

---

Rigidez e semi-rigidez dos expoentes de Lyapunov  
em dimensão mais alta e folheações patológicas

*José Santana Campos Costa*

---



SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: \_\_\_\_\_

**José Santana Campos Costa**

## Rigidez e semi-rigidez dos expoentes de Lyapunov em dimensão mais alta e folheações patológicas

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Ali Tahzibi

**USP – São Carlos**  
**Junho de 2017**

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi  
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

C837r Costa, José Santana  
Rigidez e semi-rigidez dos expoentes de Lyapunov  
em dimensão mais alta e folheações patológicas / José  
Santana Costa; orientador Ali Tahzibi. -- São  
Carlos, 2017.  
95 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em  
Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e  
de Computação, Universidade de São Paulo, 2017.

1. Expoentes de Lyapunov. 2. Continuidade  
Absoluta de Folheações. 3. Difeomorfismo  
Parcialmente Hiperbólico. 4. Crescimento de Volume.  
I. Tahzibi, Ali, orient. II. Título.

**José Santana Campos Costa**

Rigidity and semi rigidity of Lyapunov exponents in higher  
dimension and pathological foliations

Doctoral dissertation submitted to the Instituto de  
Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-  
USP, in partial fulfillment of the requirements for the  
degree of the Doctorate Program in Mathematics.  
*FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Ali Tahzibi

**USP – São Carlos**  
**June 2017**



*A minha esposa Ana Beatriz Teixeira Franco Costa e ao meu filho José Felipe Franco Costa.*





# AGRADECIMENTOS

---

---

Agradeço a Deus por ter criado a Terra e tudo que há no universo de forma lógica e por ter nos dado a capacidade de compreendermos Sua criação através das ciências. Por guiar a minha vida a estudar esta ciência tão nobre que é a Matemática e ter me conduzido a realizar esse sonho.

Ao meu orientador Ali Tahzibi, por ter acreditado e confiado em mim, pelas orientações, conversas e discussões e por sua preocupação durante toda minha trajetória ao longo do doutorado e ter me apoiado em meus pedidos e decisões.

A meu amigo Fernando Micena, que muito me ajudou neste trabalho através de nossas conversas, conselhos e orientações.

A minha esposa Ana Beatriz T. F. Costa por sempre está próxima a mim, me ajudando e consolado nas horas em que as coisas não davam certo e por todo o seu cuidado e apoio em toda essa trajetória.

Ao meu pai, Marcial dos Santos Costa, que é meu exemplo de esforço e dedicação e a minha mãe, Elza da Conceição Campos Costa por seu amor e dedicação.

A todos os meus familiares pela compreensão e apoio, em especial aos meus irmãos Denuilce C. Costa, Paulo César C. Costa e Maycon C. Costa, e minhas avós Antônia Daniel Costa e Margarida F. Campos.

Aos meus professores do ICMC, especialmente a Ali Tahzibi, Carlos Maquera, Daniel Smania, Carlos Grossi, Hildebrando Rodrigues, Oziride Manzoli (Didi), Pablo Carrasco. Aos técnicos administrativos e a todos que fazem parte da instituição ICMC-USP e os que ajudaram a fundar e fazer crescer.

Aos Meus professores do semestre temático no IMPA, Marcelo Viana, Krerley Oliveira, Carlos G. Moreira (Gugu) e Enrique Pujals.

Ao amigo Mário Roldán e ao prof. Lorenzo Diaz, pela minha visita a PUC-RJ.

A todos os amigos da USP, em especial a Rodrigo Lopes, Fausto Lira, Antônio Andrade, Henry Gullo, Jorge Crisostomo, Joás Rocha e Naldo Aguiar.

A todos que muito me ajudaram nessa jornada nas vezes que estive no Rio de Janeiro, me abrigando em sua casa com hospitalidade e cuidado, especialmente a Marcos Ribeiro e sua esposa Lucinete, a Maurício, Nazaré, Paulo Henrique, Leandro e Leonardo. Ao meu amigo da UFMA Paulo Cristiano. E aos meus amigos que compartilharam esse momento comigo

Ermerson Araujo e Jailson Calado.

Ao meu amigo A. Matheus, que me acolheu em São Carlos através de sua amizade e por tudo que me ensinou. Ao meu Pastor Ismael e sua esposa Pr. Elaine.

Também agradeço a todo os meus amigos da AD São Carlos, especialmente a Adinovan, Elias Luz, Iago, João Honorato, Leonardo Franklin, André Andrade, Isaac Ben-Hur, Felipe H. Ribas, Felipe Lemos, Kaique R. de Almeida e Fábio Guedes.

A todos os meus amigos da república "Os Bartira", pela amizade e companheirismo, especialmente para Leonardo Gallo, Rudison Trevilato, Otávio Gamboni, prof. Marcionilo, Edimilson Leonel e Jorge Valverde.

A todos os meus professores do colégio João Paulo II, que contribuíram muito para a minha formação através de seus esforços e dedicação, em especial as professoras Lindalva, Cícera, Maristela, Wirlanda e Resiniri. A diretora Marivelina e ao professor do curso Euler, Fernando.

A todos os meus professores do colégio Liceu Maranhense, em especial aos professores Arthur, Daniel e Ana Célia.

A todos os meus professores da graduação e mestrado da UFMA, especialmente a Maxwell M. de Barros, José C. V. Saraiva, Nivaldo C. Muniz e Marcos F. Araújo.

Ao prof. Hilcias J. de Sousa e todos os os outros professores e funcionários da UFMA que me apoiaram em meu afastamento para o término do doutorado.

Aos meus amigos da UFMA em especial para Jadevilson Cruz Ribeiro e Adecarlos Carvalho por sempre ter estado dispostos a me ajudar.

A todas as pessoas não citadas que, direta ou indiretamente, contribuíram para a minha formação.

A Capes e CNPq pelo apoio financeiro.

*“Do meu telescópio, eu via Deus caminhar! A maravilhosa disposição e harmonia do universo só pode ter tido origem segundo o plano de um Ser que tudo sabe e tudo pode. Isto fica sendo a minha última e mais elevada descoberta.”*

*(Isaac Newton)*



# RESUMO

COSTA, J. S. C. **Rigidez e semi-rigidez dos expoentes de Lyapunov em dimensão mais alta e folheações patológicas**. 2017. 93 p. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2017.

Neste trabalho nós estudamos os expoentes de Lyapunov de aplicações  $f : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$  homotópicas a uma aplicação Anosov linear e a continuidade absoluta de folheações. Nós mostramos para algumas classes de homotopia de aplicações que a soma dos expoentes de Lyapunov está limitado pela soma dos expoentes de Lyapunov da aplicação Anosov linear. Além disso, admitindo uma propriedade conhecida como densidade uniformemente limitada (UBD) nas folheações, mostramos uma igualdade entre a soma dos expoentes de Lyapunov de  $f$  e do Anosov linear. Também construímos um conjunto  $C^1$ –aberto de difeomorfismos parcialmente hiperbólicos do toro  $\mathbb{T}^4$ , preservando volume, com folheação central bidimensional não compacta e não absolutamente contínua. Ainda construímos um exemplo parcialmente hiperbólico com folhas centrais bidimensionais, não compactas onde a desintegração do volume ao longo da folheação central não é nem Lebesgue nem atômica.

**Palavras-chave:** Expoentes de Lyapunov, Continuidade Absoluta de Folheações, Difeomorfismo Parcialmente Hiperbólico, Crescimento de Volume.



# ABSTRACT

COSTA, J. S. C. **Rigidity and semi rigidity of Lyapunov exponents in higher dimension and pathological foliations**. 2017. 93 p. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2017.

In this work we study the Lyapunov exponents of maps  $f : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$  homotopic to a linear Anosov map. We prove for some homotopic classes of maps which the sum of Lyapunov exponents is bounded by the sum of the Lyapunov exponents of the linear Anosov map. Moreover, by assuming a property known as uniformly bounded density (UBD) in the foliations, we show an equality between the sum of the Lyapunov exponents of  $f$  and the linear Anosov. We also construct a  $C^1$ -open set of volume preserving partially hyperbolic diffeomorphisms with non compact two dimensional center foliation and non absolutely continuous. We still build an example of partially hyperbolic diffeomorphism with non compact bidimensional center leaves where the disintegration of volume along the center foliation is neither Lebesgue nor atomic.

**Keywords:** Lyapunov Exponents, Absolutely Continuous of Foliation, Partially Hyperbolic Diffeomorphism, Volume Growth.





# SUMÁRIO

---

---

1	INTRODUÇÃO . . . . .	17
2	PRELIMINARES . . . . .	21
2.1	Difeomorfismos hiperbólicos, parcialmente hiperbólicos e com de- composição dominada . . . . .	21
2.2	Endomorfismos hiperbólicos . . . . .	23
2.3	Transformações que preservam medida e expoentes de Lyapunov . . . . .	24
2.4	Entropia . . . . .	26
2.4.1	<i>Entropia métrica</i> . . . . .	26
2.4.2	<i>Entropia topológica</i> . . . . .	27
2.5	Quase isometria . . . . .	28
2.6	Linearização de $f$ . . . . .	30
2.7	Desintegração de medida . . . . .	31
2.7.1	<i>Decomposição de Rokhlin</i> . . . . .	32
2.7.2	<i>Folheações absolutamente contínuas</i> . . . . .	32
2.8	Folheações com densidade uniformemente limitada (UBD) . . . . .	34
2.9	Formas diferenciais . . . . .	35
2.10	Teoria de Pesin . . . . .	36
3	RESULTADOS HISTÓRICOS . . . . .	39
3.1	Semi-rigidez dos expoentes . . . . .	39
3.2	Continuidade absoluta de folheações . . . . .	40
3.2.1	<i>Continuidade absoluta de <math>W^c</math>, caso compacto</i> . . . . .	40
3.3	Desintegração de medida . . . . .	41
4	SEMI-RIGIDEZ PARA DIFEOMORFISMOS DA'S DE $\mathbb{T}^d$ . . . . .	43
4.1	Prova dos teoremas 4.0.1 e 4.0.2 . . . . .	44
4.1.1	<i>Demonstração do Teorema 4.0.1</i> . . . . .	47
4.1.2	<i>Demonstração do Teorema 4.0.2</i> . . . . .	47
4.2	Prova do Teorema 4.0.3 . . . . .	48
5	FOLHEAÇÕES PATOLÓGICAS . . . . .	55
5.1	Prova do Teorema 5.0.1 . . . . .	56
5.2	Demonstração do Teorema 5.0.2 . . . . .	57

5.2.1	<i>Perturbando <math>A_n</math></i> . . . . .	59
5.2.2	<i>A escolha das vizinhanças <math>\{V_{n,j}\}_{j=0}^{+\infty}</math></i> . . . . .	62
5.2.3	<i>Propriedades das aplicações <math>g_{n,j}</math></i> . . . . .	62
5.2.4	<i>Conclusão da prova do Teorema 5.0.2</i> . . . . .	64
6	<b>SEMI-RIGIDEZ PARA SISTEMAS COM DECOMPOSIÇÃO DOMINADA E PARA ENDOMORFISMOS</b> . . . . .	67
6.1	<b>Semi-rigidez para difeomorfismos com decomposição dominada</b> . . . . .	67
6.1.1	<i>Prova do Teorema 6.1.1</i> . . . . .	68
6.2	<b>Semi-rigidez para endomorfismos</b> . . . . .	70
7	<b>RIGIDEZ DOS EXPOENTES DE LYAPUNOV</b> . . . . .	73
7.1	<b>Rigidez dos expoentes de Lyapunov para difeomorfismos parcialmente hiperbólicos</b> . . . . .	73
7.2	<b>Rigidez dos expoentes para sistemas com decomposição dominada</b> . . . . .	77
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	79
	<b>APÊNDICE A CONES</b> . . . . .	85
	<b>APÊNDICE B EXEMPLOS DE BONATTI-VIANA</b> . . . . .	91

---

## INTRODUÇÃO

---

O ramo da matemática conhecido como Sistemas Dinâmicos se originou em problemas vindos da física. Um dos mais conhecidos é um problema do final do século XVII, em mecânica celeste, que era verificar a estabilidade do sistema solar, também conhecido como "problema dos  $n$  corpos". A solução se resume a encontrar e compreender as soluções de algumas equações diferenciais. Esta questão ficou vários anos sem solução. Em 1889, para celebrar o aniversário do rei da Suécia e Noruega, Oscar II, foi organizado um evento de matemática, por Mittag-Leffler, com o objetivo de premiar quem resolvesse problemas dentro de alguns tópicos selecionados. Um dos tópicos do prêmio, proposto por Weierstrass, envolvia o problema dos  $n$  corpos. Apareceu um jovem professor de Paris, J. H. Poincaré, com uma ideia esperta para resolver esta questão. Embora tenha ganhado o prêmio, Poincaré não conseguiu resolver completamente o problema, mas desenvolveu várias técnicas e encontrou fenômenos muito interessantes, como a sensibilidade das condições iniciais combinada com recorrência, resultando em um comportamento de difícil previsão que nós chamamos de dinâmica caótica.

Um dos ramos da teoria moderna é o estudo dos sistemas hiperbólicos. Um difeomorfismo  $f : M \rightarrow M$  de uma variedade suave compacta e sem bordo é chamado de parcialmente hiperbólico se o seu fibrado tangente decompõe-se em três direções invariantes  $TM = E^s \oplus E^c \oplus E^u$  tal que  $E^s$  é contrativo,  $E^u$  é expansivo e a direção central  $E^c$  tem um comportamento intermediário, isto é, não contrai tanto quanto  $E^s$  e nem expande tanto quanto  $E^u$ . Se  $E^c = \{0\}$ , então  $f$  é chamado de uniformemente hiperbólico ou Anosov. Nesta tese nós estudaremos difeomorfismos parcialmente hiperbólicos do toro  $\mathbb{T}^d$  que são homotópicos a um Anosov linear, conhecidos como Derivados de Anosov (DA). Por (HIRSCH; PUGH; SHUB, 1977) e (BRIN; PESIN, 1974) sabemos que para os difeomorfismos parcialmente hiperbólicos, existem folheações  $W^s$  e  $W^u$  tangentes a  $E^s$  e  $E^u$ , respectivamente, mas a distribuição central  $E^c$  pode não ser integrável, por exemplo veja a seção 6.1 de (PESIN, 2004). Se  $E^c$  é unidimensional, então é integrável, mas a folheação não tem, necessariamente, unicidade, veja (HERTZ; HERTZ; URES, 2015). Em (BRIN, 2003) mostra, para difeomorfismos parcialmente hiperbólicos (absoluto), que se as folheações  $W^s$  e  $W^u$

tem uma condição geométrica (quase isometria), então  $E^c$  é unicamente integrável, isto é, existe uma folheação  $W^c$  tangente a  $E^c$ . Nossos resultados relacionam a regularidade da folheação central  $W^c$  e os expoentes de Lyapunov.

Os expoentes de Lyapunov desempenham um papel importante em sistemas dinâmicos e teoria ergódica. Eles são uma ferramenta muito útil para a teoria de Pesin, para o estudo de entropia, estados de equilíbrio, entre outros. A existência desses expoentes é garantida pelo celebrado Teorema de Oseledec (OSELEDEC, 1968). Em geral os expoentes de Lyapunov não variam continuamente com  $x \in M$  ou com a dinâmica no mundo  $Diff^1(M)$ .

Pelo trabalho de (HAMMERLINDL, 2013) e (BURAGO; IVANOV, 2008), todo parcialmente hiperbólico  $f : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$  é homotópico a um parcialmente hiperbólico linear, que chamamos de linearizado de  $f$ . Os trabalhos de (MICENA; TAHZIBI, 2013), (MICENA; TAHZIBI, 2014) e (MICENA, 2015) provam que os expoentes de Lyapunov de  $f$  são limitados pelos expoentes de Lyapunov do seu linearizado. Esta limitação é provada para os expoentes estáveis e instáveis em (MICENA; TAHZIBI, 2013), para os expoentes centrais em (MICENA, 2015) e para os expoentes estáveis e instáveis de endomorfismos Anosov que estão próximos de um endomorfismos Anosov linear, em (MICENA; TAHZIBI, 2014). Aqui nós fazemos algumas generalizações desses resultados para aplicações do toro  $\mathbb{T}^d$ :

1. Para derivados de Anosov com uma hipótese de ângulo nas distribuições, Teorema 4.0.1, e com uma condição de regularidade na folheação, Teorema 4.0.3.
2. Para derivados de Anosov com uma condição nas aplicações ao longo do caminho de homotopia, Teorema 4.0.2.
3. Para endomorfismos de Anosov com uma hipótese de ângulo, Teorema 6.2.1.
4. Para os exemplos de (BONATTI; VIANA, 2000), Teorema 6.1.1.

Ainda em (MICENA; TAHZIBI, 2013) é estudada uma propriedade de regularidade de folheações que foi chamada de densidade uniformemente limitada, abreviada em inglês por UBD. Assumindo esta propriedade nas folheações  $W^s$  e  $W^u$  de difeomorfismos parcialmente hiperbólicos do toro  $\mathbb{T}^3$ , (MICENA; TAHZIBI, 2013) prova uma rigidez dos expoentes de Lyapunov, isto é, os expoentes de Lyapunov de  $f$  são iguais aos expoentes de Lyapunov do seu linearizado. Também faremos aqui algumas generalizações desse resultado para o toro  $\mathbb{T}^d$ , Teorema 7.1.2 e Teorema 7.2.1.

Continuidade absoluta de folheações é uma propriedade bastante relacionada com os expoentes de Lyapunov. Nós entendemos por continuidade absoluta, o comportamento da folheação em relação a desintegração do volume em caixas folheadas. O Teorema de Fubini nos diz que folheações  $C^1$  são absolutamente contínuas, mas isso não é verdade para folheações  $C^0$ . As folheações que não são absolutamente contínuas tem sido chamadas de "Pesadelo de Fubini". Katok construiu um exemplo de uma folheação com esta propriedade (veja (MILNOR, 1997)). Para

definições e discussões sobre continuidade absoluta veja (PUGH; VIANA; WILKINSON, 2007). Nos trabalhos de (ANOSOV, 1967), (ANOSOV; SINAI, 1967) foi mostrado que as folheações estáveis e instáveis dos difeomorfismos de Anosov  $C^2$  são absolutamente contínuas e esta é uma propriedade fundamental usada na prova da ergodicidade dos difeomorfismos de Anosov  $C^2$ , (ANOSOV, 1967). Nós também sabemos que para difeomorfismos parcialmente hiperbólicos  $C^2$ , as folheações estáveis e instáveis são absolutamente contínuas (BRIN; PESIN, 1974), mas, em geral, não sabemos se a folheação central (quando existe) é absolutamente contínua. Um dos primeiros a estudar o comportamento da folheação central foi R. Mañé, em uma carta (não publicada) para M. Shub, ele relaciona a continuidade absoluta das folheações centrais compactas com os expoentes de Lyapunov não nulos. Estas ideias foram muito utilizadas para mostrar que, em certos casos, as folheações centrais compactas de difeomorfismos parcialmente hiperbólicos não são absolutamente contínuas (veja (SHUB; WILKINSON, 2000), (RUELLE; WILKINSON, 2001) e (HIRAYAMA; PESIN, 2007)). A não continuidade absoluta para folheações centrais não compactas também é muito comum, em (GOGOLEV, 2012) mostrou que existem conjuntos  $C^1$ -abertos em  $PH_m^r(\mathbb{T}^3)$  de difeomorfismos com folheação central unidimensional não compacta e não absolutamente contínua. Nós construiremos um conjunto aberto  $U \subset PH_m^r(\mathbb{T}^4)$  de difeomorfismos com folheação central bidimensional não compacta e não absolutamente contínua, Teorema 5.0.2. Este resultado é uma generalização de resultados de (MICENA, 2015) e (SAGHIN; XIA, 2009).

Uma questão muito natural é como seria a desintegração das folheações nestes casos? Isto é, como são as medidas condicionais? Em (PONCE; TAHZIBI, 2014) e (PONCE; TAHZIBI; VARÃO, 2014) são construídos exemplos de difeomorfismos parcialmente hiperbólicos de  $\mathbb{T}^3$  em que a desintegração da folheação central é atômica (totalmente oposta (singular) a medida de Lebesgue). Em (AVILA; VIANA; WILKINSON, 2015) foi mostrado uma dicotomia sobre a desintegração na direção central para perturbações de fluxos geodésicos de tempo 1, a desintegração é Lebesgue ou atômica. Em (VARÃO, 2016a) e (VIANA; YANG, 2016) mostraram que existem exemplos em  $\mathbb{T}^3$  cuja desintegração ao longo da direção central não é nem Lebesgue nem atômica (em contraste com a dicotomia de (AVILA; VIANA; WILKINSON, 2015)). Nós construiremos um exemplo de difeomorfismo parcialmente hiperbólico com folhas centrais bidimensionais cuja desintegração não é nem Lebesgue nem atômica, Teorema 5.0.1.

**Organização da Tese:** No Capítulo 2 nós damos os pré-requisitos para o entendimento do trabalho. No Capítulo 3 discutimos alguns resultados conhecidos que direcionaram e motivaram os nossos resultados. Nos Capítulos 4, 5, 6 e 7 nós enunciemos e provamos os nossos resultados. O Apêndice A é uma adaptação do apêndice de (PONCE; TAHZIBI, 2014), que vamos precisar no Capítulo 5, em um de nossos Teoremas. O Apêndice B contém parte da construção dos exemplos de (BONATTI; VIANA, 2000).



---

## PRELIMINARES

---

Neste capítulo daremos alguns conceitos básicos em sistemas dinâmicos e teoria ergódica e alguns outros pré-requisitos necessários para o entendimento de nossos resultados.

### 2.1 Difeomorfismos hiperbólicos, parcialmente hiperbólicos e com decomposição dominada

Aqui  $M$  será uma variedade compacta, conexa e sem bordo.

**Definição 2.1.1.** Dizemos que um difeomorfismo  $f : M \rightarrow M$  é *uniformemente hiperbólico* ou *Anosov* se existem constantes  $C > 0$ ,  $0 < \lambda < 1$  e uma métrica Riemanniana  $\|\cdot\|$  e para cada  $x \in M$  existe uma decomposição  $T_x M = E^s \oplus E^u$  que é  $Df$ -invariante tal que

- $\|Df_x^n(v)\| \leq C\lambda^n\|v\|$ , para todo  $v \in E^s$  e  $n \geq 1$ ,
- $\|Df_x^n(v)\| \geq C^{-1}\lambda^{-n}\|v\|$ , para todo  $v \in E^u$  e  $n \geq 1$ .

É bem conhecido que as distribuições  $E^s$  e  $E^u$  dos sistemas Anosov são integráveis, isto é, existem folheações  $W^s$ , chamada de *folheação estável*, e  $W^u$ , chamada de *folheação instável*, tal que  $T_x W^s = E_x^s$  e  $T_x W^u = E_x^u$ .

*Exemplo 2.1.1.* A transformação linear  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  tem os autovalores  $\beta_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1$  e  $\beta_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} < 1$ . Esta transformação induz um difeomorfismo Anosov  $f_A$  no toro  $\mathbb{T}^2$ . De forma mais geral, toda matriz  $d \times d$  com entradas inteiras e determinante um, cujos autovalores tem módulo diferente de um, induz um difeomorfismo Anosov no toro  $\mathbb{T}^d$  que chamamos de *Anosov*

linear.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^d \\ \downarrow P & & \downarrow P \\ \mathbb{T}^d & \xrightarrow{f_A} & \mathbb{T}^d \end{array}$$

$P \circ f_A = P \circ A$ , onde  $P$  é a aplicação de recobrimento.

**Definição 2.1.2.** Dizemos que o difeomorfismo  $f : M \rightarrow M$  é *parcialmente hiperbólico* se existem constantes  $0 < \lambda < \gamma_1 \leq 1 \leq \gamma_2 < \mu$  e  $C > 1$  e para cada  $x \in M$  existe uma decomposição  $T_x M = E^s \oplus E^c \oplus E^u$  que é  $Df$ -invariante tal que para todo  $n \geq 1$ ,

- $\|Df^n(x)v\| \leq C\lambda^n \|v\|, \quad \forall v \in E^s$
- $C^{-1}\gamma_1^n \|v\| \leq \|Df^n(x)v\| \leq C\gamma_2^n \|v\|, \quad \forall v \in E^c$
- $C^{-1}\mu^n \|v\| \leq \|Df^n(x)v\|, \quad \forall v \in E^u$

**Observação 2.1.1.** Esta forma de *parcialmente hiperbólico* é também chamada de *parcialmente hiperbólico absoluto*, em contraste com outra definição mais fraca em que as constantes  $0 < \lambda < \gamma_1 \leq 1 \leq \gamma_2 < \mu$  dependem de  $x$ . A menos que se diga o contrário, em todo o trabalho consideraremos apenas difeomorfismo *parcialmente hiperbólico absoluto*.

Existe uma métrica, conhecida como *métrica adaptada*, de forma que tenhamos  $C = 1$  e os subespaços  $E^s, E^c$  e  $E^u$  são dois a dois ortogonais, veja (PESIN, 2004, pg. 14).

Por (HIRSCH; PUGH; SHUB, 1977) e (BRIN; PESIN, 1974) as distribuições  $E^u$  e  $E^s$  dos sistemas *parcialmente hiperbólicos* são integráveis, mas pouco é conhecido sobre a integrabilidade da distribuição central  $E^c$ , quando é unidimensional é integrável, mas não é necessariamente única. Em (HERTZ; HERTZ; URES, 2015) é construído um exemplo de um *parcialmente hiperbólico* (não absoluto) em  $\mathbb{T}^3$  em que a distribuição central não é unicamente integrável.

**Definição 2.1.3.** Nós dizemos que um difeomorfismo *parcialmente hiperbólico* é *dinamicamente coerente* quando as distribuições  $E^{cs}$  e  $E^{cu}$  são integráveis. Neste caso a interseção das folheações  $W^{cs}$  e  $W^{cu}$  é uma folheação  $W^c$  com  $T_x W^c = E^c$ .

Em (BRIN, 2003) mostra que quando o sistema é *parcialmente hiperbólico absoluto* e as folheações  $W^s$  e  $W^u$  tem a propriedade de quase isometria (veja Definição 2.5.1), então  $f$  é *dinamicamente coerente*. Em (BRIN; BURAGO; IVANOV, 2009) mostra que as folheações  $W^s$  e  $W^u$  de *parcialmente hiperbólico* do toro  $\mathbb{T}^3$  são quase isométricas, logo todo *parcialmente hiperbólico absoluto* de  $\mathbb{T}^3$  é *dinamicamente coerente*. Em (FISHER; POTRIE; SAMBARINO, 2014) é estudado a integrabilidade da direção central em derivados de Anosov do toro  $\mathbb{T}^d$ , com  $d > 3$  (veja Definição 2.1.4).



**Definição 2.1.4.** Um difeomorfismo  $f : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$  é chamado de *derivado de Anosov* (DA) se é parcialmente hiperbólico e é homotópico a um Anosov linear.

Os primeiros exemplos explícitos desse tipo de sistema apareceram em (MAÑÉ, 1978). Por (FRANKS, 1969) e (MANNING, 1974) os derivados de Anosov são semi conjugados com o linear, isto é, existe uma aplicação contínua  $h : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$  tal que  $h \circ A = f \circ h$ , em outras palavras, o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}^d & \xrightarrow{f} & \mathbb{T}^d \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ \mathbb{T}^d & \xrightarrow{A} & \mathbb{T}^d \end{array}$$

**Definição 2.1.5.** Dizemos que o difeomorfismo  $f : M \rightarrow M$  admite uma *decomposição dominada* se existe uma decomposição invariante  $TM = E \oplus F$ , onde  $E(x)$  e  $F(x)$  variam continuamente, e constantes  $C > 0$  e  $0 < \lambda < 1$  tal que

$$\|Df^n|_{E(x)}\| \|Df^{-n}|_{F(f^n(x))}\| \leq C\lambda^n, \forall x \in M, n \geq 0.$$

Para propriedades e discussões sobre decomposição dominada veja o Apêndice B de (BONATTI; DÍAZ; VIANA, 2006).

## 2.2 Endomorfismos hiperbólicos

**Definição 2.2.1.** (MAÑÉ; PUGH, 1975) Seja  $f : M \rightarrow M$  uma imersão. Dizemos que  $f$  é um *endomorfismo fracamente Anosov* se existe um subfibrado contínuo  $E^s \subset TM$  invariante por  $Df$ , constantes  $C, C' > 0$ ,  $0 < \mu < 1 < \lambda$  e uma métrica Riemanniana  $\|\cdot\|$  em  $TM$  tal que para todo  $n > 0$ ,

$$(1) \|Df^n(v)\| \leq C\mu^n \|v\|, \text{ para todo } v \in E^s,$$

$$(2) \|\overline{Df}^n(v + E^s)\| \geq C'\lambda^n \|v + E^s\|, \text{ para todo } v + E^s \in TM/E^s$$

onde  $\overline{Df}$  é a aplicação induzida em  $TM/E$  e  $\|\cdot\|$  é a métrica induzida em  $TM/E$ .

**Definição 2.2.2.** (PRZYTYCKI, 1976) Seja  $f : M \rightarrow M$  uma imersão. Dizemos que  $f$  é um *endomorfismo Anosov* se existem constantes  $C > 0$ ,  $0 < \nu < 1$  e uma métrica Riemanniana  $\|\cdot\|$  em  $TM$  tal que para cada  $f$ -trajetória  $\{x_i\}$  (isto é, uma sequência de pontos em  $M$  satisfazendo  $f(x_n) = x_{n+1}$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ ), existe uma decomposição

$$T_{\{x_i\}}M = \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} \{E_{x_i}^s \oplus E_{x_i}^u\}$$

que é preservada pela  $Df$  e para todo  $n > 0$ ,

$$(1) \|Df_{x_i}^n(v)\| \leq C v^n \|v\|, \text{ para todo } v \in E_{x_i}^s,$$

$$(2) \|Df_{x_i}^n(v)\| \geq C^{-1} v^{-n} \|v\|, \text{ para todo } v \in E_{x_i}^u.$$

**Proposição 2.2.1.** (SAKAI, 1987) *As Definições 2.2.1 e 2.2.2 acima são equivalentes.*

**Observação 2.2.1.** *No caso de difeomorfismo hiperbólico o subespaço  $E^s$  é caracterizado pelos vetores que contraem exponencialmente por  $Df^n$ . Qualquer outro vetor que não está em  $E^s$  cresce exponencialmente, assim para caracterizar o subespaço  $E^u$  é necessário olhar os iterados passados,  $Df^{-n}$ , assim os vetores de  $E^u$  são os únicos que contraem exponencialmente com  $Df^{-n}$ . Para endomorfismo Anosov o subespaço  $E^s$  está bem definido, pois só depende da órbita futura, já o subespaço  $E^u$  depende da órbita passada e como pode existir vários ramos, para cada um destes podemos ter uma direção instável.*

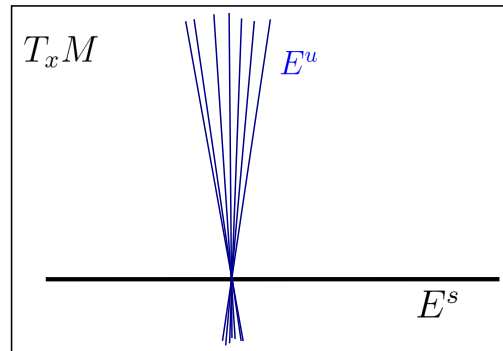


Figura 1

Em (MICENA; TAHZIBI, 2014) são estudadas as direções instáveis de endomorfismos Anosov.

Vários resultados clássicos para difeomorfismos Anosov também valem para endomorfismos Anosov como foi provado por (PRZYTYCKI, 1976) e (MAÑÉ; PUGH, 1975). Por exemplo: existência de métrica adaptada; o ângulo entre  $E_x^s$  e qualquer  $E_x^u$  é uniformemente afastado de zero; as distribuições  $E_{\{x_i\}}^s$  e  $E_{\{x_i\}}^u$  variam continuamente com  $\{x_i\}$  no espaço de órbitas; o conjunto dos endomorfismos Anosov é aberto; existência de variedades estável e instável local  $W_{Loc}^s, W_{Loc}^u$  (podem existir várias  $W_{Loc}^u$  em um mesmo ponto). Mas também tem fenômenos que são bem diferentes de difeomorfismos, por exemplo: os endomorfismos Anosov, com exceção dos expansores, não são estruturalmente estáveis.

## 2.3 Transformações que preservam medida e expoentes de Lyapunov

Nesta seção vamos definir um dos objetos principais de nosso estudo, os expoentes de Lyapunov. Em todo o trabalho denotaremos por  $(M, \mathcal{B}, \mu)$  um espaço de probabilidade, onde  $\mathcal{B}$  é a  $\sigma$ -álgebra de Borel.

**Definição 2.3.1.** Dizemos que a transformação mensurável  $f : M \rightarrow M$  preserva a medida  $\mu$  se  $\mu(f^{-1}(B)) = \mu(B)$ , para todo  $B \in \mathcal{B}$ .

**Definição 2.3.2.** Dizemos que a transformação  $f : M \rightarrow M$  que preserva a medida  $\mu$  é *ergódica* se dado  $B \in \mathcal{B}$  com  $f^{-1}(B) = B$ , então  $\mu(B) = 0$  ou  $1$ .

**Teorema 2.3.1** (Teorema Ergódico de Birkhoff, 1932). *Seja  $f : M \rightarrow M$  uma transformação que preserva  $\mu$ , então se  $\phi \in L^1(\mu)$  o limite*

$$\tilde{\phi}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \phi(f^i(x))$$

*existe em  $\mu$ -q.t.p  $x \in M$ . Além disso,  $\int_M \tilde{\phi} d\mu = \int_M \phi d\mu$ .*

No caso em que  $(f, \mu)$  é ergódica a função  $\tilde{\phi}$  é constante em  $\mu$ -q.t.p.

**Definição 2.3.3.** Seja  $f : M \rightarrow M$  um difeomorfismo. Para  $x \in M$  e  $v \in T_x M$  chamamos de *expoente de Lyapunov* o limite

$$\lambda(x, v) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|Df_x^n(v)\|.$$

Em que condições este limite existe? Esta pergunta foi respondida por Oseledets.

**Teorema 2.3.2.** (OSELEDEC, 1968) *Seja  $f : M \rightarrow M$  um difeomorfismo  $C^1$ , então existe um boreliano  $\mathcal{R}$  de probabilidade total (isto é,  $\mu(\mathcal{R}) = 1$  para toda medida  $f$ -invariante  $\mu$ ) tal que para cada  $x \in \mathcal{R}$  existe uma decomposição  $Df$ -invariante  $T_x M = E_1 \oplus \cdots \oplus E_{k(x)}$  e constantes  $\lambda_1, \dots, \lambda_{k(x)}$  tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|Df_x^n(v)\| = \lambda_i$$

*para todo  $v \in E_i$ . Os  $\lambda_i(x)$  são chamados de expoentes de Lyapunov.*

Chamaremos  $\mathcal{R}$ , o conjunto dos pontos regulares de Lyapunov.

**Exemplo 2.3.1.** Seja  $f_A : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  o Anosov linear induzido pela matriz  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  cujos autovalores são  $\beta_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1$  e  $\beta_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} < 1$ . Neste caso os expoentes de Lyapunov de  $A$  e  $f_A$  são  $\log \beta_1$  e  $\log \beta_2$ , em qualquer ponto  $x \in \mathbb{T}^2$ .

Considere  $\mathbb{R}^d$  o recobrimento universal de  $\mathbb{T}^d$  e  $P : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  a aplicação de recobrimento.

**Lema 2.3.1.** *Seja  $f : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$  um difeomorfismo,  $\tilde{f}$  um levantamento de  $f$  para o recobrimento universal,  $x \in \mathcal{R}(f)$  e  $\tilde{x} \in P^{-1}(x) \subset \mathbb{R}^d$ , então  $\tilde{x} \in \mathcal{R}(\tilde{f})$  e os expoentes de Lyapunov de  $\tilde{x}$  são iguais aos de  $x$ .*

*Demonstração.* A aplicação de recobrimento  $P : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$  é um difeomorfismo local, assim as aplicações  $Df(x)$  e  $D\tilde{f}(\tilde{x})$  são conjugadas, isto é,  $D\tilde{f}(\tilde{x}) = DP^{-1} \circ Df \circ DP(\tilde{x})$ , assim  $D\tilde{f}^n(\tilde{x}) = DP^{-1} \circ Df^n \circ DP(\tilde{x})$ , como  $DP^{-1}(x)$  e  $DP(\tilde{x})$  tem norma limitada, independente de  $x$ , segue que  $\lambda(\tilde{f}, \tilde{x}, v) = \lambda(f, x, DP(\tilde{x})(v))$ .  $\square$

Consideremos agora  $f$  um difeomorfismo parcialmente hiperbólico, denote por  $\text{Jac}^\sigma f(x)$  o jacobiano de  $f$  restrito ao subespaço  $E^\sigma$ , com  $\sigma \in \{s, c, u\}$  e  $d_\sigma$  a dimensão de  $E^\sigma$ . Suponha que  $\mu$  é ergódica, pelo Teorema de Oseledets e Teorema de Birkhoff temos

$$\sum_{i=1}^{d_\sigma} \lambda_i^\sigma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \text{Jac}^\sigma f^n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log \text{Jac}^\sigma f(f^j(x)) = \int_M \log \text{Jac}^\sigma f(x) d\mu. \quad (2.1)$$

## 2.4 Entropia

Nesta seção veremos outro objeto que está bastante relacionado com os expoentes de Lyapunov, a entropia métrica do sistema. Os conceitos e alguns resultados contidos nesta seção foram retirados do Livro (VIANA; OLIVEIRA, 2014).

### 2.4.1 Entropia métrica

Para nós,  $\mathcal{P}$  é uma *partição* de  $M$  se  $\mathcal{P}$  é um conjunto de subconjuntos mensuráveis e disjuntos dois-a-dois e cuja união tem medida total. Dada duas partições  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{Q}$  definimos uma nova partição  $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} = \{P \cap Q; P \in \mathcal{P} \text{ e } Q \in \mathcal{Q}\}$ .

Seja  $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_k\}$  uma partição finita de  $M$ . Definimos  $H(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^k -\mu(A_i) \log \mu(A_i)$ .

Não é difícil de verificar que o limite abaixo está bem definido

$$h_\mu(f, \mathcal{P}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\mathcal{P} \vee f^{-1} \mathcal{P} \vee \dots \vee f^{-(n-1)} \mathcal{P})$$

assim definimos a *entropia métrica* da medida  $\mu$  por

$$h_\mu(f) = \sup\{h_\mu(f, \mathcal{P}); \mathcal{P} \text{ é uma partição finita de } M\}$$

Para uma melhor abordagem, exemplos e discussões sobre entropia veja o Capítulo 9 de (VIANA; OLIVEIRA, 2014).

**Teorema 2.4.1** (Ruelle). *Seja  $f : M \rightarrow M$  um difeomorfismo  $C^1$ , então*

$$h_\mu(f) \leq \int_M \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i(x) d\mu$$

para toda medida  $f$ -invariante  $\mu$ .

**Teorema 2.4.2** (Pesin). *Seja  $f : M \rightarrow M$  um difeomorfismo  $C^{1+\alpha}$ , então*

$$h_\mu(f) = \int_M \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i(x) d\mu$$

*para toda medida boreliana suave  $f$ -invariante  $\mu$ .*

A fórmula de Pesin também vale para endomorfismo.

**Teorema 2.4.3.** (LIU, 1998) *Seja  $f : M \rightarrow M$  um endomorfismo  $C^2$  e  $\mu$  uma medida boreliana de probabilidade  $f$ -invariante em  $M$ . Se  $\mu \ll m$ , então*

$$h_\mu(f) = \int_M \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i(x) d\mu.$$

**Nota Histórica:** A definição de entropia métrica, depois chamada de *entropia de Kolmogorov-Sinai*, foi introduzida pela primeira vez por Andrei Kolmogorov, um dos pais da teoria ergódica, em um artigo de 1958 e foi sucessivamente desenvolvido por Yakov Sinai, outra figura crucial na teoria ergódica, que na época era seu aluno de pós-graduação. Em 1965 Valery Oseledets (ou Oseledec), era orientando de Sinai. Do trabalho de Sinai tornou-se claro para ele que a entropia positiva nos sistemas dinâmicos clássicos está relacionada com a divergência exponencial das órbitas originárias em pontos próximos. Em 1965, durante o workshop sobre teoria ergódica em Khumsan, Oseledets provou o Teorema Ergódico Multiplicativo. Em 1966 deu uma palestra intitulada "The strong law of large numbers for random matrix processes" no Congresso Internacional de Matemáticos, em Moscou. Um ano mais tarde, ele defendeu sua tese de doutorado, o terceiro capítulo desta tese foi chamado de "A multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems". Finalmente, em 1968 foi publicado o artigo com o mesmo título.

Adaptado de (OSELEDETS, 2008) e de comentários em (ULCIGRAI, 2010) .

## 2.4.2 Entropia topológica

**Definição 2.4.1.** Uma *cobertura aberta* de  $M$  é uma família de abertos cuja união é todo  $M$ .

Pela compacidade de  $M$  toda cobertura aberta admite uma subcobertura finita. Chamamos *entropia da cobertura*  $\alpha$  ao número

$$H(\alpha) = \log N(\alpha),$$

onde  $N(\alpha)$  é o menor número tal que  $\alpha$  admite alguma subcobertura finita com esse número de elementos.

Dada duas coberturas  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  definimos uma nova cobertura

$$\alpha_1 \vee \alpha_2 = \{A \cap B; A \in \alpha_1 \text{ e } B \in \alpha_2\}.$$

Seja  $f : M \rightarrow M$  uma aplicação contínua. Se  $\alpha$  é uma cobertura aberta de  $M$  então  $f^{-j}(\alpha) = \{f^{-j}(A); A \in \alpha\}$  também é uma cobertura aberta. Para cada  $n \geq 1$ , denotamos

$$\alpha^n = \alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \dots \vee f^{-n+1}(\alpha)$$

Da para mostrar que o limite

$$h(f, \alpha) = \lim_n \frac{1}{n} H(\alpha^n) = \inf_n \frac{1}{n} H(\alpha^n)$$

sempre existe e ele é chamado entropia de  $f$  com respeito à cobertura  $\alpha$ . Definimos a *entropia topológica* de  $f$  como sendo

$$h_{Top}(f) = \sup\{h(f, \alpha); \alpha \text{ é cobertura aberta de } M\}$$

O teorema abaixo mostra uma relação entre a entropia métrica de  $f$  e a entropia topológica.

**Teorema 2.4.4** (Princípio Variacional). *Se  $f : M \rightarrow M$  é uma aplicação contínua, então*

$$h_{Top}(f) = \sup_{\mu} \{h_{\mu}(f); \mu \in \mathcal{M}(f)\}$$

onde  $\mathcal{M}(f)$  é o conjunto das medidas invariantes de  $f$ .

Uma medida  $\mu \in \mathcal{M}(f)$  é chamada *medida de máxima entropia* de  $f$  se  $h_{Top}(f) = h_{\mu}(f)$ .

## 2.5 Quase isometria

Uma das principais ferramentas usadas por F. Micena e A. Tahzibi em (MICENA; TAHZIBI, 2013) e (MICENA; TAHZIBI, 2014) e por F. Micena em (MICENA, 2015) para provar os Teoremas 3.1.1, 3.1.2 e 3.1.3 foi a quase isometria (FENLEY, 1992) das folheações  $W^s$  e  $W^u$ .

**Definição 2.5.1.** Seja  $W$  uma folheação em  $\mathbb{R}^d$ , dizemos que  $W$  é *quase isométrica* se existem  $a, b > 0$  tal que  $d_W(x, y) \leq a\|x - y\| + b$  para todo  $x \in \mathbb{R}^d$  e  $y \in W(x)$ . Aqui  $d_W(x, y)$  denota a distância na folha  $W(x)$ .

Para um difeomorfismo parcialmente hiperbólico a folheação  $W_f^u$  é tangente a uma distribuição contínua  $E_f^u$ , implica que a taxa  $d_{W_f^u}(x, y)/\|x - y\|$  converge uniformemente para um, quando  $d_{W_f^u}(x, y) \rightarrow 0$ , assim é fácil verificar que neste caso podemos retirar a constante  $b$  da definição de quase isometria, trocando  $a$  por uma constante maior  $Q$ , isto é,  $W_f^u$  é quase isométrica se  $d_{W_f^u}(x, y) \leq Q\|x - y\|$  para todo  $y \in W_f^u(x)$ . O mesmo é válido para  $W_f^s$ .

**Teorema 2.5.1.** (BRIN; BURAGO; IVANOV, 2009) *Seja  $f : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$  um difeomorfismo parcialmente hiperbólico, então as folheações  $W^u$  e  $W^s$  são quase isométricas no recobrimento universal  $\mathbb{R}^3$ .*

**Definição 2.5.2.** Sejam  $P_1$  e  $P_2$  subespaços vetoriais em  $\mathbb{R}^n$  com  $\dim P_1 + \dim P_2 = n$ . Definimos o ângulo entre  $P_1$  e  $P_2$  por

$$\angle(P_1, P_2) = \inf\{\angle(v_1, v_2); v_1 \in P_1, v_2 \in P_2\}$$

A próxima proposição é apenas uma reescrita da Proposição 4 de (BRIN, 2003).

**Proposição 2.5.1.** (BRIN, 2003) *Seja  $W$  uma folheação de dimensão  $u$  em  $\mathbb{R}^n$ . Se existe um plano  $P \subset \mathbb{R}^n$  de dimensão  $n - u$  e  $\alpha > 0$  tal que o ângulo entre  $T_x W$  e  $P$  é maior que  $\alpha$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , então  $W$  é quase isométrica.*

Para provar a proposição faremos uso do seguinte resultado simples de topologia, cuja prova pode ser encontrada em (LIMA, 1998, pg. 136).

**Proposição 2.5.2.** *Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação de recobrimento tal que  $X$  é conexo por caminhos e  $Y$  é simplesmente conexo, então  $f$  é um homeomorfismo.*

*Demonstração da Proposição 2.5.1.* Seja  $B$  o complemento ortogonal de  $P$ . Fixe  $z \in \mathbb{R}^n$  e seja  $\pi : W(z) \rightarrow B$  a projeção ortogonal em  $B$  (paralela a  $P$ ). Como  $P$  é uniformemente transversal a  $W$  então existe  $\beta > 0$  tal que

$$\|d\pi(x)(v)\| \geq \beta \|v\| \quad (2.2)$$

para qualquer  $x \in W(z)$  e  $v \in T_x W(z)$ , implica que  $\text{Jac}\pi(x) \neq 0$ , logo pelo Teorema da Função Inversa para cada  $x \in W(z)$  existe uma bola  $B(\delta, x) \subset W(z)$  tal que  $\pi|_{B(\delta, x)}$  é um difeomorfismo. Da prova do Teorema da Função Inversa e Equação 2.2,  $\delta$  pode ser tomado independente de  $x$ . Novamente pela Equação 2.2 existe  $\varepsilon > 0$ , independente de  $x$  tal que  $B(\varepsilon, \pi(x)) \subset \pi(B(\delta, x))$ . Para verificar que  $\pi$  é sobrejetiva, vamos mostrar que  $\pi(W(z))$  é um conjunto aberto e fechado. Como  $\pi$  é um difeomorfismo local  $\pi(W(z))$  é aberto, afim de verificar que também é fechado seja  $y_n \in B$  uma sequência convergindo para  $y$ , assim existe um  $n_0$  suficientemente grande tal que  $y \in B(\varepsilon, y_{n_0})$  e portanto  $y \in \pi(W(z))$ , logo  $\pi$  é sobrejetiva. Além disso  $\pi$  é uma aplicação de recobrimento, de fato, como vimos, para cada  $y \in W(z)$  existe uma vizinhança  $B(\varepsilon, y)$  com  $\pi^{-1}(B(\varepsilon, y)) = \bigcup U_i$ , onde  $\pi : U_i \rightarrow B(\varepsilon, y)$  é um difeomorfismo. A injetividade segue da Proposição 2.5.2.

Para  $y_1, y_2 \in W(x)$  seja  $\sigma : [0, 1] \rightarrow B$  o segmento que liga os pontos  $\pi(y_1)$  e  $\pi(y_2)$ . O seu levantamento  $\pi^{-1} \circ \sigma$  é uma curva  $C^1$  ligando  $y_1$  a  $y_2$  assim,

$$d(\pi(y_1), \pi(y_2)) = \text{compr}(\sigma) \geq \beta \text{compr}(\pi^{-1} \circ \sigma) \geq \beta d_W(y_1, y_2)$$

e como  $d(y_1, y_2) \geq d(\pi(y_1), \pi(y_2))$  então  $d_W(y_1, y_2) \leq \frac{1}{\beta} d(y_1, y_2)$  □

**Teorema 2.5.2.** (BRIN, 2003) *Seja  $f : M \rightarrow M$  um difeomorfismo parcialmente hiperbólico absoluto e suponha que as folheações  $W^u$  e  $W^s$  são quase isométricas no recobrimento  $\tilde{M}$ , então  $f$  é dinamicamente coerente.*

## 2.6 Linearização de $f$

Seja  $f : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$  um difeomorfismo parcialmente hiperbólico e considere a aplicação induzida  $f_* : \pi_1(\mathbb{T}^d) \rightarrow \pi_1(\mathbb{T}^d)$ . Como  $\pi_1(\mathbb{T}^d)$  é isomorfo a  $\mathbb{Z}^d$ , então o isomorfismo linear  $f_*$  pode ser estendido para uma aplicação linear  $g_0 : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  e como  $g_0(\mathbb{Z}^d) = \mathbb{Z}^d$ , então  $g_0$  induz uma aplicação  $g : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$ . Nós dizemos que  $g$  é a *linearização* de  $f$ . A aplicação  $g$  é o único automorfismo linear de  $\mathbb{T}^d$  tal que  $g_* = f_*$ . A linearização  $g$  está bastante relacionada com  $f$  e fornece boas propriedades para as folheações de  $f$  que foram verificadas por (HAMMERLINDL, 2013).

No caso em que  $f$  é DA, sua linearização coincide com o Anosov linear  $A$ . Sempre denotaremos a linearização de  $f$  por  $A$ . Denotaremos também com um til ( $\sim$ ) os respectivos elementos no recobrimento universal  $\mathbb{R}^d$ . Por exemplo  $\tilde{f}$ ,  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{W}_f^s$  e etc. Abaixo temos uma propriedade topológica relacionando  $f$  com sua linearização, que pode ser encontrada em (HAMMERLINDL, 2013).

**Proposição 2.6.1.** *Seja  $f : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$  um homeomorfismo e  $A$  a sua linearização. Então para cada  $n \in \mathbb{Z}$  e  $C > 1$  existe  $M > 0$  tal que para  $x, y \in \mathbb{R}^d$  com  $\|x - y\| > M$  temos*

$$\frac{1}{C} < \frac{\|\tilde{f}^n(x) - \tilde{f}^n(y)\|}{\|\tilde{A}^n(x) - \tilde{A}^n(y)\|} < C.$$

De forma mais geral, para cada  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $C > 1$  e qualquer aplicação linear  $\pi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ , existe um  $M$  tal que para  $x, y \in \mathbb{R}^d$ , com  $\|x - y\| > M$

$$\frac{1}{C} < \frac{\|\pi(\tilde{f}^n(x) - \tilde{f}^n(y))\|}{\|\pi(\tilde{A}^n(x) - \tilde{A}^n(y))\|} < C.$$

Seja  $X \subset \mathbb{R}^d$  um subconjunto e  $R > 0$ , denotamos por  $B_R(X)$  a vizinhança

$$B_R(X) = \{y \in \mathbb{R}^d; \|x - y\| < R \text{ para algum } x \in X\}.$$

**Proposição 2.6.2.** (HAMMERLINDL, 2013) *Seja  $f : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$  um difeomorfismo parcialmente hiperbólico dinamicamente coerente e  $A$  a sua linearização, então existe uma constante  $R_c$  tal que para todo  $x \in \mathbb{R}^d$ ,*

- $\tilde{W}_f^{cs}(x) \subset B_{R_c}(\tilde{W}_A^{cs}(x))$ ,
- $\tilde{W}_f^{cu}(x) \subset B_{R_c}(\tilde{W}_A^{cu}(x))$  e
- $\tilde{W}_f^c(x) \subset B_{R_c}(\tilde{W}_A^c(x))$ .

**Corolário 2.6.1.** (HAMMERLINDL, 2013) *Se  $\|x - y\| \rightarrow \infty$  onde  $y \in \tilde{W}_f^c(x)$  então  $\frac{x-y}{\|x-y\|} \rightarrow \tilde{E}_A^c(x)$  uniformemente. Mais precisamente, para  $\varepsilon > 0$  existe  $M > 0$  tal que se  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $y \in \tilde{W}_f^c(x)$  e  $\|x - y\| > M$ , então*

$$\|\pi_A^{c\perp}(x - y)\| < \varepsilon \|\pi_A^c(x - y)\|.$$

onde  $\pi_A^c$  é a projeção no subespaço  $\tilde{E}_A^c$  e  $\pi_A^{c\perp}$  é a projeção no subespaço ortogonal  $\tilde{E}_A^{c\perp}$ .



**Proposição 2.6.3.** (HAMMERLINDL, 2013) *Seja  $f : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$  um difeomorfismo parcialmente hiperbólico e  $A$  a sua linearização. Suponha que  $\tilde{W}_f^s$  é quase isométrica. Se  $\|x - y\| \rightarrow \infty$  onde  $y \in \tilde{W}_f^s(x)$ , então  $\frac{x-y}{\|x-y\|} \rightarrow \tilde{E}_A^s(x)$  uniformemente. Mais precisamente, para  $\varepsilon > 0$  existe  $M > 0$  tal que se  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $y \in \tilde{W}_f^s(x)$  e  $\|x - y\| > M$ , então*

$$\|\pi_A^{cu}(x-y)\| < \varepsilon \|\pi_A^s(x-y)\|.$$

Uma afirmação similar vale para  $\tilde{W}_f^u$ .

## 2.7 Desintegração de medida

Parte desta seção foi retirada do livro (VIANA; OLIVEIRA, 2014).

Seja  $(M, \mathcal{B}, \mu)$  um espaço de probabilidade e  $\mathcal{P}$  uma partição de  $M$  em conjuntos mensuráveis. Denotaremos por  $\pi : M \rightarrow \mathcal{P}$  a projeção natural que associa a cada ponto  $x \in M$  o elemento  $\mathcal{P}$  da partição que o contém. Esta partição permite munir  $\mathcal{P}$  de uma estrutura de espaço de probabilidade, da seguinte forma. Primeiramente, dizemos que um subconjunto  $\mathcal{Q}$  de  $\mathcal{P}$  é mensurável se, e somente se, a pré-imagem

$$\pi^{-1}(\mathcal{Q}) = \text{união dos elementos } P \text{ de } \mathcal{P} \text{ que pertencem a } \mathcal{Q}$$

é um subconjunto mensurável de  $M$ . A família  $\hat{\mathcal{B}}$  dos subconjuntos mensuráveis é uma  $\sigma$ -álgebra em  $\mathcal{P}$ . Definimos a *medida quociente*  $\hat{\mu}$  por

$$\hat{\mu}(\mathcal{Q}) = \mu(\pi^{-1}(\mathcal{Q})) \text{ para cada } \mathcal{Q} \in \hat{\mathcal{B}}$$

**Definição 2.7.1.** Uma *desintegração* de  $\mu$  relativamente a uma partição  $\mathcal{P}$  é uma família  $\{\mu_P : P \in \mathcal{P}\}$  de probabilidades em  $M$  tal que, para todo conjunto mensurável  $E \subset M$ :

- (a)  $\mu_P(P) = 1$  para  $\hat{\mu}$ -quase todo  $P \in \mathcal{P}$ ;
- (b) a aplicação  $\mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}, P \mapsto \mu_P(E)$  é mensurável;
- (c)  $\mu(E) = \int \mu_P(E) d\hat{\mu}(P)$ .

As  $\mu_P$  são chamadas *probabilidades condicionais* de  $\mu$  relativamente a  $\mathcal{P}$ . A proposição abaixo mostra que desintegrações são essencialmente únicas, quando existem.

**Proposição 2.7.1.** *Suponha que a  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{B}$  admite algum gerador enumerável. Se  $\{\mu_P : P \in \mathcal{P}\}$  e  $\{\mu'_P : P \in \mathcal{P}\}$  são desintegrações de  $\mu$  com respeito a  $\mathcal{P}$ , então  $\mu_P = \mu'_P$  para  $\hat{\mu}$ -quase todo  $P \in \mathcal{P}$ .*

### 2.7.1 Decomposição de Rokhlin

**Definição 2.7.2.** Dizemos que  $\mathcal{P}$  é uma *partição mensurável* se existe algum conjunto mensurável  $M_0 \subset M$  com medida total tal que, restrito a  $M_0$ ,

$$\mathcal{P} = \bigvee_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n$$

para alguma sequência crescente  $\mathcal{P}_1 \prec \mathcal{P}_2 \prec \dots \prec \mathcal{P}_n \prec \dots$  de partições enumeráveis.

**Teorema 2.7.1** (Desintegração de Rokhlin). *Suponha que o espaço métrico  $M$  é completo separável e que  $\mathcal{P}$  é uma partição mensurável. Então a probabilidade  $\mu$  admite uma única desintegração relativamente a  $\mathcal{P}$ .*

Para exemplos de desintegrações, partições que são mensuráveis e partições que não são mensuráveis, veja (VIANA; OLIVEIRA, 2014).

### 2.7.2 Folheações absolutamente contínuas

Em geral as folheações não são partições (globalmente) mensuráveis. Por exemplo, as folheações estáveis e instáveis dos difeomorfismos  $C^2$  Anosov não formam uma partição mensurável com relação a medida de Lebesgue. As folheações  $W_f^u$  e  $W_f^s$  são (globalmente) mensuráveis com respeito a medida  $\mu$  se, e somente se  $h_\mu(f) = 0$ . Um dos principais impedimentos para uma folheação ser uma partição mensurável é a densidade das folhas, entretanto em (PONCE; TAHZIBI; VARÃO, 2014) foi provado que existe um conjunto aberto de difeomorfismos parcialmente hiperbólicos em que a folheação central é densa e globalmente mensurável. Uma folheação por folhas compactas é sempre uma partição mensurável veja (PONCE; TAHZIBI; VARÃO, 2014, Proposição 2.5.).

Por ser localmente um "produto", toda folheação é localmente uma partição mensurável, assim sempre podemos fazer desintegração de medidas em caixas folheadas

Seja  $\mathcal{F}$  uma folheação em uma variedade  $M$  e  $B$  uma caixa folheada. Denotaremos por  $m$  a medida de Lebesgue,  $m_{L_x}$  as medidas desintegradas na folheação em  $B$  e por  $\text{Vol}_{L_x}$  a medida de Lebesgue da folha  $L_x$ . As medidas desintegradas  $m_{L_x}$  não dependem da caixa folheada.

**Definição 2.7.3.** Dizemos que a folheação  $\mathcal{F}$  é *absolutamente contínua superiormente* se  $m_{L_x} \ll \text{Vol}_{L_x}$  em  $m$ -quase todo ponto  $x \in B$ . Outra forma equivalente é se dado um conjunto  $Z \subset B$  tal que  $\text{Vol}_{L_x}(Z \cap L_x) = 0$  para  $m$ -q.t.p  $x \in B$ , então  $m(Z) = 0$ .

**Definição 2.7.4.** Dizemos a folheação  $\mathcal{F}$  é *absolutamente contínua inferiormente* se  $\text{Vol}_{L_x} \ll m_{L_x}$  em  $m$ -quase todo ponto  $x \in B$ . Outra forma equivalente é se dado um conjunto  $Z \subset B$  tal que  $m(Z) = 0$ , então  $\text{Vol}_{L_x}(Z \cap L_x) = 0$  para  $m$ -q.t.p  $x \in B$ .

As equivalências nas definições acima vêm simplesmente das propriedades da definição de desintegração, Definição 2.7.1, como veremos no seguinte Lema.

**Lema 2.7.1.** (1)  $m_x \ll \text{Vol}_{L_x}$  para  $m$ -q.t.p  $x \in B \Leftrightarrow$  dado um conjunto  $Z \subset B$  tal que  $\text{Vol}_{L_x}(Z \cap L_x) = 0$  para  $m$ -q.t.p  $x \in B$ , então  $m(Z) = 0$ .

(2)  $\text{Vol}_{L_x} \ll m_x$  para  $m$ -q.t.p  $x \in B \Leftrightarrow$  dado um conjunto  $Z \subset B$  tal que  $m(Z) = 0$ , então  $\text{Vol}_{L_x}(Z \cap L_x) = 0$  para  $m$ -q.t.p  $x \in B$ .

*Demonstração.* (1)( $\Rightarrow$ ) Seja  $Z$  um conjunto qualquer tal que  $\text{Vol}_{L_x}(Z \cap L_x) = 0$  para  $m$ -q.t.p  $x \in B$ , por hipótese  $m_x \ll \text{Vol}_{L_x}$ , logo  $m_x(Z) = 0$  para  $m$ -q.t.p  $x \in B$  e pelo item (c) da Definição 2.7.1,  $m(Z) = 0$ .

(1)( $\Leftarrow$ ) Seja  $Z$  um conjunto qualquer tal que  $\text{Vol}_{L_x}(Z \cap L_x) = 0$  para  $m$ -q.t.p  $x \in B$ . Por hipótese  $m(Z) = 0$ , logo pelo item (c) da Definição 2.7.1,  $m_x(Z \cap L_x) = 0$  para  $m$ -q.t.p  $x \in B$ , portanto  $m_x \ll \text{Vol}_{L_x}$  para  $m$ -q.t.p  $x \in B$ .

(2)( $\Rightarrow$ ) Seja  $Z$  um conjunto qualquer com  $m(Z) = 0$ , pelo item (c) da Definição 2.7.1 para  $m$ -q.t.p  $x \in B$ ,  $m_x(Z \cap L_x) = 0$ , como  $\text{Vol}_{L_x} \ll m_x$ , implica que  $\text{Vol}_{L_x}(Z \cap L_x) = 0$  para  $m$ -q.t.p  $x \in B$ .

(2)( $\Leftarrow$ ) Seja  $Z$  um conjunto qualquer tal que  $m_x(Z \cap L_x) = 0$  para  $m$ -q.t.p  $x \in B$ , então pelo item (c) da Definição 2.7.1,  $m(Z) = 0$ , logo por hipótese  $\text{Vol}_{L_x}(Z \cap L_x) = 0$  para  $m$ -q.t.p  $x \in B$ , portanto  $\text{Vol}_{L_x} \ll m_x$  para  $m$ -q.t.p  $x \in B$ .

□

**Definição 2.7.5.** Dizemos que a folheação  $\mathcal{F}$  é *absolutamente contínua* se  $\text{Vol}_{L_x} \sim m_{L_x}$  (isto é,  $m_{L_x} \ll \text{Vol}_{L_x}$  e  $\text{Vol}_{L_x} \ll m_{L_x}$ ) em  $m$ -quase todo ponto  $x \in B$ .

**Definição 2.7.6.** Seja  $\mathcal{F}$  uma folheação,  $\Sigma_x$  e  $\Sigma_y$  secções transversais a  $\mathcal{F}$  e  $\lambda_{\Sigma_x}, \lambda_{\Sigma_y}$  as medidas de Lebesgue em  $\Sigma_x$  e  $\Sigma_y$ , respectivamente. Dizemos que  $\mathcal{F}$  é *transversalmente absolutamente contínua* se a holonomia  $h : \Sigma_x \rightarrow \Sigma_y$  é absolutamente contínua ( $\lambda_{\Sigma_x}(h^{-1}(A)) = 0$ , para todo  $A \subset \Sigma_y$  com  $\lambda_{\Sigma_y}(A) = 0$ ) para quaisquer par de secções transversais a  $\mathcal{F}$ .

**Proposição 2.7.2.** Se a folheação  $\mathcal{F}$  é transversalmente absolutamente contínua, então  $\mathcal{F}$  é absolutamente contínua.

A prova dessa proposição pode ser encontrada em (BRIN; STUCK, 2002, pg. 145) ou em (PUGH; VIANA; WILKINSON, 2007).

**Proposição 2.7.3** (Brin, Pesin). Se  $f : M \rightarrow M$  um difeomorfismo parcialmente hiperbólico  $C^2$ , então as folheações  $W^s$  e  $W^u$ , são transversalmente absolutamente contínuas.

Vamos relembrar dois resultados sobre função absolutamente contínua, cujas provas podem ser encontradas em (FERNANDEZ, 1976, pg. 176-177).

**Proposição 2.7.4.** *Seja  $U \subset \mathbb{R}^d$  aberto, se  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^d$  é localmente lipschitziana, então  $g$  é absolutamente contínua.*

**Proposição 2.7.5.** *Se  $g : U \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  é uma função de classe  $C^1$ , então  $g$  é localmente lipschitziana.*

**Proposição 2.7.6.** *Se  $W$  é uma folheação  $C^1$  (as cartas folheadas são difeomorfismos  $C^1$ ) então  $W$  é transversalmente absolutamente contínua.*

*Demonstração.* Seja  $B \subset M$  uma caixa folheada e  $\phi : B \rightarrow U \subset \mathbb{R}^m$  uma carta folheada. Tome  $D_1, D_2 \subset B$  dois discos transversais a  $W$  e  $h : D_1 \rightarrow D_2$  a holonomia através de  $W$ . Como  $\phi$  é um difeomorfismo  $C^1$ , então os conjuntos  $\phi(D_1)$  e  $\phi(D_2)$  são discos transversais aos segmentos em  $U$ . Seja  $H : \phi(D_1) \rightarrow \phi(D_2)$  a holonomia em  $U$ , que é  $C^\infty$ . Podemos escrever

$$h = \phi^{-1} \circ H \circ \phi$$

que é uma aplicação  $C^1$ , assim pelas Proposições 2.7.4 e 2.7.5  $h$  é uma aplicação absolutamente contínua, portanto  $W$  é transversalmente absolutamente contínua.  $\square$

**Proposição 2.7.7.** *Seja  $W$  uma folheação em  $\mathbb{T}^d$ .  $W$  é transversalmente absolutamente contínua se, e somente se, o seu levantamento,  $\tilde{W}$ , em  $\mathbb{R}^d$  é transversalmente absolutamente contínua.*

*Demonstração.* Suponha que  $W$  é transversalmente absolutamente contínua. Como a aplicação de recobrimento  $P : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$  é localmente um difeomorfismo  $C^\infty$ , seja  $B$  uma caixa folheada pequena tal que  $P : B \rightarrow P(B)$  é um difeomorfismo  $C^\infty$ . Tome  $D_1, D_2 \subset B$  dois discos transversais a  $\tilde{W}$ , assim os conjuntos  $P(D_1)$  e  $P(D_2)$  são discos transversais a  $W$ . Sejam  $h : D_1 \rightarrow D_2$  e  $H : \phi(D_1) \rightarrow \phi(D_2)$  as respectivas holonomias de  $\tilde{W}$  e  $W$ , como  $W$  é transversalmente absolutamente contínua,  $H$  é absolutamente contínua, logo a aplicação

$$h = P^{-1} \circ H \circ P$$

é absolutamente contínua, portanto  $\tilde{W}$  é transversalmente absolutamente contínua.

De forma análoga se mostra que  $W$  é transversalmente absolutamente contínua assumindo que  $\tilde{W}$  é transversalmente absolutamente contínua.  $\square$

## 2.8 Folheações com densidade uniformemente limitada (UBD)

Nesta seção vamos definir uma propriedade mais forte que a continuidade absoluta, que em (MICENA; TAHZIBI, 2013) é chamada de densidade uniformemente limitada, abreviada no inglês por UBD.

**Teorema 2.8.1** (Radon-Nikodym). *Sejam  $\nu$ ,  $\mu$  duas medidas positivas finitas tal que  $\nu \ll \mu$ , então existe uma função mensurável  $\rho$  tal que*

$$\nu(A) = \int_A \rho d\mu, \quad \forall A \in \mathcal{B}.$$

A função  $\rho$  é chamada de *derivada de Radon-Nikodym de  $\nu$  em relação a  $\mu$*  e denotamos  $\rho = \frac{d\nu}{d\mu}$ .

Lembrando que  $m$  denota a medida de Lebesgue,  $m_{L_x}$  a medida de Lebesgue desintegrada na folheação e  $\text{Vol}_{L_x}$  a medida de Lebesgue da folha  $L_x$ .

**Definição 2.8.1.** Seja  $\mathcal{F}$  uma folheação em  $M$ , nós dizemos que  $\mathcal{F}$  tem densidade uniformemente limitada (abreviada por UBD) se existe  $K > 0$  tal que para toda caixa folheada de  $\mathcal{F}$

$$\frac{1}{K} < \frac{dm_x}{d\text{Vol}_{L_x}} < K.$$

Veremos agora uma outra caracterização de UBD descrita em (MICENA; TAHZIBI, 2013), veja também (LEDRAPPIER; YOUNG, 1985).

Considere  $f : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$  um difeomorfismo parcialmente hiperbólico e tome  $\xi$  uma partição mensurável subordinada a folheação instável  $W^u$ . Para  $y \in \xi(x)$  definimos

$$\Delta^u(x, y) := \prod_{i=1}^{\infty} \frac{\text{Jac}^u f(f^{-i}(x))}{\text{Jac}^u f(f^{-i}(y))}.$$

Agora normalizamos  $\rho(y) := \frac{\Delta^u(x, y)}{L(x)}$ , onde  $L(x) = \int_{\xi(x)} \Delta^u(x, y) d\text{Vol}_x$ . Note que  $\rho(\cdot)$  é a derivada de Radon-Nikodym  $\frac{dm_x}{d\text{Vol}_{L_x}}$ .

**Lema 2.8.1.** (MICENA; TAHZIBI, 2013) *Para cada  $\varepsilon > 1$  existe  $\delta > 0$  tal que se  $y \in W_{\delta, x}^u \subset W_x^u$ , então*

$$1 - \varepsilon \leq \Delta^u(x, y) \leq 1 + \varepsilon.$$

**Lema 2.8.2.** (MICENA; TAHZIBI, 2013) *Suponha que  $W^u$  tenha a propriedade UBD, então existe  $K > 1$  tal que para Lebesgue-q.t.p.  $x \in \mathbb{T}^d$  e todo  $y_1, y_2 \in W_x^u$*

$$K^{-1} \leq \Delta^u(y_1, y_2) \leq K.$$

Além disso, para qualquer  $n \in \mathbb{N}$

$$K^{-2} \leq \prod_{i=1}^{n-1} \frac{\text{Jac}^u f(f^{-i}(y_1))}{\text{Jac}^u f(f^{-i}(y_2))} \leq K^2.$$

## 2.9 Formas diferenciais

**Definição 2.9.1.** Uma  $k$ -forma  $\omega$  em uma variedade  $M$  é uma aplicação que associa cada ponto  $x \in M$  a uma aplicação  $\omega_x : T_x M \times \cdots \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}^d$  que é

- Alternada:  $\omega_x(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -\omega_x(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k)$ ;
- $k$ -Multilinear:  $\omega_x(v_1, \dots, \lambda v_i + \tilde{v}_i, \dots, v_k) = \lambda \omega_x(v_1, \dots, v_i, \dots, v_k) + \omega_x(v_1, \dots, \tilde{v}_i, \dots, v_k)$

e que depende suavemente de  $x \in M$ .

O conjunto de todas as  $k$ -formas em  $M$  é um espaço vetorial e denotamos por  $\Omega^k(M)$ . A derivada exterior é uma aplicação linear  $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ .

**Definição 2.9.2.** Dizemos que uma  $k$ -forma  $\omega \in \Omega^k(M)$  é fechada se  $d\omega = 0$ , isto é  $\omega \in \ker(d)$ .

**Definição 2.9.3.** Seja  $E \subset TM$  um subfibrado com fibras de dimensão  $k$ . Dizemos que uma  $k$ -forma  $\omega \in \Omega^k(M)$  é não degenerada em  $E$  se para cada  $x \in M$  e qualquer conjunto linearmente independente  $\{v_1, \dots, v_k\} \subset E_x$  vale que  $\omega_x(v_1, \dots, v_k) \neq 0$ .

## 2.10 Teoria de Pesin

Esta seção foi adaptada do livro (BARREIRA; PESIN, 2002).

**Definição 2.10.1.** Seja  $f : M \rightarrow M$  um difeomorfismo. Um subconjunto de Borel,  $f$ -invariante  $\mathcal{R} \subset M$  é dito ser não uniformemente hiperbólico se existem:

- números  $\lambda$  e  $\mu$  tal que  $0 < \lambda < 1 < \mu$ ;
- um número  $\varepsilon$  e funções mensuráveis  $C, K : \mathcal{R} \rightarrow (0, \infty)$ ;
- subespaços  $E^{cs}(x)$  e  $E^{cu}(x)$  para cada  $x \in \mathcal{R}$ , que satisfazem as seguintes condições:

(C.1) os subespaços  $E^{cs}(x)$  e  $E^{cu}(x)$  dependem mensuravelmente de  $x$  e formam uma decomposição invariante do espaço tangente, isto é,

$$T_x M = E^{cs} \oplus E^{cu},$$

$$Df(E^{cs}(x)) = E^{cs}(f(x)), \quad Df(E^{cu}(x)) = E^{cu}(f(x));$$

(C.2) o subespaço  $E^{cs}$  é estável: para  $v \in E^{cs}$  e  $n > 0$ ,

$$\|Df^n(v)\| \leq C(x)\lambda^n e^{\varepsilon n} \|v\|;$$

(C.3) o subespaço  $E^{cu}$  é instável: para  $v \in E^{cu}$  e  $n < 0$ ,

$$\|Df^n(v)\| \leq C(x)\mu^n e^{\varepsilon n} \|v\|;$$

(C.4)  $\angle(E^{cs}(x), E^{cu}(x)) \geq K(x)$ ;

(C.5) para  $n \in \mathbb{Z}$ ,

$$C(f^n(x)) \leq C(x)e^{\varepsilon|n|}, \quad K(f^n(x)) \geq K(x)e^{-\varepsilon|n|}.$$

Quando  $\mu$  é uma medida invariante hiperbólica, então o conjunto dos pontos regulares de Lyapunov contém um conjunto não uniformemente hiperbólico com medida  $\mu$  total.

Fixado  $\varepsilon > 0$  e dado  $l > 0$  nós definimos o *conjunto de nível  $l$*  por

$$\mathcal{R}^l = \left\{ x \in \mathcal{R} : C(x, \varepsilon) \leq l, K(x, \varepsilon) \geq \frac{1}{l} \right\},$$

também chamado de *conjuntos de Pesin*.

$$\text{Claramente } \mathcal{R} = \bigcup_{\varepsilon > 0} \bigcup_{l=1}^{\infty} \mathcal{R}_\varepsilon^l.$$

**Teorema 2.10.1** (Teorema da Variedade Estável). *Para cada  $x \in \mathcal{R}$  existe uma variedade estável local  $V^{cs}(x)$  tal que  $x \in V^{cs}(x)$ ,  $T_x V^{cs}(x) = E^{cs}(x)$  e se  $y \in V^{cs}(x)$  e  $n \geq 0$ , então*

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leq T(x) \lambda^n e^{\varepsilon n} d(x, y),$$

onde  $d$  é a distância em  $M$  induzida da métrica Riemanniana e  $T : \mathcal{R} \rightarrow (0, \infty)$  é uma função mensurável satisfazendo

$$T(f^m(x)) \leq T(x) e^{10\varepsilon|m|}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Vamos denotar por  $r(x)$  o tamanho da variedade estável local  $V^{cs}(x)$ . O tamanho das variedades locais é limitado por baixo em cada conjunto de nível  $\mathcal{R}^l$ , isto é, existe um número  $r_l > 0$  que depende somente de  $l$  tal que

$$r(x) \geq r_l, \quad \text{para } x \in \mathcal{R}^l$$

Fixe  $x \in \mathcal{R}$  e um número  $r$ ,  $0 < r < r_l$ . Considere a família de variedades estáveis local,

$$\mathcal{L}(x) = \{V^{cs}(w); w \in \mathcal{R}^l \cap B(x, r)\}.$$

onde  $B(x, r)$  é uma bola em  $x$  de raio  $r$ .

**Teorema 2.10.2** (Continuidade Absoluta). *Dado  $l \geq 1$ ,  $x \in \mathcal{R}^l$  e transversais  $W^1$  e  $W^2$  para a família  $\mathcal{L}(x)$ , a aplicação holonomia  $\pi$  é absolutamente contínua (com respeito as medidas  $\text{Vol}_{W^1}$  e  $\text{Vol}_{W^2}$ ) e o jacobiano de  $\pi$  é limitado por cima e afastado de zero.*

*A família de variedades instáveis também satisfaz a propriedade continuidade absoluta.*

Vamos definir um *cs-bloco* de forma semelhante a (VIANA; YANG, 2013, pg. 867).

Suponha  $f \in \text{Diff}^k(M)$ ,  $k > 1$  admitindo uma decomposição  $E^{cs} \oplus E^{cu}$  dinamicamente coerente, isto é, tem folheações centro estável e centro instável. Denotaremos por  $I^{d_{cs}}$  um cubo de lado um em  $\mathbb{R}^d$  com dimensão  $d_{cs}$ .

**Definição 2.10.2.** Nós chamamos de *cs-bloco* de  $f$  a imagem  $\mathbb{B} = h(\Sigma \times I^{d_{cs}})$  de um mergulho  $h : \Sigma \times I^{d_{cs}} \rightarrow M$ , com  $\Sigma \subset I^{d_{cu}}$ , satisfazendo as seguintes propriedades:

- $h(\{a\} \times I^{d_{cs}})$  está contido em  $W^{cs}(h(a, 0))$ , para cada  $a \in \Sigma$ ;
- $h(\{a\} \times I^{d_{cs}})$  está contido no conjunto estável de  $h(a, 0)$ , para cada  $a \in \Sigma$ ;
- $h(\Sigma \times \{0\})$  é um subconjunto de algum disco  $D$  transverso a  $W^{cs}$ ;
- Existe uma constante  $K > 0$  tal que para cada discos  $D_1, D_2 \subset M$  que cruza  $h(\Sigma \times I^{d_{cu}})$  (isto é, que intersecta  $h(\{a\} \times I^{d_{cs}})$  para cada  $a \in \Sigma$ ) a folheação  $W^{cs}$  induz uma holonomia  $h^{cs}$  entre  $D_1$  e  $D_1$  cujo jacobiano relativo a  $\text{Vol}_{D_1}$  e  $\text{Vol}_{D_2}$  está entre  $K$  e  $\frac{1}{K}$ .



## RESULTADOS HISTÓRICOS

### 3.1 Semi-rigidez dos expoentes

A semi-rigidez, que estamos falando, é uma comparação dos expoentes de Lyapunov de  $f$  com os expoentes de Lyapunov do seu linearizado. Isso foi provado para difeomorfismos parcialmente hiperbólicos do toro  $\mathbb{T}^3$  em (MICENA; TAHZIBI, 2013).

**Teorema 3.1.1.** (MICENA; TAHZIBI, 2013) *Seja  $f : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$  um difeomorfismo  $C^2$  parcialmente hiperbólico conservativo e  $A$  a linearização de  $f$ , então  $\lambda^u(f, x) \leq \lambda^u(A)$  e  $\lambda^s(f, x) \geq \lambda^s(A)$  para quase todo ponto  $x \in \mathbb{T}^3$ .*

Nessa direção, tem um resultado para perturbações de endomorfismos Anosov linear.

**Teorema 3.1.2.** (MICENA; TAHZIBI, 2014) *Seja  $A : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$  um endomorfismo Anosov linear,  $\dim(E^u) = 1$ . Então existe um  $C^1$ -aberto  $\mathcal{U}$  contendo  $A$  tal que para cada  $f \in \mathcal{U}$  endomorfismo  $C^{1+\alpha}$ , parcialmente hiperbólico conservativo, nós temos que  $\lambda^u(f, x) \leq \lambda^u(A)$ , para Lebesgue- $q.t.p.$   $x \in \mathbb{T}^d$ .*

Em (MICENA, 2015) também foi verificada a semi-rigidez para os expoentes centrais.

**Teorema 3.1.3.** (MICENA, 2015) *Seja  $f : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$  um difeomorfismo DA preservando volume com linearização  $A : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$ . Suponha que existe um conjunto mensurável  $P$ , com  $m(P) > 0$ , tal que  $\lambda_f^c(x) > 0$  para cada  $x \in P$ . Se  $W_f^c$  é absolutamente contínua, então  $0 \leq \lambda_f^c(x) \leq \lambda_A^c$  para  $m$ -quase todo ponto  $x \in \mathbb{T}^3$ .*

A continuidade absoluta das folheações  $W^u$  e  $W^s$  é um ingrediente essencial na prova dos resultados acima. Supondo que as folheações tem a propriedade UBD, que é mais forte que a continuidade absoluta, (MICENA; TAHZIBI, 2013) prova uma rigidez para os expoentes de Lyapunov.

**Teorema 3.1.4.** (MICENA; TAHZIBI, 2013) *Seja  $f : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$  um difeomorfismo parcialmente hiperbólico conservativo tal que as folheações  $W^s$  e  $W^u$  tem a propriedade UBD, então  $\lambda^\sigma(f, x) = \lambda^\sigma(A)$  com  $\sigma \in \{s, c, u\}$ , para Lebesgue-quase todo ponto  $x \in \mathbb{T}^3$ .*

## 3.2 Continuidade absoluta de folheações

O próximo Teorema é uma classe de exemplos construído em (MICENA, 2015), no contexto do Teorema 3.1.3 em que  $W^c$  não é absolutamente contínua.

Denotaremos por  $DA_m^r(\mathbb{T}^3)$  o conjunto de todos os difeomorfismos DA de  $\mathbb{T}^3$  que preservam volume  $m$  e  $\mathcal{A}(\mathbb{T}^3)$  o conjunto de todos os difeomorfismos Anosov de  $\mathbb{T}^3$ .

**Teorema 3.2.1.** (MICENA, 2015) *Existe um conjunto  $C^1$ -aberto  $\mathcal{U} \subset DA_m^r(\mathbb{T}^3) \setminus \overline{\mathcal{A}(\mathbb{T}^3)}$ , com  $r \geq 2$ , tal que cada  $f \in \mathcal{U}$  tem a mesma linearização  $A$  e  $\lambda^c(f, x) > \lambda_A^c$ , para  $m$ -q.t.p.  $x \in \mathbb{T}^3$ . Em particular,  $W_f^c$  não é absolutamente contínua para cada  $f \in \mathcal{U}$ .*

### 3.2.1 Continuidade absoluta de $W^c$ , caso compacto

O objetivo desta subseção é apresentar os argumentos sobre continuidade absoluta de folheações introduzidos por Ricardo Mañé e também mostrar que é bem entendido o comportamento da folheação central  $W^c$  de sistemas parcialmente hiperbólicos com relação a continuidade absoluta quando as folhas são compactas.

Um dos primeiros a estudar a continuidade absoluta da folheação central foi R. Mañé. Em uma carta endereçada a M. Shub, ele expõe algumas ideias sobre a continuidade absoluta de folheações centrais compactas. Essas ideias aparecem nos trabalhos de (RUELLE; WILKINSON, 2001) e (HIRAYAMA; PESIN, 2007). Em (RUELLE; WILKINSON, 2001), é mostrado uma classe de exemplos com folheação central unidimensional compacta que não são absolutamente contínuas, de forma mais geral foi mostrado o seguinte:

**Teorema 3.2.2.** (HIRAYAMA; PESIN, 2007) *Seja  $f : M \rightarrow M$  um difeomorfismo parcialmente hiperbólico  $C^2$  preservando uma medida suave  $m$ . Assuma que:*

1. *a distribuição central  $E^c$  é integrável e as folhas da folheação  $W^c$  são suaves e compactas.*
2.  *$\sum_i \lambda_f^c(x) \neq 0$  para  $m$ -q.t.p.  $x \in M$ .*

*Então a folheação central não é absolutamente contínua.*

Para vermos um uso simples das ideias de Mañé, vamos provar o seguinte Teorema, que é um resultado folclórico de Mañé escrito por D. Ruelle e A. Wilkinson. Esta versão foi extraída de (MICENA, 2015).

**Teorema 3.2.3.** *Seja  $f : M \rightarrow M$  um difeomorfismo parcialmente hiperbólico dinamicamente coerente tal que  $\dim E^c = 1$  e  $W^c$  é uma folheação compacta. Suponha que  $f$  preserva uma forma volume  $m$  em  $M$  e existe um conjunto  $P$  com  $m(P) > 0$  tal que  $\lambda_f^c(x) > 0$  para todo  $x \in P$ , então  $W^c$  não é absolutamente contínua.*

*Demonstração.* Considere

$$P_{k,l,n} = \{x \in P \mid \|Df^j(x)|_{E^c}\| \geq e^{\frac{j}{k}}, \text{ para todo } j \geq l, \text{ e } |W^c(x)| < n\},$$

onde  $|W^c(x)|$  denota o comprimento da folha central  $W^c(x)$ .

Assim  $P = \bigcup_{k,l,n \in \mathbb{N}} P_{k,l,n}$ , em particular existem  $k_0, l_0, n_0$  tal que  $m(P_{k_0, l_0, n_0}) > 0$ , pelo Teorema de recorrência de Poincaré quase todo ponto de  $P_{k_0, l_0, n_0}$  retorna infinitas vezes a  $P_{k_0, l_0, n_0}$ , seja  $Z \subset P_{k_0, l_0, n_0}$  o conjunto desses pontos. Suponha que  $W^c$  é uma folheação absolutamente contínua, então existe uma folha  $W^c(x)$  que intersecta  $Z$  em um conjunto de medida positiva, em particular existe uma subsequência  $n_k$  tal que  $f^{n_k}(x) \in P_{k_0, l_0, n_0}$ , e isto implica que  $|W^c(f^{n_k}(x))| < n_0$ .

Por outro lado denote  $\alpha = \text{Leb}_{W^c(x)}(W^c(x) \cap P_{k_0, l_0, n_0})$ , assim, se  $j \geq k_0$  nós temos  $|W^c(f^j(x))| \geq \alpha \cdot e^{\frac{j}{k_0}} \rightarrow +\infty$  quando  $j \rightarrow +\infty$  que contradiz  $|W^c(f^{n_k}(x))| < n_0$  para a subsequência  $n_k$ .  $\square$

**Corolário 3.2.1.** *Nas condições do Teorema, se a folheação central unidimensional compacta é absolutamente contínua, então  $\lambda_f^c(x) = 0$ , para  $m$ -q.t.p  $x \in M$ .*

*Observação 3.2.1.* Katok exibe um exemplo de um difeomorfismo  $f : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$  parcialmente hiperbólico preservando volume tal que  $W^c$  é compacta, não absolutamente contínua e  $\lambda_f^c(x) = 0$  para  $m$ -q.t.p  $x \in \mathbb{T}^3$ . Veja (HASSELBLATT; PESIN, 2006) e suas citações.

Nesta tese faremos uma versão generalizada dos argumentos de Mañé, comparando volumes, para estudar a semi-rigidez dos expoentes de Lyapunov e também a continuidade absoluta da folheação central para uma classe de exemplos em que  $W^c$  não é compacta.

### 3.3 Desintegração de medida

Quando a folheação não é absolutamente contínua sabemos por definição que as medidas condicionais da desintegração ao longo das folhas não são Lebesgue. Em (PONCE; TAHZIBI; VARÃO, 2014) mostram exemplos cuja desintegração ao longo da folheação central é atômica e com um átomo por folha.

**Teorema 3.3.1.** (PONCE; TAHZIBI; VARÃO, 2014) *Seja  $f : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$  um difeomorfismo DA conservativo. Suponha que sua linearização  $A$  tem a decomposição  $T_A M = E^s \oplus E^{wu} \oplus E^u$  (onde  $E^{wu}$  representa a direção instável fraca). Se  $f$  tem  $\lambda^c(x) < 0$  para  $m$ -q.t.p  $x \in \mathbb{T}^3$ , então o volume tem desintegração atômica em  $W_f^c$ , de fato a desintegração é mono atômica.*

Em (RUELLE; WILKINSON, 2001) também mostra exemplos de parcialmente hiperbólicos com folhas centrais compactas e cuja desintegração do volume ao longo das folhas centrais também é atômica e com um átomo por folha. Em (AVILA; VIANA; WILKINSON, 2015) mostra uma dicotomia para certos exemplos de perturbações de fluxo geodésico de tempo um, em que a desintegração da medida é ou Lebesgue ou atômica. Entretanto, existem exemplos em que a desintegração do volume não é nem Lebesgue e nem atômica.

**Teorema 3.3.2.** (VARÃO, 2016a) *Existe um difeomorfismo Anosov de  $\mathbb{T}^3$  com decomposição  $TM = E^s \oplus E^{wu} \oplus E^u$  em que a desintegração do volume nas folhas centrais não é nem Lebesgue nem atômica.*

**Teorema 3.3.3.** (VIANA; YANG, 2016) *Seja  $f \in DA_m^2(\mathbb{T}^3)$ , em que sua linearização tem os auto valores  $\lambda_1 < 1 < \lambda_2 < \lambda_3$  com  $h_m(f) > \log \lambda_3$  e cuja integral dos expoentes de Lyapunov centrais é maior que  $\lambda_2$ . Então existe uma vizinhança  $\mathcal{U} \subset DA_m^2(\mathbb{T}^3)$  de  $f$  tal que para cada  $g \in \mathcal{U}$  a medida de volume é ergódica e sua desintegração ao longo da folheação central não é nem Lebesgue nem atômica.*

Obtemos exemplos análogos aos do Teorema 3.3.2, em que a folheação central é bidimensional.

## SEMI-RIGIDEZ PARA DIFEOMORFISMOS DA'S DE $\mathbb{T}^d$

Neste e nos próximos capítulos enunciaremos e provaremos os resultados novos que obtivemos. Neste capítulo mostraremos algumas generalizações dos teoremas 3.1.1 e 3.1.3 para dimensão maior que um.

**Teorema 4.0.1.** *Seja  $f : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$  um difeomorfismo  $C^2$ , DA preservando volume e  $A : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$  a sua linearização com uma decomposição  $TM = E^s \oplus E^c \oplus E^u$  tal que:*

1.  $\dim E^\sigma(f) = \dim E^\sigma(A)$  com  $\sigma \in \{s, u\}$ ,
2. *Suponha que  $d_\sigma = \dim E_f^\sigma$  e que existe um  $(d - d_\sigma)$ -plano  $P_\sigma \subset \mathbb{R}^d$ , tal que  $\angle(E_f^\sigma(x), P_\sigma) > \alpha > 0$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^d$ ,*

então

$$\sum_{i=1}^{d_u} \lambda_i^u(f, x) \leq \sum_{i=1}^{d_u} \lambda_i^u(A) \quad e \quad \sum_{i=1}^{d_s} \lambda_i^s(f, x) \geq \sum_{i=1}^{d_s} \lambda_i^s(A),$$

para  $m - q.t.p.$   $x \in \mathbb{T}^d$ .

**Teorema 4.0.2.** *Seja  $f : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$  um difeomorfismo  $C^2$ , DA preservando volume e  $A : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$  a sua linearização com uma decomposição  $TM = E^s \oplus E^c \oplus E^u$  tal que:*

1.  $f$  e  $A$  são homotópicas por um caminho de homotopia inteiramente contido em  $PH(\mathbb{T}^d)$ ,
2.  $\dim E^\sigma(g) = \dim E^\sigma(A)$  com  $\sigma \in \{s, u\}$  para cada  $g$  no caminho de homotopia,

então

$$\sum_{i=1}^{d_u} \lambda_i^u(f, x) \leq \sum_{i=1}^{d_u} \lambda_i^u(A) \quad e \quad \sum_{i=1}^{d_s} \lambda_i^s(f, x) \geq \sum_{i=1}^{d_s} \lambda_i^s(A),$$

para  $m - q.t.p.$   $x \in \mathbb{T}^d$ .

Usando a fórmula de Pesin segue os seguintes corolários:

**Corolário 4.0.1.** *Nas condições do Teorema 4.0.1 e se  $\lambda_i^c(f) \leq 0$ , então  $h_m(f) \leq h_m(A)$ .*

*Demonstração.* Pela fórmula de entropia de Pesin e Teorema 4.0.1 temos

$$h_m(f) = \int_{\mathbb{T}^d} \sum_i \lambda_i^u(f, x) dm \leq \int_{\mathbb{T}^d} \sum_i \lambda_i^u(A) dm \leq \int_{\mathbb{T}^d} \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i(A) = h_m(A)$$

□

**Corolário 4.0.2.** *Nas condições do Teorema 4.0.2 e se  $\lambda_i^c(f) \leq 0$ , então  $h_m(f) \leq h_m(A)$ .*

Também vale uma semi-rigidez para os expoentes centrais. Este resultado é em conjunto com F. Micena.

**Teorema 4.0.3.** *Seja  $f : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$  um difeomorfismo DA conservativo e  $A$  sua linearização tal que:*

1.  $\dim E_f^c = \dim E_A^c = d_c$ ,
2.  $E_A^c = E_1^c \oplus E_2^c \oplus \dots \oplus E_{d_c}^c$ , onde  $\dim E_i^c = 1$  e  $\lambda_i^c(A) > 0$  para  $i = 1, \dots, d_c$ ,
3.  $f$  é dinamicamente coerente e no recobrimento  $\angle(T_x \tilde{W}_f^c, (\tilde{E}_A^c)^\perp) > \alpha > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^d$ .

Se a folheação  $W_f^c$  é absolutamente contínua, então  $\sum_i \lambda_i^c(f, x) \leq \sum_i \lambda_i^c(A)$  para Lebesgue-quase todo ponto  $x \in \mathbb{T}^d$ .

## 4.1 Prova dos teoremas 4.0.1 e 4.0.2

Os teoremas 4.0.1 e 4.0.2 são consequências da seguinte proposição:

**Proposição 4.1.1.** *Seja  $f : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$  um difeomorfismo  $C^2$  parcialmente hiperbólico conservativo tal que existem  $d_u$ -forma e  $d_s$ -forma fechadas e não degeneradas em  $E^u$  e  $E^s$ , respectivamente. Suponha que  $A$ , a linearização de  $f$ , é parcialmente hiperbólica e que  $\dim E_f^\sigma = \dim E_A^\sigma$ ,  $\sigma \in \{s, c, u\}$  então*

$$\sum_{i=1}^{d_u} \lambda_i^u(f, x) \leq \sum_{i=1}^{d_u} \lambda_i^u(A) \quad e \quad \sum_{i=1}^{d_s} \lambda_i^s(f, x) \geq \sum_{i=1}^{d_s} \lambda_i^s(A)$$

para  $m - q.t.p.$   $x \in \mathbb{T}^d$ .

Seja  $f : M \rightarrow M$  um difeomorfismo,  $W$  uma folheação em  $M$  invariante por  $f$ , isto é,  $f(W(x)) = W(f(x))$  e  $B_r(x)$  uma bola de raio  $r$  centrada em  $x$  contida em  $W(x)$ . Dizemos que

$$\chi_W(f, x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \text{Vol}(f^n(B_r(x, f)))$$

é a taxa de crescimento de volume da folheação em  $x$  e

$$\chi_W(f) = \sup_{x \in M} \chi_W(f, x)$$

é a taxa de crescimento de volume de  $W$ .

Quando  $f$  é um difeomorfismo parcialmente hiperbólico, denotaremos por  $\chi_u(f) = \chi_{W^u}(f)$ , isto é, o crescimento de volume da folheação instável  $W^u$ .

**Teorema 4.1.1.** (SAGHIN, 2014) *Seja  $f : M \rightarrow M$  um difeomorfismo  $C^1$  parcialmente hiperbólico tal que existe uma  $d_u$ -forma fechada e não degenerada no fibrado instável  $E^u$ , então  $\chi_u(f) = \log sp(f_{*,d_u})$ , onde  $f_{*,d_u}$  é a transformação induzida na  $d_u$ -cohomologia de De Rham.*

**Proposição 4.1.2.** *Nas mesmas hipóteses do Teorema acima, fixado  $x \in \mathbb{T}^d$ , seja  $B_r(x, f) \subset W^u(x, f)$  e  $B_r(x, A) \subset W^u(x, A)$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0$  tal que se  $n > n_0$  temos*

$$\text{Vol}(f^n(B_r(x, f))) \leq (1 + \varepsilon)^n \text{Vol}(A^n(B_r(x, A))).$$

*Demonstração.* Fixado  $x$  o Teorema 4.1.1 acima implica que

$$\chi_u(f, x) \leq \chi_u(f) = \log sp(f_{*,u}) = \log sp(A_{*,u}) = \chi_u(A) = \chi_u(A, x),$$

isto é

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \text{Vol}(f^n(B_r(x, f))) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \text{Vol}(A^n(B_r(x, A))),$$

portanto dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0$  tal que se  $n > n_0$ ,

$$\frac{1}{n} \log \text{Vol}(f^n(B_r(x, f))) \leq \frac{1}{n} \log \text{Vol}(A^n(B_r(x, A))) + \frac{1}{n} \log(1 + \varepsilon)^n.$$

Logo

$$\text{Vol}(f^n(B_r(x, f))) \leq (1 + \varepsilon)^n \text{Vol}(A^n(B_r(x, A))).$$

□

*Demonstração da Proposição 4.1.1.* Provaremos a desigualdade com  $\sum_i \lambda_i^u(f, x)$ , podemos usar a inversa  $f^{-1}$  para provar a desigualdade com  $\sum_i \lambda_i^s(f, x)$ .

Suponha por contradição que existe  $Z \subset \mathbb{T}^d$  com volume positivo, tal que para todo  $x \in Z$  tenhamos  $\sum_i \lambda_i^u(f, x) > \sum_i \lambda_i^u(A)$ .

Para  $q \in \mathbb{N} - \{0\}$  definimos o conjunto

$$Z_q = \left\{ x \in Z; \sum_i \lambda_i^u(f, x) > \sum_i \lambda_i^u(A) + \log \left( 1 + \frac{1}{q} \right) \right\}.$$

Como  $\bigcup_{q=1}^{\infty} Z_q = Z$ , existe  $q$  tal que  $m(Z_q) > 0$ . Para cada  $x \in Z_q$  segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\text{Jac} f^n(x)|_{E^u} > \sum_i \lambda_i^u(A) + \log \left( 1 + \frac{1}{q} \right)$$

Assim existe  $n_0$  tal que para  $n \geq n_0$  temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \log |\text{Jac } f^n(x)|_{E^u} &> \sum_i \lambda_i^u(A) + \log \left(1 + \frac{1}{q}\right) \\ &> \frac{1}{n} \log e^{n \sum_i \lambda_i^u(A)} + \frac{1}{n} \log \left(1 + \frac{1}{q}\right)^n, \end{aligned}$$

isto implica que

$$|\text{Jac } f^n(x)|_{E^u} > \left(1 + \frac{1}{q}\right)^n e^{n \sum_i \lambda_i^u(A)}.$$

Mediante esse fato, para cada  $n > 0$  definimos o conjunto

$$Z_{q,n} = \left\{ x \in Z_q; |\text{Jac } f^k(x)|_{E^u} > \left(1 + \frac{1}{q}\right)^k e^{k \sum_i \lambda_i^u(A)}, \forall k \geq n \right\},$$

assim existe  $N > 0$  com  $m(Z_{q,N}) > 0$ .

Agora para cada  $x \in \mathbb{T}^d$ , seja  $B_x$  uma caixa folheada de  $W_f^u$ . Por compacidade podemos tomar uma cobertura finita  $\{B_{x_i}\}_{i=1}^j$  cobrindo  $\mathbb{T}^d$ . Como  $W_f^u$  é absolutamente contínua, existe  $i$  e  $x \in B_{x_i}$  tal que  $\text{Vol}(B_{x_i} \cap W_f^u(x) \cap Z_{q,N}) > 0$ .

Considere  $B_r(x) \subset W_f^u(x)$  satisfazendo  $\text{Vol}(B_r(x) \cap Z_{q,N}) > 0$ . Pela Proposição 4.1.2 temos

$$\text{Vol}(f^k(B_r(x))) \leq (1 + \varepsilon)^k \text{Vol}(A^k(B_r(x))) \leq (1 + \varepsilon)^k e^{k \sum_i \lambda_i^u(A)} \text{Vol}(B_r(x)). \quad (4.1)$$

Por outro lado para  $k \geq N$ ,

$$\begin{aligned} \text{Vol}(f^k(B_r(x))) &= \int_{B_r(x)} |\text{Jac } f^k|_{E^u} d\text{Vol} \\ &\geq \int_{B_r(x) \cap Z_{q,N}} |\text{Jac } f^k|_{E^u} d\text{Vol} \\ &> \int_{B_r(x) \cap Z_{q,N}} \left(1 + \frac{1}{q}\right)^k e^{k \sum_i \lambda_i^u(A)} d\text{Vol} \\ &> \left(1 + \frac{1}{q}\right)^k e^{k \sum_i \lambda_i^u(A)} \int_{B_r(x) \cap Z_{q,N}} d\text{Vol} \\ &> \left(1 + \frac{1}{q}\right)^k e^{k \sum_i \lambda_i^u(A)} \text{Vol}(B_r(x) \cap Z_{q,N}) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Portanto para  $k$  suficientemente grande as equações 4.1 e 4.2 nos dão uma contradição, de fato  $q$  está fixado e podemos escolher  $\varepsilon$  suficientemente pequeno tal que  $\varepsilon < \frac{1}{q}$ . Assim existe  $k$  suficientemente grande tal que

$$\left(1 + \frac{1}{q}\right)^k e^{k \sum_i \lambda_i^u(A)} \text{Vol}(B_r(x) \cap Z_{q,N}) > (1 + \varepsilon)^k e^{k \sum_i \lambda_i^u(A)} \text{Vol}(B_r(x)).$$

□



### 4.1.1 Demonstração do Teorema 4.0.1

**Observação 4.1.1.** *Se  $A : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$  é um parcialmente hiperbólico linear, então existem  $d_u$ -forma e  $d_s$ -forma fechadas e não degeneradas em  $E^u$  e  $E^s$ , respectivamente.*

De fato, suponha que  $d = 3$  com  $\dim E^u = 1$  e que  $E^u$ , vindo no recobrimento universal  $\mathbb{R}^3$ , seja o eixo dos  $x$ . Definimos a 1-forma  $\omega = dx$ . Claramente  $\omega$  é não degenerada em  $E^u$  e como  $d\omega = d(1) \wedge dx = 0$ , então  $\omega$  é fechada. Em geral, se  $E^u$  tem dimensão  $d_u$  qualquer, definimos a forma  $\omega = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_{d_u}$ , que pelas mesmas razões é fechada e não degenerada em  $E^u$ . A prova para  $E^s$  é análoga.

Note que  $\omega$  é degenerada somente em  $(E^u)^\perp$  e veja também que não podemos construir uma 1-forma  $\omega$  não degenerada em todo o  $\mathbb{R}^3$ , pois  $\omega(p) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma transformação linear, logo seu núcleo tem dimensão pelo menos 2.

**Proposição 4.1.3.** *Seja  $W$  uma folheação em  $\mathbb{R}^d$  de dimensão  $d_u$ . Se existe um  $(d - d_u)$ -plano  $P$  em  $\mathbb{R}^d$  tal que  $\angle(T_x W, P) > \alpha > 0$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^d$ , então existe uma  $d_u$ -forma  $\omega$  que é fechada e não degenerada em  $W$ .*

*Demonstração.* Seja  $B$  o complemento ortogonal de  $P$ , sempre existe uma forma fechada e não degenerada em  $B$ , de fato, basta tomarmos a forma de volume  $\omega = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_{d_u}$  que é não degenerada em  $B$  e como  $d\omega = d(1) \wedge (dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_{d_u}) = 0$ , então  $\omega$  é fechada. Note que  $\omega$  é degenerada apenas em  $B^\perp = P$  e como  $\angle(T_x W, P) > \alpha > 0$ , então podemos tomar a mesma forma  $\omega$ , que é fechada e não degenerada em  $T_x W$  para todo  $x \in \mathbb{R}^d$ .  $\square$

*Demonstração do Teorema 4.0.1.* Seja  $\tilde{f}$  o levantamento de  $f$  para o recobrimento universal, pelo Item (2) e Proposição 4.1.3 existem  $d_u$ -forma e  $d_s$ -forma fechadas e não degeneradas em  $\tilde{W}^u$  e  $\tilde{W}^s$ , respectivamente, tome o pushforward dessas formas pela  $DP$  para  $W^u$  e  $W^s$ , que são fechadas e não degeneradas e pela Proposição 4.1.1 o resultado segue.  $\square$

Da Proposição 4.1.1 e Proposição 4.1.3 segue o seguinte.

**Corolário 4.1.1.** *Se  $A : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$  é um difeomorfismo parcialmente hiperbólico linear e  $f$  é um difeomorfismo  $C^2$  conservativo que é uma  $C^1$ -perturbação pequena de  $A$ , então  $\sum_i \lambda_i^u(f, x) \leq \sum_i \lambda_i^u(A)$  e  $\sum_i \lambda_i^s(f, x) \geq \sum_i \lambda_i^s(A)$  para Lebesgue quase todo ponto  $x \in \mathbb{T}^d$ .*

### 4.1.2 Demonstração do Teorema 4.0.2

De (DAQUILEMA, 2014, Proposição 3.1.2) temos o seguinte:

**Proposição 4.1.4.** (DAQUILEMA, 2014) *Seja  $f : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$  um difeomorfismo parcialmente hiperbólico homotópico a um Anosov linear  $A$  tal que:*

a) cada elemento do caminho de homotopia é parcialmente hiperbólico;

b) se  $f_1$  e  $f_2$  são dois elementos do caminho então  $\dim E^\sigma(f_1) = \dim E^\sigma(f_2)$ ,  $\sigma \in \{s, c, u\}$ ,

então  $f$  tem uma  $d_u$ -forma fechada e não degenerada em  $W^u$ .

*Demonstração do Teorema 4.0.2.* Pela proposição acima  $f$  tem uma  $d_u$ -forma fechada e não degenerada em  $W^u$ , usando  $f^{-1}$  obtemos uma  $d_s$ -forma fechada e não degenerada em  $W^s$ , logo aplicando a Proposição 4.1.1 segue o resultado.  $\square$

## 4.2 Prova do Teorema 4.0.3

Na prova do Teorema 4.0.3 não usaremos formas diferenciais, que foram usadas para comparar os volumes de  $f$  e seu linearizado nas provas dos Teoremas anteriores, embora que pelo Item 3 do Teorema 4.0.3 e Proposição 4.1.3, a folheação  $W_f^c$  tem uma forma fechada e não degenerada. Aqui nós vamos comparar os volumes de  $f$  e seu linearizado  $A$  usando as propriedades descritas na Seção 2.6.

**Lema 4.2.1.** *Seja  $f$  como no enunciado do Teorema 4.0.3, então a folheação  $\tilde{W}_f^c$  é quase isométrica.*

*Demonstração.* Basta usar a Proposição 2.5.1 fazendo  $P = (\tilde{E}_A^c)^\perp$ , pelo Item 3 do Teorema  $\angle(T_x \tilde{W}_f^c, P) > \alpha > 0$ , logo pela Proposição 2.5.1  $\tilde{W}_f^c$  é quase isométrica.  $\square$

**Proposição 4.2.1.** *Seja  $f : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$  como no enunciado do Teorema 4.0.3, então dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $M > 0$  e constantes  $C_0, C_1 > 0$  tal que*

$$C_0(1 - \varepsilon)^{2n} e^{n \Sigma \lambda_i^\varepsilon(A)} \text{Vol}(R) \leq \text{Vol}(\tilde{f}^n \pi^{-1}(R)) \leq C_1(1 + \varepsilon)^{2n} e^{n \Sigma \lambda_i^\varepsilon(A)} \text{Vol}(R)$$

para todo  $n$ , onde  $\pi$  é a projeção ortogonal de  $\tilde{W}_f^c(z)$  em  $\tilde{E}_A^c(z)$  (paralela a  $(\tilde{E}_A^c)^\perp$ ) e  $R$  é um cubo em  $\tilde{E}_A^c(z)$  com dimensão  $d_c$ , de lado maior que  $M$  contendo  $z$ .

Para provarmos a proposição faremos uso do seguinte resultado:

**Lema 4.2.2.** *Seja  $f : M \rightarrow M$  uma aplicação Lipschitz, então existe  $K > 0$  tal que  $\text{Jac}f(x) \leq K$  para todo  $x \in M$  onde a aplicação  $f$  é diferenciável.*

*Demonstração do Lema.* Seja  $L$  a constante de Lipschitz de  $f$ , dado  $x \in M$  onde a aplicação  $f$  é diferenciável e  $v \in T_x M$ , então

$$\|D_x f(v)\| = \lim_{t \rightarrow 0} \left\| \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} \right\| \leq \lim_{t \rightarrow 0} \frac{L\|x+tv-x\|}{|t|} = L\|v\|$$

Implica que  $\|D_x f\| = \sup_{v \in T_x M} \frac{\|D_x f(v)\|}{\|v\|} \leq L$ ,

Como espaço das matrizes  $n \times n$  com coeficientes reais  $M_n(\mathbb{R})$  é isomorfo a  $\mathbb{R}^{n^2}$  e todas as métricas em  $\mathbb{R}^{n^2}$  são equivalentes, o conjunto  $\{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \|A\| \leq L\}$  é compacto e a aplicação  $\det : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua, então existe  $K \geq 0$  tal que

$$\text{Jac}f(x) = |\det D_x f| \leq K.$$

□

*Demonstração da Proposição 4.2.1.* .

**Afirmção 1:** Para  $z \in \mathbb{R}^d$ , a projeção ortogonal  $\pi : \tilde{W}_f^c(z) \rightarrow \tilde{E}_A^c$  (paralela a  $(\tilde{E}_A^c)^\perp$ ) é um difeomorfismo bi-Lipschitz.

*Demonstração da Afirmção 1.* Pelo Item 3 do Teorema 4.0.3 o plano  $(\tilde{E}_A^c)^\perp$  é uniformemente transversal a folheação  $\tilde{W}_f^c$  então existe  $\beta > 0$  tal que

$$\|d\pi(y)(v)\| \geq \beta \|v\| \quad (4.3)$$

para qualquer  $x \in \tilde{W}_f^c(z)$  e  $v \in T_x \tilde{W}_f^c(z)$ , implica que  $\text{Jac}\pi(x) \neq 0$ , logo pelo Teorema da Função Inversa para cada  $x \in \tilde{W}_f^c(z)$  existe uma bola  $B(\delta, x) \subset \tilde{W}_f^c(z)$  tal que  $\pi|_{B(\delta, x)}$  é um difeomorfismo. Da prova do Teorema da Função Inversa e Equação 4.3,  $\delta$  pode ser tomado independente de  $x$ . Novamente pela Equação 4.3 existe  $\varepsilon > 0$ , independente de  $x$  tal que  $B(\varepsilon, \pi(x)) \subset \pi(B(\delta, x))$ . Para verificar que  $\pi$  é sobrejetiva, vamos mostrar que  $\pi(\tilde{W}_f^c(z))$  é um conjunto aberto e fechado. Como  $\pi$  é um difeomorfismo local  $\pi(\tilde{W}_f^c(z))$  é aberto, afim de verificar que também é fechado seja  $y_n \in \pi(\tilde{W}_f^c(z))$  uma sequência convergindo para  $y$ , assim existe um  $n_0$  suficientemente grande tal que  $y \in B(\varepsilon, y_{n_0})$  e portanto  $y \in \pi(\tilde{W}_f^c(z))$ , logo  $\pi$  é sobrejetiva. Além disso  $\pi$  é uma aplicação de recobrimento, de fato, como vimos, para cada  $y \in \tilde{E}_A^c$  existe uma vizinhança  $B(\varepsilon, y)$  com  $\pi^{-1}(B(\varepsilon, y)) = \bigcup U_i$ , onde  $\pi : U_i \rightarrow B(\varepsilon, y)$  é um difeomorfismo. A injetividade segue da Proposição 2.5.2.

Agora veja que  $\pi$  é Lipschitz, pois  $\|\pi(x) - \pi(y)\| \leq \|x - y\| \leq d_{\tilde{W}_c}(x, y)$ . Vamos então mostrar que  $\pi^{-1}$  também é Lipschitz. Da Equação 4.3 seja  $L = \frac{1}{\beta}$  tal que  $\|d\pi^{-1}(y)(v)\| \leq L\|v\|$  para qualquer  $y \in \tilde{W}_f^c(z)$  e  $v \in T_y \tilde{W}_f^c(z)$ . Seja  $[x, y]$  o segmento de reta em  $\tilde{E}_A^c$  ligando  $x$  a  $y$ , assim o conjunto  $\pi^{-1}([x, y]) = \gamma$  é uma curva suave que liga os pontos  $\pi^{-1}(x)$  e  $\pi^{-1}(y)$  em  $\tilde{W}_f^c(z)$ . Assim

$$d_{\tilde{W}_c}(\pi^{-1}(x), \pi^{-1}(y)) \leq \text{comp}(\gamma) = \int_{[x, y]} |d\pi^{-1}(t)| dt \leq L\|x - y\|.$$

□

Como  $E_A^c = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_{d_c}$  onde cada  $E_i$  é unidimensional, suponha que os lados do  $d_c$ -cubo  $R$  estão nos subespaços  $E_i$ .

A afirmação abaixo é uma adaptação de um resultado de (MICENA, 2011, p. 62-64) que aparecem também em (MICENA; TAHZIBI, 2013, Lema 3.6), (MICENA; TAHZIBI, 2014, Lema 4.7) e (MICENA, 2015, Lema 2.4).

**Afirmção 2:** Sejam  $x = (x_1, \dots, x_j, \dots, x_{d_c})$  e  $y = (x_1, \dots, y_j, \dots, x_{d_c})$  com  $x, y \in \partial R$ , então dados  $n$  e  $\varepsilon > 0$ , existe  $M > 0$  tal que se  $\|x - y\| > M$ ,

$$(1 - \varepsilon)e^{n\lambda_i^c(A)} \|\pi^{-1}(x) - \pi^{-1}(y)\| \leq \|\tilde{A}^n \pi^{-1}(x) - \tilde{A}^n \pi^{-1}(y)\| \leq (1 + \varepsilon)e^{n\lambda_i^c(A)} \|\pi^{-1}(x) - \pi^{-1}(y)\|$$

para  $i = 1, 2, \dots, d_c$ .

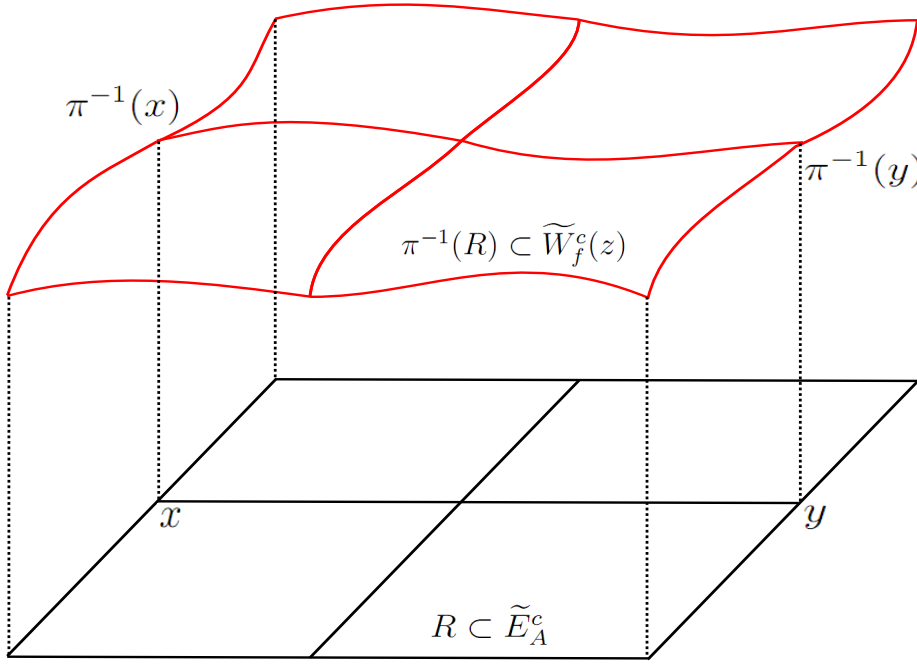


Figura 2

*Demonstração da Afirmção 2.* Seja  $\tilde{E}_i^c(A)$  o autoespaço correspondente a  $\lambda_i^c(A)$  e denote por  $\mu := e^{\lambda_i^c(A)}$ , que é autovalor de  $\tilde{A}$  na direção  $\tilde{E}_i^c(A)$ . Pelo Corolário 2.6.1 temos

$$\frac{\pi^{-1}(x) - \pi^{-1}(y)}{\|\pi^{-1}(x) - \pi^{-1}(y)\|} = v_i + e_M$$

onde  $v_i$  é o autovetor unitário de  $\tilde{A}$  na direção  $\tilde{E}_i^c(A)$  e  $e_M$  é um vetor correção que pelo Corolário 2.6.1 converge uniformemente para zero quando  $M$  vai para o infinito. Segue que

$$\tilde{A}^n \left( \frac{\pi^{-1}(x) - \pi^{-1}(y)}{\|\pi^{-1}(x) - \pi^{-1}(y)\|} \right) = \mu^n v_i + \tilde{A}^n e_M = \mu^n \left( \frac{\pi^{-1}(x) - \pi^{-1}(y)}{\|\pi^{-1}(x) - \pi^{-1}(y)\|} \right) - \mu^n e_M + \tilde{A}^n e_M$$

implica que

$$\frac{\|\tilde{A}^n(\pi^{-1}(x) - \pi^{-1}(y))\|}{\|\pi^{-1}(x) - \pi^{-1}(y)\|} = \left\| \mu^n \left( \frac{\pi^{-1}(x) - \pi^{-1}(y)}{\|\pi^{-1}(x) - \pi^{-1}(y)\|} \right) - \mu^n e_M + \tilde{A}^n e_M \right\|$$

portanto

$$\begin{aligned} \|\pi^{-1}(x) - \pi^{-1}(y)\| (\mu^n - \mu^n \|e_M\| - \|\tilde{A}^n\| \|e_M\|) &\leq \|\tilde{A}^n(\pi^{-1}(x) - \pi^{-1}(y))\| \\ &\leq \|\pi^{-1}(x) - \pi^{-1}(y)\| (\mu^n + \mu^n \|e_M\| + \|\tilde{A}^n\| \|e_M\|) \end{aligned}$$

Como  $n$  é fixo e  $\|e_M\| \rightarrow 0$  quando  $M \rightarrow \infty$ , podemos escolher  $M$  suficientemente grande tal que

$$\mu^n \|e_M\| + \|\tilde{A}^n\| \|e_M\| \leq \varepsilon \mu^n$$

concluimos então que

$$(1 - \varepsilon) e^{n\lambda_i^c(A)} \|\pi^{-1}(x) - \pi^{-1}(y)\| \leq \|\tilde{A}^n \pi^{-1}(x) - \tilde{A}^n \pi^{-1}(y)\| \leq (1 + \varepsilon) e^{n\lambda_i^c(A)} \|\pi^{-1}(x) - \pi^{-1}(y)\|.$$

□

**Afirmção 3:** Sejam  $x$  e  $y$  como na Afirmção 2, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $M > 0$  tal que se  $\|x - y\| > M$

$$(1 - \varepsilon)^{2n} e^{n\lambda_i^c(A)} \|\pi^{-1}(x) - \pi^{-1}(y)\| \leq d_{\tilde{W}^c}(\tilde{f}^n \pi^{-1}(x), \tilde{f}^n \pi^{-1}(y)) \leq Q(1 + \varepsilon)^{2n} e^{n\lambda_i^c(A)} \|\pi^{-1}(x) - \pi^{-1}(y)\|$$

para todo  $n \geq 1$ .

*Demonstração.* Vamos fazer a prova em duas etapas:

$$(I) \text{ Vamos mostrar que } d_{\tilde{W}^c}(\tilde{f}^n \pi^{-1}(x), \tilde{f}^n \pi^{-1}(y)) \leq Q(1 + \varepsilon)^{2n} e^{n\lambda_i^c(A)} \|\pi^{-1}(x) - \pi^{-1}(y)\|.$$

Vamos fazer a prova por indução, fixe  $n = 1$  e  $\varepsilon > 0$  da Proposição 2.6.1 escolha  $C$  tal que  $1 - \varepsilon \leq C^{-1} \leq 1 \leq C \leq 1 + \varepsilon$  e escolha  $M > 0$  suficientemente grande. Da Afirmção 2 temos que

$$\|\tilde{A}\pi^{-1}(x) - \tilde{A}\pi^{-1}(y)\| \leq (1 + \varepsilon) e^{\lambda_i^c(A)} \|\pi^{-1}(x) - \pi^{-1}(y)\|.$$

Pela quase isometria de  $\tilde{W}_f^c$  e Proposição 2.6.1 segue que

$$\begin{aligned} d_{\tilde{W}^c}(\tilde{f}\pi^{-1}(x), \tilde{f}\pi^{-1}(y)) &\leq Q \|\tilde{f}\pi^{-1}(x) - \tilde{f}\pi^{-1}(y)\| \\ &\leq Q(1 + \varepsilon) \|\tilde{A}\pi^{-1}(x) - \tilde{A}\pi^{-1}(y)\| \\ &\leq Q(1 + \varepsilon)^2 e^{\lambda_i^c(A)} \|\pi^{-1}(x) - \pi^{-1}(y)\|. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Agora vamos assumir que vale para  $n$ , isto é,

$$d_{\tilde{W}^c}(\tilde{f}^n \pi^{-1}(x), \tilde{f}^n \pi^{-1}(y)) \leq Q(1 + \varepsilon)^{2n} e^{n\lambda_i^c(A)} \|\pi^{-1}(x) - \pi^{-1}(y)\|$$

e provar para  $n + 1$ . Mas antes é importante notar que  $\|\tilde{f}\pi^{-1}(x) - \tilde{f}\pi^{-1}(y)\| > M$ . De fato, pela Proposição 2.6.1 e Afirmção 2 segue que

$$\|\tilde{f}\pi^{-1}(x) - \tilde{f}\pi^{-1}(y)\| \geq (1 + \varepsilon)^{-1} \|\tilde{A}\pi^{-1}(x) - \tilde{A}\pi^{-1}(y)\| \geq (1 + \varepsilon)^{-1} (1 - \varepsilon) e^{\lambda_i^c(A)} \|\pi^{-1}(x) - \pi^{-1}(y)\|,$$

como  $\lambda_i^c(A) > 0$ , se  $\varepsilon$  é suficientemente pequeno  $\|\tilde{f}\pi^{-1}(x) - \tilde{f}\pi^{-1}(y)\| \geq \|\pi^{-1}(x) - \pi^{-1}(y)\| > M$ .

Agora, pela hipótese de indução e Equação 4.4

$$\begin{aligned} d_{\tilde{W}^c}(\tilde{f}^{n+1} \pi^{-1}(x), \tilde{f}^{n+1} \pi^{-1}(y)) &\leq (1 + \varepsilon)^{2n} e^{n\lambda_i^c(A)} Q \|\tilde{f}\pi^{-1}(x) - \tilde{f}\pi^{-1}(y)\| \\ &\leq Q(1 + \varepsilon)^{2(n+1)} e^{(n+1)\lambda_i^c(A)} \|\pi^{-1}(x) - \pi^{-1}(y)\|. \end{aligned}$$

(II) Mostraremos que  $d_{\tilde{W}^c}(\tilde{f}^n \pi^{-1}(x), \tilde{f}^n \pi^{-1}(y)) \geq (1 + \varepsilon)^{2n} e^{n\lambda_i^c(A)} \|\pi^{-1}(x) - \pi^{-1}(y)\|$ .

Novamente vamos fazer a prova por indução, fixe  $n = 1$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $C$  e  $M$  como no Item (I). Da Afirmação 2 temos que

$$\|\tilde{A}\pi^{-1}(x) - \tilde{A}\pi^{-1}(y)\| \geq (1 - \varepsilon)e^{\lambda_i(A)^c} \|\pi^{-1}(x) - \pi^{-1}(y)\|.$$

Pela Proposição 2.6.1 segue que

$$\begin{aligned} d_{\tilde{W}^c}(\tilde{f}\pi^{-1}(x), \tilde{f}\pi^{-1}(y)) &\geq \|\tilde{f}\pi^{-1}(x) - \tilde{f}\pi^{-1}(y)\| \\ &\geq (1 - \varepsilon)\|\tilde{A}\pi^{-1}(x) - \tilde{A}\pi^{-1}(y)\| \\ &\geq (1 - \varepsilon)^2 e^{\lambda_i^c(A)} \|\pi^{-1}(x) - \pi^{-1}(y)\|. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Agora vamos assumir que vale para  $n$ , isto é,

$$d_{\tilde{W}^c}(\tilde{f}^n \pi^{-1}(x), \tilde{f}^n \pi^{-1}(y)) \geq (1 - \varepsilon)^{2n} e^{n\lambda_i^c(A)} \|\pi^{-1}(x) - \pi^{-1}(y)\|$$

e provar para  $n + 1$ . Lembrando do Item (I) que  $\|\tilde{f}\pi^{-1}(x) - \tilde{f}\pi^{-1}(y)\| > M$ . Pela hipótese de indução e Equação 4.5

$$\begin{aligned} d_{\tilde{W}^c}(\tilde{f}^{n+1} \pi^{-1}(x), \tilde{f}^{n+1} \pi^{-1}(y)) &\geq (1 - \varepsilon)^{2n} e^{n\lambda_i^c(A)} \|\tilde{f}\pi^{-1}(x) - \tilde{f}\pi^{-1}(y)\| \\ &\geq (1 - \varepsilon)^{2(n+1)} e^{(n+1)\lambda_i^c(A)} \|\pi^{-1}(x) - \pi^{-1}(y)\|. \end{aligned}$$

□

Finalizando a prova da proposição, denotaremos por  $(Q(1 + \varepsilon)^{2n} e^{n\lambda_i^c(A)})_{i=1}^{d_c} R$  uma homotetia do cubo  $R$  em cada  $i$ -coordenada pelo fator  $Q(1 + \varepsilon)^{2n} e^{n\lambda_i^c(A)}$ . A menos de fazermos uma translação do cubo  $R$ , a Afirmação 3 implica que  $\tilde{f}^n \pi^{-1}(R) \subset \pi^{-1}((Q(1 + \varepsilon)^{2n} e^{n\lambda_i^c(A)})_{i=1}^{d_c} R)$ . Assim pelo Lema 4.2.2 segue que

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\tilde{f}^n \pi^{-1}(R)) &\leq \text{Vol}(\pi^{-1}((Q(1 + \varepsilon)^{2n} e^{n\lambda_i^c(A)})_{i=1}^{d_c} R)) = \int_{(Q(1+\varepsilon)^{2n} e^{n\lambda_i^c(A)})_{i=1}^{d_c} R} \text{Jac} \pi^{-1} d\text{Vol}(x) \\ &\leq K \text{Vol}((Q(1 + \varepsilon)^{2n} e^{n\lambda_i^c(A)})_{i=1}^{d_c} R) = K Q^{d_c} (1 + \varepsilon)^{d_c + 2n} e^{n \sum_i \lambda_i^c(A)} \text{Vol}(R). \end{aligned}$$

Fazendo  $C_1 = K[Q(1 + \varepsilon)]^{d_c}$  ficamos com  $\text{Vol}(\tilde{f}^n \pi^{-1}(R)) \leq C_1 (1 + \varepsilon)^{2n} e^{n \sum_i \lambda_i^c(A)} \text{Vol}(R)$ .

Analogamente usando a outra desigualdade da Afirmação 3, existe  $C_0$  tal que  $\text{Vol}(\tilde{f}^n \pi^{-1}(R)) \geq C_0 (1 - \varepsilon)^{2n} e^{n \sum_i \lambda_i^c(A)} \text{Vol}(R)$ , finalizando a prova da Proposição 4.2.1. □

*Demonstração do Teorema 4.0.3.* Suponha, por absurdo, que exista um conjunto  $Z \in \mathbb{T}^d$  com volume positivo tal que  $\sum_i \lambda_i^c(f, x) > \sum_i \lambda_i^c(A)$  para todo  $x \in Z$ .

Seja  $P : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$  a aplicação de recobrimento,  $D \subset \mathbb{R}^d$  um domínio fundamental e  $\tilde{Z} = P^{-1}(Z) \cap D$ . Como a aplicação de recobrimento é absolutamente contínua,  $\text{Vol}(\tilde{Z}) > 0$ . Usando o Lema 2.3.1 segue que  $\sum_i \lambda_i^c(\tilde{f}, x) > \sum_i \lambda_i^c(A)$  para todo  $x \in \tilde{Z}$ .

Para  $q \in \mathbb{N} - \{0\}$  definimos o conjunto

$$Z_q = \left\{ x \in \tilde{Z}; \sum_i \lambda_i^c(\tilde{f}, x) > \sum_i \lambda_i^c(A) + \log \left( 1 + \frac{1}{q} \right) \right\},$$

claramente  $\bigcup_{q=1}^{\infty} Z_q = \tilde{Z}$ , logo existe  $q$  tal que  $m(Z_q) > 0$ . Para cada  $x \in Z_q$  segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\text{Jac} \tilde{f}^n(x)|_{\tilde{E}^c} > \sum_i \lambda_i^c(A) + \log \left( 1 + \frac{1}{q} \right).$$

Assim existe  $n_0$  tal que para  $n \geq n_0$  temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \log |\text{Jac} \tilde{f}^n(x)|_{\tilde{E}^c} &> \sum_i \lambda_i^c(A) + \log \left( 1 + \frac{1}{q} \right) \\ &> \frac{1}{n} \log e^{n \sum_i \lambda_i^c(A)} + \frac{1}{n} \log \left( 1 + \frac{1}{q} \right)^n, \end{aligned}$$

implica que

$$|\text{Jac} \tilde{f}^n(x)|_{\tilde{E}^c} > \left( 1 + \frac{1}{q} \right)^n e^{n \sum_i \lambda_i^c(A)}.$$

Mediante esse fato, para cada  $n > 0$  definimos o conjunto

$$Z_{q,n} = \left\{ x \in Z_q; |\text{Jac} \tilde{f}^k(x)|_{\tilde{E}^c} > \left( 1 + \frac{1}{q} \right)^k e^{k \sum_i \lambda_i^c(A)}, \forall k \geq n \right\}.$$

Existe  $N > 0$  com  $m(Z_{q,N}) > 0$ .

Agora para cada  $x \in D$ , seja  $B_x$  uma caixa folheada de  $\tilde{W}_f^c$ . Podemos tomar uma cobertura finita  $\{B_{x_i}\}_{i=1}^j$  cobrindo  $\bar{D}$ . Como  $\tilde{W}_f^c$  é absolutamente contínua existe algum  $i$  e  $p \in B_{x_i}$  tal que  $\text{Vol}(B_{x_i} \cap \tilde{W}_f^c(p) \cap Z_{q,N}) > 0$ .

Existe um conjunto  $\pi^{-1}(R) \subset \tilde{W}_f^c(p)$ , onde  $\pi^{-1}(R)$  é como na Proposição 4.2.1 contendo  $p$  e o lado do cubo  $R$  é suficientemente grande tal que  $\text{Vol}(\pi^{-1}(R) \cap Z_{q,N}) > 0$ . Seja  $\alpha > 0$  tal que  $\text{Vol}(\pi^{-1}(R) \cap Z_{q,N}) = \alpha \text{Vol}(\pi^{-1}(R))$ , pela Proposição 4.2.1 temos que

$$\text{Vol}(\tilde{f}^n(\pi^{-1}(R))) \leq C_0(1 + \varepsilon)^{2n} e^{n \sum_i \lambda_i^c(A)} \text{Vol}(R). \quad (4.6)$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\tilde{f}^n(\pi^{-1}(R))) &= \int_{\pi^{-1}(R)} |\text{Jac} \tilde{f}^n(x)|_{\tilde{E}^c} d\text{Vol} \\ &\geq \int_{\pi^{-1}(R) \cap Z_{q,N}} |\text{Jac} \tilde{f}^n(x)|_{\tilde{E}^c} d\text{Vol} \\ &> \int_{\pi^{-1}(R) \cap Z_{q,N}} \left( 1 + \frac{1}{q} \right)^n e^{n \sum_i \lambda_i^c(A)} d\text{Vol} \\ &> \left( 1 + \frac{1}{q} \right)^n e^{n \sum_i \lambda_i^c(A)} \text{Vol}(\pi^{-1}(R) \cap Z_{q,N}) \\ &> \left( 1 + \frac{1}{q} \right)^n e^{n \sum_i \lambda_i^c(A)} \alpha \text{Vol}(\pi^{-1}(R)) \\ &> \left( 1 + \frac{1}{q} \right)^n e^{n \sum_i \lambda_i^c(A)} \alpha \text{Vol}(R). \end{aligned} \quad (4.7)$$

As equações 4.6 e 4.7 nos dão uma contradição quando  $n$  é suficientemente grande, finalizando a prova do Teorema 4.0.3. □



## FOLHEAÇÕES PATOLÓGICAS

Os resultados enunciados neste capítulo são em conjunto com F. Micena.

Usando o Teorema 4.0.3 e a perturbação de Baraviera-Bonatti, Proposição 5.1.1, facilmente podemos construir conjuntos abertos de difeomorfismos parcialmente hiperbólicos próximos de Anosov linear com folheação central não absolutamente contínua de dimensão qualquer.

*Exemplo 5.0.1.* Seja  $A : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$  um automorfismo Anosov linear induzido por uma matriz diagonalizável de  $\mathbb{R}^d$  com decomposição  $E^s \oplus E^{wu} \oplus E^u$ , onde  $E^{wu}$  denota a direção instável fraca. Como o conjunto dos difeomorfismos de Anosov é aberto, usando a Proposição 5.1.1 seja  $f$  um Anosov  $C^2$  conservativo, arbitrariamente próximo de  $A$  satisfazendo as condições (1), (2) e (3) do Teorema 4.0.3 tal que

$$\int_{\mathbb{T}^d} \log(\text{Jac}^c f(x)) dm > \int_{\mathbb{T}^d} \log(\text{Jac}^c A(x)) dm = \sum_i \lambda_i^c(A),$$

pela ergodicidade de  $f$  e Equação 2.1 temos,

$$\sum_i \lambda_i^c(f, x) = \int_{\mathbb{T}^d} \log(\text{Jac}^c f(x)) dm > \sum_i \lambda_i^c(A),$$

logo pelo Teorema 4.0.3 a folheação  $W_f^c$  não é absolutamente contínua e o mesmo vale para todo difeomorfismo  $C^2$  conservativo próximo de  $f$ .

Abaixo exibimos uma classe aberta no mundo conservativo de difeomorfismos parcialmente hiperbólicos em  $\mathbb{T}^4$  que estão longe de Anosov com folheação central bidimensional não compactas e não absolutamente contínua.

**Teorema 5.0.1.** *Existe um difeomorfismo DA  $f : \mathbb{T}^4 \rightarrow \mathbb{T}^4$  preservando volume com folheação central bidimensional não compacta tal que a desintegração do volume na folheação central não é nem Lebesgue e nem atômica.*

Denotaremos por  $DA_m^r(\mathbb{T}^d)$  o conjunto de todos os difeomorfismos DA de  $\mathbb{T}^d$  que preservam volume  $m$  e  $\mathcal{A}(\mathbb{T}^d)$  o conjunto de todos os difeomorfismos Anosov de  $\mathbb{T}^d$ .

**Teorema 5.0.2.** *Existe um conjunto  $C^1$ -aberto  $\mathcal{U} \subset DA_m^r(\mathbb{T}^4) \setminus \overline{\mathcal{A}(\mathbb{T}^4)}$ , com  $r \geq 2$ , tal que cada  $f \in \mathcal{U}$  é dinamicamente coerente com  $\dim E_f^c = 2$ , tem a mesma linearização  $A$ , satisfazendo as hipóteses (1), (2) e (3) do Teorema 4.0.3 e  $\lambda_1^c(f, x) + \lambda_2^c(f, x) > \lambda_1^c(A) + \lambda_2^c(A)$ , para  $m$ -q.t.p.  $x \in \mathbb{T}^4$ . Em particular,  $W_f^c$  não é absolutamente contínua para cada  $f \in \mathcal{U}$ .*

Este resultado está relacionado com um resultado de (SAGHIN; XIA, 2009), que mostra a existência de conjuntos abertos em  $PH_m^r(\mathbb{T}^d)$  de difeomorfismos próximos a um automorfismo linear com folheação central unidimensional não absolutamente contínua. O Teorema 3.2.1 mostra um conjunto aberto em  $PH_m^r(\mathbb{T}^3)$  de difeomorfismos longe de Anosov linear com folheação central unidimensional não absolutamente contínua. Nosso resultado é uma versão generalizada do Teorema 3.2.1.

## 5.1 Prova do Teorema 5.0.1

Para a construção vamos precisar dos seguintes resultados.

**Proposição 5.1.1.** (BARAVIERA; BONATTI, 2003) *Seja  $(M, m)$  uma variedade compacta com uma forma volume  $C^r$ ,  $r \geq 2$ . Seja  $f$  um difeomorfismo  $C^1$  preservando a medida  $m$ , admitindo uma decomposição parcialmente hiperbólica  $TM = E^s \oplus E^c \oplus E^u$ . Então existe uma perturbação  $g$ , que é  $C^1$ -arbitrariamente próxima de  $f$  tal que*

$$\int_M \log(\text{Jac}^c g(x)) dm > \int_M \log(\text{Jac}^c f(x)) dm,$$

onde  $\text{Jac}^c f(x)$  é o valor absoluto do determinante  $Df$  restrito a  $E_f^c(x)$ .

*Observação 5.1.1.* Se  $f$  é  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , na Proposição 5.1.1 acima, a perturbação  $g$  pode ser tomada também  $C^r$ .

**Teorema 5.1.1.** (FISHER; POTRIE; SAMBARINO, 2014) *Se  $f : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$  é um difeomorfismo parcialmente hiperbólico isotópico a um Anosov linear ao longo de um caminho de difeomorfismos parcialmente hiperbólicos, então  $f$  é dinamicamente coerente. Além disso, para cada  $x \in \mathbb{T}^d$ ,  $W_f^c(x) = h^{-1}(W_A^c(h(x)))$ , onde  $h$  é a semi conjugação entre  $f$  e  $A$ .*

*Demonstração do Teorema 5.0.1.* Vamos construir um DA satisfazendo o Teorema, para isso começaremos com um Anosov linear de  $\mathbb{T}^4$  induzido pela matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & -19 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix},$$

cujo polinômio característico é  $p(t) = t^4 - 8t^3 + 19t^2 - 14t + 1$  e seus autovalores são aproximadamente  $\beta^s = 0,08$ ;  $\beta_1^c = 1,2$ ;  $\beta_2^c = 2,3$  e  $\beta^u = 4,3$

Usando a construção de Baraviera-Bonatti e a estabilidade estrutural do Anosov  $A$ , seja  $f = \phi^{cu} \circ A$ , onde  $\phi^{cu}$  é um difeomorfismo que preserva volume mantendo  $E_A^s$  sem alterações, tal que  $f$  é um Anosov  $C^2$  conservativo, conjugado a  $A$  e arbitrariamente próximo de  $A$  satisfazendo as condições (1), (2) e (3) do Teorema 4.0.3 e

$$\int_{\mathbb{T}^4} \log(\text{Jac}^c f(x)) dm > \int_{\mathbb{T}^4} \log(\text{Jac}^c A(x)) dm = \lambda_1^c(A) + \lambda_2^c(A),$$

pela ergodicidade de  $f$  e Equação 2.1 temos,

$$\lambda_1^c(f) + \lambda_2^c(f) = \int_{\mathbb{T}^4} \log(\text{Jac}^c f(x)) dm > \lambda_1^c(A) + \lambda_2^c(A),$$

logo pelo Teorema 4.0.3 a folheação  $W_f^c$  não é absolutamente contínua. Podemos tomar  $f$  de forma que  $\lambda_1^c(f), \lambda_2^c(f) > 0$ , como a construção de Baraviera-Bonatti não afeta a direção  $E^s$  segue usando a fórmula de Pesin que

$$h_m(f) = h_m(f^{-1}) = -\lambda^s(f) = -\lambda^s(A) = h_{\text{Top}}(A) = h_{\text{Top}}(f),$$

logo o volume  $m$  é uma medida de máxima entropia de  $f$ . Seja  $h$  a conjugação entre  $f$  e  $A$ , então  $h_*m$  também é uma medida de máxima entropia de  $A$ , por unicidade  $h_*m = m$ , ou seja,  $h$  preserva volume.

Pelo Teorema 5.1.1,  $W_f^c(x) = h^{-1}(W_A^c(h(x)))$ , assim a desintegração do volume  $m$  em  $W_f^c$  induz uma desintegração de  $m = h_*m$  em  $W_A^c$ . A desintegração do volume em  $W_f^c$  não é Lebesgue, pois como vimos acima,  $W_f^c$  não é absolutamente contínua, por outro lado, também não é atômica, pois a desintegração do volume em  $W_A^c$  é Lebesgue.  $\square$

## 5.2 Demonstração do Teorema 5.0.2

Antes de iniciarmos a demonstração vamos dar os passos principais da prova.

1. Partiremos com aplicações Anosov lineares  $A_n : \mathbb{T}^4 \rightarrow \mathbb{T}^4$  com decomposição do tipo  $TM = E^s \oplus E^{wu} \oplus E^u$ , onde  $\dim(E^{wu}) = 2$ . Modificaremos  $A_n$ , usando o resultado de (BARAVIERA; BONATTI, 2003), Proposição 5.1.1, para um difeomorfismo Anosov  $g_n$  de forma que  $\int_{\mathbb{T}^4} \log(\text{Jac} g_n|_{E_{g_n}^c}) dm > \int_{\mathbb{T}^4} \log(\text{Jac} A_n|_{E_{A_n}^c}) dm$ .
2. Usando a técnica de um conhecido lema de perturbação, o Lema de Franks, modificaremos  $g_n$  para um difeomorfismo  $g_{n,j}$  de maneira que  $g_{n,j}$  fique fora do conjunto  $\mathcal{A}(\mathbb{T}^4)$ .
3. Como terceiro passo, vamos fazer uma perturbação de  $g_{n,j}$  para um difeomorfismo  $f$  de forma que  $f$  fique fora do fecho de  $\mathcal{A}(\mathbb{T}^4)$  e além disso  $f$  seja ergódica. Para isso usaremos um resultado de (HERTZ; HERTZ; URES, 2008), Teorema 5.2.1.

4. Usando a inequação obtida no Passo 1, a ergodicidade de  $f$  e o Teorema 4.0.3, mostraremos que a folheação central bidimensional de  $f$  não é absolutamente contínua e o mesmo é válido para um aberto  $\mathcal{U} \subset DA_n^r(\mathbb{T}^4) \setminus \overline{\mathcal{A}(\mathbb{T}^4)}$  contendo  $f$ .

Iniciando a demonstração, para cada  $n \geq 1$ , considere  $A_n : \mathbb{T}^4 \rightarrow \mathbb{T}^4$  o automorfismo Anosov linear induzido pela matriz

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3n+2 & -4n-3 & n+4 \end{bmatrix}.$$

Denotaremos por  $p_n(t)$  o polinômio característico de  $A_n$ , assim

$$p_n(t) = t^4 - (n+4)t^3 + (4n+3)t^2 - (3n+2)t + 1.$$

**Proposição 5.2.1.** *Para  $n$  suficientemente grande a matriz  $A_n$  tem quatro autovalores*

$0 < \beta_n^s < 1 < \beta_{1,n}^c < \beta_{2,n}^c < \beta_n^u$ , tais que

$$\frac{\beta_n^u}{n} \rightarrow 1, \quad \beta_{1,n}^c \rightarrow 1^+, \quad \beta_{2,n}^c \rightarrow 3^- \quad e \quad 3n \cdot \beta_n^s \rightarrow 1.$$

*Demonstração.* Temos  $p_n(n) = 1 - 2n$  e  $p_n(n+1) = n^3 - n^2 - 4n - 1$ , para  $n$  suficientemente grande  $p_n(n) < 0$  e  $p_n(n+1) > 0$ , logo  $p_n$  tem uma raiz  $\beta_n^u \in (n, n+1)$  e  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\beta_n^u}{n} = 1$ .

Fixe  $0 < \varepsilon < 1$  um número arbitrariamente pequeno, segue então que  $p_n(1) = -1$  e  $p_n(1+\varepsilon) = (2+\varepsilon-\varepsilon^2)\varepsilon n + \varepsilon^4 - 3\varepsilon^2 - 4\varepsilon - 1$ , se  $\varepsilon$  é pequeno e  $n$  é muito grande  $p_n(1+\varepsilon) > 0$ , então  $p_n$  tem uma raiz  $\beta_{1,n}^c \in (1, 1+\varepsilon)$ .

Novamente fixando  $0 < \varepsilon < 1$  um número arbitrariamente pequeno, temos  $p_n(3) = -5$  e  $p_n(3-\varepsilon) = (6-5\varepsilon+\varepsilon^2)\varepsilon n - 16\varepsilon + 21\varepsilon^2 - 8\varepsilon^3 + \varepsilon^4 - 5$ , se  $\varepsilon$  é muito pequeno e  $n$  é muito grande  $p_n(3-\varepsilon) > 0$ , assim  $p_n$  tem uma raiz  $\beta_{2,n}^c \in (3-\varepsilon, 3)$ .

Como  $p_n$  tem quatro raízes reais tal que  $\beta_n^u \cdot \beta_{1,n}^c \cdot \beta_{2,n}^c \cdot \beta_n^s = 1$ , segue que

$$\beta_n^s = \frac{1}{\beta_n^u \cdot \beta_{1,n}^c \cdot \beta_{2,n}^c}.$$

Como  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \frac{n}{\beta_n^u} \cdot \frac{1}{\beta_{1,n}^c} \cdot \frac{3}{\beta_{2,n}^c} \right] = 1$ , então  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3n\beta_n^s = 1$ . □

Denotaremos  $\beta_{1,n}^c = 1 + \alpha_n$ , tal que  $\alpha_n \rightarrow 0^+$ .

**Lema 5.2.1.** *Sejam  $v_n^u, v_{1,n}^c, v_{2,n}^c$  e  $v_n^s$  os correspondentes autovetores unitários dos autovalores  $\beta_n^u, \beta_{1,n}^c, \beta_{2,n}^c$  e  $\beta_n^s$ , respectivamente. Existem vetores  $v^u, v_1^c, v_2^c$  e  $v^s$  tal que*

$$v_n^u \rightarrow v^u, \quad v_{1,n}^c \rightarrow v_1^c, \quad v_{2,n}^c \rightarrow v_2^c, \quad v_n^s \rightarrow v^s.$$

Além disso o conjunto  $\mathcal{B} = \{v^u, v_1^c, v_2^c, v^s\}$  é uma base de  $\mathbb{R}^4$ .

*Demonstração.* Os vetores

$w_n^s = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta_n^s \\ (\beta_n^s)^2 \\ (\beta_n^s)^3 \end{pmatrix}$ ,  $w_{1,n}^c = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta_{1,n}^c \\ (\beta_{1,n}^c)^2 \\ (\beta_{1,n}^c)^3 \end{pmatrix}$ ,  $w_{2,n}^c = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta_{2,n}^c \\ (\beta_{2,n}^c)^2 \\ (\beta_{2,n}^c)^3 \end{pmatrix}$  e  $w_n^u = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta_n^u \\ (\beta_n^u)^2 \\ (\beta_n^u)^3 \end{pmatrix}$  são autovetores de  $A_n$  associados aos respectivos autovalores  $\beta_n^s$ ,  $\beta_{1,n}^c$ ,  $\beta_{2,n}^c$  e  $\beta_n^u$ . Assim fazendo  $n \rightarrow \infty$ , segue que

$$\begin{aligned} w_n^s &= \begin{pmatrix} 1 \\ \beta_n^s \\ (\beta_n^s)^2 \\ (\beta_n^s)^3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & w_{1,n}^c &= \begin{pmatrix} 1 \\ \beta_{1,n}^c \\ (\beta_{1,n}^c)^2 \\ (\beta_{1,n}^c)^3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ w_{2,n}^c &= \begin{pmatrix} 1 \\ \beta_{2,n}^c \\ (\beta_{2,n}^c)^2 \\ (\beta_{2,n}^c)^3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \\ 27 \end{pmatrix} & \text{e } \frac{1}{n^3} w_n^u &= \begin{pmatrix} 1/n^3 \\ \beta_n^u/n^3 \\ (\beta_n^u)^2/n^3 \\ (\beta_n^u)^3/n^3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

que são vetores L.I. □

Agora denote por  $H_n^u = \langle v_n^u \rangle$ ,  $H_{1,n}^c = \langle v_{1,n}^c \rangle$ ,  $H_{2,n}^c = \langle v_{2,n}^c \rangle$  e  $H_n^s = \langle v_n^s \rangle$ . Podemos ver  $A_n : \mathbb{T}^4 \rightarrow \mathbb{T}^4$  com duas decomposições parcialmente hiperbólicas.

$$TM = F_n^u \oplus F_n^c \oplus F_n^s, \quad (5.1)$$

onde  $F_n^u = H_n^u \oplus H_{2,n}^c$ ,  $F_n^c = H_{1,n}^c$  e  $F_n^s = H_n^s$  e

$$TM = E_n^u \oplus E_n^c \oplus E_n^s, \quad (5.2)$$

onde  $E_n^u = H_n^u$ ,  $E_n^c = H_{1,n}^c \oplus H_{2,n}^c$  e  $E_n^s = H_n^s$ .

*Observação 5.2.1.* A partir de agora, por simplicidade, nós podemos considerar  $v^u = (1, 0, 0, 0)$ ,  $v_2^c = (0, 1, 0, 0)$ ,  $v_1^c = (0, 0, 1, 0)$  e  $v^s = (0, 0, 0, 1)$ .

### 5.2.1 Perturbando $A_n$

Como o conjunto dos difeomorfismos de Anosov é aberto, usando a Proposição 5.1.1 considere  $g_n$  uma  $C^1$ -perturbação pequena de  $A_n$ , de forma que  $g_n$  é um difeomorfismo de Anosov e

$$\int_{\mathbb{T}^4} \log(\text{Jac} g_n | E_{g_n}^c) dm > \int_{\mathbb{T}^4} \log(\text{Jac} A_n | E_{A_n}^c) dm. \quad (5.3)$$

Também pedimos que

$$\|Dg_n(\cdot) | F_{g_n}^c(\cdot)\| < 1 + 2\alpha_n, \|Dg_n(\cdot) | E_{g_n}^c(\cdot)\| < 3 + 3\alpha_n \text{ e } H_n := A_n^{-1} \circ g_n \rightarrow_{C^1} Id. \quad (5.4)$$

Isso é possível pela Proposição 5.1.1, pois podemos escrever  $g_n = A_n \circ H_n$  e  $H_n$  podem ser tomados  $C^1$ -arbitrariamente próximos da identidade.

Por continuidade da decomposição parcialmente hiperbólica, se  $g_n$  é  $C^1$  próxima de  $A_n$  existe uma decomposição invariante parcialmente hiperbólica  $T\mathbb{T}^4 = E_{g_n}^u \oplus E_{g_n}^c \oplus E_{g_n}^s$ , onde  $\dim E_{g_n}^c = 2$ , de forma que  $E_{g_n}^\sigma$  e  $E_n^\sigma$  são próximas para  $\sigma \in \{s, c, u\}$ .

Novamente, por continuidade da decomposição parcialmente hiperbólica, cada  $g_n$  também admite uma decomposição  $T\mathbb{T}^4 = F_{g_n}^u \oplus F_{g_n}^c \oplus F_{g_n}^s$ , próxima de  $F_n^u \oplus F_n^c \oplus F_n^s$  com  $\dim F_{g_n}^u = 2$ .

Agora nós vamos modificar o índice de um ponto fixo de  $g_n$ , para isso usaremos argumentos de um conhecido lema de perturbação de (FRANKS, 1971, Lema 1.1), que nos permite fazer uma perturbação da diferencial de  $g_n$  em uma quantidade finita de pontos. Em (BONATTI; DÍAZ; PUJALS, 2003, Proposição 7.4) mostra que se o difeomorfismo inicial é conservativo então a perturbação pode ser tomada conservativa, também tem uma versão deste resultado em (LIANG; LIU; SUN, 2007, Lema 2.4).

**Lema 5.2.2.** (BONATTI; DÍAZ; PUJALS, 2003) *Para cada  $N \in \mathbb{N}$  e  $\rho > 0$ , existe  $\delta > 0$  e uma vizinhança da identidade  $B(\delta, Id) \subset SL(N, \mathbb{R})$  tal que para cada  $A \in B(\delta, Id)$  existe um  $h \in \text{Diff}_m^r(\mathbb{R}^N)$  satisfazendo as seguintes propriedades:*

- $h$  coincide com a identidade fora de uma bola unitária da origem,
- $h(0) = 0$  e  $Dh(0) = A$ ,
- $\|Dh - Id\| < \rho$ .

Para cada  $n$ , seja  $p_n$  um ponto fixo de  $g_n$  e considere o sistema  $\{V_{n,j}\}_{j=0}^{+\infty}$  de bolas abertas contendo  $p_n$ , que serão construídas posteriormente. Como a perturbação que iremos fazer é local, tomando uma carta local em  $p_n$ , podemos considerar que estamos em  $\mathbb{R}^4$ .

Fixando  $n > 0$ , grande o suficiente, considere as matrizes  $D_n$  satisfazendo:

1.  $D_n$  e  $Dg_n(p_n)$  tem os mesmos autoespaços e os correspondentes autovalores tem os mesmos sinais,
2.  $D_n|_{F_{g_n}^u(p_n)} = Dg_n(p_n)|_{F_{g_n}^u(p_n)}$ ,
3.  $\|D_n|_{F_{g_n}^c(p_n)}\| = 1 - \alpha_n$ ,
4.  $D_n|_{F_{g_n}^s(p_n)}$  é tomado coerente com  $\det(D_n) = \det(Dg_n(p_n))$ .

Como  $g_n$  pode ser tomada  $C^1$ -arbitrariamente próximo de  $A_n$ , nós podemos escolher  $g_n$  tal que  $\angle(F_{g_n}^\sigma(\cdot), F_n^\sigma(\cdot)) \rightarrow 0$  uniformemente em  $\mathbb{T}^4$ , com  $\sigma \in \{s, c, u\}$ . Para cada  $n > 0$  e  $x \in \mathbb{T}^4$  é possível encontrar uma base  $\{w_n^u(x), w_{2,n}^c(x), w_{1,n}^c(x), w_n^s(x)\}$  composta pelos vetores unitários de  $T_x\mathbb{T}^4$  uniformemente próximos de  $\{v_n^u, v_{2,n}^c, v_{1,n}^c, v_n^s\}$ . Pela convergência uniforme, a matriz de mudança de base  $C_n(x)$ , da base  $\mathcal{B}'_n = \{w_n^u(x), w_{2,n}^c(x), w_{1,n}^c(x), w_n^s(x)\}$  para a base canônica é uniformemente próxima da matriz identidade (veja Observação 5.2.1).

A matriz  $D_n$  será uma matriz diagonal na base  $\mathcal{B}'_n$ . Denote por  $\theta_n^u, \theta_{1,n}^c, \theta_{2,n}^c$  e  $\theta_n^s = \frac{1}{\theta_n^u \cdot \theta_{1,n}^c \cdot \theta_{2,n}^c}$ , os quatro autovalores de  $Dg_n(p_n)$ , respectivamente, nas direções da base  $\mathcal{B}'_n$ . Então usando os termos acima na base  $\mathcal{B}'_n$  segue que

$$\begin{aligned} [Dg_n(p_n)]^{-1}D_n &= \begin{bmatrix} \theta_n^u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_{2,n}^c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_{1,n}^c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\theta_n^u \theta_{1,n}^c \theta_{2,n}^c} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \theta_n^u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_{2,n}^c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \alpha_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\theta_n^u \theta_{2,n}^c (1 - \alpha_n)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \alpha_n}{\theta_{1,n}^c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\theta_{1,n}^c}{1 - \alpha_n} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Da Equação 5.4 temos  $1 < \theta_{1,n}^c < 1 + 2\alpha_n$  e assim segue que  $\max \left\{ \left| 1 - \frac{\theta_{1,n}^c}{1 - \alpha_n} \right|, \left| 1 - \frac{1 - \alpha_n}{\theta_{1,n}^c} \right| \right\} < 3,5\alpha_n$ , para grandes valores de  $n$ . Como  $C_n(x)$  é uniformemente próximo da identidade, então na base canônica nós temos

$$\| [Dg_n(p_n)]^{-1} \cdot D_n - Id \| < 4 \cdot \alpha_n, \text{ para grandes valores de } n. \quad (5.5)$$

Assim a norma  $\| [Dg_n(p_n)]^{-1} \cdot D_n - Id \| \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow +\infty$ .

Agora do Lema 5.2.2, fixe  $\sigma > 0$ , que depende somente de  $\delta$ , tal que toda  $h \in \text{Diff}_m^r(\mathbb{R}^4)$  com  $\|h - Id\|_{C^1} \leq \sigma$  é isotópica a identidade. Da Equação 5.5 tome  $n$  de forma que  $4 \cdot \alpha_n$  é pequeno suficiente tal que pelo Lema 5.2.2 existe uma  $h_n \in \text{Diff}_m^r(\mathbb{R}^4)$  satisfazendo:

- $\|h_n - Id\|_{C^1} < \sigma$ ,
- $h_n = Id$  em  $p_n$  e fora de uma bola unitária centrada em  $p_n$ ,
- $Dh_n(p_n) = [Dg_n(p_n)]^{-1} \cdot D_n$ .

Para cada  $j$  suponha que  $V_{n,j} = B(p_n, \varepsilon_j)$  ( $\varepsilon_j$  será definido posteriormente). Definimos  $h_{n,j} \in \text{Diff}_m^r(\mathbb{R}^4)$  por

$$h_{n,j}(x) = \varepsilon_j h_n\left(\frac{x}{\varepsilon_j}\right), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^4, \text{ então}$$

- $\|h_{n,j} - Id\|_{C^1} < \sigma$ ,
- $h_{n,j}(p_n) = p_n$ ,  $h_{n,j} = Id$  fora de  $V_{n,j}$ ,
- $Dh_{n,j}(p_n) = Dh_n(p_n) = [Dg_n(p_n)]^{-1} \cdot D_n$ .

Seja  $g_{n,j} = g_n \circ h_{n,j}$ . Então

$$Dg_{n,j} = Dg_{h_{n,j}(p_n)} \circ Dh_{n,j}(p_n) = Dg_{p_n} \circ [Dg_n(p_n)]^{-1} \circ D_n = D_n.$$

Note que o índice estável de  $g_{n,j}$  em  $p_n$  é diferente do índice estável de  $g_n$  e  $A_n$ .

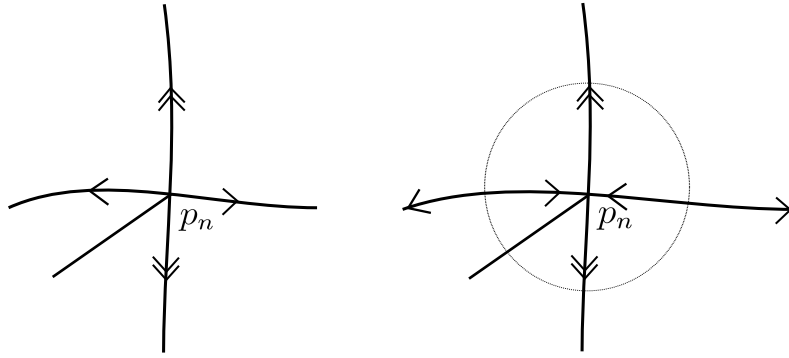


Figura 3 – O ponto fixo  $p_n$  de  $g_n$  e  $g_{n,j}$ , respectivamente

### 5.2.2 A escolha das vizinhanças $\{V_{n,j}\}_{j=0}^{+\infty}$

Fixe  $n > 0$  e  $\varepsilon > 0$  pequeno. Seja  $V_{n,0} = B(p_n, \varepsilon)$  a bola aberta centrada em  $p_n$  com raio  $\varepsilon$ . Como  $p_n$  é um ponto fixo para o difeomorfismo  $g_n$ , a distância entre  $p_n$  e  $g_n^j(\mathbb{T}^4 \setminus V_{n,0})$  é positiva para qualquer  $j \geq 0$ . Defina recursivamente  $\varepsilon_j = (4n)^{-j} \varepsilon_{j-1}$ ,  $j = 1, 2, \dots$  e  $V_{n,j} = B(p_n, \varepsilon_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots$ . Como a constante de Lipschitz de  $g_{n,j}$  e de sua inversa é limitada por  $4n$ , nós temos  $g_{n,j}^k(x) \notin V_{n,j}$  para todo  $x \notin V_{n,j-1}$ ,  $|k| \leq j$  e  $j = 1, 2, \dots$

### 5.2.3 Propriedades das aplicações $g_{n,j}$

**Lema 5.2.3.** Para  $n$  e  $j$  suficientemente grande as aplicações  $g_{n,j}$  são isotópicas a  $A_n$ .

*Demonstração.* Segue diretamente do fato que  $g_{n,j} = g_n \circ h_{n,j} = A_n \circ H_n \circ h_{n,j}$  e  $H_n \circ h_{n,j}$  pode ser tomada  $C^1$ -arbitrariamente próxima da identidade.  $\square$

**Lema 5.2.4.** Para grandes valores de  $n$  as aplicações  $g_{n,j}$  são parcialmente hiperbólicas (absoluto) e existem duas decomposições  $F_{g_{n,j}}^u \oplus F_{g_{n,j}}^c \oplus F_{g_{n,j}}^s$  e  $E_{g_{n,j}}^u \oplus E_{g_{n,j}}^c \oplus E_{g_{n,j}}^s$  com

1.  $E_{g_{n,j}}^\sigma(x) \rightarrow E_{g_n}^\sigma(x)$ ,  $\sigma \in \{s, c, u\}$ , quando  $j \rightarrow +\infty$ ,
2.  $F_{g_{n,j}}^\sigma(x) \rightarrow F_{g_n}^\sigma(x)$ ,  $\sigma \in \{s, c, u\}$ , quando  $j \rightarrow +\infty$ .

*Demonstração.* As decomposições parcialmente hiperbólicas seguem do Lema A.0.1, de fato para ambas as decomposições,  $\varepsilon$  (que depende somente de  $\Theta$ ) pode ser tomado constante, pois  $\Theta > 2$  para  $n$  suficientemente grande, além disso a aplicação  $H_n \circ h_{n,j}$  pode ser tomada  $C^1$ -arbitrariamente próximo da identidade.

Agora fixe uma das decomposições, por exemplo  $E_{g_{n,j}}^u \oplus E_{g_{n,j}}^c \oplus E_{g_{n,j}}^s$ , então para essa decomposição existem campos de cones (construídos no Lema A.0.1). Pela construção da família de vizinhanças  $\{V_{n,j}\}$ , temos que  $\text{diam}(V_{n,j}) \rightarrow 0$ , quando  $j \rightarrow \infty$  e para qualquer  $x \neq p_n$ , existe  $j_x \geq 0$  tal que

- (1)  $x \notin \overline{V_{n,j}}$  para todo  $j \geq j_x$ ,



(2)  $g_{n,j}^k(x) = g_n^k(x)$  para todo  $-j < k < j$ , onde  $j > j_x$ ,

(3)  $g_{n,j} = g_n$  fora de  $V_{n,j}$  para todo  $j > 0$ .

Para  $\sigma = cu$ , suponha que  $C^{cu}(x, \beta)$  seja o campo de cones na direção  $E^{cu}$ .

$$E_{g_n}^{cu}(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} Dg_n^k(g_n^{-k}(x)) \left( C^{cu}(g_n^{-k}(x), \beta) \right)$$

e

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} E_{g_{n,j}}^{cu}(x) = \lim_{j \rightarrow +\infty} \left( \lim_{k \rightarrow +\infty} Dg_{n,j}^k(g_{n,j}^{-k}(x)) \left( C^{cu}(g_{n,j}^{-k}(x), \beta) \right) \right).$$

Pela construção a sequência de cones  $Dg_{n,j}^k(g_{n,j}^{-k}(x)) \left( C^{cu}(g_{n,j}^{-k}(x), \beta) \right)$  é encaixada e decrescente para  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Se  $j > j_x$  nós temos, pela definição de  $j_x$ , que

$$E_{g_{n,j}}^{cu}(x) \subset Dg_{n,j}^j(g_{n,j}^{-j}(x)) \left( C^{cu}(g_{n,j}^{-j}(x), \beta) \right) = Dg_n^j(g_n^{-j}(x)) \left( C^{cu}(g_n^{-j}(x), \beta) \right).$$

Como  $Dg_n^j(g_n^{-j}(x)) \left( C^{cu}(g_n^{-j}(x), \beta) \right) \rightarrow E_{g_n}^{cu}$  quando  $j \rightarrow \infty$ , então

$$E_{g_{n,j}}^{cu}(x) \rightarrow E_{g_n}^{cu}(x).$$

Além disso por construção  $E_{g_{n,j}}^{cu}(p_n) = E_{g_n}^{cu}(p_n)$ .

Analogamente podemos fazer para as outras direções e também para a decomposição  $F_{g_{n,j}}^u \oplus F_{g_{n,j}}^c \oplus F_{g_{n,j}}^s$ .  $\square$

**Lema 5.2.5.** Fixado  $n$ , para  $j$  suficientemente grande e para ambas as decomposições parcialmente hiperbólicas de  $g_{n,j}$  vale que:

(1) Existe  $\alpha > 0$  tal que  $\angle(E_{g_{n,j}}^\sigma, (E_{A_n}^\sigma)^\perp) > \alpha$  e  $\angle(F_{g_{n,j}}^\sigma, (F_{A_n}^\sigma)^\perp) > \alpha$ ,

(2) As folheações  $W^s(g_{n,j})$  e  $W^u(g_{n,j})$  são quase isométricas no recobrimento,

(3)  $g_{n,j}$  é dinamicamente coerente e a folheação  $W^c(g_{n,j})$  é quase isométrica no recobrimento,

(4) Se  $h$  a semi conjugação entre  $A_n$  e  $g_{n,j}$ , então  $W_{g_{n,j}}^c(x) = h^{-1}(W_{A_n}^c(h(x)))$ , em particular a folheação bidimensional  $W_{g_{n,j}}^c$  não é compacta.

*Demonstração.* O item (1) segue do Lema 5.2.4. O item (2) segue do item (1) e Proposição 2.5.1. O item (2) junto com o Teorema 2.5.2 implica que  $g_{n,j}$  é dinamicamente coerente e novamente pelo item (1) e Proposição 2.5.1 implica que  $W^c(g_{n,j})$  é quase isométrica no recobrimento. O item (4) segue do Teorema 5.1.1.  $\square$

### 5.2.4 Conclusão da prova do Teorema 5.0.2

Nós utilizaremos o seguinte resultado,

**Teorema 5.2.1.** (HERTZ; HERTZ; URES, 2008) *Os difeomorfismos ergódicos são  $C^1$ -abertos e  $C^\infty$ -densos no conjunto  $PH_m^r(M)$  com dimensão central um, para todo  $r \geq 2$ .*

Para um  $n$  suficientemente grande fixado e  $x \neq p_n$ . Como  $F_{g_{n,j}}^c(x) \rightarrow F_{g_n}^c(x)$  e  $g_{n,j} = g_n$  fora de  $V_{n,j}$ , então para todo  $j > j_x$  nós temos  $Dg_{n,j}(x) = Dg_n(x)$ , então

$$\text{Jac}g_{n,j}(x)|_{F_{g_{n,j}}^c} \rightarrow \text{Jac}g_n(x)|_{F_{g_n}^c}.$$

Como  $H_n$  e  $H_n \circ h_{n,j}$  são  $C^1$ -próximas da  $Id$  e  $g_{n,j} = A_n \circ H_n \circ h_{n,j}$ , nós temos que  $\|Dg_{n,j}\| < 4n$  para  $n$  suficientemente grande, então pelo Teorema da Convergência Dominada:

$$\int_{\mathbb{T}^4} \log(\text{Jac}g_{n,j}(x)|_{F_{g_{n,j}}^c}) dm \rightarrow \int_{\mathbb{T}^4} \log(\text{Jac}g_n(x)|_{F_{g_n}^c}) dm > 0, \quad (5.6)$$

e

$$\int_{\mathbb{T}^4} \log(\text{Jac}g_{n,j}(x)|_{E_{g_{n,j}}^c}) dm \rightarrow \int_{\mathbb{T}^4} \log(\text{Jac}g_n(x)|_{E_{g_n}^c}) dm > \int_{\mathbb{T}^4} \log(\text{Jac}A_n(x)|_{E_n^c}) dm. \quad (5.7)$$

Os difeomorfismos  $DA_{g_{n,j}}$  não são Anosov. De fato, se  $g_{n,j}$  forem Anosov, eles são conjugados a  $A_n$ , em particular os índices estáveis dos pontos fixos de  $A_n$  e  $g_{n,j}$  seriam os mesmos.

Tome um difeomorfismo parcialmente hiperbólico preservando volume  $g_{n,j}$  satisfazendo

$$\int_{\mathbb{T}^4} \log(\text{Jac}g_{n,j}(x)|_{F_{g_{n,j}}^c}) dm > 0,$$

e

$$\int_{\mathbb{T}^4} \log(\text{Jac}g_{n,j}(x)|_{E_{g_{n,j}}^c}) dm > \int_{\mathbb{T}^4} \log(\text{Jac}A_n(x)|_{E_n^c}) dm,$$

que é possível pelas equações 5.6 e 5.7.

Se  $g_{n,j} \in \partial(\overline{\mathcal{A}(\mathbb{T}^4)})$ , então perturbamos  $g_{n,j}$  para um  $f_n \in DA_m^r(\mathbb{T}^4) \setminus \overline{\mathcal{A}(\mathbb{T}^4)}$ ,  $r \geq 2$ , um difeomorfismo parcialmente hiperbólico estavelmente ergódico, tal que

$$\int_{\mathbb{T}^4} \log(\text{Jac}f_n(x)|_{E_{f_n}^c}) dm > \int_{\mathbb{T}^4} \log(\text{Jac}A_n(x)|_{E_n^c}) dm.$$

A existência de tais  $f_n$  é devido a continuidade da estrutura  $F^u \oplus F^c \oplus F^s$ ,  $\dim F^c = 1$  e do Teorema 5.2.1. Agora considere  $U \subset DA_m^r(\mathbb{T}^4) \setminus \overline{\mathcal{A}(\mathbb{T}^4)}$ ,  $r \geq 2$ , uma  $C^1$ -vizinhança de  $f_n$  tal que cada  $f \in U$  é ergódica, isotópica a  $A_n$ , e

$$\int_{\mathbb{T}^4} \log(\text{Jac}f(x)|_{E_f^c}) dm > \int_{\mathbb{T}^4} \log(\text{Jac}A_n(x)|_{E_n^c}) = \log(\beta_{1,n}^c) + \log(\beta_{2,n}^c),$$

pela ergodicidade,

$$\lambda_1^c(f) + \lambda_2^c(f) = \int_{\mathbb{T}^4} \log(\text{Jac}f(x)|_{E_f^c}) dm > \log(\beta_1^c(n)) + \log(\beta_2^c(n)), \quad (5.8)$$

por continuidade,  $f_n$  e  $f$  podem ser escolhidas tal que

$$\lambda_1^c(f) = \int_{\mathbb{T}^4} \log(\text{Jac}f(x)|F_f^c) dm > 0,$$

como  $\beta_{2,n}^c \rightarrow 3$ , então

$$\lambda_2^c(f) > \log(2,99) + \log(\beta_{1,n}^c) - \lambda_1^c(f) > \log(2,9) > 0.$$

A Equação 5.8, junto com Teorema 4.0.3 implica que a folheação central bidimensional tangente a  $E_f^c$  não é absolutamente contínua.

Quando  $g_{n,j} \in DA_m^r(\mathbb{T}^4) \setminus \overline{\mathcal{A}(\mathbb{T}^4)}$ ,  $r \geq 2$ , não é estavelmente ergódica, nós podemos aplicar o mesmo argumento acima. Finalmente, quando  $g_{n,j} \in DA_m^r(\mathbb{T}^4) \setminus \overline{\mathcal{A}(\mathbb{T}^4)}$ ,  $r \geq 2$ , é estavelmente ergódica, o argumento vale com  $f_n = g_{n,j}$  e  $U$  como acima, finalizando a prova do Teorema.



# SEMI-RIGIDEZ PARA SISTEMAS COM DECOMPOSIÇÃO DOMINADA E PARA ENDOMORFISMOS

## 6.1 Semi-rigidez para difeomorfismos com decomposição dominada

**Teorema 6.1.1.** *Seja  $f : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$  um difeomorfismo  $C^2$  conservativo que admite uma decomposição  $TM = E^{cu} \oplus E^{cs}$  com  $\lambda_i^{cu} > 0$  e  $\lambda_i^{cs} < 0$ , homotópico a um difeomorfismo Anosov linear  $A$  tal que*

1.  $\dim E^{cs} = \dim E_A^s$  e  $\dim E^{cu} = \dim E_A^u$ ,
2.  $A$  é diagonalizável,
3. Existe um  $\alpha > 0$  tal que  $\angle(E^{cs}, (E_A^s)^\perp) > \alpha$  e  $\angle(E^{cu}, (E_A^u)^\perp) > \alpha$

Suponha ainda que as distribuições  $E^{cu}$  e  $E^{cs}$  são integráveis, então  $\sum_i \lambda_i^{cu}(f, x) \leq \sum_i \lambda_i^u(A)$  e  $\sum_i \lambda_i^{cs}(f, x) \geq \sum_i \lambda_i^s(A)$  para Lebesgue quase todo ponto  $x \in \mathbb{T}^d$ .

Em particular, os difeomorfismos  $C^2$  com decomposição dominada contruídos por (BONATTI; VIANA, 2000) que também foram estudados por (BUZZI; FISHER, 2013) tem a semi-rigidez dos expoentes de Lyapunov. Estes foram os primeiros exemplos de sistemas robustamente transitivos que não são parcialmente hiperbólicos. No Apêndice B nós reescrevemos a construção desses exemplos.

**Teorema 6.1.2** ((BONATTI; VIANA, 2000), (BUZZI; FISHER, 2013)). *Existe um conjunto aberto  $\mathcal{U} \subset \text{Diff}_m^1(\mathbb{T}^4)$  onde cada  $f \in \mathcal{U}$  admite uma decomposição dominada  $E^{cu} \oplus E^{cs}$  com  $\lambda_i^{cu}(x) > 0$  e  $\lambda_i^{cs}(x) < 0$  para m-q.t.p.  $x \in \mathbb{T}^4$ , homotópica a um difeomorfismo Anosov linear  $A$  tal que*

1.  $\dim E^{cs} = \dim E_A^s$  e  $\dim E^{cu} = \dim E_A^u$ ,
2.  $A$  é diagonalizável,
3. Existe um  $\alpha > 0$  tal que  $\angle(E^{cs}, (E_A^s)^\perp) > \alpha$  e  $\angle(E^{cu}, (E_A^u)^\perp) > \alpha$ .

Além disso, as distribuições  $E^{cu}$  e  $E^{cs}$  são unicamente integráveis.

### 6.1.1 Prova do Teorema 6.1.1

Assim como a Proposição 2.6.2 e Corolário 2.6.1, nós mostramos:

**Proposição 6.1.1.** *Seja  $f : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$  um difeomorfismo que admite a decomposição  $TM = E^{cu} \oplus E^{cs}$  com  $\lambda_i^{cu} > 0$  e  $\lambda_i^{cs} < 0$ , homotópico a um difeomorfismo Anosov linear  $A$  tal que  $\dim E^{cs} = \dim E_A^s$  e  $\dim E^{cu} = \dim E_A^u$ . Suponha também que as distribuições  $E^{cu}$  e  $E^{cs}$  são integráveis, então existe um  $R > 0$  tal que*

- $\tilde{W}_f^{cs}(x) \subset B_R(\tilde{W}_A^s(x))$ ,
- $\tilde{W}_f^{cu}(x) \subset B_R(\tilde{W}_A^u(x))$ .

**Corolário 6.1.1.** *Se  $\|x - y\| \rightarrow \infty$  onde  $y \in \tilde{W}_f^{cs}(x)$  então  $\frac{x-y}{\|x-y\|} \rightarrow \tilde{E}_A^s(x)$  uniformemente. Mais precisamente, para  $\varepsilon > 0$  existe  $M > 0$  tal que se  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $y \in \tilde{W}_f^{cs}(x)$  e  $\|x - y\| > M$ , então*

$$\|\pi_A^u(x - y)\| < \varepsilon \|\pi_A^s(x - y)\|,$$

onde  $\pi_A^s$  é a projeção no subespaço  $E_A^s$  e  $\pi_A^u$  é a projeção no subespaço  $E_A^u$ .

Tem uma afirmação totalmente análoga para  $\tilde{W}_f^{cu}$ .

*Demonstração da Proposição 6.1.1.* Basta mostrar que  $\|\pi_A^u(x - y)\|$  é uniformemente limitada para todo  $y \in \tilde{W}^{cs}(x)$ . Vamos fazer a prova por contradição supondo que  $\|\pi_A^u(x - y)\|$  não é limitada.

Seja  $0 < \lambda < 1 < \mu$  as constantes de hiperbolicidade de  $A$  e  $C > 1$  tal que  $\|\tilde{A}(v)\| > \frac{\mu^k}{C} \|v\|$  para todo  $k > 0$  e  $v \in \tilde{E}_A^u \subset \mathbb{R}^d$ . Pela Proposição 2.6.1, existe  $M > 0$  tal que

$$\begin{aligned} \|\pi_A^u(x - y)\| > M &\Rightarrow \|\pi_A^u(\tilde{f}^k(x) - \tilde{f}^k(y))\| > C \|\pi_A^u(\tilde{A}^k(x) - \tilde{A}^k(y))\| \\ &> \mu^k \|\pi_A^u(x - y)\| \\ &> \mu^k M. \end{aligned}$$

Como  $\mu^n M > M$  podemos repetir o argumento e mostrar por indução que

$$\|\pi_A^u(\tilde{f}^{nk}(x) - \tilde{f}^{nk}(y))\| > \mu^{nk} M.$$

Como  $\pi_A^u$  é linear existe uma constante  $a > 0$ , tal que

$$\|\tilde{f}^{nk}(x) - \tilde{f}^{nk}(y)\| > a\mu^{nk} M,$$

isto é, se  $\|\pi_A^u(x - y)\| > M$ , então  $\|\tilde{f}^{nk}(x) - \tilde{f}^{nk}(y)\| > a\mu^{nk} M$ , contradizendo o fato que  $y \in \tilde{W}_f^{cs}(x)$ .  $\square$

**Proposição 6.1.2.** *Seja  $f : M \rightarrow M$  um difeomorfismo  $C^2$  conservativo que admite uma decomposição  $TM = E^{cs} \oplus F$  com  $\lambda_i^{cs}(x) < 0$  e  $\lambda_i(F(x)) \geq 0$  para  $m$ -q.t.p  $x \in M$ , suponha também que a distribuição  $E^{cs}$  é integrável, então a respectiva folheação  $W^{cs}$  é absolutamente contínua superiormente.*

*Demonstração.* Suponha por absurdo que  $W^{cs}$  não é absolutamente contínua superiormente, isto é, existe uma caixa folheada  $B$  e um conjunto  $Z \subset B$  com  $\text{Vol}_{W^{cs}}(Z \cap W^{cs}(x)) = 0$  para  $m$ -q.t.p  $x \in B$  e  $m(Z) > 0$ . Como  $f$  preserva volume o conjunto  $\mathcal{R} = \bigcup_{\varepsilon > 0} \bigcup_{l=1}^{\infty} \mathcal{R}_\varepsilon^l$  tem volume total. Tome  $z \in Z \cap \mathcal{R}$  um ponto de densidade de  $Z$ . Existe  $\varepsilon, l$  e um  $cs$ -bloco  $\mathbb{B}_\varepsilon^l$  contendo  $z$  tal que  $m(\mathbb{B}_\varepsilon^l \cap Z) > 0$ . Como cada variedade de Pesin  $W_r^{cs}(x)$  está contida na folha  $W^{cs}(x)$ , então  $\text{Vol}_{W^{cs}}(Z \cap W_r^{cs}(x)) = 0$  para  $m$ -q.t.p  $x \in \mathbb{B}_\varepsilon^l \cap Z$ , mas isso contradiz o fato das variedades de Pesin ser absolutamente contínua superiormente.  $\square$

A folheação  $W^{cs}$  também é absolutamente contínua inferiormente?

**Proposição 6.1.3.** *Seja  $f : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$  como no enunciado do Teorema 6.1.1, então dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $M > 0$  e constantes  $C_0, C_1 > 0$  tal que*

$$C_0(1 - \varepsilon)^{2n} e^{n \sum \lambda_i^u(A)} \text{Vol}(R) \leq \text{Vol}(\tilde{f}^n \pi^{-1}(R)) \leq C_1(1 + \varepsilon)^{2n} e^{n \sum \lambda_i^u(A)} \text{Vol}(R)$$

para todo  $n$ , onde  $\pi$  é a projeção ortogonal de  $\tilde{W}_f^{cu}(z)$  em  $\tilde{E}_A^u(z)$  (paralela a  $(\tilde{E}_A^u)^\perp$ ) e  $R$  é um cubo em  $\tilde{E}_A^u(z)$  com dimensão  $d_u$  de lado maior que  $M$  contendo  $z$ .

*Demonstração.* Totalmente análoga a prova da Proposição 4.2.1, substituindo o uso do Corolário 2.6.1 pelo Corolário 6.1.1.  $\square$

*Demonstração do Teorema 6.1.1.* Totalmente análoga a prova do Teorema 4.0.3, substituindo o uso da Proposição 4.2.1 pela Proposição 6.1.3.  $\square$

## 6.2 Semi-rigidez para endomorfismos

Como vimos (Teorema 3.1.2) em (MICENA; TAHZIBI, 2014) foi provada a semi-rigidez dos expoentes de Lyapunov para perturbações de endomorfismos Anosov linear quando a dimensão de  $E^u$  é um. Usando os mesmos argumentos da demonstração do Teorema 4.0.3, nós provaremos a seguinte generalização.

**Teorema 6.2.1.** *Seja  $f : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$  um endomorfismo  $C^2$  Anosov conservativo homotópico a um endomorfismo Anosov linear  $A$  tal que*

1.  *$A$  é diagonalizável,*
2.  *$\dim E_f^\sigma = \dim E_A^\sigma$  e no recobrimento  $\angle(T_x \tilde{W}_f^\sigma, (\tilde{E}_A^\sigma)^\perp) > \alpha > 0$  para  $\sigma \in \{s, u\}$  e todo  $x \in \mathbb{R}^d$ ,*

*então  $\sum_i \lambda_i^u(f, x) \leq \sum_i \lambda_i^u(A)$  e  $\sum_i \lambda_i^s(f, x) \geq \sum_i \lambda_i^s(A)$  para Lebesgue quase todo ponto  $x \in \mathbb{T}^d$ .*

**Corolário 6.2.1.** *Seja  $A : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$  um endomorfismo Anosov linear conservativo. Existe um conjunto  $C^1$ -aberto  $\mathcal{U} \subset \text{Endo}_m^2(\mathbb{T}^d)$  contendo  $A$  tal que para cada  $f \in \mathcal{U}$ ,  $\sum_i \lambda_i^u(f, x) \leq \sum_i \lambda_i^u(A)$  e  $\sum_i \lambda_i^s(f, x) \geq \sum_i \lambda_i^s(A)$  para Lebesgue quase todo ponto  $x \in \mathbb{T}^d$ .*

Usando a fórmula de entropia para endomorfismos, Teorema 2.4.3, temos

**Corolário 6.2.2.** *Seja  $f$  como no enunciado do Teorema 6.2.1, então  $h_m(f) \leq h_m(A)$ . Em particular, se  $A$  é um endomorfismo Anosov linear conservativo, então  $A$  é um ponto de máximo local para a entropia  $h_m$  no conjunto  $\text{Endo}_m^2(\mathbb{T}^d)$  com a topologia  $C^1$ .*

*Demonstração.* Pela fórmula de entropia, Teorema 2.4.3, temos

$$h_m(f) = \int_{\mathbb{T}^d} \sum_i \lambda_i^u(f, x) dm \leq \int_{\mathbb{T}^d} \sum_i \lambda_i^u(A) dm = h_m(A)$$

□

**Proposição 6.2.1.** (MAÑÉ; PUGH, 1975) *Se  $f \in \text{Endo}(M)$  então seu levantamento para o recobrimento universal  $\tilde{f} : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$  é um difeomorfismo.*

Como o levantamento de um endomorfismo é invertível, temos versões semelhantes das Proposições 2.6.3 e 2.6.1 para endomorfismos Anosov.

**Proposição 6.2.2.** *Seja  $f : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$  um endomorfismo e  $A$  a sua linearização. Então para cada  $n \in \mathbb{Z}$  e  $C > 1$  existe  $M > 0$  tal que para  $x, y \in \mathbb{R}^d$  com  $\|x - y\| > M$  temos*

$$\frac{1}{C} < \frac{\|\tilde{f}^n(x) - \tilde{f}^n(y)\|}{\|\tilde{A}^n(x) - \tilde{A}^n(y)\|} < C.$$



De forma mais geral, para cada  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $C > 1$  e qualquer aplicação linear  $\pi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ , existe um  $M$  tal que para  $x, y \in \mathbb{R}^d$ , com  $\|x - y\| > M$

$$\frac{1}{C} < \frac{\|\pi(\tilde{f}^n(x) - \tilde{f}^n(y))\|}{\|\pi(\tilde{A}^n(x) - \tilde{A}^n(y))\|} < C.$$

**Proposição 6.2.3.** *Seja  $f : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$  um endomorfismo Anosov homotópico a um Anosov linear  $A$ . Suponha que  $\tilde{W}_f^s$  é quase isométrica. Se  $\|x - y\| \rightarrow \infty$  onde  $y \in \tilde{W}_f^s(x)$ , então  $\frac{x-y}{\|x-y\|} \rightarrow \tilde{E}_A^s(x)$  uniformemente. Mais precisamente, para  $\varepsilon > 0$  existe  $M > 0$  tal que se  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $y \in \tilde{W}_f^s(x)$  e  $\|x - y\| > M$ , então*

$$\|\pi_A^{cu}(x - y)\| < \varepsilon \|\pi_A^s(x - y)\|.$$

Uma afirmação similar vale para  $\tilde{W}_f^u$ .

Assim de forma similar a Proposição 4.2.1, temos

**Proposição 6.2.4.** *Seja  $f : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$  como no enunciado do Teorema 6.2.1, então dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $M > 0$  e constantes  $C_0, C_1 > 0$  tal que*

$$C_0(1 - \varepsilon)^{2n} e^{n \sum \lambda_i^u(A)} \text{Vol}(R) \leq \text{Vol}(\tilde{f}^n \pi^{-1}(R)) \leq C_1(1 + \varepsilon)^{2n} e^{n \sum \lambda_i^u(A)} \text{Vol}(R)$$

para todo  $n$ , onde  $\pi$  é a projeção ortogonal de  $\tilde{W}_f^u(z)$  em  $\tilde{E}_A^u(z)$  (paralela a  $(\tilde{E}_A^u)^\perp$ ) e  $R$  é um cubo em  $\tilde{E}_A^u(z)$  com dimensão  $d_u$  de lado maior que  $M$  contendo  $z$ .

*Demonstração.* Análoga a prova do Teorema 4.0.3, substituindo o uso da Proposição 4.2.1 pela Proposição 6.2.4. □



## RIGIDEZ DOS EXPOENTES DE LYAPUNOV

### 7.1 Rigidez dos expoentes de Lyapunov para difeomorfismos parcialmente hiperbólicos

Abaixo fazemos algumas observações do Teorema 3.1.4 e enunciamos um resultado de rigidez dos expoentes para  $\mathbb{T}^d$  com  $d \geq 3$ . Fazendo uma simples modificação nos argumentos da prova do Teorema 3.1.4, podemos provar que:

**Teorema 7.1.1.** *Seja  $f : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$  um difeomorfismo parcialmente hiperbólico tal que as folheações  $W^s$  e  $W^u$  tem a propriedade UBD, então  $\lambda^s(f, x) = \lambda^s(A)$  e  $\lambda^u(f, x) = \lambda^u(A)$  para todo ponto  $x \in \mathcal{R}$ , onde  $\mathcal{R}$  é o conjunto dos pontos regulares de Lyapunov. Além disso se  $f$  é conservativo,  $\lambda^c(f, x) = \lambda^c(A)$  para todo  $x \in \mathcal{R}$ .*

Como falamos, basta fazer uma simples modificação nos argumentos da demonstração do Teorema 3.1.4, a prova continua essencialmente a mesma, vamos escrevê-la aqui para completude do texto.

*Demonstração.* Fixemos um  $\sigma \in \{s, u\}$  e suponha que existe um  $x \in \mathcal{R}$  tal que  $\lambda^\sigma(f, x) > \lambda^\sigma(A)$ , pelo Lema 2.3.1 no recobrimento universal  $\lambda^\sigma(\tilde{f}, x) > \lambda^\sigma(A)$ . De (MICENA; TAHZIBI, 2013, Lema 3.6) fixe  $\varepsilon$  pequeno tal que existe um  $n_0$  de forma que para todo  $n > n_0$

$$\text{Jac} \tilde{f}^n(x)|E^\sigma > e^{n(\lambda^\sigma(A) + \varepsilon)}. \quad (7.1)$$

Seja  $n$  grande o suficiente tal que  $\frac{Qe^{n(\lambda^\sigma(A) + \varepsilon)}}{2K^2e^{n\lambda^\sigma(A)}} > 2$  onde  $Q$  é a constante de quase isometria da folheação  $\tilde{W}^\sigma$ , lembrando que por (BRIN; BURAGO; IVANOV, 2009), Teorema 2.5.1, as folheações  $\tilde{W}^u$  e  $\tilde{W}^s$  de difeomorfismos parcialmente hiperbólicos do toro  $\mathbb{T}^3$  são quase isométricas. E a constante  $K$  é a mesma do Lema 2.8.2. Pelo Lema 2.8.2 para todo  $y \in \tilde{W}^\sigma(x)$

$$K^{-1} \leq \Delta(\tilde{f}^n(y_1), \tilde{f}^n(y_2)) \leq K$$

e

$$K^{-2} \leq \frac{\text{Jac}^\sigma \tilde{f}(\tilde{f}^i(y_1))}{\text{Jac}^\sigma \tilde{f}(\tilde{f}^i(y_2))} \leq K^2. \quad (7.2)$$

Usando a Proposição 2.6.1 e (MICENA; TAHZIBI, 2013, Lema 3.6), escolha  $M > 0$  tal que se  $y \in \tilde{W}^\sigma(x)$  e  $\|x - y\| > M$ , então

$$\frac{1}{2} < \frac{\|\tilde{f}^n(x) - \tilde{f}^n(y)\|}{\|\tilde{A}^n(x) - \tilde{A}^n(y)\|} < 2. \quad (7.3)$$

Note também que

$$\frac{1}{2} e^{n\lambda^\sigma(A)} < \frac{\|\tilde{A}^n(x) - \tilde{A}^n(y)\|}{\|x - y\|} < 2e^{n\lambda^\sigma(A)}.$$

Pelas Equações 7.1 e 7.2, para todo  $y \in \tilde{W}^\sigma(x)$  nós temos

$$\text{Jac}^\sigma \tilde{f}^n(y) \geq \frac{1}{K^2} e^{n\lambda^\sigma(A) + \varepsilon}.$$

Assim

$$\begin{aligned} \frac{\|\tilde{f}^n(x) - \tilde{f}^n(y)\|}{\|\tilde{A}^n(x) - \tilde{A}^n(y)\|} &\geq \frac{Q d_{W^\sigma}(\tilde{f}^n(x), \tilde{f}^n(y))}{\|\tilde{A}^n(x) - \tilde{A}^n(y)\|} = \frac{Q \int_{W^\sigma} \text{Jac}^\sigma f^n(x) d\text{Vol}}{\|\tilde{A}^n(x) - \tilde{A}^n(y)\|} \geq \\ &\geq \frac{Q e^{n(\lambda^\sigma(A) + \varepsilon)} \|x - y\|}{2K^2 e^{n\lambda^\sigma(A)} \|x - y\|} = \frac{Q e^{n(\lambda^\sigma(A) + \varepsilon)}}{2K^2 e^{n\lambda^\sigma(A)}} > 2 \end{aligned}$$

que é uma contradição com a Equação 7.3. Da mesma maneira assumindo que existe um  $x \in \mathcal{R}$  tal que  $\lambda^\sigma(f, x) < \lambda^\sigma(A)$ , chegaremos em uma contradição com a Equação 7.3, concluindo a prova do Teorema.  $\square$

**Corolário 7.1.1.** *Seja  $f : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$  um difeomorfismo parcialmente hiperbólico  $C^2$  conservativo tal que as folheações  $W^s$  e  $W^u$  tem a propriedade UBD, então o volume é a única medida de máxima entropia, em particular  $f$  é ergódico.*

*Demonstração.* Pela fórmula de entropia de Pesin,

$$h_m(f) = \int_{\mathbb{T}^3} \sum_i \lambda_i^+(f, x) dm = \sum_i \lambda_i^+(A).$$

Usando o Princípio Variacional e a fórmula de entropia de Ruelle temos

$$h_{Top}(f) = \sup_\mu h_\mu(f) \leq \sup_\mu \int_{\mathbb{T}^3} \sum_i \lambda_i^+(f, x) d\mu = \sum_i \lambda_i^+(A) = h_m(f).$$

Como  $h_{Top}(f) \geq h_\mu(f)$  para toda medida  $\mu$  invariante, segue que  $h_{Top}(f) = h_m$ , portanto  $m$  é uma medida de máxima entropia. Por (URES, 2012, Teorema 1.1), segue que o volume é a única medida de máxima entropia e portanto ergódica.  $\square$

Seja  $\Lambda : \text{Diff}_m^2(\mathbb{T}^3) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f \mapsto \int \lambda^u(f, x) dm$ . Em (MICENA; TAHZIBI, 2013, Problema 1) questiona se os pontos de máximo da aplicação  $\Lambda$  são  $C^1$  conjugados a sua linearização. Em (GOGOLEV; TAHZIBI, 2014) é proposta a seguinte conjectura:

**Conjectura 7.1.1.** (GOGOLEV; TAHZIBI, 2014) *Seja  $f$  um difeomorfismo Anosov  $C^2$  conservativo de  $\mathbb{T}^2$  e suponha que  $f$  é um máximo local para a função  $\Lambda : \text{Diff}_m^2(\mathbb{T}^2) \rightarrow \mathbb{R}$  dada acima, então  $f$  é  $C^1$  conjugada ao automorfismo Anosov linear.*

Do Teorema 7.1.1 temos o seguinte corolário:

**Corolário 7.1.2.** *Seja  $f : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$  um difeomorfismo parcialmente hiperbólico Anosov conservativo tal que as folheações  $W^s$  e  $W^u$  tem a propriedade UBD, então  $f$  é  $C^1$  conjugado a sua linearização.*

*Demonstração.* Segue direto do Teorema 7.1.1 junto com a próxima proposição.  $\square$

**Proposição 7.1.1.** (VARÃO, 2016a) *Seja  $f : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$  um difeomorfismo parcialmente hiperbólico Anosov conservativo. Os expoentes de Lyapunov de quaisquer dois pontos periódicos em cada direção (estável, instável e central) são os mesmos se e somente se  $f$  é  $C^1$  conjugado a sua linearização.*

Em (VARÃO, 2015) foi provado para difeomorfismo DA de  $\mathbb{T}^3$  que as folheações  $W^s$  e  $W^u$  são transversalmente absolutamente contínua com jacobiano limitado, se e somente se,  $f$  é  $C^{1+\alpha}$  conjugado com a sua linearização. Em (VARÃO, 2016b, p. 3), comenta que se uma folheação é transversalmente absolutamente contínua com jacobiano limitado então a folheação tem a propriedade UBD.

**Teorema 7.1.2.** *Seja  $f : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$  um difeomorfismo DA e  $A$  a sua linearização com uma decomposição  $TM = E^s \oplus E^c \oplus E^u$  tal que*

1.  $\dim E_f^\sigma = \dim E_A^\sigma, \sigma \in \{s, u\},$
2.  $A$  é diagonalizável e
3. Existe um  $\alpha > 0$  tal que no recobrimento universal  $\angle(T_x \tilde{W}^\sigma, (\tilde{E}_A^\sigma)^\perp) > \alpha > 0$  para  $\sigma \in \{s, u\}$  e todo ponto  $x \in \mathbb{R}^m$ .

*Se as folheações  $W^u$  e  $W^s$  tem a propriedade UBD, então  $\sum_i \lambda_i^\sigma(f, x) = \sum_i \lambda_i^\sigma(A)$  para  $\sigma \in \{s, u\}$  e todo ponto  $x \in \mathcal{R}$ .*

**Corolário 7.1.3.** *Seja  $f$  como no Teorema 7.1.2, suponha ainda que  $f$  é conservativo, então  $\sum_i \lambda_i^\sigma(f, x) = \sum_i \lambda_i^\sigma(A)$  para  $\sigma \in \{s, c, u\}$  e todo ponto  $x \in \mathcal{R}$ .*

*Demonstração.* A igualdade  $\sum_i \lambda_i^c(f, x) = \sum_i \lambda_i^c(A)$ , segue do fato de  $f$  preservar volume.  $\square$

**Corolário 7.1.4.** *Seja  $f$  como no Teorema 7.1.2, suponha ainda que  $f$  é  $C^2$  e conservativo, então o volume é uma medida de máxima entropia. Além disso, se  $\dim E^c = 1$ , então  $f$  é ergódico.*

*Demonstração.* Pela fórmula de entropia de Pesin,

$$h_m(f) = \int_{\mathbb{T}^m} \sum_i \lambda_i^+(f, x) dm = \sum_i \lambda_i^+(A).$$

Usando o Princípio Variacional e a fórmula de entropia de Ruelle temos

$$h_{top}(f) = \sup_{\mu} h_{\mu}(f) \leq \sup_{\mu} \int_{\mathbb{T}^d} \sum_i \lambda_i^+(f, x) d\mu = \sum_i \lambda_i^+(A) = h_m(f).$$

Como  $h_{Top}(f) \geq h_{\mu}(f)$  para toda medida  $\mu$  invariante, segue que  $h_{Top}(f) = h_m$ . E portanto  $m$  é uma medida de máxima entropia. No caso que  $\dim E^c = 1$ , por (URES, 2012, Teorema 1.2) segue que o volume é a única medida de máxima e portanto ergódica.  $\square$

**Proposição 7.1.2.** *Seja  $f : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$  um difeomorfismo  $D.A$  e  $A$  a sua linearização com uma decomposição  $TM = E^s \oplus E^c \oplus E^u$  tal que*

1.  $\dim E_f^u = \dim E_A^u$ ,
2.  $A$  é diagonalizável e
3. Existe um  $\alpha > 0$  tal que no recobrimento universal  $\angle(T_x \tilde{W}^u, (\tilde{E}_A^u)^{\perp}) > \alpha > 0$  para todo ponto  $x \in \mathbb{R}^m$ ,

então dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $M > 0$  e constantes  $C_0, C_1 > 0$  tal que

$$C_0(1 - \varepsilon)^{2n} e^{n \sum \lambda_i^u(A)} \text{Vol}(R) \leq \text{Vol}(\tilde{f}^n \pi^{-1}(R)) \leq C_1(1 + \varepsilon)^{2n} e^{n \sum \lambda_i^u(A)} \text{Vol}(R)$$

para todo  $n$ , onde  $\pi$  é a projeção ortogonal de  $\tilde{W}_f^u(z)$  em  $\tilde{E}_A^u(z)$  (paralela a  $(\tilde{E}_A^u)^{\perp}$ ) e  $R$  é um cubo em  $\tilde{E}_A^u(z)$  com dimensão  $d_u$  de lado maior que  $M$  contendo  $z$ .

*Demonstração.* Totalmente análoga a prova da Proposição 4.2.1, a menos de substituir o uso do Corolário 2.6.1 pela Proposição 2.6.3.  $\square$

*Demonstração do Teorema 7.1.2.* Fixemos um  $\sigma \in \{s, u\}$  e suponha que existe um  $x \in \mathcal{B}(f)$  tal que  $\sum_i \lambda_i^{\sigma}(f, x) < \sum_i \lambda_i^{\sigma}(A)$ , pelo Lema 2.3.1 no recobrimento universal  $\sum_i \lambda_i^{\sigma}(\tilde{f}, x) < \sum_i \lambda_i^{\sigma}(A)$ . Seja  $\varepsilon > 0$  como na Proposição 7.1.2 suficientemente pequeno tal que existe um  $n_0$  de forma que para todo  $n > n_0$  temos

$$\text{Jac}(\tilde{f}^n(x)|_{E^{\sigma}}) < e^{n(\sum_i \lambda_i^{\sigma}(A) - \varepsilon)}$$

pelo Lema 2.8.2 para todo  $y \in W^{\sigma}(x)$

$$\text{Jac}(\tilde{f}^n(y)|_{E^{\sigma}}) \leq K \text{Jac}(\tilde{f}^n(x)|_{E^{\sigma}}) < K e^{n(\sum_i \lambda_i^{\sigma}(A) - \varepsilon)}$$

Tome um  $d_{\sigma}$ -cubo  $R \subset E^{\sigma}(A)$  como na Proposição 7.1.2, com diâmetro maior que  $M$ , assim

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\tilde{f}^n(\pi^{-1}(R))) &= \int_{\pi^{-1}(R)} |\text{Jac} \tilde{f}^n(y)|_{E^{\sigma}} d\text{Vol} \\ &< \int_{\pi^{-1}(R)} K e^{n(\sum_i \lambda_i^{\sigma}(A) - \varepsilon)} d\text{Vol} \\ &< K e^{n(\sum_i \lambda_i^{\sigma}(A) - \varepsilon)} \text{Vol}(R) \end{aligned}$$

a última desigualdade contradiz a Proposição 7.1.2 para  $n$  suficientemente grande. Analogamente se assumimos que  $\sum_i \lambda_i^\sigma(f, x) > \sum_i \lambda_i^\sigma(A)$ , chegaremos em uma contradição com a Proposição 7.1.2. Portanto  $\sum_i \lambda_i^\sigma(f, x) = \sum_i \lambda_i^\sigma(A)$  para todo  $x \in \mathcal{R}(f)$ .  $\square$

## 7.2 Rigidez dos expoentes para sistemas com decomposição dominada

**Teorema 7.2.1.** *Seja  $f : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$  um difeomorfismo que admite a decomposição  $TM = E^{cu} \oplus E^{cs}$  com  $\lambda_i^{cu}(x) > 0$  e  $\lambda_i^{cs}(x) < 0$  para todo  $x \in \mathcal{R}$ , homotópico a um difeomorfismo Anosov linear  $A$  tal que*

1.  $\dim E^{cs} = \dim E_A^s$  e  $\dim E^{cu} = \dim E_A^u$ ,
2.  $A$  é diagonalizável,
3. Existe um  $\alpha > 0$  tal que  $\angle(E^{cs}, (E_A^s)^\perp) > \alpha$  e  $\angle(E^{cu}, (E_A^u)^\perp) > \alpha$ .

Suponha ainda que as distribuições  $E^{cu}$  e  $E^{cs}$  são integráveis e as folheações  $W^{cs}$  e  $W^{cu}$  tem a propriedade UBD, então  $\sum_i \lambda_i^{cu}(f, x) = \sum_i \lambda_i^u(A)$  e  $\sum_i \lambda_i^{cs}(f, x) = \sum_i \lambda_i^s(A)$  para todo  $x \in \mathcal{R}$ .

Existem difeomorfismos com decomposição dominada em que suas folheações tem a propriedade UBD.

Assim como o Corolário 7.1.4 vale:

**Corolário 7.2.1.** *Seja  $f$  como no Teorema 7.2.1, suponha ainda que  $f$  é  $C^2$  e conservativo, então o volume é uma medida de máxima entropia para  $f$ .*

*Demonstração do Teorema 7.2.1.* Análoga a demonstração do Teorema 7.1.2, substituindo o uso da Proposição 7.1.2 pela Proposição 6.1.3.  $\square$





## REFERÊNCIAS

---

ANOSOV, D. V. Geodesic flows on closed riemannian manifolds of negative curvature. **Trudy Matematicheskogo Instituta Imeni VA Steklova**, Russian Academy of Sciences, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, v. 90, p. 3–210, 1967. Citado na página [19](#).

ANOSOV, D. V.; SINAI, Y. G. Some smooth ergodic systems. **Russian Mathematical Surveys**, Turpion Ltd, v. 22, n. 5, p. 103–167, 1967. Citado na página [19](#).

AVILA, A.; VIANA, M.; WILKINSON, A. Absolute continuity, Lyapunov exponents and rigidity I: geodesic flows. **Journal of the European Mathematical Society**, European Mathematical Society Publishing House, v. 17, n. 6, p. 1435–1462, 2015. Citado nas páginas [19](#) e [42](#).

BARAVIERA, A. T.; BONATTI, C. Removing zero Lyapunov exponents. **Ergodic Theory and Dynamical Systems**, Cambridge Univ Press, v. 23, n. 06, p. 1655–1670, 2003. Citado nas páginas [56](#) e [57](#).

BARREIRA, L.; PESIN, Y. B. **Lyapunov exponents and smooth ergodic theory**. [S.l.]: American Mathematical Soc., 2002. v. 23. Citado na página [36](#).

BONATTI, C.; DÍAZ, L. J.; PUJALS, E. R. A  $C^1$ -generic dichotomy for diffeomorphisms: weak forms of hyperbolicity or infinitely many sinks or sources. **Annals of Mathematics**, JSTOR, p. 355–418, 2003. Citado na página [60](#).

BONATTI, C.; DÍAZ, L. J.; VIANA, M. **Dynamics beyond uniform hyperbolicity: A global geometric and probabilistic perspective**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2006. v. 102. Citado na página [23](#).

BONATTI, C.; VIANA, M. SRB measures for partially hyperbolic systems whose central direction is mostly contracting. **Israel Journal of Mathematics**, Springer, v. 115, n. 1, p. 157–193, 2000. Citado nas páginas [18](#), [19](#), [67](#), [68](#) e [91](#).

BRIN, M. On dynamical coherence. **Ergodic theory and dynamical systems**, Cambridge Univ Press, v. 23, n. 02, p. 395–401, 2003. Citado nas páginas [17](#), [22](#) e [29](#).

BRIN, M.; BURAGO, D.; IVANOV, S. Dynamical coherence of partially hyperbolic diffeomorphisms of the 3-torus. **J. Mod. Dyn**, Citeseer, v. 3, n. 1, p. 1–11, 2009. Citado nas páginas [22](#), [28](#) e [73](#).

BRIN, M.; STUCK, G. **Introduction to dynamical systems**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2002. Citado na página [33](#).

BRIN, M. I.; PESIN, J. B. Partially hyperbolic dynamical systems. **Mathematics of the USSR-Izvestiya**, IOP Publishing, v. 8, n. 1, p. 177, 1974. Citado nas páginas [17](#), [19](#) e [22](#).

BURAGO, D.; IVANOV, S. Partially hyperbolic diffeomorphisms of 3-manifolds with abelian fundamental groups. **J. Mod. Dyn**, Citeseer, v. 2, n. 4, p. 541–580, 2008. Citado na página [18](#).

- BUZZI, J.; FISHER, T. Entropic stability beyond partial hyperbolicity. **Journal of Modern Dynamics**, v. 7, n. 4, 2013. Citado nas páginas 67, 68 e 91.
- DAQUILEMA, M. R. R. **HYPERBOLIC SETS AND ENTROPY AT HOMOLOGICAL LEVEL**. Tese (Doutorado) — INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA, 2014. Citado na página 47.
- FENLEY, S. R. Quasi-isometric foliations. **Topology**, Elsevier, v. 31, n. 3, p. 667–676, 1992. Citado na página 28.
- FERNANDEZ, P. J. **Medida e integração**. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1976. v. 2. Citado na página 33.
- FISHER, T.; POTRIE, R.; SAMBARINO, M. Dynamical coherence of partially hyperbolic diffeomorphisms of tori isotopic to Anosov. **Mathematische Zeitschrift**, Springer, v. 278, n. 1-2, p. 149–168, 2014. Citado nas páginas 22 e 56.
- FRANKS, J. Anosov diffeomorphisms on tori. **Transactions of the American Mathematical Society**, JSTOR, v. 145, p. 117–124, 1969. Citado na página 23.
- \_\_\_\_\_. Necessary conditions for stability of diffeomorphisms. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 158, n. 2, p. 301–308, 1971. Citado na página 60.
- GOGOLEV, A. How typical are pathological foliations in partially hyperbolic dynamics: an example. **Israel Journal of Mathematics**, Springer, v. 187, n. 1, p. 493–507, 2012. Citado na página 19.
- GOGOLEV, A.; TAHZIBI, A. Center Lyapunov exponents in partially hyperbolic dynamics. **Journal of Modern Dynamics**, v. 8, 2014. Citado nas páginas 74 e 75.
- HAMMERLINDL, A. Leaf conjugacies on the torus. **Ergodic theory and dynamical systems**, Cambridge Univ Press, v. 33, n. 03, p. 896–933, 2013. Citado nas páginas 18, 30 e 31.
- HASSELBLATT, B.; PESIN, Y. Partially hyperbolic dynamical systems. **Handbook of dynamical systems**, Elsevier, v. 1, p. 1–55, 2006. Citado na página 41.
- HERTZ, F. R.; HERTZ, M. A. R.; URES, R. Accessibility and stable ergodicity for partially hyperbolic diffeomorphisms with 1D-center bundle. **Inventiones mathematicae**, Springer, v. 172, n. 2, p. 353–381, 2008. Citado nas páginas 57 e 64.
- HERTZ, F. R.; HERTZ, M. R.; URES, R. A non-dynamically coherent example on  $\mathbb{T}^3$ . In: ELSEVIER. **Annales de l’Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis**. [S.l.], 2015. Citado nas páginas 17 e 22.
- HIRAYAMA, M.; PESIN, Y. Non-absolutely continuous foliations. **Israel Journal of Mathematics**, Springer, v. 160, n. 1, p. 173–187, 2007. Citado nas páginas 19 e 40.
- HIRSCH, M. W.; PUGH, C. C.; SHUB, M. **Invariant manifolds**. [S.l.]: Springer, 1977. Citado nas páginas 17 e 22.
- LEDRAPPIER, F.; YOUNG, L.-S. The metric entropy of diffeomorphisms: Part I: Characterization of measures satisfying Pesin’s entropy formula. **Annals of Mathematics**, JSTOR, p. 509–539, 1985. Citado na página 35.

- LIANG, C.; LIU, G.; SUN, W. X. Equivalent conditions of dominated splitting for volume-preserving diffeomorphisms. **Acta Mathematica Sinica**, Springer, v. 23, n. 9, p. 1563–1576, 2007. Citado na página 60.
- LIMA, E. L. Grupo fundamental e espaços de recobrimento, 2a edição. **IMPA, CNPq, Rio de Janeiro**, 1998. Citado na página 29.
- LIU, P.-D. Pesin's entropy formula for endomorphisms. **Nagoya Mathematical Journal**, Editorial Board, Nagoya Mathematical Journal, v. 150, p. 197–209, 1998. Citado na página 27.
- MAÑÉ, R. Contributions to the stability conjecture. **Topology**, Elsevier, v. 17, n. 4, p. 383–396, 1978. Citado na página 23.
- MAÑÉ, R.; PUGH, C. Stability of endomorphisms. In: **Dynamical Systems—Warwick 1974**. [S.l.]: Springer, 1975. p. 175–184. Citado nas páginas 23, 24 e 70.
- MANNING, A. There are no new Anosov diffeomorphisms on tori. **American Journal of Mathematics**, JSTOR, v. 96, n. 3, p. 422–429, 1974. Citado na página 23.
- MICENA, F. New derived from Anosov diffeomorphisms with pathological center foliation. **Journal of Dynamics and Differential Equations**, Springer, p. 1–14, 2015. Citado nas páginas 18, 19, 28, 39, 40 e 49.
- MICENA, F.; TAHZIBI, A. Regularity of foliations and Lyapunov exponents of partially hyperbolic dynamics on 3-torus. **Nonlinearity**, IOP Publishing, v. 26, n. 4, p. 1071, 2013. Citado nas páginas 18, 28, 34, 35, 39, 40, 49, 73 e 74.
- \_\_\_\_\_. On the unstable directions and Lyapunov exponents of Anosov endomorphisms. **arXiv preprint arXiv:1412.0629**, 2014. Citado nas páginas 18, 24, 28, 39, 49 e 70.
- MICENA, F. P. **Avanços em dinâmica parcialmente hiperbólica e entropia para sistema iterado de funções**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2011. Citado na página 49.
- MILNOR, J. Fubini foiled: Katok's paradoxical example in measure theory. **The Mathematical Intelligencer**, Springer, v. 19, n. 2, p. 30–32, 1997. Citado na página 18.
- OSELEDEC, V. I. A multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems. **Trans. Moscow Math. Soc.**, v. 19, n. 2, p. 197–231, 1968. Citado nas páginas 18 e 25.
- OSELEDETS, V. Valery Oseledets, scholarpedia, 3 (1): 1846. doi: 10.4249/scholarpedia.1846 revision# 64774 [ [http://www.scholarpedia.org/article/oseledets theorem](http://www.scholarpedia.org/article/oseledets%20theorem)]. 2008. Citado na página 27.
- PESIN, Y. B. **Lectures on partial hyperbolicity and stable ergodicity**. [S.l.]: European Mathematical Society, 2004. Citado nas páginas 17, 22 e 85.
- PONCE, G.; TAHZIBI, A. Central Lyapunov exponent of partially hyperbolic diffeomorphisms of  $T^3$ . **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 142, n. 9, p. 3193–3205, 2014. Citado nas páginas 19, 85 e 88.

- PONCE, G.; TAHZIBI, A.; VARÃO, R. Minimal yet measurable foliations. **J. Mod. Dyn.**, v. 8, p. 93–107, 2014. Citado nas páginas 19, 32 e 41.
- PRZYTYCKI, F. Anosov endomorphisms. **Studia mathematica**, v. 3, n. 58, p. 249–285, 1976. Citado nas páginas 23 e 24.
- PUGH, C.; VIANA, M.; WILKINSON, A. **Absolute continuity of foliations**. [S.l.]: preparation, 2007. Citado nas páginas 19 e 33.
- RUELLE, D.; WILKINSON, A. Absolutely singular dynamical foliations. **Communications in Mathematical Physics**, Springer, v. 219, n. 3, p. 481–487, 2001. Citado nas páginas 19, 40 e 42.
- SAGHIN, R. Volume growth and entropy for  $C^1$  partially hyperbolic diffeomorphisms. **Discrete and continuous dynamical systems**, v. 34, n. 9, p. 3798–3801, 2014. Citado na página 45.
- SAGHIN, R.; XIA, Z. Geometric expansion, Lyapunov exponents and foliations. In: ELSEVIER. **Annales de l’Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis**. [S.l.], 2009. v. 26, n. 2, p. 689–704. Citado nas páginas 19 e 56.
- SAKAI, K. Anosov maps on closed topological manifolds. **Journal of the Mathematical Society of Japan**, The Mathematical Society of Japan, v. 39, n. 3, p. 505–519, 1987. Citado na página 24.
- SHUB, M.; WILKINSON, A. Pathological foliations and removable zero exponents. **Inventiones mathematicae**, Springer, v. 139, n. 3, p. 495–508, 2000. Citado na página 19.
- TAHZIBI, A. Stably ergodic diffeomorphisms which are not partially hyperbolic. **Israel Journal of Mathematics**, Springer, v. 142, n. 1, p. 315–344, 2004. Citado na página 91.
- ULCIGRAI, C. Dynamical systems and ergodic theory, teaching block. 2010. Citado na página 27.
- URES, R. Intrinsic ergodicity of partially hyperbolic diffeomorphisms with a hyperbolic linear part. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 140, n. 6, p. 1973–1985, 2012. Citado nas páginas 74 e 76.
- VARÃO, R. Lyapunov exponents and smooth invariant foliations for partially hyperbolic diffeomorphisms on. **Dynamical Systems**, Taylor & Francis, v. 30, n. 2, p. 189–199, 2015. Citado na página 75.
- \_\_\_\_\_. Center foliation: absolute continuity, disintegration and rigidity. **Ergodic Theory and Dynamical Systems**, Cambridge Univ Press, v. 36, n. 01, p. 256–275, 2016. Citado nas páginas 19, 42 e 75.
- \_\_\_\_\_. Rigidity for partially hyperbolic diffeomorphisms. **arXiv preprint arXiv:1608.05589**, 2016. Citado na página 75.
- VIANA, M.; OLIVEIRA, K. Fundamentos da teoria ergódica. **Rio de Janeiro: SBM**, v. 90, 2014. Citado nas páginas 26, 31 e 32.
- VIANA, M.; YANG, J. Physical measures and absolute continuity for one-dimensional center direction. In: ELSEVIER. **Annales de l’Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis**. [S.l.], 2013. v. 30, n. 5, p. 845–877. Citado na página 37.

---

\_\_\_\_\_. Measure-theoretical properties of center foliations. **arXiv preprint arXiv:1603.03609**, 2016. Citado nas páginas [19](#) e [42](#).



---



---

## CONES

---



---

Aqui faremos uma adaptação do resultado do apêndice de (PONCE; TAHZIBI, 2014) de  $\mathbb{T}^3$  para  $\mathbb{T}^d$ . Como em (PONCE; TAHZIBI, 2014) vamos recordar a equivalente definição de parcialmente hiperbólico pelo critério de cones.

**Definição A.0.1.** Dado uma decomposição ortogonal do fibrado tangente de  $M$ ,  $TM = E \oplus F$ , e uma constante  $\beta > 0$ , para cada  $x \in M$  nós definimos o cone centrado em  $E(x)$  com ângulo  $\beta$  como

$$C(E, x, \beta) = \{v \in T_x M : \|v_F\| \leq \beta \|v_E\|, \text{ onde } v = v_E + v_F, v_E \in E(x), v_F \in F(x)\}.$$

Dado um difeomorfismo parcialmente hiperbólico  $f : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$  com decomposição  $TM = E^s \oplus E^c \oplus E^u$ , existe um produto interno adaptado (e então uma norma adaptada), de forma que a decomposição é ortogonal (veja (PESIN, 2004, pg. 14)). Então, dado  $\beta > 0$  nós podemos definir uma família de cones centrados nos subfibrados  $E^\sigma(x)$  com ângulo  $\beta > 0$ ,  $C^\sigma(x, \beta)$ ,  $\sigma = s, c, u, cs, cu$ .

Consideremos  $f : M \rightarrow M$  um difeomorfismo parcialmente hiperbólico (absoluto). Usando a norma adaptada  $\|\cdot\|$ , considerando a decomposição invariante  $TM = E^s \oplus E^c \oplus E^u$ , como sendo uma decomposição ortogonal, existem números

$$0 < \lambda_1 \leq \mu_1 < \lambda_2 \leq \mu_2 < \lambda_3 \leq \mu_3, \mu_1 < 1, \lambda_3 > 1$$

em que

$$\lambda_1 \leq \|Df(x)|E^s(x)\| \leq \mu_1,$$

$$\lambda_2 \leq \|Df(x)|E^c(x)\| \leq \mu_2,$$

$$\lambda_3 \leq \|Df(x)|E^u(x)\| \leq \mu_3.$$

A parcialidade hiperbólica pode ser descrita em termos de famílias de cones invariantes (veja (PESIN, 2004, pg. 15)). Mais especificamente, seja  $f : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$  um difeomorfismo parcialmente

hiperbólico e seja

$$T_x\mathbb{T}^d = E^s(x) \oplus E^c(x) \oplus E^u(x)$$

a decomposição ortogonal de  $T\mathbb{T}^d$ . Dado  $\beta > 0$  definimos as famílias de cones

$$\begin{aligned} C^s(x, \beta) &= C(x, E^s(x), \beta), & C^u(x, \beta) &= C(x, E^u(x), \beta), \\ C^{cs}(x, \beta) &= C(x, E^{cs}(x), \beta), & C^{cu}(x, \beta) &= C(x, E^{cu}(x), \beta), \end{aligned}$$

onde  $E^{cs}(x) = E^c \oplus E^s(x)$  e  $E^{cu}(x) = E^c \oplus E^u(x)$ . Então  $f$  é parcialmente hiperbólico absoluto se, e somente se, existe  $0 < \beta < 1$  e constantes  $0 < \mu_1 < \lambda_2 \leq \mu_2 < \lambda_3$  com  $\mu_1 < 1$  e  $\lambda_3 > 1$  tal que

$$\begin{aligned} Df^{-1}(x)(C^\sigma(x, \beta)) &\subset C^\sigma(f^{-1}(x), \beta), \quad \sigma = s, cs, \\ Df(x)(C^\psi(x, \beta)) &\subset C^\psi(f(x), \beta), \quad \psi = u, cu \end{aligned} \tag{A.1}$$

e

$$\begin{aligned} \|Df^{-1}(x)v\| &> \mu_1^{-1}\|v\|, \quad v \in C^s(x, \beta), \\ \|Df^{-1}(x)v\| &> \mu_2^{-1}\|v\|, \quad v \in C^{cs}(x, \beta), \\ \|Df(x)v\| &> \lambda_3\|v\|, \quad v \in C^u(x, \beta), \\ \|Df(x)v\| &> \lambda_2\|v\|, \quad v \in C^{cu}(x, \beta). \end{aligned} \tag{A.2}$$

Para o caso linear, podemos obter uma conclusão mais precisa e interessante, relacionando as constantes das equações A.1 e A.2 com os autovalores da aplicação linear. Para um difeomorfismo parcialmente hiperbólico linear nós podemos explicitar a relação entre o ângulo da família de cones invariantes e a taxa de dominação entre os subfibrados estável e instável.

Considere  $f : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$  um difeomorfismo parcialmente hiperbólico linear e denote seus autovalores por  $\lambda_1^s, \lambda_2^s, \dots, \lambda_i^s, \lambda_1^c, \dots, \lambda_j^c, \lambda_1^u, \dots, \lambda_{k-1}^u, \lambda_k^u$ , onde

$$|\lambda_1^s| < |\lambda_2^s| < \dots < |\lambda_i^s| < |\lambda_1^c| < \dots < |\lambda_j^c| < |\lambda_1^u| < \dots < |\lambda_{k-1}^u| < |\lambda_k^u| \text{ com } |\lambda_i^s| < 1 < |\lambda_1^u|.$$

Considere

$$\Theta := \min \left\{ \frac{\lambda_1^c}{\lambda_i^s}, \frac{\lambda_1^u}{\lambda_j^c} \right\}.$$

Escolhemos um número  $\beta > 0$  tal que

$$1 < (1 + \beta)^2 < \Theta. \tag{A.3}$$

Da definição de  $\beta$  segue que

$$(1 + \beta)|\lambda_i^s| < \frac{|\lambda_1^c|}{1 + \beta} < (1 + \beta)|\lambda_j^c| < \frac{|\lambda_1^u|}{1 + \beta}.$$

Podemos então encontrar constantes  $\mu_1, \lambda_2, \mu_2, \lambda_3$  tal que

$$(1 + \beta)|\lambda_i^s| < \mu_1 < \lambda_2 < \frac{|\lambda_1^c|}{1 + \beta} < (1 + \beta)|\lambda_j^c| < \mu_2 < \lambda_3 < \frac{|\lambda_1^u|}{1 + \beta}, \tag{A.4}$$



onde  $\mu_1 < 1 < \lambda_3$ . Agora vamos verificar que com as constantes definidas nas equações A.3 e A.4 e as famílias de cones estável, instável, centro-estável e centro-instável satisfazem A.1 e A.2. Vamos fazer para cada um dos cones:

- Seja  $v = v_s + v_{cu} \in C^{cu}(x, \beta)$ , então

$$\|Df(x)v_s\| \leq |\lambda_i^s| \|v_s\| \leq |\lambda_i^s| \beta \|v_{cu}\| < \beta |\lambda_1^c| \|v_{cu}\| \leq \beta \|Df(x)v_{cu}\|$$

Isto é  $Df(x)(C^{cu}(x, \beta)) \subset C^{cu}(f(x), \beta)$ .

Além disso,

$$\|Df(x)v\|^2 \geq \|Df(x)v_{cu}\|^2 \geq (\lambda_1^c)^2 \|v_{cu}\|^2.$$

Pela Equação A.4 sabemos que  $|\lambda_1^c| > (1 + \beta)\lambda_2$ . Assim

$$\begin{aligned} \|Df(x)v\|^2 &> (1 + \beta)^2 (\lambda_2)^2 \|v_{cu}\|^2 \geq (\lambda_2)^2 (\|v_{cu}\|^2 + \beta^2 \|v_{cu}\|^2) \\ &\geq (\lambda_2)^2 (\|v_{cu}\|^2 + \|v_s\|^2) = (\lambda_2 \|v\|)^2 \end{aligned}$$

Logo  $\|Df(x)v\| > \lambda_2 \|v\|$ .

- Seja  $v = v_u + v_{cs} \in C^{cs}(x, \beta)$ , então

$$\|Df^{-1}(x)v_u\| \leq \frac{1}{|\lambda_1^u|} \|v_u\| \leq \frac{1}{|\lambda_1^u|} \beta \|v_{cs}\| < \frac{1}{|\lambda_j^c|} \beta \|v_{cs}\| \leq \beta \|Df^{-1}(x)v_{cs}\|$$

Isto é  $Df^{-1}(x)(C^{cs}(x, \beta)) \subset C^{cs}(f^{-1}(x), \beta)$ .

Além disso,

$$\|Df^{-1}(x)v\|^2 \geq \|Df^{-1}(x)v_{cs}\|^2 \geq \frac{1}{(\lambda_1^c)^2} \|v_{cs}\|^2.$$

Por A.4 sabemos que  $|\lambda_j^c|^{-1} > (1 + \beta)\mu_2^{-1}$ . Assim

$$\begin{aligned} \|Df^{-1}(x)v\|^2 &> (1 + \beta)^2 (\mu_2^{-1})^2 \|v_{cs}\|^2 \geq (\mu_2^{-1})^2 (\|v_{cs}\|^2 + \beta^2 \|v_{cs}\|^2) \\ &\geq (\mu_2^{-1})^2 (\|v_{cs}\|^2 + \|v_u\|^2) = (\mu_2^{-1} \|v\|)^2 \end{aligned}$$

Logo  $\|Df^{-1}(x)v\| > \mu_2^{-1} \|v\|$ .

- Seja  $v = v_{cs} + v_u \in C^u(x, \beta)$ , então

$$\|Df(x)v_{cs}\| \leq |\lambda_j^c| \|v_{cs}\| \leq |\lambda_1^s| \beta \|v_u\| < \beta |\lambda_1^u| \|v_u\| \leq \beta \|Df(x)v_u\|$$

Isto é  $Df(x)(C^u(x, \beta)) \subset C^u(f(x), \beta)$ .

Além disso,

$$\|Df(x)v\|^2 \geq \|Df(x)v_u\|^2 \geq (\lambda_1^u)^2 \|v_u\|^2.$$

Por A.4 sabemos que  $|\lambda_1^u| > (1 + \beta)\lambda_3$ . Assim

$$\begin{aligned} \|Df(x)v\|^2 &> (1 + \beta)^2 (\lambda_3)^2 \|v_u\|^2 \geq (\lambda_3)^2 (\|v_u\|^2 + \beta^2 \|v_u\|^2) \\ &\geq (\lambda_3)^2 (\|v_u\|^2 + \|v_{cs}\|^2) = (\lambda_3 \|v\|)^2 \end{aligned}$$

Logo  $\|Df(x)v\| > \lambda_3\|v\|$ .

- Seja  $v = v_{cu} + v_s \in C^s(x, \beta)$ , então

$$\|Df^{-1}(x)v_{cu}\| \leq \frac{1}{|\lambda_1^c|}\|v_{cu}\| \leq \frac{1}{|\lambda_1^c|}\beta\|v_s\| < \frac{1}{|\lambda_i^s|}\beta\|v_s\| \leq \beta\|Df^{-1}(x)v_s\|$$

Isto é  $Df^{-1}(x)(C^s(x, \beta)) \subset C^s(f^{-1}(x), \beta)$ .

Além disso,

$$\|Df^{-1}(x)v\|^2 \geq \|Df^{-1}(x)v_s\|^2 \geq \frac{1}{(\lambda_i^s)^2}\|v_s\|^2.$$

Por A.4 sabemos que  $|\lambda_i^s|^{-1} > (1 + \beta)\mu_1^{-1}$ . Assim

$$\begin{aligned} \|Df^{-1}(x)v\|^2 &> (1 + \beta)^2(\mu_1^{-1})^2\|v_s\|^2 \geq (\mu_1^{-1})^2(\|v_s\|^2 + \beta^2\|v_s\|^2) \\ &\geq (\mu_1^{-1})^2(\|v_s\|^2 + \|v_{cu}\|^2) = (\mu_1^{-1}\|v\|)^2 \end{aligned}$$

Logo  $\|Df^{-1}(x)v\| > \mu_1^{-1}\|v\|$ .

O próximo lema é totalmente análogo ao (PONCE; TAHZIBI, 2014, Lema 6.1), assim como a sua demonstração. Este lema nos diz o tamanho da  $C^1$ -vizinhança de um difeomorfismo parcialmente hiperbólico linear, em que todos os difeomorfismos nesta vizinhança são parcialmente hiperbólico absoluto.

**Lema A.0.1.** *Seja  $f : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$  um difeomorfismo parcialmente hiperbólico linear com autovalores  $\lambda_1^s, \lambda_2^s, \dots, \lambda_i^s, \lambda_1^c, \dots, \lambda_j^c, \lambda_1^u, \dots, \lambda_{k-1}^u, \lambda_k^u$ , onde*

$$|\lambda_1^s| < |\lambda_2^s| < \dots < |\lambda_i^s| < |\lambda_1^c| < \dots < |\lambda_j^c| < |\lambda_1^u| < \dots < |\lambda_{k-1}^u| < |\lambda_k^u| \text{ com } |\lambda_i^s| < 1 < |\lambda_1^u|,$$

então existe uma constante  $\varepsilon > 0$  tal que para cada difeomorfismo  $g : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$  com  $\|g - Id\|_{C^1} < \varepsilon$  (norma adaptada de  $f$ ), a composição  $f \circ g$  é um difeomorfismo parcialmente hiperbólico absoluto. A constante  $\varepsilon$  depende somente de  $\Theta := \min \left\{ \frac{\lambda_1^c}{\lambda_i^s}, \frac{\lambda_1^u}{\lambda_j^c} \right\}$ .

*Demonstração.* Denote a decomposição invariante de  $f$  por  $T_xM = E^s(x) \oplus E^c(x) \oplus E^u(x)$ . Considere a norma adaptada  $\|\cdot\|$  de forma que a decomposição é ortogonal. Como  $f$  é um difeomorfismo parcialmente hiperbólico linear podemos escolher constantes

$$0 < \lambda_1 \leq \mu_1 < \lambda_2 \leq \mu_2 < \lambda_3 \leq \mu_3, \mu_1 < 1, \lambda_3 > 1$$

e seja  $\beta$  como foi definido nas equações A.3 e A.4.

Para  $v \in T_xM$  podemos escrever  $v = v_s + v_c + v_u$  com  $v_\sigma \in E^\sigma(x)$ ,  $\sigma = s, c, u$ .

- Se  $v \in C^u(x, \beta)$ , então  $\|v_{cs}\| \leq \beta\|v_u\|$ , onde  $v_{cs} = v_s + v_c$ , assim

$$\|Df(x)v_{cs}\| \leq \mu_2\|v_{cs}\| \leq \mu_2\beta\|v_u\| \leq \mu_2\beta(\lambda_3)^{-1}\|Df(x)v_u\|,$$

isto é,  $Df(x)(C^u(x, \beta)) \subset C^u(f(x), (\mu_2/\lambda_3)\beta)$ .

- Se  $v \in C^{cu}(x, \beta)$ , então  $\|v_s\| \leq \beta\|v_{cu}\|$ , onde  $v_{cu} = v_c + v_u$ , assim

$$\|Df(x)v_s\| \leq \mu_1\|v_s\| \leq \mu_1\beta\|v_{cu}\| \leq \mu_1\beta(\lambda_2)^{-1}\|Df(x)v_{cu}\|,$$

isto é,  $Df(x)(C^{cu}(x, \beta)) \subset C^u(f(x), (\mu_1/\lambda_2)\beta)$ .

- Se  $v \in C^s(x, \beta)$ , então  $\|v_{cu}\| \leq \beta\|v_s\|$ , onde  $v_{cu} = v_c + v_u$ , assim

$$\|Df^{-1}(x)v_{cu}\| \leq \lambda_2^{-1}\|Df \circ Df^{-1}(x)v_{cu}\| = \lambda_2^{-1}\|v_{cu}\| \leq \lambda_2^{-1}\beta\|v_s\| \leq \lambda_2^{-1}\beta\mu_1\|Df^{-1}(x)v_s\|,$$

isto é,  $Df^{-1}(x)(C^s(x, \beta)) \subset C^s(f^{-1}(x), (\mu_1/\lambda_2)\beta)$ .

- Se  $v \in C^{cs}(x, \beta)$ , então  $\|v_u\| \leq \beta\|v_{cs}\|$ , onde  $v_{cs} = v_c + v_s$ , assim

$$\|Df^{-1}(x)v_u\| \leq \lambda_3^{-1}\|Df \circ Df^{-1}(x)v_u\| = \lambda_3^{-1}\|v_u\| \leq \lambda_3^{-1}\beta\|v_{cs}\| \leq \lambda_3^{-1}\beta\mu_2\|Df^{-1}(x)v_{cs}\|,$$

isto é,  $Df^{-1}(x)(C^{cs}(x, \beta)) \subset C^{cs}(f^{-1}(x), (\mu_2/\lambda_3)\beta)$ .

Definimos  $\gamma := \max\left\{\frac{\mu_2}{\lambda_3}, \frac{\mu_1}{\lambda_2}\right\} < 1$ . Assim nós temos

$$\begin{aligned} Df(x)(C^\sigma(x, \beta)) &\subset C^\sigma(f(x), \gamma\beta), \quad \sigma = u, cu, \\ Df^{-1}(x)(C^\psi(x, \beta)) &\subset C^\psi(f^{-1}(x), \gamma\beta), \quad \psi = s, cs. \end{aligned}$$

Observe que pelas equações A.3 e A.4,  $\beta$  é  $\gamma$  só dependem das taxas  $\frac{\lambda_1^c}{\lambda_i^s}$  e  $\frac{\lambda_j^u}{\lambda_1^c}$ .

Como a decomposição invariante é constante, podemos tomar um  $\varepsilon > 0$  dependendo somente das taxas  $\frac{\lambda_1^c}{\lambda_i^s}$  e  $\frac{\lambda_j^u}{\lambda_1^c}$  tal que se  $\|g - Id\|_0 < \varepsilon$ , então

$$\begin{aligned} Dg(x)(C^\sigma(x, \gamma\beta)) &\subset C^\sigma(g(x), \beta), \quad \sigma = u, cu, \\ Dg^{-1}(x)(C^\psi(x, \gamma\beta)) &\subset C^\psi(g^{-1}(x), \beta), \quad \psi = s, cs. \end{aligned}$$

Sejam

$$L < \frac{1}{\mu_1}, \quad l > \frac{1}{\lambda_3}, \quad \frac{l}{L} > \gamma,$$

com

$$l\|v\| \leq \|Dg(x)v\| \leq L\|v\|.$$

Então nós temos

$$\begin{aligned} D(f \circ g)(x)(C^\sigma(x, \gamma\beta)) &\subset C^\sigma(f(g(x)), \gamma\beta), \quad \sigma = u, cu, \\ D(f \circ g)^{-1}(x)(C^\psi(x, \beta)) &\subset C^\psi(g^{-1}(f^{-1}(x)), \beta), \quad \psi = s, cs. \end{aligned}$$

Agora vamos mostrar as contrações e expansões uniformes dessas famílias de cones.

- Se  $v \in C^u(x, \gamma\beta)$ , então

$$\|D(f \circ g)(x)v\| \geq \lambda_3\|Dg(x)v\| \geq \lambda_3l\|v\|.$$

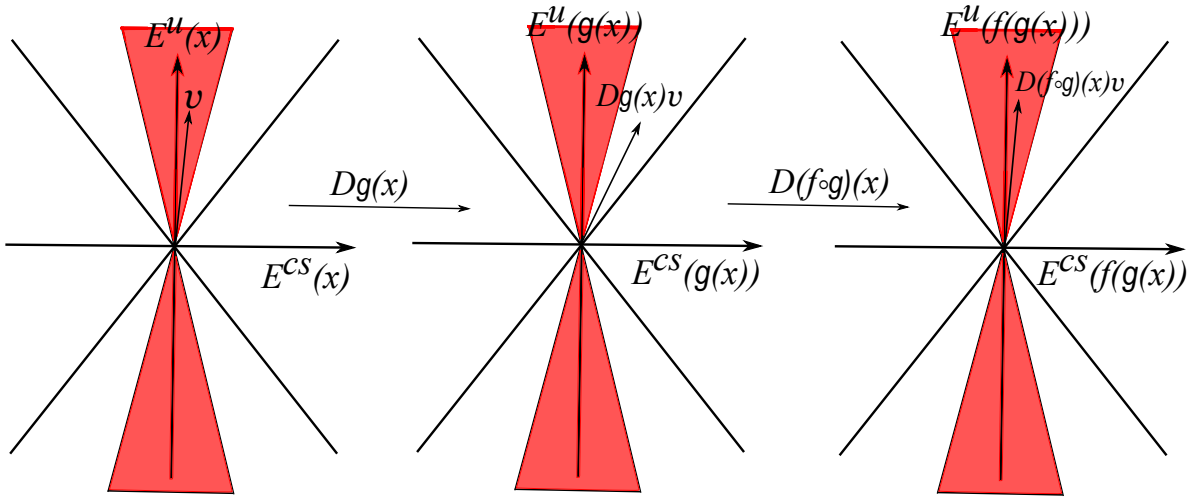


Figura 4

- Se  $v \in C^{cs}(x, \beta)$ , então

$$\|D(f \circ g)^{-1}(x)v\| \geq L^{-1}\|Df^{-1}(x)v\| > L^{-1}\mu_2^{-1}\|v\|.$$

- Se  $v \in C^{cu}(x, \gamma\beta)$ , então

$$\|D(f \circ g)(x)v\| \geq \lambda_2\|Dg(x)v\| \geq \lambda_2l\|v\|.$$

- Se  $v \in C^s(x, \beta)$ , então

$$\|D(f \circ g)^{-1}(x)v\| \geq L^{-1}\|Df^{-1}(x)v\| > L^{-1}\mu_1^{-1}\|v\|.$$

Além disso,

$$0 < L\mu_1 < l\lambda_2 \leq L\mu_2 < l\lambda_3, \text{ com } L\mu_1 < 1, l\lambda_3 > 1,$$

portanto  $f \circ g$  é parcialmente hiperbólico absoluto.  $\square$

## EXEMPLOS DE BONATTI-VIANA

Aqui reescreveremos parte da construção de Bonatti-Viana, Teorema 6.1.2. Não provaremos a transitividade, nem a integrabilidade das distribuições  $E^{cs}$  e  $E^{cu}$ . Para mais detalhes veja (BONATTI; VIANA, 2000, Seção 6.5) e (BUZZI; FISHER, 2013), veja também (TAHZIBI, 2004).

Seja  $f_0 : \mathbb{T}^4 \rightarrow \mathbb{T}^4$  um difeomorfismo Anosov linear com os seguintes autovalores

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \frac{1}{3} < 1 < 3 < \lambda_3 < \lambda_4.$$

Vamos construir um conjunto  $C^1$ -aberto de difeomorfismos  $f$  de  $\mathbb{T}^4$  satisfazendo as condições:

- (1)  $f$  tem campos de cones centro estável  $C^{cs}$  e centro instável  $C^{cu}$ , ambos com ângulo limitado por  $\alpha > 0$  e contendo, respectivamente, o subfibrado estável e subfibrado instável de  $f_0$ ;
- (2) Existe  $\sigma > 1$  tal que  $|\text{Jac}f(x)|TD^{cu}| \geq \sigma$  para cada disco  $D^{cu}$  tangente ao campo de cone  $C^{cu}$  e  $|\text{Jac}f(x)|TD^{cs}| \geq \sigma^{-1}$  para cada disco  $D^{cs}$  tangente ao campo de cone  $C^{cs}$ ;
- (3) Existe  $\lambda \leq 1/3$  tal que  $\|Df(x)v^{cu}\| \geq \lambda^{-1}\|v^{cu}\|$  e  $\|Df^{-1}(x)v^{cs}\| \geq \lambda^{-1}\|v^{cs}\|$  para cada  $x$  fora de um aberto  $V$  e todo  $v^{cu} \in C^{cu}$ ,  $v^{cs} \in C^{cs}$ .

Nós faremos a construção de tal forma que se o difeomorfismo Anosov inicial  $f_0$  preserva volume, então as aplicações obtidas também preservam volume. A menos de trocarmos por algum iterado, podemos assumir que  $f_0$  tem dois pontos fixos diferentes  $p_1$  e  $p_2$ . Em uma vizinhança  $B(p_1, \delta)$  de  $p_1$  nós modificaremos a aplicação ao longo da direção estável, mantendo a direção instável essencialmente sem alterações. Então nós fazemos o mesmo para uma vizinhança  $B(p_2, \delta)$  de  $p_2$ , trocando os papéis das direções estável e instável. Considere dois modelos de campos de vetores que preservam volume no disco unitário bidimensional  $D^2$ , que são mostrados

na Figura 5. Ambos são zero em uma vizinhança do bordo de  $D^2$ . O primeiro modelo,  $X$ , tem uma singularidade tipo centro na origem. O segundo modelo,  $Y$ , tem uma sela hiperbólica na origem. Eles podem ser obtidos por exemplo, como campos de vetores Hamiltonianos de alguma função suave, que é constante no bordo e tem um ponto crítico tipo sela na origem.

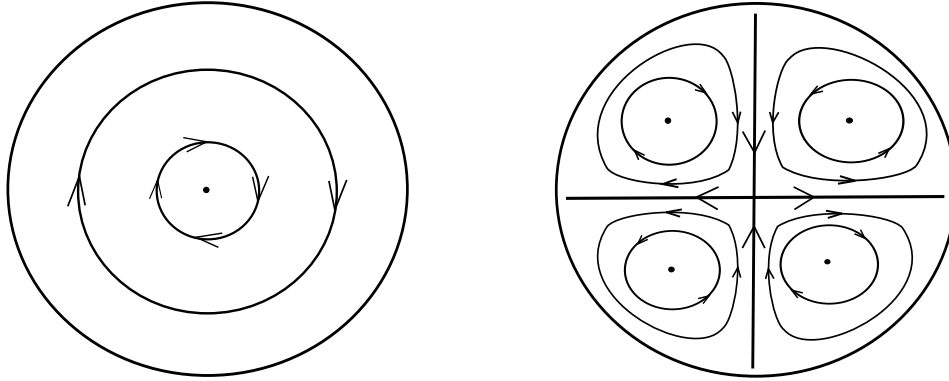


Figura 5 – Os campos  $X$  e  $Y$ , respectivamente.

Agora, construiremos campos de vetores  $\tilde{X}$  e  $\tilde{Y}$  em  $D^2 \times D^2$ , dados por

$$\tilde{X}(x, y) = (\phi(y)X(x), 0), \quad \tilde{Y}(x, y) = (\phi(y)Y(x), 0)$$

onde  $\phi : D^2 \rightarrow [0, 1]$  é uma função suave tal que  $\phi(0) = 1$  e  $\phi = 0$  em uma vizinhança do bordo de  $D^2$ . Note que  $\tilde{X}, \tilde{Y}$  ainda preservam volume. Além disso,  $\tilde{Y}$  tem uma singularidade na origem com uma direção estável, uma instável e duas centrais.

Faremos a construção em três etapas.

Primeiro nós fixamos uma carta linear  $\varphi_1 : D^2 \times D^2 \rightarrow M$  aplicando 0 em  $p_1$ , as folhas horizontais  $D^2 \times \{y\}$  nas folhas estáveis de  $f_0$  e as folhas verticais  $\{x\} \times D^2$  nas folhas instáveis de  $f_0$ . Também vamos supor que a variedade instável local do ponto sela de  $Y$  é mapeado paralelamente no autoespaço correspondente a contração mais fraca  $\lambda_2$  de  $f_0$ .

Nós consideramos a família de difeomorfismo a 1-parâmetro  $f_t = (\varphi_* \tilde{Y}_t)_t \circ f_0$  obtida pela composição de  $f_0$  com o fluxo do push-forward de  $\tilde{Y}$ . O ponto  $p_1$  é fixo para cada  $f_t$ ; além disso, o autovalor da contração mais fraca de  $Df_t(p)$  cresce quando  $t$  se afasta de zero. Eventualmente, para algum  $t = t_0$  (dependendo somente de  $\lambda_2$  e do autovalor expansivo de  $\tilde{Y}$  na origem) este auto valor torna-se igual a 1, então o índice estável de  $p_1$  muda para 1. Nesse processo dois novos pontos fixos tipo sela de índice 2 são criados em uma vizinhança de  $p_1$ , veja Figura 6.

Como segunda etapa, consideremos  $g_0 = f_{t_1}$  com  $t_1$  levemente maior que  $t_0$  e seja  $q_1$  um dos novos pontos fixos de índice 2. Nós modificaremos  $g_0$  em uma vizinhança de  $q_1$  disjunta de  $p_1$ , da mesma forma como fizemos com  $f_0$  próximos de  $p_1$ , exceto que desta vez usaremos o campo  $\tilde{X}$  ao invés de  $\tilde{Y}$ . Nós obtemos uma família de difeomorfismo a 1-parâmetro  $g_s$  tal que  $q_1$  é ponto fixo para cada  $g_s$ , com os autovalores contrativos de  $Dg_s(q_1)$  tornando-se iguais, e então complexos conjugados, quando  $s$  torna-se maior que algum  $s_0$ , veja Figura 7.

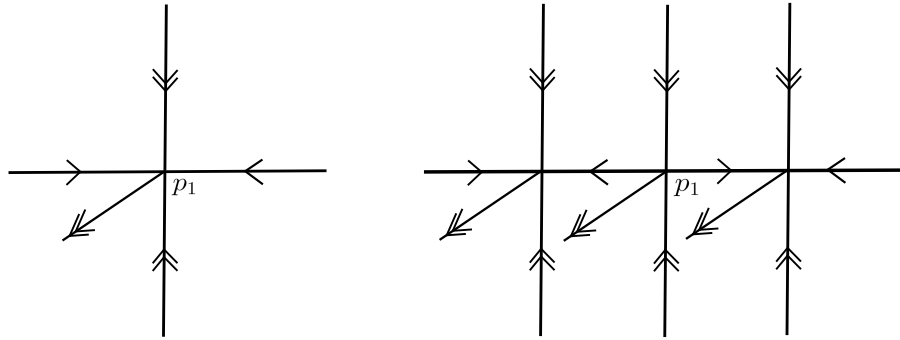


Figura 6

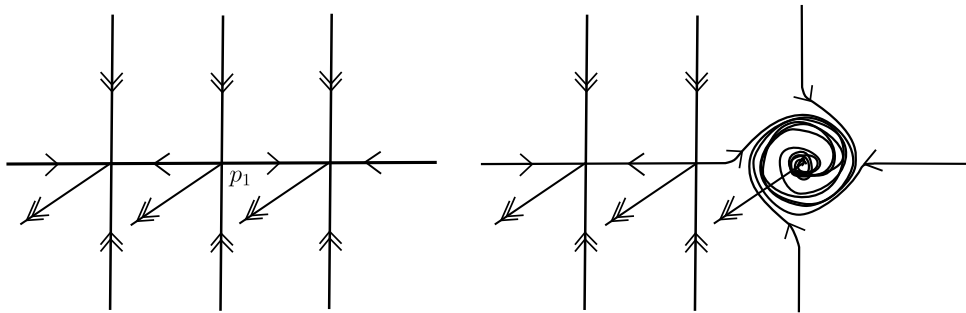


Figura 7

Nós escolhemos  $s_1$  levemente maior que  $s_0$  e seja  $h = g_{s_1}$ . A razão por que ainda não terminamos é que  $h$  pode não preservar um campo de cone centro-instável fino como na condição (1). Fixe  $\alpha$  como em (1).

Observe que todas as modificações que fizemos foi na folheação estável de  $f_0$ . Assim, por um lado, esta folheação é ainda invariante (mas, não é mais contrativa) por  $h$ . Por outro lado, os vetores no subfibrado instável de  $f_0$  são ainda expansores pela  $Dh$  (mas, o subfibrado não é mais invariante). Como consequência, qualquer campo de cones suficientemente fino em torno da folheação estável de  $f_0$  é um campo de cones centro-instável de  $h$ . Nós escolhemos um tal campo de cones, então o seu complementar  $C$  é um campo de cone instável (mas pode ter o ângulo muito grande). Agora conjugaremos  $h$  em  $\varphi(D^2 \times D^2)$  por alguma aplicação linear  $(x, y) \mapsto (rx, y)$ , onde  $(x, y)$  são as coordenadas em  $D^2 \times D^2$  e  $r > 0$  (a aplicação conjugada se estende corretamente porque  $h = f_0$  é uma aplicação linear de  $\mathbb{T}^4$  em uma vizinhança da imagem da carta local). Tomando  $r > 0$  suficientemente pequeno nós temos que a imagem  $C^{cu}$  de  $C$  sobre esta conjugação tem tamanho menor que  $\alpha$ , e assim é um campo de cones centro instável fino para a nova aplicação  $f$ .

A menos de uma modificação análoga, realizada de forma independente em uma vizinhança de  $p_2$ , esta  $f$  é a aplicação que estávamos procurando, as condições (1) a (3) seguem da construção e também valem para difeomorfismos em uma vizinhança pequena de  $f$ .