^f||^2)$$

não se anula em M^n, em que $\mathscr{H}^f$ é o campo vetorial curvatura média de f e $||\alpha^f||$ denota a norma da segunda forma fundamental de f dada por

$$||\alpha^f||^2 = \sum_{i,j=1}^{n} ||\alpha^f(X_i, X_j)||^2$$

em termos de um referencial ortonormal $X_1, \ldots, X_n$ de f. Definimos o *levantamento de Moebius de* f como a imersão $F : M^n \to \mathbb{V}^{m+1} \subset \mathbb{L}^{m+2}$ dada por

$$F = \rho \Psi \circ f.$$

Como a diferencial de F é $F_* X = X(\rho)\Psi \circ f + \rho \Psi_* \circ f_* X$, segue do fato de que Ψ é um campo normal do tipo-luz que a métrica induzida por F é

$$\langle \, , \rangle^* = \rho^2 \langle \, , \rangle_f. \tag{2.29}$$

A métrica (2.29) é denominada a *métrica de Moebius determinada por* f.

Definição 2.10. Uma imersão $f : M^n \to \tilde{M}^m$ entre variedades Riemannianas é *conforme* se sua métrica induzida $\langle \, , \rangle_f$ é conforme a métrica Riemanniana $\langle \, , \rangle$ de M^n. O *fator conforme* de f é o fator conforme de $\langle \, , \rangle_f$ com respeito à $\langle \, , \rangle$.

A seguinte proposição mostra que a métrica de Moebius determinada por f é invariante por transformações conformes de $\mathbb{R}^m$. Para se mostrar isso, relembramos que se $f : M^n \to \tilde{M}^m$ é uma imersão e g_1 e g_2 são métricas tais que $g_2 = \lambda^2 g_1$ para alguma função positiva $\lambda \in C^\infty(\tilde{M})$, então

$$f_j = f : (M^n, f^* g_j) \to (\tilde{M}^m, g_j), \tag{2.30}$$

$1 \leq j \leq 2$, são imersões isométricas cujas métricas induzidas satisfazem $f^*g_2 = (\lambda \circ f)^2 f^*g_1$. Logo, a partir de (2.16), concluímos que as segundas formas fundamentais de f_1 e f_2 relacionam-se por

$$\alpha^{f_2}(X,Y) = \alpha^{f_1}(X,Y) - \frac{1}{\lambda \circ f} f^*g_1(X,Y)((\mathrm{grad}_1 \lambda) \circ f)^{\perp}, \tag{2.31}$$

para quaisquer $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$, em que $\mathrm{grad}_1 \lambda$ denota o gradiente de λ com respeito à g_1.

Proposição 2.13. *Sejam $f : M^n \to \mathbb{R}^m$ uma imersão sem pontos umbílicos e $\tau : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ uma transformação conforme. Então a imersão conforme $\tilde{f} = \tau \circ f : M^n \to \mathbb{R}^m$ determina a mesma métrica de Moebius que f.*

Demonstração. Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma base ortonormal de $(T_xM, \langle\, , \rangle_f)$. Então $\varphi^{-1}X_1, \ldots, \varphi^{-1}X_n$ é uma base ortonormal de $(T_xM, \langle\, , \rangle_{\tilde{f}})$, em que $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ denota o fator conforme de τ. Como

$$\alpha^{\tilde{f}} = \tau_* \alpha^f - \frac{1}{\varphi} \langle\, , \rangle_f \tau_*((\mathrm{grad}\, \varphi) \circ f)^{\perp},$$

em que grad representa o gradiente calculado com respeito à métrica Euclidiana de $\mathbb{R}^m$, temos

$$\alpha^{\tilde{f}}(\varphi^{-1}X_i, \varphi^{-1}X_j) = \begin{cases} \varphi^{-2}\tau_*\alpha^f(X_i,X_i) - \varphi^{-3}\tau_*((\mathrm{grad}\,\varphi) \circ f)^{\perp}, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Logo

$$\begin{aligned} ||\alpha^{\tilde{f}}||^2 &= \sum_{i=1}^n ||\alpha^{\tilde{f}}(\varphi^{-1}X_i, \varphi^{-1}X_i)||^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (\varphi^{-4}||\tau_*\alpha^f(X_i,X_i)||^2 - 2\varphi^{-5}\langle \alpha^f(X_i,X_i), (\mathrm{grad}\,\varphi) \circ f\rangle_\tau \\ &+ \varphi^{-6}||\tau_*((\mathrm{grad}\,\varphi) \circ f)^{\perp}||^2) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} ||\mathscr{H}^{\tilde{f}}||^2 &= \frac{1}{n^2}||n\varphi^{-2}\mathscr{H}^f - \varphi^{-3}n((\mathrm{grad}\,\varphi) \circ f)^{\perp}||^2_\tau \\ &= \varphi^{-4}||\mathscr{H}^f||^2_\tau - 2\varphi^{-5}\langle \mathscr{H}^f, (\mathrm{grad}\,\varphi) \circ f\rangle_\tau + \varphi^{-6}||((\mathrm{grad}\,\varphi) \circ f)^{\perp}||^2_\tau. \end{aligned}$$

Assim,

$$\tilde{\rho}^2 = \frac{n}{n-1}(||\alpha^{\tilde{f}}||^2 - n||\mathscr{H}^{\tilde{f}}||^2) = \frac{n}{n-1}\varphi^{-2}(||\alpha^f|| - n||\mathscr{H}^f||^2) = \varphi^{-2}\rho^2.$$

Portanto, as métricas de Moebius determinadas por f e $\tilde{f}$ coincidem. □

A partir deste ponto, munimos M^n com $\langle\, , \rangle^*$. Então f torna-se uma imersão conforme com fator conforme ρ^{-1}, e F é uma imersão isométrica em $\mathbb{V}^{m+1}$.

Proposição 2.14. *Seja $F : M^n \to \mathbb{V}^{m+1} \subset \mathbb{L}^{m+2}$ o levantamento de Moebius determinado por uma imersão $f : M^n \to \mathbb{R}^m$ sem pontos umbílicos. Então as seguintes afirmações são satisfeitas:*

(i) *A aplicação $\phi : \Gamma(N_f M) \to \Gamma(N_F M)$ definida por*

$$\phi(\xi) = \Psi_* \xi + H_\xi \Psi \circ f, \tag{2.32}$$

em que $H_\xi = \langle \mathscr{H}^f, \xi \rangle$, define uma isometria de fibrados vetoriais de $N_f M$ sobre um subfibrado V de $N_F M$, a qual é paralela com respeito à conexão normal em $N_f M$ e a conexão em V induzida da conexão normal em $N_F M$, ou seja,

$$\left({}^F\nabla^\perp_X \phi(\xi) \right)_V = \phi({}^f\nabla^\perp_X \xi) \tag{2.33}$$

para quaisquer $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\xi \in \Gamma(N_f M)$.

(ii) *O fibrado vetorial plano $V^\perp$ tem o vetor posição F e o campo vetorial*

$$\zeta = -\Psi_*(f_* grad^* \rho + \rho^{-1} \mathscr{H}^f) - \frac{1}{2\rho}(||grad^* \rho||_*^2 + ||\mathscr{H}^f||^2)\Psi \circ f + \frac{1}{\rho} w \tag{2.34}$$

como um referencial pseudo-ortonormal, com

$$\langle F, F \rangle = 0 = \langle \zeta, \zeta \rangle \quad e \quad \langle F, \zeta \rangle = 1. \tag{2.35}$$

Aqui $grad^*$ denota o gradiente em M^n calculado com respeito à $\langle\, ,\, \rangle^*$.

(iii) *A segunda forma fundamental de F se escreve, de acordo com a decomposição ortogonal $N_F M = V \oplus V^\perp$, como*

$$\alpha^F(X,Y) = \phi(\beta^f(X,Y)) - \psi(X,Y)F - \langle X, Y \rangle^* \zeta, \tag{2.36}$$

em que

$$\beta^f(X,Y) = \rho(\alpha^f(X,Y) - \langle X, Y \rangle_f \mathscr{H}^f) \tag{2.37}$$

e

$$\begin{aligned} \psi(X,Y) =& \frac{1}{\rho}\langle \beta^f(X,Y), \mathscr{H}^f \rangle + \frac{1}{2\rho^2}(||grad^* \rho||_*^2 + ||\mathscr{H}^f||^2)\langle X, Y \rangle^* \\ & - \frac{1}{\rho} Hess^* \rho(X,Y), \end{aligned} \tag{2.38}$$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, em que $Hess^*$ denota o hessiano em M^n calculado com respeito à $\langle\, ,\, \rangle^*$.

(iv) *O campo vetorial ζ satisfaz*

$$ {}^F\nabla^\perp_X \zeta = -\frac{1}{\rho}\phi({}^f\nabla^\perp_X \mathscr{H}^f + \beta^f(X, \mathrm{grad}^* \rho)). \tag{2.39}$$

Demonstração. (i) Diferenciando F temos

$$F_*X = X(\rho)\Psi \circ f + \rho\,\Psi_* \circ f_*X,$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Portanto,

$$\langle \phi(\xi), F_*X\rangle = 0$$

para quaisquer $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\xi \in \Gamma(N_fM)$, ou seja, $\phi(\Gamma(N_fM)) \subset \Gamma(N_FM)$. Além disso, decorre do fato de que Ψ é uma imersão isométrica e o vetor posição Ψ é um campo normal do tipo-luz que

$$\langle \phi(\xi), \phi(\eta)\rangle = \langle \xi, \eta\rangle,$$

para quaisquer $\xi, \eta \in \Gamma(N_fM)$. Portanto, ϕ é uma isometria de fibrados vetoriais de N_fM sobre um subfibrado V de N_FM.

Provaremos agora que (2.33) é satisfeita. De fato,

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_X\phi(\xi) &= \tilde{\nabla}_X(\Psi_*\xi + H_\xi\Psi \circ f)\\ &= \Psi_*\bar{\nabla}_X\xi + \alpha^{\Psi}(f_*X, \xi) + X(H_\xi)(\Psi \circ f) + H_\xi\Psi_* \circ f_*X\\ &= \Psi_*(-f_*A^f_\xi X + {}^f\nabla^\perp_X\xi + H_\xi f_*X) + X(H_\xi)(\Psi \circ f),\end{aligned} \tag{2.40}$$

portanto,

$$\langle {}^F\nabla^\perp_X\phi(\xi), \phi(\eta)\rangle = \langle \tilde{\nabla}_X\phi(\xi), \phi(\eta)\rangle = \langle {}^f\nabla^\perp_X\xi, \eta\rangle,$$

para quaisquer $\eta, \xi \in \Gamma(N_fM)$ e $X \in \mathfrak{X}(M)$, em que $\tilde{\nabla}$ e $\bar{\nabla}$ são as conexões de Levi-Civita de $\mathbb{L}^{m+2}$ e $\mathbb{R}^m$, respectivamente.

(ii) É um cálculo direto verificar que $F, \zeta \in \Gamma(V^\perp)$ e que as condições em (2.35) são satisfeitas.

(iii) Calcularemos

$$\alpha^F(X,Y) = \tilde{\nabla}_YF_*X - F_*\nabla^*_YX,$$

em que ∇^* denota a conexão de Levi-Civita de $\langle\,,\,\rangle^*$.

Por um lado

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_YF_*X &= Y(X(\rho))\Psi\circ f + X(\rho)(\Psi \circ f)_*Y + Y(\rho)(\Psi \circ f)_*X\\ &\quad + \rho\tilde{\nabla}_Y(\Psi_*f_*X)\\ &= Y(X(\rho))\Psi \circ f + X(\rho)(\Psi \circ f)_*Y + Y(\rho)(\Psi \circ f)_*X\\ &\quad + \rho\Psi_*\bar{\nabla}_Yf_*X + \rho\alpha^{\Psi}(f_*Y, f_*X)\\ &= Y(X(\rho))\Psi \circ f + X(\rho)(\Psi \circ f)_*Y + Y(\rho)(\Psi \circ f)_*X\\ &\quad + \rho\Psi_*(f_*\nabla_YX + \alpha^f(X,Y)) - \rho\langle f_*X, f_*Y\rangle w\\ &= Y(X(\rho))\Psi \circ f - \rho^{-1}\langle X,Y\rangle^*w + \rho\Psi_*\alpha^f(X,Y)\\ &\quad + \Psi_*f_*(X(\rho)Y + Y(\rho)X + \rho\nabla_YX),\end{aligned}$$

em que ∇ é a conexão de Levi-Civita de $\langle\,,\,\rangle_f$. Por outro lado,

$$F_*\nabla^*_Y X = (\nabla^*_Y X)(\rho)\Psi\circ f + \rho\Psi_* f_*\nabla^*_Y X.$$

Usando a relação

$$\nabla^*_Y X = \nabla_Y X + \frac{1}{\rho}(Y(\rho)X + X(\rho)Y - \langle X,Y\rangle^*\mathrm{grad}^*\rho),$$

obtemos

$$\alpha^F(X,Y) = \Psi_*(\langle X,Y\rangle^* f_*\mathrm{grad}^*\rho + \rho\alpha^f(X,Y)) + \mathrm{Hess}^*\rho(X,Y)\Psi\circ f - \rho^{-1}\langle X,Y\rangle^* w.$$

Em particular,

$$\begin{aligned}\langle\alpha^F(X,Y),\zeta\rangle &= \frac{1}{2\rho^2}(||\mathscr{H}^f||^2 - ||\mathrm{grad}^*\rho||^2_*)\langle X,Y\rangle^* - \langle\alpha^f(X,Y),\mathscr{H}^f\rangle + \frac{1}{\rho}\mathrm{Hess}^*\rho(X,Y)\\ &= -\psi(X,Y),\end{aligned} \tag{2.41}$$

em que ψ é definido em (2.38).

Além disso, a partir de um cálculo direto obtemos

$$\begin{aligned}(\alpha^F(X,Y))_V &= \alpha^F(X,Y) - \langle\alpha^F(X,Y),\zeta\rangle F - \langle\alpha^F(X,Y),F\rangle\zeta\\ &= \alpha^F(X,Y) + \rho\,\psi(X,Y)\Psi\circ f + \langle X,Y\rangle^*\zeta\\ &= \phi(\beta(X,Y)),\end{aligned}$$

em que β é definido em (2.37). Logo segue (2.36).

(iv) Decorre de (2.40) que

$$\begin{aligned}\langle\tilde\nabla_X\phi(\xi),\zeta\rangle &= \langle A^f_\xi X,\mathrm{grad}^*\rho\rangle_f - \rho^{-1}\langle {}^f\nabla^\perp{}_X\xi,\mathscr{H}^f\rangle - H_\xi\langle X,\mathrm{grad}^*\rho\rangle_f + \rho^{-1}X(H_\xi)\\ &= \rho^{-1}\langle {}^f\nabla^\perp_X\mathscr{H}^f + \beta(X,\mathrm{grad}^*\rho),\xi\rangle\\ &= \rho^{-1}\langle\phi({}^f\nabla^\perp_X\mathscr{H}^f + \beta(X,\mathrm{grad}^*\rho)),\phi(\xi)\rangle,\end{aligned}$$

o que mostra (2.39).

□

A *segunda forma fundamental de Moebius* de $f: M^n\to\mathbb{R}^m$ é a seção simétrica de $\mathrm{Hom}^2(TM,TM;N_fM)$ definida por (2.37). Note que $\mathrm{tr}\,\beta = 0$.

O *operador de forma de Moebius* de f com respeito a $\xi\in\Gamma(N_fM)$ é o endomorfismo $B_\xi\in\Gamma(\mathrm{End}(TM))$ dado por

$$\langle B_\xi X,Y\rangle^* = \langle\beta(X,Y),\xi\rangle,$$

para quaisquer $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$.

A *terceira forma fundamental de Moebius* $III_\beta : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathbb{R}$ associada com β é definida por

$$III_\beta(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} \langle \beta(X,X_i), \beta(Y,X_i) \rangle, \tag{2.42}$$

em que $X_1, \ldots, X_n$ é um referencial ortonormal de $(M^n, \langle\,,\rangle^*)$. Observamos que a norma de β com respeito à $\langle\,,\rangle^*$ satisfaz

$$\begin{aligned}
||\beta||_*^2 &= \operatorname{tr} III_\beta \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \langle \beta(X_i,X_j), \beta(X_i,X_j) \rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \rho^2(||\alpha^f(X_i,X_j)||^2 - 2\langle X_i,X_j\rangle_f \langle \alpha^f(X_i,X_j), \mathscr{H}^f \rangle + \langle X_i,X_j\rangle_f^2 ||\mathscr{H}^f||^2) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \rho^{-2}||\alpha^f(\rho X_i,\rho X_j)||^2 - 2\rho^{-2}\sum_{i=1}^{n}\langle \alpha^f(\rho X_i,\rho X_i), \mathscr{H}^f\rangle + n\rho^{-2}||\mathscr{H}^f||^2 \\
&= \rho^{-2}(||\alpha^f||^2 - n||\mathscr{H}^f||^2) \\
&= \frac{n-1}{n}.
\end{aligned}$$

O *tensor de Blaschke* $\psi = \psi^f$ de f é a forma $C^\infty(M)$-bilinear e simétrica definida por (2.38).

A *forma de Moebius* $\omega = \omega^f$ de f é a 1-forma em M^n com valores em N_fM definida por

$$\omega(X) = -\frac{1}{\rho}({}^f\nabla_X^\perp \mathscr{H}^f + \beta^f(X, \operatorname{grad}^*\rho)).$$

Proposição 2.15 ((WANG, 1998))**.** *O tensor de Blaschke é dado em termos da métrica de Moebius e da terceira forma fundamental de Moebius por*

$$(n-2)\psi(X,Y) = \operatorname{Ric}^*(X,Y) + III_\beta(X,Y) - \frac{n^2 s^* + 1}{2n}\langle X,Y\rangle^*, \tag{2.43}$$

para quaisquer $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$, em que Ric^* e $s^* = \frac{1}{n(n-1)} tr Ric^*$ denotam o tensor de Ricci e a curvatura escalar de $(M^n, \langle\,,\rangle^*)$. Em particular,

$$\operatorname{tr}\psi = \frac{n^2 s^* + 1}{2n} = \frac{n}{2}\langle \mathscr{H}^F, \mathscr{H}^F \rangle. \tag{2.44}$$

Proposição 2.16 ((WANG, 1998))**.** *Para quaisquer $X,Y,Z,W \in \mathfrak{X}(M)$ e $\xi,\eta \in \Gamma(N_fM)$, as seguintes equações são satisfeitas:*

(i) *A equação conforme de Gauss*:

$$\begin{aligned}
\langle R^*(X,Y)Z,W\rangle^* =& \langle \beta(X,W), \beta(Y,Z)\rangle - \langle \beta(X,Z), \beta(Y,W)\rangle \\
&+ \psi(X,W)\langle Y,Z\rangle^* + \psi(Y,Z)\langle X,W\rangle^* \\
&- \psi(X,Z)\langle Y,W\rangle^* - \psi(Y,W)\langle X,Z\rangle^*.
\end{aligned} \tag{2.45}$$

(ii) *As equações conforme de Codazzi*:

$$({}^f\nabla^{\perp}_X\beta)(Y,Z) - ({}^f\nabla^{\perp}_Y\beta)(X,Z) = \omega((X\wedge Y)Z) \tag{2.46}$$

e

$$(\nabla^*_X\psi)(Y,Z) - (\nabla^*_Y\psi)(X,Z) = \langle\omega(Y),\beta(X,Z)\rangle - \langle\omega(X),\beta(Y,Z)\rangle, \tag{2.47}$$

em que $(X\wedge Y)Z = \langle Y,Z\rangle^* X - \langle X,Z\rangle^* Y$,

$$({}^f\nabla^{\perp}_X\beta)(Y,Z) = {}^f\nabla^{\perp}_X\beta(Y,Z) - \beta(\nabla^*_X Y,Z) - \beta(Y,\nabla^*_X Z)$$

e

$$(\nabla^*_X\psi)(Y,Z) = X(\psi(Y,Z)) - \psi(\nabla^*_X Y,Z) - \psi(Y,\nabla^*_X Z).$$

(iii) *As equações conforme de Ricci*:

$$d\omega(X,Y) = \beta(Y,\hat{\psi}X) - \beta(X,\hat{\psi}Y) \tag{2.48}$$

e

$$\langle R^{\perp}(X,Y)\xi,\eta\rangle = \langle[B_\xi,B_\eta]X,Y\rangle^*, \tag{2.49}$$

com $\hat{\psi}\in\Gamma(\mathrm{End}(TM))$ *dado por*

$$\langle\hat{\psi}X,Y\rangle^* = \psi(X,Y).$$

Demonstração. Decorre da equação de Gauss de F e de (2.36) que (2.45) é satisfeita.

Observe que, de (2.33) e (2.39), temos

$$\begin{aligned}
{}^F\nabla^{\perp}_X\phi(\beta(Y,Z)) &= ({}^F\nabla^{\perp}_X\phi(\beta(Y,Z))_V + \langle {}^F\nabla^{\perp}_X\phi(\beta(Y,Z)),F\rangle\zeta + \langle {}^F\nabla^{\perp}_X\phi(\beta(Y,Z)),\zeta\rangle F\\
&= \phi({}^f\nabla^{\perp}_X\beta(Y,Z)) - \langle\phi(\beta(Y,Z)),{}^F\nabla^{\perp}_X\zeta\rangle F\\
&= \phi({}^f\nabla^{\perp}_X\beta(Y,Z)) - \langle\beta(Y,Z),\omega(X)\rangle F.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
{}^F\nabla^{\perp}_X\alpha^F(Y,Z) &= {}^F\nabla^{\perp}_X\phi(\beta(Y,Z)) - {}^F\nabla^{\perp}_X(\psi(Y,Z)F) - {}^F\nabla^{\perp}_X(\langle Y,Z\rangle^*\zeta)\\
&= \phi({}^f\nabla^{\perp}_X\beta(Y,Z)) - \langle\beta(Y,Z),\omega(X)\rangle F - X(\psi(Y,Z))F\\
&\quad - X\langle Y,Z\rangle^*\zeta - \langle Y,Z\rangle^*\phi(\omega(X)).
\end{aligned}$$

Portanto, tomando a V-componente da equação de Codazzi

$$({}^F\nabla^{\perp}_X\alpha^F)(Y,Z) = ({}^F\nabla^{\perp}_Y\alpha^F)(X,Z),$$

obtemos (2.46), enquanto a F-componente produz (2.47).

Observamos que de (2.41) temos

$$A^F_\zeta = -\hat{\psi}.$$

Então

$$\alpha^F(X, A^F_\zeta Y) = -\phi(\beta(X, \hat{\psi}Y)) + \psi(X, \hat{\psi}Y)F + \langle X, \hat{\psi}Y\rangle^* \zeta.$$

Logo

$$\alpha^F(X, A^F_\zeta Y) - \alpha^F(A^F_\zeta X, Y) = \phi(\beta(\hat{\psi}X, Y)) - \phi(\beta(X, \hat{\psi}Y)) \in V.$$

Decorre da equação de Ricci de F,

$$R^\perp(X,Y)\zeta = \alpha^F(X, A^F_\zeta Y) - \alpha^F(A^F_\zeta X, Y),$$

e de (2.33) que (2.48) é satisfeita.

Como $B_\xi = \rho^{-1}(A^f_\xi - H_\xi I)$, segue que

$$A_\xi \circ A_\eta - A_\eta \circ A_\xi = \rho^2(B_\xi \circ B_\eta - B_\eta \circ B_\xi).$$

Logo, da equação de Ricci de f,

$$\langle R^\perp(X,Y)\xi, \eta\rangle = \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y\rangle,$$

obtemos (2.49). □

Teorema 2.6 (**Teorema Fundamental das Subvariedades na Geometria de Moebius**). *Existência: Sejam $(M^n, \langle\, ,\, \rangle)$ uma variedade Riemanniana simplesmente conexa, $\mathscr{E}$ um fibrado vetorial Riemanniano de posto p sobre M^n com conexão compatível $\nabla^{\mathscr{E}}$ e tensor de curvatura $R^{\mathscr{E}}$. Seja $\beta^{\mathscr{E}}$ uma seção simétrica de $Hom^2(TM, TM; \mathscr{E})$ tal que*

$$tr\,\beta^{\mathscr{E}} = 0 \quad e \quad ||\beta^{\mathscr{E}}|| = \sqrt{\frac{n-1}{n}}.$$

Para cada $\xi \in \Gamma(\mathscr{E})$, defina $B^{\mathscr{E}}_\xi \in \Gamma(End(TM))$ por

$$\langle B^{\mathscr{E}}_\xi X, Y\rangle = \langle \beta^{\mathscr{E}}(X,Y), \xi\rangle.$$

Suponha que existam $\psi \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M)$ e $\omega \in \Gamma(T^*M \otimes \mathscr{E})$ tais que as equações (2.45), (2.46), (2.47), (2.48) e (2.49) sejam satisfeitas para quaisquer $\xi, \eta \in \Gamma(\mathscr{E})$. Então existe uma imersão $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+p}$ sem pontos umbílicos e uma isometria de fibrados vetoriais $\phi^{\mathscr{E}} : \mathscr{E} \to N_f M$ tais que $\langle\, ,\, \rangle$ é a métrica de Moebius em M^n determinada por f,

$$\beta^f = \phi^{\mathscr{E}} \circ \beta^{\mathscr{E}}, \quad \psi^f = \psi, \quad \omega^f = \phi^{\mathscr{E}} \circ \omega \quad e \quad {}^f\nabla^\perp \phi^{\mathscr{E}} = \phi^{\mathscr{E}} \nabla^{\mathscr{E}}.$$

Unicidade: Sejam $f, g : M^n \to \mathbb{R}^m$ imersões sem pontos umbílicos que determinam a mesma métrica de Moebius na variedade M^n. Suponha que exista uma isometria de fibrados vetoriais $\mathscr{T} : N_f M \to N_g M$ tal que

$$\mathscr{T}\, {}^f\nabla^\perp = {}^g\nabla^\perp \mathscr{T} \quad e \quad \mathscr{T} \circ \beta^f = \beta^g.$$

Então existe uma transformação conforme $\tau : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ tal que $\tau \circ f = g$.

Concluímos esta seção com um teorema provado em (DAJCZER; TOJEIRO, 2019) e (DAJCZER; FLORIT; TOJEIRO, 2001) usando diferentes métodos, porém a prova apresentada no Corolário 9.33 de (DAJCZER; TOJEIRO, 2019) parece mais simples e interessante. Este teorema está substancialmente relacionado com o estudo das subvariedades com curvatura de Moebius constante e fibrado normal plano, conforme será visto no próximo capítulo.

Teorema 2.7 ((DAJCZER; FLORIT; TOJEIRO, 2001))**.** *Seja $f : M^n \to \mathbb{R}^m$ uma imersão isométrica que possui um campo normal principal de Dupin η de multiplicidade k. Suponha que $E_\eta^\perp$ seja uma distribuição umbílica. Se $k = n-1$, suponha ainda que as curvas integrais de $E_\eta^\perp$ sejam círculos extrínsecos de M^n. Então $f(M^n)$ é a imagem por uma transformação conforme de $\mathbb{R}^m$ de um subconjunto aberto de uma subvariedade de um dos seguintes tipos:*

(i) *Um cilindro sobre uma imersão isométrica $g : M^{n-k} \to \mathbb{R}^{m-k}$, ou seja,*

$$f = g \times Id : M^{n-k} \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{m-k} \times \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^m.$$

(ii) *Um cone generalizado sobre uma imersão isométrica $g : M^{n-k} \to \mathbb{S}^{m-k}$, isto é*

$$f = G \times Id : M^{n-k+1} \times \mathbb{R}^{k-1} \to \mathbb{R}^{m-k+1} \times \mathbb{R}^{k-1},$$

em que $G : M^{n-k+1} = M^{n-k} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{m-k+1}$ é a imersão definida por

$$G(x,t) = tg(x).$$

(iii) *Uma subvariedade de rotação sobre uma imersão isométrica $g : M^{n-k} \to \mathbb{R}_+^{m-k}$, ou seja, $f : M^{n-k} \times \mathbb{S}^k \to \mathbb{R}^m$ é definida por*

$$f = \Theta \circ (g, Id),$$

em que $Id : \mathbb{S}^k \to \mathbb{S}^k$ é a aplicação identidade e $\Theta : \mathbb{H}^{m-k} \times \mathbb{S}^k \to \mathbb{R}^m$ é definida como em (2.19).

CAPÍTULO

3

OS INVARIANTES DE MOEBIUS DE UMA SUBVARIEDADE CONFORMEMENTE EUCLIDIANA COM FORMA DE MOEBIUS FECHADA

Neste capítulo obtemos as expressões para os invariantes de Moebius de uma imersão isométrica $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+p}$, $n-3 \geq p \geq 1$, conformemente Euclidiana com fibrado normal plano e sem pontos umbílicos cuja forma de Moebius é fechada. Tais expressões serão utilizadas nas demonstrações dos teoremas principais dos capítulos seguintes.

Seja $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+p}$, $n-3 \geq p \geq 1$, uma imersão isométrica, sem pontos umbílicos, conformemente Euclidiana com fibrado normal plano e própria cuja forma de Moebius é fechada. Sob essas hipóteses, o Teorema 2.4 assegura que f admite um campo normal principal η com multiplicidade $n-p+\ell$, para algum $0 \leq \ell \leq p-1$. Por outro lado, pelo Teorema 2.5, os demais $p-\ell$ campos normais principais de f são todos simples.

Observação 3.1. Seja $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+p}$ uma imersão isométrica com fibrado normal plano e $k > 1$ campos normais principais $\eta_1, \ldots, \eta_k$ associados às auto-distribuições diferenciáveis $E_{\eta_1}, \ldots, E_{\eta_k}$, e seja $X_1, \ldots, X_n$ um referencial principal de f.

Como $\langle\, , \rangle^* = \rho^2 \langle\, , \rangle_f$ e $\beta = \rho(\alpha^f - \langle\, , \rangle_f \mathscr{H}^f)$ temos

$$\begin{aligned}\beta(\rho^{-1}X_i, \rho^{-1}X_j) &= \rho(\rho^{-2}\alpha^f(X_i, X_j) - \rho^{-2}\delta_{ij}\mathscr{H}^f) \\ &= \delta_{ij}\rho^{-1}(\eta_i - \mathscr{H}^f).\end{aligned}$$

Logo, $E_{\eta_1}, \ldots, E_{\eta_k}$ são auto-espaços de β com correspondentes campos normais principais $\bar{\eta}_i = \rho^{-1}(\eta_i - \mathscr{H}^f)$. Em particular, o número de campos normais principais associados a α e β é o mesmo.

Definição 3.1. Os campos normais $\bar{\eta}_i = \rho^{-1}(\eta_i - \mathscr{H}^f)$ dados pela observação anterior serão chamados de *campos normais principais de Moebius de f*

Pela Observação 3.1 e pelo fato de que a forma de Moebius ω^f é fechada, a equação conforme de Ricci mostra que existe um referencial ortonormal $X_1, \dots, X_n$ com respeito à $\langle\,,\rangle^*$ que diagonaliza β e ψ simultaneamente e tal que

$$\beta(X_i, X_i) = \bar{\eta} := \rho^{-1}(\eta - \mathscr{H}^f),$$

para quaisquer $p - \ell + 1 \leq i \leq n$, e além disso, $\beta(X_j, X_j)$, $1 \leq j \leq p - \ell$, são campos normais principais de Moebius simples.

Considere as distribuições diferenciáveis

$$\Delta = \operatorname{span}\{X_i : p - \ell + 1 \leq i \leq n\} \quad \text{e} \quad \Delta^\perp = \operatorname{span}\{X_i : 1 \leq i \leq p - \ell\}. \tag{3.1}$$

Como $\Delta = E_\eta$ e $\dim \Delta = n - p + \ell \geq 3$, a Proposição 2.4 mostra que Δ é umbílica com respeito à $\langle\,,\rangle_f$, logo Δ é também umbílica com respeito à $\langle\,,\rangle^*$, uma vez que $\langle\,,\rangle^*$ e $\langle\,,\rangle_f$ são conformes.

Proposição 3.1. *Se a distribuição $\Delta^\perp$ é totalmente geodésica com respeito à $\langle\,,\rangle^*$ então $\Delta^\perp$ é esférica com respeito à $\langle\,,\rangle_f$ com campo curvatura média $(grad_f \log\rho)_\Delta$.*

Demonstração. Usando a relação $\nabla^*_{X_a} X_b = {}^f\nabla_{X_a} X_b + \frac{1}{\rho}(X_a(\rho)X_b + X_b(\rho)X_a - \langle X_a, X_b\rangle_f \operatorname{grad}_f \rho)$, vemos que $\Delta^\perp$ ser totalmente geodésica implica

$$\langle {}^f\nabla_{X_a} X_b, X_i\rangle_f = \langle X_a, X_b\rangle_f \langle \frac{\operatorname{grad}_f \rho}{\rho}, X_i\rangle_f$$

para quaisquer $i \geq p - \ell + 1$ e $1 \leq a, b \leq p - \ell$. Portanto, $\Delta^\perp$ é umbílica com respeito à métrica induzida por f com campo vetorial curvatura média igual a $(\operatorname{grad}_f \log\rho)_\Delta$.

Em seguida, mostraremos que $\Delta^\perp$ é, de fato, uma distribuição esférica, ou seja,

$$\langle {}^f\nabla_{X_i}(\operatorname{grad}_f \log\rho)_\Delta, X_j\rangle_f = 0, \quad \forall\, 1 \leq i \leq p - \ell \ \text{ e } \ p - \ell + 1 \leq j \leq n. \tag{3.2}$$

Segue da definição do tensor de Blaschke e do fato de que $X_1, \dots, X_n$ diagonalizam β e ψ que

$$\operatorname{Hess}^*\rho(X_i, X_j) = 0, \quad \forall\, 1 \leq i \leq p - \ell \ \text{ e } \ p - \ell + 1 \leq j \leq n.$$

A partir das equações

$$\nabla^*_{X_i} \operatorname{grad}^*\rho = {}^f\nabla_{X_i} \operatorname{grad}^*\rho + \frac{1}{\rho}((\operatorname{grad}^*\rho)(\rho)X_i + X_i(\rho)\operatorname{grad}^*\rho - \langle X_i, \operatorname{grad}^*\rho\rangle_f \operatorname{grad}_f \rho)$$

e $\mathrm{grad}^*\rho = \dfrac{\mathrm{grad}_f\rho}{\rho^2}$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 = \mathrm{Hess}^*\rho(X_i,X_j) &= \langle\nabla^*_{X_i}\mathrm{grad}^*\rho, X_j\rangle^* \\ &= \rho^2\langle{}^f\nabla_{X_i}\mathrm{grad}^*\rho, X_j\rangle_f \\ &= \rho^2\langle X_i(\rho^{-1})\mathrm{grad}_f\log\rho + \rho^{-1}{}^f\nabla_{X_i}\mathrm{grad}_f\log\rho, X_j\rangle_f, \end{aligned}$$

donde

$$\langle{}^f\nabla_{X_i}\mathrm{grad}_f\log\rho, X_j\rangle_f = X_i(\log\rho)X_j(\log\rho). \tag{3.3}$$

Por outro lado, como $\nabla^*_{X_i}X_j = {}^f\nabla_{X_i}X_j + \frac{1}{\rho}(X_i(\rho)X_j + X_j(\rho)X_i) \in \Gamma(\Delta)$, então

$$\begin{aligned} \langle{}^f\nabla_{X_i}(\mathrm{grad}_f\log\rho)_{\Delta^\perp}, X_j\rangle_f &= -\langle(\mathrm{grad}_f\log\rho)_{\Delta^\perp}, {}^f\nabla_{X_i}X_j\rangle_f \\ &= X_i(\log\rho)X_j(\log\rho). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Portanto, (3.2) decorre de (3.3) e (3.4). □

Primeiramente, como a forma de obter os invariantes de Moebius de f para $\ell = p-1$ e $0 \le \ell \le p-2$ diferem ligeiramente, preferimos abordar cada caso separadamente para facilitar a leitura.

Começamos com o caso em que o campo normal principal η possui multiplicidade $n-1$.

O próximo resultado classifica as imersões isométricas com fibrado normal plano e codimensão arbitrária $f: M^n \to \mathbb{R}^{n+p}$, $n \ge 3$, que têm um campo normal principal η de multiplicidade $n-1$ e cuja forma de Moebius é fechada. Em particular, generalizamos o Teorema 5.3 de (LI; MA; WANG, 2014). De acordo com o Teorema 2.5, esse resultado classifica as imersões isométricas conformemente Euclidianas com fibrado normal plano que admitem dois campos normais principais distintos e forma de Moebius fechada.

Proposição 3.2. *Seja $f: M^n \to \mathbb{R}^{n+p}$, $n \ge 3$ e $p \ge 1$, uma imersão isométrica com fibrado normal plano que possui um campo normal principal η de multiplicidade $n-1$. Se ω^f é fechada então $f(M^n)$ é a imagem por uma transformação conforme de $\mathbb{R}^{n+p}$ de um subconjunto aberto de um cilindro, de um cone generalizado ou de uma subvariedade de rotação sobre uma curva $\gamma: I \to \mathbb{Q}^{p+1}_{\tilde{c}}$, em que $\tilde{c} = 0, 1$ ou -1, respectivamente.*

Demonstração. Seja $\bar{\eta} = \beta(X_i,X_i)$ para $2 \le i \le n$ e considere as distribuições diferenciáveis

$$\Delta = \mathrm{span}\{X_i : 2 \le i \le n\} \quad \text{e} \quad \Delta^\perp = \mathrm{span}\{X_1\}.$$

Como $\mathrm{tr}\,\beta = 0$ e $||\beta||^2_* = \frac{n-1}{n}$, temos

$$\beta(X_1,X_1) + (n-1)\bar{\eta} = 0 \quad \text{e} \quad ||\beta(X_1,X_1)||^2 + (n-1)||\bar{\eta}||^2 = \frac{n-1}{n}.$$

Logo

$$||\beta(X_1,X_1)|| = \frac{n-1}{n} \quad \text{e} \quad ||\bar{\eta}|| = \frac{1}{n}.$$

Em particular,

$$\beta(X_1,X_1)=\frac{n-1}{n}\xi_1 \quad \text{e} \quad \bar{\eta}=-\frac{1}{n}\xi_1, \tag{3.5}$$

para algum campo unitário $\xi_1\in\Gamma(N_fM)$.

A equação conforme de Codazzi

$$({}^f\nabla^{\perp}_{X_j}\beta)(X_i,X_i)-({}^f\nabla^{\perp}_{X_i}\beta)(X_j,X_i)=\omega((X_j\wedge X_i)X_i),$$

para $2\leq i\neq j\leq n$, implica

$$\omega(X_j)={}^f\nabla^{\perp}_{X_j}\bar{\eta}.$$

Por outro lado, a equação

$$({}^f\nabla^{\perp}_{X_j}\beta)(X_1,X_1)-({}^f\nabla^{\perp}_{X_1}\beta)(X_j,X_1)=\omega((X_j\wedge X_1)X_1),$$

para $2\leq j\leq n$, é equivalente à

$$\omega(X_j)={}^f\nabla^{\perp}_{X_j}\beta(X_1,X_1)+\langle\nabla^*_{X_1}X_1,X_j\rangle^*(\bar{\eta}-\beta(X_1,X_1)).$$

Entretanto $\beta(X_1,X_1)=-(n-1)\bar{\eta}$, então

$${}^f\nabla^{\perp}_{X_j}\bar{\eta}=\langle\nabla^*_{X_1}X_1,X_j\rangle^*\bar{\eta}. \tag{3.6}$$

Fazendo o produto interno da expressão anterior com $\bar{\eta}$ obtemos

$$\langle\nabla^*_{X_1}X_1,X_j\rangle^*=0,$$

para $2\leq j\leq n$. Portanto, $\Delta^{\perp}$ é totalmente geodésica com respeito à métrica de Moebius.

A partir da Proposição 3.1 temos que $\Delta^{\perp}$ é uma distribuição esférica com respeito à métrica induzida por f. Como $\dim\Delta\geq 2$, a Proposição 2.4 mostra que η é um campo normal principal de Dupin, e assim, a conclusão deste resultado decorre do Teorema 2.7. □

Agora, em todo resto deste capítulo η sempre possuirá multiplicidade $n-p+\ell$, em que $0\leq\ell\leq p-2$.

Lema 3.1. *Seja $f:M^n\to\mathbb{R}^{n+p}$, $n-3\geq p\geq 2$, uma imersão isométrica conformemente Euclidiana com fibrado normal plano e cuja forma de Moebius é fechada. Então*

$$\{\beta(X_i,X_i)-\bar{\eta}:1\leq i\leq p-\ell\}$$

forma um subconjunto ortogonal de N_fM. Em particular, $\Delta^{\perp}$ é integrável.

Demonstração. A equação conforme de Gauss de f reduz-se a

$$K^*(X_k,X_r)=\langle R^*(X_k,X_r)X_r,X_k\rangle^*=\langle\beta(X_k,X_k),\beta(X_r,X_r)\rangle+\psi(X_k,X_k)+\psi(X_r,X_r) \tag{3.7}$$

para quaisquer $k \neq r \geq 1$. Como $(M^n, \langle\,,\rangle^*)$ é conformemente Euclidiana, pois $\langle\,,\rangle^* = \rho^2\langle\,,\rangle_f$ e f é conformemente Euclidiana, decorre da Proposição 2.11 que

$$K^*(X_i,X_j)+K^*(X_k,X_r)=K^*(X_i,X_k)+K^*(X_j,X_r)$$

para $k \neq r \geq p-\ell+1$ e $1 \leq i \neq j \leq p-\ell$, donde

$$\langle \beta(X_i,X_i)-\bar{\eta}, \beta(X_j,X_j)-\bar{\eta}\rangle = 0. \tag{3.8}$$

Observe que $\beta(X_i,X_i)-\bar{\eta} = \rho^{-1}(\eta_i-\eta)$, então (3.8) torna-se

$$\langle \eta_i-\eta, \eta_j-\eta\rangle = 0.$$

Usando a equação de Codazzi (2.11) concluímos que $E_{\bar{\eta}}^{\perp} = \Delta^{\perp}$ é integrável, pois $[X_i,X_j] \in \Delta^{\perp}$ para todos $1 \leq i,j \leq p-\ell$. $\square$

Proposição 3.3. *Existem um subconjunto ortonormal $\{\xi_1,\ldots,\xi_{p-\ell}\} \in \Gamma(N_fM)$ e funções $f_i \in C^\infty(M)$, $1 \leq i \leq p-\ell$, tais que $\sum_{i=1}^{p-\ell} f_i^2 = 1$ e*

$$\beta(X_i,X_i)-\bar{\eta} = f_i\xi_i. \tag{3.9}$$

Demonstração. Como $\operatorname{tr}\beta = 0$,

$$\bar{\eta} = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p-\ell}(\beta(X_i,X_i)-\bar{\eta}). \tag{3.10}$$

Tomando o produto interno de $\bar{\eta}$ com $\beta(X_j,X_j)-\bar{\eta}$ para cada $1 \leq j \leq p-\ell$ e usando (3.8) obtemos

$$||\beta(X_j,X_j)||^2+(n-2)\langle\beta(X_j,X_j),\bar{\eta}\rangle+(1-n)||\bar{\eta}||^2 = 0.$$

Logo

$$\sum_{j=1}^{p-\ell}||\beta(X_j,X_j)||^2+(n-2)\langle\sum_{j=1}^{p-\ell}\beta(X_j,X_j),\bar{\eta}\rangle+(1-n)(p-\ell)||\bar{\eta}||^2 = 0.$$

Usando que $||\beta||_*^2 = \frac{n-1}{n}$ e $\operatorname{tr}\beta = 0$, a equação anterior implica que

$$\frac{n-1}{n}-(n-p+\ell)||\bar{\eta}||^2-(n-2)(n-p+\ell)||\bar{\eta}||^2+(1-n)(p-\ell)||\bar{\eta}||^2 = 0,$$

ou seja,

$$||\bar{\eta}|| = \frac{1}{n}. \tag{3.11}$$

Decorre de (3.10) e (3.11) que

$$\sum_{i=1}^{p-\ell}||\beta(X_i,X_i)-\bar{\eta}||^2 = 1,$$

então o resultado segue do Lema 3.1. $\square$

Proposição 3.4. *Os invariantes de Moebius de $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+p}$ satisfazem:*

i.

$$
\begin{aligned}
&\beta(X_k,X_k) = \bar{\eta} = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p-\ell} f_i\xi_i, \qquad p-\ell+1 \leq k \leq n,\\
&\beta(X_i,X_i) = \frac{n-1}{n}f_i\xi_i - \frac{1}{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{p-\ell} f_j\xi_j, \quad 1 \leq i \leq p-\ell,\\
&\beta(X_k,X_r) = 0, \quad r \neq k \geq 1.
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

ii.

$$
\begin{aligned}
&\nabla^{\perp}_{X_k}\xi_i = 0, \quad p-\ell+1 \leq k \leq n \ \text{ e } \ 1 \leq i \leq p-\ell,\\
&\nu_{ij}(X_i) = \frac{f_i}{f_j}(\langle \mathrm{grad}^* \log f_j, X_i\rangle^* - \langle \delta, X_i\rangle^*), \quad 1 \leq i \neq j \leq p-\ell,\\
&\nu_{jk}(X_i) = 0, \quad 1 \leq k \neq i \neq j \neq k \leq p-\ell,
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

em que $\nu_{ij}(X) = \langle \nabla^{\perp}_X \xi_i, \xi_j\rangle$ *para* $X \in \mathfrak{X}(M)$.

iii.

$$
\begin{aligned}
&\langle \omega(X_i), \xi_i\rangle = -\frac{1}{n}(X_i(f_i) - f_i\sum_{\substack{r=1\\ r\neq i}}^{p-\ell} X_i(\log f_r)) + \frac{n-(p-\ell-1)}{n}f_i\langle \delta, X_i\rangle^*,\\
&\langle \omega(X_i), \xi_j\rangle = -\frac{1}{n}\left(\left(\frac{f_j^2+f_i^2}{f_j^2}\right)X_i(f_j) - \frac{f_i^2}{f_j}\langle \delta, X_i\rangle^*\right),\\
&\langle \omega(X_k), \xi_i\rangle = -\frac{1}{n}X_k(f_i), \quad 1 \leq i \neq j \leq p-\ell \quad \text{e} \quad p-\ell+1 \leq k \leq n,
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

em que δ é o campo curvatura média de Δ com respeito à $\langle\, ,\rangle^*$ e $f_1, \ldots f_{p-\ell} \in C^\infty(M)$ e $\xi_1, \ldots, \xi_{p-\ell} \in \Gamma(N_fM)$ são dados pela Proposição 3.3.

Demonstração. As equações em (3.12) decorrem de (3.9) e (3.10).

Por um lado, substituindo (3.12) na equação conforme de Codazzi

$$
\begin{aligned}
\omega(X_i) &= (\nabla^{\perp}_{X_i}\beta)(X_k,X_k) - (\nabla^{\perp}_{X_k}\beta)(X_i,X_k)\\
&= \nabla^{\perp}_{X_i}\bar{\eta} + \langle \nabla^*_{X_k}X_k, X_i\rangle^*(\beta(X_i,X_i) - \bar{\eta})
\end{aligned}
$$

para $1 \leq i \leq p-\ell$ e $p-\ell+1 \leq k \leq n$, temos

$$
\omega(X_i) = -\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{p-\ell}(X_i(f_r)\xi_r + f_r\nabla^{\perp}_{X_i}\xi_r) + \langle \delta, X_i\rangle^* f_i\xi_i,
$$

logo

$$\begin{cases} \langle \omega(X_i), \xi_i \rangle = -\frac{1}{n}(X_i(f_i) + \sum_{\substack{r=1 \\ r\neq i}}^{p-\ell} f_r \nu_{ri}(X_i)) + f_i \langle \delta, X_i \rangle^*, \\ \langle \omega(X_i), \xi_j \rangle = -\frac{1}{n}(X_i(f_j) + \sum_{\substack{r=1 \\ r\neq j}}^{p-\ell} f_r \nu_{rj}(X_i)), \quad i \neq j. \end{cases} \tag{3.15}$$

Por outro lado, substituindo (3.12) na equação conforme de Codazzi

$$\begin{aligned} \omega(X_i) &= (\nabla^\perp_{X_i}\beta)(X_j, X_j) - (\nabla^\perp_{X_j}\beta)(X_i, X_j) \\ &= \nabla^\perp_{X_i}\beta(X_j, X_j) + \langle \nabla^*_{X_j} X_j, X_i \rangle^* (\beta(X_i, X_i) - \beta(X_j, X_j)) \end{aligned}$$

para $1 \leq i \neq j \leq p - \ell$, temos

$$\omega(X_i) = -\frac{1}{n}(\sum_{\substack{r=1 \\ r\neq j}}^{p-\ell} X_i(f_r)\xi_r + \sum_{r=1}^{p-\ell} f_r \nabla^\perp_{X_i}\xi_r) + \frac{n-1}{n} X_i(f_j)\xi_j + f_j \nabla^\perp_{X_i}\xi_j + \langle \nabla^*_{X_j} X_j, X_i \rangle^* (f_i\xi_i - f_j\xi_j),$$

logo

$$\begin{cases} \langle \omega(X_i), \xi_i \rangle = -\frac{1}{n}(X_i(f_i) - n f_j \nu_{ji}(X_i) + \sum_{\substack{r=1 \\ r\neq i}}^{p-\ell} f_r \nu_{ri}(X_i)) + f_i \langle \nabla^*_{X_j} X_j, X_i \rangle^*, \\ \langle \omega(X_i), \xi_j \rangle = \frac{1}{n}((n-1) X_i(f_j) - \sum_{\substack{r=1 \\ r\neq j}}^{p-\ell} f_r \nu_{rj}(X_i)) - f_j \langle \nabla^*_{X_j} X_j, X_i \rangle^*, \\ \langle \omega(X_i), \xi_k \rangle = -\frac{1}{n}(X_i(f_k) + \sum_{\substack{r=1 \\ r\neq k}}^{p-\ell} f_r \nu_{rk}(X_i)) + f_j \nu_{jk}(X_i), \end{cases} \tag{3.16}$$

para quaisquer $1 \leq k \neq i \neq j \neq k \leq p - \ell$.

Comparando as expressões em (3.15) e (3.16) obtemos

$$\langle \nabla^*_{X_j} X_j, X_i \rangle^* = \langle \operatorname{grad}^* \log f_j, X_i \rangle^*, \tag{3.17}$$

$$\nu_{ij}(X_i) = \frac{f_i}{f_j}(\langle \nabla^*_{X_j} X_j, X_i \rangle^* - \langle \delta, X_i \rangle^*), \tag{3.18}$$

$$\nu_{jk}(X_i) = 0, \tag{3.19}$$

para quaisquer $1 \leq k \neq i \neq j \neq k \leq p - \ell$.

Observe que a equação conforme de Codazzi

$$(\nabla^\perp_{X_k}\beta)(X_r, X_k) - (\nabla^\perp_{X_r}\beta)(X_k, X_k) = \omega((X_k \wedge X_r) X_k),$$

para $p - \ell + 1 \leq k \neq r \leq n$, implica

$$\omega(X_r) = \nabla^\perp_{X_r} \bar{\eta}. \tag{3.20}$$

Agora,

$$(\nabla^\perp_{X_k}\beta)(X_i, X_i) - (\nabla^\perp_{X_i}\beta)(X_k, X_i) = \omega((X_k \wedge X_i) X_i) = \nabla^\perp_{X_k} \bar{\eta},$$

para $p - \ell + 1 \leq k \leq n$ e $1 \leq i \leq p - \ell$, implica

$$\nabla^\perp_{X_k}(\beta(X_i, X_i) - \bar{\eta}) = \langle \nabla^*_{X_i} X_i, X_k \rangle^* (\beta(X_i, X_i) - \bar{\eta}) \iff \nabla^\perp_{X_k}(f_i \xi_i) = \langle \nabla^*_{X_i} X_i, X_k \rangle^* f_i \xi_i.$$

Então

$$\langle \nabla^*_{X_i} X_i, X_k \rangle^* = \langle \text{grad}^* \log f_i, X_k \rangle^* \quad \text{e} \quad \nabla^\perp_{X_k} \xi_i = 0, \tag{3.21}$$

para quaisquer $p-\ell+1 \leq k \leq n$ e $1 \leq i \leq p-\ell$.

Assim, a partir de (3.18), (3.19) e (3.21), concluímos que a conexão normal $\nabla^\perp$ satisfaz (3.13).

Substituindo (3.13) em (3.15) e (3.20), obtemos (3.14). □

Proposição 3.5. *A distribuição $\Delta^\perp$ é totalmente geodésica com respeito à $\langle\,,\,\rangle^*$ se e somente se $(grad^* f_i)_\Delta = 0$ para todo $i = 1,\ldots,p-\ell$.*

Demonstração. Aplicando a equação conforme de Codazzi,

$$(\nabla^\perp_{X_i}\beta)(X_j,X_k) = (\nabla^\perp_{X_j}\beta)(X_i,X_k)$$

para $1 \leq i \neq j \leq p-\ell$ e $p-\ell+1 \leq k \leq n$, temos

$$\langle \nabla^*_{X_i} X_j, X_k \rangle^* f_j \xi_j = \langle \nabla^*_{X_j} X_i, X_k \rangle^* f_i \xi_i$$

Como ξ_i, ξ_j são linearmente independentes e f_i, f_j são funções não nulas (pois $\beta(X_i,X_i)$, $1 \leq i \leq p-\ell$, são campos normais principais de Moebius simples), então

$$(\nabla^*_{X_i} X_j)_\Delta = 0 = (\nabla^*_{X_j} X_i)_\Delta. \tag{3.22}$$

Portanto, a partir de (3.21) e (3.22), concluímos que $\Delta^\perp$ é totalmente geodésica com respeito à $\langle\,,\,\rangle^*$ se e somente se $(\text{grad}^* f_i)_\Delta = 0$ para todo $i = 1,\ldots,p-\ell$. □

Finalizamos este capítulo apresentando um forma de decompor a variedade Riemanniana $(M^n, \langle\,,\,\rangle^*)$ associada a $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+p}$, $n \geq 5$ e $p \geq 2$, em termos de um produto twisted.

Corolário 3.1. *A rede ortogonal $\mathscr{E} = \{span\{X_1\},\ldots,span\{X_{p-\ell}\},\Delta\}$ em $(M^n, \langle\,,\,\rangle^*)$ é uma TP-rede. Em particular, $(M^n, \langle\,,\,\rangle^*)$ é localmente um produto twisted.*

Demonstração. Observe, a partir de (3.17) e (3.21), que

$$\nabla^*_{X_i} X_i = \text{grad}^* \log f_i - \langle \text{grad}^* \log f_i, X_i \rangle^* X_i, \quad 1 \leq i \leq p-\ell.$$

Logo

$$\langle \nabla^*_{X_i} X_i, X_k \rangle^* = \langle \text{grad}^* \log f_i, X_k \rangle^* = -\langle \text{grad}^* \log f_i^{-1}, X_k \rangle^*,$$

para qualquer $1 \leq k \leq n$ com $k \neq i$. Portanto, $\text{span}\{X_i\}$ é uma distribuição umbílica em $(M^n, \langle\,,\,\rangle^*)$ com campo curvatura média

$$-(\text{grad}^* \log f_i^{-1})_{(\text{span}\{X_i\})^\perp},$$

para todo $1 \leq i \leq p-\ell$.

Decorre do Lema 3.1 que $\Delta^{\perp}$ é integrável.

Afirmamos que $(\mathrm{span}\{X_i\})^{\perp}$ é integrável para qualquer $1 \leq i \leq p-\ell$.

De fato, como Δ é umbílica, temos que $[X_j, X_k] \in \Delta \subset (\mathrm{span}\{X_i\})^{\perp}$ para $p-\ell+1 \leq j,k \leq n$.

Por outro lado, dados $1 \leq j \leq p-\ell$ e $p-\ell+1 \leq k \leq n$, com $j \neq i$, segue de (3.22) e do fato de que

$$(\nabla^{\perp}_{X_i}\beta)(X_k, X_j) = (\nabla^{\perp}_{X_k}\beta)(X_i, X_j) \Longleftrightarrow \langle \nabla^{*}_{X_k} X_j, X_i \rangle^{*} (\beta(X_i, X_i) - \beta(X_j, X_j)) = 0$$

que $[X_j, X_k] \in (\mathrm{span}\{X_i\})^{\perp}$.

Suponhamos, agora, que $p-\ell \geq 3$ e sejam $1 \leq k \neq j \neq i \neq k \leq p-\ell$. Desenvolvendo a equação conforme de Codazzi

$$(\nabla^{\perp}_{X_k}\beta)(X_j, X_i) = (\nabla^{\perp}_{X_j}\beta)(X_k, X_i)$$

obtemos

$$\langle \nabla^{*}_{X_k} X_i, X_j \rangle^{*} (\beta(X_j, X_j) - \beta(X_i, X_i)) = \langle \nabla^{*}_{X_j} X_i, X_k \rangle^{*} (\beta(X_k, X_k) - \beta(X_i, X_i)),$$

que é equivalente à

$$\langle \nabla^{*}_{X_k} X_i, X_j \rangle^{*} (f_j \xi_j - f_i \xi_i) = \langle \nabla^{*}_{X_j} X_i, X_k \rangle^{*} (f_k \xi_k - f_i \xi_i).$$

Entretanto, esta expressão implica que

$$\langle \nabla^{*}_{X_j} X_k, X_i \rangle^{*} = 0 = \langle \nabla^{*}_{X_k} X_j, X_i \rangle^{*}.$$

Isto conclui a demonstração de nossa afirmação.

A última afirmação deste resultado decorre do Teorema 2.1. $\square$

CAPÍTULO

4

SUBVARIEDADES COM CURVATURA DE MOEBIUS CONSTANTE

O objetivo deste capítulo é apresentar uma demonstração do principal resultado obtido nesta tese, o qual consiste em classificar as imersões isométricas $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+p}$, com $n \geq 5$ e $p = 2$, ou $n \geq 6$ e $2p \leq n$, próprias, que possuem curvatura de Moebius constante c e fibrado normal plano.

Observamos que a hipótese de que $(M^n, \langle\,,\,\rangle^*)$ possui curvatura de Moebius constante implica que $(M^n, \langle\,,\,\rangle_f)$ é conformemente Euclidiana, uma vez que $\langle\,,\,\rangle_f$ e $\langle\,,\,\rangle^*$ são métricas conformes em M^n. Por um lado, as hipóteses sobre a dimensão de M^n e a codimensão de $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+p}$ implicam que $n-3 \geq p$. Assim, o Teorema 2.4 pode ser aplicado, e garante a existência de um campo normal principal η com multiplicidade $n-p+\ell$, para algum $0 \leq \ell \leq p-1$. Por outro lado, segue do Teorema 2.5 que os demais campos normais principais de f são todos simples. Finalmente, mostraremos que a forma de Moebius de uma imersão isométrica $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+p}$ com curvatura de Moebius constante e fibrado normal plano é fechada. Isto nos permitirá utilizar para f as expressões obtidas no capítulo anterior para os invariantes de Moebius de uma imersão isométrica conformemente Euclidiana com fibrado normal plano e forma de Moebius fechada.

Apresentaremos inicialmente exemplos de imersões isométricas conformemente Euclidianas $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+p}$, $n-3 \geq p \geq 1$, que possuem um campo normal principal η com multiplicidade $n-p+\ell$, em que $0 \leq \ell \leq p-1$, as quais são construídas a partir de uma imersão isométrica $g : M_{\tilde{c}}^{p-\ell} \to \mathbb{Q}_{\tilde{c}}^{2p-\ell}$ com fibrado normal plano e curvatura seccional constante $\tilde{c}$. Em seguida, estabeleceremos certas condições sobre o campo curvatura média $\mathscr{H}^g$ de g para que f possua curvatura de Moebius constante c. A observação seguinte será útil no entendimento de tais exemplos.

Observação 4.1. Seja $g : M_{\tilde{c}}^{p-\ell} \to \mathbb{Q}_{\tilde{c}}^{2p-\ell}$, $0 \leq \ell \leq p-1$, uma imersão isométrica com fibrado normal plano e $\nu^g \equiv 0$ em $M^{p-\ell}$. A Proposição 2.5 mostra que g admite $p-\ell$ campos normais principais não nulos e distintos $\eta_1,\dots,\eta_{p-\ell}$, os quais são dois a dois ortogonais. Observamos ainda que, no caso em que $\ell = p-1$, g é uma curva $\gamma\colon I \to \mathbb{Q}_{\tilde{c}}^{p+1}$ parametrizada pelo comprimento de arco, e portanto $||\mathscr{H}^{\gamma}||$ representa o módulo da (primeira) função curvatura κ de γ. O fato de que os próximos três exemplos são subvariedades conformemente Euclidianas é consequência da Proposição 2.10.

Exemplo 4.1. Seja $g : M^{p-\ell} \to \mathbb{R}^{2p-\ell}$, $0 \le \ell \le p-1$, uma imersão isométrica com $R^{\perp} \equiv 0$, $\nu^g \equiv 0$ e cuja métrica induzida ds^2 possui curvatura constante nula. O cilindro em $\mathbb{R}^{2p-\ell}$ sobre g é a imersão dada por

$$f = g \times \mathrm{Id} : M^{p-\ell} \times \mathbb{R}^{n-p+\ell} \to \mathbb{R}^{2p-\ell} \times \mathbb{R}^{n-p+\ell} = \mathbb{R}^{n+p},$$

em que $\mathrm{Id} : \mathbb{R}^{n-p+\ell} \to \mathbb{R}^{n-p+\ell}$ é a aplicação identidade.

Decorre da Observação 4.1 que existe um referencial ortonormal $\{X_i\}_{i=1}^{p-\ell}$ de $(M^{p-\ell}, ds^2)$ tal que

$$\alpha^g(X_i, X_j) = \delta_{ij}\eta_i, \quad 1 \le i, j \le p-\ell.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\rho^2 = \frac{n}{n-1}(||\alpha^f||^2 - n||\mathscr{H}^f||^2) &= \frac{n}{n-1}(||\alpha^g||^2 - \frac{1}{n}||\alpha^g||^2)\\ &= ||\alpha^g||^2\\ &= (p-\ell)^2||\mathscr{H}^g||^2.\end{aligned}$$

Como a métrica induzida por f é dada por

$$\langle\,,\rangle_f = ds^2 + du_{p-\ell+1}^2 + \ldots + du_n^2,$$

em que $(u_{p-\ell+1}, \dots, u_n)$ são as coordenadas canônicas de $\mathbb{R}^{n-p+\ell}$, a métrica de Moebius determinada por f é dada por

$$\langle\,,\rangle^* = (p-\ell)^2||\mathscr{H}^g||^2(ds^2 + du_{p-\ell+1}^2 + \ldots + du_n^2).$$

Exemplo 4.2. Seja $g : M^{p-\ell} \to \mathbb{S}^{2p-\ell}$, $0 \le \ell \le p-1$, uma imersão isométrica com $R^{\perp} \equiv 0$, $\nu^g \equiv 0$ e cuja métrica induzida ds^2 possui curvatura constante 1. O cone generalizado em $\mathbb{R}^{n+p}$ sobre g é a imersão $f : M^{p-\ell} \times \mathbb{H}^{n-p+\ell} \to \mathbb{R}^{n+p}$ dada por

$$f(x,z) = \Theta \circ (g, \mathrm{Id})(x,z) = (z_1 g(x), z_2, \dots, z_{n-p+\ell}),$$

em que $\mathbb{H}^{n-p+\ell} = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-p+\ell-1}$ é munido da métrica hiperbólica

$$dz^2 = \frac{1}{z_1^2}(dz_1^2 + \ldots + dz_{n-p+\ell}^2),$$

$Id : \mathbb{H}^{n-p+\ell} \to \mathbb{H}^{n-p+\ell}$ é a aplicação identidade e $\Theta : \mathbb{S}^{2p-\ell} \times \mathbb{H}^{n-p+\ell} \to \mathbb{R}^{n+p}$ é o difeomorfismo conforme dado por

$$\Theta(y,z) = (z_1 y, z_2, \ldots, z_{n-p+\ell}),$$

cujo fator conforme é z_1.

A métrica induzida por f é

$$\langle , \rangle_f = z_1^2(ds^2 + dz^2).$$

Decorre da Observação 4.1 que

$$\alpha^g(X_i, X_j) = \delta_{ij}\eta_i, \quad 1 \le i,j \le p-\ell,$$

em que $\{X_i\}_{i=1}^{p-\ell}$ é um referencial ortonormal de $(M^{p-\ell}, ds^2)$.

A segunda forma fundamental de f é dada por

$$\alpha^f\left(\frac{X_i}{z_1}, \frac{X_j}{z_1}\right) = \frac{1}{z_1}\alpha^g(X_i, X_j), \quad \alpha^f\left(\frac{d}{dz_1}, \frac{d}{dz_1}\right) = 0 = \alpha^f(\frac{d}{dz_1}, \frac{X_i}{z_1}).$$

Então

$$\begin{aligned}
\rho^2 &= \frac{n}{n-1}(||\alpha^f||^2 - n||\mathscr{H}^f||^2) \\
&= \frac{n}{n-1}(\sum_{i=1}^{p-\ell} ||\alpha^f(\frac{X_i}{z_1}, \frac{X_i}{z_1})||^2 - n||\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p-\ell} \alpha^f(\frac{X_i}{z_1}, \frac{X_i}{z_1})||^2) \\
&= \frac{n}{n-1}(\frac{1}{z_1^2}\sum_{i=1}^{p-\ell} ||\alpha^g(X_i, X_i)||^2 - \frac{1}{n}||\frac{1}{z_1}\sum_{i=1}^{p-\ell} \alpha^g(X_i, X_i)||^2) \\
&= \frac{1}{z_1^2}\frac{n}{n-1}(\sum_{i=1}^{p-\ell} ||\alpha^g(X_i, X_i)||^2 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p-\ell} ||\alpha^g(X_i, X_i)||^2) \\
&= \frac{1}{z_1^2}\sum_{i=1}^{p-\ell} ||\alpha^g(X_i, X_i)||^2 = \frac{1}{z_1^2}(p-\ell)^2||\mathscr{H}^g||^2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\rho = \frac{(p-\ell)||\mathscr{H}^g||}{z_1}.$$

Assim, a métrica de Moebius determinada por f é

$$\langle , \rangle^* = (p-\ell)^2||\mathscr{H}^g||^2(ds^2 + dz^2).$$

Exemplo 4.3. Seja $g : M^{p-\ell} \to \mathbb{H}^{2p-\ell}$, $0 \le \ell \le p-1$, uma imersão isométrica com $R^\perp \equiv 0$, $\nu^g \equiv 0$ e cuja métrica induzida ds^2 possui curvatura constante -1, em que

$$\mathbb{H}^{2p-\ell} = \{(z_1, \ldots, z_{2p-\ell}) : z_{2p-\ell} > 0\}$$

é munido da métrica hiperbólica

$$dz^2 = \frac{1}{z_{2p-\ell}^2}(dz_1^2 + \ldots + dz_{2p-\ell}^2).$$

A subvariedade de rotação sobre g é a imersão $f : M^{p-\ell} \times \mathbb{S}^{n-p+\ell} \to \mathbb{R}^{n+p}$ definida por

$$f(x,y) = \Theta \circ (g, \mathrm{Id})(x,y) = (g_1(x), \ldots, g_{2p-\ell-1}(x), g_{2p-\ell}(x)y),$$

em que $\mathrm{Id} : \mathbb{S}^{n-p+\ell} \to \mathbb{S}^{n-p+\ell}$ é a aplicação identidade e $\Theta : \mathbb{H}^{2p-\ell} \times \mathbb{S}^{n-p+\ell} \to \mathbb{R}^{n+p}$ é o difeomorfismo conforme dado por

$$\Theta(z,y) = (z_1, \ldots, z_{2p-\ell-1}, z_{2p-\ell}y),$$

cujo fator conforme é $z_{2p-\ell}$.

A métrica induzida por f é

$$\langle , \rangle_f = g_{2p-\ell}^2 (ds^2 + dy^2),$$

em que dy^2 é a métrica canônica de $\mathbb{S}^{n-p+\ell}$.

Decorre da Observação 4.1 que

$$\alpha^g(X_i, X_j) = \delta_{ij}\eta_i, \quad 1 \le i, j \le p-\ell,$$

em que $\{X_i\}_{i=1}^{p-\ell}$ é um referencial ortonormal de $(M^{p-\ell}, ds^2)$.

As segundas formas fundamentais de f e g relacionam-se por (ver por exemplo (2.31) e o Exercício 1.6 de (DAJCZER; TOJEIRO, 2019))

$$\alpha^f = \Theta_* \alpha^g - \frac{1}{g_{2p-\ell}} \Theta_*((\mathrm{grad}\, z_{2p-\ell}) \circ g)^\perp (ds^2 + dy^2),$$

em que grad é calculado com respeito à dz^2. Logo

$$\alpha^f\left(\frac{X_i}{g_{2p-\ell}}, \frac{X_j}{g_{2p-\ell}}\right) = \begin{cases} \Theta_*\alpha^g\left(\frac{X_i}{g_{2p-\ell}}, \frac{X_i}{g_{2p-\ell}}\right) - \frac{1}{g_{2p-\ell}^3}\Theta_*((\mathrm{grad}\, z_{2p-\ell}) \circ g)^\perp, & i = j, \\ 0, \quad i \neq j, \end{cases}$$

$$\alpha^f\left(\frac{1}{g_{2p-\ell}}\frac{\partial}{\partial y_k}, \frac{1}{g_{2p-\ell}}\frac{\partial}{\partial y_r}\right) = \begin{cases} -\frac{1}{g_{2p-\ell}^3}\Theta_*((\mathrm{grad}\, z_{2p-\ell}) \circ g)^\perp, & k = r, \\ 0, \quad k \neq r. \end{cases}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} ||\alpha^f||^2 &= \sum_{i=1}^{p-\ell} ||\alpha^f\left(\frac{X_i}{g_{2p-\ell}}, \frac{X_i}{g_{2p-\ell}}\right)||^2 + \sum_{i=p-\ell+1}^{n} ||\alpha^f\left(\frac{1}{g_{2p-\ell}}\frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{1}{g_{2p-\ell}}\frac{\partial}{\partial y_i}\right)||^2 \\ &= \sum_{i=1}^{p-\ell} ||\alpha^g\left(\frac{X_i}{g_{2p-\ell}}, \frac{X_i}{g_{2p-\ell}}\right) - \frac{1}{g_{2p-\ell}^3}((\mathrm{grad}\, z_{2p-\ell}) \circ g)^\perp||_\Theta^2 + \sum_{i=p-\ell+1}^{n} ||\frac{1}{g_{2p-\ell}^3}((\mathrm{grad}\, z_{2p-\ell}) \circ g)^\perp||_\Theta^2 \\ &= \frac{1}{g_{2p-\ell}^4} \sum_{i=1}^{p-\ell} ||\alpha^g(X_i, X_i)||_\Theta^2 - \frac{2}{g_{2p-\ell}^5} \sum_{i=1}^{p-\ell} \langle \alpha^g(X_i, X_i), ((\mathrm{grad}\, z_{2p-\ell}) \circ g)^\perp \rangle_\Theta \\ &+ \frac{n}{g_{2p-\ell}^6} ||((\mathrm{grad}\, z_{2p-\ell}) \circ g)^\perp||_\Theta^2 \end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
||\mathscr{H}^f||^2 &= ||\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p-\ell}\alpha^g(\frac{X_i}{g_{2p-\ell}},\frac{X_i}{g_{2p-\ell}}) - \frac{1}{g_{2p-\ell}^3}((\operatorname{grad} z_{2p-\ell})\circ g)^\perp||_\Theta^2 \\
&= \frac{1}{n^2}\frac{1}{g_{2p-\ell}^4}\sum_{i=1}^{p-\ell}||\alpha^g(X_i,X_i)||_\Theta^2 - \frac{2}{ng_{2p-\ell}^5}\sum_{i=1}^{p-\ell}\langle\alpha^g(X_i,X_i),((\operatorname{grad} z_{2p-\ell})\circ g)^\perp\rangle_\Theta \\
&+ \frac{1}{g_{2p-\ell}^6}||((\operatorname{grad} z_{2p-\ell})\circ g)^\perp||_\Theta^2.
\end{aligned}
$$

Então

$$
\begin{aligned}
\rho^2 = \frac{n}{n-1}(||\alpha^f||^2 - n||\mathscr{H}^f||^2) &= \frac{1}{g_{2p-\ell}^4}\frac{n}{n-1}(\sum_{i=1}^{p-\ell}||\alpha^g(X_i,X_i)||_\Theta^2 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p-\ell}||\alpha^g(X_i,X_i)||_\Theta^2) \\
&= \frac{1}{g_{2p-\ell}^4}\sum_{i=1}^{p-\ell}||\alpha^g(X_i,X_i)||_\Theta^2 \\
&= \frac{1}{g_{2p-l}^2}\sum_{i=1}^{p-\ell}||\alpha^g(X_i,X_i)||_{dz^2}^2 = \frac{(p-\ell)^2||\mathscr{H}^g||_{dz^2}^2}{g_{2p-\ell}^2}.
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
\rho = \frac{(p-\ell)||\mathscr{H}^g||_{dz^2}}{g_{2p-\ell}}.
$$

Assim, a métrica de Moebius determinada por f é dada por

$$
\langle\,,\rangle^* = (p-\ell)^2||\mathscr{H}^g||_{dz^2}^2(ds^2+dy^2).
$$

Lema 4.1. A métrica de Moebius $\langle\,,\rangle^* = \kappa^2(ds^2+\sigma_{-\tilde{c}})$ da imersão isométrica $f: I\times\mathbb{Q}_{-\tilde{c}}^{n-1}\to\mathbb{R}^{n+p}$ dada por

$$
f = \Theta\circ(\gamma,\mathrm{Id}),
$$

em que $\sigma_{-\tilde{c}}$ denota a métrica canônica de $\mathbb{Q}_{-\tilde{c}}^{n-1}$, $\gamma: I\to\mathbb{Q}_{\tilde{c}}^{p+1}$ e $\Theta=\mathrm{Id}:\mathbb{R}^{n+p}\to\mathbb{R}^{n+p}$ se $\tilde{c}=0$ ou Θ é como nos Exemplos 4.2 e 4.3 se $\tilde{c}\neq 0$, possui curvatura de Moebius constante c se e somente se a (primeira) função curvatura $\kappa(s)$ é dada respectivamente por

$$
\kappa(s) = \begin{cases} \frac{1}{r}, & c=0 \text{ e } s\in\mathbb{R}, \\ \frac{1}{\sqrt{-c}s}, & c<0 \text{ e } s>0, \end{cases}
$$

$$
\kappa(s) = \frac{1}{\sqrt{-c}\sin s},\ c<0 \text{ e } s\in(0,\pi),
$$

e

$$
\kappa(s) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{c}\cosh s}, & c>0 \text{ e } s\in\mathbb{R}, \\ \frac{1}{\sqrt{-c}\sinh s}, & c<0 \text{ e } s>0, \\ e^s, & c=0 \text{ e } s\in\mathbb{R}. \end{cases}
$$

Demonstração. Note que

$$\operatorname{grad}\ln\kappa = \frac{\kappa_s}{\kappa}\frac{d}{ds} \quad \text{e} \quad Q(X_i,X_i)=0,\ \ i\geq 2,$$

em que $X_2,\ldots,X_n$ é um referencial ortonormal de $\mathbb{Q}^{n-1}_{-\tilde{c}}$. A partir da Proposição 2.9 obtemos

$$K^*(X_i,X_j) = \frac{1}{\kappa^2}(-\tilde{c}-\frac{\kappa_s^2}{\kappa^2}) = -\tilde{c}\frac{1}{\kappa^2}-\left[\frac{d}{ds}\frac{1}{\kappa}\right]^2.$$

Observando que

$$\begin{aligned} Q(\frac{d}{ds},\frac{d}{ds}) = \langle\nabla_{\frac{d}{ds}}\operatorname{grad}\ln\kappa,\frac{d}{ds}\rangle-\frac{\kappa_s^2}{\kappa^2} &= \frac{d}{ds}(\frac{\kappa_s}{\kappa})-\frac{\kappa_s^2}{\kappa^2}\\ &= \frac{\kappa_{ss}\kappa-2\kappa_s^2}{\kappa^2}, \end{aligned}$$

decorre da Proposição 2.9 que

$$K^*(\frac{d}{ds},X_i) = \frac{1}{\kappa^2}(-\frac{\kappa_s^2}{\kappa^2}-\frac{\kappa_{ss}\kappa-2\kappa_s^2}{\kappa^2}) = \frac{1}{\kappa^2}(-\frac{\kappa_{ss}}{\kappa}+\frac{\kappa_s^2}{\kappa^2}).$$

Logo $\langle\,,\rangle^*$ possui curvatura seccional constante c se e somente se

$$K^*(X_i,X_j) = c = K^*(\frac{d}{ds},X_i),\ \ i\neq j\geq 2,$$

ou seja

$$\frac{\kappa_s^2}{\kappa^4}-c = \frac{\kappa_{ss}}{\kappa^3} = 2\frac{\kappa_s^2}{\kappa^4}+\tilde{c}\frac{1}{\kappa^2},$$

que é equivalente à

$$\left[\frac{d}{ds}\frac{1}{\kappa}\right]^2+\tilde{c}\frac{1}{\kappa^2} = -c. \tag{4.1}$$

A seguir obtemos a solução de (4.1) para os diferentes valores de $\tilde{c}$.

1. Caso $\tilde{c}=0$:

   Neste caso, $\left[\frac{d}{ds}\frac{1}{\kappa}\right]^2=-c$; em particular, $c\leq 0$.

   Se $c=0$, então $\frac{d}{ds}\frac{1}{\kappa}=0$, logo $\kappa(s)=\frac{1}{r}\neq 0$, com $r>0$, $\forall s\in I$.

   Se $c<0$, então $\frac{d}{ds}\frac{1}{\kappa}=\pm\sqrt{-c}$. Logo $\kappa(s)=\frac{1}{\sqrt{-c}s}$ para $s>0$.

2. Caso $\tilde{c}=1$:

   Temos $-\left[\frac{d}{ds}\frac{1}{\kappa}\right]^2-\frac{1}{\kappa^2}=c$, donde $c<0$. Esta equação diferencial é equivalente à

   $$\left[\frac{1}{\sqrt{-c}}\frac{d}{ds}\frac{1}{\kappa}\right]^2+\left[\frac{1}{\sqrt{-c}\kappa}\right]^2=1.$$

   Então $\kappa(s)=\frac{1}{\sqrt{-c}\sin s}$ para $s\in(0,\pi)$.

3. Caso $\tilde{c} = -1$:

   Neste caso, $-\left[\frac{d}{ds}\frac{1}{\kappa}\right]^2 + \frac{1}{\kappa^2} = c$, a qual é equivalente à

$$\begin{cases} -\left[\frac{1}{\sqrt{c}}\frac{d}{ds}\frac{1}{\kappa}\right]^2 + \left[\frac{1}{\sqrt{c}\kappa}\right]^2 = 1, & c > 0, \\ \left[\frac{1}{\sqrt{-c}}\frac{d}{ds}\frac{1}{\kappa}\right]^2 - \left[\frac{1}{\sqrt{-c}\kappa}\right]^2 = 1, & c < 0, \\ \frac{d}{ds}\kappa = \kappa, & c = 0. \end{cases}$$

   Portanto, $\kappa(s) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{c}\cosh s}, & c > 0 \text{ e } s \in \mathbb{R}, \\ \frac{1}{\sqrt{-c}\sinh s}, & c < 0 \text{ e } s > 0, \\ e^s, & c = 0 \text{ e } s \in \mathbb{R}. \end{cases}$

□

Lema 4.2. *Seja $g : M^{p-\ell} \to \mathbb{Q}_{\tilde{c}}^{2p-\ell}$, $0 \leq \ell \leq p-2$, uma imersão isométrica com $R^\perp \equiv 0$ e $\nu^g \equiv 0$. Então a imersão $f = \Theta \circ (g, Id) : M^{p-\ell} \times \mathbb{Q}_{-\tilde{c}}^{n-p+\ell} \to \mathbb{R}^{n+p}$, em que $\Theta = Id : \mathbb{R}^{n+p} \to \mathbb{R}^{n+p}$ se $\tilde{c} = 0$ ou Θ é como nos Exemplos 4.2 e 4.3 se $\tilde{c} \neq 0$, possui curvatura de Moebius constante c se e somente se a métrica induzida ds^2 por g possui curvatura constante $\tilde{c}$ e*

$$Hess\,(1/||\mathscr{H}^g||) + \tilde{c}(1/||\mathscr{H}^g||)ds^2 = 0 \quad e \quad ||grad\,(1/||\mathscr{H}^g||)||^2 + \tilde{c}(1/||\mathscr{H}^g||^2) = -(p-\ell)^2 c, \tag{4.2}$$

em que grad, Hess e $||\cdot||$ são calculados com respeito à ds^2.

Demonstração. Começamos provando a contrapositiva. Suponha que $(M^{p-\ell}, ds^2)$ possui curvatura constante $\tilde{c}$. Então, dos Exemplos 4.1, 4.2 e 4.3, a métrica de Moebius determinada por f é dada por

$$\langle\,,\rangle^* = (p-\ell)^2||\mathscr{H}^g||^2(ds^2 + \sigma_{-\tilde{c}}), \tag{4.3}$$

em que $\sigma_{-\tilde{c}}$ é a métrica de $\mathbb{Q}_{-\tilde{c}}^{n-p+\ell}$.

Denote

$$\langle\,,\rangle^* = g_1 + \mu^2 g_2,$$

em que $\mu = (p-\ell)||\mathscr{H}^g||$, $g_1 = \mu^2 ds^2$ e $g_2 = \sigma_{-\tilde{c}}$. Decorre da Proposição 2.9 que

$$K_1(X_i, X_j) = \mu^{-2}(\tilde{c} - Q(X_i, X_i) - Q(X_j, X_j) - ||\text{grad}\log\mu||^2) \quad 1 \leq i \neq j \leq p-\ell,$$

em que K_1 denota a curvatura seccional de g_1.

De (4.2) temos

$$\text{Hess}\,(1/\mu) + \tilde{c}(1/\mu)ds^2 = 0 \quad \text{e} \quad ||\text{grad}\,(1/\mu)||^2 + \tilde{c}(1/\mu^2) = -c,$$

que por sua vez são equivalentes ao par de equações

$$\text{Hess}\,\mu(X,Y) - 2\mu^{-1}X(\mu)Y(\mu) - \tilde{c}\mu ds^2(X,Y) = 0 \quad \text{e} \quad ||\text{grad}\,\mu||^2 + c\mu^4 = -\tilde{c}\mu^2, \tag{4.4}$$

na métrica ds^2. Logo

$$\text{Hess}\log\mu(X,Y) = \frac{\text{Hess}\,\mu(X,Y)}{\mu} - \frac{X(\mu)Y(\mu)}{\mu^2} = \mu^{-2}X(\mu)Y(\mu) + \tilde{c}ds^2(X,Y),$$

e então

$$Q(X_i,X_i) = \tilde{c}, \quad \forall\ 1 \leq i \leq p-\ell.$$

Assim

$$K_1(X_i,X_j) = c, \quad 1 \leq i \neq j \leq p-\ell. \tag{4.5}$$

Como as equações em (4.4) são equivalentes a

$$\text{Hess}\,\mu + c\mu g_1 = 0 \quad \text{e} \quad ||\text{grad}\,\mu||^2 + c\mu^2 = -\tilde{c}, \tag{4.6}$$

em que grad, Hess e $||\cdot||$ são calculados com respeito à g_1, obtemos do Lema 2.1 que $\langle\,,\rangle^*$ possui curvatura constante c.

Reciprocamente, como f possui curvatura de Moebius constante c, a Proposição 2.10 mostra que ds^2 possui curvatura constante $\tilde{c}$, pois $\langle\,,\rangle_f$ é uma métrica conformemente Euclidiana conforme à $ds^2 + \sigma_{-\tilde{c}}$. Decorre dos Exemplos 4.1, 4.2 e 4.3 que a métrica de Moebius de f é dada por (4.3). Como essa métrica possui curvatura constante c, decorre via Lema 2.1 que as equações em (4.6) são satisfeitas. Portanto, (4.2) é satisfeita. □

Corolário 4.1. *As soluções de* (4.2) *em um aberto U de $\mathbb{Q}_{\tilde{c}}^{p-\ell}$ são*

$$||\mathscr{H}^g||(x) = \begin{cases} \frac{1}{\langle v,x\rangle + a}, & \tilde{c} = 0 \ \ e \ \ c \leq 0, \\ \frac{1}{\langle v,x\rangle}, & \tilde{c} = 1 \ \ e \ \ c < 0 \ \ ou \ \ \tilde{c} = -1 \ \ e \ \ c \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{4.7}$$

em que $v \in \mathbb{E}^{p-\ell+1} := \begin{cases} \mathbb{R}^{p-\ell}, & se\ \tilde{c} = 0, \\ \mathbb{R}^{p-\ell+1}, & se\ \tilde{c} = 1, \\ \mathbb{L}^{p-\ell+1}, & se\ \tilde{c} = -1 \end{cases}$ *é tal que* $||v||^2 = -(p-\ell)^2 c$ *e* $a \in \mathbb{R}_+$.

Demonstração. Consideremos (U,ds^2) como um aberto de $\mathbb{R}^{p-\ell}$. Então

$$\frac{1}{||\mathscr{H}^g||}(x) = \langle v,x\rangle + a \quad \forall x \in U,$$

em que $a \in \mathbb{R}_+$ e $v \in \mathbb{R}^{p-\ell}$ é um vetor constante tal que $||v||^2 = -(p-\ell)^2 c$, é a solução de (4.2) para $\tilde{c} = 0$.

Consideremos (U,ds^2) como um aberto de $\mathbb{S}^{p-\ell} \subset \mathbb{R}^{p-\ell+1}$. O gradiente e o hessiano do funcional linear $g : \mathbb{R}^{p-\ell+1} \to \mathbb{R}$ dado por

$$g(x) = \langle x,v\rangle, \quad v \in \mathbb{R}^{p-\ell+1} \text{ é tal que } ||v||^2 = -(p-\ell)^2 c,$$

e $h = g \circ i : U \subset \mathbb{S}^{p-\ell} \to \mathbb{R}$, em que $i : \mathbb{S}^{p-\ell} \to \mathbb{R}^{p-\ell+1}$ é a inclusão umbílica, relacionam-se por

$$i_* \operatorname{grad} h = (\operatorname{grad} g)^T$$

e

$$\operatorname{Hess} h(X,Y) = \operatorname{Hess} g(i_*X, i_*Y) + \langle \operatorname{grad} g, \alpha^i(X,Y) \rangle$$

para quaisquer $x \in U$ e $X,Y \in T_x\mathbb{S}^{p-\ell}$ (ver por exemplo a Proposição 1.2 de (DAJCZER; TOJEIRO, 2019)). Como $\operatorname{grad} g = v$ e $\alpha^i(X,Y) = -\langle X,Y \rangle x$, segue que

$$i_* \operatorname{grad} h = v^T$$

e

$$\operatorname{Hess} h(X,Y) = -\langle v,x \rangle \langle X,Y \rangle = -h(x)\langle X,Y \rangle.$$

Note que

$$\begin{aligned} ||\operatorname{grad} h||^2 = ||v^T||^2 = ||v - v^\perp||^2 = ||v||^2 - ||v^\perp||^2 &= -(p-\ell)^2 c - \langle v,x \rangle^2 ||x||^2 \\ &= -(p-\ell)^2 c - \langle v,x \rangle^2, \end{aligned}$$

logo

$$||\operatorname{grad} h||^2 + (p-\ell)^2 c = -h^2.$$

Portanto, $1/||\mathscr{H}^g|| : U \subset \mathbb{S}^{p-\ell} \to \mathbb{R}$ definida por

$$(1/||\mathscr{H}^g||)(x) = \langle x,v \rangle, \quad \forall\, x \in U,$$

com $||v||^2 = -(p-\ell)^2 c$, é uma solução de (4.2) para $\tilde{c} = 1$.

Considere (U, ds^2) como um aberto de $\mathbb{H}^{p-\ell} \subset \mathbb{L}^{p-\ell+1}$, em que $\mathbb{H}^{p-\ell}$ é visto em termos do modelo do hiperbolóide. Seja $g : \mathbb{L}^{p-\ell+1} \to \mathbb{R}$ o funcional linear definido por

$$g(x) = \langle x,v \rangle, \quad v \in \mathbb{L}^{p-\ell+1} \text{ é tal que } ||v||^2 = -(p-\ell)^2 c,$$

e seja $h := g \circ i : U \subset \mathbb{H}^{p-\ell} \to \mathbb{R}$, em que $i : \mathbb{H}^{p-\ell} \to \mathbb{L}^{p-\ell+1}$ é a inclusão umbílica.

O gradiente e o hessiano de g e h relacionam-se por

$$i_* \operatorname{grad} h = (\operatorname{grad} g)^T$$

e

$$\operatorname{Hess} h(X,Y) = \operatorname{Hess} g(i_*X, i_*Y) + \langle \operatorname{grad} g, \alpha^i(X,Y) \rangle,$$

para quaisquer $x \in U$ e $X,Y \in T_x\mathbb{H}^{p-\ell}$. Como $\operatorname{grad} g = v$ e $\alpha^i(X,Y) = \langle X,Y \rangle x$, obtemos

$$i_* \operatorname{grad} h = v^T$$

e

$$\operatorname{Hess} h(X,Y) = \langle v,x \rangle \langle X,Y \rangle = h(x)\langle X,Y \rangle.$$

Note que

$$\begin{aligned}||\mathrm{grad}\, h||^2 = ||v^T||^2 = ||v-v^\perp||^2 = ||v||^2 - ||v^\perp||^2\\ = -(p-\ell)^2 c - \langle v^\perp, x\rangle^2 ||x||^2\\ = -(p-\ell)^2 c + \langle v, x\rangle^2\\ = -(p-\ell)^2 c + (h(x))^2.\end{aligned}$$

Portanto, a função $1/||\mathscr{H}^g|| : U \subset \mathbb{H}^{p-\ell} \to \mathbb{R}$ definida por

$$(1/||\mathscr{H}^g||)(x) = \langle v, x\rangle, \quad \forall\, x \in U \quad \text{com } v \in \mathbb{L}^{p-\ell+1} \text{ tal que } ||v||^2 = -(p-\ell)^2 c,$$

é uma solução de (4.2) para $\tilde{c} = -1$. □

Observação 4.2. Casos particulares de imersões isométricas $g : M_{\tilde{c}}^{p-\ell} \to \mathbb{Q}_{\tilde{c}}^{2p-\ell}$, $0 \leq \ell \leq p-2$, satisfazendo as condições do Corolário 4.1 são aquelas em que $\tilde{c} = 0$ e $||\mathscr{H}^g||$ é constante . De um ponto de vista global, foi provado por (DAJCZER; TOJEIRO, 1993) que se $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma imersão isométrica com fibrado normal plano, ν^g constante em $\mathbb{R}^n$ e campo curvatura média com norma constante, então $g(\mathbb{R}^n)$ é um produto Riemanniano de curvas com a (primeira) função curvatura constante. O caso em que $n = 2$ foi obtido anteriormente por (ENOMOTO, 1990) sem usar a hipótese de índice de nulidade relativa constante. Em particular, se $g : M^2 \to \mathbb{R}^4$ é uma superfície compacta com métrica induzida de curvatura nula e fibrado normal plano cujo campo curvatura média possui norma constante, então $g(M^2)$ é isometricamente congruente ao produto Riemanniano de dois círculos $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Exemplo 4.4. Se $g : U \subset \mathbb{R}^{p-\ell} \to \mathbb{R}^{2p-\ell}$, $0 \leq \ell \leq p-1$, é uma imersão com fibrado normal plano, $\nu^g \equiv 0$ e cujo campo curvatura média possui norma constante não nula, então da observação anterior temos que $g(U)$ é um subconjunto aberto de um produto Riemanniano de curvas com a (primeira) função curvatura constante. Neste caso, $g \times \mathrm{Id} : U \times \mathbb{R}^{n-p+\ell} \to \mathbb{R}^{n+p}$ é um cilindro com curvatura de Moebius constante nula.

A seguir exibimos um exemplo simples de uma imersão isométrica $g : M_{\tilde{c}}^{p-\ell} \to \mathbb{Q}_{\tilde{c}}^{2p-\ell}$, $0 \leq \ell \leq p-1$, satisfazendo as condições do Corolário 4.1 em que a norma do campo curvatura média não é constante.

Exemplo 4.5. Seja $\gamma_i : I_i \to \mathbb{R}^2$ uma curva diferenciável com curvatura κ_i, $1 \leq i \leq 2$. Considere a superfície

$$g = \gamma_1 \times \gamma_2 : I_1 \times I_2 \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4.$$

Logo

$$||\mathscr{H}^g||^2 = \frac{1}{4}(\kappa_1^2 + \kappa_2^2).$$

Em particular,

$$\mathrm{Hess}\, ||\mathscr{H}^g||^2(\partial_1, \partial_2) = \partial_1(\partial_2(\kappa_1^2 + \kappa_2^2)) - (\nabla_{\partial_1}\partial_2)(\kappa_1^2 + \kappa_2^2) = 0,$$

em que ∂_1 e ∂_2 são os campos coordenados de I_1 e I_2, respectivamente, e ∇ é a conexão de Levi-Civita da métrica produto $ds_1^2+ds_2^2$.

Suponha $||\mathscr{H}^g||^{-1}(x)=\langle v,x\rangle+a$ para todo $x\in I_1\times I_2$, em que $||v||=2\sqrt{-c}$ para $c\leq 0$ e $a\in\mathbb{R}_+$. Como

$$\begin{aligned}\operatorname{Hess}||\mathscr{H}^g||^{-1}(\partial_1,\partial_2)&=-\frac{1}{2}||\mathscr{H}^g||^{-3}\operatorname{Hess}||\mathscr{H}^g||^2(\partial_1,\partial_2)+\frac{3}{4}||\mathscr{H}^g||^{-5}(\partial_1||\mathscr{H}^g||^2)\partial_2||\mathscr{H}^g||^2\\&=\frac{3}{4}||\mathscr{H}^g||^{-5}(\partial_1||\mathscr{H}^g||^2)\partial_2||\mathscr{H}^g||^2\end{aligned}$$

e $\operatorname{Hess}||\mathscr{H}^g||^{-1}=0$ então

$$(\partial_1\kappa_1)(\partial_2\kappa_2)=0.$$

Se ambas as curvaturas são constantes, então $||\mathscr{H}^g||$ é constante, ou seja, $g(I_1\times I_2)\subset\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$, e assim $g\times\mathrm{Id}:I_1\times I_2\times\mathbb{R}^{n-2}\to\mathbb{R}^{n+2}$ é um cilindro com curvatura de Moebius nula. Caso κ_1 não seja constante, segue que $\kappa_2\equiv r$ para algum $r>0$. Usando que $\frac{1}{||\mathscr{H}^g||}(s_1)=2\sqrt{-c}s_1$ para $c<0$, obtemos

$$\kappa_1(s_1)=\sqrt{-c^{-1}s_1^{-2}-r^2},\quad \text{para } 0<|s_1|<\frac{1}{r\sqrt{-c}}.$$

Portanto, $g=\gamma_1\times\gamma_2$, em que γ_1 é a curva cuja curvatura $\kappa_1(s_1)=\sqrt{-c^{-1}s_1^{-2}-r^2}$ e $\gamma_2(I_2)\subset\mathbb{S}^1$, as quais determinam um cilindro $g\times\mathrm{Id}:I_1\times I_2\times\mathbb{R}^{n-2}\to\mathbb{R}^{n+2}$ com curvatura de Moebius $c<0$.

Concluímos, portanto, a demonstração da recíproca do seguinte teorema, o qual é o principal resultado deste trabalho.

Teorema 4.1. *Seja $f:M^n\to\mathbb{R}^{n+p}$, com $n\geq 5$ e $p=2$, ou $n\geq 6$ e $2p\leq n$, uma imersão isométrica própria com curvatura de Moebius constante c e fibrado normal plano. Então $f(M^n)$ é a imagem por uma transformação conforme de $\mathbb{R}^{n+p}$ de um subconjunto aberto de uma subvariedade dada como em um dos Exemplos 4.1, 4.2 ou 4.3*

(i) *com a (primeira) função curvatura $\kappa(s)$ da curva $\gamma\colon I\to\mathbb{Q}_{\tilde c}^{p+1}$ dada pelo Lema 4.1, com $\tilde c=0,1$ ou -1, respectivamente.*

(ii) *com a norma do campo curvatura média da subvariedade $g:U\subset\mathbb{Q}_{\tilde c}^{p-\ell}\to\mathbb{Q}_{\tilde c}^{2p-\ell}$ dada pelo Corolário 4.1, com $0\leq\ell\leq p-2$ e $\tilde c=0,1$ ou -1, respectivamente.*

Para a demonstração do teorema, mostraremos inicialmente que a forma de Moebius ω^f de uma imersão isométrica $f:M^n\to\mathbb{R}^{n+p}$ com curvatura de Moebius constante e fibrado normal plano é necessariamente fechada.

Proposição 4.1. *Se $f:M^n\to\mathbb{R}^{n+p}$ é uma imersão isométrica com curvatura de Moebius constante e fibrado normal plano, então a forma de Moebius ω^f é fechada.*

Demonstração. A equação conforme de Ricci,

$$\langle R^{\perp}(X,Y)\xi,\eta\rangle = \langle [B_\xi, B_\eta]X, Y\rangle^*$$

para quaisquer $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $\xi,\eta \in \Gamma(N_fM)$, mostra que existe um referencial ortonormal $\mathscr{B} := \{X_1,\ldots,X_n\}$ com respeito à métrica de Moebius tal que

$$\beta(X_i,X_j) = 0, \;\; i \neq j.$$

Em particular, $\mathscr{B}$ diagonaliza também a terceira forma fundamental de Moebius

$$III_\beta(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} \langle \beta(X,X_i), \beta(Y,X_i)\rangle.$$

Seja $c \in \mathbb{R}$ o valor comum das curvaturas seccionais de $(M,\langle\cdot,\cdot\rangle^*)$. Então o tensor de Ricci de $(M^n,\langle\cdot,\cdot\rangle^*)$ satisfaz

$$\mathrm{Ric}^*(X,Y) = c(n-1)\langle X,Y\rangle^*$$

para quaisquer $X,Y \in \mathfrak{X}(M^n)$, logo $\mathscr{B}$ também diagonaliza Ric^*.

Da relação

$$(n-2)\psi(X,Y) = \mathrm{Ric}^*(X,Y) + III_\beta(X,Y) - \frac{n^2s^*+1}{2n}\langle X,Y\rangle^*,$$

em que s^* é a curvatura escalar de $(M,\langle\,,\,\rangle^*)$, concluímos que o tensor de Blaschke ψ é diagonalizado por $\mathscr{B}$. Assim,

$$\beta(X_i,\hat{\psi}X_j) = \beta(X_j,\hat{\psi}X_i), \;\; i \neq j,$$

em que $\hat{\psi}$ é o endomorfismo associado a ψ, donde

$$d\omega(X_i,X_j) = \beta(X_i,\hat{\psi}X_j) - \beta(X_j,\hat{\psi}X_i) = 0, \;\; i \neq j.$$

$\square$

Demonstração do Teorema 4.1: Conforme observado no segundo parágrafo deste capítulo, as hipóteses do teorema asseguram que f admite um campo normal principal η com multiplicidade $n-p+\ell$, para algum $0 \leq \ell \leq p-1$, além de outros $p-\ell$ campos normais principais simples. Por outro lado, vemos da Observação 3.1 que f possui um campo normal principal de Moebius $\bar{\eta} := \rho^{-1}(\eta - \mathscr{H}^f)$ com multiplicidade $n-p+\ell$ e $p-\ell$ campos normais principais de Moebius simples.

Como f tem curvatura de Moebius constante e fibrado normal plano, a forma de Moebius ω^f é fechada pela Proposição 4.1. Logo, obtemos da equação conforme de Ricci que existe um referencial ortonormal $X_1,\ldots X_n$, com respeito à métrica $\langle\,,\,\rangle^*$, que diagonaliza β e ψ simultaneamente, de modo que

$$\beta(X_i,X_i) = \bar{\eta}, \tag{4.8}$$

para todo $p-\ell+1 \leq i \leq n$.

Neste ponto, dividiremos a demonstração em dois casos:

(i) *Caso* $\ell = p-1$.

O campo normal principal η tem multiplicidade $n-1$. Como a forma de Moebius ω^f é fechada, segue da Proposição 3.2 que $f(M^n)$ é a imagem por uma transformação conforme de $\mathbb{R}^{n+p}$ de um subconjunto aberto de um cilindro, de um cone generalizado ou de uma subvariedade de rotação sobre uma curva $\gamma : I \to \mathbb{Q}_{\tilde{c}}^{p+1}$, em que $\tilde{c} = 0, 1$ ou -1, respectivamente. Finalmente, a hipótese de que a curvatura de Moebius de f é constante e o Lema 4.1 implicam que a (primeira) função curvatura $\kappa(s)$ da curva $\gamma \colon I \to \mathbb{Q}_{\tilde{c}}^{p+1}$, com $\tilde{c} = 0, 1$ ou -1, respectivamente, é dada como no Lema 4.1.

(ii) *Caso* $0 \leq \ell \leq p-2$.

Considere as distribuições diferenciáveis

$$\Delta = \operatorname{span}\{X_i : \, p-\ell+1 \leq i \leq n\} \quad \text{e} \quad \Delta^{\perp} = \operatorname{span}\{X_i : \, 1 \leq i \leq p-\ell\}. \tag{4.9}$$

Do Corolário 3.1, segue que $\mathscr{E}$ é uma TP-rede. Então, do Teorema 2.1, temos que para cada $x \in M^n$ existem um aberto U de M^n contendo x e uma representação produto

$$\Phi : \prod_{k=1}^{p-\ell+1} M_k \to U$$

de $\mathscr{E}$ que é uma isometria com respeito à uma métrica produto twisted

$$\langle \, , \rangle = \sum_{k=1}^{p-\ell+1} \rho_k^2 \pi_k^* \langle \, , \rangle_k \tag{4.10}$$

em $\prod_{k=1}^{p-\ell+1} M_k$ para certas funções C^∞ $\rho_k : \Phi^{-1}(U) \to \mathbb{R}_+$, $1 \leq i \leq p-\ell+1$.

Considere a rede produto $(E_i)_{i=1,\ldots,p-\ell+1}$ de $\prod_{k=1}^{p-\ell+1} M_k$, em que, para cada ponto $x = (x_1, \ldots, x_{p-\ell+1}) \in \prod_{k=1}^{p-\ell+1} M_k$, $E_i(x) := \tau_{i\,*}^x T_{x_i} M_i$ e $\tau_i^x : M_i \to \prod_{k=1}^{p-\ell+1} M_k$ é a inclusão usual. Conforme observado em (2.13), E_i é uma distribuição umbílica com campo curvatura média $-(\operatorname{grad}(\log \circ \rho_i))_{E_i^{\perp}}$, em que grad representa o gradiente calculado na métrica $\langle \, , \rangle$.

Afirmamos que existem um sistema de coordenadas $(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)$ em $\prod_{k=1}^{p-\ell+1} M_k$ e funções $r_i = r_i(\tilde{x}_i)$, $1 \leq i \leq p-\ell$, tais que $\rho_i = r_i(\tilde{x}_i) f_i^{-1} \circ \Phi$.

De fato, como mostrado na prova do Corolário 3.1, $\operatorname{span}\{X_i\}$ é uma distribuição umbílica em $(M^n, \langle \, , \rangle^*)$ com campo curvatura média $-(\operatorname{grad}^* \log f_i^{-1})_{(\operatorname{span}\{X_i\})^{\perp}}$, para qualquer $1 \leq i \leq p-\ell$. Logo

$$\begin{aligned}
-\langle \operatorname{grad}^* \log f_i^{-1}, X_k \rangle^* = \langle \nabla^*_{X_i} X_i, X_k \rangle^* &= \langle \nabla^*_{\tau_{i\,*x_i}^x \bar{X}_i} \Phi_* \tau_{i\,*}^x \bar{X}_i, \Phi_* \tau_{k\,*x_k}^x \bar{X}_k \rangle^* \\
&= \langle \Phi_* \nabla_{\tau_{i\,*x_i}^x \bar{X}_i} \tau_{i\,*}^x \bar{X}_i, \Phi_* \tau_{k\,*x_k}^x \bar{X}_k \rangle^* \\
&= \langle \nabla_{\tau_{i\,*x_i}^x \bar{X}_i} \tau_{i\,*}^x \bar{X}_i, \tau_{k\,*x_k}^x \bar{X}_k \rangle \\
&= -\langle \operatorname{grad}(\log \circ \rho_i), \tau_{k\,*x_k}^x \bar{X}_k \rangle,
\end{aligned}$$

para todo $k \neq i$ com $1 \leq k \leq n$. Portanto,

$$(\Phi_* \mathrm{grad}(\log \circ \rho_i))_{(\Phi_* E_i(x))^\perp} = (\mathrm{grad}^* \log f_i^{-1})_{(\mathrm{span}\{X_i\}(\Phi(x)))^\perp}$$
$$= (\Phi_* \mathrm{grad}(\log \circ f_i^{-1} \circ \Phi))_{(\Phi_* E_i(x))^\perp}. \tag{4.11}$$

Introduza coordenadas $(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{p-\ell}, \ldots, \tilde{x}_n)$ em $\prod_{k=1}^{p-\ell+1} M_k$. Então, a partir de (4.11), vemos que

$$\rho_i = r_i(\tilde{x}_i) f_i^{-1} \circ \Phi$$

para certas funções diferenciáveis $r_i = r_i(\tilde{x}_i)$ com $1 \leq i \leq p-\ell$. Definindo $x_i = \int r_i(\tilde{x}_i) d\tilde{x}_i$, nas novas coordenadas $(x_1, \ldots, x_{p-\ell}, \tilde{x}_{p-\ell+1}, \ldots, \tilde{x}_n)$ a métrica (4.10) se escreve como

$$\langle\, , \rangle = \sum_{i=1}^{p-\ell} f_i^{-2} dx_i^2 + \varphi^2 \sum_{i,j=p-\ell+1}^{n} \tilde{g}_{ij} d\tilde{x}_i d\tilde{x}_j, \tag{4.12}$$

para alguma $\varphi \in C^\infty(U)$ e $\tilde{g}_{ij}$ são os coeficientes da métrica $\langle\, , \rangle_{p-\ell+1}$. (Observe que aqui estamos omitindo Φ apenas por simplicidade na escrita.)

Em seguida, mostraremos que a métrica $\langle\, , \rangle_{p-\ell+1}$ é ortogonal. De fato, fixe $\bar{x} := (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{p-\ell})$ pertencente ao sistema de coordenadas $(x_1, \ldots, x_{p-\ell})$. Seja $\tau^{\bar{x}}_{p-\ell+1} : M_{p-\ell+1} \to \prod_{k=1}^{p-\ell+1} M_k$ definida por $\tau^{\bar{x}}_{p-\ell+1}(x_{p-\ell+1}) = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{p-\ell}, x_{p-\ell+1})$. Notemos que

$$\langle \tau^{\bar{x}}_{p-\ell+1\,*} v, \tau^{\bar{x}}_{p-\ell+1\,*} w \rangle = \langle (0, \ldots, 0, v), (0, \ldots, 0, w) \rangle = \varphi^2_{\bar{x}} \langle v, w \rangle_{p-\ell+1},$$

para quaisquer $v, w \in T_{x_{p-\ell+1}} M_{p-\ell+1}$ e qualquer $x_{p-\ell+1} \in M_{p-\ell+1}$. Isto mostra que $\tau^{\bar{x}}_{p-\ell+1}$ é um difeomorfismo conforme de $M_{p-\ell+1}$ sobre a folha $L(\bar{x}) := \tau^{\bar{x}}_{p-\ell+1}(M_{p-\ell+1})$ de Δ, cujo fator conforme é $\varphi_{\bar{x}} : M_{p-\ell+1} \to \mathbb{R}_+$ definido por $\varphi_{\bar{x}}(x_{p-\ell+1}) = \varphi(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{p-\ell}, x_{p-\ell+1})$.

Utilizando a equação de Gauss, a métrica $g_{\bar{x}}$ induzida em $L(\bar{x})$ da métrica de Moebius $\langle\, , \rangle^*$ possui curvatura

$$\begin{aligned} c(\bar{x}) &:= c + ||\delta(\bar{x}, x_{p-\ell+1})||^2 \\ &= c + ||(\mathrm{grad}^* \log \varphi)_{\Delta^\perp}||^2 \\ &= c + \sum_{i=1}^{p-\ell} (X_i(\log \varphi))^2 \\ &= c + \sum_{i=1}^{p-\ell} (f_i(\bar{x}, x_{p-\ell+1}))^2 \left(\frac{\partial \log \varphi}{\partial x_i}\right)^2. \end{aligned}$$

Como a folha $L(\bar{x})$ é umbílica, decorre da equação de Codazzi que $\delta(\bar{x}, x_{p-\ell+1})$ é paralelo na conexão normal de $L(\bar{x}) \to (M^n, \langle\, , \rangle^*)$, ou seja, $c(\bar{x})$ é constante. Assim, a métrica ${\tau^{\bar{x}}_{p-\ell+1}}^* g_{\bar{x}}$ possui curvatura constante $c(\bar{x})$. Logo, existem coordenadas ortogonais locais $(x_{p-\ell+1}, \ldots, x_n)$ de $(M_{p-\ell+1}, {\tau^{\bar{x}}_{p-\ell+1}}^* g_{\bar{x}})$. Porém ${\tau^{\bar{x}}_{p-\ell+1}}^* g_{\bar{x}} = \varphi^2_{\bar{x}} \langle\, , \rangle_{p-\ell+1}$, donde $(x_{p-\ell+1}, \ldots, x_n)$ são também coordenadas ortogonais de $(M_{p-\ell+1}, \langle\, , \rangle_{p-\ell+1})$. Escreva então

$$\langle\, , \rangle_{p-\ell+1} = \sum_{i=p-\ell+1}^{n} V_i^2 dx_i^2,$$

com $V_i = \sqrt{\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_i} \rangle_{p-\ell+1}}$ para $i \geq p-\ell+1$.

A métrica (4.12) toma então a forma

$$\langle\, , \rangle^* = \sum_{i=1}^{p-\ell} f_i^{-2} dx_i^2 + \varphi^2 \sum_{i=p-\ell+1}^{n} V_i^2 dx_i^2. \tag{4.13}$$

Denote

$$h_{ij} = \frac{1}{v_i}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}, \quad 1 \leq i \neq j \leq n,$$

com $v_i = f_i^{-1}$ para $1 \leq i \leq p-\ell$ e $v_k = \varphi V_k$ para $k \geq p-\ell+1$.

Como a métrica (4.13) possui curvatura constante c, decorre do Corolário 2.1 que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h_{ij}}{\partial x_i} + \dfrac{\partial h_{ji}}{\partial x_j} + \sum_{k\neq i,j} h_{ki}h_{kj} + c v_i v_j = 0, \\ \dfrac{\partial h_{ik}}{\partial x_j} = h_{ij}h_{jk}, \quad 1 \leq i \neq k \neq j \neq i \leq n. \end{cases} \tag{4.14}$$

Nestas notações,

$$h_{ij} = \begin{cases} -\dfrac{f_i}{f_j^2}\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}, & 1 \leq i \neq j \leq p-\ell, \\ f_i V_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, & 1 \leq i \leq p-\ell \text{ e } j \geq p-\ell+1, \\ -\dfrac{1}{\varphi V_i} f_j^{-2}\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}, & i \geq p-\ell+1 \text{ e } 1 \leq j \leq p-\ell, \\ \frac{V_j}{V_i}\frac{\partial \log \varphi}{\partial x_i} + H_{ij}, & i \neq j \geq p-\ell+1, \end{cases}$$

com $H_{ij} := \frac{1}{V_i}\frac{\partial V_j}{\partial x_i}$.

Calcularemos agora $\frac{\partial h_{ik}}{\partial x_j} = h_{ij}h_{jk}$ para $p-\ell+1 \leq i \neq j \leq n$ e $1 \leq k \leq p-\ell$. Temos

$$\frac{\partial h_{ik}}{\partial x_j} = \frac{1}{(\varphi V_i)^2}\frac{\partial(\varphi V_i)}{\partial x_j} f_k^{-2}\frac{\partial f_k}{\partial x_i} + \frac{2}{\varphi V_i} f_k^{-3}\frac{\partial f_k}{\partial x_j}\frac{\partial f_k}{\partial x_i} - \frac{1}{\varphi V_i} f_k^{-2}\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_j \partial x_i}$$

e

$$h_{ij}h_{jk} = \left(\frac{V_j}{V_i}\frac{\partial \log \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{V_i}\frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right)\left(-\frac{1}{\varphi V_j} f_k^{-2}\frac{\partial f_k}{\partial x_j}\right) = -\frac{1}{\varphi V_i}\frac{\partial \log(\varphi V_j)}{\partial x_i} f_k^{-2}\frac{\partial f_k}{\partial x_j}.$$

Multiplicando a expressão anterior por $\varphi V_i f_k^2$, obtemos

$$\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial \log(\varphi V_i)}{\partial x_j}\frac{\partial f_k}{\partial x_i} + \frac{\partial \log(\varphi V_j)}{\partial x_i}\frac{\partial f_k}{\partial x_j} + 2 f_k^{-1}\frac{\partial f_k}{\partial x_j}\frac{\partial f_k}{\partial x_i}. \tag{4.15}$$

Como $\sum_{k=1}^{p-\ell} f_k^2 = 1$, então

$$\sum_{k=1}^{p-\ell} f_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i} = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{p-\ell} f_k \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_j \partial x_i} = -\sum_{k=1}^{p-\ell}\frac{\partial f_k}{\partial x_j}\frac{\partial f_k}{\partial x_i}. \tag{4.16}$$

Segue de (4.15) e (4.16) que

$$-\sum_{k=1}^{p-\ell}\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\frac{\partial f_k}{\partial x_j}=2\sum_{k=1}^{p-\ell}\frac{\partial f_k}{\partial x_j}\frac{\partial f_k}{\partial x_i},$$

donde

$$\sum_{k=1}^{p-\ell}\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\frac{\partial f_k}{\partial x_j}=0, \tag{4.17}$$

se $i\neq j\geq p-\ell+1$.

Defina

$$W=(f_1,\dots,f_{p-\ell}) \quad \text{e} \quad U_i=\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i},\dots,\frac{\partial f_{p-\ell}}{\partial x_i}\right), \quad p-\ell+1\leq i\leq n.$$

Pela Proposição 3.5, $\Delta^{\perp}$ é totalmente geodésica com respeito à métrica de Moebius $\langle\,,\rangle^*$ se e somente se

$$U_i=0 \quad \forall\, p-\ell+1\leq i\leq n.$$

As equações (4.16) e (4.17) tornam-se

$$\begin{aligned}\langle W,U_i\rangle&=0, \quad p-\ell+1\leq i\leq n,\\ \langle U_i,U_j\rangle&=0, \quad p-\ell+1\leq i\neq j\leq n,\end{aligned}$$

ou seja, $W,U_{p-\ell+1},\dots,U_n$ são $n-p+\ell+1$ vetores dois a dois ortogonais de $\mathbb{R}^{p-\ell}$.

Como $n\geq 2p$, então $n-p+\ell+1>p-\ell$, ou seja, $n>2(p-\ell)-1$. Logo, podemos supor que $U_j=0$ para $n-p+\ell+1\leq j\leq n$. Isto significa que $f_1,\dots,f_{p-\ell}$ não dependem de x_j para $n-p+\ell+1\leq j\leq n$.

Observe que, se $n=2p$ e $\ell=0$, então $\Delta^{\perp}$ é automaticamente totalmente geodésica.

Suponha que $\Delta^{\perp}$ não seja totalmente geodésica com respeito à $\langle\,,\rangle^*$. Como

$$p-\ell+1\leq p+\ell+1\leq n-p+\ell+1\leq j\leq n,$$

existem $x\in M^n$ e $j\geq p-\ell+1$, digamos $j=p-\ell+1$, tais que $U_{p-\ell+1}(x)\neq 0$. Suponha, sem perda de generalidade, que $\frac{\partial f_1}{\partial x_{p-\ell+1}}\neq 0$ em uma vizinhança de x. Aplicando (4.15) para $j=p-\ell+1$, $k=1$ e $i\geq n-p+\ell+1$, obtemos

$$\frac{\partial \log(\varphi V_{p-\ell+1})}{\partial x_i}=0,$$

ou seja, $v_{p-\ell+1}:=\varphi V_{p-\ell+1}$ não depende de x_i. Podemos então escrever

$$\langle\,,\rangle^*=\sum_{i=1}^{p-\ell}f_i^{-2}dx_i^2+\varphi^2\sum_{i=p-\ell+1}^{n-p+\ell}V_i^2dx_i^2+(\varphi V_{p-\ell+1})^2V_{p-\ell+1}^{-2}\sum_{i=n-p+\ell+1}^{n}V_i^2dx_i^2.$$

Denotando $g_1=\sum_{i=1}^{p-\ell} f_i^{-2}dx_i^2+\varphi^2\sum_{i=p-\ell+1}^{n-p+\ell} V_i^2 dx_i^2$ e $g_2=V_{p-\ell+1}^{-2}\sum_{i=n-p+\ell+1}^{n} V_i^2 dx_i^2$, segue que

$$\langle\,,\rangle^*=g_1+v_{p-\ell+1}^2 g_2.$$

Existe portanto uma representação produto $\bar{\Phi}: M^{n-p+\ell}\times_{v_{p-\ell+1}} N^{p-\ell}\to M^n$ de $\{\Delta,\Delta^\perp\}$ que é uma isometria com respeito à $g_1+v_{p-\ell+1}^2 g_2$.

Pelo Lema 2.1, temos:

a. g_1 possui curvatura constante c.

b. $\operatorname{Hess} v_{p-\ell+1}+cv_{p-\ell+1}g_1=0$

c. g_2 possui curvatura constante $||\operatorname{grad} v_{p-\ell+1}||^2+cv_{p-\ell+1}^2$,

em que Hess e grad são calculados com respeito à g_1. Em particular,

$$\operatorname{Hess} v_{p-\ell+1}(\partial_i,\partial_i)+cv_{p-\ell+1}v_i^2=0,\quad 1\le i\le p-\ell. \tag{4.18}$$

Notemos que usando (2.14)

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial_i}\partial_i=\nabla_{\partial_i}(v_iX_i)&=\frac{\partial v_i}{\partial x_i}X_i+v_i\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n-p+\ell}\langle\nabla_{\partial_i}X_i,X_j\rangle X_j\right)\\
&=\frac{\partial v_i}{\partial x_i}X_i-v_i\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n-p+\ell}\langle X_i,\nabla_{\partial_i}X_j\rangle X_j\\
&=\frac{\partial v_i}{\partial x_i}X_i-v_i\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n-p+\ell}h_{ji}X_j\\
&=\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\frac{1}{v_i}\frac{\partial}{\partial x_i}-v_i\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n-p+\ell}h_{ji}\frac{1}{v_j}\frac{\partial}{\partial x_j}.
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
\operatorname{Hess} v_{p-\ell+1}(\partial_i,\partial_i)&=\frac{\partial}{\partial x_i}(v_ih_{ip-\ell+1})-(\nabla_{\partial_i}\partial_i)(v_{p-\ell+1})\\
&=\frac{\partial v_i}{\partial x_i}h_{ip-\ell+1}+v_i\frac{\partial h_{ip-\ell+1}}{\partial x_i}-\frac{1}{v_i}\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\frac{\partial v_{p-\ell+1}}{\partial x_i}+v_i\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n-p+\ell}h_{ji}\frac{1}{v_j}\frac{\partial v_{p-\ell+1}}{\partial x_j}\\
&=v_i\left(\frac{\partial h_{ip-\ell+1}}{\partial x_i}+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i,p-\ell+1}}^{n-p+\ell}h_{ji}h_{jp-\ell+1}+h_{p-\ell+1i}\frac{1}{v_{p-\ell+1}}\frac{\partial v_{p-\ell+1}}{\partial x_{p-\ell+1}}\right).
\end{aligned}$$

Assim, (4.18) é equivalente à

$$\frac{\partial h_{ip-\ell+1}}{\partial x_i}+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i,p-\ell+1}}^{n-p+\ell}h_{ji}h_{jp-\ell+1}+h_{p-\ell+1i}\frac{1}{v_{p-\ell+1}}\frac{\partial v_{p-\ell+1}}{\partial x_{p-\ell+1}}+cv_{p-\ell+1}v_i=0. \tag{4.19}$$

Como $g_1 = \sum_{i=1}^{n-p+\ell} v_i^2 dx_i^2$ possui curvatura constante c, decorre de (4.14) que

$$\frac{\partial h_{ip-\ell+1}}{\partial x_i} + \frac{\partial h_{p-\ell+1i}}{\partial x_{p-\ell+1}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i,p-\ell+1}}^{n-p+\ell} h_{ji}h_{jp-\ell+1} + cv_iv_{p-\ell+1} = 0. \tag{4.20}$$

Comparando (4.19) e (4.20) concluímos que

$$\frac{\partial h_{p-\ell+1i}}{\partial x_{p-\ell+1}} = h_{p-\ell+1i}\frac{1}{v_{p-\ell+1}}\frac{\partial v_{p-\ell+1}}{\partial x_{p-\ell+1}} \iff \frac{\partial}{\partial x_{p-\ell+1}}(h_{p-\ell+1i}/v_{p-\ell+1}) = 0.$$

Usando que $h_{p-\ell+1i} = -\frac{1}{v_{p-\ell+1}} f_i^{-2} \frac{\partial f_i}{\partial x_{p-\ell+1}}$ para $1 \leq i \leq p-\ell$, obtemos

$$\frac{1}{v_{p-\ell+1}^2} f_i^{-2} \frac{\partial f_i}{\partial x_{p-\ell+1}} = \phi_i(x_1,\dots,x_{p-\ell},x_{p-\ell+2},\dots,x_{n-p+\ell}), \tag{4.21}$$

para alguma função $\phi_i = \phi_i(x_1,\dots,x_{p-\ell},x_{p-\ell+2},\dots,x_{n-p+\ell})$.

Em particular, para $i=1$, a equação (4.21) fornece uma contradição, uma vez que, por hipótese, $\frac{\partial f_1}{\partial x_{p-\ell+1}} \neq 0$ em x, enquanto que o lado direito de (4.21) não depende de $x_{p-\ell+1}$. Portanto, $\Delta^\perp$ é totalmente geodésica com respeito à $\langle\,,\rangle^*$. Pela Proposição 3.1, $\Delta^\perp$ é umbílica com respeito à métrica induzida por f com campo vetorial curvatura média igual a $(\operatorname{grad}_f \log\rho)_\Delta$.

Sendo $\Delta = E_\eta$ e η um campo normal principal de Dupin, o Teorema 2.7 mostra que f é localmente, a menos de uma composição com uma transformação conforme de $\mathbb{R}^{n+p}$, uma imersão $f = \Theta\circ(g,\mathrm{Id}) : M^{p-\ell}\times\mathbb{Q}_{-\tilde{c}}^{n-p+\ell} \to \mathbb{R}^{n+p}$, em que $g : M^{p-\ell} \to \mathbb{Q}_{\tilde{c}}^{2p-\ell}$, $0\leq\ell\leq p-2$, é uma imersão isométrica com fibrado normal plano e $\Theta = \mathrm{Id} : \mathbb{R}^{n+p} \to \mathbb{R}^{n+p}$ se $\tilde{c}=0$ ou Θ é como nos Exemplos 4.2 e 4.3 se $\tilde{c}\neq 0$. Agora, como f é própria então g também é (pois decorre de (2.31) que a propriedade de uma imersão isométrica com fibrado normal plano ser própria é preservada por mudanças conforme da métrica ambiente), logo ν^g é identicamente nulo em $M^{p-\ell}$, pois do contrário, se $\nu^g(y)\geq 1$ em algum $y\in M^{p-\ell}$ então g teria pelo menos um dos $p-\ell$ vetores normais principais nulo e assim η teria multiplicidade estritamente maior do que $n-p+\ell$, que é uma contradição. Como f possui curvatura de Moebius constante c, a conclusão deste teorema decorre do Lema 4.2 e do Corolário 4.1.

Observação 4.3. **(a)** Se $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+p}$ é uma imersão isométrica com curvatura de Moebius constante c e fibrado normal plano com dois campos normais principais distintos, a demonstração do Teorema 4.1 (**i**) se aplica, mais geralmente, ao caso em que $p\geq 1$ e $n\geq 3$, mostrando, sob essas hipóteses, que $f(M^n)$ é a imagem por uma transformação conforme de $\mathbb{R}^{n+p}$ de um subconjunto aberto de uma subvariedade dada como em um dos Exemplos 4.1, 4.2 ou 4.3 com a (primeira) função curvatura $\kappa(s)$ da curva $\gamma\colon I\to\mathbb{Q}_{\tilde{c}}^{p+1}$, com $\tilde{c} = 0,1$ ou -1, respectivamente, dada pelo Lema 4.1. Em particular, tal afirmação generaliza a classificação das hipersuperfícies $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, $n\geq 4$, com curvatura de

Moebius constante obtida em (GUO *et al.*, 2012) ou alternativamente em (LI; MA; WANG, 2014), uma vez que as últimas possuem uma curvatura principal de multiplicidade $n-1$ (veja o Teorema 2.3).

(b) A demonstração do Teorema 4.1 **(ii)** é válida ainda para as imersões isométricas $f : M^4 \to \mathbb{R}^6$ com curvatura de Moebius constante e fibrado normal plano que admitem um campo normal principal η de multiplicidade 2 (observe que o caso em que η tem multiplicidade 3 está incluído naquele descrito no item (**a**)). Portanto, desta observação e do Teorema 4.1 decorre uma classificação de todas as subvariedades $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+2}$, $n \geq 4$, com curvatura de Moebius constante e fibrado normal plano, com exceção daquelas para as quais $n = 4$ e f admite quatro campos normais principais distintos, que permanece em aberto.

CAPÍTULO

5

SUBVARIEDADES CONFORMEMENTE EUCLIDIANAS E ISOPARAMÉTRICAS DE MOEBIUS

O principal objetivo deste capítulo é obter uma classificação das imersões isométricas $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+p}$, $n-3 \geq p \geq 1$, conformemente Euclidianas e isoparamétricas de Moebius. Nossa abordagem consistirá em mostrar que esta classe de subvariedades é equivalente à classe das subvariedades conformemente Euclidianas cuja forma de Moebius é nula, o que nos permitirá utilizar alguns dos resultados obtidos nos capítulos anteriores.

Definição 5.1. Seja $f : M^n \to \tilde{M}^m$ uma imersão isométrica. Dizemos que um campo normal $\xi \in \Gamma(N_f M)$ é paralelo se

$$\nabla^{\perp}_{X}\xi = 0$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Definição 5.2. Uma imersão isométrica $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+p}$ sem pontos umbílicos e com fibrado normal plano é denominada uma *subvariedade isoparamétrica de Moebius* se sua forma de Moebius é identicamente nula em M^n e seus campos normais principais de Moebius são paralelos. (Veja a Definição 3.1).

Definição 5.3. Uma imersão isométrica $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+p}$ é denominada uma *subvariedade de Dupin* se possui fibrado normal plano e seus campos normais principais são de Dupin. (Veja a Definição 2.4).

Proposição 5.1. *Se $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+p}$ é uma subvariedade isoparamétrica de Moebius, então f é uma subvariedade de Dupin.*

Demonstração. Sejam $\eta_1, \ldots, \eta_n$ os campos normais principais de f associados às distribuições $E_{\eta_1}, \ldots, E_{\eta_n}$, e seja $X_1, \ldots, X_n$ um referencial principal de f.

Como $\omega^f \equiv 0$, temos

$$\begin{aligned}0 &= \nabla^\perp_{X_i}\mathscr{H}^f + \beta(X_i, \mathrm{grad}^*\rho)\\ &= \nabla^\perp_{X_i}\mathscr{H}^f + \rho(\langle X_i, \mathrm{grad}^*\rho\rangle_f \eta_i - \langle X_i, \mathrm{grad}^*\rho\rangle_f \mathscr{H}^f)\\ &= \nabla^\perp_{X_i}\mathscr{H}^f + \rho^{-1}X_i(\rho)(\eta_i - \mathscr{H}^f).\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$0 = \nabla^\perp_{X_i}\rho^{-1}(\eta_i - \mathscr{H}^f) = -\rho^{-2}X_i(\rho)(\eta_i - \mathscr{H}^f) + \rho^{-1}(\nabla^\perp_{X_i}\eta_i - \nabla^\perp_{X_i}\mathscr{H}^f).$$

Logo

$$\begin{aligned}0 &= \nabla^\perp_{X_i}\mathscr{H}^f + (\nabla^\perp_{X_i}\eta_i - \nabla^\perp_{X_i}\mathscr{H}^f)\\ &= \nabla^\perp_{X_i}\eta_i,\end{aligned}$$

para cada $1 \leq i \leq n$. □

Corolário 5.1. *Seja $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+p}$ uma imersão isométrica com fibrado normal plano cujos campos normais principais de Moebius são paralelos. Então f é uma subvariedade isoparamétrica de Moebius se e somente se f é uma subvariedade de Dupin.*

Para resolver o problema central deste capítulo enunciado no primeiro parágrafo, precisamos de alguns resultados e definições preliminares.

O *primeiro espaço normal* $N_1(x)$ de uma imersão isométrica $f : M^n \to \tilde{M}^m$ em $x \in M^n$ é o subespaço vetorial

$$N_1(x) = \mathrm{span}\{\alpha(X,Y) : X, Y \in T_xM\},$$

em que α é a segunda forma fundamental de f. A imersão f é dita ser 1-*regular* se a dimensão de $N_1(x)$ é constante em M^n, o que implica que tais subespaços formam um subfibrado de N_fM, chamado de *primeiro fibrado normal* de f e denotado por $N_1 = N_1^f$.

Definição 5.4. Uma imersão isométrica $f : M^n \to \mathbb{Q}_c^{n+p}$ *reduz codimensão à* $q < p$ se existe uma subvariedade totalmente geodésica $\mathbb{Q}_c^{n+q} \subset \mathbb{Q}_c^{n+p}$ tal que $f(M^n) \subset \mathbb{Q}_c^{n+q}$. A *codimensão substancial* de f é o menor número para o qual a codimensão de f pode ser reduzida. Se a codimensão de f não pode ser reduzida, então f é dita ser *substancial*.

Proposição 5.2 ((DAJCZER; TOJEIRO, 2019)). *Seja $f : M^n \to \mathbb{Q}_c^m$ uma imersão isométrica* 1*-regular com fibrado normal plano e campo curvatura média paralelo. Então o primeiro fibrado normal N_1 de f é paralelo e possui dimensão $k \leq \min\{n, m-n\}$. Em particular, f reduz codimensão à k.*

Teorema 5.1 ((DAJCZER; TOJEIRO, 1993)). *Seja $f : M_c^n \to \mathbb{Q}_c^m$ uma imersão isométrica com fibrado normal plano e campo curvatura média paralelo. Então uma das seguintes possibilidades ocorre:*

(i) *$c=0$ e existe $0 \le r \le n-1$ tal que $n=s+r$, $m=2s+r$ e $f(M^n)$ é um subconjunto aberto de*

$$\mathbb{S}^1(r_1)\times\ldots\times\mathbb{S}^1(r_s)\times\mathbb{R}^r\subset\mathbb{R}^m.$$

(ii) *$c\neq 0$ e f é totalmente geodésica.*

Lema 5.1. *Seja $f: M^n\to\mathbb{R}^{n+p}$, $n-3\geq p\geq 1$, uma imersão isométrica conformemente Euclidiana com fibrado normal plano. Se ω^f é identicamente nula, então, com as notações do Capítulo 3:*

(i) *As funções $f_1,\ldots f_{p-\ell}\in C^\infty(M)$ são constantes e os campos $\xi_1,\ldots,\xi_{p-\ell}\in\Gamma(N_fM)$ são paralelos.*

(ii) *Os campos normais principais de Moebius são paralelos.*

(iii) *As distribuições Δ e $\Delta^\perp$ definidas em (3.1) são totalmente geodésicas com respeito à $\langle\,,\,\rangle^*$. Em particular, $(M^n,\langle\,,\,\rangle^*)$ é localmente um produto Riemanniano.*

Demonstração. A equação conforme de Codazzi

$$({}^f\nabla^\perp_{X_i}\beta)(X_k,X_j)=({}^f\nabla^\perp_{X_k}\beta)(X_i,X_j),$$

para $p-\ell+1\le i,j\le n$ e $1\le k\le p-\ell$, é equivalente à

$$\langle\nabla^*_{X_i}X_j,X_k\rangle^*(\bar\eta-\beta(X_k,X_k))=\langle X_i,X_j\rangle^{*\,f}\nabla^\perp_{X_k}\bar\eta.$$

Como $||\bar\eta||=\frac{1}{n}$, tomando o produto interno de ambos os membros da equação anterior com $\bar\eta$ obtemos

$$\langle\nabla^*_{X_i}X_j,X_k\rangle^* f_k^2=0.$$

Portanto,

$$\langle\nabla^*_{X_i}X_j,X_k\rangle^*=0,$$

que mostra que Δ é uma distribuição totalmente geodésica. De (3.14) obtemos então que f_i, $1\le i\le p-\ell$, são funções constantes não nulas. Concluímos das Proposições 3.2 e 3.5 que $\Delta^\perp$ é totalmente geodésica. Pelo Teorema 2.2, $(M^n,\langle\,,\,\rangle^*)$ é localmente um produto Riemanniano $M_1^{p-\ell}\times M_2^{n-p+\ell}$.

Observe que, se $\ell=p-1$, então

$$({}^f\nabla^\perp_{X_1}\beta)(X_j,X_j)=({}^f\nabla^\perp_{X_j}\beta)(X_1,X_j),$$

para $2\le j\le n$, é equivalente à

$$-\frac{1}{n}{}^f\nabla^\perp_{X_1}\xi_1={}^f\nabla^\perp_{X_1}\bar\eta=\langle\delta,X_1\rangle(\beta(X_1,X_1)-\bar\eta)=0. \tag{5.1}$$

Decorre de (3.13) (caso $0\le\ell\le p-2$) e (3.6) e (5.1) (caso $\ell=p-1$) que os campos $\xi_1,\ldots,\xi_{p-\ell}$ são paralelos. Portanto, os campos normais principais de Moebius de f definidos em (3.12) (caso $0\le\ell\le p-2$) e (3.5) (caso $\ell=p-1$) são também paralelos. □

O próximo resultado mostra que, se $f: M^n \to \mathbb{R}^{n+p}$, $n-3 \geq p \geq 1$, é uma subvariedade conformemente Euclidiana e isoparamétrica de Moebius, então a condição de que os campos normais principais de Moebius sejam paralelos é automática. Mais precisamente, decorre do lema anterior e do Corolário 5.1 o seguinte resultado:

Proposição 5.3. *Seja $f: M^n \to \mathbb{R}^{n+p}$, $n-3 \geq p \geq 1$, uma imersão isométrica conformemente Euclidiana com fibrado normal plano. Então as seguintes afirmações são equivalentes*:

(i) $\omega^f \equiv 0$

(ii) *f é uma subvariedade isoparamétrica de Moebius.*

(iii) *f é uma subvariedade de Dupin cujos campos normais principais de Moebius são paralelos.*

A seguinte observação será útil na demonstração do próximo resultado. Se $f_j: M^n \to \tilde{M}^m$, $1 \leq j \leq 2$, são como em (2.30), então a partir de (2.16) concluímos que as conexões normais de f_1 e f_2 são relacionadas por

$$
{}^{f_2}\nabla^{\perp}_X \xi = {}^{f_1}\nabla^{\perp}_X \xi + \frac{X(\lambda \circ f)}{\lambda \circ f} \xi, \tag{5.2}
$$

para quaisquer $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\xi \in \Gamma(N_f M)$.

Estamos agora em condições de mostrar uma versão do principal resultado deste capítulo.

Teorema 5.2. *Seja $f: M^n \to \mathbb{R}^{n+p}$, $n-3 \geq p \geq 1$, uma imersão isométrica conformemente Euclidiana com fibrado normal plano e própria. Se ω^f é identicamente nula, então $f(M^n)$ é a imagem por uma transformação conforme de $\mathbb{R}^{n+p}$ de um subconjunto aberto de uma subvariedade de um dos seguintes Exemplos:*

(i) *4.1, 4.2 ou 4.3, em que a curva $\gamma: I \to \mathbb{Q}^2_{\tilde{c}}$, com $\tilde{c} = 0, 1$ ou -1, respectivamente, tem função curvatura $\kappa(s)$ constante e positiva.*

(ii) *um cilindro $g \times Id$ sobre um toro plano*

$$
g: \mathbb{S}^1(r_1) \times \ldots \times \mathbb{S}^1(r_{p-\ell}) \to \mathbb{R}^{2(p-\ell)} \subset \mathbb{R}^{2p-\ell},
$$

em que $0 \leq \ell \leq p-2$.

Demonstração. Como f é conformemente Euclidiana e $n-3 \geq p \geq 1$, decorre do Teorema 2.4 que f admite um campo normal principal η de multiplicidade $n-p+\ell$, para algum $0 \leq \ell \leq p-1$.

Sejam $(\Delta, \Delta^{\perp})$ as distribuições diferenciáveis definidas em (3.1). Sabemos do Lema 5.1 que as distribuições Δ e $\Delta^{\perp}$ são totalmente geodésicas com respeito à $\langle\,,\rangle^*$. Em particular, $(M^n, \langle\,,\rangle^*)$ é localmente um produto Riemanniano. Entretanto, da Proposição 3.1 e do Teorema 2.7 temos que f é, a menos de uma composição com uma transformação conforme em $\mathbb{R}^{n+p}$, uma subvariedade $f: M^{p-\ell} \times \mathbb{Q}_{-\tilde{c}}^{n-p+\ell} \to \mathbb{R}^{n+p}$ construída a partir de uma imersão isométrica $g: U \subset M_{\tilde{c}}^{p-\ell} \to \mathbb{Q}_{\tilde{c}}^{2p-\ell}$ com $\nu^g \equiv 0$ em M^n (veja Exemplos 4.1, 4.2 e 4.3). Estes exemplos possuem a métrica de Moebius da forma

$$\langle\, , \rangle^* = (p-\ell)^2 ||\mathscr{H}^g||^2 (ds^2 + \sigma_{-\tilde{c}}),$$

em que ds^2 é a métrica induzida por g e $\sigma_{-\tilde{c}}$ é a métrica canônica de $\mathbb{Q}_{-\tilde{c}}^{n-p+\ell}$. Portanto, $||\mathscr{H}^g||$ é uma aplicação constante não nula.

Agora, provaremos que o campo curvatura média de $g: U \subset M_{\tilde{c}}^{p-\ell} \to \mathbb{Q}_{\tilde{c}}^{2p-\ell}$ é paralelo para qualquer $\tilde{c} = 0, 1$ ou -1. Observe que, do Lema 5.1, decorre que o campo $\bar{\eta}$ é paralelo.

Seja f o cilindro. O campo normal principal de f com multiplicidade $n-p+\ell$ é $\eta = 0$. Logo seu campo normal principal de Moebius é

$$\bar{\eta} = -\rho^{-1}\mathscr{H}^f = -(p-\ell)^{-1}||\mathscr{H}^g||^{-1}\frac{1}{n}(p-\ell)\mathscr{H}^g = -\frac{1}{n}\frac{\mathscr{H}^g}{||\mathscr{H}^g||}.$$

Assim, ${}^g\nabla^\perp \mathscr{H}^g \equiv 0$.

Seja f o cone generalizado. O campo normal principal de f com multiplicidade $n-p+\ell$ é $\eta = 0$. Logo o campo normal principal de Moebius de f é

$$\bar{\eta} = -\rho^{-1}\mathscr{H}^f = -\frac{z_1}{(p-\ell)||\mathscr{H}^g||}\frac{1}{n}\frac{1}{z_1}(p-\ell)\mathscr{H}^g = -\frac{1}{n}\frac{\mathscr{H}^g}{||\mathscr{H}^g||}.$$

Portanto, ${}^g\nabla^\perp \mathscr{H}^g \equiv 0$.

Seja f a subvariedade de rotação sobre g. O campo normal principal de f com multiplicidade $n-p+\ell$ é $\eta = -\frac{1}{g_{2p-\ell}^3}\Theta_*((\operatorname{grad} z_{2p-\ell}) \circ g)^\perp$. Observe que $\eta - \mathscr{H}^f = -\frac{1}{n}\frac{1}{g_{2p-\ell}^2}(p-\ell)\Theta_*\mathscr{H}^g$, logo

$$\bar{\eta} = \rho^{-1}(\eta - \mathscr{H}^f) = -\frac{1}{n||\mathscr{H}^g||_{dz^2}}\Theta_*\frac{\mathscr{H}^g}{g_{2p-\ell}}. \tag{5.3}$$

Usando (5.2) temos

$$\begin{aligned}
0 = {}^f\nabla_X^\perp \Theta_* \frac{\mathscr{H}^g}{g_{2p-\ell}} &= \Theta_* {}^g\nabla_X^\perp \frac{\mathscr{H}^g}{g_{2p-\ell}} + \frac{X(g_{2p-\ell})}{g_{2p-\ell}^2}\Theta_*\mathscr{H}^g \\
&= \frac{1}{g_{2p-\ell}}\Theta_* {}^g\nabla_X^\perp \mathscr{H}^g,
\end{aligned}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M^{p-\ell})$. Portanto, ${}^g\nabla^\perp \mathscr{H}^g \equiv 0$.

Para $0 \le \ell \le p-1$, a dimensão do espaço $N_1^g(x) := \operatorname{span}\{\eta_i(x)\}_{i=1}^{p-\ell}$ é $p-\ell$ para todo $x \in M^{p-\ell}$. Então, da Proposição 5.2, temos que N_1 é um subfibrado paralelo de $N_g M^{p-\ell}$. Assim, $g(U) \subset \mathbb{Q}_{\tilde{c}}^{2(p-\ell)} \subset \mathbb{Q}_{\tilde{c}}^{2p-\ell}$ para qualquer $\tilde{c}$.

Se $\ell = p-1$, então $\gamma(I) \subset \mathbb{Q}_{\tilde{c}}^2 \subset \mathbb{Q}_{\tilde{c}}^{p+1}$. Para $0 \le \ell \le p-2$, o Teorema 5.1 mostra que $\tilde{c} = 0$, pois $\tilde{c} \neq 0$ implica g totalmente geodésica, ou seja, todos os η_i são nulos, que é uma contradição. Neste caso, $g(U)$ é um subconjunto aberto do toro plano

$$\mathbb{S}^1(r_1)\times\ldots\times\mathbb{S}^1(r_{p-\ell})\subset\mathbb{R}^{2(p-\ell)}.$$

□

O resultado final é uma consequência do teorema anterior e da Proposição 5.3.

Corolário 5.2. *Seja $f: M^n\to\mathbb{R}^{n+p}$, $n-3\geq p\geq 1$, uma imersão isométrica, própria, conformemente Euclidiana e isoparamétrica de Moebius. Então $f(M^n)$ é a imagem por uma transformação conforme de $\mathbb{R}^{n+p}$ de um subconjunto aberto de uma subvariedade de um dos seguintes itens:*

(i) $\mathbb{S}^1(r_1)\times\ldots\times\mathbb{S}^1(r_{p-\ell})\times\mathbb{R}^{n-p+\ell}\subset\mathbb{R}^{2(p-\ell)}\times\mathbb{R}^{n-p+\ell}=\mathbb{R}^{n+p-\ell},\qquad 0\leq\ell\leq p-1.$

(ii) *A imagem por Θ de $\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}^{n-1}_+\subset\mathbb{S}^2\times\mathbb{R}^{n-1}_+$, em que $\Theta:\mathbb{S}^2\times\mathbb{R}^{n-1}_+\to\mathbb{R}^{n+1}$ é definido no Exemplo 4.2.*

(iii) *A imagem por Θ de $\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^{n-1}\subset\mathbb{R}^2_+\times\mathbb{S}^{n-1}$, em que $\Theta:\mathbb{R}^2_+\times\mathbb{S}^{n-1}\to\mathbb{R}^{n+1}$ é definido no Exemplo 4.3.*

REFERÊNCIAS

CARTAN, E. La déformation des hypersurfaces dans l'espace conforme réel a $n \geq 5$ dimensions. **Bull. Soc. Math. France.**, v. 45, p. 57–121, 1917. Citado nas páginas 16 e 40.

CECIL, T. E.; RYAN, P. J. **Tight and taut immersions of manifolds**. [S.l.]: Research Notes in Mathematics 107, Pitman Advanced Publishing Program, 1985. Citado na página 17.

DAJCZER, M.; FLORIT, L.; TOJEIRO, R. On a class of submanifolds carrying an extrinsic totally umbilical foliation. **Israel J. Math.**, v. 125, p. 203–220, 2001. Citado na página 50.

DAJCZER, M.; ONTI, C.-R.; VLACHOS, T. Conformally flat submanifolds with flat normal bundle. **Manuscripta Math.**, v. 163, p. 407–426, 2020. Citado na página 40.

DAJCZER, M.; TOJEIRO, R. Submanifolds of constant sectional curvature with parallel or constant mean curvature. **Tohoku Math. J.**, v. 45, p. 43–49, 1993. Citado nas páginas 70 e 82.

____. **Submanifold theory beyond an introduction**. [S.l.]: Universitext. Springer, 2019. Citado nas páginas 19, 36, 40, 50, 64, 69 e 82.

ENOMOTO, K. Flat surfaces with mean curvature vector of constant lenght in Euclidean spaces. **Proc. Amer. Math. Soc.**, v. 110, n. 1, p. 211–215, 1990. Citado na página 70.

GUO, Z.; LI, T.; LIN, L.; MA, X.; WANG, C. P. Classification of hypersurfaces with constant Möbius curvature in $\mathbb{S}^{m+1}$. **Math. Z.**, v. 271, p. 193–219, 2012. Citado nas páginas 16, 17 e 79.

GUO, Z.; LI, T.; WANG, C. Classification of hypersurfaces with constant Möbius Ricci curvature in $\mathbb{R}^{n+1}$. **Tohoku Math. J.**, v. 67, p. 383–403, 2015. Citado na página 16.

HU, Z.; ZHAI, S. Möbius isoparametric hypersurfaces with three distinct principal curvatures, II. **Pacific J. Math.**, v. 249, n. 2, p. 343–370, 2011. Citado na página 16.

____. Submanifolds with parallel Möbius second fundamental form in the unit sphere. **Results Math.**, v. 73, p. 93, 2018. Citado na página 16.

KULKARNI, R. Curvature structures and conformal transformations. **J. Differential Geom.**, v. 4, p. 425–451, 1969. Citado na página 38.

LI, F.; GUO, Z. Surfaces with closed Möbius form. **Differential Geom. Appl.**, v. 39, p. 20–35, 2015. Citado na página 16.

LI, H. Z.; LIU, H. L.; WANG, C. P. Möbius isoparametric hypersurfaces in $\mathbb{S}^{n+1}$ with two distinct principal curvatures. **Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)**, v. 18, n. 3, p. 437–446, 2002. Citado na página 17.

LI, H. Z.; WANG, C. P. Surfaces with vanishing Moebius form in $\mathbb{S}^n$. **Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)**, v. 19, n. 4, p. 671–678, 2003. Citado na página 16.

LI, T.; MA, X.; WANG, C. P. Deformations of hypersurfaces preserving the Möbius metric and a reduction theorem. **Adv. Math.**, v. 256, p. 156–205, 2014. Citado nas páginas 16, 17, 53 e 79.

LI, T.; QING, J.; WANG, C. P. Möbius curvature, Laguerre curvature and Dupin hypersurface. **Adv. Math.**, v. 311, p. 249–294, 2017. Citado na página 16.

LIN, L.; GUO, Z. Hypersurfaces with closed Möbius form and three distinct constant Möbius principal curvatures in $\mathbb{S}^{m+1}$. **Asian J. Math.**, v. 22, n. 1, p. 181–210, 2018. Citado na página 16.

MEUMERTZHEIM, M.; RECKZIEGEL, H.; SCHAAF, M. Decomposition of twisted and warped product nets. **Result. Math.**, v. 36, p. 297–312, 1999. Citado nas páginas 29 e 30.

MOORE, J. Conformally flat submanifolds of Euclidean space. **Math. Ann.**, v. 225, p. 89–97, 1977. Citado nas páginas 17 e 40.

RECKZIEGEL, H. Krummungsflachen von isometrischen immersionen in raume konstante krummung. **Math. Ann.**, v. 223, p. 169–181, 1976. Citado na página 22.

RODRIGUES, L. A.; TENENBLAT, K. A characterization of Moebius isoparametric hypersurfaces of the sphere. **Monatsh Math.**, v. 158, n. 3, p. 321–327, 2009. Citado na página 16.

TOJEIRO, R. Conformal de Rham decomposition of Riemannian manifolds. **Houston J. Math.**, v. 32, p. 725–743, 2006. Citado na página 29.

WANG, C. P. Moebius geometry of submanifolds in $\mathbb{S}^n$. **Manuscripta Math.**, v. 96, p. 517–534, 1998. Citado nas páginas 15, 40 e 47.

YAU, S. T. Remarks on conformal transformations. **J. Differential Geom.**, v. 8, p. 369–381, 1973. Citado na página 37.

ICMC USP
SÃO CARLOS