

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

**Do número de Milnor à obstrução de Euler de uma aplicação  
em singularidades determinantis**

**Raphael de Omena Marinho**

Tese de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em  
Matemática (PPG-Mat)



SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: \_\_\_\_\_

**Raphael de Omena Marinho**

Do número de Milnor à obstrução de Euler de uma  
aplicação em singularidades determinantis

Tese apresentada ao Instituto de Ciências  
Matemáticas e de Computação – ICMC-USP,  
como parte dos requisitos para obtenção do título  
de Doutor em Ciências – Matemática. *VERSÃO  
REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Nivaldo de Góes Grulha Júnior  
Coorientadora: Profa. Dra. Miriam da Silva Pereira

**USP – São Carlos**  
**Fevereiro de 2023**

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi  
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,  
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

d278n de Omena Marinho, Raphael  
Do número de Milnor à obstrução de Euler de uma  
aplicação em singularidades determinantis / Raphael  
de Omena Marinho; orientador Nivaldo de Góes Grulha  
Júnior; coorientadora Miriam da Silva Pereira. --  
São Carlos, 2023.  
93 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em  
Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e  
de Computação, Universidade de São Paulo, 2023.

1. Teoria de Singularidades. 2. Invariantes  
Locais. 3. Singularidades Determinantis. 4. Teoria  
de Obstrução. I. de Góes Grulha Júnior, Nivaldo,  
orient. II. da Silva Pereira, Miriam, coorient.  
III. Título.

**Raphael de Omena Marinho**

From Milnor number to the Euler obstruction of a map on  
determinantal singularities

Thesis submitted to the Instituto de Ciências  
Matemáticas e de Computação – ICMC-USP – in  
accordance with the requirements of the Mathematics  
Graduate Program, for the degree of Doctor in Science.  
*FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Nivaldo de Góes Grulha Júnior

Co-advisor: Profa. Dra. Miriam da Silva Pereira

**USP – São Carlos**  
**February 2023**



*Este trabalho é dedicado as 700 mil famílias brasileiras afetadas pela pandemia do coronavírus entre os anos de 2020 e 2021. Dedico aos cientistas que mesmo com todo descrédito e barreiras ideológicas evitaram que outros brasileiros perecerem.*





# AGRADECIMENTOS

---

---

Nos últimos anos vivenciamos a pior pandemia do século, o covid-19. Nós que somos seres políticos e sociáveis por natureza, estávamos isolados da interação física; sobreviver ao vírus foi o primeiro desafio e sair mentalmente saudável, tem sido a segunda.

Agradeço aos estudiosos e líderes que incansavelmente lutaram contra o vírus e negacionismo científico. Cabe a história nomear os protagonistas que nos salvaram e aqueles que nos sentenciaram.

Durante o primeiro ano da crise sanitária, morei com Igor Chagas, Tiago Amorim e Verônica Santana; a eles agradeço pelos bons momentos que me mantiveram sã. Agradeço as minhas amigas Amanda Monteiro, Aline Bartel e Rejiane Calixto que estiveram em contato online nesse período, não apenas para discutir matemática, mas principalmente compartilhar os sentimentos angustiantes do isolamento.

Quando pensávamos que o pesadelo estava acabando, na verdade estava se intensificando. Em casa, o apoio e suporte veio daqueles que sempre estiveram comigo. Agradeço à minha família pelas boas risadas que me mantiveram erguido.

Na volta presencial, reta final desse trabalho, pude aprender a viver de forma descontraída com os amigos do laboratório de Singularidades e amigos do prédio Ibiza. Em especial, agradeço a Andrés Perez e Eliada Andrade.

Esse trabalho não seria possível sem a fuga alívio que meus familiares e amigos proporcionaram. Mas também não seria possível sem a aprendizagem matemática discutida com os professores desses anos. Em nome da professora Cidinha, agradeço ao grupo de singularidades do ICMC/USP que facilitou chegar até aqui.

Aos meus orientadores Miriam Pereira e Nivaldo Grulha Jr., agradeço pelas discussões que nos levaram a finalização desse texto. Com vocês aprendi as sutilezas acadêmicas, fundamentais para carreira de pesquisador e de professor.

Deixo meus agradecimentos a banca avaliadora, professor Aldício Miranda, professora Cidinha e professor Marcelo Escudeiro, os quais aceitaram participar e indicar melhorias.

Aos servidores e professores do Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, agradeço por simplificar as burocracias exigidas até aqui. Agradeço o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.



*“Mais cedo brotou alecrim em segredo  
Tava com jeito que ia dar capim”  
(Emicida)*



# RESUMO

DE OMENA, R. M. **Do número de Milnor à obstrução de Euler de uma aplicação em singularidades determinantis**. 2023. 93 p. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2023.

Uma importante direção na Teoria de Singularidades é a investigação de invariantes locais para germes de variedades singulares. Como um passo natural nessa direção, estudamos nesse trabalho as singularidades determinantis, que são vistas como generalizações de singularidades isoladas de interseção completa. Nossa principal contribuição é a relação entre invariantes como característica de Euler evanescente, multiplicidade polar, índice de Poincaré-Hopf e obstruções de Euler, sobre uma singularidade isolada determinantal.

**Palavras-chave:** Invariantes Locais, Singularidades Determinantis, Obstrução de Euler.



# ABSTRACT

DE OMENA, R. M. **From Milnor number to the Euler obstruction of a map on determinantal singularities**. 2023. 93 p. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2023.

An important direction in Singularity Theory is the investigation of local invariants for germs of singular varieties. As natural step in this direction, we study in this work the determinantal singularities, which are seen as generalizations of isolated complete intersection singularities. Our main contribution is the relation among invariants, as the vanishing Euler characteristic, polar multiplicity, Poincaré-Hopf index and Euler obstructions, over an isolated determinantal singularity.

**Keywords:** Local Invariants, Determinantal Singularities, Euler Obstruction.





# LISTA DE ILUSTRAÇÕES

---

---

|   |    |
|---|----|
| Figura 1 – Campos Vetoriais em dimensão 2 . . . . . | 41 |
| Figura 2 – Superfície Quadrática de Segre . . . . . | 45 |



# LISTA DE TABELAS

---

---

|  |    |
|--|----|
| Tabela 1 – Invariantes de Superfícies Simples Determinantis . . . . .  | 79 |
| Tabela 2 – Invariantes de 3-Variedades Simples Determinantis . . . . . | 82 |
| Tabela 3 – Invariantes de 4-Variedades Simples Determinantis . . . . . | 86 |



# SUMÁRIO

---

---

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 1   | INTRODUÇÃO . . . . .                              | 21 |
| 2   | PRELIMINARES . . . . .                            | 25 |
| 2.1 | Espaços analíticos complexos . . . . .            | 26 |
| 2.2 | Estratificações e teoria de Morse . . . . .       | 30 |
| 2.3 | Variedades polares . . . . .                      | 33 |
| 2.4 | Equivalência de germes de aplicações . . . . .    | 34 |
| 2.5 | Teoria de obstrução . . . . .                     | 38 |
| 2.6 | Índice de Poincaré-Hopf e índice radial . . . . . | 40 |
| 3   | SINGULARIDADES DETERMINANTAIS . . . . .           | 43 |
| 3.1 | Variedades determinantis genéricas . . . . .      | 43 |
| 3.2 | Variedades determinantis . . . . .                | 46 |
| 3.3 | Topologia de uma EIDS . . . . .                   | 47 |
| 4   | INVARIANTES LOCAIS . . . . .                      | 57 |
| 4.1 | O número de Milnor e generalizações . . . . .     | 57 |
| 4.2 | A obstrução de Euler local . . . . .              | 64 |
| 4.3 | A obstrução de Euler de uma aplicação . . . . .   | 70 |
| 4.4 | O número de Bruce-Roberts . . . . .               | 75 |
| 5   | APLICAÇÃO EM ICMC2 . . . . .                      | 79 |
|     | REFERÊNCIAS . . . . .                             | 89 |



---

# INTRODUÇÃO

---

Um dos maiores interesses na matemática é descrever fenômenos do cotidiano e suas alterações. Fenômenos instáveis são encontrados diariamente, desde o preparo do café até o comportamento de um cão que ataca o carteiro da sua rua.

Para estudarmos tais fenômenos, procuramos por equações que os descrevam. Em 1955, Whitney estuda as singularidades estáveis de aplicações diferenciáveis do plano no plano, dando início a Teoria de Singularidades. Outras investigações nesta mesma direção são feitas por Thom em 1956.

Desde Descartes, no século XVII, com a criação do sistema de coordenadas, o estudo de equações está associado ao estudo da geometria de suas soluções. Nas mãos de Salvador Dalí, a geometria dos fenômenos classificados por Thom se tornam pinturas em *Série de las Catástrophes*.

A abrangência da Teoria de Singularidades nos permite utilizar diferentes ferramentas da matemática, sejam geométricas, topológicas ou algébricas. Para a comodidade do leitor, relembramos no Capítulo 2 definições, exemplos e resultados que compõem os pré-requisitos para os demais capítulos. As seções deste capítulo abordam conteúdos conhecidos nas áreas de Geometria Complexa, Topologia Diferencial e Topologia Algébrica, Álgebra Comutativa e Geometria Algébrica.

Com as mais variadas ferramentas, singularistas podem responder diversas questões na matemática. Uma das direções é a investigação de invariantes locais para singularidades em variedades e em aplicações, que podem nos fornecer informações geométricas, topológicas e algébricas do objeto estudado. Nosso objetivo nesse trabalho é o entendimento de alguns desses invariantes nas singularidades determinantis.

Seja  $M_{m,n}^t$  o conjunto de todas as matrizes com entradas complexas com posto limitado por  $t$ . O nosso principal objeto de estudo são as singularidades dadas como imagem inversa de

$M_{m,n}^t$  por uma aplicação analítica; neste caso falaremos que é uma singularidade determinantal do tipo  $(m, n, t)$ . As singularidades determinantis generalizam as singularidades isoladas de interseção completa (ICIS) no seguinte sentido: se  $(X, 0)$  é uma ICIS, então pode ser vista como uma singularidade determinantal do tipo  $(1, n, 1)$ , em que  $n$  é sua codimensão.

No Capítulo 3 pode-se encontrar a definição precisa e exemplos dessas singularidades. Ainda neste capítulo, reunimos algumas técnicas para obter informações topológicas das singularidades determinantis. Relembramos alguns resultados surpreendentes, como o tipo homotópico da fibra de Milnor numa singularidade determinantal isolada (IDS), que nem sempre é um bouquet de esferas de mesma dimensão; veja o Exemplo 3.21.

A principal contribuição desse trabalho se encontra no Capítulo 4, onde apresentamos resultados sobre invariantes locais sobre singularidades determinantis. Começamos pelo número de Milnor  $\mu(X)$ , que está bem definido para hipersuperfícies com singularidade isolada e ICIS; em ambos os casos esse inteiro pode ser calculado em termos da característica de Euler evanescente  $(-1)^{\dim X}(\chi(F) - 1)$ , em que  $F$  é a fibra de Milnor. Como comentado, em uma singularidade determinantal, a fibra de Milnor não se comporta tão bem para definirmos o número de Milnor como originalmente foi feito; ainda assim podemos estudar as informações que o número  $\nu(X, 0) := (-1)^{\dim X}(\chi(F) - 1)$  nos fornece.

Nesse mesmo capítulo, apresentamos definições e resultados dos invariantes conhecidos como obstrução de Euler. A obstrução de Euler local foi definida por MacPherson (MACPHERSON, 1974) como um dos principais ingredientes na construção de classes características para variedades singulares. A definição original usa formas diferenciáveis, mas a abordagem escolhida aqui é por campos de vetores, uma definição equivalente introduzida por Brasselet e Schwartz (BRASSELET; SCHWARTZ, 1981).

Em poucas palavras, quando o campo vetorial está associado a um campo gradiente de uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa com singularidade isolada, obtemos a obstrução de Euler de uma função  $Eu_{f,X}(0)$ . Esse número também é visto como uma generalização do número de Milnor, sendo sua interpretação geométrica apresentada por Seade, Tibăr e Verjovsky (SEADE; TIBĂR; VERJOVSKY, 2005), como o número de pontos de Morse de uma Morseficação estratificada da função  $f$ .

As mesmas ideias da obstrução para o campo são desenvolvidas para a obstrução de um  $k$ -campo. Para um germe de aplicação  $f : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^k, 0)$ , Grulha (GRULHA-JR, 2007) associa um  $k$ -campo em que cada entrada é relacionada com o campo gradiente da função coordenada correspondente. Essa definição nos leva a obstrução de Euler da aplicação, que tem sua informação geométrica descrita em (GRULHA-JR; RUIZ; SANTANA, 2022), em que os autores expressam em termos do número de pontos de Morse de uma Morseficação apropriada das funções coordenadas.

A partir do resultado acima, podemos entender e relacionar os invariantes do capítulo



sobre uma IDS. Destaco aqui a fórmula do tipo Lê-Greuel, que é um dos itens do Teorema 4.38. Se  $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$  é uma IDS e  $f : (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  é uma aplicação tal que  $f_1|_{X \cap f_2^{-1}(0)}$  tem singularidade isolada e  $f_2|_X$  é linear, então a obstrução de Euler da aplicação  $f$  é

$$Eu_{f, X \cap f_2^{-1}(0)}(x) = v(X \cap f_2^{-1}(0), 0) + v(X \cap f_2^{-1}(0) \cap f_1^{-1}(0), 0). \quad (1.1)$$

Utilizando a equação 1.1, calculamos os invariantes das singularidades isoladas simples Cohen-Macaulay de codimensão 2 no Capítulo 5. Essas singularidades são classificadas em (FRÜHBIS-KRÜGER; NEUMER, 2010) e são singularidades determinantis do tipo  $(2, 3, 2)$ , sendo todas exemplos de singularidades determinantis que não são interseção completa.

Os resultados obtidos na Seção 4.3 também são aplicados para ICIS. Relacionamos mais um invariante que tem sido estudado para esse caso: o número de Bruce-Roberts. A partir dos resultados em (LIMA-PEREIRA, 2022), obtemos relações com os invariantes que estudamos no Capítulo 4.



---

## PRELIMINARES

---

A Teoria de Singularidades tem sido uma área da matemática moderna que se relaciona intimamente com outros campos de estudo. Dentre esses podemos citar a Geometria Algébrica e a Álgebra Comutativa, a Geometria Complexa e a Análise Complexa, a Topologia Diferencial e a Topologia Algébrica. Além de áreas da matemática, a Teoria de Singularidades tem suas aplicações em ciências naturais, seja na física, engenharias e modelagem matemática.

Motivados por essas relações, recordamos neste capítulo algumas técnicas já conhecidas na literatura que são fundamentais para o entendimento dos demais capítulos. Começamos na Seção 2.1 abordando as singularidades a partir da Geometria Complexa, com suas conexões com a Álgebra Comutativa.

Em seguida, na Seção 2.2 revemos uma das maneiras de estudar tais singularidades por meio de estratos, estendendo algumas teorias desenvolvidas das variedades suaves para as variedades estratificadas. Nessa mesma seção fazemos esse estudo para aplicações com singularidades.

Ainda neste Capítulo falamos de alguns invariantes analíticos que são estudados nesse trabalho. O primeiro deles é abordado na Seção 2.3, conhecido como multiplicidade polar. Na Seção 2.5 relembramos a construção da Teoria de Obstrução, o que nos permite definir outro invariante de nosso interesse. Por fim, na Seção 2.6, apresentamos os índices de campos vetoriais e de formas diferenciais.

Ao estudar um invariante é natural se perguntar para quais classes de objetos o invariante está determinado. A Seção 2.4 é dedicada as definições das classes de equivalências que temos nas singularidades e qual tipo de classificação consideramos.

## 2.1 Espaços analíticos complexos

Nesta seção fazemos uma breve revisão de conceitos de Geometria Complexa. Sugerimos (GREUEL; LOSSEN; SHUSTIN, 2007) para aqueles interessados em uma leitura mais detalhada dessa teoria.

Uma definição básica que recordamos é o de funções holomorfas de várias variáveis complexas, apresentada a seguir. Seja  $U \subset \mathbb{C}^N$  um domínio, isto é, um subconjunto aberto e conexo.

**Definição 2.1.** Uma função  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  é chamada de **holomorfa** em  $U$  se para todo  $z \in U$  existem uma vizinhança aberta  $V \subset U$  de  $z$  e funções  $\Delta_1, \dots, \Delta_N : V \rightarrow \mathbb{C}$  contínuas em  $z$  tais que para todo  $x \in V$ ,

$$f(x) = f(z) + \sum_{i=1}^N (x_i - z_i) \Delta_i(x).$$

Neste caso, denotamos as funções  $\Delta_i(z) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(z)$ .

A definição de função holomorfa está estritamente ligada a definição de função analítica, coincidindo sob algumas hipóteses.

**Definição 2.2.** A função  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  é chamada de **analítica** em  $U$  se para todo  $z \in U$  existem uma vizinhança aberta  $V \subset U$  de  $z$  e uma série de potências  $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^N} a_\alpha (x - z)^\alpha$  convergindo, em  $V$ , para  $f$ . Denotamos  $(x - z)^\alpha = \prod_{i=1}^N (x_i - z_i)^{\alpha_i}$ .

**Teorema 2.3** (Lema de Osgood). Seja  $U \subset \mathbb{C}^N$  um aberto. Uma função contínua  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  é analítica se, e somente se, é holomorfa.

Uma das vantagens em estudar as séries de potências é que o conjunto de séries de potências que convergem numa vizinhança de  $z \in \mathbb{C}^N$  formam um anel fatorial Noetheriano, o que nos fornece ferramentas algébricas. Denotamos esse anel por  $\mathbb{C}_z\{x_1, \dots, x_N\}$  (ou abreviadamente  $\mathbb{C}_z\{x\}$ ); quando  $z = 0$ , escrevemos simplesmente  $\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_N\}$ .

**Definição 2.4.** A aplicação  $F = (f_1, \dots, f_k) : U \rightarrow \mathbb{C}^k$  é chamada de **aplicação holomorfa** se  $f_i : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $i = 1, \dots, k$  são funções holomorfas no domínio  $U \subset \mathbb{C}^N$ . Uma aplicação holomorfa  $F : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$  é dita **biholomorfa** se é bijetiva, e se sua inversa é holomorfa.

Recordamos que a *matriz Jacobiana* de uma aplicação holomorfa  $F = (f_1, \dots, f_k)$  num ponto  $z$  é

$$J(F)(z) = J(f_1, \dots, f_k)(z) := \begin{pmatrix} J(f_1)(z) \\ \vdots \\ J(f_k)(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(z) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N}(z) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(z) & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_N}(z) \end{pmatrix}.$$

**Definição 2.5.** Um ponto  $z \in U$  é dito **ponto regular** da aplicação  $F$  se o posto da matriz Jacobiana  $J(F)(z)$  é máximo. Caso contrário, dizemos que  $z$  é um **ponto singular** de  $F$ ; o conjunto de pontos singulares será denotado por  $\Sigma(F)$ . Quando consideramos uma função  $f$ , é comum chamar os pontos singulares de **pontos críticos**.

De maneira mais geral do que os conjuntos algébricos, que são definidos como o conjunto de zeros de polinômios, podemos definir o conceito de conjuntos analíticos considerando funções analíticas. Porém, diferentemente das funções polinomiais as funções analíticas não são, em geral, definidas globalmente e, então, definimos como segue.

**Definição 2.6.** Seja  $U \subset \mathbb{C}^N$  um domínio. Um subconjunto  $X \subset U$  é chamado de analítico em  $z \in U$  se existem uma vizinhança  $V \subset U$  de  $z$  e finitas funções holomorfas  $f_1, \dots, f_k$  definidas em  $V$  tais que

$$X \cap V = V(f_1, \dots, f_k) := \{x \in V; f_1(x) = \dots = f_k(x) = 0\}.$$

O conjunto  $X$  é chamado de **variedade analítica** se for analítico para todo  $z \in U$ . O conjunto  $X$  é chamado **localmente analítico** se é analítico para todo  $x \in X$ .

**Observação 2.7.** Em geral, uma variedade analítica  $V$  é definida como um conjunto de zeros de funções analíticas num aberto tal que  $V$  seja *irredutível*, i.e, não pode ser escrito como a união  $V = V_1 \cup V_2$ , em que  $V_1, V_2$  são fechados. Aqui, escolhemos chamar de variedade os subconjuntos de  $\mathbb{C}^N$  que são localmente zeros de equações analíticas.

Uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  definida numa variedade analítica  $X$  é **holomorfa** se para todo  $x \in X$  existe uma vizinhança  $V$  de  $x$  em  $\mathbb{C}^N$  tal que  $f|_{X \cap V}$  é a restrição de uma função holomorfa em  $V$ .

**Definição 2.8.** Seja  $X$  uma variedade analítica. Um ponto  $x \in X$  é **singular** se existe uma vizinhança  $V$  de  $x$  com  $X \cap V = V(f_1, \dots, f_k)$ , tal que a matriz  $J(f_1, \dots, f_k)(x)$  não tem posto máximo. Caso contrário, o ponto é dito **regular** ou **suave**. Se  $X$  possui apenas pontos suaves, chamamos de **variedade suave**. Denotamos por  $Sing(X)$  o conjunto dos pontos singulares de  $X$  e por  $X_{reg} = X \setminus Sing(X)$  o conjunto de pontos regulares.

Tome  $F : X \rightarrow Y$  uma aplicação holomorfa entre variedades suaves  $X \subseteq \mathbb{C}^N, Y \subseteq \mathbb{C}^k$ . Temos que  $y \in Y$  é um *valor regular* de  $F$  se  $F^{-1}(y) \subset X$  contém apenas pontos regulares de  $F$ ; caso contrário,  $y$  é chamado de *valor crítico*. É bem conhecido que as soluções da equação  $F(x) = y$  formam uma subvariedade suave de  $X$ , desde que  $y \in Y$  seja um valor regular de  $F$ . Se considerarmos  $Z$  uma subvariedade de  $Y$ , quando podemos assegurar que  $F^{-1}(Z)$  também é uma subvariedade de  $X$ ? Essa questão nos conduz a uma outra propriedade, a qual é uma extensão da noção de regularidade.

**Definição 2.9.** Uma aplicação  $F : X \rightarrow Y$  é **transversal** a uma subvariedade  $Z$  se para cada ponto  $x \in F^{-1}(Z)$  satisfaz

$$dF_x(T_x X) \oplus T_{F(x)} Z = T_{F(x)} Y.$$

Agora damos foco a um estudo local das variedades analíticas. Seja  $X$  um espaço topológico e  $x \in X$ . Subconjuntos  $A$  e  $B$  de  $X$  são *equivalentes* em  $x$  se existe uma vizinhança  $U$  de  $x$  tal que  $A \cap U = B \cap U$ . A classe de equivalência de  $A$  em  $x$  é chamado de *germe* de  $A$  em  $x$ , denotado por  $(A, x)$ . O conjunto  $A$  é chamado de *representante* do germe  $(A, x)$ .

**Definição 2.10.** O germe de uma variedade analítica  $X = V(f_1, \dots, f_k) \subset \mathbb{C}^N$  em  $0$  é definido como

$$(X, 0) := \bigcap_{i=1}^k (V(f_i), 0),$$

e chamado de **espaço analítico complexo** ou de **singularidade** da variedade  $X$ .

Dizemos ainda que o ideal em  $\mathbb{C}\{\underline{x}\}$ ,

$$\mathcal{I}(X, 0) := \{f \in \mathbb{C}\{\underline{x}\}; (X, 0) \subset (V(f), 0)\},$$

é o **ideal de**  $(X, 0)$ .

**Exemplo 2.11** (Singularidade de Hipersuperfície). Sejam  $f \in \mathbb{C}\{\underline{x}\}$  e  $U$  vizinhança de  $0$  tal que  $f$  converge. Considere a variedade analítica  $V(f) = \{x \in U; f(x) = 0\}$ . Dizemos que  $(V(f), 0)$  é uma singularidade da hipersuperfície analítica  $V(f)$ .

Considere  $X_1, X_2$  e  $X$  representantes do germe  $(X, x)$  e  $Y$  representante do germe  $(Y, y)$ . Duas aplicações  $f_i : X_i \rightarrow Y$  são equivalentes se existe uma vizinhança  $V \subset X_1 \cap X_2$  de  $x$  tal que  $f_1|_V = f_2|_V$ . A classe de equivalência das aplicações  $f : X \rightarrow Y$ , com  $f(x) = y$ , é chamada de *germe da aplicação* e um representante é denotado por  $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ .

**Definição 2.12.** Um **germe de uma função analítica**  $f : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  é o germe de aplicação tal que algum representante  $f$ , restrito a  $X$ , é analítica numa vizinhança aberta de  $0$  em  $\mathbb{C}^N$ .

Um germe de uma aplicação analítica  $F = (f_1, \dots, f_k) : (X, 0) \rightarrow (Y, 0) \subset (\mathbb{C}^k, 0)$  é definido de forma similar. A aplicação  $F$  é dita um isomorfismo se existe uma aplicação analítica  $G : (Y, 0) \rightarrow (X, 0)$  tal que  $G \circ F = Id_Y$  e  $F \circ G = Id_X$ ; neste caso dizemos que as singularidades  $(X, 0)$  e  $(Y, 0)$  são *isomorfas*, ou analiticamente equivalentes.

Os germes de funções analíticas em  $(X, 0)$  formam uma  $\mathbb{C}$ -álgebra, denotada por  $\mathcal{O}_{X,0}$  e chamada de *anel de série de funções analíticas* em  $(X, 0)$ . Perceba que  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^N,0}$ , também denotado por  $\mathcal{O}_N$ , é igual a  $\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_N\}$ . De modo geral, é conhecido que:

**Lema 2.13** (Lema 3.4.20, (JONG; PFISTER, 2013)). Se  $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$  é um germe de variedade analítica e  $\mathcal{I}(X, 0)$  seu ideal, então  $\mathcal{O}_{X,0} = \frac{\mathbb{C}\{\underline{x}\}}{\mathcal{I}(X,0)}$ . Quando  $(X, 0)$  é suave, temos  $\mathcal{O}_{X,0} \cong \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_k\}$  para algum  $k$ .

Podemos definir conceitos geométricos de uma singularidade a partir do anel de série de funções analíticas em  $(X, 0)$ . Por exemplo,  $(X, 0)$  será chamado de *reduzido* quando o anel  $\mathcal{O}_{X,0}$  for reduzido (*i.e.*, não tem elementos nilpotentes). Outra definição que formulamos por ferramentas algébricas é o de dimensão.

**Lema 2.14** (Proposição 1.51, (GREUEL; LOSSEN; SHUSTIN, 2007)). Existe, a menos de permutação, uma única decomposição irredutível para uma singularidade  $(X, 0)$ , ou seja,  $(X, 0) = (X_1, 0) \cup \dots \cup (X_r, 0)$ , com  $(X_i, 0)$  irredutível e  $(X_i, 0) \not\subset (X_j, 0)$  para  $i \neq j$ . Cada  $(X_i, 0)$  é chamado de componente irredutível de  $(X, 0)$ .

**Definição 2.15.** Sejam  $(X, 0)$  uma singularidade e  $\{(X_i, 0)\}_i$  suas componentes irredutíveis. Definimos a **dimensão** de  $(X, 0)$  como

$$\dim(X, 0) := \max_i \{\dim(X_i, 0)\},$$

em que  $\dim(X_i, 0) = \dim_K \mathcal{O}_{(X_i, 0)}$  é a dimensão de Krull do anel  $\mathcal{O}_{(X_i, 0)}$ .

Se todas as componentes irredutíveis têm a mesma dimensão  $d$ , dizemos que  $(X, 0)$  é uma singularidade  **$d$ -equidimensional**.

Construímos alguns exemplos que são recorrentes nos próximos capítulos.

**Exemplo 2.16** (Singularidade de Interseção Completa). Seja  $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$  um germe de variedade analítica e seja  $\mathcal{I}(X, 0)$  seu ideal. Suponha que  $n$  é o número mínimo de geradores de  $\mathcal{I}(X, 0)$ . Então,  $(X, 0)$  é uma interseção completa se  $\dim(X, 0) = N - n$ .

Sendo  $R$  um anel local, podemos dizer que  $\{f_1, \dots, f_n\} \subset R$  é uma *sequência regular* se para todo  $i = 1, \dots, n$  (a classe de)  $f_i$  não é um divisor de zero de  $R/\langle f_1, \dots, f_{i-1} \rangle$ . O maior comprimento entre as sequências regulares é chamado de *profundidade* de  $R$ .

**Proposição 2.17** (Corolário 4.1.20 (JONG; PFISTER, 2013)). Seja  $(X, 0)$  uma singularidade e suponha que  $\mathcal{I}(X, 0)$  é minimamente gerado por  $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_N\}$ . Temos que  $(X, 0)$  é uma interseção completa se, e somente se,  $\{f_1, \dots, f_n\}$  formam uma sequência regular em  $\mathbb{C}\{\underline{x}\}$ . Neste caso,  $\dim(X, 0) = N - n$ .

**Exemplo 2.18** (Singularidade Cohen-Macaulay). Uma singularidade  $(X, 0)$  é Cohen-Macaulay quando o anel  $\mathcal{O}_{X,0}$  é Cohen-Macaulay, *i.e.*, quando sua profundidade é igual a sua dimensão. Tem-se que toda singularidade de interseção completa é Cohen-Macaulay. Além disso, toda singularidade Cohen-Macaulay é equidimensional (consulte Corolário 18.11 em (EISENBUD, 2013)).

Dentre as implicações do Teorema de Hilbert-Burch, temos que o ideal de uma singularidade Cohen-Macaulay de codimensão 2 pode ser descrito pelos determinantes menores  $t \times t$  de uma certa matriz  $t \times (t + 1)$ . Esse resultado é apresentado como Teorema 20.15 em (EISENBUD, 2013).

## 2.2 Estratificações e teoria de Morse

O objetivo da Teoria de Estratificação em topologia diferencial e em geometria algébrica é subdividir uma singularidade em variedades suaves de modo que tenhamos controle sobre certas propriedades e sobre as interações entre essas subvariedades.

Em 1957, Whitney ([WHITNEY, 1957](#)) mostrou que qualquer variedade algébrica real  $X$  em  $\mathbb{R}^N$  pode ser particionada em finitas variedades suaves conexas de  $\mathbb{R}^N$ . Essa subdivisão é feita a partir do conjunto singular de  $X$ , a qual é uma variedade algébrica e de dimensão estritamente menor. Obtém-se assim uma *filtração* de  $X$  por subvariedades algébricas:

$$X \supset \text{Sing}(X) \supset \text{Sing}(\text{Sing}(X)) \supset \dots$$

Na década de 60, Thom ([THOM, 1962](#)) chamou essas coleções de partições de conjunto estratificado, introduzindo as noções de estratos e estratificação.

**Definição 2.19.** Seja  $X$  um conjunto fechado de uma variedade suave  $M$ . Uma **estratificação** de  $X$  é uma filtração por subconjuntos fechados

$$X = X_d \supseteq X_{d-1} \supseteq \dots \supseteq X_1 \supseteq X_0,$$

tal que cada diferença  $V_i = X_i \setminus X_{i-1}$  é uma subvariedade suave de  $M$  de dimensão  $i$ , ou é vazia. Cada componente de  $V_i$  é chamado de **estrato** de dimensão  $i$ . Assim,  $X$  é a união disjunta de estratos, denotado por  $\mathcal{V} = \{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ .

Se para cada ponto de  $X$  existe uma vizinhança em  $M$  que intersecta apenas um número finito de estratos, dizemos que  $\mathcal{V}$  é **localmente finito**.

Procuramos estratificações em que pontos de um estrato tenham o mesmo comportamento, isto é, que as vizinhanças desses pontos sejam homeomorfas no estrato a qual os pontos pertencem. Uma das maneiras de garantir isso é a seguinte.

**Definição 2.20.** Uma estratificação  $V = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$  satisfaz a **condição de fronteira** se para todo par de estratos  $(V_\alpha, V_\beta)$  tal que  $V_\alpha \cap \bar{V}_\beta \neq \emptyset$ , tem-se  $V_\alpha \subseteq V_\beta$ .

Como os estratos são disjuntos, isso significa que  $V_\alpha = V_\beta$  ou  $V_\alpha \subset \bar{V}_\beta \setminus V_\beta$ . Além dessa condição também adicionamos as condições (a) e (b) de Whitney, definidas a seguir.

**Definição 2.21.** Dizemos que  $\mathcal{V} = \{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  é uma **estratificação de Whitney** se é uma estratificação satisfazendo a condição de fronteira e se para todo par  $(V_\alpha, V_\beta)$  de estratos tais que  $V_\alpha \subset \bar{V}_\beta$ , temos

- (a) para toda  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V_\beta$  sequência convergindo para  $y \in V_\alpha$  e tal que o limite  $T = \lim_{n \rightarrow \infty} T_{x_n} V_\beta$  existe (na Grassmaniana correspondente), temos  $T \supset T_y V_\alpha$ ;



- (b) se  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V_\beta$  e  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V_\alpha$  são seqüências convergindo para  $y \in V_\alpha$  e tais que os limites  $T = \lim_{n \rightarrow \infty} T_{x_n} V_\beta$ ,  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \overrightarrow{x_n y_n}$  existem, então  $T \supset L$ .

Uma das razões para escolher as estratificações de Whitney é que toda variedade analítica (em  $\mathbb{R}^N$  ou  $\mathbb{C}^N$ ) pode ser Whitney-estratificada, resultado provado pelo próprio Whitney em 1965 (WHITNEY, 1965a; WHITNEY, 1965b). Além disso, se  $X$  é uma coleção localmente finita de subconjuntos analíticos de  $U$ , então podemos escolher a estratificação  $\mathcal{V}$  tal que cada elemento de  $X$  é a união de estratos de  $\mathcal{V}$ ; veja por exemplo (GORESKY; MACPHERSON, 1988). Neste caso, dizemos que a estratificação é *adaptada* a  $X$ .

As condições de regularidade garantem controle na topologia local da variedade estratificada. Podemos nos perguntar sob quais condições temos um controle similar no contexto de aplicações. Uma condição em aplicações é proposta por Thom em (THOM, 1969).

**Definição 2.22.** Uma estratificação de Whitney  $\mathcal{V}$  de  $X$  satisfaz a **condição  $(a_f)$  de Thom** com respeito a  $f$  se a diferencial  $df$  tem posto constante em cada estrato e

$$N(d_x(f|_{V_\alpha})) \supset \lim_{n \rightarrow \infty} d_{x_n}(f|_{V_\beta}),$$

em que  $N(d_x(f))$  denota o núcleo da aplicação  $d_x f$  e  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V_\beta$  é uma seqüência convergindo para  $x \in V_\alpha$ .

Relembramos outra estratificação que é utilizada no decorrer desse trabalho.

**Definição 2.23.** Uma **boa estratificação** de  $X$  relativa a função  $f$  é uma estratificação  $\mathcal{V}$  de  $X$  a qual é adaptada a  $V(f)$  e tal que  $\{V_\lambda \in \mathcal{V}; V_\lambda \not\subseteq V(f)\}$  é uma estratificação de Whitney de  $X \setminus V(f)$ . Além disso, cada par  $(V_\alpha, V_\beta)$  tal que  $V_\alpha \not\subseteq V(f)$  e  $V_\beta \subseteq V(f)$  deve satisfazer a condição  $(a_f)$  de Thom.

Esta última hipótese é equivalente a dizer que se  $x \in V_\alpha$  e  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V_\beta$  é uma seqüência convergindo para  $x$ , com  $T_{x_n} V(f|_{V_\beta} - f|_{V_\beta}(x_n))$  convergindo para algum  $T$ , então  $T_x V_\alpha \subseteq T$ .

**Exemplo 2.24.** Se  $f : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  tem um ponto crítico isolado em 0 e  $\mathcal{V} = \{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  é uma estratificação de Whitney para  $X$ , então

$$\{V_\lambda \setminus X^f, V_\lambda \cap X^f \setminus \{0\}, \{0\}; \lambda \in \Lambda\}$$

é uma boa estratificação de  $X$  relativa a  $f$ , em que  $X^f = X \cap V(f)$ .

Desde que os conjuntos estratificados são vistos como generalizações das variedades suaves, é natural estender as teorias desenvolvidas sobre a topologia diferencial das variedades suaves para o caso de variedades estratificadas. Por exemplo, a Teoria de Morse, a qual relaciona a topologia da variedade e os pontos críticos de funções definidas na variedade, é generalizada para a Teoria de Morse Estratificada por Goresky e MacPherson em (GORESKY; MACPHERSON, 1988). Apresentamos alguns conceitos dessa teoria.

**Definição 2.25.** Um ponto  $x \in X$  é dito ser um **ponto de Morse** de  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  se é um ponto crítico não degenerado, ou seja, é um ponto crítico tal que

$$\det \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)_{ij} \neq 0.$$

A função  $f$  é dita ser **função de Morse** se todos os valores críticos são distintos e se seus pontos críticos são de Morse. Uma **Morseficação** de uma função  $f$  é uma perturbação  $\tilde{f} = f + tg$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , que é uma função de Morse.

O conceito de degenerado nos remete a ideia de objetos que se afastam das propriedades genéricas da classe a qual pertence, perdendo tais propriedades sob pequenas perturbações. Neste sentido, as funções de Morse formam um conjunto aberto denso no espaço de todas funções suaves próprias com a topologia de Whitney<sup>1</sup>, sendo topologicamente estáveis numa vizinhança (de Whitney). A seguir, apresentamos algumas definições para estudar o análogo no contexto estratificado.

**Definição 2.26.** Um **plano tangente degenerado** de uma estratificação  $\mathcal{W}$  num ponto  $x \in V_\alpha$  é um elemento  $T$  de alguma variedade Grassmaniana tal que  $T = \lim_{x_i \rightarrow x} T_{x_i} V_\beta$ , em que  $V_\beta \neq V_\alpha$  e  $x_i \in V_\alpha$ .

Seja  $(X, 0) \subset (U, 0)$  uma singularidade em  $(\mathbb{C}^N, 0)$  equipada com a estratificação de Whitney  $\mathcal{W} = \{W_i\}_{i=0}^q$ , com  $0 \in W_0$ . Considere o germe de funções analíticas  $f : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  dada pela restrição de  $F : (U, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ .

**Definição 2.27.** Dizemos que 0 é um **ponto genérico** de  $f$  se o hiperplano  $\text{Ker}(d_0 F)$  é transversal em  $\mathbb{C}^N$  a todos planos degenerados da estratificação  $\mathcal{W}$  em 0.

**Definição 2.28.** A função  $f : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  é dita **Morse estratificada** se

- 1)  $\dim(W_0) > 1$ ;
- 2)  $f|_{W_0} : W_0 \rightarrow \mathbb{C}$  tem um ponto de Morse em 0;
- 3) 0 é um ponto genérico de  $f$  com respeito a  $W_i$ , para todo  $i \neq 0$ .

Uma **Morseficação estratificada** de  $f : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  é uma perturbação  $\tilde{f}$  a qual é Morse estratificada.

<sup>1</sup> Veja (GORESKY; MACPHERSON, 1988) para mais.

## 2.3 Variedades polares

Desde a década de 70, quando foram introduzidas por Tessier e Lê (TESSIER, 1981; TRANG; TEISSIER, 1981), as variedades polares têm destaque no estudo de Singularidades, Estratificações, Geometria Algébrica e Classes Característica, como as classes de Todd e classes de Chern. Podemos definir as variedades polares usando ideais de transversalidade; sugerimos a leitura de (GRULHA-JR; MELO, 2006) para essa definição e exemplos intuitivos. Outras definições utilizam conceitos de projeções genéricas, transformação de Nash e variedades conormais.

Uma das perguntas em Teoria de Singularidades é: dada uma família a 1-parâmetro de germes de aplicações, quais invariantes analíticos constantes na família implicam na trivialidade topológica da família? A teoria de variedades polares desenvolvida por Tessier, Lê, Henry, Merle e Sabbah (HENRY; MERLE; SABBAH, 1984) nos oferece invariantes que dependem da deformação da singularidade, portanto, não eficazes para responder o questionamento acima.

Procurando tal invariante, Gaffney constrói em (GAFFNEY, 1993) a multiplicidade polar associada a uma variedade polar relativa a uma aplicação e uma projeção linear genérica<sup>2</sup>, definições que recordamos nessa seção para comodidade do leitor.

**Definição 2.29.** A multiplicidade de um ponto  $x$  sobre uma curva plana  $C$ , denotada por  $m(C, x)$ , é o número de interseção da curva com uma reta secante genérica na vizinhança do ponto.

De maneira mais geral, podemos definir a multiplicidade de um ponto sobre uma variedade.

**Definição 2.30.** Seja  $X$  uma subvariedade de dimensão  $d$  sobre uma variedade suave  $M$ . Considere  $D$  um pequeno polidisco centrado em  $x$  e  $\Pi$  a projeção sobre um plano genérico de dimensão  $d$ . Seja  $y \in \Pi(D) \setminus \Pi(x)$  e  $\delta(y)$  um pequeno disco em torno de  $y$ . A multiplicidade de  $X$  em  $x$ , denotada por  $m(X, x)$ , é o número de folhas de  $\Pi(\delta) \cap D \cap X$ .

Seja  $f : X \rightarrow S$  uma aplicação contínua entre (representantes de) espaços analíticos complexos reduzidos, tal que as fibras  $X_s := f^{-1}(s)$  são suaves e de dimensão  $r = \dim X - \dim S$ , fora de um conjunto fechado não denso  $Z \subset X$ . Podemos mergulhar  $X \subset S \times \mathbb{C}^n$  como no diagrama:

$$\begin{array}{ccc} X & \hookrightarrow & S \times \mathbb{C}^n \\ \downarrow f & & \swarrow \\ S & & \end{array}$$

Assim, podemos ver a fibra  $X_s$  não singular contida em  $\{f(s)\} \times \mathbb{C}^n$ .

<sup>2</sup> Em linha gerais, uma projeção linear genérica é aquela menos singular possível dentre as projeções lineares.

**Definição 2.31.** Seja  $D_{r-k+1}$  um subespaço de  $\mathbb{C}^n$  de dimensão  $r - k + 1$ , com  $0 \leq k \leq r$ . Definimos

$$C(D_{r-k+1}) := \{T \in Gr(r, n); \dim(T \cap D_{r-k+1}) \geq k\},$$

em que  $G(r, n)$  é a Grassmaniana dos  $r$ -planos em  $\mathbb{C}^n$ .

Seja  $p : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^{r-k+1}$  uma projeção linear genérica cujo núcleo é  $N(p) = D_{r-k+1}$ . Denotamos por  $p_s : X_s \rightarrow \mathbb{C}^{r-k+1}$  a restrição de projeção  $p$  à  $X_s$ . Considere então os conjuntos

$$P_k(f, p)^\circ := \{x \in X \setminus Z; x \in \Sigma(p_s)\}$$

e  $P_k(f, p)$  seu fecho em  $X$ . Na verdade,  $P_k(f, p)$  é um subconjunto analítico fechado, que é vazio ou é de codimensão (pura)  $k$  em  $X$  (veja IV 1.3.2 em (TESSIER, 1981)). Considerando essa construção, podemos definir:

**Definição 2.32.** O subespaço analítico fechado  $P_k(f, p)$  de  $X$  é chamado de **variedade polar relativa** de  $X$ , com codimensão  $k$ , associada a  $f$  e  $D_{r-k+1} = N(p)$ .

Nosso objetivo é definir um invariante analítico associado a tal variedade polar relativa. Seguindo a construção de Gaffney (GAFFNEY, 1993), sejam  $\mathfrak{X} \subset \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^r$  uma variedade analítica complexa irreduzível de dimensão  $d + r$  e  $f : \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{C}^r$  uma aplicação analítica tal que  $f^{-1}(0) = X$ .

**Definição 2.33.** A multiplicidade da variedade polar relativa  $P_d(f, p)$ , denotada por  $m_d(X, p) = m(P_d(f, p), 0)$ , em que  $p : \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^r \rightarrow \mathbb{C}^r$  é a projeção, é chamada de  $d$ -ésima **multiplicidade polar** de  $X$ .

## 2.4 Equivalência de germes de aplicações

Quando estamos organizando nossas casas, em geral, separamos os objetos por finalidade, características e propriedades. Por exemplo, no guarda-roupas deixamos as camisas e as calças em gavetas diferentes, já que exercem funções distintas.

Em matemática não é tão diferente! O famoso Teorema de Gauss-Bonnet garante que uma superfície compacta e conexa  $S \subset \mathbb{R}^3$  é homeomorfa a uma esfera com um número  $g$  de alças. Assim, podemos separar cada superfícies compacta e conexa de  $\mathbb{R}^3$  em gavetas que dependem do gênero  $g$ .

Fixando, por exemplo, a gaveta  $g = 1$  podemos escolher qualquer superfície dessa gaveta e estudar sua topologia, sendo esse estudo equivalente para as demais. Neste caso, o toro  $T^1$  pode ser uma boa escolha, já que conhecemos suas características. A ideia aqui é sempre escolher o objeto da gaveta que seja o mais simples para entender suas propriedades.

Para germes de aplicações, a equivalência é dada através de mudanças de coordenadas na fonte e na meta. Procuramos um sistema de coordenadas em  $\mathbb{C}^n$  e  $\mathbb{C}^m$  nos quais o germe

$f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^m, 0)$  tenha uma forma polinomial. Caso seja possível, o próximo passo é procurar pelo menor grau do polinômio. Formalizamos essas ideias em definições matemáticas mais precisas.

**Definição 2.34.** Sejam  $G$  um grupo e  $M$  um conjunto. Uma **ação** de  $G$  em  $M$  é uma aplicação  $\alpha : G \times M \rightarrow M$ ,  $\alpha(g, x) = g \cdot x$  tal que

- 1)  $1 \cdot x = x$ , em que  $1$  é a identidade de  $G$ ;
- 2)  $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$ ,  $\forall x \in M$  e  $\forall g, h \in G$ .

Dada uma ação podemos definir uma relação de equivalência em  $M$ . Se  $x, y \in M$ , então dizemos que  $x$  é equivalente a  $y$  quando existe  $g \in G$  tal que  $y = g \cdot x$ . As classes de equivalência dessa relação são chamadas de *órbitas*.

**Exemplo 2.35.** Considere  $\mathfrak{m} = \{f \in \mathcal{O}_N; f(0) = 0\} = \langle x_1, \dots, x_N \rangle$  ideal maximal de  $\mathcal{O}_N = \mathbb{C}\{\underline{x}\}$ . Seja o espaço vetorial complexo dos  $k$ -jatos

$$J^k(N, r) := \underbrace{J^k(N, 1) \times \dots \times J^k(N, 1)}_{r \text{ vezes}}, \text{ em que } J^k(N, 1) := \mathbb{C}\{\underline{x}\}/\mathfrak{m}^{k+1}$$

Assim, um elemento  $p \in J^k(N, r)$  é uma aplicação  $p : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^r$  com cada componente um polinômio de grau  $\leq k$  nas coordenadas  $x_1, \dots, x_N$ , com termo constante nulo. Tomamos então  $H^d(N, r) \subset J^d(N, r)$  o subespaço constituído das aplicações cujas componentes são polinômios homogêneos de grau  $d$  nas coordenadas  $x_1, \dots, x_N$ .

Denotando por  $GL_n(A)$  o grupo das matrizes  $n \times n$  invertíveis com entradas no anel  $A$ , temos uma ação do grupo  $GL_N(\mathbb{C}) \times GL_r(\mathbb{C})$  agindo em  $H^d(N, r)$  dada por

$$\begin{aligned} \alpha : GL_N(\mathbb{C}) \times GL_r(\mathbb{C}) \times H^d(N, r) &\longrightarrow H^d(N, r) \\ ((R, L), p) &\longmapsto L \circ p \circ R^{-1}. \end{aligned}$$

Portanto,  $p, q \in H^d(N, r)$  estão na mesma órbita se, e somente se, existem isomorfismos lineares  $R \in GL_N(\mathbb{C})$  e  $L \in GL_r(\mathbb{C})$  tais que  $q \circ R = L \circ p$ .

Definindo grupos apropriados, estendemos as ideias do exemplo acima para todo espaço  $\mathbb{C}\{\underline{x}\}$ .

**Definição 2.36.** Denotamos por  $\mathcal{R} := \text{Aut}(\mathbb{C}\{\underline{x}\})$  o **grupo de automorfismos** da álgebra analítica  $\mathbb{C}\{\underline{x}\}$ . Dizemos que o produto semidireto  $\mathcal{K} := \mathbb{C}\{\underline{x}\}^* \rtimes \mathcal{R}$ , de  $\mathcal{R}$  com o grupo de unidades de  $\mathbb{C}\{\underline{x}\}$ , é o **grupo de contato**, em que o produto de  $\mathcal{K}$  é dado por

$$(u', \varphi')(u, \varphi) := (u' \varphi'(u), \varphi' \circ \varphi).$$

Esses grupos agem em  $\mathbb{C}\{\underline{x}\}$  por

$$\begin{aligned} \mathcal{R} \times \mathbb{C}\{\underline{x}\} &\longrightarrow \mathbb{C}\{\underline{x}\} & \text{e} & & \mathcal{K} \times \mathbb{C}\{\underline{x}\} &\longrightarrow \mathbb{C}\{\underline{x}\} \\ (\varphi, f) &\mapsto \varphi(f) & & & ((u, \varphi), f) &\mapsto u\varphi(f) \end{aligned}$$

Supor que  $f$  pertence a órbita de  $g$  sob o grupo  $\mathcal{R}$  (respectivamente,  $\mathcal{K}$ ) significa que existe  $\varphi \in \mathcal{R}$  (resp.,  $(u, \varphi) \in \mathcal{K}$ ) tal que  $\varphi(f) = g$  (resp.,  $u\varphi(f) = g$ ). Neste caso, dizemos que  $f$  é  $\mathcal{R}$ -equivalente (resp.,  $\mathcal{K}$ -equivalente) a  $g$ .

Perceba que qualquer  $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{C}\{\underline{x}\})$  determina uma mudança de coordenadas locais biholomorfa  $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_N) : (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^N, 0)$  por  $\phi_i = \varphi(x_i)$ . Reciprocamente, qualquer isomorfismo de germes  $\phi$  determina um automorfismo  $\varphi$  pela mesma relação. Assim,  $f$  será  $\mathcal{R}$ -equivalente a  $g$  se, e somente se, existe uma aplicação biholomorfa  $\phi$  tal que  $f = g \circ \phi$ .

**Observação 2.37.** 1. Se  $f$  é  $\mathcal{R}$ -equivalente a  $g$ , então  $f$  é  $\mathcal{K}$ -equivalente a  $g$ , sendo  $\mathcal{R}$  identificado como subgrupo de  $\mathcal{K}$ .

2. Sabemos que  $f$  e  $g$  geram o mesmo ideal em  $\mathbb{C}\{\underline{x}\}$  se, e somente se, existe  $u \in \mathbb{C}\{\underline{x}\}^*$  tal que  $f = ug$ . Portanto,  $f$  é  $\mathcal{K}$ -equivalente a  $g$  se, e somente se, existe  $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{C}\{\underline{x}\})$  tal que  $\langle f \rangle = \langle \varphi(g) \rangle$ . Isto significa que a  $\mathcal{K}$ -equivalência entre  $f$  e  $g$  implica que as singularidades  $(V(f), 0)$  e  $(V(g), 0)$  são isomorfas.
3. Além de definirem isomorficamente a mesma singularidade, se  $f$  é  $\mathcal{R}$ -equivalente a  $g$ , então definem, a menos de mudança de coordenadas em  $(\mathbb{C}^N, 0)$ , o mesmo germe de aplicações  $(\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ .

Apesar dos grupos  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{K}$  não serem grupos algébricos ou grupos de Lie por terem dimensão infinita, podemos restringir ao espaço de  $k$ -jatos. O  $k$ -jato  $j^k(f)$  de uma função analítica  $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^N} a_\alpha x^\alpha$  é a imagem de  $f$  em  $J^k(n, 1)$ , que pode ser identificado com a série de potências truncada  $j^k(f) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha x^\alpha$ . Definimos então os grupos algébricos

$$\mathcal{R}^{(k)} := \{j^k(\varphi); \varphi \in \mathcal{R}\} \text{ e } \mathcal{K}^{(k)} := \{(j^k(u), j^k(\varphi)); (u, \varphi) \in \mathcal{K}\},$$

em que  $j^k(\varphi)(x_i) = j^k(\varphi(x_i))$  é a série de potências truncada das funções coordenadas de  $\varphi$ . Uma função analítica  $f \in \mathbb{C}\{\underline{x}\}$  pertence a órbita  $\mathcal{R}^{(k)}g$  se existe  $\varphi \in \mathcal{R}$  tal que  $j^k(\varphi \circ f) = j^k(g)$ .

**Definição 2.38.** Dizemos que  $f \in \mathbb{C}\{\underline{x}\}$  é  $k$ - $\mathcal{R}$ -determinado (respectivamente,  $k$ - $\mathcal{K}$ -determinado) se para cada  $g \in \mathbb{C}\{\underline{x}\}$  tal que  $j^k(f) = j^k(g)$ , tem-se  $f$   $\mathcal{R}$ -equivalente a  $g$  (resp.,  $\mathcal{K}$ -equivalente). O menor  $k$  possível é chamado de **determinância** de  $f$ .

Se  $k$  é maior ou igual do que a determinância de  $f$ , então  $f$  é  $\mathcal{R}$ -equivalente a  $g$  se, e somente se,  $f \in \mathcal{R}^{(k)}g$ . Portanto, as órbitas dos grupos algébricos estão em correspondência biunívoca com as classes de equivalência correspondentes. Utilizamos a teoria de grupos algébricos para classificar as singularidades finitamente determinadas; como não podemos classificar todos

os germes finitamente determinados, restringimos nosso problema para os chamados germes simples.

**Definição 2.39.** Considere a ação do grupo  $\mathcal{R}$  (respectivamente  $\mathcal{K}$ ) em  $\mathbb{C}\{\underline{x}\}$ . Dizemos que  $f \in \mathbb{C}\{\underline{x}\}$  é  $\mathcal{R}$ -**simples** (resp.,  $\mathcal{K}$ -simples) se existe uma vizinhança  $U$  de  $f$  em  $\mathbb{C}\{\underline{x}\}$  tal que  $U$  intersecta apenas um número finito de órbitas de  $\mathcal{R}$  (resp.,  $\mathcal{K}$ ).

Arnold em (ARNOLD, 1972) classifica as singularidades de hipersuperfície simples, fornecendo uma tabela conhecida como A-D-E singularidades. A classificação das singularidades de interseção completa simples é dada por Giusti em (GIUSTI, 1983) e Wall em (WALL, 1983).

A primeira classificação de curvas simples, que não são interseções completas, é feita por Frühbis-Krüger em (FRÜHBIS-KRÜGER, 1999). Essa lista é estendida no trabalho (FRÜHBIS-KRÜGER; NEUMER, 2010), classificando singularidades simples isoladas Cohen-Macaulay de codimensão 2, que não são interseções completas. Essas últimas classificações foram feitas sob ação do seguinte grupo.

Considere  $\mathcal{H} = GL_m(\mathbb{C}\{\underline{x}\}) \times GL_n(\mathbb{C}\{\underline{x}\})$  e  $\mathcal{R}$  o grupo de mudança de coordenadas. Então definimos o grupo  $\mathcal{G} = \mathcal{H} \times \mathcal{R}$ ; o grupo  $\mathcal{G}$  é um subgrupo geométrico do grupo  $\mathcal{K}$ .

Dados  $(S, N, \psi), (R, L, \varphi) \in \mathcal{G}$ , definimos a seguinte operação para estruturar  $\mathcal{G}$  como um grupo:

$$(S, N, \psi)(R, L, \varphi) = ((\psi^*R)S, (\psi^*L)N, \varphi \circ \psi),$$

em que  $\psi^*M$  significa compor cada entrada da matriz  $M$  por  $\psi$ .

**Definição 2.40.** Dois germes de matrizes  $M_1, M_2 \in M_{m,n}(\mathbb{C}\{\underline{x}\})$  são  $\mathcal{G}$ -**equivalentes** se existe  $(R, L, \varphi) \in \mathcal{G}$  tal que  $M_1 = L^{-1}(\varphi^*M_2)R$ .

Em poucas palavras, duas matrizes  $M_1, M_2 \in M_{m,n}(\mathbb{C}\{\underline{x}\})$  serão equivalentes se podemos sair de uma e chegar na outra por finitas operações de linha, de coluna e mudança de coordenadas.

**Exemplo 2.41.** As matrizes  $M_1, M_2 \in \mathbb{C}\{x, y, z, w\}$  com entradas

$$M_1 = \begin{pmatrix} x & y & z \\ w & x & y^3 + x^4 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} x & y & z \\ w & x & y^3 \end{pmatrix}$$

são  $\mathcal{G}$ -equivalentes.

De fato, se em  $M_1$  fizermos a seguinte operação  $C_3 - x^3C_2 \mapsto C_3$ , em que  $C_i$  é a  $i$ -ésima coluna, então obtemos

$$\begin{pmatrix} x & y & z - x^3y \\ w & x & y^3 \end{pmatrix}.$$

Agora, usando a mudança de coordenadas  $\varphi(x, y, z, w) = (x, y, z - x^3y, w)$ , chegamos em  $M_2$ .

## 2.5 Teoria de obstrução

Existem problemas em Topologia Algébrica que para serem resolvidos precisam da investigação do levantamento e/ou extensão de uma aplicação contínua; os exemplos clássicos são as propriedades de extensão homotópica e de levantamento homotópico. De forma simplificada, as questões de extensão e levantamento podem ser escritas como

- Problema de Extensão: dadas  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : X \rightarrow Z$  contínuas, existe  $h : Y \rightarrow Z$  contínua tal que  $h \circ f = g$ ?
- Problema de Levantamento: dadas  $f : X \rightarrow Z$ ,  $g : Y \rightarrow Z$  contínuas, existe  $h : X \rightarrow Y$  contínua tal que  $g \circ h = f$ ?

O termo *Teoria de Obstrução* se refere ao procedimento de definir uma sequência de classes de cohomologia que são obstruções para achar uma solução dos problemas de extensão e levantamento. Se essas obstruções caem num grupo de cohomologia nulo, então o problema terá solução afirmativa. Uma das abordagens é construir extensões (ou levantamentos) a partir dos simplexes (ou células) do espaço topológico, procedendo indutivamente no seu esqueleto.

Nosso objetivo é recordar tal construção para campos de vetores, isto é, quando um dado campo vetorial  $\nu$  pode ser definido sobre uma variedade  $M$ . A principal referência para fibrados vetoriais é (STEENROD, 1999). Admitimos definições de Topologia Algébrica, como cocadeia, cociclo e grupos de homotopia; para essa teoria é sugerido (HATCHER, 2002).

**Definição 2.42.** Um **fibrado vetorial**  $E$ , sobre  $\mathbb{C}$ , com base  $X$  e posto  $k$  é um espaço topológico  $E$  com uma aplicação contínua  $p : E \rightarrow X$  tal que para cada ponto  $x \in X$ , a fibra  $E_x = p^{-1}(x)$  é um espaço vetorial de dimensão  $k$  sobre  $\mathbb{C}$ .

Um fibrado vetorial deve satisfazer a condição de trivialidade local: para cada ponto  $x \in X$  existem uma vizinhança aberta  $U_x$  em  $X$  e um homeomorfismo  $\phi : p^{-1}(U_x) \rightarrow U_x \times \mathbb{C}^k$ , o qual induz para cada  $y \in U_x$  um isomorfismo  $p^{-1}(y) \cong \mathbb{C}^k$ .

**Exemplo 2.43.** A seguir, recordamos alguns fibrados vetoriais que serão utilizados no decorrer deste trabalho. Denotamos por  $\mathbb{P}^k$  o espaço projetivo complexo, que tem coordenadas homogêneas  $(x_0 : x_1 : \dots : x_k)$ .

- 1) Fibrado tangente  $TM$  sobre uma variedade suave  $k$ -dimensional  $M$ . O fibrado tangente tem por fibra sobre um ponto  $x \in M$ , o espaço tangente  $T_xM$  que é isomorfo a  $\mathbb{C}^k$ .
- 2) Fibrado cotangente  $T^*M$  sobre uma variedade suave  $M$ . Esse fibrado é o dual de  $TM$ , no sentido de que cada fibra  $(T^*M)_x$  consiste do espaço das aplicações  $\mathbb{C}$ -lineares  $T_xM \rightarrow \mathbb{C}$ .



- 3) Fibrado canônico  $\gamma_1^k$  sobre  $\mathbb{P}^k$ . Também chamado de fibrado tautológico e denotado por  $\mathcal{O}(-1)$  em geometria algébrica. Este fibrado de linhas é o conjunto de todos os pares  $\{(\lambda, v)\}$ , em que  $\lambda$  é um elemento de  $\mathbb{P}^k$ , isto é, uma reta complexa em  $\mathbb{C}^{k+1}$  passando pela origem, e  $v$  um vetor da reta  $\lambda$ . A fibra sobre  $\lambda$  é a própria reta  $\lambda$ .

$$\gamma_1^k = \{(\lambda, v) \in \mathbb{P}^k \times \mathbb{C}^{k+1}; v \in \lambda\}.$$

- 4) Fibrado universal  $\gamma_r^k$  sobre  $Gr(k, r)$ . É o conjunto dos pares  $\{P, v\}$  em que  $P$  é um elemento da Grassmaniana  $Gr(k, r)$  de  $k$ -planos em  $\mathbb{C}^r$ , e  $v$  um vetor de  $P$ . Assim, é um fibrado de posto  $k$  sobre  $Gr(k, r)$ .

O conceito de campo vetorial, definido sobre o fibrado tangente, pode ser generalizado para qualquer fibrado.

**Definição 2.44.** Seja  $p : E \rightarrow X$  um fibrado vetorial. Dizemos que uma aplicação contínua  $s : X \rightarrow E$  é uma **seção** se satisfaz a igualdade  $p \circ s = id_X$ .

Dizemos que uma coleção de seções  $s_1, \dots, s_n : X \rightarrow E$  é **linearmente independente** se os vetores  $s_1(x), \dots, s_n(x) \in E_x$  são linearmente independentes para todo  $x \in X$ .

Sejam  $Y \subset X$  variedades e  $K, L$  triangularizações (ou decomposições celulares duais) de  $X$  e  $Y$ , respectivamente. O  $q$ -esqueleto do complexo simplicial  $K$ , denotado por  $K^q$ , consiste de todos simplexos (ou células) de dimensão menor ou igual a  $q$ . Denotamos por  $X_q = |K^q|$  o espaço da realização geométrica associada.

Tome  $E$  um fibrado vetorial de posto  $k$ , com base  $X$  e fibra  $F$ . Fixamos  $1 \leq r \leq k$ . Sobre o 0-esqueleto é possível construir  $r$  seções linearmente independentes, mas até qual dimensão dos simplexos podemos estender tais  $r$  seções de forma que ainda sejam linearmente independentes? Chegando nessa dimensão limite, é possível calcular tal obstrução?

Queremos estender aplicações do tipo  $f : Y \rightarrow F$  para todo  $X$ , usando sucessivas extensões da aplicação, passando de um esqueleto  $X_q$  para outro  $X_{q+1}$ . Suponha que  $f$  está bem definida em  $X_n$ ; neste caso escrevemos  $f_n$ . Se  $\sigma_{n+1}$  é um  $(n+1)$ -simplexo, então  $f_n$  é definida no bordo  $\partial\sigma_{n+1}$  e determina um elemento no  $n$ -ésimo grupo de homotopia de  $F$ ,  $[f_n|_{\partial\sigma_{n+1}}] \in \pi_n(F)$ .

**Definição 2.45.** A cocadeia  $c(f_n) \in C^{n+1}(X, Y, \pi_n(F))$ , definida por

$$c(f_n)(\sigma_{n+1}) = [f_n|_{\partial\sigma_{n+1}}] \in \pi_n(F)$$

é chamada de **cocadeia de obstrução**.

A aplicação  $f_n$  pode ser estendida se, e somente se,  $c(f_n) = 0$ . Em particular, se  $\pi_i(F) = 0$  para  $i = 1, \dots, j-1$ , então cada aplicação  $f_Y : Y \rightarrow F$  pode ser estendida até  $f_j : X_j \rightarrow F$ .

**Teorema 2.46.** A cocadeia  $c(f_n)$  é um cociclo e, portanto, define um elemento no grupo de cohomologia  $H^{n+1}(X, Y, \pi_n(F))$ .

**Definição 2.47.** Suponha que  $\pi_i(F) = 0$  para  $i \leq n - 2$ . A **classe de obstrução primária** é a classe do cociclo de obstrução, *i.e.*,  $c(f) \in H^n(X, Y, \pi_{n-1}(F))$ .

**Exemplo 2.48.** Em 1935, Stiefel ([STIEFEL, 1935/36](#)) e Whitney ([WHITNEY, 1935](#)) definem, independentemente, classes características para variedades reais suaves. Chern ([CHERN, 1946](#)) define de várias maneiras equivalentes as classes características para variedades complexas. Dentre essas definições, a geométrica usa a teoria de obstrução e nos fornece um significado para tais classes.

Sejam  $M$  uma variedade analítica complexa de dimensão  $k$  e  $1 \leq r \leq k$ . A  $n$ -ésima classe de Chern de  $M$ , denotada por  $c^n(M) \in H^{2n}(M, \mathbb{Z})$ , é definida como a obstrução primária de construir um conjunto de  $r$  campos vetoriais tangentes a  $M$  e linearmente independentes, com  $n = k - r + 1$ . Isto significa que o  $r$ -campo  $v^{(r)}$  não tem singularidades no  $(2n - 1)$ -esqueleto e tem singularidades isoladas no  $2n$ -esqueleto da triangularização (ou decomposição celular) de  $M$ .

## 2.6 Índice de Poincaré-Hopf e índice radial

Os campos vetoriais têm sido estudados em diversas áreas da matemática, assim como em outras áreas da ciência, seja na física, biologia, economia. Um dos invariantes mais conhecidos para campos vetoriais numa singularidade isolada é o índice. Podemos encontrar diversas literaturas com diferentes abordagens desse tema, entre estas sugerimos ([BRASSELET; SEADE; SUWA, 2009](#)).

Seja  $M$  uma variedade suave, diferencial, orientável de dimensão  $k$ . Denotamos por  $v$  um campo vetorial contínuo definido numa vizinhança de um ponto  $z \in M$ , com singularidade isolada nesse ponto. Isto significa que  $v$  é uma seção do fibrado tangente de  $M$  a qual  $v(z) = 0$  ou não está definida.

Tome  $B(z)$  uma bola tal que  $z$  é a única singularidade de  $v$  em  $B(z)$ . Neste caso, o campo está bem definido na fronteira  $S(z) = \partial B(z)$ . Consideramos a mesma orientação de  $M$  em  $S(z) \cong \mathbb{S}^{k-1}$  e definimos a aplicação de Gauss

$$\begin{aligned} \gamma : S(z) \cong \mathbb{S}^{k-1} &\longrightarrow \mathbb{S}^{k-1} \\ x &\longmapsto \frac{v(x)}{\|v(x)\|} \end{aligned}$$

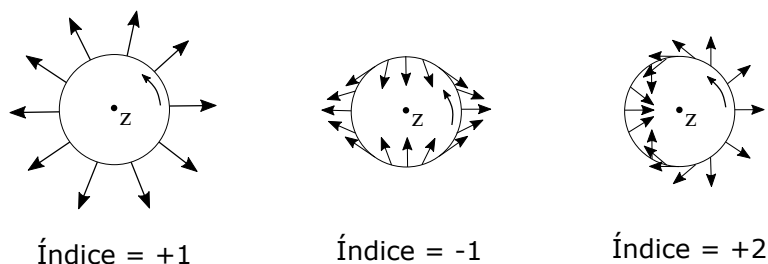
Geometricamente, o índice de  $\gamma$  é o número de vezes que  $\gamma(S(z))$  recobre  $\mathbb{S}^{k-1}$ , *i.e.*, o grau da aplicação

$$\gamma_* : H_{k-1}(\mathbb{S}^{k-1}) \cong \mathbb{Z} \longrightarrow H_{k-1}(\mathbb{S}^{k-1}) \cong \mathbb{Z}$$

**Definição 2.49.** O grau de  $\gamma_*$ , denotado por  $ind_{PH}(v, z) \in \mathbb{Z}$ , é chamado de **índice de Poincaré-Hopf** de  $v$  em  $z$ .

Na figura abaixo representamos três diferentes campos vetoriais no plano. O índice é simplesmente a quantidade de voltas que o campo dá em volta do ponto  $z$ .

Figura 1 – Campos Vetoriais em dimensão 2



A extensão desse conceito para variedades singulares depende de qual propriedade do índice queremos preservar. Por exemplo, o Teorema de Poincaré-Hopf garante que a soma dos índices de um campo vetorial em uma variedade suave, fechada e orientada é independente da escolha do campo e é igual a característica de Euler da variedade em questão. Para preservar essa propriedade, utilizamos o índice radial. Este índice foi definido por Schwartz (SCHWARTZ, 1965; SCHWARTZ, 1991) para a construção de classes características de variedades singulares.

Seja  $X \subset \mathbb{C}^N$  uma variedade com singularidade isolada na origem e seja  $U$  um aberto em torno de  $0 \in \mathbb{C}^N$  suficientemente pequeno tal que cada esfera de  $U$ , centrada em  $0$ , intersecta  $X$  transversalmente. Um campo vetorial contínuo  $v_{rad}$  em  $X \setminus \{0\}$  o qual é transversal a toda esfera  $S_\varepsilon(0)$  em torno de  $0$ , para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, é chamado de *campo vetorial radial*. Usando o prologamento radial, Schwartz define o índice radial para um campo vetorial qualquer definido sobre uma variedade singular.

Apesar de uma bela teoria, será conveniente fazermos outra abordagem. Quando consideramos variedades suaves reais, os fibrados tangente e cotangente são isomorfos e, então, podemos estudar tanto os campos vetoriais como 1-formas para definir índice.

Seja  $\eta$  uma 1-forma real definida sobre uma variedade suave  $M$  de dimensão real  $2k$ , e com singularidade isolada  $z$ . Da mesma forma que os campos vetoriais, temos uma aplicação  $S(z) \xrightarrow{\eta/||\eta||} \mathbb{S}^{2k-1}$  entre uma esfera  $(2k-1)$ -dimensional  $S(z)$  em  $M$ , em torno de  $z$ , e uma esfera unitária  $\mathbb{S}^{2k-1}$  na fibra  $(T^*M)_x$ . O grau dessa aplicação é o *índice de Poincaré-Hopf* de  $\eta$  em  $z$ ,  $ind_{PH}(\eta, z)$ .

No caso de variedades complexas não temos esse isomorfismo, mas ainda há maneiras de comparar os índices. Uma 1-forma complexa  $\omega$  pode ser escrita apenas em termos da sua parte real,  $\omega(v) = Re(\omega)(v) - iRe(\omega)(iv)$ . Definimos o índice de Poincaré-Hopf como

$$ind_{PH}(\omega, z) = (-1)^k ind_{PH}(Re(\omega), z).$$

**Definição 2.50.** Seja  $X$  uma variedade com singularidade isolada na origem. Uma 1-forma real  $\eta$  é **radial** em  $0 \in X$  se, localmente, é dual sobre  $\mathbb{R}$  de um campo vetorial radial em 0. Uma 1-forma complexa  $\omega$  é radial em  $0 \in X$  se sua parte real é radial em 0.

Seja  $(X, 0) \subset (U, 0)$  uma singularidade em  $(\mathbb{R}^N, 0)$  equipada com a estratificação de Whitney  $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i=0}^q$ , com  $V_0 = 0$ . Considere  $\eta$  uma 1-forma definida numa vizinhança da origem de  $\mathbb{R}^N$ , com uma singularidade isolada em  $(X, 0)$  na origem. Tome  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno de forma que  $\eta$  não tem pontos singulares em  $B_\varepsilon(0) \setminus \{0\}$ .

Ebeling e Gusein-Zade (EBELING; GUSEIN-ZADE, 2005) afirmam que podemos encontrar  $\tilde{\eta}$  em  $\mathbb{R}^N$  tal que

- (1)  $\tilde{\eta}$  coincide com  $\eta$  em  $S_\varepsilon(0) = \partial B_\varepsilon(0)$ ;
- (2)  $\tilde{\eta}$  é radial em  $(X, 0)$  na origem;
- (3) numa vizinhança de cada ponto singular  $x \in X \cap B_\varepsilon(0) \setminus \{0\}$ ,  $x \in V_i$ ,  $\dim(V_i) = k$ , temos que  $\tilde{\eta}$  satisfaz o seguinte. Existe um difeomorfismo analítico local  $h : (\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^k, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, V_i, x)$  tal que  $h^*(\tilde{\eta}) = p_1^*(\tilde{\eta}_1) + p_2^*(\tilde{\eta}_2)$ , em que  $p_1 : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^k$  e  $p_2 : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N-k}$  são projeções,  $\tilde{\eta}_1$  é uma 1-forma definida em  $(\mathbb{R}^k, 0)$  com singularidade isolada na origem, e  $\tilde{\eta}_2$  é uma 1-forma radial em  $(\mathbb{R}^{N-k}, 0)$ .

**Definição 2.51.** O **índice radial** da 1-forma  $\eta$  sobre a variedade  $X$  na origem é a soma

$$ind_{rad}(\eta, X, 0) := 1 + \sum_{i=1}^q \sum_{x \in Sing(\tilde{\eta}|_{V_i})} ind_{pH}(\tilde{\eta}, x).$$

Agora, seja  $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$  uma singularidade  $k$ -equidimensional e seja  $\omega$  uma 1-forma definida numa vizinhança da origem de  $\mathbb{C}^N$ .

**Definição 2.52.** O **índice radial (complexo)** de  $\omega$  sobre  $X$  na origem é  $(-1)^k$  vezes o índice radial da 1-forma real  $Re(\omega)$  em  $X$ .

$$ind_{rad}(\omega, X, 0) := (-1)^k ind_{rad}(Re(\omega), X, 0).$$

Em (EBELING; GUSEIN-ZADE, 2005) os autores estudam o índice radial de germes de variedade analítica real e complexa. No caso em que  $\omega = df$  é a diferencial de uma função holomorfa  $f : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  com singularidade isolada na origem, sobre  $(X, 0)$  um espaço analítico complexo  $d$ -equidimensional, temos que:

**Teorema 2.53** (Teorema 3, (EBELING; GUSEIN-ZADE, 2005)).

$$ind_{rad}(df, X, 0) = (-1)^{d-1} (\chi(X \cap f^{-1}(\delta) \cap B_\varepsilon(0)) - 1),$$

em que  $\delta$  é positivo e suficientemente pequeno com  $0 < \delta \ll \varepsilon$ .

# SINGULARIDADES DETERMINANTAIS

---

Neste capítulo é relembrado as principais definições e resultados das singularidades determinantis. Na Seção 3.1 introduzimos as Variedades Genéricas, que moram nos espaços de matrizes e nos fornecem importantes exemplos em Geometria Algébrica. As variedades determinantis são definidas na Seção 3.2 e são, em poucas palavras, a imagem inversa de uma variedade genérica por uma aplicação analítica.

Essa classe de singularidades podem ser vistas como generalizações das interseções completas, as quais têm sido bem estudadas por algebristas e singularistas. Veremos que as singularidades determinantis trazem novos surpreendentes fenômenos; alguns fenômenos topológicos são recordados na Seção 3.3. As principais referências usadas aqui são (FRÜHBIS-KRÜGER; ZACH, 2021a; PEREIRA, 2010; ZACH, 2017).

## 3.1 Variedades determinantis genéricas

As variedades determinantis genéricas têm um papel de destaque na geometria algébrica, como exemplos de curvas racionais, variedades de Veronese e variedades de Segre. Sua configuração matricial nos fornece ferramentas da álgebra linear e são fundamentais para obter informações das singularidades determinantis. Recordamos a seguir a definição dessas variedades, detalhando os exemplos citados acima.

Fixamos a seguinte notação para o texto que segue. Denotamos por  $M_{m,n}$  o espaço de todas as matrizes  $m \times n$  com entradas em  $\mathbb{C}$ .

**Definição 3.1.** Para  $t \leq \min\{m,n\}$  definimos o conjunto

$$M_{m,n}^t := \{A \in M_{m,n} \mid \text{posto}(A) < t\},$$

chamado de **variedade determinantal genérica**.

Perceba que a variedade determinantal genérica pode ser escrita como  $M_{m,n}^t = V(I) \subset \mathbb{C}^{mn}$ , em que  $I \subset \mathbb{C}\{x_{11}, \dots, x_{mn}\}$  é o ideal gerado pelos  $t \times t$  determinantes menores da matriz

$$\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}.$$

De fato, uma matriz  $A$  tem posto igual a  $s$  se, e somente se, existe um  $s \times s$  determinante menor não nulo e todos  $(s+1) \times (s+1)$  determinantes menores são nulos.

A variedade  $M_{m,n}^t$  é irredutível e singular de codimensão  $(m-t+1)(n-t+1)$  em  $M_{m,n}$  e seu conjunto singular é  $M_{m,n}^{t-1}$  (BRUNS; VETTER, 2006). Além disso,  $M_{m,n}^t = \bigcup_{i=1}^t (M_{m,n}^i \setminus M_{m,n}^{i-1})$  é uma estratificação de Whitney (ARBARELLO; CORNALBA; GRIFFITHS, 2011).

Nos próximos exemplos, de variedades determinantais genéricas, denotamos por  $\mathbb{P}^n$  o espaço projetivo complexo  $n$ -dimensional. Mais detalhes são encontrados em bons livros de geometria algébrica, como (HARRIS, 2013).

**Exemplo 3.2** (Curvas Racionais Normais). Uma curva racional normal  $C \subset \mathbb{P}^n$  é a imagem de  $v_n : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^n$  dada por

$$v_n(x_0 : x_1) = (x_0^n : x_0^{n-1}x_1 : x_0^{n-2}x_1^2 : \dots : x_1^n) = (z_0 : z_1 : z_2 : \dots : z_n).$$

Equivalentemente,  $C$  pode ser entendida como a variedade projetiva definida como o conjunto de pontos  $(z_0 : z_1 : z_2 : \dots : z_n) \in \mathbb{P}^n$  tais que a matriz

$$\begin{pmatrix} z_0 & z_1 & z_2 & \cdots & z_{n-2} & z_{n-1} \\ z_1 & z_2 & \cdots & \cdots & \cdots & z_n \end{pmatrix}$$

tem posto 1.

Quando  $n = 2$ , obtemos o cone plano  $z_0z_2 = z_1^2$ ; para  $n = 3$ , temos a cúbica torcida  $V(z_1^2 - z_0z_2, z_1z_2 - z_0z_3, z_2^2 - z_1z_3)$ .

**Exemplo 3.3** (Variedade de Veronese). De um modo mais geral do que as curvas racionais normais, temos as variedades de Veronese, as quais são definidas como imagem da aplicação

$$\begin{aligned} v_n : \mathbb{P}^k &\longrightarrow \mathbb{P}^N \\ (x_0 : \dots : x_k) &\longmapsto (\dots : x^I : \dots), \end{aligned}$$

onde  $x^I$  são todos monômios de grau  $n$  em  $x_0, \dots, x_k$  e  $N = \binom{k+n}{n} - 1$ .

A superfície de Veronese

$$V(z_0z_1 - z_3^2, z_0z_2 - z_4^2, z_1z_2 - z_5^2, z_2z_3 - z_4z_5, z_1z_4 - z_3z_5, z_3z_4 - z_0z_5)$$

é a imagem de  $\mathbb{P}^2$  em  $\mathbb{P}^5$ , via  $v_2$

$$v_2(x_0 : x_1 : x_2) = (x_0^2 : x_1^2 : x_2^2 : x_0x_1 : x_0x_2 : x_1x_2) = (z_0 : z_1 : z_2 : z_3 : z_4 : z_5).$$

Essa superfície é o conjunto de pontos  $(z_0 : z_1 : z_2 : z_3 : z_4 : z_5) \in \mathbb{P}^5$  tal que a seguinte matriz tem posto 1

$$\begin{pmatrix} z_0 & z_3 & z_4 \\ z_3 & z_1 & z_5 \\ z_4 & z_5 & z_2 \end{pmatrix}.$$

**Exemplo 3.4** (Variedade de Segre). A variedade de Segre  $\mathbb{P}^{m-1} \times \mathbb{P}^{n-1}$  é uma variedade determinantal genérica do tipo  $M_{m,n}^2$ , isto é, a imagem da aplicação de Segre

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{P}^{m-1} \times \mathbb{P}^{n-1} &\longrightarrow \mathbb{P}^{mn-1} \\ (x_0 : \dots : x_{m-1}, y_0 : \dots : y_{n-1}) &\mapsto (\dots : x_i y_j : \dots), \end{aligned}$$

em que  $(\dots : x_i y_j : \dots)$  são todos produtos dois a dois das coordenadas  $x_i$  e  $y_j$ . Para  $m = n = 2$  temos a superfície quadrática em  $\mathbb{P}^3$ ,

$$\sigma(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) = \{(z_0 : z_1 : z_2 : z_3) \in \mathbb{P}^3; \det \begin{pmatrix} z_0 & z_1 \\ z_2 & z_3 \end{pmatrix} = 0\}.$$

A figura abaixo mostra o conjunto de pontos reais da superfície quadrática de Segre, os quais formam um hiperboloide. As linhas em  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ , do lado esquerdo, são mapeadas em linhas em  $\sigma(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ , do lado direito.

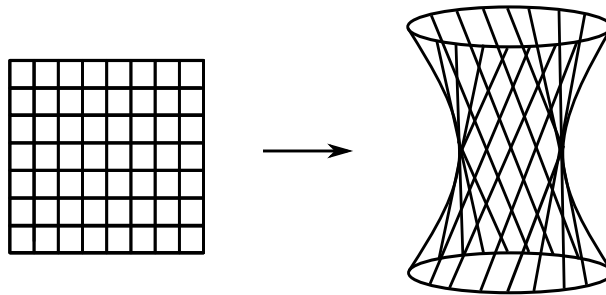


Figura 2 – Superfície Quadrática de Segre

Quando  $m = 3$  e  $n = 2$ , chamamos de 3-variedade de Segre

$$\sigma(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1) = \{(z_0 : z_1 : z_2 : z_3 : z_4 : z_5); \text{posto} \begin{pmatrix} z_0 & z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 & z_5 \end{pmatrix} < 2\}.$$

## 3.2 Variedades determinantais

Nesta seção introduzimos o principal objeto de estudo desse trabalho. As variedades determinantais têm se destacado na Teoria de Singularidades e na Geometria Algébrica, como generalizações naturais das interseções completas.

Estas variedades também têm aplicações na Física, como na Teoria Quântica de Campos; em (JOCKERS *et al.*, 2012) os autores estendem resultados estudados em interseções completas e variedades tóricas para as variedades determinantais. A estrutura determinantal, com uma estratificação pelo posto da matriz, também tem permitido o uso simplificado de algoritmos, como na Ressonância Magnética Nuclear proveniente da Teoria de Controle; por exemplo, no trabalho (BONNARD *et al.*, 2016) são analisados campos de vetores meromórficos dependendo de parâmetros físicos, os quais têm suas singularidades definidas por variedades determinantais.

Seja  $F : \mathbb{C}^N \rightarrow M_{m,n}$  uma aplicação tal que as entradas

$$F(x) = \begin{pmatrix} f_{11}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{m1}(x) & \dots & f_{mn}(x) \end{pmatrix}$$

são funções analíticas complexas definidas sobre um domínio  $U \subset \mathbb{C}^N$ .

**Definição 3.5.** Considere  $F$  como acima. Dizemos que  $X = F^{-1}(M_{m,n}^t) \subset U$  é uma **variedade determinantal** do tipo  $(m, n, t)$  se sua codimensão é  $(m - t + 1)(n - t + 1)$  em  $\mathbb{C}^N$ .

Analogamente ao caso das variedades determinantais genéricas, podemos escrever  $X = V(m_{IJ}^t) \subset \mathbb{C}^N$ , em que  $m_{IJ}^t$  são os  $t \times t$  determinantes menores da matriz  $F = (f_{ij})$ , com  $I \subset \{1, \dots, m\}$  e  $J \subset \{1, \dots, n\}$  representando todos subconjuntos com  $t$  elementos. Em geral não iremos incluir a aplicação  $F$  para denotar uma variedade determinantal  $X$ ; quando necessário, podemos dizer que  $F$  é a *matriz de representação* de  $X$ .

**Definição 3.6.** O germe  $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$  de uma variedade determinantal é chamado de **singularidade determinantal**.

Como já comentado, essa classe de singularidades englobam as singularidades de interseção completa. Seja  $f = (f_1, \dots, f_n) : (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$  um germe de aplicação holomorfa tal que  $(X, 0) = (f^{-1}(0), 0)$  é uma singularidade de interseção completa, de dimensão  $N - n$ , como no Exemplo 2.16. Então,  $(X, 0)$  é uma singularidade determinantal do tipo  $(1, n, 1)$ . A recíproca também é válida.

**Exemplo 3.7.** Considere a aplicação

$$\begin{aligned} F : \mathbb{C}^3 &\longrightarrow M_{2,3} \\ (x, y, z) &\longmapsto \begin{pmatrix} x & 0 & z \\ 0 & y & z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



A variedade determinantal  $X = F^{-1}(M_{2,3}^2) = V(-yz, xz, xy)$ , do tipo  $(2, 3, 2)$ , é representada pelos três eixos coordenados em  $\mathbb{C}^3$ , que tem por ideal  $\mathcal{I}(X, 0) = \langle xy, xz, yz \rangle$ . Por um lado, o número mínimo de geradores desse ideal é 3, por outro lado  $\dim(X, 0) = 1$ . Assim,  $(X, 0)$  é um exemplo de singularidade determinantal que não é uma singularidade de interseção completa.

As singularidades determinantais também fornecem exemplos de singularidades não isoladas. Ebeling e Gusein-Zade (EBELING; GUSEIN-ZADE, 2009) definem um tipo especial de singularidade não isolada e usam propriedades de transversalidade para estudar esses casos.

**Definição 3.8.** Um ponto  $x \in X = F^{-1}(M_{m,n}^t)$  é **essencialmente isolado** se a aplicação  $F$  é transversal ao estrato correspondente da variedade  $M_{m,n}^t$ .

Isto significa que se  $x \in U$  é essencialmente isolado e  $\text{posto}(F(x)) = i - 1$ , com  $0 < i \leq t$ , então  $F$  é transversal ao estrato  $M_{m,n}^i \setminus M_{m,n}^{i-1}$  no ponto  $F(x)$ . Assim,

$$DF_x(T_x U) \oplus T_{F(x)}(M_{m,n}^i \setminus M_{m,n}^{i-1}) = T_{F(x)} M_{m,n}.$$

**Definição 3.9.** Um germe de variedade determinantal  $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$  é uma **singularidade determinantal essencialmente isolada** se existe uma vizinhança  $U \subset \mathbb{C}^N$  tal que os pontos singulares de  $X$  em  $U \setminus \{0\}$  são essencialmente isolados.

Escrevemos EIDS como sendo a sigla de *essentially isolated determinantal singularity*, o qual tem uso comum na literatura. Uma EIDS em  $(\mathbb{C}^N, 0)$  do tipo  $(m, n, t)$  tem uma singularidade isolada na origem se, e somente se,  $N \leq (m - t + 2)(n - t + 2)$  (EBELING; GUSEIN-ZADE, 2009); neste caso, usamos a sigla IDS.

Pelo critério geométrico (Teorema 2.4.1 em (PEREIRA, 2010)), são exemplos de EIDS todas singularidades determinantais  $\mathcal{G}$ -finitamente determinadas. Nas Tabelas 1, 2 e 3 do Capítulo 5 encontramos exemplos de IDS de superfícies, 3-variedades e 4-variedades, respectivamente.

### 3.3 Topologia de uma EIDS

A seguir, relembremos algumas referências sobre o estudo da topologia de uma EIDS. Este material é central para o entendimento desse trabalho. Utilizamos (PEREIRA, 2010; ZACH, 2017) como principais referências.

Uma das técnicas em teoria de singularidades é perturbar uma variedade singular, obtendo uma família de objetos mais simples que ainda carregam informações sobre a variedade original. Por exemplo, a propriedade algébrica de “planicidade”<sup>1</sup> que exigiremos a seguir nos garante que os objetos da família não diminuam de dimensão quando comparamos ao original; essa

<sup>1</sup> Para o leitor interessado no estudo de singularidades com uma abordagem algébrica, sugerimos (GREUEL; LOSSEN; SHUSTIN, 2007)

propriedade também assegura a continuidade de certos invariantes, chamada de *princípio da conservação de números*.

**Definição 3.10.** Sejam  $R$  um anel comutativo com unidade e  $M$  um  $R$ -módulo. Dizemos que  $M$  é **plano** se a sequência de  $R$ -módulos

$$0 \rightarrow M_1 \otimes_R M \rightarrow M_2 \otimes_R M \rightarrow M_3 \otimes_R M$$

é exata, sempre que  $0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3$  for uma sequência exata de  $R$ -módulos.

**Definição 3.11.** Uma **deformação** de um germe analítico complexo  $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$  sobre o germe  $(S, 0)$  é dada por um diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccc} (X, 0) & \hookrightarrow & (\mathfrak{X}, 0) & \hookrightarrow & (\mathbb{C}^N, 0) \times (S, 0) \\ \downarrow & & \downarrow \pi & \swarrow & \\ \{0\} & \hookrightarrow & (S, 0) & & \end{array}$$

em que  $(\mathfrak{X}, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0) \times (S, 0)$  é outro germe analítico complexo tal que a projeção  $\pi$  torna  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}, 0}$  num  $\mathcal{O}_{S, 0}$ -módulo plano. Neste caso, dizemos que  $\pi : (\mathfrak{X}, 0) \rightarrow (S, 0)$  é uma **família plana** com **fibra especial**  $(X, 0)$ .

Um *desdobramento* a  $k$  parâmetros de um germe de aplicação  $f : (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$  é dada por uma perturbação  $\mathfrak{F} : (\mathbb{C}^N, 0) \times (\mathbb{C}^k, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ ,

$$\mathfrak{F}(x, s) = f(x) + s_1 g_1(x, s) + \cdots + s_k g_k(x, s),$$

da aplicação original  $f$ .

Se  $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{C}\{\underline{x}\}$  são as equações que definem  $(X, 0)$ , então uma perturbação arbitrária dessas equações, dada por

$$\mathfrak{F}_i(x, s) = f_i(x) + \sum_{j=1}^k s_j g_j(x, s) \in \mathbb{C}\{x, s\}, i = 1, \dots, n,$$

não fornecem, em geral, uma família plana  $(\mathfrak{X}, 0) = (V(F_1, \dots, F_n), 0) \xrightarrow{\pi} (\mathbb{C}^k, 0)$ . Com efeito, a família  $\pi : (\mathfrak{X}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^k, 0)$  será plana se para cada relação  $h_1 f_1 + \cdots + h_n f_n = 0$ ,  $h_i \in \mathbb{C}\{\underline{x}\}$ , existe uma relação  $H_1 \mathfrak{F}_1 + \cdots + H_n \mathfrak{F}_n = 0$ ,  $H_i \in \mathbb{C}\{x, s\}$ , com  $H_i$  congruente a  $h_i$  módulo  $\langle s \rangle$ . Essa é uma caracterização da planicidade, chamada de “Planicidade por Relação”. Veja Proposição 7.1.2 de (MOLINA; LÊ; SEADE, 2020).

**Lema 3.12.** (FRÜHBIS-KRÜGER; ZACH, 2021a) Seja  $F : \mathbb{C}^N \rightarrow M_{m,n}$  definindo a singularidade determinantal  $(X, 0)$  do tipo  $(m, n, t)$ . Então, qualquer desdobramento de  $F$  a  $k$  parâmetros

$$\begin{aligned} (\mathbb{C}^N, 0) \times (\mathbb{C}^k, 0) &\rightarrow (\mathbb{C}^{mn}, 0) \times (\mathbb{C}^k, 0) \\ (x, s) &\mapsto (\mathfrak{F}(x, s), s) \end{aligned}$$

induz uma deformação do germe  $(X, 0)$

$$\begin{array}{ccccc} (X, 0) & \hookrightarrow & (\mathfrak{X}, 0) & \hookrightarrow & (\mathbb{C}^N, 0) \times (\mathbb{C}^k, 0), \\ \downarrow & & \downarrow \pi & & \swarrow \\ \{0\} & \hookrightarrow & (\mathbb{C}^k, 0) & & \end{array}$$

com  $(\mathfrak{X}, 0) = (\mathfrak{F}^{-1}(M_{m,n}^t), 0)$ .

O Teorema de Hilbert-Burch garante a recíproca para quando  $(X, 0)$  é uma singularidade determinantal Cohen-Macaulay de codimensão 2 (veja o Exemplo 2.18), *i.e.*, qualquer deformação de uma singularidade Cohen-Macaulay de codimensão 2 pode ser vista como uma perturbação da matriz de representação  $F$ .

Porém, se a singularidade não é Cohen-Macaulay de codimensão 2, não é sempre que a recíproca será válida; veja o Exemplo 5.5 em (FRÜHBIS-KRÜGER; ZACH, 2021a). Com isso, temos mais de uma escolha para deformar a singularidade determinantal e o termo *landscape* é usado em (GAFFNEY; RUAS, 2021) para designar a escolha de deformação. Aqui seguimos a abordagem de Ebeling e Gusein-Zade, estudando as deformações provenientes por desdobramentos da matriz de representação.

Nos casos em que  $(X, 0)$  é uma singularidade isolada de hipersuperfície ou interseção completa, podemos deformá-la em uma família de variedades suaves; qualquer variedade suave dessas é chamada de *suavização* de  $(X, 0)$ . Além disso, essas suavizações são únicas a menos de isomorfismo. Mesmo quando a singularidade determinantal é isolada pode acontecer de não existir uma suavização, mas temos a seguinte definição.

**Definição 3.13.** Uma **suavização essencial**, denotada por  $\tilde{X}$ , de uma EIDS  $(X, 0) = (F^{-1}(M_{m,n}^t), 0)$  é uma subvariedade numa vizinhança  $U$  da origem de  $\mathbb{C}^N$ , definida por uma perturbação  $\tilde{F} : U \rightarrow M_{m,n}$  de  $F$  tal que  $\tilde{F}$  é transversal a todos os estratos  $M_{m,n}^i \setminus M_{m,n}^{i-1}$ , para  $i \leq t$ .

A suavização essencial de  $(X, 0)$  pode ser escolhida como uma fibra da família plana  $\mathfrak{X} = \mathfrak{F}^{-1}(M_{m,n}^t)$  dada por um desdobramento a 1-parâmetro de  $F$ ,

$$\mathfrak{F} : (\mathbb{C}^N, 0) \times (\mathbb{C}, 0) \longrightarrow (M_{m,n}, 0),$$

$\mathfrak{F}(x, s) = F_s(x)$  com  $F_s$  transversal a  $M_{m,n}^t$  para todo  $s \neq 0$  suficientemente pequeno. O desdobramento  $\mathfrak{F}$  também é chamado de *estabilização* da aplicação  $F$ .

Nosso objetivo é perturbar uma singularidade de modo a obter variedades mais simples que possam recuperar as informações topológicas da original. Agora, já sabemos como perturbar e obter tais objetos. O que nos falta é entender sua topologia.

Para  $(X, 0)$  uma singularidade isolada na origem, que admite uma deformação  $(\mathfrak{X}, 0)$  por variedades suaves, podemos estudar a topologia usando a Teoria de Morse 2.2. Sejam  $p : X \rightarrow \mathbb{C}$

uma função analítica com singularidade isolada na origem e  $\tilde{p} : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{C}$  uma Morseficação de  $p$  numa suavização  $\tilde{X}$ . A demonstração da seguinte proposição é encontrada em (PEREIRA, 2010).

**Proposição 3.14.** Tome  $(X, 0)$  uma singularidade  $d$ -dimensional como acima e  $\tilde{X} \subset \mathfrak{X}$  uma suavização de  $(X, 0)$ . Então,

$$\tilde{X} \cong_{ht} \tilde{p}^{-1}(0) \sqcup \{\text{células de dimensão } d\}$$

e, conseqüentemente,

$$\chi(\tilde{X}) = \chi(\tilde{X} \cap \tilde{p}^{-1}(0)) + (-1)^d n_\sigma,$$

em que  $\sqcup$  denota a colagem de dois espaços,  $n_\sigma$  é o número de pontos críticos de  $\tilde{p}$  e  $\chi(\tilde{X})$  é a característica de Euler da suavização  $\tilde{X}$ .

Porém, em geral, uma EIDS tem singularidade não isolada, ou mesmo no caso isolado não admite sempre uma suavização. De fato, a suavização essencial de uma EIDS  $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$  do tipo  $(m, n, t)$  é uma suavização quando  $N < (m - t + 2)(n - t + 2)$ ; veja (EBELING; GUSEIN-ZADE, 2009). Assim, precisamos de outras técnicas para estudar a topologia de uma suavização essencial  $\tilde{X} = \tilde{F}^{-1}(M_{m,n}^t)$ .

Milnor em (MILNOR, 1968) faz a construção de vizinhanças especiais para as fibras  $X_s \subset \mathfrak{X}$ , para quando  $(X, 0)$  é uma hipersuperfície com singularidade isolada na origem. Neste mesmo artigo, Milnor conclui que  $X_s$ , nessa vizinhança, tem tipo de homotopia de um bouquet de esferas de dimensão real  $d = \dim(X, 0)$ . Esse resultado é estendido para o caso de ICIS por Hamm em (HAMM, 1971).

Dada uma singularidade  $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$  de dimensão  $d$ , seja

$$\{0\} \subset X_0 \subset \cdots \subset X_d = X$$

uma estratificação de Whitney.

**Lema 3.15.** Existe  $\varepsilon > 0$  tal que para todo  $\varepsilon \geq \varepsilon' > 0$  a esfera  $S_{\varepsilon'} \subset \mathbb{C}^N$ , de raio  $\varepsilon'^2$  em torno da origem, intersecta todos os estratos de  $X$  transversalmente.

Esse resultado pode ser encontrado como Lemma 2.2.1 em (ZACH, 2017).

**Definição 3.16.** Para qualquer  $\varepsilon$  do Lema 3.15, a bola  $B_\varepsilon$  de raio  $\varepsilon^2$  em torno da origem é chamada de **Bola de Milnor** para  $(X, 0)$ .

Seja  $\mathfrak{F}$  um representante de uma estabilização da EIDS  $(X, 0) = (F^{-1}(M_{m,n}^t), 0)$ . Escrevemos

$$\mathfrak{F} : W \times U \longrightarrow M_{m,n} \times U,$$

para conjuntos abertos  $W \subset \mathbb{C}^N$  e  $U \subset \mathbb{C}$ . Considere  $B_M$  a bola de Milnor de  $(X, 0)$  em  $W$ . Pelo Primeiro Lema de Isotopia de Thom, a família  $S : \mathfrak{X} \cap (B_M \times U) \rightarrow U$  é uma fibração topologicamente trivial ao longo do bordo  $\mathfrak{X} \cap (\partial B_M \times U)$  sobre  $U$  e

$$S : \mathfrak{X} \cap (B_M \times U) \setminus \bar{X} \longrightarrow U \setminus \{0\}$$

é um fibrado topológico para  $U$  suficientemente pequeno (ZACH, 2020).

**Definição 3.17.** A fibra

$$\bar{X}_s \cong F_s^{-1}(M_{m,n}^t) \cap B_M$$

do fibrado topológico acima, é chamada de **fibra de Milnor determinantal**.

A fibra de Milnor determinantal definida por Zach é uma suavização essencial (definida por Ebeling e Gusein-Zade) intersectada por uma bola de Milnor. Zach (ZACH, 2017) mostra que a existência dessa fibra e prova que dada uma estabilização de  $F$ , as fibras são isomorfas como espaços estratificados de Whitney. A estratificação é dada por

$$\tilde{X} = \bigcup_{i=1}^t \tilde{F}^{-1}(M_{m,n}^i \setminus M_{m,n}^{i-1}).$$

Além disso, em (ZACH, 2020) é estudado o tipo homotópico da fibra de Milnor determinantal para uma EIDS  $(X, 0) = (F^{-1}(M_{m,n}^t, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$  do tipo  $(m, n, t)$  e dimensão  $d$ .

**Teorema 3.18.** (ZACH, 2020) Suponha que  $\bar{X}_s$  é a fibra de Milnor determinantal de  $(X, 0)$ . Defina

$$r_0 = \min\{r \in \mathbb{N}; (m-r+1)(n-r+1) \leq N\}.$$

Então,  $\bar{X}_s$  é homotopicamente equivalente ao bouquet

$$L_{m,n}^{t,N} \vee \bigvee_{r_0 \leq r \leq t} \bigvee_{i=1}^{\mu(r)} S^{N-(m-r+1)(n-r+1)+1} \left( L_{m-r+1, n-r+1}^{t-r+1, (m-r+1)(n-r+1)-1} \right),$$

para alguns números  $\mu(r)$  com  $r_0 \leq r \leq t$ .

No teorema acima,  $S^r(Y)$  representa a suspensão repetida  $r$  vezes do espaço topológico  $Y$ . O espaço  $L_{m,n}^{t,N}$  é o link complexo definido em (TIBĂR, 1996) por Tibăr, onde o autor estuda o tipo de homotopia da fibra de Milnor de uma singularidade qualquer.

Ainda em (ZACH, 2020), Zach calcula alguns casos específicos tanto do link complexo, como do tipo de homotopia da fibra de Milnor determinantal.

**Corolário 3.19.** (ZACH, 2020) Se  $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$  é uma EIDS suavizável do tipo  $(m, n, t)$ , então

$$\bar{X}_s \cong_{ht} L_{m,n}^{t,N} \vee \bigvee_{i=1}^{\mu} \mathbb{S}^d,$$

com  $d = N - (m-t+1)(n-t+1) = \dim(X, 0)$ .

**Proposição 3.20.** (ZACH, 2020) Se  $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$  é uma EIDS do tipo  $(2, n, 2)$  então

$$L_{2,n}^{2,N} \cong_{ht} \begin{cases} \bigvee_{i=1}^{n-1} \mathbb{S}^1, & \text{se } N = n \\ \mathbb{S}^2, & \text{se } n < N < 2n \\ \{pt\}, & \text{se } N \geq 2n \end{cases}$$

Combinando as hipóteses do Corolário 3.19 e da Proposição 3.20, é possível calcular o tipo de homotopia de algumas singularidades isoladas Cohen-Macaulay codimensão 2.

**Exemplo 3.21.** Seja  $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$  uma singularidade isolada Cohen-Macaulay de codimensão 2, do tipo  $(2, 3, 2)$ .

a) Se  $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^3, 0)$  é uma curva, então

$$\bar{X}_s \cong_{ht} \bigvee_{i=1}^{\mu+2} \mathbb{S}^1.$$

b) Se  $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^4, 0)$  é uma superfície, então

$$\bar{X}_s \cong_{ht} \bigvee_{i=1}^{\mu+1} \mathbb{S}^2.$$

c) Se  $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^5, 0)$  é uma 3-variedade, então

$$\bar{X}_s \cong_{ht} \mathbb{S}^2 \vee \bigvee_{i=1}^{\mu} \mathbb{S}^3.$$

Notamos ainda que os dois primeiros casos temos um comportamento semelhante ao caso de singularidade de hipersuperfície isolada e ICIS. Porém, para o terceiro caso não temos o tipo de homotopia de esferas com mesma dimensão.

Uma outra técnica conhecida que apresentamos é o estudo da topologia por seções genéricas da singularidade. No próximo capítulo pode ser encontrados resultados nessa direção. A Proposição 3.14 já utiliza uma seção de  $X_s$  para obter informações topológicas.

**Definição 3.22.** Seja  $X \subset \mathbb{C}^N$  uma variedade analítica  $d$ -dimensional e seja  $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  uma estratificação de  $X$ . O hiperplano  $H \subset \mathbb{C}^N$  dado como o núcleo de uma função linear  $p : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}$  é chamado de **genérico** para  $X$  em 0 se  $H$  é transversal a todos os  $T$  que são limites em 0 de espaços tangentes da parte regular de  $X$ . Neste caso, diremos que a função linear  $p$  é genérica.

Dizemos que  $H$  é **fortemente genérico** na origem se é genérico e existe uma vizinhança  $U$  de 0 tal que para todo  $V_\lambda$  de  $X$ , com  $0 \in \overline{V_\lambda}$ , temos que  $H$  é transversal a  $V_\lambda$  em  $x$ , para todo  $x \in U \setminus \{0\}$ .

Para  $H$  ser fortemente genérico levamos em consideração a estratificação  $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  de  $X$ . Em nosso caso,  $(X, 0) = F^{-1}(M_{m,n}^t)$  uma EIDS, fixaremos a estratificação dada pelo posto das matrizes, *i.e.*, com estratos iguais a  $F^{-1}(M_{m,n}^i \setminus M_{m,n}^{i-1})$ ,  $i = 1, \dots, t$ . Quando necessário, denotamos  ${}_iX = F^{-1}(M_{m,n}^i)$  e  ${}_iX_{reg} = F^{-1}(M_{m,n}^i \setminus M_{m,n}^{i-1})$ .

Notamos que se  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  é uma função holomorfa com singularidade isolada na origem, sobre uma singularidade determinantal isolada e suavizável  $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$   $d$ -dimensional, então  $Y = X \cap f^{-1}(0)$  é uma singularidade isolada de dimensão  $d - 1$  (PEREIRA, 2010). Além disso, uma perturbação de  $f$  por uma constante  $s$  suficientemente próxima de 0 nos dá uma suavização de  $Y$  com fibra de Milnor

$$\bar{Y}_s = X \cap f^{-1}(s) \cap B_M,$$

em que  $B_M$  é uma bola de Milnor para  $(X, 0)$  e  $(Y, 0)$  ao mesmo tempo (ZACH, 2017).

Em particular, se  $f = p$  é linear, então  $Y = X \cap p^{-1}(0)$  pode ser vista em  $\mathbb{C}^{N-1}$  como uma singularidade determinantal isolada de mesmo tipo e de dimensão  $d - 1$  (PEREIRA, 2010).

**Exemplo 3.23.** Tome  $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^6, 0)$  uma IDS do tipo  $(2, 3, 2)$  que tem matriz de representação

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ w & v & u^2 + x^{k+1} + y^2 \end{pmatrix},$$

em que  $k > 1$  é fixado. Essa é uma das 4-variedades simples classificadas em (FRÜHBIS-KRÜGER; NEUMER, 2010).

Sejam  $p_i : \mathbb{C}^6 \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $i = 1, 2$ , dadas por  $p_1(x, y, z, w, v, u) = u$  e  $p_2(x, y, z, w, v, u) = x - v$ . Assim,  $Y_1 = X \cap p_1^{-1}(0)$  tem matriz de representação

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ w & v & x^{k+1} + y^2 \end{pmatrix},$$

a qual é uma das 3-variedades simples em  $\mathbb{C}^5$  classificada por Frühbis-Krüger e Neumer.

A 3-variedade  $Y_2 = X \cap p_2^{-1}(0)$  é dada pela matriz

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ w & x & u^2 + x^{k+1} + y^2 \end{pmatrix}.$$

Com a operação coluna  $C_3 - x^k C_2 \mapsto C_3$  e a mudança de coordenadas  $Z \mapsto z - yx^k$ , temos que o germe  $(Y_2, 0)$  é equivalente ao dado pela matriz de representação

$$\begin{pmatrix} x & y & Z \\ w & x & u^2 + y^2 \end{pmatrix},$$

que também é uma das 3-variedades em  $\mathbb{C}^5$  classificada por Frühbis-Krüger e Neumer.

Notamos que ambas funções lineares nos fornecem IDS do mesmo tipo de  $(X, 0)$ , porém não são equivalentes. Veremos que um dos hiperplanos dados como núcleo das funções lineares não é necessariamente genérico com relação a  $(X, 0)$ .

Caso  $(X, 0)$  tenha singularidade não isolada, em geral, não há como garantir a estrutura determinantal para  $Y$ . Em (BRASSELET; CHACHAPOYAS; RUAS, 2017) os autores estudam condições sobre  $X$  e  $p$  que garantem tal estrutura para  $Y$ .

**Teorema 3.24.** (BRASSELET; CHACHAPOYAS; RUAS, 2017) Seja  $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$  uma EIDS de dimensão  $d$ . Se  $H \subset \mathbb{C}^N$  é fortemente genérico na origem, então  $(X \cap H, 0)$  é uma EIDS  $(d - 1)$ -dimensional de mesmo tipo, em  $\mathbb{C}^{N-1}$ .

As seções genéricas por hiperplanos estão ligadas diretamente a minimalidade de invariantes topológicos.

**Definição 3.25.** Dizemos que  $H$  é **topologicamente minimal** para a EIDS  $(X, 0)$  se para todo  $i$  tal que  $iX$  tem dimensão positiva, então  $(-1)^{\dim_i X - 1} \chi(iX \cap H)$  é mínimo entre todos os hiperplanos.

Essa minimalidade topológica dada por hiperplanos genéricos tem sido estudada por vários autores. Tessier (TEISSIER, 1973), Henry e Lê (HENRY; TRÁNG, 1975) estudam o caso de hipersuperfície com singularidade isolada na origem; Gaffney (GAFFNEY, 1997) investiga o caso de ICIS; Snoussi (SNOUSSI, 2001) esclarece o caso de superfícies normais; e Brasselet, Chachapoyas e Ruas (BRASSELET; CHACHAPOYAS; RUAS, 2017) se dedicam a alguns casos de singularidades determinantais. Para uma EIDS  $(X, 0)$  qualquer, Gaffney e Ruas provam que

**Teorema 3.26.** (GAFFNEY; RUAS, 2021) Um hiperplano  $H$  é fortemente genérico para  $X$  se, e somente se,  $H$  é topologicamente minimal para  $X$ .

**Exemplo 3.27.** Sejam  $(X, 0)$ ,  $(Y_1, 0)$  e  $(Y_2, 0)$  os germes de variedades determinantais do Exemplo 3.23. Podemos encontrar os inteiros  $(-1)^{4-1} \chi(Y_1) = k - 2$  e  $(-1)^{4-1} \chi(Y_2) = -1$  em (ZACH, 2017), donde  $H_1 = p_1^{-1}(0)$  não é genérico com relação a  $(X, 0)$ .

**Exemplo 3.28.** Seja  $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^6, 0)$  a IDS do tipo  $(2, 3, 2)$  dada pela matriz

$$\begin{pmatrix} u & y & x \\ z & w & v^2 + y^3 + u^4 \end{pmatrix}.$$

Escolhendo  $H_1$  como núcleo da projeção  $p_1(x, y, z, w, v, u) = v$ , temos que a IDS  $Y_1 = X \cap H_1$  é dada como zero dos determinantes menores  $2 \times 2$  da matriz

$$\begin{pmatrix} u & y & x \\ z & w & y^3 + u^4 \end{pmatrix}.$$

É conhecido em (ZACH, 2017) que  $(-1)^{4-1} \chi(X \cap H_1) = 4$ . Por outro lado, considerando  $H_2 = p_2^{-1}(0)$  em que  $p_2(x, y, z, w, v, u) = u - w$ , tem-se que  $Y_2 = X \cap H_2$  é uma IDS do tipo  $(2, 3, 2)$  com matriz de representação

$$\begin{pmatrix} w & y & x \\ z & w & y^3 + v^2 \end{pmatrix},$$



com  $(-1)^{4-1}(\chi(X \cap H_2)) = 0$ .

Portanto, o Teorema 3.26 garante que  $H_1$  não é genérico com relação a  $X$ .



---

## INVARIANTES LOCAIS

---

Uma importante direção na Teoria de Singularidades é a investigação de invariantes locais para variedades singulares. Neste Capítulo relacionamos alguns invariantes de singularidades determinantis, em especial para o caso de IDS.

Na Seção 4.1 apresentamos a definição, exemplos e as possíveis generalizações para o número de Milnor em uma IDS. Aqui observamos que, mesmo com singularidade isolada, as variedades determinantis têm um comportamento diferente das hipersuperfícies e interseções completas.

Também apresentamos resultados na direção da obstrução de Euler. A obstrução de Euler local e a obstrução de Euler de uma função são comentadas na Seção 4.2. Exibimos relações com os invariantes da seção anterior.

Como generalização da obstrução de Euler de uma função, temos a obstrução de Euler de uma aplicação, lembrada na Seção 4.3. Estudamos o significado desse invariante em uma IDS, mostrando as relações com os demais invariantes. Na última Seção 4.4 do Capítulo relacionamos o número de Bruce-Roberts de uma ICIS, usando o resultado obtido para obstrução de Euler de uma aplicação.

### 4.1 O número de Milnor e generalizações

Um importante invariante analítico na Teoria de Singularidades é o número de Milnor de um germe de função e de uma variedade analítica com singularidade isolada.

Seja  $(X, 0) = (f^{-1}(0), 0)$ ,  $f : (\mathbb{C}^{N+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  um espaço analítico complexo de hipersuperfície com singularidade isolada na origem. Milnor prova em (MILNOR, 2016) que a fibra de Milnor  $\bar{X}_s$  tem o tipo de homotopia de um bouquet de esferas de mesma dimensão real

$N = \dim(X, 0)$ . O número dessas esferas é igual a

$$\mu(X) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{N+1}}{\langle J(f) \rangle},$$

em que  $\langle J(f) \rangle$  é o ideal gerado por  $J(f) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_{N+1}})$ . Esse número  $\mu(X)$  é chamado de *número de Milnor* de  $(X, 0)$ .

Existem equivalentes maneiras de calcular o número de Milnor. A definição acima nos fornece uma maneira algébrica de calcular tal número. Numa abordagem geométrica, o número de Milnor é igual ao número de pontos de Morse de uma Morseficação de  $f$ , assim como é igual ao índice de Poincaré-Hopf do campo vetorial dado pela conjugação complexa do gradiente de  $f$ . Topologicamente, temos que

$$\mu(X) = (-1)^N (\chi(\bar{X}_s) - 1). \quad (4.1)$$

Os resultados de Hamm, Lê e Greuel generalizam a definição para interseção completa com singularidade isolada. Hamm (HAMM, 1971) mostra que a fibra de Milnor de uma ICIS  $(X, 0)$ , de codimensão  $k$ , dada por um germe de aplicação holomorfa  $f = (f_1, \dots, f_k) : (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^k, 0)$  é homotópica a um bouquet de esferas de mesma dimensão real  $N - k = \dim(X)$ .

A fórmula de Lê-Greuel, (TRÁNG, 1974; GREUEL, 1975), permite calcular o número de Milnor de uma ICIS. Seja  $f = (f_1, \dots, f_k) : (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^k, 0)$  um germe de aplicação holomorfa que define  $(X, 0) = (f^{-1}(0), 0)$  e seja  $g = (f_1, \dots, f_{k-1})$ . Denote por  $(Y, 0) = (g^{-1}(0), 0)$  e  $J_k(f)$  o ideal gerado por todos  $k \times k$  menores da matriz Jacobiana de  $f$ . Então,

$$\mu(X) + \mu(Y) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_N}{\langle f_1, \dots, f_{k-1}, J_k(f) \rangle}.$$

No Exemplo 3.21 mostramos que nem sempre a fibra de Milnor determinantal de uma EIDS  $(X, 0)$  tem o tipo de homotopia de esferas de mesma dimensão. Contudo, Pereira e Ruas (RUAS; PEREIRA, 2014) usam a relação topológica 4.1 para definir o número de Milnor em superfícies e em 3-variedades determinantis de codimensão 2.

Seja  $\bar{X}_s$  a fibra de Milnor determinantal da EIDS  $(X, 0)$ . Os *números de Betti* de  $(X, 0)$  são definidos como  $b_i(X) := \text{rank}(H_i(\bar{X}_s))$ .

**Definição 4.1.** Seja  $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$  um espaço analítico complexo de variedade determinantal de codimensão 2, com singularidade isolada na origem e  $\dim(X, 0) = d = 2, 3$ . O **número de Milnor de Pereira-Ruas** de  $(X, 0)$  é definido por  $\mu_{PR}(X) := b_d(X)$ .

Ainda em (RUAS; PEREIRA, 2014), as autoras provam uma fórmula do tipo Lê-Greuel. Para calcular indutivamente o número de Milnor de Pereira-Ruas, é utilizado a multiplicidade polar, definida na Seção 2.3.

**Observação 4.2.** Em geral a multiplicidade polar  $m_d(X, p)$  depende das escolhas de  $\mathfrak{X}$  e  $p$ . Porém, no caso em que  $X$  admite suavização, a multiplicidade polar nos fornece informações apenas de  $X$  e  $p$ . Mais ainda, se  $p$  é uma função linear genérica, então  $m_d$  é um invariante analítico da variedade  $X$ , o qual denotamos por  $m_d(X)$ . No contexto de IDS suavizável, a multiplicidade  $m_d(X)$  é o número de pontos críticos que uma Morseficação da função linear genérica tem numa suavização genérica de  $(X, 0)$  (RUAS; PEREIRA, 2014; GAFFNEY; RUAS, 2021).

**Teorema 4.3.** (RUAS; PEREIRA, 2014) Seja  $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^4, 0)$  um germe de superfície determinantal com singularidade isolada na origem. Então,

$$m_2(X, p) = \mu_{PR}(X) + \mu(X \cap p^{-1}(0)),$$

em que  $p : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}$  é uma função linear tal que a restrição a  $X$  tem singularidade isolada na origem.

No item (c) do Exemplo 3.21 vimos que se  $(X, 0)$  é uma 3-variedade determinantal de codimensão 2, então  $b_2(X) = 1$ . Isto já havia sido notado por Pereira e Ruas, que enunciam a fórmula do tipo Lê-Greuel como:

**Teorema 4.4.** (RUAS; PEREIRA, 2014) Seja  $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^5, 0)$  um germe de 3-variedade determinantal com singularidade isolada na origem. Então,

$$m_3(X, p) = \mu_{PR}(X) + \mu_{PR}(X \cap p^{-1}(0)) - 1,$$

em que  $p : \mathbb{C}^5 \rightarrow \mathbb{C}$  é uma função linear tal que a restrição a  $X$  tem singularidade isolada na origem.

**Exemplo 4.5.** Seja  $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^5, 0)$  um germe de 3-variedade simples classificada em (FRÜHBIS-KRÜGER; NEUMER, 2010), dada pela matriz de representação

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ w & v & y^3 + x^4 \end{pmatrix}.$$

Tome  $p : \mathbb{C}^5 \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $p(x, y, z, w, v) = v - x$ . Assim,  $(X \cap p^{-1}(0), 0)$  é uma IDS do tipo  $(2, 3, 2)$  com matriz de representação

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ w & x & y^3 + x^4 \end{pmatrix}.$$

Como vimos no Exemplo 2.41, o germe  $(X \cap p^{-1}(0), 0)$  é equivalente ao germe dado pela matriz de representação

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ w & x & y^3 \end{pmatrix}.$$

Como a função linear  $p$  é genérica, tem-se que

$$\begin{aligned} m_3(X) &= \mu_{PR}(X) + \mu_{PR}(X \cap p^{-1}(0)) - 1 \\ &= 6 + 3 - 1 \\ &= 8. \end{aligned}$$

Os inteiros  $\mu_{PR}(X)$  e  $\mu_{PR}(X \cap p^{-1}(0))$  podem ser encontrados na página 84 de (ZACH, 2017) e na página 75 de (PEREIRA, 2010), respectivamente.

Em uma EIDS  $(X, 0)$ , o número  $\chi(\bar{X}_s) - 1$  aparece desde os trabalhos de Ebeling e Gusein-Zade (EBELING; GUSEIN-ZADE, 2009). A chamada característica de Euler evanescente é usada como generalização do número de Milnor por Nuño-Ballesteros, Oréface-Okamoto e Tomazella em (NUÑO-BALLESTEROS; ORÉFICE-OKAMOTO; TOMAZELLA, 2013) para o caso de IDS suavizável. Essa definição também é usada para o caso de superfícies tóricas por Dalbelo, Grulha e Pereira em (DALBELO; PEREIRA; GRULHA-JR., 2015).

**Definição 4.6.** A **característica de Euler evanescente** de uma  $d$ -dimensional EIDS  $(X, 0)$ , é definida por

$$v(X, 0) := (-1)^d (\chi(\bar{X}_s) - 1),$$

em que  $\bar{X}_s$  é a fibra determinantal de Milnor de  $(X, 0)$ .

Nas próximas seções, relacionamos esse número com outros invariantes, estudados por diversos autores. Em (NUÑO-BALLESTEROS; ORÉFICE-OKAMOTO; TOMAZELLA, 2013) os autores definem ainda a característica de Euler evanescente de uma fibra sobre uma IDS suavizável.

**Definição 4.7.** Seja  $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$  uma IDS suavizável  $d$ -dimensional e seja  $f : (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  um germe de função holomorfa tal que  $f|_X : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  tem singularidade isolada na origem.

A **característica de Euler evanescente da fibra**  $(X \cap f^{-1}(0), 0)$  é

$$v(X \cap f^{-1}(0), 0) = (-1)^{d-1} (\chi(X \cap f^{-1}(\delta)) - 1),$$

em que  $\delta$  é uma constante suficientemente próxima de 0.

Para a característica de Euler evanescente, Nuño-Ballesteros, Oréface-Okamoto e Tomazella demonstram uma fórmula tipo Lê-Greuel.

**Teorema 4.8.** (NUÑO-BALLESTEROS; ORÉFICE-OKAMOTO; TOMAZELLA, 2013) Dado um germe de função holomorfa  $f|_X : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  com singularidade isolada sobre uma IDS suavizável  $(X, 0)$ , temos que

$$\#\Sigma(\tilde{f}|_{\tilde{X}}) = v(X, 0) + v(X \cap f^{-1}(0), 0),$$

em que  $\#\Sigma(\tilde{f}_{|\tilde{X}})$  é o número de pontos críticos de uma Morseficação de  $f$  sobre uma suavização  $\tilde{X}$  de  $X$ .

Notamos que o Teorema acima generaliza os Teoremas 4.3 e 4.4. De fato, no caso em que  $f = p$  é uma função linear genérica, tem-se que  $m_d(X) = m_d(X, p) = \#\Sigma(\tilde{p}_{|\tilde{X}})$ ; veja a Observação 4.2.

A característica de Euler evanescente também é relacionada com o índice radial (EBELING; GUSEIN-ZADE, 2005) e extensões do índice de Poincaré-Hopf em uma EIDS (EBELING; GUSEIN-ZADE, 2009). Ebeling e Gusein-Zade definem o chamado índice de Poincaré-Hopf-Nash sob uma resolução de uma EIDS, descrevendo a topologia da mesma a partir desse invariante.

**Definição 4.9.** Sejam  $X$  uma variedade e  $V \subset X$  uma subvariedade fechada. Uma **transformação** de  $(X, V)$  é uma variedade  $\hat{X}$  com um morfismo sobrejetivo analítico  $\pi : \hat{X} \rightarrow X$  tal que  $\pi : \pi^{-1}(X \setminus V) \rightarrow X \setminus V$  é um isomorfismo e  $\overline{\pi^{-1}(X \setminus V)} = \hat{X}$ . Uma **resolução** de  $(X, \text{Sing}(X))$  é uma transformação tal que  $\hat{X}$  é suave.

Definimos a transformação de Nash para entendermos o índice introduzido por Ebeling e Gusein-Zade. Seja  $X$  uma variedade complexa analítica de dimensão  $k$  tal que  $X \subset U$  em que  $U$  é um aberto de  $\mathbb{C}^N$ . A variedade Grassmaniana dos planos  $k$ -dimensionais em  $\mathbb{C}^N$  é denotada por  $Gr(k, N)$ .

Na parte regular de  $X$  definimos a aplicação de Gauss:

$$\begin{aligned} \phi : X_{reg} &\longrightarrow U \times Gr(k, N) \\ x &\longmapsto (x, T_x X_{reg}) \end{aligned}$$

**Definição 4.10.** O fecho da imagem da aplicação de Gauss  $\phi$  em  $U \times Gr(k, N)$ , denotado por  $Nash(X)$ , é chamado de **Transformação de Nash** de  $X$ .

Não é sempre que a transformação de Nash é uma resolução para  $X$ . Contudo, no caso de variedade genérica determinantal a transformação  $Nash(M_{m,n}^t)$  é suave; essa é uma afirmação em (EBELING; GUSEIN-ZADE, 2009) e Siesquén detalha a demonstração e da exemplos em (SIESQUÉN, 2014).

Seja  $\tilde{X}$  uma suavização essencial da EIDS  $(X, 0)$ , do tipo  $(m, n, t)$  e denote por  $\hat{X} = Nash(M_{m,n}^t) \times_{M_{m,n}^t} \tilde{X}$ , o produto fibrado dos espaços  $Nash(M_{m,n}^t)$  e  $\tilde{X}$  sobre  $M_{m,n}^t$ . A aplicação  $\Pi : \hat{X} \rightarrow \tilde{X}$  é uma resolução de  $\tilde{X}$ . Essa afirmação também é feita por Ebeling e Gusein-Zade e uma demonstração pode ser encontrada em (SIESQUÉN, 2014).

Como  $\hat{X}$  é suave, podemos definir o índice de Poincaré-Hopf como na Seção 2.6. Contudo, esse índice coincide, sobre uma IDS, com o próximo invariante, o qual utiliza um fibrado vetorial sobre a transformada de Nash.

A transformação de Nash de uma variedade singular  $X$  é um espaço analítico complexo dotado de uma projeção holomorfa  $v : Nash(X) \rightarrow X$ , e apesar de não ser sempre suave ainda podemos definir um fibrado vetorial sobre  $Nash(X)$ .

Denote por  $\mathcal{T}$  a extensão natural do fibrado universal<sup>1</sup> de  $Gr(k, N)$  sobre  $U \times Gr(k, N)$ .

**Definição 4.11.** Como  $Nash(X) \subset U \times Gr(k, N)$ , consideramos  $Nash(\mathcal{T})$  a restrição de  $\mathcal{T}$  a  $Nash(X)$  e chamamos de **fibrado de Nash**. A aplicação  $\pi : Nash(\mathcal{T}) \rightarrow Nash(X)$  é a projeção desse fibrado.

Um elemento de  $Nash(\mathcal{T})$  é escrito como  $(x, P, v)$ , em que  $x \in U$ ,  $P$  é um plano de dimensão  $k$  e  $v$  é um vetor em  $P$ . Denotando por  $\varphi$  a projeção natural de  $U \times Gr(k, N)$  em  $U$ , temos o diagrama abaixo.

$$\begin{array}{ccc} Nash(\mathcal{T}) & \longrightarrow & \mathcal{T} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \\ Nash(X) & \longrightarrow & U \times Gr(k, N) \\ v \downarrow & & \downarrow \varphi \\ X & \longrightarrow & U \subseteq \mathbb{C}^N \end{array}$$

Tal como dualizamos o fibrado tangente, temos a noção do fibrado de Nash dual de  $X$ , o qual denotamos por  $Nash^*(\mathcal{T})$ . Cada fibra de  $Nash^*(\mathcal{T})$  sobre  $x \in X$  consiste das aplicações  $\mathbb{C}$ -lineares  $P \rightarrow \mathbb{C}$ , em que  $P$  é um plano associado a  $x$  na transformação de Nash.

Seja  $(X, 0) = (F^{-1}(M_{m,n}^t), 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$  uma EIDS  $d$ -dimensional, com uma suavização essencial  $(\tilde{X}, 0)$  e seja  $\omega$  um germe de 1-forma (complexa) em  $(\mathbb{C}^N, 0)$  tal que sua restrição a  $(X, 0)$  tem um ponto singular isolado na origem. Considerando  $Nash(\tilde{X})$ , a 1-forma  $\omega$  define uma seção não nula  $\tilde{\omega}$  no fibrado  $Nash^*(\mathcal{T})$  sobre a preimagem  $v^{-1}(\tilde{X} \cap S_\varepsilon(0))$  (EBELING; GUSEIN-ZADE, 2009).

**Definição 4.12.** O **índice de Poincaré-Hopf-Nash**  $ind_{PHN}(\omega, X, 0)$  da 1-forma  $\omega$  na EIDS  $(X, 0)$  é a obstrução de estender  $\tilde{\omega}$  como uma seção não nula do fibrado dual  $Nash^*(\mathcal{T})$  de  $v^{-1}(\tilde{X} \cap S_\varepsilon(0))$  para  $v^{-1}(\tilde{X} \cap B_\varepsilon(0))$ . Mais precisamente, é seu valor  $ind_{PHN}(\omega, X, 0) \in \mathbb{Z}$  como elemento do grupo de cohomologia  $H^{2d}(v^{-1}(\tilde{X} \cap B_\varepsilon(0)), v^{-1}(\tilde{X} \cap S_\varepsilon(0)))$  avaliado na classe fundamental  $[v^{-1}(\tilde{X} \cap B_\varepsilon(0)), v^{-1}(\tilde{X} \cap S_\varepsilon(0))]$ .

No mesmo artigo, (EBELING; GUSEIN-ZADE, 2009), os autores definem outros índices utilizando diferentes resoluções da EIDS  $(X, 0)$ , a saber, transformação de Tjurina e transformação de Tjurina transposta. Essas transformações também são estudadas por outros autores, como em (PEDERSEN, 2021; FRÜHBIS-KRÜGER; ZACH, 2021b).

<sup>1</sup> Veja o Exemplo 2.43.



Quando  $(X, 0)$  tem singularidade isolada (uma IDS) e é suavizável, temos que todos os índices definidos por Ebeling e Gusein-Zade coincidem e são iguais a

$$\text{ind}_{PHN}(\omega, X, 0) = \text{ind}_{rad}(\omega, X, 0) + \nu(X, 0), \quad (4.2)$$

em que  $\text{ind}_{rad}$  é o índice radial definido na Seção 2.6. Essa é uma afirmação feita em (EBELING; GUSEIN-ZADE, 2009) e quando combinada com o Teorema 2.53, tem-se uma relação entre o índice de Poincaré-Hopf-Nash e a característica de Euler evanescente.

**Proposição 4.13.** Seja  $f : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  um germe de função holomorfa com singularidade isolada na origem sobre uma IDS suavizável  $(X, 0)$ . Então,

$$\text{ind}_{PHN}(df, X, 0) = \nu(X, 0) + \nu(X \cap f^{-1}(0), 0).$$

Desde que o índice  $\text{ind}_{PHN}(\omega, X, 0)$  é o número de pontos críticos de uma deformação genérica de  $\omega$  na parte regular de uma suavização essencial da EIDS  $(X, 0)$  (Proposição 1, (EBELING; GUSEIN-ZADE, 2009)), a Proposição 4.13 é escrita como no Teorema 4.8.

A Proposição 4.13 é observada por Zach (ZACH, 2017) no caso em que  $f = p$  é uma função linear genérica e por Pereira (PEREIRA, 2010) para o caso em que a IDS  $(X, 0)$  é uma superfície determinantal em  $(\mathbb{C}^4, 0)$ .

**Exemplo 4.14.** Seja  $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^5, 0)$  um germe de 3-variedade determinantal do tipo  $(2, 3, 2)$  que tem matriz de representação

$$\begin{pmatrix} z & y & wx + w^k \\ y & x & v \end{pmatrix},$$

para algum  $k \geq 1$  fixado. Seu número de Milnor de Pereira-Ruas  $\mu_{PR}(X) = 1$  é calculado em (ZACH, 2017). Portanto, temos que

$$\begin{aligned} \nu(X, 0) &= (-1)^3(b_0(X) - b_1(X) + b_2(X) - b_3(X) - 1) \\ &= (-1)^3(1 - 0 + 1 - \mu_{PR}(X) - 1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Tome  $p : \mathbb{C}^5 \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $p(x, y, z, w, v) = v - z$ . Assim,  $(X \cap p^{-1}(0), 0)$  é uma superfície determinantal do tipo  $(2, 3, 2)$  com matriz de representação

$$\begin{pmatrix} z & y & wx + w^k \\ y & x & z \end{pmatrix}.$$

Em (DAMON; PIKE, 2014), os autores verificam que  $\mu_{PR}(X \cap p^{-1}(0)) = 3k$  para um número finito de  $k$ 's. Daí,

$$\begin{aligned} \nu(X \cap p^{-1}(0), 0) &= (-1)^2(b_0(X \cap p^{-1}(0)) - b_1(X \cap p^{-1}(0)) + b_2(X \cap p^{-1}(0)) - 1) \\ &= 1 - 0 + \mu_{PR}(X \cap p^{-1}(0)) - 1 \\ &= 3k. \end{aligned}$$

Aplicando a Proposição 4.13, tem-se que  $\text{ind}_{PHN}(dp, X, 0) = 3k$ .

## 4.2 A obstrução de Euler local

A existência e unicidade da classe de Chern para variedades algébricas singulares foi conjecturada por Deligne e Grothendieck, sendo provada por MacPherson em (MACPHERSON, 1974). Em sua construção, MacPherson introduz a obstrução local de Euler como um dos principais ingredientes das classes características para variedades singulares.

A conjectura de Deligne e Grothendieck foi feita por volta de 1969, e Sullivan publica tal discussão na seção “notas históricas” do artigo (SULLIVAN, 1971). Antes mesmo da conjectura ser conhecida, Schwartz (SCHWARTZ, 1965) já havia respondido com sua construção de campos radiais. De fato, juntamente com Brasselet em (BRASSELET; SCHWARTZ, 1981) eles provam que a classe de MacPherson é equivalente a classe de Schwartz, via a dualidade de Alexander.

Para provar a equivalência, Brasselet e Schwartz também introduzem a noção de obstrução local de Euler. Enquanto MacPherson usa formas diferenciais para definir tal obstrução, Brasselet e Schwartz (BRASSELET; SCHWARTZ, 1981) utilizam campos radiais estratificados. Nesta seção seguimos as ideias de Brasselet e Schwartz.

Seja  $X \subset M$  uma variedade analítica  $d$ -equidimensional mergulhada numa variedade suave  $M$  que admite uma estratificação de Whitney adaptada a  $X$ . Isto significa que  $X$  é a união dos estratos  $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ . Relembramos que um campo estratificado em  $X$  é uma seção  $v$  do fibrado tangente  $TM|_X$  tal que para cada  $x \in X$ , o vetor  $v(x)$  está no espaço tangente do estrato  $V_\alpha$  que contém  $x$ .

**Lema 4.15.** (BRASSELET; SCHWARTZ, 1981) Cada campo vetorial estratificado  $v$ , não nulo num subconjunto  $A \subset X$ , admite um levantamento canônico para uma seção  $\tilde{v}$  do fibrado de Nash sobre  $v^{-1}(A) \subset \text{Nash}(X)$ , em que  $v : \text{Nash}(X) \rightarrow X$  é a projeção.

Denotamos por  $B_\varepsilon(x)$  uma vizinhança de  $x$  em  $X$  e por  $S_\varepsilon(x) = \partial B_\varepsilon(x)$  sua fronteira. Sejam  $v$  um campo estratificado com singularidade isolada em  $x$  e  $\tilde{v}$  o seu levantamento canônico sobre  $v^{-1}(X \cap S_\varepsilon(x))$  como uma seção não nula do fibrado  $\text{Nash}(\mathcal{T})$ , garantido pelo Lema 4.15. Escrevemos  $c(\tilde{v}) \in H^{2d}(v^{-1}(X \cap B_\varepsilon(x)), v^{-1}(X \cap S_\varepsilon(x)), \mathbb{Z})$  o cociclo de obstrução para estender  $\tilde{v}$  como seção não nula de  $\text{Nash}(\mathcal{T})$  em  $v^{-1}(X \cap B_\varepsilon(x))$ .

**Definição 4.16.** Seja  $v = v_{rad}$  um campo vetorial estratificado radial com singularidade isolada em  $x \in X$ . A **obstrução de Euler local**,  $Eu_X(x) \in \mathbb{Z}$ , é definida como a avaliação do cociclo  $c(\tilde{v})$  na classe fundamental  $[v^{-1}(X \cap B_\varepsilon(x)), v^{-1}(X \cap S_\varepsilon(x))]$ .

Algumas propriedades da obstrução de Euler local foram notadas por MacPherson, Brasselet e Schwartz. Por exemplo, é conhecido que se  $x \in X_{reg}$ , então  $Eu_X(x) = 1$ . Outra importante propriedade é que a obstrução de Euler local é constante ao longo dos estratos de uma estratificação de Whitney de  $X$ .

Apesar de conhecermos algumas propriedades não é tão simples calcular o inteiro  $Eu_X(x)$ . Pensando nisso, autores como Brasselet, Lê e Seade ([BRASSELET; SEADE \*et al.\*, 2000](#)) provaram fórmulas que nos permitem encontrar esse invariante.

Seja  $X \subset U$  um representante suficientemente pequeno do germe analítico  $(X, 0)$  contido no aberto  $U$ . Considere  $\mathcal{V} = \{V_i\}$  uma estratificação de Whitney de  $U$  adaptada a  $X = \cup_{i=0}^q V_i$  tal que  $\{0\}$  é um estrato e  $V_q = X_{reg}$ .

**Teorema 4.17.** ([BRASSELET; SEADE \*et al.\*, 2000](#)) Sejam  $(X, 0)$  e  $\mathcal{V}$  como acima. Para cada forma linear genérica  $\omega$  existe  $\varepsilon_0$  tal que para qualquer  $\varepsilon$  com  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  e  $\delta \neq 0$  suficientemente pequeno, tem-se que a obstrução de Euler local de  $X$  em 0 é igual a

$$Eu_X(0) = \sum_{i=1}^q \chi(V_i \cap B_\varepsilon(0) \cap \omega^{-1}(\delta)) \cdot Eu_X(V_i),$$

em que  $Eu_X(V_i)$  é a obstrução de Euler de  $X$  num ponto de  $V_i$  e  $0 < |\delta| \ll \varepsilon \ll 1$ .

No caso em que  $(X, 0)$  é uma IDS o Teorema 4.17 garante uma relação entre a obstrução de Euler local e a característica de Euler evanescente.

**Corolário 4.18.** Sejam  $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$  uma IDS  $d$ -dimensional e  $p : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}$  uma função linear genérica com relação a  $(X, 0)$ . Denotamos por  $Y = X \cap p^{-1}(0)$ . Então,

$$Eu_X(0) = (-1)^{d-1} \nu(Y, 0) + 1.$$

**Demonstração.** No Teorema 4.17 consideramos a estratificação  $\mathcal{V} = \{V_0 = \{0\}, V_1 = X_{reg}\}$  e  $\omega = dp$ , obtendo

$$\begin{aligned} Eu_X(0) &= \chi(V_0 \cap p^{-1}(\delta) \cap B_\varepsilon) \cdot Eu_X(V_0) + \chi(V_1 \cap p^{-1}(\delta) \cap B_\varepsilon) \cdot Eu_X(V_1) \\ &= \chi(X \cap p^{-1}(\delta) \cap B_\varepsilon) = \chi(Y_\delta) \\ &= (-1)^{d-1} \nu(Y, 0) + 1. \quad \square \end{aligned}$$

**Exemplo 4.19.** Por mudanças de coordenadas e uma permutação entre as linhas, as seguintes matrizes são  $\mathcal{G}$ -equivalentes.

$$\begin{pmatrix} w + v^k & y & x \\ z & w & yv \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z & y & xw \\ y + w^k & x & v \end{pmatrix},$$

para  $k \geq 1$  fixado.

Se  $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^5, 0)$  é um germe de 3-variedade determinantal dada por uma dessas matrizes, então podemos escolher  $p(x, y, z, w, v) = v - z$  e a superfície  $Y = X \cap p^{-1}(0)$  tem matriz de representação

$$\begin{pmatrix} z & y & xw \\ y + w^k & x & z \end{pmatrix}.$$

É conhecido por Damon e Pike em (DAMON; PIKE, 2014) que  $\mu_{PR}(Y) = 3k + 2$  para um número finito de  $k$ 's. Neste caso, temos

$$\begin{aligned} Eu_X(0) &= (-1)^{3-1}v(Y,0) + 1 \\ &= \mu_{PR}(Y) + 1 \\ &= 3k + 3. \end{aligned}$$

Nuño-Ballesteros, Oréface-Okamoto e Tomazella relacionam a obstrução de Euler com a multiplicidade polar e a característica de Euler evanescente.

**Teorema 4.20.** (NUÑO-BALLESTEROS; ORÉFACE-OKAMOTO; TOMAZELLA, 2013) Seja  $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$  uma IDS suavizável de dimensão  $d$ . Então,

$$Eu_X(0) + (-1)^d m_d(X) = 1 + (-1)^d v(X, 0).$$

Também podemos considerar um campo vetorial associado a uma função holomorfa  $f : X \subset \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}$  com singularidade isolada na origem e dada pela restrição de  $F : U \rightarrow \mathbb{C}$  função holomorfa num aberto  $U \subset \mathbb{C}^N$ . Brasselet, Massey, Parameswaran e Seade (BRASSELET *et al.*, 2004) constroem um campo de vetores estratificado, denotado por  $\bar{\nabla}_X f$ , o qual é homotópico ao campo gradiente conjugado  $\bar{\nabla} F$ , na vizinhança  $X \cap S_\varepsilon(0)$ . A construção detalhada pode ser encontrada em (BRASSELET; SEADE; SUWA, 2009).

**Definição 4.21.** Denote por  $\tilde{\nabla}_X f$  o levantamento de  $\bar{\nabla}_X f$  sobre  $v^{-1}(X \cap S_\varepsilon(0))$  como uma seção não nula do fibrado de Nash. A **obstrução de Euler da função**  $f$ ,  $Eu_{f,X}(0) \in \mathbb{Z}$ , é definida como a avaliação do cociclo de obstrução  $c(\tilde{\nabla}_X f)$  na classe fundamental  $[v^{-1}(X \cap B_\varepsilon(0)), v^{-1}(X \cap S_\varepsilon(0))]$ .

O Teorema 4.17 assegura que a obstrução de Euler local, como função construtível em  $X$ , satisfaz a condição local de Euler para formas lineares genéricas. Brasselet, Massey, Parameswaran e Seade investigam os obstáculos para que a obstrução de Euler local satisfaça a mesma condição relativamente a uma função holomorfa com singularidade isolada na origem, provando o seguinte resultado.

**Teorema 4.22.** (BRASSELET *et al.*, 2004) Seja  $(X, 0)$  e  $\mathcal{V}$  dados como no Teorema 4.17. Tome  $f : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  um germe de função holomorfa com singularidade isolada na origem. Para  $0 < |\delta| \ll \varepsilon \ll 1$ , temos

$$Eu_X(0) = \left( \sum_{i=1}^q \chi(V_i \cap B_\varepsilon(0) \cap f^{-1}(\delta)) \cdot Eu_X(V_i) \right) + Eu_{f,X}(0).$$

Tal como no Corolário 4.18, podemos simplificar o Teorema acima para o caso de  $(X, 0)$  ser uma IDS suavizável.

**Corolário 4.23.** Seja  $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$  uma IDS suavizável de dimensão  $d$  e seja  $p : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}$  função linear genérica relativa a  $(X, 0)$ . Então,

$$Eu_{f,X}(0) = (-1)^d (\nu(X \cap f^{-1}(0), 0) - \nu(X \cap p^{-1}(0), 0)).$$

**Demonstração.** Desde que  $X$  tem singularidade isolada podemos considerar apenas os estratos  $V_0 = \{0\}$  e  $V_1 = X_{reg}$ . Então, pelo Teorema 4.22 temos que

$$\begin{aligned} Eu_{f,X}(0) &= Eu_X(0) - \chi(X \cap f^{-1}(\delta)) \\ &= Eu_X(0) - ((-1)^{d-1} \nu(X \cap f^{-1}(0), 0) + 1) \end{aligned}$$

O Corolário 4.18 garante que  $Eu_X(0) = (-1)^{d-1} \nu(X \cap p^{-1}(0), 0) + 1$ . Portanto,

$$Eu_{f,X}(0) = (-1)^d (\nu(X \cap f^{-1}(0), 0) - \nu(X \cap p^{-1}(0), 0)). \quad \square$$

Esse resultado é notado por Ament, Nuño-Ballesteros, Oréface-Okamoto e Tomazella como Teorema 3.5 em (AMENT *et al.*, 2016). No mesmo artigo, os autores provam uma consequência desse Corolário e da fórmula do tipo Lê-Greuel 4.8, o qual reescrevemos relacionando o índice de Poincaré-Hopf-Nash de  $(X, 0)$ .

**Corolário 4.24.** Seja  $f : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  um germe de função holomorfa com singularidade isolada na origem sobre uma IDS suavizável  $(X, 0)$   $d$ -dimensional. Então,

$$Eu_{f,X}(0) = (-1)^d (\text{ind}_{PHN}(df, X, 0) - m_d(X)).$$

**Demonstração.** Seja  $p : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}$  uma função linear genérica relativa a  $(X, 0)$ . Neste caso, sabemos que  $m_d(X) = \#\Sigma(\tilde{p}|_{\tilde{X}})$ , em que  $\tilde{p}$  é uma Morseficação de  $p$  numa suavização  $\tilde{X}$  de  $X$ . Portanto, o Teorema 4.8 garante que

$$m_d(X) = \nu(X, 0) + \nu(X \cap p^{-1}(0), 0).$$

Assim, o Corolário 4.23 implica em

$$\begin{aligned} Eu_{f,X}(0) &= (-1)^d (\nu(X \cap f^{-1}(0), 0) + \nu(X, 0) - \nu(X, 0) - \nu(X \cap p^{-1}(0), 0)) \\ &= (-1)^d (\text{ind}_{PHN}(df, X, 0) - m_d(X)), \end{aligned}$$

desde que  $\text{ind}_{PHN}(df, X, 0) = \nu(X, 0) + \nu(X \cap f^{-1}(0), 0)$  pela Proposição 4.13. □

Em (EBELING; GUSEIN-ZADE, 2005) os autores definem a obstrução de Euler  $Eu_{\omega,X}(0)$  de uma 1-forma  $\omega$  sobre um espaço analítico complexo  $(X, 0)$   $d$ -equidimensional. Quando  $\omega = df$ , em que  $f$  é uma função holomorfa em  $(\mathbb{C}^N, 0)$  com singularidade isolada na origem sobre  $(X, 0)$ , o número  $Eu_{df,X}(0)$  difere de  $Eu_{f,X}(0)$  pelo sinal  $(-1)^d$ .

Notamos que ao considerar  $(X, 0)$  uma EIDS, a definição de  $Eu_{\omega, X}(0)$  é similar a Definição 4.12 do índice de Poincaré-Hopf-Nash. De fato, podemos escrever que

$$ind_{PHN}(\omega, X, 0) = Eu_{\omega, \tilde{X}}(0),$$

em que  $(\tilde{X}, 0)$  é uma suavização essencial de  $(X, 0)$ .

Neste sentido, o Corolário 4.24 mede a diferença da obstrução de Euler de uma função  $f$  numa IDS e em sua suavização. Em outras palavras, temos:

**Corolário 4.25.** Seja  $f : (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  um germe de função holomorfa que tem singularidade isolada na origem sobre uma IDS suavizável  $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$   $d$ -dimensional. Considere  $(\tilde{X}, 0)$  a suavização de  $(X, 0)$ . Então,

$$Eu_{f, \tilde{X}}(0) - Eu_{f, X}(0) = (-1)^d m_d(X).$$

Também podemos medir essa diferença ao considerar uma EIDS.

**Proposição 4.26.** Sejam  $(X, 0) = (F^{-1}(M_{m,n}^t), 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$  uma EIDS e  $\omega$  uma 1-forma definida numa vizinhança da origem de  $\mathbb{C}^N$  com singularidade isolada em  $X$  na origem. Então,

$$Eu_{\omega, \tilde{X}}(0) - Eu_{\omega, X}(0) = \sum_{i=1}^t (-1)^{d_i} m_{it} (\chi(i\tilde{X}) - 1),$$

em que  $\tilde{X} = \tilde{F}^{-1}(M_{m,n}^t)$  é uma suavização essencial de  $X$ ,  $d_i = \dim(i\tilde{X}) = \dim(\tilde{F}^{-1}(M_{m,n}^t))$  e

$$m_{it} = (-1)^{(m+n+1)(t-i)} \binom{m-i}{m-t}.$$

**Demonstração.** A Proposição 5 em (EBELING; GUSEIN-ZADE, 2009) garante que

$$\begin{aligned} Eu_{\omega, \tilde{X}}(0) = ind_{PHN}(\omega, X, 0) &= \sum_{i=1}^t m_{it} (ind_{rad}(\omega, iX, 0) + (-1)^{d_i} (\chi(i\tilde{X}) - 1)) \\ &= \sum_{i=1}^t m_{it} ind_{rad}(\omega, iX, 0) + \sum_{i=1}^t (-1)^{d_i} m_{it} (\chi(i\tilde{X}) - 1). \end{aligned}$$

Por outro lado, o Corolário 1 em (EBELING; GUSEIN-ZADE, 2005) implica em

$$Eu_{\omega, X}(0) = \sum_{i=1}^t m_{it} ind_{rad}(\omega, iX, 0),$$

donde temos a igualdade desejada. □

É interessante notar que a diferença entre as obstruções de Euler não depende de  $f$ , no caso em que aplicamos a Proposição 4.26 para  $\omega = df$ . A informação que temos de  $Eu_{f, \tilde{X}}(0)$  vem da suavização essencial  $\tilde{X}$ . O Corolário 4.25 mostra que a diferença é um invariante bem conhecido para IDS.

Em (BRASSELET *et al.*, 2004) os autores também investigam o caso em que  $f : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  pode ter singularidade não isolada. Neste caso, a construção geométrica de  $Eu_{f, X}(0)$  não faz sentido, mas definem um *defeito*.

**Definição 4.27.** Sejam  $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$  um espaço analítico complexo equidimensional e  $U \subset \mathbb{C}^N$  um aberto contendo um representante suficientemente pequeno de  $(X, 0)$ . Considere  $f$  a restrição em  $(X, 0)$  de um germe de função holomorfa  $F : (U, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  e  $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i=0}^q$  uma estratificação de Whitney de  $U$  adaptada a  $X$ . O **defeito de Euler** é definido como

$$D_{f,X}(0) := Eu_X(0) - \left( \sum_{i=1}^q \chi(V_i \cap B_\varepsilon(0) \cap f^{-1}(\delta)) \cdot Eu_X(V_i) \right),$$

em que  $0 < |\delta| \ll \varepsilon \ll 1$ .

Esta definição está diretamente ligada a outro invariante introduzido por Dutertre e Grulha em (DUTERTRE; GRULHA-JR., 2014). Para o que segue sugerimos a leitura da Seção 2.2.

**Definição 4.28.** Seja  $f : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  um germe de função holomorfa sobre um espaço analítico complexo equidimensional  $(X, 0)$ . Considere  $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i=0}^q$  uma boa estratificação de um representante  $X$  relativa a  $f$ . O **número de Brasselet** de  $f$  na origem é definido como

$$B_{f,X}(0) := \sum_{i=1}^q \chi(V_i \cap f^{-1}(\delta) \cap B_\varepsilon(0)) Eu_X(V_i),$$

em que  $0 < |\delta| \ll \varepsilon \ll 1$ .

Em particular, se  $f$  tem singularidade isolada na origem, o Teorema 4.22 garante que o número de Brasselet é  $B_{f,X}(0) = Eu_X(0) - Eu_{f,X}(0)$ . Neste caso, os Corolários 4.18 e 4.23 implicam no seguinte resultado, escrito por Ament, Nuño-Ballesteros, Oréface-Okamoto e Tomazella.

**Proposição 4.29.** (AMENT *et al.*, 2016) Seja  $(X, 0)$  uma IDS suavizável  $d$ -dimensional e seja  $f : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  um germe de função holomorfa com singularidade isolada na origem. Então,

$$B_{f,X}(0) = (-1)^{d-1} v(X \cap f^{-1}(0), 0) + 1.$$

**Exemplo 4.30.** A matriz

$$\begin{pmatrix} w & y & x \\ z & v & w^{k+1} + y^2 \end{pmatrix}$$

define um germe  $(X, 0)$  de 3-variedade determinantal do tipo  $(2, 3, 2)$ , para  $k \geq 1$  fixado. Escolhendo  $p : \mathbb{C}^5 \rightarrow \mathbb{C}$  por  $p(x, y, z, w, v) = v - w$ , temos que  $X \cap p^{-1}(0)$  é uma superfície determinantal em  $\mathbb{C}^4$  com matriz de representação

$$\begin{pmatrix} w & y & x \\ z & w & w^{k+1} + y^2 \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Após a operação coluna  $C_3 - w^k C_2 \mapsto C_3$  e a mudança de coordenadas  $\phi(x, y, z, w) = (x - w^k y, y, z, w)$ , a matriz 4.3 é  $\mathcal{G}$ -equivalente a

$$\begin{pmatrix} w & y & x \\ z & w & y^2 \end{pmatrix},$$

com  $\mu_{PR}(X \cap p^{-1}(0)) = 2$ , calculado em (PEREIRA, 2010).

Portanto,

$$\begin{aligned} B_{p,X}(0) &= (-1)^{3-1} \nu(X \cap p^{-1}(0)) + 1 \\ &= \mu_{PR}(X \cap p^{-1}(0)) + 1 = Eu_X(0) \\ &= 3. \end{aligned}$$

### 4.3 A obstrução de Euler de uma aplicação

A generalização natural da obstrução de Euler de uma função é a obstrução de Euler de uma aplicação, definida por Grulha em (GRULHA-JR, 2007). As ideias apresentadas em (GRULHA-JR, 2007) seguem a construção da obstrução de Euler local de um  $k$ -campo vetorial estratificado, que pode ser encontrada em (BRASSELET; SEADE; SUWA, 2009). Relembramos as definições dadas por Grulha.

Sejam  $(X, 0) \subset (U, 0)$  um espaço analítico complexo  $d$ -equidimensional e  $U \subset \mathbb{C}^N$  um aberto. Denotamos por  $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i=0}^q$  uma estratificação de Whitney de  $U$  adaptada a  $X$ . Considere também  $f : X \rightarrow \mathbb{C}^k$ ,  $f = (f_1, \dots, f_k)$ ,  $k \leq d$ , uma aplicação holomorfa que é restrição de  $F : U \rightarrow \mathbb{C}^k$ .

Denote por  $|K|$  uma triangularização de  $U$  compatível com a estratificação  $\mathcal{V}$ , e seja  $(D)$  uma decomposição celular que é dual a  $|K|$ . Suponha que  $x$  é o baricentro de um  $(k-1)$ -simplexo de  $|K|$  e seja  $\sigma$  a célula de  $(D)$  de dimensão real  $2(N-k+1)$  dual desse simplexo; o ponto  $x$  também é baricentro de  $\sigma$ .

Para cada função componente  $f_i$  de  $f$  podemos associar um campo estratificado  $\overline{\nabla}_X f_i$ , o qual é homotópico ao campo gradiente conjugado  $\overline{\nabla} F_i$ , como na Definição 4.21. Grulha constrói um  $k$ -campo, denotado por  $\overline{\nabla}_X^{(k)} f$ , que é estratificado sem singularidades em  $(S_\varepsilon(x) \cap X) \setminus \Sigma f$ . Caso  $X$  seja suave e  $\dim(\Sigma f) \leq k-1$ , pode-se escolher uma célula  $\sigma$  tal que  $\Sigma f \cap \sigma = \emptyset$ .

**Definição 4.31.** Dizemos que  $f$  satisfaz a **condição**  $(\delta)$  se existe uma célula de  $\sigma$  de baricentro  $x$  e dimensão real  $2(N-k+1)$  de uma decomposição celular  $(D)$  de  $U$  tal que

$$\Sigma f \cap \sigma = \emptyset.$$

De acordo com Grulha (GRULHA-JR, 2007), se  $X$  for singular com  $\dim(\text{Sing}(X)) \leq k-1$  e  $\dim(\Sigma f|_{X_{\text{reg}}}) \leq k-1$ , então existe  $\sigma$  satisfazendo a condição  $(\delta)$ . Neste caso, existe um



levantamento do campo  $\overline{\nabla}_X^{(k)} f$  como um conjunto de  $k$  seções linearmente independentes do fibrado de Nash, sobre  $v^{-1}(\partial\sigma \cap X)$ ; denotamos esse levantamento por  $\tilde{\nabla}_X^{(k)} f$  e por  $c(\tilde{\nabla}_X^{(k)} f) \in H^{2(d-k+1)}(v^{-1}(\sigma \cap X), v^{-1}(\partial\sigma \cap X), \mathbb{Z})$  o cociclo de obstrução em estender as  $k$  seções  $\tilde{\nabla}_X^{(k)} f$  como conjunto linearmente independente em  $v^{-1}(\sigma \cap X)$ .

**Definição 4.32.** Dentro das condições anteriores, definimos a **obstrução de Euler da aplicação**  $f : X \rightarrow \mathbb{C}^k$ ,  $Eu_{f,X}(\sigma, x) \in \mathbb{Z}$ , como a avaliação do cociclo  $c(\tilde{\nabla}_X^{(k)} f)$  na classe fundamental do par  $[v^{-1}(\sigma \cap X), v^{-1}(\partial\sigma \cap X)]$ .

Perceba que a notação de obstrução de Euler de uma aplicação destaca a escolha de  $\sigma$  feita na Definição 4.31. A definição apresentada acima, *a priori*, depende dessa escolha. Contudo, Ebeling e Gusein-Zade em (EBELING; GUSEIN-ZADE, 2007) introduzem a chamada *obstrução de Chern local* para uma coleção de 1-formas, a qual coincide a menos de sinal com a obstrução de Euler de uma aplicação; essa última afirmação foi provada por Brasselet, Grulha e Ruas em (BRASSELET; GRULHA-JR; RUAS, 2010).

A construção feita por Ebeling e Gusein-Zade não depende de escolhas na decomposição celular. Assim, a partir de agora, denotamos a obstrução de Euler de uma aplicação  $f$  sobre  $X$ , num ponto  $x$ , por  $Eu_{f,X}(x)$ .

Quando falamos da obstrução de Euler de uma função, temos uma interpretação geométrica dada por Seade, Tibăr e Verjovsky. Além disso, o Teorema abaixo nos mostra que a obstrução de Euler de uma função pode ser vista como generalização do número de Milnor.

**Teorema 4.33.** (SEADE; TIBĂR; VERJOVSKY, 2005) Seja  $f : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  um germe de função holomorfa com singularidade isolada na origem sobre um espaço analítico complexo  $(X, 0)$   $d$ -equidimensional. Então,

$$Eu_{f,X}(0) = (-1)^d \#\Sigma(\tilde{f}|_{X_{reg}}).$$

em que  $\#\Sigma(\tilde{f}|_{X_{reg}})$  é o número de pontos de Morse de uma Morseficação estratificada de  $f$  na parte regular de  $X$ .

A interpretação geométrica da obstrução de Euler de uma aplicação é estudada por Grulha, Santana, e Ruiz em (GRULHA-JR; RUIZ; SANTANA, 2022). Os autores utilizam da Teoria desenvolvida por Dutertre e Grulha (DUTERTRE; GRULHA-JR., 2014) para expressar a obstrução de Euler de uma aplicação  $f$  como o número de pontos de Morse de uma Morseficação apropriada das funções coordenadas de  $f$ . Para ser mais preciso, vamos relembrar alguns conceitos.

Considere  $(X, 0)$  um espaço analítico complexo reduzido e  $f, g : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  germes de função holomorfa. Seja  $\mathcal{V} = \{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  uma boa estratificação de  $X$  relativa a  $f$  (Definição 2.23). Adotamos novamente a notação  $X^f = X \cap V(f) = X \cap \{f = 0\}$ .

**Definição 4.34.** O conjunto crítico de  $f$  relativo a  $\mathcal{V}$ ,  $\Sigma_{\mathcal{V}}f$ , é dado como a união

$$\Sigma_{\mathcal{V}}f = \bigcup_{V_{\lambda} \in \mathcal{V}} \Sigma(f|_{V_{\lambda}}).$$

**Definição 4.35.** Se  $\mathcal{V} = \{V_{\lambda}\}$  é uma estratificação de  $X$ , a variedade polar relativa simétrica de  $f$  e  $g$  com respeito a  $\mathcal{V}$ ,  $\tilde{\Gamma}_{f,g}(\mathcal{V})$ , é a união  $\bigcup_{\lambda} \bar{\Gamma}_{f,g}(V_{\lambda})$ , em que  $\bar{\Gamma}_{f,g}(V_{\lambda})$  denota o fecho em  $X$  do conjunto crítico de  $(f, g)|_{V_{\lambda} \setminus (X^f \cup X^g)}$ .

**Definição 4.36.** O germe de função  $g$  é dito tratável na origem com respeito a boa estratificação  $\mathcal{V}$  de  $X$  relativa a  $f$  se  $\dim \tilde{\Gamma}_{f,g}(\mathcal{V}) \leq 1$  e, para todo estrato  $V_{\alpha} \subseteq X^f$ , a função  $g|_{V_{\alpha}}$  não tem pontos críticos numa vizinhança pinçada da origem.

Agora, sejam  $(X, 0) \subset (U, 0)$  um espaço analítico complexo reduzido de dimensão  $d > 2$ , em que  $U \subset \mathbb{C}^N$  é um aberto, e  $f : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ ,  $f = (f_1, f_2)$ , um germe de aplicação holomorfa, restrição de  $F : (U, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ .

**Teorema 4.37.** (GRULHA-JR; RUIZ; SANTANA, 2022) Suponha que  $f_1$  é tratável na origem com respeito a uma boa estratificação de  $X$  relativa a  $f_2$ . Então, a obstrução de Euler  $Eu_{f, X \cap f_2^{-1}(\delta)}(x)$  de  $f = (f_1, f_2)$  em um ponto  $x \in X \cap f_2^{-1}(\delta)$  é igual ao número de pontos críticos de Morse de uma Morseficação de  $f_1|_{X_{reg} \cap f_2^{-1}(\delta)}$  aparecendo em  $X_{reg} \cap f_2^{-1}(\delta)$ , para  $0 < |\delta| \ll \varepsilon \ll 1$ .

Mostramos a seguir as relações dos invariantes apresentados anteriormente para o caso de singularidades determinantis isoladas, em especial as informações que a obstrução de Euler de uma aplicação nos fornece. Vamos fixar a notação usada daqui para frente.

Seja  $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^{N+1}, 0)$  uma IDS do tipo  $(m, n, t)$  de dimensão  $d + 1$ , com  $d > 1$ . Considere  $f : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  um germe de aplicação holomorfa, restrição de  $F : (U, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ ,  $U \subset \mathbb{C}^{N+1}$  aberto. Denotamos por  $H = f_2^{-1}(0)$  e por  $H_{\delta} = f_2^{-1}(\delta)$ .

**Teorema 4.38.** Sejam  $(X, 0)$  uma IDS de dimensão  $d + 1$ , com  $d > 1$  e  $f : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  como acima, tal que  $F_2|_X = f_2$  é linear, e  $F_1|_Y = f_1$  tem singularidade isolada na origem, em que  $Y = X \cap H$ . Então, a obstrução de Euler  $Eu_{f, X \cap H_{\delta}}(x)$  de  $f$  em um ponto  $x \in X \cap H_{\delta}$  é igual as seguintes equivalentes expressões:

- (a)  $ind_{PHN}(df_1, Y, 0)$ ;
- (b)  $v(Y, 0) + v(Y \cap f_1^{-1}(0), 0)$ ;
- (c)  $v(Y \cap f_1^{-1}(0), 0) + (-1)^d (Eu_X(0) + 1)$ ;
- (d)  $v(Y \cap f_1^{-1}(0), 0) + m_d(Y) + (-1)^d (Eu_Y(0) - 1)$ ;
- (e)  $v(Y, 0) + v(Y \cap p^{-1}(0), 0) + (-1)^d Eu_{f_1, Y}(0)$ , em que  $p : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}$  é uma função linear genérica com relação a  $Y$ ;

- (f)  $m_d(Y) + (-1)^d Eu_{f_1, Y}(0)$ ;  
 (g)  $v(Y, 0) + (-1)^{d-1} (B_{f_1, Y}(0) - 1)$ .

**Demonstração.** Primeiramente, note que o espaço analítico complexo  $(Y, 0) = (X \cap H, 0)$  é uma IDS em  $(H, 0) \cong (\mathbb{C}^N, 0)$  de dimensão  $d$ , a qual admite suavização. De fato,  $(Y, 0)$  é singularidade determinantal do tipo  $(m, n, t)$  satisfazendo  $N < (m + t - 2)(n - t + 2)$ , uma vez que  $(X, 0)$  é singularidade determinantal do tipo  $(m, n, t)$  satisfazendo  $N \leq (m + t - 2)(n - t + 2)$ . Neste caso, uma suavização de  $(Y, 0)$  é dada por

$$Y_\delta = X \cap H_\delta = X_{reg} \cap H_\delta,$$

em que a segunda igualdade é válida pois  $(X, 0)$  tem singularidade isolada na origem.

Assim, o Teorema 4.37 implica em  $Eu_{f, X \cap H_\delta}(x) = \#\Sigma(\tilde{f}_1|_{X_{reg} \cap H_\delta})$ . Por outro lado, sabemos que  $ind_{PHN}(df_1, Y, 0) = \#\Sigma(\tilde{f}_1|_{Y_\delta})$ . Como  $Y_\delta = X_{reg} \cap H_\delta$  segue que

$$Eu_{f, X \cap H_\delta}(x) = ind_{PHN}(df_1, Y, 0).$$

Desde que estamos nas hipóteses da Proposição 4.13, garantimos o item (b) pela igualdade

$$Eu_{f, X \cap H_\delta}(x) = ind_{PHN}(df_1, Y, 0) = v(Y, 0) + v(Y \cap f_1^{-1}(0), 0).$$

Como o Corolário 4.18 implica em  $v(Y, 0) = (-1)^d (Eu_X(0) - 1)$ , então escrevemos

$$\begin{aligned} Eu_{f, X \cap H_\delta}(x) &= v(Y, 0) + v(Y \cap f_1^{-1}(0), 0) \\ &= v(Y \cap f_1^{-1}(0), 0) + (-1)^d (Eu_X(0) - 1). \end{aligned}$$

Mais ainda, a característica de Euler evanescente também está relacionada com a multiplicidade polar e a obstrução de Euler local, pela igualdade  $v(Y, 0) = m_d(Y) + (-1)^d (Eu_Y(0) - 1)$ , dada pelo Teorema 4.20. Assim,

$$\begin{aligned} Eu_{f, X \cap H_\delta}(x) &= v(Y, 0) + v(Y \cap f_1^{-1}(0), 0) \\ &= v(Y \cap f_1^{-1}(0), 0) + m_d(Y) + (-1)^d (Eu_Y(0) - 1). \end{aligned}$$

Agora seja  $p : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}$  uma função linear genérica com relação a  $(Y, 0)$ . A característica de Euler evanescente da fibra  $Y \cap f_1^{-1}(0)$  é escrita como  $v(Y \cap f_1^{-1}(0), 0) = v(Y \cap p^{-1}(0), 0) + (-1)^d Eu_{f_1, Y}(0)$  pelo Corolário 4.23. Disso, temos que

$$\begin{aligned} Eu_{f, X \cap H_\delta}(x) &= v(Y, 0) + v(Y \cap f_1^{-1}(0), 0) \\ &= v(Y, 0) + v(Y \cap p^{-1}(0), 0) + (-1)^d Eu_{f_1, Y}(0). \end{aligned}$$

Além disso, o Corolário 4.24 nos fornece

$$Eu_{f, X \cap H_\delta}(x) = ind_{PHN}(df_1, Y, 0) = m_d(Y) + (-1)^d Eu_{f_1, Y}(0).$$

Por fim, a Proposição 4.29 implica em

$$\begin{aligned} Eu_{f, X \cap H_\delta}(x) &= v(Y, 0) + v(Y \cap f_1^{-1}(0), 0) \\ &= v(Y, 0) + (-1)^d (B_{f_1, Y}(0) - 1). \quad \square \end{aligned}$$

**Exemplo 4.39.** Tome  $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^6, 0)$  uma IDS de codimensão 2 que tem matriz de representação

$$\begin{pmatrix} w & y & x \\ z & w + v^2 + u^k & y + vu^2 \end{pmatrix},$$

para  $k \geq 3$  fixado.

Vamos considerar  $p : \mathbb{C}^6 \rightarrow \mathbb{C}^2$  por  $p(x, y, z, w, v, u) = (v, u)$ . Assim,  $Y = X \cap p_2^{-1}(0)$  tem matriz de representação

$$\begin{pmatrix} w & y & x \\ z & w + v^2 & y \end{pmatrix},$$

a qual é  $\mathcal{G}$ -equivalente a

$$\begin{pmatrix} w & y & x \\ z & w & y + v^2 \end{pmatrix}.$$

Zach prova em (ZACH, 2017) que  $\mu_{PR}(Y) = 0$ . Como a superfície  $Y \cap p_1^{-1}(0)$  é dada por

$$\begin{pmatrix} w & y & x \\ z & w & y \end{pmatrix}$$

e tem  $\mu_{PR}(Y \cap p_1^{-1}(0)) = 1$ , calculado por Pereira em (PEREIRA, 2010), então a obstrução de Euler da aplicação  $p$  em um ponto  $x \in X \cap p_2^{-1}(\delta)$  é igual a

$$\begin{aligned} Eu_{p, X \cap p_2^{-1}(\delta)}(x) &= v(Y, 0) + v(Y \cap p_1^{-1}(0), 0) \\ &= \mu_{PR}(Y) - 1 + \mu_{PR}(Y \cap p_1^{-1}(0)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

O Exemplo acima nos induz a pensar que assim como a obstrução de Euler de uma função, tem-se que a obstrução da aplicação é zero no caso em que consideramos as funções coordenadas sendo lineares genéricas. Porém, o Corolário a seguir nos mostra que não é sempre que isso acontece.

**Corolário 4.40.** Nas condições do Teorema 4.38, suponha que  $f_1$  é uma função linear genérica com relação a  $Y$ . Então,  $Eu_{f, X \cap H_\delta}(x) = m_d(Y)$ .

**Demonstração.** De fato, temos como consequência do Teorema 4.8 que

$$m_d(Y) = v(Y, 0) + v(Y \cap f_1^{-1}(0), 0).$$

O resultado segue pelo item (b) do Teorema 4.38. □

**Exemplo 4.41.** Seja  $(X, 0)$  um germe da 4-variedade determinantal do tipo  $(2, 3, 2)$  que tem matriz de representação

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ w & v & u^2 + x^3 + xy^3 \end{pmatrix}.$$

Com algumas mudanças de coordenadas e permutação entre as colunas  $C_1$  e  $C_2$ , a matriz acima é  $\mathcal{G}$ -equivalente a

$$\begin{pmatrix} u & y & z \\ x & w & v^2 + y^3 + yu^3 \end{pmatrix}.$$

Agora, escolha  $p_2(x, y, z, w, v, u) = u - w$  e a 3-variedade determinantal  $Y = X \cap p_2^{-1}(0)$  tem matriz de representação

$$\begin{pmatrix} w & y & z \\ x & w & v^2 + y^3 + yw^3 \end{pmatrix},$$

a qual é  $\mathcal{G}$ -equivalente a

$$\begin{pmatrix} w & y & Z \\ x & w & v^2 + y^3 \end{pmatrix},$$

por meio da operação coluna  $C_3 - yw^2C_2 \mapsto C_3$  e a mudança de coordenadas  $Z \mapsto z - y^2w^2$ . Podemos então tomar  $p_1(x, y, z, w, v) = v$ , obtendo uma superfície determinantal  $Y \cap p_1^{-1}(0)$  dada pela matriz

$$\begin{pmatrix} w & y & Z \\ x & w & y^3 \end{pmatrix}.$$

Com isso,

$$\begin{aligned} Eu_{p, X \cap p_2^{-1}(\delta)}(x) &= m_d(Y) \\ &= \mu_{PR}(Y) + \mu_{PR}(Y \cap p_1^{-1}(0)) - 1 \\ &= 4, \end{aligned}$$

em que  $\mu_{PR}(Y) = 2$  e  $\mu_{PR}(Y \cap p_1^{-1}(0)) = 3$  são calculados em (ZACH, 2017) e (PEREIRA, 2010), respectivamente.

## 4.4 O número de Bruce-Roberts

O número de Milnor, lembrado na Seção 4.1, é um dos principais invariantes na Teoria de Singularidades devido suas boas propriedades. Por exemplo, é conhecido que  $\mu(V(f))$  é finito se, e somente se,  $f$  tem singularidade isolada, o que é equivalente a  $f$  ser  $\mathcal{R}$ -finitamente determinada, em que  $f : (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  é um germe de função holomorfa.

Existem generalizações que nos permitem estudar germes de funções definidas sobre variedades singulares  $X \subset \mathbb{C}^N$ . Este é o caso do invariante introduzido por Bruce e Roberts em (BRUCE; ROBERTS, 1988). O número de Bruce-Roberts mantém a propriedade comentada

acima do número de Milnor, *i.e.*, sua finitude é equivalente a  $f$  ter singularidade isolada sobre o espaço analítico  $(X, 0)$ , que por sua vez é equivalente a  $f$  ser  $\mathcal{R}_X$ -finitamente determinada, em que  $\mathcal{R}_X$  é o subgrupo de  $\mathcal{R}$  das mudanças de coordenadas que preservam  $X$ .

Diversos autores têm estudado o número de Bruce-Roberts e sua relação com outros invariantes. As principais referências para essa seção são (LIMA-PEREIRA *et al.*, 2022; LIMA-PEREIRA, 2022).

Sejam  $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$  um germe de variedade analítica reduzida e  $\Theta_N$  o  $\mathcal{O}_N$ -módulo dos germes de campos de vetores de  $(\mathbb{C}^N, 0)$ . O conjunto de germes de campos vetoriais em  $\mathbb{C}^N$  que são tangentes a  $(X, 0)$  é definido por

$$\Theta_X := \{\xi \in \Theta_N; dh(\xi) \in \mathcal{J}(X, 0), \forall h \in \mathcal{J}(X, 0)\}.$$

Se considerarmos  $X = \mathbb{C}^N$  temos que  $\Theta_X = \Theta_N$ . Neste caso, a imagem de  $\Theta_X$  pela diferencial  $df$  de um germe de função holomorfa  $f : (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  é igual a  $df(\Theta_X) = Jf$ . É dessa forma que a próxima definição é uma generalização do número de Milnor apresentado na Seção 4.1.

**Definição 4.42.** Sejam  $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$  um germe de variedade analítica reduzida e  $f \in \mathcal{O}_N$ . O **número de Bruce-Roberts** de  $f$  com relação a variedade  $(X, 0)$  é

$$\mu_{BR}(f, X) := \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_N}{df(\Theta_X)}.$$

O **número de Bruce-Roberts relativo** de  $f$  com respeito a  $(X, 0)$  é

$$\overline{\mu}_{BR}(f, X) := \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_N}{df(\Theta_X) + \mathcal{J}(X, 0)}.$$

Em (LIMA-PEREIRA *et al.*, 2022) os autores estudam o número de Bruce-Roberts e o número de Bruce-Roberts relativo de um germe de função  $f : (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  sobre uma ICIS  $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ , estendendo resultados anteriores sobre uma singularidade isolada de hipersuperfície.

Para enunciarmos os principais resultados desse artigo, fixamos a notação do já conhecido número de Tjurina. Seja  $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$  uma ICIS tal que  $\mathcal{J}(X, 0) = \langle \phi_1, \dots, \phi_k \rangle$  e seja  $\{e_i\}_{i=1}^N$  base canônica de  $\mathbb{C}^N$ . O *número de Tjurina* de  $X$  é definido como

$$\tau(X) := \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_N^k}{\langle d\phi(e_i) \rangle_{i=1}^N + \mathcal{J}(X, 0) \mathcal{O}_N^k},$$

em que  $d\phi$  é a diferencial da aplicação  $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_k)$ .

**Teorema 4.43.** (LIMA-PEREIRA *et al.*, 2022) Sejam  $(X, 0)$  uma ICIS e  $f \in \mathcal{O}_N$   $\mathcal{R}_X$ -finitamente determinada. Então,

$$\mu_{BR}(f, X) = \mu(V(f)) + \mu(X \cap f^{-1}(0)) + \mu(X) - \tau(X) - \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_N}{Jf + \mathcal{J}(X, 0)} + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{J}(X, 0) \cap Jf}{\mathcal{J}(X, 0) Jf}.$$

Considerando o número de Bruce-Roberts relativo, a expressão acima é simplificada para:

**Teorema 4.44.** (LIMA-PEREIRA *et al.*, 2022) Sejam  $(X, 0)$  uma ICIS e  $f \in \mathcal{O}_N$  tal que  $\overline{\mu}_{BR}(f, X) < \infty$ . Então,

$$\overline{\mu}_{BR}(f, X) = \mu(X \cap f^{-1}(0)) + \mu(X) - \tau(X).$$

A partir desses resultados podemos relacionar os demais invariantes desse Capítulo com os números de Bruce-Roberts e Bruce-Roberts relativo, sobre uma ICIS que é uma singularidade determinantal do tipo  $(1, n, 1)$ , em que  $n$  é a sua codimensão.

**Proposição 4.45.** Seja  $f : (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  um germe de função holomorfa com singularidade isolada sobre a ICIS  $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$  de dimensão  $d > 2$ . Então, o número de Bruce-Roberts  $\mu_{BR}(f, X)$  é igual as seguintes equivalentes expressões:

- (a)  $\mu(V(f)) + \text{ind}_{PH}(df, X, 0) - \tau(X) - \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_N}{Jf + \mathcal{I}(X, 0)} + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{I}(X, 0) \cap Jf}{\mathcal{I}(X, 0)Jf}$ ;
- (b)  $\mu(V(f)) + \mu(X \cap f^{-1}(0)) + m_d(X) + (-1)^d (Eu_X(0) - 1) - \tau(X) - \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_N}{Jf + \mathcal{I}(X, 0)} + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{I}(X, 0) \cap Jf}{\mathcal{I}(X, 0)Jf}$ ;
- (c)  $\mu(V(f)) + \mu(X) + \mu(X \cap p^{-1}(0)) + (-1)^d Eu_{f, X}(0) - \tau(X) - \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_N}{Jf + \mathcal{I}(X, 0)} + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{I}(X, 0) \cap Jf}{\mathcal{I}(X, 0)Jf}$ , em que  $p : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}$  é uma função linear genérica com relação a  $X$ ;
- (d)  $\mu(V(f)) + m_d(X) + (-1)^d Eu_{f, X}(0) - \tau(X) - \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_N}{Jf + \mathcal{I}(X, 0)} + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{I}(X, 0) \cap Jf}{\mathcal{I}(X, 0)Jf}$ ;
- (e)  $\mu(V(f)) + \mu(X) + (-1)^{d-1} (B_{f, X}(0) - 1) - \tau(X) - \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_N}{Jf + \mathcal{I}(X, 0)} + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{I}(X, 0) \cap Jf}{\mathcal{I}(X, 0)Jf}$ .

**Demonstração.** Considere uma deformação a 1-parâmetro de  $(X, 0)$  dada por uma família  $(\mathfrak{X}, 0)$  de suavizações, com a projeção  $\pi : (\mathfrak{X}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ .

$$\begin{array}{ccccc} (X, 0) & \hookrightarrow & (\mathfrak{X}, 0) & \hookrightarrow & (\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}, 0) \\ \downarrow & & \downarrow \pi & \swarrow & \\ \{0\} & \hookrightarrow & (\mathbb{C}, 0) & & \end{array}$$

Seja  $\tilde{f} : (\mathfrak{X}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  um germe de função holomorfa tal que  $\tilde{f}|_X = f|_X$ . Agora, tome a aplicação  $g = (\tilde{f}, \pi) : (\mathfrak{X}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ . O Teorema 4.38 garante que a obstrução de Euler  $Eu_{g, \mathfrak{X} \cap \pi^{-1}(\delta)}(x)$  de  $g$  em um ponto  $x \in \mathfrak{X} \cap \pi^{-1}(\delta)$  é igual

$$Eu_{g, \mathfrak{X} \cap \pi^{-1}(\delta)}(x) = \mu(X) + \mu(X \cap f^{-1}(0)),$$

uma vez que  $X = \mathfrak{X} \cap \pi^{-1}(0)$ .

Portanto, o Teorema 4.43 assegura que

$$\mu_{BR}(f, X) = \mu(V(f)) + Eu_{g, \mathfrak{X} \cap \pi^{-1}(\delta)}(x) - \tau(X) - \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_N}{Jf + \mathcal{I}(X, 0)} + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{I}(X, 0) \cap Jf}{\mathcal{I}(X, 0)Jf}.$$

As expressões desejadas seguem diretamente das relações obtidas no Teorema 4.38.  $\square$

De maneira análoga, prova-se relações para o número de Bruce-Roberts relativo, utilizando o Teorema 4.44.

**Proposição 4.46.** Seja  $f : (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  um germe de função holomorfa com singularidade isolada sobre a ICIS  $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$  de dimensão  $d > 2$ . Então, o número de Bruce-Roberts relativo  $\overline{\mu}_{BR}(f, X)$  é igual as seguintes equivalentes expressões:

- (a)  $ind_{PH}(df, X, 0) - \tau(X)$ ;
- (b)  $\mu(X \cap f^{-1}(0)) + m_d(X) + (-1)^d(Eu_X(0) - 1) - \tau(X)$ ;
- (c)  $\mu(X) + \mu(X \cap p^{-1}(0)) + (-1)^d Eu_{f, X}(0) - \tau(X)$ , em que  $p : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}$  é uma função linear genérica com relação a  $X$ ;
- (d)  $m_d(X) + (-1)^d Eu_{f, X}(0) - \tau(X)$ ;
- (e)  $\mu(X) + (-1)^{d-1}(B_{f, X}(0) - 1) - \tau(X)$ .

Notamos ainda que os itens (b) e (d) acima são generalizações do Corolário 2.6 em (LIMA-PEREIRA *et al.*, 2022), em que os autores encontram essas expressões para  $\overline{\mu}_{BR}(p, X)$ , em que  $p$  é uma função linear genérica.



## APLICAÇÃO EM ICMC2

Neste capítulo aplicamos os resultados anteriores para calcular alguns invariantes das singularidades isoladas simples Cohen-Macaulay de codimensão 2 (ICMC2). Estas singularidades vão das dimensões de 0 a 4 e ocorrem como singularidades determinantis do tipo  $(2, 3, 2)$ , de acordo com (FRÜHBIS-KRÜGER; NEUMER, 2010).

A primeira classificação de curvas simples, que não são interseção completa, é feita por Frühbis-Krüger em (FRÜHBIS-KRÜGER, 1999). Essa lista de singularidades simples é estendida por Frühbis-Krüger e Neumer (FRÜHBIS-KRÜGER; NEUMER, 2010) para superfícies, 3-variedades e 4-variedades, todas de codimensão 2.

Alguns dos invariantes já foram calculados por outros autores (PEREIRA, 2010; RUAS; PEREIRA, 2014; ZACH, 2017; DAMON; PIKE, 2014; SIESQUÉN, 2018). Nossa principal contribuição será a obstrução de Euler de uma aplicação.

Nas tabelas a seguir também são apresentados os números de Milnor para superfícies determinantis simples em  $\mathbb{C}^4$  calculados por Pereira (PEREIRA, 2010) e os números de Milnor obtidos para 3-variedades determinantis simples a partir do número de Betti encontrados em (ZACH, 2017) e (DAMON; PIKE, 2014).

**Corolário 5.1.** Seja  $(X, 0) = (F^{-1}(M_{2,3}^2), 0) \subset (\mathbb{C}^4, 0)$  germe de uma das formas normais de superfície simples determinantal. Então, a obstrução de Euler local  $Eu_X(0)$  e a multiplicidade polar  $m_2(X)$  são dadas na tabela abaixo.

Tabela 1 – Invariantes de Superfícies Simples Determinantis

| Matriz de Representação                                | $\mu_{PR}(X)$ | $Eu_X(0)$ | $m_2(X)$ |
|--|---------------|-----------|----------|
| $\begin{pmatrix} w & y & x \\ z & w & y \end{pmatrix}$ | 1             | -1        | 3        |

---

|  |                   |             |      |              |
|--|-------------------|-------------|------|--------------|
| $\begin{pmatrix} w & y & x \\ z & w & y^k \end{pmatrix}$         | $k \geq 2$        | $k$         | $-k$ | $2k + 1$     |
| $\begin{pmatrix} w^r & y & x \\ z & w & y^k \end{pmatrix}$       | $k \geq r \geq 2$ | $k + r - 1$ | $-k$ | $2k + r$     |
| $\begin{pmatrix} z & y & x \\ x & w & y^2 + z^k \end{pmatrix}$   | $k \geq 2$        | $k + 2$     | $-k$ | $2k + 3$     |
| $\begin{pmatrix} z & y & x \\ x & w & z^2 + yw \end{pmatrix}$    |                   | $6$         | $-2$ | $9$          |
| $\begin{pmatrix} z & y & x \\ x & w & z^2 + y^3 \end{pmatrix}$   |                   | $7$         | $-2$ | $10$         |
| $\begin{pmatrix} z & y & x^k + w^2 \\ w^r & x & y \end{pmatrix}$ | $k, r \geq 2$     | $k + r + 1$ | $-k$ | $2k + r + 2$ |
| $\begin{pmatrix} z & y + w^2 & x^2 \\ w^k & x & y \end{pmatrix}$ | $k \geq 2$        | $k + 5$     | $-2$ | $k + 8$      |
| $\begin{pmatrix} z & y & x^2 + w^3 \\ w^k & x & y \end{pmatrix}$ | $k \geq 2$        | $k + 6$     | $-2$ | $k + 9$      |
| $\begin{pmatrix} z & y & w^2 \\ y & x & z + x^2 \end{pmatrix}$   |                   | $7$         | $-4$ | $12$         |
| $\begin{pmatrix} z & y & x^3 + w^2 \\ y & x & z \end{pmatrix}$   |                   | $8$         | $-5$ | $14$         |
| $\begin{pmatrix} z & y & x^2 \\ y & x & z + w^2 \end{pmatrix}$   |                   | $8$         | $-3$ | $12$         |

---

**Demonstração.** Se  $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^4, 0)$  é uma singularidade simples de superfície determinantal, então  $C = X \cap p^{-1}(0)$  é uma curva determinantal simples, em que  $p : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}$  é uma função linear genérica com relação a  $(X, 0)$ . Nosso objetivo é achar a curva  $(C, 0)$ , a qual é uma seção genérica de  $(X, 0)$ . A seguir, exibimos quais as seções genéricas de cada forma normal da tabela acima, com seu número de Milnor  $\mu(C)$  calculado em (FRÜHBIS-KRÜGER, 1999).

- A seção genérica da 1ª forma normal é a curva  $(C_1, 0)$  que tem matriz de representação

$$\begin{pmatrix} z & y & x \\ 0 & x & y \end{pmatrix},$$

com  $\mu(C_1) = 2$ .

- A seção genérica da 2ª, 3ª, 4ª e 7ª formas normais é a curva  $(C_2, 0)$  que tem matriz de representação

$$\begin{pmatrix} z & y & x^k \\ 0 & x & y \end{pmatrix},$$

com  $\mu(C_2) = k + 1$ .

- A seção genérica da 5ª, 6ª, 8ª e 9ª formas normais é a curva  $(C_3, 0)$  que tem matriz de representação

$$\begin{pmatrix} z & y & x^2 \\ 0 & x & y \end{pmatrix},$$

com  $\mu(C_3) = 3$ .

- A seção genérica da 10ª forma normal é a curva  $(C_4, 0)$  que tem matriz de representação

$$\begin{pmatrix} z+x^2 & y & x \\ 0 & z & y \end{pmatrix},$$

com  $\mu(C_4) = 5$ .

- A seção genérica da 11ª forma normal é a curva  $(C_5, 0)$  que tem matriz de representação

$$\begin{pmatrix} z & y & x^3 \\ x & z & y \end{pmatrix},$$

com  $\mu(C_5) = 6$ .

- A seção genérica da 12ª forma normal é a curva  $(C_6, 0)$  que tem matriz de representação

$$\begin{pmatrix} z & y & x^2 \\ x & z & y \end{pmatrix},$$

com  $\mu(C_6) = 4$ .

Para uma curva determinantal  $(C, 0)$  temos

$$v(C, 0) = (-1)(b_0(X) - b_1(X) - 1) = -1 + \mu(C) + 1 = \mu(C).$$

Assim, o Corolário 4.18 é simplesmente

$$Eu_X(0) = 1 - \mu(C),$$

donde obtemos a terceira coluna da tabela.

Para calcular a multiplicidade polar de  $(X, 0)$  aplicamos o Teorema 4.3

$$m_2(X) = \mu_{PR}(X) + \mu(C).$$

□

No caso em que  $(X, 0)$  é um germe de uma 3-variedade determinantal com singularidade isolada Cohen-Macaulay de codimensão 2 podemos relacionar a obstrução de Euler de uma aplicação com os números de Milnor já conhecidos em (PEREIRA, 2010) e (FRÜHBIS-KRÜGER, 1999).

**Corolário 5.2.** Seja  $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^5, 0)$  um germe de 3-variedade determinantal com singularidade isolada e seja  $p : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  restrição da aplicação holomorfa  $P : (\mathbb{C}^5, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  tal que  $P_{2|X} = p_2$  é linear genérica com relação a  $X$  e  $P_{1|S} = p_1$  é linear genérica com relação a  $S = X \cap p_2^{-1}(0)$ . Então,

$$Eu_{p, X \cap p_2^{-1}(\delta)}(x) = \mu_{PR}(S) + \mu(C),$$

em que  $C = S \cap p_1^{-1}(0)$  é uma curva determinantal em  $p_2^{-1}(0) \cap p_1^{-1}(0) \cong \mathbb{C}^3$ .

**Demonstração.** Desde que  $S$  é uma superfície determinantal em  $\mathbb{C}^4$  e  $C$  uma curva determinantal em  $\mathbb{C}^3$ , temos que

$$v(S, 0) = \mu_{PR}(S) \text{ e } v(C, 0) = \mu(C).$$

Portanto, o Teorema 4.38 (b) se escreve como

$$Eu_{p, X \cap p_2^{-1}(\delta)}(x) = \mu_{PR}(S) + \mu(C).$$

□

A partir das relações encontradas no Capítulo 4 é possível calcular explicitamente invariantes das 3-variedades determinantais simples classificadas em (FRÜHBIS-KRÜGER; NEUMER, 2010). Para comodidade do leitor, escrevemos as formas normais da matriz de representação dessas variedades e o número de Pereira Ruas encontrado em (ZACH, 2017).

**Proposição 5.3.** Seja  $(X, 0) = (F^{-1}(M_{2,3}^2), 0) \subset (\mathbb{C}^5, 0)$  germe de uma das 3-variedades determinantais simples da tabela abaixo. Considere  $p : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  como no Corolário 5.2. Então, a obstrução de Euler local, a multiplicidade polar e a obstrução de Euler da aplicação  $p$  são dadas na tabela.

Tabela 2 – Invariantes de 3-Variedades Simples Determinantais

| Matriz de Representação   |            | $\mu_{PR}(X)$ | $Eu_X(0)$ | $m_3(X)$ | $Eu_{p, X \cap p_2^{-1}(\delta)}(x)$ |
|---|------------|---------------|-----------|----------|--------------------------------------|
| $\begin{pmatrix} x & y & z \\ w & v & x \end{pmatrix}$              |            | 0             | 2         | 0        | 3                                    |
| $\begin{pmatrix} x & y & z \\ w & v & x^{k+1} + y^2 \end{pmatrix}$  | $k \geq 1$ | $k$           | 3         | $k+1$    | 5                                    |
| $\begin{pmatrix} x & y & z \\ w & v & xy^2 + x^{k-1} \end{pmatrix}$ | $k \geq 4$ | $k$           | $k+1$     | $2k-2$   | $2k-1$                               |
| $\begin{pmatrix} x & y & z \\ w & v & x^3 + y^4 \end{pmatrix}$      |            | 6             | 4         | 8        | 7                                    |
| $\begin{pmatrix} x & y & z \\ w & v & x^3 + xy^3 \end{pmatrix}$     |            | 7             | 4         | 9        | 7                                    |
| $\begin{pmatrix} x & y & z \\ w & v & x^3 + y^5 \end{pmatrix}$      |            | 8             | 4         | 10       | 7                                    |

---

|   |                      |         |        |           |        |
|---|----------------------|---------|--------|-----------|--------|
| $\begin{pmatrix} w & y & x \\ z & w & y+v^k \end{pmatrix}$          | $k \geq 2$           | 0       | 2      | 0         | 3      |
| $\begin{pmatrix} w & y & x \\ z & w & y^k+v^2 \end{pmatrix}$        | $k \geq 2$           | $k-1$   | $k+1$  | $2k-1$    | $2k+1$ |
| $\begin{pmatrix} w & y & x \\ z & w & yv+v^k \end{pmatrix}$         | $k \geq 1$           | 1       | $3k+1$ | $3k$      |        |
| $\begin{pmatrix} w+v^k & y & x \\ z & w & yv \end{pmatrix}$         | $k \geq 1$           | 1       | $3k+3$ | $3k+2$    |        |
| $\begin{pmatrix} w+v^2 & y & x \\ z & w & y^2+v^k \end{pmatrix}$    | $k \geq 2$           | $k-1$   | 3      | $k$       | 5      |
| $\begin{pmatrix} w & y & x \\ z & w & y^2+v^3 \end{pmatrix}$        |                      | 2       | 3      | 3         | 5      |
| $\begin{pmatrix} v^2+w^r & y & x \\ z & w & v^2+y^k \end{pmatrix}$  | $k \geq r \geq 2$    | $k+r-2$ | $k+r$  | $2k+2r-4$ | $2k+r$ |
| $\begin{pmatrix} v^2+w^k & y & x \\ z & w & yv \end{pmatrix}$       | $k \geq 2$           | $k$     | $k+2$  | $2k$      | $k+4$  |
| $\begin{pmatrix} v^2+w^k & y & x \\ z & w & y^2+v^r \end{pmatrix}$  | $k \geq 2, r \geq 3$ | $k+r-2$ | $k+2$  | $2k+r-2$  | $k+4$  |
| $\begin{pmatrix} wv+v^k & y & x \\ z & w & yv+v^k \end{pmatrix}$    | $k \geq 3$           | 2       | $3k$   | $3k$      |        |
| $\begin{pmatrix} wv & y & x \\ z & w & y^2+v^3 \end{pmatrix}$       |                      | 3       | 4      | 5         | 6      |
| $\begin{pmatrix} w^2+v^3 & y & x \\ z & w & y^2+v^3 \end{pmatrix}$  |                      | 3       | 4      | 6         | 6      |
| $\begin{pmatrix} z & y & x \\ x & w & v^2+y^2+z^k \end{pmatrix}$    | $k \geq 2$           | $k+1$   | $k+3$  | $2k+2$    | $2k+3$ |
| $\begin{pmatrix} z & y & x \\ x & w & v^2+yz+y^k w \end{pmatrix}$   | $k \geq 1$           | $2k+2$  | $2k+4$ | $4k+4$    |        |
| $\begin{pmatrix} z & y & x \\ x & w & v^2+yz+y^{k+1} \end{pmatrix}$ | $k \geq 2$           | $2k+1$  | $2k+6$ | $4k+5$    |        |
| $\begin{pmatrix} z & y & x \\ x & w & v^2+yw+z^2 \end{pmatrix}$     |                      | 5       | 7      | 10        | 9      |
| $\begin{pmatrix} z & y & x \\ x & w & v^2+y^3+z^2 \end{pmatrix}$    |                      | 6       | 8      | 12        | 10     |
| $\begin{pmatrix} z & y & x+v^2 \\ x & w & y^2+z^2 \end{pmatrix}$    |                      | 5       | 5      | 8         | 7      |

---

**Demonstração.** Nosso objetivo é achar uma seção genérica  $(S, 0)$  da 3-variedade simples  $(X, 0)$  da tabela acima.

Exibimos quais as seções genéricas de cada forma normal da tabela acima, com seu número de Milnor de Pereira-Ruas  $\mu_{PR}(S)$  calculado em (PEREIRA, 2010).

- A seção genérica da 1ª e 7ª formas normais é a superfície  $(S_1, 0)$  que tem matriz de representação

$$\begin{pmatrix} w & y & x \\ z & w & y \end{pmatrix},$$

com  $\mu_{PR}(S_1) = 1$ .

- A seção genérica da 2ª, 3ª, 4ª, 5ª, 6ª, 8ª, 11ª e 12ª formas normais é a superfície  $(S_2, 0)$  que tem matriz de representação

$$\begin{pmatrix} w & y & x \\ z & w & y^k \end{pmatrix},$$

com  $\mu_{PR}(S_2) = k$ . Para 2ª, 11ª e 12ª formas normais, usamos  $k = 2$ ; para 4ª, 5ª e 6ª formas normais, usamos  $k = 3$ .

- A seção genérica da 9ª forma normal é a superfície  $(S_3, 0)$  que tem matriz de representação

$$\begin{pmatrix} z & y & xw + w^k \\ y & x & z \end{pmatrix},$$

com  $\mu_{PR}(S_3) = 3k$ , verificado para uma quantidade finita de  $k$ 's por Damon e Pike em (DAMON; PIKE, 2014).

- A seção genérica da 10ª forma normal é a superfície  $(S_4, 0)$  que tem matriz de representação

$$\begin{pmatrix} z & y & xw \\ y + w^k & x & y \end{pmatrix},$$

com  $\mu_{PR}(S_4) = 3k + 2$ , verificado para uma quantidade finita de  $k$ 's por Damon e Pike.

- A seção genérica da 13ª, 14ª, 15ª, 17ª e 18ª formas normais é a superfície  $(S_5, 0)$  que tem matriz de representação

$$\begin{pmatrix} w^r & y & x \\ z & w & y^k \end{pmatrix},$$

com  $\mu_{PR}(S_5) = k + r - 1$ . Para 14ª e 15ª formas normais, usamos  $k = 2$ ; para 17ª e 18ª formas normais, usamos  $k = r = 2$ .

- A seção genérica da 16ª forma normal é a superfície  $(S_6, 0)$  que tem matriz de representação

$$\begin{pmatrix} z & y & xw + w^k \\ w^k & x & y \end{pmatrix},$$

com  $\mu_{PR}(S_6) = 3k - 1$ , verificado para uma quantidade finita de  $k$ 's por Damon e Pike.

- A seção genérica da 19ª e 24ª formas normais é a superfície  $(S_7, 0)$  que tem matriz de representação

$$\begin{pmatrix} z & y & x \\ x & w & y^2 + z^k \end{pmatrix},$$

com  $\mu_{PR}(S_7) = k + 2$ . Para 24ª forma normal, usamos  $k = 2$ .

- A seção genérica da 20ª forma normal é a superfície  $(S_8, 0)$  que tem matriz de representação

$$\begin{pmatrix} z & y & x \\ x & w & yz + y^k w \end{pmatrix},$$

com  $\mu_{PR}(S_8) = 2k + 3$ .

- A seção genérica da 21ª forma normal é a superfície  $(S_9, 0)$  que tem matriz de representação

$$\begin{pmatrix} z & y & x \\ x & w & yz + y^{k+1} \end{pmatrix},$$

com  $\mu_{PR}(S_9) = 2k + 5$ .

- A seção genérica da 22ª forma normal é a superfície  $(S_{10}, 0)$  que tem matriz de representação

$$\begin{pmatrix} z & y & x \\ x & w & yw + z^2 \end{pmatrix},$$

com  $\mu_{PR}(S_{10}) = 6$ .

- A seção genérica da 23ª forma normal é a superfície  $(S_{11}, 0)$  que tem matriz de representação

$$\begin{pmatrix} z & y & x \\ x & w & y^3 + z^2 \end{pmatrix},$$

com  $\mu_{PR}(S_{11}) = 7$ .

Desde que  $(S_i, 0), i = 1, \dots, 11$  são superfícies determinantis simples em  $(\mathbb{C}^4, 0)$ , já sabemos quais suas seções genéricas  $(C_j, 0), j = 1, \dots, 6$  pela demonstração do Corolário 5.1. A partir disso, basta aplicar os números  $\mu_{PR}(S_i)$  e  $\mu(C_j)$  nos Corolários 4.18, 5.2 e no Teorema 4.4 para obter a obstrução local de Euler, a obstrução de Euler da aplicação e a multiplicidade polar, respectivamente.  $\square$

Quando  $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^6, 0)$  é um germe de uma 4-variedade determinantal com singularidade isolada, temos que  $Y = X \cap p_2^{-1}(0)$  é uma 3-variedade determinantal com singularidade isolada em  $\mathbb{C}^5$ , em que  $p_2$  é uma função linear genérica com relação a  $X$ . Neste caso, o Exemplo 3.21 nos garante que  $b_2(Y) = 1$  e, portanto,  $v(Y, 0) = \mu_{PR}(Y) - 1$ . Analogamente ao Corolário 5.2 temos:

**Corolário 5.4.** Seja  $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^6, 0)$  um germe de uma 4-variedade determinantal com singularidade isolada. Considere a aplicação  $p : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  restrição de  $P : (\mathbb{C}^6, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  holomorfa com  $P_{2|X} = p_2$  linear genérica com relação a  $X$  e  $P_{1|Y} = p_1$  linear genérica com relação a  $Y = X \cap p_2^{-1}(0)$ . Então,

$$Eu_{p, X \cap p_2^{-1}(\delta)}(x) = \mu_{PR}(Y) + \mu_{PR}(S) - 1,$$

em que  $S = Y \cap p_1^{-1}(0)$  é uma superfície determinantal em  $p_1^{-1}(0) \cap p_2^{-1}(0) \cong \mathbb{C}^4$ .

Segundo (FRÜHBIS-KRÜGER; NEUMER, 2010) o último caso de simples ICMC2 são as 4-variedades em  $(\mathbb{C}^6, 0)$ . Na Proposição abaixo calculamos as obstruções de Euler local e de aplicação. A obstrução de Euler local também pode ser encontrada em (SIESQUÉN, 2018).

**Proposição 5.5.** Seja  $(X, 0) = (F^{-1}(M_{2,3}^2), 0) \subset (\mathbb{C}^6, 0)$  germe de uma das 4-variedades determinantis simples da tabela abaixo. Considere  $p : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  como no Corolário 5.4. Então, a obstrução de Euler local e a obstrução de Euler da aplicação  $p$  são dadas na tabela.

Tabela 3 – Invariantes de 4-Variedades Simples Determinantis

| Matriz de Representação   |                      | $Eu_X(0)$ | $Eu_{p, X \cap p_2^{-1}(\delta)}(x)$ |
|---|----------------------|-----------|--------------------------------------|
| $\begin{pmatrix} x & y & v \\ z & w & u \end{pmatrix}$                    |                      | 2         | 0                                    |
| $\begin{pmatrix} x & y & v \\ z & w & x + u^k \end{pmatrix}$              | $k \geq 2$           | 2         | 0                                    |
| $\begin{pmatrix} x & y & z \\ w & v & u^2 + x^{k+1} + y^2 \end{pmatrix}$  | $k \geq 1$           | 1         | 2                                    |
| $\begin{pmatrix} x & y & z \\ w & v & u^2 + xy^2 + x^{k-1} \end{pmatrix}$ | $k \geq 4$           | -1        |                                      |
| $\begin{pmatrix} x & y & z \\ w & v & u^2 + x^3 + y^4 \end{pmatrix}$      |                      | 0         | 4                                    |
| $\begin{pmatrix} x & y & z \\ w & v & u^2 + x^3 + xy^3 \end{pmatrix}$     |                      | 0         | 4                                    |
| $\begin{pmatrix} x & y & z \\ w & v & u^2 + x^3 + y^5 \end{pmatrix}$      |                      | 0         | 4                                    |
| $\begin{pmatrix} x & y & z \\ w & v & ux + y^k + u^r \end{pmatrix}$       | $k \geq 2, r \geq 3$ | $3 - k$   |                                      |
| $\begin{pmatrix} x & y & z \\ w & v & x^2 + y^2 + u^3 \end{pmatrix}$      |                      | 1         | 1                                    |
| $\begin{pmatrix} w & y & x \\ z & w + vu & y + v^k + u^r \end{pmatrix}$   | $k, r \geq 2$        | 2         | 0                                    |



---

|   |            |    |
|---|------------|----|
| $\begin{pmatrix} w & y & x \\ z & w+v^2 & y+u^3 \end{pmatrix}$        | 2          | 0  |
| $\begin{pmatrix} w & y & x \\ z & w+v^2 & y+u^4 \end{pmatrix}$        | 2          | 0  |
| $\begin{pmatrix} w & y & x \\ z & w+v^2+u^k & y+vu^2 \end{pmatrix}$   | $k \geq 3$ | 2  |
| $\begin{pmatrix} w & y & x \\ z & w+v^2+u^3 & y+u^k \end{pmatrix}$    | $k \geq 4$ | 2  |
| $\begin{pmatrix} w & y & x \\ z & w+v^2+u^3 & y+vu^k \end{pmatrix}$   | $k \geq 3$ | 2  |
| $\begin{pmatrix} w & y & x \\ z & w+v^2 & u^2+yv \end{pmatrix}$       | 1          | 8  |
| $\begin{pmatrix} w & y & x \\ z & w+uv & u^2+yv+v^k \end{pmatrix}$    | $k \geq 3$ | 1  |
| $\begin{pmatrix} w & y & x \\ z & w+uv^k & u^2+yv+v^3 \end{pmatrix}$  | 1          | 9  |
| $\begin{pmatrix} w & y & x \\ z & w+v^3 & u^2+yv \end{pmatrix}$       | 1          | 11 |
| $\begin{pmatrix} w & y & x \\ z & w+v^k & u^2+y^2+v^3 \end{pmatrix}$  | $k \geq 3$ | 1  |
| $\begin{pmatrix} w & y & x \\ z & w+uv^k & u^2+y^2+v^3 \end{pmatrix}$ | $k \geq 2$ | 1  |

---

**Demonstração.** Para encontrar os números

$$Eu_X(0) = 2 - \mu_{PR}(Y) \text{ e } Eu_{p, X \cap p_2^{-1}(\delta)}(x) = \mu_{PR}(Y) + \mu_{PR}(S) - 1,$$

precisamos exibir as seções genéricas  $(Y, 0)$  de  $(X, 0)$  e  $(S, 0)$  de  $(Y, 0)$ . Encontrando a 3-variedade determinantal simples  $(Y, 0)$ , temos que sua seção genérica é dada na demonstração do Corolário 5.2. A fórmula para  $Eu_X(0)$  segue diretamente do Corolário 4.18 e o número  $\mu_{PR}(Y)$  é calculado em (ZACH, 2017).

A seguir temos cada seção genérica das formas normais da tabela acima.

- A seção genérica da 1ª e 2ª formas normais é a 3-variedade  $(Y_1, 0)$  que tem matriz de representação

$$\begin{pmatrix} x & y & v \\ z & w & x \end{pmatrix},$$

com  $\mu_{PR}(Y_1) = 0$ .

- A seção genérica da 3ª, 5ª, 6ª, 7ª, 20ª e 21ª formas normais é a 3-variedade  $(Y_2, 0)$  que tem matriz de representação

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ w & x & v^2 + y^k \end{pmatrix},$$

com  $\mu_{PR}(Y_2) = k - 1$ . Para 3ª, 20ª e 21ª formas normais, usamos  $k = 2$ ; para 5ª, 6ª e 7ª formas normais, usamos  $k = 3$ .

- A seção genérica da 9ª forma normal é a 3-variedade  $(Y_3, 0)$  que tem matriz de representação

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ w & v & x^2 + y^2 \end{pmatrix},$$

com  $\mu_{PR}(Y_3) = 1$ .

- A seção genérica da 10ª, 11ª, 12ª, 13ª, 14ª e 15ª formas normais é a 3-variedade  $(Y_4, 0)$  que tem matriz de representação

$$\begin{pmatrix} w & y & x \\ z & w & y + v^k \end{pmatrix},$$

com  $\mu_{PR}(Y_4) = 0$ . Para 13ª, 14ª e 15ª formas normais, usamos  $k = 2$ ; para 11ª forma normal, usamos  $k = 3$ ; para 12ª forma normal, usamos  $k = 4$ .

- A seção genérica da 16ª e 19ª formas normais é a 3-variedade  $(Y_5, 0)$  que tem matriz de representação

$$\begin{pmatrix} w + v^k & y & x \\ z & w & yv \end{pmatrix},$$

com  $\mu_{PR}(Y_5) = 1$ . Para 16ª forma normal, usamos  $k = 2$ ; para 19ª forma normal, usamos  $k = 3$ .

- A seção genérica da 17ª e 18ª formas normais é a 3-variedade  $(Y_6, 0)$  que tem matriz de representação

$$\begin{pmatrix} w & y & x \\ z & w & yv + v^k \end{pmatrix},$$

com  $\mu_{PR}(Y_6) = 1$ . Para 18ª forma normal, usamos  $k = 3$ . □

## REFERÊNCIAS

---

- AMENT, D.; NUÑO-BALLESTEROS, J.; ORÉFICE-OKAMOTO, B.; TOMAZELLA, J. The Euler obstruction of a function on a determinantal variety and on a curve. **Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series**, Springer, v. 47, n. 3, p. 955–970, 2016. Citado nas páginas 67 e 69.
- ARBARELLO, E.; CORNALBA, M.; GRIFFITHS, P. A. **Geometry of algebraic curves: volume II with a contribution by Joseph Daniel Harris**. [S.l.]: Springer, 2011. Citado na página 44.
- ARNOL'D, V. I. Normal forms for functions near degenerate critical points, the Weyl groups of  $A_k$ ,  $D_k$ ,  $E_k$  and Lagrangian singularities. **Functional Analysis and its applications**, Springer, v. 6, n. 4, p. 254–272, 1972. Citado na página 37.
- BONNARD, B.; FAUGÈRE, J.-C.; JACQUEMARD, A.; DIN, M. S. E.; VERRON, T. Determinantal sets, singularities and application to optimal control in medical imagery. In: **Proceedings of the ACM on International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation**. [S.l.: s.n.], 2016. p. 103–110. Citado na página 46.
- BRASSELET, J.-P.; CHACHAPOYAS, N.; RUAS, M. A. Generic sections of essentially isolated determinantal singularities. **International Journal of Mathematics**, World Scientific, v. 28, n. 11, p. 1750083, 2017. Citado na página 54.
- BRASSELET, J.-P.; GRULHA-JR, N. G.; RUAS, M. A. The Euler obstruction and the Chern obstruction. **Bulletin of the London Mathematical Society**, Oxford University Press, v. 42, n. 6, p. 1035–1043, 2010. Citado na página 71.
- BRASSELET, J.-P.; MASSEY, D.; PARAMESWARAN, A.; SEADE, J. Euler obstruction and defects of functions on singular varieties. **Journal of the London Mathematical Society**, Cambridge University Press, v. 70, n. 1, p. 59–76, 2004. Citado nas páginas 66 e 68.
- BRASSELET, J.-P.; SCHWARTZ, M.-H. Sur les classes de Chern d'un ensemble analytique complexe, caractéristique d'Euler-Poincaré. **Astérisque**, v. 82, p. 93–147, 1981. Citado nas páginas 22 e 64.
- BRASSELET, J.-P.; SEADE, J. *et al.* Euler obstruction and indices of vector fields. **Topology**, Elsevier, v. 39, n. 6, p. 1193–1208, 2000. Citado na página 65.
- BRASSELET, J.-P.; SEADE, J.; SUWA, T. **Vector fields on singular varieties**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2009. v. 1987. Citado nas páginas 40, 66 e 70.
- BRUCE, J.; ROBERTS, R. Critical points of functions on analytic varieties. **Topology**, Pergamon, v. 27, n. 1, p. 57–90, 1988. Citado na página 75.
- BRUNS, W.; VETTER, U. **Determinantal rings**. [S.l.]: Springer, 2006. v. 1327. Citado na página 44.

CHERN, S.-s. Characteristic classes of hermitian manifolds. **Annals of Mathematics**, JSTOR, p. 85–121, 1946. Citado na página 40.

DALBELO, T. M.; PEREIRA, M. S.; GRULHA-JR., N. G. Toric surfaces, vanishing Euler characteristic and Euler obstruction of a function. In: **Annales de la Faculté des sciences de Toulouse: Mathématiques**. [S.l.: s.n.], 2015. v. 24, n. 1, p. 1–20. Citado na página 60.

DAMON, J.; PIKE, B. Solvable groups, free divisors and nonisolated matrix singularities II: vanishing topology. **Geometry & Topology**, Mathematical Sciences Publishers, v. 18, n. 2, p. 911–962, 2014. Citado nas páginas 63, 66, 79 e 84.

DUTERTRE, N.; GRULHA-JR., N. G. Lê–Greuel type formula for the Euler obstruction and applications. **Advances in Mathematics**, Elsevier, v. 251, p. 127–146, 2014. Citado nas páginas 69 e 71.

EBELING, W.; GUSEIN-ZADE, S. Radial index and Euler obstruction of a 1-form on a singular variety. **Geometriae Dedicata**, Springer, v. 113, n. 1, p. 231–241, 2005. Citado nas páginas 42, 61, 67 e 68.

\_\_\_\_\_. On indices of 1-forms on determinantal singularities. **Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics**, Springer, v. 267, n. 1, p. 113–124, 2009. Citado nas páginas 47, 50, 60, 61, 62, 63 e 68.

EBELING, W.; GUSEIN-ZADE, S. M. Chern obstructions for collections of 1-forms on singular varieties. In: **Singularity Theory: Dedicated to Jean-Paul Brasselet on His 60th Birthday**. [S.l.]: World Scientific, 2007. p. 557–564. Citado na página 71.

EISENBUD, D. **Commutative algebra: with a view toward algebraic geometry**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 150. Citado na página 29.

FRÜHBIS-KRÜGER, A. Classification of simple space curve singularities. **Communications in Algebra**, Taylor & Francis, v. 27, n. 8, p. 3993–4013, 1999. Citado nas páginas 37, 79, 80 e 81.

FRÜHBIS-KRÜGER, A.; NEUMER, A. Simple Cohen–Macaulay codimension 2 singularities. **Communications in Algebra**, Taylor & Francis, v. 38, n. 2, p. 454–495, 2010. Citado nas páginas 23, 37, 53, 59, 79, 82 e 86.

FRÜHBIS-KRÜGER, A.; ZACH, M. Determinantal singularities. **arXiv preprint arXiv:2106.04855**, 2021. Citado nas páginas 43, 48 e 49.

\_\_\_\_\_. On the vanishing topology of isolated Cohen–Macaulay codimension 2 singularities. **Geometry & Topology**, Mathematical Sciences Publishers, v. 25, n. 5, p. 2167–2194, 2021. Citado na página 62.

GAFFNEY, T. Polar multiplicities and equisingularity of map germs. **Topology**, Pergamon, v. 32, n. 1, p. 185–223, 1993. Citado nas páginas 33 e 34.

\_\_\_\_\_. Aureoles and integral closure of modules. In: **Stratifications, singularities and differential equations, II**. [S.l.: s.n.], 1997. p. 55–62. Citado na página 54.

GAFFNEY, T.; RUAS, M. Equisingularity and eids. **Proceedings of the American Mathematical Society**, AMER MATHEMATICAL SOC 201 CHARLES ST, PROVIDENCE, RI 02940-2213 USA, v. 149, n. 4, p. 1593–1608, 2021. Citado nas páginas 49, 54 e 59.

- GIUSTI, M. Classification des singularités isolés simples d'intersections completes. In: **Proc. Symp. Pure Math.** [S.l.: s.n.], 1983. v. 40, n. 1, p. 457–494. Citado na página 37.
- GORESKY, M.; MACPHERSON, R. Stratified Morse theory. In: **Stratified Morse Theory.** [S.l.]: Springer, 1988. p. 3–22. Citado nas páginas 31 e 32.
- GREUEL, G.-M. Der Gauss-Manin-zusammenhang isolierter singularitäten von vollständigen durchschnitten. **Mathematische Annalen**, Springer-Verlag, v. 214, n. 3, p. 235–266, 1975. Citado na página 58.
- GREUEL, G.-M.; LOSSEN, C.; SHUSTIN, E. I. **Introduction to singularities and deformations.** [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2007. Citado nas páginas 26, 29 e 47.
- GRULHA-JR, N. G. **Obstrução de Euler de aplicações analíticas.** Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2007. Citado nas páginas 22 e 70.
- GRULHA-JR, N. G.; MELO, T. Sobre variedades polares de superfícies. **Matemática Universitária**, IMPA, n. 41, p. 11–22, 2006. Citado na página 33.
- GRULHA-JR, N. G.; RUIZ, C. M.; SANTANA, H. The geometrical information encoded by the Euler obstruction of a map. **International Journal of Mathematics**, World Scientific, v. 33, n. 04, p. 2250029, 2022. Citado nas páginas 22, 71 e 72.
- HAMM, H. Lokale topologische Eigenschaften komplexer Räume. **Mathematische Annalen**, Springer, v. 191, n. 3, p. 235–252, 1971. Citado nas páginas 50 e 58.
- HARRIS, J. **Algebraic geometry: a first course.** [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 133. Citado na página 44.
- HATCHER, A. **Algebraic Topology.** [S.l.]: Cambridge University Press, 2002. Citado na página 38.
- HENRY, J.-P.; MERLE, M.; SABBAAH, C. Sur la condition de Thom stricte pour un morphisme analytique complexe. In: **Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure.** [S.l.: s.n.], 1984. v. 17, n. 2, p. 227–268. Citado na página 33.
- HENRY, J.-P. G.; TRÁNG, L. D. Limites d'espaces tangents, fonctions de plusieurs variable complexes II, seminaire norguet. **Springer Lecture Notes in Mathematics**, v. 482, p. 251–265, 1975. Citado na página 54.
- JOCKERS, H.; KUMAR, V.; LAPAN, J. M.; MORRISON, D. R.; ROMO, M. Nonabelian 2d Gauge theories for determinantal Calabi-Yau varieties. **Journal of High Energy Physics**, Springer, v. 2012, n. 11, p. 1–47, 2012. Citado na página 46.
- JONG, T. D.; PFISTER, G. **Local analytic geometry: Basic theory and applications.** [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. Citado nas páginas 28 e 29.
- LIMA-PEREIRA, B. K. O número de Bruce-Roberts sobre uma ICIS. Universidade Federal de São Carlos, 2022. Citado nas páginas 23 e 76.
- LIMA-PEREIRA, B. K.; NUÑO-BALLESTEROS, J. J.; ORÉFICE-OKAMOTO, B.; TOMAZELLA, J. N. The Bruce-Roberts numbers of a function on an ICIS. **arXiv preprint arXiv:2203.11186**, 2022. Citado nas páginas 76, 77 e 78.

MACPHERSON, R. D. Chern classes for singular algebraic varieties. **Annals of Mathematics**, JSTOR, v. 100, n. 2, p. 423–432, 1974. Citado nas páginas 22 e 64.

MILNOR, J. Singular points of complex hypersurfaces. **Ann. Math. St.**, v. 61, p. 591–648, 1968. Citado na página 50.

\_\_\_\_\_. Singular points of complex hypersurfaces.(am-61), volume 61. In: **Singular Points of Complex Hypersurfaces.(AM-61), Volume 61**. [S.l.]: Princeton University Press, 2016. Citado na página 57.

MOLINA, J. L. C.; LÊ, D. T.; SEADE, J. **Handbook of Geometry and Topology of Singularities I**. [S.l.]: Springer, 2020. Citado na página 48.

NUÑO-BALLESTEROS, J. J.; ORÉFICE-OKAMOTO, B.; TOMAZELLA, J. The vanishing Euler characteristic of an isolated determinantal singularity. **Israel Journal of Mathematics**, Springer, v. 197, n. 1, p. 475–495, 2013. Citado nas páginas 60 e 66.

PEDERSEN, H. M. On Tjurina transform and resolution of determinantal singularities. In: **Singularities and Their Interaction with Geometry and Low Dimensional Topology**. [S.l.]: Springer, 2021. p. 289–312. Citado na página 62.

PEREIRA, M. d. S. **Variedades determinantis e singularidades de matrizes**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2010. Citado nas páginas 43, 47, 50, 53, 60, 63, 70, 74, 75, 79, 81 e 84.

RUAS, M. A. S.; PEREIRA, M. D. S. Codimension two determinantal varieties with isolated singularities. **Mathematica Scandinavica**, JSTOR, p. 161–172, 2014. Citado nas páginas 58, 59 e 79.

SCHWARTZ, M.-H. Classes caractéristiques définies par une stratification d’une variété analytique complexe. **CR Acad. Sci. Paris**, v. 260, p. 3262–3264, 1965. Citado nas páginas 41 e 64.

\_\_\_\_\_. Champs radiaux sur une stratification analytique complexe. **Travaux en cours**, Hermann, v. 39, 1991. Citado na página 41.

SEADE, J.; TIBĂR, M.; VERJOVSKY, A. Milnor numbers and Euler obstruction. **Bulletin of the Brazilian Mathematical Society**, Springer, v. 36, n. 2, p. 275–283, 2005. Citado nas páginas 22 e 71.

SIESQUÉN, N. C. C. **Invariantes de variedades determinantis**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2014. Citado na página 61.

SIESQUÉN, N. C. C. Euler obstruction of essentially isolated determinantal singularities. **Topology and its Applications**, Elsevier, v. 234, p. 166–177, 2018. Citado nas páginas 79 e 86.

SNOUSSI, J. Limites d’espaces tangents à une surface normale. **Commentarii Mathematici Helvetici**, Springer, v. 76, n. 1, p. 61–88, 2001. Citado na página 54.

STEENROD, N. **The topology of fibre bundles**. [S.l.]: Princeton university press, 1999. v. 44. Citado na página 38.

STIEFEL, E. Richtungsfelder und Fernparallelismus in  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten. **Commentarii mathematici Helvetici**, v. 8, p. 305–353, 1935/36. Disponível em: <<http://eudml.org/doc/138657>>. Citado na página 40.

SULLIVAN, D. Combinatorial invariants of analytic spaces. In: SPRINGER. **Proceedings of Liverpool Singularities—Symposium I**. [S.l.], 1971. p. 165–177. Citado na página 64.

TEISSIER, B. Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney. **Astérisque**, v. 7, n. 8, p. 285–362, 1973. Citado na página 54.

TESSIER, B. Variétés polaires 2: Multiplicités polaires, sections planes, et conditions de Whitney. In: **Actes de la conférence de géométrie algébrique la Rábida, Springer Lecture Notes**. [S.l.: s.n.], 1981. v. 961, p. 314–491. Citado nas páginas 33 e 34.

THOM, R. La stabilité topologique des applications polynomiales. **Enseign. Math.(2)**, v. 8, p. 24–33, 1962. Citado na página 30.

\_\_\_\_\_. Ensembles et morphismes stratifiés. *bull. amer. math. soco* 75, 240–284. **Mathematical Reviews: MR39**, v. 970, 1969. Citado na página 31.

TIBĂR, M. Bouquet decomposition of the Milnor fibre. **Topology**, Elsevier, v. 35, n. 1, p. 227–241, 1996. Citado na página 51.

TRÁNG, L. D. Calculation of Milnor number of isolated singularity of complete intersection. **Functional Analysis and its Applications**, Springer, v. 8, n. 2, p. 127–131, 1974. Citado na página 58.

TRANG, L. D.; TEISSIER, B. Variétés polaires locales et classes de Chern des variétés singulieres. **Annals of Mathematics**, JSTOR, v. 114, n. 3, p. 457–491, 1981. Citado na página 33.

WALL, C. Classification of unimodal isolated singularities of complete intersections. In: **Proc. Sympos. Pure Math.** [S.l.: s.n.], 1983. v. 40. Citado na página 37.

WHITNEY, H. Sphere-spaces. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, National Acad Sciences, v. 21, n. 7, p. 464–468, 1935. Citado na página 40.

\_\_\_\_\_. Elementary structure of real algebraic varieties. **Annals of Mathematics**, JSTOR, p. 545–556, 1957. Citado na página 30.

\_\_\_\_\_. Local properties of analytic varieties, differential and combinatorial topology. In: **A Symposium in Honor of Marston Morse (Princeton Mathematical Series 27)**, SS Cairns, ed., Princeton University Press, Princeton, NJ. [S.l.: s.n.], 1965. Citado na página 31.

\_\_\_\_\_. Tangents to an analytic variety. **Annals of Mathematics**, JSTOR, p. 496–549, 1965. Citado na página 31.

ZACH, M. **Topological invariants of isolated determinantal singularities**. Tese (Doutorado) — Hannover: Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover, 2017. Citado nas páginas 43, 47, 50, 51, 53, 54, 60, 63, 74, 75, 79, 82 e 87.

ZACH, M. Bouquet decomposition for determinantal Milnor fibers. **Journal of Singularities**, v. 22, p. 190–204, 2020. Citado nas páginas 51 e 52.

