UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Existência e estabilidade de uma família de atratores exponenciais pullback para uma equação de evolução semilinear não autônoma de segunda ordem

Vinicius Tavares Azevedo

Tese de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPG-Mat)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

Vinicius Tavares Azevedo

Existência e estabilidade de uma família de atratores exponenciais pullback para uma equação de evolução semilinear não autônoma de segunda ordem

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Everaldo de Mello Bonotto
Coorientador: Prof. Dr. Marcelo José Dias Nascimento

USP – São Carlos
Março de 2023

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

A994e

Azevedo, Vinicius Tavares
Existência e estabilidade de uma família de atratores exponenciais pullback para uma equação de evolução semilinear não autônoma de segunda ordem / Vinicius Tavares Azevedo; orientador Everaldo de Mello Bonotto; coorientador Marcelo José Dias Nascimento. -- São Carlos, 2023.
75 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2023.

1. Atrator exponencial pullback. 2. Atrator pullback. 3. Equações de segunda ordem. 4. Estabilidade. 5. Semicontinuidade superior e inferior. I. Bonotto, Everaldo de Mello, orient. II. Nascimento, Marcelo José Dias, coorient. III. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Vinicius Tavares Azevedo

Existence and stability of a family of pullback exponential attractors for a nonautonomous semilinear evolution equation of second order

Thesis submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP – in accordance with the requirements of the Mathematics Graduate Program, for the degree of Doctor in Science. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Everaldo de Mello Bonotto
Co-advisor: Prof. Dr. Marcelo José Dias Nascimento

USP – São Carlos
March 2023

AGRADECIMENTOS

Gostaria primeiramente de agradecer a Deus e à minha família. Todos eles estiveram ao meu lado em todos os momentos, me dando força e coragem quando eu mais precisei. Meus pais Adauto e Leni, ao meu irmão Heitor. Amo todos vocês!

Sou extremamente grato ao meu orientador Prof. Dr. Everaldo de Mello Bonotto juntamente com o meu coorientador Prof. Dr. Marcelo José Dias Nascimento que foram de fundamental importância para o desenvolvimento deste trabalho. Obrigado por tudo e por terem aceitado me orientar.

Agradeço ao Arthur C. Cunha pela colaboração e pelas discussões científicas.

Também gostaria de agradecer aos meus amigos que sempre acreditaram em mim. Muito obrigado!

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro cedido, sem os quais esse trabalho não teria sido concluído.

RESUMO

AZEVEDO, V. T. **Existência e estabilidade de uma família de atratores exponenciais pullback para uma equação de evolução semilinear não autônoma de segunda ordem**. 2023. 75 p. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2023.

Neste trabalho, consideramos um problema de evolução semilinear não autônomo que surge em modelos de propagação em hastes elásticas não lineares e ondas íon-acústicas não lineares. Investigamos a existência e estabilidade de uma família de atratores exponenciais pullback para o nosso problema sob condições adequadas de crescimento e dissipatividade. Além disso, também provamos a semicontinuidade superior e inferior desta família de atratores exponenciais pullback no tempo zero. Como caso particular, obtemos a existência do atrator pullback em um espaço apropriado, provamos sua semicontinuidade superior e, por último, obtemos um resultado de regularidade desse atrator pullback.

Palavras-chave: Atrator exponencial pullback, atrator pullback, equações de segunda ordem, estabilidade, semicontinuidade superior, semicontinuidade inferior.

ABSTRACT

AZEVEDO, V. T. **Existence and stability of a family of pullback exponential attractors for a nonautonomous semilinear evolution equation of second order**. 2023. 75 p. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2023.

In this work, we consider a nonautonomous semilinear evolution problem that arises in models of propagation problem in nonlinear elastic rods and nonlinear ion-acoustic waves. We investigate the existence and stability of a family of pullback exponential attractors for our problem under suitable growth and dissipativeness conditions. Moreover, we also prove the upper and lower semicontinuity of this family of pullback exponential attractors at time zero. As a particular case, we obtain the existence of the pullback attractor in an appropriate space, we prove its upper semicontinuity and, lastly, we obtain a regularity result of this pullback attractor.

Keywords: Pullback exponential attractor, pullback attractor, second order equations, stability, upper semicontinuity, lower semicontinuity.

SUMÁRIO

CAPÍTULO

1

INTRODUÇÃO

Para que possamos compreender o comportamento assintótico das equações de evolução, a noção de atrator desempenha um papel muito importante. Em geral, um *atrator* representa um conjunto compacto que satisfaz uma propriedade de invariância e que atrai (em certo sentido) uma classe de subconjuntos do espaço de fase no qual a equação está bem posta. Para problemas não autônomos, podemos encontrar na literatura pelo menos duas abordagens diferentes para descrever sua dinâmica: a atração *pullback* e a atraçao *forward*. Em particular, neste trabalho, vamos considerar a dinâmica no sentido pullback.

Apesar do atrator pullback associado a um processo de evolução garantir uma propriedade de atração, a taxa dessa atração é em geral desconhecida e pode ser muito lenta. Como possível consequência deste fato, o problema que está sendo investigando deve ser instável sob algumas perturbações. Para superar essa desvantagem em algumas situações, foi introduzida a noção de atrator exponencial pullback, que é uma família compacta de conjuntos que satisfazem uma noção mais fraca de invariância, mas que atrai (no sentido pullback) todos os subconjuntos limitados do espaço de fase a uma taxa exponencial. Isso fornece, em geral, mais estabilidade sob perturbação para o problema.

Neste trabalho, investigamos a dinâmica pullback da seguinte família de equações de evoluções semilineares não autônomas de segunda ordem dada por:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u - \eta_\varepsilon(t)\Delta u_t - \Delta u_{tt} = f(u),\ t > s,\ x \in \Omega, \\ u = 0,\ t \geq s, x \in \partial\Omega, \\ u(s,x) = u_0(x),\ \ u_t(s,x) = v_0(x),\ x \in \Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

em que Ω é um conjunto limitado com fronteira suave em $\mathbb{R}^N$ com $N \geq 3$, $\varepsilon \in [0,1]$ é um parâmetro, $\eta_\varepsilon \colon \mathbb{R} \longrightarrow (0,\infty)$ é uma função contínua satisfazendo as condições:

$$0 < a_1 \leq \eta_\varepsilon(t) \leq a_2 < \infty, \quad t \in \mathbb{R},$$

e

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \|\eta_\varepsilon - \eta_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 0,$$

e $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função localmente Lipschitz que satisfaz condições adequadas de crescimento e dissipação dadas por:

$$\limsup_{|s|\to\infty} \frac{f(s)}{s} < \lambda_1, \tag{1.2}$$

$$|f(s)| \leq c(1+|s|^\rho), \qquad s \in \mathbb{R}, \tag{1.3}$$

e

$$|f(s_1) - f(s_2)| \leq c|s_1 - s_2|\big(1 + |s_1|^{\rho-1} + |s_2|^{\rho-1}\big), \qquad s_1, s_2 \in \mathbb{R}, \tag{1.4}$$

para alguma constante $c > 0$ e $1 < \rho < \frac{N+2}{N-2}$. A constante $\lambda_1 > 0$ em (1.2), representa o primeiro autovalor de $-\Delta$ com condições de fronteira de Dirichlet em Ω.

O modelo (1.1) é motivado por uma versão autônoma que tem sido considerada por vários autores nos últimos anos, veja por exemplo (ARAúJO; MA; QIN, 2013; CARVALHO; CHOLEWA, 2008; CONTI *et al.*, 2018; SUN; YANG; DUAN, 2011). Este tipo de modelo tem aplicações físicas significativas, por exemplo, surge para representar problemas de propagação em hastes elásticas não lineares e ondas ion-acústicas não lineares, veja (BOGOLUBSKY, 1977; CLARKSON; LEVEQUE; SAXTON, 1986; LOVE, 1944; ZHU, 1980). Além disso, quando o termo Δu_{tt} é descartado, a equação (1.1) torna-se a conhecida equação de onda fortemente amortecida, veja o artigo (CARABALLO *et al.*, 2011) e as referências nele inclusas. Para outras classes de problemas não autônomos, o leitor pode consultar (BEZERRA *et al.*, 2018; BEZERRA *et al.*, 2019; BONOTTO; NASCIMENTO; SANTIAGO, 2022; CARABALLO *et al.*, 2011; CARABALLO *et al.*, 2010; CARVALHO; NASCIMENTO, 2009).

Vamos considerar o problema (1.1) no espaço de Hilbert $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ e, neste espaço, provaremos a boa colocação local e global de suas soluções. Além disso, estabeleceremos a existência e a estabilidade de uma família de atratores exponenciais pullback associada ao problema (1.1).

Inspirado no artigo (CARVALHO; CHOLEWA, 2008), que apresenta a versão autônoma do problema (1.1) sem parâmetros, apresentamos um estudo para o problema (1.1) através de um sistema correspondente no espaço $H^{-1}(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$. Em outras palavras, considerando a mudança

$$z := (I - \Delta)u,$$

podemos reescrever o problema (1.1) da seguinte forma:

$$\begin{cases} z_{tt} + \eta_\varepsilon(t)\Lambda z_t + \Lambda z = f^e(z),\ t > s, \\ z = 0,\ \ t \geq s,\ \ x \in \partial\Omega, \\ z(s) = z_0 \ \ \text{e} \ \ z_t(s) = w_0, \end{cases} \tag{1.5}$$

em que $\Lambda := I-(I-\Delta)^{-1} \in \mathscr{L}(H^{-1}(\Omega))$, $f^e := f\circ(I-\Lambda)$ e $H^{-1}(\Omega)$ é o espaço de extrapolação de $H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ gerado pela extensão do $-\Delta$ em $H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ ($\mathscr{L}(X)$ denota o espaço de todos os operadores lineares limitados definidos num espaço de Banach X com valores em X). Agora, a mudança de variável $w := z_t$ nos leva à seguinte família de problemas de primeira ordem:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} + \mathscr{Q}_\varepsilon(t)\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} = \mathscr{F}\left(\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}\right), & t > s, \\ \begin{bmatrix} z(s) \\ w(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0 \\ w_0 \end{bmatrix}, \end{cases} \tag{1.6}$$

em que $\mathscr{Q}_\varepsilon(t) \in \mathscr{L}(H^{-1}(\Omega)\times H^{-1}(\Omega))$ é dado por

$$\mathscr{Q}_\varepsilon(t) := \begin{bmatrix} 0 & -I \\ \Lambda & \eta_\varepsilon(t)\Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I-(I-\Delta)^{-1} & \eta_\varepsilon(t)(I-(I-\Delta)^{-1}) \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

e $\mathscr{F} : H^{-1}(\Omega)\times H^{-1}(\Omega) \longrightarrow H^{-1}(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)$ é dado por

$$\mathscr{F}\left(\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}\right) := \begin{bmatrix} 0 \\ f^e(z) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} \in H^{-1}(\Omega)\times H^{-1}(\Omega). \tag{1.8}$$

Esta tese está organizada da seguinte forma.

No Capítulo 2, relembramos vários conceitos e resultados que iremos utilizar no desenvolvimento deste trabalho. A saber, apresentamos brevemente conteúdos das teorias de espaços L^p, espaços de Sobolev, potências fracionárias, operadores setoriais, processos de evolução e atratores pullback, dimensão fractal e atratores exponenciais pullback, e a versão do Teorema de Existência e Unicidade (Teorema 3.1.6) que iremos aplicar no problema (1.6) e, consequentemente, irá garantir a existência e unicidade de solução do problema (1.1) para cada $\varepsilon \in [0,1]$ fixado.

O Capítulo 3 apresenta os resultados de boa colocação local e global da solução do problema (1.1), para cada $\varepsilon \in [0,1]$ fixado, com dados iniciais no espaço $H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$. Os Lemas 3.2.3 e 3.2.4 garantem que f^e e $\mathscr{F}$, respectivamente, são funções localmente Lipschitziana em seus respectivos domínios. O Teorema 3.2.6 exibe condições suficientes para garantir a boa colocação local da solução do problema (1.1) para cada $\varepsilon \in [0,1]$. Já a boa colocação global da solução do problema (1.1) é estabelecida pelo Teorema 3.3.7.

No Capítulo 4, mostramos a existência e a estabilidade de uma família de atratores exponenciais pullback associada a família de equações (1.1), com $\varepsilon \in [0,1]$, veja Teorema 4.3.1. No Teorema 4.4.2, obtivemos tanto a semicontinuidade superior quanto a semicontinuidade inferior dessa família de atratores exponenciais pullback em $\varepsilon_0 = 0$.

O Capítulo 5 dedica-se ao estudo do atrator pullback associado ao problema (1.1). Como consequência imediata da existência da família de atratores exponenciais pullback, mostramos no Teorema 5.1.1 a existência do atrator pullback para o problema (1.1). A semicontinuidade superior do atrator pullback em $\varepsilon_0 = 0$ é estabelecida no Teorema 5.1.2. Finalmente, no Teorema 5.2.3, apresentamos um resultado de regularidade para este atrator pullback.

CAPÍTULO

2

PRELIMINARES

Este capítulo dedica-se a apresentação dos resultados preliminares que serão utilizados ao longo deste trabalho. Os conceitos apresentados nas Seções 2.1 e 2.2 podem ser encontrados em (BREZIS, 2010), os conceitos das Seções 2.3, 2.4 e 2.5 em (AMANN, 1995), (CARVALHO; LANGA; ROBINSON, 2012), (CARVALHO, 2022) e (CHOLEWA *et al.*, 2000), e a teoria apresentada na Seção 2.6 em (YANG; LI, 2018).

2.1 Os espaços $L^p(\Omega)$

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto.

Definição 2.1.1. Dado $1 \leq p < \infty$, definimos

$$L^p(\Omega) = \{u\colon \Omega \to \mathbb{R}\,;\, u \text{ é mensurável e } |u|^p \text{ é Lebesgue integrável em } \Omega\}.$$

A aplicação $\|\cdot\|_p\colon L^p(\Omega) \to [0,\infty)$ dada por

$$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{para todo} \quad u \in L^p(\Omega),$$

define uma norma em $L^p(\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$.

Definição 2.1.2. Definimos

$$L^\infty(\Omega) = \{u\colon \Omega \to \mathbb{R}\,;\, u \text{ é mensurável e existe uma constante } C > 0 \text{ tal que}$$

$$|u(x)| \leq C \text{ para quase todo } x \in \Omega\}.$$

Ao invés de escrevermos "para quase todo $x \in \Omega$", iremos escrever "quase sempre em Ω".

A aplicação $\|\cdot\|_\infty \colon L^\infty(\Omega) \to [0,\infty)$ dada por

$$\|u\|_\infty = \inf\{C : |u(x)| \leq C \text{ quase sempre em } \Omega\}, \quad \text{para todo} \quad u \in L^\infty(\Omega),$$

define uma norma em $L^\infty(\Omega)$.

Teorema 2.1.3. Seja $1 \leq p \leq \infty$. Então $(L^p(\Omega), \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach.

Demonstração. Veja (BREZIS, 2010, Teorema 4.8). □

No caso particular em que $p = 2$, temos que

$$(u,v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx$$

define um produto interno em $L^2(\Omega)$. Assim, $(L^2(\Omega), (\cdot,\cdot))$ é um espaço de Hilbert.

Definição 2.1.4. Seja $1 \leq p \leq \infty$. Denomina-se expoente conjugado de p o elemento p' que satisfaz a condição

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Note que $p' = 1$ se $p = \infty$ e $p' = \infty$ se $p = 1$.

No que segue, apresentamos alguns resultados clássicos que iremos utilizar nas demonstrações dos resultados principais.

Teorema 2.1.5. (Desigualdade de Young) Sejam $\varepsilon > 0$, $a, b \in \mathbb{R}_+$ e $p \in (1,\infty)$. Então

$$ab \leq \varepsilon \frac{a^p}{p} + \frac{1}{\varepsilon^{p'/p}} \cdot \frac{b^{p'}}{p'}.$$

Demonstração. Veja (CHOLEWA *et al.*, 2000, Lema 1.2.2). □

Teorema 2.1.6. (Desigualdade de Hölder) Sejam $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^{p'}(\Omega)$, com $1 \leq p \leq \infty$. Então $uv \in L^1(\Omega)$ e

$$\|uv\|_1 \leq \|u\|_p \|v\|_{p'}.$$

Demonstração. Veja (BREZIS, 2010, Teorema 4.6). □

Teorema 2.1.7. (Desigualdade de Minkowski) Sejam $u, v \in L^p(\Omega)$, com $1 \leq p \leq \infty$. Então

$$\|u+v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p.$$

Demonstração. Veja a prova do Teorema 4.7 em (BREZIS, 2010). □

Teorema 2.1.8. (Convergência Dominada de Lebesgue) Seja $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$ satisfazendo as seguintes condições:

(i) $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge quase sempre em Ω para uma função u;

(ii) existe $v \in L^1(\Omega)$ tal que $|u_n| \leq v$ quase sempre em Ω, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Então $u \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_\Omega u(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n(x)dx.$$

Demonstração. Veja (BREZIS, 2010, Teorema 4.2). □

Teorema 2.1.9. Seja $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções em $L^p(\Omega)$ e $u \in L^p(\Omega)$ tais que $\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_p = 0$. Então existe uma subsequência $\{u_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ e uma função $h \in L^p(\Omega)$ tais que:

(i) $\{u_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge quase sempre em Ω para u;

(ii) $|u_{n_k}(x)| \leq h(x)$ quase sempre em Ω, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Veja (BREZIS, 2010, Teorema 4.9). □

2.2 Os espaços de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ e $H^p(\Omega)$

Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto, $1 \leq p \leq \infty$ e $m \geq 1$.

Definição 2.2.1. Dados $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ e $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{Z}_+$, o operador derivada multi-índice em $\mathbb{R}^N$ é dado por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \ldots \partial_{x_N}^{\alpha_N}},$$

em que $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_N$.

O suporte de uma função $\psi \colon \Omega \to \mathbb{R}$ é definido por $supp(\psi) = \{x \in \Omega : \psi(x) \neq 0\}$. Denotemos por $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ o espaço das funções $\psi \colon \Omega \to \mathbb{R}$ que são infinitamente diferenciáveis e possuem suporte compacto.

Definição 2.2.2. Sejam $m \geq 1$ um inteiro e $1 \leq p \leq \infty$. O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é definido por

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \forall \alpha \text{ com } |\alpha| \leq m, \ \exists g_\alpha \in L^p(\Omega) \text{ tal que}$$

$$\left. \int_\Omega u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \varphi, \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \right\}.$$

Definimos $D^\alpha u = g_\alpha$.

Se munirmos o espaço $W^{m,p}(\Omega)$ com a norma

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{se} \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u\|_{m,\infty} = \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in\Omega} ess |D^\alpha u(x)|, \quad \text{se} \qquad p = \infty,$$

segue que $(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{m,p})$ é um espaço de Banach, veja (BREZIS, 2010).

Observação 2.2.3. Se $p = 2$, então denotaremos $W^{m,2}(\Omega)$ por $H^m(\Omega)$. Neste caso, $H^m(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com produto interno

$$(u,v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx.$$

Observação 2.2.4. Se Ω for suficientemente regular com fronteira $\partial\Omega$ limitada, então a norma $\|\cdot\|_{m,p}$ em $W^{m,p}(\Omega)$ é equivalente a norma

$$\|u\|_p^* := \|u\|_p + \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_p.$$

Definição 2.2.5. O espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ é definido por

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}.$$

Quando $p = 2$, denotamos $H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega)$.

Observação 2.2.6. Se Ω for limitado em alguma direção x_i de $\mathbb{R}^N$ e $1 \leq p < \infty$, então

$$\|u\| = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

é uma norma em $W_0^{m,p}(\Omega)$ que é equivalente a norma induzida por $W_0^{m,p}(\Omega)$.

Definição 2.2.7. O dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, é denotado por $W^{-m,p'}$, sendo p' o conjugado de p. No caso em que $p = 2$, $H^{-m}(\Omega)$ representará o dual topológico de $H_0^m(\Omega)$.

Observação 2.2.8. Apesar do dual de $L^2(\Omega)$ ser identificado com $L^2(\Omega)$, o espaço $H_0^1(\Omega)$ não é identificado com o seu dual. Na verdade, temos

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega),$$

sendo que as inclusões são contínuas e densas. E se Ω for limitado, vale

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset W^{-1,p'}(\Omega) \quad \text{se} \quad \frac{2N}{N+2} \leq p < \infty,$$

com inclusões contínuas e densas.

Teorema 2.2.9. (Desigualdade de Poincaré) Sejam $1 \leq p < \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado. Então existe uma constante C (que depende de Ω e p) tal que

$$\|u\|_p \leq C\|\nabla u\|_p, \quad \text{para todo} \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Além disso, $\|\nabla \cdot\|_p$ é uma norma em $W_0^{1,p}(\Omega)$ que é equivalente a norma $\|\cdot\|_{1,p}$.

Demonstração. Veja (BREZIS, 2010, Corolário 9.19). □

Teorema 2.2.10. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto de classe $\mathscr{C}^m$ com fronteira limitada, $1 \leq p \leq \infty$ e m um inteiro. Então as seguintes imersões são contínuas:

(i) se $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} > 0$ e $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{N}$, então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$;

(ii) se $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} = 0$, então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para todo $q \in [p, \infty)$;

(iii) se $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} < 0$ então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Teorema 2.2.11. (Rellich-Kondrachov) Seja Ω um aberto limitado suficientemente regular de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$. Então as seguintes imersões são compactas:

(i) se $p < N$ e $1 \leq q < \dfrac{Np}{N-p}$ então $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$;

(ii) se $p = N$ então $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$ para todo $q \in [p, \infty)$;

(iii) se $p > N$ então $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} \mathscr{C}(\overline{\Omega})$.

Demonstração. Veja (BREZIS, 2010, Teorema 9.16). □

Teorema 2.2.12. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado suficientemente regular de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$. Então

$$H_0^m(\Omega) \hookrightarrow H^m(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega), \quad \text{se} \quad \frac{1}{2} \geq \frac{1}{r} \geq \frac{1}{2} - \frac{m}{N} > 0. \tag{2.1}$$

Demonstração. Veja Teorema 1.1, Capítulo 2, em (CHEPYZHOV; VISHIK, 2022). □

2.3 Potências fracionárias de operadores do tipo positivo

Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach. Lembremos que

$$\mathscr{L}(X) = \{T : X \to X; T \text{ é um operador linear limitado}\}.$$

O espaço $\mathscr{L}(X)$ com a norma $\|T\|_{\mathscr{L}(X)} = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\|$ é um espaço de Banach.

Dado um operador $A \colon D(A) \subset X \to X$, vamos denotar por $D(A)$ o seu domínio e por $R(A)$ o seu conjunto imagem.

Definição 2.3.1. Seja $A\colon D(A)\subset X\to X$ um operador. Dizemos que:

(i) A é densamente definido se $\overline{D(A)}=X$;

(ii) A é fechado se seu gráfico $G(A)=\{(x,Ax)\colon\ x\in D(A)\}$ é um subespaço fechado de $X\times X$.

Definição 2.3.2. O conjunto resolvente de um operador linear $A\colon D(A)\subset X\to X$ é dado por

$$\rho(A)=\{\lambda\in\mathbb{C}:\ \lambda I-A \text{ é injetor, } \overline{R(\lambda I-A)}=X \text{ e}$$

$$(\lambda I-A)^{-1}\colon R(\lambda I-A)\subset X\to X\ \text{ é limitado}\},$$

e o espectro do operador A é definido por $\sigma(A)=\mathbb{C}\setminus\rho(A)$.

Definição 2.3.3. Um operador linear $A\in\mathscr{L}(X)$ é chamado do tipo positivo com constante $M\geq 1$, se A for fechado, densamente definido, $\rho(-A)\supset\mathbb{R}_+$ e

$$(1+s)\|(sI+A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)}\leq M,\quad \text{para todo}\quad s\geq 0.$$

O conjunto de todos os operadores do tipo positivo em X será denotado por $\mathscr{P}(X)$. Já o conjunto dos operadores do tipo positivo com constante $M\geq 1$ será denotado por $\mathscr{P}_M(X)$.

Seja $A\in\mathscr{P}_M(X)$. Se $\theta_M:=\arcsin(\frac{1}{2M})$ e

$$\Sigma_M:=\{z\in\mathbb{C}:\ |argz|\leq\theta_M\}+\left\{z\in\mathbb{C}:\ |z|\leq\frac{1}{2M}\right\},$$

então $\rho(-A)\supset\Sigma_M$ e $(1+|\lambda|)\|(\lambda I+A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)}\leq 2M+1$, para todo $\lambda\in\Sigma_M$ (veja Seção 4.6 em (AMANN, 1995)). Assim, dado $\alpha\in\mathbb{C}$, com $\mathrm{Re}(\alpha)<0$, definimos

$$A^\alpha:=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma(-\lambda)^\alpha(\lambda I+A)^{-1}d\lambda=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\Gamma}\lambda^\alpha(\lambda I-A)^{-1}d\lambda,$$

onde Γ é uma curva simples em $\Sigma_M\setminus\mathbb{R}_+$ suave por partes, indo de $-\infty e^{-i\phi}$ a $\infty e^{i\phi}$, com $0<\phi<\theta_M$ e $-\Gamma=\{-\lambda:\ \lambda\in\Gamma\}$. Pelo Teorema de Cauchy, o operador A^α está bem definido em $\mathscr{L}(X)$ e independe da escolha da curva Γ.

Teorema 2.3.4. Seja $A\in\mathscr{P}(X)$. Então:

(i) $A^\alpha A^\beta=A^{\alpha+\beta}$ quaisquer que sejam $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ tais que $\mathrm{Re}(\alpha)<0$ e $\mathrm{Re}(\beta)<0$;

(ii) $A^{-\alpha}=\frac{\sin(\pi z)}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty\lambda^{-\alpha}(\lambda I+A)^{-1}d\lambda$, se $0<\mathrm{Re}(\alpha)<1$.

Demonstração. Veja (CARVALHO, 2022, Lema 4.2.1 e Teorema 4.2.2). □

Para $\alpha\in\mathbb{C}$, com $\mathrm{Re}(\alpha)<0$, temos que A^α é injetor. Assim, definimos a potência fracionária A^α para $\mathrm{Re}(\alpha)>0$:

Definição 2.3.5. Dado $\alpha \in \mathbb{C}$, com $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, consideramos $D(A^\alpha) = R(A^{-\alpha})$ e definimos

$$A^\alpha : D(A^\alpha) \subset X \to X$$

pela lei $A^\alpha x := (A^{-\alpha})^{-1} x$.

Observação 2.3.6. O operador A^α, $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, é fechado e $D(A^\alpha)$ é um espaço de Banach com a norma $\|x\|_{D(A^\alpha)} := \|x\| + \|A^\alpha x\|$, $x \in D(A^\alpha)$. Como $A^{-\alpha} \in \mathscr{L}(X)$, segue que a norma $\|x\|_{X^\alpha} := \|A^\alpha x\|$ é equivalente a norma $\|\cdot\|_{D(A^\alpha)}$.

Definição 2.3.7. Seja $A \in \mathscr{P}(X)$. Os espaços de Banach $X^\alpha := (D(A^\alpha), \|\cdot\|_{X^\alpha})$, com $\mathrm{Re}(\alpha) \geq 0$, são chamados de espaços de potências fracionárias associados ao operador A.

Teorema 2.3.8. Sejam $A \in \mathscr{P}(X)$. Então:

(i) A^α é um operador linear fechado e densamente definido em X, para todo $\alpha \in \mathbb{C}$;

(ii) A^m é a potência usual de A quando $m \in \mathbb{Z}$;

(iii) $A^\alpha x = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha} \int_0^\infty s^\alpha (s+A)^{-2} Axds$, se $x \in D(A)$ e $-1 < \mathrm{Re}(\alpha) < 1$;

(iv) $A^\alpha A^\beta = A^{\alpha+\beta}$, se $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ e $\mathrm{Re}(\beta) > 0$;

(v) $X^\beta \overset{d}{\hookrightarrow} X^\alpha \overset{d}{\hookrightarrow} X$, se $0 < \mathrm{Re}(\alpha) < \mathrm{Re}(\beta)$.

Demonstração. Veja (AMANN, 1995, Teorema 4.6.5) e (CARVALHO, 2022, Lema 4.2.1 e Lema 4.2.4). □

Observação 2.3.9. Se $A \in \mathscr{P}(X)$ possui resolvente compacto, então as inclusões $X^\alpha \overset{d}{\hookrightarrow} X^\beta \overset{d}{\hookrightarrow} X$, com $0 < \mathrm{Re}(\alpha) < \mathrm{Re}(\beta)$, são compactas.

Teorema 2.3.10. Sejam H um espaço de Hilbert e $A : D(A) \subset H \to H$ um operador auto-adjunto, densamente definido que satisfaz a condição $(Au, u) \geq \delta(u, u)$ para todo $u \in D(A)$ e para algum $\delta > 0$. Então A é um operador do tipo positivo,

$$A^{it} \in \mathscr{L}(H) \quad \text{e} \quad \|A^{it}\|_{\mathscr{L}(H)} \leq 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. Veja Teorema 4.6.7 e Exemplo 4.7.3 em (AMANN, 1995). □

2.4 Operadores setoriais

Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach. Dados $a \in \mathbb{R}$ e $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$, consideremos o setor

$$\mathscr{S}_{a,\phi} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \phi \leq |arg(\lambda - a)| \leq \pi, \lambda \neq a\}.$$

Definição 2.4.1. Um operador $A\colon D(A) \subset X \to X$ linear, fechado e densamente definido é denominado setorial em X, se existem $a \in \mathbb{R}$, $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$ e $M > 0$ tais que

$$\rho(A) \supset \mathscr{S}_{a,\phi},$$

e

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \leq \frac{M}{|\lambda - a|}, \quad \text{para cada} \quad \lambda \in \mathscr{S}_{a,\phi}.$$

Lema 2.4.2. Seja $\omega \in \mathbb{R}$. Um operador $A\colon D(A) \subset X \to X$ é setorial se, e somente se, $A + \omega I\colon D(A) \subset X \to X$ é setorial.

Demonstração. Veja (CHOLEWA *et al.*, 2000, Observação 1.3.1). □

Lema 2.4.3. Considere um operador $A\colon D(A) \subset X \to X$ linear, fechado e densamente definido num espaço de Banach X. Então A é setorial com $Re(\sigma(A)) > 0$ se, e somente se, existem constantes $a \in \mathbb{R}$, $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$ e $K_1, K_2 > 0$ tais que

$$\begin{cases} (-\infty, 0] \subset (-\infty, a) \subset \rho(A) \ \text{ e} \\ \|(tI - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \leq \dfrac{K_1}{1 + |t|}, \quad t \in (-\infty, 0]; \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \rho(A) \supset \mathscr{S}_{0,\phi} \ \text{ e} \\ \|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \leq \dfrac{K_2}{|\lambda|}, \quad \lambda \in \mathscr{S}_{0,\phi}. \end{cases}$$

Demonstração. Veja (CHOLEWA *et al.*, 2000, Corolário 1.3.3). □

Observação 2.4.4. Todo operador linear limitado definido num espaço de Banach é setorial. Além disso, se A é setorial em X e B é limitado em X, então o operador $A + B$ também é setorial.

Definição 2.4.5. Um operador linear $A\colon D(A) \subset X \to X$ possui potências imaginárias limitadas, se $A \in \mathscr{P}(X)$ e existem $\varepsilon > 0$ e $M \geq 1$ tais que

$$A^{it} \in \mathscr{L}(X) \quad \text{e} \quad \|A^{it}\|_{\mathscr{L}(X)} \leq M, \quad \forall t \in [-\varepsilon, \varepsilon].$$

Proposição 2.4.6. Sejam $A\colon D(A) \subset X \to X$ um operador setorial em X e $B\colon D(B) \subset X \to X$ um operador linear fechado tais que:

(i) $D(A) \subset D(B)$;

(ii) $\|Bx\| \leq c\|Ax\| + c'\|x\|$, para todo $x \in X$, em que $c \leq \dfrac{1}{2(1+M)}$ (M vem da setorialidade de A).

Além disso, assuma que A e $A + B$ são operadores positivos com potências imaginárias limitadas. Então,

$$D((A+B)^{\alpha}) = D(A^{\alpha}), \quad \alpha \in (0, 1).$$

Demonstração. Veja (CHOLEWA *et al.*, 2000, Corolário 1.3.5). □

Proposição 2.4.7. Seja $A\colon D(A)\subset H\to H$ um operador linear densamente definido, auto-adjunto num espaço de Hilbert H. Se A for limitado inferiormente, isto é, existe $m\in\mathbb{R}$ tal que

$$\langle Ax,x\rangle_H \geq m\|x\|_H^2, \quad \text{para todo} \quad x\in D(A),$$

então A é setorial em H.

Demonstração. Veja (CHOLEWA *et al.*, 2000, Proposição 1.3.3). □

2.4.1 O operador Laplaciano

Seja Ω um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^N$. Suponhamos que $\partial\Omega\in C^\infty$. Consideremos o operador

$$A_0\colon D(A_0)\subset L^2(\Omega)\to L^2(\Omega)$$

em que $D(A_0)=\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ e $A_0u=-\Delta u=-\sum_{i=1}^n u_{x_ix_i}$, se $u\in D(A_0)$. Note que A_0 é um operador linear densamente definido. Além disso, dados $u,v\in D(A_0)$, segue pela Fórmula de Green e do fato de que $u=v=0$ em $\partial\Omega$:

$$\begin{aligned}(A_0u,v) &= -\int_\Omega \Delta u(x)v(x)dx = \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)dx - \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial \nu}(x)v(x)dx\\ &= \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)dx = \int_\Omega \nabla v(x)\nabla u(x)dx - \int_{\partial\Omega}\frac{\partial v}{\partial \nu}(x)u(x)dx\\ &= \int_\Omega u(x)(-\Delta v(x))dx = (u,A_0v),\end{aligned}$$

isto é, o operador A_0 é simétrico. Consequentemente, usando a Desigualdade de Poincaré (Teorema 2.2.9), segue que

$$(A_0u,u) = -\int_\Omega \Delta u(x)u(x)dx = \int_\Omega \nabla u(x)\nabla u(x)dx = \|\nabla u\|_2^2 \geq m\|u\|_2^2, \tag{2.2}$$

para todo $u\in D(A_0)$, em que $m>0$ é uma constante.

Pelo Teorema de Friedrichs (CARVALHO, 2022, Teorema 2.5.2), o operador $A_0\colon D(A_0)\subset L^2(\Omega)\to L^2(\Omega)$ admite extensão auto-adjunta $A\colon D(A)\subset L^2(\Omega)\to L^2(\Omega)$ com

$$D(A)=H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega),$$

que preserva a estimativa (2.2). O operador A é chamado de Laplaciano com condição de fronteira de Dirichlet.

De (2.2), segue que A é positivo definido e pela Proposição 2.4.7, A é setorial em $L^2(\Omega)$.

Teorema 2.4.8. O operador $A\colon D(A)\subset L^2(\Omega)\to L^2(\Omega)$ é positivo do tipo M.

Demonstração. Pelo Lema (CZAJA, 2002, Teorema 1.2.13) e (2.2), concluímos que $\sigma(-\Delta) \subset [m,\infty)$, ou seja, $\mathrm{Re}(\sigma(-\Delta)) > 0$. Pelo Lema 2.4.3, A é positivo do tipo M para algum M. $\square$

Exemplo 2.4.9. Sejam $X := L^2(\Omega)$ e $-\Delta\colon D(-\Delta) \subset X \to X$, em que $D(-\Delta) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Como $-\Delta \in \mathscr{P}(X)$, pela Definição 2.3.7, podemos considerar os espaços de potências fracionárias de $-\Delta$ sendo

$$X^0 = X = L^2(\Omega), \quad X^1 = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

e

$$X^\alpha = (D(-\Delta)^\alpha, \|\cdot\|_{X^\alpha}), \quad 0 < \alpha < 1,$$

com norma $\|x\|_{X^\alpha} := \|(-\Delta)^\alpha x\|$. Como na prova do Teorema de Friedrichs (CARVALHO, 2022, Teorema 2.5.2), o espaço $X^{\frac{1}{2}}$ é o fecho de $D(-\Delta)$ na norma de $H^1(\Omega)$, ou seja,

$$X^{\frac{1}{2}} = H_0^1(\Omega).$$

Como $-\Delta$ é um operador setorial definido positivo, temos

$$X^{-\frac{1}{2}} = (X^{\frac{1}{2}})' = (H_0^1(\Omega))' = H^{-1}(\Omega).$$

Exemplo 2.4.10. Nas condições do Exemplo 2.4.9, seja $\tilde{A} := I - \Delta$. Pela Observação 2.4.4, $\tilde{A}$ é positivo. Pelo Teorema 2.3.10, $-\Delta$ e $-\Delta + I$ possuem potências imaginárias limitadas. Pela Proposição 2.4.6, temos que $D((-\Delta+I)^\alpha) = D((-\Delta)^\alpha)$ para todo $\alpha \in (0,1)$. Logo os espaços de potências fracionárias de $\tilde{A}$ são definidos por

$$X^0 = X = L^2(\Omega), \quad X^1 = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

e

$$X^\alpha = (D(-\Delta)^\alpha, \|\cdot\|_{X^\alpha}), \quad 0 < \alpha < 1,$$

com norma $\|x\|_{X^\alpha} := \|(-\Delta)^\alpha x\|$. Além disso, $X^{\frac{1}{2}} = H_0^1(\Omega)$ e $X^{-\frac{1}{2}} = H^{-1}(\Omega)$.

Observação 2.4.11. A desigualdade de Poincaré pode ser melhorada para elementos de $H_0^1(\Omega)$, isto é, dado $u \in H_0^1(\Omega)$ vale

$$\|u\|_2^2 \leq \frac{1}{\lambda_1} \|(-\Delta)^{\frac{1}{2}} u\|_2^2, \tag{2.3}$$

em que λ_1 é o primeiro autovalor de $-\Delta$ (veja (MOREIRA, 2018, Proposição 3.27)).

2.5 Processos de evolução e o atrator pullback

Seja (Z,d) um espaço métrico. Denotemos por $\mathscr{C}(Z)$ o espaço das funções contínuas de Z em Z.

Definição 2.5.1. Um processo de evolução em Z é uma família a dois parâmetros $\{S(t,s) : t \geq s \in \mathbb{R}\}$ em $\mathscr{C}(Z)$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(a) $S(t,t) = I$ para todo $t \in \mathbb{R}$, I é o operador identidade em Z;

(b) $S(t,s) = S(t,r)S(r,s)$ quaisquer que sejam $s \leq r \leq t$;

(c) $\{(t,s) : t \geq s\} \times Z \ni (t,s,x) \to S(t,s)x \in Z$ é contínua.

Se considerarmos $\{S(t,s) : t \geq s \in \mathbb{R}\}$ em $\mathscr{L}(Z)$, diremos que o processo é um processo de evolução linear.

Exemplo 2.5.2. Processos de evolução surgem naturalmente de equações diferenciais não autônomas. Mais especificamente, sejam Z um espaço de Banach e $f\colon \mathbb{R} \times Z \longrightarrow Z$ uma função tal que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) = f(t,x), & t > s, \\ x(s) = x_0 \in Z, \end{cases} \tag{2.4}$$

admita soluções globais. Então a família $\{S(t,s) : t \geq s \in \mathbb{R}\}$ dada por

$$S(t,s)x_0 = x(t,s,x_0) \quad \text{para todo} \quad t \geq s,$$

em que $x(\cdot,s,x_0)$ denota a solução global do problema (2.4), define um processo de evolução em Z.

Observação 2.5.3. Dado $B \subset Z$, denotamos $S(t,s)B = \{S(t,s)x : x \in B\}$.

Definição 2.5.4. Seja $\{S(t,s) : t \geq s \in \mathbb{R}\}$ um processo de evolução em Z. Dizemos que uma família $\{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$ de subconjuntos de Z é:

(a) positivamente invariante, se $S(t,s)A(s) \subset A(t)$ para todo $t \geq s$;

(b) negativamente invariante, se $S(t,s)A(s) \supset A(t)$ para todo $t \geq s$;

(c) invariante se $S(t,s)A(s) = A(t)$ para todo $t \geq s$.

No que segue, apresentaremos a noção de atração pullback. Para isso, relembramos o conceito da semidistância de Hausdorff entre dois conjuntos.

Definição 2.5.5. Sejam $A, B \subset Z$ subconjuntos não vazios. A semidistância de Hausdorff entre A e B é dada por

$$dist_H(A,B) = \sup_{a\in A} \inf_{b \in B} d(a,b).$$

Definição 2.5.6. Seja $\{S(t,s) : t \geq s \in \mathbb{R}\}$ um processo de evolução em Z. Dados $t \in \mathbb{R}$ e A, B subconjuntos de Z, diremos que A atrai pullback B no tempo t, se

$$\lim_{s \to -\infty} dist_H(S(t,s)B, A) = 0. \tag{2.5}$$

O conjunto A atrai pullback limitados de Z no tempo t, se a convergência em (2.5) vale para todo limitado B de Z. Além disso, dizemos que uma família $\{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$ de subconjuntos de Z atrai pullback limitados de Z, se para cada $t \in \mathbb{R}$, o conjunto $A(t)$ atrai pullback limitados de Z no tempo t.

Definição 2.5.7. Uma família $\{\mathbb{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ de subconjuntos não vazios de Z é chamada de atrator pullback para o processo de evolução $\{S(t,s) : t \geq s \in \mathbb{R}\}$, quando as seguintes condições são válidas:

(a) $\mathbb{A}(t)$ é compacto para cada $t \in \mathbb{R}$;

(b) $\{\mathbb{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é invariante;

(c) $\{\mathbb{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ atrai pullback limitados de Z;

(d) $\{\mathbb{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é a menor família de conjuntos fechados em Z que satisfaz a condição (c).

Observação 2.5.8. A condição (d) na Definição 2.5.7 garante a unicidade do atrator pullback, quando este existir.

Agora vamos apresentar alguns conceitos e resultados para garantir a existência de um atrator pullback.

Definição 2.5.9. Um processo de evolução $\{S(t,s) : t \geq s \in \mathbb{R}\}$ em Z é chamado de pullback assintoticamente compacto, se para cada $t \in \mathbb{R}$, cada sequência $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ com $s_k \leq t$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e $s_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$, e cada sequência limitada $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset Z$, então a sequência $\{S(t,s_k)x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ admite subsequência convergente.

Definição 2.5.10. Um subconjunto $B \subset Z$ absorve pullback limitados de Z no tempo $t \in \mathbb{R}$ se, para cada subconjunto limitado $D \subset Z$, existe $T = T(t,D) \leq t$ tal que $S(t,s)D \subset B$ para todo $s \leq T$. Além disso, dizemos que uma família $\{B(t) : t \in \mathbb{R}\}$ de subconjuntos de Z absorve pullback limitados de Z, se para cada $t \in \mathbb{R}$, $B(t)$ absorve pullback limitados no tempo t.

Definição 2.5.11. A órbita pullback de $B \subset Z$ no tempo $s \in \mathbb{R}$, é representada por

$$\gamma_p(B,s) = \bigcup_{\tau \leq s} S(t,\tau)B.$$

Definição 2.5.12. Dizemos que um processo de evolução $\{S(t,s) : t \geq s \in \mathbb{R}\}$ em Z é:

(a) pullback fortemente limitado, se para cada limitado $B \subset Z$ e cada $t \in \mathbb{R}$, então o conjunto $\bigcup_{r \leq t} \gamma_p(B,r)$ é limitado em Z.

(b) pullback fortemente limitado dissipativo, se para cada $t \in \mathbb{R}$ existe um limitado $B(t)$ em Z que absorve pullback limitados de Z no tempo s para todo $s \leq t$; isto é, dado um limitado $D \subset Z$ e $s \leq t$, existe $\tau_0(s,D) \leq s$ tal que $S(s,\tau)D \subset B(t)$ para todo $\tau \leq \tau_0(s,D)$.

Teorema 2.5.13. Se um processo de evolução $\{S(t,s) : t \geq s \in \mathbb{R}\}$ em Z for pullback fortemente limitado dissipativo e pullback assintoticamente compacto, então $\{S(t,s) : t \geq s \in \mathbb{R}\}$ admite um atrator pullback $\{\mathbb{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$, tal que $\bigcup_{\tau \leq t} \mathbb{A}(\tau)$ é limitado para cada $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Veja (CARVALHO; LANGA; ROBINSON, 2012, Teorema 2.23). □

Definição 2.5.14. Uma solução global para um processo de evolução $\{S(t,s) : t \geq s \in \mathbb{R}\}$ em Z é uma função $\xi : \mathbb{R} \to Z$ tal que $S(t,\tau)\xi(\tau) = \xi(t)$ para todo $t \geq \tau$.

Definição 2.5.15. Uma solução global $\xi : \mathbb{R} \to Z$ associada a um processo de evolução $\{S(t,s) : t \geq s \in \mathbb{R}\}$ em Z é denominada limitada no passado, se existe $\tau \in \mathbb{R}$ tal que $\{\xi(t) : t \leq \tau\}$ é limitado em Z.

O próximo teorema caracteriza o atrator pullback através de soluções globais.

Teorema 2.5.16. Se o atrator pullback $\{\mathbb{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ de um processo de evolução for limitado no passado, i.e., $\bigcup_{t \leq \tau} \mathbb{A}(t)$ é limitado em Z para algum $\tau \in \mathbb{R}$, então

$$\mathbb{A}(t) = \{\xi(t) : \xi(\cdot) \text{ é uma solução global limitada no passado}\}.$$

Demonstração. Veja (CARVALHO; LANGA; ROBINSON, 2012, Teorema 1.17). □

Finalizamos esta seção com o conceito de semicontinuidade superior.

Definição 2.5.17. Uma família $\{\mathbb{A}_\varepsilon(t) \colon t \in \mathbb{R}, \varepsilon \in [0,1]\}$ de subconjuntos de Z é limitada superiormente em $\varepsilon = 0$ se, para cada $t \in \mathbb{R}$, temos

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} dist_H(\mathbb{A}_\varepsilon(t), \mathbb{A}_0(t)) = 0.$$

2.6 Dimensão fractal e o atrator pullback exponencial

Nesta seção, vamos introduzir a noção de atrator exponencial pullback para um processo de evolução $\{S(t,s) : t \geq s \in \mathbb{R}\}$ em um espaço de Banach $(X, \|\cdot\|)$.

Inicialmente, vamos recordar a definição de dimensão fractal de conjuntos pré-compactos (ROBINSON, 2011; CARVALHO *et al.*, 2022).

Definição 2.6.1. Seja A um subconjunto pré-compacto em X. Denotamos por $N_X[A,\varepsilon]$ o número mínimo de bolas abertas em X de raio $\varepsilon > 0$ e centro em pontos de A que são necessárias para cobrir A.

Definição 2.6.2. Seja A um subconjunto pré-compacto em X. A dimensão fractal de A em X, denotada por $\dim_F(A;X)$, é definida por

$$\dim_F(A;X) = \limsup_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\ln N_X[A;\varepsilon]}{-\ln \varepsilon}.$$

Na próxima definição, exibimos a noção de um atrator exponencial pullback.

Definição 2.6.3. Seja $\{S(t,s) : t \geq s \in \mathbb{R}\}$ um processo de evolução em X. Dizemos que a família $\hat{\mathscr{M}} = \{\mathscr{M}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ de conjuntos não autônomos de X é um **atrator exponencial pullback** para o processo $\{S(t,s) : t \geq s \in \mathbb{R}\}$ se:

(a) $\mathscr{M}(t)$ é não vazio e compacto em X para cada $t \in \mathbb{R}$;

(b) a família $\hat{\mathscr{M}}$ é positivamente invariante, isto é, $S(t,s)\mathscr{M}(s) \subset \mathscr{M}(t)$ para todo $t \geq s$;

(c) a dimensão fractal da família $\hat{\mathscr{M}}$ é uniformemente limitada, isto é,

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \{\dim_F(\mathscr{M}(t); X)\} < \infty;$$

(d) a família $\hat{\mathscr{M}}$ atrai exponencialmente pullback todos os limitados de X, ou seja, existe uma constante $\omega > 0$ tal que para cada limitado $B \subset X$ e cada $t \in \mathbb{R}$, temos

$$\lim_{s \to \infty} e^{\omega s} dist_H(S(t,t-s)B, \mathscr{M}(t)) = 0.$$

Observação 2.6.4. A existência do atrator exponencial não é única.

O próximo resultado garante a existência e a estabilidade de uma família de atratores exponenciais pullback para uma família de processos de evolução. Antes de enunciar tal resultado, vamos relembrar dois conceitos.

Definição 2.6.5. Uma seminorma $n(\cdot)$ em um espaço de Banach X é chamada de compacta, se toda sequência limitada $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em X contém uma subsequência $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que

$$n(x_{n_k} - x_{n_m}) \to 0 \quad \text{quando} \quad k,m \to \infty.$$

Definição 2.6.6. Dados A e B subconjuntos não vazios e limitados num espaço de Banach X, definimos a distância simétrica de Hausdorff por

$$dist_X^{symm}(A,B) = \max\{dist_X(A,B), dist_X(B,A)\}.$$

Teorema 2.6.7. Sejam $(E, \|\cdot\|_E)$ um espaço de Banach, munido da distância $d(x,y) = \|x-y\|_E$, e M um subconjunto fechado limitado de E. Suponha que $\{S^{(\varepsilon)}(t,s) : t \geq s \in \mathbb{R}\}$ seja uma família de processos de evolução em E, com $\varepsilon \in [0,1]$, que satisfaz as seguintes condições:

(H_1) existem constantes $T > 0$ e $L_T > 0$ de modo que para cada $\tau \in \mathbb{R}$, $x_1, x_2 \in M$, tem-se

$$\bigcup_{\varepsilon \in [0,1]} S^{(\varepsilon)}(t+\tau,\tau)M \subset M, \quad t \geq T,$$

e

$$\sup_{\varepsilon \in [0,1]} \sup_{t \in [0,T]} \|S^{(\varepsilon)}(t+\tau,\tau)x_1 - S^{(\varepsilon)}(t+\tau,\tau)x_2\|_E \leq L_T \|x_1 - x_2\|_E;$$

(H_2) existem um espaço de Banach $(Z, \|\cdot\|_Z)$, uma seminorma compacta $n_Z(\cdot)$ em Z e uma aplicação $K_n^{(\varepsilon)}: M \to Z$, com $n \in \mathbb{Z}$ e $\varepsilon \in [0,1]$, tais que para quaisquer $x_1, x_2 \in M$ são válidas

$$\sup_{\varepsilon\in[0,1]} \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|K_n^{(\varepsilon)} x_1 - K_n^{(\varepsilon)} x_2\|_Z \leq L\|x_1 - x_2\|_E$$

e

$$\|S^{(\varepsilon)}((n+1)T, nT)x_1 - S^{(\varepsilon)}((n+1)T, nT)x_2\|_E \leq \eta \|x_1 - x_2\|_E + n_Z(K_n^{(\varepsilon)} x_1 - K_n^{(\varepsilon)} x_2),$$

em que $\eta \in (0,1)$ e $L > 0$ são constantes independentes de $\varepsilon \in [0,1]$ e $n \in \mathbb{Z}$;

(H_3) para cada subconjunto limitado B em E, existe $T_B > 0$ tal que

$$\bigcup_{\tau\in\mathbb{R}} S^{(\varepsilon)}(t+\tau, \tau)B \subset M, \quad t \geq T_B.$$

Então para cada $\theta \in (\lambda, 1)$ e $\varepsilon \in [0,1]$, o processo de evolução $\left\{S^{(\varepsilon)}(t,s) : t \geq s \in \mathbb{R}\right\}$ admite um atrator exponencial pullback $\{\mathscr{M}_\theta^\varepsilon(t) : t \in \mathbb{R}\} \subset M$ com dimensão fractal uniformemente limitada por

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left\{ \dim_F \left(\mathscr{M}_\theta^\varepsilon(t); E \right) \right\} \leq \frac{\ln\left(m_Z(\frac{2}{\theta-\lambda}) \right)}{-\ln\theta},$$

em que $m_Z(R)$ representa o número máximo de pontos z_i na bola $B_Z(0,R)$ de maneira que $n_Z(z_i - z_j) > 1$. Além disso, a aplicação $\varepsilon \longmapsto \mathscr{M}_\theta^\varepsilon$ é estável no seguinte sentido: dado $\varepsilon_0 \in [0,1]$, se $\varepsilon \in [0,1]$ é tal que

$$\Gamma(\varepsilon, \varepsilon_0) := \sup_{r\in[0,T]} \sup_{t\in\mathbb{R}} \sup_{x\in M} \left\|S^{(\varepsilon)}(r+t,t)x - S^{(\varepsilon_0)}(r+t,t)x\right\|_E < 1,$$

então

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left\{ dist_E^{symm} \left(\mathscr{M}_\theta^\varepsilon(t), \mathscr{M}_\theta^{\varepsilon_0}(t) \right) \right\} \leq c\Gamma(\varepsilon, \varepsilon_0)^\zeta,$$

para alguma constante $c > 0$ e $0 < \zeta < 1$ que são independentes de ε.

Demonstração. Veja (YANG; LI, 2018, Teorema 3.1) e (YANG; LI, 2018, Corolário 1). □

Corolário 2.6.8. Sob as hipóteses do Teorema 2.6.7, para cada $\varepsilon \in [0,1]$, o processo de evolução $\left\{S^{(\varepsilon)}(t,s) : t \geq s \in \mathbb{R}\right\}$ admite atrator pullback $\{\mathscr{A}^\varepsilon(t) : t \in \mathbb{R}\} \subset M$, satisfazendo $\mathscr{A}^\varepsilon(t) \subset \mathscr{M}_\theta^\varepsilon(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, $\theta \in (\lambda, 1)$. Além disso, cada seção possui dimensão fractal finita dada por

$$\dim_F \left(\mathscr{A}^\varepsilon(t); E \right) \leq \frac{\ln\left(m_V(\frac{2}{\theta-\lambda}) \right)}{-\ln\theta}, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R} \text{ e todo } \theta \in (\lambda, 1).$$

Demonstração. Seja $\varepsilon \in [0,1]$. Primeiramente, mostremos que o processo $\left\{S^{(\varepsilon)}(t,s) : t \geq s \in \mathbb{R}\right\}$ é pullback fortemente limitado dissipativo. De fato, sejam $t \in \mathbb{R}$, $D \subset E$ um limitado e $s \leq t$. Pela condição (H_3), existe $T_D > 0$ tal que

$$\bigcup_{\tau \in \mathbb{R}} S^{(\varepsilon)}(t+\tau,\tau)D \subset M, \quad \text{para todo} \quad t \geq T_D.$$

Logo, tomando $\tau = s - t$, obtemos

$$S^{(\varepsilon)}(s,s-t)D \subset M, \quad \text{para todo} \quad t \geq T_D.$$

ou seja,

$$S^{(\varepsilon)}(s,r)D \subset M, \quad \text{para todo} \quad r \leq s - T_D := \tau_0(s,D).$$

Por outro lado, segue da existência do atrator exponencial pullback $\{\mathscr{M}^{\varepsilon}_{\theta}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ que existe uma constante $\omega > 0$ tal que para cada limitado $B \subset E$ e cada $t \in \mathbb{R}$, temos

$$\lim_{s \to \infty} e^{\omega s} dist_H(S(t,t-s)B, \mathscr{M}(t)) = 0.$$

Assim, dados $t \in \mathbb{R}$, uma sequência $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ com $s_k \leq t$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e $s_k \stackrel{k \to \infty}{\longrightarrow} -\infty$, e uma sequência limitada $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset E$. Seja B_0 um limitado em E contendo $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ e $r_k = t - s_k$, então

$$\lim_{k \to \infty} dist_H(S(t,s_k)x_k, \mathscr{M}(t)) \leq \lim_{s \to \infty} e^{\omega k} dist_H(S(t,t-r_k)B, \mathscr{M}(t)) = 0.$$

Como $\mathscr{M}(t)$ é não vazio e compacto em E para cada $t \in \mathbb{R}$, segue que o processo de evolução $\{S(t,s) : t \geq s \in \mathbb{R}\}$ é pullback assintoticamente compacto.

Pelo Teorema 2.5.13, o processo de evolução $\left\{S^{(\varepsilon)}(t,s) : t \geq s \in \mathbb{R}\right\}$ admite atrator pullback $\{\mathscr{A}^{\varepsilon}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ em E. Como o atrator pullback é a menor família de conjuntos fechados em E que atrai pullback limitados de E, então $\mathscr{A}^{\varepsilon}(t) \subset \mathscr{M}^{\varepsilon}_{\theta}(t) \subset M$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $\theta \in (\lambda,1)$. Além disso,

$$\dim_F\left(\mathscr{A}^{\varepsilon}(t);E\right) \leq \dim_F\left(\mathscr{M}^{\varepsilon}_{\theta}(t);E\right) \leq \frac{\ln\left(m_Z(\frac{2}{\theta-\lambda})\right)}{-\ln\theta},$$

quaisquer que sejam $t \in \mathbb{R}$ e $\theta \in (\lambda,1)$. $\square$

CAPÍTULO

3

EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÃO

Neste capítulo, apresentamos a boa colocação para o problema (1.1). Em outras palavras, estabelecemos a existência local e global de solução para a família de equações de evolução semilineares não autônomas de segunda ordem dada por (1.1).

Vamos denotar por Δ a extensão fechada em $H^{-1}(\Omega)$ do operador Laplaciano com condição de Dirichlet e com domínio $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Seja $X := L^2(\Omega)$ e consideremos a escala de potências fracionária $\{X^\alpha : \alpha \in \mathbb{R}\}$ gerada por $(X, \tilde{A})$, em que $\tilde{A} := I - \Delta$. Note que $\Lambda := I - (I - \Delta)^{-1} \in \mathscr{L}(H^{-1}(\Omega))$. Como feito no Exemplo 2.4.10, temos que

$$X^{-\frac{1}{2}} = H^{-1}(\Omega), \ X^{\frac{1}{2}} = H_0^1(\Omega) \quad \text{e} \quad X^1 = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

3.1 Teorema de Existência e Unicidade: forma abstrata

Nesta seção, apresentamos a versão do Teorema de Existência e Unicidade que iremos utilizar para garantir a boa colocação local e global do problema (1.1).

Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach. Para cada $t \in \mathbb{R}$, sejam $\mathscr{H}(t) \colon X \to X$ um operador linear e $\mathscr{F} : X \to X$ uma função. Consideremos o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} + \mathscr{H}(t)x(t) = \mathscr{F}(x(t)), & t > s, \\ x(s) = x_0 \in X. \end{cases} \tag{3.1}$$

Definição 3.1.1. Uma função $x \colon [s, \tau] \to X$, $\tau > s$, é chamada de solução clássica de (3.1), se $x \in C([s, \tau], X)$, $x \in C^1((s, T], X)$ e x satisfaz (3.1).

Antes de apresentarmos o resultado principal, vamos enunciar alguns resultados básicos auxiliares.

Lema 3.1.2. **(Desigualdade de Gronwall)** Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $t_0 \in I$ e $\alpha, \beta, u \in C(I, \mathbb{R}_+)$. Suponha que

$$u(t) \leq \alpha(t) + \left| \int_{t_0}^{t} \beta(s) u(s) ds \right|, \quad \text{para todo} \quad t \in I.$$

Então,

$$u(t) \leq \alpha(t) + \left| \int_{t_0}^{t} \alpha(s)\beta(s) \exp\left(\int_{s}^{t} \beta(r)\, dr \right) ds \right|, \quad \text{para todo} \quad t \in I.$$

Demonstração. Veja (AMANN; METZEN, 2011, Lema 6.1). □

Corolário 3.1.3. Nas mesmas condições do Lema 3.1.2, suponha ainda que α seja monótona crescente. Então,

$$u(t) \leq \alpha(t) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \beta(s)\, ds \right), \quad \text{para todo} \quad t \in I \cap [t_0, \infty).$$

Demonstração. Veja (AMANN; METZEN, 2011, Corolário 6.2). □

Teorema 3.1.4. **(Teorema do Ponto Fixo de Banach)** Seja (X, d) um espaço métrico completo e $f \colon X \to X$ uma contração, isto é, existe uma constante $0 \leq \lambda < 1$ de modo que $d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y)$ quaisquer que sejam $x, y \in X$. Então f possui um único ponto fixo em X.

Demonstração. Veja (BREZIS, 2010, Teorema 5.7). □

Pelo Teorema 7.9 e pela Observação 7.10 (c) em (AMANN; METZEN, 2011), a parte linear do problema (3.1), isto é,

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} + \mathscr{H}(t)x(t) = 0, \quad t > s, \\ u(s) = x_0 \in X. \end{cases} \tag{3.2}$$

admite única solução em $[s, \infty)$. Assim, podemos definir o operador solução passando por x_0 no instante $s \in \mathbb{R}$ por

$$L(t, s)x_0 = x_0 - \int_{s}^{t} \mathscr{H}(r) L(r, s) x_0 dr, \quad t \geq s. \tag{3.3}$$

Com isso, geramos uma família a dois parâmetros de operadores $\{L(t, s) : t \geq s \in \mathbb{R}\}$ em $\mathscr{L}(X)$ que satisfaz as seguintes propriedades que serão apresentadas no próximo resultado.

Lema 3.1.5. O operador linear e limitado $L(t, s)$, $t \geq s$, definido em (3.3) satisfaz:

(a) $\|L(t, s)\|_{\mathscr{L}(X)} \leq \exp\left(\int_{s}^{t} \|\mathscr{H}(r)\|_{\mathscr{L}(X)} dr \right)$, para $t \geq s$;

(b) $L(t, t) = I$ e $L(t, s) = L(t, r) \circ L(r, s)$, para $s \leq r \leq t$;

(c) $(t, s) \mapsto L(t, s)$ é contínuo na topologia uniforme de operadores para $t \geq s$;

(d)

$$\frac{\partial}{\partial t}L(t,s)+\mathscr{H}(t)L(t,s)=0, \quad t\geq s, \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial s}L(t,s)-L(t,s)\mathscr{H}(s)=0, \quad t\geq s. \tag{3.5}$$

Demonstração. Veja (PAZY, 2011, Teorema 5.2, p. 128). □

Teorema 3.1.6 (Existência e Unicidade). Sejam X um espaço de Banach, $s\in\mathbb{R}$ e $\mathscr{H}(t)\colon X\to X$ um operador linear definido para cada $t\geq s$. Assuma que a aplicação $[s,\infty)\ni t\to\mathscr{H}(t)\in\mathscr{L}(X)$ seja contínua na topologia uniforme. Se $\mathscr{F}:X\to X$ satisfaz

$$\|\mathscr{F}(x_1)-\mathscr{F}(x_2)\|\leq C\|x_1-x_2\|, \tag{3.6}$$

localmente em subconjuntos de X, então para cada $x_0\in X$ existe um tempo $\tau_{max}=\tau_{max}(x_0,s)>s$, tal que o problema de valor inicial (3.1) admite uma única solução $x\in C([s,\tau_{max}),X)\cap C^1((s,\tau_{max}),X)$ que satisfaz em X a fórmula da variação das constantes

$$x(t,s,x_0)=L(t,s)x_0+\int_s^t L(t,r)\mathscr{F}(x(r,s,x_0))dr, \tag{3.7}$$

em que

$$L(t,s)=I-\int_s^t \mathscr{H}(r)L(r,s)dr. \tag{3.8}$$

Além disso, ou $\tau_{max}=\infty$ ou $\lim_{t\to\tau_{max}^-}\|x(t)\|=\infty$.

Demonstração. Seja $x_0\in X$ e escolha $M>0$ tal que $\|x_0\|+\|\mathscr{F}(0)\|\leq M$. Agora, seja $C>0$ tal que (3.6) seja válido no limitado $B[0,M+1]=\{u\in X:\|u\|\leq M+1\}$. Tome $\alpha=\max_{s\leq t\leq s+1}\|\mathscr{H}(t)\|_{\mathscr{L}(X)}$ e escolha $s<\tau<s+1$ de tal forma que

$$Me^{\alpha(\tau-s)}\leq M+\frac{1}{2}$$

e

$$\frac{(M+1)C}{\alpha}\left(e^{\alpha(\tau-s)}-1\right)+\frac{1-e^{\alpha(\tau-s)}}{\alpha}\|\mathscr{F}(0)\|\leq\frac{1}{2}.$$

Agora, defina

$$\Gamma=\{x\in C([s,\tau],X):x(s)=x_0,\ \|x\|_\infty\leq M+1\}.$$

Considere o operador F dado por

$$\begin{aligned} F\colon(\Gamma,\|\cdot\|_\infty)&\longrightarrow(\Gamma,\|\cdot\|_\infty)\\ x&\longmapsto Fx\colon[s,\tau]\longrightarrow X\\ &\qquad\qquad t\longmapsto Fx(t), \end{aligned}$$

em que

$$Fx(t) = L(t,s)x_0 + \int_s^t L(t,r)\mathscr{F}(x(r,s,x_0))dr$$

e

$$L(t,s) = I - \int_s^t \mathscr{H}(r)L(r,s)dr.$$

Vamos mostrar que F está bem definido. Seja $x \in \Gamma$. É claro que $F(x(s)) = x_0$ e $Fx \in C([s,\tau],X)$. Além disso, para $t \in [s,\tau]$,

$$\begin{aligned}
\|Fx(t)\| \leq& \|L(t,s)x_0\| + \int_s^t \|L(t,r)\mathscr{F}(x(r,s,x_0))\|dr \\
\leq& e^{\alpha(t-s)}\|x_0\| + \int_s^t e^{\alpha(t-r)}\|\mathscr{F}(x(r,s,x_0)) - \mathscr{F}(0)\|dr + \frac{1-e^{\alpha(t-s)}}{\alpha}\|\mathscr{F}(0)\| \\
\leq& e^{\alpha(\tau-s)}\|x_0\| + \frac{(M+1)C}{\alpha}\left(e^{\alpha(t-s)} - 1\right) + \frac{1-e^{\alpha(t-s)}}{\alpha}\|\mathscr{F}(0)\| \\
\leq& M+1.
\end{aligned}$$

Assim, $F(\Gamma) \subset \Gamma$.

Por outro lado, dados $x, y \in \Gamma$ e $t \in [s,\tau]$, temos

$$\begin{aligned}
\|Fx(t) - Fy(t)\| &\leq \int_s^t \|L(t,r)(\mathscr{F}x(r) - \mathscr{F}y(r))\|dr \\
&\leq \int_s^t e^{\alpha(t-r)}C\|x-y\|_\infty dr \\
&\leq \frac{C}{\alpha}(e^{\alpha(t-s)} - 1)\|x-y\|_\infty \\
&\leq \frac{1}{2}\|x-y\|_\infty, \quad s \leq t \leq \tau.
\end{aligned}$$

Portanto, F é uma contração no espaço de Banach $(\Gamma, \|\cdot\|_\infty)$. Pelo Teorema 3.1.4, existe uma única solução $x\colon [s,\tau] \to X$ do PVI (3.1) em Γ.

Pelo (AMANN; METZEN, 2011, Teorema 7.6), podemos concluir que o PVI (3.1) admite uma única solução $x \in C([s,\tau_{max}),X) \cap C^1((s,\tau_{max}),X)$ com $\tau_{max} > s$ que satisfaz em X a fórmula da variação das constantes (3.7) e (3.8), e ainda, por esse mesmo teorema, ou $\tau_{max} = \infty$ ou $\lim\limits_{t \to \tau_{max}^-} \|x(t)\| = \infty$. □

Teorema 3.1.7. (Dependência Contínua) Sob as hipóteses do Teorema 3.1.6, a solução do PVI (3.1) depende continuamente das variáveis $(t,x_0) \in [s,\tau_{max}(s,x_0)) \times X$ na norma de X.

Demonstração. Sejam $x_0, \widetilde{x}_0 \in X$ e $x(\cdot,s,x_0)$ e $x(\cdot,s,\widetilde{x}_0)$ soluções definidas em $[s,\tau_{max}(s,x_0)$ e $[s,\tau_{max}(s,\widetilde{x}_0))$, respectivamente. Fixe $t > s$, $t < \min\{\tau_{max}(s,x_0), \tau_{max}(s,\widetilde{x}_0)\}$, e considere $\alpha = \max\limits_{s \leq r \leq t} \|\mathscr{H}(r)\|_{\mathscr{L}(X)}$. Além disso, seja $M > 0$ tal que $\|x(\tau,s,x_0)\| \leq M$ e $\|x(\tau,s,\widetilde{x}_0)\| \leq M$ para todo $\tau \in [s,t]$. Agora, seja $C > 0$ tal que (3.6) seja válido no limitado $\{u \in X : \|u\| \leq M\}$.

Primeiramente, note que

$$\begin{aligned}\|L(t,s)x_0 - L(t,s)\widetilde{x}_0\| &\le \|x_0 - \widetilde{x}_0\| + \left\| \int_s^t \mathscr{H}(r)(L(r,s)x_0 - L(r,s)\widetilde{x}_0)\, dr \right\| \\ &\le \|x_0 - \widetilde{x}_0\| + \alpha \int_s^t \|L(r,s)x_0 - L(r,s)\widetilde{x}_0)\| dr. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Logo, pelo Corolário 3.1.3, temos

$$\|L(t,s)x_0 - L(t,s)\widetilde{x}_0\| \le \|x_0 - \widetilde{x}_0\| e^{\alpha(t-s)}. \tag{3.10}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}&\|x(t,s,x_0) - x(t,s,\widetilde{x}_0)\| \\ &\quad \le \|L(t,s)x_0 - L(t,s)\widetilde{x}_0\| + \left\| \int_s^t L(t,r)(\mathscr{F}(x(r,s,x_0)) - \mathscr{F}(x(r,s,\widetilde{x}_0)))dr \right\| \\ &\quad \le \|x_0 - \widetilde{x}_0\| e^{\alpha(t-s)} + \left\| \int_s^t L(t,r)(\mathscr{F}(x(r,s,x_0)) - \mathscr{F}(x(r,s,\widetilde{x}_0)))dr \right\| \\ &\quad \le \|x_0 - \widetilde{x}_0\| e^{\alpha(t-s)} + e^{\alpha t} C \int_s^t e^{-\alpha r} \|x(r,s,x_0) - x(r,s,\widetilde{x}_0)\| dr,\end{aligned}$$

isto é,

$$\|e^{-\alpha t}x(t,s,x_0) - e^{-\alpha t}x(t,s,\widetilde{x}_0)\| \le \|x_0 - \widetilde{x}_0\| e^{-\alpha s} + C \int_s^t \|e^{-\alpha r}x(r,s,x_0) - e^{-\alpha r}x(r,s,\widetilde{x}_0)\| dr. \tag{3.11}$$

Pelo Corolário 3.1.3, obtemos

$$\|x(t,s,x_0) - x(t,s,\widetilde{x}_0)\| \le \|x_0 - \widetilde{x}_0\| e^{(\alpha + C)(t-s)}. \tag{3.12}$$

Dados $x_0, \widetilde{x}_0 \in X$ e $t, t' \in [s, \tau_{max}(s,x_0)) \cap [s, \tau_{max}(s,\widetilde{x}_0))$, temos

$$\|x(t,s,x_0) - x(t',s,\widetilde{x}_0)\| \le \|x(t,s,x_0) - x(t's,x_0)\| + \|x(t',s,x_0) - x(t',s,\widetilde{x}_0)\|.$$

Como $x(\cdot,s,x_0) \in C([s,\tau_{max}(s,x_0)),X)$ e (3.12) vale, o resultado segue. □

O próximo resultado garante que a solução do problema (3.1) está definida em $[s,\infty)$.

Corolário 3.1.8. Sob as hipóteses do Teorema 3.1.6, o problema (3.1) admite uma única solução definida em $[s,\infty)$.

Demonstração. Sejam $s \in \mathbb{R}$ e $x_0 \in X$. Suponhamos que $\tau_{max} = \tau_{max}(s,x_0) < \infty$. Logo, existe $M > 0$ tal que $\|x(t)\| \le M$ para todo $t \in [s,\tau_{max})$. Seja $C > 0$ tal que (3.6) seja válido no limitado $\{u \in X : \|u\| \le M\}$. Além disso, $\alpha = \max_{s \le t \le \tau_{max}} \|\mathscr{H}(t)\|_{\mathscr{L}(X)} < \infty$. Como

$$x(t) = L(t,s)x_0 + \int_s^t L(t,r)\mathscr{F}(x(r,s,x_0))dr, \quad t \in [s,\tau_{max}),$$

segue que

$$\begin{aligned}
\|x(t)\| &\le \|L(t,s)x_0\| + \int_s^t \|L(t,r)\mathscr{F}(x(r,s,x_0))\|dr \\
&\le e^{\alpha(t-s)}\|x_0\| + \int_s^t e^{\alpha(t-r)}\|\mathscr{F}(x(r,s,x_0)) - \mathscr{F}(0)\|dr + \frac{1-e^{\alpha(t-s)}}{\alpha}\|\mathscr{F}(0)\| \\
&\le e^{\alpha(t-s)}\|x_0\| + \int_s^t e^{\alpha(t-r)}C\|x(r,s,x_0)\|dr + \frac{1}{\alpha}\|\mathscr{F}(0)\|,
\end{aligned}$$

isto é,

$$e^{-\alpha t}\|x(t)\| \le e^{-\alpha s}\|x_0\| + \int_s^t Ce^{-r\alpha}\|x(r,s,x_0)\|dr + \frac{e^{-\alpha t}}{\alpha}\|\mathscr{F}(0)\|,$$

consequentemente, pelo Corolário 3.1.3,

$$\|x(t)\| \le \left(e^{\alpha(t-s)}\|x_0\| + \frac{1}{\alpha}\|\mathscr{F}(0)\|\right)e^{C(t-s)}, \quad t \in [s, \tau_{max}),$$

contradizendo o Corolário (AMANN; METZEN, 2011, Teorema 7.7), já que deveríamos ter $\lim\limits_{t\to\tau_{max}^-} \|x(t)\| = \infty$. Portanto, $\tau_{max} = \infty$. □

3.2 A boa colocação local

Para mostrarmos a boa colocação local para o problema (1.1), seguiremos as ideias apresentadas em (CARVALHO; CHOLEWA, 2008) e provaremos que esse fato é equivalente a mostrar a boa colocação local para o problema (1.5) em $X^{-\frac{1}{2}} \times X^{-\frac{1}{2}}$ (ou, equivalentemente, para o problema (1.6) em $X^{-\frac{1}{2}} \times X^{-\frac{1}{2}}$).

Com este propósito, vamos considerar alguns resultados auxiliares.

Lema 3.2.1. (CARVALHO; CHOLEWA, 2008, Lema 2.3) Sejam $s \ge 0$ e $r \ge -\frac{1}{2}$. Então a aplicação dada por

$$\begin{aligned}
\Phi_s : \quad X^r \times X^r \quad &\longrightarrow \quad X^{r+s} \times X^{r+s} \\
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad &\longmapsto \quad \begin{bmatrix} \tilde{A}^{-s} & 0 \\ 0 & \tilde{A}^{-s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

é um isomorfismo isométrico. Em particular, $\Phi_1 : X^{-\frac{1}{2}} \times X^{-\frac{1}{2}} \to X^{\frac{1}{2}} \times X^{\frac{1}{2}}$ é um isomorfismo isométrico.

NOTAÇÃO: Vamos denotar a inversa de Φ_s por Φ_{-s}, isto é, $\Phi_s^{-1} := \Phi_{-s}$.

A seguir, mostraremos que o operador $\mathscr{Q}_\varepsilon$ definido em (1.7) é contínuo na topologia uniforme de operadores.

Lema 3.2.2. Para cada $\varepsilon \in [0,1]$, a aplicação $\mathbb{R} \ni t \longmapsto \mathscr{Q}_\varepsilon(t) \in \mathscr{L}(X^{-\frac{1}{2}} \times X^{-\frac{1}{2}})$ definida em (1.7) é contínua na topologia uniforme de operadores.

Demonstração. Fixe $\varepsilon \in [0,1]$ de modo arbitrário. Como $\eta_\varepsilon : \mathbb{R} \longrightarrow (0,\infty)$ é contínuo para cada $\varepsilon \in [0,1]$ e $\Lambda = I - \tilde{A}^{-1} \in \mathscr{L}(X^{-\frac{1}{2}})$, dado $\rho > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|\eta_\varepsilon(t) - \eta_\varepsilon(t_0)| < \frac{\rho}{1 + \|\Lambda\|_{\mathscr{L}(X^{-\frac{1}{2}})}}, \qquad \text{se } 0 \leq |t - t_0| < \delta.$$

Consequentemente, se $0 \leq |t - t_0| < \delta$ então

$$\|\mathscr{Q}_\varepsilon(t) - \mathscr{Q}_\varepsilon(t_0)\|_{\mathscr{L}(X^{-\frac{1}{2}} \times X^{-\frac{1}{2}})} = |\eta_\varepsilon(t) - \eta_\varepsilon(t_0)| \|\Lambda\|_{\mathscr{L}(X^{-\frac{1}{2}})} < \rho,$$

provando o resultado. □

Faremos uso da seguinte imersão contínua

$$H_0^s(\Omega) \hookrightarrow X^{\frac{s}{2}} \hookrightarrow H^s(\Omega), \quad \text{para todo} \quad s \in \mathbb{R}, \tag{3.13}$$

presente em (YAGI, 2009, Teorema 16.1). Daí, por dualidade, obtemos

$$L^2(\Omega) \hookrightarrow L^{r'}(\Omega) \hookrightarrow X^{-\frac{s}{2}}, \qquad \text{sempre que} \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1 \ \text{ e } \ \frac{1}{2} \geq \frac{1}{r} \geq \frac{1}{2} - \frac{s}{N} > 0.$$

O próximo passo é provar que o operador $\mathscr{F} : X^{-\frac{1}{2}} \times X^{-\frac{1}{2}} \longrightarrow X^{-\frac{1}{2}} \times X^{-\frac{1}{2}}$ definido em (1.8) é Lipschitz contínuo em conjuntos limitados de $X^{-\frac{1}{2}} \times X^{-\frac{1}{2}}$. Para isso, lembremos primeiramente do seguinte resultado:

Lema 3.2.3. (CARVALHO; CHOLEWA, 2008, Lema 2.4) Suponha que a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaça a condição (1.4). Então

$$\begin{array}{rcccccc} f^e: & X^{-\frac{1}{2}} & \longrightarrow & X^{-\frac{1}{2}} & & & \\ & \phi & \longmapsto & f^e(\phi): & \Omega \subset \mathbb{R}^N & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & & & x & \longmapsto & f^e(\phi)(x) := f\big(\tilde{A}^{-1}\phi(x)\big) \end{array}$$

define um operador de $X^{-\frac{1}{2}}$ em $X^{-\frac{1}{2}}$ o qual é Lipschitz contínuo em conjuntos limitados de $X^{-\frac{1}{2}}$.

Demonstração. Pelas imersões (2.1) e (3.13), temos

$$X^{\frac{1}{2}} \hookrightarrow H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega) \quad \text{para todo} \quad N \geq 3, \tag{3.14}$$

e, por dualidade, segue que

$$L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega) \hookrightarrow X^{-\frac{1}{2}} \quad \text{para todo} \quad N \geq 3. \tag{3.15}$$

Usando a hipótese (1.4) sobre a função f e a desigualdade de Hölder com $\frac{N+2}{N-2}$ e $\frac{N+2}{4}$, respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned} \|f^e(\phi_1) - f^e(\phi_2)\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)} &= \|f(A^{-1}\phi_1) - f(A^{-1}\phi_2)\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)} \\ &\leq c\left(\int_\Omega |A^{-1}(\phi_1 - \phi_2)|^{\frac{2N}{N+2}} (1 + |A^{-1}\phi_1|^{\rho-1} + |A^{-1}\phi_2|^{\rho-1})^{\frac{2N}{N+2}}\, dx\right)^{\frac{N+2}{2N}} \\ &\leq c_1 \|A^{-1}(\phi_1 - \phi_2)\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)} \left(1 + \|A^{-1}\phi_1\|^{\rho-1}_{L^{\frac{N(\rho-1)}{2}}(\Omega)} + \|A^{-1}\phi_2\|^{\rho-1}_{L^{\frac{N(\rho-1)}{2}}(\Omega)}\right). \end{aligned} \tag{3.16}$$

Usando a imersão (3.14) e a imersão $X^{\frac{1}{2}} \hookrightarrow L^{\frac{N(\rho-1)}{2}}(\Omega)$ (com $m=1$ e $r=\frac{N(\rho-1)}{2}$ em (2.1)) em (3.16), segue que

$$\begin{aligned}\|f^e(\phi_1)-f^e(\phi_2)\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)} &\leq c_2\|A^{-1}(\phi_1-\phi_2)\|_{X^{\frac{1}{2}}}(1+\|A^{-1}\phi_1\|^{\rho-1}_{X^{\frac{1}{2}}}+\|A^{-1}\phi_2\|^{\rho-1}_{X^{\frac{1}{2}}})\\ &\leq c_3\|\phi_1-\phi_2\|_{X^{-\frac{1}{2}}}(1+\|\phi_1\|^{\rho-1}_{X^{-\frac{1}{2}}}+\|\phi_2\|^{\rho-1}_{X^{-\frac{1}{2}}}). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Finalmente, tomando ϕ_1 e ϕ_2 em um subconjunto limitado D de $X^{-\frac{1}{2}}$, existe $C=C(D)>0$ tal que $(1+\|\phi_1\|^{\rho-1}_{X^{-\frac{1}{2}}}+\|\phi_2\|^{\rho-1}_{X^{-\frac{1}{2}}})<C$. Assim, segue da imersão (3.15) e da desigualdade (3.17) que

$$\begin{aligned}\|f^e(\phi_1)-f^e(\phi_2)\|_{X^{-\frac{1}{2}}} &\leq c_4\|f^e(\phi_1)-f^e(\phi_2)\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)}\\ &\leq c_5\|\phi_1-\phi_2\|_{X^{-\frac{1}{2}}}(1+\|\phi_1\|^{\rho-1}_{X^{-\frac{1}{2}}}+\|\phi_2\|^{\rho-1}_{X^{-\frac{1}{2}}})\\ &\leq c_5C\|\phi_1-\phi_2\|_{X^{-\frac{1}{2}}}.\end{aligned}$$

$\square$

Lema 3.2.4. Suponhamos que a função $f\colon \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ satisfaça a condição (1.4). Então o operador $\mathscr{F}\colon X^{-\frac{1}{2}}\times X^{-\frac{1}{2}}\longrightarrow X^{-\frac{1}{2}}\times X^{-\frac{1}{2}}$ definido em (1.8) é Lipschitz contínuo em conjuntos limitados de $X^{-\frac{1}{2}}\times X^{-\frac{1}{2}}$.

Demonstração. Seja $D\subset X^{-\frac{1}{2}}\times X^{-\frac{1}{2}}$ um subconjunto limitado. Pelo Lema 3.2.3, existe uma constante $C=C(D)>0$ tal que

$$\begin{aligned}\left\|\mathscr{F}\left(\begin{bmatrix}\phi_1\\ \psi_1\end{bmatrix}\right)-\mathscr{F}\left(\begin{bmatrix}\phi_2\\ \psi_2\end{bmatrix}\right)\right\|_{X^{-\frac{1}{2}}\times X^{-\frac{1}{2}}} &= \|f^e(\phi_1)-f^e(\phi_2)\|_{X^{-\frac{1}{2}}}\\ &\leq C\|\phi_1-\phi_2\|_{X^{-\frac{1}{2}}}\\ &\leq C\left\|\begin{bmatrix}\phi_1\\ \psi_1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\phi_2\\ \psi_2\end{bmatrix}\right\|_{X^{-\frac{1}{2}}\times X^{-\frac{1}{2}}},\end{aligned}$$

quaisquer que sejam $\begin{bmatrix}\phi_1\\ \psi_1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\phi_2\\ \psi_2\end{bmatrix}\in D$. $\square$

De acordo com os Lemas 3.2.2 e 3.2.4, podemos aplicar o Teorema 3.1.6 para guarantir a boa colocação local das soluções do problema (1.5) para cada $\varepsilon\in[0,1]$.

Teorema 3.2.5. Suponhamos que a função $f\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ satisfaça a condição (1.4). Então para cada $\varepsilon\in[0,1]$, $z_0,w_0\in X^{-\frac{1}{2}}$ e $s\in\mathbb{R}$, existe $T^{\varepsilon,max}=T^{\varepsilon,max}(z_0,w_0)>s$ tal que o problema (1.5) possui uma única solução

$$z^{(\varepsilon)}(\cdot)=z^{(\varepsilon)}(\cdot,s,(z_0,w_0))\in\mathscr{C}\big([s,T^{\varepsilon,max}),X^{-\frac{1}{2}}\big)\cap\mathscr{C}^1\big((s,T^{\varepsilon,max}),X^{-\frac{1}{2}}\big)$$

definida em um intervalo maximal de existência $[s, T^{\varepsilon,max})$ o qual é contínua em relação aos dados iniciais. Além disso, ou $T^{\varepsilon,max} = \infty$ ou

$$\lim_{t \to (T^{\varepsilon,max})^-} \left(\left\| z^{(\varepsilon)}(t,s,(z_0,w_0)) \right\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} + \left\| z_t^{(\varepsilon)}(t,s,(z_0,w_0)) \right\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} \right) = \infty.$$

Demonstração. Uma vez que o problema (1.5) é equivalente ao problema (1.6) com $w = z_t$, então o resultado segue imediatamente dos Teoremas 3.1.6 e 3.1.7, para o problema de primeira ordem (1.6). □

A boa colocação de soluções para a equação de evolução semilinear não autônoma de segunda ordem (1.1) é garantida pelo Lema 3.2.1 e o Teorema 3.2.5.

Teorema 3.2.6 (Boa Colocação Local)**.** Suponhamos que a função $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaça a condição (1.4). Dados $\varepsilon \in [0,1]$, $u_0, v_0 \in X^{\frac{1}{2}}$ e $s \in \mathbb{R}$, existem $\tau^{\varepsilon,max}_{u_0,v_0} > s$ e uma única função

$$u^{(\varepsilon)}(\cdot) = u^{(\varepsilon)}(\cdot,s,(u_0,v_0)) \in \mathscr{C}\left([s,\tau^{\varepsilon,max}_{u_0,v_0}), X^{\frac{1}{2}}\right) \cap \mathscr{C}^1\left((s,\tau^{\varepsilon,max}_{u_0,v_0}), X^{\frac{1}{2}}\right)$$

satisfazendo (1.1) para todo $t \in [s, \tau^{\varepsilon,max}_{u_0,v_0})$. Além disso, as funções $u^{(\varepsilon)}(t,s,(u_0,v_0))$ e $u_t^{(\varepsilon)}(t,s,(u_0,v_0))$ dependem continuamente das variáveis $(t,u_0,v_0) \in [s,\tau^{\varepsilon,max}_{u_0,v_0}) \times X^{\frac{1}{2}} \times X^{\frac{1}{2}}$ na norma $X^{\frac{1}{2}} \times X^{\frac{1}{2}}$ e ou $\tau^{\varepsilon,max}_{u_0,v_0} = \infty$ ou

$$\lim_{t \to (\tau^{\varepsilon,max}_{u_0,v_0})^-} \left(\left\| u^{(\varepsilon)}(t,s,(u_0,v_0)) \right\|^2_{X^{\frac{1}{2}}} + \left\| u_t^{(\varepsilon)}(t,s,(u_0,v_0)) \right\|^2_{X^{\frac{1}{2}}} \right) = \infty.$$

Demonstração. Sejam $\varepsilon \in [0,1]$, $u_0, v_0 \in X^{\frac{1}{2}}$ e $s \in \mathbb{R}$. Defina $\left[\begin{smallmatrix} z_0 \\ w_0 \end{smallmatrix}\right] := \Phi_{-1}\left[\begin{smallmatrix} u_0 \\ v_0 \end{smallmatrix}\right] \in X^{-\frac{1}{2}} \times X^{-\frac{1}{2}}$. De acordo com o Teorema 3.2.5, existe $T^{\varepsilon,max} = T^{\varepsilon,max}(z_0,w_0) > s$ tal que o problema (1.5) admite uma única solução $z^{(\varepsilon)}(\cdot) = z^{(\varepsilon)}(\cdot,s,(z_0,w_0)) \in \mathscr{C}\left([s,T^{\varepsilon,max}), X^{-\frac{1}{2}}\right) \cap \mathscr{C}^1\left((s,T^{\varepsilon,max}), X^{-\frac{1}{2}}\right)$ definida no intervalo $[s, T^{\varepsilon,max})$. Definindo

$$\tau^{\varepsilon,max}_{u_0,v_0} := T^{\varepsilon,max}(z_0,w_0) = T^{\varepsilon,max}\left(\tilde{A}u_0, \tilde{A}v_0\right) > s$$

e

$$u^{(\varepsilon)}(t) := \tilde{A}^{-1} z^{(\varepsilon)}(t), \qquad t \in \left[s, \tau^{\varepsilon,max}_{u_0,v_0}\right),$$

o resultado segue. □

3.3 A boa colocação global

Finalizamos esta seção com a prova da boa colocação global das soluções da equação de evolução semilinear não autônoma de segunda ordem (1.1). Para isso, exibiremos alguns resultados auxiliares.

Lema 3.3.1. A desigualdade

$$\frac{\lambda_1}{1+\lambda_1}\|\psi\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} \leq \|\psi\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} - \|\tilde{A}^{-\frac{1}{2}}\psi\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}}$$

é válida para todo $\psi \in X^{-\frac{1}{2}}$.

Demonstração. Pela desigualdade de Poincaré (2.3), podemos escrever

$$\begin{aligned}\|\tilde{A}^{\frac{1}{2}}\phi\|^2_X &= \|(I-\Delta)^{\frac{1}{2}}\phi\|^2_X = ((I-\Delta)\phi,\phi) = (\phi,\phi)+(-\Delta\phi,\phi)\\ &= \|\phi\|^2_X + \|(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\phi\|^2_X\\ &\geq (1+\lambda_1)\|\phi\|^2_X, \qquad \phi \in X^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{3.18}$$

Uma vez que $\tilde{A}^{-1}\psi \in X^{\frac{1}{2}}$ para todo $\psi \in X^{-\frac{1}{2}}$, obtemos

$$\|\psi\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} \geq (1+\lambda_1)\|\tilde{A}^{-\frac{1}{2}}\psi\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} \tag{3.19}$$

e, consequentemente, segue que

$$\frac{\lambda_1}{1+\lambda_1}\|\psi\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} \leq \|\psi\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} - \|\tilde{A}^{-\frac{1}{2}}\psi\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}}, \qquad \psi \in X^{-\frac{1}{2}}. \qquad \square$$

Lema 3.3.2. Suponhamos que a função f satisfaça as condições (1.2) e (1.4). Então:

(a) existem $\nu_0 \in (0,\lambda_1)$ e $K_1 > 0$ tais que

$$\int_\Omega f(\tilde{A}^{-1}\psi)\tilde{A}^{-1}\psi\,dx \leq \frac{(\lambda_1-\nu_0)}{1+\lambda_1}\|\psi\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} + K_1,$$

para todo $\psi \in X^{-\frac{1}{2}}$;

(b) existem $\nu_0 \in (0,\lambda_1)$ e $K_2 > 0$ tais que

$$\int_\Omega\int_0^{\tilde{A}^{-1}\psi} f(s)\,dsdx \leq \frac{(\lambda_1-\nu_0)}{2(1+\lambda_1)}\|\psi\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} + K_2,$$

para todo $\psi \in X^{-\frac{1}{2}}$.

Demonstração. Pela condição (1.2) podemos tomar $\nu_0 \in (0,\lambda_1)$ tal que

$$\limsup_{|s|\to\infty}\frac{f(s)}{s} < \lambda_1 - \nu_0.$$

Daí, existe um $r_1 > 0$ tal que

$$\frac{f(s)}{s} < \lambda_1 - \nu_0 \quad \text{sempre que} \quad |s| \geq r_1. \tag{3.20}$$

Logo, $sf(s) \leq (\lambda_1 - \nu_0)s^2$ sempre que $|s| \geq r_1$. Além disso, existe um $M > 0$ tal que $|f(s)| \leq M$ para todo $|s| \leq r_1$. Consequentemente,

$$sf(s) \leq (\lambda_1 - \nu_0)s^2 + r_1 M \quad \text{para todo} \quad s \in \mathbb{R}. \tag{3.21}$$

(a) Segue de (3.21) que

$$f\big(\tilde{A}^{-1}\psi(x)\big)\tilde{A}^{-1}\psi(x) \leq (\lambda_1 - \nu_0)|\tilde{A}^{-1}\psi(x)|^2 + r_1 M$$

para todo $\psi \in X^{-\frac{1}{2}}$ e $x \in \Omega$. Usando o Lema 3.3.1, obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(\tilde{A}^{-1}\psi)\tilde{A}^{-1}\psi\, dx &\leq (\lambda_1 - \nu_0)\|\tilde{A}^{-1}\psi\|_X^2 + r_1 M|\Omega| \\ &\leq \frac{(\lambda_1 - \nu_0)}{1+\lambda_1}\|\psi\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} + K_1,\end{aligned}$$

para todos $\psi \in X^{-\frac{1}{2}}$ e $x \in \Omega$, em que $K_1 := r_1 M|\Omega|$.

(b) Como descrito no início desta demonstração, $|f(s)| \leq M$ sempre que $|s| \leq r_1$. Além disso, a desigualdade em (3.20) assegura que

$$f(s) < (\lambda_1 - \nu_0)s \quad \text{se} \quad s \geq r_1 \quad \text{e} \quad -f(s) < -(\lambda_1 - \nu_0)s \quad \text{se} \quad s \leq -r_1.$$

Então,

$$\int_0^s f(t)\,dt \leq \int_0^{r_1} M\,dt = Mr_1 \leq Mr_1 + (\lambda_1 - \nu_0)\frac{s^2}{2}, \quad \text{se} \quad s \in [0, r_1],$$

$$\int_0^s f(t)\,dt \leq Mr_1 + \int_{r_1}^s (\lambda_1 - \nu_0)t\,dt \leq Mr_1 + (\lambda_1 - \nu_0)\frac{s^2}{2}, \quad \text{se} \quad s > r_1,$$

$$\int_0^s f(t)\,dt \leq \int_{-r_1}^0 Mdt = Mr_1 \leq Mr_1 + (\lambda_1 - \nu_0)\frac{s^2}{2}, \quad \text{se} \quad s \in [-r_1, 0],$$

e

$$\int_0^s f(t)\,dt \leq Mr_1 - \int_s^{-r_1} (\lambda_1 - \nu_0)tdt \leq Mr_1 + (\lambda_1 - \nu_0)\frac{s^2}{2}, \quad \text{se} \quad s < -r_1.$$

Portanto,

$$\int_0^{\tilde{A}^{-1}\psi(x)} f(s)\,ds \leq (\lambda_1 - \nu_0)\frac{\big|\tilde{A}^{-1}\psi(x)\big|^2}{2} + r_1 M,$$

quaisquer que sejam $\psi \in X^{-\frac{1}{2}}$ e $x \in \Omega$. Usando o Lema 3.3.1, concluímos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega\int_0^{\tilde{A}^{-1}\psi} f(s)\,dsdx &\leq \frac{(\lambda_1 - \nu_0)}{2}\|\tilde{A}^{-1}\psi\|_X^2 + r_1 M|\Omega| \\ &\leq \frac{\lambda_1 - \nu_0}{2(1+\lambda_1)}\|\psi\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} + K_2,\end{aligned}$$

e isto completa a prova. □

Lema 3.3.3. (CARVALHO; CHOLEWA, 2008, Lema 2.1) A igualdade

$$\langle \tilde{A}^{-\frac{1}{2}}\phi, \tilde{A}^{\frac{1}{2}}\psi\rangle_X = \int_\Omega \phi\psi\,dx,$$

é válida para todo $\phi \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$ e para todo $\psi \in X^{\frac{1}{2}}$.

Demonstração. Seja $\phi \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$. Como $L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)}$, segue que existe uma sequência $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ de modo que $\lim\limits_{n\to\infty} \|\phi_n - \phi\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)} = 0$. Agora, notemos que $L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$ (já que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)$) o que implica $\lim\limits_{n\to\infty} \|\phi_n - \phi\|_{H^{-1}(\Omega)} = 0$. Segue do fato de $\tilde{A}$ ser auto adjunto que

$$\langle \tilde{A}^{-\frac{1}{2}}\phi_n, \tilde{A}^{\frac{1}{2}}\psi\rangle_X = \langle \phi_n, \tilde{A}^{-\frac{1}{2}}\tilde{A}^{\frac{1}{2}}\psi\rangle_X = \langle \phi_n, \psi\rangle_X \quad \text{para todo} \quad \psi \in H_0^1(\Omega). \tag{3.22}$$

Afirmamos que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_\Omega \phi_n \psi \, dx = \int_\Omega \phi \psi \, dx$. De fato, como $\lim\limits_{n\to\infty} \|\phi_n - \phi\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)} = 0$, segue (veja Teorema 2.1.9) que a menos de subsequência vale:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \phi_n(x) = \phi(x)$ quase sempre em Ω;

(ii) existe uma função $h \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$ de modo que $|\phi_n(x)| \le h(x)$ quase sempre em Ω e para todo $n \in \mathbb{N}$.

Além disso, usando a desigualdade de Young e a imersão contínua $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)$ obtemos para $\psi \in L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)$:

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} (\phi_n \psi)(x) = \phi(x)\psi(x)$ quase sempre em Ω;

(iv) a função $(\phi_n \psi)(x)$ é limitada superiormente por uma função integrável, pois

$$|(\phi_n\psi)(x)| \le |h(x)||\psi(x)| \le \frac{N+2}{2N}|h(x)|^{\frac{2N}{N+2}} + \frac{N-2}{2N}|\psi(x)|^{\frac{2N}{N-2}}.$$

Portanto, segue do Teorema 2.1.8 que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \phi_n \psi \, dx = \int_\Omega \phi \psi \, dx. \tag{3.23}$$

Por outro lado, para $\psi \in H_0^1(\Omega)$,

$$|\langle \tilde{A}^{-\frac{1}{2}}\phi_n - \tilde{A}^{-\frac{1}{2}}\phi, \tilde{A}^{\frac{1}{2}}\psi\rangle_X| \le \|\tilde{A}^{-\frac{1}{2}}\phi_n - \tilde{A}^{-\frac{1}{2}}\phi\|_X \|\tilde{A}^{\frac{1}{2}}\psi\|_X = \|\phi_n - \phi\|_{X^{-\frac{1}{2}}} \|\psi\|_{X^{\frac{1}{2}}} \to 0,$$

quando $n \to \infty$. Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \langle \tilde{A}^{-\frac{1}{2}}\phi_n, \tilde{A}^{\frac{1}{2}}\psi\rangle_X = \langle \tilde{A}^{-\frac{1}{2}}\phi, \tilde{A}^{\frac{1}{2}}\psi\rangle_X. \tag{3.24}$$

De (3.22),(3.23),(3.24) e da unicidade do limite, concluímos que

$$\langle \tilde{A}^{-\frac{1}{2}}\phi, \tilde{A}^{\frac{1}{2}}\psi\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \phi\psi\, dx, \quad \text{com } \phi \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega) \text{ e } \psi \in H_0^1(\Omega).$$

$\square$

Os próximos resultados estabelecem a boa colocação global das soluções do problema (1.5).

Lema 3.3.4. Suponhamos que a função f satisfaça as condições (1.2)-(1.4). Então dados $\varepsilon \in [0,1]$, $z_0, w_0 \in X^{-\frac{1}{2}}$ e $s \in \mathbb{R}$, existe $C > 0$ (independente de ε) tal que $z^{(\varepsilon)}(t,s,(z_0,w_0))$ e $z_t^{(\varepsilon)}(t,s,(z_0,w_0))$ satisfazem a estimativa

$$\|z^{(\varepsilon)}\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} + \|z_t^{(\varepsilon)}\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} \leq C\left(1 + \|z_0\|^{\rho+1}_{X^{-\frac{1}{2}}} + \|w_0\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}}\right), \qquad t \in [s, T^{\varepsilon,max}), \tag{3.25}$$

em que $T^{\varepsilon,max} = T^{\varepsilon,max}(z_0,w_0) > s$ é dado no Teorema 3.2.5 e $z^{(\varepsilon)}(\cdot) = z^{(\varepsilon)}(\cdot,s,(z_0,w_0)) \in \mathscr{C}\left([s,T^{\varepsilon,max}), X^{-\frac{1}{2}}\right) \cap \mathscr{C}^1\left((s,T^{\varepsilon,max}), X^{-\frac{1}{2}}\right)$ é a única solução do problema (1.5).

Demonstração. Seja $\varepsilon \in [0,1]$ fixado mas arbitrário e denotemos simplesmente $\eta := \eta_\varepsilon$. De acordo com o Teorema 3.2.5, existe uma única solução $z(\cdot) = z(\cdot,s,(z_0,w_0))$ de (1.5) em $X^{-\frac{1}{2}} \times X^{-\frac{1}{2}}$ definida num intervalo $\left[s, T^{max}(z_0,w_0)\right)$. Agora, aplicando o produto interno em (1.5) com z_t em $X^{-\frac{1}{2}}$, obtemos

$$\langle z_{tt}, z_t\rangle_{X^{-\frac{1}{2}}} + \eta(t)\langle (I - \tilde{A}^{-1})z_t, z_t\rangle_{X^{-\frac{1}{2}}} + \langle (I - \tilde{A}^{-1})z, z_t\rangle_{X^{-\frac{1}{2}}} = \langle f^e(z), z_t\rangle_{X^{-\frac{1}{2}}},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left(\|z_t\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} + \|z\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} \right.\right. &- \left.\left. \|\tilde{A}^{-\frac{1}{2}}z\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}}\right)\right] - \langle f^e(z), z_t\rangle_{X^{-\frac{1}{2}}} = \\ &= -\eta(t)\left(\|z_t\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} - \|\tilde{A}^{-\frac{1}{2}}z_t\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}}\right). \end{aligned} \tag{3.26}$$

Defina o operador

$$\mathscr{L}(z,z_t) := \frac{1}{2}\left(\|z_t\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} + \|z\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} - \|\tilde{A}^{-\frac{1}{2}}z\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}}\right) - \int_\Omega F(\tilde{A}^{-1}z)\,dx, \qquad t \geq s, \tag{3.27}$$

em que $F(t) := \displaystyle\int_0^t f(\tau)\,d\tau$. Afirmamos que $\dfrac{d}{dt}\mathscr{L}(z,z_t) \leq 0$ para todo $t \geq s$. De fato, pelo Lema 3.3.1, podemos escrever as seguintes estimativas:

$$\frac{\lambda_1}{1+\lambda_1}\|z\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} \leq \|z\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} - \|\tilde{A}^{-\frac{1}{2}}z\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} \tag{3.28}$$

e

$$\frac{\lambda_1}{1+\lambda_1}\|z_t\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} \leq \|z_t\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} - \|\tilde{A}^{-\frac{1}{2}}z_t\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}}. \tag{3.29}$$

Além disso, segue do Lema 3.3.3 que

$$\begin{aligned} \langle f^e(z), z_t\rangle_{X^{-\frac{1}{2}}} &= \langle \tilde{A}^{-\frac{1}{2}}f^e(z), \tilde{A}^{\frac{1}{2}}\tilde{A}^{-1}z_t\rangle_X = \int_\Omega f(\tilde{A}^{-1}z)\tilde{A}^{-1}z_t\,dx \\ &= \int_\Omega \frac{d}{dt}\left(F(\tilde{A}^{-1}z)\right)dx = \frac{d}{dt}\left(\int_\Omega F(\tilde{A}^{-1}z)\,dx\right). \end{aligned} \tag{3.30}$$

De (3.26), (3.27), (3.29) e (3.30), concluímos que

$$\frac{d}{dt}\big(\mathscr{L}(z,z_t)\big) = -\eta(t)\left(\|z_t\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} - \|\tilde{A}^{-\frac{1}{2}}z_t\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}}\right) \leq -\frac{a_1\lambda_1}{1+\lambda_1}\|z_t\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} \leq 0, \tag{3.31}$$

para todo $t \geq s$.

Agora, afirmamos que

$$\frac{1}{2}\|z_t\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} + \frac{\nu_0}{2(1+\lambda_1)}\|z\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} - K_2 \leq \mathscr{L}(z,z_t) \leq \mathscr{L}\big(z(s),z_t(s)\big), \tag{3.32}$$

para todo $t \in [s,T^{max})$, onde $\nu_0 \in (0,\lambda_1)$ e $K_2 > 0$ são dados pelo Lema 3.3.2, item (b). De fato, por um lado segue de (3.31) que $\mathscr{L}(z,z_t) \leq \mathscr{L}\big(z(s),z_t(s)\big)$ para todo $t \in [s,T^{max})$. Por outro lado, do Lema 3.3.2, (b), existem $\nu_0 \in (0,\lambda_1)$ e $K_2 > 0$ tais que

$$\int_\Omega F(\tilde{A}^{-1}z)\,dx \leq \frac{\lambda_1-\nu_0}{2(1+\lambda_1)}\|z\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} + K_2,$$

isto é,

$$\frac{\nu_0-\lambda_1}{2(1+\lambda_1)}\|z\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} - K_2 \leq -\int_\Omega F(\tilde{A}^{-1}z)\,dx. \tag{3.33}$$

De (3.27), (3.28) e (3.33), temos

$$\mathscr{L}(z,z_t) \geq \frac{1}{2}\|z_t\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} + \frac{\nu_0}{2(1+\lambda_1)}\|z\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} - K_2,$$

para todo $t \in [s,T^{max})$, o que garante a veracidade de (3.32).

Desta forma, segue de (3.32) que

$$\begin{aligned} \|z_t\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} \quad &+ \quad \frac{\nu_0}{1+\lambda_1}\|z\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} \leq \\ &\leq \quad \|w_0\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} + \|z_0\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} - \|\tilde{A}^{-\frac{1}{2}}z_0\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} - 2\int_\Omega F(\tilde{A}^{-1}z_0)\,dx + 2K_2. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Como

$$\int_\Omega |F(\tilde{A}^{-1}z_0)|\,dx \leq c\int_\Omega \big(1+|\tilde{A}^{-1}z_0|^{\rho+1}\big)\,dx \leq c_1\big(1+\|\tilde{A}^{-1}z_0\|^{\rho+1}_{L^{\rho+1}(\Omega)}\big) \leq c_2\big(1+\|z_0\|^{\rho+1}_{X^{-\frac{1}{2}}}\big),$$

já que estamos assumindo (1.3) e a imersão $X^{\frac{1}{2}} \hookrightarrow L^{\rho+1}(\Omega)$ é válida, segue de (3.34) a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} \min\left\{1,\frac{\nu_0}{1+\lambda_1}\right\}\big(\|z_t\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} + \|z\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}}\big) &\leq \|w_0\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} + \|z_0\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} + 2c_2\big(1+\|z_0\|^{\rho+1}_{X^{-\frac{1}{2}}}\big) + 2K_2 \\ &\leq c_3\left(1+\|w_0\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} + \|z_0\|^{\rho+1}_{X^{-\frac{1}{2}}}\right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|z_t\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} + \|z\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} \leq C\left(1+\|w_0\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} + \|z_0\|^{\rho+1}_{X^{-\frac{1}{2}}}\right), \qquad t \in [s,T^{max}),$$

provando o resultado. □

Teorema 3.3.5. Suponhamos que a função f satisfaça as condições (1.2)-(1.4). Então dados $\varepsilon \in [0,1]$, $z_0, w_0 \in X^{-\frac{1}{2}}$ e $s \in \mathbb{R}$, a solução $z^{(\varepsilon)}(\cdot, s, (z_0, w_0))$ do problema (1.5) existe globalmente. Além disso, a relação $S^{(\varepsilon)}_{-1/2}(t,s)\begin{bmatrix} z_0 \\ w_0 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} z^{(\varepsilon)}(t,s,(z_0,w_0)) \\ z^{(\varepsilon)}_t(t,s,(z_0,w_0)) \end{bmatrix}$ define um processo de evolução em $X^{-\frac{1}{2}} \times X^{-\frac{1}{2}}$ associado ao problema (1.5) o qual satisfaz em $X^{-\frac{1}{2}} \times X^{-\frac{1}{2}}$ a fórmula da variação das constantes

$$S^{(\varepsilon)}_{-1/2}(t,s)\begin{bmatrix} z_0 \\ w_0 \end{bmatrix} = L^{(\varepsilon)}_{-1/2}(t,s)\begin{bmatrix} z_0 \\ w_0 \end{bmatrix} + U^{(\varepsilon)}_{-1/2}(t,s)\begin{bmatrix} z_0 \\ w_0 \end{bmatrix}, \tag{3.35}$$

em que

$$L^{(\varepsilon)}_{-1/2}(t,s) := I - \int_s^t \mathscr{Q}_\varepsilon(\tau) L^{(\varepsilon)}_{-1/2}(\tau,s)\, d\tau \tag{3.36}$$

e

$$U^{(\varepsilon)}_{-1/2}(t,s)\begin{bmatrix} z_0 \\ w_0 \end{bmatrix} = \int_s^t L^{(\varepsilon)}_{-1/2}(t,\tau)\mathscr{F}\left(S^{(\varepsilon)}_{-1/2}(\tau,s)\begin{bmatrix} z_0 \\ w_0 \end{bmatrix}\right) d\tau. \tag{3.37}$$

Demonstração. Dados $\varepsilon \in [0,1]$, $z_0, w_0 \in X^{-\frac{1}{2}}$ e $s \in \mathbb{R}$, segue do Lemma 3.3.4 que

$$\|z^{(\varepsilon)}\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} + \|z^{(\varepsilon)}_t\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} \leq C\left(1 + \|z_0\|^{\rho+1}_{X^{-\frac{1}{2}}} + \|w_0\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}}\right), \qquad t \in [s, T^{\varepsilon,max}(z_0,w_0)).$$

Assim, pelo Teorema 3.2.5, devemos ter $T^{\varepsilon,max}(z_0,w_0) = \infty$ e $z^{(\varepsilon)}(\cdot, s, (z_0,w_0))$ está globalmente definida. Além disso, a fórmula da variações das constante segue diretamente do Corolário 3.1.8. $\square$

Como consequência imediata do Lema 3.3.4 e do Teorema 3.3.5, e usando a propriedade auxiliar das isometrias dada pelo Lema 3.2.1, obtemos a boa colocação global das soluções do problema (1.1). Veja Lema 3.3.6.

Lema 3.3.6. Suponhamos que a função f satisfaça as condições (1.2)-(1.4). Então dados $\varepsilon \in [0,1]$, $u_0, v_0 \in X^{\frac{1}{2}}$ e $s \in \mathbb{R}$, existe $C > 0$ (independente de ε) tais que $u^{(\varepsilon)}(t,s,(u_0,v_0))$ e $u^{(\varepsilon)}_t(t,s,(u_0,v_0))$ satisfazem a estimativa

$$\|u^{(\varepsilon)}\|^2_{X^{\frac{1}{2}}} + \|u^{(\varepsilon)}_t\|^2_{X^{\frac{1}{2}}} \leq C\left(1 + \|u_0\|^{\rho+1}_{X^{\frac{1}{2}}} + \|v_0\|^2_{X^{\frac{1}{2}}}\right), \qquad t \in [s, \tau^{\varepsilon,max}_{u_0,v_0}), \tag{3.38}$$

em que $\tau^{\varepsilon,max}_{u_0,v_0} > s$ é dado no Teorema 3.2.6 e $u^{(\varepsilon)}(\cdot) = u^{(\varepsilon)}(\cdot,s,(u_0,v_0)) \in \mathscr{C}\big([s,\tau^{\varepsilon,max}_{u_0,v_0}), X^{\frac{1}{2}}\big) \cap \mathscr{C}^1\big((s,\tau^{\varepsilon,max}_{u_0,v_0}), X^{\frac{1}{2}}\big)$ é a única solução do problema (1.1).

Teorema 3.3.7 (Boa Colocação Global)**.** Suponhamos que a função f satisfaça as condições (1.2)-(1.4). Então dados $\varepsilon \in [0,1]$, $u_0, v_0 \in X^{\frac{1}{2}}$ e $s \in \mathbb{R}$, a solução $u^{(\varepsilon)}(\cdot,s,(u_0,v_0))$ de (1.1) existe globalmente. Além disso, a relação $S^{(\varepsilon)}(t,s)\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} u^{(\varepsilon)}(t,s,(u_0,v_0)) \\ u^{(\varepsilon)}_t(t,s,(u_0,v_0)) \end{bmatrix}$ define um processo de evolução em $X^{\frac{1}{2}} \times X^{\frac{1}{2}}$ associado ao problema (1.1), o qual é dado por $S^{(\varepsilon)}(t,s) = \Phi_1 S^{(\varepsilon)}_{-1/2}(t,s)\Phi_{-1}$ e satisfaz em $X^{\frac{1}{2}} \times X^{\frac{1}{2}}$ a fórmula das variações das constantes

$$S^{(\varepsilon)}(t,s)\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = L^{(\varepsilon)}(t,s)\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} + U^{(\varepsilon)}(t,s)\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}, \tag{3.39}$$

em que

$$L^{(\varepsilon)}(t,s) := \Phi_1 L^{(\varepsilon)}_{-1/2}(t,s)\Phi_{-1} \qquad \text{e} \qquad U^{(\varepsilon)}(t,s) := \Phi_1 U^{(\varepsilon)}_{-1/2}(t,s)\Phi_{-1}, \tag{3.40}$$

e, mais especificamente,

$$U^{(\varepsilon)}(t,s)\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = \int_s^t L^{(\varepsilon)}(t,\tau)\Phi_1 \mathscr{F}\left(\Phi_{-1}S^{(\varepsilon)}(\tau,s)\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}\right)d\tau. \tag{3.41}$$

Corolário 3.3.8. Assuma que as hipóteses do Teorema 3.3.7 sejam válidas. Seja D um subconjunto limitado em $X^{\frac{1}{2}} \times X^{\frac{1}{2}}$. A órbita pullback $\gamma_p^{\varepsilon}(D,t) := \bigcup_{s\le t} S^{(\varepsilon)}(t,s)D$ é uniformemente limitada em $X^{\frac{1}{2}} \times X^{\frac{1}{2}}$ com respeito a $t \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in [0,1]$ e a D.

Demonstração. Segue de (3.38) que

$$\sup_{\varepsilon\in[0,1]} \left\| S^{(\varepsilon)}(t,s)\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}\right\|^2_{X^{\frac{1}{2}}\times X^{\frac{1}{2}}} \le C\Big(1 + \|u_0\|^{\rho+1}_{X^{\frac{1}{2}}} + \|v_0\|^2_{X^{\frac{1}{2}}}\Big), \qquad t \ge s.$$

Agora se D for um subconjunto limitado de $X^{\frac{1}{2}} \times X^{\frac{1}{2}}$, então a órbita pullback $\gamma_p^{\varepsilon}(D,t)$ satisfaz

$$\sup_{y\in\gamma_p^{\varepsilon}(D,t)} \|y\|^2_{X^{\frac{1}{2}}\times X^{\frac{1}{2}}} \le C_D$$

quaisquer que sejam $t \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon \in [0,1]$, onde $C_D > 0$ é uma constante independente de t e ε. □

CAPÍTULO

4

ATRATOR EXPONENCIAL PULLBACK E SUA DIMENSÃO FRACTAL

Neste capítulo, vamos provar a existência e a estabilidade do atrator exponencial pullback da família de processos de evolução $\{S^{(\varepsilon)}(t,s) : t \geq s\}_{\varepsilon\in[0,1]}$ dada pelo Teorema 3.3.7 no espaço $X^{\frac{1}{2}} \times X^{\frac{1}{2}}$. Iremos utilizar o método smoothing apresentado na Seção 4.1.

Ao longo deste capítulo, assumiremos que f satisfaz as condições (1.2)-(1.4).

4.1 Existência do atrator pullback exponencial: caso abstrato

Para nosso propósito, iremos considerar o método de suavização que pode ser visto como um caso particular tanto do método de quase-estabilidade descrito (para sistemas dinâmicos autônomos) em (CHUESHOV; LASIECKA, 2010) quanto do método apresentado no Teorema 2.6.7 (para sistemas dinâmicos não autônomos).

Teorema 4.1.1. Seja $\{S^{(\varepsilon)}(t,s) : t \geq s \in \mathbb{R}\}$, $\varepsilon \in [0,1]$, uma família de processos de evolução em um espaço de Banach $(V, \|\cdot\|_V)$ representado por $S^{(\varepsilon)} = U^{(\varepsilon)} + L^{(\varepsilon)}$, onde $\{U^{(\varepsilon)}(t,s) : t \geq s \in \mathbb{R}\}$ e $\{L^{(\varepsilon)}(t,s) : t \geq s \in \mathbb{R}\}$ são famílias de operadores que satisfazem as seguintes propriedades:

(H_1) Existe um espaço de Banach $(W, \|\cdot\|_W)$ tal que a imersão $V \hookrightarrow W$ é densa e compacta.

(H_2) Existe um conjunto limitado fechado $\mathscr{B} \subset V$ que absorve uniformemente pullback todos os subconjuntos limitados de V, isto é, para cada subconjunto limitado $D \subset V$ existe $T_D \geq 0$ de modo que

$$\bigcup_{\varepsilon\in[0,1]} \bigcup_{t\in\mathbb{R}} S^{(\varepsilon)}(t,t-s)D \subset \mathscr{B}, \quad \text{para todo } s \geq T_D.$$

(H_3) A família $\{U^{(\varepsilon)}(t,s): t \geq s \in \mathbb{R}\}$, $\varepsilon \in [0,1]$, satisfaz a *propriedade de smoothing* dentro do conjunto absorvente $\mathscr{B}$, isto é, existem $\widetilde{T} \geq T_{\mathscr{B}}$ e uma constante $\kappa > 0$ de modo que

$$\sup_{\varepsilon\in[0,1]} \left\|U^{(\varepsilon)}(t+\widetilde{T},t)u - U^{(\varepsilon)}(t+\widetilde{T},t)v\right\|_V \leq \kappa\|u-v\|_W, \quad \text{para todos } u,v \in \mathscr{B}, t \in \mathbb{R}.$$

(H_4) A família $\{L^{(\varepsilon)}(t,s): t \geq s \in \mathbb{R}\}$, $\varepsilon \in [0,1]$, é uma *contração* dentro do conjunto absorvente $\mathscr{B}$, isto é,

$$\sup_{\varepsilon\in[0,1]} \left\|L^{(\varepsilon)}(t+\widetilde{T},t)u - L^{(\varepsilon)}(t+\widetilde{T},t)v\right\|_V \leq \lambda\|u-v\|_V, \quad \text{para todos } u,v \in \mathscr{B}, t \in \mathbb{R},$$

sendo que a constante de contração $0 < \lambda < 1$ e $\widetilde{T}$ vem da condição (H_3).

(H_5) A família $\{S^{(\varepsilon)}(t,s): t \geq s \in \mathbb{R}\}$, $\varepsilon \in [0,1]$, é *Lipschitz contínua* dentro do conjunto absorvente $\mathscr{B}$, isto é, existe $L_{\widetilde{T}} > 0$ (dependendo da constante $\widetilde{T}$ que vem da condição (H_3)) de modo que

$$\sup_{\varepsilon\in[0,1]} \sup_{r\in[0,\widetilde{T}]} \left\|S^{(\varepsilon)}(r+t,t)u - S^{(\varepsilon)}(r+t,t)v\right\|_V \leq L_{\widetilde{T}}\|u-v\|_V, \quad \text{para todos } u,v \in \mathscr{B}, t \in \mathbb{R}.$$

Então, para cada $\theta \in (\lambda,1)$ e $\varepsilon \in [0,1]$, o processo de evolução $\{S^{(\varepsilon)}(t,s): t \geq s \in \mathbb{R}\}$ admite um atrator exponencial pullback $\{\mathscr{M}_\theta^\varepsilon(t): t \in \mathbb{R}\} \subset \mathscr{B} \subset V$ com dimensão fractal uniformemente limitada por

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left\{ \dim_F \left(\mathscr{M}_\theta^\varepsilon(t); V\right) \right\} \leq \frac{\ln\left(m_V\left(\frac{2}{\theta-\lambda}\right)\right)}{-\ln\theta},$$

em que $m_V(R)$ representa o número máximo de pontos z_i na bola $B_V(0,R)$ de maneira que $\kappa\|z_i - z_j\|_W > 1$. Além disso, a aplicação $\varepsilon \longmapsto \mathscr{M}_\theta^\varepsilon$ é estável no seguinte sentido: dado $\varepsilon_0 \in [0,1]$, se $\varepsilon \in [0,1]$ é tal que

$$\Gamma(\varepsilon,\varepsilon_0) := \sup_{u\in\mathscr{B}} \sup_{t\in\mathbb{R}} \sup_{r\in[0,\widetilde{T}]} \left\|S^{(\varepsilon)}(r+t,t)u - S^{(\varepsilon_0)}(r+t,t)u\right\|_V < 1,$$

então

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left\{ dist_V^{symm}\left(\mathscr{M}_\theta^\varepsilon(t), \mathscr{M}_\theta^{\varepsilon_0}(t)\right) \right\} \leq c\Gamma(\varepsilon,\varepsilon_0)^\zeta,$$

para alguma constante $c > 0$ e $0 < \zeta < 1$ que são independentes de ε.

Demonstração. Vamos verificar que as hipóteses do Teorema 2.6.7 estão satisfeitas. Sejam

$$M := \mathscr{B}, \quad E = Z := V, \quad n_V(\cdot) := \kappa\|\cdot\|_W \quad \text{e} \quad K_n^\varepsilon := I\colon \mathscr{B} \to V.$$

(H_1') Pela Hipótese (H_2), existe $T_{\mathscr{B}} \geq 0$ tal que

$$\bigcup_{\varepsilon\in[0,1]}\bigcup_{t\in\mathbb{R}} S^{(\varepsilon)}(t,t-s)\mathscr{B} \subset \mathscr{B}, \quad \text{para todo } \ s \geq T_{\mathscr{B}}.$$

Logo, para cada $\tau \in \mathbb{R}$, vale

$$\bigcup_{\varepsilon\in[0,1]} S^{(\varepsilon)}(\tau+s,\tau)\mathscr{B} \subset \mathscr{B}, \quad \text{para todo } \ s \geq T_{\mathscr{B}}. \tag{4.1}$$

Além disso, pela condição (H_5), dados $x_1, x_2 \in \mathscr{B}$ e $\tau \in \mathbb{R}$, temos

$$\sup_{\varepsilon\in[0,1]}\sup_{r\in[0,\widetilde{T}]} \left\|S^{(\varepsilon)}(r+t,t)x_1 - S^{(\varepsilon)}(r+t,t)x_2\right\|_V \leq L_{\widetilde{T}}\|x_1-x_2\|_V,$$

com $\widetilde{T} \geq T_{\mathscr{B}}$ e $L_{\widetilde{T}} > 0$. Note que (4.1) vale para todo $s \geq \widetilde{T}$.

(H_2') Dados $x_1, x_2 \in \mathscr{B}$, obtemos

$$\sup_{\varepsilon\in[0,1]}\sup_{n\in\mathbb{N}}\|K_n^\varepsilon x_1 - K_n^\varepsilon x_2\|_V = \|I(x_1)-I(x_2)\|_V = \|x_1-x_2\|_V$$

e por (H4)

$$\begin{aligned}
&\left\|S^{(\varepsilon)}\big((n+1)\widetilde{T},n\widetilde{T}\big)x_1 - S^{(\varepsilon)}\big((n+1)\widetilde{T},n\widetilde{T}\big)x_2\right\|_V \leq \\
&\qquad \leq \left\|L^{(\varepsilon)}\big((n+1)\widetilde{T},n\widetilde{T}\big)x_1 - L^{(\varepsilon)}\big((n+1)\widetilde{T},n\widetilde{T}\big)x_2\right\|_V \\
&\qquad\qquad + \left\|U^{(\varepsilon)}\big((n+1)\widetilde{T},n\widetilde{T}\big)x_1 - U^{(\varepsilon)}\big((n+1)\widetilde{T},n\widetilde{T}\big)x_2\right\|_V \\
&\qquad \leq \lambda\|x_1-x_2\|_V + \kappa\|x_1-x_2\|_W \\
&\qquad = \lambda\|x_1-x_2\|_V + n_Z(K_n^\varepsilon x_1 - K_n^\varepsilon x_2),
\end{aligned}$$

com $\lambda \in (0,1)$.

(H_3') Seja D um limitado em V. Pela condição (H_2), existe $T_D \geq 0$ tal que

$$\bigcup_{\varepsilon\in[0,1]}\bigcup_{t\in\mathbb{R}} S^{(\varepsilon)}(t,t-s)D \subset \mathscr{B}, \quad \text{para todo } \ s \geq T_D.$$

Daí, para cada $\varepsilon \in [0,1]$, temos

$$\bigcup_{t\in\mathbb{R}} S^{(\varepsilon)}(t,t-s)D \subset \mathscr{B}, \quad \text{para todo } \ s \geq T_D,$$

ou seja,

$$\bigcup_{\tau\in\mathbb{R}} S^{(\varepsilon)}(s+\tau,\tau)D \subset \mathscr{B}, \quad \text{para todo } \ s \geq T_D.$$

Portanto, o resultado segue pelo Teorema 2.6.7. □

4.2 As condições Lipschitz e Smoothing

O objetivo desta seção é mostrar que a família $\{S^{(\varepsilon)}(t,s) : t \geq s\}_{\varepsilon\in[0,1]}$ satisfaz uma condição local Lipschitz e a família $\{U^{(\varepsilon)}(t,s) : t \geq s\}_{\varepsilon\in[0,1]}$ satisfaz a condição smoothing.

O primeiro resultado mostra que a família $\{L^{(\varepsilon)}(t,s) : t \geq s\}_{\varepsilon\in[0,1]}$ dada por (3.40) decai exponencialmente.

Lema 4.2.1. Existem constantes $K, \alpha > 0$ tais que

$$\sup_{\varepsilon\in[0,1]} \left\|L^{(\varepsilon)}(t,s)\right\|_{\mathscr{L}(X^{\frac{1}{2}}\times X^{\frac{1}{2}})} \leq Ke^{-\alpha(t-s)}, \quad \text{sempre que} \quad s \leq t.$$

Demonstração. Primeiramente, mostraremos que

$$\sup_{\varepsilon\in[0,1]} \left\|L^{(\varepsilon)}_{-1/2}(t,s)\right\|_{\mathscr{L}(X^{-\frac{1}{2}}\times X^{-\frac{1}{2}})} \leq Ke^{-\alpha(t-s)}, \quad \text{sempre que} \quad s \leq t, \tag{4.2}$$

em que $L^{(\varepsilon)}_{-1/2}(t,s)$ é o operador solução da parte linear do problema (1.6) dado pelo Teorema 3.3.5. Para simplificar a notação, vamos denotar $\eta := \eta_\varepsilon$ e $z := z^{(\varepsilon)}$. Agora, defina o funcional

$$W_b(\phi,\psi) := \frac{1}{2}\|\phi\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2}\|\psi\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2}\|A^{-\frac{1}{2}}\phi\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} + b\langle\phi,\psi\rangle_{X^{-\frac{1}{2}}}, \qquad \phi,\psi \in X^{-\frac{1}{2}},$$

com $0 < b < \dfrac{\lambda_1}{1+\lambda_1}$.

Afirmamos que

$$c_{0,b}\Big(\|\phi\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} + \|\psi\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}}\Big) \leq W_b(\phi,\psi) \leq c_{1,b}\Big(\|\phi\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} + \|\psi\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}}\Big), \qquad \phi,\psi \in X^{-\frac{1}{2}}, \tag{4.3}$$

com $c_{0,b} := \dfrac{1-b}{2} - \dfrac{1}{2(1+\lambda_1)} > 0$ e $c_{1,b} := \dfrac{1+b}{2} > 0$. De fato, das desigualdades de Schwartz, Young e Poincaré, obtemos

$$\left|2b\langle\phi,\psi\rangle_{X^{-\frac{1}{2}}}\right| \leq b\|\phi\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} + b\|\psi\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} \;\text{ e }\; \|\phi\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} \geq (1+\lambda_1)\|\tilde{A}^{-\frac{1}{2}}\phi\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}}.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} W_b(\phi,\psi) &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{b}{2} - \frac{1}{2(1+\lambda_1)}\right)\|\phi\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} + \frac{1-b}{2}\|\psi\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{b}{2} - \frac{1}{2(1+\lambda_1)}\right)\left(\|\phi\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} + \|\psi\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}}\right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} W_b(\phi,\psi) &\leq \frac{1}{2}\|\phi\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2}\|\psi\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} + b\langle\phi,\psi\rangle_{X^{-\frac{1}{2}}} \\ &\leq \left(\frac{1+b}{2}\right)\left(\|\phi\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} + \|\psi\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}}\right), \end{aligned}$$

e a afirmação (4.3) está provada.

Dados $z_0, w_0 \in X^{-\frac{1}{2}}$, vamos denotar $L_{-1/2}(t,s)\begin{bmatrix} z_0 \\ w_0 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} z^L \\ z_t^L \end{bmatrix}$. Note que

$$\frac{d}{dt}W_b(z^L,z_t^L) = \underbrace{\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left(\|z_t^L\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} + \|z^L\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} - \|A^{-\frac{1}{2}}z^L\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}}\right)\right]}_{(I)} + \underbrace{\frac{d}{dt}\left(b\langle z^L, z_t^L\rangle_{X^{-\frac{1}{2}}}\right)}_{(II)}. \tag{4.4}$$

Nosso próximo passo é mostrar a existência de uma constante $\tilde{k} > 0$ tal que

$$\frac{d}{dt}W_b(z^L,z_t^L) \le -\tilde{k}W_b(z^L,z_t^L).$$

Com efeito, aplicando o produto interno na parte linear de (1.5) com z_t em $X^{-\frac{1}{2}}$, obtemos

$$\langle z_{tt}^L, z_t^L\rangle_{X^{-\frac{1}{2}}} + \eta(t)\big\langle (I-\tilde{A}^{-1})z_t^L, z_t^L\big\rangle_{X^{-\frac{1}{2}}} + \big\langle (I-\tilde{A}^{-1})z^L, z_t^L\big\rangle_{X^{-\frac{1}{2}}} = 0.$$

Agora, procedendo de forma análoga como feito na prova do Lema 3.3.4, podemos estimar a expressão (I), como em (3.31), da seguinte forma

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left(\|z_t^L\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} + \|z^L\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} - \|A^{-\frac{1}{2}}z^L\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}}\right)\right] \le -\frac{a_1\lambda_1}{1+\lambda_1}\|z_t^L\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}}.$$

Por outro lado, aplicando o produto interno na parte linear de (1.5) com z em $X^{-\frac{1}{2}}$, obtemos

$$\langle z_{tt}^L, z^L\rangle_{X^{-\frac{1}{2}}} + \eta(t)\big\langle (I-\tilde{A}^{-1})z_t^L, z^L\big\rangle_{X^{-\frac{1}{2}}} + \big\langle (I-\tilde{A}^{-1})z^L, z^L\big\rangle_{X^{-\frac{1}{2}}} = 0,$$

e utilizando as desigualdades de Young, Poincaré e Schwartz, e as expressões (3.28) e (3.29), estimamos (II) como

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(b\langle z^L, z_t^L\rangle_{X^{-\frac{1}{2}}}\right) = b\|z_t^L\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} + b\langle z^L, z_{tt}^L\rangle_{X^{-\frac{1}{2}}} \\
&= b\|z_t^L\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} - b\eta(t)\langle z^L, z_t^L\rangle_{X^{-\frac{1}{2}}} + b\eta(t)\langle \tilde{A}^{-\frac{1}{2}}z^L, \tilde{A}^{-\frac{1}{2}}z_t^L\rangle_{X^{-\frac{1}{2}}} - b\big(\|z^L\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} - \|\tilde{A}^{-\frac{1}{2}}z^L\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}}\big) \\
&\le b\|z_t^L\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} + ba_2\left(\frac{\delta_1}{2}\|z^L\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2\delta_1}\|z_t^L\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}}\right) + ba_2\left(\frac{\delta_2}{2}\|A^{-\frac{1}{2}}z^L\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2\delta_2}\|A^{-\frac{1}{2}}z_t^L\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}}\right) \\
&\quad - \frac{b\lambda_1}{1+\lambda_1}\|z^L\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} \\
&\le -\left(\frac{b\lambda_1}{1+\lambda_1} - \frac{ba_2\delta_1}{2} - \frac{ba_2\delta_2}{2(1+\lambda_1)}\right)\|z^L\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} + \left(b + \frac{ba_2}{2\delta_1} + \frac{ba_2}{2\delta_2(1+\lambda_1)}\right)\|z_t^L\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}},
\end{aligned}$$

para algum $\delta_1 > 0$ e para algum $\delta_2 > 0$. Logo, utilizando as estimativas acima na expressão (4.4), podemos escrever

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}W_b(z^L,z_t^L) \le &-\left(\frac{b\lambda_1}{1+\lambda_1} - \frac{ba_2\delta_1}{2} - \frac{ba_2\delta_2}{2(1+\lambda_1)}\right)\|z^L\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} \\
&-\left(\frac{a_1\lambda_1}{1+\lambda_1} - b - \frac{ba_2}{2\delta_1} - \frac{ba_2}{2\delta_2(1+\lambda_1)}\right)\|z_t^L\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}$$

Escolhendo $\delta_1, \delta_2 > 0$ e $0 < b < \lambda_1/(1+\lambda_1)$ suficientemente pequenos de modo que

$$\delta_1(1+\lambda_1)+\delta_2 < \frac{2\lambda_1}{a_2} \qquad \text{e} \qquad b\left(1+\frac{a_2}{2\delta_1}+\frac{a_2}{2\delta_2(1+\lambda_1)}\right) < \frac{a_1\lambda_1}{1+\lambda_1},$$

segue que existe $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(\delta_1, \delta_2, b) > 0$ satisfazendo

$$\frac{d}{dt}W_b(z^L, z_t^L) \leq -\tilde{\alpha}\big(\|z^L\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} + \|z_t^L\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}}\big).$$

De (4.3) concluímos que $\frac{d}{dt}W_b(z^L, z_t^L) \leq -\frac{\tilde{\alpha}}{c_{1,b}}W_b(z^L, z_t^L)$ como queríamos demonstrar. Consequentemente,

$$W_b\big(z^L(t), z_t^L(t)\big) \leq W_b(z_0, w_0)e^{-\frac{\tilde{\alpha}}{c_{1,b}}(t-s)}, \quad t \geq s. \tag{4.5}$$

De (4.3) e (4.5), segue que

$$\left\|L_{-1/2}(t,s)\begin{bmatrix} z_0 \\ w_0 \end{bmatrix}\right\|_{X^{-\frac{1}{2}}\times X^{-\frac{1}{2}}} \leq \frac{c_{1,b}}{c_{0,b}}e^{-\frac{\tilde{\alpha}}{c_{1,b}}(t-s)}\left\|\begin{bmatrix} z_0 \\ w_0 \end{bmatrix}\right\|_{X^{-\frac{1}{2}}\times X^{-\frac{1}{2}}} \quad \text{para todo} \quad s \leq t,$$

e finalmente

$$\sup_{\varepsilon\in[0,1]}\big\|L^{(\varepsilon)}_{-1/2}(t,s)\big\|_{\mathscr{L}(X^{-\frac{1}{2}}\times X^{-\frac{1}{2}})} \leq Ke^{-\alpha(t-s)}, \quad \text{para todo} \quad s \leq t,$$

com $K := c_{1,b}/c_{0,b}$ e $\alpha = \tilde{\alpha}/c_{1,b}$ independentes de ε, provando (4.2).

Utilizando (3.40), o Lema 3.2.1 e (4.2), obtemos a estimativa para o operador $L^{(\varepsilon)}$, isto é,

$$\begin{aligned}
\left\|L^{(\varepsilon)}(t,s)\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\right\|_{X^{\frac{1}{2}}\times X^{\frac{1}{2}}} &= \left\|\Phi_1 L^{(\varepsilon)}_{-1/2}(t,s)\Phi_{-1}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\right\|_{X^{\frac{1}{2}}\times X^{\frac{1}{2}}} \\
&= \left\|L^{(\varepsilon)}_{-1/2}(t,s)\Phi_{-1}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\right\|_{X^{-\frac{1}{2}}\times X^{-\frac{1}{2}}} \\
&\leq Ke^{-\alpha(t-s)}\left\|\Phi_{-1}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\right\|_{X^{-\frac{1}{2}}\times X^{-\frac{1}{2}}} \\
&= Ke^{-\alpha(t-s)}\left\|\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\right\|_{X^{\frac{1}{2}}\times X^{\frac{1}{2}}},
\end{aligned}$$

provando o lema. □

No próximo resultado, mostraremos que a família de processos de evolução $\{S^{(\varepsilon)}(t,s) : t \geq s\}_{\varepsilon\in[0,1]}$ associado ao problema (1.1) possui um conjunto limitado absorvente no sentido pullback o qual absorve uniformemente (com respeito aos parâmetros t e ε) todos os subconjuntos limitados de $X^{\frac{1}{2}} \times X^{\frac{1}{2}}$.

Lema 4.2.2. Considere a família de processos de evolução $\{S^{(\varepsilon)}(t,s) : t \geq s\}_{\varepsilon\in[0,1]}$ dada por (3.39) e associada ao problema (1.1). Então existe um subconjunto limitado $\mathscr{B} \subset X^{\frac{1}{2}} \times X^{\frac{1}{2}}$ que absorve uniformemente (com respeito aos parâmetros $t \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon \in [0,1]$) no sentido pullback todos os subconjuntos limitados de $X^{\frac{1}{2}} \times X^{\frac{1}{2}}$, isto é, para cada $D \subset X^{\frac{1}{2}} \times X^{\frac{1}{2}}$ limitado existe um tempo de absorção $T_D \geq 0$ tal que

$$\bigcup_{\varepsilon\in[0,1]} \bigcup_{t\in\mathbb{R}} S^{(\varepsilon)}(t,t-\tau)D \subset \mathscr{B}, \quad \text{para todo} \quad \tau \geq T_D.$$

Demonstração. Vamos denotar $\eta := \eta_\varepsilon$ e $z = z^{(\varepsilon)}$. Seja $0 < b < \dfrac{\nu_0}{1+\lambda_1}$ e defina o funcional

$$V_b(\phi,\psi) := \frac{1}{2}\|\phi\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2}\|\psi\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2}\|\tilde{A}^{-\frac{1}{2}}\phi\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} - \int_\Omega F(\tilde{A}^{-1}\phi)\,dx + b\langle\phi,\psi\rangle_{X^{-\frac{1}{2}}},$$

com $\phi,\psi \in X^{-\frac{1}{2}}$, em que $F(t) := \displaystyle\int_0^t f(\tau)\,d\tau$ para $t \in \mathbb{R}$. Note que

$$V_b(\phi,\psi) = W_b(\phi,\psi) - \int_\Omega F(\tilde{A}^{-1}\phi)\,dx,$$

onde W_b é definido na prova do Lema 4.2.1.

Primeiramente, mostremos que existem constantes $K_{0,b}, K_2, c_{1,b}, \tilde{c} > 0$ tais que

$$K_{0,b}\big(\|\phi\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} + \|\psi\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}}\big) - K_2 \leq V_b(\phi,\psi) \leq c_{1,b}\big(\|\phi\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} + \|\psi\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}}\big) + \tilde{c}\big(1 + \|\phi\|^{\rho+1}_{X^{-\frac{1}{2}}}\big). \tag{4.6}$$

De fato, pelo Lema 3.3.2, (b), e pela desigualdade (4.3) concluímos que para quaisquer $\phi,\psi \in X^{-\frac{1}{2}}$ temos

$$\begin{aligned} V_b(\phi,\psi) &\geq c_{0,b}\big(\|\phi\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} + \|\psi\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}}\big) + \frac{\nu_0-\lambda_1}{2(1+\lambda_1)}\|\phi\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} - K_2 \\ &\geq \left(c_{0,b} + \frac{\nu_0-\lambda_1}{2(1+\lambda_1)}\right)\big(\|\phi\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} + \|\psi\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}}\big) - K_2 \\ &= K_{0,b}\big(\|\phi\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} + \|\psi\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}}\big) - K_2, \end{aligned}$$

onde $K_{0,b} = c_{0,b} + \frac{\nu_0-\lambda_1}{2(1+\lambda_1)} > 0$. Usando a condição (1.3), tem-se

$$\int_\Omega \big|F(\tilde{A}^{-1}\phi)\big|\,dx \leq c\big(1 + \|\tilde{A}^{-1}\phi\|^{\rho+1}_{L^{\rho+1}(\Omega)}\big) \leq c_1\big(1 + \|\tilde{A}^{-1}\phi\|^{\rho+1}_{X^{\frac{1}{2}}}\big) \leq \tilde{c}\big(1 + \|\phi\|^{\rho+1}_{X^{-\frac{1}{2}}}\big),$$

de onde obtemos

$$V_b(\phi,\psi) \leq c_{1,b}\big(\|\phi\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} + \|\psi\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}}\big) + \tilde{c}\big(1 + \|\phi\|^{\rho+1}_{X^{-\frac{1}{2}}}\big).$$

Isto mostra a validade de (4.6).

Dados $z_0, w_0 \in X^{-\frac{1}{2}}$, por conveniência, denotemos $S_{-1/2}(t,s)\begin{bmatrix} z_0 \\ w_0 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} z \\ z_t \end{bmatrix}$, com $t \geq s$. Note que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V_b(z,z_t) \quad = \quad & \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|z\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2}\|z_t\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2}\|\tilde{A}^{-\frac{1}{2}}z\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} - \int_\Omega F(\tilde{A}^{-1}z)\,dx\right)}_{(I)} \\ & + \underbrace{\frac{d}{dt}\left(b\langle z_t, z\rangle_{X^{-\frac{1}{2}}}\right)}_{(II)}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Por um lado, analogamente a prova do Lema 3.3.4, podemos estimar (I) como em (3.31), ou seja,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|z\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2}\|z_t\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2}\|\tilde{A}^{-\frac{1}{2}}z\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} - \int_\Omega F(\tilde{A}^{-1}z)\,dx\right) \leq -\frac{a_1\lambda_1}{1+\lambda_1}\|z_t\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}}.$$

Por outro lado, para estimar (II), tomamos o produto interno de (1.5) com z em $X^{-\frac{1}{2}}$ obtendo:

$$\langle z_{tt}, z\rangle_{X^{-\frac{1}{2}}} + \eta(t)\left\langle (I-\tilde{A}^{-1})z_t, z\right\rangle_{X^{-\frac{1}{2}}} + \left\langle (I-\tilde{A}^{-1})z, z\right\rangle_{X^{-\frac{1}{2}}} = \left\langle f^e(z), z\right\rangle_{X^{-\frac{1}{2}}},$$

e, analogamente a prova do Lema 4.2.1, obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}\left(b\langle z, z_t\rangle_{X^{-\frac{1}{2}}}\right) = \\ & = b\|z_t\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} - b\eta(t)\langle z_t, z\rangle_{X^{-\frac{1}{2}}} + b\eta(t)\langle \tilde{A}^{-\frac{1}{2}}z_t, \tilde{A}^{-\frac{1}{2}}z\rangle_{X^{-\frac{1}{2}}} - b\left(\|z\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} - \|\tilde{A}^{-\frac{1}{2}}z\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}}\right) \\ & \quad + b\left\langle f^e(z), z\right\rangle_{X^{-\frac{1}{2}}} \\ & \leq -\left(\frac{b\lambda_1}{1+\lambda_1} - \frac{ba_2\delta_1}{2} - \frac{ba_2\delta_2}{2(1+\lambda_1)}\right)\|z\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} + \left(b + \frac{ba_2}{2\delta_1} + \frac{ba_2}{2\delta_2(1+\lambda_1)}\right)\|z_t\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} \\ & \quad + b\left\langle f^e(z), z\right\rangle_{X^{-\frac{1}{2}}}, \end{aligned}$$

com $\delta_1, \delta_2 > 0$. Além disso, pelos Lema 3.3.2 (a) e Lema 3.3.3,

$$\begin{aligned} b\left\langle f^e(z), z\right\rangle_{X^{-\frac{1}{2}}} & = b\left\langle \tilde{A}^{-\frac{1}{2}}f^e(z), \tilde{A}^{\frac{1}{2}}\tilde{A}^{-1}z\right\rangle_X \\ & = b\int_\Omega f(\tilde{A}^{-1}z)\tilde{A}^{-1}z\,dx \\ & \leq \frac{b(\lambda_1 - \nu_0)}{1+\lambda_1}\|z\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} + bK_1, \end{aligned}$$

para algum $0 < \nu_0 < \lambda_1$ e $K_1 > 0$.

Substituindo as estimativas anteriores em (4.7), concluímos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V_b(z,z_t) \leq & -\left(\frac{b\lambda_1}{1+\lambda_1} - \frac{ba_2\delta_1}{2} - \frac{ba_2\delta_2}{2(1+\lambda_1)} - \frac{b(\lambda_1-\nu_0)}{1+\lambda_1}\right)\|z\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} \\ & -\left(\frac{a_1\lambda_1}{1+\lambda_1} - b - \frac{ba_2}{2\delta_1} - \frac{ba_2}{2\delta_2(1+\lambda_1)}\right)\|z_t\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} + bK_1. \end{aligned}$$

Escolhendo $\delta_1,\delta_2>0$ e $0<b<\dfrac{\nu_0}{1+\lambda_1}$ suficientemente pequenos, podemos encontrar um $\beta=\beta(\delta_1,\delta_2,\nu_0,b)>0$ de modo que

$$\frac{d}{dt}V_b(z,z_t)\leq -\beta\big(\|z\|^2_{X^{-\frac12}}+\|z_t\|^2_{X^{-\frac12}}\big)+bK_1. \tag{4.8}$$

Para provarmos a absorção uniforme pullback, seja D um subconjunto limitado de $X^{-\frac12}\times X^{-\frac12}$. Considere $\left[\begin{smallmatrix} z(s)\\ z_t(s)\end{smallmatrix}\right]=\left[\begin{smallmatrix} z_0\\ w_0\end{smallmatrix}\right]\in D$. Tomando $r_b:=\dfrac{bK_1+1}{\beta}$, segue por (4.8) que se $\big\|\left[\begin{smallmatrix} z\\ z_t\end{smallmatrix}\right]\big\|^2_{X^{-\frac12}\times X^{-\frac12}}\geq r_b$ então $\frac{d}{dt}V_b(z,z_t)\leq -1$ de onde obtemos

$$V_b(z,z_t)\leq V_b(z_0,w_0)-(t-s),$$

o que implica na desigualdade

$$\left\|\begin{bmatrix} z\\ z_t\end{bmatrix}\right\|^2_{X^{-\frac12}\times X^{-\frac12}}\leq \frac{1}{K_{0,b}}\Big(V_b(z_0,w_0)-(t-s)\Big)+\frac{K_2}{K_{0,b}},$$

para todo $t\geq s$ desde que $\big\|\left[\begin{smallmatrix} z\\ z_t\end{smallmatrix}\right]\big\|^2_{X^{-\frac12}\times X^{-\frac12}}\geq r_b$. Como

$$V_b(z_0,w_0)\leq c_{1,b}\big(\|z_0\|^2_{X^{-\frac12}}+\|w_0\|^2_{X^{-\frac12}}\big)+c\big(1+\|z_0\|^{\rho+1}_{X^{-\frac12}}\big)\leq R_D,$$

para alguma constante $R_D>0$ (depende do limitado D), segue que se $t-s\geq R_D$ então

$$\left\|\begin{bmatrix} z\\ z_t\end{bmatrix}\right\|^2_{X^{-\frac12}\times X^{-\frac12}}\leq \max\left\{r_b,\frac{K_2}{K_{0,b}}\right\}=:R,$$

e como $R>0$ é independente de $\varepsilon\in[0,1]$ e do limitado D, o resultado segue por isometrias. $\square$

No que segue, apresentaremos alguns resultados técnicos para estabelecer a existência do atrator exponencial pullback. Mais precisamente, como consequência das propriedades da função f, mostraremos no Lema 4.2.6 a condição smoothing local para a aplicação $\mathscr{F}$. Também, mostraremos que $\big\{S^{(\varepsilon)}(t,s):t\geq s\big\}_{\varepsilon\in[0,1]}$ é localmente Lipschitz em $X^{\frac12}\times X^{\frac12}$ (veja Lema 4.2.9) e que $\big\{U^{(\varepsilon)}(t,s):t\geq s\big\}_{\varepsilon\in[0,1]}$ satisfaz a $(X^{\frac12}\times X^{\frac12},X^{\frac12-\frac{\gamma}{2}}\times X^{\frac12-\frac{\gamma}{2}})$- condição de smoothing para algum $\gamma\in(0,1)$, veja o Lema 4.2.10.

Uma vez que $1<\rho<\frac{N+2}{N-2}$, existe $\gamma\in(0,1)$ de modo que $\rho=(1-\gamma)\frac{N+2}{N-2}$.

Lema 4.2.3. Sejam $\gamma=1-\rho\frac{N-2}{N+2}\in(0,1)$ e $D\subset X^{\frac12}$ um limitado. Então existe uma constante $C=C(\gamma,D)>0$ tal que

$$\big\|f(u_1)-f(u_2)\big\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)}\leq C\|u_1-u_2\|_{H^{1-\gamma}(\Omega)},$$

quaisquer que sejam $u_1,u_2\in D$.

Demonstração. Sejam $u_1, u_2 \in D$ e denote $r := \frac{2N}{N+2}$. Segue da propriedade (1.4) que

$$\begin{aligned}\|f(u_1)-f(u_2)\|_{L^r(\Omega)}^r &= \int_\Omega |f(u_1)-f(u_2)|^r\,dx\\ &\le \int_\Omega c|u_1-u_2|^r\left(1+|u_1|^{\rho-1}+|u_2|^{\rho-1}\right)^r dx\\ &\le \int_\Omega c_1|u_1-u_2|^r\left(1+|u_1|^{r(\rho-1)}+|u_2|^{r(\rho-1)}\right) dx\\ &\le \int_\Omega c_1\Big(|u_1-u_2|^r+|u_1-u_2|^r|u_1|^{r(\rho-1)}+|u_1-u_2|^r|u_2|^{r(\rho-1)}\Big)\,dx.\end{aligned}$$

Defina

$$p' := \frac{N+2}{4-\gamma(N+2)} \qquad \text{e} \qquad q' := \frac{N+2}{N-2+\gamma(N+2)},$$

e observe que $p', q' > 1$ e $\frac{1}{p'}+\frac{1}{q'} = 1$. Além disso, vale a relação $r(\rho-1)p' = \frac{2N}{N-2}$. Usando a desigualdade de (q', p')-Hölder e as imersões $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)$ e $H^{1-\gamma}(\Omega) \hookrightarrow L^{rq'}(\Omega)$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u_1-u_2|^r|u_1|^{r(\rho-1)}\,dx &\le \left(\int_\Omega |u_1-u_2|^{rq'}\,dx\right)^{1/q'}\left(\int_\Omega |u_1|^{r(\rho-1)p'}\,dx\right)^{1/p'}\\ &= \|u_1-u_2\|_{L^{rq'}(\Omega)}^r\|u_1\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)}^{r(\rho-1)}\\ &\le c_2\|u_1-u_2\|_{L^{rq'}(\Omega)}^r\|u_1\|_{X^{\frac{1}{2}}}^{r(\rho-1)}\\ &\le c_3\|u_1-u_2\|_{H^{1-\gamma}(\Omega)}^r.\end{aligned}$$

Analogamente, prova-se a desigualdade

$$\int_\Omega |u_1-u_2|^r|u_2|^{r(\rho-1)}\,dx \le c_3\|u_1-u_2\|_{H^{1-\gamma}(\Omega)}^r.$$

Finalmente, como $H^{1-\gamma}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$, concluímos que

$$\begin{aligned}\|f(u_1)-f(u_2)\|_{L^r(\Omega)}^r &\le c_1\|u_1-u_2\|_{L^r(\Omega)}^r + 2c_3\|u_1-u_2\|_{H^{1-\gamma}(\Omega)}^r\\ &\le C\|u_1-u_2\|_{H^{1-\gamma}(\Omega)}^r,\end{aligned}$$

com $C = C(\gamma, D)$, provando o lema. □

Observação 4.2.4. Qualquer que seja $0 < \tilde{\gamma} \le \gamma$, com $\gamma = 1-\rho\frac{N-2}{N+2}$, tem-se $H^{1-\tilde{\gamma}}(\Omega) \hookrightarrow H^{1-\gamma}(\Omega)$. Consequentemente, segue do Lema 4.2.3 a estimativa

$$\|f(u_1)-f(u_2)\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)} \le C\|u_1-u_2\|_{H^{1-\tilde{\gamma}}(\Omega)}, \quad u_1, u_2 \in D.$$

Lema 4.2.5. Seja $\gamma = 1-\rho\frac{N-2}{N+2} \in (0,1)$. Dado um limitado $D \subset X^{\frac{1}{2}}$, existe $C = C(\gamma, D) > 0$ tais que

$$\|f(u_1)-f(u_2)\|_{X^{-\frac{1}{2}}} \le C\|u_1-u_2\|_{X^{\frac{1-\gamma}{2}}},$$

quaisquer que sejam $u_1, u_2 \in D$.

Demonstração. Sejam $u_1, u_2 \in D$. Das imersões $L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega) \hookrightarrow X^{-\frac{1}{2}}, X^{\frac{1-\gamma}{2}} \hookrightarrow H^{1-\gamma}(\Omega)$ e do Lema 4.2.3, obtemos

$$\left\|f(u_1)-f(u_2)\right\|_{X^{-\frac{1}{2}}} \leq c\left\|f(u_1)-f(u_2)\right\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)} \leq c_1\|u_1-u_2\|_{H^{1-\gamma}(\Omega)} \leq c_2\|u_1-u_2\|_{X^{\frac{1-\gamma}{2}}},$$

com $c_2 = c_2(\gamma, D) > 0$, provando o resultado. $\square$

Como consequência do Lema 4.2.5, obtemos a seguinte propriedade de smoothing para a função $\mathscr{F}$ definida em (1.8).

Lema 4.2.6. Seja $\gamma = 1-\rho\frac{N-2}{N+2} \in (0,1)$. Dado um subconjunto limitado $D \subset X^{-\frac{1}{2}} \times X^{-\frac{1}{2}}$, existe uma constante $C = C(\gamma, D) > 0$ tal que

$$\left\|\mathscr{F}\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}\right) - \mathscr{F}\left(\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}\right)\right\|_{X^{-\frac{1}{2}} \times X^{-\frac{1}{2}}} \leq C\left\|\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}\right\|_{X^{-\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}} \times X^{-\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}}},$$

quaisquer que sejam $\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \in D$.

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned}
\left\|\mathscr{F}\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}\right) - \mathscr{F}\left(\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}\right)\right\|_{X^{-\frac{1}{2}} \times X^{-\frac{1}{2}}} &= \left\|\begin{bmatrix} 0 \\ f^e(u_1)-f^e(u_2) \end{bmatrix}\right\|_{X^{-\frac{1}{2}} \times X^{-\frac{1}{2}}} \\
&= \left\|f^e(u_1)-f^e(u_2)\right\|_{X^{-\frac{1}{2}}} \\
&= \left\|f(\tilde{A}^{-1}(u_1))-f(\tilde{A}^{-1}(u_2))\right\|_{X^{-\frac{1}{2}}} \\
&\leq c\left\|\tilde{A}^{-1}(u_1)-\tilde{A}^{-1}(u_2)\right\|_{X^{\frac{1-\gamma}{2}}} \\
&= c\|u_1-u_2\|_{X^{-\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}}} \\
&\leq c\left\|\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}\right\|_{X^{-\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}} \times X^{-\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}}},
\end{aligned}$$

quaisquer que sejam $\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \in D$. $\square$

No Lema 4.2.8, mostramos uma condição local de Lipschitz para a família de processos de evolução $\left\{S^{(\varepsilon)}(t,s) : t \geq s\right\}_{\varepsilon\in[0,1]}$. Este resultado será essencial para obtermos uma propriedade de smoothing para a família $\left\{U^{(\varepsilon)}(t,s) : t \geq s\right\}_{\varepsilon\in[0,1]}$. Entretanto, antes de exibirmos esse resultado, note que para todos $\varepsilon \in [0,1]$, $s \in [0,1]$ and $\xi \in \mathbb{R}$ temos $\Phi_{-s}\mathscr{Q}_\varepsilon(\xi) = \mathscr{Q}_\varepsilon(\xi)\Phi_{-s}$. Mais ainda:

Lema 4.2.7. Dados $\varepsilon \in [0,1]$, $s \in [0,1]$, $r \geq -1/2$ e $t \geq \tau$, vale

$$\Phi_{-s} \circ L^{(\varepsilon)}_{-1/2}(t,\tau) = L^{(\varepsilon)}_{-1/2}(t,\tau) \circ \Phi_{-s}$$

em $X^{r+s} \times X^{r+s}$. Consequentemente, $\Phi_s \circ L^{(\varepsilon)}_{-1/2}(t,\tau) = L^{(\varepsilon)}_{-1/2}(t,\tau) \circ \Phi_s$ em $X^r \times X^r$.

Demonstração. Dado $\left[\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right] \in X^{r+s} \times X^{r+s}$, temos

$$L^{(\varepsilon)}_{-1/2}(t,\tau)\Phi_{-s}\left[\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right] = \Phi_{-s}\left[\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right] - \int_\tau^t \mathscr{Q}_\varepsilon(\xi)L^{(\varepsilon)}_{-1/2}(\xi,\tau)\Phi_{-s}\left[\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right] d\xi$$

e

$$\Phi_{-s}L^{(\varepsilon)}_{-1/2}(t,\tau)\left[\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right] = \Phi_{-s}\left[\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right] - \int_\tau^t \Phi_{-s}\mathscr{Q}_\varepsilon(\xi)L^{(\varepsilon)}_{-1/2}(\xi,\tau)\left[\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right] d\xi.$$

Como $\mathbb{R} \ni t \longmapsto \mathscr{Q}_\varepsilon(t) \in \mathscr{L}(X^{-\frac{1}{2}} \times X^{-\frac{1}{2}})$, existe $c > 0$ tal que $\|\mathscr{Q}_\varepsilon(\xi)\|_{\mathscr{L}(X^{-\frac{1}{2}} \times X^{-\frac{1}{2}})} \leq c$ para todo $\xi \in [\tau, t]$. Logo,

$$\begin{aligned}
&\left\|\Phi_{-s}L^{(\varepsilon)}_{-1/2}(t,\tau)\left[\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right] - L^{(\varepsilon)}_{-1/2}(t,\tau)\Phi_{-s}\left[\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right]\right\|_{X^{-\frac{1}{2}} \times X^{-\frac{1}{2}}} = \\
&\quad = \left\|\int_\tau^t \mathscr{Q}_\varepsilon(\xi)\Big(\Phi_{-s}L^{(\varepsilon)}_{-1/2}(\xi,\tau)\left[\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right] - L^{(\varepsilon)}_{-1/2}(\xi,\tau)\Phi_{-s}\left[\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right]\Big)d\xi\right\|_{X^{-\frac{1}{2}} \times X^{-\frac{1}{2}}} \\
&\quad \leq \int_\tau^t \|\mathscr{Q}_\varepsilon(\xi)\|_{\mathscr{L}(X^{-\frac{1}{2}} \times X^{-\frac{1}{2}})}\left\|\Phi_{-s}L^{(\varepsilon)}_{-1/2}(\xi,\tau)\left[\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right] - L^{(\varepsilon)}_{-1/2}(\xi,\tau)\Phi_{-s}\left[\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right]\right\|_{X^{-\frac{1}{2}} \times X^{-\frac{1}{2}}} d\xi \\
&\quad \leq c\int_\tau^t \left\|\Phi_{-s}L^{(\varepsilon)}_{-1/2}(\xi,\tau)\left[\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right] - L^{(\varepsilon)}_{-1/2}(\xi,\tau)\Phi_{-s}\left[\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right]\right\|_{X^{-\frac{1}{2}} \times X^{-\frac{1}{2}}} d\xi.
\end{aligned}$$

Finalmente, o resultado segue diretamente da desigualdade de Gronwall. □

Lema 4.2.8. Seja $\gamma = 1 - \rho\frac{N-2}{N+2} \in (0,1)$. Dado um subconjunto limitado $D \subset X^{\frac{1}{2}} \times X^{\frac{1}{2}}$, existe uma constante $c = c(\gamma, D) > 0$ tal que

$$\sup_{\varepsilon\in[0,1]}\left\|S^{(\varepsilon)}(t,s)\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - S^{(\varepsilon)}(t,s)\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}\right\|_{X^{\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}} \times X^{\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}}} \leq ce^{c(t-s)}\left\|\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}\right\|_{X^{\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}} \times X^{\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}}},$$

quaisquer que sejam $\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \in D$ e $t \geq s$.

Demonstração. Primeiramente, note pelo Lema 4.2.1 que para $\left[\begin{smallmatrix} u_1 \\ v_1 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} u_2 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right] \in D$ e $t \geq s$, tem-se

$$\begin{aligned}
&\left\|L^{(\varepsilon)}(t,s)\Big(\left[\begin{smallmatrix} u_1 \\ v_1 \end{smallmatrix}\right] - \left[\begin{smallmatrix} u_2 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right]\Big)\right\|_{X^{\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}} \times X^{\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}}} = \\
&\qquad = \left\|\Phi_{\frac{\gamma}{2}}L^{(\varepsilon)}(t,s)\Big(\left[\begin{smallmatrix} u_1 \\ v_1 \end{smallmatrix}\right] - \left[\begin{smallmatrix} u_2 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right]\Big)\right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X^{\frac{1}{2}}} \\
&\qquad = \left\|L^{(\varepsilon)}(t,s)\Phi_{\frac{\gamma}{2}}\Big(\left[\begin{smallmatrix} u_1 \\ v_1 \end{smallmatrix}\right] - \left[\begin{smallmatrix} u_2 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right]\Big)\right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X^{\frac{1}{2}}} \\
&\qquad \leq \|L^{(\varepsilon)}(t,s)\|_{\mathscr{L}(X^{\frac{1}{2}} \times X^{\frac{1}{2}})}\left\|\Phi_{\frac{\gamma}{2}}\Big(\left[\begin{smallmatrix} u_1 \\ v_1 \end{smallmatrix}\right] - \left[\begin{smallmatrix} u_2 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right]\Big)\right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X^{\frac{1}{2}}} \\
&\qquad \leq Ke^{-\alpha(t-s)}\left\|\left[\begin{smallmatrix} u_1 \\ v_1 \end{smallmatrix}\right] - \left[\begin{smallmatrix} u_2 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right]\right\|_{X^{\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}} \times X^{\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}}}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, obtemos

$$\left\| U^{(\varepsilon)}(t,s)\left[\begin{smallmatrix}u_1\\v_1\end{smallmatrix}\right] - U^{(\varepsilon)}(t,s)\left[\begin{smallmatrix}u_2\\v_2\end{smallmatrix}\right] \right\|_{X^{\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}}\times X^{\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}}} =$$

$$= \left\| \int_s^t L^{(\varepsilon)}(t,\tau)\Phi_1 \left[\mathscr{F}\left(\Phi_{-1}S^{(\varepsilon)}(\tau,s)\left[\begin{smallmatrix}u_1\\v_1\end{smallmatrix}\right]\right) - \mathscr{F}\left(\Phi_{-1}S^{(\varepsilon)}(\tau,s)\left[\begin{smallmatrix}u_2\\v_2\end{smallmatrix}\right]\right)\right] d\tau \right\|_{X^{\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}}\times X^{\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}}}$$

$$= \left\| \int_s^t L^{(\varepsilon)}(t,\tau)\Phi_{1+\frac{\gamma}{2}} \left[\mathscr{F}\left(\Phi_{-1}S^{(\varepsilon)}(\tau,s)\left[\begin{smallmatrix}u_1\\v_1\end{smallmatrix}\right]\right) - \mathscr{F}\left(\Phi_{-1}S^{(\varepsilon)}(\tau,s)\left[\begin{smallmatrix}u_2\\v_2\end{smallmatrix}\right]\right)\right] d\tau \right\|_{X^{\frac{1}{2}}\times X^{\frac{1}{2}}}$$

$$\leq \int_s^t \left\|L^{(\varepsilon)}(t,\tau)\right\|_{\mathscr{L}(X^{\frac{1}{2}}\times X^{\frac{1}{2}})} \left\| \Phi_{1+\frac{\gamma}{2}} \left[\mathscr{F}\left(\Phi_{-1}S^{(\varepsilon)}(\tau,s)\left[\begin{smallmatrix}u_1\\v_1\end{smallmatrix}\right]\right) - \mathscr{F}\left(\Phi_{-1}S^{(\varepsilon)}(\tau,s)\left[\begin{smallmatrix}u_2\\v_2\end{smallmatrix}\right]\right)\right] \right\|_{X^{\frac{1}{2}}\times X^{\frac{1}{2}}} d\tau$$

$$\leq \int_s^t Ke^{-\alpha(t-\tau)} \left\| \Phi_{1+\frac{\gamma}{2}} \left[\mathscr{F}\left(\Phi_{-1}S^{(\varepsilon)}(\tau,s)\left[\begin{smallmatrix}u_1\\v_1\end{smallmatrix}\right]\right) - \mathscr{F}\left(\Phi_{-1}S^{(\varepsilon)}(\tau,s)\left[\begin{smallmatrix}u_2\\v_2\end{smallmatrix}\right]\right)\right] \right\|_{X^{\frac{1}{2}}\times X^{\frac{1}{2}}} d\tau,$$

e pelo Lema 4.2.6,

$$\left\| \Phi_{1+\frac{\gamma}{2}} \left[\mathscr{F}\left(\Phi_{-1}S^{(\varepsilon)}(\tau,s)\left[\begin{smallmatrix}u_1\\v_1\end{smallmatrix}\right]\right) - \mathscr{F}\left(\Phi_{-1}S^{(\varepsilon)}(\tau,s)\left[\begin{smallmatrix}u_2\\v_2\end{smallmatrix}\right]\right)\right] \right\|_{X^{\frac{1}{2}}\times X^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \left\| \mathscr{F}\left(\Phi_{-1}S^{(\varepsilon)}(\tau,s)\left[\begin{smallmatrix}u_1\\v_1\end{smallmatrix}\right]\right) - \mathscr{F}\left(\Phi_{-1}S^{(\varepsilon)}(\tau,s)\left[\begin{smallmatrix}u_2\\v_2\end{smallmatrix}\right]\right) \right\|_{X^{-\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}}\times X^{-\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}}}$$

$$\leq c_1 \left\| \mathscr{F}\left(\Phi_{-1}S^{(\varepsilon)}(\tau,s)\left[\begin{smallmatrix}u_1\\v_1\end{smallmatrix}\right]\right) - \mathscr{F}\left(\Phi_{-1}S^{(\varepsilon)}(\tau,s)\left[\begin{smallmatrix}u_2\\v_2\end{smallmatrix}\right]\right) \right\|_{X^{-\frac{1}{2}}\times X^{-\frac{1}{2}}}$$

$$\leq c_2 \left\| \Phi_{-1}\left(S^{(\varepsilon)}(\tau,s)\left[\begin{smallmatrix}u_1\\v_1\end{smallmatrix}\right] - S^{(\varepsilon)}(\tau,s)\left[\begin{smallmatrix}u_2\\v_2\end{smallmatrix}\right]\right) \right\|_{X^{-\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}}\times X^{-\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}}}$$

$$= c_3 \left\| S^{(\varepsilon)}(\tau,s)\left[\begin{smallmatrix}u_1\\v_1\end{smallmatrix}\right] - S^{(\varepsilon)}(\tau,s)\left[\begin{smallmatrix}u_2\\v_2\end{smallmatrix}\right] \right\|_{X^{\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}}\times X^{\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}}},$$

ou seja,

$$\left\| U^{(\varepsilon)}(t,s)\left[\begin{smallmatrix}u_1\\v_1\end{smallmatrix}\right] - U^{(\varepsilon)}(t,s)\left[\begin{smallmatrix}u_2\\v_2\end{smallmatrix}\right] \right\|_{X^{\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}}\times X^{\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}}} \leq \int_s^t c_4 \left\| S^{(\varepsilon)}(\tau,s)\left[\begin{smallmatrix}u_1\\v_1\end{smallmatrix}\right] - S^{(\varepsilon)}(\tau,s)\left[\begin{smallmatrix}u_2\\v_2\end{smallmatrix}\right] \right\|_{X^{\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}}\times X^{\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}}} d\tau.$$

Em conclusão,

$$\left\| S^{(\varepsilon)}(t,s)\left[\begin{smallmatrix}u_1\\v_1\end{smallmatrix}\right] - S^{(\varepsilon)}(t,s)\left[\begin{smallmatrix}u_2\\v_2\end{smallmatrix}\right] \right\|_{X^{\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}}\times X^{\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}}} \leq$$

$$\leq c \left\| \left[\begin{smallmatrix}u_1\\v_1\end{smallmatrix}\right] - \left[\begin{smallmatrix}u_2\\v_2\end{smallmatrix}\right] \right\|_{X^{\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}}\times X^{\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}}} + c\int_s^t \left\| S^{(\varepsilon)}(\tau,s)\left[\begin{smallmatrix}u_1\\v_1\end{smallmatrix}\right] - S^{(\varepsilon)}(\tau,s)\left[\begin{smallmatrix}u_2\\v_2\end{smallmatrix}\right] \right\|_{X^{\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}}\times X^{\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}}} d\tau,$$

e do Lemma Gronwall, segue que

$$\sup_{\varepsilon\in[0,1]} \left\| S^{(\varepsilon)}(t,s)\left[\begin{smallmatrix}u_1\\v_1\end{smallmatrix}\right] - S^{(\varepsilon)}(t,s)\left[\begin{smallmatrix}u_2\\v_2\end{smallmatrix}\right] \right\|_{X^{\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}}\times X^{\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}}} \leq ce^{c(t-s)} \left\| \left[\begin{smallmatrix}u_1\\v_1\end{smallmatrix}\right] - \left[\begin{smallmatrix}u_2\\v_2\end{smallmatrix}\right] \right\|_{X^{\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}}\times X^{\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}}},$$

provando o resultado. □

Lema 4.2.9 (Lipschitz)**.** Dado um conjunto limitado $D \subset X^{\frac{1}{2}} \times X^{\frac{1}{2}}$, existe uma constante $c = c(\gamma, D) > 0$ tal que

$$\sup_{\varepsilon\in[0,1]} \left\| S^{(\varepsilon)}(t,s)\begin{bmatrix}u_1\\v_1\end{bmatrix} - S^{(\varepsilon)}(t,s)\begin{bmatrix}u_2\\v_2\end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}}\times X^{\frac{1}{2}}} \leq ce^{c(t-s)} \left\| \begin{bmatrix}u_1\\v_1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}u_2\\v_2\end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}}\times X^{\frac{1}{2}}},$$

quaisquer que sejam $\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \in D$ e $t \geq s$.

Demonstração. Analogamente à prova do Lema 4.2.8. □

Finalmente, podemos mostrar uma condição de smoothing para a família $\{U^{(\varepsilon)}(t,s) : t \geq s\}_{\varepsilon\in[0,1]}$ com respeito a imersão compacta $X^{\frac{1}{2}} \times X^{\frac{1}{2}} \hookrightarrow X^{\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}} \times X^{\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}}$.

Lema 4.2.10 (Smoothing)**.** Sejam $\gamma = 1-\rho\frac{N-2}{N+2} \in (0,1)$ e $t_0 > 0$. Dado um subconjunto limitado $D \subset X^{\frac{1}{2}} \times X^{\frac{1}{2}}$, existe $\kappa(t_0,D) > 0$ tal que para qualquer $s \in \mathbb{R}$ temos

$$\sup_{\varepsilon\in[0,1]} \left\| U^{(\varepsilon)}(s+t_0,s) \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - U^{(\varepsilon)}(s+t_0,s) \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X^{\frac{1}{2}}} \leq$$
$$\leq \kappa(t_0,D) \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}} \times X^{\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}}},$$

quaisquer que sejam $\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \in D$.

Demonstração. Pelos Lema 4.2.1, Lema 4.2.6 e Lema 4.2.8, temos

$$\begin{aligned}
&\left\| U^{(\varepsilon)}(s+t_0,s) \left[\begin{smallmatrix} u_1 \\ v_1 \end{smallmatrix}\right] - U^{(\varepsilon)}(s+t_0,s) \left[\begin{smallmatrix} u_2 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right] \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X^{\frac{1}{2}}} = \\
&= \left\| \int_s^{s+t_0} \Phi_1 L^{(\varepsilon)}_{-1/2}(s+t_0,\tau) \left[\mathscr{F}\left(\Phi_{-1} S^{(\varepsilon)}(\tau,s) \left[\begin{smallmatrix} u_1 \\ v_1 \end{smallmatrix}\right]\right) - \mathscr{F}\left(\Phi_{-1} S^{(\varepsilon)}(\tau,s) \left[\begin{smallmatrix} u_2 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right]\right) \right] d\tau \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X^{\frac{1}{2}}} \\
&= \left\| \int_s^{s+t_0} L^{(\varepsilon)}_{-1/2}(s+t_0,\tau) \left[\mathscr{F}\left(\Phi_{-1} S^{(\varepsilon)}(\tau,s) \left[\begin{smallmatrix} u_1 \\ v_1 \end{smallmatrix}\right]\right) - \mathscr{F}\left(\Phi_{-1} S^{(\varepsilon)}(\tau,s) \left[\begin{smallmatrix} u_2 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right]\right) \right] d\tau \right\|_{X^{-\frac{1}{2}} \times X^{-\frac{1}{2}}} \\
&\leq \int_s^{s+t_0} \left\| L^{(\varepsilon)}_{-1/2}(s+t_0,\tau) \right\|_{\mathscr{L}(X^{-\frac{1}{2}} \times X^{-\frac{1}{2}})} \left\| \mathscr{F}\left(\Phi_{-1} S^{(\varepsilon)}(\tau,s) \left[\begin{smallmatrix} u_1 \\ v_1 \end{smallmatrix}\right]\right) - \mathscr{F}\left(\Phi_{-1} S^{(\varepsilon)}(\tau,s) \left[\begin{smallmatrix} u_2 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right]\right) \right\|_{X^{-\frac{1}{2}} \times X^{-\frac{1}{2}}} d\tau \\
&\leq \int_s^{s+t_0} K e^{-\alpha(s+t_0-\tau)} C \left\| \Phi_{-1}\left(S^{(\varepsilon)}(\tau,s) \left[\begin{smallmatrix} u_1 \\ v_1 \end{smallmatrix}\right] - S^{(\varepsilon)}(\tau,s) \left[\begin{smallmatrix} u_2 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right] \right) \right\|_{X^{-\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}} \times X^{-\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}}} d\tau \\
&\leq \int_s^{s+t_0} c_1 \left\| S^{(\varepsilon)}(\tau,s) \left[\begin{smallmatrix} u_1 \\ v_1 \end{smallmatrix}\right] - S^{(\varepsilon)}(\tau,s) \left[\begin{smallmatrix} u_2 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right] \right\|_{X^{\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}} \times X^{\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}}} d\tau \\
&\leq \int_s^{s+t_0} c_1 c e^{c(\tau-s)} \left\| \left[\begin{smallmatrix} u_1 \\ v_1 \end{smallmatrix}\right] - \left[\begin{smallmatrix} u_2 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right] \right\|_{X^{\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}} \times X^{\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}}} d\tau \\
&= \kappa(t_0,D) \left\| \left[\begin{smallmatrix} u_1 \\ v_1 \end{smallmatrix}\right] - \left[\begin{smallmatrix} u_2 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right] \right\|_{X^{\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}} \times X^{\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}}},
\end{aligned}$$

provando a propriedade de smoothing, uma vez que a imersão $X^{\frac{1}{2}} \hookrightarrow X^{\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}}$ é compacta. □

4.3 Existência e estabilidade do atrator exponencial pullback

Para garantir a existência e a estabilidade de uma família de atratores exponenciais pullback para a família de processos evolutivos $\{S^{(\varepsilon)}(t,s) : t \geq s\}_{\varepsilon\in[0,1]}$ associado ao problema

(1.1), no espaço $X^{\frac{1}{2}} \times X^{\frac{1}{2}}$, faremos uso do Teorema 4.1.1. Para isto, lembremos do Lema 4.2.1 que

$$\sup_{\varepsilon\in[0,1]} \left\| L^{(\varepsilon)}(t,s) \right\|_{\mathscr{L}(X^{\frac{1}{2}}\times X^{\frac{1}{2}})} \leq K e^{-\alpha(t-s)}, \quad t\geq s,\ t,s\in\mathbb{R},$$

para algumas constantes $K,\alpha>0$. Agora, dado $\lambda\in(0,1)$, seja $\widetilde{T}>0$ de modo que $\widetilde{T}\geq T_{\mathscr{B}}$ (Lemma 4.2.2) e $Ke^{-\alpha\widetilde{T}}<\lambda$. Desta forma, obtemos

$$\sup_{\varepsilon\in[0,1]} \left\| L^{(\varepsilon)}(s+\widetilde{T},s) \right\|_{\mathscr{L}(X^{\frac{1}{2}}\times X^{\frac{1}{2}})} < \lambda, \quad \text{para todo} \quad s\in\mathbb{R}. \tag{4.9}$$

Seja $\mathscr{B}\subset X^{\frac{1}{2}}\times X^{\frac{1}{2}}$ como no Lema 4.2.2. Portanto:

Teorema 4.3.1. Dados $\theta\in(\lambda,1)$ e $\varepsilon\in[0,1]$, existe um atrator exponencial pullback $\{\mathscr{M}_\theta^\varepsilon(t) : t\in\mathbb{R}\}\subset\mathscr{B}\subset X^{\frac{1}{2}}\times X^{\frac{1}{2}}$ para o processo de evolução $\{S^{(\varepsilon)}(t,s) : t\geq s\}$ com dimensão fractal finita uniformemente limitada por

$$\dim_F\left(\mathscr{M}_\theta^\varepsilon(t);V\right) \leq \frac{\ln\left(m_V\left(\frac{2}{\theta-\lambda}\right)\right)}{-\ln\theta}, \quad \text{para todo} \quad t\in\mathbb{R},$$

em que $V:=X^{\frac{1}{2}}\times X^{\frac{1}{2}}$, $W:=X^{\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}}\times X^{\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}}$ para $\gamma:=1-\rho\frac{N-2}{N+2}$ e $m_V(R)$ denota o número máximo de pontos z_i na bola $B_V(0,R)$ com $\kappa\|z_i-z_j\|_W>1$. Além disso, a aplicação $\varepsilon\mapsto\mathscr{M}_\theta^\varepsilon$ é estável no seguinte sentido: dado $\varepsilon_0\in[0,1]$, se $\varepsilon\in[0,1]$ é tal que

$$\Gamma(\varepsilon,\varepsilon_0) := \sup_{u\in\mathscr{B}}\sup_{t\in\mathbb{R}}\sup_{r\in[0,\widetilde{T}]} \left\| S^{(\varepsilon)}(r+t,t)u - S^{(\varepsilon_0)}(r+t,t)u \right\|_V < 1$$

então

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left\{ dist_V^{symm}\left(\mathscr{M}_\theta^\varepsilon(t),\mathscr{M}_\theta^{\varepsilon_0}(t)\right) \right\} \leq c\Gamma(\varepsilon,\varepsilon_0)^\zeta,$$

para algum $c>0$ e $0<\zeta<1$ que são independentes de ε.

Demonstração. De acordo com o Lema 4.2.2, $\mathscr{B}\subset X^{\frac{1}{2}}\times X^{\frac{1}{2}}$ é um subconjunto limitado que absorve uniformemente (em relação a $t\in\mathbb{R}$ e $\varepsilon\in[0,1]$) no sentido pullback para a família de processos de evolução $\{S^{(\varepsilon)}(t,s) : t\geq s\}_{\varepsilon\in[0,1]}$. Com isto, a propriedade (H_2) do Teorema 4.1.1 é válida. Agora a desigualdade em (4.9) assegura a condição (H_4) e os Lemas 4.2.9 e 4.2.10 mostram que (H_5) e (H_3), respectivamente, são válidas. Finalmente, uma vez que a imersão $X^{\frac{1}{2}}\times X^{\frac{1}{2}}\hookrightarrow X^{\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}}\times X^{\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}}$ é compacta, segue que a condição (H_1) está satisfeita, provando o teorema. □

4.4 Semicontinuidade do atrator exponencial pullback

Nesta seção, mostraremos que a família $\{\mathscr{M}_\theta^\varepsilon(t) : t\in\mathbb{R}\}_{\varepsilon\in[0,1]}$ de atratores exponenciais pullback é semicontínua superiormente e inferiormente em $\varepsilon_0=0$, para cada escolha particular de $\theta\in(\lambda,1)$.

Iniciamos com a apresentação de um resultado auxiliar.

Lema 4.4.1. Dados $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in [0,1]$ e um conjunto limitado $D \subset X^{\frac{1}{2}} \times X^{\frac{1}{2}}$, existe uma constante positiva $c = c(D) > 0$ (que independe de ε) tal que

$$\left\| S^{(\varepsilon_1)}(t,s)\left[\begin{array}{c} u_0 \\ v_0 \end{array}\right] - S^{(\varepsilon_2)}(t,s)\left[\begin{array}{c} u_0 \\ v_0 \end{array}\right] \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X^{\frac{1}{2}}} \leq c e^{c(t-s)} \|\eta_{\varepsilon_1} - \eta_{\varepsilon_2}\|_{L^\infty(\mathbb{R})},$$

para todo $\left[\begin{array}{c} u_0 \\ v_0 \end{array}\right] \in D$ e para todo $t \geq s$.

Demonstração. Dado $\left[\begin{smallmatrix} u_0 \\ v_0 \end{smallmatrix}\right] \in D$, vamos denotar $(u, u_t) := (u^{(\varepsilon_1)} - u^{(\varepsilon_2)}, u_t^{(\varepsilon_1)} - u_t^{(\varepsilon_2)})$ em $X^{\frac{1}{2}} \times X^{\frac{1}{2}}$ e $(z, z_t) := (z^{(\varepsilon_1)} - z^{(\varepsilon_2)}, z_t^{(\varepsilon_1)} - z_t^{(\varepsilon_2)})$ em $X^{-\frac{1}{2}} \times X^{-\frac{1}{2}}$, onde $u^{(\varepsilon_1)}$ e $u^{(\varepsilon_2)}$ são soluções do problema (1.1) para ε_1 e ε_2, respectivamente, e $z = \tilde{A}u$. Além disso, vamos denotar $z_0 = \tilde{A}u_0$ e $w_0 = \tilde{A}v_0$. Note que

$$z_{tt} + \eta_{\varepsilon_1}(t)\Lambda z_t - \big(\eta_{\varepsilon_2}(t) - \eta_{\varepsilon_1}(t)\big)\Lambda z_t^{(\varepsilon_2)} + \Lambda z = f^e(z^{(\varepsilon_1)}) - f^e(z^{(\varepsilon_2)}). \tag{4.10}$$

Logo, tomando o produto interno de (4.10) com z_t em $X^{-\frac{1}{2}}$ obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left(\|z_t\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} + \|z\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} - \|\tilde{A}^{-\frac{1}{2}} z\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}}\right)\right] = \; & -\eta_{\varepsilon_1}(t)\left(\|z_t\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} - \|\tilde{A}^{-\frac{1}{2}} z_t\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}}\right) \\ & + \left\langle f^e(z^{(\varepsilon_1)}) - f^e(z^{(\varepsilon_2)}), z_t \right\rangle_{X^{-\frac{1}{2}}} \\ & + \big(\eta_{\varepsilon_2}(t) - \eta_{\varepsilon_1}(t)\big)\left\langle \Lambda z_t^{(\varepsilon_2)}, z_t \right\rangle_{X^{-\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

No que segue, vamos estimar os três termos do lado direito de (4.11).

Pelo Lema 3.3.1, temos

$$-\eta_{\varepsilon_1}(t)\left(\|z_t\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} - \|\tilde{A}^{-\frac{1}{2}} z_t\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}}\right) \leq -\frac{a_1\lambda_1}{1+\lambda_1}\|z_t\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} \leq 0.$$

Usando o Lema 3.3.3, a condição (1.4) e a imersão contínua $X^{\frac{1}{2}} \hookrightarrow L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)$, obtemos

$$\begin{aligned} \left\langle f^e(z^{(\varepsilon_1)}) - f^e(z^{(\varepsilon_2)}), z_t \right\rangle_{X^{-\frac{1}{2}}} &= \int_\Omega \big[f^e(z^{(\varepsilon_1)}) - f^e(z^{(\varepsilon_2)})\big] A^{-1} z_t \, dx \\ &\leq \left\| f(\tilde{A}^{-1} z^{(\varepsilon_1)}) - f(\tilde{A}^{-1} z^{(\varepsilon_2)}) \right\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)} \|\tilde{A}^{-1} z_t\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)} \\ &\leq c\|\tilde{A}^{-1} z_t\|_{X^{\frac{1}{2}}} \left\| \tilde{A}^{-1} z \big(1 + |\tilde{A}^{-1} z^{(\varepsilon_1)}|^{\rho-1} + |\tilde{A}^{-1} z^{(\varepsilon_2)}|^{\rho-1}\big) \right\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)} \\ &= c_1 \|z_t\|_{X^{-\frac{1}{2}}} \left\| \tilde{A}^{-1} z \big(1 + |\tilde{A}^{-1} z^{(\varepsilon_1)}|^{\rho-1} + |\tilde{A}^{-1} z^{(\varepsilon_2)}|^{\rho-1}\big) \right\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Como $z^{(\varepsilon_1)}$ e $z^{(\varepsilon_2)}$ são limitados em $X^{-\frac{1}{2}}$, tem-se

$$\begin{aligned}
\Big\|\tilde{A}^{-1}z\big(1+|\tilde{A}^{-1}z^{(\varepsilon_1)}|^{\rho-1}+|\tilde{A}^{-1}z^{(\varepsilon_2)}|^{\rho-1}\big)\Big\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)} &\leq \\
&\leq \|\tilde{A}^{-1}z\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)}\big\|1+|\tilde{A}^{-1}z^{(\varepsilon_1)}|^{\rho-1}+|\tilde{A}^{-1}z^{(\varepsilon_2)}|^{\rho-1}\big\|_{L^{\frac{N}{2}}(\Omega)} \\
&\leq c_2\|\tilde{A}^{-1}z\|_{X^{\frac{1}{2}}}\left(1+\|\tilde{A}^{-1}z^{(\varepsilon_1)}\|^{\rho-1}_{L^{\frac{N(\rho-1)}{2}}(\Omega)}+\|\tilde{A}^{-1}z^{(\varepsilon_2)}\|^{\rho-1}_{L^{\frac{N(\rho-1)}{2}}(\Omega)}\right) \\
&\leq c_3\|z\|_{X^{-\frac{1}{2}}}\left(1+\|\tilde{A}^{-1}z^{(\varepsilon_1)}\|^{\rho-1}_{X^{\frac{1}{2}}}+\|\tilde{A}^{-1}z^{(\varepsilon_2)}\|^{\rho-1}_{X^{\frac{1}{2}}}\right) \\
&= c_4\|z\|_{X^{-\frac{1}{2}}}\left(1+\|z^{(\varepsilon_1)}\|^{\rho-1}_{X^{-\frac{1}{2}}}+\|z^{(\varepsilon_2)}\|_{X^{-\frac{1}{2}}}\right) \\
&\leq c_5\|z\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}$$

Assim, pelo Lema 3.3.1, vale

$$\begin{aligned}
\big\langle f^e(z^{(\varepsilon_1)})-f^e(z^{(\varepsilon_2)}),z_t\big\rangle_{X^{-\frac{1}{2}}} &\leq c_6\|z\|_{X^{-\frac{1}{2}}}\|z_t\|_{X^{-\frac{1}{2}}} \\
&\leq c_7\left(\|z\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}}+\|z_t\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}}\right) \\
&\leq c_8\left[\frac{1}{2}\left(\|z\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}}+\|z_t\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}}-\|\tilde{A}^{-\frac{1}{2}}z\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}}\right)\right].
\end{aligned}$$

Para o terceiro termo, usando o Lema 3.3.1 e as limitações de $z^{(\varepsilon_1)}$ e $z^{(\varepsilon_2)}$ em $X^{-\frac{1}{2}}$, tem-se

$$\begin{aligned}
&\big(\eta_{\varepsilon_2}(t)-\eta_{\varepsilon_1}(t)\big)\langle\Lambda z_t^{(\varepsilon_2)},z_t\rangle_{X^{-\frac{1}{2}}} \leq \\
&\leq \|\eta_{\varepsilon_1}-\eta_{\varepsilon_2}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\left(\big|\langle z_t^{(\varepsilon_2)},z_t\rangle_{X^{-\frac{1}{2}}}\big|+\big|\langle\tilde{A}^{-1}z_t^{(\varepsilon_2)},z_t\rangle_{X^{-\frac{1}{2}}}\big|\right) \\
&\leq c_9\|\eta_{\varepsilon_1}-\eta_{\varepsilon_2}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\left(\|z_t^{(\varepsilon_2)}\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}}+\|z_t\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}}+\|\tilde{A}^{-\frac{1}{2}}z_t^{(\varepsilon_2)}\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}}+\|\tilde{A}^{-\frac{1}{2}}z_t\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}}\right) \\
&\leq c_{10}\|\eta_{\varepsilon_1}-\eta_{\varepsilon_2}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\left(1+\|\tilde{A}^{-\frac{1}{2}}z_t^{(\varepsilon_2)}\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}}+\|\tilde{A}^{-\frac{1}{2}}z_t\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}}\right) \\
&\leq c_{11}\|\eta_{\varepsilon_1}-\eta_{\varepsilon_2}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\left(1+\|z_t^{(\varepsilon_2)}\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}}+\|z_t\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}}\right) \\
&\leq c_{12}\|\eta_{\varepsilon_1}-\eta_{\varepsilon_2}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

Substituindo as estimativas anteriores em (4.11), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left(\|z_t\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}}+\|z\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}}-\|\tilde{A}^{-\frac{1}{2}}z\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}}\right)\right] &\leq \\
&\leq c\|\eta_{\varepsilon_1}-\eta_{\varepsilon_2}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}+c\left[\frac{1}{2}\left(\|z_t\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}}+\|z\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}}-\|\tilde{A}^{-\frac{1}{2}}z\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}}\right)\right],
\end{aligned}$$

e pela desigualdade de Gronwall,

$$\frac{1}{2}\|z_t\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}}+\left(\frac{1}{2}\|z\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}}-\frac{1}{2}\|\tilde{A}^{-\frac{1}{2}}z\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}}\right)\leq ce^{c(t-s)}\|\eta_{\varepsilon_1}-\eta_{\varepsilon_2}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}, \qquad t\geq s.$$

Finalmente, o Lema 3.3.1 garante que

$$\frac{1}{2}\|z_t\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} + \frac{\lambda_1}{2(1+\lambda_1)}\|z\|^2_{X^{-\frac{1}{2}}} \leq ce^{c(t-s)}\|\eta_{\varepsilon_1} - \eta_{\varepsilon_2}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}, \qquad t \geq s,$$

isto é,

$$\|u_t\|^2_{X^{\frac{1}{2}}} + \|u\|^2_{X^{\frac{1}{2}}} \leq ce^{c(t-s)}\|\eta_{\varepsilon_1} - \eta_{\varepsilon_2}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}, \qquad t \geq s,$$

e o resultado está provado. □

Teorema 4.4.2. Para cada $\theta \in (\lambda, 1)$, a família de atratores exponenciais pullback $\{\mathscr{M}^\varepsilon_\theta(t) : t \in \mathbb{R}\}_{\varepsilon\in[0,1]}$ é tal que existe uma constante $\varepsilon_1 \in [0,1]$ satisfazendo

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\left\{dist^{symm}_{X^{\frac{1}{2}}\times X^{\frac{1}{2}}}\left(\mathscr{M}^\varepsilon_\theta(t), \mathscr{M}^0_\theta(t)\right)\right\} \leq c\|\eta_\varepsilon - \eta_0\|^\zeta_{L^\infty(\Omega)}, \qquad 0 \leq \varepsilon < \varepsilon_1,$$

para algum $0 < \zeta < 1$ e $c > 0$ que são independentes de ε. Em particular, $\{\mathscr{M}^\varepsilon_\theta(t) : t \in \mathbb{R}\}_{\varepsilon\in[0,1]}$ é semicontínua superior e inferior em $\varepsilon_0 = 0$ para cada escolha particular de $\theta \in (\lambda, 1)$, isto é, dado $\theta \in (\lambda, 1)$ temos

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\left[\sup_{t\in\mathbb{R}}\left\{dist_{X^{\frac{1}{2}}\times X^{\frac{1}{2}}}\left(\mathscr{M}^\varepsilon_\theta(t), \mathscr{M}^0_\theta(t)\right)\right\}\right] = \lim_{\varepsilon\to0^+}\left[\sup_{t\in\mathbb{R}}\left\{dist_{X^{\frac{1}{2}}\times X^{\frac{1}{2}}}\left(\mathscr{M}^0_\theta(t), \mathscr{M}^\varepsilon_\theta(t)\right)\right\}\right] = 0.$$

Demonstração. Primeiramente, de acordo com o Lema 4.4.1, temos

$$\Gamma(\varepsilon, 0) \leq ce^{c\widetilde{T}}\|\eta_\varepsilon - \eta_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})},$$

onde $\Gamma(\varepsilon,0) := \sup_{u\in\mathscr{B}}\sup_{t\in\mathbb{R}}\sup_{r\in[0,\widetilde{T}]}\left\|S^{(\varepsilon)}(r+t,t)u - S^{(0)}(r+t,t)u\right\|_{X^{\frac{1}{2}}\times X^{\frac{1}{2}}}$.

Agora, uma vez que $\lim_{\varepsilon\to0^+}\|\eta_\varepsilon - \eta_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 0$, existe $\varepsilon_1 \in [0,1]$ de modo que (veja Teorema 4.1.1) para qualquer $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_1$ vale

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\left\{dist^{symm}_{X^{\frac{1}{2}}\times X^{\frac{1}{2}}}\left(\mathscr{M}^\varepsilon_\theta(t), \mathscr{M}^0_\theta(t)\right)\right\} \leq c\Gamma(\varepsilon,0)^\zeta \leq \tilde{c}\|\eta_\varepsilon - \eta_0\|^\zeta_{L^\infty(\mathbb{R})},$$

para algum $\tilde{c} > 0$ e $0 < \zeta < 1$, provando o resultado. □

CAPÍTULO

5

O ATRATOR PULLBACK

Neste capítulo, vamos mostrar a existência do atrator pullback para a família de processos de evolução $\{S^{(\varepsilon)}(t,s) : t \geq s\}_{\varepsilon \in [0,1]}$, dada pelo Teorema 3.3.7, no espaço $X^{\frac{1}{2}} \times X^{\frac{1}{2}}$, como consequência da existência do atrator exponencial pullback.

5.1 Existência e semicontinuidade superior do atrator pullback

Como consequência imediata do Corolário 2.6.8, obtemos a existência do atrator pullback para o processo de evolução $\left\{S^{(\varepsilon)}(t,s) : t \geq s\right\}$.

Teorema 5.1.1. Para qualquer $\varepsilon \in [0,1]$, o processo de evolução $\left\{S^{(\varepsilon)}(t,s) : t \geq s\right\}$ dado por (3.39) e associado ao problema (1.1), admite um atrator pullback $\{\mathscr{A}^{\varepsilon}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ em $X^{\frac{1}{2}} \times X^{\frac{1}{2}}$ tal que $\mathscr{A}^{\varepsilon}(t) \subset \mathscr{M}^{\varepsilon}_{\theta}(t) \subset \mathscr{B}$ para todo $\theta \in (\lambda, 1)$ e para todo $t \in \mathbb{R}$. Além disso, cada seção possui dimensão fractal finita limitada uniformemente por

$$\dim_F\left(\mathscr{A}^{\varepsilon}(t); V\right) \leq \frac{\ln\left(m_V\left(\frac{2}{\theta-\lambda}\right)\right)}{-\ln\theta}, \quad \text{para todo} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Como $\mathscr{B}$ independe de ε, segue que $\bigcup_{\varepsilon\in[0,1]}\bigcup_{s\in\mathbb{R}}\mathscr{A}^{\varepsilon}(s) \subset \mathscr{B}$, ou seja, é limitado em $X^{\frac{1}{2}} \times X^{\frac{1}{2}}$.

No próximo resultado, provamos que a família $\{\mathscr{A}^{\varepsilon}(t) : t \in \mathbb{R}\}_{\varepsilon\in[0,1]}$ de atratores pullback é semicontínua superiormente em $\varepsilon_0 = 0$.

Teorema 5.1.2. A família de atratores pullback $\{\mathscr{A}^{\varepsilon}(t) : t \in \mathbb{R}\}_{\varepsilon\in[0,1]}$ é semicontínua superior em $\varepsilon_0 = 0$, isto é, para cada $t \in \mathbb{R}$ temos

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[dist_{X^{\frac{1}{2}}\times X^{\frac{1}{2}}}\left(\mathscr{A}^{\varepsilon}(t), \mathscr{A}^{0}(t)\right)\right] = 0.$$

Demonstração. Em primeiro lugar, de acordo com o Teorema 5.1.1, temos que $\bigcup_{\varepsilon\in[0,1]}\bigcup_{r\in\mathbb{R}}\mathscr{A}^{\varepsilon}(r)$ é um subconjunto limitado de $X^{\frac{1}{2}}\times X^{\frac{1}{2}}$. Logo, pela propriedade de atração pullback do conjunto $\{\mathscr{A}^0(t) : t\in\mathbb{R}\}$, dados $t\in\mathbb{R}$ e $\delta>0$, existe um $\tau<t$ de modo que

$$dist_{X^{\frac{1}{2}}\times X^{\frac{1}{2}}}\left(S^{(0)}(t,\tau)\mathscr{A}^{\varepsilon}(\tau),\mathscr{A}^0(t)\right)\leq dist_{X^{\frac{1}{2}}\times X^{\frac{1}{2}}}\left(S^{(0)}(t,\tau)\Big(\bigcup_{\varepsilon\in[0,1]}\bigcup_{r\in\mathbb{R}}\mathscr{A}^{\varepsilon}(r)\Big),\mathscr{A}^0(t)\right)<\frac{\delta}{2},$$

para todo $\varepsilon\in[0,1]$.

Além disso, pelo Lemma 4.4.1, podemos escrever

$$\left\|S^{(\varepsilon)}(t,\tau)\begin{bmatrix}u_0\\v_0\end{bmatrix}-S^{(0)}(t,\tau)\begin{bmatrix}u_0\\v_0\end{bmatrix}\right\|_{X^{\frac{1}{2}}\times X^{\frac{1}{2}}}\leq ce^{c(t-\tau)}\|\eta_\varepsilon-\eta_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})},\qquad \begin{bmatrix}u_0\\v_0\end{bmatrix}\in\mathscr{A}^{\varepsilon}(\tau),$$

e, uma vez que $\lim_{\varepsilon\to0^+}\|\eta_\varepsilon-\eta_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}=0$, podemos encontrar $\varepsilon_1\in[0,1]$ de modo que

$$\sup_{\left[\begin{smallmatrix}u_0\\v_0\end{smallmatrix}\right]\in\mathscr{A}^{\varepsilon}(\tau)}\left\|S^{(\varepsilon)}(t,\tau)\begin{bmatrix}u_0\\v_0\end{bmatrix}-S^{(0)}(t,\tau)\begin{bmatrix}u_0\\v_0\end{bmatrix}\right\|_{X^{\frac{1}{2}}\times X^{\frac{1}{2}}}<\frac{\delta}{2},$$

para todo $\varepsilon\in[0,\varepsilon_1]$.

Agora, uma vez que $\mathscr{A}^{\varepsilon}(t)=S^{(\varepsilon)}(t,\tau)\mathscr{A}^{\varepsilon}(\tau)$ para todo $t\geq\tau$, tem-se

$$\begin{aligned}
&dist_{X^{\frac{1}{2}}\times X^{\frac{1}{2}}}\left(\mathscr{A}^{\varepsilon}(t),\mathscr{A}^0(t)\right)\leq\\
&\leq dist_{X^{\frac{1}{2}}\times X^{\frac{1}{2}}}\left(S^{(\varepsilon)}(t,\tau)\mathscr{A}^{\varepsilon}(\tau),S^{(0)}(t,\tau)\mathscr{A}^{\varepsilon}(\tau)\right)+dist_{X^{\frac{1}{2}}\times X^{\frac{1}{2}}}\left(S^{(0)}(t,\tau)\mathscr{A}^{\varepsilon}(\tau),\mathscr{A}^0(t)\right)\\
&<\sup_{\left[\begin{smallmatrix}u_0\\v_0\end{smallmatrix}\right]\in\mathscr{A}^{\varepsilon}(\tau)}\left\|S^{(\varepsilon)}(t,\tau)\begin{bmatrix}u_0\\v_0\end{bmatrix}-S^{(0)}(t,\tau)\begin{bmatrix}u_0\\v_0\end{bmatrix}\right\|_{X^{\frac{1}{2}}\times X^{\frac{1}{2}}}+\frac{\delta}{2}\\
&<\delta,
\end{aligned}$$

para todo $\varepsilon\in[0,\varepsilon_1]$, o que prova a semicontinuidade superior da família de atratores pullback $\{\mathscr{A}^{\varepsilon}(t) : t\in\mathbb{R}\}_{\varepsilon\in[0,1]}$ em $\varepsilon_0=0$. □

5.2 Regularidade do atrator pullback

Na Seção 5.1, mostramos que para cada $\varepsilon\in[0,1]$, existe um atrator pullback $\{\mathscr{A}^{\varepsilon}(t) : t\in\mathbb{R}\}$ para o processo de evolução $\{S^{(\varepsilon)}(t,s) : t\geq s\}$ associado ao problema de segunda ordem (1.1) no espaço $X^{\frac{1}{2}}\times X^{\frac{1}{2}}$ (veja Teorema 5.1.1). Além disso, o resultado afirma que o atrator pullback é uniformemente (em relação a $t\in\mathbb{R}$ e $\varepsilon\in[0,1]$) limitado neste espaço.

Nesta seção, vamos fornecer um resultado sobre a regularidade do atrator pullback. Mais precisamente, no Teorema 5.2.3, vamos provar que $\bigcup_{\varepsilon\in[0,1]}\bigcup_{t\in\mathbb{R}}\mathscr{A}^{\varepsilon}(t)$ é um subconjunto limitado de $X^1\times X^1$. Porém, exibiremos dois resultados auxiliares.

Lema 5.2.1. (CARVALHO; CHOLEWA, 2008, Lema 3.1) Seja $\widetilde{f^e} := f^e \circ \tilde{A}$. Se f satisfaz (1.4) então existe uma constante $c > 0$ de modo que

$$\|\widetilde{f^e}(\phi)\|_{X^{\frac{\tilde{\sigma}-1}{2}}} \leq c\Big(1 + \|\phi\|^{\rho}_{X^{\frac{1}{2}}}\Big), \qquad \phi \in X^{\frac{1}{2}},$$

onde $\widetilde{\sigma} := \min\left\{1, \frac{N+2}{2} - \rho\frac{N-2}{2}\right\}$, sempre que $N \geq 3$.

Lema 5.2.2. Suponha que f satisfaça as condições (1.2) e (1.4). Seja $\widetilde{\sigma} = \min\left\{1, \frac{N+2}{2} - \rho\frac{N-2}{2}\right\}$. Então, para cada subconjunto limitado D de $X^{\frac{1}{2}} \times X^{\frac{1}{2}}$, existe uma constante $C = C(D) > 0$ de modo que

$$\sup_{\varepsilon\in[0,1]} \sup_{\left[\begin{smallmatrix} u_0 \\ v_0 \end{smallmatrix}\right]\in D} \left\| U^{(\varepsilon)}(t,s)\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1+\tilde{\sigma}}{2}}\times X^{\frac{1+\tilde{\sigma}}{2}}} \leq C, \quad \text{sempre que} \quad t \geq s.$$

Demonstração. Sejam $\varepsilon \in [0,1]$, $t \geq s$ e $D \subset X^{\frac{1}{2}} \times X^{\frac{1}{2}}$ um conjunto limitado. Note que $\Phi_{s_1} \circ \Phi_{s_2} = \Phi_{s_1+s_2}$ para todos $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ e, pelo Lema 4.2.7, temos $\Phi_{-\frac{\tilde{\sigma}}{2}} \circ L^{(\varepsilon)}_{-1/2} = L^{(\varepsilon)}_{-1/2} \circ \Phi_{-\frac{\tilde{\sigma}}{2}}$. Do Lema 3.2.1, temos o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & & X^{\frac{\tilde{\sigma}-1}{2}} \times X^{\frac{\tilde{\sigma}-1}{2}} \\
X^{-\frac{1}{2}} \times X^{-\frac{1}{2}} \arrow[urr, "\Phi_{\frac{\tilde{\sigma}}{2}}"] \arrow[rr, "\Phi_1"] & & X^{\frac{1}{2}} \times X^{\frac{1}{2}} \arrow[dl, "\Phi_{\frac{\tilde{\sigma}}{2}}"] \\
 & X^{\frac{1+\tilde{\sigma}}{2}} \times X^{\frac{1+\tilde{\sigma}}{2}} &
\end{tikzcd}$$

Desta forma, obtemos as seguintes estimativas

$$\begin{aligned}
&\left\| U^{(\varepsilon)}(t,s)\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1+\tilde{\sigma}}{2}}\times X^{\frac{1+\tilde{\sigma}}{2}}} = \\
&\qquad = \left\| \Phi_{-1-\frac{\tilde{\sigma}}{2}} \circ \Phi_1 \int_s^t L^{(\varepsilon)}_{-1/2}(t,\tau)\mathscr{F}\left(\Phi_{-1}S^{(\varepsilon)}(\tau,s)\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}\right)d\tau \right\|_{X^{-\frac{1}{2}}\times X^{-\frac{1}{2}}} \\
&\qquad = \left\| \Phi_{-\frac{\tilde{\sigma}}{2}} \int_s^t L^{(\varepsilon)}_{-1/2}(t,\tau)\mathscr{F}\left(\Phi_{-1}S^{(\varepsilon)}(\tau,s)\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}\right)d\tau \right\|_{X^{-\frac{1}{2}}\times X^{-\frac{1}{2}}} \\
&\qquad \leq \int_s^t \|L^{(\varepsilon)}_{-1/2}(t,\tau)\|_{\mathscr{L}(X^{-\frac{1}{2}}\times X^{-\frac{1}{2}})} \left\| \Phi_{-\frac{\tilde{\sigma}}{2}}\mathscr{F}\left(\Phi_{-1}S^{(\varepsilon)}(\tau,s)\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}\right) \right\|_{X^{-\frac{1}{2}}\times X^{-\frac{1}{2}}} d\tau \\
&\qquad \leq \int_s^t Ke^{-\alpha(t-\tau)} \left\| \Phi_{-\frac{\tilde{\sigma}}{2}}\mathscr{F}\left(\Phi_{-1}S^{(\varepsilon)}(\tau,s)\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}\right) \right\|_{X^{-\frac{1}{2}}\times X^{-\frac{1}{2}}} d\tau,
\end{aligned}$$

para todo $\left[\begin{smallmatrix} u_0 \\ v_0 \end{smallmatrix}\right] \in D$, onde aplicamos o Lema 4.2.1 na última desigualdade.

Entretanto, usando o Lema 5.2.1, obtemos para $\tau \in [s,t]$ a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
\left\| \Phi_{-\frac{\tilde{\sigma}}{2}} \mathscr{F}\left(\Phi_{-1} S^{(\varepsilon)}(\tau,s) \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \right) \right\|_{X^{-\frac{1}{2}} \times X^{-\frac{1}{2}}} &= \left\| \mathscr{F}\left(\Phi_{-1} S^{(\varepsilon)}(\tau,s) \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \right) \right\|_{X^{\frac{\tilde{\sigma}-1}{2}} \times X^{\frac{\tilde{\sigma}-1}{2}}} \\
&= \left\| \widetilde{f}^e \left(u^{(\varepsilon)}(\tau, s, (u_0, v_0)) \right) \right\|_{X^{\frac{\tilde{\sigma}-1}{2}}} \\
&\leq c \left(1 + \left\| u^{(\varepsilon)}(\tau, s, (u_0, v_0)) \right\|_{X^{\frac{1}{2}}}^{\rho} \right) \\
&\leq c \left(1 + \sup_{\left[\begin{smallmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{smallmatrix}\right] \in \gamma^{\varepsilon}\left(\left[\begin{smallmatrix} u_0 \\ v_0 \end{smallmatrix}\right], \tau\right)} \|\tilde{u}\|_{X^{\frac{1}{2}}}^{\rho} \right),
\end{aligned}$$

e uma vez que $\bigcup_{\varepsilon \in [0,1]} \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \gamma^{\varepsilon}(D,t)$ é limitado em $X^{\frac{1}{2}} \times X^{\frac{1}{2}}$ (veja Corolário 3.3.8), concluímos que

$$\left\| U^{(\varepsilon)}(t,s) \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \right\|_{X^{\frac{1+\tilde{\sigma}}{2}} \times X^{\frac{1+\tilde{\sigma}}{2}}} \leq C \int_s^t e^{-\alpha(t-\tau)}\, d\tau \leq C,$$

quaisquer que sejam $\varepsilon \in [0,1]$, $s \leq t$ e $\left[\begin{smallmatrix} u_0 \\ v_0 \end{smallmatrix}\right] \in D$. $\square$

Teorema 5.2.3. Suponhamos que f satisfaça as condições (1.2)-(1.4). Então $\bigcup_{\varepsilon \in [0,1]} \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \mathscr{A}^{\varepsilon}(t)$ é limitado em $X^1 \times X^1$.

Demonstração. Vamos denotar $D := \bigcup_{\varepsilon \in [0,1]} \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \mathscr{A}^{\varepsilon}(t)$ e seja $x \in D$ arbitrário. Então $x \in \mathscr{A}^{\varepsilon_0}(t_0)$ para algum $t_0 \in \mathbb{R}$ e para algum $\varepsilon_0 \in [0,1]$. Suponha que $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ seja uma sequência de modo que $s_n \leq t_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n \to \infty} s_n = -\infty$. Uma vez que $\mathscr{A}^{\varepsilon_0}(t_0) = S^{(\varepsilon_0)}(t_0, s_n) \mathscr{A}^{\varepsilon_0}(s_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $x = S^{(\varepsilon_0)}(t_0, s_n) x_n$ para algum $x_n \in \mathscr{A}^{\varepsilon_0}(s_n)$, $n \in \mathbb{N}$, e usando o fato que $S^{(\varepsilon_0)}(t_0, s_n) x_n = L^{(\varepsilon_0)}(t_0, s_n) x_n + U^{(\varepsilon_0)}(t_0, s_n) x_n$ e $\lim_{n \to \infty} \|L^{(\varepsilon_0)}(t_0, s_n) x_n\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X^{\frac{1}{2}}} = 0$, concluímos que

$$\lim_{n \to \infty} \left\| U^{(\varepsilon_0)}(t_0, s_n) x_n - x \right\|_{X^{\frac{1}{2}} \times X^{\frac{1}{2}}} = 0. \tag{5.1}$$

Do Lema 5.2.2, temos

$$\left\| U^{(\varepsilon_0)}(t_0, s_n) x_n \right\|_{X^{\frac{1+\tilde{\sigma}}{2}} \times X^{\frac{1+\tilde{\sigma}}{2}}} \leq C,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, com constante $C = C(D) > 0$ independente de x, ε_0 e de t_0. Como $X^{\frac{1+\tilde{\sigma}}{2}} \times X^{\frac{1+\tilde{\sigma}}{2}}$ é reflexivo, podemos assumir sem perda de generalidade, que

$$U^{(\varepsilon_0)}(t_0, s_n) x_n \xrightarrow{w} y \quad \text{em} \quad X^{\frac{1+\tilde{\sigma}}{2}} \times X^{\frac{1+\tilde{\sigma}}{2}},$$

para algum $y \in X^{\frac{1+\tilde{\sigma}}{2}} \times X^{\frac{1+\tilde{\sigma}}{2}}$. Como a imersão $X^{\frac{1+\tilde{\sigma}}{2}} \times X^{\frac{1+\tilde{\sigma}}{2}} \hookrightarrow X^{\frac{1}{2}} \times X^{\frac{1}{2}}$ é contínua na topologia forte, segue (veja (BREZIS, 2010, Teorema 3.10)) que

$$U^{(\varepsilon_0)}(t_0, s_n) x_n \xrightarrow{w} y \quad \text{em} \quad X^{\frac{1}{2}} \times X^{\frac{1}{2}},$$

e de (5.1), $U^{(\varepsilon_0)}(t_0,s_n)x_n \xrightarrow{w} x$ em $X^{\frac{1}{2}} \times X^{\frac{1}{2}}$, isto é, $y = x$. Consequentemente,

$$\|x\|_{X^{\frac{1+\widetilde{\sigma}}{2}}\times X^{\frac{1+\widetilde{\sigma}}{2}}} \leq \liminf_{n\to\infty} \left\|U^{(\varepsilon_0)}(t_0,s_n)x_n\right\|_{X^{\frac{1+\widetilde{\sigma}}{2}}\times X^{\frac{1+\widetilde{\sigma}}{2}}} \leq C,$$

e portanto $D = \bigcup_{\varepsilon\in[0,1]} \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \mathscr{A}^{\varepsilon}(t)$ é limitado em $X^{\frac{1+\widetilde{\sigma}}{2}} \times X^{\frac{1+\widetilde{\sigma}}{2}}$.

Note que se $\widetilde{\sigma} = 1$ então o resultado está provado. Agora, suponhamos que $\widetilde{\sigma} < 1$ e consideremos $r_0 := \widetilde{\sigma}$ e $r_1 := min\left\{1, \frac{N+2}{N-2} r_0\right\}$. Pela condição (1.4) e das imersões contínuas

$$X^{\frac{1+r_0}{2}} \hookrightarrow L^{\frac{2N\rho}{N+2(1-r_1)}} \hookrightarrow L^{\frac{2N}{N+2(1-r_1)}}(\Omega) \hookrightarrow X^{\frac{r_1-1}{2}},$$

obtemos para todo $\phi \in X^{\frac{1+r_0}{2}}$ que $\left(\text{denote } r' := \frac{2N}{N+2(1-r_1)}\right)$

$$\begin{aligned} \|\widetilde{f}^e(\phi)\|_{X^{\frac{r_1-1}{2}}} &\leq c_0 \|f(\phi)\|_{L^{r'}(\Omega)} \\ &\leq c_1 \left\|1 + |\phi|^{\rho}\right\|_{L^{r'}(\Omega)} \\ &\leq c_2 \left(1 + \|\phi\|^{\rho}_{L^{r'\rho}(\Omega)}\right) \\ &\leq c\left(1 + \|\phi\|^{\rho}_{X^{\frac{1+r_0}{2}}}\right), \end{aligned} \tag{5.2}$$

para alguma constante $c > 0$.

Seja $x \in D$. Como no primeiro caso, temos que $x = S^{(\varepsilon_0)}(t_0,s_n)x_n$ para algum $\varepsilon_0 \in [0,1]$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $s_n \leq t_0$ com $\lim_{n\to\infty} s_n = -\infty$ e $x_n \in \mathscr{A}^{\varepsilon_0}(s_n)$. Sabemos que

$$\lim_{n\to\infty} \left\|U^{(\varepsilon_0)}(t_0,s_n)x_n - x\right\|_{X^{\frac{1}{2}}\times X^{\frac{1}{2}}} = 0.$$

Agora da expressão (4.2) do Lema 4.2.1, da relação (5.2) e da limitação de D em $X^{\frac{1+\widetilde{\sigma}}{2}} \times X^{\frac{1+\widetilde{\sigma}}{2}}$, obtemos

$$\begin{aligned} &\left\|U^{(\varepsilon_0)}(t_0,s_n)x_n\right\|_{X^{\frac{1+r_1}{2}}\times X^{\frac{1+r_1}{2}}} = \\ &\quad = \left\|\Phi_{-1-\frac{r_1}{2}} \circ \Phi_1 \int_{s_n}^{t_0} L^{(\varepsilon_0)}_{-1/2}(t_0,\tau)\mathscr{F}\left(\Phi_{-1}S^{(\varepsilon_0)}(\tau,s_n)x_n\right)d\tau\right\|_{X^{-\frac{1}{2}}\times X^{-\frac{1}{2}}} \\ &\quad \leq \int_{s_n}^{t_0} Ke^{-\alpha(t_0-\tau)} \left\|\widetilde{f}^e\left(u^{(\varepsilon_0)}(\tau,s_n,x_n)\right)\right\|_{X^{\frac{r_1-1}{2}}} d\tau \\ &\quad \leq \int_{s_n}^{t_0} ce^{-\alpha(t_0-\tau)}\left(1 + \|u^{(\varepsilon_0)}(\tau)\|^{\rho}_{X^{\frac{1+r_0}{2}}}\right)d\tau \\ &\quad \leq \int_{s_n}^{t_0} ce^{-\alpha(t_0-\tau)}\left(1 + \sup_{\tilde{u}\in D} \|\tilde{u}\|^{\rho}_{X^{\frac{1+\widetilde{\sigma}}{2}}}\right)d\tau \\ &\quad \leq C_1, \end{aligned}$$

para alguma constante $C_1 = C_1(D) > 0$ (independente de ε_0, t_0 e n). Como $X^{\frac{1+r_1}{2}} \times X^{\frac{1+r_1}{2}}$ é reflexivo, podemos assumir sem perda de generalidade, que

$$U^{(\varepsilon_0)}(t_0,s_n)x_n \xrightarrow{w} y \quad \text{em} \quad X^{\frac{1+r_1}{2}} \times X^{\frac{1+r_1}{2}},$$

para algum $y \in X^{\frac{1+r_1}{2}} \times X^{\frac{1+r_1}{2}}$ e como a imersão $X^{\frac{1+r_1}{2}} \times X^{\frac{1+r_1}{2}} \hookrightarrow X^{\frac{1}{2}} \times X^{\frac{1}{2}}$ é contínua concluímos que

$$U^{(\varepsilon_0)}(t_0, s_n)x_n \xrightarrow{w} y \quad \text{em} \quad X^{\frac{1}{2}} \times X^{\frac{1}{2}},$$

ou seja, $x = y$. Finalmente,

$$\|x\|_{X^{\frac{1+r_1}{2}} \times X^{\frac{1+r_1}{2}}} \leq \liminf_{n\to\infty} \left\|U^{(\varepsilon_0)}(t_0, s_n)x_n\right\|_{X^{\frac{1+r_1}{2}} \times X^{\frac{1+r_1}{2}}} \leq C_1,$$

provando que D é limitado em $X^{\frac{1+r_1}{2}} \times X^{\frac{1+r_1}{2}}$.

Se $r_1 = \left(\frac{N+2}{N-2}\right) r_0 < 1$, então continuamos com o processo anterior e obtemos que

$$\bigcup_{\varepsilon\in[0,1]} \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \mathscr{A}^{\varepsilon}(t) \quad \text{é limitado em} \quad X^{\frac{1+r_2}{2}} \times X^{\frac{1+r_2}{2}},$$

onde $r_2 := \min\left\{1, (\frac{N+2}{N-2})^2 r_0\right\}$. Prosseguindo com esse processo, após um número finito de passos, chegamos que $r_k := \min\left\{1, \left(\frac{N+2}{N-2}\right)^k r_0\right\} = 1$ para algum $k \in \mathbb{N}$ (i.e., $(\frac{N+2}{N-2})^k r_0 \geq 1$), o que conclui esta prova. $\square$

REFERÊNCIAS

AMANN, H. **Linear and Quasilinear Parabolic Problems: Abstract linear theory**. Springer, 1995. (Agents and Actions Supplements). ISBN 9780817651145. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=WzsAngEACAAJ>. Citado nas páginas 17, 22 e 23.

AMANN, H.; METZEN, G. **Ordinary Differential Equations: An Introduction to Nonlinear Analysis**. De Gruyter, 2011. (De Gruyter Studies in Mathematics). ISBN 9783110853698. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=hCQQcCiTv8oC>. Citado nas páginas 34, 36 e 38.

ARAúJO, R. d. O.; MA, T. F.; QIN, Y. Long-time behavior of a quasilinear viscoelastic equation with past history. **J. Differential Equations**, v. 254, n. 10, p. 4066–4087, 2013. ISSN 0022-0396. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.jde.2013.02.010>. Citado na página 14.

BEZERRA, F. D. M.; CARBONE, V. L.; NASCIMENTO, M. J. D.; SCHIABEL, K. Pullback attractors for a class of non-autonomous thermoelastic plate systems. **Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B**, v. 23, n. 9, p. 3553–3571, 2018. ISSN 1531-3492. Disponível em: <https://doi.org/10.3934/dcdsb.2017214>. Citado na página 14.

____. Regularity and upper semicontinuity of pullback attractors for a class of nonautonomous thermoelastic plate systems. **Pacific J. Math.**, v. 301, n. 2, p. 395–419, 2019. ISSN 0030-8730. Disponível em: <https://doi.org/10.2140/pjm.2019.301.395>. Citado na página 14.

BOGOLUBSKY, I. Some examples of inelastic soliton interaction. **Computer Physics Communications**, v. 13, n. 3, p. 149–155, 1977. ISSN 0010-4655. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0010465577900091>. Citado na página 14.

BONOTTO, E. M.; NASCIMENTO, M. J. D.; SANTIAGO, E. B. Long-time behaviour for a non-autonomous Klein-Gordon-Zakharov system. **J. Math. Anal. Appl.**, v. 506, n. 2, p. Paper No. 125670, 42, 2022. ISSN 0022-247X. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2021.125670>. Citado na página 14.

BREZIS, H. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**. [S.l.: s.n.], 2010. ISBN 9780387709147. Citado nas páginas 17, 18, 19, 20, 21, 34 e 70.

CARABALLO, T.; CARVALHO, A. N.; LANGA, J. A.; RIVERO, F. Existence of pullback attractors for pullback asymptotically compact processes. **Nonlinear Anal.**, v. 72, n. 3-4, p. 1967–1976, 2010. ISSN 0362-546X. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.na.2009.09.037>. Citado na página 14.

____. A non-autonomous strongly damped wave equation: existence and continuity of the pullback attractor. **Nonlinear Anal.**, v. 74, n. 6, p. 2272–2283, 2011. ISSN 0362-546X. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.na.2010.11.032>. Citado na página 14.

CARVALHO, A.; CHOLEWA, J. Local well posedness, asymptotic behavior and asymptotic bootstrapping for a class of semilinear evolution equations of the second order in time. **Transactions**

of the American Mathematical Society, American Mathematical Society (AMS), v. 361, n. 5, p. 2567–2586, nov. 2008. Disponível em: <https://doi.org/10.1090/s0002-9947-08-04789-2>. Citado nas páginas 14, 38, 39, 43 e 69.

CARVALHO, A.; LANGA, J.; ROBINSON, J. **Attractors for infinite-dimensional non-autonomous dynamical systems**. Springer New York, 2012. (Applied Mathematical Sciences). ISBN 9781461445807. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=60mnqnZhjT4C>. Citado nas páginas 17 e 29.

CARVALHO, A. N. **Análise Funcional II**. Notas de aula. ICMC-USP, 2022. Disponível em: <https://sites.icmc.usp.br/andcarva/AnaliseFuncional-II/AnaliseFuncional-II.pdf>. Citado nas páginas 17, 22, 23, 25 e 26.

CARVALHO, A. N.; CUNHA, A. C.; LANGA, J. A.; ROBINSON, J. C. Finite-dimensional negatively invariant subsets of Banach spaces. **J. Math. Anal. Appl.**, v. 509, n. 2, p. Paper No. 125945, 21, 2022. ISSN 0022-247X. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2021.125945>. Citado na página 29.

CARVALHO, A. N.; NASCIMENTO, M. J. D. Singularly non-autonomous semilinear parabolic problems with critical exponents. **Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S**, v. 2, n. 3, p. 449–471, 2009. ISSN 1937-1632. Disponível em: <https://doi.org/10.3934/dcdss.2009.2.449>. Citado na página 14.

CHEPYZHOV, V. V.; VISHIK, M. I. **Attractors for Equations of Mathematical Physics**. [S.l.: s.n.], 2022. ISBN 9780821829509. Citado na página 21.

CHOLEWA, J.; DLOTKO, T.; CHAFEE, N.; SOCIETY, L. M. **Global Attractors in Abstract Parabolic Problems**. Cambridge University Press, 2000. (Lecture note series / London mathematical society). ISBN 9780521794244. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=B_rA7OMKIh4C>. Citado nas páginas 17, 18, 24 e 25.

CHUESHOV, I.; LASIECKA, I. **Von Karman evolution equations**. Springer, New York, 2010. xiv+766 p. (Springer Monographs in Mathematics). Well-posedness and long-time dynamics. ISBN 978-0-387-87711-2. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-0-387-87712-9>. Citado na página 49.

CLARKSON, P. A.; LEVEQUE, R. J.; SAXTON, R. Solitary-wave interactions in elastic rods. **Stud. Appl. Math.**, v. 75, n. 2, p. 95–121, 1986. ISSN 0022-2526. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/sapm198675295>. Citado na página 14.

CONTI, M.; MA, T. F.; MARCHINI, E. M.; HUERTAS, P. N. S. Asymptotics of viscoelastic materials with nonlinear density and memory effects. **J. Differential Equations**, v. 264, n. 7, p. 4235–4259, 2018. ISSN 0022-0396. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.jde.2017.12.010>. Citado na página 14.

CZAJA, R. **Differential Equations with Sectorial Operators**. [S.l.]: Katowice: Wydawnictwo Uniwersytetu Slaskieco, 2002. ISSN 0239-6432. ISBN 830226-1164-1. Citado na página 26.

LOVE, A. E. H. **A treatise on the Mathematical Theory of Elasticity**. [S.l.]: Dover Publications, New York, 1944. xviii+643 p. Fourth Ed. Citado na página 14.

MOREIRA, E. M. **Atrator pullback para uma equação de onda semilinear amortecida**. [S.l.]: Dissertação de Mestrado, UFSCar, São Carlos, 2018. Citado na página 26.

PAZY, A. **Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations**. New York, NY: Springer, 2011. (Applied Mathematical Sciences). Citado na página 35.

ROBINSON, J. C. **Dimensions, embeddings, and attractors**. [S.l.]: Cambridge University Press, Cambridge, 2011. v. 186. xii+205 p. (Cambridge Tracts in Mathematics, v. 186). ISBN 978-0-521-89805-8. Citado na página 29.

SUN, C.; YANG, L.; DUAN, J. Asymptotic behavior for a semilinear second order evolution equation. **Trans. Amer. Math. Soc.**, v. 363, n. 11, p. 6085–6109, 2011. ISSN 0002-9947. Disponível em: <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-2011-05373-0>. Citado na página 14.

YAGI, A. **Abstract Parabolic Evolution Equations and their Applications**. [S.l.: s.n.], 2009. ISBN 9783642046315. Citado na página 39.

YANG, Z.; LI, Y. Criteria on the existence and stability of pullback exponential attractors and their application to non-autonomous Kirchhoff wave models. **Discrete Contin. Dyn. Syst.**, v. 38, n. 5, p. 2629–2653, 2018. ISSN 1078-0947. Disponível em: <https://doi.org/10.3934/dcds.2018111>. Citado nas páginas 17 e 31.

ZHU, W. Nonlinear waves in elastic rods. **Acta Solid Mechanica Sinica**, v. 1, n. 2, p. 247–253, 1980. Citado na página 14.

ICMC USP
SÃO CARLOS