UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Sobre propriedades de ordens parciais ccc

Júnio Luan Pereira

Tese de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPG-Mat)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

Júnio Luan Pereira

Sobre propriedades de ordens parciais ccc

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Leandro Fiorini Aurichi

USP – São Carlos
Maio de 2020

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

P436s

Pereira, Júnio Luan
Sobre propriedades de ordens parciais ccc / Júnio Luan Pereira; orientador Leandro Fiorini Aurichi. -- São Carlos, 2020.
99 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2020.

1. ordens parciais. 2. ccc. 3. extensões de ccc. I. Aurichi, Leandro Fiorini, orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Júnio Luan Pereira

About properties of ccc partial orders

Thesis submitted to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP – in accordance with the requirements of the Mathematics Graduate Program, for the degree of Doctor in Science. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Leandro Fiorini Aurichi

USP – São Carlos
May 2020

Dedicado a todos aqueles que mergulham no insondável oceano do conhecimento e ressurgem com a missão de não deixar morrer aquilo que os mudou completamente. E principalmente a todos aqueles que tornam esse renascimento possível.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) que, através da figura institucional da agência de fomento CNPq, fomentou e estimulou meu desenvolvimento científico particular num período de quase 3 anos e meio durante a Graduação e, mediante a figura institucional da CAPES, estimulou e fomentou meu desenvolvimento científico no período de 6 anos durante os quais exerci o Mestrado e Doutorado. À CAPES e ao CNPq por todo o fomento e estímulo exercidos na área da Graduação e Pós-Graduação. E por fim, porém não menos importante, ao Professor Doutor Leandro Fiorini Aurichi, que como Mestre manteve-se ao meu lado desde o princípio dessa trajetória de quase uma década.

"Eadem Mutata Resurgo" (Jakob Bernoulli)

RESUMO

PEREIRA, J. L. **Sobre propriedades de ordens parciais ccc**. 2020. 99 p. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2020.

Este trabalho explora a classe dos conjuntos parcialmente ordenados que satisfazem a propriedade denotada como “countable chain condition” na literatura, mais precisamente as propriedades que são extensões da mesma e os vínculos lógicos assumidos entre elas. O objetivo principal é estender os resultados já conhecidos graças a Kunen, Wage, Todorčević, Galvin e Mezabarba.

Palavras-chave: ordens parciais, ccc, extensões de ccc.

ABSTRACT

PEREIRA, J. L. **About properties of ccc partial orders**. 2020. 99 p. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2020.

This work explores the class of partially ordered sets that satisfy the property known as "countable chain condition" in literature, more precisely the properties that are extensions of it and the logical links between them. The main purpose is to extend the results already known thanks to Kunen, Wage, Todorčević, Galvin and Mezabarba.

Keywords: partial orders, ccc, extensions of ccc.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \dots \mathbf{NOME}, \text{etc}$ — classes

i, j, k, l, m, n, N — números naturais

$\alpha, \beta, \gamma, \text{etc}$ — ordinais

ω — conjunto dos números naturais, que é um número ordinal e cardinal

$\omega_{<\text{ordinal}>}$ — representação formal dos ordinais que são cardinais infinitos

κ, λ, θ — cardinais infinitos

$\mathbb{P}, \mathbb{Q}$ — ordens parciais

$\leq_{\mathbb{P}}, <_{\mathbb{P}}$ — relações de ordem fraca e estrita, respectivamente, da ordem parcial $\mathbb{P}$

$\mathbb{1}_{\mathbb{P}}$ — o elemento máximo de uma ordem parcial $\mathbb{P}$

$p \not\perp q, p \perp q$ — em uma ordem parcial $\mathbb{P}$, dados $p, q \in \mathbb{P}$, vale $p \not\perp q$ se, e somente se, existe $r \in \mathbb{P}$ com $r \leq p, q$. Caso contrário, vale $p \perp q$

$\overline{Y}$ — fecho de um subconjunto Y de um espaço topológico X

$\text{ab}(X)$ — conjunto de todos os abertos de um espaço topológico X

$\text{fe}(X)$ — conjunto de todos os fechados de um espaço topológico X

$f : A \to B$ — f é função com domínio A e imagem contida em B

$f_1, \dots, f_n : A \to B$ — os conjuntos $f_1, \dots, f_n$ são funções com domínio A e imagem contida em B

$R[X]$ — conjunto $\{y \in \text{im}(R) : \exists x \in X\ (x, y) \in R\}$, onde R é uma relação

$R^{-1}[Y]$ — conjunto $\{x \in \text{dom}(R) : \exists y \in Y\ (x, y) \in R\}$, onde R é uma relação

$|X|$ — a cardinalidade de X

$[X]^{\kappa}$ — conjunto $\{Y \subset X : |Y| = \kappa\}$, com κ cardinal arbitrário

$[X]^{<\kappa}$ — conjunto $\{Y \subset X : |Y| < \kappa\}$, com κ cardinal arbitrário

ccc — notação para countable chain condition, isto é, ordens parciais $\mathbb{P}$ tais que toda coleção não enumerável de seus elementos possui par de elementos compatíveis. $\mathbb{P}$ satisfaz $^{\text{ccc}}$propriedade se, e somente se, $\mathbb{P}$ preserva "propriedade" em extensões genéricas de forcings ccc. Um enunciado é ccc indestrutível se, e só se, ele continua válido em extensões genéricas de forcings ccc. Veja o glossário para seu significado no contexto de absolutividade de enunciados e indestrutibilidade de classes prod. ccc — notação para produtivamente ccc, isto é, ordens parciais $\mathbb{P}$ tais que, para todo $\mathbb{Q}$ ccc, $\mathbb{P}\times\mathbb{Q}$ é ccc

knaster — notação para a propriedade de Knaster, isto é, ordens parciais $\mathbb{P}$ tais que toda coleção não enumerável de seus elementos possui subcoleção não enumerável com elementos compatíveis 2 a 2

$\mathbf{V}$ — classe de todos os conjuntos

$\mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ — classe de todos os nomes para o forcing $\mathbb{P}$

$\dot{x}$ — nome para o conjunto x de uma extensão genérica de $\mathbf{V}^{\mathbb{P}}$

$\check{x}, \check{(\mathrm{conj})}$ — simbolo para os nomes canônicos dos conjuntos "x", "conj" da classe $\mathbf{V}$ na técnica de forcing

$\Vdash$ — "forçar que" (técnica de forcing)

$\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C},\mathrm{etc}$ — afirmações na teoria dos conjuntos

^{cl}*propriedade* — $\mathbb{P}$ preserva *propriedade* em forcing pertencente a *cl*

all — $\mathbb{P}$ satisfaz ${}^{\text{all}}$propriedade se, e somente se, $\mathbb{P}$ preserva "propriedade" em extensões genéricas de qualquer forcing. Um enunciado é all indestrutível se, e só se, ele continua válido em extensões genéricas de qualquer forcing

en.f — $\mathbb{P}$ satisfaz ${}^{\text{en.f}}$propriedade se, e somente se, $\mathbb{P}$ preserva "propriedade" em extensões genéricas de forcings enumeravelmente fechados. Um enunciado é en.f indestrutível se, e só se, ele continua válido em extensões genéricas de forcings enumeravelmente fechados

$\omega_1\to(\alpha,\beta)^2$ — qualquer coloração K de $[\omega_1]^2$ é tal que ω_1 possui ou um subconjunto X com order type α tal que $[X]^2\subset K$, ou um subconjunto Y com order type β tal que $[Y]^2\cap K=\emptyset$

$\omega_1\to(\omega_1,\omega+1)^2$ — a propriedade fundamental

$\mathscr{F}_{\mathbb{P}}(\mathscr{A})$ — ordem parcial $\bigcup_{A\in\mathscr{A}}[A]^{<\omega}$, onde $\mathscr{A}$ é coleção de anticadeias de $\mathbb{P}$ tal que $|\bigcup\mathscr{A}|=\omega_1$, ordenada por $\supset$

$\mathrm{F}_{\mathbb{P}}(\mathrm{X})$ — ordem parcial composta pelas anticadeias finitas de X, onde $\mathrm{X}\subset\mathbb{P}$ e $|\mathrm{X}|=\omega_1$, ordenada por $\supset$. Um caso particular de $\mathscr{F}_{\mathbb{P}}(\mathscr{A})$

mezabarba — caracterização de Mezabarba para prod. ccc. $\mathbb{P}$ irá satisfazer mezabarba se, e somente se, toda ordem parcial do tipo $\mathscr{F}_{\mathbb{P}}(\mathscr{A})$ não for ccc

mezabarba* — versão fraca de mezabarba. $\mathbb{P}$ satisfará mezabarba* se, e só se, toda ordem parcial do tipo $\mathrm{F}_{\mathbb{P}}(\mathrm{X})$ não for ccc

$\mathbb{P}^*$ — ordem parcial formada pelos subconjuntos finitos de $\mathbb{P}$ com elementos compatíveis 2 a 2, ordenada por $\supset$

ccc^s — notação para ordens parciais $\mathbb{P}$ cujo $\mathbb{P}^*$ é ccc prod. ccc* — notação para ordens parciais $\mathbb{P}$ cujo produto com ordens ccc$^{\mathrm{s}}$ é ccc

pot. ccc — notação para potencialmente ccc, isto é, ordens parciais $\mathbb{P}$ tais que, para todo n, a ordem parcial $\mathbb{P}^n$ é ccc

mezabarba$^{\mathrm{d}}$ — versão forte de mezabarba, na qual cada $\mathscr{F}_{\mathbb{P}}(\mathscr{A})$ precisa ter uma anticadeia de tamanho ω_1 com elementos disjuntos 2 a 2

mezabarba$_n$ — generalização de mezabarba, onde cada $\mathscr{F}_{\mathbb{P}}(\mathscr{A})$ precisa ter anticadeia de tamanho ω_1 com elementos de cardinalidade no máximo n

mezabarba$^*_n$ — generalização de mezabarba*, na qual toda $\mathrm{F}_{\mathbb{P}}(\mathrm{X})$ precisa ter anticadeia de tamanho ω_1 com elementos de cardinalidade no máximo n

mezabarba$^{\mathrm{d}}_n$ — generalização de mezabarba$^{\mathrm{d}}$, que inclui a hipótese de que, para cada $\mathscr{F}_{\mathbb{P}}(\mathscr{A})$, os elementos da respectiva anticadeia têm cardinalidade no máximo n

$\mathscr{A}|X$ — conjunto $\{A \cap X : X \in \mathscr{A}\}$

$\mathrm{P}(X,K)$ — ordem parcial $\{F \in [X]^{<\omega} : [F]^2 \subset K\}$, onde $K \subset [X]^2$, ordenada por $\supset$

$\mathrm{K}(X)$ — todas as ordens $\mathrm{P}(X,K)$ ccc

$\mathrm{C}(X)$ — extensão de $\mathrm{K}(X)$

Δ_X — $((\{x\},\{x\}) : x \in X)$, denominada a diagonal de X

wage — enunciado situado entre prod. ccc e knaster, descrito em um artigo de Wage. $\mathbb{P}$ satisfará wage se, e somente se, toda sequência $(p_\alpha : \alpha < \omega_1)$ de elementos de $\mathbb{P}$ possuir uma subsequência de comprimento ω_1 tal que, para algum n, nenhuma subsequência de comprimento $\omega + n$ da subsequência seja anticadeia

$\mathrm{P}(X,\{T_\xi : \xi < \alpha\})$ — ordem parcial $\{(s,F) : s \subset X; F \subset \{T_\xi : \xi < \alpha\}; |s|,|F| < \omega\}$, onde vale $(s,F) \leq (t,G)$ se, e só se, valer $s \supset t$, $F \supset G$ e $s \setminus t \cap \bigcup G = \emptyset$

$\mathscr{S}_X$ — ordem parcial $\{s \in [X]^{<\omega} : x \notin F(y)$ para todo $x \neq y$ em $s\}$, ordenada por $\supset$

$f <^* g$ — vale $|\{n : f(n) \geq g(n)\}| < \omega$

$<^*$-ilimitado — nome para um $Y \subset \omega^\omega$ tal que nenhum $g \in \omega^\omega$ satisfaz $f <^* g$ para todo $f \in Y$

$\mathfrak{b}$ — pequeno cardinal representando a menor cardinalidade de um $Y \subset \omega^\omega$ $<^*$-ilimitado em ω^ω

$\mathrm{ht}_T(x)$ — a altura do elemento x na árvore T, o order type do segmento inicial de x em T

$\mathrm{ht}(T)$ — a altura da árvore T, o ordinal $\sup\{\mathrm{ht}_T(x)+1 : x \in T\}$

$\mathrm{Lev}_\alpha(T)$ — conjunto $\{x \in T : \mathrm{ht}_T(x) = \alpha\}$, onde T é uma árvore

$A \subset^* B$ — vale $|\{x \in A : x \notin B\}| < \omega$

$\mathfrak{c}$ — o cardinal 2^ω, igual à cardinalidade do conjunto dos números reais, $|\mathbb{R}|$

$\mathfrak{e}$ — primeiro pequeno cardinal envolvido no contraexemplo de Galvin

$\mathfrak{f}$ — segundo pequeno cardinal envolvido no contraexemplo de Galvin

$X \otimes Y$ — conjunto $\{\{x,y\} \in [X \cup Y]^2 : x \in X$ e $y \in Y\}$

$\mathbb{X}$-$\mathscr{G}(F)$ — jogo de ω_1 rodadas definido para a afirmação $\mathbb{X}$ e função $F : T \to \mathbf{C}$

$\ddot{x}$ — bom nome para o conjunto x de uma extensão genérica

$A{\downarrow}$ — subconjunto $\bigcup_{r \in A}\{s \in \mathbb{Q} : s \leq r\}$ da ordem parcial $\mathbb{Q}$, onde $A \subset \mathbb{Q}$

$s(x)$ — segmento inicial de x

F_X — função derivada de $F : T \to \mathbf{C}$ a partir de uma cadeia X da árvore T tal que, para todo $x \in X$, $F_X(\mathrm{ht}_X(x)) = F(x)$. Seu domínio será $\mathrm{ht}(X)$

$\mathrm{I} \uparrow \mathrm{J}$ — o jogador I possui estratégia vencedora no jogo J

$\mathrm{II} \uparrow \mathrm{J}$ — o jogador II possui estratégia vencedora no jogo J

$\forall F\ \mathrm{I} \uparrow \mathbb{X}$-$\mathscr{G}(F)$ — o jogador I possui estratégia vencedora no jogo $\mathbb{X}$-$\mathscr{G}(F)$ para toda função $F : T \to \mathbf{C}$

$\forall F\ \mathrm{II} \uparrow \mathbb{X}$-$\mathscr{G}(F)$ — o jogador II possui estratégia vencedora no jogo $\mathbb{X}$-$\mathscr{G}(F)$ para toda função $F : T \to \mathbf{C}$

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O objetivo desse texto é alcançar, descrever e explorar novos resultados na teoria dos conjuntos envolvendo a classe de todas as ordens parciais que satisfazem uma propriedade que denotaremos como "ccc" ao longo do texto. Esse texto foca principalmente em estender os resultados descritos em (Mezabarba, 2018), (Wage, 1979), (Todorčević, 1986) e (Galvin, 1980).

No Capítulo 1, introduziremos a terminologia usada ao longo de todo o texto, junto de enunciados e teoremas já conhecidos na literatura que serão amplamente utilizados nas nossas demonstrações.

Mezabarba, nas Proposições 2.18 e 2.21 de (Mezabarba, 2018), exibiu novas formas de caracterizar as propriedades que nesse texto serão denotadas como "prod. ccc" e "knaster". No Capítulo 2, nosso objetivo será explorar essas caracterizações, definir versões derivadas das mesmas e demonstrar as relações entre elas e outros enunciados similares ligados à classe de ordens parciais ccc. Também demonstrará novas formas de caracterizar alguns desses enunciados e asserções globais a respeito da classe de ordens parciais ccc.

O Capítulo 3 vai explorar dois exemplos da literatura de ordens parciais que satisfazem prod. ccc porém não satisfazem knaster (assumindo CH): o primeiro de autoria de Kunen descrito em (Wage, 1979), e outro de autoria de Todorčević descrito em (Todorčević, 1986). Nós iremos estender os resultados descritos nesses artigos, demonstrar quais variantes das caracterizações de Mezabarba o mesmos satisfazem e como o exemplo de Todorčević pode ser usado para dirimir uma questão deixada em aberto no artigo (Wage, 1979).

O Capítulo 4 introduz alguns resultados a respeito de ordens parciais ccc que não satisfazem prod. ccc. A primeira seção aborda a questão de quais ordens parciais que são árvores satisfazem essa propriedade, desembocando em demonstrações sobre quais variantes das caracterizações de Mezabarba uma árvore de Suslin satisfaz. A segunda seção aborda o exemplo de autoria de Galvin (assumindo CH) descrito em (Galvin, 1980), e mostra como podemos modificar a demonstração original para provar que sua existência é consistente com $\sim$CH. Esse trabalho envolve a definição de dois pequenos cardinais ligados implicitamente à demonstração.

Por fim, o Capítulo 5 visará descrever um tópico abordado pelo autor sem artigos de referência: "jogos de ω_1 passos visando caracterizar indestrutibilidade de enunciados envolvendo funções $f : \omega_1 \to \mathbf{C}$ através de forcings enumeravelmente fechados". Os enunciados descritos no capítulo são de caráter geral, porém o objetivo inicial era usá-los para enunciados envolvendo ordens parciais similares a knaster e uma definida no Capítulo 3 que denotamos no texto como "wage". O trabalho ainda está inconcluso porém já foi possível provar alguns resultados simples que serão descritos no capítulo. Também é proposta uma conjectura no mesmo que permitiria um ligeiro avanço no objetivo original.

CAPÍTULO

1

NOTAÇÕES, TERMINOLOGIA E ENUNCIADOS GERAIS

1.1 Notações usadas durante o texto

Durante todo o texto adotaremos, na medida do possível, as seguintes convenções textuais:

- Letras ou palavras em negrito e maiúsculas denotarão *classes*. Em ZFC, somente conjuntos tem uma existência formal, de modo que, ao longo do texto, o leitor deve encarar classes apenas como "circunlocuções na metateoria";
- Números naturais em geral serão denotados pela letras i, j, k, l, m, n e N. Demais letras do alfabeto latino, maiúsculas ou minúsculas, denotarão conjuntos de modo arbitrário;
- Utilizaremos a teoria dos ordinais de von Neumann, com os números cardinais definidos a partir dela, o que implica que os elementos de um ordinal são todos os ordinais estritamente menores que ele. Não faremos nenhuma distinção entre os números cardinais e seus correspondentes ordinais. O contexto é que esclarecerá se estamos falando de algo pertinente a ordinais ou cardinais, como a respeito da aritmética ordinal ou cardinal por exemplo;
- Letras minúsculas do alfabeto grego denotarão números ordinais. A letra ω será reservada para representar o menor ordinal infinito (que na teoria dos conjuntos coincide com o conjunto dos números naturais) e, quando acrescida de um ordinal subscrito, a um cardinal infinito em sua definição formal. Também serão reservadas para denotar cardinais infinitos as letras gregas minúsculas κ, λ e θ;
- Usaremos $\mathbb{P}$ e $\mathbb{Q}$ para denotar ordens parciais em geral. Quando falarmos de uma ordem parcial $\mathbb{P}$, estaremos associando à mesma, muitas vezes de modo implícito, uma ordem

fraca (i.e. relação reflexiva, antissimétrica e transitiva) junto com sua versão estrita (i.e. relação antirreflexiva e transitiva) para seus elementos e um elemento máximo de acordo com esta ordem. Quando precisarmos explicitá-los, denotaremo-los respectivamente $\leq_{\mathbb{P}}$, $<_{\mathbb{P}}$ e $\mathbb{1}_{\mathbb{P}}$, podendo remover a menção a $\mathbb{P}$ quando o contexto a deixar clara. No estudo de uma ordem parcial $\mathbb{P}$, as seguintes definições serão usadas frequentemente nesse texto:

$p, q \in \mathbb{P}$ são ditos *compatíveis*, denotando $p \not\perp q$, quando existir $r \in \mathbb{P}$ com $r \leq p, q$. Caso contrário, diremos que p e q são *incompatíveis* e denotaremos $p \perp q$;

Uma *anticadeia* de $\mathbb{P}$ é uma coleção A em $\mathbb{P}$ com elementos incompatíveis 2 a 2, um conjunto *denso* de $\mathbb{P}$ é uma coleção D em $\mathbb{P}$ tal que, para todo $p \in \mathbb{P}$, existe $r \in D$ com $r \leq p$.

Todo subconjunto de uma ordem parcial também será uma ordem parcial quando munida com a mesma ordem. Às vezes será necessário incluir um elemento extra para servir de $\mathbb{1}$, esse será nosso tratamento padrão para subconjuntos de ordens parciais;

- Com espaços topológicos X, denotaremos o fecho de um $Y \subset X$ como $\overline{Y}$. Quando necessário, denotaremos como $\mathrm{ab}(X)$ o conjunto de todos os abertos e $\mathrm{fe}(X)$ o conjunto de todos os fechados de X;

- O conceito de *domínio* e *imagem* não se aplicarão somente a funções, mas também a relações, que se tratam de conjuntos compostos exclusivamente de pares ordenados. Assim toda função também é uma relação. O domínio de uma relação R consiste no conjunto de todas as primeiras coordenadas de seus pares ordenados, e a imagem de R é o conjunto das segundas coordenadas. A notação $f : A \to B$, será usada para dizer que f é uma função com domínio A e imagem *apenas contida* em B, então B pode ser uma classe no lugar de conjunto. De modo mais geral, denotaremos $f_1, \ldots, f_n : A \to B$ quando quisermos dizer que todos os $f_1, \ldots, f_n$ são funções com domínio em A e imagem contida em B (conjunto ou classe);

- Para uma relação R, quando tivermos $X \subset \mathrm{dom}(R)$, definiremos a *imagem de X em R*, denotada $R[X]$, como o conjunto dos elementos da imagem de R cujas primeiras coordenadas estão em X. E quando tivermos $Y \subset \mathrm{im}(R)$, a *imagem inversa de Y em R*, denotada $R^{-1}[Y]$, como o conjunto dos elementos do domínio de R cujas segundas coordenadas pertencem a Y. Se $x \in \mathrm{dom}(R)$, denominaremos a imagem de x em R como sendo $R[\{x\}]$. Analogamente, se $y \in \mathrm{im}(R)$, denominaremos a imagem inversa de y em R como o conjunto $R^{-1}[\{y\}]$.

1.2 Convenções sobre números ordinais

Quando um conjunto A estiver munido com uma boa ordem *ord* (seja estrita ou fraca, usaremos ambas), chamaremos de *order type de* (A, ord) o único ordinal α isomorfo ao conjunto

A munido com a boa ordem *ord*. Iremos omitir *ord* quando a mesma for evidente pelo contexto. Em particular, a menos que citado expressamente o contrário, a boa ordem de um ordinal ou qualquer um de seus subconjuntos será sempre a boa ordem canônica dos números ordinais de von Neumann.

1.3 Cardinalidade e coleções de conjuntos

Dado um conjunto X, denotaremos por $|X|$ a cardinalidade do conjunto X.

Diremos que um conjunto é *finito* quando sua cardinalidade for estritamente menor que ω, isto é, igual a um número natural. Diremos ser *enumerável* um conjunto que for finito ou tiver cardinalidade ω, isto é, quando sua cardinalidade for menor ou igual a ω, dizendo ser *enumeravelmente infinito* quando sua cardinalidade for exatamente igual a ω. Quanto a um conjunto cuja cardinalidade é estritamente maior que ω, denotaremo-lo *não enumerável*.

Dado um conjunto X e um cardinal κ, denotaremos como $[X]^\kappa$ o conjunto de todos os subconjuntos de X com cardinalidade κ, e como $[X]^{<\kappa}$ o conjunto de todos os subconjuntos de X com cardinalidade estritamente menor que κ. Essa notação será muito usada principalmente para cardinais finitos. Em particular, $[X]^{<\omega}$ representa o conjunto de todos os subconjuntos finitos de X.

Uma *sequência* corresponde a uma função arbitrária, e denotaremos como $(s_x : x \in A)$ uma sequência de domínio A que assume o valor s_x para cada $x \in A$. Para cada $x \in A$, iremos denotar s_x como um *termo da sequência*. Quando o domínio da sequência for um ordinal α, denotaremo-la $(s_\xi : \xi < \alpha)$, diremos que a sequência possui *comprimento* α e, se $S \subset \alpha$ tiver order type β, então diremos que a sequência $(s_\eta : \eta \in S)$ é uma *subsequência de comprimento* β da mesma. Quando o domínio da sequência for finito, algumas vezes nos resumiremos apenas a listar seus termos, com números naturais partindo do 1 ao invés do 0.

Quando uma sequência $(s_\xi : \xi < \alpha)$ for injetora, poderemos restringir nossa discussão somente à imagem da mesma, que denotaremos $\{s_\xi : \xi < \alpha\}$ e denominaremos *coleção*.

Dado um conjunto A bem ordenado por ord com order type α, a sequência $(a_\xi : \xi < \alpha)$ que corresponde ao isomorfismo entre α e (A, ord) será denominada ord-*enumeração de* A. Se $\prec$ for a versão estrita da boa ordem ord, essa sequência é $\prec$-crescente no sentido que $a_\xi \prec a_\eta$ se, e somente se, $\xi < \eta$. No caso de uma ordem arbitrária $\leq$, quando $\xi < \eta$ implicar $a_\xi \geq a_\eta$, diremos que a sequência $(a_\xi : \xi < \alpha)$ será denominada $\leq$-*decrescente*.

Uma *enumeração do conjunto* A será qualquer bijeção entre A e sua cardinalidade $\kappa = |A|$, $(a_\alpha : \alpha < \kappa)$, de modo que $A = \{a_\alpha : \alpha < \kappa\}$.

1.4 Envolvendo ordens parciais

Três enunciados bem conhecidos na literatura serão muito usados ao longo desse texto. Eles serão descritos abaixo, junto com seus nomes oficiais e como serão denotados ao longo desse texto. Neles, $\mathbb{P}$ é uma ordem parcial arbitrária:

- *Countable Chain Condition*: Todo $X \subset \mathbb{P}$ de cardinalidade ω_1 possui dois elementos compatíveis. Denotaremo-lo como ccc;

- *Produtivamente ccc*: Para toda ordem parcial $\mathbb{Q}$ ccc, a ordem parcial $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ (valendo $(p_1, q_1) \leq_{\mathbb{P}\times\mathbb{Q}} (p_2, q_2)$ se, e somente se, valer $p_1 \leq_{\mathbb{P}} p_2$ e $q_1 \leq_{\mathbb{Q}} q_2$) é ccc. Denotaremo-lo como prod. ccc;

- *Knaster*: Todo $X \subset \mathbb{P}$ de cardinalidade ω_1 possui subconjunto Y de cardinalidade ω_1 cujos elementos são compatíveis 2 a 2. Denotaremo-lo como knaster.

Os enunciados ccc e knaster possuem enunciados equivalentes utilizando sequências no lugar de conjuntos, são eles:

- ccc: Toda sequência de elementos de $\mathbb{P}$ $(p_\alpha : \alpha < \omega_1)$ possui dois termos compatíveis;

- knaster: Toda sequência de elementos de $\mathbb{P}$ $(p_\alpha : \alpha < \omega_1)$ possui subsequência de comprimento ω_1 com termos compatíveis 2 a 2.

São bem conhecidos na literatura também os seguintes fatos:

Em ZFC:

ccc $\longleftarrow$ prod. ccc $\longleftarrow$ knaster

Assumindo MA(ω_1):

ccc $\longleftrightarrow$ prod. ccc $\longleftrightarrow$ knaster

Wage cita esses fatos em seu artigo (Wage, 1979).

Demais enunciados e suas notações serão descritos quando forem usados pela primeira vez.

Teremos em vários momentos o hábito de denotar um versão modificada de um enunciado específico acrescentando uma simbologia adequada no canto inferior e/ou superior direito da notação da respectiva propriedade, descritas assim que forem usadas pela primeira vez.

1.5 Envolvendo técnica de forcing

Dentro da *técnica de forcing*, uma ordem parcial também recebe o nome de *forcing*. Em ZFC, podemos desenvolver a técnica de forcing usando tanto *ordens parciais* como *álgebras booleanas completas*; nos focaremos na primeira abordagem.

Por uma *classe*, denotamos os conjuntos que compartilham uma propriedade em comum definida por intermédio de uma *fórmula* da linguagem dos conjuntos, que passa a ser interpretada como a coleção de todos esses conjuntos. Em ZFC, classes não são definidas formalmente, sendo consideradas apenas como uma extrapolação da metateoria, onde o enunciado $x \in \mathbf{C}$ passa a representar a respectiva fórmula. Todo conjunto y pode ser interpretado por uma classe mediante a fórmula $x \in y$, porém nem toda classe constitui um conjunto em ZFC.

Como exemplos de classes, temos a classe de todos os conjuntos, denotada por $\mathbf{V}$ e definida pela fórmula $x = x$. Na técnica de forcing, dado um forcing $\mathbb{P}$, denotamos por $\mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ a classe de todos os nomes construídos a partir do forcing. Nenhuma dessas duas classes formam conjuntos em ZFC. Ainda na técnica de forcing, um modelo é obtido a partir da aplicação de um filtro genérico em $\mathbf{V}^{\mathbb{P}}$, sendo denominado *extensão genérica de* $\mathbf{V}^{\mathbb{P}}$, e os nomes de $\mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ servirão como "representantes em $\mathbf{V}$" dos elementos pertencentes a esse modelo. Usaremos a notação $\dot{x}$ para representar um nome para um conjunto x da extensão genérica. A forma como esses modelos são tratados formalmente é bastante diversificada na literatura e não entraremos em detalhes aqui. O leitor pode ler o livro (Kunen, 1980) para uma abordagem através de ordens parciais e fazendo extenso uso de modelos transitivos enumeráveis para formalizar o conceito de extensão genérica; ou pode ler o texto (Pereira, 2016) para uma abordagem utilizando álgebras booleanas completas e sem uso de modelos, tratando extensões genéricas apenas de um ponto de vista puramente intuitivo, incluindo um apêndice a respeito do uso de modelos transitivos enumeráveis.

Todos os elementos de $\mathbf{V}$ possuem *nomes canônicos* que os representam em todas as extensões genéricas de $\mathbf{V}^{\mathbb{P}}$. Quando o conjunto de $\mathbf{V}$ for composto de um único símbolo x, denotaremo-lo $\check{x}$; quando o conjunto for representado com múltiplos símbolos, como em *conj*, denotaremo-lo $\check{(conj)}$, podendo omitir os parênteses quando o contexto não gerar dúvidas sobre o mesmo. Isso quer dizer que os elementos de $\mathbf{V}$ pertencem a qualquer extensão genérica de $\mathbf{V}^{\mathbb{P}}$.

Dada uma afirmação $\mathbb{A}(x_1,\ldots,x_n)$ que possui as variáveis livres $x_1,\ldots,x_n$, um $p \in \mathbb{P}$ e $\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n$ nomes de $\mathbf{V}^{\mathbb{P}}$, diremos que *p força* $\mathbb{A}(\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n)$, que denotaremos $p \Vdash_{\mathbb{P}} \mathbb{A}(\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n)$, quando, dado qualquer filtro genérico de $\mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ que contém p, a respectiva extensão genérica satisfaz a afirmação $\mathbb{A}$ para os conjuntos $x_1,\ldots,x_n$. Poderemos omitir a menção a $\mathbb{P}$ em $\Vdash$ quando o contexto a deixar clara.

Dada uma classe de forcings denominada *classe*, diremos que a afirmação acima é ***classe* absoluta** quando, para qualquer forcing $\mathbb{P}$ pertencente à *classe* e quaisquer conjuntos $x_1,\ldots,x_n \in \mathbf{V}$, se a afirmação $\mathbb{A}(x_1,\ldots,x_n)$ for verdadeira em $\mathbf{V}$, ela também será verdadeira em qualquer extensão genérica de $\mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ e vice-versa. Ou seja, em termos formais, vale

$$\begin{gathered}\mathbb{A}(x_1,\dots,x_n) \to \mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash_{\mathbb{P}} \mathbb{A}(\check{x}_1,\dots,\check{x}_n) \text{ e} \\ \sim\mathbb{A}(x_1,\dots,x_n) \to \mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash_{\mathbb{P}} \sim\mathbb{A}(\check{x}_1,\dots,\check{x}_n) \\ \text{para quaisquer } \mathbb{P} \text{ pertencente a } \textit{classe} \text{ e } x_1,\dots,x_n \in \mathbf{V}.\end{gathered}$$

Nesse contexto, *classe* será algum dos seguintes:

- *forcing*: Todas as ordens parciais;
- *enum.fe*: Ordens parciais *enumeravelmente fechadas*, isto é, ordens parciais $\mathbb{Q}$ tais que toda cadeia (=subconjunto totalmente ordenado) enumerável de $\mathbb{Q}$ admite limite inferior (elemento de $\mathbb{Q}$ menor ou igual a todos os elementos da cadeia). Como consequência, para $\mathbb{Q}$ enumeravelmente fechada, toda sequência $(r_n : n < \omega)$ de $\mathbb{Q}$ $\leq$-decrescente possui um r_ω em $\mathbb{Q}$ satisfazendo $r_\omega \leq r_n$ para todo n;
- *ccc*: Ordens parciais ccc.

Diremos também que uma classe $\mathbf{C}$ é *classe indestrutível* quando, para todo forcing $\mathbb{P}$ pertencente à classe de forcings *classe*, $\mathbf{C}$ possuir, em qualquer extensão genérica de $\mathbf{V}^{\mathbb{P}}$, exatamente os mesmos conjuntos que possuía em $\mathbf{V}$. Isto é, nenhum conjunto de $\mathbf{C}$ deixa de pertencer à mesma na extensão genérica, e nenhum conjunto novo criado pela extensão genérica irá pertencer à $\mathbf{C}$. Essa ideia é formalizada na técnica de forcing da seguinte forma:

- Usando ordens parciais, corresponde ao fato que, para todo forcing $\mathbb{P}$ pertencente a *classe*, dado um nome $\dot{x}$, $p \Vdash_{\mathbb{P}} \dot{x} \in \mathbf{C}$ equivale a $\{q \in \mathbb{P} : \exists z \in \mathbf{C}\ q \Vdash \dot{x} = \check{z}\}$ ser denso abaixo de p;
- Usando álgebras booleanas completas, se $\mathbb{B}$ for o completamento de uma ordem parcial $\mathbb{P}$ pertencente a *classe*, ela corresponde ao fato que, para todo nome $\dot{x}$, vale $[\![\dot{x} \in \mathbf{C}]\!]_{\mathbb{B}} = \sum_{z \in \mathbf{C}} [\![\dot{x} = \check{z}]\!]_{\mathbb{B}}$.

Essa definição se trata de uma pequena generalização do conceito de *class-preserving*, oriundo da Definição 2.2.4 de (Pereira, 2016).

Como exemplos, temos os seguintes:

- Qualquer conjunto de $\mathbf{V}$, quando interpretado como uma classe contida em $\mathbf{V}$, é forcing indestrutível;
- O cardinal ω_1, interpretado como a classe de todos os ordinais enumeráveis, é enum.fe indestrutível;
- A classe dos ordinais **Ord** é forcing indestrutível e, para cada conjunto X, a definição $[X]^{<\omega}$, que corresponde à classe dos subconjuntos finitos de X, também é;

- Para todo conjunto X, $[X]^\omega$, a classe dos subconjuntos enumeravelmente infinitos de X, é enum.fe indestrutível.

Quando estivermos falando de um enunciado específico, particularmente os do tipo "$\mathbb{P}$ *satisfaz* propriedade", caso o mesmo for verdadeiro em qualquer extensão genérica de $\mathbf{V}^{\mathbb{Q}}$, com $\mathbb{Q}$ forcing pertencente à classe de forcings denotada *cl*, diremos que o respectivo enunciado é "*cl indestrutível*"; ou "$\mathbb{P}$ *é propriedade cl indestrutível*" no caso particular, adotando a notação "$\mathbb{P}$ *satisfaz* ^{cl}*propriedade*" para o mesmo. *cl* nesses contextos será um dos seguintes:

- all: Todos os forcings;
- en.f: Forcings enumeravelmente fechados;
- ccc: Forcings ccc.

O nome foi inspirado no conceito de *Lindelöf indestrutibilidade* para espaços topológicos do artigo (Scheepers; Tall, 2010), já utilizado em (Tall, 1995); que corresponderia à ${}^{\text{en.f}}$Lindelöf na notação desse texto.

Em particular, como $\mathbb{P} = \{\mathbb{1}\}$ pertence a cada uma das *cl* acima, sempre valerá

$$^{cl}propriedade \to propriedade,$$

algo importante de ser lembrado.

Um resultado menos redundante e essencial no texto é o seguinte:

Teorema 1.1. Vale ${}^{\text{ccc}}$ccc $\to$ prod. ccc. Isto é, se uma ordem parcial $\mathbb{P}$ continuar sendo ccc em qualquer extensão genérica de $\mathbf{V}^{\mathbb{Q}}$, com $\mathbb{Q}$ ccc, então $\mathbb{P}$ será prod. ccc.

Isso é consequência direta do Lema 5.7 do cap. VIII §5 de (Kunen, 1980). Os dois parágrafos do livro imediatamente posteriores à demonstração do lema esclarecem essa consequência.

1.6 O lema do delta-sistema

O seguinte teorema de ZFC, conhecido como *Lema do Δ-sistema (Δ-system lemma)* será de extrema importância em muitas demonstrações envolvendo ordens parciais:

Teorema 1.2. Dada coleção não enumerável X de conjuntos finitos, existe subcoleção não enumerável Y de X e um conjunto finito r tal que, para quaisquer $x \neq y \in Y$, vale $x \cap y = r$. A subcoleção Y é chamada Δ-sistema e o conjunto r é chamado *raiz do Δ-sistema Y*.

Para qualquer sequência de conjuntos finitos $(x_\alpha : \alpha < \omega_1)$ que tomarmos, caso sua imagem possuir cardinalidade ω_1, podemos aplicar na mesma o lema do Δ-sistema e obter uma subsequência $(x_\alpha : \alpha \in S)$ cuja imagem é um Δ-sistema. Caso contrário, existirá ao menos um conjunto finito que se repete ω_1 vezes ao longo da sequência, e a imagem da subsequência $(x_\alpha : \alpha \in S)$ com todas as ocorrências desse único conjunto também satisfaz o requisito de um Δ-sistema, com o próprio conjunto sendo a raiz. Assim temos o seguinte corolário:

Corolário 1.3. Dada sequência $(x_\alpha : \alpha < \omega_1)$ de conjuntos finitos, existe subsequência de comprimento ω_1 $(x_\alpha : \alpha \in S)$ e um conjunto finito r tal que, para quaisquer $\xi \neq \eta \in S$, vale $x_\xi \cap x_\eta = r$.

Nesse texto, para fins de simplificação, tanto o lema do Δ-sistema quanto o corolário acima serão referido como sendo o lema do Δ-sistema, e assim o termo Δ-sistema e raiz serão aplicados indistintamente tanto à coleções quanto à sequências. Mesmo assim, quando estivermos usando o corolário, às vezes ainda poderá ser importante separar o caso onde os termos da subsequência são distintos 2 a 2 dos demais. Isso será enunciado explicitamente quando necessário.

1.7 A propriedade fundamental

Em diversas partes do texto, será importantíssimo o uso da propriedade que denotaremos como $\omega_1 \to (\omega_1, \omega+1)^2$; essa terminologia segue a notação da teoria geral descrita em (Erdös; Rado, 1956) §2, pág 428-431. Nesse texto porém, descreveremos apenas o necessário para entendermos essa propriedade em particular.

Uma 2-**coloração sobre** $[\omega_1]^2$ se trata de um conjunto $X \subset [\omega_1]^2$, onde dizemos que $x \in [\omega_1]^2$ **possui cor** 0 caso $x \in X$, caso contrário, dizemos que x **possui cor** 1. Diremos que um conjunto $Y \subset \omega_1$ será **homogêneo de cor** 0 caso $[Y]^2 \subset X$, e diremos que será **homogêneo de cor** 1 caso $[Y]^2 \cap X = \emptyset$. Como nesse texto não usaremos outro tipo de coloração além da 2-coloração, denotaremo-la simplesmente como *coloração* a partir de agora.

Com essas definições, dados ordinais $\alpha, \beta \leq \omega_1$, o enunciado geral $\omega_1 \to (\alpha, \beta)^2$ corresponde ao seguinte:

> Dada uma coloração sobre $[\omega_1]^2$, caso ela não possua um conjunto $Y \subset \omega_1$ de order type α homogêneo de cor 0, ela possuirá um $Y \subset \omega_1$ de order type β homogêneo de cor 1.

Quando valer $\alpha = \beta$, o enunciado acima é denotado simplesmente como $\omega_1 \to (\alpha)^2$. Nessa definição, $\omega_1 \to (\omega_1, \omega+1)^2$ corresponde ao caso particular onde $\alpha = \omega_1$ e $\beta = \omega+1$.

A validade de $\omega_1 \to (\omega_1, \omega+1)^2$ é um caso particular do Corolário 1 da página 459 de (Erdös; Rado, 1956), fazendo $m = n = 0$ no mesmo. Na verdade, no artigo a definição é mais ampla, permitindo que um x possua mais de uma cor simultaneamente, porém todos os enunciados nesse caso geral são equivalente ao nosso caso restrito onde cada x assume somente uma cor (é necessário o AC para a demonstração geral, mas não para o nosso caso particular $\omega_1 \to (\alpha,\beta)^2$).

Para ordens parciais em geral, exemplos de colorações importantes são as seguintes: Fixada uma ordem parcial $\mathbb{P}$ e uma sequência $s = (p_\alpha : \alpha < \omega_1)$ da mesma,

- **coloração dos compatíveis** $s^{\not\perp}$**:** Coleção dos pares não ordenados $\{\xi,\eta\}$ tais que $p_\xi \not\perp p_\eta$;
- **coloração dos incompatíveis** $s^{\perp}$**:** Coleção dos pares não ordenados $\{\xi,\eta\}$ tais que $p_\xi \perp p_\eta$.

Um $S \subset \omega_1$ homogêneo de cor 0 em $s^{\not\perp}$ corresponde a uma subsequência com termos compatíveis 2 a 2, e a uma subsequência de termos incompatíveis 2 a 2 (que chamaremos de *anticadeia*) em $s^{\perp}$. Um homogêneo de cor 0 em $s^{\perp}$ será homogêneo de cor 1 em $s^{\not\perp}$ e vice versa.

Se $\mathbb{P}$ é ccc, então uma sequência nunca terá uma anticadeia de comprimento ω_1. Portanto, aplicando $\omega_1 \to (\omega_1,\omega+1)^2$ em $s^{\perp}$, temos o seguinte resultado:

Teorema 1.4. Toda sequência $(s_\alpha : \alpha < \omega_1)$ de uma ordem parcial $\mathbb{P}$ ccc possui uma subsequência de comprimento $\omega+1$ com termos compatíveis 2 a 2.

De fato, vale o seguinte teorema mais geral (enunciado sem demonstração em (Wage, 1979) como o Lema 1):

Teorema 1.5. Para qualquer $n < \omega$, toda sequência $(p_\alpha : \alpha < \omega_1)$ de uma ordem parcial $\mathbb{P}$ ccc possui uma subsequência de comprimento $\omega+n$ com termos compatíveis 2 a 2.

Demonstração. É suficiente provar para $n = 2^k$, para todo $k < \omega$, o que faremos por indução sobre k. O caso $k = 0$ se trata do teorema acima. Uma vez provado para k, construa por recursão transfinita a sequência $((r_\alpha,\{\xi_\alpha,\eta_\alpha\}) : \alpha < \omega_1)$ onde, para quaisquer $\beta < \gamma < \omega_1$, temos $r_\beta \in \mathbb{P}$ e $\{\xi_\beta,\eta_\beta\} \in [\omega_1]^2$, com $r_\beta \le p_{\xi_\beta}, p_{\eta_\beta}$ e $\xi_\beta,\eta_\beta < \xi_\gamma,\eta_\gamma$; tal construção é possível pelo fato de $\mathbb{P}$ ser ccc. A hipótese de indução implica que a sequência $(r_\alpha : \alpha < \omega_1)$ possui uma subsequência de comprimento $\omega+2^k$ com termos compatíveis 2 a 2. Se $S \subset \omega_1$ for o domínio dessa subsequência, então $\bigcup_{\gamma\in S}\{\xi_\gamma,\eta_\gamma\}$ será o domínio de uma subsequência de comprimento $\omega+2^{k+1}$ de $(p_\alpha : \alpha < \omega_1)$ com termos compatíveis 2 a 2. $\square$

Se uma sequência $(p_\alpha : \alpha < \omega_1)$ de $\mathbb{P}$ viola a propriedade correspondente à knaster, qualquer subsequência de comprimento ω_1 também violará. Então, aplicando $\omega_1 \to (\omega_1,\omega+1)^2$, temos o seguinte resultado:

Teorema 1.6. Dada subsequência $(p_\alpha : \alpha < \omega_1)$ de uma ordem parcial $\mathbb{P}$ que não satisfaz a propriedade correspondente à knaster, qualquer subsequência de comprimento ω_1 da mesma possui subsequência de comprimento $\omega + 1$ com termos incompatíveis 2 a 2.

CAPÍTULO

2

CARACTERIZAÇÕES DE MEZABARBA

2.1 Resultados de Mezabarba e enunciados relacionados

Mezabarba, na Proposição 2.18 de (Mezabarba, 2018), provou uma nova forma de caracterizar quando uma ordem parcial $\mathbb{P}$ é prod. ccc, enquanto que na Proposição 2.21 exibiu uma nova forma de caracterizar knaster. Para enunciarmos suas caracterizações, será crucial a definição a seguir:

Definição 2.1. Dada uma ordem parcial $\mathbb{P}$, para toda coleção $\mathscr{A}$ de anticadeias de $\mathbb{P}$ satisfazendo $|\bigcup\mathscr{A}| = \omega_1$, definimos a ordem parcial $\mathscr{F}_{\mathbb{P}}(\mathscr{A})$ como o conjunto das anticadeias finitas contidas em algum $A \in \mathscr{A}$, isto é

$$\mathscr{F}_{\mathbb{P}}(\mathscr{A}) = \bigcup_{A\in\mathscr{A}} [A]^{<\omega},$$

ordenado pela inclusão reversa.

Por outro lado, para todo $\mathrm{X} \subset \mathbb{P}$ com $|\mathrm{X}| = \omega_1$, definimos a ordem parcial $\mathrm{F}_{\mathbb{P}}(\mathrm{X})$ como o conjunto de todas as anticadeias finitas de X, ordenada pela inclusão reversa. Assim, $\mathrm{F}_{\mathbb{P}}(\mathrm{X})$ corresponde à ordem parcial $\mathscr{F}_{\mathbb{P}}(\mathscr{X})$, onde $\mathscr{X}$ é o conjunto de todas as anticadeias maximais de X.

A caracterização fornecida pela Proposição 2.18 será descrita na próxima definição.

Definição 2.2. Dizemos que uma ordem parcial $\mathbb{P}$ satisfaz "mezabarba" se, e somente se, toda ordem parcial $\mathscr{F}_{\mathbb{P}}(\mathscr{A})$ criada a partir de $\mathbb{P}$ de acordo com a definição anterior não for ccc.

A Proposição 2.18 de (Mezabarba, 2018) prova que prod. ccc equivale a mezabarba; citaremos e demonstraremo-la aqui, uma vez que sua estratégia de demonstração será muito utilizada nesse capítulo.

Teorema 2.3 (MEZABARBA)**.** Uma ordem parcial $\mathbb{P}$ será prod. ccc se, e somente se, satisfizer mezabarba.

Demonstração. Caso existir alguma $\mathscr{F}_{\mathbb{P}}(\mathscr{A})$ ccc, faça $X = \bigcup \mathscr{A}$, de onde segue que $|X| = \omega_1$. Neste caso, a ordem parcial $\mathbb{P} \times \mathscr{F}_{\mathbb{P}}(\mathscr{A})$ não será ccc, uma vez que a coleção $\{(p,\{p\}) : p \in X\}$ é uma anticadeia não enumerável da mesma. De fato, dados $p \neq q \in X$, se $(p,\{p\})$ e $(q,\{q\})$ forem compatíveis, teríamos a validade tanto de $p \not\perp q$ quanto de $p \perp q$, um absurdo.

Por outro lado, caso existir $\mathbb{Q}$ ccc tal que $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ não é ccc, tome uma anticadeia W de cardinalidade ω_1 de $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$. Para cada $r \in \mathbb{Q}$, defina A_r da seguinte forma:

$$A_r = \{p \in \mathbb{P} : \exists q \in \mathbb{Q}\ (r \leq q \wedge (p,q) \in W)\}$$

Dados $p, p' \in A_r$, existem $q, q' \in \mathbb{Q}$ tais que $r \leq q, q'$ e $(p,q),(p',q') \in W$, e o fato de W ser anticadeia implica que $p \perp p'$, assim A_r é anticadeia de $\mathbb{P}$ para cada $r \in \mathbb{Q}$. Para todo $(p,q) \in W$, temos $p \in A_q$ e, consequentemente, $p \in \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} A_r$. Então, caso tivermos $|\bigcup_{r\in\mathbb{Q}} A_r| < \omega_1$, existirá p tal que $\{q \in \mathbb{Q} : (p,q) \in W\}$ é não enumerável e uma anticadeia de $\mathbb{Q}$, um absurdo. Logo a coleção $\mathscr{A} = \{A_r : r \in \mathbb{Q}\}$ de anticadeias de $\mathbb{P}$ é tal que $|\bigcup \mathscr{A}| = \omega_1$, satisfazendo assim o requisito da Definição 2.1. Digo que a ordem parcial $\mathscr{F}_{\mathbb{P}}(\mathscr{A})$ é ccc.

De fato, tome uma coleção $\{F_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ de $\mathscr{F}_{\mathbb{P}}(\mathscr{A})$ arbitrária. Por definição, todo α possui $r_\alpha \in \mathbb{Q}$ tal que $F_\alpha \subset A_{r_\alpha}$. Uma vez que $\mathbb{Q}$ é ccc, a sequência $(r_\alpha : \alpha < \omega_1)$ possui $\xi < \eta < \omega_1$ e $s \in \mathbb{Q}$ tais que $s \leq r_\xi, r_\eta$, de onde segue que $F_\xi \cup F_\eta \subset A_s \in \mathscr{A}$. Então F_ξ e F_η são compatíveis, provando o desejado.

O primeiro parágrafo implica que, se $\mathbb{P}$ for prod. ccc, então toda $\mathscr{F}_{\mathbb{P}}(\mathscr{A})$ não será ccc. Já os dois parágrafos seguintes mostram que, se toda $\mathscr{F}_{\mathbb{P}}(\mathscr{A})$ não for ccc, $\mathbb{P}$ então será prod. ccc. Note que esse teorema não exigiu o fato de $\mathbb{P}$ ser ccc. □

Uma consequência imediata que podemos tirar desse teorema de Mezabarba é o seguinte:

Teorema 2.4. Uma ordem parcial $\mathbb{P}$ será prod. ccc se, e somente se, todo conjunto $\mathrm{X} \subset \mathrm{F}_{\mathbb{P}}(\mathbb{P})$ tal que $|\mathrm{X}| = \omega_1$, ordenado pela inclusão reversa, não for ccc.

Demonstração. Dada uma $\mathbb{P}$ prod. ccc e tomando um $\mathrm{X} \subset \mathrm{F}_{\mathbb{P}}(\mathbb{P})$ com $|\mathrm{X}| = \omega_1$, o fato de todos os elementos de X serem finitos implica que $|\bigcup \mathrm{X}| = \omega_1$. Assim, o teorema acima implica que $\mathscr{F}_{\mathbb{P}}(\mathrm{X})$ possui anticadeia não enumerável $\{F_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Uma vez que todo F_α está contido em algum $F'_\alpha \in \mathrm{X}$, e F_ξ ser incompatível com F_η implica que F'_ξ também será incompatível com F'_η, temos que $\{F'_\alpha : \alpha < \omega\}$ será anticadeia não enumerável de X.

Agora, suponha que todo $\mathrm{X} \subset \mathrm{F}_{\mathbb{P}}(\mathbb{P})$ de cardinalidade ω_1, ordenado pela inclusão reversa, não é ccc. Uma vez que todo $\mathscr{F}_{\mathbb{P}}(\mathscr{A})$ também é subconjunto de $\mathrm{F}_{\mathbb{P}}(\mathbb{P})$ ordenado por $\supset$, a existência de uma anticadeia não enumerável para $\mathscr{F}_{\mathbb{P}}(\mathscr{A})$ é imediata. □

Sendo $\mathrm{F}_{\mathbb{P}}(\mathrm{X})$ uma subclasse de $\mathscr{F}_{\mathbb{P}}(\mathscr{A})$, seria interessante arranjarmos um enunciado que possa ser caracterizado pelo fato de toda ordem parcial $\mathrm{F}_{\mathbb{P}}(\mathrm{X})$ não ser ccc, e somente elas, analogamente ao que Mezabarba fez para $\mathscr{F}_{\mathbb{P}}(\mathscr{A})$. Apresentaremos um nesse texto, mas antes de descrevê-lo precisaremos fazer algumas definições.

Definição 2.5. Dizemos que uma ordem parcial $\mathbb{P}$ satisfaz mezabarba* quando toda ordem parcial $\mathrm{F}_{\mathbb{P}}(\mathrm{X})$, criada a partir de $\mathbb{P}$ de acordo com a Definição 2.1, não satisfizer ccc.

Satisfazer mezabarba* é suficiente para satisfazer ccc:

Corolário 2.6. Vale mezabarba* $\to$ ccc.

Demonstração. Dado $X \subset \mathbb{P}$ de cardinalidade ω_1, fixe $\{F_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ anticadeia de $\mathrm{F}_{\mathbb{P}}(\mathrm{X})$ e tome $\xi < \eta < \omega_1$ arbitrários. $F_\xi \perp F_\eta$ implica que existem $p \in F_\xi$ e $q \in F_\eta$ com $p \not\perp q$. Então X não será anticadeia de $\mathbb{P}$. $\square$

Definição 2.7. Para toda ordem parcial $\mathbb{P}$, definimos a ordem parcial $\mathbb{P}^*$ como sendo o conjunto de todos os subconjuntos finitos de $\mathbb{P}$ cujos elementos são compatíveis 2 a 2, ordenada pela inclusão reversa.

Dizemos que uma ordem parcial satisfaz ccc$^{\mathrm{s}}$ se, e somente se, $\mathbb{P}^*$ for ccc.

Também este enunciado é suficiente para uma ordem parcial ser ccc:

Corolário 2.8. Vale ccc$^{\mathrm{s}}$ $\to$ ccc.

Demonstração. Dada uma ordem parcial $\mathbb{P}$ ccc$^{\mathrm{s}}$ e uma coleção $\{p_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ da mesma, o fato de $\mathbb{P}^*$ ser ccc implica que a coleção $\{\{p_\alpha\} : \alpha < \omega_1\}$ possui algum par de elementos compatíveis em $\mathbb{P}^*$, logo o mesmo ocorrerá com a coleção original. $\square$

A caracterização dada por mezabarba* será enunciada e demonstrada no próximo teorema.

Teorema 2.9. Uma ordem parcial $\mathbb{P}$ satisfaz mezabarba* se, e somente se, para toda ordem parcial ccc$^{\mathrm{s}}$ $\mathbb{Q}$, $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ não possui subconjunto W de cardinalidade ω_1 tal que, dados $(p,q),(p',q') \in W$ arbitrários, $p \perp p'$ implica $q \not\perp q'$ e $p \not\perp p'$ implica $q \perp q'$.

Demonstração. Primeiramente, é importante notar que toda $\mathrm{F}_{\mathbb{P}}(\mathrm{X})$ ccc será ccc$^{\mathrm{s}}$; isso se deve ao fato que, para todo $x \in (\mathrm{F}_{\mathbb{P}}(\mathrm{X}))^*$, temos $\bigcup x \in \mathrm{F}_{\mathbb{P}}(\mathrm{X})$, e a correspondência

$$\begin{array}{ccc} (\mathrm{F}_{\mathbb{P}}(\mathrm{X}))^* & \to & \mathrm{F}_{\mathbb{P}}(\mathrm{X}) \\ x & \mapsto & \bigcup x \end{array}$$

preservar a compatibilidade e incompatibilidade das ordens.

Suponha que alguma $F_{\mathbb{P}}(X)$ seja ccc, portanto ccc^s, então a coleção de cardinalidade ω_1 $W = \{(p,\{p\}) : p \in X\}$ satisfaz os requisitos necessários.

Agora, suponha que exista $\mathbb{Q}$ ccc^s tal que $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ possua W satisfazendo a hipótese. Fazendo $X = \{p : \exists q \in \mathbb{Q}\ (p,q) \in W\}$, temos que $|X| = \omega_1$ pois, caso contrário, $\mathbb{Q}$ teria uma anticadeia não enumerável, absurdo. Fazendo uma restrição em W se necessário, podemos supor sem perda de generalidade que cada $p \in X$ possui um único $q \in \mathbb{Q}$ tal que $(p,q) \in W$. Com essas hipóteses, digo que $F_{\mathbb{P}}(X)$ é ccc.

De fato, fixe uma coleção $\{F_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ de $F_{\mathbb{P}}(X)$. Para todo $\alpha < \omega_1$, o conjunto $G_\alpha = \{q \in \mathbb{Q} : \exists p \in F_\alpha\ (p,q) \in W\}$ pertence a $\mathbb{Q}^*$ devido as hipóteses feitas sobre W, e então existem $\xi < \eta < \omega_1$ tais que $G_\xi \cup G_\eta \in \mathbb{Q}^*$, o que implica que $F_\xi \cup F_\eta \in F_{\mathbb{P}}(X)$. □

Todo W que satisfaz o enunciado acima é uma anticadeia não enumerável de $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$, logo tal W não existirá se $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ não possui nenhuma anticadeia. Portanto, se fizermos a seguinte definição:

Definição 2.10. Dizemos que uma ordem parcial $\mathbb{P}$ satisfaz prod. ccc* quando, para toda ordem parcial $\mathbb{Q}$ ccc^s, $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ for ccc.

Teremos o seguinte corolário:

Corolário 2.11. Vale prod. ccc$^* \to$ mezabarba*.

Combinando estes resultados aos descritos no diagrama da página 26 temos:

Em ZFC:

$$\begin{tikzcd}
\text{ccc}^s \arrow[d] & \text{prod. ccc}^* \arrow[d] & \text{prod. ccc} \arrow[l] \arrow[d, leftrightarrow] & \text{knaster} \arrow[l] \\
\text{ccc} & \text{mezabarba}^* \arrow[l] & \text{mezabarba} &
\end{tikzcd}$$

Assumindo MA(ω_1):

$$\begin{tikzcd}
\text{ccc}^s \arrow[d] & \text{prod. ccc}^* \arrow[d, leftrightarrow] \arrow[r, leftrightarrow] & \text{prod. ccc} \arrow[d, leftrightarrow] \arrow[r, leftrightarrow] & \text{knaster} \\
\text{ccc} \arrow[r, leftrightarrow] & \text{mezabarba}^* & \text{mezabarba} &
\end{tikzcd}$$

Uma pergunta é se, assumindo MA(ω_1), vale ccc $\leftrightarrow$ ccc^s. Isso é verdade mas, antes de provar, precisamos da seguinte definição.

Definição 2.12. Dizemos que uma ordem parcial é *potencialmente ccc*, denotando pot. ccc, quando, para todo $n < \omega$, a ordem parcial $\mathbb{P}^n$ também for ccc. A ordem parcial $\mathbb{P}^n$ aqui descrita é tal que $(p_1,\dots,p_n) \leq_{\mathbb{P}^n} (q_1,\dots,q_n)$ vale se, e somente se, valer $p_1 \leq_{\mathbb{P}} q_1,\dots,p_n \leq_{\mathbb{P}} q_n$.

O que desejamos provar é consequência imediata do próximo teorema, que é uma consequência do Lema 4.11 de (Galvin, 1980) ao fazer $\lambda = \omega_1$ no mesmo:

Teorema 2.13. Para quaisquer ordens parciais $\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_k$, se $\mathbb{P}_1^n \times \ldots \times \mathbb{P}_k^n$ for ccc para todo $n < \omega$, então $\mathbb{P}_1^* \times \ldots \times \mathbb{P}_k^*$ será ccc.

Demonstração. Fixe uma coleção de tamanho ω_1 $\{(F_1^\alpha, \ldots, F_k^\alpha) : \alpha < \omega_1\}$ de elementos de $\mathbb{P}_1^* \times \ldots \times \mathbb{P}_k^*$. Fazendo uma restrição coordenada a coordenada, podemos supor que a cardinalidade de cada F_i^ξ é m_i quando $1 \leq i \leq k$. Com essas hipóteses, a cardinalidade do conjunto $\{\{j,l\} : 1 \leq j \leq l \leq m_i\}$ é $n_i = \frac{(m_i+1)m_i}{2}$, fixe $f_i : \{\{j,l\} : 1 \leq j \leq l \leq m_i\} \to \{1, \ldots, n_i\}$ uma enumeração para o mesmo. Denotando $F_i^\alpha = \{x_{i,1}^\alpha, \ldots, x_{i,m_i}^\alpha\}$, o fato de o mesmo ser composto de elementos compatíveis 2 a 2 implica a existência de um elemento de $\mathbb{P}_i$ menor ou igual a ambos $x_{i,j}^\alpha$ e $x_{i,l}^\alpha$, onde $1 \leq j \leq l \leq m_i$, tome $y_{i,f_i(\{j,l\})}^\alpha$ um deles. Construa assim $y_i^\alpha = (y_{i,1}^\alpha, \ldots, y_{i,n_i}^\alpha)$, desse modo cada termo da sequência $\big((y_1^\alpha, \ldots, y_k^\alpha) : \alpha < \omega_1\big)$ pertence a $\mathbb{P}_1^{n_1} \times \ldots \times \mathbb{P}_k^{n_k}$. Tomando n o maior dos $n_1, \ldots, n_k$, a hipótese de que $\mathbb{P}_1^n \times \ldots \times \mathbb{P}_k^n$ é ccc implica que $\mathbb{P}_1^{n_1} \times \ldots \times \mathbb{P}_k^{n_k}$ também o será, havendo portanto $\xi < \eta < \omega_1$ com $(y_1^\xi, \ldots, y_k^\xi)$ e $(y_1^\eta, \ldots, y_k^\eta)$ compatíveis. Digo que $(F_1^\xi, \ldots, F_k^\xi)$ e $(F_1^\eta, \ldots, F_k^\eta)$ também serão. De fato, para cada i com $1 \leq i \leq k$ e j,l com $1 \leq j \leq l \leq m_i$, se $r \in \mathbb{P}_i$ é tal que $r \leq y_{i,f_i(\{j,l\})}^\xi, y_{i,f_i(\{j,l\})}^\eta$, teremos que $r \leq x_{i,j}^\xi, x_{i,l}^\xi, x_{i,j}^\eta, x_{i,l}^\eta$, de onde concluímos que $F_i^\xi \cup F_i^\eta \in \mathbb{P}_i^*$, provando o desejado. $\square$

Corolário 2.14. O teorema acima implica que vale prod. ccc $\to$ pot. ccc $\to$ ccc$^{\mathrm{s}}$.

Com isso temos os seguintes fatos:

Em ZFC:

$$
\begin{tikzcd}
\text{pot. ccc} \arrow[d] & & \text{prod. ccc} \arrow[ll] \arrow[dl] & \text{knaster} \arrow[l] \\
\text{ccc}^{\mathrm{s}} \arrow[d] & \text{prod. ccc}^* \arrow[d] & & \\
\text{ccc} & \text{mezabarba}^* \arrow[l] & &
\end{tikzcd}
$$

Assumindo MA(ω_1):

$$
\begin{tikzcd}
\text{pot. ccc} \arrow[d, leftrightarrow] \arrow[rr, leftrightarrow] & & \text{prod. ccc} \arrow[dl, leftrightarrow] \arrow[r, leftrightarrow] & \text{knaster} \\
\text{ccc}^{\mathrm{s}} \arrow[d, leftrightarrow] & \text{prod. ccc}^* \arrow[d, leftrightarrow] & & \\
\text{ccc} \arrow[r, leftrightarrow] & \text{mezabarba}^* & &
\end{tikzcd}
$$

O Teorema 2.21 de (Mezabarba, 2018), por sua vez, prova o conhecido resultado knaster $\to$ prod. ccc, porém o demonstra utilizando a caracterização advinda da Proposição

2.18 (o Teorema 2.3 aqui). Sua demonstração sugere novas formas de caracterizar knaster que serão enunciadas e demonstradas no próximo teorema.

Teorema 2.15. Dada uma ordem parcial $\mathbb{P}$, as três afirmações a seguir são equivalentes:

- $\mathbb{P}$ satisfaz knaster;
- Toda ordem parcial do tipo $\mathscr{F}_{\mathbb{P}}(\mathscr{A})$ (ver Definição 2.1) para $\mathbb{P}$ possui anticadeia de tamanho ω_1 composta de elementos unitários;
- Toda ordem parcial da tipo $\mathrm{F}_{\mathbb{P}}(\mathrm{X})$ (ver Definição 2.1) para $\mathbb{P}$ possui anticadeia de cardinalidade ω_1 composta por elementos unitários.

Demonstração. Fixada ordem parcial $\mathscr{F}_{\mathbb{P}}(\mathscr{A})$ em particular, $\mathbb{P}$ satisfazer knaster implica que o conjunto $X = \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A$ possui subconjunto X' de cardinalidade ω_1 com elementos compatíveis 2 a 2. Consequentemente, a coleção $\{\{p\} : p \in X'\}$ é uma anticadeia de cardinalidade ω_1 em $\mathscr{F}_{\mathbb{P}}(\mathscr{A})$. Em particular, isso mostra que toda ordem parcial $\mathrm{F}_{\mathbb{P}}(\mathrm{X})$ possui anticadeia de cardinalidade ω_1 cujos elementos são unitários.

Por outro lado, suponha que toda ordem parcial $\mathrm{F}_{\mathbb{P}}(\mathrm{X})$ possui anticadeia de cardinalidade ω_1 composta de elementos unitários. Fixe $\{p_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ coleção de ω_1 elementos de $\mathbb{P}$ arbitrária. Ao fazermos $\mathrm{X} = \{p_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ e tomarmos $A \subset \mathrm{F}_{\mathbb{P}}(\mathrm{X})$ anticadeia de tamanho ω_1 com elementos unitários, $\bigcup A$ será subconjunto de tamanho ω_1 de X com elementos compatíveis 2 a 2, de onde segue que $\mathbb{P}$ satisfaz knaster. Como consequência imediata, o mesmo resultado pode ser alcançado ao supor que toda ordem parcial $\mathscr{F}_{\mathbb{P}}(\mathscr{A})$ possui anticadeia de ω_1 elementos unitários. $\square$

As caracterizações fornecidas pelo texto de Mezabarba podem ser acrescidas de hipóteses adicionais para criar enunciados derivados, como o seguinte:

Definição 2.16. Dizemos que uma ordem parcial $\mathbb{P}$ satisfaz mezabarba$^{\mathrm{d}}$ se, e somente se, toda ordem parcial $\mathscr{F}_{\mathbb{P}}(\mathscr{A})$ possui anticadeia de tamanho ω_1 com elementos disjuntos 2 a 2.

Corolário 2.17. Vale mezabarba$^{\mathrm{d}}$ $\rightarrow$ prod. ccc $\rightarrow$ mezabarba*.

Na próxima definição, descrevemos mais um nível de generalização possível:

Definição 2.18. Para todo $n \geq 1$ e uma ordem parcial $\mathbb{P}$, definimos mezabarba$_n$, mezabarba$^*_n$ e mezabarba$^{\mathrm{d}}_n$ da seguinte forma:

- $\mathbb{P}$ satisfaz mezabarba$_n$ se, e somente se, toda ordem parcial $\mathscr{F}_{\mathbb{P}}(\mathscr{A})$ possui anticadeia de tamanho ω_1 cujos elementos têm cardinalidade no máximo n;

- $\mathbb{P}$ satisfaz mezabarba$_n^*$ se, e somente se, toda ordem parcial $\mathrm{F}_{\mathbb{P}}(\mathrm{X})$ possui anticadeia de tamanho ω_1 cujos elementos têm cardinalidade no máximo n;
- $\mathbb{P}$ satisfaz mezabarba$_n^{\mathrm{d}}$ se, e somente se, toda ordem parcial $\mathscr{F}_{\mathbb{P}}(\mathscr{A})$ possui anticadeia de tamanho ω_1 cujos elementos têm cardinalidade no máximo n e são disjuntos 2 a 2.

O Teorema 2.15 em particular implica o seguinte corolário:

Corolário 2.19. mezabarba$_1$, mezabarba$_1^*$ e mezabarba$_1^{\mathrm{d}}$ são equivalentes a knaster.

Quanto às demais afirmações, vale o seguinte:

Corolário 2.20. Para todo $n \geq 2$, vale o seguinte fato em ZFC:

$$\begin{tikzcd}
 & \text{mezabarba}^{\mathrm{d}} \arrow[d] & \text{mezabarba}^{\mathrm{d}}_{n+1} \arrow[l] \arrow[d] & \text{mezabarba}^{\mathrm{d}}_{n} \arrow[l] \arrow[d] & \\
\text{ccc} & \text{prod. ccc} \arrow[d] & \text{mezabarba}_{n+1} \arrow[l] \arrow[d] & \text{mezabarba}_{n} \arrow[l] \arrow[d] & \text{knaster} \arrow[ul] \\
 & \text{mezabarba}^{*} \arrow[ul] & \text{mezabarba}^{*}_{n+1} \arrow[l] & \text{mezabarba}^{*}_{n} \arrow[l] &
\end{tikzcd}$$

E todas as implicações se tornam equivalências ao assumir MA(ω_1), pelos resultados descritos no diagrama da página 26.

Não é necessário introduzir uma nova variação de mezabarba* e mezabarba$_n^*$ que inclua a hipótese adicional dos elementos da anticadeia serem disjuntos 2 a 2 devido ao seguinte fato:

Corolário 2.21. Dada uma ordem parcial $\mathbb{P}$, toda ordem parcial do tipo $\mathrm{F}_{\mathbb{P}}(\mathrm{X})$ possui uma anticadeia de tamanho ω_1 se, e somente se, possui uma anticadeia de tamanho ω_1 cujos elementos são disjuntos 2 a 2. Além disso, $\mathrm{F}_{\mathbb{P}}(\mathrm{X})$ possuirá uma anticadeia de tamanho ω_1 cujos elementos possuem cardinalidade no máximo n se, e somente se, possuir uma anticadeia com os mesmos requisitos cujos elementos são disjuntos 2 a 2.

Demonstração. Isso se deve ao fato de toda coleção $\{F_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ possui uma subcoleção de tamanho ω_1 que forma um Δ-sistema e, para quaisquer $G, H \in \mathrm{F}_{\mathbb{P}}(\mathrm{X})$, G e H serão incompatíveis se e somente $G \setminus (G \cap H)$ e $H \setminus (G \cap H)$ o forem. $\square$

A definição seguinte facilitará a notação para o nosso próximo resultado:

Definição 2.22. Para todo conjunto $\mathscr{A} \subset \wp(\mathbb{P})$ e $X \subset \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A$, definimos o conjunto $\mathscr{A}|X$ como $\mathscr{A}|X = \{A \cap X : A \in \mathscr{A}\}$.

Um fato importante de se notar é que, quando $|X| = \omega_1$, todo elemento de $\mathscr{F}_{\mathbb{P}}(\mathscr{A}|X)$ também é elemento de $\mathscr{F}_{\mathbb{P}}(\mathscr{A})$.

Teorema 2.23. Dada ordem parcial $\mathbb{P}$ e fixada uma ordem parcial $\mathscr{F}_{\mathbb{P}}(\mathscr{A})$, para cada $n < \omega$, pelo menos uma afirmação abaixo é verdadeira:

1. Existe $X \subset \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A$ com $|X| = \omega_1$ tal que $\mathscr{A}|X$ possui somente anticadeias de cardinalidade no máximo n;

2. $\mathscr{F}_{\mathbb{P}}(\mathscr{A})$ possui uma coleção de ω_1 elementos de cardinalidade $n+1$, disjuntos 2 a 2.

Demonstração. Suponha que o primeiro item seja falso; temos assim que, para todo $X \subset \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A$ com $|X| = \omega_1$, $\mathscr{F}_{\mathbb{P}}(\mathscr{A}|X)$ possui ao menos um elemento de cardinalidade $n+1$. Com esse fato, construa por recursão a sequência $(r_\alpha : \alpha < \omega_1)$ de elementos de $\mathscr{F}_{\mathbb{P}}(\mathscr{A})$ tais que, para todo $\alpha < \omega_1$, r_α tem cardinalidade $n+1$ e pertence a $\mathscr{F}_{\mathbb{P}}(\mathscr{A}|X)$, com $X = (\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A) \setminus \left(\bigcup_{\xi<\alpha} r_\alpha\right)$. Construindo dessa forma, os termos da sequência são disjuntos 2 a 2, satisfazendo assim o segundo item. □

Isso mostra que, para qualquer $n < \omega$, caso quisermos provar que um $\mathbb{P}$ específico satisfaz mezabarba$_{n+1}$ ou mezabarba$^{\mathrm{d}}_{n+1}$, podemos nos restringir às $\mathscr{F}_{\mathbb{P}}(\mathscr{A})$ que satisfazem o segundo item do teorema acima, pois as demais já satisfarão o requisito para mezabarba$^{\mathrm{d}}_{n}$. O mesmo se aplica com mezabarba$^{*}_{n+1}$, nos restringindo somente às $\mathrm{F}_{\mathbb{P}}(\mathrm{X})$.

Agora, iremos mostrar como as demonstrações de Mezabarba podem ser modificadas para definir novos estilos de caracterizações para prod. ccc e prod. ccc*, totalmente diferentes do que fizemos até o momento. As definições a seguir serão úteis para esse propósito.

Definição 2.24. Para todo conjunto X e uma coloração K de $[X]^2$, definimos a ordem parcial $\mathrm{P}(X,K)$ como a coleção de todos os subconjuntos finitos de X homogêneos de cor 0, isto é:

$$\mathrm{P}(X,K) = \{F \in [X]^{<\omega} : [F]^2 \subset K\},$$

ordenada pela inclusão reversa.

Uma consequência é que, para todo $x \in X$, $\{x\} \in \mathrm{P}(X,K)$. Também temos $\mathrm{P}(X,K) \cap [X]^2 = K$. Dada uma ordem parcial $\mathbb{P}$ e $X \subset \mathbb{P}$, se fizermos $X_{\not\perp} = \{\{p,q\} \in [X]^2 : p \not\perp q\}$ e $X_\perp = \{\{p,q\} \in [X]^2 : p \perp q\}$, então $\mathrm{P}(X,X_{\not\perp})$ e $\mathrm{P}(X,X_\perp)$ são exemplos da definição acima. Em particular, temos que $\mathrm{P}(\mathbb{P},\mathbb{P}_{\not\perp}) = \mathbb{P}^*$ e $\mathrm{P}(\mathbb{P},\mathbb{P}_\perp) = \mathrm{F}_{\mathbb{P}}(\mathbb{P})$.

Definição 2.25. Para todo conjunto X, definiremos $\mathrm{K}(X)$ como o conjunto de todas as ordens parciais ccc do tipo $\mathrm{P}(X,K)$.

$\mathrm{K}(X)$ é um subconjunto da coleção de todas as ordens parciais que são subconjuntos de $[X]^{<\omega}$, ordenada por inclusão reversa. Uma extensão de $\mathrm{K}(X)$ seguindo esse estilo é a seguinte:

Definição 2.26. Para todo conjunto X, definimos como $\mathrm{C}(X)$ a coleção de todas as ordens parciais ccc $\mathrm{P} \subset [X]^{<\omega}$, ordenadas por inclusão reversa, que satisfazem as seguintes propriedades:

- Para todo $x \in X$, $\{x\} \in \mathrm{P}$;
- Para todo $F \in \mathrm{P}$ e todo $G \subset F$, $G \in \mathrm{P}$.

Seguindo o estilo de demonstração da Proposição 2.18 de Mezabarba (Teorema 2.3), podemos provar que o conjunto da definição acima pode ser usado para caracterizar prod. ccc, no sentido descrito no próximo teorema:

Teorema 2.27. Uma ordem parcial $\mathbb{P}$ satisfaz prod. ccc se, e somente se, para todo $\mathrm{P} \in \mathrm{C}(\omega_1)$, $\mathbb{P} \times \mathrm{P}$ é ccc.

Demonstração. Se $\mathbb{P}$ é prod. ccc, então $\mathbb{P} \times \mathrm{P}$ será ccc para todo $\mathrm{P} \in \mathrm{C}(\omega_1)$.

Por outro lado, se existir $\mathbb{Q}$ ccc tal que $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ não é ccc, tome $\{(p_\alpha, q_\alpha) : \alpha < \omega_1\}$ uma anticadeia do mesmo. Se fizermos

$$\mathrm{P} = \{F \in [\omega_1]^{<\omega} : \exists r \in \mathbb{Q} \forall \xi \in F \ r \leq q_\xi\},$$

temos que P é ccc. Pois, seja $\{F_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ uma coleção de elementos de P arbitrária. Se a sequência $(r_\alpha : \alpha < \omega_1)$ for tal que $r_\alpha \leq q_\xi$ para todo $\xi \in F_\alpha$, como existem $\beta < \gamma < \omega_1$ e $s \in \mathbb{Q}$ tais que $s \leq r_\beta, r_\gamma$, temos que $F_\beta \cup F_\gamma \in \mathrm{P}$, isto é, $F_\beta \not\perp F_\gamma$. Deste modo, $\mathrm{P} \in \mathrm{C}(\omega_1)$ e, além disso, se $\{\xi, \eta\} \in \mathrm{P}$, teremos $q_\xi \not\perp q_\eta$, o que implica $p_\xi \perp p_\eta$ e, então, $\{(p_\alpha, \{\alpha\}) : \alpha < \omega_1\}$ é uma anticadeia de tamanho ω_1 em $\mathbb{P} \times \mathrm{P}$. De onde segue que, se $\mathbb{P} \times \mathrm{P}$ for ccc para todo $\mathrm{P} \in \mathrm{C}(\omega_1)$, então $\mathbb{P}$ é necessariamente prod. ccc. $\square$

Uma caracterização análoga pode ser feita para prod. ccc*, usando agora o conjunto $\mathrm{K}(\omega_1)$, devido ao próximo teorema.

Teorema 2.28. Uma ordem parcial $\mathbb{P}$ satisfaz prod. ccc* se, e somente se, para todo $\mathrm{P}(\omega_1, K) \in \mathrm{K}(\omega_1)$, $\mathbb{P} \times \mathrm{P}(\omega_1, K)$ for ccc.

Demonstração. Primeiramente é importante notar que, se $\mathrm{P}(X,K)$ for ccc, $(\mathrm{P}(X,K))^*$ também será. Isso se deve ao fato de que, para todo $x \in (\mathrm{P}(X,K))^*$, $\bigcup x$ pertencerá a $\mathrm{P}(X,K)$, e a correspondência

$$\begin{array}{ccc} (\mathrm{P}(X,K))^* & \to & \mathrm{P}(X,K) \\ x & \mapsto & \bigcup x \end{array}$$

preserva compatibilidade e incompatibilidade entre as ordens. Portanto, se $\mathbb{P} \times \mathrm{P}(\omega_1, K)$ não for ccc para algum $\mathrm{P}(\omega_1, K) \in \mathrm{K}(\omega_1)$, então $\mathbb{P}$ não satisfaz prod. ccc*.

Agora, se $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ não for ccc para algum $\mathbb{Q}$ ccc^s, tome $\{(p_\alpha, q_\alpha) : \alpha < \omega_1\}$ anticadeia da mesma. Se fizermos

$$K = \{\{\xi, \eta\} \in [\omega_1]^2 : q_\xi \not\perp q_\eta\},$$

então o fato de $\mathbb{Q}^*$ ser ccc implica que $\mathrm{P}(\omega_1, K)$ também será ccc. E como vale $p_\xi \perp p_\eta$ para todo $\{\xi, \eta\} \in K$, temos que $\{(p_\alpha, \{\alpha\}) : \alpha < \omega_1\}$ é uma anticadeia de $\mathbb{P} \times \mathrm{P}(\omega_1, K)$. Então, se $\mathbb{P} \times \mathrm{P}(\omega_1, K)$ for ccc para todo $\mathrm{P}(\omega_1, K) \in \mathrm{K}(\omega_1)$, $\mathbb{P}$ será prod. ccc*. □

Nota: Se $(p_\alpha : \alpha < \omega_1)$ da segunda parte da demonstração acima for injetora e fizermos

$$K' = \{\{p_\xi, p_\eta\} : \{\xi, \eta\} \in K\} \text{ e } P = \{p_\alpha : \alpha < \omega_1\},$$

então $\mathrm{P}(P, K')$ será uma ordem parcial do tipo $\mathscr{F}_{\mathbb{P}}(\mathscr{A})$, onde $\mathscr{A}$ é a coleção dos conjuntos homogêneos de cor 0 maximais de K', e é ccc. Porém a ordem parcial não precisa ser do tipo $\mathrm{F}_{\mathbb{P}}(\mathrm{X})$, uma vez que podem existir $\xi < \eta < \omega_1$ com $p_\xi \perp p_\eta$ e $q_\xi \perp q_\eta$. Isso nos impede de usar tal demonstração para obter alguma caracterização similar para mezabarba*.

Esses dois teoremas mostram que, para uma ordem parcial ser prod. ccc ou prod. ccc*, basta que a mesma seja produtivamente ccc com uma coleção de ordens parciais pequena o bastante a ponto de ser um conjunto.

2.2 Caracterizações globais

Para quaisquer P, Q, sejam da coleção $\mathrm{C}(X)$ ou de $\mathrm{K}(X)$, a sequência $((\{x\}, \{x\}) : x \in X)$, de elementos pertencentes à ordem parcial $\mathrm{P} \times \mathrm{Q}$; será chamada *diagonal de X*, e denotaremo-la Δ_X. O próximo teorema mostra que é possível utilizar a diagonal como caracterização tanto de ccc $\to$ prod. ccc quanto de ccc$^{\mathrm{s}}$ $\to$ prod. ccc*, obtendo uma versão global dos dois últimos teoremas.

Teorema 2.29. ccc $\to$ prod. ccc é equivalente à afirmação de que não existem $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathrm{C}(\omega_1)$ tais que Δ_{ω_1} seja uma anticadeia em $\mathrm{P} \times \mathrm{Q}$. De modo análogo, ccc$^{\mathrm{s}}$ $\to$ prod. ccc* é equivalente à afirmação de que não existem $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathrm{K}(\omega_1)$ tais que Δ_{ω_1} seja uma anticadeia em $\mathrm{P} \times \mathrm{Q}$.

Demonstração. Equivalência de ccc $\to$ prod. ccc: Suponha a validade de ccc $\to$ prod. ccc. Pelo fato de que quaisquer $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathrm{C}(\omega_1)$ serem ccc, $\mathrm{P} \times \mathrm{Q}$ será ccc. Portanto, Δ_{ω_1} não pode ser anticadeia.

Supondo agora a falsidade de ccc $\to$ prod. ccc. Fixe $\mathbb{P}, \mathbb{Q}$ ccc tais que $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ não é ccc e tome $\{(p_\alpha, q_\alpha) : \alpha < \omega_1\}$ anticadeia da mesma. Construa P, Q da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathrm{P} &= \{F \in [\omega_1]^{<\omega} : \exists r \in \mathbb{P}\ \forall \xi \in F\ r \le p_\xi\} \\ \mathrm{Q} &= \{F \in [\omega_1]^{<\omega} : \exists r \in \mathbb{Q}\ \forall \xi \in F\ r \le q_\xi\} \end{aligned}$$

Para provar que as mesmas pertencem a $\mathrm{C}(\omega_1)$, basta provar que elas são ccc. Tomando $(F_\alpha : \alpha < \omega_1)$ sequência de elementos de P, associe a cada F_α um $r_\alpha \in \mathbb{P}$ tal que, para todo $\xi \in F_\alpha$, $r_\alpha \le p_\xi$. Como $\mathbb{P}$ é ccc, existem $\xi < \eta < \omega_1$ e $s \in \mathbb{P}$ tais que $s \le r_\xi, r_\eta$, logo $F_\xi \cup F_\eta \in \mathrm{P}$, provando o que queríamos. Q ser ccc é provado de modo análogo. Uma vez que $\{(p_\alpha, q_\alpha) : \alpha < \omega_1\}$ é anticadeia, dados $\alpha < \beta < \omega_1$, se tivermos $\{\alpha,\beta\} \in \mathrm{P}$, não poderemos ter $\{\alpha,\beta\} \in \mathrm{Q}$ e vice versa, então Δ_{ω_1} será anticadeia em $\mathrm{P} \times \mathrm{Q}$.

Equivalência de ccc^s $\to$ prod. ccc*: Dados $\mathrm{P} \in \mathrm{K}(X)$ arbitrário e $F_1,\ldots,F_n$ elementos de P, é fácil provar que $F_1 \cup \ldots \cup F_n$ pertencerá a P se, e somente se, $F_1,\ldots,F_n$ forem compatíveis 2 a 2. Isso implica que a função

$$\begin{array}{rcccc} I & : & \mathrm{P}^* & \to & \mathrm{P} \\ & & G & \mapsto & \bigcup G \end{array}$$

preserva a compatibilidade e incompatibilidade entre as respectivas ordens, portanto P^* é ccc. Isso implica que, assumindo ccc^s $\to$ prod. ccc*, para quaisquer $\mathrm{P},\mathrm{Q} \in \mathrm{K}(\omega_1)$, $\mathrm{P} \times \mathrm{Q}$ é ccc.

Agora, suponha a falsidade de ccc^s $\to$ prod. ccc*. Tomando $\mathbb{P}$, $\mathbb{Q}$ com $\mathbb{P}^*$, $\mathbb{Q}^*$ ambos ccc, e $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ não ccc. Sendo $\{(p_\alpha,q_\alpha) : \alpha < \omega_1\}$ uma anticadeia, defina $K_p = \{\{\alpha,\beta\} \in [\omega_1]^2 : p_\alpha \not\perp p_\beta\}$, $K_q = \{\{\alpha,\beta\} \in [\omega_1]^2 : q_\alpha \not\perp q_\beta\}$ e faça $\mathrm{P} = \mathrm{P}(\omega_1,K_p), \mathrm{Q} = \mathrm{P}(\omega_1,K_q)$. P é ccc pois, tomando $\{F_\alpha : \alpha < \omega_1\}$, associe cada F_α com $G_\alpha = \{p_\xi : \xi \in F_\alpha\} \in \mathbb{P}^*$. Sendo $\mathbb{P}^*$ ccc, existem $\xi,\eta < \omega_1$ tais que $G_\xi \cup G_\eta \in \mathbb{P}^*$, logo $F_\xi \cup F_\eta \in \mathrm{P}$ e, portanto, P é ccc. Argumento similar permite provar que Q também é ccc. Então $\mathrm{P},\mathrm{Q} \in \mathrm{K}(\omega_1)$ e Δ_{ω_1} é anticadeia em $\mathrm{P} \times \mathrm{Q}$, uma vez que, por $\{(p_\alpha,q_\alpha) : \alpha < \omega_1\}$ ser anticadeia, dados $\alpha < \beta < \omega_1$, se $\{\alpha,\beta\}$ pertencer a P, não poderá pertencer a Q e vice-versa. $\square$

E, uma vez que vale:

Teorema 2.30. Dados $\mathrm{P}(X,K_1),\mathrm{P}(X,K_2) \in \mathrm{K}(X)$, Δ_X será anticadeia de $\mathrm{P}(X,K_1) \times \mathrm{P}(X,K_2)$ se, e somente se, K_1 e K_2 forem disjuntos. Analogamente, dados $\mathrm{P},\mathrm{Q} \in \mathrm{C}(X)$, Δ_X será anticadeia de $\mathrm{P} \times \mathrm{Q}$ se, e somente se, $\mathrm{P} \cap [X]^2$ e $\mathrm{Q} \cap [X]^2$ forem disjuntos.

Demonstração. Tome $x \neq y \in X$ arbitrários. Em ambos os casos, se $\{x,y\}$ pertencer a ambos os conjuntos, teremos $(\{x\},\{x\}) \not\perp (\{y\},\{y\})$; e se tivermos $(\{x\},\{x\}) \not\perp (\{y\},\{y\})$, obrigatoriamente teremos que $\{x,y\}$ pertencerá a ambos os conjuntos. $\square$

Temos como consequência o seguinte:

Corolário 2.31. ccc $\to$ prod. ccc é equivalente à afirmação de que não existem $\mathrm{P},\mathrm{Q} \in \mathrm{C}(\omega_1)$ tais que $\mathrm{P} \cap [\omega_1]^2$ e $\mathrm{Q} \cap [\omega_1]^2$ são disjuntos. De modo análogo, ccc^s $\to$ prod. ccc* é equivalente à afirmação de que não existem $\mathrm{P}(\omega_1,K_1),\mathrm{P}(\omega_1,K_2) \in \mathrm{K}(\omega_1)$ tais que K_1 e K_2 são disjuntos.

CAPÍTULO

3

CONTRAEXEMPLOS DE PROD. CCC IMPLICA KNASTER

Sabemos que ZFC implica knaster $\to$ prod. ccc $\to$ ccc, mas o que ZFC diz a respeito das demais implicações possíveis? Como MA(ω_1) implica a equivalência dos enunciados, e assim a consistência da reversão de cada uma das implicações, poderíamos indagar sobre a consistência em ZFC da falsidade de prod. ccc $\to$ knaster. Para isso, basta provarmos a consistência da existência de um contraexemplo de prod. ccc $\to$ knaster. Assumindo CH, Kunen e Todorčević provaram a existência desse contraexemplo. O contraexemplo de Kunen está enunciado em (Wage, 1979) enquanto o de Todorčević, diferente do de Kunen, está enunciado em (Todorčević, 1986). Os contraexemplos de Kunen e Todorčević apresentam semelhanças e contrastes sutis que serão o principal foco desse capítulo.

Assumindo CH, Galvin no artigo (Galvin, 1980) provou a existência de um contraexemplo também para ccc $\to$ prod. ccc, porém isso será assunto para o próximo capítulo. Com isso concluímos ser consistente com ZFC a falsidade da reversão de cada uma das duas implicações acima.

Além disso, no que se refere aos contraexemplos de Kunen e Todorčević, iremos nesse capítulo aprofundar os resultados descritos nos artigos (Wage, 1979) e (Todorčević, 1986), provando a indestrutibilidade de algumas propriedades dos mesmos descritas nos artigos. Para isso, vamos usar o seguinte teorema (um metateorema, rigorosamente falando), muito útil para demonstrar que certas classes de ordens parciais satisfazem enunciados do tipo $^{\mathrm{cl}}$propriedade:

Teorema 3.1. Tome uma classe $\mathbf{P}$ de ordens parciais, e "cl" representando uma classe de forcings (para uso em "$^{\mathrm{cl}}$propriedade"). Se os seguintes requisitos são satisfeitos:

- É um teorema de ZFC que toda ordem parcial $\mathbb{P} \in \mathbf{P}$ satisfaz o enunciado "propriedade";
- Dado um $\mathbb{Q}$ pertencente a cl e um $\mathbb{P} \in \mathbf{P}$, a ordem parcial $\mathbb{P}$ continuará pertencendo à

classe **P** em qualquer extensão genérica de $\mathbf{V}^{\mathbb{Q}}$. Isto é, em linguagem da técnica de forcing, para todo $\mathbb{P} \in \mathbf{P}$ e $\mathbb{Q}$ pertencente a cl, pode-se provar (não necessariamente em ZFC) que vale:

$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \Vdash_{\mathbb{Q}} \text{A ordem parcial } \check{\mathbb{P}}, \text{ ordenada por } \check{(\leq_{\mathbb{P}})} \text{ e com máximo } \check{(\mathbb{1}_{\mathbb{P}})}, \text{ pertence a } \mathbf{P}.$$

Então toda ordem parcial $\mathbb{P} \in \mathbf{P}$ satisfaz "$^{\mathrm{cl}}$propriedade". Além disso, se provarmos utilizando apenas ZFC o segundo item dos requisitos acima, o fato de todo $\mathbb{P} \in \mathbf{P}$ satisfazer "$^{\mathrm{cl}}$propriedade" é um teorema de ZFC.

Demonstração. O ponto principal na demonstração é o fato que, para qualquer forcing $\mathbb{Q}$, cada axioma de ZFC permanece válido em qualquer extensão genérica de $\mathbf{V}^{\mathbb{Q}}$, sendo isso um teorema de ZFC para cada axioma em separado (não todos simultaneamente). Isso é demonstrado no livro (Kunen, 1980), principalmente no Capítulo VII §4, fazendo amplo uso de modelos; para uma demonstração usando álgebras booleanas completas e sem modelos, veja a Seção 2.3 de (Pereira, 2016). Assim, o primeiro dos requisitos implica que, em qualquer extensão genérica de $\mathbf{V}^{\mathbb{Q}}$, todas as ordens parciais da classe **P** satisfarão propriedade, e até agora tudo foi provado em ZFC.

Agora, vamos fixar um forcing $\mathbb{Q}$ pertencente a cl junto com uma ordem parcial $\mathbb{P} \in \mathbf{P}$. O segundo dos requisitos implica que $\mathbb{P}$ continuará pertencendo à classe **P** em qualquer extensão genérica de $\mathbf{V}^{\mathbb{Q}}$. Então $\mathbb{P}$ satisfaz propriedade em qualquer extensão genérica de $\mathbf{V}^{\mathbb{Q}}$, com $\mathbb{Q}$ pertencente a cl, a exata definição de $\mathbb{P}$ satisfazer $^{\mathrm{cl}}$propriedade. Neste parágrafo, os únicos axiomas utilizados que não são de ZFC são aqueles necessários para demonstrar o segundo requisito. De modo que, se o mesmo for provado em ZFC, a demonstração inteira pode ser realizada em ZFC. □

3.1 O contraexemplo de Kunen

O contraexemplo de Kunen é enunciado e demonstrado no Teorema 4 de (Wage, 1979), e provavelmente se trata da publicação oficial desse resultado (Kunen e Tall, no artigo (Kunen; Tall, 1979), publicado na mesma época, chegam a citar que Kunen provou que CH implica prod. ccc $\nrightarrow$ knaster, porém citam o artigo de Wage como referência, na época ainda a ser publicado). O artigo de Wage descreve também que Kunen provou que seu contraexemplo é prod. ccc ao provar que o mesmo satisfazia $^{\mathrm{ccc}}$ccc, a partir de uma extensão da demonstração do Teorema 1 de (Wage, 1979) via técnica de forcing. Wage porém estendeu o resultado de Kunen provando que uma classe de ordens parciais de onde está inclusa o contraexemplo satisfaz uma propriedade aparentemente mais forte que prod. ccc, descrita na próxima definição.

Definição 3.2. Dizemos que uma ordem parcial $\mathbb{P}$ satisfaz a propriedade denotada "wage" quando toda sequência $(p_\alpha : \alpha < \omega_1)$ de elementos de $\mathbb{P}$ possui uma subsequência de comprimento ω_1 com um $n < \omega$ tal que nenhuma subsequência de comprimento $\omega + n$ dessa é anticadeia.

O próximo teorema mostra que wage é, de certa forma, uma propriedade intermediária entre prod. ccc e knaster (esse fato é apenas enunciado em (Wage, 1979), que descreve a segunda implicação do teorema a seguir como consequência imediata do Teorema 1.5 e $\omega_1 \to (\omega_1, \omega + 1)^2$).

Teorema 3.3. Vale knaster $\to$ wage $\to$ prod. ccc. Como consequência, todas as implicações se tornam equivalências ao assumir $\mathrm{MA}(\omega_1)$.

Demonstração. Fixe uma sequência de $\mathbb{P}$ $(p_\alpha : \alpha < \omega_1)$. Caso $\mathbb{P}$ satisfazer knaster, sua subsequência que satisfaz a propriedade correspondente à knaster irá satisfazer a propriedade correspondente à wage com $n = 0$, então vale knaster $\to$ wage.

Agora, suponha que $\mathbb{P}$ satisfaça wage, tome $\mathbb{Q}$ ccc e fixe uma coleção $\{(p_\alpha, q_\alpha) : \alpha < \omega_1\}$ de $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$. Pela hipótese, a sequência $(p_\alpha : \alpha < \omega_1)$ possui uma subsequência de comprimento ω_1 $(p_\alpha : \alpha \in S)$ com um $n < \omega_1$ tal que toda subsequência de comprimento $\omega + n$ de $(p_\alpha : \alpha \in S)$ possui ao menos um par de termos compatíveis. Nos restringindo a S se necessário, podemos supor, sem perda de generalidade, que $(p_\alpha : \alpha < \omega_1)$ satisfaz essa propriedade para algum $n < \omega$. Pelo Teorema 1.5, a sequência $(q_\alpha : \alpha < \omega_1)$ possui um $S' \subset \omega_1$ de order type $\omega + n$ tal que $(q_\alpha : \alpha \in S')$ possui termos compatíveis 2 a 2 e, uma vez que existe par de ordinais $\xi < \eta$ em S' com p_ξ, p_η compatíveis, segue que $(p_\xi, q_\xi) \not\perp (p_\eta, q_\eta)$, então $\{(p_\alpha, q_\alpha) : \alpha < \omega_1\}$ não é anticadeia. Isso mostra que $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ é ccc, e consequentemente $\mathbb{P}$ é prod. ccc. $\square$

O contraexemplo de Kunen pertence à seguinte classe de ordens parciais:

Definição 3.4. Dado um conjunto X arbitrário e $\{T_\xi : \xi < \alpha\}$ coleção de subconjuntos enumeráveis de X quase disjuntos 2 a 2 (isto é, para quaisquer $\xi < \eta < \alpha$, vale $|T_\xi \cap T_\eta| < \omega$), onde α é um ordinal satisfazendo $\omega \leq \alpha$, definimos a ordem parcial $\mathrm{P}(X, \{T_\xi : \xi < \alpha\})$ da seguinte forma:

$$\mathrm{P}(X, \{T_\xi : \xi < \alpha\}) = \{(s, F) : s \subset X; F \subset \{T_\xi : \xi < \alpha\}; |s|, |F| < \omega\},$$

onde $(s, F) \leq (t, G)$ se, e somente se, $s \supset t$, $F \supset G$ e $(s \setminus t) \cap \bigcup G = \emptyset$.

Com essa definição, é fácil verificar que $(s, F) \not\perp (t, G)$ se, e somente se, valer $(t \setminus s) \cap \bigcup F = \emptyset$ e $(s \setminus t) \cap \bigcup G = \emptyset$.

O Teorema 1 de (Wage, 1979) inclui em sua demonstração uma prova de que todas as ordens do tipo $\mathrm{P}(X, \{T_\xi : \xi < \alpha\})$ são ccc, demonstração que Kunen estendeu via técnica de forcing para provar que toda ordem do tipo $\mathrm{P}(X, \{T_\xi : \xi < \alpha\})$ satisfaz ${}^{\mathrm{ccc}}$ccc. E a demonstração de Wage de que as mesmas ordens parciais satisfazem wage, que se trata do Lema 2 do artigo, também pode ser estendida via técnica de forcing para provarmos que ordens parcias do tipo $\mathrm{P}(X, \{T_\xi : \xi < \alpha\})$ satisfazem ${}^{\mathrm{all}}$wage, é o que faremos no próximo teorema.

Teorema 3.5. Todas as ordens parciais do tipo $\mathrm{P}(X,\{T_\xi : \xi < \alpha\})$ satisfazem $^{\text{all}}$wage.

Demonstração. A demonstração fará uso do Teorema 3.1, com a classe $\mathbf{P}$ consistindo de todas as ordens parciais do tipo $\mathrm{P}(X,\{T_\xi : \xi < \alpha\})$, "propriedade" sendo "wage" e "cl" sendo "all". Fixe então um $\mathbb{P} \in \mathbf{P}$ e um forcing $\mathbb{Q}$ arbitrário. Atente para os seguintes fatos:

- $\mathbb{P}$ pertencerá à $\mathbf{P}$ se, e somente se, existirem um conjunto X arbitrário, um ordinal $\alpha \geq \omega$ e uma coleção $\{T_\xi : \xi < \alpha\}$ de subconjuntos enumeráveis de X quase disjuntos tais que vale $\mathbb{P} = \mathrm{P}(X,\{T_\xi : \xi < \alpha\})$, com $\mathrm{P}(X,\{T_\xi : \xi < \alpha\})$ definido como na definição acima;

- Na definição de $\mathrm{P}(X,\{T_\xi : \xi < \alpha\})$, os únicos requisitos necessários são que $(T_\xi : \xi < \alpha)$ seja sequência injetora cujos termos são subconjuntos enumeráveis do conjunto X quase disjuntos e que α seja ordinal satisfazendo $\omega \leq \alpha$. Ambas as propriedades continuam válidas em qualquer extensão genérica de $\mathbf{V}^{\mathbb{Q}}$, permitindo-nos usar $\{T_\xi : \xi < \alpha\}$ e X para definir a ordem parcial correspondente $\mathrm{P}(X,\{T_\xi : \xi < \alpha\})$ na extensão genérica;

- Fixado um conjunto x arbitrário, a classe (conjunto) dos subconjuntos finitos de x, $[x]^{<\omega}$, é forcing indestrutível. Além disso, a afirmação " y é par ordenado" é forcing absoluta. Como consequência, se $\mathbb{P} = \mathrm{P}(X,\{T_\xi : \xi < \alpha\})$, uma vez que $\mathrm{P}(X,\{T_\xi : \xi < \alpha\})$ é a classe (conjunto) dos pares ordenados (s,F), onde $s \in [X]^{<\omega}$ e $F \in \left[\{T_\xi : \xi < \alpha\}\right]^{<\omega}$, a indestrutibilidade de ambas as classes (conjuntos) e a absolutividade da noção de par ordenado implicam que $\mathrm{P}(X,\{T_\xi : \xi < \alpha\})$ é forcing indestrutível. De modo que, em qualquer extensão genérica de $\mathbf{V}^{\mathbb{Q}}$, vale $\mathbb{P} = \mathrm{P}(X,\{T_\xi : \xi < \alpha\})$;

- No que se refere a $\leq_{\mathbb{P}}$, $(s,F) \leq_{\mathbb{P}} (t,G)$ equivale a "$s \supset t$, $F \supset G$ e $(s \setminus t) \cap \bigcup G = \emptyset$". Tal enunciado é forcing absoluto, portanto ele continua válido em extensões genéricas de $\mathbf{V}^{\mathbb{Q}}$. Quanto ao $\mathbb{1}_{\mathbb{P}}$, ele é o $(\emptyset,\emptyset)$, e mantém suas propriedades exigidas de elemento máximo para membros da classe $\mathbf{P}$ em extensões genéricas de $\mathbf{V}^{\mathbb{Q}}$.

Isso tudo mostra que, para qualquer forcing $\mathbb{Q}$, $\mathbb{P}$ segue pertencendo à classe $\mathbf{P}$ em qualquer extensão genérica de $\mathbf{V}^{\mathbb{Q}}$. Então, seremos capazes de provar que $\mathbb{P}$ satisfaz $^{\text{all}}$wage através do Teorema 3.1 se provarmos em ZFC que toda ordem parcial de $\mathbf{P}$ satisfaz wage. Para isso, replicaremos aqui a demonstração de Wage, em todos os seus detalhes, para deixar esse fato claro.

Lema 3.6 (WAGE)**.** Todas as ordens parciais do tipo $\mathrm{P}(X,\{T_\xi : \xi < \alpha\})$ satisfazem wage.

Demonstração. Fixe uma sequência $\big((s_\beta,F_\beta) : \beta < \omega_1\big)$ de $\mathrm{P}(X,\{T_\xi : \xi < \alpha\})$. Uma vez que sempre vale $(s,F) \not\perp (s,G)$, se tivermos quantidade não enumerável de $\beta < \omega_1$ com todos os s_β iguais entre si, a subsequência correspondente terá termos compatíveis 2 a 2. Assim, podemos supor a partir de agora, restringindo-nos a uma subsequência se necessário, que a sequência $(s_\beta : \beta < \omega_1)$ é composta de termos distintos 2 a 2.

Aplicando o lema do Δ-sistema à sequência $(s_\beta : \beta < \omega_1)$ e restringindo, podemos supor que existe algum conjunto s tal que $s_\xi \cap s_\eta = s$ para quaisquer $\xi < \eta < \omega_1$. Uma vez que, neste caso, (s_ξ, F_ξ) e (s_η, F_η) serão compatíveis se, e somente se, $(s_\xi \setminus s, F_\xi)$ e $(s_\eta \setminus s, F_\eta)$ também forem, seremos capazes de demonstrar nosso teorema caso o provarmos quando $s = \emptyset$, isto é, quando a sequência $(s_\beta : \beta < \omega_1)$ tiver termos disjuntos 2 a 2.

Se tivermos $S \subset \omega_1$ não enumerável tal que todos os F_β, com $\beta \in S$, são iguais entre si, então existirá apenas enumeráveis $\gamma \in S$ satisfazendo $s_\gamma \cap F_\beta \neq \emptyset$ para todo $\beta \in S$; uma vez que os s_γ são disjuntos 2 a 2 e $|\bigcup F_\beta| \leq \omega$. Assim, existe $S' \subset S$ não enumerável tal que $\big((s_\beta, F_\beta) : \beta \in S'\big)$ terá termos compatíveis 2 a 2. Então iremos assumir a partir de agora, restringindo se for necessário, que a sequência $(F_\beta : \beta < \omega_1)$ é composta por termos distintos 2 a 2.

Aplicando o lema do Δ-sistema agora em $(F_\beta : \beta < \omega_1)$ e restringindo, podemos supor que existe um F tal que $F_\xi \cap F_\eta = F$ para todo $\xi < \eta < \omega_1$. Sendo $\bigcup F$ enumerável e s_β disjuntos 2 a 2, então existirão apenas enumeráveis destes satisfazendo $s_\beta \cap F \neq \emptyset$. Assim, com mais uma restrição, podemos supor que $s_\beta \cap \bigcup F = \emptyset$ para todo $\beta < \omega_1$. Nessa situação, (s_ξ, F_ξ) e (s_η, F_η) serão compatíveis se, e somente se, $(s_\xi, F_\xi \setminus F)$ e $(s_\eta, F_\eta \setminus F)$ também forem. Portanto, iremos provar nosso teorema caso o provarmos no caso $F = \emptyset$, isto é, quando os termos F_β forem disjuntos 2 a 2.

Fazendo uma última restrição se preciso, podemos supor que todos os termos s_β da sequência possuem exatamente i elementos. Então o n que associaremos à subsequência procurada será $i+1$. Para construir tal subsequência, note que o conjunto

$$S = \{\beta < \omega_1 : \forall \gamma < \beta \ \bigcup F_\gamma \cap s_\beta = \emptyset\}$$

é não enumerável, pois caso contrário seu complementar seria estacionário e, aplicando o lema pressing-down (Lema 6.15 do Capítulo II §6 de (Kunen, 1980), demonstrável em ZFC) na função com este domínio que atribui para cada β um $\gamma < \beta$ com $\bigcup F_\gamma \cap s_\beta \neq \emptyset$, teríamos a existência de um γ tal que $\bigcup F_\gamma \cap s_\beta \neq \emptyset$ para quantidade não enumerável de β, absurdo com o fato de $\bigcup F_\gamma$ ser enumerável e os s_β disjuntos 2 a 2. Digo que $((s_\beta, F_\beta) : \beta \in S)$ é nossa subsequência procurada.

Para provarmos o que dissemos no parágrafo acima, suponha, por absurdo, que a subsequência acima possui uma subsequência $((t_\gamma, G_\gamma) : \gamma < \omega + n)$ que seja anticadeia. Pelas nossas hipóteses, para quaisquer $j < \omega$ e $k < n$, temos $\bigcup G_{\omega+k} \cap t_j \neq \emptyset$, uma vez que vale $j < \omega + k$. Somando esse fato ao de que cada t_j possui i elementos e $n = i+1$, então, para todo $j < \omega$, existe um par $k_0 \neq k_1 < n$ tal que $\bigcup G_{\omega+k_0}$ e $\bigcup G_{\omega+k_1}$ possuem um elemento de t_j em comum. Tendo a sequência $(t_j : j < \omega)$ termos disjuntos 2 a 2 e, uma vez que podemos compor apenas finitos pares da forma $k_0 \neq k_1 < n$, então existem $k_0 \neq k_1 < n$ tais que $\bigcup G_{\omega+k_0} \cap \bigcup G_{\omega+k_1}$ é infinito, um absurdo com o fato de que $G_{\omega+k_0}$ e $G_{\omega+k_1}$ são subconjuntos finitos e disjuntos entre si da coleção $\{T_\xi : \xi < \alpha\}$, cujos elementos são quase disjuntos. $\square$

Nota: O cardinal ω_1, crucial durante a demonstração do lema, não é forcing absoluto nem é uma classe forcing indestrutível. Mas, como é bem definido em ZFC e não é utilizado na definição de $P(X, \{T_\xi : \xi < \alpha\})$, tal uso no lema não prejudica a demonstração do teorema. $\square$

A próxima construção, que assume CH e envolve o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, será importante na definição do contraexemplo de Kunen:

Teorema 3.7 (CH)**.** Fixe $\mathbb{R} = \{x_\gamma : \gamma < \omega_1\}$ e tome $(Y_\beta : \beta < \omega_1)$ enumeração de todos os subconjuntos enumeravelmente infinitos de $\mathbb{R}$. Então existe coleção de subconjuntos enumeravelmente infinitos de $\mathbb{R}$ $\{T_\alpha = \{t_\alpha^n : n < \omega\} : \alpha < \omega_1\}$ tais que, para todo $\alpha < \omega_1$, $\lim_{n\to\infty} t_\alpha^n = x_\alpha$ (o que implica que $\{T_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ tem elementos quase disjuntos) e, para cada $\beta < \alpha$, se x_α é ponto de acumulação de Y_β, então $Y_\beta \cap T_\alpha \neq \emptyset$.

Demonstração. Basta tomar t_α^n como sendo um real pertencente ao intervalo aberto $]x_\alpha - \frac{1}{n}, x_\alpha + \frac{1}{n}[$ para termos $\lim_{n\to\infty} t_\alpha^n = x_\alpha$. Agora, se Z_α for o conjunto de todos os Y_β com $\beta < \alpha$ tais que Y_β possui x_α como ponto de acumulação, uma vez que vale $|Z_\alpha| \leq \omega$ e tomando $(Y_{\beta_n} : n < |Z_\alpha|)$ uma enumeração do mesmo, poderemos acrescentar um elemento de Y_{β_n} na coleção, caso ela ainda não o tiver, sem destruir a convergência, desde que tomemos um elemento de $Y_{\beta_n} \cap]x_\alpha - \frac{1}{n}, x_\alpha + \frac{1}{n}[$. $\square$

Definição 3.8. Assumindo CH, o **contraexemplo de Kunen** para prod. ccc $\to$ knaster consiste de $P(\mathbb{R}, \{T_\xi : \xi < \omega_1\})$, onde $\{T_\xi : \xi < \omega_1\}$ é construído como no teorema acima ao fixar uma enumeração de $\mathbb{R}$ $(x_\gamma : \gamma < \omega_1)$ e uma enumeração de $[\mathbb{R}]^\omega$ $(Y_\beta : \beta < \omega_1)$.

Kunen provou que $P(\mathbb{R}, \{T_\xi : \xi < \omega_1\})$, definido como acima, não satisfaz knaster, e portanto que CH implica prod. ccc $\nrightarrow$ knaster. Wage, com seu resultado descrito aqui no Lema 3.6, estendeu este resultado mostrando que CH implica wage $\nrightarrow$ knaster. Essa demonstração de Kunen está inclusa na demonstração do Teorema 4 de (Wage, 1979) e será replicada aqui.

Teorema 3.9 (KUNEN)**.** Assumindo CH, o contraexemplo de Kunen $P(\mathbb{R}, \{T_\xi : \xi < \omega_1\})$ não satisfaz knaster.

Demonstração. Será suficiente para os nossos objetivos mostrar que a coleção

$$\{(\{x_\alpha\}, \{T_\alpha\}) : \alpha < \omega_1\}$$

não possui subcoleção de tamanho ω_1 com elementos compatíveis 2 a 2.

O fato de $\mathbb{R}$ possuir base enumerável implica que qualquer subespaço do mesmo possui conjunto denso enumerável. Fixe $S \subset \omega_1$ não enumerável arbitrário. Então $\{x_\alpha : \alpha \in S\}$ possui um subconjunto denso enumeravelmente infinito, que é igual a Y_β para algum $\beta < \omega_1$, ou seja, vale $Y_\beta \subset \{x_\alpha : \alpha \in S\} \subset \overline{Y_\beta}$. Tome $\alpha \in S$ tal que $\alpha > \beta$ e $x_\alpha \notin Y_\beta$. Como este x_α é ponto de acumulação de Y_β, com $\beta < \alpha$, vale $T_\alpha \cap Y_\beta \neq \emptyset$. Então fixe $x_\gamma \in T_\alpha \cap Y_\beta$. Isso implica que $\alpha, \gamma \in S$ são tais que $(\{x_\alpha\}, \{T_\alpha\})$ e $(\{x_\gamma\}, \{T_\gamma\})$ são incompatíveis. Assim toda subcoleção de comprimento ω_1 $\{(\{x_\xi\}, \{T_\xi\}) : \xi \in S\}$ possui par de elementos incompatíveis. $\square$

Corolário 3.10. Assumindo CH, temos que wage $\nrightarrow$ knaster.

3.1.1 Novos resultados

O contraexemplo de Kunen também satisfaz mezabarba$_2$, mas antes de irmos à sua demonstração, primeiro necessitamos de alguns teoremas e convenções que facilitarão este trabalho.

Os próximos dois teoremas referem-se a propriedades de $\mathbb{R}$ válidas em ZFC:

Teorema 3.11. Para toda sequência de reais $(r_\alpha : \alpha < \omega_1)$, existe um real r tal que todo aberto de $\mathbb{R}$ contendo r intercepta quantidade não enumerável de termos da sequência.

Demonstração. $\mathbb{R}$ como espaço topológico possui coleção enumeravelmente infinita de intervalos abertos de comprimento finito que é uma base para o mesmo, tome uma delas. Por ser enumerável, essa base possui um aberto I_0 que intercepta quantidade não enumerável de termos da sequência.

Agora, para cada $n \geq 1$, construa por recursão o intervalo I_n que satisfaça as seguintes propriedades:

- $I_n \subset \bigcap_{k<n} I_k$ e o comprimento de I_n é menor que $1/n$;
- Os termos de $(r_\alpha : \alpha < \omega_1)$ que I_n intercepta é não enumerável.

Se s_n representar o ponto médio do intervalo I_n, então a sequência $(s_n : n < \omega)$ é convergente, e o seu limite $r = \lim_{n\to\infty} s_n$ satisfaz a propriedade desejada, uma vez que todo intervalo aberto que contém r conterá algum I_n para n suficientemente grande. $\square$

Teorema 3.12. Toda sequência de elementos de $\mathbb{R}^2$ $((x_\alpha, y_\alpha) : \alpha < \omega_1)$ que não intercepta a diagonal de $\mathbb{R}$ (i.e. $x_\alpha \neq y_\alpha$ para todo $\alpha < \omega_1$) possui uma subsequência não enumerável cujo domínio com a imagem são desconexos (i.e. o fecho do domínio é disjunto da imagem e vice versa).

Demonstração. Para cada $\alpha < \omega_1$, uma vez que sempre vale $x_\alpha \neq y_\alpha$, temos $x_\alpha < y_\alpha$ ou $y_\alpha < x_\alpha$. Fazendo uma restrição se necessário, podemos supor, sem perda de generalidade, que a mesma desigualdade vale para todo α. Podemos nos restringir à demonstração do caso $x_\alpha < y_\alpha$, uma vez que a demonstração do caso $y_\alpha < x_\alpha$ será análoga.

Para cada $\alpha < \omega_1$ faça $r_\alpha = \frac{x_\alpha + y_\alpha}{2}$. Desse modo, a distância de r_α a ambos x_α, y_α são iguais e sempre diferente de zero, o que implica que existe $n \geq 1$ tal que $\left]r_\alpha - \frac{1}{n}, r_\alpha + \frac{1}{n}\right[\subset \left]x_\alpha, y_\alpha\right[$. Fazendo uma restrição se necessário, podemos supor, sem perda de generalidade, que um mesmo n satisfaz essa propriedade para todo valor da sequência.

Fixemos agora o nosso olhar na sequência $(r_\alpha : \alpha < \omega_1)$. O teorema anterior nos garante a existência de um real r tal que todo intervalo que contém r intercepta quantia não enumerável de termos da sequência acima. Assim, se $(r_\alpha : \alpha \in S)$ for a subsequência não enumerável que intercepta $]r - \frac{1}{n}, r + \frac{1}{n}[$, pelas nossas hipóteses, vale $x_\alpha < r < y_\alpha$ para todo $\alpha \in S$. Portanto, r separa $\{x_\alpha : \alpha \in S\}$ e $\{y_\alpha : \alpha \in S\}$ de maneira a tornar ambos desconexos entre si. $\square$

No Teorema 3.9, assumimos CH e, com essa hipótese, fixamos uma enumeração $(x_\alpha : \alpha < \omega_1)$ de $\mathbb{R}$ e uma enumeração $(Y_\alpha : \alpha < \omega_1)$ de $[\mathbb{R}]^\omega$, a partir dos quais construímos a coleção $\{T_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ satisfazendo, entre outras propriedades, que cada T_α seja imagem de uma sequência enumeravelmente infinita que converge para x_α, sendo portanto seu único ponto de acumulação. Esse detalhe implica o seguinte resultado.

Teorema 3.13. Dado $A \subset \omega_1$ de tamanho arbitrário e $\alpha < \omega_1$ tal que $x_\alpha \notin \overline{\{x_\xi : \xi \in A\}}$, então $|T_\alpha \cap \{x_\xi : \xi \in A\}| < \omega$.

Demonstração. Decorre do fato dos elementos de T_α comporem uma sequência que converge para x_α, pois $|T_\alpha \cap \{x_\xi : \xi \in A\}| = \omega$ implicaria que x_α seria ponto de acumulação de $\{x_\xi : \xi \in A\}$, absurdo. $\square$

Agora podemos demonstrar o pretendido.

Teorema 3.14. Assumindo CH, o contraexemplo de Kunen satisfaz mezabarba$_2$. De fato, ele satisfaz mezabarba$_2^{\mathrm{d}}$.

Demonstração. Durante a demonstração, para fins de simplificação, vamos denotar a ordem parcial do Teorema 3.9 como $\mathbb{P}$. Fixe $\mathscr{F}_\mathbb{P}(\mathscr{A})$ com $|\bigcup_{A \in \mathscr{A}} A| = \omega_1$ arbitrário. Se o mesmo satisfizer o primeiro item do Teorema 2.23 para $n = 1$, então $\mathscr{A}|X$ é uma coleção de ω_1 elementos unitários de $\mathscr{F}_\mathbb{P}(\mathscr{A})$ que formam uma anticadeia no mesmo, e assim satisfaz o requisito necessário para a mezabarba$_2^{\mathrm{d}}$. Portanto, a partir de agora, vamos assumir a falsidade do primeiro item e, consequentemente a veracidade do segundo.

O que iremos provar é que existe em $\mathscr{F}_\mathbb{P}(\mathscr{A})$ uma coleção de ω_1 elementos de cardinalidade 2 e disjuntos 2 a 2 que possui uma subcoleção de também ω_1 elementos tais que a união de dois deles quaisquer nunca é uma anticadeia em $\mathbb{P}$. Com essa estratégia, tanto faz tomar tal coleção de $\mathscr{F}_\mathbb{P}(\mathscr{A})$ ou de $\mathscr{F}_\mathbb{P}(\mathscr{A}|X)$ para qualquer $X \subset \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A$ de cardinalidade ω_1 (que, pela hipótese do parágrafo acima, sabemos que sempre existirá pelo menos uma). Isso justificará todas as hipóteses que faremos a respeito dos elementos de $\bigcup_{A \in \mathscr{A}} A$ que faremos adiante na demonstração.

Seja $((s_\alpha, F_\alpha) : \alpha < \omega_1)$ uma enumeração de $\bigcup_{A \in \mathscr{A}} A$. Parafraseando a demonstração do Lema 3.6, existe $S \subset \omega_1$, não enumerável tal que ambas as sequências $(s_\alpha : \alpha < \omega_1)$ e $(F_\alpha : \alpha < \omega_1)$ têm termos distintos e disjuntos 2 a 2 e, para quaisquer $\alpha, \beta \in S$ com $\alpha < \beta$, vale

$(s_\alpha, F_\alpha) \not\perp (s_\beta, F_\beta)$ se, e somente se, valer $s_\alpha \cap \bigcup F_\beta = \emptyset$. Tomando $X = \{(s_\alpha, F_\alpha) : \alpha \in S\}$ e nos restringindo a $\mathscr{F}_\mathbb{P}(\mathscr{A}|X)$, podemos supor, sem perda de generalidade, que todos os elementos de $\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A$ satisfazem tal propriedade. Fazendo mais uma restrição do gênero se necessário, podemos supor também que todos os termos da sequência $(s_\alpha : \alpha < \omega_1)$ possuem a mesma cardinalidade, digamos n, e todos os termos da sequência $(F_\alpha : \alpha < \omega_1)$ possuem a mesma cardinalidade, digamos m.

A partir de agora, vamos fixar n funções $f_1, \ldots, f_n : \omega_1 \to \omega_1$ que representarão enumerações para os elementos de cada termo da sequência $(s_\alpha : \alpha < \omega_1)$, e m funções $g_1, \ldots, g_m : \omega_1 \to \omega_1$ que representarão enumerações para os elementos de cada termo da sequência $(F_\alpha : \alpha < \omega_1)$ no seguinte sentido:

$$\text{Para todo } \alpha < \omega_1,\ s_\alpha = \{x_{f_1(\alpha)}, \ldots, x_{f_n(\alpha)}\} \text{ e } F_\alpha = \{T_{g_1(\alpha)}, \ldots, T_{g_m(\alpha)}\}.$$

Uma vez que ambas as sequências $(s_\alpha : \alpha < \omega_1)$ e $(F_\alpha : \alpha < \omega_1)$ são compostas por termos disjuntos 2 a 2, as funções $f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_m$ são todas injetoras.

Uma vez que tanto a coleção $\{s_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ quanto a coleção $\{F_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ são compostas por elementos disjuntos 2 a 2, somos capazes de construir por recursão transfinita sobre ω_1 um $S \subset \omega_1$ não enumerável tal que, para quaisquer $\alpha, \beta \in S$ com $\alpha < \beta$, se $\xi, \eta < \omega_1$ forem tais que $x_\xi \in s_\alpha$ e $T_\eta \in F_\beta$, ou forem tais que $T_\xi \in F_\alpha$ e $x_\eta \in s_\beta$, em ambos os casos teremos obrigatoriamente $\xi < \eta$. Fazendo uma última restrição se necessário, podemos supor, sem perda de generalidade, que toda a coleção $\{(s_\alpha, F_\alpha) : \alpha < \omega_1\}$ satisfaz essa propriedade. Esse fato será crucial para conseguirmos usar o Teorema 3.12 na demonstração.

O seguinte lema será necessário para o prosseguimento da demonstração:

Lema 3.15. Dadas funções injetoras $f, g : \omega_1 \to \omega_1$ tais que, para todo $\alpha < \omega_1$, vale $f(\alpha) \neq g(\alpha)$, a coleção $\big\{(\{x_{f(\alpha)}\}, \{T_{g(\alpha)}\}) : \alpha < \omega_1\big\}$ possui um $S \subset \omega_1$ não enumerável tal que, para todo $\alpha \in S$, $\{x_{f(\xi)} : \xi \in S \cap \alpha\} \cap T_{g(\alpha)} = \emptyset$.

Demonstração. Pelas nossas hipóteses, os pares da sequência $\big((x_{f(\alpha)}, x_{g(\alpha)}) : \alpha < \omega_1\big)$ satisfazem os requisitos do Teorema 3.12, portanto existe uma subsequência não enumerável do mesmo tal que o domínio e a imagem são desconexos entre si. A partir de agora, vamos supor, sem perda de generalidade, que a sequência inteira satisfaz essa propriedade.

Uma vez que $\overline{\{x_{f(\alpha)} : \alpha < \omega_1\}} \cap \{x_{g(\alpha)} : \alpha < \omega_1\} = \emptyset$, para todo $\alpha < \omega_1$, o conjunto $Z_\alpha = T_{g(\alpha)} \cap \{x_{f(\xi)} : \xi < \omega_1\}$ é finito. Aplicando o lema do Δ-sistema na sequência $(Z_\alpha : \alpha < \omega_1)$, existe $S \subset \omega_1$ não enumerável tal que $(Z_\alpha : \alpha \in S)$ forma um Δ-sistema. Como a raiz desse Δ-sistema é uma coleção finita de números reais, existe um $\beta < \omega_1$ grande o bastante de modo que $Z'_\alpha = T_{g(\alpha)} \cap \{x_{f(\xi)} : \beta \leq \xi < \omega_1\}$ não possuirá nenhum elemento da raiz, de modo que $(Z'_\alpha : \alpha \in S)$ é um Δ-sistema de raiz vazia. Fazendo essas duas últimas restrições se necessário, podemos supor, sem perda de generalidade, que a coleção $\big\{(\{x_{f(\alpha)}\}, \{T_{g(\alpha)}\}) : \alpha < \omega_1\big\}$ é tal que a sequência $(Z_\alpha : \alpha < \omega_1)$ tem termos disjuntos 2 a 2 (não necessariamente distintos 2 a 2, porém o $\emptyset$ é o único conjunto que pode se repetir na sequência).

Assumindo todas as hipóteses dos dois parágrafos acima, para todo $X \subset \omega_1$ enumerável, sempre existe quantidade não enumerável de $\alpha < \omega_1$ tais que $\{x_{f(\xi)} : \xi \in X\} \cap T_{g(\alpha)} = \emptyset$, pois caso contrário haveria $\xi \in X$ com $x_{f(\xi)}$ pertencente a um não enumerável de Z_α da sequência, e a mesma não seria disjunta 2 a 2. Podemos então usar este fato para construir, por recursão sobre ω_1, uma subcoleção de $\left\{(\{x_{f(\alpha)}\}, \{T_{g(\alpha)}\}) : \alpha < \omega_1\right\}$ com os requisitos necessários para demonstrar o lema. $\square$

Dada uma coleção de ω_1 elementos binários de $\mathscr{F}_{\mathbb{P}}(\mathscr{A})$ disjuntos 2 a 2, existem enumerações $(\xi_\alpha : \alpha < \omega_1)$ e $(\eta_\alpha : \alpha < \omega_1)$ que permitem que a coleção seja descrita como:

$$\left\{\left\{\left(s_{\xi_\alpha}, F_{\xi_\alpha}\right), \left(s_{\eta_\alpha}, F_{\eta_\alpha}\right)\right\} : \alpha < \omega_1\right\} \tag{$*$}$$

onde $\xi_\alpha < \eta_\alpha < \omega_1$.

Vamos provar agora que esta coleção possui uma subcoleção de ω_1 elementos que formam uma anticadeia de $\mathscr{F}_{\mathbb{P}}(\mathscr{A})$. Primeiramente demonstraremo-la para um caso particular a partir do qual generalizaremos para os demais casos.

Caso $n = m = 1$: Nesse caso, a coleção $(*)$ assume a seguinte forma:

$$\left\{\left\{\left(\left\{x_{f_1(\xi_\alpha)}\right\}, \left\{T_{g_1(\xi_\alpha)}\right\}\right), \left(\left\{x_{f_1(\eta_\alpha)}\right\}, \left\{T_{g_1(\eta_\alpha)}\right\}\right)\right\} : \alpha < \omega_1\right\}.$$

Uma vez que vale $\xi_\alpha < \eta_\alpha$ para todo $\alpha < \omega_1$, a última hipótese que assumimos antes do lema implica $f_1(\xi_\alpha) < g_1(\eta_\alpha)$. Portanto, definindo as funções $f, g : \omega_1 \to \omega_1$ de modo a valerem $f(\alpha) = f_1(\xi_\alpha)$ e $g(\alpha) = g_1(\xi_\alpha)$, as mesmas satisfazem o requisito do lema acima. Aplicando então esse lema, existe $S \subset \omega_1$ não enumerável tal que, para todo $\alpha < \omega_1$, vale $\{x_{f(\zeta)} : \zeta \in S \cap \alpha\} \cap T_{g(\alpha)} = \emptyset$ e, por consequência, para todo $\beta, \gamma \in S$ com $\beta < \gamma$, vale $(\{x_{\xi_\beta}\}, \{T_{\xi_\beta}\}) \not\leq (\{x_{\eta_\gamma}\}, \{T_{\eta_\gamma}\})$. Assim, para todo $\alpha \neq \beta \in S$, temos

$$\left\{\left(s_{\xi_\alpha}, F_{\xi_\alpha}\right), \left(s_{\eta_\alpha}, F_{\eta_\alpha}\right)\right\} \perp \left\{\left(s_{\xi_\beta}, F_{\xi_\beta}\right), \left(s_{\eta_\beta}, F_{\eta_\beta}\right)\right\}.$$

De modo que a subcoleção

$$\left\{\left\{\left(s_{\xi_\alpha}, F_{\xi_\alpha}\right), \left(s_{\eta_\alpha}, F_{\eta_\alpha}\right)\right\} : \alpha \in S\right\}$$

é uma anticadeia em $\mathscr{F}_{\mathbb{P}}(\mathscr{A})$.

Caso geral: O conjunto $\{(i, j) : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ possui exatamente $n \cdot m$ elementos. Para cada par (i, j) desse conjunto, podemos proceder como no parágrafo acima, mas agora fazendo $f(\alpha) = f_i(\xi_\alpha)$ e $g(\alpha) = g_j(\eta_\alpha)$, e com isso provar a existência de um $S \subset \omega_1$ não enumerável tal que, para todo $\alpha \in S$ vale $\{x_{f_i(\xi_\zeta)} : \zeta \in S \cap \alpha\} \cap T_{g_j(\eta_\alpha)} = \emptyset$. De modo mais geral, para qualquer $S' \subset \omega_1$ não enumerável, somos capazes de replicar o argumento do parágrafo acima, associando

S' a ω_1 através de isomorfismo, e assim provar a existência de um $S \subset S'$ não enumerável tal que, para todo $\alpha \in S$, vale $\{x_{f_i(\xi_\zeta)} : \zeta \in S \cap \alpha\} \cap T_{g_j(\eta_\alpha)} = \emptyset$.

Dado $((i_1, j_1), \ldots, (i_{n\cdot m}, j_{n\cdot m}))$ uma enumeração do conjunto $\{(i,j) : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$, podemos aplicar os procedimentos do parágrafo acima recursivamente e obter conjuntos $S_{n\cdot m} \subset \ldots \subset S_1 \subset \omega_1$, todos não enumeráveis e tais que, quando $1 \leq k \leq n \cdot m$, S_k satisfaz o descrito no fim do parágrafo anterior para o par (i_k, j_k). Com isso, o conjunto não enumerável $S_{n\cdot m}$ satisfaz a respectiva propriedade para todos os pares $(i_1, j_1), \ldots, (i_{n\cdot m}, j_{n\cdot m})$. Assim, devido ao fato que:

$$\begin{aligned} s_{\xi_\alpha} &= \left\{x_{f_1(\xi_\alpha)}, \ldots, x_{f_n(\xi_\alpha)}\right\}, \quad \text{e} \\ F_{\eta_\alpha} &= \left\{T_{g_1(\eta_\alpha)}, \ldots, T_{g_m(\eta_\alpha)}\right\}, \end{aligned}$$

temos que, para quaisquer $\beta, \gamma \in S_{n\cdot m}$ com $\beta < \gamma$, vale $s_{\xi_\beta} \cap \bigcup F_{\eta_\gamma} = \emptyset$, o que implica $(s_{\xi_\beta}, F_{\xi_\beta}) \not\perp (s_{\eta_\gamma}, F_{\eta_\gamma})$. Portanto, para quaisquer $\alpha \neq \beta \in S_{n\cdot m}$, vale:

$$\left\{\left(s_{\xi_\alpha}, F_{\xi_\alpha}\right), \left(s_{\eta_\alpha}, F_{\eta_\alpha}\right)\right\} \perp \left\{\left(s_{\xi_\beta}, F_{\xi_\beta}\right), \left(s_{\eta_\beta}, F_{\eta_\beta}\right)\right\}.$$

mostrando que $S_{n\cdot m}$ fornece a subcoleção desejada. □

Nota: A recursão à qual o último parágrafo da demonstração acima refere se trata da recursão transfinita sobre o ordinal e número natural $n \cdot m + 1$, com a vantagem de não ser necessário considerar o caso de ordinal limite. O procedimento deve começar fazendo $S_0 = \omega_1$ e, uma vez definido S_k, construir $S_{k+1} \subset S_k$ conforme descrito nos dois últimos parágrafos utilizando o par (i_{k+1}, j_{k+1}). O procedimento via recursão é necessário tendo em vista que a ideia de "repetir a demonstração do caso trivial $n \cdot m$ vezes" não produziria uma demonstração formalmente rigorosa.

Com tudo isso, temos o seguinte:

Corolário 3.16. Valem os seguintes fatos:

Assumindo CH:

$$\begin{tikzcd}
& \text{mezabarba}_2^{\mathrm{d}} \arrow[d] \arrow[dr, "/" marking] & \\
\text{prod. ccc} & \text{mezabarba}_2 \arrow[l] \arrow[r, "/" marking] & \text{knaster} \\
& \text{wage} \arrow[ul] \arrow[ur, "/" marking] &
\end{tikzcd}$$

3.2 O contraexemplo de Todorčević

Na §4 do artigo (Todorčević, 1986), Todorčević trabalhou com ordens parciais θ-cc (uma generalização de ccc, onde temos ccc $= \omega_1$-cc), avaliando quando tais ordens parciais satisfazem uma generalização de knaster (usando sequências de tamanho θ no lugar das de tamanho ω_1), ou quando o produto de duas ordens parciais θ-cc é θ-cc. Seus resultados permitiram, segundo o próprio autor, encontrar em ZFC contraexemplos generalizados correspondentes ao contraexemplo de Kunen, que assume CH. Com os resultados de Todorčević, somos capazes de derivar um novo contraexemplo para prod. ccc $\to$ knaster, com duas características ausentes no contraexemplo de Kunen:

- Para provar a existência desse contraexemplo, basta assumir que o pequeno cardinal $\mathfrak{b}$ (definido mais adiante) seja igual a ω_1, ao invés de CH;
- Assumindo CH ou $\mathfrak{b} = \omega_1$, o contraexemplo de Todorčević se trata de um contraexemplo de prod. ccc $\to$ wage.

O contraexemplo de Todorčević pertence à seguinte classe de ordens parciais:

Definição 3.17. Dados um espaço topológico X e uma boa ordem (estrita) $\prec$ para X (sendo $\preccurlyeq$ sua versão fraca), e uma função $F : X \to \mathrm{fe}(X)$ tal que, para todo $x \in X$, vale $F(x) \subset \{y \in X : y \preccurlyeq x\}$, definimos a ordem parcial $\mathscr{S}_X$ da seguinte forma:

$$\mathscr{S}_X = \{s \in [X]^{<\omega} : x \notin F(y) \text{ para todo } x \neq y \text{ em } s\},$$

ordenada pela inclusão reversa.

Uma consequência do Lema 13 de (Todorčević, 1986), ao fazer $\kappa = \omega$ no mesmo, é que toda ordem $\mathscr{S}_X$ acima satisfaz prod. ccc. Porém também podemos estender, através de técnica de forcing, seu argumento e provar que elas satisfazem de fato ${}^{\mathrm{all}}$prod. ccc, como faremos no próximo teorema.

Teorema 3.18. Dados um espaço topológico X com base enumerável, uma boa ordem $\prec$ de X e uma função $F : X \to \mathrm{fe}(X)$ satisfazendo os requisitos da Definição 3.17, a ordem parcial $\mathscr{S}_X$ correspondente satisfaz ${}^{\mathrm{all}}$prod. ccc.

Demonstração. A demonstração será através do Teorema 3.1, com $\mathbf{P}$ sendo a classe de ordens parciais da definição acima, "propriedade" sendo "prod. ccc" e "cl" sendo "all". Fixe ordem parcial $\mathbb{P} \in \mathbf{P}$ e um forcing $\mathbb{Q}$ arbitrário. Os seguintes fatos são válidos em ZFC:

- $\mathbb{P} \in \mathbf{P}$ se, e somente se, existem um espaço topológico X, uma boa ordem $\prec$ de X e uma função $F : X \to \mathrm{fe}(X)$ satisfazendo, para todo $x \in X$, $F(x) \subset \{y \in X : y \preccurlyeq x\}$; tais que $\mathbb{P} = \mathscr{S}_X$, de acordo com a definição acima;
- $\prec$ continua sendo uma relação de ordem nas extensões genéricas de $\mathbf{V}^{\mathbb{Q}}$. De fato, continua sendo uma boa ordem em qualquer uma dessas extensões. Isso parece questionável considerando que, em uma extensão genérica, X pode possuir novos subconjuntos que também

precisam ter mínimo. Porém, sua validade decorre do fato termos, em ZFC, a existência de uma função que é um isomorfismo entre $(X, \prec)$ e um ordinal α, função que permanece sendo um isomorfismo em qualquer extensão genérica de $\mathbf{V}^{\mathbb{Q}}$;

- X pode deixar de ser um espaço topológico em uma extensão genérica de $\mathbf{V}^{\mathbb{Q}}$, no sentido de que o conjunto $\mathrm{ab}(X)$ pode não satisfazer mais as propriedades requeridas para o conjunto de todos os abertos de X. Porém, se criarmos na extensão genérica de $\mathbf{V}^{\mathbb{Q}}$ uma nova topologia para X, utilizando $\mathrm{ab}(X)$ como conjunto de abertos básicos, esse novo espaço topológico continua tendo base enumerável e, para qualquer $x \in X$, $F(x)$ continua sendo um fechado. Portanto, o novo espaço topológico para X, a boa ordem $\prec$ e a função F também satisfazem os requisitos do primeiro item na extensão genérica de $\mathbf{V}^{\mathbb{Q}}$, permitindo-nos definir um novo $\mathscr{S}_X$ a partir destes;

- Sendo a classe (conjunto) $[X]^{<\omega}$ forcing indestrutível, e o enunciado $\forall x, y \in X\ x \neq y \to x \notin F(x)$ forcing absoluto, o conjunto $\mathscr{S}_X$ definido no item acima será, na extensão genérica de $\mathbf{V}^{\mathbb{Q}}$, igual a $\mathbb{P}$;

- Quanto à $\leq_{\mathbb{P}}$, definida a partir da relação $\supset$, que como enunciado é forcing absoluto, continua sendo definida da mesma forma. Já o $\mathbb{1}_{\mathbb{P}}$, que é o $\emptyset$, continua satisfazendo os requisitos necessários.

Assim, ZFC prova que, para todo $\mathbb{P} \in \mathbf{P}$, $\mathbb{P}$ continua pertencendo à essa classe em qualquer extensão genérica de $\mathbf{V}^{\mathbb{Q}}$, com $\mathbb{Q}$ forcing arbitrário. Portanto, o Teorema 3.1 diz que conseguiremos demonstrar o teorema se provarmos em ZFC que $\mathscr{S}_X$ satisfaz prod. ccc. Para isso, iremos replicar a demonstração do artigo de Todorčević, com todos os devidos detalhes, para clarificar esse fato.

Lema 3.19. Dados um espaço topológico X com base enumerável, uma boa ordem $\prec$ de X e uma função $F : X \to \mathrm{fe}(X)$ satisfazendo os requisitos da Definição 3.17, a ordem parcial $\mathscr{S}_X$ correspondente satisfaz prod. ccc.

Demonstração. De acordo com o Teorema 1.1, seremos capazes de demonstrar o lema se provaremos que a classe de ordens da Definição 3.17 satisfaz $^{\text{ccc}}$ccc. Isso será provado utilizando o Teorema 3.1, com $\mathbf{P}$ sendo a classe de ordens parciais da Definição 3.17, "propriedade" sendo "ccc" e "cl" sendo "ccc". Pelo que já provamos antes do início do lema, resta provar aqui, usando apenas ZFC, que $\mathscr{S}_X$ é ccc. É o que faremos a partir de agora.

Fixe uma sequência $(s_\alpha : \alpha < \omega_1)$ de elementos de $\mathscr{S}_X$. Uma vez que um elemento sempre é compatível com ele mesmo, podemos supor, restringindo a uma subsequência se necessário, que os termos da sequência são distintos 2 a 2. Como $s, t \in \mathscr{S}_X$ serão compatíveis se, e somente se, $s \setminus (s \cap t)$, $t \setminus (s \cap t)$ forem compatíveis, usando esse fato junto com o lema do Δ-sistema, podemos supor, fazendo uma restrição se necessário, que $(s_\alpha : \alpha < \omega_1)$ é composta por termos disjuntos 2 a 2. Fazendo mais uma restrição se necessário, podemos supor que cada termo da sequência tem a mesma cardinalidade, digamos n.

Seja $(s_\alpha^1, \ldots, s_\alpha^n)$ a enumeração $\prec$-crescente dos elementos de s_α. A partir de agora, associaremos s_α à n-upla ordenada $(s_\alpha^1, \ldots, s_\alpha^n)$, pertencente ao espaço topológico X^n, que também tem base enumerável. Para qualquer sequência $(t_\alpha : \alpha < \omega_1)$ de elementos de X, podemos, através de recursão transfinita sobre ω_1, encontrar $S \subset \omega_1$ de cardinalidade ω_1 tal que, para todo $\xi, \eta \in S$, $\xi < \eta$ implica $t_\xi \prec t_\eta$; o procedimento consiste em sempre tomar o termo $\prec$-mínimo da sequência com um segmento inicial suficientemente longo removido. Por causa disso, restringindo se necessário, podemos assumir a partir de agora que, para todo $1 \leq i \leq n$, vale $s_\xi^i \prec s_\eta^i$ quando valer $\xi < \eta < \omega_1$.

Pela definição de $\mathscr{S}_X$, para todo $\alpha < \omega_1$, existem abertos $V_1^\alpha, \ldots, V_n^\alpha$ tais que $s_\alpha^i \in V_i^\alpha$ e $F(s_\alpha^j) \cap V_i^\alpha = \emptyset$ para todo $1 \leq i \neq j \leq n$, a saber, $V_i^\alpha = \bigcap_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \left(X \setminus F(s_\alpha^j)\right)$; como consequência, existem $U_1^\alpha, \ldots, U_n^\alpha$, abertos básicos de X, que satisfazem a mesma propriedade. Uma vez que X tem base enumerável, fazendo uma última restrição se necessário, podemos supor que os mesmos abertos $U_1, \ldots, U_n$ satisfazem a propriedade para todo $\alpha < \omega_1$.

As suposições dos dois parágrafos acima implicam que, para quaisquer $\xi \leq \eta < \omega_1$ e $1 \leq i \neq j \leq n$, $\{s_\xi^i, s_\eta^j\} \in \mathscr{S}_X$. Portanto, para provar que s_ξ e s_η são compatíveis, é suficiente provar que $\{s_\xi^i, s_\eta^i\} \in \mathscr{S}_X$ para todo $1 \leq i \leq n$.

Tomando $\{s_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ como um subespaço topológico de X^n, o mesmo terá base enumerável pelo fato de X^n ter. Como consequência, o subespaço terá subconjunto denso enumerável. Logo existirá $\beta < \omega_1$ a partir do qual $\{s_\xi : \xi < \beta\}$ será denso no subespaço. Fixe $\delta > \beta$. A definição de $\mathscr{S}_X$, os fatos de valer $F(x) \subset \{y \in X : y \preccurlyeq x\}$ e a sequência possuir coordenadas $\prec$-crescente implicam que

$$s_\delta \in \left(\left(U_1 \setminus F(s_\beta^1)\right) \times \ldots \times \left(U_n \setminus F(s_\beta^n)\right)\right),$$

ou seja, $\left(\left(U_1 \setminus F(s_\beta^1)\right) \times \ldots \times \left(U_n \setminus F(s_\beta^n)\right)\right)$ é um aberto não vazio do subespaço topológico e, consequentemente, existe $\gamma < \beta$ tal que

$$s_\gamma \in \left(\left(U_1 \setminus F(s_\beta^1)\right) \times \ldots \times \left(U_n \setminus F(s_\beta^n)\right)\right),$$

o que implica s_γ e s_β serem compatíveis (note que o fato de valer $\gamma < \beta$ foi crucial para obtermos essa conclusão, que pode não ser verdade com δ no lugar de γ). □

□

Nota: O leitor talvez questione a validade desta demonstração pelo fato de usar o Teorema 3.1 não somente na demonstração principal, mas também na própria demonstração do lema, que precisa ser feita exclusivamente em ZFC. O importante de ser ressaltado aqui é que os argumentos envolvendo extensões genéricas nesta demonstração, assim como todas as outras que envolve técnica de forcing, podem ser rigorosamente formalizados como enunciados da linguagem dos conjuntos sem nenhuma citação de extensões genéricas. Por exemplo, o que dissemos no início da demonstração do lema era que, dados $\mathbb{P} \in \mathbf{P}$ e $\mathbb{Q}$ ccc, o enunciado

$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \Vdash_{\mathbb{Q}} \check{\mathbb{P}} \in \mathbf{P}$$

é um teorema de ZFC, de fato um caso particular do que provamos no início da demonstração principal, e provar em ZFC que $\mathbb{P}$ satisfaz $^{\text{ccc}}$ccc equivale a provar em ZFC que, para qualquer $\mathbb{Q}$ ccc,

$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \Vdash_{\mathbb{Q}} \check{\mathbb{P}} \text{ satisfaz ccc},$$

(omitimos, em ambos os enunciados, as menções necessárias a $\leq_{\mathbb{P}}$ e $\mathbb{1}_{\mathbb{P}}$). Exatamente por isso fomos enfáticos em enunciar que a parte inicial da demonstração do teorema podia ser realizada em ZFC: para garantir que o lema inteiro pudesse ser demonstrado em ZFC.

Definição 3.20. Definimos em ω^ω a ordem (parcial estrita) $<^*$ e a ordem (parcial fraca) $\leq$ da seguinte forma: para quaisquer $f, g \in \omega^\omega$, $f <^* g$ se, e somente se, $\{n < \omega : f(n) < g(n)\}$ for cofinito, e $f \leq g$ se, e somente se, $f(n) \leq g(n)$ para todo $n < \omega$.

O conjunto ω^ω munido com a topologia produto é um espaço topológico com base enumerável; o mesmo pode ser dito para qualquer um de seus subespaços e, para qualquer $g \in \omega^\omega$, o conjunto $F(g) = \{h \in \omega^\omega : h \leq g\}$ é um subconjunto fechado de ω^ω e de qualquer subespaço que possua g.

Além disso, se tomarmos em ω^ω uma sequência $<^*$-crescente $(g_\gamma : \gamma < \alpha)$, então $<^*$ é uma boa ordem do subespaço $X = \{g_\gamma : \gamma < \alpha\}$, cuja enumeração é a própria sequência e, para qualquer $\gamma < \alpha$, $F(g_\gamma) \subset \{g_\xi : \xi \leq \gamma\}$. Portanto, o subespaço X com a boa ordem $<^*$ e a função F satisfazem os requisitos do Teorema 3.18, então $\mathscr{S}_X$ é prod. ccc.

Definição 3.21. Uma coleção Y de elementos de ω^ω é dita **$<^*$-ilimitada em ω^ω** quando não existir $g \in \omega^\omega$ tal que vale $f <^* g$ para todo $f \in Y$.

Agora podemos definir $\mathfrak{b}$. O pequeno cardinal $\mathfrak{b}$ é o menor cardinal κ para o qual existe $Y \subset \omega^\omega$ tal que $|Y| = \kappa$ e Y é $<^*$-ilimitado em ω^ω. Também agora podemos definir o contraexemplo de Todorčević:

Definição 3.22. Assumindo a existência de uma sequência $(g_\alpha : \alpha < \omega_1)$ $<^*$-crescente e $<^*$-ilimitada em ω^ω, composta de funções com valores estritamente crescentes, o **contraexemplo de Todorčević** para prod. ccc $\rightarrow$ knaster corresponde à ordem parcial $\mathscr{S}_X$, onde $X = \{g_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ é subespaço topológico de ω^ω, $\prec$ é $<^*$ e F é definida como $F(f) = \{h \in X : h \leq f\}$. Tal sequência existe caso valer $\mathfrak{b} = \omega_1$, que será verdade caso assumirmos CH.

O fato do contraexemplo de Todorčević não satisfazer knaster se deve ao Lema 16 de (Todorčević, 1986). Como sua demonstração será útil para provarmos que o mesmo também não satisfaz wage, replicaremo-lo aqui.

Teorema 3.23 (TODORČEVIĆ)**.** O contraexemplo de Todorčević não satisfaz knaster.

Demonstração. $\mathscr{S}_X$ não satisfazer knaster se deve ao fato que a coleção $\{\{g_\alpha\} : \alpha < \omega_1\}$ viola a respectiva propriedade, devido ao lema abaixo, que corresponde a um caso particular do Lema 16 do artigo (Todorčević, 1986), quando $\theta = \omega_1$ no mesmo:

Lema 3.24 (TODORČEVIĆ)**.** Toda sequência $<^*$-crescente e $<^*$-ilimitada em ω^ω $(g_\alpha : \alpha < \omega_1)$ de funções com valores estritamente crescentes de ω^ω possui $\beta < \gamma < \omega_1$ tais que $g_\beta \leq g_\gamma$.

Demonstração. $X = \{g_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ é um subespaço topológico de ω^ω, e portanto tem base enumerável. Então existe $\beta < \omega_1$ tal que $\{g_\alpha : \alpha < \beta\}$ é denso em X, o que implica que, para todo $\xi < \omega_1$ e $n < \omega$, existe $\eta < \beta$ tal que $g_\eta \restriction n = g_\xi \restriction n$.

Vamos fixar nossa atenção agora em $\{\gamma < \omega_1 : \gamma > \beta\}$. Para todo $\gamma > \beta$ existe $n < \omega$ tal que $g_\beta(m) < g_\gamma(m)$ para todo $m \geq n$, e existe natural n_0 tal que os γ associados são ilimitados em ω_1. Seja D' a coleção de todos estes γ. Em D', uma vez que $|\omega^{n_0}| = \omega$, existem $t_0 \in \omega^{n_0}$ e $D \subset D'$ ilimitado em ω_1 tais que $g_\gamma \restriction n_0 = t_0$ para todo $\gamma \in D$. A partir de agora vamos fixar nossa atenção nesse D.

Sendo D ilimitado em ω_1, $\{g_\gamma : \gamma \in D\}$ também é $<^*$-ilimitado em ω^ω, e então precisa existir pelo menos um $n < \omega$ tal que $\{g_\gamma(n) : \gamma \in D\}$ é ilimitado em ω. Tome n_1 o menor deles (devendo valer assim $n_1 \geq n_0$), o que implica que $\sup\{g_\gamma(m) + 1 : m < n_1, \gamma \in D\} < \omega$. Pela definição de n_1, existe coleção $\{\gamma_m : m < \omega\}$ tal que a sequência $(g_{\gamma_m}(n_1) : m < \omega)$ é injetora, e portanto sua imagem é ilimitada em ω. Uma vez que existe $n < \omega$ tal que $g_{\gamma_m} \restriction n_1 \in n^{n_1}$ (conjuntos das funções $h : n_1 \to n$) para todo $m < \omega$, valendo $|n^{n_1}| < \omega$, podemos assumir, restringindo se for necessário, que para todo $m < \omega$, vale $g_{\gamma_m} \restriction n_1 = t_1$ para algum $t_1 \in n^{n_1}$.

Uma vez que $\{g_\xi : \xi < \beta\}$ é denso em X, existe $\xi < \beta$ tal que $t_1 \subset g_\xi$ e, para este ξ, existe $n_2 \geq n_1$ tal que $g_\xi(n) < g_\beta(n)$, para todo $n \geq n_2$, (logo $g_\xi(n) < g_{\gamma_m}(n)$, para todo $n \geq n_2$ e $m < \omega$). Pelo fato de $\{g_{\gamma_m}(n_1) : m < \omega\}$ ser ilimitado em ω, existe $k < \omega$ tal que $g_\xi(n_2) < g_{\gamma_k}(n_1)$ e, como todas as funções de X são estritamente crescentes, temos que $g_\xi(m) < g_{\gamma_k}(m)$ quando tivermos $n_1 \leq m \leq n_2$, portanto $g_\alpha \leq g_{\gamma_k}$, e podemos fazer $\eta = \gamma_k$. □

Desse modo, dada uma sequência que satisfaça o lema acima, qualquer subsequência de comprimento ω_1 da mesma também satisfará. Então, fixada a coleção $\{\{g_\alpha\} : \alpha < \omega_1\}$ de elementos de $\mathscr{S}_X$, toda subcoleção de tamanho ω_1 dela terá dois elementos $\{g_\xi\}, \{g_\eta\}$ com $\xi < \eta$ tais que $g_\xi \leq g_\eta$, o que implica $g_\xi \in F(g_\eta)$ e, portanto, $\{g_\xi\} \perp \{g_\eta\}$. Provando que tal coleção viola a propriedade de knaster. □

Com isso, o teorema acima implica o seguinte resultado:

Corolário 3.25. Assumindo $\mathfrak{b} = \omega_1$, vale prod. ccc $\nrightarrow$ knaster.

3.2.1 Novos resultados

Wage, em seu artigo (Wage, 1979), deixa em aberto a questão da veracidade ou falsidade de prod. ccc $\to$ wage (veja a pergunta “What about the fourth?” do autor na 4ª página do arquivo, que corresponde a (Wage, 1979, pág. 315)). O artigo (Wage, 1979) data de 7 anos antes do artigo (Todorčević, 1986), de modo que Wage possivelmente não conhecia o contraexemplo de Todorčević. Todorčević por sua vez conhecia o contraexemplo de Kunen e o artigo de Wage, que é o artigo em que o resultado de Kunen supostamente aparece pela primeira vez. Todorčević porém não demonstra nem cita no artigo que seu contraexemplo também não satisfaz a propriedade que denoto como wage. Porém isso é uma consequência do Lema 16 de (Todorčević, 1986) junto com a propriedade $\omega_1 \to (\omega_1, \omega+1)^2$, como demonstraremos agora.

Teorema 3.26. O contraexemplo de Todorčević $\mathscr{S}_X$ não satisfaz wage.

Demonstração. $\mathscr{S}_X$ não satisfará wage pelo fato da sequência $(\{g_\alpha\} : \alpha < \omega)$ não satisfazer a definição correspondente, devido ao seguinte lema:

Lema 3.27. Toda sequência $<^*$-crescente e $<^*$-ilimitada em ω^ω $(g_\alpha : \alpha < \omega_1)$ de funções com valores estritamente crescentes de ω^ω possui subsequência de comprimento $\omega+\omega$ com termos $\leq$-comparáveis 2 a 2 (i.e. sua imagem é totalmente ordenada por $\leq$).

Demonstração. Note primeiramente que, se $\xi < \eta < \omega_1$ são tais que g_ξ e g_η são $\leq$-comparáveis, precisa valer $g_\xi \leq g_\eta$, uma vez que vale $g_\xi <^* g_\eta$.

Como cada subsequência de comprimento ω_1 também é $<^*$-crescente e $<^*$-ilimitada em ω^ω, o Lema 3.24 implica que não existe subsequência de comprimento ω_1 com termos $\leq$-incomparáveis 2 a 2 (i.e. não existe par de termos $\leq$-compatíveis), portanto $\omega_1 \to (\omega_1, \omega+1)^2$ implica a existência de subsequência de comprimento $\omega+1$ com termos $\leq$-comparáveis 2 a 2.

Podemos aplicar recursão transfinita sobre ω_1 no parágrafo acima e provar a existência de ω_1 conjuntos $\{S_\beta \subset \omega_1 : \beta < \omega\}$ onde cada S_β tem order type $\omega+1$, a sequência $(g_\xi : \xi \in S_\beta)$ possui termos 2 a 2 $\leq$-comparáveis e, para quaisquer $\gamma < \delta < \omega_1$, temos $\sup S_\gamma < \inf S_\delta$. Fixe $\xi_\beta = \sup S_\beta \in S_\beta$ (pois S_β possui máximo). Aplicando o parágrafo acima à subsequência $(g_{\xi_\beta} : \beta < \omega_1)$, temos a existência de um $T \subset \{\xi_\beta : \beta < \omega_1\}$ de order type $\omega+1$ tal que a sequência $(g_\eta : \eta \in T)$ possui termos 2 a 2 $\leq$-compatíveis. Uma vez que $\leq$ é transitiva, fixe $\eta = \inf T \in T$; então o primeiro parágrafo mostra que $S_\eta \cup T$ gera uma subsequência com termos comparáveis 2 a 2 com comprimento $\omega+\omega+1$. $\square$

Uma vez que toda subsequência de comprimento ω_1 também irá satisfazer o lema, toda subsequência de comprimento ω_1 de $(\{g_\alpha\} : \alpha < \omega_1)$ possuirá uma subsequência de comprimento $\omega+\omega$ que será anticadeia, violando assim a definição de wage. $\square$

Corolário 3.28. $\mathfrak{b} = \omega_1$ implica que vale prod. ccc $\nrightarrow$ wage, e CH implica que vale prod. ccc $\nrightarrow$ wage $\nrightarrow$ knaster.

Podemos agora nos questionar se o contraexemplo de Todorčević satisfaz mezabarba$_2$, como o do Kunen. A resposta é afirmativa como veremos no próximo teorema, mostrando assim uma semelhança entre os dois contraexemplos.

Teorema 3.29. O contraexemplo de Todorčević $\mathscr{S}_X$ satisfaz mezabarba$_2$. De fato, ele satisfaz mezabarba$_2^{\mathrm{d}}$.

Demonstração. Fixe $\mathscr{F}_{\mathscr{S}_X}(\mathscr{A})$ arbitrário. Como na demonstração do Teorema 3.14, podemos restringir nossa demonstração ao caso em que a primeira propriedade do Teorema 2.23, quando $n = 1$, é falsa, e consequentemente a segunda é verdadeira.

Nossa estratégia será igual à da demonstração do Teorema 3.14, iremos encontrar uma coleção de ω_1 elementos binários e disjuntos 2 a 2 de $\mathscr{F}_{\mathscr{S}_X}(\mathscr{A})$ que possua uma subcoleção não enumerável cuja união de dois elementos quaisquer não é anticadeia de $\mathscr{S}_X$. Por isso, devido aos mesmos argumentos do segundo parágrafo daquela demonstração, serão justificáveis as suposições que faremos sobre os elementos de $\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A$ a partir do próximo parágrafo.

Sabemos por definição que, para quaisquer $a, b \in \mathscr{S}_X$ temos $a \perp b$ se, e somente se, $a \setminus (a\cap b) \perp b \setminus (a\cap b)$. Assim, aplicando o lema do Δ-sistema com esse fato, podemos assumir, sem perda de generalidade, que os elementos de $\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A$ são 2 a 2 disjuntos. Podemos assumir também, sem perda de generalidade, que cada um desses elementos possui a mesma cardinalidade, digamos n.

Com as hipóteses assumidas até agora, os ω_1 elementos de $\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A$ são da forma

$$F_\xi = \{g_{\xi_1}, \ldots, g_{\xi_n}\} : \xi_1 < \ldots < \xi_n < \omega_1,$$

onde $\xi < \omega_1$. Sendo eles disjuntos 2 a 2, podemos tomar uma subcoleção não enumerável da mesma $\{F_\alpha : \alpha \in S\}$ tal que, para todo $\xi < \eta \in \omega_1$, vale $\xi_n < \eta_1$. Podemos supor então, sem perda de generalidade, que $\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A$ consiste exclusivamente dessa coleção.

Por todas as nossas hipóteses formuladas, $\mathscr{F}_{\mathscr{S}_X}(\mathscr{A})$ possui uma coleção de ω_1 conjuntos binários disjuntos 2 a 2, cujos elementos serão descritos como

$$G_\alpha = \{\{g_{\alpha_1}, \ldots, g_{\alpha_n}\}, \{g_{\alpha_{n+1}}, \ldots, g_{\alpha_{2n}}\}\} : \alpha_1 < \ldots < \alpha_{2n},$$

para cada $\alpha < \omega_1$. Uma vez que nenhuma função g_{α_i} em G_α ira irá aparecer em outro G_β, com $\alpha \neq \beta$, podemos assumir, sem perda de generalidade, que a coleção tomada é tal que vale $g_{\alpha_{2n}} <^* g_{\beta_1}$ sempre quando valer $\alpha < \beta$.

Como vale assim $g_{\alpha_i} <^* g_{\alpha_j}$ sempre quando tivermos $1 \leq i < j \leq 2n$, existirá $k < \omega$ tal que a sequência $(g_{\alpha_i}(k) : 1 \leq i \leq 2n)$ seja estritamente crescente; e podemos supor, fazendo uma restrição na sequência G_α se necessário, que seja o mesmo $k < \omega$ para todo $\alpha < \omega_1$. Fazendo uma última restrição na sequência G_α se necessário, podemos supor que a sequência $(g_{\alpha_i}(k) : 1 \leq i \leq 2n)$ seja igual para todo $\alpha < \omega_1$. Com tudo isso, para todo $\alpha < \beta < \omega_1$, sempre que tivermos $1 \leq i \leq n$ e $n+1 \leq j \leq 2n$, teremos $g_{\alpha_j} > g_{\beta_i}$, implicando $g_{\alpha_j} \nleq g_{\beta_i}$, e portanto $\{g_{\alpha_{n+1}}, \dots, g_{\alpha_{2n}}\} \not\leq \{g_{\beta_1}, \dots, g_{\beta_n}\}$. Concluindo assim que teremos $G_\alpha \perp G_\beta$ sempre quando valer $\alpha < \beta < \omega_1$, sendo tal coleção de conjuntos binários uma anticadeia em $\mathscr{F}_{\mathscr{S}_X}(\mathscr{A})$. $\square$

Com tudo isso concluímos o seguinte:

Corolário 3.30. Valem os seguintes fatos:

Assumindo CH:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{mezabarba}_2^{\mathrm{d}} \arrow[d] \arrow[dr, "/" marking] & \\
\text{prod. ccc} \arrow[dr, "/" marking] & \mathrm{mezabarba}_2 \arrow[r, "/" marking] \arrow[d, "/" marking] & \mathrm{knaster} \\
 & \mathrm{wage} \arrow[ur, "/" marking] &
\end{tikzcd}$$

Assumindo $\mathfrak{b} = \omega_1$:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{mezabarba}_2^{\mathrm{d}} \arrow[d] \arrow[dr, "/" marking] & \\
\text{prod. ccc} \arrow[dr, "/" marking] & \mathrm{mezabarba}_2 \arrow[r, "/" marking] \arrow[d, "/" marking] & \mathrm{knaster} \\
 & \mathrm{wage} &
\end{tikzcd}$$

CAPÍTULO

4

CONTRAEXEMPLOS DE CCC IMPLICA PROD. CCC

4.1 O caso das árvores

Uma **árvore** consiste de um conjunto parcialmente ordenado T tal que, para qualquer $x \in T$, o conjunto $\{y \in T : y < x\}$ (denotado **segmento inicial de** x) é bem ordenado. O order type de $\{y \in T : y < x\}$ é definido como a **altura de** x e é denotada $\mathrm{ht}_T(x)$. O conjunto de todos os elementos de altura α em uma árvore T é denotado $\mathrm{Lev}_\alpha(T)$, e podemos denominá-lo **nível** α **da árvore** T (porém não usaremos esse nome no texto). A **altura da árvore** T corresponde ao menor ordinal α tal que $\mathrm{Lev}_\alpha(T) = \emptyset$, e a denotaremos $\mathrm{ht}(T)$.

Todo subconjunto de uma árvore também será uma árvore se munirmo-lo com a mesma ordem. Faremos amplo uso dessa convenção ao longo do texto, a maioria das vezes de forma implícita. Porém, um tipo de subconjunto em particular da árvore tem grande importância na literatura e será muito útil definir também aqui, ele é o seguinte:

Definição 4.1. Um subconjunto S de uma árvore T, munido com a mesma ordem de T, é dito ser **subárvore de** T quando valer, para cada $x \in S$, $\mathrm{ht}_S(x) = \mathrm{ht}_T(x)$, isto é, quando a altura de cada elemento manter-se inalterada.

Na literatura, uma árvore também é considerada uma ordem parcial, porém com as seguintes "modificações":

- O sentido da ordem é invertido. Assim, dados $p, q \in T$, teremos "$p \leq q$ na ordem parcial T" se, e somente se, valer "$p \geq q$ na árvore T". Se isso não fosse feito, para nenhum $p \in T$ existiriam $r, s \leq p$ tais que $r \perp s$ (um p com essa propriedade é denominado *átomo*) e tal ordem parcial não geraria nenhuma extensão genérica não trivial na técnica de forcing;

- Precisaremos incluir implicitamente um elemento que sirva como $\mathbb{1}_T$, pois caso contrário uma árvore só o teria se $\text{Lev}_0(T)$ fosse unitário.

Esse será o tratamento padrão ao longo desse texto para as árvores dentro do contexto de ordens parciais e técnica de forcing.

Com as definições acima, dois elementos de uma árvore $x, y \in T$ serão compatíveis se, e somente se, valer $x \leq y$ ou $y \leq x$, isto é, quando eles forem *comparáveis*. Uma subcoleção de T com elementos compatíveis 2 a 2 será totalmente ordenada, isto é, uma *cadeia de T*. Uma cadeia maximal de T corresponde a uma subárvore de T totalmente ordenada, que nós chamaremos de **ramo de** T. Para todo $\alpha < \text{ht}(T)$, $\text{Lev}_\alpha(T)$ é uma anticadeia maximal de T.

Na época do artigo (Galvin, 1980), onde é apresentado o contraexemplo de Galvin para ccc $\rightarrow$ prod. ccc, a *reta de Suslin* já era um conhecido contraexemplo da mesma afirmação (demonstrado no livro de Kunen de mesma época do artigo, (Kunen, 1980)), só que assumindo $\sim$SH (já conhecido como independente de ZFC + CH na época).

A *hipótese de Suslin*, ou SH, é a hipótese da não existência de uma reta de Suslin ou, equivalentemente, a não existência de uma *árvore de Suslin*, definida a seguir:

Definição 4.2. Uma **árvore de Suslin** é uma árvore S ccc de altura ω_1 que não possui nenhum ramo de altura ω_1. Como consequência, $\text{Lev}_\alpha(S)$ é enumerável para qualquer $\alpha < \omega_1 = \text{ht}(S)$.

Se X é uma reta de Suslin, então X^2 não é ccc (ver Lema 4.3 Cap. II § 4 de (Kunen, 1980)). O mesmo ocorre com a árvore de Suslin, como provaremos a seguir:

Teorema 4.3. Para toda árvore de Suslin S, a ordem parcial S^2 não é ccc.

Demonstração. Nós vamos construir uma anticadeia $\{(x_\alpha, y_\alpha) : \alpha < \omega_1\}$ de S^2 que satisfaz, para todo $\alpha < \omega_1$, $x_\alpha \perp y_\alpha$, estratégia similar à adotada na demonstração do Lema 4.3 do Cap. II § 4 de (Kunen, 1980) para a reta de Suslin. A demonstração será por recursão sobre ω_1.

Para um dado $\alpha < \omega_1$, uma vez já construída a anticadeia $\{(x_\xi, y_\xi) : \xi < \alpha\}$ com $x_\xi \perp y_\xi$ para todo $\xi < \alpha$, tome $A = \bigcup_{\xi<\alpha}\{x_\xi, y_\xi\}$ e faça $\gamma = \sup\{\text{ht}_S(z) : z \in A\}$. Uma vez que $\text{Lev}_\gamma(S)$ é enumerável, existe $w \in \text{Lev}_\gamma(S)$ tal que $\{w' \in S : w \leq w'\}$ é não enumerável, fixe um w com essa propriedade. Para todo $z \in A$, se z é compatível com w, então vale $z \leq w$, de modo que $\{z \in S : z \leq w\}$ contém todos os elementos de A compatíveis com w. Pelo fato de $\{z \in S : z \leq w\}$ ser uma cadeia, nenhum $\xi < \alpha$ vai possuir ambos x_ξ, y_ξ na mesma, de modo que nenhum $w' \geq w$ será compatível com ambos x_ξ, y_ξ, qualquer que seja $\xi < \alpha$. Sendo $\{w' \in S : w \leq w'\}$ não enumerável e S uma árvore de Suslin, existem $x_\alpha, y_\alpha > w$ incompatíveis entre si, e então (x_α, y_α) é incompatível com cada elemento de $\{(x_\xi, y_\xi) : \xi < \alpha\}$. Isso conclui a demonstração por recursão. $\square$

O teorema acima implica então o seguinte:

Corolário 4.4. Uma árvore de Suslin não é pot. ccc.

A pergunta em mente agora é: E quanto às demais árvores? Quando uma árvore ccc é um contraexemplo de ccc $\to$ prod. ccc? De fato, toda árvore ccc que não satisfaça knaster já implica a existência de uma árvore de Suslin em seu interior:

Teorema 4.5. Se T é uma árvore ccc que não satisfaz knaster, então T contém um subconjunto que é árvore de Suslin.

Demonstração. Fixe uma árvore T satisfazendo os requisitos do teorema. Como é evidente que T satisfará knaster se tivermos $|T| \leq \omega$, precisa valer $|T| \geq \omega_1$. Tome $S \subset T$ com $|S| = \omega_1$ que viola a definição de knaster. Uma vez que a compatibilidade/incompatibilidade de qualquer par de elementos em S é preservada como ela é em T, S é uma árvore com ω_1 elementos, é ccc e não possui ramo de comprimento ω_1, ou seja, S é uma *árvore de Suslin*. □

Isso mostra que a existência de uma árvore que não satisfaz knaster já implica a existência de uma reta de Suslin, que não satisfaz pot. ccc. Então temos o seguinte corolário:

Corolário 4.6. ccc $\to$ pot. ccc implica SH. Como consequência, ccc $\to$ prod. ccc implica SH.

O próximo teorema mostra que, além disso, uma árvore de Suslin também não satisfaz mezabarba* (Definição 2.5).

Teorema 4.7. Para toda árvore de Suslin S, a ordem parcial $\mathrm{F}_S(S)$ (ver Definição 2.1) é ccc.

Demonstração. Fixada uma árvore de Suslin S, suponha por absurdo a existência de uma anticadeia de tamanho ω_1 $\{s_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ em $\mathrm{F}_S(S)$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que os elementos da anticadeia são disjuntos 2 a 2 e cada um tem a mesma cardinalidade n. Uma vez que a sequência $(s_\alpha : \alpha < \omega_1)$ tem termos disjuntos 2 a 2 e $\mathrm{Lev}_\alpha(S)$ é enumerável para cada $\alpha < \omega_1$, existe uma subsequência $(s_\alpha : \alpha \in R)$ de comprimento ω_1 tal que, para todo $\alpha, \beta \in R$ com $\alpha < \beta$, a altura de qualquer elemento de s_α é maior do que a altura de qualquer elemento de s_β. Fazendo uma última restrição se necessário, podemos supor que toda a sequência satisfaz essa propriedade. Por indução sobre $n \geq 1$, vamos provar que qualquer valor possível para essa cardinalidade gera um absurdo.

Caso $n = 1$: Se $\{\{x_\alpha\} : \alpha < \omega_1\}$ fosse anticadeia, teríamos que $\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ seria uma cadeia de tamanho ω_1 de S, pertencendo então a um ramo com comprimento ω_1, absurdo com o fato de S ser árvore de Suslin.

Passo indutivo: Uma vez supondo a inexistência de anticadeia de tamanho ω_1 com elementos disjuntos 2 a 2 e de cardinalidade n, vamos provar a inexistência de tal anticadeia com elementos agora de cardinalidade $n+1$. Suponha por absurdo a existência de tal anticadeia $\{s_\alpha : \alpha < \omega_1\}$.

Vamos construir, para cada $\alpha < \omega_1$, as funções $f_\alpha : \omega \to \omega_1$ e $g_\alpha : \omega \to S$, de modo que sejam satisfeitos os seguintes requisitos:

- Para todo $\alpha < \omega$, f_α e g_α são funções $<$-crescentes respectivamente nas ordens de ω_1 e da árvore S. Além disso, para todo $k < \omega$, vale $g_\alpha(k) \in s_{f_\alpha(k)}$ e a sequência $(s_{f_\alpha(k)} \setminus \{g_\alpha(k)\} : k < \omega)$ tem termos compatíveis 2 a 2, implicando que $\bigcup_{k<\omega}(s_{f_\alpha(k)} \setminus \{g_\alpha(k)\})$ é anticadeia de S;
- Para quaisquer $\alpha < \beta < \omega_1$ e $k, m < \omega$, valem $f_\alpha(k) < f_\beta(m)$ e $g_\alpha(k) < g_\beta(m)$.

Caso conseguirmos fazer essa construção, teremos que a coleção $\{g_\alpha(n) : \alpha < \omega_1, n < \omega\}$ será uma cadeia de tamanho ω_1 em S, um absurdo com o fato da reta de Suslin não ter ramo de altura ω_1, concluindo a demonstração do teorema. A construção será feita por recursão sobre ω_1.

Caso $\alpha = 0$: Para cada $\delta < \omega_1$, escolha um $x_\delta \in s_\delta$ arbitrário e faça $t_\delta = s_\delta \setminus \{x_\delta\}$. Como a sequência $(t_\delta : \delta < \omega_1)$ é composta de termos de cardinalidade n, a hipótese que nós fizemos no início do passo indutivo implica que nem a sequência nem nenhuma de suas subsequências de comprimento ω_1 são anticadeias. Então a propriedade $\omega_1 \to (\omega_1, \omega+1)^2$ implica a existência de uma subsequência $(t_{\delta_k} : k < \omega)$ de comprimento ω cujos termos são compatíveis 2 a 2. Uma vez que $(s_{\delta_k} : k < \omega)$ é anticadeia, a sequência $(\{x_{\delta_k}\} : k < \omega)$ será anticadeia. Uma vez que, por hipótese, os termos da sequência $(x_{\delta_n} : n < \omega)$ têm alturas estritamente crescentes, segue que a sequência em si é estritamente crescente. Portanto, basta fazer $f_0(k) = \delta_k$ e $g_0(k) = x_{\delta_k}$.

Caso $\alpha = \beta + 1$: Vamos concentrar nossa atenção nas sequências $(g_\beta(k) : k < \omega)$ e $(s_{f_\beta(k)} \setminus \{g_\beta(k)\} : k < \omega)$. Seja $\gamma = \sup\{f_\beta(k) + 1 : k < \omega\}$ e tome $\delta \geq \gamma$. Uma vez que $\bigcup_{k<\omega}(s_{f_\beta(k)} \setminus \{g_\beta(k)\})$ é anticadeia de S e cada elemento de s_δ tem altura estritamente maior que a altura dos elementos de qualquer $s_{f_\beta(k)}$, que é incompatível com s_δ, cada $x \in s_\delta$ só pode ser comparável com no máximo um elemento da anticadeia; de modo que precisa existir um $y_\delta \in s_\delta$ comparável com todos os $g_\beta(k)$. Faça $t_\delta = s_\delta \setminus \{y_\delta\}$. Podemos parafrasear o argumento do parágrafo acima, agora para a sequência $(t_\delta : \gamma \leq \delta < \omega_1)$, mostrando que $\omega_1 \to (\omega_1, \omega+1)^2$ implica a existência de subsequência $(t_{\delta_k} : k < \omega)$ com termos compatíveis 2 a 2, sendo $(y_{\delta_k} : k < \omega)$ cadeia estritamente crescente. Com tudo isso, se fizermos $f_\alpha(k) = \delta_k$ e $g_\alpha(k) = y_{\delta_k}$, todos os requisitos exigidos para essas funções serão satisfeitos.

Caso $\alpha = \gamma$ **ordinal limite**: Faça $\beta = \sup\{f_\xi(k) + 1 : \xi < \gamma, k < \omega\}$. Estendendo o resultado do início do parágrafo anterior, temos que, para todo $\xi < \gamma$ e $\delta \geq \beta$, existe $x \in s_\delta$ que é comparável com todo $g_\xi(k)$. Como s_δ tem finitos elementos e são infinitos os $\xi < \gamma$, existe um $y_\delta \in s_\delta$ que é comparável com todos os elementos da coleção $\{g_\xi(k) : \xi < \gamma, k < \omega\}$. Agora, fazendo $t_\delta = s_\delta \setminus \{y_\delta\}$, podemos repetir a parte final do parágrafo acima, aqui para a sequência $(t_\delta : \beta \geq \delta < \omega_1)$, obtendo as subsequências $(t_{\delta_k} : k < \omega)$ e $(y_{\delta_k} : k < \omega)$ tais que, ao definir $f_\gamma(k) = \delta_k$ e $g_\gamma(k) = y_{\delta_k}$, as funções f_γ, g_γ terão seus requisitos exigidos satisfeitos. $\square$

Por fim, temos o seguinte resultado:

Corolário 4.8. ccc $\rightarrow$ mezabarba* implica SH.

4.2 O contraexemplo de Galvin

Dado um conjunto A, uma **partição de** A consiste numa coleção de subconjuntos de A disjuntos 2 a 2 cuja união é o conjunto A inteiro. O Teorema 3.3 do artigo (Galvin, 1980), ao se assumir CH e fazer $\aleph = \omega$ no mesmo, implica o seguinte resultado:

Teorema 4.9 (GALVIN)**.** Assumindo CH, existem duas ordens parciais ccc cujo produto não é ccc. Essas duas ordens são do tipo $\mathrm{P}(\omega_1, K_1)$ e $\mathrm{P}(\omega_1, K_2)$ (Definição 2.24), onde vale $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Como consequência, podemos tomar K_1 e K_2 de modo que eles formam uma partição de $[\omega_1]^2$.

Definição 4.10. Assumindo CH, o **contraexemplo de Galvin** para ccc $\rightarrow$ prod. ccc consiste em qualquer uma das ordens parciais ccc $\mathrm{P}(\omega_1, K_1)$ e $\mathrm{P}(\omega_1, K_2)$ onde K_1 e K_2, formam uma partição de $[\omega_1]^2$.

O mérito do contraexemplo de Galvin, que corresponde a um caso particular do Teorema 3.3 do artigo acima, é o fato de ele necessitar a assunção de CH, ao contrário de $\sim$SH da seção anterior. Com ele e o Corolário 2.31, temos que:

Corolário 4.11. Assumindo CH, vale o seguinte:

$$\begin{array}{ccc} \text{ccc}^{\text{s}} & \not\longrightarrow & \text{prod. ccc}^* \\ \downarrow & & \uparrow \\ \text{ccc} & \not\longrightarrow & \text{prod. ccc} \end{array}$$

Ou seja, o contraexemplo de Galvin também é um contraexemplo de ccc$^{\text{s}}$ $\rightarrow$ prod. ccc*.

Olhando mais de perto a demonstração do teorema de Galvin, se percebe que sua demonstração não requer todo o poder fornecido pela assunção de CH para poder provar a existência do contraexemplo. Ela requer apenas assumir umas poucas afirmações envolvendo dois pequenos cardinais que podemos inferir a partir da demonstração de Galvin. Meu objetivo nesta seção é definir esses dois cardinais e descrever os "requisitos mínimos" necessários para provar a existência do contraexemplo de Galvin junto com a respectiva demonstração.

Os dois pequenos cardinais implicitamente envolvidos na demostração de Galvin precisarão ser definidos nesse texto, e também precisaremos demonstrar que eles satisfazem de fato os requisitos de pequenos cardinais, uma vez que não encontrei referências dos mesmos ou de versões equivalentes na literatura. O primeiro pequeno cardinal será denotado $\mathfrak{e}$, enquanto o segundo será denotado $\mathfrak{f}$. Para simplificar as definições, adotaremos a seguinte notação:

Definição 4.12. Dados dois conjuntos arbitrários A e B, diremos que A *está quase contido em* B, denotando $A \subset^* B$ ou $B \,{}^*\!\supset A$, quando valer $|A \setminus B| < \omega$.

4.2.1 O pequeno cardinal $\mathfrak{e}$

$\mathfrak{e}$ possui 4 formas equivalentes de ser definido. Elas serão enunciadas e suas equivalências demonstradas antes de fazermos a definição formal do mesmo.

O próximo teorema assegurará que vale $\omega < \mathfrak{e} \leq \mathfrak{c} = 2^{\omega}$:

Teorema 4.13. Cada uma das 4 propriedades abaixo possui um cardinal κ satisfazendo-a, e qualquer cardinal κ que satisfaz pelo menos uma dessas propriedades precisa satisfazer $\omega < \kappa \leq \mathfrak{c}$:

1. Existe coleção de κ subconjuntos enumeravelmente infinitos de $[\omega_1]^{<\omega}$, $\{E_\alpha : \alpha < \kappa\}$, com cada E_α composto de elementos disjuntos 2 a 2; tal que, para todo F subconjunto não enumerável de $[\omega_1]^{<\omega}$ com elementos disjuntos 2 a 2, existe $\alpha < \kappa$ com $E_\alpha \subset^* F$;
2. Existe coleção de κ subconjuntos enumeravelmente infinitos de $[\omega_1]^{<\omega}$, $\{E_\alpha : \alpha < \kappa\}$, com cada E_α composto de elementos disjuntos 2 a 2; tal que, para todo F subconjunto não enumerável de $[\omega_1]^{<\omega}$ com elementos disjuntos 2 a 2, existe $\alpha < \kappa$ com $E_\alpha \subset F$;
3. Existe coleção de κ subconjuntos enumeravelmente infinitos de $[\omega_1]^{<\omega}$, $\{E_\alpha : \alpha < \kappa\}$, tal que, para todo F subconjunto não enumerável de $[\omega_1]^{<\omega}$, existe $\alpha < \kappa$ com $E_\alpha \subset F$;
4. Existe coleção de κ subconjuntos enumeravelmente infinitos de ω_1, $\{E_\alpha : \alpha < \kappa\}$, tal que, para todo F subconjunto não enumerável de ω_1, existe $\alpha < \kappa$ com $E_\alpha \subset F$.

Demonstração. Em cada um dos 4 itens, existe uma coleção $\{E_\alpha : \alpha < 2^{\omega}\}$ que satisfaça o mesmo; de fato, ela será a maior coleção possível, tal que todas as demais coleções $\{E_\alpha : \alpha < \kappa\}$ que satisfarão o mesmo item serão subconjuntos desta. Pois, em cada item, dado uma F que satisfaça o requisito do mesmo, todo $E \subset F$ enumeravelmente infinito pertencerá a esta coleção maximal. Isso mostra não apenas que $\mathfrak{c}$ satisfaz cada uma das 4 propriedades, como também o fato de todo κ que satisfaça pelo menos uma das mesmas irá satisfazer $\kappa \leq \mathfrak{c}$.

Agora, em cada item, fixe coleção $\{E_n : n < \omega\}$ enumeravelmente infinita e condizente com o mesmo. Iremos provar que tal coleção não pode satisfazer a respectiva propriedade exigida no item. Nos três primeiros itens, isso se deve ao fato de existir $\alpha < \omega_1$ tal que $\bigcup E_n \subset \alpha$ para todo $n < \omega$, de modo que todo F que satisfazer $\alpha \cap \bigcup F = \emptyset$ não satisfará o exigido. No quarto e último item, isso se deve ao fato de $\bigcup_{n<\omega} E_n$ ser enumerável, logo $F = \omega_1 \setminus \bigcup_{n<\omega} E_n$ viola o exigido. Isso prova que todo κ que satisfazer ao menos um dos itens acima satisfará $\omega < \kappa$. $\square$

O próximo teorema apresentará os 4 enunciados que definem $\mathfrak{e}$ e provará suas equivalências:

Teorema 4.14. São iguais os cardinais κ que satisfazem qualquer uma das propriedades abaixo:

1. O menor cardinal κ para o qual existe coleção de κ subconjuntos enumeravelmente infinitos de $[\omega_1]^{<\omega}$, $\{E_\alpha : \alpha < \kappa\}$, com cada E_α composto de elementos disjuntos 2 a 2; tal que, para todo F subconjunto não enumerável de $[\omega_1]^{<\omega}$ com elementos disjuntos 2 a 2, existe $\alpha < \kappa$ tal que $E_\alpha \subset^* F$;

2. O menor cardinal κ para o qual existe coleção de κ subconjuntos enumeravelmente infinitos de $[\omega_1]^{<\omega}$, $\{E_\alpha : \alpha < \kappa\}$, com cada E_α composto de elementos disjuntos 2 a 2; tal que, para todo F subconjunto não enumerável de $[\omega_1]^{<\omega}$ com elementos disjuntos 2 a 2, existe $\alpha < \kappa$ tal que $E_\alpha \subset F$;

3. O menor cardinal κ para o qual existe coleção de κ subconjuntos enumeravelmente infinitos de $[\omega_1]^{<\omega}$, $\{E_\alpha : \alpha < \kappa\}$, tal que, para todo F subconjunto não enumerável de $[\omega_1]^{<\omega}$, existe $\alpha < \kappa$ tal que $E_\alpha \subset F$;

4. O menor cardinal κ para o qual existe coleção de κ subconjuntos enumeravelmente infinitos de ω_1, $\{E_\alpha : \alpha < \kappa\}$, tal que, para todo F subconjunto não enumerável de ω_1, existe $\alpha < \kappa$ tal que $E_\alpha \subset F$.

Demonstração. O teorema anterior assegura que cada uma das definições acima gera um pequeno cardinal bem definido. Vamos chamar os pequenos cardinais definidos pelos item 1, 2, 3 e 4, respectivamente, de $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$ e $\mathfrak{e}_4$. Nosso objetivo é provar $\mathfrak{e}_1 = \mathfrak{e}_2 = \mathfrak{e}_3 = \mathfrak{e}_4$.

$\mathfrak{e}_1 = \mathfrak{e}_2$: Toda coleção $\{E_\alpha : \alpha < \kappa\}$ que satisfaz o item 2 satisfará automaticamente o item 1. Por outro lado, dada uma coleção $\{E_\alpha : \alpha < \kappa\}$ que satisfaça o item 1, para cada $\alpha < \kappa$, fixe $(E_\alpha^n : n < \omega)$ enumeração de todos os subconjuntos de E_α tais que $|E_\alpha \setminus E_\alpha^n| < \omega$, para todo $\alpha < \kappa$. Assim, $\{E_\alpha^n : \alpha < \kappa, n < \omega\}$ também terá cardinalidade κ (uma vez que $\kappa > \omega$) e satisfará o item 2 pois, dado $F \subset [\omega_1]^{<\omega}$ não enumerável com elementos disjuntos 2 a 2 e $\alpha < \kappa$ tal que $E_\alpha \subset^* F$, o conjunto $E'_\alpha = E_\alpha \cap F \subset F$ será igual a algum E_α^n.

$\mathfrak{e}_2 = \mathfrak{e}_3$: Dada coleção $\{E_\alpha : \alpha < \kappa\}$ que satisfaça o item 3 e $F \subset [\omega_1]^{<\omega}$ não enumerável com elementos disjuntos 2 a 2, qualquer $\alpha < \kappa$ que satisfaça $E_\alpha \subset F$ precisa ser tal que E_α tem elementos disjuntos 2 a 2; portanto o subconjunto de todos os elementos de $\{E_\alpha : \alpha < \kappa\}$ com essa propriedade satisfaz o item 2, o que significa $\mathfrak{e}_2 \leq \mathfrak{e}_3$. Agora, fixe coleção $\{E_\alpha : \alpha < \kappa\}$ que satisfaça o item 2 e tome $F \subset [\omega_1]^{<\omega}$ não enumerável. O lema do Δ-sistema implica a existência de um $F' \subset F$ que é um Δ-sistema com raiz $r \in [\omega_1]^{<\omega}$. O conjunto $F'' = \{x \setminus r : x \in F'\}$ é não enumerável com elementos disjuntos 2 a 2, tendo assim $\alpha < \kappa$ com $E_\alpha \subset F''$. Então, fazendo $E_\alpha^r = \{x \cup r : x \in E_\alpha\}$, vale $E_\alpha^r \subset F' \subset F$. Esse argumento implica que a coleção $\{E_\alpha^x : \alpha < \kappa, x \in [\omega_1]^{<\omega}\}$, que também possui cardinalidade κ pelo fato de valer $\kappa > \omega$, satisfaz o item 3, concluindo que $\mathfrak{e}_3 \leq \mathfrak{e}_2$.

$\mathfrak{e}_3 = \mathfrak{e}_4$: Uma vez que $|[\omega_1]^{<\omega}| = \omega_1$, existe uma bijeção $I : [\omega_1]^{<\omega} \to \omega_1$ entre os mesmos. Dada uma coleção $\{E_\alpha : \alpha < \kappa\}$ que satisfaça o item 3, a coleção das imagens de cada um de seus elementos por I satisfará o item 4 e, de modo análogo, a coleção das imagens inversas de I dos elementos de uma coleção $\{E_\alpha : \alpha < \kappa\}$ que satisfaz o item 4 irá satisfazer o item 3. Isso mostra a igualdade desejada. □

Definição 4.15. Definimos como $\mathfrak{e}$ o pequeno cardinal que satisfaz qualquer uma das 4 propriedades do teorema acima.

4.2.2 O pequeno cardinal f

$\mathfrak{f}$ também possui 4 formas de ser definido, e iremos enunciá-las e provar suas equivalências antes da definição de fato do pequeno cardinal.

A seguinte definição será útil para simplificar a descrição das propriedades:

Definição 4.16. Dizemos que uma coleção A é **rara** se, e somente se, todo $a \in \bigcup_{x \in A} x$ pertencer a no máximo finitos elementos da coleção.

Desse modo, toda coleção de elementos disjuntos 2 a 2 é rara, porém nem toda coleção rara terá elementos disjuntos 2 a 2.

O próximo teorema garantirá que tenhamos $\omega < \mathfrak{f} \leq \mathfrak{c}$:

Teorema 4.17. Cada uma dos 4 enunciados abaixo possui um cardinal κ que o satisfaz, e todo cardinal κ que satisfaça pelo menos um dos mesmos precisa satisfazer $\omega < \kappa \leq \mathfrak{c}$.

1. Existe coleção de κ subconjuntos enumeravelmente infinitos de $[\omega]^{<\omega}$, $\{F_\alpha : \alpha < \kappa\}$, onde cada F_α é raro; tal que nenhuma partição X_1, X_2 do conjunto ω satisfaz, para todo $\alpha < \kappa$, $|\{x \in F_\alpha : x \subset X_i\}| = \omega$, onde $i = 1, 2$;

2. Existe coleção de κ subconjuntos enumeravelmente infinitos de $[\omega]^{<\omega}$, $\{F_\alpha : \alpha < \kappa\}$, onde cada F_α é composto por elementos disjuntos 2 a 2; tal que nenhuma partição X_1, X_2 do conjunto ω satisfaz, para todo $\alpha < \kappa$, $|\{x \in F_\alpha : x \subset X_i\}| = \omega$, onde $i = 1, 2$;

3. Existe coleção de κ subconjuntos enumeravelmente infinitos de $[\omega]^{<\omega}$, $\{F_\alpha : \alpha < \kappa\}$, onde cada F_α é raro; tal que nenhuma partição $\{X_n : n < \omega\}$ do conjunto ω satisfaz, para todo $\alpha < \kappa$, $|\{x \in F_\alpha : x \subset X_i\}| = \omega$, onde $i < \omega$;

4. Existe coleção de κ subconjuntos enumeravelmente infinitos de $[\omega]^{<\omega}$, $\{F_\alpha : \alpha < \kappa\}$, onde cada F_α é composto por elementos disjuntos 2 a 2; tal que nenhuma partição $\{X_n : n < \omega\}$ do conjunto ω satisfaz, para todo $\alpha < \kappa$, $|\{x \in F_\alpha : x \subset X_i\}| = \omega$, onde $i < \omega$.

Demonstração. Para cada item, existe uma coleção $\{F_\alpha : \alpha < 2^\omega\}$ que satisfaz o mesmo, de fato ela será a maior coleção possível, tal que todas as outras coleções $\{F_\alpha : \alpha < \kappa\}$ que satisfarão serão subconjuntos da mesma. Pois, em cada item, uma vez fixada uma partição arbitrária de ω e sendo X_i um elemento da partição, o conjunto $\{\{n\} : n \in X_i\}$ pertencerá à $\{F_\alpha : \alpha < 2^\omega\}$, sendo igual a F_ξ para algum $\xi < 2^\omega$. Porém, para todo X_j com $j \neq i$, teremos $\{x \in F_\xi : x \subset X_j\} = \emptyset$. Isso mostra não apenas que $\kappa = \mathfrak{c}$ satisfaz todos os itens, mas também que todo cardinal κ que satisfaz pelo menos um dos itens deve ser tal que $\kappa \leq \mathfrak{c}$.

A demonstração de que precisa valer $\omega < \kappa$ em qualquer um dos itens é uma consequência do seguinte lema mais geral, que corresponde a uma consequência do Lema 3.2 no artigo (Galvin, 1980), citado sem demonstração, ao se fazer $\aleph = \omega$ no mesmo:

Lema 4.18. Dado um conjunto A arbitrário, toda coleção $\{I_n : n < \omega\}$ de subconjuntos raros enumeravelmente infinitos de $[A]^{<\omega}$ pode ser associada a uma partição $\{A_i : i < \omega\}$ de A de modo que valha, para todo $n < \omega$, $|\{x \in I_n : x \subset A_i\}| = \omega$, para todo $i < \omega$.

Demonstração. Se A for finito, não irá existir nenhuma coleção $\{I_n : n < \omega\}$ como enunciada, logo o lema será verdadeiro por vacuidade. Assim, podemos supor a partir de agora que A é infinito.

Sendo A infinito, para todo subconjunto finito x de A temos não somente que $A \setminus x$ também é infinto, como também que, para toda coleção $\{I_n : n < \omega\}$ como no enunciado, o fato de, por hipótese, I_n ser rara para todo $n < \omega$ implica que só existem finitos $y \in I_n$ com $y \cap x \neq \emptyset$. Tendo isso em mente, fixe uma coleção $\{I_n : n < \omega\}$ como no enunciado. Vamos construir por recursão sobre $k < \omega$ a partição associada de que o lema fala.

O procedimento de recursão construirá sequências $\big((A_i^k : i < \omega) : k < \omega\big)$ que satisfarão as seguintes propriedades:

- Para qualquer k, os termos de $(A_i^k : i < \omega)$ são disjuntos 2 a 2 e $\bigcup_{i<\omega} A_i^k$ é finito;
- Sempre que tivermos $j \leq k$, vale $A_j^{k+1} = A_j^k \cup \bigcup_{m \leq k} x_m^j$, onde $x_m^j \in I_m$, os elementos de $\{x_m^j : j, m \leq k\}$ são disjuntos entre si e disjuntos de $\bigcup_{i<\omega} A_i^k$ e, para cada $k > i$, vale $A_i^{k+1} = A_i^k$.

Faremos $A_i^0 = \emptyset$ para todo $i < \omega$ e o último item acima servirá de passo de indução. Isso é possível pois, uma vez que $\bigcup_{i<\omega} A_i^k$ é finito, podemos encontrar $\{x_m^j : j, m \leq k\}$ disjuntos entre si e disjuntos de $\bigcup_{i<\omega} A_i^k$ tais que $x_m^j \in I_m$ para quaisquer $j, m \leq k$, sabendo que $\bigcup_{\substack{j \leq k \\ m \leq k}} x_m^j$ será finito.

Procedendo dessa forma, a sequência $(A_i = \bigcup_{k<\omega} A_i^k : i < \omega)$ será disjunta 2 a 2 e satisfará $|\{x \in I_n : x \subset A_i\}| = \omega$ para todo i, n e, para criarmos uma partição de A a partir dos termos da sequência, basta incluir $A \setminus \bigcup_{i<\omega} A_i$ em qualquer um dos A_i. □

□

O próximo teorema vai enunciar as 4 afirmações definidoras de $\mathfrak{f}$ e provará a equivalência das mesmas:

Teorema 4.19. É igual o cardinal κ que satisfaz qualquer uma das 4 propriedades abaixo:

1. O menor cardinal κ para o qual existe coleção de subconjuntos enumeravelmente infinitos de $[\omega]^{<\omega}$, $\{F_\alpha : \alpha < \kappa\}$, onde cada F_α é raro; tal que nenhuma partição X_1, X_2 do conjunto ω satisfaz, para todo $\alpha < \kappa$, $|\{x \in F_\alpha : x \subset X_i\}| = \omega$, onde $i = 1, 2$;

2. O menor cardinal κ para o qual existe coleção de subconjuntos enumeravelmente infinitos de $[\omega]^{<\omega}$, $\{F_\alpha : \alpha < \kappa\}$, onde cada F_α é composto por elementos disjuntos 2 a 2; tal que nenhuma partição X_1, X_2 do conjunto ω satisfaz, para todo $\alpha < \kappa$, $|\{x \in F_\alpha : x \subset X_i\}| = \omega$, onde $i = 1, 2$;

3. O menor cardinal κ para o qual existe coleção de subconjuntos enumeravelmente infinitos de $[\omega]^{<\omega}$, $\{F_\alpha : \alpha < \kappa\}$, onde cada F_α é raro; tal que nenhuma partição $\{X_n : n < \omega\}$ do conjunto ω satisfaz, para todo $\alpha < \kappa$, $|\{x \in F_\alpha : x \subset X_i\}| = \omega$, onde $i < \omega$;

4. O menor cardinal κ para o qual existe coleção de subconjuntos enumeravelmente infinitos de $[\omega]^{<\omega}$, $\{F_\alpha : \alpha < \kappa\}$, onde cada F_α é composto por elementos disjuntos 2 a 2; tal que nenhuma partição $\{X_n : n < \omega\}$ do conjunto ω satisfaz, para todo $\alpha < \kappa$, $|\{x \in F_\alpha : x \subset X_i\}| = \omega$, para todo $i < \omega$.

Demonstração. O teorema anterior prova que qualquer κ como acima satisfaz $\omega < \kappa \leq \mathfrak{c}$. Vamos chamar o pequeno cardinal que cada item define, respectivamente, de $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{f}_2$, $\mathfrak{f}_3$ e $\mathfrak{f}_4$. Nosso objetivo é provar $\mathfrak{f}_1 = \mathfrak{f}_2 = \mathfrak{f}_3 = \mathfrak{f}_4$.

Primeiramente, toda coleção $\{F_\alpha : \alpha < \kappa\}$ que satisfaz o item 2 satisfará o item 1, e uma que satisfaz o item 4 satisfará o item 3, isso implica $\mathfrak{f}_1 \leq \mathfrak{f}_2$ e $\mathfrak{f}_3 \leq \mathfrak{f}_4$.

Agora, fixada uma coleção $\{F_\alpha : \alpha < \kappa\}$ que satisfaça o item 1 ou o item 3, uma vez que, para todo $x \in F_\alpha$ só existem finitos $y \in F_\alpha$ com $x \cap y \neq \emptyset$, existe $F'_\alpha \subset F_\alpha$ enumeravelmente infinito, com elementos 2 a 2 disjuntos e, não importa como ele tenha sido construído, se $X \subset \omega$ é tal que $|\{x \in F_\alpha : x \subset X\}| < \omega$, F'_α também satisfará o mesmo. Portanto $\{F'_\alpha : \alpha < \kappa\}$ também satisfará respectivamente o item 2 ou 4 (e sua cardinalidade pode ser menor ou igual a κ), implicando então $\mathfrak{f}_2 \leq \mathfrak{f}_1$ e $\mathfrak{f}_4 \leq \mathfrak{f}_3$. Logo já temos $\mathfrak{f}_1 = \mathfrak{f}_2$ e $\mathfrak{f}_3 = \mathfrak{f}_4$.

A partir de agora na demonstração, vamos supor sempre que λ é um cardinal menor do que o pequeno cardinal do item citado, ou seja, toda coleção $\{F_\alpha : \alpha < \lambda\}$ não irá satisfazer o respectivo item.

No caso dos itens 3 ou 4, dada uma partição $\{A_i : i < \omega\}$ que viola o respectivo item para a coleção $\{F_\alpha : \alpha < \lambda\}$, isto é, vale $|\{x \in F_\alpha : x \subset A_i\}| = \omega$ para quaisquer $\alpha < \lambda$ e $i < \omega$; tomando A_0 e A_1 da mesma e incluindo $\bigcup_{2 \leq i < \omega} A_i$ em qualquer uma destas, sempre teremos uma partição com 2 elementos e a mesma propriedade, implicando então que vale $\mathfrak{f}_3 \leq \mathfrak{f}_1$ e $\mathfrak{f}_4 \leq \mathfrak{f}_2$.

Para os itens 1 ou 2, vamos mostrar que o fato de toda coleção $\{F_\alpha : \alpha < \lambda\}$ violar o respectivo item implicará a mesma violação respectivamente para os itens 3 ou 4; isso implicará $\mathfrak{f}_1 \leq \mathfrak{f}_3$ e $\mathfrak{f}_2 \leq \mathfrak{f}_4$, implicando assim a validade de $\mathfrak{f}_1 = \mathfrak{f}_3$ e $\mathfrak{f}_2 = \mathfrak{f}_4$, concluindo a nossa demonstração.

A estratégia de demonstração para ambos os itens é idêntica e ela segue os seguintes passos:

Fixe $\{F_\alpha : \alpha < \lambda\}$ e $X \subset \omega$ tais que $|\{x \in F_\alpha : x \subset X\}| = \omega$ para todo $\alpha < \lambda$ (logo X é infinito). Tome $F'_\alpha = \{x \in F_\alpha : x \subset X\}$, para todo $\alpha < \lambda$, e uma bijeção entre X e ω. Projetando a coleção $\{F'_\alpha : \alpha < \lambda\}$ através dessa bijeção temos a existência de uma coleção $\{G_\alpha : \alpha < \lambda\}$ (cuja cardinalidade pode ser estritamente menor que λ) admissível aos requisitos do item e, pela própria hipótese que assumimos, existe partição B_0 e B_1 de ω tal que $|\{x \in G_\alpha : x \subset B_i\}| = \omega$ para quaisquer $\alpha < \lambda$ e $i = 0,1$. Retornando aos conjuntos originais a partir da inversa da bijeção entre X e ω, o último resultado implica que X pode ser particionado em dois X_0, X_1 tais que $|\{x \in F_\alpha : x \subset X_i\}| = \omega$ para quaisquer $\alpha < \lambda$ e $i = 0,1$.

O parágrafo acima implica que, para toda função s com domínio $n < \omega$ e imagem em 2, isto é, s pertence à árvore $\bigcup_{n<\omega} 2^n$, podemos construir $X_s \subset \omega$ tal que $|\{x \in F_\alpha : x \subset X_s\}| = \omega$ a partir do seguinte procedimento recursivo:

- $X_\emptyset = \omega$;
- $X_{s^\frown 0}, X_{s^\frown 1}$ é a partição de X_s que o parágrafo anterior construiu.

Com esta construção, $s \supset t$ implica $X_s \subset X_t$, enquanto $s \perp t$ implica $X_s \cap X_t = \emptyset$. Desse modo, qualquer anticadeia infinita de $\bigcup_{n<\omega} 2^n$ nos fornece uma coleção que pode ser estendida para uma partição de tamanho ω (ao incluir os demais elementos de ω em um conjunto específico), o que encerra a demonstração. $\square$

Definição 4.20. Definimos como $\mathfrak{f}$ o pequeno cardinal que satisfaz qualquer uma das 4 propriedades do teorema acima.

4.2.3 Generalização da demonstração de Galvin

Aqui enunciaremos uma hipótese mais fraca que CH na qual existe o contraexemplo de Galvin, junto com a respectiva demonstração.

Para facilitar a exibição da demonstração, adotaremos a seguinte notação:

Definição 4.21. Para quaisquer dois conjuntos A e B, definimos $A \otimes B$ como sendo o conjunto $\{\{a,b\} \in [A \cup B]^2 : a \in A \text{ e } b \in B\}$.

Portanto, dados A, B pertencentes a algum $\mathrm{P}(X,K)$, teremos $A \cup B \in \mathrm{P}(X,K)$ se, e somente se, tivermos $A \otimes B \subset K$.

A construção do contraexemplo de Galvin, descrita na demonstração do Teorema 3.3 de (Galvin, 1980), pode ser levada a termo apenas assumindo a existência de um cardinal κ que satisfaz $\mathrm{cf}(\kappa)=\omega_1$ e $\mathfrak{e}\leq\kappa\leq\mathfrak{f}$ (assim precisa valer $\mathfrak{e}\leq\mathfrak{f}$). É isso que faremos no próximo teorema, cuja demonstração readapta a de Galvin para se adequar a essa "hipótese mínima".

Teorema 4.22. Assumindo a existência de um cardinal κ tal que $\mathrm{cf}(\kappa)=\omega_1$ e $\mathfrak{e}\leq\kappa\leq\mathfrak{f}$, existem $K_1,K_2\subset[\omega_1]^2$ disjuntos tais que $\mathrm{P}(\omega_1,K_1)$ e $\mathrm{P}(\omega_1,K_2)$ são ccc e, pelo Teorema 2.30, $\mathrm{P}(\omega_1,K_1)\times\mathrm{P}(\omega_1,K_2)$ não é ccc. Incluindo $[\omega_1]^2\setminus(K_1\cup K_2)$ em um dos K_1, K_2 se necessário, podemos tomar K_1 e K_2 que formem uma partição de $[\omega_1]^2$.

Demonstração. Definiremos K_1 e K_2 ao mesmo tempo a partir da sequência $((K_1(\alpha),K_2(\alpha)):\alpha<\omega_1)$ onde, para todo $\alpha<\omega_1$, $K_1(\alpha)$ e $K_2(\alpha)$ formam uma partição de α; sequência esta que será construída por recursão sobre $\alpha<\omega_1$. Ao definir $K_1=\{\{\beta,\alpha\}:\beta\in K_1(\alpha)\}$ e $K_2=\{\{\beta,\alpha\}:\beta\in K_2(\alpha)\}$, teremos que K_1 e K_2 serão disjuntos. Note que, com isso, valerá $\{\xi,\eta\}\in K_i$, onde $\xi<\eta$, se, e somente se, $\xi\in K_i(\eta)$ e, fazendo $K_i^\alpha=\{\{\xi,\eta\}:\xi\in K_i(\eta);\eta<\alpha\}$, teremos $\{\xi_1,\ldots,\xi_n\}\in\mathrm{P}(\omega_1,K_i)$, onde $\xi_1,\ldots,\xi_n<\alpha$, se, e somente se, $\{\xi_1,\ldots,\xi_n\}\in\mathrm{P}(\alpha,K_i^\alpha)$, para qualquer $i=1,2$.

Uma vez valendo $\mathfrak{e}\leq\kappa\leq 2^\omega$, existe coleção $\{E_\gamma:\gamma<\kappa\}$ de subconjuntos enumeravelmente infinitos de $[\omega_1]^{<\omega}$, com cada E_α composto de elementos disjuntos 2 a 2; tal que todo subconjunto não enumerável F de $[\omega_1]^{<\omega}$ com elementos disjuntos 2 a 2 possui $\gamma<\kappa$ tal que $E_\gamma\subset F$. E, como $\mathrm{cf}(\kappa)=\omega_1$, existe sequência $(\gamma_\alpha:\alpha<\omega_1)$ cofinal em κ. Para que cada $\mathrm{P}(\omega_1,K_i)$ seja ccc, onde $i=1,2$, os $K_i(\alpha)$ serão construídos recursivamente sobre ω_1 de modo a satisfazer:

$$\begin{aligned}\text{Dados } i\in\{1,2\},\ \mu<\gamma_\alpha \text{ com } E_\mu\subset[\alpha]^{<\omega} \text{ e } Y\in[\alpha]^{<\omega},\\ \text{se } |\{X\in E_\mu: X\otimes Y\subset K_i^\alpha\}|=\omega,\\ \text{então } |\{X\in E_\mu: X\otimes Y\subset K_i^\alpha \text{ e } X\subset K_i(\alpha)\}|=\omega.\end{aligned}$$

Vamos mostrar que o processo de recursão do parágrafo acima pode ser levado a termo. Uma vez construído $((K_1(\xi),K_2(\xi)):\xi<\alpha)$, já temos K_1^α e K_2^α bem definidos. Tome uma enumeração $((i_\eta,\mu_\eta,Y_\eta):\eta<\lambda)$ de todas as triplas $i\in\{1,2\}$, $\mu<\gamma_\alpha$ e $Y\in[\alpha]^{<\omega}$ tais que $E_\mu\subset[\alpha]^{<\omega}$ e $|\{X\in E_\mu: X\otimes Y\subset K_i^\alpha\}|=\omega$. Pelo fato de valer $\mathfrak{e}\leq\kappa\leq\mathfrak{f}$, a cardinalidade λ da enumeração é estritamente menor que κ, portanto estritamente menor que $\mathfrak{f}$ e, aplicando a definição de $\mathfrak{f}$ na coleção

$$\{H_\eta=\{X\in E_{\mu_\eta}: X\otimes Y_\eta\subset K_{i_\eta}^\alpha\}:\eta<\lambda\},$$

temos a existência de uma partição X_1, X_2 de α tal que, para todo $\eta<\lambda$ e $j\in\{1,2\}$, $|\{X\in H_\eta: X\subset X_j\}|=\omega$ (para isso foi fundamental o fato de α ser enumerável, consequência do fato de valer $\alpha<\omega_1$, e $\lambda>0$; quando valer $\lambda=0$, qualquer partição de α servirá aos nossos propósitos). Portanto, ao fazermos $K_1(\alpha) = X_1$ e $K_2(\alpha) = X_2$, todas as propriedades do parágrafo acima serão satisfeitas.

Uma vez construído por recursão $((K_1(\alpha), K_2(\alpha)) : \alpha < \omega)$ e definido K_1 e K_2, vamos provar que $\mathrm{P}(\omega_1, K_i)$ é ccc para $i = 1, 2$. Pelas propriedades recursivas definidas no penúltimo parágrafo, K_1 e K_2 satisfazem a seguinte propriedade:

$$\begin{aligned} \text{Dados } i \in \{1,2\},\ \mu < \gamma_\alpha \text{ com } E_\mu \subset [\alpha]^{<\omega} \text{ e } Y \in [\alpha]^{<\omega}, \\ \text{se } |\{X \in E_\mu : X \otimes Y \subset K_i\}| = \omega, \\ \text{então } |\{X \in E_\mu : X \otimes (Y \cup \{\alpha\}) \subset K_i\}| = \omega. \end{aligned}$$

Agora, tome $\{f_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ coleção de elementos de $\mathrm{P}(\omega_1, K_i)$ arbitrária. Aplicando o lema do Δ-sistema se necessário, podemos supor que a coleção é um Δ-sistema com raiz f e, como para todo $\xi, \eta < \omega_1$ temos $[f_\xi]^2, [f_\eta]^2 \subset K_i$, seremos capazes de provar que $f_\xi \cup f_\eta$ pertence $\mathrm{P}(\omega_1, K_i)$ se, e somente se, valer $(f_\xi \setminus f) \otimes (f_\eta \setminus f) \in K_i$. Desse modo, podemos supor, sem perda de generalidade, que vale $f = \emptyset$.

Fazendo $F = \{f_\alpha : \alpha < \omega_1\}$, uma vez que F possui elementos disjuntos 2 a 2, a hipótese sobre $\{E_\gamma : \gamma < \kappa\}$ implica que existe $\mu < \kappa$ tal que $E_\mu \subset F$. Tome $\alpha < \omega_1$ tal que $\mu < \gamma_\alpha$ e $\beta < \alpha$ para todo $\beta \in \bigcup E_\mu$. Existe um $Y = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \in F$ satisfazendo $\alpha < \alpha_1 < \ldots < \alpha_n$, para o qual podemos provar, aplicando a propriedade do parágrafo acima n vezes indutivamente tomando $Y_1 = \emptyset$ e α_1, $Y_2 = \{\alpha_\xi\}$ e α_2, ..., $Y_n = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}\}$ e α_n respectivamente em cada passo, que vale $|\{X \in E_\mu : X \otimes Y \in K_i\}| = \omega$; e assim que a coleção $F = \{f_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ possui dois elementos compatíveis em $\mathrm{P}(\omega_1, K_i)$, que satisfaz portanto ccc devido à arbitrariedade da coleção que tomamos. □

O teorema acima faz hipóteses sobre ambos $\mathfrak{e}$ e $\mathfrak{f}$ para construirmos o contraexemplo de Galvin. Porém, o fato de ambos serem pequenos cardinais, assim estritamente maiores que ω, implica o seguinte corolário que envolve apenas $\mathfrak{e}$:

Corolário 4.23. Assumindo $\mathfrak{e} = \omega_1$, a demonstração do teorema anterior pode ser levada a termo.

Ao se assumir CH, ambas as hipóteses tanto do teorema quanto do corolário acima são satisfeitas, porém o resultado não será diferente do já obtido por Galvin. A pergunta então a se fazer é: Seria consistente com ZFC as hipóteses do teorema e/ou corolário junto com $\sim$CH? A resposta é sim devido à propriedade denotada na literatura como $\clubsuit$, definida abaixo:

Definição 4.24 (OSTASZEWSKI)**.** Definimos como $\clubsuit$ o seguinte enunciado: Existe uma sequência $(A_\alpha : \alpha < \omega_1)$ tal que, para todo $\alpha < \omega_1$, temos $A_\alpha \subset \alpha$, A_α ilimitado em α e todo $B \subset \omega_1$ de cardinalidade ω_1 possui $\gamma < \omega_1$ tal que $A_\gamma \subset B$.

Portanto, temos o seguinte:

Corolário 4.25. $\clubsuit$ implica $\mathfrak{e} = \omega_1$ (através da quarta definição de $\mathfrak{e}$), logo $\clubsuit$ implica a existência do contraexemplo de Galvin.

E Shelah, em (Shelah, 1980, §5 Teorema único), provou o seguinte resultado:

Teorema 4.26 (SHELAH)**.** É consistente com ZFC a afirmação $\clubsuit$ junto de $\sim$CH.

No parágrafo anterior a este teorema, Shelah descreveu:

> Baumgartner provou anos antes a consistência de uma afirmação mais fraca com $2^\omega > \omega_1$: Existe uma família de ω_1 subconjuntos enumeravelmente infinitos de ω_1 tal que qualquer subconjunto não enumerável de ω_1 contém um deles. (Shelah, 1980, §5)

Esse afirmação mais fraca equivale à afirmação $\mathfrak{e} = \omega_1$, utilizando a quarta definição de $\mathfrak{e}$. Logo, devemos atribuir a Baumgartner o seguinte resultado:

Teorema 4.27 (BAUMGARTNER)**.** É consistente com ZFC a afirmação $\mathfrak{e} = \omega_1$ junto de $\sim$CH.

E, por fim, temos o seguinte:

Corolário 4.28. É consistente com ZFC a existência do contraexemplo de Galvin junto com $\sim$CH.

CAPÍTULO

5

JOGOS DE INFINITAS RODADAS

Este capítulo visa descrever os progressos alcançados em uma classe de jogos de ω_1 rodadas criados com o objetivo de caracterizar que afirmações específicas do tipo:

> Toda sequência de elementos da classe $\mathbf{C}$ de comprimento ω_1 possui subsequência de comprimento ω_1 que satisfaz a propriedade $\mathbb{X}$.

preservem sua validade em forcings enumeravelmente fechados.

Quando $\mathbf{C}$ é uma ordem parcial, knaster e wage em particular são desse tipo, e o objetivo original era utilizar essa classe de jogos para caracterizar en.f indestrutibilidade dessas afirmações e outras similares.

Até o presente momento, os resultados rumo a esse objetivo permanecem inconclusos. Porém alguns resultados intermediários mais simples já obtidos permitem demonstrar alguns resultados interessantes, como a enum.fe absolutividade de diversas afirmações do tipo

> Toda sequência de elementos da classe $\mathbf{C}$ de comprimento ω_1 satisfaz $\mathbb{X}$

que, em particular, implica ccc $\to$ $^{\text{en.f}}$ccc.

5.1 Definições e terminologias necessárias

Este capítulo fará extenso uso de árvores (ver início da Seção 4.1), mais precisamente, de árvores T que possuem altura ω_1 e com todos os seus ramos de mesma altura, interceptando assim todos os $\mathrm{Lev}_\alpha(T)$, onde $\alpha < \omega_1 = \mathrm{ht}(T)$. Como ordens parciais, tais árvores são enumeravelmente fechadas, além de serem de certa forma "sempre expansíveis", no sentido de que, para todo $x \in T$ e todo $\alpha < \omega_1$, sempre existe $y \in \mathrm{Lev}_\alpha(T)$ compatível com x. Por isso atribuiremos a árvores desse tipo o nome "enumeravelmente fechada sempre expansível".

Um exemplo trivial, porém importante para este capítulo, de árvore enumeravelmente fechada sempre expansível é o ordinal ω_1, árvore que consiste de um único ramo.

5.2 Descrição geral do jogo

A classe de jogos segue em geral o seguinte esboço:

- É fixada uma árvore enumeravelmente fechada sempre expansível T. Em cada uma das ω_1 rodadas, o jogador I escolhe um subconjunto de T não vazio e o jogador II em seguida escolhe um elemento desse subconjunto;
- Na rodada α, se X_α representar o conjunto de todos os elementos escolhidos pelo jogador II nas rodadas anteriores, o jogador I precisa escolher $Y \subset T$ que seja anticadeia maximal de $\{y \in T : \forall x \in X_\alpha \; x < y\}$, e em seguida o jogador II toma um elemento de Y. No caso particular $\alpha = 0$, teremos $X_\alpha = \emptyset$ e consequentemente, por vacuidade, o Y que o jogador I deve tomar será anticadeia maximal de T.

O esboço acima ainda não é suficiente para descrever um jogo, ainda faltam os critérios de vitória. O fato de T ser árvore enumeravelmente fechada sempre expansível é o que torna possível que estes jogos tenham ω_1 rodadas.

A definição dos critérios de vitória para estes jogos necessitam de uma classe específica $\mathbf{C}$ e uma afirmação específica $\mathbb{X}$, envolvendo uma função $f : \omega_1 \to \mathbf{C}$, satisfazendo os seguintes requisitos:

- A classe $\mathbf{C}$ é enum.fe indestrutível;
- Fixada uma função $f : \omega_1 \to \mathbf{C}$, se a afirmação "$f : \omega_1 \to \mathbf{C}$ satisfaz $\mathbb{X}$" for válida, ela se mantém válida em qualquer extensão genérica de $\mathbf{V}^{\mathbb{Q}}$, com $\mathbb{Q}$ enumeravelmente fechado;
- $\mathbb{X}$ possui um enunciado $\mathbb{Y}$ associado de modo que, em ZFC, para qualquer $f : \omega_1 \to \mathbf{C}$ temos:

  $$f \text{ satisfaz } \mathbb{X} \text{ se, e somente se, para todo } \alpha < \omega_1,\ f \restriction \alpha \text{ não satisfaz } \mathbb{Y},$$

  e assim f não satisfazer $\mathbb{X}$ equivale a $f \restriction \alpha$ satisfazer $\mathbb{Y}$ para algum $\alpha < \omega_1$. Além disso, $\mathbb{Y}$ precisa ser tal que, dados $\alpha < \omega_1$ e $g : \alpha \to \mathbf{C}$, se o enunciado "$g : \alpha \to \mathbf{C}$ satisfaz $\mathbb{Y}$" for verdadeiro, ele continuará verdadeiro em qualquer extensão genérica de $\mathbf{V}^{\mathbb{Q}}$, onde $\mathbb{Q}$ é enumeravelmente fechado.

Neste capítulo, a afirmação $\mathbb{X}$ estará sempre estritamente ligada à sua $\mathbb{Y}$ correspondente, a maioria das vezes de modo implícito. Uma consequência imediata das hipóteses acima é a seguinte:

Corolário 5.1. A afirmação "$f : \omega_1 \to \mathbf{C}$ satisfaz $\mathbb{X}$" que satisfaz os requisitos acima é enum.fe absoluta.

Além disso, precisamos fixar para T também uma função $F : T \to \mathbf{C}$, a partir da qual se definirá o critério de vitória de cada instância do jogo.

Com tudo isso já somos capazes de definir o jogo, o que será feito na definição abaixo:

Definição 5.2. Dadas uma árvore enumeravelmente fechada sempre expansível T, uma classe $\mathbf{C}$ e afirmações $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ satisfazendo os requisitos da seção, junto com uma função $F : T \to \mathbf{C}$. Definimos o **jogo** $\mathbb{X}$**-**$\mathscr{G}(F)$ de ω_1 rodadas da seguinte forma:

- Os jogadores I e II procedem como descrito no início da seção em cada uma das ω_1 rodadas;
- Defina $S = \{y_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ como o conjunto de todas as escolhas do jogador II nas ω_1 rodadas, que será portanto uma cadeia de T com ω_1 elementos, e com y_α representando a escolha do jogador II na rodada α, satisfazendo portanto $\mathrm{ht}_S(y_\alpha) = \alpha$. Então o jogador I vencerá quando a sequência $(F(y_\alpha) : \alpha < \omega_1)$ satisfizer $\mathbb{X}$; caso contrário, o jogador II vencerá.

5.3 Teoremas do capítulo

Antes de iniciar a série de demonstrações, vamos falar sobre alguns detalhes envolvendo técnica de forcing que serão fundamentais ao longo da seção.

Um fato importante é que a afirmação "f é uma função" é forcing absoluta. Combinando isso com o fato de ω_1 ser cardinal enum.fe absoluto e a classe $\mathbf{C}$ ser enum.fe indestrutível, a afirmação "f é uma função do tipo $f : \omega_1 \to \mathbf{C}$" será en.f indestrutível. Assim a função f preserva esta propriedade em modelos obtidos por extensões genéricas de $\mathbf{V}^{\mathbb{Q}}$ ou, formalmente falando, $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ força que "$\check{f}$ é uma função com domínio ω_1 e imagem contida na classe $\mathbf{C}$", sempre que tomarmos $\mathbb{Q}$ enumeravelmente fechado. O leitor pode encontrar os teoremas necessários para demonstrar esses resultados no livro (Kunen, 1980), para uma abordagem utilizando modelos, e em (Pereira, 2016), para uma abordagem sem modelos, utilizando álgebras booleanas completas.

Outro aspecto importante é o de *bom nome* (tradução literal do termo *nice name* em inglês, utilizado no livro (Kunen, 1980)): um nome para um elemento x de uma extensão genérica com a imagem de cada nome em seu domínio sendo uma anticadeia. Todos os elementos de uma extensão genérica de $\mathbf{V}^{\mathbb{Q}}$ podem ser representados por um bom nome, mas ele não precisa ser único. Usaremos $\ddot{x}$ para representar bons nomes para um elemento da extensão genérica x.

O nosso método para construir bons nomes $\ddot{x}$ a partir de um nome $\dot{x}$ será o seguinte: Fixe primeiramente um q no filtro genérico que força $\dot{x}$ a satisfazer uma certa afirmação que necessitaremos. Agora, para todo $\dot{y} \in \mathrm{dom}(\dot{x})$, faça com que $\{p \in \mathbb{Q} : (\dot{y}, p) \in \ddot{x}\}$ seja uma anticadeia maximal de $\{p \leq q : p \Vdash_{\mathbb{Q}} \dot{y} \in \dot{x}\}$. Assim, sempre quando algum filtro genérico possuir q, tanto $\dot{x}$ quanto $\ddot{x}$ representarão o mesmo conjunto e satisfarão a afirmação inicial na extensão genérica respectiva. Caso $q \in \mathbb{Q}$ forçar que os elementos de x pertencem a um conjunto ou classe indestrutível para o forcing $\mathbb{Q}$, então todo par $(p, \dot{y}) \in \mathbb{Q} \times \mathrm{dom}(\dot{x})$ possui no máximo um elemento z do conjunto/classe tal que $p \Vdash \dot{y} = \check{z}$, e assim poderemos usar os elementos do conjunto/classe no lugar dos elementos de $\mathrm{dom}(\dot{x})$.

Além disso, dada uma ordem parcial $\mathbb{P}$ e $p \in \mathbb{P}$, diremos que um conjunto $D \subset \{q \in \mathbb{P} : q \leq p\}$ é **denso abaixo de** p quando o mesmo for denso no conjunto $\{q \in \mathbb{P} : q \leq p\}$, e que $A \subset \{q \in \mathbb{P} : q \leq p\}$ é uma **anticadeia maximal abaixo de** p quando for uma anticadeia maximal do conjunto $\{q \in \mathbb{P} : q \leq p\}$. Por outro lado, dizemos que o conjunto $E \subset \mathbb{P}$ é **aberto** quando, para todo elemento r de E, todo $r' \leq r$ também for elemento de E. Note que união arbitrária de subconjuntos abertos de $\mathbb{P}$ sempre será aberta.

A partir de agora, assumiremos que $\mathbf{C}$, $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ satisfazem todos os requisitos descritos na seção anterior.

5.3.1 Demonstrações gerais

Dado um forcing $\mathbb{Q}$ enumeravelmente fechado arbitrário, como representar, em $\mathbf{V}$, as funções $f : \omega_1 \to \mathbf{C}$ de uma forma mais clara que os nomes $\dot{f}$ ou até mesmo que bons nomes $\ddot{f}$? Sabemos que toda função $f : \omega_1 \to \mathbf{C}$ de $\mathbf{V}$ também o será em qualquer extensão genérica de $\mathbf{V}^{\mathbb{Q}}$, porém elas não precisam ser as únicas existentes. Nos preocuparemos com isso inicialmente.

Teorema 5.3. Fixe um forcing $\mathbb{Q}$ enumeravelmente fechado. Para toda função $f : \omega_1 \to \mathbf{C}$ de uma extensão genérica de $\mathbf{V}^{\mathbb{Q}}$, um nome $\dot{f}$ para a mesma e q no filtro genérico tal que $q \Vdash \dot{f} : \omega_1 \to \mathbf{C}$, temos que, para todo $\alpha < \omega_1$, o conjunto

$$D_\alpha(\dot{f}) = \{p \leq q : \exists z \in \mathbf{C}\ p \Vdash \dot{f}(\check{\alpha}) = \check{z}\}$$

é denso e aberto abaixo de q. Além disso, se tomarmos para cada $D_\alpha(\dot{f})$ uma A_α anticadeia maximal do mesmo e denotarmos, para cada $p \in A_\alpha$, como $z_{(\alpha,p)}$ o único elemento de $\mathbf{C}$ tal que $p \Vdash \dot{f}(\check{\alpha}) = \check{z}_{(\alpha,p)}$, então o conjunto

$$\{((\alpha, z_{(\alpha,p)})\check{}, p) : \alpha < \omega_1 \wedge p \in A_\alpha\}$$

é bom nome para f.

Demonstração. Sabemos que ω_1, como classe, é enum.fe indestrutível. Juntando isso à hipótese de que a classe $\mathbf{C}$ também é enum.fe indestrutível e a afirmação "x é par ordenado" ser forcing absoluta, temos que a classe de todos os pares ordenados (α, z), com $\alpha < \omega_1$ e $z \in \mathbf{C}$, também é enum.fe indestrutível. Isso é o que nos permitirá construir um bom nome para f cujo domínio consiste exclusivamente de elementos da forma $(\alpha, z)\check{}$, onde $z \in \mathbf{C}$.

A afirmação $q \Vdash \dot{f} : \omega_1 \to \mathbf{C}$ implica que, para todo $\alpha \in \omega_1$, $q \Vdash \check{\alpha} \in \mathrm{dom}(\dot{f})$. Ou seja, pelo parágrafo acima, todo $r \leq q$ possui $r' \leq r$ com um único $z_{(\alpha,r')} \in \mathbf{C}$ tal que $r' \Vdash \dot{f}(\check{\alpha}) = \check{z}_{(\alpha,r')}$, valendo $r'' \Vdash \dot{f}(\check{\alpha}) = \check{z}_{(\alpha,r')}$ para todo $r'' \leq r'$. Portanto, o conjunto $D_\alpha(\dot{f})$ definido no enunciado é denso e aberto abaixo de q.

Agora, se tomarmos para cada $D_\alpha(\dot{f})$ uma anticadeia maximal A_α do mesmo, qualquer filtro genérico que contenha q terá um e somente um elemento de cada A_α, e assim o bom nome

$$\{((\alpha, z_{(\alpha,p)})\check{}, p) : \alpha < \omega_1 \wedge p \in A_\alpha\}$$

representará f na dada extensão genérica. E tanto $\dot{f}$ como o bom nome acima representarão a mesma função em qualquer outra extensão cujo filtro genérico contenha q. $\square$

No próximo teorema, vamos usar o resultado acima para mostrar como cada função f numa extensão genérica de $\mathbf{V}^{\mathbb{Q}}$ pode ser representada por uma função $F : T \to \mathbf{C}$ pertencente à classe de todos os conjuntos $\mathbf{V}$, onde T é árvore enumeravelmente fechada sempre expansível.

Teorema 5.4. Dada um forcing enumeravelmente fechado $\mathbb{Q}$, toda função $f : \omega_1 \to \mathbf{C}$ de uma extensão genérica de $\mathbf{V}^{\mathbb{Q}}$, com $q \in \mathbb{Q}$ forçando a validade de $f : \omega_1 \to \mathbf{C}$, pode ser representada por uma função $F : T \to \mathbf{C}$ de $\mathbf{V}$, onde T é uma árvore enumeravelmente fechada sempre expansível, no sentido de que existe função entre ordens parciais $p_F : T \to \mathbb{Q}$ que satisfaz:

- $y \leq x$ ($x \leq y$ na ordem de árvore) implica $p_F(y) \leq p_F(x)$;
- Vale $x \perp y$ se, e somente se, vale $p_F(x) \perp p_F(y)$.

E tal que q força que o bom nome

$$\{((\mathrm{ht}_T(x), F(x))\check{}, p_F(x))\}$$

representa a função f na respectiva extensão genérica e, para todo $\alpha < \omega_1$, o conjunto $\{p_F(x) : x \in \mathrm{Lev}_\alpha(T)\}$ é anticadeia maximal abaixo de q.

Demonstração. Primeiramente, vamos provar o seguinte lema:

Lema 5.5. Para toda ordem parcial $\mathbb{Q}$ enumeravelmente fechada, dado $(D_n : n < \omega)$ sequência de conjuntos densos abertos abaixo de um $q \in \mathbb{Q}$, $\bigcap_{n<\omega} D_n$ também é denso aberto abaixo de q.

Demonstração. Se $r \leq q$ pertencer a $\bigcap_{n<\omega} D_n$, segue que $r' \leq r$ também pertencerá, uma vez que r' pertencerá a cada um dos D_n. Isso prova que $\bigcap_{n<\omega} D_n$ é aberto.

Por outro lado, uma vez que, para todo $r \leq q$ e $n < \omega$, existe $s \in D_n$ com $s \leq r$ e todo $s' \leq s$ também pertencerá a D_n; se construirmos por recursão uma sequência $\leq$-decrescente $(r_n : n < \omega)$ tal que, para todo $n < \omega$ e $i < n$, vale $r_n \in D_n$ e $r_n \leq r_i, r$; o r_ω de $\mathbb{Q}$ menor ou igual a todos estes, que sabemos existir, irá pertencer a $\bigcap_{n<\omega} D_n$, mostrando que $\bigcap_{n<\omega} D_n$ é denso abaixo de q. $\square$

Uma vez que, para qualquer A anticadeia maximal abaixo de q, o conjunto $A{\downarrow} = \{r \in \mathbb{Q} : \exists s \in A\ r \leq s\}$ é denso aberto abaixo de q, o lema acima implica que, para todo $\alpha < \omega_1$ com $\alpha > 0$ e toda sequência de anticadeias maximais abaixo de q $(A_\xi : \xi < \alpha)$, o conjunto $\bigcap_{\xi<\alpha}(A_\xi{\downarrow})$ é denso aberto abaixo que q, e o mesmo pode ser dito de $\left(\bigcap_{\xi<\alpha}(A_\xi{\downarrow})\right) \cap D_\alpha(\dot{f})$.

Devido ao parágrafo anterior, podemos construir, por recursão sobre ω_1, uma sequência $(A_\alpha : \alpha < \omega_1)$ que satisfaz os seguintes requisitos:

- A_0 é anticadeia maximal de $D_0(\dot{f})$;
- Para todo $\alpha > 0$, A_α é anticadeia maximal de $\left(\bigcap_{\xi<\alpha}(A_\xi{\downarrow})\right) \cap D_\alpha(\dot{f})$.

E consequentemente, o Teorema 5.3 implica que

$$\ddot{f} = \{(\check{(\alpha, z_{(\alpha,p)})}, p) : \alpha < \omega_1 \wedge p \in A_\alpha\}$$

é bom nome para f.

Com essas definições, para quaisquer $\xi < \eta < \omega_1$ e $r \in A_\eta$, existe um único $s \in A_\xi$ tal que $r \leq s$, sendo incompatível com todos os demais. Desse modo, definindo T como $T = \{(\alpha, r) : \alpha < \omega_1, r \in A_\alpha\}$, munido de ordem que satisfaz $(\xi, r) \leq (\eta, s)$ se, e somente se, $\xi \leq \eta$ e $r \geq_{\mathbb{Q}} s$, então T será árvore e cada (α, r) terá altura α, logo $\mathrm{ht}(T) = \omega_1$. Dada uma sequência $\leq$-crescente $((\alpha_n, r_n) : n < \omega)$, para quaisquer $\beta \geq \sup_{n<\omega}(\alpha_n)$ e $r_\omega \in \mathbb{Q}$ com $r_\omega \leq_{\mathbb{Q}} r_n$ para cada $n < \omega$, existe pelo menos um $s \in A_\beta$ compatível com r_ω, e consequentemente compatível com todo r_n, e só pode valer $s \leq r_n$, implicando que T é enumeravelmente fechada sempre expansível.

Com tudo isso, já somos capazes de definir tanto F quanto p_F, elas serão as seguintes:

$$\begin{array}{ccccccccc} F & : & T & \to & \mathbf{C} & ; & p_F & : & T & \to & \mathbb{Q} \\ & & (\xi, r) & \mapsto & z_{(\xi,r)} & ; & & & (\xi, r) & \mapsto & r \end{array}.$$

Com essas definições, o bom nome $\ddot{f}$ descrito acima é de fato igual ao bom nome

$$\{(\check{(\mathrm{ht}_T(x), F(x))}, p_F(x)) : x \in T\}$$

do enunciado. Além disso, p_F é uma função entre ordens parciais que satisfaz os requisitos do enunciado e o conjunto $\{p_F(x) : x \in \mathrm{Lev}_\alpha(T)\} = A_\alpha$ é uma anticadeia maximal abaixo de q, para todo $\alpha < \omega_1$. Concluindo a demonstração. □

Uma função f da extensão genérica representada por $F : T \to \mathbf{C}$ conforme o teorema acima será tal que o filtro genérico interceptará apenas um ramo de T (que não precisa necessariamente existir em $\mathbf{V}$. De fato, o ramo não pertencerá à $\mathbf{V}$ se a f em si também não pertencer). E também, para cada $x \in T$, $F(x)$ tem o mesmo valor que terá $f(\mathrm{ht}_T(x))$ caso o x pertencer a este ramo. A recíproca desse fato também será verdadeira no seguinte sentido:

Teorema 5.6. Dada uma árvore enumeravelmente fechada sempre expansível T, toda função $F : T \to \mathbf{C}$ representa uma função $f : \omega_1 \to \mathbf{C}$ em $\mathbf{V}^T$ no mesmo sentido que o teorema acima, com p_F sendo a identidade e valendo $q = \mathbb{1}_T$.

Demonstração. Consequência imediata do fato que, por T ser árvore enumeravelmente fechada sempre expansível, todo $\mathrm{Lev}_\alpha(T)$ é anticadeia maximal de T. $\square$

Antes de prosseguirmos, precisamos fazer as seguintes definições:

Definição 5.7. Dado um conjunto parcialmente ordenado X e $x \in X$, denotaremos por $s(x)$ o segmento inicial de x, isto é, o conjunto $\{y \in X : y < x\}$.

Definição 5.8. Dadas uma árvore enumeravelmente fechada sempre expansível T, uma função $F : T \to \mathbf{C}$ e uma cadeia X de T, denotaremos como $F_X : \mathrm{ht}(X) \to \mathbf{C}$ a função que satisfaz, para todo $\xi < \mathrm{ht}(X)$, $F_X(\xi) = F(x_\xi)$, onde x_ξ é o único elemento de X com $\mathrm{ht}_X(x_\xi) = \xi$.

Definição 5.9. Dadas uma árvore enumeravelmente fechada sempre expansível T e uma afirmação $\mathbb{A}$ a respeito de funções $f : \omega_1 \to \mathbf{C}$, dizemos que a função $F : T \to \mathbf{C}$ é **$\mathbb{A}$-ramificada** quando, para todo ramo S de T, a afirmação "$F_S : \omega_1 \to \mathbf{C}$ satisfaz $\mathbb{A}$" é válida.

Teorema 5.10. Tome forcing enumeravelmente fechado $\mathbb{Q}$, uma classe $\mathbf{C}$ e afirmação $\mathbb{X}$ (com $\mathbb{Y}$ correspondente) que satisfaçam os requisitos da Seção 5.2. Toda função $f : \omega_1 \to \mathbf{C}$ em uma extensão genérica de $\mathbf{V}^{\mathbb{Q}}$ que satisfaz $\mathbb{X}$ pode ser representada em $\mathbf{V}$ por uma função $\mathbb{X}$-ramificada $F : T \to \mathbf{C}$. Enquanto que toda função $f : \omega_1 \to \mathbf{C}$ de uma extensão genérica de $\mathbf{V}^{\mathbb{Q}}$ que satisfaz $\sim\mathbb{X}$ pode ser representada em $\mathbf{V}$ por uma função $\sim\mathbb{X}$-ramificada $F : T \to \mathbf{C}$.

Por outro lado, toda função $\mathbb{X}$-ramificada $F : T \to \mathbf{C}$ em $\mathbf{V}$ representa uma função $f : \omega_1 \to \mathbf{C}$ que satisfaz $\mathbb{X}$ nas extensões genéricas de $\mathbf{V}^T$, e toda função $\sim\mathbb{X}$-ramificada $F : T \to \mathbf{C}$ representa uma função $f : \omega_1 \to \mathbf{C}$ que satisfaz $\sim\mathbb{X}$ em qualquer extensão genérica de $\mathbf{V}^T$.

Demonstração. Dada uma função $f : \omega_1 \to \mathbf{C}$ em uma extensão genérica de $\mathbf{V}^{\mathbb{Q}}$, fixe um nome $\dot{f}$ para f e um q no filtro genérico que força que "$\dot{f} : \omega_1 \to \mathbf{C}$ e $\dot{f}$ satisfaz $\mathbb{X}$". Aplicando o Teorema 5.4 com $\dot{f}$ e q, f pode ser representada por uma função $F : T \to \mathbf{C}$. Digo que essa F é $\mathbb{X}$-ramificada.

De fato, suponha por absurdo que isso não ocorra. Então existe $x \in T$ tal que $F_{s(x)}$ satisfaz $\mathbb{Y}$. Uma vez que o Teorema 5.4 diz que vale $p_F(x) \leq q$, então $p_F(x)$ força que $\dot{f}$ satisfaz $\sim\mathbb{X}$, um absurdo.

Agora, dado um $f : \omega_1 \to \mathbf{C}$ na extensão genérica que não satisfaz $\mathbb{X}$, fixe um nome $\dot{f}$ para o mesmo com q no filtro genérico forçando que "$\dot{f} : \omega_1 \to \mathbf{C}$ e $\dot{f}$ satisfaz $\sim\mathbb{X}$". Com isso, o conjunto D de todos os $r \leq q$ tais que existe um $\alpha_r < \omega_1$ tal que r força que "$\dot{f} \restriction \check{\alpha}_r$ satisfaz $\mathbb{Y}$", é denso abaixo de q; seja A uma anticadeia maximal desse D, que será portanto anticadeia maximal abaixo de q. O Teorema 5.4 implica, para cada par $(r, \dot{f})$, a existência de uma $F^r : T_r \to \mathbf{C}$ que represente $\dot{f}$. Cada F^r será tal que $F^r_{s(x)}$ satisfará $\mathbb{Y}$ para todo $x \in \mathrm{Lev}_{\alpha_r}(T_r)$, caso contrário seria falso que r força "$\dot{f} \restriction \check{\alpha}_r$ satisfaz $\mathbb{Y}$". Uma vez que A é anticadeia maximal abaixo de q e, para quaisquer $r, s \in A$, cada elemento da imagem de p_{F^r} será incompatível com cada elemento da imagem de p_{F^s}, o conjunto $T = \bigcup_{r \in A} T_r$ munido com as mesmas ordens de cada T_r também será árvore enumeravelmente fechada sempre expansível, $F = \bigcup_{r \in A} F^r$ será uma função $\sim\mathbb{X}$-ramificada e $p_F = \bigcup_{r \in A} p_{F^r}$ irá satisfazer as mesmas propriedades que na demonstração do Teorema 5.4.

Por sua vez, dada uma função $F : T \to \mathbf{C}$ $\mathbb{X}$-ramificada, suponha por absurdo que ela represente uma função $f : \omega_1 \to \mathbf{C}$ que satisfaz $\sim\mathbb{X}$ em alguma extensão genérica de $\mathbf{V}^T$. Fixe $\alpha < \omega_1$ tal que $f \restriction \alpha$ satisfaz $\mathbb{Y}$. Temos que existirá algum $x \in \mathrm{Lev}_\alpha(T)$ com $F_{s(x)}$ satisfazendo $\mathbb{Y}$, absurdo com o fato da F ser $\mathbb{X}$-ramificada. Suponha agora que F é $\sim\mathbb{X}$-ramificada; o conjunto $B = \{x \in T : F_{s(x)} \text{ satisfaz } \mathbb{Y}\}$ não precisa ser anticadeia (dependendo da afirmação $\mathbb{X}$, ele pode ser até denso aberto), porém o fato de F ser $\sim\mathbb{X}$-ramificada implica que $\mathrm{Lev}_0(B)$ sempre é anticadeia maximal de T, de onde segue que f satisfará $\sim\mathbb{X}$ em toda extensão genérica de $\mathbf{V}^T$. □

O teorema acima implica o seguinte resultado:

Teorema 5.11. Tanto a afirmação

$$\text{Toda função } f : \omega_1 \to \mathbf{C} \text{ satisfaz } \mathbb{X}$$

quanto a afirmação

$$\text{Toda função } f : \omega_1 \to \mathbf{C} \text{ satisfaz } \sim\mathbb{X}$$

são enum.fe absolutas.

Demonstração. Provaremos somente a primeira, a segunda terá a mesma demonstração que a primeira exceto que teremos $\sim\mathbb{X}$ onde tivermos $\mathbb{X}$ e vice-versa.

Caso toda função $f : \omega_1 \to \mathbf{C}$ de $\mathbf{V}$ satisfizer $\mathbb{X}$, suponha por absurdo que alguma extensão genérica de $\mathbf{V}^{\mathbb{Q}}$, com $\mathbb{Q}$ enumeravelmente fechado, possua uma função $g : \omega_1 \to \mathbf{C}$ que não satisfaça $\mathbb{X}$. O teorema anterior implica que g pode ser representada por uma função $G : T \to \mathbf{C}$ $\sim\mathbb{X}$-ramificada, logo T possui pelo menos um ramo X com G_X violando $\mathbb{X}$, absurdo.

Por outro lado, se uma função $f : \omega_1 \to \mathbf{C}$ em $\mathbf{V}$ não satisfaz $\mathbb{X}$, devido à absolutividade de $\mathbb{X}$ descrita no Corolário 5.1, f irá preservar essa propriedade em qualquer extensão genérica de $\mathbf{V}^{\mathbb{Q}}$, com $\mathbb{Q}$ enumeravelmente fechado. Logo nenhuma extensão genérica de $\mathbf{V}^{\mathbb{Q}}$ satisfará a respectiva afirmação do enunciado, concluindo assim a demonstração de absolutividade. □

Esse teorema também possui uma demonstração alternativa, que não requer o uso do Teorema 5.10.

Demonstração Alternativa. Para a primeira afirmação, se uma função $f : \omega_1 \to \mathbf{C}$ de $\mathbf{V}$ não satisfaz $\mathbb{X}$, então, devido ao Corolário 5.1, ela não satisfará $\mathbb{X}$ em toda extensão genérica de forcing enumeravelmente fechado, assim a afirmação também não será verdadeira nas extensões genéricas.

Por outro lado, assumindo que todas as funções $f : \omega_1 \to \mathbf{C}$ de $\mathbf{V}$ satisfazem $\mathbb{X}$, fixe $\mathbb{Q}$ enumeravelmente fechado. Dado nome $\dot{g}$ com $q \in \mathbb{Q}$ tal que q força $\dot{g} : \omega_1 \to \mathbf{C}$, suponha por absurdo que g não satisfaça $\mathbb{X}$ em alguma extensão genérica de $\mathbf{V}^{\mathbb{Q}}$ cujo filtro genérico possua q. Então existe $r \leq q$ com um $\alpha_r < \gamma$ tal que "$r \Vdash \dot{g} \restriction \check{\alpha}_r$ satisfaz $\mathbb{Y}$". Podemos construir então a sequência $\leq$-decrescente $(r_\xi : \xi < \omega_1)$ tal que, para todo $\xi < \omega_1$, tem-se $r_\xi \leq r$ e $r_\xi \Vdash \dot{g}(\check{\xi}) = \check{z}_\xi$, onde $z_\xi \in \mathbf{C}$ (que sabemos existir por $\mathbf{C}$ ser enum.fe indestrutível). Assim a sequência $(z_\alpha : \alpha < \omega_1)$ irá satisfazer $\mathbb{X}$, um absurdo com o fato de $(z_\eta : \eta < \alpha_r)$ precisar satisfazer $\mathbb{Y}$. Concluindo assim a demonstração envolvendo a primeira afirmação.

Agora, para a segunda afirmação, se alguma $f : \omega_1 \to \mathbf{C}$ não satisfaz $\sim\mathbb{X}$, ela continuará não satisfazendo em qualquer extensão genérica de forcing enumeravelmente fechado, portanto a afirmação também não será verdadeira nas mesmas.

Por outro lado, assumindo que toda função $f : \omega_1 \to \mathbf{C}$ de $\mathbf{V}$ satisfaz $\sim\mathbb{X}$, fixe $\mathbb{Q}$ enumeravelmente fechado. Dado nome $\dot{g}$ com $q \in \mathbb{Q}$ tal que q força $\dot{g} : \omega_1 \to \mathbf{C}$. Como na demonstração da afirmação anterior, podemos construir, para todo $r \leq q$, uma sequência $\leq$-decrescente $(r_\xi : \xi < \omega)$ junto com uma sequência $(z_\xi : \xi < \omega_1)$ de elementos de $\mathbf{C}$ tal que, para todo $\xi < \omega_1$, $r_\xi \leq r$ e r_ξ força que $\dot{g}(\check{\xi}) = \check{z}_\xi$. Uma vez que existe α_r tal que $(z_\eta : \eta < \alpha_r)$ satisfaz $\mathbb{Y}$, r_{α_r} força que "$\dot{g}$ satisfaz $\sim\mathbb{X}$", de modo que o conjunto de todos os $r \leq q$ que forçam $\dot{g}$ a satisfazer $\sim\mathbb{X}$ é denso abaixo de q, portanto g satisfaz $\sim\mathbb{X}$ em toda extensão genérica de $\mathbf{V}^{\mathbb{Q}}$ cujo filtro genérico possui q. Concluindo a demonstração relativa à segunda afirmação. □

Corolário 5.12. Tanto a afirmação

$$\text{Existe função } f : \omega_1 \to \mathbf{C} \text{ que satisfaz } \mathbb{X}$$

quanto

$$\text{Existe função } f : \omega_1 \to \mathbf{C} \text{ que satisfaz } \sim\mathbb{X}$$

são enum.fe absolutas.

O Teorema 5.10 pode ser estendido na seguinte forma:

Teorema 5.13. Para cada forcing enumeravelmente fechado $\mathbb{Q}$ e cada função $F : T \to \mathbf{C}$ que representa uma $f : \omega_1 \to \mathbf{C}$ em uma extensão genérica de $\mathbf{V}^{\mathbb{Q}}$, para o nome $\dot{f}$ e um $q \in \mathbb{Q}$ dados, se q forçar $\dot{f}$ a satisfazer $\mathbb{X}$, então F é $\mathbb{X}$-ramificada. Por outro lado, se q forçar $\dot{f}$ a satisfazer $\sim\mathbb{X}$, então T possui uma subárvore U que é um conjunto denso de T (assim U também é enumeravelmente fechada sempre expansível) tal que $F \restriction U$ é $\sim\mathbb{X}$-ramificada.

Demonstração. No caso em que q força "$\dot{f}$ satisfaz $\mathbb{X}$", se algum $x \in T$ for tal que $F_s(x)$ satisfaz $\mathbb{Y}$, então $p_F(x)$ forçará que $\dot{f}$ satisfaz $\sim\mathbb{X}$, absurdo.

Supondo agora que q força "$\dot{f}$ satisfaz $\sim\mathbb{X}$", defina para cada $\alpha < \omega$

$$B_\alpha = \{r \leq q : r \Vdash \dot{f} \upharpoonright \check{\alpha} \text{ satisfaz } \mathbb{Y}\}.$$

Cada B_α será aberto, então o conjunto $B = \bigcup_{\alpha<\omega_1} B_\alpha$ também será, e a nossa hipótese implica que B também é denso abaixo de q. Defina agora

$$B'_\alpha = \{x \in \mathrm{Lev}_\alpha(T) : \exists r \in B_\alpha\ r \leq p_F(x)\}.$$

Para todo $x \in T$, existe $r \in B$ tal que $r \leq p_F(x)$, então r pertence a algum B_α. Se tivermos $\alpha \leq \mathrm{ht}_T(x)$, então o $y \leq x$ com $\mathrm{ht}(y) = \alpha$ pertence a B'_α e é compatível com x; caso valer $\alpha > \mathrm{ht}_T(x)$, o fato de $\{p_F(x) : x \in \mathrm{Lev}_\alpha(T)\}$ ser anticadeia maximal abaixo de q implica que existe $y \in \mathrm{Lev}_\alpha(T)$ com $p_F(y)$ compatível com r, logo compatível também com $p_F(x)$, de onde temos $x < y$ e qualquer $s \leq r, p_F(y)$ pertencerá a B_α, assim existe $y \in B'_\alpha$ compatível com x.

Pelo parágrafo acima, o conjunto $B' = \bigcup_{\alpha<\omega_1} B'_\alpha$ é tal que $C = \mathrm{Lev}_0(B')$ é anticadeia maximal de T e, por definição, todo elemento x de B' satisfaz o fato de $F_{s(x)}$ satisfazer $\mathbb{Y}$. Por isso $C\!\downarrow$ é denso aberto de T e, se fizermos $U = (\bigcup_{x\in C} s(x)) \cup (C\!\downarrow)$, U continuará sendo conjunto denso e será uma subárvore enumeravelmente fechada sempre expansível $\sim\mathbb{X}$-ramificada de T, provando o desejado. $\square$

Agora, antes de prosseguirmos, precisamos de alguns teoremas que mostram como podemos representar uma estratégia para o jogador I no jogo $\mathbb{X}$-$\mathscr{G}(F)$.

Teorema 5.14. Dada a função $F : T \to \mathbf{C}$, no jogo $\mathbb{X}$-$\mathscr{G}(F)$, toda estratégia para o jogador I pode ser descrita como um conjunto denso D de T e vice versa, no seguinte sentido:

- Os elementos de $\mathrm{Lev}_\alpha(T)$ correspondem ao conjunto de todos os elementos que o jogador II pode escolher na rodada α, caso o jogador I seguir essa estratégia;
- Na rodada α, se o jogador II escolheu nas rodadas anteriores os termos $(x_\xi : \xi < \alpha)$, o jogador I irá escolher o conjunto $\{y \in \mathrm{Lev}_\alpha(D) : \forall\xi < \alpha\ x_\xi < y\}$. Em particular, quando $\alpha = 0$, esse conjunto corresponde a $\mathrm{Lev}_0(D)$.

Demonstração. Antes de iniciarmos a demonstração, vamos provar o seguinte lema:

Lema 5.15. Dada uma árvore enumeravelmente fechada sempre expansível T, todo subconjunto denso D da mesma é uma árvore enumeravelmente fechada sempre expansível.

Demonstração. Fixado denso $D \subset T$, só precisamos provar que toda cadeia enumerável de D não é maximal. De fato, uma cadeia enumerável $C \subset D$ não será maximal em T, e temos portanto um $x \in T$ com $y < x$ para todo $y \in C$. Como D é denso, existe $z \in D$ com $x \leq z$ e então C não será maximal também em D. $\square$

Fixe um conjunto denso D de T. Pelo lema acima, D é uma árvore enumeravelmente fechada sempre expansível, logo essa correspondência não irá obrigar o jogador I a escolher um conjunto vazio em nenhum momento. Então, se provarmos que todo conjunto $\{y \in \mathrm{Lev}_\alpha(D) : \forall\xi < \alpha\ x_\xi < y\}$ é anticadeia maximal dentro de $\{y \in T : \forall\xi < \alpha\ x_\xi < y\}$, onde $\{x_\xi : \xi < \alpha\}$ é cadeia de D com $\mathrm{ht}_D(x_\xi) = \xi$, provaremos que D serve como estratégia para o jogador I. Isso é verdade quando $\alpha = 0$, uma vez que D ser denso implica que $\mathrm{Lev}_0(D)$ é anticadeia maximal em T. Nos demais casos, fixado $y \in T$ com $x_\xi < y$ para todo $\xi < \alpha$ (sempre existe pelo menos um), D ser denso implica que ele possui um z com $y \leq z$, e precisa valer $\mathrm{ht}_D(z) \geq \alpha$, de onde segue que o elemento $z' \leq z$ de D com $\mathrm{ht}_D(z') = \alpha$ é compatível com y. Portanto, $\{y \in \mathrm{Lev}_\alpha(D) : \forall\xi < \alpha\ x_\xi < y\}$ é uma anticadeia maximal dentro de $\{y \in T : \forall\xi < \alpha\ x_\xi < y\}$, como queríamos.

Agora tome uma estratégia para o jogador I e seja B a união de todos os subconjuntos de T que o jogador I pode escolher dentro dessa estratégia. Dada uma rodada α, se o jogador II escolheu até o momento os termos $(x_\xi : \xi < \alpha)$, sabemos que $\xi < \eta < \alpha$ implica $x_\xi < x_\eta$. Então $(x_\xi : \xi < \alpha)$ é $<$-crescente. Por outro lado, dados x_α e y_α que o jogador II pode escolher na rodada α, tendo escolhido nas rodadas anteriores respectivamente as cadeias $\{x_\xi : \xi < \alpha\}$ e $\{y_\xi : \xi < \alpha\}$, tome ξ a menor rodada na qual há divergência entre as cadeias, se elas forem iguais, tome $\xi = \alpha$. Então x_ξ e y_ξ fazem parte da mesma anticadeia escolhida pelo jogador I na rodada ξ, e assim x_α e y_α são incompatíveis. Podemos usar esses fatos para provar por indução transfinita que, para todo $\alpha < \omega_1$, $\mathrm{Lev}_\alpha(B)$ corresponde a todas as escolhas possíveis do jogador II na rodada α, e isso prova que B é árvore enumeravelmente fechada sempre expansível. Só falta provar que B é denso. Se todo $\mathrm{Lev}_\alpha(B)$ for anticadeia maximal em T, dado $y \in T$ arbitrário, ao pegarmos um $\alpha < \omega_1$ grande o bastante de modo que $\min\{\mathrm{ht}_T(x) : x \in \mathrm{Lev}_\alpha(B)\} \geq \mathrm{ht}_T(y)$, então qualquer $z \in \mathrm{Lev}_\alpha(B)$ compatível com y satisfará $y \leq z$, e então B será denso em T. Assim, basta provar que todo $\mathrm{Lev}_\alpha(B)$ é anticadeia maximal em T. Provaremos isso por indução transfinita.

No caso $\alpha = 0$, isso é óbvio pelo fato do jogador I escolher uma anticadeia maximal em T na rodada 0. Quando $\alpha = \beta + 1$, as escolhas possíveis do jogador II se tratam de anticadeias maximais abaixo de algum $x \in \mathrm{Lev}_\beta(B)$, que é uma anticadeia maximal, logo $\mathrm{Lev}_\alpha(B)$ também será anticadeia maximal. Agora, se $\alpha = \gamma$ ordinal limite, fixado $(\xi_n : n < \omega)$ sequência cofinal em α e $y \in T$ arbitrário, construa por indução as sequências $<$-crescentes $(x_n : n < \omega)$ em B e $(z_n : n < \omega)$ em T tais que, para todo n, $x_n \in \mathrm{Lev}_{\xi_n}(B)$ e $y, x_i, z_i \leq z_n$ para todo $i \leq n$, algo possível uma vez que cada $\mathrm{Lev}_{\xi_n}(B)$ é anticadeia maximal em T. Dado z_ω em T maior que todos os $(z_n : n < \omega)$, segue que a única anticadeia possível para o jogador I escolher na rodada α nessa estratégia, quando o jogador II escolheu todos os termos de $(x_{\xi_n} : n < \omega)$, irá conter ao menos um elemento compatível com z_ω, e então compatível com y, logo $\mathrm{Lev}_\alpha(B)$ é anticadeia maximal. Isso conclui a demonstração. □

Teorema 5.16. Dada uma árvore enumeravelmente fechada sempre expansível T, se D é subconjunto denso de T e E é subconjunto denso da árvore enumeravelmente fechada sempre expansível

D, então E também será denso em T.

Demonstração. Dado $x \in T$ arbitrário, como D é denso em T, existe $y \in D$ com $x \leq y$. Por sua vez, como E é denso em D, existe $z \in E$ com $y \leq z$, logo vale $x \leq z$. $\square$

Corolário 5.17. Dada uma função $F : T \to \mathbf{C}$, no jogo $\mathbb{X}$-$\mathscr{G}(F)$, tomando uma estratégia B para o jogador I, toda estratégia para o jogador I no jogo $\mathbb{X}$-$\mathscr{G}(F \upharpoonright B)$ também será estratégia para o jogo $\mathbb{X}$-$\mathscr{G}(F)$.

O próximo teorema encerra os resultados gerais obtidos até o momento. Ele mostra uma forma de caracterizar a existência de subsequências de comprimento ω_1 em $f : \omega_1 \to \mathbf{C}$ que satisfazem ou não $\mathbb{X}$ em extensões genéricas;

Teorema 5.18. Fixe um forcing enumeravelmente fechado $\mathbb{Q}$ e uma função $f : \omega_1 \to \mathbf{C}$ em uma extensão genérica de $\mathbf{V}^{\mathbb{Q}}$ representada por $F : T \to \mathbf{C}$ para q no filtro genérico. Se q força a existência de uma subsequência de f com comprimento ω_1 que satisfaz $\mathbb{X}$, então existem árvore enumeravelmente fechada sempre expansível S e função $G : S \to T$ que satisfazem as seguintes propriedades:

- Dados $x, y \in S$, $x < y$ implica $G(x) < G(y)$;
- Para todo $\alpha < \omega_1$, o conjunto $G[\mathrm{Lev}_\alpha(S)]$ contém uma anticadeia maximal de T;
- A função $F \circ G : S \to \mathbf{C}$ é $\mathbb{X}$-ramificada.

Por outro lado, se q força a existência de uma subsequência de f com comprimento ω_1 que satisfaz $\sim\mathbb{X}$, então existem uma árvore enumeravelmente fechada sempre expansível S e função $G : S \to T$ com as mesmas propriedades que a de cima, só que com $\sim\mathbb{X}$ no lugar de $\mathbb{X}$.

Demonstração. **Caso** $\mathbb{X}$: Fixe A anticadeia abaixo de q tal que cada $r \in A$ está associado a uma $\dot{g}_r$ tal que r força "$\dot{g}_r : \omega_1 \to \omega_1$, $\dot{g}$ é estritamente crescente e $\dot{f} \circ \dot{g}$ satisfaz $\mathbb{X}$". Para todo $\alpha < \omega_1$, vamos provar que o conjunto

$$D_\alpha = \{s \leq q : \exists r \in A, \xi < \omega_1, x \in \mathrm{Lev}_\xi(T)\ (s \leq r; s \Vdash \dot{g}_r(\check{\alpha}) = \check{\xi}; s \leq p_F(x))\}$$

é denso aberto abaixo de q. De fato, fixado $s \leq q$, existem $r \in A$ e $s' \leq r, s$; para esse s', existe $s'' \leq s'$ que força que $\dot{g}_r(\check{\alpha}) = \check{\xi}$ para algum $\xi < \omega_1$. Uma vez que $p_F[\mathrm{Lev}_\xi(T)]$ é anticadeia maximal abaixo de q, segue que existem $x \in \mathrm{Lev}_\xi(T)$ e $s''' \leq s'', p_F(x)$; de modo que $s''' \in D_\alpha$ e todo elemento menor que ele também pertencerá.

Seguindo o mesmo procedimento da demonstração do Teorema 5.4, podemos tomar da sequência $(D_\alpha : \alpha < \omega)$ uma sequência $(A_\alpha : \alpha < \omega_1)$ de anticadeias maximais abaixo de q e com ela construir árvore enumeravelmente fechada sempre expansível $S = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \{(\alpha, s) : s \in A_\alpha\}$ tal que, para cada (α, s), temos a existência de uma tripla $r_{(\alpha,s)}$, $\xi_{(\alpha,s)}$ e $x_{(\alpha,s)}$ tal que $r_{(\alpha,s)} \in A$,

$s \Vdash \dot{g}_{r_{(\alpha,s)}}(\check{\alpha}) = \check{\xi}_{(\alpha,s)}$, $x_{(\alpha,s)} \in \mathrm{Lev}_\alpha(T)$ e $s \leq p_F(x_{(\alpha,s)})$, o que implica $s \Vdash \dot{f} \circ \dot{g}_{(\alpha,s)}(\check{\alpha}) = (F(x_{(\alpha,s)}))\check{}$.

Com o que obtivemos no parágrafo acima, tomando $G : S \to T$ como a função $(\alpha, s) \mapsto x_{(\alpha,s)}$, junto com a função

$$\begin{array}{rccc} p_G & : & S & \to & \mathbb{Q} \\ & & (\alpha,s) & \mapsto & s \end{array},$$

temos que, para quaisquer $x, y \in S$, $x < y$ implica $G(x) < G(y)$. O fato de $p_G[\mathrm{Lev}_\alpha(S)]$ ser anticadeia maximal abaixo de q implica que $F[\mathrm{Lev}_\alpha(S)]$ contém uma anticadeia maximal de T e a hipótese inicial sobre as funções $\{g_r : r \in A\}$ implica que $F \circ G$ é $\mathbb{X}$-ramificado, provando o que desejamos.

Caso $\sim\mathbb{X}$: A demonstração é análoga à de cima; as únicas diferenças são que a anticadeia maximal abaixo de q A do início é tal que todo $r \in A$ possui um $\dot{g}_r$ e um $\beta_r < \omega_1$ associado de modo que r força "$\dot{g}_r : \omega_1 \to \omega_1$, $\dot{g}$ é estritamente crescente e $\dot{f} \circ \dot{g} \upharpoonright \check{\beta}_r$ satisfaz $\mathbb{Y}$" e teremos $\sim\mathbb{X}$ no lugar de $\mathbb{X}$. □

Porém, se assumirmos a seguinte conjectura:

Conjectura 5.19. Dadas árvores enumeravelmente fechadas sempre expansíveis S, T e função $F : S \to T$ satisfazendo:

- Dados $x, y \in S$, $x < y$ implica $F(x) < F(y)$;
- Para todo $\alpha < \omega_1$, o conjunto $F[\mathrm{Lev}_\alpha(S)]$ contém uma anticadeia maximal de T.

Então S possui uma subárvore S' (não necessariamente enumeravelmente fechada sempre expansível) tal que, para todo $\alpha < \omega_1$, $F[\mathrm{Lev}_\alpha(S')]$ é anticadeia maximal de T.

Poderemos provar o seguinte:

Teorema 5.20. Supondo a Conjectura 5.19, dado $\mathbb{Q}$ forcing enumeravelmente fechado e função $f : \omega_1 \to \mathbf{C}$ numa extensão genérica representada por $F : T \to \mathbf{C}$ para algum q no filtro genérico, se q força que $\dot{f}$ possui subsequência de comprimento ω_1 que satisfaz $\mathbb{X}$, então T possui conjunto denso D tal que $F \upharpoonright D$ é $\mathbb{X}$-ramificada.

Demonstração. Como consequência imediata da conjectura acima e do Teorema 5.18, temos que, fixada subárvore S' de S que satisfaz a conjectura para G, $G[S']$ é uma árvore enumeravelmente fechada sempre expansível de T com $G[\mathrm{Lev}_\alpha(S')] = \mathrm{Lev}_\alpha(G[S'])$ e, como $G[\mathrm{Lev}_\alpha(S')]$ é anticadeia maximal de T, $G[S']$ é denso em T. Como, para todo $x \in S'$, $F \circ G_{s(x)}$ não satisfaz $\mathbb{Y}$, segue que $F \upharpoonright G[S']$ é $\mathbb{X}$-ramificada. Assim, basta fazer $D = G[S']$. □

5.3.2 Teoremas envolvendo a classe de jogos

Antes de irmos aos teoremas, vamos fazer a seguinte definição para facilitar sua notação:

Definição 5.21. Dado um jogo J, denotaremos que o jogador I (II) possui estratégia vencedora em J como I $\uparrow$ J (respectivamente II $\uparrow$ J).

Para o caso particular do jogo $\mathscr{G}$, a seguinte definição também será útil para fins de simplificação:

Definição 5.22. Denotaremos como $\forall F$ I $\uparrow \mathbb{X}$-$\mathscr{G}(F)$ (e $\forall F$ II $\uparrow \mathbb{X}$-$\mathscr{G}(F)$) quando o jogador I (respectivamente II) possuir estratégia vencedora no jogo $\mathbb{X}$-$\mathscr{G}(F)$ para toda função $F : T \to \mathbf{C}$.

Com os resultados que temos até agora sabemos o seguinte:

Teorema 5.23. Se valer $\forall F$ I $\uparrow \mathbb{X}$-$\mathscr{G}(F)$, então vale a seguinte afirmação:

Toda sequência $(z_\alpha : \alpha < \omega_1)$ de elementos de $\mathbf{C}$
possui subsequência de comprimento ω_1 que satisfaz $\mathbb{X}$,

e o mesmo vale para $\forall F$ I $\uparrow \sim\mathbb{X}$-$\mathscr{G}(F)$, com $\sim\mathbb{X}$ no lugar de $\mathbb{X}$.

Demonstração. Uma vez que ω_1 é uma árvore, podemos aplicar o respectivo jogo a qualquer função $f : \omega_1 \to \mathbf{C}$, onde uma estratégia vencedora para o jogador I sempre será uma subsequência de comprimento ω_1 que irá satisfazer respectivamente $\mathbb{X}$ ou $\sim\mathbb{X}$, provando o desejado. $\square$

Por sua vez, a Conjectura 5.19 implica o seguinte:

Teorema 5.24. Assumindo a Conjectura 5.19, se toda extensão genérica de $\mathbf{V}^{\mathbb{Q}}$ satisfizer

Toda sequência $(z_\alpha : \alpha < \omega_1)$ de elementos de $\mathbf{C}$
possui subsequência de comprimento ω_1 que satisfaz $\mathbb{X}$

para todo $\mathbb{Q}$ enumeravelmente fechado, então vale $\forall F$ I $\uparrow \mathbb{X}$-$\mathscr{G}(F)$.

Demonstração. Uma função $F : T \to \mathbf{C}$ sempre representa uma função $f : \omega_1 \to \mathbf{C}$ para $\mathbb{1}_T$ em todas as extensões genéricas de $\mathbf{V}^T$ e, por hipótese, $\mathbb{1}_T$ também força que $\ddot{f}$ possui subsequência de comprimento ω_1 que satisfaz $\mathbb{X}$. Assim, o Teorema 5.20 implica a existência de um denso D de T tal que $F \restriction D$ é $\mathbb{X}$-ramificado. Isso implica que D pode ser usado para construir uma estratégia para o jogador I tal que, não importa como o jogador II jogue, o I sempre irá ganhar, provando o desejado. $\square$

5.4 Aplicações

Toda ordem parcial $\mathbb{P}$, por ser uma subclasse de $\mathbf{V}$, é forcing indestrutível, então enum.fe indestrutível, e sua ordem permanece inalterada em qualquer extensão genérica. Fazendo $\mathbf{C} = \mathbb{P}$, os seguintes pares de afirmações $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$, estritamente ligados respectivamente às propriedades knaster, wage e ccc, irão satisfazer todos os requisitos da Seção 5.2:

- $\mathbb{X}_{\text{knaster}}$: "$(p_\alpha : \alpha < \omega_1)$ possui termos compatíveis 2 a 2", com $\mathbb{Y}_{\text{knaster}}$ sendo "$(p_\xi : \xi < \alpha)$ possui um par de termos incompatíveis";
- $\mathbb{X}_{\text{wage}}$: "$(p_\alpha : \alpha < \omega_1)$ possui $n < \omega$ tal que nenhuma subsequência de comprimento $\omega + n$ é anticadeia", com $\mathbb{Y}_{\text{wage}}$ sendo "$(p_\xi : \xi < \alpha)$ possui, para cada $n < \omega$, subsequência de comprimento $\omega + n$ que é anticadeia";
- $\mathbb{X}_{\text{ccc}}$: "$(p_\alpha : \alpha < \omega_1)$ possui termos incompatíveis 2 a 2", com $\mathbb{Y}_{\text{ccc}}$ sendo "$(p_\xi : \xi < \alpha)$ possui um par de termos compatíveis".

Com relação aos dois primeiros pares de afirmações, temos os seguintes resultados:

Teorema 5.25. ZFC implica que vale

$$\forall F\ \mathrm{I}\!\uparrow \mathbb{X}_{\text{knaster}}\text{-}\mathscr{G}(F) \to \text{knaster}$$

e

$$\forall F\ \mathrm{I}\!\uparrow \mathbb{X}_{\text{wage}}\text{-}\mathscr{G}(F) \to \text{wage}.$$

Já a Conjectura 5.19 implica ${}^{\text{en.f}}\text{knaster} \to \forall F\ \mathrm{I}\!\uparrow \mathbb{X}_{\text{knaster}}\text{-}\mathscr{G}(F)$ e ${}^{\text{en.f}}\text{wage} \to \forall F\ \mathrm{I}\!\uparrow \mathbb{X}_{\text{wage}}\text{-}\mathscr{G}(F)$.

Sabemos que vale ${}^{\text{en.f}}\text{knaster} \to \text{knaster}$ e ${}^{\text{en.f}}\text{wage} \to \text{wage}$. Além disso, fixada uma função $F : T \to \mathbb{P}$, uma estratégia vencedora em $\mathbb{X}_{\text{knaster}}\text{-}\mathscr{G}(F)$ para o jogador também será uma estratégia vencedora em $\mathbb{X}_{\text{wage}}\text{-}\mathscr{G}(F)$. Isso implica o seguinte corolário.

Corolário 5.26. Valem os seguintes fatos:

Em ZFC:

$$\begin{tikzcd}
\forall F\ \mathrm{I}\!\uparrow \mathbb{X}_{\text{knaster}}\text{-}\mathscr{G}(F) \arrow[rr] \arrow[ddd] & & \text{knaster} \arrow[ddd] \\
& {}^{\text{en.f}}\text{knaster} \arrow[ur] \arrow[d] & \\
& {}^{\text{en.f}}\text{wage} \arrow[dr] & \\
\forall F\ \mathrm{I}\!\uparrow \mathbb{X}_{\text{wage}}\text{-}\mathscr{G}(F) \arrow[rr] & & \text{wage}
\end{tikzcd}$$

Assumindo a Conjectura 5.19:

$$\begin{tikzcd}
\forall F\ \mathrm{I}\uparrow \mathbb{X}_{\text{knaster}}\text{-}\mathscr{G}(F) \arrow[r] \arrow[d] & {}^{\text{en.f}}\text{knaster} \arrow[r] \arrow[d] & \text{knaster} \arrow[d] \\
\forall F\ \mathrm{I}\uparrow \mathbb{X}_{\text{wage}}\text{-}\mathscr{G}(F) \arrow[r] & {}^{\text{en.f}}\text{wage} \arrow[r] & \text{wage}
\end{tikzcd}$$

Já por outro lado, como uma ordem parcial $\mathbb{P}$ satisfará ccc se, e somente se, não possui nenhuma sequência que satisfaz $\mathbb{X}_{\text{ccc}}$, o Teorema 5.11 implica o seguinte:

Teorema 5.27. Toda ordem parcial ccc satisfaz ${}^{\text{en.f}}\text{ccc}$, isto é, em ZFC vale ccc $\to$ ${}^{\text{en.f}}\text{ccc}$. Com isso temos em ZFC que vale ccc $\leftrightarrow$ ${}^{\text{en.f}}\text{ccc}$

REFERÊNCIAS

Erdös, P.; Rado, R. A partition calculus in set theory. **Bulletin of the American Mathematical Society**, v. 62, p. 427–489, 1956. ISSN 0002-9904. Disponível em: <https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1956-10036-0>. Citado na página 30.

Galvin, F. Chain conditions and products. **Fundamenta Mathematicae**, Polish Academy of Sciences (Polska Akademia Nauk - PAN), Institute of Mathematics (Instytut Matematyczny), Warsaw, v. 108, p. 33–48, 1980. ISSN 0016-2736; 1730-6329/e. Disponível em: <http://eudml.org/doc/211145>. Citado nas páginas 21, 36, 45, 66, 69, 73 e 76.

Kunen, K. **Set theory: An introduction to independence proofs**. [S.l.]: Elsevier Science Publishers B. V., 1980. v. 102. (Studies in logic and the foundations of mathematics, v. 102). ISBN 0444868399. Citado nas páginas 27, 29, 46, 49, 66 e 81.

Kunen, K.; Tall, F. D. Between Martin's axiom and Souslin's hypothesis. **Fundamenta Mathematicae**, Polish Academy of Sciences (Polska Akademia Nauk - PAN), Institute of Mathematics (Instytut Matematyczny), Warsaw, v. 102, p. 173–181, 1979. ISSN 0016-2736; 1730-6329/e. Disponível em: <https://doi.org/10.4064/fm-102-3-173-181>. Citado na página 46.

Mezabarba, R. M. **Selection principles in hyperspaces**. Tese (Doutorado) — Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.11606/T.55.2018.tde-10102018-144937>. Citado nas páginas 21, 33 e 37.

Pereira, J. L. **A técnica de forcing e aplicações**. Dissertação (Mestrado) — Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2016. Disponível em: <https://doi.org/10.11606/D.55.2016.tde-30092016-163940>. Citado nas páginas 27, 28, 46 e 81.

Scheepers, M.; Tall, F. D. Lindelöf indestructibility, topological games and selection principles. **Fundamenta Mathematicae**, Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, v. 210, p. 1–46, 2010. Disponível em: <https://doi.org/10.4064/fm210-1-1>. Citado na página 29.

Shelah, S. Whitehead groups may not be free even assuming CH, II. **Israel Journal of Mathematics**, v. 35, n. 4, p. 257–285, Dec 1980. ISSN 1565-8511. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF02760652>. Citado na página 78.

Tall, F. D. On the cardinality of Lindelöf spaces with points G_δ. **Topology and its Applications**, v. 63, n. 1, p. 21 – 38, 1995. ISSN 0166-8641. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/016686419590002O>. Citado na página 29.

Todorčević, S. Remarks on cellularity in products. **Compositio Mathematica**, Martinus Nijhoff Publishers, v. 57, n. 3, p. 357–372, 1986. Disponível em: <http://www.numdam.org/item/CM_1986__57_3_357_0>. Citado nas páginas 21, 45, 55, 56, 59, 60 e 61.

Wage, M. L. Almost disjoint sets and Martin's axiom. **The Journal of Symbolic Logic**, [Association for Symbolic Logic, Cambridge University Press], v. 44, n. 3, p. 313–318, 1979. ISSN 00224812. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/2273124>. Citado nas páginas 21, 26, 31, 45, 46, 47, 50 e 61.

GLOSSÁRIO

Δ-sistema, raiz: Δ-sistema é uma coleção ou sequência cuja intersecção entre seus elementos ou termos é sempre igual a um conjunto específico, denotado raiz da mesma. A raiz só será um membro do Δ-sistema quando for coleção unitária ou todos os termos da sequência forem iguais.

$\mathbb{A}$-ramificada: Sendo $\mathbb{A}$ afirmação a respeito de uma função $f : \omega_1 \to \mathbf{C}$, T uma árvore enumeravelmente fechada sempre expansível, uma função $F : T \to \mathbf{C}$ será $\mathbb{A}$-ramificada caso, para todo ramo X de T, a função $F_X : \omega_1 \to \mathbf{C}$ satisfazer $\mathbb{A}$.

aberto: Para um espaço topológico X, abertos são subconjuntos intrinsicamente ligados à definição do conjunto X como espaço topológico. Em uma ordem parcial $\mathbb{P}$, um conjunto $E \subset \mathbb{P}$ é dito aberto se, e somente se, para cada $r \in E$, todo $r' \in \mathbb{P}$ com $r' \leq r$ também pertence a E. Tanto na topologia quanto nas ordens parciais, união arbitrária de abertos é aberta.

absolutividade: Um respectivo enunciado será *classe* absoluto quando o mesmo, caso for verdadeiro em $\mathbf{V}$, permanecer verdadeiro e, caso for falso em $\mathbf{V}$, permanecer falso, em qualquer extensão genérica de forcings pertencentes à classe representada por *classe*.

anticadeia: Em uma ordem parcial $\mathbb{P}$, uma anticadeia corresponde a um conjunto $A \subset \mathbb{P}$ cujos elementos são incompatíveis entre si. Dado um $p \in \mathbb{P}$, uma anticadeia maximal do conjunto $\{r \in \mathbb{P} : r \leq p\}$ é denominada anticadeia maximal abaixo de p.

ccc: No contexto de absolutividade de afirmações e indestrutibilidade de classes, corresponde à classe de todas as ordens parciais ccc.

coloração: Uma coloração do conjunto $[X]^2$ corresponde a um subconjunto de $[X]^2$. Todo elemento de $[X]^2$ pertencente à coloração é dito ter cor 0, os que não pertencem são ditos terem cor 1.

compatibilidade/incompatibilidade: Em uma ordem parcial $\mathbb{P}$, dizemos que $p, q \in \mathbb{P}$ são *compatíveis*, denotando $p \not\perp q$, quando existir $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leq p, q$. Caso contrário, dizemos que p, q são *incompatíveis*, e denotamos $p \perp q$.

denso: Em uma ordem parcial $\mathbb{P}$, um denso corresponte a um subconjunto D de $\mathbb{P}$ tal que todo $p \in \mathbb{P}$ possui $r \in D$ satisfazendo $r \leq_{\mathbb{P}} p$. Fixado um $p \in \mathbb{P}$, um denso abaixo de p é um subconjunto D de $\{r \in \mathbb{P} : r \leq p\}$ tal que, para todo $r \leq p$, existe $s \in D$ com $s \leq r$.

desconexos: Subconjuntos X_1, X_2 de um espaço topológico X que satisfazem $\overline{X_1} \cap X_2 = X_1 \cap \overline{X_2} = \emptyset$.

enum.fe: Representa a classe dos forcings enumeravelmente fechados no contexto de absolutividade de afirmações e indestrutibilidade de classes.

enumeravelmente fechada sempre expansível: Uma árvore na qual todos os ramos têm altura ω_1.

enumeravelmente fechada: Uma ordem parcial $\mathbb{Q}$ tal que toda cadeia enumerável possui limite inferior e, consequentemente, toda sequência $\leq_{\mathbb{Q}}$-decrescente $(r_n : n < \omega)$ de elementos de $\mathbb{Q}$ possui $r_\omega \in \mathbb{Q}$ tal que $r_\omega \leq_{\mathbb{Q}} r_n$ para todo $n < \omega$.

enumeravelmente infinito: Um conjunto é enumeravelmente infinito quando sua cardinalidade for examente igual a ω.

enumeração: Para um conjunto bem ordenado, o isomorfismo entre ele e seu order type. Para um conjunto arbitrário, qualquer bijeção entre ele e seu número cardinal.

enumerável: Um conjunto é enumerável quando sua cardinalidade for menor ou igual a ω.

finito: Um conjunto é finito quando sua cardinalidade for estritamente menor que ω.

forcing: Nome alternativo para ordem parcial no contexto de técnica de forcing. No contexto de absolutividade de afirmações e indestrutibilidade de classes, corresponde à classe de todos os forcings.

indestrutibilidade: Uma classe é dita *classe* indestrutível quando a mesma não ganha nem perde elementos em nenhuma extensão genérica de forcings pertencentes à *classe*.

não enumerável: Um conjunto é não enumerável quando sua cardinalidade for estritamente maior que ω.

order type: Para um conjunto bem ordenado A, seu order type se trata do único ordinal α que possui um isomorfismo de ordem com A.

partição: Uma partição de um conjunto A se trata de uma coleção de subconjuntos de A disjuntos 2 a 2 cuja reunião de seus elementos é o A inteiro.

quase disjunto: Uma coleção ou sequência possuirá elementos ou termos quase disjuntos (2 a 2) quando a intersecção entre dois elementos ou termos quaisquer da mesma for finita.

ramo: Em uma árvore, um ramo é uma cadeia maximal da mesma. Como consequência, um ramo é sempre um conjunto bem ordenado da árvore e uma subárvore.

rara: Uma coleção A é rara se todo $a \in \bigcup_{x \in A} x$ pertencer a no máximo finitos elementos da coleção.

segmento inicial: Se X é um conjunto parcialmente ordenado e $x \in X$, o conjunto dos antecessores estritos de x, isto é, o conjunto $\{y \in X : y < x\}$, é dito seu segmento inicial.

sequência: Nome alternativo para função quando utilizar a notação $(s_x : x \in A)$. Para cada $x \in A$, s_x será denominado um termo da sequência.

subsequência: Para uma sequência $(s_\xi : \xi < \alpha)$, se $S \subset \alpha$ tiver order type β, então diremos que $(s_\xi : \xi \in S)$ será uma subsequência de comprimento β.

subárvore: Um subconjunto de uma árvore, interpretada como uma árvore munida com a mesma ordem daquela, será uma subárvore caso conter segmento inicial de cada um de seus elementos.

árvore de Suslin: Árvore ccc de altura ω_1 que não possui ramo de altura ω_1.

árvore: Conjunto T parcialmente ordenado tal que todos os seus segmentos iniciais são bem ordenados. Uma árvore T é estudada como uma ordem parcial ao inverter o sentido de sua ordem, isto é, considerando $\geq_T$ como sua ordem parcial, e incluindo um elemento extra para o papel de $\mathbb{1}_T$.

ICMC USP
SÃO CARLOS