UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Existência de ações livres e o anel de cohomologia de espaços de órbitas para variedades de Dold

Ana Maria Mathias Morita

Tese de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPG-Mat)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

Ana Maria Mathias Morita

Existência de ações livres e o anel de cohomologia de espaços de órbitas para variedades de Dold

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutora em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Denise de Mattos

USP – São Carlos
Abril de 2018

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

M862e

Mathias Morita, Ana Maria
Existência de ações livres e o anel de cohomologia de espaços de órbitas para variedades de Dold / Ana Maria Mathias Morita; orientadora Denise de Mattos. -- São Carlos, 2018.
117 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2018.

1. Ação livre. 2. Espaço de órbitas. 3. Sequência espectral. 4. Variedade de Dold. I. de Mattos, Denise, orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Ana Maria Mathias Morita

Existence of free actions and the cohomology ring of orbit spaces for Dold manifolds

Doctoral dissertation submitted to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Doctorate Program in Mathematics. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Profa. Dra. Denise de Mattos

USP – São Carlos
April 2018

Este trabalho é dedicado à minha mãe, minha maior inspiração,
responsável por tudo o que tenho e por quem eu sou.

AGRADECIMENTOS

Ao relembrar todos os momentos que marcaram minha caminhada até o presente momento, prevalece o sentimento de gratidão.

Quando reflito sobre minha vida, enxergo como sou abençoada e por isso agradeço primeiramente à Deus, por me dar a vida, me guiar nas escolhas corretas e colocar em meu caminho pessoas muito especiais, que ajudaram a tornar esse sonho possível.

À minha amada mãe, Dalva, símbolo de força e ternura, que me permitiu sonhar, me ensinou a lutar e com seu amor incondicional representa o alicerce de minha vida. À minha irmã Mariana, minha melhor amiga e cúmplice em todos os momentos. Obrigada, mana, por todo amor, cuidado, companheirismo e principalmente por depositar em mim tamanha fé.

Ao meu noivo, Ricardo, pelo carinho, apoio e principalmente pela compreensão nos inúmeros momentos em que estive ausente.

À minha orientadora, Denise, pelos valiosos ensinamentos, pela confiança, otimismo e acima de tudo, pela acolhida carinhosa. Não poderia deixar de agradecer ao Edivaldo, pela presença constante e por compartilhar generosamente seus conhecimentos.

Ao professor Pedro Pergher, pela valiosa colaboração neste trabalho.

À minha orientadora de mestrado, Maria Gorete, que me guiou nos primeiros passos da vida acadêmica e sempre acreditou em mim, mesmo quando eu perdia a fé.

Aos meus amigos Pedro (Bolota), Amanda, Matheus, (Zé)Wilker, Fernando, Paty, Carol e Angelito, a família que São Carlos me deu, por todos os momentos que passamos juntos. Em especial, à irmã que meu coração escolheu, Rafaella, pela doçura com que cuida de mim.

Aos professores e funcionários do ICMC, pela competência.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

"Por vezes sentimos que aquilo que fazemos
não é senão uma gota de água no mar.
Mas o mar seria menor se lhe faltasse uma gota."
(Madre Teresa de Calcutá)

RESUMO

MORITA, A. M. M. **Existência de ações livres e o anel de cohomologia de espaços de órbitas para variedades de Dold**. 2018. 117 p. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2018.

Sejam G um grupo topológico e X um espaço topológico. Existe uma questão natural associada ao par (G,X) sobre a existência de ações livres e contínuas de G em X. Se tal ação existe, outra questão natural é o estudo de propriedades do espaço de órbitas X/G e, nesse contexto, temos o problema usualmente difícil de se calcular o anel de cohomologia de X/G. Este trabalho é dedicado a essas questões quando X são variedades de Dold $P(m,n)$ especiais e $G = \mathbb{Z}_2$. A variedade fechada e suave $P(m,n)$, de dimensão $m+2n$, é o espaço de órbitas da involução livre

$$T : \mathbb{S}^m \times \mathbb{C}P^n \to \mathbb{S}^m \times \mathbb{C}P^n$$
$$(x,[z]) \mapsto (-x,[\bar{z}])$$

e foi introduzida por Albrecht Dold em 1956, sendo bastante estudada na literatura e desempenhando papel fundamental na teoria de cobordismo. A principal ferramenta utilizada nesse estudo foi a sequência espectral de Leray-Serre associada à fibração de Borel

$$X \hookrightarrow X_G \longrightarrow B_G,$$

onde $X_G = (X \times EG)/G$ é a construção de Borel associada ao G-fibrado universal $E_G \longrightarrow B_G$.

Palavras-chave: ação livre, espaço de órbitas, sequência espectral, variedade de Dold.

ABSTRACT

MORITA, A. M. M. **Existence of free actions and the cohomology ring of orbit spaces for Dold manifolds**. 2018. 117 p. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2018.

Let G be a topological group and X be a topological space. There is a natural question associated with the pair (G,X) about the existence of a continuous free action of G on X. If such an action exists, other natural question is the study of properties of the orbit space X/G and, in this setting, the study of the cohomology ring of X/G. This thesis is devoted to these questions when X are special Dold manifolds $P(m,n)$ and $G = \mathbb{Z}_2$. The closed smooth $(m+2n)$-dimensional manifold, $P(m,n)$, is the orbit space of the free involution

$$T : \mathbb{S}^m \times \mathbb{C}P^n \to \mathbb{S}^m \times \mathbb{C}P^n$$
$$(x,[z]) \mapsto (-x,[\bar{z}])$$

and was introduced by Albrecht Dold in 1956, being well studied in literature and playing a fundamental role in cobordism theory. The main tool used in this study was the Leray-Serre spectral sequence associated with the Borel fibration

$$X \hookrightarrow X_G \longrightarrow B_G,$$

where $X_G = (X \times EG)/G$ is the Borel construction associated with the universal G-bundle $E_G \longrightarrow B_G$.

Keywords: free action, orbit space, spectral sequence, Dold manifold.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Sejam G um grupo topológico e X um espaço topológico. Existe uma questão natural relacionada ao par (G,X), a qual se refere à possibilidade da existência de ações contínuas e livres de G em X. Na literatura, existe uma gama considerável de trabalhos dessa natureza e destacamos a seguinte consequência dos resultados de J. Milnor em (MILNOR, 1957): o grupo de permutações a 3 elementos, S_3, não atua livremente nas esferas.

No caso de G atuar livremente sobre X, uma outra questão natural é o estudo das propriedades do espaço de órbitas X/G e, neste contexto, temos em particular a questão relevante e usualmente difícil de se calcular o anel de cohomologia de X/G, o qual é uma ferramenta muito útil. Por exemplo, as conhecidas estruturas dos anéis de cohomologia dos espaços projetivos real, complexo e quaterniônico, $\mathbb{R}P^n$, $\mathbb{C}P^n$ e $\mathbb{K}P^n$, são essenciais na resposta de muitas questões interessantes envolvendo variedades. Neste caso, tais espaços são espaços de órbitas de certas ações padrões de $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{S}^1$ e $\mathbb{S}^3$ nas esferas n-dimensional, $(2n+1)$-dimensional e $(4n+3)$-dimensional, respectivamente.

L. W. Cusick mostrou que o único grupo finito que pode agir livremente sobre $\mathbb{C}P^n$ é $\mathbb{Z}_2$ e n deve ser ímpar (CUSICK, 1989). Posteriormente, H. K. Singh e T. B. Singh calcularam o anel de cohomologia $H^*(\mathbb{C}P^n/\mathbb{Z}_2;\mathbb{Z}_2)$ (SINGH; SINGH, 2008). Em (DOTZEL; SINGH; TRIPATHI, 2000), os autores determinaram todas as possibilidades para o anel de cohomologia $H^*(X/\mathbb{Z}_p;\mathbb{Z}_p)$, com p um número primo e $\mathbb{Z}_p$ agindo livremente sobre o espaço finitístico $X \sim_p \mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^n$ (X tem a mesma cohomologia módulo p que o produto de esferas $\mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^n$). Mais tarde, D. Davis estudou o caso $X = \mathbb{S}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{S}^{n_r}$, munido da involução antipodal diagonal, sem restrição sobre r (DAVIS, 2010), onde $\mathbb{S}^{n_i}$ denota a esfera n_i-dimensional.

Tais questões também foram consideradas para $G = \mathbb{Z}_2$, $G = \mathbb{S}^1$ e X um espaço do tipo (a,b). Esses espaços foram inicialmente estudados por I. James (JAMES, 1957) e H. Toda (TODA, 1963) e correspondem aos CW-complexos finitos simplesmente conexos que satisfazem as seguintes condições: $H^j(X;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, se $j = 0,n,2n,3n$ $(n > 1)$, e $H^j(X;\mathbb{Z}) = \{0\}$, caso contrário. Ainda, se u_i gera $H^{in}(X;\mathbb{Z})$, para $i = 0,1,2,3$, então $u_1^2 = au_2$ e $u_1u_2 = bu_3$. Por exemplo, $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^6$ é do tipo $(0,1)$.

Em (PERGHER; SINGH; SINGH, 2010), foi mostrado que $\mathbb{Z}_2$ não pode atuar livremente em um espaço do tipo (a,b) se a é ímpar e b é par, assim como $\mathbb{S}^1$ também não o pode fazer se a é não nulo. Além disso, são computadas as possíveis estruturas para os anéis de $\mathbb{Z}_2$-cohomologia dos espaços de órbitas de ações de $\mathbb{Z}_2$ sobre espaços do tipo (a,b), com a e b ambos pares, e de ações de $\mathbb{S}^1$ em espaços do tipo $(0,b)$.

Contribuindo nessa linha de pesquisa, esta tese trata o problema quando $G = \mathbb{Z}_2$ e X é uma variedade de Dold. Tal variedade fechada e suave, denotada por $P(m,n)$, é o espaço de órbitas da involução livre $T : \mathbb{S}^m \times \mathbb{C}P^n \longrightarrow \mathbb{S}^m \times \mathbb{C}P^n$, dada por $T(x,[z]) = (-x,[\bar{z}])$. Esta variedade foi introduzida por A. Dold (DOLD, 1956) e já foi bastante estudada na literatura, desempenhando papel fundamental na teoria de cobordismo. Baseado em (BREDON, 1972) e (MCCLEARY, 2001), utilizamos a sequência espectral de Leray-Serre associada à fibração de Borel como principal ferramenta para a abordagem do problema.

No Capítulo 1 descrevemos resumidamente os conceitos e resultados necessários para a compreensão e aplicação das técnicas empregadas neste trabalho. Em termos gerais, se G for um grupo de Lie compacto atuando em um espaço de Hausdorff paracompacto X, então é possível associar a tal ação a fibração de Borel, $X \hookrightarrow X_G \to B_G$, com fibra X e base B_G, o espaço classificante de G (BOREL, 1960). Associada a tal fibração, temos a conhecida sequência espectral de Leray-Serre que converge para a cohomologia de X_G. Quando a ação é livre, X_G tem o mesmo tipo de homotopia do espaço de órbitas X/G. Além disso, se $\pi_1(B_G)$ age trivialmente na cohomologia de X, o termo E_2 da sequência assume uma forma simples, descrita em termos das cohomologias de X e B_G. Assim, se G age livremente sobre X, se o grupo fundamental de B_G age trivialmente na cohomologia de X e se as cohomologias de X e B_G são conhecidas, temos uma situação adequada no que se refere a estudar a possível cohomologia de X/G usando tal sequência.

No Capítulo 2 temos algumas informações adicionais sobre a variedade $P(m,n)$, como a estrutura do seu anel de cohomologia e a garantia da existência da ação livre de $\mathbb{Z}_2$ quando n é ímpar. Portanto, segundo o procedimento descrito no parágrafo anterior, faz sentido estudar o espaço de órbitas $P(m,n)/\mathbb{Z}_2$, quando n é ímpar. Ainda assim, é preciso assegurar que $\pi_1(B_{\mathbb{Z}_2}) = \mathbb{Z}_2$ age trivialmente sobre a cohomologia de $P(m,n)$, o que, em geral, não é uma tarefa fácil.

Para $m = 1$, temos $H^q(P(1,n);\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$, se $q = 0,1,\ldots,2n+1$, e $H^q(P(1,n);\mathbb{Z}_2) = \{0\}$, caso contrário. Logo, a condição de $\mathbb{Z}_2$ agir trivialmente sobre a cohomologia de $P(1,n)$ é automaticamente satisfeita. Enunciamos no Capítulo 2 e demonstramos no Capítulo 3 o resultado a seguir, o qual está contido no artigo *The cohomology ring of orbit spaces of free $\mathbb{Z}_2$-actions on some Dold manifolds* (MORITA; MATTOS; PERGHER, 2018),

Teorema 2.2: Seja n um número natural ímpar e suponhamos que $\mathbb{Z}_2$ age livremente sobre a variedade de Dold $P(1,n)$. Então, $H^*(P(1,n)/\mathbb{Z}_2;\mathbb{Z}_2)$ é isomorfo a uma das seguintes álgebras graduadas:

(i) $\mathbb{Z}_2[x,y,z]/\langle x^3, y^2+ax^2+bxy, z^{\frac{n+1}{2}}\rangle$, com $(a,b) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, $\deg(x) = \deg(y) = 1$ e $\deg(z) = 4$.

(ii) $\mathbb{Z}_2[x,z]/\langle x^2, z^{n+1}\rangle$, com $\deg(x) = 1$ e $\deg(z) = 2$.

(iii) $\mathbb{Z}_2[x,y,z]/\langle x^4, x^2y, y^2+ax^2+bxy, z^{\frac{n+1}{2}}\rangle$, com $(a,b) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, $\deg(x) = \deg(y) = 1$ e $\deg(z) = 4$.

(iv) $\mathbb{Z}_2[x,y,z,w,v]/\phi(x,y,z,w,v)$, onde

$$\begin{aligned} \phi(x,y,z,w,v) &= \langle x^5,\ y^2+a_1x^2+b_1xy,\ x^2y+a_2x^3+b_2z,\ yz+a_3x^4+b_3xz,\ x^2w,\ v^{\frac{n+1}{4}}, \\ &\quad z^2+a_4x^3z+b_4xw,\ yw+a_5x^3z+b_5xw,\ w^2+a_6x^2v+b_6xyv,\ zw\rangle, \end{aligned}$$

com $(a_k,b_k)\in\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$, para todo $k=1,\ldots,6$, $\deg(x)=\deg(y)=1$, $\deg(z)=3$, $\deg(w)=5$, $\deg(v)=8$ e, necessariamente, $n\equiv 3\ (mod\ 4)$.

Para $m>1$, não é imediato que $\mathbb{Z}_2$ age trivialmente sobre $H^2(P(m,n);\mathbb{Z}_2)\cong\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$, mas utilizando um importante teorema sobre involuções provado por G. E. Bredon (BREDON, 1972, Teorema 7.4) conseguimos provar que isso ocorre quando $m=2n$ (vide Corolário 2.5). Dessa forma, obtemos o seguinte teorema, enunciado no Capítulo 2 e provado no Capítulo 4.

Teorema 2.6: Seja n um número natural ímpar e suponhamos que $\mathbb{Z}_2$ age livremente sobre a variedade de Dold $P(2n,n)$. Existem $2^{\frac{n-1}{2}}+\phi$ possibilidades para $H^*(P(2n,n)/\mathbb{Z}_2;\mathbb{Z}_2)$, onde $\phi=1$, se $n\equiv 1$ (mod 4), ou $\phi=2$, se $n\equiv 3$ (mod 4). Dentre os casos possíveis, temos

(i) $\mathbb{Z}_2[x,y,z]/\langle R_1,\ R_2,\ R_3\rangle$, onde

$$\begin{aligned} R_1 &= x^3, \\ R_2 &= y^{2n+1}+\beta_0xy^{2n}+\gamma_0x^2y^{2n-1}+\sum_{1\le j\le\frac{n-1}{2}}(\alpha_jy^{2n+1-4j}z^j+\beta_jxy^{2n-4j}z^j+\gamma_jx^2y^{2n-1-4j}z^j), \\ R_3 &= z^{\frac{n+1}{2}}+\zeta_0x^2y^{2n}+\sum_{1\le j\le\frac{n-1}{2}}(\delta_jy^{2n+2-4j}z^j+\varepsilon_jxy^{2n+1-4j}z^j+\zeta_jx^2y^{2n-4j}z^j), \end{aligned}$$

com $\deg(x)=\deg(y)=1$, $\deg(z)=4$ e $\alpha_j,\beta_j,\gamma_j,\delta_j,\varepsilon_j,\zeta_j\in\mathbb{Z}_2$, para todo j.

(ii) $\mathbb{Z}_2[x,y,z,w,v]/\langle R_1,R_2,R_3,R_4,R_5,R_6,R_7,R_8,R_9\rangle$, onde

$$\begin{aligned} R_1 &= x^5, \\ R_2 &= x^2y+\alpha_1y^3+\alpha_2xy^2+\alpha_3x^3, \\ R_3 &= x^2z+\beta_1y^7+\beta_2y^2z+\beta_3xy^6+\beta_4xyz, \\ R_4 &= z^2+y^2w+\gamma_1y^{10}+\gamma_2y^5z+\gamma_3y^2w+\gamma_4xy^9+\gamma_5xy^4z+\gamma_6xyw+\gamma_7x^2w, \\ R_5 &= y^{2n+1}+\delta_{10}y^{2n-4}z+\varepsilon_{00}xy^{2n}+\varepsilon_{10}xy^{2n-5}z+ \\ &\quad+\sum_{\substack{0\le s\le 1\\ 1\le j\le\frac{n-3}{4}}}\left(\delta_{sj}y^{2n+1-(5s+8j)}z^sw^j+\varepsilon_{sj}xy^{2n-(5s+8j)}z^sw^j\right), \\ R_6 &= v^2, \\ R_7 &= w^{\frac{n+1}{4}}+\zeta_1v+\eta_{10}y^{2n-3}z+\theta_{10}xy^{2n-4}z+ \\ &\quad+\sum_{\substack{0\le s\le 1\\ 1\le j\le\frac{n-3}{4}}}\left(\eta_{sj}y^{2n+2-(5s+8j)}z^sw^j+\theta_{sj}xy^{2n+1-(5s+8j)}z^sw^j\right), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
R_8 &= yv+\zeta_2 xv+\lambda_{10}y^{2n-2}z+\mu_{10}xy^{2n-3}z+\\
&\quad+\sum_{\substack{0\le s\le 1\\ 1\le j\le \frac{n-3}{4}}}\left(\lambda_{sj}y^{2n+3-(5s+8j)}z^s w^j+\mu_{sj}xy^{2n+2-(5s+8j)}z^s w^j\right),\\
R_9 &= \begin{cases} zv+\displaystyle\sum_{\substack{0\le s\le 1\\ 1\le j\le \frac{n-3}{4}}}\left(\sigma_{sj}y^{2n+7-(5s+8j)}z^s w^j+\tau_{sj}xy^{2n+6-(5s+8j)}z^s w^j\right), & n>3,\\ \\ zv, & n=3,\end{cases}
\end{aligned}
$$

com $\deg(x)=\deg(y)=1$, $\deg(z)=5$, $\deg(w)=8$, $\deg(v)=2n+2$,

$$\alpha_i,\beta_i,\gamma_i,\delta_{sj},\varepsilon_{sj},\zeta_i,\eta_{sj},\theta_{sj},\lambda_{sj},\mu_{sj},\sigma_{sj},\tau_{sj}\in\mathbb{Z}_2,\ \text{ para todo } \ i,j,s,$$

e, necessariamente, $n\equiv 3\ (mod\ 4)$.

Vale ressaltar aqui uma dificuldade adicional para os cálculos dos anéis de cohomologia dos espaços de órbitas apresentados nos Teoremas 2.2 e 2.6 desta tese, em relação aos resultados existentes na literatura. Embora a técnica utilizada seja a mesma (sequência espectral de Leray-Serre), a complexidade adicional é que as variedades de Dold $P(m,n)$ possuem cohomologia não nula em todos os níveis i, tais que $0\le i\le m+2n$, e distinta de $\mathbb{Z}_2$ em muitos níveis (por exemplo, $H^2(P(2n,n))\cong\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$), diferentemente do que ocorre com os resultados conhecidos na literatura, nos quais os espaços em questão possuem cohomologia não nula nos níveis de sua dimensão e em apenas alguns níveis intermediários. Para exemplificar, citamos os casos em que os espaços são espaços projetivos (SINGH; SINGH, 2008), produtos de esferas (DOTZEL; SINGH; TRIPATHI, 2000) e espaços do tipo (a,b) (PERGHER; SINGH; SINGH, 2010).

Tal distinção faz com que a verificação da hipótese de que $\mathbb{Z}_2$ atua trivialmente sobre a cohomologia de $P(2n,n)$ seja mais sofisticada. Além disso, para ambos os casos $P(1,n)$ e $P(2n,n)$, todas as linhas do E_2-termo da sequência espectral de Leray-Serre são não triviais até o nível $m+2n$, onde $m=1$ ou $m=2n$, tornando os cálculos bem mais complexos.

CAPÍTULO

1

PRELIMINARES

Neste capítulo, descrevemos a principal ferramenta utilizada no cálculo do anel de cohomologia dos espaços considerados neste trabalho: a sequência espectral de Leray-Serre. Tal sequência é um objeto algébrico definido para fibrações $F \hookrightarrow X \to B$, que relaciona as cohomologias de F, X e B.

1.1 Fibrações

Definição 1.1. Uma aplicação $p : E \to B$ tem a propriedade de levantamento de homotopia (PLH) com respeito ao espaço X se, dadas uma homotopia $H : X \times I \to B$ e uma aplicação $g : X \to E$ tais que $p \circ g(x) = H \circ i(x)$, onde $i(x) = (x,0)$, existir uma homotopia $\widetilde{H} : X \times I \to E$ que comuta o diagrama abaixo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{H}"] & B. \end{tikzcd}$$

Ou seja, $p \circ \widetilde{H} = H$ e $\widetilde{H} \circ i = g$.

Definição 1.2. Uma aplicação que possui a PLH com respeito a todos os espaços é chamada de fibração de Hurewicz ou simplesmente de fibração.

Exemplo 1.3. A projeção no primeiro fator $\pi_1 : B \times F \longrightarrow B$ é uma fibração. De fato, dado um espaço X, sejam $g(x) = (g_1(x), g_2(x))$ e uma homotopia $H : X \times I \longrightarrow B$ tais que $\pi_1 \circ g = H \circ i$. Esta condição implica $g_1(x) = H(x,0)$ e basta definirmos $\widetilde{H}(x,t) = (H(x,t), g_2(x))$.

Se $p : E \to B$ é uma fibração, então nos referimos ao espaço B como espaço base e ao espaço E como espaço total da fibração. Se $b \in B$, então $F_b = p^{-1}(b)$ é chamado de fibra de p sobre b. Embora F_b possa variar para diferentes escolhas de b, a PLH restringe o tipo de homotopia de F_b, como veremos a seguir.

Seja

$$B^I = \{\alpha : I \to B \mid \alpha \text{ é contínua}\}$$

o espaço de caminhos em B munido com a topologia compacto-aberto. A função avaliação $a_0 : B^I \to B$, dada por $a_0(\alpha) = \alpha(0)$, é contínua (DIECK, 2008, p. 37). Denotemos por

$$U_p = \{(\alpha, e) \in B^I \times E \mid \alpha(0) = p(e)\}$$

o pullback de $p : E \to B$ sobre a_0:

$$\begin{tikzcd} U_p \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & E \arrow[d, "p"] \\ B^I \arrow[r, "a_0"'] & B. \end{tikzcd}$$

A homotopia $H : U_p \times I \to B$, dada por $H((\alpha, e), t) = \alpha(t)$, induz o problema de levantamento de homotopia:

$$\begin{tikzcd} U_p \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\ U_p \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dashed] & B. \end{tikzcd}$$

Quando $p : E \to B$ é uma fibração, obtemos uma solução $\widetilde{H} : U_p \times I \to E$, ou seja, $p \circ \widetilde{H} = H$ e $\widetilde{H} \circ i = \pi_2$.

Seja $\Lambda : U_p \to E^I$ a função adjunta de $\widetilde{H}$, dada por $\Lambda(\alpha, e)(t) = \widetilde{H}((\alpha, e), t)$. Esta função é contínua (DIECK, 2008, p. 38) e satisfaz

$$p \circ \Lambda(\alpha, e) = \alpha \;\text{ e }\; \Lambda(\alpha, e)(0) = e.$$

Λ é chamada uma função de levantamento para p .

Suponhamos que $\lambda : I \to B$ seja um caminho com $\lambda(0) = b_0$ e $\lambda(1) = b_1$. Consideremos a composição

$$\begin{array}{rccccccc} \Phi_\lambda : & F_{b_0} & \longrightarrow & U_p & \xrightarrow{\Lambda} & E^I & \xrightarrow{a_1} & E \\ & x & \longmapsto & (\lambda, x) & \longmapsto & \Lambda(\lambda, x) & \longmapsto & \Lambda(\lambda, x)(1). \end{array}$$

Uma vez que $p \circ \Lambda(\lambda, x) = \lambda$, então $\Lambda(\lambda, x)(1) \in F_{b_1}$. Logo, Φ_λ determina uma função contínua $F_{b_0} \to F_{b_1}$.

Proposição 1.4. (MCCLEARY, 2001, p. 110) *Se $p : E \to B$ é uma fibração, com B conexo por caminhos, então a função $\Phi_\lambda : F_{b_0} \to F_{b_1}$ definida anteriormente é uma equivalência de homotopia, para quaisquer $b_0, b_1 \in B$.*

Com a Proposição 1.4, podemos falar da fibra F de uma fibração sobre um espaço base conexo por caminhos como um representante do tipo de homotopia de qualquer fibra F_b.

A função de levantamento fornece uma estrutura adicional. Sejam $b \in B$ e $F = F_b$. Denote por $\Omega B = \Omega(B,b)$ o conjunto dos laços em B baseados em b. Então $\Omega B \times F \subset U_p$ e a composição

$$\begin{array}{ccccc} \Omega B \times F & \xrightarrow{\Lambda} & E^I & \xrightarrow{a_1} & E \\ (\lambda,x) & \longmapsto & \Lambda(\lambda,x) & \longmapsto & \Lambda(\lambda,x)(1) \end{array}$$

tem sua imagem em F. Dessa forma, temos uma ação

$$\mu = a_1 \circ \Lambda : \Omega B \times F \to F.$$

Proposição 1.5. (MCCLEARY, 2001, p. 111) *Dada a ação $\mu : \Omega B \times F \to F$ e um laço $\lambda \in \Omega B$, considere a função $h_\lambda = \mu(\lambda^{-1}, -) : F \to F$, onde $\lambda^{-1}(t) = \lambda(1-t)$. Então*

1. *Se λ é homotópico a α, então h_λ é homotópica a h_α.*
2. *Se λ é homotópico ao caminho constante, então h_λ é homotópica a id_F.*
3. *$h_{\lambda * \alpha}$ é homotópica a $h_\lambda \circ h_\alpha$.*

Corolário 1.6. (MCCLEARY, 2001, p. 111) *Seja G um grupo abeliano. Se $p : E \to B$ é uma fibração, com B conexo por caminhos, então existe uma ação do grupo fundamental $\pi_1(B,b)$ sobre $H_*(F;G)$ e $H^*(F;G)$, induzida por $[\lambda] \mapsto (h_\lambda)_*$ e $[\lambda] \mapsto (h_\lambda)^*$.*

Agora, descrevemos resumidamente a construção de Borel sobre os espaços classificantes de um grupo de Lie compacto. Para maiores detalhes ver (BOREL, 1960).

Em (MILNOR, 1956), o autor mostrou que dado qualquer grupo topológico G, existe um G-fibrado universal $\omega_G = (E_G, B_G, p_G, G)$, onde

$$E_G = G \star G \star G \star \cdots$$

é o *join* de uma quantidade infinita e enumerável de cópias de G, $B_G = E_G/G$ é o espaço de órbitas e $p_G : E_G \longrightarrow B_G$ é a aplicação quociente.

Seja X um G-espaço. Uma vez que E_G é um G-espaço livre, a ação diagonal de G sobre $X \times E_G$,

$$(x,e) \cdot g = (x \cdot g, e \cdot g),$$

também é livre. Denotamos por X_G o espaço de órbitas $(X \times E_G)/G$ e por π_G a aplicação quociente $X \times E_G \longrightarrow X_G$.

Já que a projeção no segundo fator

$$\pi_2 : X \times E_G \longrightarrow E_G$$

é uma função G-equivariante, ela induz uma aplicação contínua nos espaços de órbitas

$$\pi : X_G \longrightarrow B_G.$$

Se G é um grupo de Lie compacto e X é um G-espaço de Hausdorff paracompacto, então a aplicação $\pi : X_G \longrightarrow B_G$ é uma fibração com fibra X e espaço base B_G, chamada fibração de Borel associada ao G-espaço X.

Observação 1.7. Se G age livremente sobre X, então a aplicação

$$X_G \longrightarrow X/G,$$

induzida pela projeção no primeiro fator $X \times E_G \longrightarrow X$, é uma fibração com fibra contrátil E_G e portanto, uma equivalência de homotopia (mais detalhes em (BARTSCH, 1993, p. 56)).

Proposição 1.8. (BREDON, 1972, p. 374) *Se $G = \mathbb{Z}_2$ age livremente sobre um espaço finitístico*[1] *X, com $H^j(X;\mathbb{Z}_2) = \{0\}$, para $j > N$, então $H^j(X_G;\mathbb{Z}_2) = \{0\}$, para $j > N$.*

1.2 (Co)homologia com coeficientes locais em um fibrado de grupos

Dado um espaço topológico B, denotemos por $\Omega(B,a,b)$ o conjunto dos caminhos em B unindo a e b, ou seja,

$$\Omega(B,a,b) = \{\lambda : I \to B \mid \lambda \text{ é contínua, } \lambda(0) = a \text{ e } \lambda(1) = b\}.$$

Definição 1.9. Um fibrado de grupos sobre B, denotado por $\mathscr{G}$, é uma coleção de grupos $\{G_b \mid b \in B\}$, junto com uma coleção de homomorfismos $h[\lambda] : G_{b_1} \to G_{b_0}$, para cada elemento $\lambda \in \Omega(B,b_0,b_1)$. Esta coleção de homomorfismos deve satisfazer:

1. Se c_b denota o caminho constante em $\Omega(B,b)$, então $h[c_b] = \mathrm{id} : G_b \to G_b$.
2. Se λ e λ' satisfazem $\lambda(0) = \lambda'(0)$, $\lambda(1) = \lambda'(1)$ e λ é homotópico a λ', então $h[\lambda] = h[\lambda']$.
3. Se $\lambda \in \Omega(B,b_0,b_1)$, $\alpha \in \Omega(B,b_1,b_2)$ e $\lambda * \alpha$ é o caminho produto de λ e α, então $h[\lambda * \alpha] = h[\lambda] \circ h[\alpha] : G_{b_2} \to G_{b_0}$.

O fibrado $\mathscr{G}$ também é conhecido como um sistema de coeficientes locais sobre B.

Observação 1.10. As condições 1, 2 e 3 da Definição 1.9 implicam que cada $h[\lambda]$ é um isomorfismo. De fato, se $\lambda^{-1}(t) = \lambda(1-t)$, então $\lambda * \lambda^{-1} \sim c_{b_0} \in \Omega(B,b_0)$ e assim

$$h[\lambda * \lambda^{-1}] = h[\lambda] \circ h[\lambda^{-1}] = \mathrm{id}.$$

Exemplo 1.11. Dado qualquer grupo G, existe o fibrado trivial de grupos sobre B, também denotado por G, com $G_b = G$, para todo $b \in B$, e $h[\lambda] = \mathrm{id}$, para todo $\lambda \in \Omega(B,b_0,b_1)$.

[1] Um espaço X é dito finitístico se toda cobertura aberta de X possui um refinamento aberto de ordem finita (BREDON, 1972).

Exemplo 1.12. Suponhamos que $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ seja uma fibração, com B conexo por caminhos. Dado um anel R, para cada natural $n \geq 0$ podemos construir um fibrado de R-módulos, $\mathscr{G} = \mathscr{H}^n(F;R)$, como segue: definimos $G_b = H^n(F_b;R)$, com $F_b = p^{-1}(b)$. Seja $\Lambda : U_p \to E^I$ uma função de levantamento para p. Dado um caminho $\lambda : I \to B$, com $\lambda(0) = b_0$ e $\lambda(1) = b_1$, consideremos a equivalência de homotopia descrita na Seção 1.1:

$$\begin{array}{rccc} \Phi_\lambda : & F_{b_0} & \to & F_{b_1} \\ & x & \mapsto & \Lambda(\lambda, x)(1). \end{array}$$

Definindo

$$h[\lambda] = (\Phi_\lambda)^* : H^n(F_{b_1};R) \to H^n(F_{b_0};R),$$

segue das propriedades da função de levantamento que $\mathscr{G} = \mathscr{H}^n(F;R)$, juntamente com a coleção de homomorfismos $h[\lambda]$, é um fibrado de R-módulos.

Observação 1.13. Pelos mesmos argumentos do Exemplo 1.12, concluímos que $\mathscr{G} = \mathscr{H}_n(F;R)$, juntamente com a coleção de homomorfismos

$$h[\lambda] = (\Phi_{\lambda^{-1}})_* : H_n(F_{b_1};R) \to H_n(F_{b_0};R),$$

também é um fibrado de R-módulos.

Definição 1.14. Um morfismo de fibrados de grupos, $\Theta : \mathscr{G}_1 \to \mathscr{G}_2$, é uma coleção de homomorfismos $\Theta_b : (G_1)_b \to (G_2)_b$, para cada $b \in B$, satisfazendo a propriedade que o diagrama

$$\begin{tikzcd} (G_1)_{b_1} \arrow[r, "h_1[\lambda]"] \arrow[d, "\Theta_{b_1}"'] & (G_1)_{b_0} \arrow[d, "\Theta_{b_0}"] \\ (G_2)_{b_1} \arrow[r, "h_2[\lambda]"'] & (G_2)_{b_0} \end{tikzcd}$$

comuta, para todo $\lambda \in \Omega(B, b_0, b_1)$. Um morfismo $\Theta : \mathscr{G}_1 \to \mathscr{G}_2$ é um isomorfismo se cada Θ_b for um isomofismo.

Definição 1.15. Um sistema de coeficientes locais, $\mathscr{G}$, é chamado simples se existe um fibrado trivial de grupos G e um isomorfismo $\Theta : \mathscr{G} \to G$.

Exemplo 1.16. Seja $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ uma fibração, com B conexo por caminhos. Se $\pi_1(B)$ age trivialmente sobre $H^*(F;R)$ (vide Corolário 1.6), então o sistema de coeficientes locais $\mathscr{H}^n(F;R)$ é simples, para cada $n \geq 0$.

De fato, mostraremos que existe um isomorfismo $\Theta : \mathscr{H}^n(F;R) \to H^n(F;R)$, com $H^n(F;R)$ o fibrado trivial sobre B. Se F é a fibra de p, então $F = F_b$, para algum $b \in B$ fixado. Sejam $b_0, b_1 \in B$ e $\lambda \in \Omega(B, b_0, b_1)$. Como B é conexo por caminhos, existem caminhos $\alpha \in \Omega(B, b, b_1)$ e $\beta \in \Omega(B, b, b_0)$. Consideremos os homomorfismos

$$\begin{array}{rccc} h[\alpha] : & H^n(F_{b_1};R) & \to & H^n(F_b;R), \\ h[\beta] : & H^n(F_{b_0};R) & \to & H^n(F_b;R), \\ h[\lambda] : & H^n(F_{b_1};R) & \to & H^n(F_{b_0};R), \end{array}$$

definidos no Exemplo 1.12, os quais são isomorfimos. Uma vez que o produto de caminhos $\gamma = \beta * \lambda * \alpha^{-1}$ é um laço em B baseado em b e $\pi_1(B,b)$ age trivilmente em $H^*(F;R)$, temos

$$\mathrm{id} = (h_\gamma)^* : H^n(F_b;R) \to H^n(F_b;R),$$

onde $h_\gamma(x) = \Lambda(\gamma^{-1},x)(1)$, para todo $x \in F_b$. Observemos que $(h_\gamma)^* = h[\gamma^{-1}]$.

Dado que $\gamma * \gamma^{-1} \sim c_b$, temos $h[\gamma] \circ h[\gamma^{-1}] = \mathrm{id}$. Assim, $h[\gamma] = \mathrm{id}$. Por outro lado, $h[\gamma] = h[\beta * \lambda * \alpha^{-1}] = h[\beta] \circ h[\lambda] \circ h[\alpha]^{-1}$. Portanto, obtemos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
H^n(B_{b_1};R) \arrow[r, "h[\lambda]"] \arrow[d, "\Theta_{b_1}=h[\alpha]"'] & H^n(B_{b_0};R) \arrow[d, "\Theta_{b_0}=h[\beta]"] \\
H^n(F_b;R) \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & H^n(F_b;R)
\end{tikzcd}$$

para todo $\lambda \in \Omega(B,b_0,b_1)$.

Fixemos um fibrado de grupos abelianos $\mathscr{G}$ sobre B. Sejam Δ_p o p-simplexo padrão em $\mathbb{R}^{p+1}$ e $S_p(B) = \{\sigma : \Delta_p \to B \mid \sigma \text{ é contínua}\}$ a coleção de todos os p-simplexos singulares de B. O conjunto de p-cadeias singulares com coeficientes no fibrado $\mathscr{G}$, denotado por $C_p(B;\mathscr{G})$, é composto pelas funções

$$f : S_p(B) \to \bigcup_{b\in B} G_b$$

que satisfazem as seguintes propriedades:

1. Para todo $\sigma \in S_p(B)$, $f(\sigma) \in G_{\sigma(v_0)}$, com $v_0 = (1,0,\ldots,0) \in \Delta_p$.
2. O conjunto de p-simplexos singulares σ tais que $f(\sigma) \neq 0$ é finito.

Uma p-cadeia típica de $C_p(B;\mathscr{G})$ pode ser escrita como uma soma formal finita

$$f = \sum g_i \cdot \sigma_i, \text{ com } g_i \in G_{\sigma_i(v_0)}.$$

Para definir o operador bordo em $C_p(B;\mathscr{G})$, observemos, primeiramente, que dado $\sigma \in S_p(B)$, temos

$$\partial_i\sigma(v_0) = \begin{cases} \sigma(v_0) & \text{se } i \neq 0, \\ \sigma(v_1) & \text{se } i = 0, \end{cases}$$

onde ∂_i é o operador face usual e $v_1 = (0,1,0,\ldots,0)$. Consideremos o caminho $\lambda_\sigma : I \to B$ definido por

$$\lambda_\sigma(t) = \sigma(tv_0 + (1-t)v_1),$$

que une $\sigma(v_1)$ a $\sigma(v_0)$. O operador bordo $\partial : C_p(B;\mathscr{G}) \to C_{p-1}(B;\mathscr{G})$ é definido sobre a base por

$$\partial(g\cdot\sigma) = h[\lambda_\sigma](g)\cdot\partial_0\sigma + \sum_{i=1}^{p}(-1)^p g\cdot\partial_i\sigma$$

e satisfaz $\partial \circ \partial = 0$.

Assim, o grupo graduado $C_*(B;\mathscr{G})$ é um complexo de cadeias e seus grupos de homologia

$$H_p(B;\mathscr{G}) = H_p(C_*(B;\mathscr{G}),\partial)$$

são chamados grupos de homologia de B com coeficientes no fibrado $\mathscr{G}$, também conhecidos como grupos de homologia com coeficientes locais em $\mathscr{G}$.

Similarmente, obtemos os grupos de cohomologia de B com coeficientes locais em $\mathscr{G}$. O conjunto de p-cocadeias singulares com coeficientes em $\mathscr{G}$ é definido por

$$C^p(B;\mathscr{G}) = \left\{ f : S_p(B) \to \bigcup_{b\in B} G_b \mid f(\sigma) \in G_{\sigma(v_0)} \right\}.$$

O operador cobordo $\delta : C^p(B;\mathscr{G}) \to C^{p+1}(B;\mathscr{G})$ é definido por

$$(-1)^p \delta f(\sigma) = h[\lambda_\sigma]^{-1} f(\partial_0\sigma) + \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^i f(\partial_i\sigma),$$

para cada $(p+1)$-simplexo singular $\sigma : \Delta_{p+1} \to B$. Então δ é um homomorfismo tal que $\delta \circ \delta$. Portanto, $C^*(B;\mathscr{G})$ é um complexo de cocadeias e definimos

$$H^p(B;\mathscr{G}) = H^p(C^*(B;\mathscr{G}),\delta).$$

Proposição 1.17. (MCCLEARY, 2001, p. 166) *Se o sistema de coeficientes locais sobre B, $\mathscr{G}$, é simples, então*

$$H_*(B;\mathscr{G}) \cong H_*(B;G) \ \ \textit{(respectivamente, } H^*(B;\mathscr{G}) \cong H^*(B;G)\textit{)},$$

com $G = G_b$, para qualquer $b \in B$.

Para mais detalhes sobre homologia e cohomologia com coeficientes locais, consultar (MCCLEARY, 2001, 5.3) e (WHITEHEAD, 1978, Capítulo VI, Seção 2).

1.3 Sequências Espectrais

1.3.1 Definições básicas

Definição 1.18. Um módulo bigraduado sobre um anel R é uma família de R-módulos indexada em $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$,

$$M = \{M^{p,q} \mid (p,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}.$$

Se $M = \{M^{p,q}\}$ e $N = \{N^{p,q}\}$ são módulos bigraduados e (a,b) é um par de inteiros fixado, então a família de R-homomorfismos,

$$f = \{f^{p,q} : M^{p,q} \longrightarrow N^{p+a,q+b}\},$$

é um R-homomorfismo de bigrau (a,b) e escrevemos $f : M \longrightarrow N$.

Definição 1.19. Um módulo bigraduado diferencial sobre um anel R é um módulo bigraduado sobre R, $E = \{E^{p,q}\}$, junto com um R-homomorfismo $d : E \longrightarrow E$, o diferencial, de bigrau $(s, 1-s)$ ou $(-s, s-1)$, para algum inteiro s, satisfazendo $d \circ d = 0$.

Observação 1.20. Com o diferencial, podemos tomar a homologia de um módulo bigraduado diferencial:

$$H^{p,q}(E,d) = \frac{ker(d^{p,q} : E^{p,q} \longrightarrow E^{p+a,q+b})}{im(d^{p-a,q-b} : E^{p-a,q-b} \longrightarrow E^{p,q})},$$

onde $(a,b) = (s, 1-s)$ ou $(a,b) = (-s, s-1)$, para algum inteiro s.

Definição 1.21. Uma sequência espectral é uma coleção de R-módulos bigraduados diferenciais $\{E_r, d_r\}$, onde $r = 1, 2, \ldots$, com $E^{p,q}_{r+1}$ isomorfo a $H^{p,q}(E_r, d_r)$.

- Se o diferencial d_r é de bigrau $(-r, r-1)$, para todo r, dizemos que a sequência é do tipo homológica.
- Se d_r é de bigrau $(r, 1-r)$, para todo r, dizemos que a sequência é de tipo cohomológica.
- Para todo r, se $E^{p,q}_r = \{0\}$ sempre que $p < 0$ ou $q < 0$, dizemos que a sequência é do primeiro quadrante.

Observação 1.22. Embora a sequência espectral seja indexada por $r = 1, 2, \ldots$, essa indexação pode começar em qualquer natural e, frequentemente, a sequência começa em $r = 2$, onde E_2 é algo calculável. Neste trabalho, a menos que especifiquemos o contrário, sempre que nos referirmos a uma sequência espectral significará de tipo cohomológica.

Consideremos a sequência espectral $\{E_r, d_r\}$, com $r \geq 2$. Denotemos

$$Z^{p,q}_2 = ker(d^{p,q}_2) \;\text{ e }\; B^{p,q}_2 = im(d^{p-2,q+1}_2).$$

A condição $d_2 \circ d_2 = 0$ implica $B^{p,q}_2 \subset Z^{p,q}_2 \subset E^{p,q}_2$ e, por definição,

$$E^{p,q}_3 \cong H^{p,q}(E_2, d_2) = \frac{Z^{p,q}_2}{B^{p,q}_2}.$$

Vamos escrever

$$\overline{Z}^{p,q}_3 = ker(d^{p,q}_3) \;\text{ e }\; \overline{B}^{p,q}_3 = im(d^{p-3,q+2}_3).$$

Visto que $\overline{Z}^{p,q}_3$ e $\overline{B}^{p,q}_3$ são submódulos de $E^{p,q}_3$, existem submódulos $Z^{p,q}_3$ e $B^{p,q}_3$ de $Z^{p,q}_2$, que contêm $B^{p,q}_2$ tais que

$$\overline{Z}^{p,q}_3 \cong \frac{Z^{p,q}_3}{B^{p,q}_2} \;\text{ e }\; \overline{B}^{p,q}_3 \cong \frac{B^{p,q}_3}{B^{p,q}_2}.$$

Assim,

$$E^{p,q}_4 \cong H^{p,q}(E_3, d_3) = \frac{\overline{Z}^{p,q}_3}{\overline{B}^{p,q}_3} \cong \frac{\dfrac{Z^{p,q}_3}{B^{pq}_2}}{\dfrac{B^{p,q}_3}{B^{p,q}_2}} \cong \frac{Z^{p,q}_3}{B^{p,q}_3},$$

e temos,

$$B_2^{p,q} \subset B_3^{p,q} \subset Z_3^{p,q} \subset Z_2^{p,q} \subset E_2^{p,q}.$$

Iterando esse processo, apresentamos a sequência espectral como uma cadeia de submódulos de $E_2^{p,q}$:

$$B_2^{p,q} \subset B_3^{p,q} \subset \cdots \subset B_n^{p,q} \subset \cdots \quad \cdots \subset Z_n^{p,q} \subset \cdots \subset Z_3^{p,q} \subset Z_2^{p,q} \subset E_2^{p,q},$$

com a propriedade que $E_{n+1}^{p,q} \cong \dfrac{Z_n^{p,q}}{B_n^{p,q}}$, para todo $n \geq 2$. Considere os seguintes submódulos de $E_2^{p,q}$:

$$Z_\infty^{p,q} = \bigcap_{n=2}^{\infty} Z_n^{p,q} \ \text{ e } \ B_\infty^{p,q} = \bigcup_{n=2}^{\infty} B_n^{p,q}.$$

Pela cadeia de submódulos concluímos que $B_\infty^{p,q} \subset Z_\infty^{p,q}$.

Definição 1.23. O módulo bigraduado,

$$E_\infty^{p,q} = \frac{Z_\infty^{p,q}}{B_\infty^{p,q}},$$

é chamado de termo limite da sequência espectral $\{E_r, d_r\}$. Um elemento em $Z_\infty^{p,q}$ é chamado de cociclo permanente (uma vez que pertence ao núcleo de todos os diferenciais).

Definição 1.24. Uma sequência espectral $\{E_r, d_r\}$ colapsa no N-ésimo termo se $d_r = 0$, para todo $r \geq N$.

Observação 1.25. Uma consequência imediata de colapsar no N-ésimo termo é que

$$E_N \cong E_{N+1} \cong \cdots \cong E_\infty.$$

Definição 1.26. Uma filtração F sobre um R-módulo A é uma família de submódulos,

$$\{F^pA \mid p \in \mathbb{Z}\},$$

tal que

$$\cdots \subset F^{p+1}A \subset F^pA \subset \cdots \subset A \ \text{ (filtração decrescente)}$$

ou

$$\cdots \subset F^{p-1}A \subset F^pA \subset \cdots \subset A \ \text{ (filtração crescente).}$$

Exemplo 1.27. O conjunto dos números inteiros, $\mathbb{Z}$, é um exemplo de $\mathbb{Z}$-módulo filtrado, com a filtração decrescente

$$F^p\mathbb{Z} = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } p \leq 0 \\ 2^p\mathbb{Z} & \text{se } p > 0 \end{cases}$$

$$\cdots \subset 4\mathbb{Z} \subset 2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} \subset \cdots \subset \mathbb{Z}.$$

Definição 1.28. Dada uma filtração F sobre um R-módulo A, o módulo associado a F, $E_0(A)$, é dado por:

$$E_0^p(A) = \begin{cases} \dfrac{F^pA}{F^{p+1}A}, & \text{quando } F \text{ é decrescente,} \\ \\ \dfrac{F^pA}{F^{p-1}A}, & \text{quando } F \text{ é crescente.} \end{cases}$$

Exemplo 1.29. No Exemplo 1.27, $E_0^p(\mathbb{Z}) = \{0\}$ se $p < 0$ e $E_0^p(\mathbb{Z}) \cong \dfrac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ se $p \geq 0$.

Definição 1.30. Se A é um R-módulo graduado e F é uma filtração sobre A, então $F^pA^n = F^pA \cap A^n$ e o módulo associado a F é bigraduado e definido por

$$E_0^{p,q}(A) = \begin{cases} \dfrac{F^pA^{p+q}}{F^{p+1}A^{p+q}}, & \text{quando } F \text{ é decrescente,} \\ \\ \dfrac{F^pA^{p+q}}{F^{p-1}A^{p+q}}, & \text{quando } F \text{ é crescente.} \end{cases}$$

Definição 1.31. Um R-módulo A é um módulo graduado diferencial se:

1. A é uma soma direta de submódulos,
$$A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A^n.$$

2. Existe um homomorfismo R-linear, $d : A \to A$, de grau 1 $(d : A^n \to A^{n+1})$ ou grau -1 $(d : A^n \to A^{n-1})$, satisfazendo $d \circ d = 0$.

Além disso, se A tem uma filtração F e d respeita a filtração, isto é, $d : F^pA \to F^pA$, então A é chamado módulo graduado diferencial filtrado.

Definição 1.32. Uma álgebra graduada A é chamada comutativa se

$$a \cdot b = (-1)^{pq} b \cdot a, \text{ para quaisquer } a \in A^p \text{ e } b \in A^q.$$

Definição 1.33. Uma álgebra graduada diferencial sobre R é um R-módulo graduado diferencial (A,d), junto com um morfismo de módulos graduados diferenciais, $\psi : A \otimes_R A \longrightarrow A$, chamado produto, tal que para todo p e q temos

$$\begin{array}{rccc} \psi : & A^p \otimes_R A^q & \longrightarrow & A^{p+q} \\ & a \otimes b & \longmapsto & \psi(a \otimes b) := a \cdot b. \end{array}$$

O morfismo ψ satisfaz o seguinte diagrama comutativo, que expressa a associatividade do produto em A:

$$\begin{tikzcd} A \otimes_R A \otimes_R A \arrow[r, "\psi \otimes id"] \arrow[d, "id \otimes \psi"'] & A \otimes_R A \arrow[d, "\psi"] \\ A \otimes_R A \arrow[r, "\psi"'] & A. \end{tikzcd}$$

Também, d satisfaz a regra de Leibniz:

$$d(a\cdot b) = d(a)\cdot b + (-1)^{\deg(a)} a\cdot d(b).$$

Definição 1.34. Uma álgebra bigraduada E é chamada comutativa se

$$e\cdot e' = (-1)^{(p+q)(r+s)} e'\cdot e, \text{ para quaisquer } e\in E^{p,q} \text{ e } e'\in E^{r,s}.$$

Definição 1.35. Uma álgebra bigraduada diferencial sobre R é um R-módulo bigraduado diferencial (E,d), junto com um morfismo, $\psi : E\otimes_R E \longrightarrow E$, chamado produto, tal que:

$$\begin{array}{rccc} \psi: & E^{p,q}\otimes_R E^{r,s} & \longrightarrow & E^{p+r,q+s} \\ & e\otimes e' & \longmapsto & \psi(e\otimes e') := e\cdot e'. \end{array}$$

O produto em E é associativo e d satisfaz a regra de Leibniz:

$$d(e\cdot e') = d(e)\cdot e' + (-1)^{p+q} e\cdot d(e'), \text{ onde } e\in E^{p,q} \text{ e } e'\in E^{r,s}.$$

Definição 1.36. Uma sequência espectral de álgebras sobre R é uma sequência espectral $\{E_r, d_r\}$, junto com estruturas de álgebra $\psi_r : E_r\otimes_R E_r \longrightarrow E_r$, para cada r, tal que ψ_{r+1} pode ser escrito como a composição

$$\psi_{r+1} : E_{r+1}\otimes_R E_{r+1} \xrightarrow{\cong} H(E_r)\otimes_R H(E_r) \xrightarrow{p} H(E_r\otimes_R E_r) \xrightarrow{H(\psi_r)} H(E_r) \xrightarrow{\cong} E_{r+1},$$

onde o homomorfismo p é dado por $p([u]\otimes[v]) = [u\otimes v]$.

Definição 1.37. Seja F uma filtração de H, uma álgebra graduada com produto ψ. Dizemos que a filtração é estável com relação ao produto se

$$\psi(F^r H\otimes_R F^s H) \subset F^{r+s} H.$$

Observação 1.38. Uma filtração F sobre H que é estável com relação ao produto induz uma estrutura de álgebra bigraduada sobre o módulo associado $E_0(H)$.

Definição 1.39. Dizemos que uma sequência espectral de álgebras $\{E_r, d_r\}$ converge para H, como uma álgebra graduada, se existe uma filtração estável sobre H tal que

$$E_\infty^{p,q} \cong E_0^{p,q}(H),$$

como álgebras bigraduadas.

Observação 1.40. Consideremos o funtor

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Tot}: & \textbf{AlgBigraduadas} & \longrightarrow & \textbf{AlgGraduadas} \\ & E & \longmapsto & \mathrm{Tot}(E) \end{array}$$

da categoria de álgebras bigraduadas com morfismos de bigrau $(0,0)$ na categoria de álgebras graduadas com morfismo de grau 0, dado por

$$\mathrm{Tot}(E)^n = \bigoplus_{n=p+q} E^{p,q},$$

e chamado complexo total. Então $\mathrm{Tot}(E_0(H)) \cong H$, (MCCLEARY, 2001, p. 24).

1.3.2 A sequência espectral de Leray-Serre

Teorema 1.41. (MCCLEARY, 2001, p. 135) *Seja R um anel comutativo com unidade. Se $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ é uma fibração, com B conexo por caminhos e F conexo, então existe uma sequência espectral de álgebras do primeiro quadrante, $\{E_r, d_r\}$, convergindo para $H^*(E;R)$ como uma álgebra, com*

$$E_2^{p,q} \cong H^p(B;\mathscr{H}^q(F;R)),$$

a cohomologia de B com coeficientes locais na cohomologia da fibra de π. Além disso,

$$u \cdot v = (-1)^{qr} u \smile v, \text{ onde } u \in E_2^{p,q} \text{ e } v \in E_2^{r,s}.$$

Observação 1.42. Se $\pi_1(B)$ age trivialmente sobre $H^*(F;R)$, segue do Exemplo 1.16 que o sistema de coeficientes locais é simples e o E_2-termo tem a forma mais simples

$$E_2^{p,q} \cong H^p(B;H^q(F;R)).$$

Proposição 1.43. (MCCLEARY, 2001, p. 140) *Quando restrita às subálgebras $E_2^{*,0}$ e $E_2^{0,*}$, a estrutura de produto na sequência espectral em $E_2^{*,*}$ coincide com a estrutura de produto cup em $H^*(B;R)$ e $H^*(F;R)$, respectivamente. Além disso, se $H^p(B;R)$ e $H^q(F;R)$ são R-módulos livres de tipo finito, para todo p e q, e o sistema de coeficientes locais sobre B é simples, então*

$$E_2^{*,*} \cong H^*(B;R) \otimes_R H^*(F;R)$$

como uma álgebra bigraduada.

Observação 1.44. Seja $r \geq 2$. Se $u \otimes v \in E_r^{p,q} = E_2^{p,q} \cong H^p(B;R) \otimes_R H^q(F;R)$, então:

$$\begin{aligned} u \otimes v &= (u \smile 1) \otimes (1 \smile v) \\ &= (u \otimes 1) \smile (1 \otimes v) \\ &= (u \otimes 1) \cdot (1 \otimes v) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} d_r^{p,q}(u \otimes v) &= d_r^{p,q}((u \otimes 1) \cdot (1 \otimes v)) \\ &= \underbrace{d_r^{p,0}(u \otimes 1)}_{0} \cdot (1 \otimes v) + (-1)^p (u \otimes 1) \cdot d_r^{0,q}(1 \otimes v) \\ &= (-1)^p (u \otimes 1) \cdot d_r^{0,q}(1 \otimes v). \end{aligned}$$

Consequentemente, se $d_r^{0,q} = 0$, então $d_r^{p,q} = 0$.

Observação 1.45. Nos capítulos seguintes, para simplificar a notação, indicaremos o produto cup $u \smile v$ simplesmente por uv.

Teorema 1.46. (MCCLEARY, 2001, p. 147) *Se $F \overset{i}{\hookrightarrow} E \xrightarrow{\pi} B$ é uma fibração, com B conexo por caminhos e F conexo, para qual o sistema de coeficientes locais sobre B é simples, então as composições*

$$H^p(B;R) \cong E_2^{p,0} \twoheadrightarrow E_3^{p,0} \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow E_{p+1}^{p,0} \cong E_\infty^{p,0} \hookrightarrow H^p(E;R)$$

e

$$H^q(E;R) \twoheadrightarrow E_\infty^{0,q} \cong E_{q+2}^{0,q} \hookrightarrow E_{q+1}^{0,q} \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow E_2^{0,q} \cong H^q(F;R)$$

são os homomorfismos

$$\pi^* : H^p(B;R) \longrightarrow H^p(E;R)$$

e

$$i^* : H^q(E;R) \longrightarrow H^q(F;R),$$

respectivamente.

Proposição 1.47. (BREDON, 1972, p. 374) *Se $G = \mathbb{Z}_2$ age sobre um espaço finitístico X e $\sum \mathrm{rk}\, H^j(X;\mathbb{Z}_2)$*[2] *$< \infty$, então as seguintes afirmações são equivalentes:*
(a) *G age trivialmente sobre $H^*(X;\mathbb{Z}_2)$ e a sequência espectral da fibração $X \overset{i}{\hookrightarrow} X_G \overset{\pi}{\longrightarrow} B_G$ colapsa no E_2-termo.*
(b) *$\sum \mathrm{rk}\, H^j(X;\mathbb{Z}_2) = \sum \mathrm{rk}\, H^j(X^G;\mathbb{Z}_2)$, onde X^G denota o conjunto de pontos fixos da ação de G em X.*

[2] $\mathrm{rk}\, H^j(X;\mathbb{Z}_2)$ denota a dimensão do espaço vetorial $H^j(X;\mathbb{Z}_2)$

CAPÍTULO

2

AS VARIEDADES DE DOLD $P(m,n)$

Em (DOLD, 1956), o autor definiu a variedade $P(m,n)$ a fim de exibir representantes para os geradores nas dimensões ímpares do anel de cobordismo não orientável. A variedade fechada e suave $P(m,n)$, de dimensão $m+2n$, é o espaço de órbitas da involução livre

$$\begin{aligned} T : \mathbb{S}^m \times \mathbb{C}P^n &\to \mathbb{S}^m \times \mathbb{C}P^n \\ (x,[z]) &\mapsto (-x,[\bar{z}]) \end{aligned} \qquad (\maltese)$$

A. Dold também descreveu a estrutura do anel de cohomologia $H^*(P(m,n);\mathbb{Z}_2)$, dada por

$$H^*(P(m,n);\mathbb{Z}_2) \cong \frac{\mathbb{Z}_2[c,d]}{\langle c^{m+1}, d^{n+1}\rangle},$$

onde c é o elemento não nulo de $H^1(P(m,n);\mathbb{Z}_2) = \langle c\rangle \cong \mathbb{Z}_2$ e d é um elemento não nulo de $H^2(P(m,n);\mathbb{Z}_2)$. Observemos que $H^2(P(1,n);\mathbb{Z}_2) = \langle d\rangle \cong \mathbb{Z}_2$, e para $m>1$, $H^2(P(m,n);\mathbb{Z}_2) = \langle c^2, d\rangle \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

S. S. Khare encontrou condições, em termos de m e n, sob as quais a variedade de Dold $P(m,n)$ borda, a saber:

Teorema 2.1. (KHARE, 1989) *Seja $P(m,n)$ uma variedade de Dold. Temos o seguinte:*

(a) *Se n é ímpar, então $P(m,n)$ borda, para todo natural m.*

(b) *Se m e n são ambos pares, então $P(m,n)$ não borda.*

(c) *Se m é ímpar e n é par, então $P(m,n)$ borda se, e somente se, $m>n$ e 2^a divide $m-(n+1)$, para algum a, com $2^a>n$.*

É conhecido da Teoria de Cobordismo Equivariante que as variedades suaves e fechadas que não bordam não admitem involuções livres de pontos fixos. Por outro lado, as que bordam podem ou não admitir tais involuções. Então, o objetivo é desvendar quais variedades de

Dold bordantes admitem involuções livres de pontos fixos e, nos casos afirmativos, calcular as estruturas dos anéis de cohomologia dos correspondentes espaços de órbitas.

Ainda em (KHARE, 1989), o autor exibiu uma involução livre de pontos fixos para as variedades $P(m,n)$, com n ímpar. Especificamente, a involução

$$\begin{array}{rccc} S: & \mathbb{S}^m \times \mathbb{C}P^n & \longrightarrow & \mathbb{S}^m \times \mathbb{C}P^n \\ & (x,[z]) & \longmapsto & (x,[-\bar{z}_1,\bar{z}_0,\ldots,-\bar{z}_n,\bar{z}_{n-1}]) \end{array}$$

induz uma involução livre de pontos fixos

$$\bar{S}: P(m,n) = \frac{\mathbb{S}^n \times \mathbb{C}P^n}{T} \longrightarrow P(m,n) = \frac{\mathbb{S}^n \times \mathbb{C}P^n}{T},$$

onde T é como em (✠), uma vez que S também é livre de pontos fixos e comuta com T, isto é, $S \circ T = T \circ S$. Notemos que a involução $\bar{S}$ define uma ação livre de $\mathbb{Z}_2$ em $P(m,n)$, pois podemos identificar o grupo $\{\mathrm{id}, \bar{S}\}$, com a operação de composição, com o grupo $\mathbb{Z}_2$.

Assim, a questão de determinar o anel de cohomologia do espaço de órbitas faz sentido quando n é ímpar. Nas Seções 2.1 e 2.2 apresentamos os teoremas para as variedades $P(1,n)$ e $P(2n,n)$, respectivamente, cujas demonstrações serão feitas nos Capítulos 3 e 4. Denotando por X a variedade $P(m,n)$, a principal ferramenta que será utilizada é a sequência espectral de Leray-Serre associada à fibração de Borel

$$X \hookrightarrow X_{\mathbb{Z}_2} \longrightarrow B_{\mathbb{Z}_2}.$$

Lembremos que é preciso verificar que $\pi_1(B_{\mathbb{Z}_2}) = \mathbb{Z}_2$ age trivialmente sobre $H^*(X;\mathbb{Z}_2)$ para que o E_2-termo assuma uma forma apropriada para os cálculos.

Por simplicidade, no restante do trabalho denotaremos apenas por $H^*(X)$ a cohomologia de X com coeficientes em $\mathbb{Z}_2$.

2.1 Caso $P(1,n)$

Neste caso, segundo (DOLD, 1956), temos

$$H^*(P(1,n)) \cong \frac{\mathbb{Z}_2[c,d]}{\langle c^2, d^{n+1}\rangle},$$

onde $c \in H^1(P(1,n))$ e $d \in H^2(P(1,n))$. Logo,

$$H^q(P(1,n)) = \begin{cases} \langle d^{\frac{q}{2}}\rangle \cong \mathbb{Z}_2, & \text{se } q \equiv 0 \text{ (mod 2) e } 0 \le q < 2n+1, \\ \langle cd^{\frac{q-1}{2}}\rangle \cong \mathbb{Z}_2, & \text{se } q \equiv 1 \text{ (mod 2) e } 0 < q \le 2n+1, \\ \{0\}, & \text{se } q > 2n+1. \end{cases}$$

Aqui, a condição de $\mathbb{Z}_2$ agir trivialmente sobre $H^*(P(1,n))$ é automaticamente satisfeita e temos o seguinte resultado.

Teorema 2.2. (MORITA; MATTOS; PERGHER, 2018) *Seja n um número natural ímpar e suponhamos que* $\mathbb{Z}_2$ *age livremente sobre a variedade de Dold* $P(1,n)$*. Então,* $H^*(P(1,n)/\mathbb{Z}_2)$ *é isomorfo a uma das seguintes álgebras graduadas:*

(i) $\mathbb{Z}_2[x,y,z]/\langle x^3, y^2+ax^2+bxy, z^{\frac{n+1}{2}}\rangle$, *com* $(a,b)\in\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$, $\deg(x)=\deg(y)=1$ *e* $\deg(z)=4$.

(ii) $\mathbb{Z}_2[x,z]/\langle x^2, z^{n+1}\rangle$, *com* $\deg(x)=1$ *e* $\deg(z)=2$.

(iii) $\mathbb{Z}_2[x,y,z]/\langle x^4, x^2y, y^2+ax^2+bxy, z^{\frac{n+1}{2}}\rangle$, *com* $(a,b)\in\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$, $\deg(x)=\deg(y)=1$ *e* $\deg(z)=4$.

(iv) $\mathbb{Z}_2[x,y,z,w,v]/\phi(x,y,z,w,v)$, *onde*

$$\begin{aligned}\phi(x,y,z,w,v) &= \langle x^5,\ y^2+a_1x^2+b_1xy,\ x^2y+a_2x^3+b_2z,\ yz+a_3x^4+b_3xz,\ x^2w,\ v^{\frac{n+1}{4}},\\ &\quad z^2+a_4x^3z+b_4xw,\ yw+a_5x^3z+b_5xw,\ w^2+a_6x^2v+b_6xyv,\ zw\rangle,\end{aligned}$$

com $(a_k,b_k)\in\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$*, para todo* $k=1,\dots,6$, $\deg(x)=\deg(y)=1$, $\deg(z)=3$, $\deg(w)=5$, $\deg(v)=8$ *e, necessariamente,* $n\equiv 3\ (mod\ 4)$.

2.2 Caso $P(2n,n)$

Por (DOLD, 1956), temos

$$H^*(P(2n,n))\cong\frac{\mathbb{Z}_2[c,d]}{\langle c^{2n+1},d^{n+1}\rangle},$$

onde $c\in H^1(P(2n,n))$ e $d\in H^2(P(2n,n))$. Assim, para $X=P(2n,n)$,

$$\begin{aligned}
H^0(X) &= \langle 1\rangle=\mathbb{Z}_2,\\
H^1(X) &= \langle c\rangle=\mathbb{Z}_2,\\
H^2(X) &= \langle c^2,d\rangle=\mathbb{Z}_2^2,\\
H^3(X) &= \langle c^3,cd\rangle=\mathbb{Z}_2^2,\\
H^4(X) &= \langle c^4,c^2d,d^2\rangle=\mathbb{Z}_2^3,\\
&\ \vdots\\
H^{2n-1}(X) &= \langle c^{2n-1},c^{2n-3}d,\dots,cd^{n-1}\rangle=\mathbb{Z}_2^n,\\
H^{2n}(X) &= \langle c^{2n},c^{2n-2}d,c^{2n-4}d^2,\dots,c^2d^{n-1},d^n\rangle=\mathbb{Z}_2^{n+1},\\
H^{2n+1}(X) &= \langle c^{2n-1}d,c^{2n-3}d^2,\dots,cd^n\rangle=\mathbb{Z}_2^n,\\
&\ \vdots\\
H^{4n-3}(X) &= \langle c^{2n-1}d^{n-1},c^{2n-3}d^n\rangle=\mathbb{Z}_2^2,\\
H^{4n-2}(X) &= \langle c^{2n}d^{n-1},c^{2n-2}d^n\rangle=\mathbb{Z}_2^2,\\
H^{4n-1}(X) &= \langle c^{2n-1}d^n\rangle=\mathbb{Z}_2,\\
H^{4n}(X) &= \langle c^{2n}d^n\rangle=\mathbb{Z}_2.
\end{aligned}$$

De maneira geral,

$$H^q(X) = \begin{cases} \langle c^q, c^{q-2}d, \ldots, c^2 d^{\frac{q-2}{2}}, d^{\frac{q}{2}} \rangle = \mathbb{Z}_2^{\frac{q+2}{2}}, & \text{se } q \equiv 0 \text{ (mod 2) e } 0 \leq q \leq 2n, \\ \langle c^{2n} d^{\frac{q-2n}{2}}, c^{2n-2} d^{\frac{q-2n}{2}+1}, \ldots, c^{q-2n} d^n \rangle = \mathbb{Z}_2^{\frac{4n+2-q}{2}}, & \text{se } q \equiv 0 \text{ (mod 2) e } 2n \leq q \leq 4n, \\ \langle c^q, c^{q-2}d, \ldots, c d^{\frac{q-1}{2}} \rangle = \mathbb{Z}_2^{\frac{q+1}{2}}, & \text{se } q \equiv 1 \text{ (mod 2) e } 0 < q < 2n, \\ \langle c^{2n-1} d^{\frac{q-2n+1}{2}}, \ldots, c^{q-2n} d^n \rangle = \mathbb{Z}_2^{\frac{4n+1-q}{2}}, & \text{se } q \equiv 1 \text{ (mod 2) e } 2n < q < 4n, \\ 0, & \text{se } q > 4n. \end{cases}$$

Neste caso, não é imediato que $\mathbb{Z}_2$ age trivialmente sobre $H^*(P(2n,n))$. Para provarmos este fato, precisamos do seguinte importante teorema sobre involuções:

Teorema 2.3. (BREDON, 1972, Teorema 7.4) *Seja T uma involução sobre um espaço finitístico X e, para algum s, suponhamos que $H^i(X) = \{0\}$, se $i > 2s$, e que T^* seja a identidade em $H^{2s}(X)$. Se $a \in H^s(X)$ é um elemento tal que $aT^*(a) \neq 0$, então o conjunto de pontos fixos de T é não vazio.*

Observemos que uma ação livre de $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ em um espaço X determina uma involução $T : X \to X$ livre de pontos fixos, dada por $T(x) = \bar{1} \cdot x$. Assim, a ação de $\mathbb{Z}_2$ sobre o anel de cohomologia de X é dada por

$$T^* : H^*(X) \longrightarrow H^*(X).$$

Proposição 2.4. *Seja T uma involução sobre a variedade de Dold $P(2n,n)$. Se $T^* \neq \mathrm{id}$ sobre $H^2(P(2n,n))$, então o conjunto dos pontos fixos de T é não vazio.*

Demonstração. Se $T^* \neq \mathrm{id}$ sobre $H^2(P(2n,n)) = \langle c^2, d \rangle$ e como $T^* = \mathrm{id}$ em $H^1(P(2n,n)) = \langle c \rangle$, então $d \neq T^*(d) = c^2 + d$. Consideremos o elemento $d^n \in H^{2n}(P(2n,n))$. Temos

$$d^n T^*(d^n) = d^n T^*(d)^n = d^n (c^2 + d)^n = d^n (c^{2n} + \text{ parcelas onde aparece } d) = c^{2n} d^n \neq 0,$$

pois $c^{2n} d^n$ é o gerador de $H^{4n}(P(2n,n)) \cong \mathbb{Z}_2$. Assim, tomando $a = d^n$ e $s = 2n$ no Teorema 2.3, concluímos que o conjunto dos pontos fixos de T é não vazio. □

Como consequência da Proposição 2.4, temos o seguinte.

Corolário 2.5. *Se $\mathbb{Z}_2$ age livremente sobre $P(2n,n)$, então $\mathbb{Z}_2$ age trivialmente sobre $H^*(P(2n,n))$.*

Demonstração. Seja T a involução livre de pontos fixos determinada pela ação livre de $\mathbb{Z}_2$. Como o conjunto dos pontos fixos de T é vazio, segue da Proposição 2.4 que $T^* = \mathrm{id}$, ou seja, $\mathbb{Z}_2$ age trivialmente sobre $H^*(P(2n,n))$. □

Dessa forma, obtemos:

Teorema 2.6. *Seja n um número natural ímpar e suponhamos que $\mathbb{Z}_2$ age livremente sobre a variedade de Dold $P(2n,n)$. Existem $2^{\frac{n-1}{2}}+\phi$ possibilidades para $H^*(P(2n,n)/\mathbb{Z}_2)$, onde $\phi=1$, se $n\equiv 1 \pmod 4$, ou $\phi=2$, se $n\equiv 3 \pmod 4$. Dentre os casos possíveis, temos*

(i) $\mathbb{Z}_2[x,y,z]/\langle R_1,\ R_2,\ R_3\rangle$, *onde*

$$
\begin{aligned}
R_1 &= x^3,\\
R_2 &= y^{2n+1}+\beta_0 xy^{2n}+\gamma_0 x^2y^{2n-1}+\sum_{1\le j\le \frac{n-1}{2}}(\alpha_j y^{2n+1-4j}z^j+\beta_j xy^{2n-4j}z^j+\gamma_j x^2y^{2n-1-4j}z^j),\\
R_3 &= z^{\frac{n+1}{2}}+\zeta_0 x^2y^{2n}+\sum_{1\le j\le \frac{n-1}{2}}(\delta_j y^{2n+2-4j}z^j+\varepsilon_j xy^{2n+1-4j}z^j+\zeta_j x^2y^{2n-4j}z^j),
\end{aligned}
$$

com $\deg(x)=\deg(y)=1$, $\deg(z)=4$ *e* $\alpha_j,\beta_j,\gamma_j,\delta_j,\varepsilon_j,\zeta_j\in\mathbb{Z}_2$, *para todo* j.

(ii) $\mathbb{Z}_2[x,y,z,w,v]/\langle R_1,R_2,R_3,R_4,R_5,R_6,R_7,R_8,R_9\rangle$, *onde*

$$
\begin{aligned}
R_1 &= x^5,\\
R_2 &= x^2y+\alpha_1y^3+\alpha_2xy^2+\alpha_3x^3,\\
R_3 &= x^2z+\beta_1y^7+\beta_2y^2z+\beta_3xy^6+\beta_4xyz,\\
R_4 &= z^2+y^2w+\gamma_1y^{10}+\gamma_2y^5z+\gamma_3y^2w+\gamma_4xy^9+\gamma_5xy^4z+\gamma_6xyw+\gamma_7x^2w,\\
R_5 &= y^{2n+1}+\delta_{10}y^{2n-4}z+\varepsilon_{00}xy^{2n}+\varepsilon_{10}xy^{2n-5}z+\\
&\quad+\sum_{\substack{0\le s\le 1\\ 1\le j\le \frac{n-3}{4}}}\left(\delta_{sj}y^{2n+1-(5s+8j)}z^sw^j+\varepsilon_{sj}xy^{2n-(5s+8j)}z^sw^j\right),\\
R_6 &= v^2,\\
R_7 &= w^{\frac{n+1}{4}}+\zeta_1v+\eta_{10}y^{2n-3}z+\theta_{10}xy^{2n-4}z+\\
&\quad+\sum_{\substack{0\le s\le 1\\ 1\le j\le \frac{n-3}{4}}}\left(\eta_{sj}y^{2n+2-(5s+8j)}z^sw^j+\theta_{sj}xy^{2n+1-(5s+8j)}z^sw^j\right),\\
R_8 &= yv+\zeta_2xv+\lambda_{10}y^{2n-2}z+\mu_{10}xy^{2n-3}z+\\
&\quad+\sum_{\substack{0\le s\le 1\\ 1\le j\le \frac{n-3}{4}}}\left(\lambda_{sj}y^{2n+3-(5s+8j)}z^sw^j+\mu_{sj}xy^{2n+2-(5s+8j)}z^sw^j\right),\\
R_9 &= \begin{cases} zv+\displaystyle\sum_{\substack{0\le s\le 1\\ 1\le j\le \frac{n-3}{4}}}\left(\sigma_{sj}y^{2n+7-(5s+8j)}z^sw^j+\tau_{sj}xy^{2n+6-(5s+8j)}z^sw^j\right), & n>3,\\ zv, & n=3,\end{cases}
\end{aligned}
$$

com $\deg(x)=\deg(y)=1$, $\deg(z)=5$, $\deg(w)=8$, $\deg(v)=2n+2$,

$$\alpha_i,\beta_i,\gamma_i,\delta_{sj},\varepsilon_{sj},\zeta_i,\eta_{sj},\theta_{sj},\lambda_{sj},\mu_{sj},\sigma_{sj},\tau_{sj}\in\mathbb{Z}_2,\ \textit{para todo}\ i,j,s,$$

e, necessariamente, $n\equiv 3 \pmod 4$.

CAPÍTULO

3

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 2.2

Consideremos a sequência espectral cohomológica de Leray-Serre (Teorema 1.41) associada à fibração de Borel

$$P(1,n) \overset{i}{\hookrightarrow} P(1,n)_{\mathbb{Z}_2} \xrightarrow{\pi} B_{\mathbb{Z}_2}.$$

Uma vez que $\pi_1(B_{\mathbb{Z}_2}) = \mathbb{Z}_2$ age trivialmente sobre $H^*(P(1,n))$, segue da Proposição 1.43 que

$$E_2^{p,q} = H^p(B_{\mathbb{Z}_2}) \otimes_{\mathbb{Z}_2} H^q(P(1,n))$$

e a Proposição 1.47 nos garante que a sequência espectral não colapsa no E_2-termo, já que a ação de $\mathbb{Z}_2$ sobre $P(1,n)$ é livre. Seja $r \geq 2$ o menor inteiro tal que

$$d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \longrightarrow E_r^{p+r,q+1-r}$$

é não trivial. Se $r > 2$ então para todo $2 \leq s \leq r-1$ temos $d_s = 0$ e assim,

$$E_{s+1}^{p,q} = \frac{\ker(d_s^{p,q})}{\mathrm{im}(d_s^{p-s,q-1+s})} = \frac{E_s^{p,q}}{\{0\}} = E_s^{p,q}.$$

Logo, $E_2 = \cdots = E_r$. Nossa estratégia será estudar as possíveis ações dos diferenciais não triviais sobre os elementos não nulos de E_r. Visto que $c \in H^1(P(1,n))$ e $d \in H^2(P(1,n))$ são os geradores de $H^*(P(1,n))$, segue da Observação 1.44 que $d_r^{0,1}(1 \otimes c) \neq 0$ ou $d_r^{0,2}(1 \otimes d) \neq 0$.

Uma vez que

$$d_r^{0,1}(1 \otimes c) \in E_r^{r,2-r} \;\text{ e }\; d_r^{0,2}(1 \otimes d) \in E_r^{r,3-r},$$

então d_r pode ser não trivial apenas quando $r = 2$ ou $r = 3$, pois a sequência espectral é do primeiro quadrante. Assim, o problema fica dividido nos seguintes casos:

- $d_3^{0,1}(1 \otimes c) = 0$ e $d_3^{0,2}(1 \otimes d) \neq 0$ (Seção 3.1),
- $d_2^{0,1}(1 \otimes c) \neq 0$ e $d_2^{0,2}(1 \otimes d) = 0$ (Seção 3.2),

- $d_2^{0,1}(1\otimes c)=0$ e $d_2^{0,2}(1\otimes d)\neq 0$ (Seção 3.3).

A hipótese $d_2^{0,1}(1\otimes c)\neq 0$ e $d_2^{0,2}(1\otimes d)\neq 0$ não pode ocorrer. Se $t\in H^1(B_{\mathbb{Z}_2})$ é o gerador e $d_2^{0,1}(1\otimes c)=t^2\otimes 1$ e $d_2^{0,2}(1\otimes d)=t^2\otimes c$, então os diferenciais

$$d_2^{0,2}: E_2^{0,2}=\{0,1\otimes d\}\longrightarrow E_2^{2,1}=\{0,t^2\otimes c\}$$

e

$$d_2^{2,1}: E_2^{2,1}=\{0,t^2\otimes c\}\longrightarrow E_2^{4,0}=\{0,t^4\otimes 1\}$$

são isomorfismos e, dessa forma,

$$\operatorname{im}(d_2^{0,2})\not\subseteq \ker(d_2^{2,1}),$$

o que é um absurdo.

Observação 3.1. Os lemas enunciados ao longo de cada seção serão demonstrados por recorrência ao final da mesma.

3.1 $d_3^{0,1}(1\otimes c)=0$ e $d_3^{0,2}(1\otimes d)\neq 0$

Lema 3.2. *Se $d_3^{0,2}(1\otimes d)=t^3\otimes 1$, então para todo $\ell\in\{0,1,\dots,n\}$,*

$$d_3^{0,2\ell}(1\otimes d^\ell)=\begin{cases} t^3\otimes d^{\ell-1}, & se\ \ell\equiv 1 \pmod 2,\\ 0, & se\ \ell\equiv 0 \pmod 2.\end{cases}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} d_3^{0,2\ell+1}(1\otimes(cd^\ell)) &= d_3^{0,2\ell+1}((1\otimes c)\cdot(1\otimes d^\ell))\\ &= \underbrace{d_3^{0,1}(1\otimes c)}_{0}\cdot(1\otimes d^\ell)+(1\otimes c)\cdot d_3^{0,2\ell}(1\otimes d^\ell)\\ &= \begin{cases} t^3\otimes(cd^{\ell-1}), & \text{se } \ell\equiv 1 \pmod 2,\\ 0, & \text{se } \ell\equiv 0 \pmod 2.\end{cases}\end{aligned}$$

Logo, para todo $p\geq 0$ e $\ell\in\{0,1,\dots,n\}$, temos

$$d_3^{p,2\ell}(t^p\otimes d^\ell)=d_3^{p,2\ell}((t^p\otimes 1)\cdot(1\otimes d^\ell))=\begin{cases} t^{p+3}\otimes d^{\ell-1}, & \text{se } \ell\equiv 1 \pmod 2,\\ 0, & \text{se } \ell\equiv 0 \pmod 2,\end{cases}$$

e

$$d_3^{p,2\ell+1}(t^p\otimes(cd^\ell))=d_3^{p,2\ell+1}((t^p\otimes 1)\cdot(1\otimes(cd^\ell)))=\begin{cases} t^{p+3}\otimes(cd^{\ell-1}), & \text{se } \ell\equiv 1 \pmod 2,\\ 0, & \text{se } \ell\equiv 0 \pmod 2,\end{cases}$$

onde $t^p\otimes d^\ell \in E_3^{p,2\ell}$ e $t^p\otimes (cd^\ell)\in E_3^{p,2\ell+1}$ são os elementos não nulos. Em síntese,

$$d_3^{p,q}: E_3^{p,q} \longrightarrow E_3^{p+3,q-2}$$

é um isomorfismo se $q\equiv 2 \pmod 4$ ou $q\equiv 3 \pmod 4$, e é trivial se $q\equiv 0 \pmod 4$ ou $q\equiv 1 \pmod 4$. Dessa forma,

$$E_4^{p,q}=\frac{\ker(d_3^{p,q})}{\operatorname{im}(d_3^{p-3,q+2})}=\begin{cases}\begin{cases}E_3^{p,q}, & p<3,\\ \{0\}, & p\geq 3,\end{cases} & \text{se } q\equiv 0 \pmod 4 \text{ ou } q\equiv 1 \pmod 4,\\ \\ \{0\}, & \text{se } q\equiv 2 \pmod 4 \text{ ou } q\equiv 3 \pmod 4.\end{cases}$$

Os módulos do E_4-termo estão representados abaixo:

$$\begin{array}{cccccc}
E_4^{0,2n-1} & E_4^{1,2n-1} & E_4^{2,2n-1} & 0 & 0 & \cdots\\
E_4^{0,2n-2} & E_4^{1,2n-2} & E_4^{2,2n-2} & 0 & 0 & \cdots\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
E_4^{0,5} & E_4^{1,5} & E_4^{2,5} & 0 & 0 & \cdots\\
E_4^{0,4} & E_4^{1,4} & E_4^{2,4} & 0 & 0 & \cdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\
E_4^{0,1} & E_4^{1,1} & E_4^{2,1} & 0 & 0 & \cdots\\
E_4^{0,0} & E_4^{1,0} & E_4^{2,0} & 0 & 0 & \cdots
\end{array}$$

Seja $s\geq 4$ e suponhamos $E_s=E_4$. Como $p+s>2$, $E_s^{p+s,q+1-s}=\{0\}$, e por isso,

$$d_s^{p,q}: E_s^{p,q} \longrightarrow E_s^{p+s,q+1-s}$$

é trivial, para todo $q\in\{0,1,\ldots,2n+1\}$.

Portanto, a sequência colapsa no E_4-termo, ou seja, $E_\infty\cong E_4$. Temos:

$$H^j(P(1,n)_{\mathbb{Z}_2})\cong \operatorname{Tot}(E_\infty)^j=\bigoplus_{j=p+q} E_\infty^{p,q}=\begin{cases}\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2, & j<2n+1 \text{ e } j\equiv 1 \text{ ou } 2 \pmod 4,\\ \mathbb{Z}_2, & j\leq 2n+1 \text{ e } j\equiv 0 \text{ ou } 3 \pmod 4,\\ \{0\}, & j>2n+1.\end{cases}$$

Determinemos a estrutura do anel de cohomologia $H^*(P(1,n)_{\mathbb{Z}_2})$. Seja $x = \pi^*(t) \in H^1(P(1,n)_{\mathbb{Z}_2})$, onde a expressão de π^* é dada pelo Teorema 1.46:

$$\pi^* : H^p(B_{\mathbb{Z}_2}) \cong E_2^{p,0} \twoheadrightarrow E_3^{p,0} \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow E_{p+1}^{p,0} \cong E_\infty^{p,0} \hookrightarrow H^p(P(1,n)_{\mathbb{Z}_2}).$$

Então,

$$x \in E_\infty^{1,0},\ x^3 \in E_\infty^{3,0} = \{0\} \text{ e}$$

$$x^p = \pi^*(t^p) \neq 0, \text{ para } p = 1,2.$$

Os elementos $1 \otimes c \in E_2^{0,1}$ e $1 \otimes d^2 \in E_2^{0,4}$ são cociclos permanentes e determinam os elementos não nulos $\mathbf{y} \in E_\infty^{0,1}$ e $\mathbf{z} \in E_\infty^{0,4}$, respectivamente. Temos

$$\mathbf{y}^2 \in E_\infty^{0,2} = \{0\} \text{ e } \mathbf{z}^{\frac{n+1}{2}} \in E_\infty^{0,2n+2} = \{0\}.$$

Assim, concluímos que

$$\mathrm{Tot}(E_\infty) \cong \frac{\mathbb{Z}_2[x,\mathbf{y},\mathbf{z}]}{\langle x^3, \mathbf{y}^2, \mathbf{z}^{\frac{n+1}{2}} \rangle}$$

como uma álgebra graduada comutativa, com $\deg(x) = \deg(\mathbf{y}) = 1$ e $\deg(\mathbf{z}) = 4$.

Ainda pelo Teorema 1.46, temos

$$i^* : H^q(P(1,n)_{\mathbb{Z}_2}) \twoheadrightarrow E_\infty^{0,q} \cong E_{q+2}^{0,q} \hookrightarrow E_{q+1}^{0,q} \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow E_2^{0,q} \cong H^q(P(1,n)).$$

Como $E_3 = E_2$, o homomorfismo

$$i^* : H^1(P(1,n)_{\mathbb{Z}_2}) \longrightarrow H^1(P(1,n))$$

é sobrejetor, ou seja, existe um elemento não nulo $y \in H^1(P(1,n)_{\mathbb{Z}_2})$ tal que $i^*(y) = c$. Observemos que $y \neq x$, pois $i^* \circ \pi^* = 0$. Então, y representa $\mathbf{y}$ e satisfaz

$$y^2 = ax^2 + bxy, \text{ para algum } (a,b) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.$$

Uma vez que $H^4(P(1,n)_{\mathbb{Z}_2}) \cong E_\infty^{0,4} \cong \cdots \cong E_2^{0,4}$, o homomorfismo

$$i^* : H^4(P(1,n)_{\mathbb{Z}_2}) \longrightarrow H^4(P(1,n))$$

é um isomorfismo. Logo, existe um único elemento $z \in H^4(P(1,n)_{\mathbb{Z}_2})$ tal que $i^*(z) = d^2$. Assim, z representa $\mathbf{z}$ e satisfaz $z^{\frac{n+1}{2}} \in H^{2n+2}(P(1,n)_{\mathbb{Z}_2}) = \{0\}$. Para $0 \leq j \leq \frac{n-1}{2}$, temos

$$\begin{aligned} i^*(z^j) &= i^*(z)^j = d^{2j} \neq 0, \\ i^*(yz^j) &= i^*(y)i^*(z)^j = cd^{2j} \neq 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$H^*(P(1,n)_{\mathbb{Z}_2}) \cong \frac{\mathbb{Z}_2[x,y,z]}{\langle x^3, y^2 + ax^2 + bxy, z^{\frac{n+1}{2}} \rangle},$$

com $\deg(x)=\deg(y)=1$, $\deg(z)=4$ e $(a,b)\in\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$.

Em particular, quando $n=1$, temos $z=0$, pois $H^4(P(1,1)_{\mathbb{Z}_2})=\{0\}$. Assim,

$$H^*(P(1,1)_{\mathbb{Z}_2})\cong\frac{\mathbb{Z}_2[x,y]}{\langle x^3,y^2+ax^2+bxy\rangle},$$

com $\deg(x)=\deg(y)=1$ e $(a,b)\in\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$.

Como $\mathbb{Z}_2$ age livremente sobre $P(1,n)$, $H^*(P(1,n)/\mathbb{Z}_2)$ é isomorfo a $H^*(P(1,n)_{\mathbb{Z}_2})$ como um anel e obtemos o item (i) do Teorema 2.2.

Demonstração do Lema 3.2. Se $\ell=0$, então $d_3^{0,0}=0$, pois $\operatorname{im}(d_3^{0,0})\subset E_3^{3,-2}=\{0\}$. Por hipótese, $d_3^{0,2}(1\otimes d)=t^3\otimes 1$. Para $\ell=2$, temos

$$\begin{aligned}
d_3^{0,4}(1\otimes d^2) &= d_3^{0,4}((1\otimes d)\cdot(1\otimes d))\\
&= d_3^{0,2}(1\otimes d)\cdot(1\otimes d)+(1\otimes d)\cdot d_3^{0,2}(1\otimes d)\\
&= (t^3\otimes 1)\cdot(1\otimes d)+(1\otimes d)\cdot(t^3\otimes 1)\\
&= 2t^3\otimes d\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Se $\ell=3$, então

$$\begin{aligned}
d_3^{0,6}(1\otimes d^3) &= d_3^{0,6}((1\otimes d)\cdot(1\otimes d^2))\\
&= d_3^{0,2}(1\otimes d)\cdot(1\otimes d^2)+(1\otimes d)\cdot\underbrace{d_3^{0,4}(1\otimes d^2)}_{0}\\
&= (t^3\otimes 1)\cdot(1\otimes d^2)\\
&= t^3\otimes d^2.
\end{aligned}$$

Vamos supor que

$$d_3^{0,2\ell}(1\otimes d^\ell)=\begin{cases} t^3\otimes d^{\ell-1}, & \text{se } \ell\equiv 1 \pmod 2,\\ 0, & \text{se } \ell\equiv 0 \pmod 2,\end{cases} \tag{$\clubsuit$}$$

com $0\leq\ell<n$.

Para $\ell+1$, temos:

$$\begin{aligned}
d_3^{0,2(\ell+1)}(1\otimes d^{\ell+1}) &= d_3^{0,2(\ell+1)}((1\otimes d)\cdot(1\otimes d^\ell))\\
&= d_3^{0,2}(1\otimes d)\cdot(1\otimes d^\ell)+(1\otimes d)\cdot d_3^{0,2\ell}(1\otimes d^\ell).
\end{aligned}$$

Se $\ell\equiv 0 \pmod 2$, então $\ell+1\equiv 1 \pmod 2$ e

$$d_3^{0,2(\ell+1)}(1\otimes d^{\ell+1})=(t^3\otimes 1)\cdot(1\otimes d^\ell)=t^3\otimes d^\ell.$$

Se $\ell\equiv 1 \pmod 2$, então $\ell+1\equiv 0 \pmod 2$ e

$$\begin{aligned}
d_3^{0,2(\ell+1)}(1\otimes d^{\ell+1}) &= (t^3\otimes 1)\cdot(1\otimes d^\ell)+(1\otimes d)\cdot(t^3\otimes d^{\ell-1})\\
&= t^3\otimes d^\ell+t^3\otimes d^\ell\\
&= 2t^3\otimes cd^\ell\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto, (♣) vale para todo $\ell \in \{0,1,\ldots,n\}$.

3.2 $d_2^{0,1}(1\otimes c) \neq 0$ e $d_2^{0,2}(1\otimes d) = 0$

Neste caso,

$$d_2^{0,2\ell}(1\otimes d^\ell) = 0, \text{ para todo } \ell \in \{0,1,\ldots,n\}.$$

Se $d_2^{0,1}(1\otimes c) = t^2\otimes 1$, então

$$\begin{array}{rcl} d_2^{0,2\ell+1}(1\otimes(cd^\ell)) & = & d_2^{0,2\ell+1}((1\otimes c)\cdot(1\otimes d^\ell)) \\ & = & d_2^{0,1}(1\otimes c)\cdot(1\otimes d^\ell) + (1\otimes c)\cdot\underbrace{d_2^{0,2\ell}(1\otimes d^\ell)}_{0} \\ & = & (t^2\otimes 1)\cdot(1\otimes d^\ell) \\ & = & t^2\otimes d^\ell. \end{array}$$

Logo, para todo $p \geq 0$ e $\ell \in \{0,1,\ldots,n\}$, temos

$$d_2^{p,2\ell}(t^p\otimes d^\ell) = d_2^{p,2\ell}((t^p\otimes 1)\cdot(1\otimes d^\ell)) = 0$$

e

$$d_2^{p,2\ell+1}(t^p\otimes(cd^\ell)) = d_2^{p,2\ell+1}((t^p\otimes 1)\cdot(1\otimes(cd^\ell))) = t^{p+2}\otimes d^\ell \neq 0,$$

onde $t^p\otimes d^\ell \in E_2^{p,2\ell}$ e $t^p\otimes(cd^\ell) \in E_2^{p,2\ell+1}$ são os elementos não nulos. Dessa forma,

$$d_2^{p,q} : E_2^{p,q} \longrightarrow E_2^{p+2,q-1}$$

é trivial, se $q \equiv 0 \pmod 2$, e um isomorfismo, se $q \equiv 1 \pmod 2$.

Sendo assim,

$$E_3^{p,q} = \frac{\ker(d_2^{p,q})}{\mathrm{im}(d_2^{p-2,q+1})} = \begin{cases} E_2^{p,q}, & \text{se } q \equiv 0 \pmod 2 \text{ e } p < 2, \\ \{0\}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Em resumo, os módulos do E_3-termo estão representados no diagrama abaixo:

$$\begin{array}{ccccc}
E_3^{0,2n} & E_3^{1,2n} & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
E_3^{0,2n-2} & E_3^{1,2n-2} & 0 & 0 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
E_3^{0,2} & E_3^{1,2} & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
E_3^{0,0} & E_3^{1,0} & 0 & 0 & \cdots
\end{array}$$

Seja $s\geq 3$ e suponhamos $E_s=E_3$. Como $p+s>1$, $E_s^{p+s,q+1-s}=\{0\}$ e, por isso,

$$d_s^{p,q}:E_s^{p,q}\longrightarrow E_s^{p+s,q+1-s}$$

é trivial, para todo $q\in\{0,1,\ldots,2n+1\}$.

Portanto, a sequência colapsa no E_3-termo, ou seja, $E_\infty\cong E_3$. Temos:

$$H^j(P(1,n)_{\mathbb{Z}_2})\cong \mathrm{Tot}(E_\infty)^j=\bigoplus_{j=p+q}E_\infty^{p,q}=\begin{cases}\mathbb{Z}_2, & \text{se } 0\leq j\leq 2n+1,\\ \{0\}, & \text{se } j>2n+1.\end{cases}$$

Agora, vamos determinar a estrutura do anel de cohomologia $H^*(P(1,n)_{\mathbb{Z}_2})$. Seja $x=\pi^*(t)\in H^1(P(1,n)_{\mathbb{Z}_2})$ como na Seção 3.1. Então

$$x\neq 0,\ \ x\in E_\infty^{1,0}\ \text{ e }\ x^2\in E_\infty^{2,0}=\{0\}.$$

O elemento $1\otimes d\in E_2^{0,2}$ é um cociclo permanente e determina um elemento não nulo $\mathbf{z}\in E_\infty^{0,2}$, que satisfaz

$$\mathbf{z}^{n+1}\in E_\infty^{0,2n+2}=\{0\}.$$

Assim, concluímos que

$$\mathrm{Tot}(E_\infty)\cong\frac{\mathbb{Z}_2[x,\mathbf{z}]}{\langle x^2,\mathbf{z}^{n+1}\rangle}$$

como uma álgebra graduada comutativa, com $\deg(x)=1$ e $\deg(\mathbf{z})=2$.

Pelo Teorema 1.46, temos

$$i^*:H^2(P(1,n)_{\mathbb{Z}_2})\twoheadrightarrow E_\infty^{0,2}\cong E_4^{0,2}\hookrightarrow E_3^{0,2}\hookrightarrow E_2^{0,2}\cong H^2(P(1,n)).$$

Como $H^2(P(1,n)_{\mathbb{Z}_2}) \cong E_\infty^{0,2} \cong \cdots \cong E_2^{0,2}$, o homomorfismo i^* é um isomorfismo, ou seja, existe um único elemento não nulo $z \in H^2(P(1,n)_{\mathbb{Z}_2})$ tal que $i^*(z) = d$. Dessa forma, z representa **z** e satisfaz $z^{n+1} \in H^{2n+2} = \{0\}$. Para $1 \leq j \leq n$, temos

$$i^*(z^j) = i^*(z)^j = d^j \neq 0.$$

Portanto,

$$H^*(P(1,n)_{\mathbb{Z}_2}) \cong \frac{\mathbb{Z}_2[x,z]}{\langle x^2, z^{n+1}\rangle},$$

com $\deg(x) = 1$ e $\deg(z) = 2$. Como $\mathbb{Z}_2$ age livremente sobre $P(1,n)$, $H^*(P(1,n)/\mathbb{Z}_2)$ é isomorfo a $H^*(P(1,n)_{\mathbb{Z}_2})$ como um anel e obtemos o item (ii) do Teorema 2.2.

3.3 $d_2^{0,1}(1 \otimes c) = 0$ e $d_2^{0,2}(1 \otimes d) \neq 0$

Lema 3.3. *Se $d_2^{0,2}(1 \otimes d) = t^2 \otimes c$, então para todo $\ell \in \{0,1,\ldots,n\}$,*

$$d_2^{0,2\ell}(1 \otimes d^\ell) = \begin{cases} t^2 \otimes (cd^{\ell-1}), & se\ \ell \equiv 1 \pmod 2, \\ 0, & se\ \ell \equiv 0 \pmod 2. \end{cases}$$

Temos:

$$\begin{aligned} d_2^{0,2\ell+1}(1 \otimes (cd^\ell)) &= d_2^{0,2\ell+1}((1 \otimes c) \cdot (1 \otimes d^\ell)) \\ &= \underbrace{d_2^{0,1}(1 \otimes c)}_{0} \cdot (1 \otimes d^\ell) + (1 \otimes c) \cdot d_2^{0,2\ell}(1 \otimes d^\ell) \\ &= (1 \otimes c) \cdot d_2^{0,2\ell}(1 \otimes d^\ell). \end{aligned}$$

Quando $\ell \equiv 0 \pmod 2$, é imediato que $d_2^{0,2\ell+1}(1 \otimes (cd^\ell)) = 0$, pois $d_2^{0,2\ell}(1 \otimes d^\ell) = 0$. Se $\ell \equiv 1 \pmod 2$, então $d_2^{0,2\ell}(1 \otimes d^\ell) = t^2 \otimes (cd^{\ell-1})$ e, consequentemente,

$$d_2^{0,2\ell+1}(1 \otimes (cd^\ell)) = t^2 \otimes (c^2 d^{\ell-1}) = 0,$$

pois $c^2 = 0$ em $H^*(P(1,n))$.

Logo, para todo $p \geq 0$ e $\ell \in \{0,1,\ldots,n\}$, temos

$$d_2^{p,2\ell}(t^p \otimes d^\ell) = d_2^{p,2\ell}((t^p \otimes 1) \cdot (1 \otimes d^\ell)) = \begin{cases} t^{p+2} \otimes (cd^{\ell-1}), & \text{se } \ell \equiv 1 \pmod 2, \\ 0, & \text{se } \ell \equiv 0 \pmod 2, \end{cases}$$

e

$$d_2^{p,2\ell+1}(t^p \otimes (cd^\ell)) = d_2^{p,2\ell+1}((t^p \otimes 1) \cdot (1 \otimes (cd^\ell))) = 0,$$

onde $t^p \otimes d^\ell \in E_2^{p,2\ell}$ e $t^p \otimes (cd^\ell) \in E_2^{p,2\ell+1}$ são os elementos não nulos. Resumidamente,

$$d_2^{p,q} : E_2^{p,q} \longrightarrow E_2^{p+2,q-1}$$

é um isomorfismo, se $q \equiv 2$ (mod 4), e trivial no restante dos casos.

Sendo assim,

$$E_3^{p,q} = \frac{\ker(d_2^{p,q})}{\operatorname{im}(d_2^{p-2,q+1})} = \begin{cases} \begin{cases} E_2^{p,q}, & p<2, \\ \{0\}, & p\geq 2, \end{cases} & \text{se } q\equiv 1 \text{ (mod 4)}, \\ \\ E_2^{p,q}, & \text{se } q\equiv 0 \text{ (mod 4) ou } q\equiv 3 \text{ (mod 4)}, \\ \\ \{0\}, & \text{se } q\equiv 2 \text{ (mod 4)}. \end{cases}$$

Representamos os módulos do E_3-termo abaixo:

$$\begin{array}{cccccc}
E_3^{0,2n+1} & E_3^{1,2n+1} & E_3^{2,2n+1} & E_3^{3,2n+1} & E_3^{4,2n+1} & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
E_3^{0,2n-1} & E_3^{1,2n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
E_3^{0,2n-2} & E_3^{1,2n-2} & E_3^{2,2n-2} & E_3^{3,2n-2} & E_3^{4,2n-2} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
E_3^{0,3} & E_3^{1,3} & E_3^{2,3} & E_3^{3,3} & E_3^{4,3} & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
E_3^{0,1} & E_3^{1,1} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
E_3^{0,0} & E_3^{1,0} & E_3^{2,0} & E_3^{3,0} & E_3^{4,0} & \cdots
\end{array}$$

Provaremos que o diferencial

$$d_3^{p,q} : E_3^{p,q} \longrightarrow E_3^{p+3,q-2}$$

é trivial, para todo $q \in \{0,1,\ldots,2n+1\}$. Os diferenciais $d_3^{p,0}$ e $d_3^{p,1}$ são triviais, por razões dimensionais.

Consideremos $q>1$. Então,

$$\begin{aligned} q\equiv 2 \text{ (mod 4)} &\implies E_3^{p,q}=\{0\}, \\ q\equiv 0 \text{ (mod 4) ou } q\equiv 3 \text{ (mod 4)} &\implies E_3^{p+3,q-2}=\{0\}. \end{aligned}$$

Diante disso, concluímos que $d_3^{p,q} = 0$, para $q \equiv 0 \pmod 4$, $q \equiv 2 \pmod 4$ e $q \equiv 3 \pmod 4$.

Se $q \equiv 1 \pmod 4$, então $E_3^{p,q} \neq \{0\}$, para $p = 0,1$, e $E_3^{p+3,q-2} \neq \{0\}$, para todo p. Logo, nada podemos afirmar de imediato sobre $d_3^{p,q}$, quando $p = 0,1$. Neste caso, é preciso investigar a ação do diferencial sobre o gerador $1 \otimes (cd^{\frac{q-1}{2}}) \in E_3^{0,q}$. Temos:

$$\begin{aligned} d_3^{0,q}(1 \otimes (cd^{\frac{q-1}{2}})) &= d_3^{0,q}((1 \otimes c) \cdot (1 \otimes d^{\frac{q-1}{2}})) \\ &= \underbrace{d_3^{0,1}(1 \otimes c)}_{0} \cdot (1 \otimes d^{\frac{q-1}{2}}) + (1 \otimes c) \cdot \underbrace{d_3^{0,q-1}(1 \otimes d^{\frac{q-1}{2}})}_{0} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim, $d_3^{0,q} = 0$, o que implica que $d_3^{1,q} = 0$. Portanto, $d_3 = 0$ e, consequentemente, $E_4 = E_3$.

Vamos analisar o que pode ocorrer com o diferencial

$$d_4^{p,q} : E_4^{p,q} \longrightarrow E_4^{p+4,q-3}.$$

Os diferenciais $d_4^{p,0}$, $d_4^{p,1}$ e $d_4^{p,2}$ são triviais, por razões dimensionais.

Consideremos $q > 2$. Então,

$$\begin{aligned} q \equiv 2 \pmod 4 &\implies E_4^{p,q} = \{0\}, \\ q \equiv 0 \pmod 4 \text{ ou } q \equiv 1 \pmod 4 &\implies E_4^{p+4,q-3} = \{0\}. \end{aligned}$$

Logo, $d_4^{p,q} = 0$, se $q \equiv 0 \pmod 4$, $q \equiv 1 \pmod 4$ e $q \equiv 2 \pmod 4$.

No entanto, quando $q \equiv 3 \pmod 4$, $E_4^{p,q} \neq \{0\}$ e $E_4^{p+4,q-3} \neq \{0\}$. Em vista disso, devemos avaliar a imagem do diferencial sobre o gerador $1 \otimes (cd^{\frac{q-1}{2}}) \in E_4^{0,q}$.

Em E_4 não podemos fazer a decomposição

$$1 \otimes (cd^{\frac{q-1}{2}}) = (1 \otimes c) \cdot (1 \otimes d^{\frac{q-1}{2}}),$$

pois $E_4^{0,q-1} = \{0\}$ $(q-1 \equiv 2 \pmod 4)$. Mas podemos escrever

$$1 \otimes (cd^{\frac{q-1}{2}}) = (1 \otimes (cd)) \cdot (1 \otimes d^{\frac{q-3}{2}}),$$

onde $1 \otimes (cd) \in E_4^{0,3}$ e $1 \otimes d^{\frac{q-3}{2}} \in E_4^{0,q-3}$ são os elementos não nulos. Dessa forma,

$$\begin{aligned} d_4^{0,q}(1 \otimes (cd^{\frac{q-1}{2}})) &= d_4^{0,3}(1 \otimes (cd)) \cdot (1 \otimes d^{\frac{q-3}{2}}) + (1 \otimes (cd)) \cdot \underbrace{d_4^{0,q-3}(1 \otimes d^{\frac{q-3}{2}})}_{0} \\ &= d_4^{0,3}(1 \otimes (cd)) \cdot (1 \otimes d^{\frac{q-3}{2}}). \end{aligned}$$

O elemento $1 \otimes (cd)$ não se decompõe em E_4 e não é possivel determinar o valor de $d_4^{0,3}(1 \otimes (cd)) \in E_4^{4,0} = \langle t^4 \otimes 1 \rangle$. Neste caso, devemos considerar as duas possibilidades:

- $d_4^{0,3}(1 \otimes (cd)) \neq 0$ (Subseção 3.3.1)
- $d_4^{0,3}(1 \otimes (cd)) = 0$ (Subseção 3.3.2)

3.3.1 $d_4^{0,3}(1\otimes(cd))\neq 0$

Se $d_4^{0,3}(1\otimes(cd))=t^4\otimes 1$, então $d_4^{0,q}(1\otimes(cd^{\frac{q-1}{2}}))=t^4\otimes d^{\frac{q-3}{2}}$ e, para todo $p\geq 0$, temos

$$d_4^{p,q}(t^p\otimes(cd^{\frac{q-1}{2}}))=d_4^{p,q}((t^p\otimes 1)\cdot(1\otimes(cd^{\frac{q-1}{2}})))=t^{p+4}\otimes d^{\frac{q-3}{2}}\neq 0,$$

onde $t^p\otimes(cd^{\frac{q-1}{2}})$ é o elemento não nulo de $E_4^{p,q}$. Logo,

$$d_4^{p,q}:E_4^{p,q}\longrightarrow E_4^{p+4,q-3}$$

é um isomorfismo, se $q\equiv 3$ (mod 4), e trivial no restante dos casos.

Sendo assim,

$$E_5^{p,q}=\frac{\ker(d_4^{p,q})}{\operatorname{im}(d_4^{p-4,q+3})}=\begin{cases}\begin{cases}E_4^{p,q}, & p<4,\\ \{0\}, & p\geq 4,\end{cases} & \text{se } q\equiv 0 \text{ (mod 4)},\\[2ex] \qquad\qquad E_4^{p,q}, & \text{se } q\equiv 1 \text{ ou } 2 \text{ (mod 4)},\\[2ex] \qquad\qquad \{0\}, & \text{se } q\equiv 3 \text{ (mod 4)}.\end{cases}$$

Representamos os módulos do E_5-termo no diagrama a seguir:

$$\begin{array}{cccccc}
E_5^{0,2n-1} & E_5^{1,2n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots\\[3ex]
E_5^{0,2n-2} & E_5^{1,2n-2} & E_5^{2,2n-2} & E_5^{3,2n-2} & 0 & \dots\\[3ex]
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\[3ex]
E_5^{0,5} & E_5^{1,5} & 0 & 0 & 0 & \dots\\[3ex]
E_5^{0,4} & E_5^{1,4} & E_5^{2,4} & E_5^{3,4} & 0 & \dots\\[3ex]
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots\\[3ex]
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots\\[3ex]
E_5^{0,1} & E_5^{1,1} & 0 & 0 & 0 & \dots\\[3ex]
E_5^{0,0} & E_5^{1,0} & E_5^{2,0} & E_5^{3,0} & 0 & \dots
\end{array}$$

Vamos provar que a sequência espectral colapsa no E_5-termo. Seja $s \geq 5$ e suponhamos $E_s = E_5$. Como $p+s > 3$, $E_s^{p+s,q+1-s} = \{0\}$ e, por isso,

$$d_s^{p,q} : E_s^{p,q} \longrightarrow E_s^{p+s,q+1-s}$$

é trivial, para todo $q \in \{0,1,\ldots,2n+1\}$. Portanto, $E_\infty \cong E_5$.

Temos:

$$H^j(P(1,n)_{\mathbb{Z}_2}) \cong \mathrm{Tot}(E_\infty)^j = \bigoplus_{j=p+q} E_\infty^{p,q} = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, & j < 2n+1 \text{ e } j \equiv 1 \text{ ou } 2 \pmod 4, \\ \mathbb{Z}_2, & j \leq 2n+1 \text{ e } j \equiv 0 \text{ ou } 3 \pmod 4, \\ \{0\}, & j > 2n+1. \end{cases}$$

Determinemos a estrutura do anel de cohomologia $H^*(P(1,n)_{\mathbb{Z}_2})$. Consideremos $x = \pi^*(t) \in H^1(P(1,n)_{\mathbb{Z}_2})$, como na Seção 3.1. Então

$$x \in E_\infty^{1,0}, \;\; x^4 \in E_\infty^{4,0} = \{0\} \;\text{ e}$$

$$x^p = \pi^*(t^p) \neq 0, \;\text{ quando }\; p = 1,2,3.$$

Os elementos $1 \otimes c \in E_2^{0,1}$ e $1 \otimes d^2 \in E_2^{0,4}$ são cociclos permanentes e determinam os elementos não nulos $\mathbf{y} \in E_\infty^{0,1}$ e $\mathbf{z} \in E_\infty^{0,4}$, respectivamente. Temos

$$\mathbf{y}^2 \in E_\infty^{0,2} = \{0\}, \;\; x^2\mathbf{y} \in E_\infty^{2,1} = \{0\} \;\text{ e }\; \mathbf{z}^{\frac{n+1}{2}} \in E_\infty^{0,2n+2} = \{0\}.$$

Assim, concluímos que

$$\mathrm{Tot}(E_\infty) \cong \frac{\mathbb{Z}_2[x,\mathbf{y},\mathbf{z}]}{\langle x^4, \mathbf{y}^2, x^2\mathbf{y}, \mathbf{z}^{\frac{n+1}{2}} \rangle}$$

como uma álgebra graduada comutativa, com $\deg(x) = \deg(\mathbf{y}) = 1$ e $\deg(\mathbf{z}) = 4$.

Pelo Teorema 1.46, temos

$$i^* : H^q(P(1,n)_{\mathbb{Z}_2}) \twoheadrightarrow E_\infty^{0,q} \cong E_{q+2}^{0,q} \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow E_2^{0,q} \cong H^q(P(1,n)).$$

Visto que $E_3^{0,1} = E_2^{0,1}$, o homomorfismo i^* é sobrejetor no nível um, ou seja, existe um elemento não nulo $y \in H^1(P(1,n)_{\mathbb{Z}_2})$ tal que $i^*(y) = c$. Observemos que $y \neq x$, pois $i^*(x) = 0$.

Como $H^1(P(1,n)_{\mathbb{Z}_2}) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, então $H^1(P(1,n)_{\mathbb{Z}_2}) = \{0, x, y, x+y\}$. Temos

$$i^*(y') = i^*(y) = c, \;\text{ onde }\; y' = x+y.$$

Em $\mathrm{Tot}(E_\infty)$, vale a relação $x^2\mathbf{y} = 0$. Em $H^*(P(1,n)_{\mathbb{Z}_2})$ temos

$$x^2y' + x^2y = x^3,$$

onde $x^3 \in H^3(P(1,n)_{\mathbb{Z}_2}) \cong \mathbb{Z}_2$ é o gerador. Logo, $x^2y'=0$ ou $x^2y=0$. Por isto, é possível escolher um elemento não nulo em $H^1(P(1,n)_{\mathbb{Z}_2})$, digamos y, tal que $i^*(y)=c$ e $x^2y=0$. Então, y representa $\mathbf{y}$ e satisfaz

$$y^2 = ax^2+bxy, \ \text{ para algum } \ (a,b)\in\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2.$$

Uma vez que $H^4(P(1,n)_{\mathbb{Z}_2}) \cong E_\infty^{0,4}\cong\cdots\cong E_2^{0,4}$, o homomorfismo

$$i^*: H^4(P(1,n)_{\mathbb{Z}_2}) \longrightarrow H^4(P(1,n))$$

é um isomorfismo. Logo, existe um único elemento $z\in H^4(P(1,n)_{\mathbb{Z}_2})$ tal que $i^*(z)=d^2$. Assim, z representa $\mathbf{z}$ e satisfaz $z^{\frac{n+1}{2}}\in H^{2n+2}(P(1,n)_{\mathbb{Z}_2})=0$. Para $0\leq j\leq \frac{n-1}{2}$, temos

$$\begin{aligned} i^*(z^j) &= i^*(z)^j = d^{2j}\neq 0,\\ i^*(yz^j) &= i^*(y)i^*(z)^j = cd^{2j}\neq 0.\end{aligned}$$

Portanto,

$$H^*(P(1,n)_{\mathbb{Z}_2}) \cong \frac{\mathbb{Z}_2[x,y,z]}{\langle x^4, x^2y, y^2+ax^2+bxy, z^{\frac{n+1}{2}}\rangle},$$

com $\deg(x)=\deg(y)=1$, $\deg(z)=4$ e $(a,b)\in\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$.

Em particular, quando $n=1$, temos $z=0$, pois $H^4(P(1,1)_{\mathbb{Z}_2})=\{0\}$. Assim,

$$H^*(P(1,1)_{\mathbb{Z}_2}) \cong \frac{\mathbb{Z}_2[x,y]}{\langle x^4, x^2y, y^2+ax^2+bxy\rangle},$$

com $\deg(x)=\deg(y)=1$ e $(a,b)\in\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$.

Como $\mathbb{Z}_2$ age livremente sobre $P(1,n)$, $H^*(P(1,n)/\mathbb{Z}_2)$ é isomorfo a $H^*(P(1,n)_{\mathbb{Z}_2})$ como um anel e provamos o item (iii) do Teorema 2.2.

3.3.2 $d_4^{0,3}(1\otimes(cd))=0$

Neste caso, $d_4=0$ e $E_5=E_4=E_3$. Se $n=1$, os módulos do E_5-termo são os seguintes:

$$\begin{array}{cccccc}
E_5^{0,3} & E_5^{1,3} & E_5^{2,3} & E_5^{3,3} & E_5^{4,3} & \cdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\
E_5^{0,1} & E_5^{1,1} & 0 & 0 & 0 & \cdots\\
E_5^{0,0} & E_5^{1,0} & E_5^{2,0} & E_5^{3,0} & E_5^{4,0} & \cdots
\end{array}$$

Observemos que $d_s=0$ para $s\geq 5$, por razões dimensionais. Então, $E_\infty\cong E_5$. Mas

$$H^4(P(1,1)_{\mathbb{Z}_2}) \cong \mathrm{Tot}(E_\infty)^4 = E_\infty^{4,0}\oplus E_\infty^{1,3}\cong \mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2,$$

o que contradiz a Proposição 1.8, pois $H^j(P(1,1)) = \{0\}$, para $j > 3$. Portanto, a hipótese $d_4^{0,3}(1 \otimes (cd)) = 0$ não se realiza quando $n = 1$.

Para $n > 1$, temos a seguinte configuração:

$$\begin{tikzcd}
E_5^{0,2n+1} \arrow[rrrrrdddd, dashed, "d_5"] & E_5^{1,2n+1} & E_5^{2,2n+1} & E_5^{3,2n+1} & E_5^{4,2n+1} & E_5^{5,2n+1} & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
E_5^{0,2n-1} & E_5^{1,2n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
E_5^{0,2n-2} & E_5^{1,2n-2} & E_5^{2,2n-2} & E_5^{3,2n-2} & E_5^{4,2n-2} & E_5^{5,2n-2} & \cdots \\
E_5^{0,2n-3} & E_5^{1,2n-3} & E_5^{2,2n-3} & E_5^{3,2n-3} & E_5^{4,2n-3} & E_5^{5,2n-3} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
E_5^{0,4} \arrow[rrrrrdddd, dashed, "d_5"] & E_5^{1,4} & E_5^{2,4} & E_5^{3,4} & E_5^{4,4} & E_5^{5,4} & \cdots \\
E_5^{0,3} & E_5^{1,3} & E_5^{2,3} & E_5^{3,3} & E_5^{4,3} & E_5^{5,3} & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
E_5^{0,1} & E_5^{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
E_5^{0,0} & E_5^{1,0} & E_5^{2,0} & E_5^{3,0} & E_5^{4,0} & E_5^{5,0} & \cdots
\end{tikzcd}$$

Analisemos o que pode ocorrer com o diferencial

$$d_5^{p,q} : E_5^{p,q} \longrightarrow E_5^{p+5,q-4}.$$

Os diferenciais $d_5^{p,0}$, $d_5^{p,1}$, $d_5^{p,2}$ e $d_5^{p,3}$ são triviais, por razões dimensionais. Consideremos $q > 3$.

$$\begin{aligned}
q \equiv 2 \pmod 4 \quad &\Longrightarrow \quad E_5^{p,q} = \{0\}, \\
q \equiv 1 \pmod 4 \quad &\Longrightarrow \quad E_5^{p+5,q-4} = \{0\}.
\end{aligned}$$

Assim, se $q \equiv 1 \pmod 4$ ou $q \equiv 2 \pmod 4$, então $d_5^{p,q} = 0$. No entanto, quando $q \equiv 0 \pmod 4$ ou $q \equiv 3 \pmod 4$, temos $E_5^{p,q} \neq \{0\} \neq E_5^{p+5,q-4}$ e devemos avaliar a ação do diferencial sobre o gerador.

Primeiramente, suponhamos $q\equiv 0 \pmod 4$ e seja $1\otimes d^{\frac{q}{2}}\in E_5^{0,q}$ o gerador. Quando $q=4$, não conseguimos decompor o elemento $1\otimes d^2$ em E_5. Se $q>4$, podemos escrever

$$1\otimes d^{\frac{q}{2}}=(1\otimes d^2)\cdot(1\otimes d^{\frac{q-4}{2}}).$$

Se $\frac{q-4}{2}>2$, ou seja, $q>8$, podemos decompor novamente

$$1\otimes d^{\frac{q-4}{2}}=(1\otimes d^2)\cdot(1\otimes d^{\frac{q-8}{2}}).$$

Isto se repete até obtermos o produto

$$1\otimes d^4=(1\otimes d^2)\cdot(1\otimes d^2).$$

Aplicando a regra de Leibniz de maneira recorrente, $d_5^{p,q}$, com $q\equiv 0 \pmod 4$, fica completamente determinado pelo valor de $d_5^{0,4}(1\otimes d^2)$.

Agora, suponhamos $q\equiv 3 \pmod 4$ e seja $1\otimes(cd^{\frac{q-1}{2}})\in E_5^{0,q}$ o gerador. Como $\frac{q-1}{2}\equiv 1 \pmod 2$, escrevemos

$$1\otimes(cd^{\frac{q-1}{2}})=(1\otimes(cd))\cdot(1\otimes d^{\frac{q-3}{2}})$$

e obtemos

$$\begin{aligned} d_5^{0,q}(1\otimes(cd^{\frac{q-1}{2}})) &= \underbrace{d_5^{0,3}(1\otimes(cd))}_{0}\cdot(1\otimes d^{\frac{q-3}{2}})+(1\otimes(cd))\cdot d_5^{0,q-3}(1\otimes d^{\frac{q-3}{2}}) \\ &= (1\otimes(cd))\cdot d_5^{0,q-3}(1\otimes d^{\frac{q-3}{2}}), \end{aligned}$$

onde $q-3\equiv 0 \pmod 4$. Assim, o diferencial $d_5^{p,q}$, com $q\equiv 3 \pmod 4$, também depende do valor de $d_5^{0,4}(1\otimes d^2)$.

Vamos supor que $d_5^{0,4}(1\otimes d^2)=0$. Dessa forma, $d_5=0$ e $E_6=\ldots=E_3$. Seja $s\geq 6$ e suponhamos que $E_s=E_6$. Provaremos que o diferencial

$$d_s^{p,q}:E_s^{p,q}\longrightarrow E_s^{p+s,q+1-s}$$

é trivial. Por razões dimensionais, temos

$$d_s^{0,1}(1\otimes c)=0,\ \ d_s^{0,3}(1\otimes(cd))=0\ \text{ e }\ d_s^{0,4}(1\otimes d^2)=0.$$

Consequentemente,

$$d_s^{0,q}(1\otimes d^{\frac{q}{2}})\overset{\star}{=}0,\ \text{para } q\equiv 0 \pmod 4.$$

Se $q\equiv 1 \pmod 4$ e $1\otimes(cd^{\frac{q-1}{2}})\in E_s^{0,q}$ é o gerador, então $\frac{q-1}{2}\equiv 0 \pmod 2$ e

$$d_s^{0,q}(1\otimes(cd^{\frac{q-1}{2}}))=\underbrace{d_s^{0,1}(1\otimes c)}_{0}\cdot(1\otimes d^{\frac{q-1}{2}})+(1\otimes c)\cdot\underbrace{d_s^{0,q-1}(1\otimes d^{\frac{q-1}{2}})}_{\star}=0.$$

Se $q\equiv 3 \pmod 4$ e $1\otimes(cd^{\frac{q-1}{2}})\in E_s^{0,q}$ é o gerador, então $\frac{q-1}{2}\equiv 1 \pmod 2$ e

$$d_s^{0,q}(1\otimes(cd^{\frac{q-1}{2}}))=\underbrace{d_s^{0,3}(1\otimes(cd))}_{0}\cdot(1\otimes d^{\frac{q-3}{2}})+(1\otimes(cd))\cdot\underbrace{d_s^{0,q-3}(1\otimes d^{\frac{q-3}{2}})}_{\star}=0.$$

Quando $q \equiv 2 \pmod 4$, $E_s^{p,q} = \{0\}$. Assim, $d_s^{0,q} = 0$, para todo q, o que implica que $d_s = 0$. Portanto, a sequência colapsa no E_3-termo e $E_\infty \cong E_3$. Mas

$$H^{2n+2}(P(1,n)_{\mathbb{Z}_2}) \cong E_\infty^{2n+2,0} \oplus E_\infty^{2n-1,3} \oplus \ldots \oplus E_\infty^{4,2n-2} \oplus E_\infty^{1,2n+1} = \mathbb{Z}_2^{n+1},$$

o que contradiz a Proposição 1.8, pois $H^j(P(1,n)) = \{0\}$, para $j > 2n+1$.

Por isso, devemos ter $d_5^{0,4}(1 \otimes d^2) \neq 0$.

Lema 3.4. *Se $d_5^{0,4}(1 \otimes d^2) = t^5 \otimes 1$, então para $q \equiv 0$ (mod 4), temos:*

$$d_5^{0,q}(1 \otimes d^{\frac{q}{2}}) = \begin{cases} t^5 \otimes d^{\frac{q-4}{2}}, & se\ q \equiv 4 \pmod 8, \\ 0, & se\ q \equiv 0 \pmod 8. \end{cases}$$

Consequentemente, para $q \equiv 3 \pmod 4$,

$$d_5^{0,q}(1 \otimes (cd^{\frac{q-1}{2}})) = (1 \otimes (cd)) \cdot d_5^{0,q-3}(1 \otimes d^{\frac{q-3}{2}}) = \begin{cases} t^5 \otimes (cd^{\frac{q-5}{2}}), & \text{se } q \equiv 7 \pmod 8, \\ 0, & \text{se } q \equiv 3 \pmod 8. \end{cases}$$

Em suma, o diferencial

$$d_5^{p,q} : E_5^{p,q} \longrightarrow E_5^{p+5,q-4}, \quad 0 \leq q \leq 2n+1,$$

é um isomorfismo quando $q \equiv 4 \pmod 8$ ou $q \equiv 7 \pmod 8$, e é trivial nos demais casos. Agora, vamos investigar o E_6-termo, sabendo que

$$E_6^{p,q} = \frac{\ker(d_5^{p,q})}{\operatorname{im}(d_5^{p-5,q+4})}.$$

Se $q \equiv 1 \pmod 4$ ou $q \equiv 2 \pmod 4$, então $d_5^{p,q} = 0 = d_5^{p-5,q+4}$, o que implica que $E_6^{p,q} = E_5^{p,q}$.

Quando $q \equiv 0 \pmod 4$ ou $q \equiv 3 \pmod 4$, os diferenciais $d_5^{p,q}$ e $d_5^{p-5,q+4}$ podem ser triviais ou isomorfismos, dependendo da congruência módulo 8 de q, que, por sua vez, depende da congruência módulo 4 de n. Temos a seguinte tabela:

	$q \equiv 0 \pmod 8$	$q \equiv 4 \pmod 8$	$q \equiv 3 \pmod 8$	$q \equiv 7 \pmod 8$
$n \equiv 1$ (mod 4)	$q \in \{0,\ldots,2n-2\}$ $d_5^{p,q} = 0$	$q \in \{4,\ldots,2n-6\}$ $d_5^{p,q}$ é isomorfismo	$q \in \{3,\ldots,2n+1\}$ $d_5^{p,q} = 0$	$q \in \{7\ldots,2n-3\}$ $d_5^{p,q}$ é isomorfismo
$n \equiv 3$ (mod 4)	$q \in \{0,\ldots,2n-6\}$ $d_5^{p,q} = 0$	$q \in \{4,\ldots,2n-2\}$ $d_5^{p,q}$ é isomorfismo	$q \in \{3,\ldots,2n-3\}$ $d_5^{p,q} = 0$	$q \in \{7,\ldots,2n+1\}$ $d_5^{p,q}$ é isomorfismo

Inicialmente, suponhamos $n\equiv 1 \pmod 4$. Então, para $q\equiv 0 \pmod 4$ ou $q\equiv 3 \pmod 4$,

$$E_6^{p,q}=\begin{cases}\begin{cases}E_5^{p,q}, & p<5,\\ \{0\}, & p\geq 5,\end{cases} & \text{se } q\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 8) \text{ ou } q\equiv 3 \ (\mathrm{mod}\ 8) \text{ e } q\notin\{2n-2,2n+1\},\\[2ex] E_5^{p,q}, & \text{se } q\in\{2n-2,2n+1\},\\[2ex] \{0\}, & \text{se } q\equiv 4 \ (\mathrm{mod}\ 8) \text{ ou } q\equiv 7 \ (\mathrm{mod}\ 8).\end{cases}$$

Os módulos do E_6-termo estão esquematizados abaixo. Observemos que as linhas $2n-2$ e $2n+1$ sobreviveram nesse estágio.

$$\begin{array}{ccccccc}
E_6^{0,2n+1} & E_6^{1,2n+1} & E_6^{2,2n+1} & E_6^{3,2n+1} & E_6^{4,2n+1} & E_6^{5,2n+1} & \cdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\
E_6^{0,2n-1} & E_6^{1,2n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\
E_6^{0,2n-2} & E_6^{1,2n-2} & E_6^{2,2n-2} & E_6^{3,2n-2} & E_6^{4,2n-2} & E_6^{5,2n-2} & \cdots\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
E_6^{0,5} & E_6^{1,5} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\
E_6^{0,3} & E_6^{1,3} & E_6^{2,3} & E_6^{3,3} & E_6^{4,3} & 0 & \cdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\
E_6^{0,1} & E_6^{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\
E_6^{0,0} & E_6^{1,0} & E_6^{2,0} & E_6^{3,0} & E_6^{4,0} & 0 & \cdots
\end{array}$$

Seja $s\geq 6$ e suponhamos que $E_s=E_6$. Para todo $q\in\{0,1,\dots,2n+1\}$, temos

$$\mathrm{im}(d_s^{p,q})\subseteq E_s^{p+s,q+1-s}=\{0\}\ \ (q+1-s\leq 2n-4).$$

Assim, $d_s=0$ e a sequência colapsa no E_6-termo, o que significa que $E_\infty\cong E_6$. No entanto,

$$H^{2n+2}(P(1,n)_{\mathbb{Z}_2})\cong E_\infty^{1,2n+1}\oplus E_\infty^{4,2n-2}=\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2,$$

o que contradiz a Proposição 1.8. Portanto, a hipótese $d_4^{0,3}(1\otimes(cd))=0$ não se verifica quando $n\equiv 1$ (mod 4).

Para $n\equiv 3$ (mod 4) e $q\equiv 0$ (mod 4) ou $q\equiv 3$ (mod 4), temos

$$E_6^{p,q}=\begin{cases}\begin{cases}E_5^{p,q}, & p<5,\\ \{0\}, & p\geq 5,\end{cases} & \text{se } q\equiv 0 \text{ (mod 8) ou } q\equiv 3 \text{ (mod 8)},\\ \qquad\qquad \{0\}, & \text{se } q\equiv 4 \text{ (mod 8) ou } q\equiv 7 \text{ (mod 8)}.\end{cases}$$

Representamos os módulos do E_6-termo no diagrama abaixo.

$$\begin{array}{ccccccc}
E_6^{0,2n-1} & E_6^{1,2n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots\\
E_6^{0,2n-3} & E_6^{1,2n-3} & E_6^{2,2n-3} & E_6^{3,2n-3} & E_6^{4,2n-3} & 0 & \dots\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
E_6^{0,8} & E_6^{1,8} & E_6^{2,8} & E_6^{3,8} & E_6^{4,8} & 0 & \dots\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots\\
E_6^{0,5} & E_6^{1,5} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots\\
E_6^{0,3} & E_6^{1,3} & E_6^{2,3} & E_6^{3,3} & E_6^{4,3} & 0 & \dots\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots\\
E_6^{0,1} & E_6^{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots\\
E_6^{0,0} & E_6^{1,0} & E_6^{2,0} & E_6^{3,0} & E_6^{4,0} & 0 & \dots
\end{array}$$

De modo similar ao caso $n\equiv 1 \pmod 4$, concluímos que a sequência colapsa no E_6-termo. Temos:

$$H^j(P(1,n)_{\mathbb{Z}_2})\cong \bigoplus_{j=p+q} E_\infty^{p,q} = \begin{cases} \mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2, & j\neq 0,7,8,15,\ldots,2n-6,2n+1 \text{ e } j<2n+1,\\ \mathbb{Z}_2, & j=0,7,8,15,\ldots,2n-6,2n+1,\\ \{0\}, & j>2n+1.\end{cases}$$

Determinemos a estrutura do anel de cohomologia $H^*(P(1,n)_{\mathbb{Z}_2})$. Consideremos $x=\pi^*(t)\in H^1(P(1,n)_{\mathbb{Z}_2})$, como na Seção 3.1. Então

$$x\in E_\infty^{1,0},\;\; x^5\in E_\infty^{5,0}=\{0\} \;\text{ e}$$

$$x^p=\pi^*(t^p)\neq 0,\;\text{ quando }\; p=1,2,3,4.$$

Os elementos $1\otimes c\in E_2^{0,1}$, $1\otimes(cd)\in E_2^{0,3}$, $1\otimes(cd^2)\in E_2^{0,5}$ e $1\otimes d^4\in E_2^{0,8}$ são cociclos permanentes e determinam os elementos não nulos $\mathbf{y}\in E_\infty^{0,1}$, $\mathbf{z}\in E_\infty^{0,3}$, $\mathbf{w}\in E_\infty^{0,5}$ e $\mathbf{v}\in E_\infty^{0,8}$, respectivamente. Temos

$$\mathbf{y}^2=0,\; x^2\mathbf{y}=0,\; \mathbf{z}^2=0,\; \mathbf{yz}=0,\; \mathbf{w}^2=0,\; x^2\mathbf{w}=0,\; \mathbf{yw}=0,\; \mathbf{zw}=0,\; \mathbf{v}^{\frac{n+1}{4}}=0,$$

pois $\mathbf{y}^2\in E_\infty^{0,2}=\{0\}$, $x^2\mathbf{y}\in E_\infty^{2,1}=\{0\}$, $\mathbf{z}^2\in E_\infty^{0,6}=\{0\}$, $\mathbf{yz}\in E_\infty^{0,4}=\{0\}$, $\mathbf{w}^2\in E_\infty^{0,10}=\{0\}$, $x^2\mathbf{w}\in E_\infty^{2,5}=\{0\}$, $\mathbf{yw}\in E_\infty^{0,6}=\{0\}$, $\mathbf{v}^{\frac{n+1}{4}}\in E_\infty^{2n+2}=\{0\}$ e $\mathbf{zw}$ é a classe do produto

$$(1\otimes(cd))\cdot(1\otimes(cd^2))=1\otimes(c^2d^3)=0.$$

Assim, concluímos que

$$\mathrm{Tot}(E_\infty)\cong \frac{\mathbb{Z}_2[x,\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{w},\mathbf{v}]}{\langle x^5,\mathbf{y}^2,\mathbf{z}^2,\mathbf{w}^2,\mathbf{v}^{\frac{n+1}{4}},x^2\mathbf{y},\mathbf{yz},x^2\mathbf{w},\mathbf{yw},\mathbf{zw}\rangle}$$

como uma álgebra graduada comutativa, com $\deg(x)=\deg(\mathbf{y})=1$, $\deg(\mathbf{z})=3$, $\deg(\mathbf{w})=5$ e $\deg(\mathbf{v})=8$.

Pelo Teorema 1.46, temos

$$i^*: H^q(P(1,n)_{\mathbb{Z}_2})\twoheadrightarrow E_\infty^{0,q}\cong E_{q+2}^{0,q}\hookrightarrow E_{q+1}^{0,q}\hookrightarrow\cdots\hookrightarrow E_2^{0,q}\cong H^q(P(1,n)).$$

Uma vez que $E_3^{0,1}=E_2^{0,1}$, o homomorfismo i^* é sobrejetor no nível 1, ou seja, existe um elemento não nulo $y\in H^1(P(1,n)_{\mathbb{Z}_2})$ tal que $i^*(y)=c$, em que $y\neq x$, pois $i^*(x)=0$. Então y representa $\mathbf{y}$ e

$$y^2=a_1x^2+b_1xy,\;\text{ para algum }\;(a_1,b_1)\in\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2.$$

De maneira análoga, existe $z\in H^3(P(1,n)_{\mathbb{Z}_2})$ tal que $i^*(z)=cd$. Claramente, $z\neq x^3$, já que $i^*(x^3)=i^*(x)^3=0$. Então z representa $\mathbf{z}$ e

$$\begin{aligned} x^2y &= a_2x^3+b_2z,\;\text{ para algum }\;(a_2,b_2)\in\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2,\\ yz &= a_3x^4+b_3xz,\;\text{ para algum }\;(a_3,b_3)\in\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2.\end{aligned}$$

Similarmente, existe $w \in H^5(P(1,n)_{\mathbb{Z}_2})$ tal que $i^*(w) = cd^2$. Observemos que $w \neq x^2z$, pois $i^*(x^2z) = i^*(x)^2 i^*(w) = 0$. Temos,

$$i^*(w') = i^*(w) = cd^2, \text{ onde } w' = x^2z + w.$$

Em $\mathrm{Tot}(E_\infty)$, vale a relação $x^2\mathbf{w} = 0$. Em $H^*(P(1,n)_{\mathbb{Z}_2})$, temos

$$x^2w' + x^2w = x^4z,$$

onde $x^4z \in H^7(P(1,n)_{\mathbb{Z}_2}) \cong \mathbb{Z}_2$ é o gerador. Logo, $x^2w' = 0$ ou $x^2w = 0$. Por isto, é possível escolher um elemento em $H^5(P(1,n)_{\mathbb{Z}_2})$, digamos w, tal que $i^*(w) = cd^2$ e $x^2w = 0$. Dessa forma, w representa $\mathbf{w}$ e

$$\begin{array}{rcl} z^2 &=& a_4x^3z + b_4xw, \text{ para algum } (a_4,b_4) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \\ yw &=& a_5x^3z + b_5xw, \text{ para algum } (a_5,b_5) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2. \end{array}$$

Como $H^8(P(1,n)_{\mathbb{Z}_2}) \cong E_\infty^{0,8} \cong \cdots \cong E_2^{0,8}$, o homomorfismo

$$i^* : H^8(P(1,n)_{\mathbb{Z}_2}) \longrightarrow H^8(P(1,n))$$

é um isomorfismo. Logo, existe um único $v \in H^8(P(1,n)_{\mathbb{Z}_2})$ tal que $i^*(v) = d^4$. Assim, v representa $\mathbf{v}$ e satisfaz $v^{\frac{n+1}{4}} \in H^{2n+2}(P(1,n)_{\mathbb{Z}_2}) = \{0\}$. Para $0 \leq j \leq \frac{n-3}{4}$, temos

$$\begin{array}{rcl} i^*(v^j) &=& i^*(v)^j = d^{4j} \neq 0, \\ i^*(yv^j) &=& i^*(y)i^*(v)^j = cd^{4j} \neq 0, \\ i^*(zv^j) &=& i^*(z)i^*(v)^j = cd^{4j+1} \neq 0, \\ i^*(wv^j) &=& i^*(w)i^*(v)^j = cd^{4j+2} \neq 0. \end{array}$$

Em $H^*(P(1,n)_{\mathbb{Z}_2})$, vale

$$w^2 = a_6x^2v + b_6xyv, \text{ para algum } (a_6,b_6) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.$$

Uma vez que $zw \in H^8(P(1,n)_{\mathbb{Z}_2})$ e

$$i^*(zw) = i^*(z)i^*(w) = c^2d^3 = 0,$$

concluímos que $zw = 0$, pois i^* é um isomorfismo no nível 8.

Portanto,

$$H^*(P(1,n)_{\mathbb{Z}_2}) \cong \frac{\mathbb{Z}_2[x,y,z,w,v]}{\phi(x,y,z,w,v)},$$

onde

$$\begin{array}{rcl} \phi(x,y,z,w,v) &=& \langle x^5,\ y^2 + a_1x^2 + b_1xy,\ x^2y + a_2x^3 + b_2z,\ yz + a_3x^4 + b_3xz,\ x^2w, \\ && z^2 + a_4x^3z + b_4xw,\ yw + a_5x^3z + b_5xw,\ v^{\frac{n+1}{4}},\ w^2 + a_6x^2v + b_6xyv,\ zw\rangle, \end{array}$$

com $\deg(x)=\deg(y)=1$, $\deg(z)=3$, $\deg(w)=5$, $\deg(v)=8$ e $(a_k,b_k)\in\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$, para $1\leq k\leq 6$.

Em particular, quando $n=3$, temos $v=0$, pois $H^8(P(1,3)_{\mathbb{Z}_2})=\{0\}$. Assim,

$$H^*(P(1,3)_{\mathbb{Z}_2})\cong\frac{\mathbb{Z}_2[x,y,z,w]}{\phi(x,y,z,w)},$$

onde

$$\begin{aligned}\phi(x,y,z,w) \;=\; &\langle x^5,\ y^2+a_1x^2+b_1xy,\ x^2y+a_2x^3+b_2z,\ yz+a_3x^4+b_3xz,\\ &x^2w,\ z^2+a_4x^3z+b_4xw,\ yw+a_5x^3z+b_5xw,\ w^2,\ zw\rangle,\end{aligned}$$

com $\deg(x)=\deg(y)=1$, $\deg(z)=3$, $\deg(w)=5$ e $(a_k,b_k)\in\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$, para $1\leq k\leq 5$.

Dado que $\mathbb{Z}_2$ age livremente sobre $P(1,n)$, $H^*(P(1,n)/\mathbb{Z}_2)$ é isomorfo a $H^*(P(1,n)_{\mathbb{Z}_2})$ como um anel e obtemos o item (iv). Isto completa a demonstração do Teorema 2.2.

Demonstração do Lema 3.3. Se $\ell=0$, então $d_2^{0,0}=0$, pois $\mathrm{im}(d_2^{0,0})\subset E_2^{2,-1}=\{0\}$. Por hipótese, $d_2^{0,2}(1\otimes d)=t^2\otimes c$. Para $\ell=2$, temos

$$\begin{aligned}d_2^{0,4}(1\otimes d^2) &= d_2^{0,4}((1\otimes d)\cdot(1\otimes d))\\ &= d_2^{0,2}(1\otimes d)\cdot(1\otimes d)+(1\otimes d)\cdot d_2^{0,2}(1\otimes d)\\ &= (t^2\otimes c)\cdot(1\otimes d)+(1\otimes d)\cdot(t^2\otimes c)\\ &= 2t^2\otimes(cd)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Se $\ell=3$, então

$$\begin{aligned}d_2^{0,6}(1\otimes d^3) &= d_2^{0,6}((1\otimes d)\cdot(1\otimes d^2))\\ &= d_2^{0,2}(1\otimes d)\cdot(1\otimes d^2)+(1\otimes d)\cdot\underbrace{d_2^{0,4}(1\otimes d^2)}_{0}\\ &= (t^2\otimes c)\cdot(1\otimes d^2)\\ &= t^2\otimes(cd^2).\end{aligned}$$

Vamos supor que

$$d_2^{0,2\ell}(1\otimes d^\ell)=\begin{cases} t^2\otimes(cd^{\ell-1}), & \text{se } \ell\equiv 1 \pmod 2,\\ 0, & \text{se } \ell\equiv 0 \pmod 2,\end{cases} \tag{$\spadesuit$}$$

com $0\leq\ell<n$.

Para $\ell+1$, temos:

$$\begin{aligned}d_2^{0,2(\ell+1)}(1\otimes d^{\ell+1}) &= d_2^{0,2(\ell+1)}((1\otimes d)\cdot(1\otimes d^\ell))\\ &= d_2^{0,2}(1\otimes d)\cdot(1\otimes d^\ell)+(1\otimes d)\cdot d_2^{0,2\ell}(1\otimes d^\ell)\\ &= t^2\otimes(cd^\ell)+(1\otimes d)\cdot d_2^{0,2\ell}(1\otimes d^\ell).\end{aligned}$$

Se $\ell \equiv 0 \pmod 2$, então $\ell+1 \equiv 1 \pmod 2$ e

$$d_2^{0,2(\ell+1)}(1\otimes d^{\ell+1}) = t^2\otimes(cd^{\ell}).$$

Se $\ell \equiv 1 \pmod 2$, então $\ell+1 \equiv 0 \pmod 2$ e

$$\begin{aligned} d_2^{0,2(\ell+1)}(1\otimes d^{\ell+1}) &= t^2\otimes(cd^{\ell})+(1\otimes d)\cdot(t^2\otimes(cd^{\ell-1})) \\ &= t^2\otimes(cd^{\ell})+t^2\otimes(cd^{\ell}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, ($\spadesuit$) vale para todo $\ell\in\{0,1,\dots,n\}$.

Demonstração do Lema 3.4. Devido a razões dimensionais, temos $d_5^{0,0}=0$. Por hipótese, $d_5^{0,4}(1\otimes d^2)=t^5\otimes 1$. Para $q=8$,

$$\begin{aligned} d_5^{0,8}(1\otimes d^4) &= d_5^{0,8}((1\otimes d^2)\cdot(1\otimes d^2)) \\ &= d_5^{0,4}(1\otimes d^2)\cdot(1\otimes d^2)+(1\otimes d^2)\cdot d_5^{0,4}(1\otimes d^2) \\ &= (t^5\otimes 1)\cdot(1\otimes d^2)+(1\otimes d^2)\cdot(t^5\otimes 1) \\ &= 2t^5\otimes d^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Se $q=12$, então

$$\begin{aligned} d_5^{0,12}(1\otimes d^6) &= d_5^{0,12}((1\otimes d^2)\cdot(1\otimes d^4)) \\ &= d_5^{0,4}(1\otimes d^2)\cdot(1\otimes d^4)+(1\otimes d^2)\cdot\underbrace{d_5^{0,8}(1\otimes d^4)}_{0} \\ &= (t^5\otimes 1)\cdot(1\otimes d^4) \\ &= t^5\otimes d^4. \end{aligned}$$

Vamos supor que

$$d_5^{0,q}(1\otimes d^{\frac{q}{2}}) = \begin{cases} t^5\otimes d^{\frac{q-4}{2}}, & \text{se } q\equiv 4 \pmod 8, \\ 0, & \text{se } q\equiv 0 \pmod 8, \end{cases} \tag{$\bigstar$}$$

com $q\equiv 0 \pmod 4$ e $q<2n-2$.

Para $q+4$, temos:

$$\begin{aligned} d_5^{0,q+4}(1\otimes d^{\frac{q+4}{2}}) &= d_5^{0,q+4}((1\otimes d^2)\cdot(1\otimes d^{\frac{q}{2}})) \\ &= d_5^{0,4}(1\otimes d^2)\cdot(1\otimes d^{\frac{q}{2}})+(1\otimes d^2)\cdot d_5^{0,q}(1\otimes d^{\frac{q}{2}}) \\ &= t^5\otimes d^{\frac{q}{2}}+(1\otimes d^2)\cdot d_5^{0,q}(1\otimes d^{\frac{q}{2}}). \end{aligned}$$

Se $q\equiv 0 \pmod 8$, então $q+4\equiv 4 \pmod 8$ e

$$d_5^{0,q+4}(1\otimes d^{\frac{q+4}{2}}) = t^5\otimes d^{\frac{q}{2}}.$$

Se $q\equiv 4 \pmod 8$, então $q+4\equiv 0 \pmod 8$ e

$$\begin{aligned} d_5^{0,q+4}(1\otimes d^{\frac{q+4}{2}}) &= t^5\otimes d^{\frac{q}{2}}+(1\otimes d^2)\cdot(t^5\otimes d^{\frac{q-4}{2}}) \\ &= t^5\otimes d^{\frac{q}{2}}+t^5\otimes d^{\frac{q}{2}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, ($\bigstar$) vale para todo $q\equiv 0 \pmod 4$.

CAPÍTULO

4

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 2.6

Consideremos a sequência espectral cohomológica de Leray-Serre (Teorema 1.41) associada à fibração de Borel

$$P(2n,n) \overset{i}{\hookrightarrow} P(2n,n)_{\mathbb{Z}_2} \xrightarrow{\pi} B_{\mathbb{Z}_2}.$$

Uma vez que o Corolário 2.5 nos garante que $\pi_1(B_{\mathbb{Z}_2}) = \mathbb{Z}_2$ age trivialmente sobre $H^*(P(2n,n))$, segue da Proposição 1.43 que

$$E_2^{p,q} = H^p(B_{\mathbb{Z}_2}) \otimes_{\mathbb{Z}_2} H^q(P(2n,n)).$$

Como a ação de $\mathbb{Z}_2$ sobre $P(2n,n)$ é livre, decorre da Proposição 1.47 que a sequência não colapsa no E_2-termo. Seja $r \geq 2$ o menor inteiro tal que d_r é não trivial. Assim, $E_2 = \cdots = E_r$, e

$$d_r^{0,1}(1 \otimes c) \neq 0 \ \text{ ou } \ d_r^{0,2}(1 \otimes d) \neq 0.$$

Tal como no Teorema 2.2, as únicas opções para r são 2 ou 3. Assim, o estudo é dividido nos casos abaixo:

- $d_3^{0,1}(1 \otimes c) = 0$ e $d_3^{0,2}(1 \otimes d) \neq 0$ (Seção 4.1)
- $d_2^{0,1}(1 \otimes c) \neq 0$ e $d_2^{0,2}(1 \otimes d) = 0$ (Seção 4.2)
- $d_2^{0,1}(1 \otimes c) = 0$ e $d_2^{0,2}(1 \otimes d) \neq 0$ (Seção 4.3)

A hipótese $d_2^{0,1}(1 \otimes c) \neq 0$ e $d_2^{0,2}(1 \otimes d) \neq 0$ não pode ocorrer. Se $t \in H^1(B_G)$ é o gerador, $d_2^{0,1}(1 \otimes c) = t^2 \otimes 1$ e $d_2^{0,2}(1 \otimes d) = t^2 \otimes c$, então o diferencial

$$d_2^{p,1} : E_2^{p,1} = \langle t^p \otimes c \rangle \longrightarrow E_2^{p+2,0} = \langle t^{p+2} \otimes 1 \rangle$$

é isomorfismo, para todo p, e

$$d_2^{p-2,2} : E_2^{p-2,2} = \langle t^{p-2} \otimes c^2, t^{p-2} \otimes d \rangle \longrightarrow E_2^{p,1} = \langle t^p \otimes c \rangle$$

é sobrejetor, para $p \geq 2$. Assim, para $p \geq 2$, temos

$$\operatorname{im}\left(d_2^{p-2,2}\right) \not\subseteq \ker\left(d_2^{p,1}\right),$$

o que é um absurdo.

Em virtude da análise dos diferenciais

$$E_r^{p-r,q+r-1} \xrightarrow{d_r} E_r^{p,q} \xrightarrow{d_r} E_r^{p+r,q+1-r}, \quad q \in Q = \{0,1,\ldots,4n\},$$

depender da congruência módulo 4 de q, consideraremos

$$Q = \bigcup_{j=0}^{3} Q_j,$$

com $Q_j = \{q \in Q \mid q \equiv j \ (\mathrm{mod}\ 4)\}$. Observemos que $Q_0 \cup Q_2$ corresponde aos índices pares e $Q_1 \cup Q_3$, aos índices ímpares.

Observação 4.1. Como no Capítulo 3, os lemas enunciados ao longo de cada seção serão demonstrados por recorrência ao final da mesma.

4.1 $d_3^{0,1}(1 \otimes c) = 0$ e $d_3^{0,2}(1 \otimes d) \neq 0$

Neste caso,

$$d_3^{0,k}(1 \otimes c^k) = 0, \text{ para todo } k \in \{0,1,\ldots,2n\},$$

e segue pelo Lema 3.2 que

$$d_3^{0,2\ell}(1 \otimes d^\ell) = \begin{cases} t^3 \otimes d^{\ell-1}, & \text{se } \ell \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 2), \\ 0, & \text{se } \ell \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 2), \end{cases}$$

para todo $\ell \in \{0,1,\ldots,n\}$.

Se $1 \otimes (c^k d^\ell) \in E_3^{0,q}$ é um gerador, com $q = k + 2\ell$, onde $k \in \{0,1,\ldots,2n\}$ e $\ell \in \{0,1,\ldots,n\}$, então

$$d_3^{0,q}(1 \otimes (c^k d^\ell)) = d_3^{0,q}((1 \otimes c^k) \cdot (1 \otimes d^\ell)) = \begin{cases} t^3 \otimes (c^k d^{\ell-1}), & \text{se } \ell \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 2), \\ 0, & \text{se } \ell \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 2). \end{cases}$$

Logo, para todo $p \geq 0$,

$$d_3^{p,q}(t^p \otimes (c^k d^\ell)) = d_3^{p,q}((t^p \otimes 1) \cdot (1 \otimes (c^k d^\ell))) = \begin{cases} t^{p+3} \otimes (c^k d^{\ell-1}), & \text{se } \ell \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 2), \\ 0, & \text{se } \ell \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 2). \end{cases}$$

Faremos o estudo dos diferenciais

$$E_3^{p-3,q+2} \xrightarrow{d_3} E_3^{p,q} \xrightarrow{d_3} E_3^{p+3,q-2},$$

para todo $q \in Q$, a fim de determinarmos o E_4-termo.

- $q\in Q_0\cup Q_2$ e $q<2n$

Temos

$$E_3^{p,q}=\langle t^p\otimes c^q, t^p\otimes(c^{q-2}d), t^p\otimes(c^{q-4}d^2),\ldots,t^p\otimes(c^2d^{\frac{q-2}{2}}),t^p\otimes d^{\frac{q}{2}}\rangle\cong\mathbb{Z}_2^{\frac{q+2}{2}}.$$

Se $p\geq 3$, então

$$E_3^{p-3,q+2}=\langle t^{p-3}\otimes c^{q+2}, t^{p-3}\otimes(c^qd), t^{p-3}\otimes(c^{q-2}d^2),\ldots,t^{p-3}\otimes(c^2d^{\frac{q}{2}}),t^{p-3}\otimes d^{\frac{q+2}{2}}\rangle.$$

Quando $p<3$, $E_3^{p-3,q+2}=\{0\}$.

Logo,

$$\ker(d_3^{p,q})=\begin{cases}\langle t^p\otimes c^q, t^p\otimes(c^{q-4}d^2),\ldots,t^p\otimes d^{\frac{q}{2}}\rangle\cong\mathbb{Z}_2^{\frac{q+4}{4}}, & \text{se } q\in Q_0,\\ \langle t^p\otimes c^q, t^p\otimes(c^{q-4}d^2),\ldots,t^p\otimes(c^2d^{\frac{q-2}{2}})\rangle\cong\mathbb{Z}_2^{\frac{q+2}{4}}, & \text{se } q\in Q_2,\end{cases}$$

e

$$\operatorname{im}(d_3^{p-3,q+2})=\begin{cases}\ker(d_3^{p,q}), & \text{se } p\geq 3,\\ \{0\}, & \text{se } p<3.\end{cases}$$

- $q\in Q_0\cup Q_2$ e $q\geq 2n$

Temos

$$E_3^{p,q}=\langle t^p\otimes(c^{2n}d^{\frac{q-2n}{2}}), t^p\otimes(c^{2n-2}d^{\frac{q-2n}{2}+1}),\ldots,t^p\otimes(c^{q-2n+2}d^{n-1}),t^p\otimes(c^{q-2n}d^n)\rangle\cong\mathbb{Z}_2^{\frac{4n+2-q}{2}}.$$

Se $p\geq 3$ e $q\neq 4n$, então

$$E_3^{p-3,q+2}=\langle t^{p-3}\otimes(c^{2n}d^{\frac{q-2n}{2}+1}), t^{p-3}\otimes(c^{2n-2}d^{\frac{q-2n}{2}+2}),\ldots,t^{p-3}\otimes(c^{q-2n+2}d^n)\rangle.$$

Quando $p<3$ ou $q=4n$, $E_3^{p-3,q+2}=\{0\}$.

Assim,

$$\ker(d_3^{p,q})=\begin{cases}\langle t^p\otimes(c^{2n-2}d^{\frac{q-2n}{2}+1}),\ldots,t^p\otimes(c^{q-2n+2}d^{n-1}\rangle\cong\mathbb{Z}_2^{\frac{4n-q}{4}}, & q\in Q_0\setminus\{4n\},\\ \langle t^p\otimes(c^{2n}d^{\frac{q-2n}{2}}),\ldots,t^p\otimes(c^{q-2n+2}d^{n-1})\rangle\cong\mathbb{Z}_2^{\frac{4n+2-q}{4}}, & q\in Q_2,\\ \{0\}, & q=4n,\end{cases}$$

e

$$\operatorname{im}(d_3^{p-3,q+2})=\begin{cases}\ker(d_3^{p,q}), & \text{se } p\geq 3,\\ \{0\}, & \text{se } p<3.\end{cases}$$

- $q\in Q_1\cup Q_3$ e $q<2n$

Temos

$$E_3^{p,q} = \langle t^p \otimes c^q, t^p \otimes (c^{q-2}d), t^p \otimes (c^{q-4}d^2), \ldots, t^p \otimes (c^3 d^{\frac{q-3}{2}}), t^p \otimes (cd^{\frac{q-1}{2}}) \rangle \cong \mathbb{Z}_2^{\frac{q+1}{2}}.$$

Se $p \geq 3$, então

$$E_3^{p-3,q+2} = \begin{cases} \langle t^{p-3} \otimes c^{q+2}, t^{p-3} \otimes (c^q d), \ldots, t^{p-3} \otimes (c^3 d^{\frac{q-1}{2}}), t^{p-3} \otimes (cd^{\frac{q+1}{2}}) \rangle, & q \neq 2n-1, \\ \langle t^{p-3} \otimes (c^{2n-1}d), \ldots, t^{p-3} \otimes (c^3 d^{n-1}), t^{p-3} \otimes (cd^n) \rangle, & q = 2n-1. \end{cases}$$

Quando $p < 3$, $E_3^{p-3,q+2} = \{0\}$.

Dessa forma,

$$\ker(d_3^{p,q}) = \begin{cases} \langle t^p \otimes c^q, t^p \otimes (c^{q-4}d^2), \ldots, t^p \otimes (cd^{\frac{q-1}{2}}) \rangle \cong \mathbb{Z}_2^{\frac{q+3}{4}}, & \text{se } q \in Q_1, \\ \langle t^p \otimes c^q, t^p \otimes (c^{q-4}d^2), \ldots, t^p \otimes (c^3 d^{\frac{q-3}{2}}) \rangle \cong \mathbb{Z}_2^{\frac{q+1}{4}}, & \text{se } q \in Q_3, \end{cases}$$

e

$$\operatorname{im}(d_3^{p-3,q+2}) = \begin{cases} \ker(d_3^{p,q}), & \text{se } p \geq 3, \\ \{0\}, & \text{se } p < 3. \end{cases}$$

- $q \in Q_1 \cup Q_3$ e $q > 2n$

Temos

$$E_3^{p,q} = \langle t^p \otimes (c^{2n-1} d^{\frac{q-2n+1}{2}}), t^p \otimes (c^{2n-3} d^{\frac{q-2n+1}{2}+1}), \ldots, t^p \otimes (c^{q-2n} d^n) \rangle \cong \mathbb{Z}_2^{\frac{4n+1-q}{2}}.$$

Se $p \geq 3$ e $q \neq 4n-1$, então

$$E_3^{p-3,q+2} = \langle t^{p-3} \otimes (c^{2n-1} d^{\frac{q-2n+1}{2}+1}), t^{p-3} \otimes (c^{2n-3} d^{\frac{q-2n+1}{2}+2}), \ldots, t^{p-3} \otimes (c^{q-2n+2} d^n) \rangle.$$

Quando $p < 3$ ou $q = 4n-1$, $E_3^{p-3,q+2} = \{0\}$.

Assim,

$$\ker(d_3^{p,q}) = \begin{cases} \langle t^p \otimes (c^{2n-1} d^{\frac{q-2n+1}{2}}), \ldots, t^p \otimes (c^{q-2n+2} d^{n-1} \rangle \cong \mathbb{Z}_2^{\frac{4n+1-q}{4}}, & q \in Q_1, \\ \langle t^p \otimes (c^{2n-3} d^{\frac{q-2n+1}{2}+1}), \ldots, t^p \otimes (c^{q-2n+2} d^{n-1}) \rangle \cong \mathbb{Z}_2^{\frac{4n-1-q}{4}}, & q \in Q_3 \setminus \{4n-1\}, \\ \{0\}, & q = 4n-1, \end{cases}$$

e

$$\operatorname{im}(d_3^{p-3,q+2}) = \begin{cases} \ker(d_3^{p,q}), & \text{se } p \geq 3, \\ \{0\}, & \text{se } p < 3. \end{cases}$$

Portanto, para qualquer $q \in Q$,

$$E_4^{p,q} = \frac{\ker(d_3^{p,q})}{\operatorname{im}(d_3^{p-3,q+2})} = \begin{cases} \ker(d_3^{p,q}), & \text{se } p < 3, \\ \{0\}, & \text{se } p \geq 3. \end{cases}$$

Vamos provar que a sequência colapsa no E_4-termo. Seja $s\geq 4$ e consideremos $E_s=E_4$. Uma vez que $p+s>2$,

$$\operatorname{im}(d_s^{p,q})\subseteq E_s^{p+s,q+1-s}=\{0\}.$$

Portanto, $d_s=0$ e $E_\infty\cong E_4$.

$$\begin{array}{cccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
E_4^{0,4n-2} & E_4^{1,4n-2} & E_4^{2,4n-2} & 0 & 0 & \cdots \\
E_4^{0,4n-3} & E_4^{1,4n-3} & E_4^{2,4n-3} & 0 & 0 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
E_4^{0,4} & E_4^{1,4} & E_4^{2,4} & 0 & 0 & \cdots \\
E_4^{0,3} & E_4^{1,3} & E_4^{2,3} & 0 & 0 & \cdots \\
E_4^{0,2} & E_4^{1,2} & E_4^{2,2} & 0 & 0 & \cdots \\
E_4^{0,1} & E_4^{1,1} & E_4^{2,1} & 0 & 0 & \cdots \\
E_4^{0,0} & E_4^{1,0} & E_4^{2,0} & 0 & 0 & \cdots
\end{array}$$

Temos:

$$H^j(P(2n,n)_{\mathbb{Z}_2})\cong \operatorname{Tot}(E_\infty)^j=\bigoplus_{j=p+q}E_\infty^{p,q}=E_\infty^{0,j}\oplus E_\infty^{1,j-1}\oplus E_\infty^{2,j-2}.$$

- $j\in Q_0=\{0,4,\ldots,2n-2,2n+2,\ldots,4n\}$

  Temos,

$$E_\infty^{0,j}\cong\begin{cases}\mathbb{Z}_2^{\frac{j+4}{4}}, & \text{se } j\leq 2n-2,\\[2ex] \mathbb{Z}_2^{\frac{4n-j}{4}}, & \text{se } j>2n-2.\end{cases}$$

  Se $j=0$, então $H^0(P(2n,n)_{\mathbb{Z}_2})\cong E_\infty^{0,0}\cong\mathbb{Z}_2$.

Suponhamos $j > 0$. Uma vez que $j-1 \in Q_3$ e $j-2 \in Q_2$, temos

$$E_\infty^{1,j-1} \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2^{\frac{(j-1)+1}{4}}, & \text{se } j \leq 2n-2, \\ \mathbb{Z}_2^{\frac{4n-1-(j-1)}{4}}, & \text{se } j > 2n-2, \end{cases} \quad \text{e } E_\infty^{2,j-2} \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2^{\frac{(j-2)+2}{4}}, & \text{se } j \leq 2n-2, \\ \mathbb{Z}_2^{\frac{4n+2-(j-2)}{4}}, & \text{se } j > 2n-2. \end{cases}$$

Assim, para $j \in Q_0$,

$$H^j(P(2n,n)_{\mathbb{Z}_2}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2^{\frac{3j+4}{4}}, & \text{se } j \leq 2n-2, \\ \mathbb{Z}_2^{\frac{12n-3j+4}{4}}, & \text{se } j > 2n-2. \end{cases}$$

- $j \in Q_1 = \{1, \ldots, 2n-1, \ldots, 4n-3\}$

  Temos,

$$E_\infty^{0,j} \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2^{\frac{j+3}{4}}, & \text{se } j \leq 2n-1, \\ \mathbb{Z}_2^{\frac{4n+1-j}{4}}, & \text{se } j > 2n-1. \end{cases}$$

  Visto que $j-1 \in Q_0$,

$$E_\infty^{1,j-1} \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2^{\frac{(j-1)+4}{4}}, & \text{se } j \leq 2n-1, \\ \mathbb{Z}_2^{\frac{4n-(j-1)}{4}}, & \text{se } j > 2n-1. \end{cases}$$

  Se $j = 1$, então $H^1(P(2n,n)_{\mathbb{Z}_2}) \cong E_\infty^{0,1} \oplus E_\infty^{1,0} \cong \mathbb{Z}_2^2$.

  Suponhamos $j > 1$. Como $j-2 \in Q_3$,

$$E_\infty^{2,j-2} \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2^{\frac{(j-2)+1}{4}}, & \text{se } j \leq 2n-1, \\ \mathbb{Z}_2^{\frac{4n-1-(j-2)}{4}}, & \text{se } j > 2n-1. \end{cases}$$

  Logo, para $j \in Q_1$,

$$H^j(P(2n,n)_{\mathbb{Z}_2}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2^{\frac{3j+5}{4}}, & \text{se } j \leq 2n-1, \\ \mathbb{Z}_2^{\frac{12n-3j+3}{4}}, & \text{se } j > 2n-1. \end{cases}$$

- $j \in Q_2 = \{2, \ldots, 2n, \ldots, 4n-2\}$

  Temos,

$$E_\infty^{0,j} \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2^{\frac{j+2}{4}}, & \text{se } j < 2n, \\ \mathbb{Z}_2^{\frac{4n+2-j}{4}}, & \text{se } j \geq 2n. \end{cases}$$

Observemos que $\frac{j+2}{4}=\frac{4n+2-j}{4}$, quando $j=2n$.

Uma vez que $j-1\in Q_1$ e $j-2\in Q_0$, temos

$$E_\infty^{1,j-1}\cong\begin{cases}\mathbb{Z}_2^{\frac{(j-1)+3}{4}}, & \text{se } j\leq 2n,\\ \mathbb{Z}_2^{\frac{4n+1-(j-1)}{4}}, & \text{se } j>2n,\end{cases}\quad \text{e}\quad E_\infty^{2,j-2}\cong\begin{cases}\mathbb{Z}_2^{\frac{(j-2)+4}{4}}, & \text{se } j\leq 2n,\\ \mathbb{Z}_2^{\frac{4n-(j-2)}{4}}, & \text{se } j>2n.\end{cases}$$

Portanto, para $j\in Q_2$,

$$H^j(P(2n,n)_{\mathbb{Z}_2})\cong\begin{cases}\mathbb{Z}_2^{\frac{3j+6}{4}}, & \text{se } j\leq 2n,\\ \mathbb{Z}_2^{\frac{12n-3j+6}{4}}, & \text{se } j>2n.\end{cases}$$

- $j\in Q_3=\{3,\ldots,2n+1,\ldots,4n-1\}$

  Temos,

$$E_\infty^{0,j}\cong\begin{cases}\mathbb{Z}_2^{\frac{j+1}{4}}, & \text{se } j<2n+1,\\ \mathbb{Z}_2^{\frac{4n-1-j}{4}}, & \text{se } j\geq 2n+1.\end{cases}$$

  Visto que $j-1\in Q_2$,

$$E_\infty^{1,j-1}\cong\begin{cases}\mathbb{Z}_2^{\frac{(j-1)+2}{4}}, & \text{se } j<2n+1,\\ \mathbb{Z}_2^{\frac{4n+2-(j-1)}{4}}, & \text{se } j\geq 2n+1.\end{cases}$$

  Como $j-2\in Q_1$,

$$E_\infty^{2,j-2}\cong\begin{cases}\mathbb{Z}_2^{\frac{(j-2)+3}{4}}, & \text{se } j\leq 2n+1,\\ \mathbb{Z}_2^{\frac{4n+1-(j-2)}{4}}, & \text{se } j>2n+1.\end{cases}$$

  Observemos que $\frac{(j-2)+3}{4}=\frac{4n+1-(j-2)}{4}$, para $j=2n+1$.

  Portanto, para $j\in Q_3$,

$$H^j(P(2n,n)_{\mathbb{Z}_2})\cong\begin{cases}\mathbb{Z}_2^{\frac{3j+3}{4}}, & \text{se } j<2n+1,\\ \mathbb{Z}_2^{\frac{12n-3j+5}{4}}, & \text{se } j\geq 2n+1.\end{cases}$$

Resumindo, $H^j(P(2n,n)_{\mathbb{Z}_2}) = \{0\}$, se $j > 4n$, e

$$H^j(P(2n,n)_{\mathbb{Z}_2}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2^{\frac{3j+4}{4}}, & \text{se } j \in Q_0 \text{ e } j \leq 2n-2, \\ \mathbb{Z}_2^{\frac{12n-3j+4}{4}}, & \text{se } j \in Q_0 \text{ e } j > 2n-2, \\ \mathbb{Z}_2^{\frac{3j+5}{4}}, & \text{se } j \in Q_1 \text{ e } j \leq 2n-1, \\ \mathbb{Z}_2^{\frac{12n-3j+3}{4}}, & \text{se } j \in Q_1 \text{ e } j > 2n-1, \\ \mathbb{Z}_2^{\frac{3j+6}{4}}, & \text{se } j \in Q_2 \text{ e } j \leq 2n, \\ \mathbb{Z}_2^{\frac{12n-3j+6}{4}}, & \text{se } j \in Q_2 \text{ e } j > 2n, \\ \mathbb{Z}_2^{\frac{3j+3}{4}}, & \text{se } j \in Q_3 \text{ e } j < 2n+1, \\ \mathbb{Z}_2^{\frac{12n-3j+5}{4}}, & \text{se } j \in Q_3 \text{ e } j \geq 2n+1. \end{cases}$$

Em seguida, determinaremos a estrutura do anel de cohomologia $H^*(P(2n,n)_{\mathbb{Z}_2})$. Para tanto, recorreremos ao Teorema 1.46, que nos garante que

$$H^p(B_{\mathbb{Z}_2}) \cong E_2^{p,0} \twoheadrightarrow E_3^{p,0} \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow E_{p+1}^{p,0} \cong E_\infty^{p,0} \hookrightarrow H^p(P(2n,n)_{\mathbb{Z}_2})$$

e

$$H^q(P(2n,n)_{\mathbb{Z}_2}) \twoheadrightarrow E_\infty^{0,q} \cong E_{q+2}^{0,q} \hookrightarrow E_{q+1}^{0,q} \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow E_2^{0,q} \cong H^q(P(2n,n))$$

são os homomorfismos

$$\pi^* : H^p(B_{\mathbb{Z}_2}) \longrightarrow H^p(P(2n,n)_{\mathbb{Z}_2})$$

e

$$i^* : H^q(P(2n,n)_{\mathbb{Z}_2}) \longrightarrow H^q(P(2n,n)),$$

respectivamente.

Seja $x = \pi^*(t) \in H^1(P(2n,n)_{\mathbb{Z}_2})$. Então,

$$x \in E_\infty^{1,0}, \;\; x^3 \in E_\infty^{3,0} = \{0\} \;\text{ e}$$

$$x^p = \pi^*(t^p) \neq 0, \;\text{ para }\; p = 1,2.$$

Os elementos $1 \otimes c \in E_2^{0,1}$ e $1 \otimes d^2 \in E_2^{0,4}$ são cociclos permanentes e determinam os elementos não nulos $\mathbf{y} \in E_\infty^{0,1}$ e $\mathbf{z} \in E_\infty^{0,4}$, respectivamente. Temos

$$\mathbf{y}^{2n+1} = 0 \;\text{ e }\; \mathbf{z}^{\frac{n+1}{2}} = 0,$$

pois $c^{2n+1}=0$ e $d^{n+1}=0$ em $H^*(P(2n,n))$.

Assim, concluímos que

$$\mathrm{Tot}(E_\infty)\cong\frac{\mathbb{Z}_2[x,\mathbf{y},\mathbf{z}]}{\langle x^3,\mathbf{y}^{2n+1},\mathbf{z}^{\frac{n+1}{2}}\rangle}$$

como uma álgebra graduada comutativa, com $\deg(x)=\deg(\mathbf{y})=1$ e $\deg(\mathbf{z})=4$.

O homomorfismo i^* é sobrejetor no nível um, visto que

$$i^*: H^1(P(2n,n)_{\mathbb{Z}_2})\twoheadrightarrow E_\infty^{0,1}\cong E_3^{0,1}=E_2^{0,1}\cong H^1(P(2n,n)).$$

Assim, existe um elemento não nulo $y\in H^1(P(2n,n)_{\mathbb{Z}_2})$ tal que $i^*(y)=c$. Observemos que $y\neq x$, pois $i^*(x)=0$. Então y representa $\mathbf{y}$ e satisfaz

$$i^*(y^k)=i^*(y)^k=c^k\neq 0,\ \text{ para }\ k=1,2,\ldots,2n.$$

Sabendo que

$$i^*: H^4(P(2n,n)_{\mathbb{Z}_2})\twoheadrightarrow E_\infty^{0,4}\cong E_4^{0,4}\hookrightarrow E_3^{0,4}=E_2^{0,4}\cong H^4(P(2n,n)),$$

podemos escrever $i^*=f\circ g$, onde

$$f: E_\infty^{0,4}\cong E_4^{0,4}\hookrightarrow E_3^{0,4}=E_2^{0,4}\cong H^4(P(2n,n))$$

e

$$g: H^4(P(2n,n)_{\mathbb{Z}_2})\twoheadrightarrow E_\infty^{0,4}.$$

Dado $\mathbf{z}\in E_\infty^{0,4}$, temos $f(\mathbf{z})=d^2$. Uma vez que g é sobrejetor, existe $z\in H^4(P(2n,n)_{\mathbb{Z}_2})$ tal que $g(z)=\mathbf{z}$, e assim, $i^*(z)=f\circ g(z)=d^2$. Claramente, $z\notin\{y^4,xy^3,x^2y^2\}$, pois

$$\begin{aligned} i^*(y^4) &= c^4,\\ i^*(xy^3) &= \underbrace{i^*(x)}_{0}i^*(y^3)=0,\\ i^*(x^2y^2) &= \underbrace{i^*(x)^2}_{0}i^*(y^2)=0. \end{aligned}$$

Então z representa $\mathbf{z}$ e satisfaz

$$i^*(y^kz^j)=i^*(y)^ki^*(z)^j=c^kd^{2j}\neq 0,\ \text{ para }\ k=0,1,2,\ldots,2n\ \text{ e }\ j=0,1,\ldots,\tfrac{n-1}{2}.$$

Embora $\mathbf{y}^{2n+1}=0$ e $\mathbf{z}^{\frac{n+1}{2}}=0$ em $\mathrm{Tot}(E_\infty)$, não podemos afirmar o mesmo a respeito de y^{2n+1} e $z^{\frac{n+1}{2}}$ em $H^*(P(2n,n)_{\mathbb{Z}_2})$. Uma vez que

$$H^{2n+1}=\langle y^{2n-3}z,\ y^{2n-7}z^2,\ldots,y^3z^{\frac{n-1}{2}},\ xy^{2n},\ xy^{2n-4}z,\ldots,xy^2z^{\frac{n-1}{2}},\ x^2y^{2n-1},\ x^2y^{2n-5}z,\ldots,x^2yz^{\frac{n-1}{2}}\rangle$$

e

$$H^{2n+2}=\langle y^{2n-2}z,\ y^{2n-6}z^2,\ldots,y^4z^{\frac{n-1}{2}},\ xy^{2n-3}z,\ xy^{2n-7}z^2,\ldots,xy^3z^{\frac{n-1}{2}},\ x^2y^{2n},\ x^2y^{2n-4}z,\ldots,x^2y^2z^{\frac{n-1}{2}}\rangle,$$

existem $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j, \varepsilon_j, \zeta_j \in \mathbb{Z}_2$, com $j = 0, 1, \ldots, \frac{n-1}{2}$, tais que

$$y^{2n+1} = \beta_0 xy^{2n} + \gamma_0 x^2 y^{2n-1} + \underbrace{\sum_{1\le j\le \frac{n-1}{2}} (\alpha_j y^{2n+1-4j} z^j + \beta_j xy^{2n-4j} z^j + \gamma_j x^2 y^{2n-1-4j} z^j)}_{n>1}$$

e

$$z^{\frac{n+1}{2}} = \zeta_0 x^2 y^{2n} + \underbrace{\sum_{1\le j\le \frac{n-1}{2}} (\delta_j y^{2n+2-4j} z^j + \varepsilon_j xy^{2n+1-4j} z^j + \zeta_j x^2 y^{2n-4j} z^j)}_{n>1}.$$

Portanto,

$$H^*(P(2n,n)_{\mathbb{Z}_2}) \cong \frac{\mathbb{Z}_2[x,y,z]}{\langle R_1,\ R_2,\ R_3\rangle},$$

onde $\deg(x) = \deg(y) = 1$, $\deg(z) = 4$ e

$$\begin{aligned}
R_1 &= x^3,\\
R_2 &= y^{2n+1} + \beta_0 xy^{2n} + \gamma_0 x^2 y^{2n-1} + \sum_{1\le j\le \frac{n-1}{2}} (\alpha_j y^{2n+1-4j} z^j + \beta_j xy^{2n-4j} z^j + \gamma_j x^2 y^{2n-1-4j} z^j),\\
R_3 &= z^{\frac{n+1}{2}} + \zeta_0 x^2 y^{2n} + \sum_{1\le j\le \frac{n-1}{2}} (\delta_j y^{2n+2-4j} z^j + \varepsilon_j xy^{2n+1-4j} z^j + \zeta_j x^2 y^{2n-4j} z^j),
\end{aligned}$$

com $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j, \varepsilon_j, \zeta_j \in \mathbb{Z}_2$, para todo $j = 0, 1, \ldots, \frac{n-1}{2}$.

Em particular, se $n = 1$, então $z = \zeta_0 x^2 y^2$, ou seja, z não é uma variável independente. Por isso, o anel é da forma

$$H^*(P(2,1)_{\mathbb{Z}_2}) \cong \frac{\mathbb{Z}_2[x,y]}{\langle x^3, y^3 + \beta_0 xy^2 + \gamma_0 x^2 y\rangle},$$

com $\deg(x) = \deg(y) = 1$ e $(\beta_0, \gamma_0) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

4.2 $d_2^{0,1}(1\otimes c) \neq 0$ e $d_2^{0,2}(1\otimes d) = 0$

Neste caso,

$$d_2^{0,2\ell}(1\otimes d^\ell) = 0, \text{ para todo } \ell \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

Lema 4.2. *Se $d_2^{0,1}(1\otimes c) = t^2 \otimes 1$, então para todo $k \in \{0, 1, \ldots, 2n\}$,*

$$d_2^{0,k}(1\otimes c^k) = \begin{cases} t^2 \otimes c^{k-1}, & se\ k \equiv 1 \pmod 2,\\ 0, & se\ k \equiv 0 \pmod 2.\end{cases}$$

Seja $1 \otimes (c^k d^\ell) \in E_2^{0,q}$ um gerador, com $q = k + 2\ell$, onde $k \in \{0, 1, \ldots, 2n\}$ e $\ell \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Temos,

$$d_2^{0,q}(1\otimes (c^k d^\ell)) = d_2^{0,q}((1\otimes c^k)\cdot(1\otimes d^\ell)) = \begin{cases} t^2 \otimes (c^{k-1} d^\ell), & \text{se } k \equiv 1 \pmod 2,\\ 0, & \text{se } k \equiv 0 \pmod 2.\end{cases}$$

Logo, para todo $p\geq 0$,

$$d_2^{p,q}(t^p\otimes(c^kd^\ell))=d_2^{p,q}((t^p\otimes 1)\cdot(1\otimes(c^kd^\ell)))=\begin{cases} t^{p+2}\otimes(c^{k-1}d^\ell), & \text{se } k\equiv 1 \text{ (mod 2)},\\ 0, & \text{se } k\equiv 0 \text{ (mod 2)}.\end{cases}$$

Agora, analisemos os diferenciais

$$E_2^{p-2,q+1}\xrightarrow{d_2}E_2^{p,q}\xrightarrow{d_2}E_2^{p+2,q-1},$$

para todo $q\in Q=\{0,1,2,\dots,4n\}$.

- $q\in Q_0\cup Q_2$

Nesta situação, um gerador de $E_2^{p,q}$ é da forma $t^p\otimes(c^kd^\ell)$, com $k\equiv 0$ (mod 2) e concluímos que $\ker(d_2^{p,q})=E_2^{p,q}$.

Se $q<2n$, então

$$E_2^{p,q}=\langle t^p\otimes c^q,t^p\otimes(c^{q-2}d),\dots,t^p\otimes(c^2d^{\frac{q-2}{2}}),t^p\otimes d^{\frac{q}{2}}\rangle$$

e

$$E_2^{p-2,q+1}=\begin{cases}\langle t^{p-2}\otimes c^{q+1},t^{p-2}\otimes(c^{q-1}d),\dots,t^{p-2}\otimes(c^3d^{\frac{q-2}{2}}),t^{p-2}\otimes(cd^{\frac{q}{2}})\rangle, & p\geq 2,\\ \{0\}, & p<2.\end{cases}$$

Logo,

$$\operatorname{im}(d_2^{p-2,q+1})=\begin{cases}E_2^{p,q}, & p\geq 2,\\ \{0\}, & p<2.\end{cases}$$

Quando $q\geq 2n$,

$$E_2^{p,q}=\langle t^p\otimes(c^{2n}d^{\frac{q-2n}{2}}),t^p\otimes(c^{2n-2}d^{\frac{q-2n}{2}+1}),\dots,t^p\otimes(c^{q-2n+2}d^{n-1}),t^p\otimes(c^{q-2n}d^n)\rangle$$

e

$$E_2^{p-2,q+1}=\langle t^{p-2}\otimes(c^{2n-1}d^{\frac{q-2n}{2}+1}),\dots,t^{p-2}\otimes(c^{q-2n+3}d^{n-1}),t^{p-2}\otimes(c^{q-2n+1}d^n)\rangle,$$

se $p\geq 2$ e $q\neq 4n$. Caso contrário, $E_2^{p-2,q+1}=\{0\}$.

Assim,

$$\operatorname{im}(d_2^{p-2,q+1})=\begin{cases}\langle t^p\otimes(c^{2n-2}d^{\frac{q-2n}{2}+1}),\dots,t^p\otimes(c^{q-2n+2}d^{n-1}),t^p\otimes(c^{q-2n}d^n)\rangle, & p\geq 2 \text{ e } q\neq 4n,\\ \{0\}, & \text{caso contrário.}\end{cases}$$

Portanto, para $q\in Q_0\cup Q_2$, temos

$$E_3^{p,q}=\frac{\ker(d_2^{p,q})}{\operatorname{im}(d_2^{p-2,q+1})}=\frac{E_2^{p,q}}{\operatorname{im}(d_2^{p-2,q+1})}=\begin{cases}E_2^{p,q}, & \text{se } p=0 \text{ ou } 1,\\ \langle t^p\otimes(c^{2n}d^{\frac{q-2n}{2}})\rangle, & \text{se } p\geq 2 \text{ e } 2n\leq q\leq 4n,\\ \{0\}, & \text{se } p\geq 2 \text{ e } 0\leq q<2n.\end{cases}$$

- $q \in Q_1 \cup Q_3$

Neste caso, um gerador de $E_2^{p,q}$ é da forma $t^p \otimes (c^k d^\ell)$, com $k \equiv 1 \pmod 2$ e por isso, $\ker(d_2^{p,q}) = \{0\}$.

Uma vez que $q+1 \in Q_0 \cup Q_2$, um gerador de $E_2^{p-2,q+1}$ é da forma $t^{p-2} \otimes (c^k d^\ell)$, com $k \equiv 0 \pmod 2$, se $p \geq 2$, ou $E_2^{p-2,q+1} = \{0\}$, se $p < 2$. Logo, $\mathrm{im}(d_2^{p-2,q+1}) = \{0\}$, para todo $p \geq 0$.

Sendo assim,

$$E_3^{p,q} = \frac{\ker(d_2^{p,q})}{\mathrm{im}(d_2^{p-2,q+1})} = \{0\}.$$

Representamos os módulos do E_3-termo abaixo.

$$\begin{array}{ccccc}
E_3^{0,4n} & E_3^{1,4n} & E_3^{2,4n} & E_3^{3,4n} & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
E_3^{0,4n-2} & E_3^{1,4n-2} & E_3^{2,4n-2} & E_3^{3,4n-2} & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
E_3^{0,2n} & E_3^{1,2n} & E_3^{2,2n} & E_3^{3,2n} & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
E_3^{0,2n-2} & E_3^{1,2n-2} & 0 & 0 & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
E_3^{0,2} & E_3^{1,2} & 0 & 0 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
E_3^{0,0} & E_3^{1,0} & 0 & 0 & \dots
\end{array}$$

Seja $s \geq 3$ e suponhamos $E_s = E_3$. Vamos provar que o diferencial

$$d_s^{p,q} : E_s^{p,q} \longrightarrow E_s^{p+s,q+1-s}$$

é trivial, para todo $q\in Q$. Se $q\in Q_1\cup Q_3$, então $E_s^{p,q}=\{0\}$ e, claramente, $d_s^{p,q}=0$.

Se $q\in Q_0\cup Q_2$ e $q\leq 2n$, então $E_s^{p+s,q+1-s}=\{0\}$, pois $p+s\geq 3$ e $q+1-s\leq 2n-2$. Logo, $d_s^{p,q}=0$. Como $d_s^{0,2}(1\otimes d)=0$ e $d_s^{0,2}(1\otimes c^2)=0$, temos

$$d_s^{0,2\ell}(1\otimes d^\ell)=0 \;\text{ e }\; d_s^{0,k}(1\otimes c^k)=0, \text{ para todo } \ell\in\{0,1,\ldots,n\} \;\text{ e }\; k\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 2).$$

Se $q\in Q_0\cup Q_2$ e $q>2n$, então avaliamos a imagem dos geradores $1\otimes(c^kd^\ell)\in E_s^{0,q}$. Neste caso, $k\equiv 0$ (mod 2) e

$$d_s^{0,q}(1\otimes(c^kd^\ell))=d_s^{0,q}((1\otimes c^k)\cdot(1\otimes d^\ell))=0.$$

Consequentemente, $d_s^{p,q}=0$.

Portanto, $d_s=0$, para todo $s\geq 3$, o que significa que a sequência colapsa no E_3-termo. Mas

$$H^{4n+1}(P(2n,n)_{\mathbb{Z}_2})\cong E_\infty^{1,4n}\oplus E_\infty^{3,4n-2}\oplus\cdots\oplus E_\infty^{2n+1,2n}\cong \mathbb{Z}_2^{n+1},$$

o que contradiz a Proposição 1.8, pois $H^j(P(2n,n))=\{0\}$, para $j>4n$. Por isso, deduzimos que também não pode ocorrer $d_2^{0,1}(1\otimes c)\neq 0$ e $d_2^{0,2}(1\otimes d)=0$.

Demonstração do Lema 4.2. Se $k=0$, então $d_2^{0,0}=0$, pois $\mathrm{im}(d_2^{0,0})\subset E_2^{2,-1}=\{0\}$. Por hipótese, $d_2^{0,1}(1\otimes c)=t^2\otimes 1$. Para $k=2$, temos

$$\begin{aligned}
d_2^{0,2}(1\otimes c^2) &= d_2^{0,2}((1\otimes c)\cdot(1\otimes c))\\
&= d_2^{0,1}(1\otimes c)\cdot(1\otimes c)+(1\otimes c)\cdot d_2^{0,1}(1\otimes c)\\
&= (t^2\otimes 1)\cdot(1\otimes c)+(1\otimes c)\cdot(t^2\otimes 1)\\
&= 2t^2\otimes c\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Se $k=3$, então

$$\begin{aligned}
d_2^{0,3}(1\otimes c^3) &= d_2^{0,3}((1\otimes c)\cdot(1\otimes c^2))\\
&= d_2^{0,1}(1\otimes c)\cdot(1\otimes c^2)+(1\otimes c)\cdot\underbrace{d_2^{0,2}(1\otimes c^2)}_{0}\\
&= (t^2\otimes 1)\cdot(1\otimes c^2)\\
&= t^2\otimes c^2.
\end{aligned}$$

Vamos supor que

$$d_2^{0,k}(1\otimes c^k)=\begin{cases} t^2\otimes c^{k-1}, & \text{se } k\equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 2),\\ 0, & \text{se } k\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 2),\end{cases} \tag{$\blacklozenge$}$$

com $0\leq k<2n$.

Para $k+1$, temos:

$$\begin{aligned} d_2^{0,k+1}(1\otimes c^{k+1}) &= d_2^{0,k+1}((1\otimes c)\cdot(1\otimes c^k)) \\ &= d_2^{0,1}(1\otimes c)\cdot(1\otimes c^k)+(1\otimes c)\cdot d_2^{0,k}(1\otimes c^k) \\ &= t^2\otimes c^k+(1\otimes c)\cdot d_2^{0,k}(1\otimes c^k). \end{aligned}$$

Se $k\equiv 0 \pmod 2$, então $k+1\equiv 1 \pmod 2$ e

$$d_2^{0,k+1}(1\otimes c^{k+1}) = t^2\otimes c^k.$$

Se $k\equiv 1 \pmod 2$, então $k+1\equiv 0 \pmod 2$ e

$$\begin{aligned} d_2^{0,k+1}(1\otimes c^{k+1}) &= t^2\otimes c^k+(1\otimes c)\cdot(t^2\otimes c^{k-1}) \\ &= t^2\otimes c^k+t^2\otimes c^k \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, ($\blacklozenge$) vale para todo $k\in\{0,1,\ldots,2n\}$.

4.3 $d_2^{0,1}(1\otimes c)=0$ e $d_2^{0,2}(1\otimes d)\neq 0$

Neste caso,

$$d_2^{0,k}(1\otimes c^k)=0, \text{ para todo } k\in\{0,1,\ldots,2n\},$$

e segue pelo Lema 3.3 que

$$d_2^{0,2\ell}(1\otimes d^\ell)=\begin{cases} t^2\otimes(cd^{\ell-1}), & \text{se } \ell\equiv 1 \pmod 2, \\ 0, & \text{se } \ell\equiv 0 \pmod 2, \end{cases}$$

para todo $\ell\in\{0,1,\ldots,n\}$.

Seja $1\otimes(c^kd^\ell)\in E_2^{0,q}$ um gerador, com $k\in\{0,1,\ldots,2n\}$, $\ell\in\{0,1,\ldots,n\}$ e $q=k+2\ell$. Temos:

$$d_2^{0,q}(1\otimes(c^kd^\ell))=d_2^{0,q}((1\otimes c^k)\cdot(1\otimes d^\ell))=\begin{cases} t^2\otimes(c^{k+1}d^{\ell-1}), & \ell\equiv 1 \pmod 2 \text{ e } k\neq 2n, \\ 0, & \ell\equiv 0 \pmod 2 \text{ ou } k=2n. \end{cases}$$

Logo, para todo $p\geq 0$,

$$d_2^{p,q}(t^p\otimes(c^kd^\ell))=d_2^{p,q}((t^p\otimes 1)\cdot(1\otimes(c^kd^\ell)))=\begin{cases} t^{p+2}\otimes(c^{k+1}d^{\ell-1}), & \ell\equiv 1 \pmod 2 \text{ e } k\neq 2n, \\ 0, & \ell\equiv 0 \pmod 2 \text{ ou } k=2n. \end{cases}$$

De maneira análoga aos casos anteriores, faremos um estudo dos diferenciais

$$E_2^{p-2,q+1}\xrightarrow{d_2}E_2^{p,q}\xrightarrow{d_2}E_2^{p+2,q-1},$$

para todo $q\in Q=\{0,1,2,\ldots,4n\}$, a fim de determinarmos o E_3-termo.

- $q\in Q_0\cup Q_2$ e $q<2n$

Temos

$$E_2^{p,q}=\langle t^p\otimes c^q, t^p\otimes(c^{q-2}d), t^p\otimes(c^{q-4}d^2),\ldots,t^p\otimes(c^4d^{\frac{q-4}{2}}), t^p\otimes(c^2d^{\frac{q-2}{2}}), t^p\otimes d^{\frac{q}{2}}\rangle\cong\mathbb{Z}_2^{\frac{q+2}{2}},$$

para todo p, e

$$E_2^{p-2,q+1}=\langle t^{p-2}\otimes c^{q+1}, t^{p-2}\otimes(c^{q-1}d), t^{p-2}\otimes(c^{q-3}d^2),\ldots,t^{p-2}\otimes(c^3d^{\frac{q-2}{2}}), t^{p-2}\otimes(cd^{\frac{q}{2}})\rangle,$$

para $p\geq 2$. Quando $p<2$, $E_2^{p-2,q+1}=\{0\}$.

Logo,

$$\ker(d_2^{p,q})=\begin{cases}\langle t^p\otimes c^q, t^p\otimes(c^{q-4}d^2),\ldots,t^p\otimes(c^4d^{\frac{q-4}{2}}), t^p\otimes d^{\frac{q}{2}}\rangle\cong\mathbb{Z}_2^{\frac{q+4}{4}}, & q\in Q_0,\\ \langle t^p\otimes c^q, t^p\otimes(c^{q-4}d^2),\ldots,t^p\otimes(c^2d^{\frac{q-2}{2}})\rangle\cong\mathbb{Z}_2^{\frac{q+2}{4}}, & q\in Q_2,\end{cases}$$

e

$$\operatorname{im}(d_2^{p-2,q+1})=\begin{cases}\langle t^p\otimes c^q, t^p\otimes(c^{q-4}d^2),\ldots,t^p\otimes(c^4d^{\frac{q-4}{2}})\rangle, & \text{se } p\geq 2 \text{ e } q\in Q_0,\\ \langle t^p\otimes c^q, t^p\otimes(c^{q-4}d^2),\ldots,t^p\otimes(c^2d^{\frac{q-2}{2}})\rangle, & \text{se } p\geq 2 \text{ e } q\in Q_2,\\ \{0\}, & \text{se } p<2.\end{cases}$$

- $q\in Q_0\cup Q_2$ e $q\geq 2n$

Temos

$$E_2^{p,q}=\langle t^p\otimes(c^{2n}d^{\frac{q-2n}{2}}), t^p\otimes(c^{2n-2}d^{\frac{q-2n}{2}+1}), t^p\otimes(c^{2n-4}d^{\frac{q-2n}{2}+2}),\ldots,t^p\otimes(c^{q-2n}d^n)\rangle\cong\mathbb{Z}_2^{\frac{4n+2-q}{2}}.$$

Assim,

$$\ker(d_2^{p,q})=\begin{cases}\langle t^p\otimes(c^{2n}d^{\frac{q-2n}{2}}), t^p\otimes(c^{2n-2}d^{\frac{q-2n}{2}+1}),\ldots,t^p\otimes(c^{q-2n+2}d^{n-1})\rangle\cong\mathbb{Z}_2^{\frac{4n+4-q}{4}}, & q\in Q_0\\ \langle t^p\otimes(c^{2n}d^{\frac{q-2n}{2}}), t^p\otimes(c^{2n-4}d^{\frac{q-2n}{2}+2}),\ldots,t^p\otimes(c^{q-2n+2}d^{n-1})\rangle\cong\mathbb{Z}_2^{\frac{4n+2-q}{4}}, & q\in Q_2\end{cases}$$

Se $p<2$ ou $q=4n$, então $E_2^{p-2,q+1}=\{0\}$. Caso contrário,

$$E_2^{p-2,q+1}=\langle t^{p-2}\otimes(c^{2n-1}d^{\frac{q-2n}{2}+1}), t^{p-2}\otimes(c^{2n-3}d^{\frac{q-2n}{2}+2}),\ldots,t^{p-2}\otimes(c^{q-2n+1}d^n)\rangle.$$

Dessa forma, se $p<2$ ou $q=4n$, então $\operatorname{im}(d_2^{p-2,q+1})=\{0\}$. Caso contrário,

$$\operatorname{im}(d_2^{p-2,q+1})=\begin{cases}\langle t^p\otimes(c^{2n-2}d^{\frac{q-2n}{2}+1}),\ldots,t^p\otimes(c^{q-2n+2}d^{n-1})\rangle, & q\in Q_0\setminus\{4n\},\\ \langle t^p\otimes(c^{2n}d^{\frac{q-2n}{2}}), t^p\otimes(c^{2n-4}d^{\frac{q-2n}{2}+2}),\ldots,t^p\otimes(c^{q-2n+2}d^{n-1})\rangle, & q\in Q_2.\end{cases}$$

Portanto, para $q\in Q_0\cup Q_2$, temos:

$$E_3^{p,q}=\frac{\ker(d_2^{p,q})}{\operatorname{im}(d_2^{p-2,q+1})}=\begin{cases}\ker(d_2^{p,q}), & \text{se } p=0 \text{ ou } 1,\\ \langle\xi\rangle, & \text{se } p\geq 2 \text{ e } q\in Q_0,\\ \{0\}, & \text{se } p\geq 2 \text{ e } q\in Q_2,\end{cases}$$

com

$$\xi=\begin{cases}t^p\otimes d^{\frac{q}{2}}, & \text{se } q<2n,\\ t^p\otimes(c^{2n}d^{\frac{q-2n}{2}}), & \text{se } q>2n.\end{cases}$$

- $q \in Q_1 \cup Q_3$ e $q < 2n$

Temos

$$E_2^{p,q} = \langle t^p \otimes c^q, t^p \otimes (c^{q-2}d), t^p \otimes (c^{q-4}d^2), \dots, t^p \otimes (c^3 d^{\frac{q-3}{2}}), t^p \otimes (cd^{\frac{q-1}{2}}) \rangle \cong \mathbb{Z}_2^{\frac{q+1}{2}},$$

para todo p, e

$$E_2^{p-2,q+1} = \langle t^{p-2} \otimes c^{q+1}, t^{p-2} \otimes (c^{q-1}d), t^{p-2} \otimes (c^{q-3}d^2), \dots, t^{p-2} \otimes (c^2 d^{\frac{q-1}{2}}), t^{p-2} \otimes d^{\frac{q+1}{2}} \rangle,$$

para $p \geq 2$. Quando $p < 2$, $E_2^{p-2,q+1} = \{0\}$.

Consequentemente,

$$\ker(d_2^{p,q}) = \begin{cases} \langle t^p \otimes c^q, t^p \otimes (c^{q-4}d^2), \dots, t^p \otimes (cd^{\frac{q-1}{2}}) \rangle \cong \mathbb{Z}_2^{\frac{q+3}{4}}, & q \in Q_1, \\ \langle t^p \otimes c^q, t^p \otimes (c^{q-4}d^2), \dots, t^p \otimes (c^3 d^{\frac{q-3}{2}}) \rangle \cong \mathbb{Z}_2^{\frac{q+1}{4}}, & q \in Q_3, \end{cases}$$

e

$$\operatorname{im}(d_2^{p-2,q+1}) = \begin{cases} \ker(d_2^{p,q}), & \text{se } p \geq 2, \\ \{0\}, & \text{se } p < 2. \end{cases}$$

- $q \in Q_1 \cup Q_3$ e $q > 2n$

Temos

$$E_2^{p,q} = \underbrace{\langle t^p \otimes (c^{2n-1} d^{\frac{q-2n+1}{2}}), t^p \otimes (c^{2n-3} d^{\frac{q-2n+1}{2}+1}), t^p \otimes (c^{2n-5} d^{\frac{q-2n+1}{2}+2}), \dots, t^p \otimes (c^{q-2n} d^n) \rangle}_{\mathbb{Z}_2^{\frac{4n+1-q}{2}}}.$$

Assim, $\ker(d_2^{p,4n-1}) = \{0\}$ e, para $q \neq 4n-1$,

$$\ker(d_2^{p,q}) = \begin{cases} \langle t^p \otimes (c^{2n-1} d^{\frac{q-2n+1}{2}}), \dots, t^p \otimes (c^{q-2n+2} d^{n-1}) \rangle \cong \mathbb{Z}_2^{\frac{4n+1-q}{4}}, & q \in Q_1, \\ \langle t^p \otimes (c^{2n-3} d^{\frac{q-2n+1}{2}+1}), \dots, t^p \otimes (c^{q-2n+2} d^{n-1}) \rangle \cong \mathbb{Z}_2^{\frac{4n-1-q}{4}}, & q \in Q_3 \setminus \{4n-1\}. \end{cases}$$

Se $p < 2$, $E_2^{p-2,q+1} = \{0\}$. Caso contrário,

$$E_2^{p-2,q+1} = \langle t^{p-2} \otimes (c^{2n} d^{\frac{q-2n+1}{2}}), t^{p-2} \otimes (c^{2n-2} d^{\frac{q-2n+1}{2}+1}), \dots, t^{p-2} \otimes (c^{q-2n+1} d^n) \rangle.$$

Logo,

$$\operatorname{im}(d_2^{p-2,q+1}) = \begin{cases} \ker(d_2^{p,q}), & \text{se } p \geq 2, \\ \{0\}, & \text{se } p < 2. \end{cases}$$

Portanto, para $q \in Q_1 \cup Q_3$, temos:

$$E_3^{p,q} = \frac{\ker(d_2^{p,q})}{\operatorname{im}(d_2^{p-2,q+1})} = \begin{cases} \ker(d_2^{p,q}), & \text{se } p = 0 \text{ ou } 1, \\ \{0\}, & \text{se } p \geq 2. \end{cases}$$

Os módulos do E_3-termo estão representados a seguir:

$$\begin{tikzcd}
E_3^{0,4n} & E_3^{1,4n} & E_3^{2,4n} & E_3^{3,4n} & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
E_3^{0,4n-2} \arrow[ddrrr, dashed, "d_3"] & E_3^{1,4n-2} & 0 & 0 & \cdots \\
E_3^{0,4n-3} & E_3^{1,4n-3} & 0 & 0 & \cdots \\
E_3^{0,4n-4} & E_3^{1,4n-4} & E_3^{2,4n-4} & E_3^{3,4n-4} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
E_3^{0,4} & E_3^{1,4} & E_3^{2,4} & E_3^{3,4} & \cdots \\
E_3^{0,3} & E_3^{1,3} & 0 & 0 & \cdots \\
E_3^{0,2} \arrow[ddrrr, dashed, "d_3"] & E_3^{1,2} & 0 & 0 & \cdots \\
E_3^{0,1} & E_3^{1,1} & 0 & 0 & \cdots \\
E_3^{0,0} & E_3^{1,0} & E_3^{2,0} & E_3^{3,0} & \cdots
\end{tikzcd}$$

Vamos provar que

$$d_3^{p,q}: E_3^{p,q} \longrightarrow E_3^{p+3,q-2}$$

é trivial, para todo $q\in Q$. De fato, como

$$\mathrm{im}(d_3^{0,1}) \subseteq E_3^{3,-1} = \{0\},$$

temos $d_3^{0,1}(1\otimes c)=0$. Assim,

$$d_3^{0,k}(1\otimes c^k)=0, \text{ para todo } k\in\{0,1,2,\ldots,2n\}.$$

Consideremos $q>1$. Visto que $p+3\geq 3$ e

$$\begin{aligned}
q\equiv 1 \text{ (mod 2)} \quad &\Longrightarrow \quad q-2\equiv 1 \text{ (mod 2)},\\
q\equiv 0 \text{ (mod 4)} \quad &\Longrightarrow \quad q-2\equiv 2 \text{ (mod 4)},
\end{aligned}$$

temos $E_3^{p+3,q-2} = \{0\}$, se $q \in Q_0 \cup Q_1 \cup Q_3$. Portanto, $d_3^{p,q} = 0$, se $q \in Q_0 \cup Q_1 \cup Q_3$.

Uma vez que $d_3^{0,4}(1 \otimes d^2) = 0$,

$$d_3^{0,2\ell}(1 \otimes d^\ell) = 0, \text{ para } \ell \equiv 0 \text{ (mod 2)}, \ell \leq n.$$

Se $q \equiv 2$ (mod 4), então $E_3^{p+3,q-2} \neq \{0\}$, pois $q-2 \equiv 0$ (mod 4). Diante disso, precisamos avaliar as imagens dos geradores de $E_3^{p,q}$. Seja $1 \otimes (c^k d^\ell) \in E_3^{0,q} = \ker(d_2^{0,q})$ um gerador. Neste caso, $\ell \equiv 0$ (mod 2) e

$$\begin{aligned} d_3^{0,q}(1 \otimes (c^k d^\ell)) &= d_3^{0,q}((1 \otimes c^k) \cdot (1 \otimes d^\ell)) \\ &= \underbrace{d_3^{0,k}(1 \otimes c^k)}_{0} \cdot (1 \otimes d^\ell) + (1 \otimes c^k) \cdot \underbrace{d_3^{0,2\ell}(1 \otimes d^\ell)}_{0} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim, $d_3^{0,q} = 0$, o que implica que $d_3^{p,q} = 0$, para todo $p \geq 0$. Portanto, $d_3 = 0$ e $E_4 = E_3$.

Novamente, vamos provar que

$$d_4^{p,q} : E_4^{p,q} \longrightarrow E_4^{p+4,q-3}$$

é trivial, para todo $q \in Q$.

Por razões dimensionais, $d_4^{p,0}$, $d_4^{p,1}$ e $d_4^{p,2}$ são triviais. Já que $d_4^{0,1}(1 \otimes c) = 0$,

$$d_4^{0,k}(1 \otimes c^k) = 0, \text{ para todo } k \in \{0, 1, 2, \ldots, 2n\}.$$

Seja $q > 2$. Como $p + 4 \geq 4$ e

$$\begin{aligned} q \equiv 0 \text{ (mod 2)} &\implies q - 3 \equiv 1 \text{ (mod 2)}, \\ q \equiv 1 \text{ (mod 4)} &\implies q - 3 \equiv 2 \text{ (mod 4)}, \end{aligned}$$

temos $E_4^{p+4,q-3} = \{0\}$, se $q \in Q_0 \cup Q_1 \cup Q_2$. Portanto, $d_4^{p,q} = 0$, se $q \in Q_0 \cup Q_1 \cup Q_2$.

Uma vez que $d_4^{0,4}(1 \otimes d^2) = 0$,

$$d_4^{0,2\ell}(1 \otimes d^\ell) = 0, \text{ para } \ell \equiv 0 \text{ (mod 2)}, \ \ell \leq n.$$

Quando $q \equiv 3$ (mod 4), $q - 3 \equiv 0$ (mod 4) e $E_4^{p+4,q-3} \neq \{0\}$. Em tal caso, devemos avaliar as imagens dos geradores de $E_4^{p,q}$. Se $q = 4n-1$, então $E_4^{p,4n-1} = \{0\}$ e concluímos que $d_4^{p,4n-1} = 0$. Para $q \neq 4n-1$, seja $1 \otimes (c^k d^\ell) \in E_4^{0,q} = \ker(d_2^{0,q})$ um gerador. Aqui, $\ell \equiv 0$ (mod 2) e

$$\begin{aligned} d_4^{0,q}(1 \otimes (c^k d^\ell)) &= d_4^{0,q}((1 \otimes c^k) \cdot (1 \otimes d^\ell)) \\ &= \underbrace{d_4^{0,k}(1 \otimes c^k)}_{0} \cdot (1 \otimes d^\ell) + (1 \otimes c^k) \cdot \underbrace{d_4^{0,2\ell}(1 \otimes d^\ell)}_{0} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, $d_4^{0,q}=0$, o que implica que $d_4^{p,q}=0$, para todo $p\geq 0$. Assim, $d_4=0$ e $E_5=E_4$. Por razões dimensionais, $d_5^{p,0}$, $d_5^{p,1}$, $d_5^{p,2}$ e $d_5^{p,3}$ são triviais. Logo,

$$d_5^{0,k}(1\otimes c^k)=0, \text{ para todo } k\in\{0,1,2,\ldots,2n\}.$$

Se $n=1$, os módulos do E_5-termo são os seguintes:

$$\begin{tikzcd}
E_5^{0,4} \arrow[rrrrrdddd, dashed, "d_5"] & E_5^{1,4} & E_5^{2,4} & E_5^{3,4} & E_5^{4,4} & E_5^{5,4} & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
E_5^{0,2} & E_5^{1,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
E_5^{0,1} & E_5^{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
E_5^{0,0} & E_5^{1,0} & E_5^{2,0} & E_5^{3,0} & E_5^{4,0} & E_5^{5,0} & \cdots
\end{tikzcd}$$

O elemento $1\otimes(c^2d)\in E_5^{0,4}$ não pode ser escrito como um produto de dois elementos não nulos em E_5. Dessa forma, o diferencial $d_5^{p,4}$ depende dos possíveis valores para $d_5^{0,4}(1\otimes(c^2d))$.

Se $d_5^{0,4}(1\otimes(c^2d))=0$, então $d_5^{p,4}=0$ e a sequência colapsa no E_5-termo. Mas

$$H^5(P(2,1)_{\mathbb{Z}_2})\cong E_\infty^{1,4}\oplus E_\infty^{5,0}\cong \mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2,$$

o que contradiz a Proposição 1.8, pois $H^j(P(2,1))=\{0\}$, para $j>4$. Assim, $d_5^{0,4}(1\otimes(c^2d))=t^5\otimes 1$ e $d_5^{p,4}$ é um isomorfismo, para todo $p\geq 0$. Os módulos do E_6-termo estão representados abaixo.

$$\begin{tikzcd}
E_6^{0,2} & E_6^{1,2} & 0 & 0 & 0 \\
E_6^{0,1} & E_6^{1,1} & 0 & 0 & 0 \\
E_6^{0,0} & E_6^{1,0} & E_6^{2,0} & E_6^{3,0} & E_6^{4,0}
\end{tikzcd}$$

Se $s\geq 6$ e $E_s=E_6$, então $d_s=0$, por razões dimensionais. Logo, a sequência colapsa no E_6-termo. Temos,

$$H^j(P(2,1)_{\mathbb{Z}_2})=\bigoplus_{j=p+q}E_\infty^{p,q}=\begin{cases}\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2, & \text{se } j=2,\\ \mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2, & \text{se } j=1 \text{ ou } 3,\\ \mathbb{Z}_2, & \text{se } j=0 \text{ ou } 4,\\ \{0\}, & \text{se } j>4.\end{cases}$$

Agora, consideremos $n>1$.

$$
\begin{tikzcd}
E_5^{0,4n} \arrow[ddddrrrrr, dashed, "d_5"] & E_5^{1,4n} & E_5^{2,4n} & E_5^{3,4n} & E_5^{4,4n} & E_5^{5,4n} & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
E_5^{0,4n-2} & E_5^{1,4n-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
E_5^{0,4n-3} & E_5^{1,4n-3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
E_5^{0,4n-4} & E_5^{1,4n-4} & E_5^{2,4n-4} & E_5^{3,4n-4} & E_5^{4,4n-4} & E_5^{5,4n-4} & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
E_5^{0,2n+2} \arrow[ddddrrrrr, dashed, "d_5"] & E_5^{1,2n+2} & E_5^{2,2n+2} & E_5^{3,2n+1} & E_5^{4,2n+1} & E_5^{5,2n+2} & \dots \\
E_5^{0,2n+1} & E_5^{1,2n+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
E_5^{0,2n} & E_5^{1,2n} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
E_5^{0,2n-1} & E_5^{1,2n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
E_5^{0,2n-2} & E_5^{1,2n-2} & E_5^{2,2n-2} & E_5^{3,2n-2} & E_5^{4,2n-2} & E_5^{5,2n-2} & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
E_5^{0,4} \arrow[ddddrrrrr, dashed, "d_5"] & E_5^{1,4} & E_5^{2,4} & E_5^{3,4} & E_5^{4,4} & E_5^{5,4} & \dots \\
E_5^{0,3} & E_5^{1,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
E_5^{0,2} & E_5^{1,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
E_5^{0,1} & E_5^{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
E_5^{0,0} & E_5^{1,0} & E_5^{2,0} & E_5^{3,0} & E_5^{4,0} & E_5^{5,0} & \dots
\end{tikzcd}
$$

Vamos avaliar

$$d_5^{p,q}:E_5^{p,q}\longrightarrow E_5^{p+5,q-4}.$$

Seja $q>3$. Dado que $p+5>2$ e

$$\begin{aligned} q\equiv 1 \pmod 2) &\implies q-4\equiv 1 \pmod 2),\\ q\equiv 2 \pmod 4) &\implies q-4\equiv 2 \pmod 4),\end{aligned}$$

então $E_5^{p+5,q-4}=\{0\}$, se $q\in Q_1\cup Q_2\cup Q_3$. Portanto, $d_5^{p,q}=0$, se $q\in Q_1\cup Q_2\cup Q_3$.

Para $q\equiv 0 \pmod 4)$, devemos avaliar as imagens dos geradores de $E_5^{p,q}$, uma vez que $E_5^{p+5,q-4}\neq\{0\}$. O elemento $1\otimes d^2$ não se decompõe em E_5 e não é possível determinar o valor de $d_5^{0,4}(1\otimes d^2)\in E_5^{5,0}=\langle t^5\otimes 1\rangle$. Sendo assim, as seguintes possibilidades serão consideradas:

- $d_5^{0,4}(1\otimes d^2)\neq 0$ (Subseção 4.3.1)
- $d_5^{0,4}(1\otimes d^2)=0$ (Subseção 4.3.2)

4.3.1 $d_5^{0,4}(1\otimes d^2)\neq 0$

Se $d_5^{0,4}(1\otimes d^2)=t^5\otimes 1$, segue pelo Lema 3.4 que

$$d_5^{0,2\ell}(1\otimes d^\ell)=\begin{cases} t^5\otimes d^{\ell-2}, & \text{se } \ell\equiv 2 \pmod 4),\\ 0, & \text{se } \ell\equiv 0 \pmod 4),\end{cases}$$

para $\ell\equiv 0 \pmod 2)$.

Primeiro, vamos supor $q\in Q_0=\{0,4,\dots,2n-2,2n+2,\dots,4n\}$, com $0<q\leq 2n-2$. Então,

$$E_5^{p,q}=\begin{cases} \langle t^p\otimes c^q,\ t^p\otimes(c^{q-4}d^2),\dots,\ t^p\otimes(c^4d^{\frac{q-4}{2}}),\ t^p\otimes d^{\frac{q}{2}}\rangle \cong \mathbb{Z}_2^{\frac{q+4}{4}}, & \text{se } p<2,\\ \langle t^p\otimes d^{\frac{q}{2}}\rangle \cong \mathbb{Z}_2, & \text{se } p\geq 2,\end{cases}$$

$$d_5^{p,q}:E_5^{p,q}\longrightarrow E_5^{p+5,q-4}=\langle t^{p+5}\otimes d^{\frac{q-4}{2}}\rangle.$$

Seja $1\otimes(c^kd^\ell)\in E_5^{0,q}$ um gerador, com $k\neq 0$ ($q=k+2\ell$). Então $\ell\equiv 0 \pmod 2)$ e

$$d_5^{0,q}(1\otimes(c^kd^\ell))=d_5^{0,q}((1\otimes c^k)\cdot(1\otimes d^\ell))=\begin{cases} t^5\otimes(c^kd^{\ell-2}), & \text{se } \ell\equiv 2 \pmod 4),\\ 0, & \text{se } \ell\equiv 0 \pmod 4).\end{cases}$$

Como a classe do elemento $t^5\otimes(c^kd^{\ell-2})$ é nula em $E_5^{5,q-4}$, temos $d_5^{0,q}(1\otimes(c^kd^\ell))=0$, quando $k\neq 0$. Assim, para $p<2$ e $k\neq 0$, temos

$$d_5^{p,q}(t^p\otimes(c^kd^\ell))=(t^p\otimes 1)\cdot d_5^{0,q}(1\otimes(c^kd^\ell))=0.$$

Nos resta apenas avaliar $d_5^{0,q}(1\otimes(c^k d^\ell))$ quando $k=0$, ou seja, $d_5^{0,q}(1\otimes d^{\frac{q}{2}})$.

Se $q\equiv 0 \pmod 8$, então $\frac{q}{2}\equiv 0 \pmod 4$ e $d_5^{0,q}(1\otimes d^{\frac{q}{2}})=0$. Dessa forma, $d_5^{p,q}=0$, para todo p.

Se $q\equiv 4 \pmod 8$, então $\frac{q}{2}\equiv 2 \pmod 4$ e $d_5^{0,q}(1\otimes d^{\frac{q}{2}})=t^5\otimes d^{\frac{q-4}{2}}$. Assim, para todo p,

$$d_5^{p,q}(t^p\otimes d^{\frac{q}{2}})=(t^p\otimes 1)\cdot d_5^{0,q}(1\otimes d^{\frac{q}{2}})=t^{p+5}\otimes d^{\frac{q-4}{2}}.$$

Isto significa que $d_5^{p,q}$ é sobrejetor, para todo p, com

$$\ker(d_5^{p,q})=\begin{cases}\langle t^p\otimes c^q, t^p\otimes(c^{q-4}d^2),\dots,t^p\otimes(c^4 d^{\frac{q-4}{2}})\rangle\cong\mathbb{Z}_2^{\frac{q}{4}}, & p<2,\\ \{0\}, & p\geq 2.\end{cases}$$

Se $n\equiv 1 \pmod 4$, então $2n-2\equiv 0 \pmod 8$ e $d_5^{p,2n-2}=0$, para todo p. Se $n\equiv 3 \pmod 4$, então $2n-2\equiv 4 \pmod 8$ e $d_5^{p,2n-2}$ é sobrejetor, para todo p.

Agora, vamos supor $q\in Q_0=\{0,4,\dots,2n-2,2n+2,\dots,4n\}$, com $2n+2\leq q<4n$. Para $p=0$ ou 1, temos

$$E_5^{p,q}=\underbrace{\langle t^p\otimes(c^{2n}d^{\frac{q-2n}{2}}),\ t^p\otimes(c^{2n-2}d^{\frac{q-2n}{2}+1}),\ t^p\otimes(c^{2n-6}d^{\frac{q-2n}{2}+3}),\dots,\ t^p\otimes(c^{q-2n+2}d^{n-1})\rangle}_{\mathbb{Z}_2^{\frac{q+4-4n}{4}}},$$

e se $p\geq 2$,

$$E_5^{p,q}=\langle t^p\otimes(c^{2n}d^{\frac{q-2n}{2}})\rangle.$$

Consideremos o diferencial

$$d_5^{p,q}:E_5^{p,q}\longrightarrow E_5^{p+5,q-4}=\begin{cases}\langle t^{p+5}\otimes(c^{2n}d^{\frac{q-2n-4}{2}})\rangle, & q\neq 2n+2,\\ \langle t^{p+5}\otimes d^{n-1}\rangle, & q=2n+2.\end{cases}$$

Seja $1\otimes(c^k d^\ell)\in E_5^{0,q}$ um gerador, com $k\neq 2n$ ($q=k+2\ell$). Então $\ell\equiv 0 \pmod 2$ e

$$d_5^{0,q}(1\otimes(c^k d^\ell))=d_5^{0,q}((1\otimes c^k)\cdot(1\otimes d^\ell))=\begin{cases}t^5\otimes(c^k d^{\ell-2}), & \ell\equiv 2 \pmod 4,\\ 0, & \ell\equiv 0 \pmod 4.\end{cases}$$

Como a classe do elemento $t^5\otimes(c^k d^{\ell-2})$ é nula em $E_5^{5,q-4}$, temos $d_5^{0,q}(1\otimes(c^k d^\ell))=0$, quando $k\neq 2n$. Logo, para $p<2$ e $k\neq 2n$, temos

$$d_5^{p,q}(t^p\otimes(c^k d^\ell))=(t^p\otimes 1)\cdot d_5^{0,q}(1\otimes(c^k d^\ell))=0.$$

Quando $k=2n$, $\ell=\frac{q-2n}{2}\equiv 1 \pmod 2$. A imagem de $1\otimes(c^{2n}d^{\frac{q-2n}{2}})$ depende da imagem de $1\otimes(c^{2n}d)\in E_5^{0,2n+2}$, que não pode ser escrito como um produto de dois elementos em E_5. Suponhamos que $d_5^{0,2n+2}(1\otimes(c^{2n}d))=t^5\otimes d^{n-1}$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} d_5^{0,2n+6}(1\otimes(c^{2n}d^3)) &= d_5^{0,2n+6}((1\otimes(c^{2n}d))\cdot(1\otimes d^2))\\ &= (t^5\otimes d^{n-1})\cdot(1\otimes d^2)+(1\otimes(c^{2n}d))\cdot(t^5\otimes 1)\\ &= t^5\otimes\underbrace{d^{n+1}}_{0}+t^5\otimes(c^{2n}d)\\ &= t^5\otimes(c^{2n}d).\end{aligned}$$

Dessa forma, $d_5^{p,2n+6}$ é sobrejetor, para todo p, e $d_5^{p,2n+2}$ é isomorfismo, para $p\geq 2$, o que não pode ocorrer, pois

$$\mathrm{im}(d_5^{0,2n+6})=E_5^{5,2n+2}\not\subseteq\{0\}=\ker(d_5^{5,2n+2}).$$

Por isso, devemos ter $d_5^{0,2n+2}(1\otimes(c^{2n}d))=0$, o que implica

$$\begin{aligned} d_5^{0,q}(1\otimes(c^{2n}d^{\frac{q-2n}{2}})) &= d_5^{0,q}((1\otimes(c^{2n}d))\cdot(1\otimes d^{\frac{q-2n}{2}-1})) \\ &= (1\otimes(c^{2n}d))\cdot d_5^{0,q-2n-2}(1\otimes d^{\frac{q-2n}{2}-1}) \\ &= \begin{cases} t^5\otimes(c^{2n}d^{\frac{q-2n-4}{2}}), & \frac{q-2n}{2}\equiv 3 \pmod 4, \\ 0, & \frac{q-2n}{2}\equiv 1 \pmod 4. \end{cases} \end{aligned}$$

Portanto, a imagem de $1\otimes(c^{2n}d^{\frac{q-2n}{2}})$ depende da congruência módulo 4 de n. Por esse motivo, dividimos o estudo nos seguintes casos:

- $n\equiv 3 \pmod 4$ (Subseção 4.3.1.1)
- $n\equiv 1 \pmod 4$ (Subseção 4.3.1.2)

4.3.1.1 $n\equiv 3 \pmod 4$

Se $q\equiv 0 \pmod 8$, então $\frac{q-2n}{2}\equiv 1 \pmod 4$ e $d_5^{0,q}(1\otimes(c^{2n}d^{\frac{q-2n}{2}}))=0$. Dessa forma, $d_5^{p,q}=0$, para todo p.

Se $q\equiv 4 \pmod 8$, então $\frac{q-2n}{2}\equiv 3 \pmod 4$ e $d_5^{0,q}(1\otimes(c^{2n}d^{\frac{q-2n}{2}}))=t^5\otimes(c^{2n}d^{\frac{q-2n-4}{2}})$. Assim, para todo p,

$$d_5^{p,q}(t^p\otimes(c^{2n}d^{\frac{q-2n}{2}}))=(t^p\otimes 1)\cdot d_5^{0,q}(1\otimes(c^{2n}d^{\frac{q-2n}{2}}))=t^{p+5}\otimes(c^{2n}d^{\frac{q-2n-4}{2}}).$$

Em tal caso, $d_5^{p,q}$ é sobrejetor para todo p, com

$$\ker(d_5^{p,q})=\begin{cases} \langle t^p\otimes(c^{2n-2}d^{\frac{q-2n}{2}+1}),\ldots,t^p\otimes(c^{q-2n+2}d^{n-1})\rangle=\mathbb{Z}_2^{\frac{4n-q}{4}}, & \text{se } p=0 \text{ ou } 1, \\ \{0\}, & \text{se } p\geq 2. \end{cases}$$

Finalmente, se $q=4n$

$$d_5^{p,4n}:E_5^{p,4n}=\langle t^p\otimes(c^{2n}d^n)\rangle\longrightarrow E_5^{p+5,4n-4}=\langle t^{p+5}\otimes(c^{2n}d^{n-2})\rangle$$

é um isomorfismo, para todo p.

O estudo do diferencial $d_5^{p,q}$, com $q\in Q_0$, quando $n\equiv 3 \pmod 4$ é sumarizado na tabela a seguir.

$n \equiv 3 \pmod 4$	$q \equiv 0 \pmod 8$	$q \equiv 4 \pmod 8$
$0 \leq q \leq 2n-2$	$q \in \{0, 8, \dots, 2n-6\}$ $d_5^{p,q} = 0$	$q \in \{4, \dots, 2n-2\}$ $d_5^{p,q}$ é sobrejetor $\ker(d_5^{p,q}) = \{0\}$, para $p \geq 2$
$2n+2 \leq q < 4n$	$q \in \{2n+2, \dots, 4n-4\}$ $d_5^{p,q} = 0$	$q \in \{2n+6, \dots, 4n-8\}$ $d_5^{p,q}$ é sobrejetor $\ker(d_5^{p,q}) = \{0\}$, para $p \geq 2$
$q = 4n$		$d_5^{p,4n}$ é isomorfismo

Sabendo que

$$E_6^{p,q} = \frac{\ker(d_5^{p,q})}{\operatorname{im}(d_5^{p-5,q+4})},$$

obtemos $E_6^{p,q} = E_5^{p,q}$, para todo p, quando $q \in Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3$. Se $q \in Q_0$, então

$$q \equiv 0 \pmod 8 \implies E_6^{p,q} = \begin{cases} E_5^{p,q}, & \text{se } p < 5, \\ \{0\}, & \text{se } p \geq 5, \end{cases}$$

$$q \equiv 4 \pmod 8 \implies E_6^{p,q} = \begin{cases} \ker(d_5^{p,q}), & \text{se } p = 0 \text{ ou } 1, \\ \{0\}, & \text{se } p \geq 2. \end{cases}$$

Lembremos que

$$E_5^{p,q} = E_3^{p,q} = \begin{cases} \ker(d_2^{p,q}), & \text{se } p = 0, 1, \\ \langle \xi \rangle, & \text{se } p \geq 2 \text{ e } q \in Q_0, \\ \{0\}, & \text{se } p \geq 2 \text{ e } q \in Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3, \end{cases}$$

onde

$$\xi = \begin{cases} t^p \otimes d^{\frac{q}{2}}, & \text{se } q < 2n, \\ t^p \otimes (c^{2n} d^{\frac{q-2n}{2}}), & \text{se } q > 2n. \end{cases}$$

Seja $s \geq 6$. Suponhamos $E_s = E_6$ e consideremos o diferencial

$$d_s^{p,q} : E_s^{p,q} \longrightarrow E_s^{p+s,q+1-s}.$$

Uma vez que $p + s \geq 6$, $E_s^{p+s,q+1-s} = \{0\}$ e concluímos que $d_s = 0$. Portanto, a sequência colapsa no E_6-termo, ou seja, $E_\infty \cong E_6$.

$$
\begin{array}{cccccccc}
E_6^{0,4n-2} & E_6^{1,4n-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
E_6^{0,4n-3} & E_6^{1,4n-3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
E_6^{0,4n-4} & E_6^{1,4n-4} & E_6^{2,4n-4} & E_6^{3,4n-4} & E_6^{4,4n-4} & 0 & 0 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
E_6^{0,2n+2} & E_6^{1,2n+2} & E_6^{2,2n+2} & E_6^{3,2n+2} & E_6^{4,2n+2} & 0 & 0 & \cdots \\
E_6^{0,2n+1} & E_6^{1,2n+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
E_6^{0,2n} & E_6^{1,2n} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
E_6^{0,8} & E_6^{1,8} & E_6^{2,8} & E_6^{3,8} & E_6^{4,8} & 0 & 0 & \cdots \\
E_6^{0,7} & E_6^{1,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
E_6^{0,6} & E_6^{1,6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
E_6^{0,5} & E_6^{1,5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
E_6^{0,4} & E_6^{1,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
E_6^{0,3} & E_6^{1,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
E_6^{0,2} & E_6^{1,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
E_6^{0,1} & E_6^{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
E_6^{0,0} & E_6^{1,0} & E_6^{2,0} & E_6^{3,0} & E_6^{4,0} & 0 & 0 & \cdots
\end{array}
$$

Temos:

$$H^j(P(2n,n)_{\mathbb{Z}_2}) \cong \mathrm{Tot}(E_\infty)^j = \bigoplus_{j=p+q} E_\infty^{p,q} = E_\infty^{0,j} \oplus E_\infty^{1,j-1} \oplus E_\infty^{2,j-2} \oplus E_\infty^{3,j-3} \oplus E_\infty^{4,j-4}.$$

- $j \in Q_0 = \{0,4,\ldots,2n-2,2n+2,\ldots,4n\}$

  Neste caso,
  $$E_\infty^{2,j-2} = \{0\} \text{ e } E_\infty^{3,j-3} = \{0\},$$
  pois $j-2 \in Q_2$ e $j-3 \in Q_1$. Temos,
  $$E_\infty^{0,j} \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2^{\frac{j+4}{4}}, & \text{se } j \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 8) \text{ e } j \leq 2n-2, \\ \mathbb{Z}_2^{\frac{j}{4}}, & \text{se } j \equiv 4 \ (\mathrm{mod}\ 8) \text{ e } j \leq 2n-2, \\ \mathbb{Z}_2^{\frac{4n+4-j}{4}}, & \text{se } j \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 8) \text{ e } j > 2n-2, \\ \mathbb{Z}_2^{\frac{4n-j}{4}}, & \text{se } j \equiv 4 \ (\mathrm{mod}\ 8) \text{ e } j > 2n-2. \end{cases}$$

  Para $j=0$, $H^0(P(2n,n)_{\mathbb{Z}_2}) \cong E_\infty^{0,0} \cong \mathbb{Z}_2$.

  Suponhamos $j>0$. Uma vez que $j-1 \in Q_3$ e $j-4 \in Q_0$, temos
  $$E_\infty^{1,j-1} \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2^{\frac{(j-1)+1}{4}}, & \text{se } j \leq 2n-2, \\ \mathbb{Z}_2^{\frac{4n-1-(j-1)}{4}}, & \text{se } j > 2n-2, \end{cases} \quad \text{e } E_\infty^{4,j-4} \cong \begin{cases} \{0\}, & \text{se } j \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 8), \\ \mathbb{Z}_2, & \text{se } j \equiv 4 \ (\mathrm{mod}\ 8). \end{cases}$$

  Assim,
  $$H^j(P(2n,n)_{\mathbb{Z}_2}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2^{\frac{j+2}{2}}, & \text{se } j \leq 2n-2, \\ \mathbb{Z}_2^{\frac{4n+2-j}{2}}, & \text{se } j > 2n-2. \end{cases}$$

- $j \in Q_1 = \{1,\ldots,2n-1,2n+3,\ldots,4n-3\}$

  Neste caso,
  $$E_\infty^{2,j-2} = \{0\},\ E_\infty^{3,j-3} = \{0\} \text{ e } E_\infty^{4,j-4} = \{0\},$$
  pois $j-2 \in Q_3$, $j-3 \in Q_2$ e $j-4 \in Q_1$. Temos,
  $$E_\infty^{0,j} \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2^{\frac{j+3}{4}}, & \text{se } j \leq 2n-1, \\ \mathbb{Z}_2^{\frac{4n+1-j}{4}}, & \text{se } j > 2n-1. \end{cases}$$

  Como $j-1 \in Q_0$,
  $$E_\infty^{1,j-1} \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2^{\frac{(j-1)+4}{4}}, & \text{se } j \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 8) \text{ e } j \leq 2n-1, \\ \mathbb{Z}_2^{\frac{j-1}{4}}, & \text{se } j \equiv 5 \ (\mathrm{mod}\ 8) \text{ e } j \leq 2n-1, \\ \mathbb{Z}_2^{\frac{4n+4-(j-1)}{4}}, & \text{se } j \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 8) \text{ e } j > 2n-1, \\ \mathbb{Z}_2^{\frac{4n-(j-1)}{4}}, & \text{se } j \equiv 5 \ (\mathrm{mod}\ 8) \text{ e } j > 2n-1. \end{cases}$$

Portanto,

$$H^j(P(2n,n)_{\mathbb{Z}_2})\cong\begin{cases}\mathbb{Z}_2^{\frac{j+3}{2}}, & \text{se } j\equiv 1 \pmod 8 \text{ e } j\leq 2n-1,\\ \mathbb{Z}_2^{\frac{j+1}{2}}, & \text{se } j\equiv 5 \pmod 8 \text{ e } j\leq 2n-1,\\ \mathbb{Z}_2^{\frac{4n+3-j}{2}}, & \text{se } j\equiv 1 \pmod 8 \text{ e } j> 2n-1,\\ \mathbb{Z}_2^{\frac{4n+1-j}{2}}, & \text{se } j\equiv 5 \pmod 8 \text{ e } j> 2n-1.\end{cases}$$

- $j\in Q_2=\{2,\ldots,2n,2n+4,\ldots,4n-2\}$

  Aqui,
$$E_\infty^{3,j-3}=\{0\} \text{ e } E_\infty^{4,j-4}=\{0\},$$
  pois $j-3\in Q_3$ e $j-4\in Q_2$. Temos,
$$E_\infty^{0,j}\cong\begin{cases}\mathbb{Z}_2^{\frac{j+2}{4}}, & \text{se } j<2n,\\ \mathbb{Z}_2^{\frac{4n+2-j}{4}}, & \text{se } j\geq 2n.\end{cases}$$
  Observemos que $\frac{j+2}{4}=\frac{4n+2-j}{4}$, para $j=2n$.

  Uma vez que $j-1\in Q_1$ e $j-2\in Q_0$, temos
$$E_\infty^{1,j-1}\cong\begin{cases}\mathbb{Z}_2^{\frac{(j-1)+3}{4}}, & \text{se } j\leq 2n,\\ \mathbb{Z}_2^{\frac{4n+1-(j-1)}{4}}, & \text{se } j>2n,\end{cases} \quad \text{e } E_\infty^{2,j-2}\cong\begin{cases}\mathbb{Z}_2, & \text{se } j\equiv 2 \pmod 8,\\ \{0\}, & \text{se } j\equiv 6 \pmod 8).\end{cases}$$
  Logo,
$$H^j(P(2n,n)_{\mathbb{Z}_2})\cong\begin{cases}\mathbb{Z}_2^{\frac{j+4}{2}}, & \text{se } j\equiv 2 \pmod 8 \text{ e } j\leq 2n,\\ \mathbb{Z}_2^{\frac{j+2}{2}}, & \text{se } j\equiv 6 \pmod 8 \text{ e } j\leq 2n,\\ \mathbb{Z}_2^{\frac{4n+4-j}{2}}, & \text{se } j\equiv 2 \pmod 8 \text{ e } j> 2n,\\ \mathbb{Z}_2^{\frac{4n+2-j}{2}}, & \text{se } j\equiv 6 \pmod 8 \text{ e } j> 2n.\end{cases}$$

- $j\in Q_3=\{3,\ldots,2n-3,2n+1,\ldots,4n-1\}$

  Nesta situação,
$$E_\infty^{2,j-2}=\{0\} \text{ e } E_\infty^{4,j-4}=\{0\},$$
  já que $j-2\in Q_1$ e $j-4\in Q_3$. Temos
$$E_\infty^{0,j}\cong\begin{cases}\mathbb{Z}_2^{\frac{j+1}{4}}, & \text{se } j<2n+1,\\ \mathbb{Z}_2^{\frac{4n-1-j}{4}}, & \text{se } j\geq 2n+1.\end{cases}$$
  Como $j-1\in Q_2$ e $j-3\in Q_0$, temos
$$E_\infty^{1,j-1}\cong\begin{cases}\mathbb{Z}_2^{\frac{(j-1)+2}{4}}, & \text{se } j<2n+1,\\ \mathbb{Z}_2^{\frac{4n+2-(j-1)}{4}}, & \text{se } j\geq 2n+1,\end{cases} \quad \text{e } E_\infty^{3,j-3}\cong\begin{cases}\mathbb{Z}_2, & \text{se } j\equiv 3 \pmod 8),\\ \{0\}, & \text{se } j\equiv 7 \pmod 8).\end{cases}$$

Portanto,

$$H^j(P(2n,n)_{\mathbb{Z}_2}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2^{\frac{j+3}{2}}, & \text{se } j \equiv 3 \text{ (mod 8) e } j < 2n+1, \\ \mathbb{Z}_2^{\frac{j+1}{2}}, & \text{se } j \equiv 7 \text{ (mod 8) e } j < 2n+1, \\ \mathbb{Z}_2^{\frac{4n+3-j}{2}}, & \text{se } j \equiv 3 \text{ (mod 8) e } j \geq 2n+1, \\ \mathbb{Z}_2^{\frac{4n+1-j}{2}}, & \text{se } j \equiv 7 \text{ (mod 8) e } j \geq 2n+1. \end{cases}$$

Resumindo, $H^j(P(2n,n)_{\mathbb{Z}_2}) = \{0\}$, para $j > 4n$, e

$$H^j(P(2n,n)_{\mathbb{Z}_2}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2^{\frac{j+2}{2}}, & \text{se } j \equiv 0,4,6 \text{ (mod 8) e } j \leq 2n, \\ \mathbb{Z}_2^{\frac{4n+2-j}{2}}, & \text{se } j \equiv 0,4,6 \text{ e } j > 2n, \\ \mathbb{Z}_2^{\frac{j+4}{2}}, & \text{se } j \equiv 2 \text{ (mod 8) e } j < 2n, \\ \mathbb{Z}_2^{\frac{4n+4-j}{2}}, & \text{se } j \equiv 2 \text{ (mod 8) e } j > 2n, \\ \mathbb{Z}_2^{\frac{j+3}{2}}, & \text{se } j \equiv 1,3 \text{ (mod 8) e } j < 2n, \\ \mathbb{Z}_2^{\frac{4n+3-j}{2}}, & \text{se } j \equiv 1,3 \text{ (mod 8) e } j > 2n, \\ \mathbb{Z}_2^{\frac{j+1}{2}}, & \text{se } j \equiv 5,7 \text{ (mod 8) e } j < 2n, \\ \mathbb{Z}_2^{\frac{4n+1-j}{2}}, & \text{se } j \equiv 5,7 \text{ (mod 8) e } j > 2n. \end{cases}$$

Agora, determinaremos a estrutura de anel de $H^*(P(2n,n)_{\mathbb{Z}_2})$. Seja $x = \pi^*(t)$, como na Seção 4.1. Então,

$$x \in E_\infty^{1,0}, \;\; x^5 \in E_\infty^{5,0} = \{0\} \;\; \text{e}$$

$$x^p = \pi^*(t^p) \neq 0, \;\; \text{quando} \;\; p = 1,2,3,4.$$

Os elementos $1 \otimes c \in E_2^{0,1}$, $1 \otimes (cd^2) \in E_2^{0,5}$, $1 \otimes d^4 \in E_2^{0,8}$ e $1 \otimes (c^{2n}d) \in E_2^{0,2n+2}$ são cociclos permanentes e determinam os elementos não nulos $\mathbf{y} \in E_\infty^{0,1}$, $\mathbf{z} \in E_\infty^{0,5}$, $\mathbf{w} \in E_\infty^{0,8}$ e $\mathbf{v} \in E_\infty^{0,2n+2}$, respectivamente.

Uma vez que o cociclo permanente $1 \otimes (c^2d^4) \in E_2^{0,10}$ se decompõe como

$$(1 \otimes (cd^2)) \cdot (1 \otimes (cd^2)) \;\; \text{ou} \;\; (1 \otimes c^2) \cdot (1 \otimes d^4),$$

vale a relação

$$\mathbf{z}^2 + \mathbf{y}^2\mathbf{w} = 0.$$

Temos
$$x^2\mathbf{y}=0,\ \ x^2\mathbf{z}=0\ \text{ e }\ \mathbf{v}^2=0,$$
pois $x^2\mathbf{y}\in E_\infty^{2,1}=\{0\}$, $x^2\mathbf{z}\in E_\infty^{2,5}=\{0\}$ e $\mathbf{v}^2\in E_\infty^{0,4n+4}=\{0\}$. Também,
$$\mathbf{y}^{2n+1}=0,\ \ \mathbf{w}^{\frac{n+1}{4}}=0,\ \ \mathbf{yv}=0\ \text{ e }\ \mathbf{zv}=0,$$
já que $c^{2n+1}=0$ e $d^{n+1}=0$ em $H^*(P(2n,n))$.

Assim, concluímos que
$$\mathrm{Tot}(E_\infty)\cong\frac{\mathbb{Z}_2[x,\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{w},\mathbf{v}]}{\langle x^5,\mathbf{y}^{2n+1},\mathbf{w}^{\frac{n+1}{4}},\mathbf{v}^2,x^2\mathbf{y},x^2\mathbf{z},\mathbf{z}^2+\mathbf{y}^2\mathbf{w},\mathbf{yv},\mathbf{zv}\rangle}$$
como uma álgebra graduada comutativa, com $\deg(x)=\deg(\mathbf{y})=1$, $\deg(\mathbf{z})=5$, $\deg(\mathbf{w})=8$ e $\deg(\mathbf{v})=2n+2$.

Novamente, recorreremos ao Teorema 1.46, que nos garante que
$$H^q(P(2n,n)_{\mathbb{Z}_2})\twoheadrightarrow E_\infty^{0,q}\cong E_{q+2}^{0,q}\hookrightarrow E_{q+1}^{0,q}\hookrightarrow\cdots\hookrightarrow E_2^{0,q}\cong H^q(P(2n,n))$$
é o homomorfismo
$$i^*:H^q(P(2n,n)_{\mathbb{Z}_2})\longrightarrow H^q(P(2n,n)).$$

Para $q=1$, obtemos
$$H^1(P(2n,n)_{\mathbb{Z}_2})\twoheadrightarrow E_\infty^{0,1}\cong E_3^{0,1}=E_2^{0,1}\cong H^1(P(2n,n)),$$
e concluímos que i^* é sobrejetor no nível 1, isto é, existe um elemento não nulo $y\in H^1(P(2n,n)_{\mathbb{Z}_2})$ tal que $i^*(y)=c$. Observemos que $y\neq x$, pois $i^*(x)=0$. Então, y representa $\mathbf{y}$ e satisfaz
$$i^*(y^k)=i^*(y)^k=c^k\neq 0,\ \ \text{para}\ \ k=0,1,\ldots,2n.$$

Uma vez que
$$x^2y\in H^3(P(2n,n)_{\mathbb{Z}_2})=\langle y^3,xy^2,x^3\rangle,$$
existem $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{Z}_2$ tais que
$$x^2y=\alpha_1y^3+\alpha_2xy^2+\alpha_3x^3.$$

Para $q=5$, temos
$$i^*:H^5(P(2n,n)_{\mathbb{Z}_2})\twoheadrightarrow E_\infty^{0,5}\cong E_6^{0,5}=E_5^{0,5}=E_4^{0,5}=E_3^{0,5}\hookrightarrow E_2^{0,5}\cong H^5(P(2n,n))$$
e podemos escrever $i^*=f\circ g$, onde
$$f:E_\infty^{0,5}\cong E_6^{0,5}\hookrightarrow E_2^{0,5}\cong H^5(P(2n,n))$$

e

$$g : H^5(P(2n,n)_{\mathbb{Z}_2}) \twoheadrightarrow E_\infty^{0,5}.$$

Dado $\mathbf{z} \in E_\infty^{0,5}$, temos $f(\mathbf{z}) = cd^2$. Como g é sobrejetor, existe um elemento não nulo $z \in H^5(P(2n,n)_{\mathbb{Z}_2})$ tal que $g(z) = \mathbf{z}$ e, assim, $i^*(z) = f \circ g(z) = cd^2$. Claramente, $z \notin \{y^5, xy^4\}$, pois

$$\begin{array}{rcl} i^*(y^5) & = & c^5, \\ i^*(xy^4) & = & \underbrace{i^*(x)}_{0} i^*(y^4) = 0. \end{array}$$

Então, z representa $\mathbf{z}$ e satisfaz

$$i^*(y^k z) = i^*(y)^k i^*(z) = c^{k+1}d^2 \neq 0, \ \text{ para } \ k = 0,1,\ldots,2n-1.$$

Uma vez que

$$x^2 z \in H^7(P(2n,n)_{\mathbb{Z}_2}) = \langle y^7, y^2 z, xy^6, xyz \rangle,$$

existem $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4 \in \mathbb{Z}_2$ tais que

$$x^2 z = \beta_1 y^7 + \beta_2 y^2 z + \beta_3 xy^6 + \beta_4 xyz.$$

Para $q = 8$, temos

$$i^* : H^8(P(2n,n)_{\mathbb{Z}_2}) \twoheadrightarrow E_\infty^{0,8} \cong E_6^{0,8} \hookrightarrow E_2^{0,8} \cong H^8(P(2n,n))$$

e, de maneira análoga ao caso $q = 5$, encontramos $w \in H^8(P(2n,n)_{\mathbb{Z}_2})$ tal que $i^*(w) = d^4$. Observemos que $w \notin \{y^8, y^3 z, xy^7, xy^2 z\}$, pois

$$\begin{array}{rcl} i^*(y^8) & = & c^8, \\ i^*(y^3 z) & = & c^4 d^2, \\ i^*(xy^7) & = & \underbrace{i^*(x)}_{0} i^*(y^7) = 0, \\ i^*(xy^2 z) & = & \underbrace{i^*(x)}_{0} i^*(y^2 z) = 0. \end{array}$$

Então, w representa $\mathbf{w}$ e

$$i^*(y^k z^s w^j) = i^*(y)^k i^*(z)^s i^*(w)^j = c^{k+s} d^{4j+2s} \neq 0,$$

para $s = 0,1$, $k = 0,1,\ldots,2n-s$ e $j = 0,\ldots,\frac{n-3}{4}$.

Dado que

$$z^2 + y^2 w \in H^{10}(P(2n,n)_{\mathbb{Z}_2}) = \langle y^{10}, y^5 z, y^2 w, xy^9, xy^4 z, xyw, x^2 w \rangle,$$

existem $\gamma_j \in \mathbb{Z}_2$, $j = 1,\ldots,7$, tais que

$$z^2 + y^2 w = \gamma_1 y^{10} + \gamma_2 y^5 z + \gamma_3 y^2 w + \gamma_4 xy^9 + \gamma_5 xy^4 z + \gamma_6 xyw + \gamma_7 x^2 w.$$

Uma vez que $y^{2n+1}\in H^{2n+1}(P(2n,n)_{\mathbb{Z}_2})$ e

$$H^{2n+1}=\langle y^{2n-4}z,\ y^{2n-7}w,\dots,\ y^7w^{\frac{n-3}{4}},\ y^2zw^{\frac{n-3}{4}},\ xy^{2n},\ xy^{2n-5}z,\ xy^{2n-8}w,\dots,\ xy^6w^{\frac{n-3}{4}},\ xyzw^{\frac{n-3}{4}}\rangle,$$

existem $\delta_{sj},\varepsilon_{sj}\in\mathbb{Z}_2$, com $s=0,1$ e $j=0,1,\dots,\frac{n+1}{4}$, tais que

$$y^{2n+1}=\delta_{10}y^{2n-4}z+\varepsilon_{00}xy^{2n}+\varepsilon_{10}xy^{2n-5}z+\underbrace{\sum_{\substack{0\le s\le 1\\ 1\le j\le\frac{n-3}{4}}}\Big(\delta_{sj}y^{2n+1-(5s+8j)}z^sw^j+\varepsilon_{sj}xy^{2n-(5s+8j)}z^sw^j\Big)}_{n>3}$$

Para $q=2n+2$, temos

$$i^*:H^{2n+2}(P(2n,n))\twoheadrightarrow E_\infty^{0,2n+2}\cong E_6^{0,2n+2}\hookrightarrow E_2^{0,2n+2}\cong H^{2n+2}(P(2n,n))$$

e, semelhante ao caso $q=5$, obtemos um elemento não nulo $v\in H^{2n+2}(P(2n,n)_{\mathbb{Z}_2})$ tal que $i^*(v)=c^{2n}d$. Então v representa $\mathbf{v}$ e satisfaz $v^2\in H^{4n+4}(P(2n,n)_{\mathbb{Z}_2})=\{0\}$. Temos,

$$i^*(w^jv)=i^*(w)^ji^*(v)=c^{2n}d^{4j+1}\neq 0,\ \text{ para }\ j=0,\dots,\tfrac{n-3}{4}.$$

Sabendo que

$$H^{2n+2}=\langle v,\ y^{2n-3}z,\ y^{2n-6}w,\dots,\ y^3zw^{\frac{n-3}{4}},\ xy^{2n-4}z,\ xy^{2n-7}w,\dots,\ xy^2zw^{\frac{n-3}{4}}\rangle,$$

$$H^{2n+3}=\langle y^{2n-2}z,\ y^{2n-5}w,\dots,\ y^4zw^{\frac{n-3}{4}},\ xv,\ xy^{2n-3}z,\dots,\ xy^3zw^{\frac{n-3}{4}}\rangle,$$

$$H^{2n+7}=\begin{cases}\langle y^{2n-1}w,\ y^{2n-6}zw,\dots,\ y^8zw^{\frac{n-3}{4}},\ xy^{2n-2}w,\ xy^{2n-7}zw,\dots,\ xy^7zw^{\frac{n-3}{4}}\rangle, & n>3,\\ \{0\}, & n=3,\end{cases}$$

existem $\zeta_1,\zeta_2,\eta_{sj},\theta_{sj},\lambda_{sj},\mu_{sj},\sigma_{sj},\tau_{sj}\in\mathbb{Z}_2$, tais que

$$w^{\frac{n+1}{4}}=\zeta_1v+\eta_{10}y^{2n-3}z+\theta_{10}xy^{2n-4}z+\underbrace{\sum_{\substack{0\le s\le 1\\ 1\le j\le\frac{n-3}{4}}}\Big(\eta_{sj}y^{2n+2-(5s+8j)}z^sw^j+\theta_{sj}xy^{2n+1-(5s+8j)}z^sw^j\Big)}_{n>3},$$

$$yv=\zeta_2xv+\lambda_{10}y^{2n-2}z+\mu_{10}xy^{2n-3}z+\underbrace{\sum_{\substack{0\le s\le 1\\ 1\le j\le\frac{n-3}{4}}}\Big(\lambda_{sj}y^{2n+3-(5s+8j)}z^sw^j+\mu_{sj}xy^{2n+2-(5s+8j)}z^sw^j\Big)}_{n>3},$$

$$zv=\begin{cases}\displaystyle\sum_{\substack{0\le s\le 1\\ 1\le j\le\frac{n-3}{4}}}\Big(\sigma_{sj}y^{2n+7-(5s+8j)}z^sw^j+\tau_{sj}xy^{2n+6-(5s+8j)}z^sw^j\Big), & n>3,\\ 0, & n=3.\end{cases}$$

Portanto,

$$H^*(P(2n,n)_{\mathbb{Z}_2})\cong\frac{\mathbb{Z}_2[x,y,z,w,v]}{\langle R_1,R_2,R_3,R_4,R_5,R_6,R_7,R_8,R_9\rangle},$$

onde $\deg(x) = \deg(y) = 1$, $\deg(z) = 5$, $\deg(w) = 8$, $\deg(v) = 2n+2$ e

$$\begin{aligned}
R_1 &= x^5,\\
R_2 &= x^2y + \alpha_1 y^3 + \alpha_2 xy^2 + \alpha_3 x^3,\\
R_3 &= x^2z + \beta_1 y^7 + \beta_2 y^2 z + \beta_3 xy^6 + \beta_4 xyz,\\
R_4 &= z^2 + y^2 w + \gamma_1 y^{10} + \gamma_2 y^5 z + \gamma_3 y^2 w + \gamma_4 xy^9 + \gamma_5 xy^4 z + \gamma_6 xyw + \gamma_7 x^2 w,\\
R_5 &= y^{2n+1} + \delta_{10} y^{2n-4} z + \varepsilon_{00} xy^{2n} + \varepsilon_{10} xy^{2n-5} z +\\
&\quad + \sum_{\substack{0\le s\le 1\\ 1\le j\le \frac{n-3}{4}}} \left(\delta_{sj} y^{2n+1-(5s+8j)} z^s w^j + \varepsilon_{sj} xy^{2n-(5s+8j)} z^s w^j\right),\\
R_6 &= v^2,\\
R_7 &= w^{\frac{n+1}{4}} + \zeta_1 v + \eta_{10} y^{2n-3} z + \theta_{10} xy^{2n-4} z +\\
&\quad + \sum_{\substack{0\le s\le 1\\ 1\le j\le \frac{n-3}{4}}} \left(\eta_{sj} y^{2n+2-(5s+8j)} z^s w^j + \theta_{sj} xy^{2n+1-(5s+8j)} z^s w^j\right),\\
R_8 &= yv + \zeta_2 xv + \lambda_{10} y^{2n-2} z + \mu_{10} xy^{2n-3} z +\\
&\quad + \sum_{\substack{0\le s\le 1\\ 1\le j\le \frac{n-3}{4}}} \left(\lambda_{sj} y^{2n+3-(5s+8j)} z^s w^j + \mu_{sj} xy^{2n+2-(5s+8j)} z^s w^j\right),\\
R_9 &= \begin{cases} zv + \displaystyle\sum_{\substack{0\le s\le 1\\ 1\le j\le \frac{n-3}{4}}} \left(\sigma_{sj} y^{2n+7-(5s+8j)} z^s w^j + \tau_{sj} xy^{2n+6-(5s+8j)} z^s w^j\right), & n > 3,\\ zv, & n = 3. \end{cases}
\end{aligned}$$

Em particular, se $n = 3$, então $w = \zeta_1 v + \eta_{10} y^3 z + \theta_{10} xy^2 z$, ou seja, w não é uma variável independente.

4.3.1.2 $n \equiv 1 \pmod 4$

Se $q \equiv 0 \pmod 8$, então $\frac{q-2n}{2} \equiv 3 \pmod 4$ e $d_5^{0,q}(1 \otimes (c^{2n} d^{\frac{q-2n}{2}})) = t^5 \otimes (c^{2n} d^{\frac{q-2n-4}{2}})$. Assim, para todo p,

$$d_5^{p,q}(t^p \otimes (c^{2n} d^{\frac{q-2n}{2}})) = (t^p \otimes 1) \cdot d_5^{0,q}(1 \otimes (c^{2n} d^{\frac{q-2n}{2}})) = t^{p+5} \otimes (c^{2n} d^{\frac{q-2n-4}{2}}).$$

Logo, $d_5^{p,q}$ é sobrejetor para todo p, com

$$\ker(d_5^{p,q}) = \begin{cases} \langle t^p \otimes (c^{2n-2} d^{\frac{q-2n}{2}+1}), \ldots, t^p \otimes (c^{q-2n+2} d^{n-1})\rangle = \mathbb{Z}_2^{\frac{4n-q}{4}}, & \text{se } p = 0,1,\\ \{0\}, & \text{se } p \ge 2. \end{cases}$$

Se $q \equiv 4 \pmod 8$, então $\frac{q-2n}{2} \equiv 1 \pmod 4$ e $d_5^{0,q}(1 \otimes (c^{2n} d^{\frac{q-2n}{2}})) = 0$. Assim, $d_5^{p,q} = 0$, para todo p. Neste caso, temos $d_5^{p,4n} = 0$.

Novamente, resumimos o estudo do diferencial d_5 quando $n \equiv 1 \pmod 4$ em uma tabela.

$n\equiv 1 \pmod 4$	$q\equiv 0 \pmod 8$	$q\equiv 4 \pmod 8$
$0\leq q\leq 2n-2$	$q\in\{0,8,\ldots,2n-2\}$ $d_5^{p,q}=0$	$q\in\{4,\ldots,2n-6\}$ $d_5^{p,q}$ é sobrejetor $\ker(d_5^{p,q})=\{0\}$, para $p\geq 2$
$2n+2\leq q\leq 4n$	$q\in\{2n+6,\ldots,4n-4\}$ $d_5^{p,q}$ é sobrejetor $\ker(d_5^{p,q})=\{0\}$, para $p\geq 2$	$q\in\{2n+2,\ldots,4n\}$ $d_5^{p,q}=0$

Sabendo que

$$E_6^{p,q}=\frac{\ker(d_5^{p,q})}{\operatorname{im}(d_5^{p-5,q+4})},$$

obtemos $E_6^{p,q}=E_5^{p,q}$, para todo p, quando $q\in Q_1\cup Q_2\cup Q_3\cup\{2n-2,4n\}$.

Se $q\in Q_0\setminus\{2n-2,4n\}$, então

$$q\equiv 0 \pmod 8 \quad\Longrightarrow\quad E_6^{p,q}=\begin{cases}\begin{cases}E_5^{p,q}, & \text{se } p<5,\\ \{0\}, & \text{se } p\geq 5,\end{cases} & \text{se } 0\leq q<2n-2,\\[2ex] \begin{cases}\ker(d_5^{p,q}), & \text{se } p=0,1,\\ \{0\}, & \text{se } p\geq 2,\end{cases} & \text{se } 2n-2<q\leq 4n-4.\end{cases}$$

$$q\equiv 4 \pmod 8 \quad\Longrightarrow\quad E_6^{p,q}=\begin{cases}\begin{cases}\ker(d_5^{p,q}), & \text{se } p=0,1,\\ \{0\}, & \text{se } p\geq 2,\end{cases} & \text{se } 4\leq q<2n+2,\\[2ex] \begin{cases}E_5^{p,q}, & \text{se } p<5,\\ \{0\}, & \text{se } p\geq 5,\end{cases} & \text{se } 2n+2\leq q<4n.\end{cases}$$

Observemos na página 98 que as linhas $2n-2$ e $4n$ ainda sobrevivem nesse estágio da sequência.

Seja $s\geq 6$. Suponhamos $E_s=E_6$ e consideremos o diferencial

$$d_s^{0,q}:E_s^{0,q}\longrightarrow E_s^{s,q+1-s},\ q\leq 4n.$$

$$
\begin{array}{cccccccc}
E_6^{0,4n} & E_6^{1,4n} & E_6^{2,4n} & E_6^{3,4n} & E_6^{4,4n} & E_6^{5,4n} & E_6^{6,4n} & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
E_6^{0,4n-2} & E_6^{1,4n-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
E_6^{0,4n-3} & E_6^{1,4n-3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
E_6^{0,4n-4} & E_6^{1,4n-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
E_6^{0,2n+2} & E_6^{1,2n+2} & E_6^{2,2n+2} & E_6^{3,2n+2} & E_6^{4,2n+2} & 0 & 0 & \cdots \\
E_6^{0,2n+1} & E_6^{1,2n+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
E_6^{0,2n} & E_6^{1,2n} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
E_6^{0,2n-1} & E_6^{1,2n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
E_6^{0,2n-2} & E_6^{1,2n-2} & E_6^{2,2n-2} & E_6^{3,2n-2} & E_6^{4,2n-2} & E_6^{5,2n-2} & E_6^{6,2n-2} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
E_6^{0,4} & E_6^{1,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
E_6^{0,3} & E_6^{1,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
E_6^{0,2} & E_6^{1,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
E_6^{0,1} & E_6^{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
E_6^{0,0} & E_6^{1,0} & E_6^{2,0} & E_6^{3,0} & E_6^{4,0} & 0 & 0 & \cdots
\end{array}
$$

Temos $E_s^{s,q+1-s}\neq\{0\}$ apenas quando $q+1-s=2n-2$, ou seja, $q=2n+s-3$. Assim, o único diferencial que devemos analisar é

$$d_s^{0,2n+s-3}: E_s^{0,2n+s-3}\longrightarrow E_s^{s,2n-2}=\langle t^s\otimes d^{n-1}\rangle,$$

pois os demais são triviais.

Já que $d_s^{0,1}(1\otimes c)=0$ e $d_s^{0,8}(1\otimes d^4)=0$,

$$d_s(1\otimes c^k)=0,\ \text{ para todo }\ k\in\{0,1,\ldots,2n\},\ \text{ e}$$

$$d_s(1\otimes d^\ell)=0,\ \text{ para }\ \ell\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 4),\ \ell<n.$$

Como $d_s^{0,5}(1\otimes(cd^2))=0$, temos

$$d_s(1\otimes(cd^\ell))=d_s((1\otimes(cd^2))\cdot(1\otimes d^{\ell-2}))=0,\ \text{ para }\ \ell\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 4).$$

Se $s\equiv 0$, 1, 2, 3, 4, 6 ou 7 (mod 8), então $2n+s-3\in Q_1\cup Q_2\cup Q_3$ ou $2n+s-3\equiv 0$ (mod 8) e um gerador de $E_s^{0,2n+s-3}$ é da forma $1\otimes(c^kd^\ell)$, com $\ell\equiv 0$ (mod 2). Podemos escrever

$$1\otimes(c^kd^\ell)=\begin{cases}(1\otimes c^k)\cdot(1\otimes d^\ell), & \text{se } \ell\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 4),\\ (1\otimes c^{k-1})\cdot(1\otimes(cd^\ell)), & \text{se } \ell\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 4),\end{cases}$$

e, em todo caso, $d_s^{0,2n+s-3}(1\otimes(c^kd^\ell))=0$.

Agora, se $s\equiv 5$ (mod 8), então $2n+s-3\equiv 4$ (mod 8) e um gerador de $E_s^{0,2n+s-3}$ é da forma $1\otimes(c^kd^\ell)$, com $\ell\equiv 0$ (mod 2) quando $k\neq 2n$, e $\ell=\frac{s-3}{2}\equiv 1$ (mod 2) quando $k=2n$. Neste caso, podemos escrever

$$1\otimes(c^kd^\ell)=\begin{cases}(1\otimes c^k)\cdot(1\otimes d^\ell), & \text{se } k\neq 2n \text{ e } \ell\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 4),\\ (1\otimes c^{k-1})\cdot(1\otimes(cd^\ell)), & \text{se } k\neq 2n \text{ e } \ell\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 4),\\ (1\otimes(c^{2n}d))\cdot(1\otimes d^{\frac{s-5}{2}}), & \text{se } k=2n,\end{cases}$$

uma vez que $\frac{s-5}{2}\equiv 0$ (mod 4). Em qualquer situação temos $d_s^{0,2n+s-3}(1\otimes(c^kd^\ell))=0$.

Portanto, concluímos que $d_s=0$, para todo $s\geq 6$, o que implica que a sequência colapsa no E_6-termo. Mas

$$H^{4n+1}(P(2n,n)_{\mathbb{Z}_2})\cong E_\infty^{1,4n}\oplus E_\infty^{2n+3,2n-2}\cong\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2,$$

o que contradiz a Proposição 1.8. Por isto, deduzimos que não pode ocorrer $d_5^{0,4}(1\otimes d^2)\neq 0$ quando $n\equiv 1$ (mod 4).

4.3.2 $d_5^{0,4}(1\otimes d^2)=0$

Consequentemente, temos

$$d_5^{0,2\ell}(1\otimes d^\ell)=0,\ \text{ para }\ \ell\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2),\ \ \ell<n.$$

Consideremos $q \in Q_0$ e $1 \otimes (c^k d^\ell) \in E_5^{0,q}$ um gerador. Se $0 < q \leq 2n-2$, então $\ell \equiv 0 \pmod 2$ e

$$d_5^{0,q}(1 \otimes (c^k d^\ell)) = d_5^{0,q}((1 \otimes c^k) \cdot (1 \otimes d^\ell)) = 0.$$

Se $2n+2 \leq q \leq 4n$, então $\ell \equiv 0 \pmod 2$ quando $k \neq 2n$, ou $\ell = \frac{q-2n}{2} \equiv 1 \pmod 2$ quando $k = 2n$. No caso de $k \neq 2n$,

$$d_5^{0,q}(1 \otimes (c^k d^\ell)) = d_5^{0,q}((1 \otimes c^k) \cdot (1 \otimes d^\ell)) = 0.$$

Se $k = 2n$, então a imagem de $1 \otimes (c^{2n} d^{\frac{q-2n}{2}})$ depende da imagem de $1 \otimes (c^{2n} d) \in E_5^{0,2n+2}$, que não pode ser escrito como um produto de dois elementos em E_5. Em vista disso, devemos considerar as seguintes hipóteses:

$$\textbf{(1)}\ d_5^{0,2n+2}(1 \otimes (c^{2n} d)) = t^5 \otimes d^{n-1} \quad \text{ou} \quad \textbf{(0)}\ d_5^{0,2n+2}(1 \otimes (c^{2n} d)) = 0.$$

No caso (1), para $q \geq 2n+6$ temos

$$\begin{aligned} d_5^{0,q}(1 \otimes (c^{2n} d^{\frac{q-2n}{2}})) &= d_5^{0,q}((1 \otimes (c^{2n} d)) \cdot (1 \otimes d^{\frac{q-2n-2}{2}})) \\ &= (t^5 \otimes d^{n-1}) \cdot (1 \otimes d^{\frac{q-2n-2}{2}}) \\ &= t^5 \otimes d^{\frac{q-4}{2}} \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois $\frac{q-4}{2} \geq n+1$. Portanto, $d_5^{p,q}$ é trivial para todo p, se $q \neq 2n+2$. O diferencial $d_5^{p,2n+2}$ é sobrejetor, com

$$\ker(d_5^{p,2n+2}) = \begin{cases} \langle t^p \otimes (c^{2n-2} d^2), t^p \otimes (c^{2n-6} d^4), \ldots, t^p \otimes (c^4 d^{n-1}) \rangle, & \text{se } p = 0 \text{ ou } 1, \\ \{0\}, & \text{se } p \geq 2. \end{cases}$$

Assim,

$$E_6^{p,q} = E_5^{p,q}, \ \text{ se } \ q \in Q \setminus \{2n-2, 2n+2\},$$

$$E_6^{p,2n-2} = \begin{cases} E_5^{p,2n-2}, & \text{se } p < 5, \\ \{0\}, & \text{se } p \geq 5, \end{cases}$$

$$E_6^{p,2n+2} = \ker(d_5^{p,2n+2}).$$

Um fragmento do E_6-termo para o caso (1) está representado abaixo.

$$
\begin{array}{cccccccc}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots \\
E_6^{0,2n+6} & E_6^{1,2n+6} & E_6^{2,2n+6} & E_6^{3,2n+6} & E_6^{4,2n+6} & E_6^{5,2n+6} & E_6^{6,2n+6} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
E_6^{0,2n+2} & E_6^{1,2n+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
E_6^{0,2n-2} & E_6^{1,2n-2} & E_6^{2,2n-2} & E_6^{3,2n-2} & E_6^{4,2n-2} & 0 & 0 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
E_6^{0,2n-6} & E_6^{1,2n-6} & E_6^{2,2n-6} & E_6^{3,2n-6} & E_6^{4,2n-6} & E_6^{5,2n-6} & E_6^{6,2n-6} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

No caso (0), temos $d_5=0$ e $E_6=E_5$.

Considere $s\geq 6$. Tanto no caso (1) quanto no caso (0), temos

$$d_s^{0,1}(1\otimes c)\in E_s^{s,2-s}=\{0\}\ \ (2-s<0)$$

e

$$d_s^{0,4}(1\otimes d^2)\in E_s^{s,5-s}=\{0\}\ \ (5-s<0).$$

Logo,

$$d_s^{0,k}(1\otimes c^k)=0\ \text{ e }\ 1\otimes c^k\in E_{s+1}^{0,k},\ \text{para todo}\ k\in\{0,1,\ldots,2n\},\ \text{ e}$$

$$d_s^{0,2\ell}(1\otimes d^\ell)=0\ \text{ e }\ 1\otimes d^\ell\in E_{s+1}^{0,2\ell},\ \text{para}\ \ell\equiv 0\ (\text{mod}\ 2).$$

Isto significa que, dado um gerador $1\otimes(c^kd^\ell)$ em E_s com $k\neq 2n$, podemos escrever

$$1\otimes(c^kd^\ell)=(1\otimes c^k)\cdot(1\otimes d^k)$$

e concluímos que $d_s(1\otimes(c^kd^\ell))=0$. Assim, nossa análise se resume em investigar a imagem de $1\otimes(c^{2n}d^{\frac{q-2n}{2}})$.

Segue de (1) que $1 \otimes (c^{2n}d) \notin E_s$ e, neste caso, é o elemento $1 \otimes (c^{2n}d^3) \in E_s^{0,2n+6}$ que não se decompõe e determina a imagem de $1 \otimes (c^{2n}d^{\frac{q-2n}{2}})$, para $q \geq 2n+10$, pois escrevemos

$$1 \otimes (c^{2n}d^{\frac{q-2n}{2}}) = (1 \otimes (c^{2n}d^3)) \cdot (1 \otimes d^{\frac{q-2n-6}{2}}).$$

Uma vez que

$$d_s^{0,2n+6}(1 \otimes (c^{2n}d^3)) \in E_s^{s,2n+7-s},$$

temos

$$d_s^{0,2n+6}(1 \otimes (c^{2n}d^3)) = 0, \ \text{ para } \ s = 6, 7, \ldots, 12.$$

Logo, $d_6 = \cdots = d_{12} = 0$ e $E_{13} = \cdots = E_6$. Para $s = 13$,

$$d_{13}^{0,2n+6}(1 \otimes (c^{2n}d^3)) \in E_{13}^{13,2n-6} = \langle t^{13} \otimes d^{n-3} \rangle.$$

Como não é possível determinar o valor de $d_{13}^{0,2n+6}(1 \otimes (c^{2n}d^3))$, devemos considerar as duas possibilidades:

$$\textbf{(1,3)}\ d_{13}^{0,2n+6}(1 \otimes (c^{2n}d^3)) = t^{13} \otimes d^{n-3} \quad \text{ou} \quad \textbf{(1,0)}\ d_{13}^{0,2n+6}(1 \otimes (c^{2n}d^3)) = 0.$$

Para $n = 3$, temos a seguinte configuração:

$$\begin{tikzcd}
E_{13}^{0,12} \arrow[ddddddrrrrrrrr, dashed] & E_{13}^{1,12} & E_{13}^{2,12} & E_{13}^{3,12} & E_{13}^{4,12} & E_{13}^{5,12} & \cdots & E_{13}^{12,12} & E_{13}^{13,12} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\
E_{13}^{0,8} & E_{13}^{1,8} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\
E_{13}^{0,4} & E_{13}^{1,4} & E_{13}^{2,4} & E_{13}^{3,4} & E_{13}^{4,4} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\
E_{13}^{0,0} & E_{13}^{1,0} & E_{13}^{2,0} & E_{13}^{3,0} & E_{13}^{4,0} & E_{13}^{5,0} & \cdots & E_{13}^{12,0} & E_{13}^{13,0} & \cdots
\end{tikzcd}$$

Se $d_{13}^{0,12}(1 \otimes (c^6d^3)) = 0$, então $d_{13} = 0$ e $E_{14} = E_{13}$. Para $s \geq 14$, os diferenciais

$$E_s^{p-s,s-1} \longrightarrow E_s^{p,0} \longrightarrow E_s^{p+s,1-s}$$

e

$$E_s^{p-s,s+11} \longrightarrow E_s^{p,12} \longrightarrow E_s^{p+s,13-s}$$

são triviais, pois $s-1, s+11 > 12$ e $1-s, 13-s < 0$. Mas isto significa que as linhas 0 e 12 sobrevivem no infinito, o que contradiz a Proposição 1.8.

Por isso, devemos ter $d_{13}^{0,12}(1\otimes(c^6d^3)) = t^{13}\otimes 1$, o que implica em $d_{13}^{p,12}$ ser um isomorfismo para todo p. Neste caso, temos

$$E_{14}^{p,q} = E_{13}^{p,q}, \text{ quando } q \in Q\setminus\{0,12\},$$

$$E_{14}^{p,12} = \{0\} \text{ e } E_{14}^{p,0} = \begin{cases} E_{13}^{p,0}, & \text{se } p < 13, \\ \{0\}, & \text{se } p \geq 13. \end{cases}$$

Assim, $E_\infty \cong E_{14}$ e temos um possível anel de cohomologia a partir de $\mathrm{Tot}(E_\infty)$. Portanto, quando $n=3$ apenas (1,3) se verifica.

No caso (0), o elemento $1\otimes(c^{2n}d)$ persiste na sequência e como

$$d_s^{0,2n+2}(1\otimes(c^{2n}d)) \in E_s^{s,2n+3-s},$$

temos

$$d_s^{0,2n+2}(1\otimes(c^{2n}d)) = 0, \text{ para } s = 6,7,8.$$

Dessa forma, $d_6 = d_7 = d_8 = 0$ e $E_9 = \cdots = E_6$. Para $s=9$,

$$d_9^{0,2n+2}(1\otimes(c^{2n}d)) \in E_9^{9,2n-6} = \langle t^9\otimes d^{n-3}\rangle.$$

Como não é possível determinar o valor de $d_9^{0,2n+2}(1\otimes(c^{2n}d))$, devemos considerar as duas possibilidades:

$$\textbf{(0,3)}\ d_9^{0,2n+2}(1\otimes(c^{2n}d)) = t^9\otimes d^{n-3} \quad \text{ou} \quad \textbf{(0,0)}\ d_9^{0,2n+2}(1\otimes(c^{2n}d)) = 0.$$

Para $n=3$, temos o seguinte esquema:

$$
\begin{tikzcd}
E_9^{0,12} & E_9^{1,12} & E_9^{2,12} & E_9^{3,12} & \cdots & E_9^{7,12} & E_9^{8,12} & E_9^{9,12} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
E_9^{0,8} \arrow[rrrrrrrdddd, dashed] & E_9^{1,8} & E_9^{2,8} & E_9^{3,8} & \cdots & E_9^{7,8} & E_9^{8,8} & E_9^{9,8} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
E_9^{0,4} & E_9^{1,4} & E_9^{2,4} & E_9^{3,4} & \cdots & E_9^{7,4} & E_9^{8,4} & E_9^{9,4} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
E_9^{0,0} & E_9^{1,0} & E_9^{2,0} & E_9^{3,0} & \cdots & E_9^{7,0} & E_9^{8,0} & E_9^{9,0} & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Se $d_9^{0,8}(1\otimes(c^6d))=0$, então $d_9=0$ e $E_{10}=E_9$. Para $s\geq 10$, os diferenciais

$$E_s^{p-s,s+7}\longrightarrow E_s^{p,8}\longrightarrow E_s^{p+s,9-s}$$

são triviais, pois $s+7>12$ e $9-s<0$. Mas isto significa que a linha 8 sobrevive no infinito, o que novamente contradiz a Proposição 1.8. Por isso, devemos ter $d_9^{0,8}(1\otimes(c^6d))=t^9\otimes 1$ e, consequentemente,

$$d_9^{0,12}(1\otimes(c^6d^3))=d_9^{0,12}((1\otimes(c^6d))\cdot(1\otimes d^2))=t^9\otimes d^2.$$

Logo, $d_9^{p,8}$ é um isomorfismo para $p\geq 2$ e $d_9^{p,12}$ é um isomorfismo para todo p. Portanto,

$$E_{10}^{p,q}=E_9^{p,q},\ \text{se } q\in Q\setminus Q_0,$$

$$E_{10}^{p,q}=\begin{cases} E_9^{p,q}, & \text{se } p<9,\\ \{0\}, & \text{se } p\geq 9,\end{cases}\quad \text{quando } q=0 \text{ ou } q=4,$$

$$E_{10}^{p,8}=\begin{cases} \ker(d_9^{p,8}), & \text{se } p=0 \text{ ou } p=1,\\ \{0\}, & \text{se } p\geq 2,\end{cases}\quad \text{e}\ \ E_{10}^{p,12}=\{0\}.$$

Assim, $E_\infty\cong E_{10}$ e temos mais um possível anel de cohomologia a partir de $\mathrm{Tot}(E_\infty)$, diferente de (1,3). Portanto, quando $n=3$ apenas (0,3) se realiza.

Agora, vamos investigar o que ocorre nos casos (1,3), (1,0), (0,3) e (0,0) quando $n>3$. No caso (1,3), ou seja, $d_{13}^{0,2n+6}(1\otimes(c^{2n}d^3))=t^{13}\otimes d^{n-3}$, temos

$$d_{13}^{0,2n+10}(1\otimes(c^{2n}d^5))\in E_{13}^{13,2n-2}=\{0\}$$

e, para $q \geq 2n+14$,

$$\begin{aligned} d_{13}^{0,q}(1\otimes(c^{2n}d^{\frac{q-2n}{2}})) &= d_{13}^{0,q}((1\otimes(c^{2n}d^3))\cdot(1\otimes d^{\frac{q-2n-6}{2}})) \\ &= (t^{13}\otimes d^{n-3})\cdot(1\otimes d^{\frac{q-2n-6}{2}}) \\ &= t^5\otimes d^{\frac{q-12}{2}} \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois $\frac{q-12}{2}\geq n+1$. Portanto, $d_{13}^{p,q}$ é trivial para todo p, se $q\neq 2n+6$. O diferencial $d_{13}^{p,2n+6}$ é sobrejetor, com

$$\ker(d_{13}^{p,2n+6}) = \begin{cases} \langle t^p\otimes(c^{2n-2}d^4),\ldots,t^p\otimes(c^8d^{n-1})\rangle, & \text{se } p=0 \text{ ou } 1, \\ \{0\}, & \text{se } p\geq 2. \end{cases}$$

Assim,

$$E_{14}^{p,q}=E_{13}^{p,q}, \ \text{ se } \ q\in Q\setminus\{2n-6,2n+6\},$$

$$E_{14}^{p,2n-6} = \begin{cases} E_{13}^{p,2n-6}, & \text{se } p<13, \\ \{0\}, & \text{se } p\geq 13, \end{cases} \quad \text{e} \quad E_{14}^{p,2n+6}=\ker(d_5^{p,2n+6}).$$

Suponhamos $s\geq 14$. Visto que $1\otimes(c^{2n}d)$ e $1\otimes(c^{2n}d^3)$ não pertencem ao E_s-termo, o elemento $1\otimes(c^{2n}d^5)\in E_s^{0,2n+10}$ não se decompõe. Como

$$d_s(1\otimes(c^{2n}d^5))\in E_s^{s,2n+11-s},$$

temos

$$d_s^{0,2n+10}(1\otimes(c^{2n}d^5))=0, \ \text{ para } \ s=14,15,\ldots,20.$$

Logo, $d_{14}=\cdots=d_{20}=0$ e $E_{21}=\cdots=E_{14}$. Para $s=21$,

$$d_{21}^{0,2n+10}(1\otimes(c^{2n}d^5))\in E_{21}^{21,2n-10}=\langle t^{21}\otimes d^{n-5}\rangle.$$

Como não é possível determinar o valor de $d_{21}^{0,2n+10}(1\otimes(c^{2n}d^5))$, devemos considerar as duas possibilidades:

(1,3,5) $d_{21}^{0,2n+10}(1\otimes(c^{2n}d^5))=t^{21}\otimes d^{n-5}$ ou **(1,3,0)** $d_{21}^{0,2n+10}(1\otimes(c^{2n}d^5))=0.$

Para $n=5$, representamos o E_{21}-termo na página 106 em formato de paisagem. Neste caso, não pode ocorrer (1,3,0), ou seja, $d_{21}^{0,20}(1\otimes(c^{10}d^5))=0$, pois as linhas 0 e 20 sobreviveriam no infinito, o que é um absurdo. Diante disso, $d_{21}^{0,20}(1\otimes(c^{10}d^5))=t^{21}\otimes 1$, o que resulta em $d_{21}^{p,20}$ ser um isomorfismo para todo p. Dessa forma, temos

$$E_{22}^{p,q}=E_{21}^{p,q}, \ \text{ quando } \ q\in Q\setminus\{0,20\},$$

$$E_{22}^{p,20}=\{0\} \ \text{ e } \ E_{22}^{p,0} = \begin{cases} E_{21}^{p,0}, & \text{se } p<21, \\ \{0\}, & \text{se } p\geq 21. \end{cases}$$

Assim, $E_\infty\cong E_{22}$ e obtemos um possível anel de cohomologia a partir de $\mathrm{Tot}(E_\infty)$.

$$
\begin{array}{cccccccccccccc}
E_{21}^{0,20} & E_{21}^{1,20} & E_{21}^{2,20} & E_{21}^{3,20} & E_{21}^{4,20} & E_{21}^{5,20} & E_{21}^{6,20} & \cdots & E_{21}^{12,20} & E_{21}^{13,20} & E_{21}^{14,20} & \cdots & E_{21}^{21,20} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\
E_{21}^{0,16} & E_{21}^{1,16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\
E_{21}^{0,12} & E_{21}^{1,12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\
E_{21}^{0,8} & E_{21}^{1,8} & E_{21}^{2,8} & E_{21}^{3,8} & E_{21}^{4,8} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\
E_{21}^{0,4} & E_{21}^{1,4} & E_{21}^{2,4} & E_{21}^{3,4} & E_{21}^{4,4} & E_{21}^{5,4} & E_{21}^{6,4} & \cdots & E_{21}^{12,4} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\
E_{21}^{0,0} & E_{21}^{1,0} & E_{21}^{2,0} & E_{21}^{3,0} & E_{21}^{4,0} & E_{21}^{5,0} & E_{21}^{6,0} & \cdots & E_{21}^{12,0} & E_{21}^{13,0} & E_{21}^{14,0} & \cdots & E_{21}^{21,0} & \cdots
\end{array}
$$

No caso $(1,0)$, temos $d_{13}=0$ e $E_{14}=E_{13}$. Suponhamos $s\geq 14$. Uma vez que o elemento $1\otimes(c^{2n}d^3)$ persiste na sequência e

$$d_s^{0,2n+6}(1\otimes(c^{2n}d^3))\in E_s^{s,2n+7-s},$$

temos

$$d_s^{0,2n+6}(1\otimes(c^{2n}d^3))=0, \text{ para } s=14,15,16.$$

Dessa maneira, $d_{14}=d_{15}=d_{16}=0$ e $E_{17}=\cdots=E_{14}$. Para $s=17$,

$$d_{17}^{0,2n+6}(1\otimes(c^{2n}d^3))\in E_{17}^{17,2n-10}=\langle t^{17}\otimes d^{n-5}\rangle.$$

Como não é possível determinar o valor de $d_{17}^{0,2n+6}(1\otimes(c^{2n}d^3))$, devemos considerar as duas possibilidades:

(1,0,5) $d_{17}^{0,2n+6}(1\otimes(c^{2n}d^3))=t^{17}\otimes d^{n-5}$ ou **(1,0,0)** $d_{17}^{0,2n+6}(1\otimes(c^{2n}d^3))=0.$

Retratamos o E_{17}-termo na página 108, considerando $n=5$. Neste caso, não podemos ter $d_{17}^{0,16}(1\otimes(c^{10}d^3))=0$, pois a linha 16 sobreviveria no infinito, o que não pode acontecer. Por isso, $d_{17}^{0,16}(1\otimes(c^{10}d^3))=t^{17}\otimes 1$ e

$$d_{17}^{0,20}(1\otimes(c^{10}d^5))=d_{17}^{0,20}((1\otimes(c^{10}d^3))\cdot(1\otimes d^2))=t^{17}\otimes d^2.$$

Sendo assim, $d_{17}^{p,16}$ é um isomorfismo para $p\geq 2$ e $d_{17}^{p,20}$ é um isomorfismo para todo p. Logo,

$$E_{18}^{p,q}=E_{17}^{p,q}, \text{ se } q\in Q\setminus\{0,4,16,20\},$$

$$E_{18}^{p,q}=\begin{cases} E_{17}^{p,q}, & \text{se } p<17,\\ \{0\}, & \text{se } p\geq 17,\end{cases} \quad \text{quando } q=0 \text{ ou } q=4,$$

$$E_{18}^{p,16}=\begin{cases} \ker(d_{17}^{p,16}), & \text{se } p=0 \text{ ou } p=1,\\ \{0\}, & \text{se } p\geq 2,\end{cases} \quad \text{e } E_{18}^{p,20}=\{0\}.$$

Dessa forma, $E_\infty\cong E_{18}$ e temos mais um possível anel de cohomologia a partir de $\mathrm{Tot}(E_\infty)$, distinto de (1,3,5).

Portanto, quando $n=5$ apenas (1,0,5) ocorre.

$$
\begin{tikzcd}[column sep=tiny, row sep=small]
E_{17}^{0,20} & E_{17}^{1,20} & E_{17}^{2,20} & E_{17}^{3,20} & E_{17}^{4,20} & E_{17}^{5,20} & E_{17}^{6,20} & E_{17}^{7,20} & E_{17}^{8,20} & \cdots & E_{17}^{14,20} & E_{17}^{15,20} & E_{17}^{16,20} & E_{17}^{17,20} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
E_{17}^{0,16} \arrow[dddddddd, rrrrrrrrrrrrr, dashed] & E_{17}^{1,16} & E_{17}^{2,16} & E_{17}^{3,16} & E_{17}^{4,16} & E_{17}^{5,16} & E_{17}^{6,16} & E_{17}^{7,16} & E_{17}^{8,16} & \cdots & E_{17}^{14,16} & E_{17}^{15,16} & E_{17}^{16,16} & E_{17}^{17,16} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
E_{17}^{0,12} & E_{17}^{1,12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
E_{17}^{0,8} & E_{17}^{1,8} & E_{17}^{2,8} & E_{17}^{3,8} & E_{17}^{4,8} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
E_{17}^{0,4} & E_{17}^{1,4} & E_{17}^{2,4} & E_{17}^{3,4} & E_{17}^{4,4} & E_{17}^{5,4} & E_{17}^{6,4} & E_{17}^{7,4} & E_{17}^{8,4} & \cdots & E_{17}^{14,4} & E_{17}^{15,4} & E_{17}^{16,4} & E_{17}^{17,4} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
E_{17}^{0,0} & E_{17}^{1,0} & E_{17}^{2,0} & E_{17}^{3,0} & E_{17}^{4,0} & E_{17}^{5,0} & E_{17}^{6,0} & E_{17}^{7,0} & E_{17}^{8,0} & \cdots & E_{17}^{14,0} & E_{17}^{15,0} & E_{17}^{16,0} & E_{17}^{17,0} & \cdots
\end{tikzcd}
$$

No caso (0,3), ou seja, $d_9^{0,2n+2}(1\otimes(c^{2n}d))=t^9\otimes d^{n-3}$, temos

$$d_9^{0,2n+6}(1\otimes(c^{2n}d^3))=d_9^{0,2n+6}((1\otimes(c^{2n}d))\cdot(1\otimes d^2))=t^9\otimes d^{n-1}$$

e, para $q\geq 2n+10$,

$$\begin{aligned} d_9^{0,q}(1\otimes(c^{2n}d^{\frac{q-2n}{2}})) &= d_9^{0,q}((1\otimes(c^{2n}d))\cdot(1\otimes d^{\frac{q-2n-2}{2}})) \\ &= (t^9\otimes d^{n-3})\cdot(1\otimes d^{\frac{q-2n-2}{2}})) \\ &= t^9\otimes d^{\frac{q-8}{2}} \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois $\frac{q-8}{2}\geq n+1$. Portanto, $d_9^{p,q}$ é trivial para todo p, se $q\in Q\setminus\{2n+2,2n+6\}$. Os diferenciais $d_9^{p,2n+2}$ e $d_9^{p,2n+6}$ são sobrejetores, com

$$\ker(d_9^{p,2n+2})=\begin{cases} \langle t^p\otimes(c^{2n-2}d^2),t^p\otimes(c^{2n-6}d^4),\ldots,t^p\otimes(c^4d^{n-1})\rangle, & \text{se } p=0 \text{ ou } p=1, \\ \{0\}, & \text{se } p\geq 2, \end{cases}$$

$$\ker(d_9^{p,2n+6})=\begin{cases} \langle t^p\otimes(c^{2n-2}d^4),\ldots,t^p\otimes(c^8d^{n-1})\rangle, & \text{se } p=0 \text{ ou } p=1, \\ \{0\}, & \text{se } p\geq 2. \end{cases}$$

Assim,

$$E_{10}^{p,q}=E_9^{p,q},\ \text{ se } q\in Q\setminus\{2n-6,2n-2,2n+2,2n+6\},$$

$$E_{10}^{p,q}=\begin{cases} E_9^{p,q}, & \text{se } p<9, \\ \{0\}, & \text{se } p\geq 9, \end{cases}\quad \text{quando } q\in\{2n-6,2n-2\},\quad \text{e}$$

$$E_{10}^{p,q}=\ker(d_9^{p,q}),\ \text{ se } q\in\{2n+2,2n+6\}.$$

Suponhamos $s\geq 10$. Uma vez que $1\otimes(c^{2n}d)$ e $1\otimes(c^{2n}d^3)$ não pertencem ao E_s-termo, o elemento $1\otimes(c^{2n}d^5)\in E_s^{0,2n+10}$ não se decompõe. Como

$$d_s^{0,2n+10}(1\otimes(c^{2n}d^5))\in E_s^{s,2n+11-s},$$

temos

$$d_s^{0,2n+10}(1\otimes(c^{2n}d^5))=0,\ \text{ para }\ s=10,11,\ldots,20.$$

Consequentemente, $d_{10}=\cdots=d_{20}=0$ e $E_{21}=\cdots=E_{10}$. Para $s=21$,

$$d_{21}^{0,2n+10}(1\otimes(c^{2n}d^5))\in E_{21}^{21,2n-10}=\langle t^{21}\otimes d^{n-5}\rangle.$$

Como não é possível determinar o valor de $d_{21}^{0,2n+10}(1\otimes(c^{2n}d^5))$, devemos considerar as duas possibilidades:

(0,3,5) $d_{21}^{0,2n+10}(1\otimes(c^{2n}d^5))=t^{21}\otimes d^{n-5}$ ou **(0,3,0)** $d_{21}^{0,2n+10}(1\otimes(c^{2n}d^5))=0$.

Representamos a seguir o E_{21}-termo para $n=5$.

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
E_{21}^{0,20} \arrow[ddddddddddrrrrrrrrrrrr, dashed] & E_{21}^{1,20} & E_{21}^{2,20} & E_{21}^{3,20} & E_{21}^{4,20} & E_{21}^{5,20} & E_{21}^{6,20} & E_{21}^{7,20} & E_{21}^{8,20} & E_{21}^{9,20} & E_{21}^{10,20} & \cdots & E_{21}^{21,20} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\
E_{21}^{0,16} & E_{21}^{1,16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\
E_{21}^{0,12} & E_{21}^{1,12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\
E_{21}^{0,8} & E_{21}^{1,8} & E_{21}^{2,8} & E_{21}^{3,8} & E_{21}^{4,8} & E_{21}^{5,8} & E_{21}^{6,8} & E_{21}^{7,8} & E_{21}^{8,8} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\
E_{21}^{0,4} & E_{21}^{1,4} & E_{21}^{2,4} & E_{21}^{3,4} & E_{21}^{4,4} & E_{21}^{5,4} & E_{21}^{6,4} & E_{21}^{7,4} & E_{21}^{8,4} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\
E_{21}^{0,0} & E_{21}^{1,0} & E_{21}^{2,0} & E_{21}^{3,0} & E_{21}^{4,0} & E_{21}^{5,0} & E_{21}^{6,0} & E_{21}^{7,0} & E_{21}^{8,0} & E_{21}^{9,0} & E_{21}^{10,0} & \cdots & E_{21}^{21,0} & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Quando $n=5$, não pode ocorrer (0,3,0), ou seja, $d_{21}^{0,20}(1\otimes(c^{10}d^5))=0$, pois as linhas 0 e 20 sobreviveriam no infinito, o que é um absurdo. Por isso, $d_{21}^{0,20}(1\otimes(c^{10}d^5))=t^{21}\otimes 1$, o que implica em $d_{21}^{p,20}$ ser um isomorfismo para todo p. Dessa forma, temos

$$E_{22}^{p,q}=E_{21}^{p,q},\ \text{ se }\ q\in Q\setminus\{0,20\},$$

$$E_{22}^{p,20}=\{0\}\ \text{ e }\ E_{22}^{p,0}=\begin{cases}E_{21}^{p,0}, & \text{se } p<21,\\ \{0\}, & \text{se } p\geq 21.\end{cases}$$

Assim, $E_\infty\cong E_{22}$ e obtemos um possível anel de cohomologia a partir de $\mathrm{Tot}(E_\infty)$, diferente de (1,3,5) e (1,0,5).

No caso (0,0), temos $d_9=0$ e $E_{10}=E_9$. Uma vez que o elemento $1\otimes(c^{2n}d)$ persiste na sequência e

$$d_s^{0,2n+2}(1\otimes(c^{2n}d))\in E_s^{s,2n+3-s},$$

temos

$$d_s^{0,2n+2}(1\otimes(c^{2n}d))=0,\ \text{ para }\ s=10,11,12.$$

Dessa maneira, $d_{10}=d_{11}=d_{12}=0$ e $E_{13}=\cdots=E_{10}$. Para $s=13$,

$$d_{13}^{0,2n+2}(1\otimes(c^{2n}d))\in E_{13}^{13,2n-10}=\langle t^{13}\otimes d^{n-5}\rangle.$$

Já que não é possível determinar o valor de $d_{13}^{0,2n+2}(1\otimes(c^{2n}d))$, devemos considerar as duas possibilidades:

$$\textbf{(0,0,5)}\ d_{13}^{0,2n+2}(1\otimes(c^{2n}d))=t^{13}\otimes d^{n-5}\quad \text{ou}\quad \textbf{(0,0,0)}\ d_{13}^{0,2n+2}(1\otimes(c^{2n}d))=0.$$

Representamos o E_{13}-termo, para $n=5$, na página 112. Neste caso, não pode ocorrer (0,0,0), ou seja, $d_{13}^{0,12}(1\otimes(c^{10}d))=0$, pois a linha 12 sobreviveria no infinito, o que é uma contradição. Por isso, $d_{13}^{0,12}(1\otimes(c^{10}d))=t^{13}\otimes 1$ e

$$d_{13}^{0,16}(1\otimes(c^{10}d^3))=d_{13}^{0,16}((1\otimes(c^{10}d))\cdot(1\otimes d^2))=t^{13}\otimes d^2,$$

$$d_{13}^{0,20}(1\otimes(c^{10}d^5))=d_{13}^{0,20}((1\otimes(c^{10}d))\cdot(1\otimes d^4))=t^{13}\otimes d^4.$$

Consequentemente, $d_{13}^{p,12}$ e $d_{13}^{p,16}$ são isomorfismos para $p\geq 2$ e $d_{13}^{p,20}$ é um isomorfismo para todo p. Portanto,

$$E_{14}^{p,q}=E_{13}^{p,q},\ \text{ se }\ q\in Q\setminus Q_0,$$

$$E_{14}^{p,q}=\begin{cases}E_{13}^{p,q}, & \text{se } p<13,\\ \{0\}, & \text{se } p\geq 13,\end{cases}\quad \text{quando}\quad q\in\{0,4,8\},$$

$$E_{14}^{p,q}=\begin{cases}\ker(d_{13}^{p,q}), & \text{se } p=0 \text{ ou } 1,\\ \{0\}, & \text{se } p\geq 2,\end{cases}\quad \text{quando}\quad q=12 \text{ ou } q=16\quad \text{e}\quad E_{14}^{p,20}=\{0\}.$$

Assim, $E_\infty\cong E_{14}$ e temos um possível anel de cohomologia a partir de $\mathrm{Tot}(E_\infty)$, distinto de (1,3,5), (0,3,5) e (0,3,5).

$$
\begin{tikzcd}[column sep=tiny, row sep=small]
E_{13}^{0,20} & E_{13}^{1,20} & E_{13}^{2,20} & E_{13}^{3,20} & E_{13}^{4,20} & E_{13}^{5,20} & E_{13}^{6,20} & E_{13}^{7,20} & E_{13}^{8,20} & E_{13}^{9,20} & E_{13}^{10,20} & E_{13}^{11,20} & E_{13}^{12,20} & E_{13}^{13,20} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
E_{13}^{0,16} & E_{13}^{1,16} & E_{13}^{2,16} & E_{13}^{3,16} & E_{13}^{4,16} & E_{13}^{5,16} & E_{13}^{6,16} & E_{13}^{7,16} & E_{13}^{8,16} & E_{13}^{9,16} & E_{13}^{10,16} & E_{13}^{11,16} & E_{13}^{12,16} & E_{13}^{13,16} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
E_{13}^{0,12} \arrow[rrrrrrrrrrrrrdddddd, dashed] & E_{13}^{1,12} & E_{13}^{2,12} & E_{13}^{3,12} & E_{13}^{4,12} & E_{13}^{5,12} & E_{13}^{6,12} & E_{13}^{7,12} & E_{13}^{8,12} & E_{13}^{9,12} & E_{13}^{10,12} & E_{13}^{11,12} & E_{13}^{12,12} & E_{13}^{13,12} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
E_{13}^{0,8} & E_{13}^{1,8} & E_{13}^{2,8} & E_{13}^{3,8} & E_{13}^{4,8} & E_{13}^{5,8} & E_{13}^{6,8} & E_{13}^{7,8} & E_{13}^{8,8} & E_{13}^{9,8} & E_{13}^{10,8} & E_{13}^{11,8} & E_{13}^{12,8} & E_{13}^{13,8} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
E_{13}^{0,4} & E_{13}^{1,4} & E_{13}^{2,4} & E_{13}^{3,4} & E_{13}^{4,4} & E_{13}^{5,4} & E_{13}^{6,4} & E_{13}^{7,4} & E_{13}^{8,4} & E_{13}^{9,4} & E_{13}^{10,4} & E_{13}^{11,4} & E_{13}^{12,4} & E_{13}^{13,4} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
E_{13}^{0,0} & E_{13}^{1,0} & E_{13}^{2,0} & E_{13}^{3,0} & E_{13}^{4,0} & E_{13}^{5,0} & E_{13}^{6,0} & E_{13}^{7,0} & E_{13}^{8,0} & E_{13}^{9,0} & E_{13}^{10,0} & E_{13}^{11,0} & E_{13}^{12,0} & E_{13}^{13,0} & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Nos resta avaliar o que ocorre nos casos (1,3,5), (1,3,0), (1,0,5), (1,0,0), (0,3,5), (0,3,0), (0,0,5) e (0,0,0) quando $n>5$.

Até o momento, verificamos que para $n=3$ existem dois possíveis anéis de cohomologia, por meio dos casos (1,3) e (0,3). Também, para $n=5$ existem quatro possíveis anéis de cohomologia, através dos casos (1,3,5), (1,0,5), (0,3,5) e (0,0,5).

Quanto maior for o valor de n, mais possibilidades para o anel de cohomologia vamos encontrar. Se $1\otimes(c^{2n}d^{\frac{q-2n}{2}})\in E_s^{0,q}$, para um q fixado, é o elemento que não se decompõe em um determinado estágio s da sequência e não é possível determinar sua imagem pelo diferencial d_s, então devemos considerar as hipóteses

$$d_s^{0,q}(1\otimes(c^{2n}d^{\frac{q-2n}{2}}))=0 \text{ ou } d_s^{0,q}(1\otimes(c^{2n}d^{\frac{q-2n}{2}}))\neq 0.$$

Se $d_s^{0,q}(1\otimes(c^{2n}d^{\frac{q-2n}{2}}))\neq 0$, então

$$d_s^{0,q}(1\otimes(c^{2n}d^{\frac{q-2n}{2}}))=t^s\otimes d^{n-(2j-1)},$$

para algum $j\in\{1,2,\dots,\frac{n+1}{2}\}$ que depende de s, q e n. Mais especificamente, $j=\frac{2n-q+s+1}{4}$.

Por exemplo, $1\otimes(c^{2n}d)$ é o elemento que não se decompõe no estágio 5 da sequência. Neste caso, $j=1$ e tratamos essa situação em (1).

Esta análise ramifica para muitas possibilidades e o critério de parada é quando

$$d_s^{0,q}(1\otimes(c^{2n}d^{\frac{q-2n}{2}}))\in E_s^{s,0}=\langle t^s\otimes 1\rangle,$$

ou seja, $q+1-s=0$. Se considerarmos a hipótese $d_s^{0,q}(1\otimes(c^{2n}d^{\frac{q-2n}{2}}))=0$, então neste caso $d_s=0$ e $E_{s+1}=E_s$. Para $u\geq s+1$, os diferenciais

$$E_u^{p-u,q+u-1}\longrightarrow E_u^{p,q}\longrightarrow E_u^{p+u,q+1-u}$$

são triviais, pois

$$q+1-u\leq q+1-s-1=-1 \ \ (q+1-s=0)$$

e

$$q+u-1\geq q+s+1-1=q+s\geq 4n+5 \ \ (q\geq 2n+2).$$

Mas isto implica que a linha q sobrevive no infinito, o que contradiz a Proposição 1.43. Portanto, a única possibilidade é $d_s^{0,q}(1\otimes(c^{2n}d^{\frac{q-2n}{2}}))=t^s\otimes 1$ $(j=\frac{n+1}{2})$, o que finaliza os cálculos.

Para um n qualquer, existem os casos

$$(a_1,a_2,\dots,a_{\frac{n-1}{2}},a_{\frac{n+1}{2}}),$$

onde $a_j=0$, se a imagem do elemento em questão é nula, ou $a_j=2j-1$, se a imagem desse elemento tem a potência $d^{n-(2j-1)}$, para $j=1,\dots,\frac{n-1}{2}$, e $a_{\frac{n+1}{2}}=n$. Para cada coordenada, exceto a última, existem dois valores possíveis, portanto, pelo princípio multiplicativo da contagem, existem $2^{\frac{n-1}{2}}$ possíveis anéis de cohomologia.

REFERÊNCIAS

BARTSCH, T. Topological methods for variational problems with symmetries. In: **Lecture notes in Mathematics**. Berlin: Springer-Verlag, 1993. v. 1560. Citado na página 24.

BOREL, A. **Seminar on transformation groups**. [S.l.]: Princeton University Press, 1960. Citado nas páginas 18 e 23.

BREDON, G. E. **Introduction to compact transformation groups**. New York: Academic Press, 1972. Citado nas páginas 18, 19, 24, 33 e 38.

CUSICK, L. W. Free actions on spaces with nonzero euler characteristic. **Topology and its Applications**, v. 33, p. 185–196, 1989. Citado na página 17.

DAVIS, D. M. Projective product spaces. **Journal of Topology**, v. 3, p. 265–279, 2010. Citado na página 17.

DIECK, T. tom. **Algebraic topology**. [S.l.]: EMS, 2008. Citado na página 22.

DOLD, A. Erzeugende der thomschen algebra $\mathscr{N}$. **Mathematische Zeitschrift**, v. 65, p. 25–35, 1956. Citado nas páginas 18, 35, 36 e 37.

DOTZEL, R. M.; SINGH, T. B.; TRIPATHI, S. P. The cohomology rings of the orbit spaces of free transformation groups of the product of two spheres. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 129, p. 921–930, 2000. Citado nas páginas 17 e 20.

JAMES, I. Note on cup products. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 8, p. 374–383, 1957. Citado na página 17.

KHARE, S. S. On dold manifolds. **Topology and its Applications**, v. 33, p. 297–307, 1989. Citado nas páginas 35 e 36.

MCCLEARY, J. **A User's Guide to Spectral Sequences**. 2. ed. New York: Cambridge University Press, 2001. Citado nas páginas 18, 22, 23, 27, 31 e 32.

MILNOR, J. Construction of universal bundles, ii. **Annals of Mathematics**, v. 63, p. 430–436, 1956. Citado na página 23.

____. Groups which act on S^n without fixed point set. **American Journal of Mathematics**, v. 79, n. 3, p. 623–630, 1957. Citado na página 17.

MORITA, A. M. M.; MATTOS, D. de; PERGHER, P. L. Q. The cohomology ring of orbit spaces of free $\mathbb{Z}_2$-action on some dold manifolds. **Bulletin of the Australian Mathematical Society**, v. 97, p. 340–348, 2018. Citado nas páginas 18 e 37.

PERGHER, P. L. Q.; SINGH, H. K.; SINGH, T. B. On $\mathbb{Z}_2$ and $\mathbb{S}^1$ free actions on spaces of cohomology type (a,b). **Houston Journal of Mathematics**, v. 36, n. 1, p. 137–146, 2010. Citado nas páginas 17 e 20.

SINGH, H. K.; SINGH, T. B. Fixed point free involutions on cohomology projective spaces. **Indian Journal of Pure and Applied Mathematics**, v. 39, p. 285–291, 2008. Citado nas páginas 17 e 20.

TODA, H. Note on cohomology ring of certain spaces. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 14, p. 89–95, 1963. Citado na página 17.

WHITEHEAD, G. W. **Elements of homotopy theory**. New York: Springer, 1978. Citado na página 27.

ÍNDICE