Estudo de uma classe de equações elípticas via métodos variacionais e topológicos

Júlia Silva Silveira Borges

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura:_____

Estudo de uma classe de equações elípticas via métodos variacionais e topológicos

Júlia Silva Silveira Borges

Orientadora: **Prof. Dr. Sérgio Henrique Monari Soares**

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências - Matemática . *VERSÃO REVISADA*

USP – São Carlos
Junho de 2012

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S732e Silva Silveira Borges, Júlia
Estudo de uma classe de equações elípticas via métodos variacionais e topológicos / Júlia Silva Silveira Borges; orientador Sérgio Henrique Monari Soares. -- São Carlos, 2012.
68 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2012.

1. Equações diferenciais parciais . 2. Equações diferenciais parciais elípticas. 3. Problemas elípticos assintoticamente lineares. I. Monari Soares, Sérgio Henrique , orient. II. Título.

Aos meus pais
Sílvia e Edison.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter permitido que eu pudesse realizar os meus sonhos. Por sempre me mostrar das mais diversas maneiras porque estou aqui e que caminho devo seguir.

Aos meus pais, Sílvia e Edison, e a minha irmã, Lívia, agradeço pelo amor incondicional, pela ajuda e determinação em sonhar junto e realizar junto. Agradeço pela esperança que sempre me deram, confiança que em mim depositaram e certeza de que eu poderia chegar até aqui.

Ao meu marido Rodrigo, que soube esperar e caminhar junto, agradeço todo apoio, dedicação e luta.

Aos amigos, agradeço àqueles a quem tive que deixar em Franca e souberam compreender, e àqueles que encontrei no meio do caminho.

Aos professores da USP, tão importantes em minha formação, agradeço o quanto ensinaram e ajudaram a realizar. Em especial ao Prof. Wagner e a Profa. Sandra pelos conselhos e confiança.

Ao meu orientador Prof. Sérgio Monari, agradeço por tantas horas de trabalho trasmitindo-me sua experiência em forma de ajuda, orientação e conselhos.

E por último, agradeço a CAPES pelo apoio financeiro sem o qual não seria possível a realização deste trabalho.

"Feliz aquele que transfere o que sabe e aprende o que ensina."

Cora Coralina

Resumo

Alguns problemas elípticos assintoticamente lineares são considerados e é provada a existência de solução. Os principais resultados são estabelecidos de dois modos distintos e as provas são baseadas em resultados clássicos da teoria de pontos críticos, a saber: minimização, princípio variacional de Ekeland, grau topológico, teorema do ponto de sela e o teorema do passo da montanha.

Abstract

Some asymptotically linear elliptic problems are considered and solutions are proved to exist. The main results are proved in two different ways. The proofs rely on some classical results in Critical Point Theory such as minimization, Ekeland variational principle, topological degree, saddle point theorem and mountain pass theorem.

Sumário

Resumo **i**

Abstract **iii**

Introdução **1**

1 Teorema 0.0.1 **5**

1.1 Demonstração via minimização. 5

1.1.1 Demonstração do Teorema 0.0.1. 6

1.2 Demonstração via o Princípio Variacional de Ekeland 9

1.2.1 Princípio Variacional de Ekeland 9

1.2.2 A Condição de Palais-Smale 10

1.2.3 Demonstração do Teorema 0.0.1 16

2 Teorema 0.0.2 **17**

2.1 Demonstração via teoria do grau 17

2.1.1 Estimativa a Priori 17

2.1.2 Demonstração do Teorema 0.0.2 18

2.2 Demonstração via o teorema do ponto de sela 20

2.2.1 Lema de Deformação 20

2.2.2 Teorema do Ponto de Sela 23

2.2.3 Demonstração do Teorema 0.0.2 24

3 Teorema 0.0.3 **27**

3.1 Teorema do Passo da Montanha 27

3.2 Demonstração do Teorema 0.0.3 28

A Espaços de Sobolev **33**
A.1 Teoremas de Imersão 34

B Alguns Resultados **35**

C O Funcional Energia **37**

D Espectro do Laplaciano **45**
D.1 O operador solução 45
D.2 Propriedades do operador solução 46
D.3 Caracterização de λ_1 51

E Alguns resultados sobre Teoria do Grau **55**
E.1 Grau de Brouwer 55
E.1.1 Caso Regular 55
E.1.2 Definição do Grau para $\varphi \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega)$. 56
E.1.3 Definição de Grau de Brouwer para funções contínuas. 56
E.1.4 Principais propriedades do Grau de Brouwer: 57
E.1.5 Consequências das Propriedades Principais 57
E.1.6 Índice de Brouwer 58
E.2 O Grau de Leray-Schauder 59
E.2.1 Principais Propriedades do Grau de Leray-Schauder 62
E.2.2 Consequência das Propriedades Principais 62
E.2.3 Índice de Leray-Schauder 63

Referências Bibliográficas **67**

Introdução

Neste trabalho propomos o estudo de alguns problemas em equações diferenciais parciais elípticas semilineares. O objetivo aqui não é a generalidade e nem a atualidade dos resultados, mas sim a aplicação de diferentes métodos da teoria de pontos críticos, tais como minimização, princípio variacional de Ekeland, teorema do ponto de sela, teorema do passo da montanha e o grau topológico. Neste sentido, os problemas em equações diferenciais escolhidos como objeto de estudo são aqueles que permitem a utilização de diferentes métodos de resolução. O modelo típico a ser considerado é o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave e $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. Consideraremos problemas assintoticamente lineares, ou seja, quando os limites abaixo existem e são funções de $L^\infty(\Omega)$:

$$\lim_{s\to\infty} \frac{f(x,s)}{s} = a(x) \quad \text{e} \quad \lim_{s\to-\infty} \frac{f(x,s)}{s} = b(x). \tag{2}$$

Com o intuito de ilustrar os vários métodos de resolução, vamos estudar as demonstrações dos seguintes resultados:

Teorema 0.0.1. *Suponha que $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R},\ \mathbb{R})$ e satisfaz*

$$a(x),\, b(x) \leq \mu < \lambda_1, \ \ \textit{quase sempre em } \Omega, \tag{3}$$

onde μ é uma constante e λ_1 é o primeiro autovalor do Laplaciano com condição de Dirichlet. Então o problema (1) possui uma solução clássica.

Teorema 0.0.2. *Suponha que $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R},\ \mathbb{R})$ é Lipschitziana em relação à segunda variável e satisfaz*

$$\lambda_j < c_j \leq a(x),\, b(x) \leq c_{j+1} < \lambda_{j+1}, \ \textit{quase sempre em } \Omega, \tag{4}$$

onde c_j e c_{j+1} são constantes e λ_j, $j \in \mathbb{N}$ são os autovalores do Laplaciano com condição de Dirichlet. Então o problema (1) possui uma solução clássica.

Por solução do problema (1), entende-se uma solução fraca, ou seja, uma função u no espaço de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ satisfazendo a equação

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega f\varphi \, dx, \, \forall \, \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Em busca de soluções fracas do problema (1) definimos o funcional energia $\phi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$\phi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \int_\Omega F(x,u) \, dx, \text{ onde } F(x,u) = \int_0^u f(x,s) \, ds.$$

Sob a hipótese (2) e que f é é localmente Lipschitziana, é provado no Apêndice deste trabalho que o funcional $\phi \in \mathcal{C}^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ e que

$$\phi'(u)\varphi = \int_\Omega (\nabla u \nabla \varphi - f(x,u)\varphi) \, dx, \quad \forall \, \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Um ponto crítico de ϕ é uma função $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\phi'(u) = 0$, isto é, $\phi'(u)\varphi = 0$ para todo $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Portanto, u é solução fraca do problema (1) se, e somente se, u é ponto crítico do funcional ϕ. Sendo assim, os teoremas acima serão provados utilizando alguns resultados da teoria de pontos críticos. Utilizando a teoria de regularidade em equações elípticas, podemos concluir que as soluções fracas são também soluções clássicas, ou seja, funções em $\mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ satisfazendo a equação (1).

As demonstrações desses teoremas são feitas por dois métodos: topológico e variacional. O Teorema 0.0.1 será demonstrado de duas maneiras distintas: uma por minimização e a outra utilizando o princípio variacional de Ekeland, o que são os objetos do Capítulo 1. No Capítulo 2, utilizamos o grau topológico e o teorema do ponto de sela para apresentar duas demonstrações diferentes do Teorema 0.0.2.

Por fim, no Capítulo 3, seguindo o artigo [12], faremos uso do teorema do passo da montanha para provar a existência de uma solução para uma classe de problemas assintoticamente lineares. Mais precisamente, apresentaremos uma demonstração do seguinte resultado:

Teorema 0.0.3. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $f(0) = 0$,*

$$f'(0) < \lambda_1 \tag{5}$$

e

$$\lambda_1 < \lim_{u\to\infty} \frac{f(u)}{u} < \infty. \tag{6}$$

Então, o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u), & x \in \Omega, \\ u > 0, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{7}$$

possui pelo menos uma solução.

Para citar um exemplo, podemos considerar

$$f(x,s) = f(s) = \frac{s^3}{1+\alpha s^2}, \text{ para } s \in \mathbb{R}, \text{ onde } \alpha > 0.$$

Mediante escolhas apropriadas de α, a função f satisfaz as respectivas hipóteses dos teoremas anteriores.

Observação 0.0.1. *Os resultados citados também são válidos para os casos em que $N = 1$ ou 2. As demonstrações dos resultados para $N = 1$ são as mesmas, enquanto que as respectivas demonstrações quando $N = 2$ requerem o uso de outros argumentos. Para facilitar a discussão dos resultados, vamos nos concentrar no caso $N \geq 3$.*

Capítulo

1

Teorema 0.0.1

Este capítulo é dedicado a demonstrar o Teorema 0.0.1 por meio de duas variações do método de minimização e a apresentação dar-se-á nas seções a seguir.

1.1 Demonstração via minimização.

A demonstração é consequência do teorema mostrado abaixo que nos garante que o ínfimo do funcional ϕ é atingido.

Definição 1.1.1. *Seja X um espaço topológico. Um funcional $\phi : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ será dito semicontínuo inferiormente se para todo $a \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{x \in X; \phi(x) > a\}$ for aberto.*

Teorema 1.1.1. *Sejam X um espaço topológico compacto e $\phi : X \to \mathbb{R}$ uma função semicontínua inferiormente. Então ϕ é limitada inferiormente e existe $u \in X$ tal que*

$$\phi(u) = \inf_X \phi.$$

Demonstração:

Definamos os conjuntos $A_n = \{x \in X; \phi(x) > -n\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como ϕ é semicontínuo inferiormente, os conjuntos A_n são abertos. Além disso, $A_n \subset A_{n+1}$. Assim, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma cobertura aberta de X. Sendo X compacto, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$X \subset \bigcup_{j=1}^{n_0} A_j.$$

Deste modo, $\phi(x) > -n_0, \forall x \in X$, o que implica que ϕ é limitada inferiormente. Seja agora $l = \inf\{\phi(x); x \in X\}$. Suponha, por absurdo, que l não é atingido, isto é,

$$\text{não existe } x \in X \text{ tal que } \phi(x) = l.$$

Assim,

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ x \in X; \phi(x) > l + \frac{1}{n} \right\}.$$

E, como os conjuntos

$$\left\{ x \in X; \phi(x) > l + \frac{1}{n} \right\}$$

são abertos para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\left\{ x \in X; \phi(x) > l + \frac{1}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

é uma cobertura aberta de X. Novamente pela compacidade de X, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$X \subset \bigcup_{n=1}^{n_1} \left\{ x \in X; \phi(x) > l + \frac{1}{n} \right\}.$$

Logo,

$$\phi(x) > l + \frac{1}{n_1}, \forall x \in X,$$

o que contradiz o fato de l ser o ínfimo. Portanto, existe $x_0 \in X$ tal que

$$\phi(x_0) = \inf_X \phi.$$

□

1.1.1 Demonstração do Teorema 0.0.1.

Primeiramente observemos que pela condição (2), existem constantes $c > 0$ e $\tilde{\mu}$, com $\tilde{\mu} < \lambda_1$ e $\tilde{\mu} \geq \mu$, tais que

$$f(x, s) \leq \tilde{\mu}|s| + c, \ \forall\, s \in \mathbb{R}, \ \forall\, x \in \Omega.$$

De fato, por (2), temos

$$a(x),\, b(x) \leq \mu < \lambda_1.$$

Como f é assintoticamente linear, pelas equações (2) temos que dado $\varepsilon > 0$, existem $s_0,\, s_1 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\left| \frac{f(x, s)}{s} - a(x) \right| \leq \varepsilon, \ \forall\, s \geq s_1$$

e

$$\left| \frac{f(x, s)}{s} - b(x) \right| \leq \varepsilon, \ \forall\, s \leq s_0.$$

Assim,

$$\left|\frac{f(x,s)}{s}\right| - |a(x)| \leq \left|\frac{f(x,s)}{s} - a(x)\right| \leq \varepsilon,\ \forall s \geq s_1.$$

Logo,

$$\left|\frac{f(x,s)}{s}\right| \leq \varepsilon + |a(x)|,$$

o que implica que

$$|f(x,s)| \leq \varepsilon|s| + a(x)|s| = (\varepsilon + \mu)|s| = \tilde{\mu}|s|,\ \forall s \geq s_1.$$

Tomemos $\varepsilon > 0$ de modo que $\tilde{\mu} = \varepsilon + \mu < \lambda_1$. Analogamente, temos:

$$|f(x,s)| \leq \tilde{\mu}|s|,\ \forall\, s \leq s_0.$$

E, assim,

$$|f(x,s)| \leq \tilde{\mu}|s|,\ \forall\, s \leq s_0 \text{ e } s \geq s_1.$$

Agora note que como f é localmente Lipschtziana, existe $c > 0$ tal que

$$|f(x,s)| \leq c,\ \forall\, s \text{ satisfazendo } s_0 \leq s \leq s_1.$$

Assim, existe $\tilde{\mu}$, com $\tilde{\mu} < \lambda_1$ e $\tilde{\mu} \geq \mu$ tal que

$$|f(x,s)| \leq \tilde{\mu}|s| + c,\ \forall\, s \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \Omega. \tag{1.1}$$

Assim, para $F(x,s) = \int_0^s f(x,t)dt$, temos

$$F(x,s) \leq \frac{\hat{\mu}}{2}s^2 + C,\ \forall\, s \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \Omega,$$

onde $\tilde{\mu} \leq \hat{\mu} < \lambda_1$, para alguma constante $C > 0$. Consequentemente,

$$\phi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \int_\Omega F(x,u)\,dx \geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \frac{\hat{\mu}}{2}\int_\Omega u^2\,dx - C.$$

Pela desigualdade de Poincaré,

$$\phi(u) \geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \frac{\hat{\mu}}{2\lambda_1}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - C.$$

Deste modo, obtemos

$$\phi(u) \geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\hat{\mu}}{\lambda_1}\right)\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - C. \tag{1.2}$$

A equação (1.2) nos diz que $\phi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ é limitada inferiormente. Também que ϕ é coerciva, isto é,

$$\phi(u) \to \infty \text{ quando } \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \to \infty.$$

Tomemos agora $R > 0$ tal que

$$\phi(u) \geq 1,\ \forall\, u \in H_0^1(\Omega),\ \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \geq R,$$

o que segue de (1.2), isto é, o funcional ϕ é limitado inferiormente no complementar de uma bola.

Consideremos o funcional ϕ restrito à bola fechada $B_R[0]$. No Apêndice C, mostramos que o funcional $J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$J(u) = \int_\Omega F(x,u)\,dx$$

é sequencialmente fracamente contínuo. Sendo $B_R[0]$ metrizável, J é fracamente contínuo em $B_R[0]$. Usando o fato que a norma $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ é fracamente semicontínua inferiormente, segue que o funcional

$$\phi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - J(u)$$

também é fracamente semicontínuo inferiormente na bola $B_R[0]$. Logo, pelo Teorema 1.1.1, existe $u_0 \in B_R[0]$ tal que

$$\phi(u_0) = \inf_{B_R[0]} \phi.$$

Como $\phi(0) = 0$, segue que $\phi(u_0) \leq 0$. Deste modo, $\|u_0\|_{H_0^1(\Omega)} < R$, pois $\phi(u) \geq 1$ para todo $u \in H_0^1(\Omega)$ com $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \geq R$. Consequentemente, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\|u_0 + tw\|_{H_0^1(\Omega)} < R,\ \forall\, 0 < t \leq \varepsilon,\ \|w\|_{H_0^1(\Omega)} = 1.$$

De fato, uma vez que $\|u_0\|_{H_0^1(\Omega)} < R$, tomemos $\varepsilon > 0$ tal que $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} + \varepsilon < R$. Deste modo,

$$\begin{aligned} \|u_0 + tw\|_{H_0^1(\Omega)} &\leq \|u_0\|_{H_0^1(\Omega)} + t\|w\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\leq \|u_0\|_{H_0^1(\Omega)} + \varepsilon < R, \end{aligned}$$

para todo $0 < t \leq \varepsilon$ e $\|w\|_{H_0^1(\Omega)} = 1$. Como $\phi(u_0) = \inf\{\phi(u); u \in B_R[0]\}$, segue que

$$\phi(u_0) \leq \phi(u_0 + tw).$$

E, daí,

$$\frac{\phi(u_0 + tw) - \phi(u_0)}{t} \geq 0, \quad \forall\, 0 < t \leq \varepsilon.$$

Tomando o limite quando $t \to 0^+$, obtemos:

$$\phi'(u_0)\,w \geq 0,\ \forall\, w \in H_0^1(\Omega),\ \|w\|_{H_0^1(\Omega)} = 1.$$

Seja agora $v \in H_0^1(\Omega)$, $v \neq 0$ e consideremos

$$w = \frac{v}{\|v\|_{H_0^1(\Omega)}}.$$

Então

$$\begin{aligned} \phi'(u_0)\,w &= \int_\Omega \nabla u_0 \nabla \left(\frac{v}{\|v\|_{H_0^1(\Omega)}}\right) - \int_\Omega f(x,u_0)\left(\frac{v}{\|v\|_{H_0^1(\Omega)}}\right) \\ &= \frac{1}{\|v\|_{H_0^1(\Omega)}}\left(\int_\Omega \nabla u_0 \nabla v - \int_\Omega f(x,u_0)v\right). \end{aligned}$$

Como $\phi'(u_0)\, w \geq 0$ e $\|v\|_{H_0^1(\Omega)} > 0$, segue que

$$\phi'(u_0)\, v \geq 0, \, \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

Por outro lado, sendo $w \in H_0^1(\Omega)$, temos $-w \in H_0^1(\Omega)$. Deste modo,

$$0 \leq \phi'(u_0)\,(-w) = -\phi'(u_0)\, w \leq 0,$$

uma vez que $\phi'(u_0)\, w \geq 0$. Logo,

$$\phi'(u_0)w = 0, \, \forall\, w \in H_0^1(\Omega),$$

o que implica que $\phi'(u_0) = 0$. Portanto, u_0 é um ponto crítico de ϕ, e assim, é uma solução fraca do problema (1). □

1.2 Demonstração via o Princípio Variacional de Ekeland

Nesta seção demonstraremos o Teorema 0.0.1 utilizando um método variacional e nossa ferramenta para demonstração será o Princípio Variacional de Ekeland. Além disso, precisaremos mostrar que o funcional ϕ em determinadas condições, satisfaz a condição (PS) que será descrita no segundo item desta seção.

1.2.1 Princípio Variacional de Ekeland

Teorema 1.2.1. *Sejam X um espaço métrico completo e $\phi : X \to \mathbb{R}$ um funcional semicontínuo inferiormente e limitado inferiormente. Sejam $\varepsilon > 0$ e $u \in X$ dados, tais que*

$$\phi(u) \leq \inf_X \phi + \varepsilon.$$

Então existe $v \in X$ tal que

$$\phi(v) \leq \phi(u), \tag{1.3}$$

$$d(u, v) \leq 1$$

e, para cada $w \neq v$ em X,

$$\phi(w) > \phi(v) - \varepsilon d(v, w).$$

Demonstração:

Definamos a seguinte relação em X:

$$w \leq v \Leftrightarrow \phi(w) + \varepsilon d(v, w) \leq \phi(v).$$

Tal relação define uma ordem em X. Construiremos indutivamente uma sequência $\{u_n\}_n$. Seja $u_0 = u$ e suponhamos que u_n é conhecida. Defina $S_n = \{w \in X;\, w \leq u_n\}$ e escolha $u_{n+1} \in S_n$ tal que

$$\phi(u_{n+1}) \leq \inf_{S_n} \phi + \frac{1}{n+1}.$$

Como $u_{n+1} \leq u_n$ temos que $S_{n+1} \subset S_n$. Além disso, como ϕ é semicontínua inferiormente, S_n é fechado. Seja agora $w \in S_{n+1}$. Temos $w \leq u_{n+1} \leq u_n$ e assim,

$$\begin{aligned} \varepsilon d(w, u_{n+1}) &\leq \phi(u_{n+1}) - \phi(w) \\ &\leq \inf_{S_n} \phi + \frac{1}{n+1} - \inf_{S_n} \phi \\ &= \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Deste modo,

$$\begin{aligned} diam S_{n+1} &= \sup\{d(w_1,\, w_2);\, w_1,\, w_2 \in S_{n+1}\} \\ &\leq d(w_1, u_{n+1}) + d(u_{n+1}, w_2) \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon(n+1)} + \frac{1}{\varepsilon(n+1)} \\ &= \frac{2}{\varepsilon(n+1)}, \end{aligned}$$

isto é, $diam S_n \to 0$ quando $n \to \infty$. Como X é completo,

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_n = \{v\}, \text{ para algum } v \in X.$$

Em particular, $v \in S_0$, isto é, $v \leq u_0 = u$. Assim,

$$\phi(v) \leq \phi(u) - \varepsilon d(v, u) \leq \phi(u),$$

e, portanto,

$$d(u, v) \leq \frac{\phi(u) - \phi(v)}{\varepsilon} \leq \frac{\inf \phi + \varepsilon - \inf \phi}{\varepsilon} = 1.$$

Afirmamos que se $w \leq v$, então $w = v$. De fato, se $w \leq v$, então $w \leq u_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Logo,

$$w \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_n.$$

Portanto, $w = v$.

Agora note que se $w \neq v$, então $w > v$, o que implica que $\phi(w) + \varepsilon d(v, w) > \phi(v)$, isto é:

$$\phi(w) > \phi(v) - \varepsilon d(v, w),$$

o que conclui a demonstração do teorema. □

1.2.2 A Condição de Palais-Smale

Definição 1.2.1. *Seja X um espaço de Banach e $\phi : X \to \mathbb{R}$ um funcional de classe $\mathcal{C}^1$. Dizemos que ϕ satisfaz a condição de Palais-Smale no nível c (designada por $(PS)_c$) se toda sequência (u_n) em X que satisfaz*

$$\phi(u_n) \to c \quad e \quad \phi'(u_n) \to 0, \tag{1.4}$$

contém uma subsequência convergente em X. Se ϕ satisfizer a condição $(PS)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$, dizemos simplesmente que ϕ satisfaz a condição (PS).

Consideremos agora o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta v = a(x)v^+ - b(x)v^-, & x \in \Omega \\ v = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{$P^{\pm}$}$$

onde, $a(x)$ e $b(x)$ são como em (2).

Teorema 1.2.2. *Se $a(x)$ e $b(x)$ satisfazem a condição (3) ou a condição (4), segue-se que o problema ($P^{\pm}$) só possui a solução trivial.*

Demonstração:

Demonstremos o teorema no caso da condição (4). O outro caso pode ser demonstrado analogamente. Defina

$$\lambda = \frac{\lambda_j + \lambda_{j+1}}{2} \quad \text{e} \quad \mu = \lambda_{j+1} - \lambda_j,$$

onde λ_j são autovalores do operador Laplaciano com condição de Dirichlet (veja Apêndice D).

Escrevamos o problema ($P^{\pm}$) na forma:

$$\begin{cases} -\Delta v - \lambda v = (a-\lambda)v^+ - (b-\lambda)v^-, & x \in \Omega, \\ v = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.5}$$

Seja $T : L^2 \to L^2$ o operador linear assim definido: para cada $f \in L^2$, Tf é a única solução w do problema

$$\begin{cases} -\Delta w - \lambda w = f, & x \in \Omega, \\ w = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.6}$$

Provemos que

$$\|T\| = \frac{2}{\mu}.$$

De fato, dado $f \in L^2(\Omega)$, seja $w \in L^2(\Omega)$ a solução de (1.6) que estamos buscando. Consideremos as sequências $\{a_j\}$ e $\{c_j\}$ em $\mathbb{R}$ tais que

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} c_j\varphi_j \quad \text{e} \quad w = \sum_{j=1}^{\infty} a_j\varphi_j,$$

onde φ_j são as autofunções associadas aos λ_j que compõe o espectro do operador $-\Delta$ com condição de Dirichlet. Com isto, o problema (1.6) se escreve como

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j(\lambda_j - \lambda)\varphi_j = \sum_{j=1}^{\infty} c_j\varphi_j.$$

Logo,

$$a_j = \frac{c_j}{(\lambda_j - \lambda)}.$$

A convergência da série de w segue do fato que

$$|a_j| \leq |c_j|\frac{1}{d}, \tag{1.7}$$

onde d é a distância de λ ao espectro, isto é, $d = \min\{|\lambda - \lambda_j|;\, j = 1, 2, \cdots\}$. Da equação (1.7), segue que

$$\|T\| \leq \frac{1}{d}. \tag{1.8}$$

Em (1.8) obtemos igualdade se resolvermos o problema

$$\begin{cases} -\Delta w - \lambda w = f, & x \in \Omega, \\ w = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $f = \varphi_j$ é a autofunção correspondente ao autovalor λ_j mais próximo de λ. Mas, o problema acima possui uma solução pela Alternativa de Fredholm (Teorema B.0.5). Assim,

$$\|T\| = \frac{1}{d}.$$

Notemos que $d = \frac{\mu}{2}$. Portanto,

$$\|T\| = \frac{2}{\mu},$$

como queríamos. Consequentemente o problema (1.5) é equivalente a

$$v = T\left((a-\lambda)v^+ - (b-\lambda)v^-\right).$$

Defina $S : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ por $S(v) = T\left((a-\lambda)v^+ - (b-\lambda)v^-\right)$. Portanto, uma solução de (1.5) será um ponto fixo de S. Como $v = 0$ é uma solução de (1.5), basta provar que S é uma contração para concluir a demonstração do teorema. Seja $W : L^2 \to L^2$, o operador definido por

$$W(v) = (a-\lambda)v^+ - (b-\lambda)v^-.$$

Note que pela hipótese (4), temos:

$$\|a(x) - \lambda\|_{L^\infty},\, \|b(x) - \lambda\|_{L^\infty} \leq \max\{|\lambda - c_j|,\, |\lambda - c_{j+1}|\} =: k$$

e

$$k < \frac{\mu}{2}.$$

Seja $f(x,s) = (a(x)-\lambda)s^+ - (b(x)-\lambda)s^-$. Para cada $x \in \Omega$ fixado, temos:

$$|f(x,s_1) - f(x,s_2)| \leq k|s_1 - s_2|,\ \forall s_1,\, s_2 \in \mathbb{R}.$$

Deste modo,

$$\int_\Omega |W(v_1)(x) - W(v_2)(x)|^2\, dx \leq k^2 \int_\Omega |v_1(x) - v_2(x)|^2\, dx.$$

E, assim obtemos

$$\|Sv_1 - Sv_2\|_{L^2} \leq \frac{2k}{\mu}\|v_1 - v_2\|_{L^2},$$

o que mostra que S é uma contração. □

Teorema 1.2.3. *Suponha que $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R},\ \mathbb{R})$. Suponha também que o problema $(P^{\pm})$ só possui a solução trivial $v = 0$. Então o funcional ϕ satisfaz a condição de Palais-Smale.*

Demonstração:

Seja $\{u_n\}$ uma subsequência em $H_0^1(\Omega)$ tal que

$$|\phi(u_n)| = \left| \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \, dx - \int_\Omega F(x, u_n) \, dx \right| \leq C, \tag{1.9}$$

para alguma constante $C > 0$ e

$$|\phi'(u_n)v| = \left| \int_\Omega \nabla u_n \nabla v \, dx - \int_\Omega f(x, u_n) v \, dx \right| \leq \varepsilon_n \|v\|_{H_0^1}, \, \forall v \in H_0^1(\Omega), \tag{1.10}$$

com $\varepsilon_n \to 0$ quando $n \to \infty$. Afirmamos que $\{u_n\}$ é uma sequência limitada em $H_0^1(\Omega)$. De fato, suponha por contradição que

$$\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \to \infty, \quad \text{quando } n \to 0. \tag{1.11}$$

Seja $v_n \doteq \dfrac{u_n}{\|u_n\|_{H_0^1}}$. Note que existem $v_0 \in H_0^1(\Omega)$ e uma subsequência, ainda denotada por $\{v_n\}_n$, tais que

$$v_n \rightharpoonup v_0 \text{ fracamente em } H_0^1(\Omega) \quad \text{e} \quad v_n \to v_0 \text{ fortemente em } L^2(\Omega).$$

Afirmação 1: A subsequência $\{v_n\}_n$ acima pode ser tomada de modo que

$$v_n(x) \to v_0(x) \text{ q.s. em } \Omega \quad \text{e} \quad |v_n(x)| \leq h(x),$$

para alguma $h \in L^2(\Omega)$.

De fato, como $v_n \to v_0$ na norma de $L^2(\Omega)$, segue que a sequência $\{v_n\}_n$ é de Cauchy em $L^2(\Omega)$. Assim, podemos tomar subsequência $\{v_{n_k}\}$ com

$$\|v_{n_{k+1}} - v_{n_k}\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{2^k}, \ \forall\, k \geq 1.$$

Para facilitar a notação denotemos por v_k o elemento v_{n_k}. Definamos, $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |v_{k+1}(x) - v_k(x)|.$$

Desse modo,

$$\|g_n\|_{L^2(\Omega)} \leq 1.$$

Pelo Teorema da Convergência Monótona, $g_n(x)$ converge para um limite que denotaremos por $g(x)$, onde $g \in L^2(\Omega)$. Tomemos $m \geq n \geq 2$. Temos:

$$|v_m(x) - v_n(x)| \leq |v_m(x) - v_{m-1}(x)| + \cdots + |v_{n+1}(x) - v_n(x)| \leq g(x) - g_{n-1}(x).$$

Como para quase todo $x \in \Omega$, $\{v_n(x)\}_n$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$, existe v tal que $v_n(x) \to v(x)$ pontualmente. Assim,

$$|v(x) - v_n(x)| \leq g(x), \quad \text{para } n \geq 2. \tag{1.12}$$

Pela equação acima, $v \in L^2(\Omega)$, e pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$v_{n_k} \to v \quad \text{em } L^2(\Omega).$$

Portanto, $v = v_0$. Para obter o segundo fato, basta tomarmos $h = v + g$.

Mostremos agora que

$$\frac{f(x, u_n(x))}{\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}} \rightharpoonup a(x)v_0^+ - b(x)v_0^- \text{ fracamente em } L^2(\Omega).$$

De fato, defina

$$\alpha_n = \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \quad \text{e} \quad l(x) = a(x)v_0^+ - b(x)v_0^-.$$

É suficiente provar que toda subsequência de

$$f_n(x) = \frac{f(x, \alpha_n v_n(x))}{\alpha_n}$$

possui subsequência convergente para $l(x)$ em $L^2(\Omega)$. Pela equação (1.1), temos

$$|f_n(x)| = \frac{1}{\alpha_n}|f(x, \alpha_n v_n(x))| \leq c_1|v_n(x)| + \frac{c_2}{\alpha_n} \leq c_1 h(x) + \frac{c_2}{\alpha_n}. \tag{1.13}$$

Como $h \in L^2(\Omega)$ e $\alpha_n \to \infty$ quando $n \to \infty$, $\{f_n\}$ é uma sequência limitada em $L^2(\Omega)$. Portanto, existe uma subsequência, ainda denotada por $\{f_n\}$, fracamente convergente em $L^2(\Omega)$.

Por outro lado, consideremos o conjunto

$$A = \{x;\, v_0(x) \neq 0\}.$$

Note que em $A^+ = \{x \in A;\, v_0(x) > 0\}$,

$$\frac{f(x, \alpha_n v_n)}{\alpha_n v_n} v_n \to a(x)v_0^+, \quad \text{para quase todo } x \in A^+,$$

e em $A^- = \{x \in A;\, v_0(x) < 0\}$,

$$\frac{f(x, \alpha_n v_n)}{\alpha_n v_n} v_n \to -b(x)v_0^-, \quad \text{para quase todo } x \in A^-.$$

Portanto,

$$f_n(x) \to l(x), \quad \text{para quase todo } x \in A.$$

Seja agora $B = \{x;\, v_0(x) = 0\}$. Por (1.13) e usando que $\alpha_n \to 0$, temos

$$f_n(x) \to 0, \quad \text{para quase todo } x \in B.$$

Portanto,

$$f_n(x) \to a(x)v_0^+ - b(x)v_0^-, \quad \text{para quase todo } x \in \Omega, \text{ quando } n \to \infty.$$

Pela unicidade do limite, $f_n \rightharpoonup av_0^+ - bv_0^-$ fracamente em $L^2(\Omega)$. Agora, dividindo a equação (1.10) por α_n e tomando o limite com $n \to \infty$, obtemos:

$$\int_\Omega \nabla v_0 \nabla v \, dx - \int_\Omega [a(x)v_0^+ - b(x)v_0^-]v \, dx = 0, \, \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Como v_0 é solução de $(P^\pm)$, segue do Teorema 1.2.2 que $v_0 = 0$. Fazendo $v = v_n/\|u_n\|^2_{H_0^1(\Omega)}$ em (1.10), obtemos

$$\left| \int_\Omega |\nabla v_n|^2 \, dx - \int_\Omega \frac{f(x,u_n)}{\alpha_n} v_n \, dx \right| \leq \frac{\varepsilon_n}{\alpha_n},$$

e, assim,

$$\left| 1 - \int_\Omega \frac{f(x,u_n)}{\alpha_n} v_n \, dx \right| \leq \frac{\varepsilon_n}{\alpha_n}. \tag{1.14}$$

Por outro lado,

$$\int_\Omega \frac{f(x,u_n)}{\alpha_n} v_n \, dx \to \int_\Omega [a(x)v_0^+ - b(x)v_0^-]v_0 \, dx = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\varepsilon_n}{\alpha_n} \to 0,$$

o que leva a um absurdo ao fazer $n \to \infty$ em (1.14). Portanto, a sequência $\{u_n\}$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$, o que verifica a afirmação.

Em consequência da limitação de $\{u_n\}$ em $H_0^1(\Omega)$, existe uma subsequência $\{u_{n_j}\}$ que converge fracamente para u_0 em $H_0^1(\Omega)$ e converge na norma para o mesmo u_0 em $L^p(\Omega)$, com $1 \leq p < 2^*$. Por outro lado, a equação de (1.10) nos diz que

$$\left| \int_\Omega \nabla u_n \nabla v \, dx - \int_\Omega f(x,u_n) v \, dx \right| \leq \varepsilon_n \|v\|_{H_0^1}, \, \forall \, v \in H_0^1(\Omega),$$

onde, $\varepsilon_n \to 0$. Seja $v = u_n - u_0$. Por (1.1), existe $C > 0$ tal que

$$|f(x,s)| \leq C(1 + |s|), \quad \forall \, x \in \overline{\Omega}, \; s \in \mathbb{R}.$$

Pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega f(x,u_{n_j})(u_{n_j} - u_0) \, dx \right| &\leq \left(\int_\Omega |f(x,u_{n_j})|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |u_{n_j} - u_0|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \left[\int_\Omega (1 + |u_{n_j}|)^2 \, dx \right]^{\frac{1}{2}} \|u_{n_j} - u_0\|_{L^2(\Omega)} \to 0, \end{aligned}$$

uma vez que $\|u_{n_j} - u_0\|_{L^2(\Omega)} \to 0$ e $[\int_\Omega (1 + |u_{n_j}|)^2]^{\frac{1}{2}}$ é limitado. Assim,

$$\int_\Omega (\nabla u_{n_j} \nabla (u_{n_j} - u_0)) \, dx \to 0,$$

e usando que $\{u_{n_j}\}$ converge fracamente para u_0 em $H_0^1(\Omega)$, obtemos

$$\int_\Omega |\nabla u_{n_j}|^2 \, dx \to \int_\Omega |\nabla u_0|^2 \, dx.$$

Portanto, $\{u_{n_j}\}$ converge fortemente para u_0 em $H_0^1(\Omega)$, como queríamos. $\square$

1.2.3 Demonstração do Teorema 0.0.1

Sabemos que o funcional $\phi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ é contínuo e limitado inferiormente. Logo, estamos em condição de aplicar o princípio variacional de Ekeland. Assim, dado $\varepsilon = \frac{1}{n}$, existe $u_n \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\phi(u_n) \leq \inf_{H_0^1(\Omega)} \phi + \frac{1}{n} \tag{1.15}$$

e

$$\phi(u_n) \leq \phi(u) + \frac{1}{n}\, d(u, u_n),\ \forall u \in H_0^1(\Omega). \tag{1.16}$$

Em (1.16), tomemos $u = u_n + tw$, onde $t > 0$ e $\|w\|_{H_0^1(\Omega)} = 1$. Assim, obtemos:

$$\phi(u_n) \leq \phi(u_n + tw) + \frac{1}{n}t,$$

isto é,

$$\frac{\phi(u_n) - \phi(u_n + tw)}{t} \leq \frac{1}{n}.$$

Tomando o limite quando $t \to 0$,

$$-\phi'(u_n)w \leq \frac{1}{n},\ \forall\, w \in H_0^1(\Omega),\ \text{com } \|w\|_{H_0^1(\Omega)} = 1.$$

Deste modo,

$$|\phi'(u_n)w| \leq \frac{1}{n},\ \forall\, w \in H_0^1(\Omega),\ \text{com } \|w\|_{H_0^1(\Omega)} = 1.$$

Logo,

$$\|\phi'(u_n)\| \leq \frac{1}{n}. \tag{1.17}$$

Note agora que, quando $n \to \infty$, por (1.15),

$$\phi(u_n) \to c = \inf_{H_0^1(\Omega)} \phi,$$

e, por (1.17),

$$\phi'(u_n) \to 0.$$

Pelo Teorema 1.2.3 sabemos que ϕ satisfaz (PS). Assim, existem uma subsequência $\{u_{n_j}\}$ de $\{u_n\}$ e $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ tais que $u_{n_j} \to u_0$. Como ϕ é um funcional de classe $\mathcal{C}^1$ (ver Apêndice C), temos que $\phi(u_{n_j}) \to \phi(u_0)$, e por (1.15), fazendo $n \to \infty$ temos

$$\phi(u_0) \leq \inf_{H_0^1(\Omega)} \phi.$$

Mas, $\inf\{\phi(u); u \in H_0^1(\Omega)\} \leq \phi(u_0)$, portanto,

$$\phi(u_0) = \inf_{H_0^1(\Omega)} \phi.$$

Novamente, como ϕ é um funcional de classe $\mathcal{C}^1$,

$$u_{n_j} \to u_0 \Rightarrow \phi'(u_{n_j}) \to \phi'(u_0) \Rightarrow \|\phi'(u_{n_j})\| \to \|\phi'(u_0)\|.$$

Além disso, por (1.17) temos que $\|\phi'(u_{n_j})\| \to 0$, e portanto, $\|\phi'(u_0)\| = 0$, o que implica que

$$\phi'(u_0) = 0,$$

mostrando que u_0 é um ponto crítico de ϕ, e portanto, uma solução fraca do problema (1). $\square$

Capítulo

2

Teorema 0.0.2

Este capítulo é dedicado à prova do Teorema 0.0.2. A primeira seção é dedicada em apresentar uma demonstração empregando a teoria do grau topológico. Na segunda seção empregaremos o teorema do ponto de sela para dar uma segunda demonstração.

2.1 Demonstração via teoria do grau

O primeiro resultado a seguir é crucial para a utilização da teoria do grau.

2.1.1 Estimativa a Priori

Teorema 2.1.1. *Suponha que o problema (1) é assintoticamente linear com* $a(x), b(x) \in L^\infty(\Omega)$. *Suponha também que a única solução* $v \in H_0^1(\Omega)$ *de*

$$\begin{cases} -\Delta v = a(x)v^+ - b(x)v^-, & x \in \Omega, \\ v = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{$P^\pm$}$$

é a solução trivial. Então, existe $K > 0$ *tal que*

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq K$$

para todas as eventuais soluções de (1).

Observação 2.1.1. *Note que pelo Teorema (1.2.2), se* $a(x)$ *e* $b(x)$ *satisfazem as hipóteses (3) ou (4), então o problema* $(P^\pm)$ *só possui a solução trivial.*

Demonstração do Teorema 2.1.1:

Suponha, por absurdo, que existe uma sequência $\{u_n\} \in H_0^1(\Omega)$ de soluções de (1) tal que $\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \to \infty$. Defina $v_n = u_n/\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}$. Como visto na demonstração do Teorema 0.0.1 via método variacional, existe uma subsequência de $\{v_n\}$ também denotada por $\{v_n\}$, e um $v_0 \in H_0^1(\Omega)$ tais que

$$v_n \rightharpoonup v_0 \quad \text{fracamente em } H_0^1(\Omega)$$

e

$$v_n \to v_0 \quad \text{fortemente } L^2(\Omega).$$

Como visto no capítulo anterior, esta subsequência pode ser tomada de modo que

$$v_n(x) \to v_0(x) \quad \text{quase sempre em } \Omega$$

e

$$|v_n(x)| \leq h(x),$$

para alguma $h \in L^2(\Omega)$. Agora, como u_n é solução fraca de (1), temos:

$$\int_\Omega \nabla v_n \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}} \varphi \, dx, \, \forall \, \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{2.1}$$

Repetindo os argumentos da verificação da Afirmação 1 da prova do Teorema 1.2.3, temos

$$\frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}} \rightharpoonup a(x)v_0^+ - b(x)v_0^- \quad \text{fracamente em } L^2(\Omega). \tag{2.2}$$

Tomando o limite em (2.1), obtemos:

$$\int_\Omega \nabla v_0 \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega (a(x)v_0^+ - b(x)v_0^-)\varphi \, dx$$

de onde segue que $v_0 = 0$, em vista da hipótese. Por outro lado tomando $\varphi = v_n$ em (2.1), obtemos

$$1 = \int_\Omega |\nabla v_n|^2 \, dx = \int_\Omega \frac{f(x.u_n)}{\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}} v_n \, dx.$$

Por (2.2) e o fato que $v_n \to v_0 = 0$ em $L^2(\Omega)$, obtemos um absurdo ao fazer o limite na equação acima. Portanto, existe $K > 0$, tal que

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq K$$

para qualquer que seja u uma solução do problema (1). □

2.1.2 Demonstração do Teorema 0.0.2

Defina

$$g(x, u) = \theta\lambda u + (1 - \theta)f(x, u), \quad \text{com } \theta \in [0, 1] \quad \text{e } \lambda = \frac{\lambda_j + \lambda_{j+1}}{2}.$$

Assim, temos:

$$\lim_{s\to\infty}\frac{g(x,s)}{s}=\lim_{s\to\infty}\left[\frac{\theta\lambda s}{s}+(1-\theta)\frac{f(x,s)}{s}\right]=\theta\lambda+(1-\theta)a(x)=a_\theta(x)$$

e

$$\lim_{s\to-\infty}\frac{g(x,s)}{s}=\theta\lambda+(1-\theta)b(x)=b_\theta(x).$$

Note que $a_\theta(x)$, $b_\theta(x)\in L^\infty(\Omega)$ para todo $\theta\in[0,1]$, pois $a(x)$, $b(x)\in L^\infty(\Omega)$. Pela condição (4),

$$\lambda_j<c_j\leq a(x),\, b(x)\leq c_{j+1}<\lambda_{j+1}, \tag{2.3}$$

temos que

$$\lambda_j<c_j\leq a_\theta(x),\, b_\theta(x)\leq c_{j+1}<\lambda_{j+1},\ \forall\,\theta\in[0,1].$$

Consideremos agora a família de problemas

$$\begin{cases}-\Delta u=\theta\lambda u+(1-\theta)f(x,u), & x\in\Omega,\\ u=0, & x\in\partial\Omega.\end{cases} \tag{P_θ}$$

Como $a_\theta(x)$ e $b_\theta(x)$ satisfazem a condição (4), pelo Teorema 1.2.2, o problema $(P^\pm)$, com $a(x)=a_\theta(x)$ e $b(x)=b_\theta(x)$, só possui a solução trivial. Deste modo, pelo Teorema 2.1.1, existem $K(\theta)>0$ tal que $\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\leq K(\theta)$, para todas as eventuais soluções de (P_θ).

Mostremos que K independe de θ. Para tanto, basta mostrar que $\{K(\theta);\theta\in[0,1]\}$ é limitado. De fato, suponha por contradição que exista uma sequência $\{\theta_n\}\subset[0,1]$ e uma família de soluções $\{u_{\theta_n}\}$, com $\|u_{\theta_n}\|_{H_0^1(\Omega)}\to\infty$ quando $n\to\infty$. Tomando $v_n=u_{\theta_n}/\|u_{\theta_n}\|_{H_0^1(\Omega)}$ e repetindo os argumentos da demonstração do Teorema 2.1.1 obtemos a mesma contradição.

Designemos por $S:L^2\to L^2$ o inverso do operador $-\Delta$, sujeito a condição de Dirichlet, e por $T_\theta:L^2\to L^2$, o operador definido por

$$T_\theta(u)=S\left(\theta\lambda u+(1-\theta)f(\cdot,u)\right).$$

Como S é um operador compacto, então T_θ também o será, pois trata-se da composição de um operador compacto com um contínuo. Deste modo, $I-T_\theta$ será uma perturbação compacta da identidade.

Notemos também que (P_θ) é equivalente a $(I-T_\theta)u=0$. Assim, $(I-T_\theta)u\neq 0$, para $u\in H_0^1(\Omega)$ com $\|u\|_{H_0^1(\Omega)}=K+1$. Além disso, pelo Teorema E.2.1,

$$d(I-T_1,B_r(0),0)=\pm1\neq 0,\ \forall\, r>0.$$

Logo,

$$d(I-T_1,B_{K+1}(0),0)\neq 0$$

e como o grau é invariante por homotopia, considerando a homotopia $H(u,\theta)=I-T_\theta$, temos:

$$d(I-T_0,B_{K+1}(0),0)\neq 0.$$

Pela Propriedade E.2.2(3), existe $u\in B_{K+1}(0)$ tal que $(I-T_0)u=0$, implicando que u é solução do problema (1), como queríamos. □

2.2 Demonstração via o teorema do ponto de sela

Neste capítulo nossa ferramenta para a demonstração do Teorema 0.0.2 será o teorema do ponto de sela [11], e para o estudo de tal teorema será necessário estudarmos previamente o Lema de Deformação [1, 4, 10].

2.2.1 Lema de Deformação

Definição 2.2.1. *Seja $\phi : X \to \mathbb{R}$ um funcional de classe $\mathcal{C}^1$ num espaço de Banach X. Dizemos que $c \in \mathbb{R}$ é um valor crítico de ϕ se $\phi(u) = c$ para algum ponto crítico $u \in X$ de ϕ.*

O conjunto de todos os pontos críticos no nível c será denotado por K_c, isto é,

$$K_c = \{u \in X;\ \phi'(u) = 0 \text{ e } \phi(u) = c\}.$$

Também designaremos por ϕ^c o conjunto de todos os pontos em nível menor ou igual a c, isto é,

$$\phi^c = \{u \in X;\ \phi(u) \leq c\}.$$

Dado $S \subset X$, denotemos por S_α a vizinhança fechada de S definida por

$$S_\alpha = \{u \in X; \operatorname{dist}(u, S) \leq \alpha\}.$$

Definição 2.2.2. *[10] Um campo pseudo-gradiente para $\phi \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$ é uma aplicação localmente Lipschitziana $v : Y \to X$, onde $Y = \{u \in X; \phi'(u) \neq 0\}$, satisfazendo:*

(i) $\|v(u)\| \leq 2\|\phi'(u)\|$, $\forall\, u \in Y$;

(ii) $\phi'(u) \cdot v(u) \geq \|\phi'(u)\|^2$, $\forall\, u \in Y$.

Lema 2.2.1. *[1, 4] Seja $\phi : X \to \mathbb{R}$ um funcional de classe $\mathcal{C}^1$ no espaço de Banach X. Suponha que $S \subset X$, $c \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon, \delta > 0$ são tais que*

$$\|\phi'(u)\| \geq \frac{4\varepsilon}{\delta},\ \forall u \in \phi^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]) \cap S_{2\delta}. \tag{2.4}$$

Então, existe $\eta \in \mathcal{C}([0,1] \times X,\ X)$ tal que para todos $u \in X$ e $t \in [0,1]$, tem-se

(i) $\eta(0, u) = u$;

(ii) $\eta(t, u) = u$, *se* $u \notin \phi^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]) \cap S_{2\delta}$;

(iii) $\eta(1, \phi^{c+\varepsilon} \cap S) \subset \phi^{c-\varepsilon} \cap S_\delta$;

(iv) $\eta(t, \cdot) : X \to X$ *é um homeomorfismo.*

Demonstração:

Sejam

$$A = \phi^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon]) \cap S_{2\delta},$$
$$B = \phi^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon]) \cap S_{\delta} \quad \text{e}$$
$$Y = \{u \in X; \phi'(u) \neq 0\}.$$

Note que $B \subset A \subset Y$. Seja $v : Y \to X$ um campo pseudo-gradiente para ϕ, cuja existência é garantida pelo Lema A.2 [7], e considere uma função localmente Lipschitziana $\rho : X \to \mathbb{R}$ tal que $0 \leq \rho \leq 1$ e

$$\rho \equiv 1 \quad \text{em } B$$
$$\rho \equiv 0 \quad \text{em } X \setminus A.$$

Definamos então a seguinte aplicação localmente Lipschitziana $f : X \to X$

$$f(u) = -\rho(u)\frac{v(u)}{\|v(u)\|}.$$

Assim, $\|f(u)\| \leq 1$ para todo $u \in X$. Portanto, pelo teorema de existência e unicidade de equações diferenciais ordinárias, o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{w} = f(w) \\ w(0) = u \end{cases}$$

tem, para cada $u \in X$ dado, uma única solução definida para todo $t \geq 0$. Definamos $\eta : [0,1] \times X \to X$ dada por $\eta(t,u) = w(\delta t, u)$. Note que

$$\eta(0,u) = w(0,u) = u,$$

o que mostra (i). Seja agora $u \notin \phi^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon]) \cap S_{2\delta}$, ou seja, $u \notin A$. Logo, $\rho(u) = 0$, e consequentemente $f(u) = 0$. Assim, (ii) está satisfeita.

Para mostrar (iii), note que, para $t \geq 0$,

$$\|w(t,u) - u\| \leq \int_0^t \|f(w(\tau,u))\|\, d\tau \leq t.$$

Logo, $w(t,S) \subset S_\delta$, para todo $t \in [0,\delta]$. Pela definição de η, segue que

$$\eta(t,S) \subset S_\delta, \ \forall t \in [0,1]. \tag{2.5}$$

Note também que, para cada $u \in X$ fixado, a função $t \mapsto \phi(w(t,u))$ é não-crescente, pois:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\phi(w(t,u)) &= \phi'(w(t,u)) \cdot w'(t,u) \\ &= \phi'(w(t,u)) \cdot f(w(t,u)) \\ &= -\rho(w(t,u)) \cdot \frac{v(w(t,u))}{\|v(w(t,u))\|} \cdot \phi'(w(t,u)) \\ &\leq -\rho(w(t,u)) \cdot \frac{\|\phi'(w(t,u))\|^2}{\|v(w(t,u))\|} \leq 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Seja agora $u \in \phi^{c+\varepsilon} \cap S$. Temos dois casos a serem considerados:

(a) Se $\phi(w(\hat{t},u)) < c-\varepsilon$ para algum $\hat{t} \in [0,\delta)$, então

$$\phi(\eta(1,u)) = \phi(w(\delta,u)) \leq \phi(w(\hat{t},u)) < c-\varepsilon$$

e, portanto, $\eta(1,u) \in \phi^{c-\varepsilon} \cap S_\delta$, em vista de (2.5).

(b) No outro caso, temos $w(t,u) \in \phi^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon]) \cap S_\delta = B$, para todo $t \in [0,\delta]$. Pelas equações (2.6) e (2.4), e usando que $\rho \equiv 1$ em B e a Definição 2.2.2, obtemos a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned}
\phi(w(\delta,u)) &= \phi(u) + \int_0^\delta \frac{d}{dt}\phi(w(t,u))\,dt \\
&\leq \phi(u) - \int_0^\delta \frac{1}{2}\|\phi'(w(t,u))\|\,dt \\
&\leq c+\varepsilon - \frac{1}{2}\frac{4\varepsilon}{\delta}\delta \\
&= c-\varepsilon.
\end{aligned}$$

Portanto, tanto em (a) quanto em (b), $\eta(1,u) = w(\delta,u) \in \phi^{c-\varepsilon} \cap S_\delta$, quando $u \in \phi^{c+\varepsilon} \cap S$, o que verifica (iii). A prova do item (iv) é feita utilizando propriedades de semigrupo para a solução do problema de Cauchy acima. □

Lema 2.2.2. *[4]* ***(Lema de Deformação - Versão de Clark)*** *Suponha que $\phi \in \mathcal{C}^1(X,\mathbb{R})$ satisfaz a condição (PS). Se $c \in \mathbb{R}$ não é um valor crítico de ϕ, então para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe $\eta \in \mathcal{C}([0,1] \times X, X)$ tal que para todo $u \in X$ e $t \in [0,1]$, temos:*

(i) $\eta(0,u) = u$;

(ii) $\eta(t,u) = u$ *se* $u \notin \phi^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon])$;

(iii) $\eta(1,\phi^{c+\varepsilon}) \subset \phi^{c-\varepsilon}$;

(iv) $\eta(t,\cdot) : X \to X$ *é um homeomorfismo.*

Demonstração:

Devem existir constantes α, $\beta > 0$ tais que:

$$u \in \phi^{-1}([c-2\alpha, c+2\alpha]) \Rightarrow \|\phi'(u)\| \geq \beta.$$

De fato, pois caso contrário, existiria uma sequência $\{u_n\}_n$ com

$$c - \frac{1}{n} \leq \phi(u_n) \leq c + \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad \|\phi'(u)\| \leq \frac{1}{n}.$$

E, pela condição (PS), c seria um valor crítico de ϕ, o que é um absurdo. O resultado segue do Lema de deformação ao tomar $S = X$, $\varepsilon \in (0,\alpha]$ fixado e $\delta = \frac{4\varepsilon}{\beta}$. □

O resultado a seguir é crucial para estabelecer o teorema do ponto de sela e sua demonstração utiliza o grau topológico de Brouwer.

Lema 2.2.3. *Sejam X um espaço de Banach, V um subespaço de X com dimensão finita e W seu complemento topológico, isto é, $X = V \oplus W$. Considere*

$$\Gamma = \{\gamma : \overline{B_R(0)} \cap V \to X;\ \gamma \text{ é contínua }, \gamma(u) = u,\ \forall u \in \partial B_R(0) \cap V\}.$$

Então dada $\gamma \in \Gamma$, existe $u_0 \in B_R(0) \cap V$ tal que $\gamma(u_0) \in W$.

Demonstração:

Seja $P : X \to V$ a projeção de X sobre V associada à decomposição $X = V \oplus W$. Tal operador é linear, contínuo e é definido do seguinte modo: dado $u \in X$, u se escreve de modo único como $u = v + w$, com $v \in V$ e $w \in W$. Assim, $Pu = v$.

Definamos a seguinte aplicação:

$$\begin{array}{rccl} S: & \overline{B_R(0)} \cap V & \to & V \\ & v & \mapsto & S(v) = P(\gamma(v)). \end{array}$$

Considere agora a homotopia:

$$H(\cdot, t) = (1-t)I + tS, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Observe que para $v \in \partial B_R(0) \cap V$, temos $Sv = v$. Assim, $H(v,t) = v \neq 0$, para todo $t \in [0,1]$ e $v \in \partial B_R(0) \cap V$. Pela propriedade (2), Apêndice E.1.4, $d(H(\cdot,t), B_R(0) \cap V, 0)$ é constante em $[0,1]$. Sendo $H(\cdot,0) = I$, tal constante deverá ser igual a 1. Sendo $H(\cdot,1) = S$, pela propriedade (3) do Apêndice E.1.5, existe $u_0 \in B_R(0) \cap V$ tal que $S(u_0) = 0$. Mas, isto que dizer que $P(\gamma(u_0)) = 0$. Portanto, $\gamma(u_0) \in W$, como queríamos. □

2.2.2 Teorema do Ponto de Sela

Teorema 2.2.1. *[11] Seja X um espaço de Banach e V um subespaço de dimensão finita. Seja W o complemento topológico de V, isto é, um subespaço de X tal que $X = V \oplus W$. Seja $\phi : X \to \mathbb{R}$ um funcional $\mathcal{C}^1$ que satisfaz a condição (PS). Suponha que existam constantes a e b e um número $R > 0$, tais que*

$$\phi|_{\partial B_R(0) \cap V} \leq a \tag{2.7}$$

$$\phi|_W \geq b \tag{2.8}$$

$$a < b \tag{2.9}$$

onde $B_R(0)$ designa a bola de raio R e centrada em 0 no espaço X. Então, ϕ tem um ponto crítico no nível c definido por

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in \overline{B_R(0)} \cap V} \phi(\gamma(u)),$$

onde $\Gamma = \{\gamma : \overline{B_R(0)} \cap V \to X;\ \gamma$ é contínua, $\gamma(u) = u,\ \forall u \in \partial B_R(0) \cap V\}$.

Demonstração:

Suponhamos por contradição que c não é valor crítico. Logo, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que ϕ não possui possui pontos críticos entre os níveis $c - \varepsilon_0$ e $c + \varepsilon_0$. De fato, se não existisse tal ε_0, teríamos uma sequência $\{u_n\}_n \subset X$ tal que

$$\phi(u_n) \to c \quad \text{e} \quad \phi'(u_n) \to 0.$$

Usando a condição $(PS)_c$, segue que existiria uma subsequência $\{u_{n_j}\}$ e $u_0 \in X$ tais que $u_{n_j} \to u_0$. Como ϕ é de classe $\mathcal{C}^1$, obteríamos:

$$\phi(u_0) = c \quad \text{e} \quad \phi'(u_0) = 0,$$

o que é um absurdo.

Tomemos agora $\overline{\varepsilon} < c - a$ e $\varepsilon < \varepsilon_0$. Pelo Lema 2.2.3, temos $c \geq b$. Tomemos $\varepsilon < \overline{\varepsilon}$, e seja $\gamma \in \Gamma$ de modo que

$$\max_{u \in \overline{B_R(0)} \cap V} \phi(\gamma(u)) < c + \varepsilon.$$

Defina $\tilde{\gamma}(v) = \eta(1, \gamma(v))$, onde $\eta \in \mathcal{C}([0,1] \times X, X)$ é dado com no Lema de Deformação (Lema 2.2.2). Mostraremos então que $\tilde{\gamma} \in \Gamma$. A continuidade segue de forma clara. Resta-nos mostrar que para $v \in \partial B_R(0) \cap V$, temos $\tilde{\gamma}(v) = v$. Note que $\gamma(v) = v$ e $\phi(v) \leq a < c - \overline{\varepsilon}$, pois $\gamma \in \Gamma$ e tomamos $\overline{\varepsilon}$ de modo que tal desigualdade fosse válida. Assim, a conclusão (ii) do Lema 2.2.2 nos diz que

$$\eta(1, v) = v,$$

isto é, $v = \eta(1, \gamma(v)) = \tilde{\gamma}(v)$. Portanto,

$$\tilde{\gamma}(v) = v,$$

e assim, $\tilde{\gamma} \in \Gamma$. Note agora que $\phi(\tilde{\gamma}(v)) = \phi(\eta(1, \gamma(v)))$ e que $\phi(\gamma(v)) < c + \varepsilon$.

Assim, segue-se do Lema 2.2.2, item (iii) que

$$\max_{v \in \overline{B_R(0)} \cap V} \phi(\tilde{\gamma}(v)) < c - \varepsilon,$$

o que contradiz o fato de c ser o ínfimo. □

2.2.3 Demonstração do Teorema 0.0.2

Dados $\lambda_j < \lambda_{j+1}$ dois autovalores consecutivos, designamos por H_j o subespaço de $H_0^1(\Omega)$ gerado pelas autofunções correspondentes aos autovalores λ_i com $i \leq j$. Deste modo, $H_j^{\perp}$, o complemento ortogonal de H_j é gerado pelas autofunções correspondentes aos autovalores λ_i com $i \geq j + 1$. Note que H_j tem dimensão finita. Pela equação (D.3) do Apêndice D, temos as seguintes desigualdades:

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx \leq \lambda_j \int_\Omega v^2 \, dx, \, \forall v \in H_j, \tag{2.10}$$

$$\int_\Omega |\nabla w|^2\,dx \geq \lambda_{j+1}\int_\Omega w^2\,dx,\ \forall v \in H_j^\perp. \tag{2.11}$$

Seguem-se de (2), (4) e da continuidade de F em $\overline{\Omega}\times\mathbb{R}$ que existem constantes c_1, c_2, d_1 e d_2 com $\lambda_j < c_1 < c_2 < \lambda_{j+1}$ e d_1, $d_2 > 0$ e tais que

$$\frac{1}{2}\,c_1 s^2 - d_1 \leq F(x,s) \leq \frac{1}{2}\,c_2 s^2 + d_2. \tag{2.12}$$

Usando (2.12) obtemos para $v \in H_j$:

$$\begin{aligned}\phi(v) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx - \int_\Omega F(x,v)\,dx\\ &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx - \frac{1}{2}c_1\int_\Omega v^2\,dx + c,\end{aligned}$$

para alguma constante $c > 0$. De (2.10), segue que

$$\begin{aligned}\phi(v) &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx - \frac{1}{2}\frac{c_1}{\lambda_j}\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx + c\\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{c_1}{\lambda_j}\right)\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx + c.\end{aligned}$$

Como $c_1 > \lambda_j$, segue que $\phi(v) \to -\infty$, quando $\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \to \infty$. Analogamente, de (2.12) e (2.11) segue-se que para $w \in H_j^\perp$:

$$\begin{aligned}\phi(w) &\geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2\,dx - \frac{1}{2}\frac{c_2}{\lambda_{j+1}}\int_\Omega |\nabla w|^2\,dx - c\\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{c_2}{\lambda_{j+1}}\right)\int_\Omega |\nabla w|^2\,dx - c.\end{aligned}$$

Como $c_2 < \lambda_{j+1}$, concluímos que

$$\inf\{\phi(w); w \in H_j^\perp\} = b > -\infty.$$

Escolha agora $R > 0$ de modo que

$$\sup\{\phi(v); v \in H_j, \|v\|_{H_0^1(\Omega)} = R\} =: a < b < 0.$$

Finalmente, como ϕ satisfaz (PS) podemos aplicar o Teorema 1.2.3 e concluir a existência de um ponto crítico para o funcional ϕ e, consequentemente, uma solução de (1). $\square$

Capítulo

3

Teorema 0.0.3

Para demonstrar o Teorema 0.0.3, utilizaremos o teorema do passo da montanha [11] enunciado a seguir.

3.1 Teorema do Passo da Montanha

Teorema 3.1.1. *Seja X um espaço de Banach e $\phi : X \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$. Suponhamos que ϕ satisfaça as seguintes condições geométricas:*

(H1) Existem $R > 0$ e $c_0 \in \mathbb{R}$ tais que $\phi(u) \geq c_0$ para todo $u \in S_R := \{v \in X;\ \|v\| = R\}$;

(H2) $\phi(0) < c_0$ e $\phi(e) < c_0$ para algum $e \in X$ com $\|e\| > R$.

Assim, se ϕ satisfizer a condição de Palais-Smale então ϕ terá um ponto crítico em $X \setminus \{0, e\}$ com correspondente valor crítico $c \geq c_0$.

Demonstração:

Definamos

$$P = \{p \in \mathcal{C}([0,1], X);\ p(0) = 0,\ p(1) = e\}.$$

Mostremos que

$$c = \inf_{p \in P} \sup_{t \in [0,1]} \phi(p(t))$$

é um valor crítico.

Suponhamos, por absurdo, que $K_c = \{u \in X; \phi'(u) = 0, \phi(u) = c\} = \emptyset$ e tomemos $\overline{\varepsilon} = \min\{c - \phi(0), c - \phi(e)\}$. Pela definição de c, $\overline{\varepsilon} > 0$. Tomemos $\varepsilon \in (0, \overline{\varepsilon}/2)$ e a deformação η dada pelo Lema 2.2.2. Pela definição de c, existe $p \in P$ tal que

$$\sup_{t\in[0,1]} \phi(p(t)) < c + \varepsilon.$$

Considere $p_1(t) = \eta(p(t), 1)$. Pela definição de $\overline{\varepsilon}$, para todo $\varepsilon \in (0, \overline{\varepsilon}/2)$, temos

$$\phi(0),\ \phi(e) < c - 2\varepsilon.$$

Pelo Lema 2.2.2, $\eta(1, 0) = 0$ e $\eta(1, e) = e$, e portanto, $p_1 \in P$. Mais que isto, $\eta(\phi_{c+\varepsilon}, 1) \in \phi_{c-\varepsilon}$, isto é,

$$\sup_{t\in[0,1]} \phi(p_1(t)) = \sup_{t\in[0,1]} \phi(\eta(p(t), 1)) < c - \varepsilon.$$

Mas, isto contradiz a definição de c, completando a prova. □

3.2 Demonstração do Teorema 0.0.3

Uma vez que estamos procurando soluções positivas é natural considerarmos a função

$$f_0(u) := \begin{cases} f(u), & \text{se } u \geq 0, \\ 0, & \text{se } u < 0. \end{cases}$$

Tal função é contínua, pois $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua com $f(0) = 0$. Pelas hipóteses (5)-(6), existe $C > 0$ tal que para todo $u \in \mathbb{R}$,

$$|f_0(u)| \leq C(1 + |u|). \tag{3.1}$$

Por (6), existem constantes $C_1 > \lambda_1$ e $C_2 > 0$ tais que $f_0(u) \geq C_1 u - C_2$, para todo u. Defina

$$F_0(u) = \int_0^u f(t)\, dt.$$

Assim,

$$|F_0(u)| \leq C\left(u + \frac{u^2}{2}\right)$$

e

$$F_0(u) \geq C_1' \frac{u^2}{2} - C_3, \text{ com } C_1 > C_1' > \lambda_1. \tag{3.2}$$

Associamos a (7) o funcional energia $\phi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$\phi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx - \int_\Omega F_0(u)\, dx,\ \forall\, u \in H_0^1(\Omega).$$

Segue de (3.1) e do Teorema das Imersões de Sobolev (Teorema A.1.1) que ϕ está bem definido em $H_0^1(\Omega)$. Mais que isto, ϕ é de classe $\mathcal{C}^1$ e para todo $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\phi'(u)v = \int_\Omega [\nabla u \nabla v - f_0(u)v]\, dx.$$

Mostraremos inicialmente que a geometria do Passo da Montanha é satisfeita. Fixemos $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$. Para verificar a condição (H1), notemos que (5) e (6) implicam que existem $0 < \alpha < \lambda_1$ e $C_4 > 0$ tais que

$$|f_0(s)| \leq \alpha|s| + C_4|s|^p, \quad \forall\, s \in \mathbb{R}. \tag{3.3}$$

Assim,

$$F_0(s) \leq \alpha\frac{s^2}{2} + C_5|s|^{p+1},\ C_5 > 0, \quad \forall\, s \in \mathbb{R}.$$

Segue então que

$$\phi(u) \geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx - \frac{\alpha}{2}\int_\Omega u^2\, dx - C_5\int_\Omega |u|^{p+1}\, dx.$$

Pela Desigualdade de Poincaré, temos:

$$\int_\Omega u^2\, dx \leq \frac{1}{\lambda_1}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx,\ \forall\, u \in H_0^1(\Omega).$$

Segue então que

$$\phi(u) \geq \frac{\lambda_1 - \alpha}{2\lambda_1}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - C_5\int_\Omega |u|^{p+1}\, dx,\ \forall\, u \in H_0^1(\Omega).$$

Utilizando as Imersões de Sobolev, segue que $\phi(u) > 0$ para todo u com $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = R$ e R suficientemente pequeno. Assim, a condição (H1) é satisfeita, em particular, com $c_0 > 0$.

Provemos agora que (H2) ocorre. Seja w_1 a primeira autofunção de $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega)$, isto é,

$$\int_\Omega |\nabla w_1|^2\, dx = \lambda_1\int_\Omega w_1^2\, dx.$$

Deste modo, de (3.2) e do fato que $C_1 > \lambda_1$, segue que

$$\phi(tw_1) \leq \frac{t^2\lambda_1^2}{2}\int_\Omega w_1^2\, dx - \frac{t^2C_1^2}{2}\int_\Omega w_1^2\, dx + C_3|\Omega| < 0,$$

para todo $t > 0$ suficientemente grande. Logo, a condição (H2) está satisfeita escolhendo $e = tw_1$ para este $t > 0$ suficientemente grande.

Para completar a prova resta mostrar que o funcional ϕ satisfaz a condição (PS). Seja $\{u_n\}_n$ uma sequência em $H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\phi(u_n) \to c \tag{3.4}$$

e

$$\phi'(u_n) \to 0, \tag{3.5}$$

onde c é uma constante qualquer

Mostremos que

$$\{u_n\} \text{ é limitada em } H_0^1(\Omega). \tag{3.6}$$

Notemos inicialmente que a relação (3.5) nos diz que

$$-\Delta u_n = f_0(u_n) + \psi_n, \text{ onde } \|\psi_n\|_{H^{-1}(\Omega)} \to 0. \tag{3.7}$$

Combinando (3.3) e (3.7), deduzimos (3.6) desde que $\{u_n\}$ seja limitada em $L^2(\Omega)$. De fato, note que

$$\phi'(u_n)u_n = \int_\Omega |\nabla u_n|^2\,dx - \int_\Omega f(u_n)u_n\,dx,$$

implicando que

$$\|u_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \phi'(u_n)u_n + \int_\Omega f_0(u_n)u_n\,dx.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\|u_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} &\leq \|\phi'(u_n)\| \cdot \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} + \int_\Omega |f_0(u_n)u_n|\,dx \\
&\leq \|\phi'(u_n)\| \cdot \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} + \alpha \int_\Omega u_n^2\,dx + C\int_\Omega (1+|u_n|)|u_n|\,dx \\
&\leq \|\phi'(u_n)\| \cdot \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} + \frac{\alpha}{\lambda_1}\|u_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} + C'\left(\int_\Omega |u_n|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} + C\int_\Omega |u_n|^2\,dx.
\end{aligned}$$

E, deste modo,

$$\left(1 - \frac{\alpha}{\lambda_1}\right)\|u_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \|\phi'(u_n)\|\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} + C'\|u_n\|_{L^2(\Omega)} + C\|u_n\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

A Desigualdade acima nos diz que se $\{u_n\}$ for limitada em $L^2(\Omega)$, então $\{u_n\}$ também será limitada em $H_0^1(\Omega)$.

Mostremos então que $\{u_n\}_n$ é limitada em $L^2(\Omega)$. Suponha, por contradição, que $\|u_n\|_{L^2(\Omega)} \to \infty$. Defina

$$v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}}.$$

Assim, v_n satisfaz:

$$-\Delta v_n = \frac{f_0(u_n)}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}} + \frac{\psi_n}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}}. \tag{3.8}$$

Notemos agora que $f_0(u_n)/\|u_n\|_{L^2(\Omega)}$ é limitada em $L^2(\Omega)$. Assim, multiplicando a equação (3.8) por v_n e integrando, obtemos que $\{v_n\}$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Logo, existem uma subsequência de $\{v_n\}$, ainda denotada por $\{v_n\}$, e v tais que

$$v_n \to v \text{ em } H_0^1(\Omega).$$

E, como $\|v_n\|_{L^2(\Omega)} = 1$, então

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} = 1. \tag{3.9}$$

Observemos agora que a definição de f_0 implica que existe $c > 0$ tal que $f_0(u) \geq -c$, para todo $u \in \mathbb{R}$. Assim, por (3.8),

$$-\Delta u_n \geq -c + \psi_n, \quad x \in \Omega.$$

Pelo princípio do máximo (Teorema B.0.6), $u_n \geq -c + \rho_n$, onde $\rho_n \to 0$ em $H_0^1(\Omega)$ e, assim, existe uma subsequência de $\{\rho_n\}$, também denotada por $\{\rho_n\}$, e tal que

$$\rho_n \to 0 \text{ quase sempre em } \Omega.$$

E, isto implica que

$$v \geq 0 \text{ quase sempre em } \Omega. \tag{3.10}$$

Por outro lado, a equação (6) implica que

$$f_0(u) \geq Au - B, \, \forall \, u \in \mathbb{R},$$

onde $A > \lambda_1$ e $B > 0$. Isto implica que

$$-\Delta u_n \geq Au_n - B + \psi_n, \quad x \in \Omega. \tag{3.11}$$

Sendo $w_1 > 0$ a autofunção associada ao primeiro autovalor de $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega)$, de (3.11), obtemos:

$$\lambda_1 \int_\Omega u_n \psi_n \, dx \geq A \int_\Omega u_n w_1 \, dx - C + < \psi_n, \, w_n >_{H^{-1}, H_0^1} .$$

Dividindo por $\|u_n\|_{L^2(\Omega)}$ e tomando $n \to \infty$, obtemos:

$$\lambda_1 \int_\Omega v w_1 \, dx \geq A \int_\Omega v w_1 \, dx,$$

que contradiz (3.9) e (3.10). Assim, fica provado (3.6).

Definamos agora $D : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}$ por

$$D(u)\varphi = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \, dx.$$

Pela Desigualdade de Hölder, a transformação linear D é contínua.

Afirmamos que D é bijetiva. Primeiramente, D é injetiva pois $D(u)\varphi = 0$ para todo $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ se, e somente se, $u = 0$. Para verificar que D é sobrejetiva, notemos que $H^{-1} \subset L^2(\Omega)$ e assim para $f \in H^{-1}$ dado, pelo Apêndice D.1 existe um único $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $D(u) = f$. Deste modo, D é uma transformação linear, bijetiva, contínua. Logo D^{-1} também será uma tranformação contínua.

Agora, notemos que

$$\phi'(u)\varphi = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \, dx - \int_\Omega f \varphi \, dx = D(u)\varphi - J'(u)\varphi,$$

isto é, $\phi'(u) = D(u) - J'(u)$ em H^{-1}. Logo, $D^{-1}\phi'(u) = u - D^{-1}J'(u)$. Assim, para a sequência $\{u_n\}$ limitada em $H_0^1(\Omega)$:

$$u_n = D^{-1}\phi'(u_n) + D^{-1}J'(u_n).$$

Uma vez que D^{-1} é contínuo, J' é compacto e $\phi'(u_n) \to 0$, então $\{u_n\}$ possui subsequência convergente, mostrando que ϕ satisfaz a condição de Palais-Smale.

Aplicando o Teorema do Passo da Montanha (Teorema 3.1.1), o funcional ϕ possui um ponto crítico em $H_0^1(\Omega) \setminus \{0, w_1\}$. Logo, o problema (7) possui uma solução fraca. $\square$

Apêndice

A

Espaços de Sobolev

Neste apêndice resumiremos alguns resultados utilizados nesta dissertação, cujas demonstrações podem ser encontradas em [3] e [7].

Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado. Seja $x \in \mathbb{R}^N$com coordenadas $(x_1, \cdots, x_N)$. Um multi-índice é uma N-upla

$$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_N),\ \alpha_i \geq 0,\ \alpha_i \text{ inteiros.}$$

Associado ao multi-índice α, temos

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N.$$

Definimos:

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}}.$$

Denote por $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega) = \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap \mathcal{C}_c(\Omega)$, onde $\mathcal{C}_c(\Omega)$ é o conjunto das funções contínuas com suporte compacto em Ω.

Definição A.0.1. *Seja $m > 0$ um inteiro e $1 \leq p \leq \infty$. O Espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é definido por*

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega); \forall\ |\alpha| \leq m,\ \exists\ g_\alpha \in L^p(\Omega); \int_\Omega u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \varphi,\ \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \right\}.$$

Denotemos $D^\alpha u := g_\alpha$.

O espaço definido acima é vetorial. Consideremos em tal espaço a seguinte norma:

$$\|u\|_{m,\,p,\,\Omega} = \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Consideremos também a seguinte semi-norma:

$$|u|_{m,p,\Omega} = \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Definição A.0.2. *Definamos o espaço $W_0^{m,\,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ em $W^{m,\,p}(\Omega)$.*

Notações:

Quando $p = 2$, escremos:

$$W^{m,\,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$$
$$W_0^{m,\,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega).$$

Teorema A.0.1. *Para todo $1 \leq p \leq \infty$, o espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach. Se $1 < p < \infty$, este espaço é reflexivo e se $1 \leq p < \infty$, é separável. Em particular $H^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert separável.*

Teorema A.0.2. ***(Desigualdade de Poincaré)*** *Seja Ω um conjunto aberto e limitado em $\mathbb{R}^N$. Então existe uma constante positiva $C = C(\Omega, p)$ tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C|u|_{1,p,\Omega},\ \forall\, u \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{A.1}$$

Assim, $u \mapsto |u|_{1,p,\Omega}$ define uma norma em $W_0^{1,p}(\Omega)$, que é equivalente a norma $\|\cdot\|_{1,p,\Omega}$, e será denotada por $\|\cdot\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$. Além disso,

$$\lambda_1(\Omega) := \inf\{\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)};\ u \in H_0^1(\Omega), \|u\|_{L^2(\Omega)} = 1\} > 0.$$

é atingido.

A.1 Teoremas de Imersão

Teorema A.1.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto e limitado de classe $\mathcal{C}^1$. Então as seguintes imersões são compactas:*

(i) Se $1 \leq p < N$, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $1 \leq q < p^*$, onde $p^* = \frac{Np}{N-p}$;

(ii) Se $p = N$, $W^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $1 \leq q < \infty$;

(iii) Se $p > N$, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, onde $0 < \alpha < 1 - \frac{N}{p}$.

Observação A.1.1. *Se $k \geq 1$ for um inteiro tal que $k - \frac{N}{p} > 0$, então a imersão $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$ é contínua, onde $m = \left[k - \frac{N}{p}\right]$ e $\alpha = k - \frac{N}{p} - m$, e a imersão é compacta em $\mathcal{C}^{m,\beta}(\overline{\Omega})$ para qualquer $\beta < \alpha$.*

Apêndice

B

Alguns Resultados

As demonstrações dos teoremas enunciados neste apêndice podem ser encontradas em [7].

Teorema B.0.2. *Seja E um espaço de Banach. Então E é reflexivo se, e somente se,*

$$B_E = \{x \in E;\ \|x\| \leq 1\}$$

for compacta na topologia fraca.

Teorema B.0.3. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira suave, $f \in L^r(\Omega)$ com $r > 1$ e $u \in H_0^1(\Omega)$ uma solução fraca do problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Então, $u \in W^{2,r}(\Omega)$ e existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{W^{2,r}(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^r(\Omega)}.$$

Observação B.0.2. *O Teorema acima nos diz que se $f \in W^{k,r}(\Omega)$, então $u \in W^{k+2,r}(\Omega)$.*

Teorema B.0.4. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira suave e $f \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$. Então existe $u \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ solução do problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Além disso, existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C\|f\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}.$$

Observação B.0.3. *O Teorema acima nos diz que se $f \in \mathcal{C}^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$, então $u \in \mathcal{C}^{k+2,\alpha}(\overline{\Omega})$.*

Teorema B.0.5. *(Alternativa de Fredholm) Seja T uma aplicação linear e compacta de um espaço vetorial normado $\mathcal{V}$ nele mesmo. Então apenas uma das duas afirmações ocorre:*

(i) A equação homogênea

$$x - Tx = 0$$

possui uma solução não-trivial $x \in \mathcal{V}$.

(ii) Para cada $y \in \mathcal{V}$, a equação

$$x - Tx = y$$

possui uma única solução $x \in \mathcal{V}$.

Além disso, no caso de (ii), o operador $(I - T)^{-1}$ é limitado.

A demonstração do próximo resultado pode ser encontrada em [9].

Teorema B.0.6. ***(Princípio do Máximo)*** *Sejam a_{ij}, $1 \leq i, j \leq N$, e a_0 funções em $L^\infty(\Omega)$ tais que $a_0 \geq 0$ e que $\{a_{ij}\}$ verifiquem*

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi^2|, \forall \xi \in \mathbb{R}^N,\ x \in \Omega \text{ onde } \alpha > 0.$$

Seja Ω um conjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^N$ com fronteira suave $\partial\Omega$. Seja $f \in L^2(\Omega)$ e $u \in H^1(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ tal que

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx + \int_\Omega a_0 uv\,dx = \int_\Omega fv\,dx,\ \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

Então:

(i) Se $f \geq 0$ em Ω e $u \geq 0$ em $\partial\Omega$ então $u \geq 0$ em Ω.

(ii) Se $a_0 = 0$ e $f \geq 0$, então

$$u \geq \inf_{\partial\Omega} u, \text{ em } \Omega.$$

(iii) Se $f = 0$ e $a_0 = 0$, então

$$\inf_{\partial\Omega} u \leq u \leq \sup_{\partial\Omega} u.$$

Apêndice

C

O Funcional Energia

Sob a hipótese que $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R},\ \mathbb{R})$ e que satisfaz a condição (2) existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|f(x,s)| \leq C(|s|+1),\ \forall\, x \in \overline{\Omega},\ \forall\, s \in \mathbb{R}.$$

Assim, fixado $1 \leq p < 2^*$, podemos supor que

$$|f(x,s)| \leq C(|s|^p + 1). \tag{C.1}$$

Mostraremos no Teorema C.0.7 que o funcional $\phi :\ H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\phi(u) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - F(x,u) \right) dx, \quad \text{onde} \quad F(x,s) = \int_0^s f(x,t)\, dt, \tag{C.2}$$

está bem definido, $\phi \in \mathcal{C}^1(H_0^1, \mathbb{R})$ e que

$$\phi'(u)\varphi = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \varphi - f(x,u)\varphi)\, dx$$

para todo $\varphi \in E = H_0^1(\Omega)$. Além disso, mostraremos que o funcional $J(u) = \int_\Omega F(x,u(x))\, dx$ é sequencialmente fracamente contínuo e que $J'(u)$ é compacto.

Proposição C.0.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado e seja g satisfazendo*

(g_1) $g \in \mathcal{C}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$;

(g_2) Existem constantes $r, s \geq 1$ e $a_1, a_2 \geq 0$ tais que

$$|g(x,\xi)| \leq a_1 + a_2|\xi|^{\frac{r}{s}},\ \forall\, x \in \overline{\Omega},\ \xi \in \mathbb{R}.$$

Então a aplicação

$$\begin{array}{rccc} T: & L^r(\Omega) & \to & L^s(\Omega) \\ & \varphi & \mapsto & g(\cdot, \varphi(\cdot)) \end{array}$$

está em $\mathcal{C}(L^r(\Omega), L^s(\Omega))$.

Demonstração:

Seja $u \in L^r(\Omega)$, então

$$\int_\Omega |g(x, u(x))|^s \, dx \leq \int_\Omega (a_1 + a_2 |u(x)|^{\frac{r}{s}})^s \, dx \leq a_3 \int_\Omega (1 + |u(x)|^r) \, dx < \infty. \tag{C.3}$$

Portanto, $T: L^r(\Omega) \to L^s(\Omega)$. Para mostrar a continuidade de tal aplicação, observe que ela será contínua em φ se, e somente se, a aplicação $z \mapsto f(x, z(x))$, onde

$$f(x, z(x)) = g(x, z(x) + \varphi(x)) - g(x, \varphi(x)),$$

for contínua em $z = 0$. Portanto podemos admitir que $g(x, 0) \equiv 0$.

Seja $\varepsilon > 0$ dado. Por (g_1) e pelo fato que $g(x, 0) = 0$, dado $\hat{\varepsilon} > 0$, existe $\hat{\delta} > 0$ tal que

$$|g(x, \xi)| \leq \hat{\varepsilon}, \text{ para } x \in \overline{\Omega} \text{ e } |\xi| \leq \hat{\delta}.$$

Seja agora $u \in L^r(\Omega)$ com $\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq \delta$, δ sendo livre por enquanto. Definamos

$$\Omega_1 = \{x \in \overline{\Omega};\ |u(x)| \leq \beta\}.$$

Assim,

$$\int_{\Omega_1} |g(x, u(x))|^s \, dx \leq \hat{\varepsilon}^s |\Omega_1| \leq \hat{\varepsilon}^s |\Omega|. \tag{C.4}$$

Escolha $\hat{\varepsilon}$ de modo que

$$\hat{\varepsilon}^s |\Omega| \leq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^s.$$

Consideremos também $\Omega_2 = \overline{\Omega} \setminus \Omega_1$. Como em (C.3), temos

$$\int_{\Omega_2} |g(x, u(x))|^s \, dx \leq a_3(|\Omega_2| + \delta^r). \tag{C.5}$$

Mais que isto,

$$\delta^r \geq \int_{\Omega_2} |u|^r \, dx \geq \beta^r |\Omega_2|. \tag{C.6}$$

Combinando as equações (C.5) e (C.6), obtemos:

$$\int_{\Omega_2} |g(x, u(x))|^s \, dx \leq a_3(1 + \beta^{-r})\delta^r. \tag{C.7}$$

Escolha δ de modo que

$$a_3(1 + \beta^{-r})\delta^r \leq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^s.$$

E, assim, (C.4) e (C.7) implicam que

$$\|g(\cdot, u)\|_{L^s(\Omega)} \leq \varepsilon \quad \text{se } \|u\|_{L^r(\Omega)} < \delta,$$

o que completa a prova. □

Teorema C.0.7. *Seja Ω um domínio suave em $\mathbb{R}^N$ cuja fronteira seja uma variedade suave e seja f satisfazendo:*

(f_1) $f(x,\, s) \in \mathcal{C}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R},\, \mathbb{R})$;

(f_2) Existem $a_1,\, a_2 > 0$ constantes, tais que $|f(x,\, s)| \leq a_1 + a_2|s|^p$, onde $0 \leq p < 2^* - 1$ e $N \geq 3$.

Se

$$F(x,s) = \int_\Omega f(x,t)\,dt \quad e \quad \phi(u) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - F(x,u)\right) dx, \tag{C.8}$$

então $\phi \in \mathcal{C}^1(H_0^1, \mathbb{R})$ e

$$\phi'(u)\varphi = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \varphi - f(x,u)\varphi)\,dx, \tag{C.9}$$

para todo $\varphi \in E = H_0^1(\Omega)$. Além disso, $J(u) = \int_\Omega F(x,u(x))\,dx$ é sequencialmente fracamente contínua e $J'(u)$ é compacta.

Observação C.0.4. *Se $N = 1$, a condição (f_2) pode ser eliminada. Enquanto que para $N = 2$, é suficiente supor que*

$$|f(x,s)| \leq a_1 e^{\varphi(s)},$$

onde

$$\lim_{s \to 0} \frac{\varphi(s)}{s^2} = 0.$$

No entanto, nesta dissertação restringiremos nossa atenção ao caso $N \geq 3$.

Demonstração:

Pelo Teorema A.1.1 e as hipóteses (f_1) e (f_2), ϕ está definida em E e o mesmo é verdade para $\phi'(u)$ com o cuidado da desigualdade de Hölder. Notemos que o primeiro termo de ϕ é $\mathcal{C}^1$ e sua derivada de Frechét é o primeiro termo de ϕ'. Assim, devemos mostrar que $J(u) = \int_\Omega F(x,u(x))\,dx$ está em $\mathcal{C}^1(E, \mathbb{R})$.

Mostremos primeiramente que J é Frechét diferenciável em E. Sejam $u,\, \varphi \in E$. Queremos mostrar que: dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon, u)$ tal que

$$\left| J(u+\varphi) - J(u) - \int_\Omega f(x,u)\varphi\,dx \right| \leq \varepsilon \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} \tag{C.10}$$

desde que $\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \delta$.

Se o fato acima ocorrer, J será Frechét diferenciável em u e J' será dado pelo termo apropriado em (C.9). Definindo $\psi = |F(x,u(x)+\varphi(x)) - F(x,u(x)) - f(x,u(x))\varphi(x)|$, temos:

$$|J(u+\varphi) - J(u) - \int_\Omega f(x,u)\varphi\,dx| \leq \int_\Omega \psi\,dx.$$

Definamos:

$$\Omega_1 = \{x \in \overline{\Omega};\, |u(x)| \geq \beta\},$$

$$\Omega_2 = \{x \in \overline{\Omega};\ |\varphi(x)| \geq \gamma\} \text{ e}$$

$$\Omega_3 = \{x \in \overline{\Omega};\ |u(x)| \leq \beta \text{ e } |\varphi(x)| \leq \gamma\},$$

com β e γ livres por enquanto. Deste modo,

$$\int_\Omega \psi\, dx \leq \sum_{i=1}^{3} \int_{\Omega_i} \psi\, dx. \tag{C.11}$$

Pelo Teorema do Valor Médio,

$$F(x, s+\eta) - F(x, s) = f(x, s+\theta\eta)\eta, \text{ onde } \theta \in (0,1). \tag{C.12}$$

Agora, por (C.12), a hipótese (f_2) e a desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_1} |F(x, u(x)+\varphi(x)) - F(x, u(x))|\, dx \\
&\quad = \int_{\Omega_1} |f(x, u(x)+\theta\varphi(x))\varphi(x)|\, dx \\
&\quad \leq \int_{\Omega_1} (a_1 + a_2|u(x)+\theta\varphi(x)|^p)|\varphi(x)|\, dx \\
&\quad \leq \int_{\Omega_1} [a_1 - a_2(|u(x)| + \theta|\varphi|)^p]|\varphi(x)|\, dx \\
&\quad \leq \int_{\Omega_1} [a_1 + a_2(|u(x)| + |\varphi(x)|)^p]|\varphi(x)|\, dx \\
&\quad \leq a_1|\Omega_1|^{\frac{N+2}{2N}} \|\varphi\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)} + a_2|\Omega_1|^{\frac{1}{\sigma}}[\|u\|^p_{L^{p+1}(\Omega)} + \|\varphi\|^p_{L^{p+1}(\Omega)}]\|\varphi\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)},
\end{aligned} \tag{C.13}$$

onde

$$\frac{1}{\sigma} + \frac{p}{p+1} + \frac{N-2}{2N} = 1. \tag{C.14}$$

Observe que $p < \frac{N+2}{N-2}$ implica

$$p+1 < \frac{N+2}{N-2} + 1 = \frac{N+2+N-2}{N-2} = \frac{2N}{N-2}.$$

Assim,

$$\frac{p}{p+1} < \frac{N+2}{N-2}\frac{N-2}{2N} = \frac{N+2}{2N} = 1 - \frac{(N-2)}{2N}.$$

Logo

$$\frac{p}{p+1} + \frac{N-2}{2N} < 1.$$

Deste modo, existe $\sigma > 1$ satisfazendo (C.14) e justificando (C.13). De (A.1) e (C.13), obtemos:

$$\int_{\Omega_1} |F(x, u(x)+\varphi(x)) - F(x, u(x))|\, dx \leq a_4\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} \left[|\Omega_1|^{\frac{N+2}{2N}} + |\Omega_1|^{\frac{1}{\sigma}}(\|u\|^p_{H_0^1(\Omega)} + \|\varphi\|^p_{H_0^1(\Omega)})\right]. \tag{C.15}$$

Similarmente,

$$\int_{\Omega_1} |f(x,u(x))\varphi(x)|\,dx \le a_5\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}\left[|\Omega_1|^{\frac{n+2}{2n}} + |\Omega_1|\frac{1}{\sigma}\|u\|^p_{H_0^1(\Omega)}\right]. \tag{C.16}$$

Por (A.1) e a desigualdade de Hölder:

$$\begin{aligned}\|u\|_{H_0^1(\Omega)} &\ge a_6\|u\|_{L^2(\Omega)} \ge a_6\|u\|_{L^2(\Omega_1)} = a_6\left(\int_{\Omega_1}|u|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\ge a_6\left(\int_{\Omega_1}\beta^2\right)^{\frac{1}{2}} = a_6(\beta^2)^{\frac{1}{2}}|\Omega_1|^{\frac{1}{2}} = a_6\beta|\Omega_1|^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{C.17}$$

Deste modo,

$$|\Omega_1|^{\frac{1}{\sigma}} \le \left(\frac{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}}{a_6\beta}\right)^{\frac{2}{\sigma}} =: M_1, \quad |\Omega_1|^{\frac{n+2}{2n}} \le \left(\frac{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}}{a_6\beta}\right)^{\frac{n+2}{n}} =: M_2. \tag{C.18}$$

Note que M_1, $M_2 \to 0$ quando $\beta \to \infty$. Combinando as equações (C.13)-(C.18):

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_1}\psi &\le a_4\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}[|\Omega_1|^{\frac{N+2}{2N}} + |\Omega_1|^{\frac{1}{\sigma}}(\|u\|^p_{H_0^1(\Omega)} + \|\varphi\|^p_{H_0^1(\Omega)})]\\ &\quad + a_5\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}[|\Omega_1|^{\frac{N+2}{2n}} + |\Omega_1|^{\frac{1}{\sigma}}\|u\|^p_{H_0^1(\Omega)}]\\ &\le a_4\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}[M_2 + M_1(\|u\|^p_{H_0^1(\Omega)} + \|\varphi\|^p_{H_0^1(\Omega)})] + a_5\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}[M_2 + M_1\|u\|^p_{H_0^1(\Omega)}]\\ &\le a_7[M_2 + M_1(\|u\|^p_{H_0^1(\Omega)} + \|\varphi\|^p_{H_0^1(\Omega)})]\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

Podemos supor que $\delta \le 1$. Deste modo, escolhemos β suficientemente grande de modo que

$$a_7[M_2 + M_1(\|u\|^p_{H_0^1(\Omega)} + 1)] \le \frac{\varepsilon}{3}.$$

Assim,

$$\int_{\Omega_1}\psi\,dx < \frac{\varepsilon}{3}\|\varphi\|. \tag{C.19}$$

Similarmente, temos:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_2}\psi\,dx &\le a_3\int_{\Omega_2}[1 + (|u(x)| + |\varphi(x)|)^p|\varphi(x)|]\,dx\\ &\le a_4\left(\int_{\Omega_2}(1 + (|u(x)| + |\varphi(x)|)^p)^{\frac{p+1}{p}}\,dx\right)^{\frac{p}{p+1}}\|\varphi\|_{L^{p+1}(\Omega_2)}\\ &= a_4\|1 + (u+\varphi)^p\|_{L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega_2)}\left(\int_{\Omega_2}|\varphi|^{p+1}\,dx\right)^{\frac{1}{p+1}}\\ &\le a_5\|1 + (u+\varphi)^p\|_{H_0^1(\Omega)}\left(\int_{\Omega_2}|\varphi|^{p+1}\,dx\right)^{\frac{1}{p+1}}\\ &\le a_5(1 + \|u+\varphi\|^p_{H_0^1(\Omega)})\left(\int_{\Omega_2}|\varphi|^{p+1}\,dx\right)^{\frac{1}{p+1}}\\ &\le a_5(1 + \|u\|^p_{H_0^1(\Omega)} + \|\varphi\|^p_{H_0^1(\Omega)})\left(\int_{\Omega_2}|\varphi|^{p+1}\,dx\right)^{\frac{1}{p+1}}\\ &\le a_5(1 + \|u\|^p_{H_0^1(\Omega)} + \|\varphi\|^p_{H_0^1(\Omega)})\left(\int_{\Omega_2}|\varphi(x)|^{p+1}\left(\frac{|\varphi(x)|}{\delta}\right)^{m-(p+1)}\,dx\right)^{\frac{1}{p+1}},\end{aligned}$$

onde $m = \frac{2N}{N-2} > p+1$.

Observação C.0.5. *Note que* $|\varphi(x)| \geq \gamma$, *para todo* $x \in \Omega_2$. *Assim,*

$$\frac{|\varphi(x)|}{\gamma} \geq 1.$$

Logo,

$$\left(\frac{|\varphi(x)|}{\gamma}\right)^{m-(p+1)} \geq 1.$$

E, portanto,

$$|\varphi(x)|^{p+1} \leq \left(\frac{\varphi(x)}{\gamma}\right)^{m-(p+1)} |\varphi(x)|^{m-(p+1)}.$$

Deste modo,

$$\int_{\Omega_2} \psi \, dx \leq a_6 \gamma^{\frac{p+1-m}{p+1}} (1 + \|u\|^p + \|\varphi\|^p) \|\varphi\|^{\frac{m}{p+1}}. \tag{C.20}$$

Agora, como $F \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, dados $\hat{\varepsilon}$, $\hat{\beta} > 0$, existe $\hat{\gamma} = \hat{\gamma}(\hat{\varepsilon}, \hat{\beta})$ tal que

$$|F(x, s+h) - F(x,s) - f(x,s)h| < \hat{\varepsilon}|h|, \tag{C.21}$$

quando $x \in \overline{\Omega}$, $|s| \leq \hat{\beta}$, $|h| < \hat{\varepsilon}$. Em particular, se $\hat{\beta}$ e $\gamma \leq \hat{\gamma}$, a Desigualdade de Poincaré (A.1) e equação (C.21), implicam que:

$$\int_{\Omega_3} \psi \, dx \leq \hat{\varepsilon} \int_{\Omega_3} |\varphi(x)| \, dx \leq a_7 \hat{\varepsilon} \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}. \tag{C.22}$$

Escolha $\hat{\varepsilon}$ de modo que $3a_7\hat{\varepsilon} < \varepsilon$. E, uma vez que $\hat{\gamma} = \hat{\gamma}(\hat{\varepsilon}, \hat{\beta})$, isto determina $\hat{\gamma}$. Combinando (C.11), (C.19), (C.20) e (C.22), temos:

$$\int_{\Omega} \psi \, dx \leq \frac{2\varepsilon}{3} \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} + a_6 \gamma^{\frac{p+1-m}{p+1}} (1 + \|u\|^p_{H_0^1(\Omega)} + \|\varphi\|^p_{H_0^1(\Omega)}) \, \|\varphi\|^{\frac{m}{p+1}}_{H_0^1(\Omega)}.$$

Finalmente, escolhemos δ suficientemente pequeno tal que

$$a_6 \gamma^{\frac{1-m}{p+1}} (2 + \|u\|^p_{H_0^1(\Omega)}) \delta^{\frac{m}{p+1}-1} \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

e assim, obtemos (C.10).

Para provar que $J'(u)$ é contínua, seja $u_m \to u$ em E. Então, por (A.1), $u_m \to u$ em $L^{p+1}(\Omega)$. Novamente pela Desigualdade de Poincaré e pela Desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}
\|J'(u_m) - J'(u)\| &= \sup_{\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1} \left| \int_{\Omega} (f(x, u_m(x)) - f(x, u(x)))\varphi(x) \, dx \right| \\
&\leq \sup_{\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1} \left\{ \|f(\cdot, u_m) - f(\cdot, u)\|_{L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)} \|\varphi\|_{L^{p+1}(\Omega)} \right\} \\
&\leq \sup_{\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1} \left\{ \|f(\cdot, u_m) - f(\cdot, u)\|_{L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)} a_7 \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} \right\} \\
&\leq a_7 \|f(\cdot, u_m) - f(\cdot, u)\|_{L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{C.23}$$

Por (f_2), sabemos que $|f(x,s)| \leq a_1 + a_2|s|^{\frac{\alpha p}{\alpha}}$, para algum $\alpha \geq 1$ e $\forall\, x \in \overline{\Omega}$, $s \in \mathbb{R}$. Pela Proposição C.0.1, $f \in \mathcal{C}(L^{\alpha p}(\Omega), L^{\alpha}(\Omega))$. Tomando-se $\alpha = (p+1)/p$, o lado direito da equação (C.23) tende a zero quando $m \to \infty$ e J' é contínua.

Para provar que J é sequencialmente fracamente contínuo, seja $\{u_m\}$ um sequência em E convergindo fracamente a u. Pelo Teorema A.1.1, u_m converge a u em $L^{p+1}(\Omega)$, pois

$$p + 1 < \frac{2N}{N-2} = 2^*.$$

Consequentemente a proposição (C.0.1) implica que $J(u_m) \to J(u)$. Portanto, J é fracamente contínuo em E. Para verificar a compacidade de $J'(u)$, seja $\{u_n\}$ uma sequência limitada em E. A menos de subsequência, $u_n \to u$ para algum $u \in E$. Usando a imersão de Sobolev, $u_n \to u$ em $L^{p+1}(\Omega)$. Combinando (C.23) com a Proposição C.0.1 a conclusão se segue. $\square$

Apêndice

D

Espectro do Laplaciano

Na demonstração dos teoremas enunciados na introdução, objetos deste estudo, fazemos uso do espectro do Laplaciano sob condição de Dirichlet, isto é, os números $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{D.1}$$

possui uma solução não trivial. Para desenvolver tal estudo necessitaremos de alguns resultados que serão desenvolvidos a seguir.

D.1 O operador solução

Dado $f \in L^2(\Omega)$, afirmamos que existe uma única solução $u \in H_0^1(\Omega)$ do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{P_1}$$

De fato, dado $f \in L^2(\Omega)$, defina o funcional linear

$$\begin{array}{rccl} F: & H_0^1(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \phi & \longmapsto & F(\phi) = \int_\Omega f\phi dx. \end{array}$$

Pelas desigualdades de Hölder e de Poincaré, temos

$$|F(\phi)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{H_0^1(\Omega)},$$

o que implica,

$$|F(\phi)| \leq M \|\phi\|_{H_0^1(\Omega)} \quad ; \quad M = C \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

mostrando a continuidade de F, ou seja, $F \in H^{-1}(\Omega)$, o espaço dual $H_0^1(\Omega)$. Pelo Teorema da Representação de Riesz, existe um único $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$(u, \phi)_{H_0^1(\Omega)} = F(\phi), \ \ \forall \, \phi \in H_0^1(\Omega),$$

de onde segue

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \phi \, dx = \int_\Omega f \phi \, dx, \ \ \forall \, \phi \in H_0^1(\Omega),$$

ou seja, u é a única solução fraca do problema (P_1). □

Pelo que foi visto até o momento, podemos definir o **operador solução** dado por

$$\begin{array}{rccl} S: & L^2(\Omega) & \longrightarrow & H_0^1(\Omega) \\ & f & \longmapsto & S(f) = u, \end{array}$$

que associa a cada $f \in L^2(\Omega)$ a única solução $u = S(f)$ do problema (P_1).

D.2 Propriedades do operador solução

Vejamos algumas propriedades do operador solução S.

(**P.1**) S é linear, isto é,

$$S(\lambda f + \gamma g) = \lambda S(f) + \gamma S(g), \ \ \forall \ \ f, g \in L^2(\Omega) \ \ e \ \ \forall \ \ \lambda, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Demonstração:

Sejam $u = S(f)$ e $v = S(g)$. Por definição

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u & = & f, & x \in \Omega, \\ u & = & 0, & x \in \partial\Omega, \end{array} \right.$$

e

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta v & = & g, & x \in \Omega, \\ v & = & 0, & x \in \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Multiplicando os problemas acima por λ e γ obtemos

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta(\lambda u) & = & \lambda f, & x \in \Omega, \\ \lambda u & = & 0, & x \in \partial\Omega, \end{array} \right.$$

e

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta(\gamma v) & = & \lambda g, & x \in \Omega, \\ \gamma v & = & 0, & x \in \partial\Omega, \end{array} \right.$$

o que implica,

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta(\lambda u + \gamma v) & = & (\lambda f + \gamma g), & x \in \Omega, \\ \lambda u + \gamma v & = & 0, & x \in \partial\Omega, \end{array} \right.$$

e, consequentemente,

$$S(\lambda f + \gamma g) = \lambda u + \gamma v,$$

isto é,

$$S(\lambda f + \gamma g) = \lambda S(f) + \gamma S(g), \ \ \forall \ \ f, g \in L^2(\Omega) \ \ e \ \ \forall \ \ \lambda, \gamma \in \mathbb{R}.$$

□

(**P.2**) S é contínuo, ou seja, existe $M > 0$ verificando

$$\|S(f)\| \leq M \|f\|_{L^2(\Omega)}, \ \ \forall \ \ f \in L^2(\Omega).$$

Demonstração:

Seja $u = S(f)$. Então,

$$\begin{cases} -\Delta u &= f, \quad x \in \Omega, \\ u &= 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

implicando que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \phi \ dx = \int_\Omega f\phi \ dx \ \ \forall \ \ \phi \in H_0^1(\Omega).$$

Escolhendo $\phi = u$, obtemos

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \ dx = \int_\Omega fu \ dx,$$

e assim,

$$\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega fu \ dx$$

de onde segue

$$\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \int_\Omega |f| \, |u| \ dx.$$

Por Hölder tem-se

$$\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Da desigualdade de Poincaré obtemos

$$\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Se $u \neq 0$, então

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)},$$

isto é,

$$\|S(f)\| \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}, \ \ \forall \ \ f \in L^2(\Omega).$$

□

(**P.3**) S pode ser visto de $L^2(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$. Além disso, neste caso S é linear e compacto.

Demonstração:

Observe que,

$$S : L^2(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega)$$

é uma aplicação contínua e como a imersão

$$i : H_0^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$$

é compacta, recordando que
(a) composição de aplições lineares é linear;
(b) composição de um operador contínuo com um compacto é compacto;
podemos concluir que o operador

$$S : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$$

é linear compacto. □

(**P.4**) O operador $S : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ é auto-adjunto, ou seja,

$$(S(f), g)_{L^2(\Omega)} = (f, S(g))_{L^2(\Omega)}$$

onde, $(.,.)_{L^2}$ é o produto interno de $L^2(\Omega)$.

Demonstração:

Sejam $u = S(f)$ e $v = S(g)$. Devemos mostrar a seguinte igualdade

$$\int_\Omega ug\ dx = \int_\Omega vf\ dx.$$

Desde que $u = S(f)$ e $v = S(g)$ temos que

$$\begin{cases} -\Delta u &= f, \quad x \in \Omega, \\ u &= 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta v &= g, \quad x \in \Omega, \\ v &= 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Portanto,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \phi\ dx = \int_\Omega f\phi\ dx, \ \ \forall\ \ \phi \in H_0^1(\Omega)$$

e

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \varphi\ dx = \int_\Omega g\varphi\ dx, \ \ \forall\ \ \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Fixe $\phi = v$ e $\varphi = u$, obtemos

$$\int_\Omega \nabla v \nabla u\ dx = \int_\Omega fv\ dx$$

e

$$\int_\Omega \nabla v \nabla u\ dx = \int_\Omega gu\ dx,$$

de onde segue

$$\int_\Omega ug\ dx = \int_\Omega vf\ dx,$$

isto é, $(S(f), g)_{L^2(\Omega)} = (f, S(g))_{L^2(\Omega)}$. □

(**P.5**) $S(f) = 0$ se, e somente se, $f = 0$.

Demonstração:

Considere que $S(f) = u$. Então, $u \in H_0^1(\Omega)$ é solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= f, \quad x \in \Omega, \\ u &= 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

ou seja,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \phi \, dx = \int_\Omega f\phi \, dx, \ \ \forall \ \ \phi \in H_0^1(\Omega). \tag{D.2}$$

Se $f = 0$, então

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \phi \, dx = 0, \ \ \forall \ \ \phi \in H_0^1(\Omega).$$

Para $\phi = u$, temos

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \ dx = \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = 0,$$

isto é,

$$S(f) = 0.$$

Supondo que $S(f) = 0$, segue de (D.2) que

$$\int_\Omega f\phi \, dx = 0, \ \ \forall \ \ \phi \in H_0^1(\Omega)$$

e então $f = 0$. □

(**P.6**) $\lambda = 0$ não é autovalor de S.

Demonstração:

Usando que $N(S) = \left\{\varphi \in L^2(\Omega) \, ; S(\varphi) = 0\right\}$, por (**P.5**), temos

$$S(\varphi) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = 0.$$

Logo, $N(S) = 0$, mostrando a propriedade. □

(**P.6**) S é positivo, isto é,

$$(S(f), f)_{L^2(\Omega)} > 0, \quad \forall \ \ f \neq 0.$$

Demonstração:

Seja $S(f) = u$ com $u \neq 0$, então

$$\begin{cases} -\Delta u &= f, \quad x \in \Omega, \\ u &= 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

o que implica,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \phi \, dx = \int_\Omega f\phi \, dx, \ \ \forall \ \ \phi \in H_0^1(\Omega).$$

Fixando $\phi = u$, segue

$$0 < \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega fu \, dx = \int_\Omega fS(f) \, dx = (S(f), f)_{L^2(\Omega)},$$

mostrando que

$$(S(f), f)_{L^2(\Omega)} > 0, \quad \forall \ \ f \neq 0.$$

□

Provadas as propriedades anteriores, usando o teorema espectral para operadores compactos autoadjuntos (veja [3]) concluímos que:

Afirmação 1: O operador $S : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ tem uma sequência de autovalores reais positivos $\{\mu_n\}$ verificando

$$\mu_1 > \mu_2 > \ldots > \mu_n > \ldots > 0$$

com

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n = 0.$$

Além disso, temos que:

Afirmação 2: Os autovalores de S são os inversos dos autovalores de

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta u & = & \lambda u, \quad x \in \Omega, \\ u & = & 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{P_λ}$$

De fato, se λ é um autovalor de $-\Delta$, então existe $\phi \neq 0$ verificando

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta \phi & = & \lambda \phi, \quad x \in \Omega, \\ \phi & = & 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Desde que $\lambda \neq 0$, segue da definição de solução fraca que

$$\int_\Omega \nabla \phi \nabla \psi \, dx = \int_\Omega \lambda \psi \phi \, dx, \ \ \forall \ \ \psi \in H_0^1(\Omega).$$

Fazendo $\phi = \psi$, temos

$$\|\phi\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \lambda \, \|\phi\|^2_{L^2(\Omega)} \, ,$$

e consequentemente

$$\lambda = \frac{\|\phi\|^2_{H_0^1}}{\|\phi\|^2_{L^2}} > 0.$$

Considerando agora o problema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta \left(\dfrac{1}{\lambda} \phi \right) & = & \phi, , \quad x \in \Omega, \\ \phi & = & 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{array} \right.$$

temos

$$S(\phi) = \frac{1}{\lambda}\phi,$$

mostrando que $\frac{1}{\lambda}$ é autovalor de S. Agora, se $\mu > 0$ é autovalor de S, então existe $\phi \in L^2(\Omega)$, $\phi \neq 0$, com

$$S(\phi) = \mu\phi.$$

Logo,

$$\frac{1}{\mu}S(\phi) = \phi.$$

Usando o fato que S é linear, temos

$$S\left(\frac{1}{\mu}\phi\right) = \phi,$$

de onde concluímos que

$$\begin{cases} -\Delta\phi &= \frac{1}{\mu}\phi, \quad x \in \Omega \\ \phi &= 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

implicando que $\frac{1}{\mu}$ é autovalor de (P_λ). □

Das Afirmações 1 e 2 concluímos que o problema (P_λ) possui uma sequência $\{\lambda_n\}$ de autovalores reais positivos verificando

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty.$$

D.3 Caracterização de λ_1

Teorema D.3.1. *Defina, para $v \in H_0^1(\Omega)$, $v \neq 0$, o quociente de Rayleight*

$$R(v) = \frac{\|v\|^2_{H_0^1(\Omega)}}{\|v\|_{L^2(\Omega)}} = \frac{\int_\Omega |\nabla v|^2\, dx}{\int_\Omega v^2\, dx}. \tag{D.3}$$

Então,

$$\lambda_1 = \min_{v\in H_0^1(\Omega) \text{ e } v\neq 0} R(v) = R(w_1) \tag{D.4}$$

e

$$\lambda_m = \min_{v\perp\{w_1,\cdots,w_{m-1}\} \text{ e } v\neq 0} R(v) = R(w_m), \tag{D.5}$$

onde w_m é a autofunção normalizada associada ao autovalor λ_j, para todo $j \in \mathbb{N}$. Além disso, $\{w_n\}$ é uma base em $H_0^1(\Omega)$.

Demonstração:

Seja $W_k = span\{w_1, \cdots, w_k\}$. É fácil ver que, para $m \geq 1$, $\lambda_m = R(w_m)$. Se $v \perp \{w_1, \cdots, w_{m-1}\}$, então a expansão de Fourier em $L^2(\Omega)$ de v é dada por

$$v = \sum_{k=m}^{\infty} \alpha_k w_k,\ \alpha_k = \int_\Omega v w_k \, dx.$$

Se tomarmos $v_l = \sum_{k=m}^{l} \alpha_k w_k$, então $v_l \to v$ em $L^2(\Omega)$ e em $H_0^1(\Omega)$ e, pela expansão de Fourier em $H_0^1(\Omega)$, temos

$$v = \sum_{k=m}^{\infty} \lambda_k^{-\frac{1}{2}} \beta_k w_k,$$

com

$$\beta_k = \lambda_k^{-\frac{1}{2}} \int_\Omega \nabla v \nabla w_k \, dx = \lambda_k^{\frac{1}{2}} \int_\Omega v w_k \, dx = \lambda_k \frac{1}{2} \alpha_k.$$

Assim, $R(v_l) \to R(v)$. Agora, temos:

$$R(v_l) = \frac{\sum_{k=m}^{l} \alpha_k^2 \int_\Omega \nabla w_k \nabla w_k \, dx}{\sum_{k=m}^{l} \alpha_k^2} = \frac{\sum_{k=m}^{l} \alpha_k^2 \lambda_k}{\sum_{k=m}^{l} \alpha_k^2} \geq \lambda_m.$$

Assim, $R(v) \geq \lambda_m$, o que implica que a equação (D.5) é verdadeira. A equação (D.4) pode ser provada tomando-se $m = 1$.

Mostremos que $\{w_n\}$ é base em $H_0^1(\Omega)$. Notemos que se $(u, w_n)_{H_0^1(\Omega)} = 0$, $\forall m$, então $u \equiv 0$. De fato,

$$(u, w_n)_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \nabla w_m \, dx = \lambda_m \int_\Omega u w_m \, dx.$$

Deste modo, $0 = (u, w_n)_{H_0^1(\Omega)} = \lambda_m (u, w_n)_{L^2(\Omega)}$, implicando que $(u, w_n)_{L^2(\Omega)} = 0$, $\forall m$, e assim, $u \equiv 0$.

Logo, $\{w_m\}$ é completo em $H_0^1(\Omega)$, e portanto, $\{w_m\}$ também será uma base em $H_0^1(\Omega)$.

□

Lema D.3.1. *Seja $w \neq 0$ em $H_0^1(\Omega)$ satisfazendo a relação $R(w) = \lambda_1$. Então, w é uma autofunção correspondente a λ_1.*

Demonstração:

Seja $v \in H_0^1(\Omega)$ e seja $t > 0$. Então $w + tv \in H_0^1(\Omega)$, e, por (D.4),

$$R(w + tv) \geq \lambda_1 = R(w).$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que $\|w\|^2_{H_0^1(\Omega)} = 1$. Assim,

$$\frac{\int_\Omega \nabla(w + tv) \nabla(w + tv) \, dx}{\int_\Omega (w + tv)^2 \, dx} \geq \int_\Omega \nabla w \nabla w = \lambda_1 \, dx.$$

Portanto,

$$\int_\Omega \nabla(w + tv) \nabla(w + tv) \, dx \geq \lambda_1 \int_\Omega (w^2 + 2twv + t^2 v^2) \, dx,$$

ou seja,

$$\int_\Omega [(\nabla w)^2 + t\nabla w\nabla v + t\nabla v\nabla w + t^2\nabla v\nabla v]\,dx \geq \lambda_1 \left(\int_\Omega w^2\,dx + 2t\int_\Omega wv\,dx + t^2\int_\Omega v^2\,dx\right).$$

Pela desigualdade de Poincaré,

$$\lambda_1\int_\Omega w^2\,dx + 2t\int_\Omega \nabla w\nabla v\,dx + t^2\int_\Omega \nabla v\nabla v\,dx \geq \lambda_1\int_\Omega w^2\,dx + \lambda_1\left(2t\int_\Omega vw\,dx + t^2\int_\Omega v^2\,dx\right).$$

Portanto,

$$t^2\int_\Omega \nabla v\nabla v\,dx + 2t\int_\Omega \nabla w\nabla v\,dx \geq \lambda_1\left(2t\int_\Omega vw\,dx + t^2\int_\Omega v^2\,dx\right).$$

Dividindo a equação acima por $2t$ e fazendo $t \to 0^+$, obtemos

$$\int_\Omega \nabla w\nabla v\,dx \geq \lambda_1\int_\Omega vw\,dx.$$

Mas, fazendo $t \to 0^-$, obtemos:

$$\int_\Omega \nabla w\nabla v\,dx \leq \lambda_1\int_\Omega vw\,dx.$$

Assim,

$$\int_\Omega \nabla w\nabla v\,dx = \lambda_1\int_\Omega vw\,dx.$$

E, uma vez que $v \in H_0^1(\Omega)$ é arbitrário, segue que w é autofunção correspondente a λ_1. □

Teorema D.3.2. *O primeiro autovalor λ_1 é simples e a correspondente autofunção não troca de sinal em Ω*

Demonstração:

Seja w a autofunção correspondente a λ_1. Escrevemos $w = w^+ - w^-$. Como w^+ e w^- estão em $H_0^1(\Omega)$, temos

$$\int_\Omega \nabla w\nabla w^+\,dx = \lambda_1\int_\Omega ww^+\,dx.$$

Assim,

$$\int_\Omega \nabla w^+\nabla w^+\,dx = \lambda_1\int_\Omega (w^+)^2\,dx \tag{D.6}$$

e,

$$\int_\Omega \nabla w^-\nabla w^-\,dx = \lambda_1\int_\Omega (w^-)^2\,dx. \tag{D.7}$$

Agora, suponhamos que w não possui sinal constante em Ω. Neste caso, w^+ e w^- não são identicamente nulas. Deduzimos então de (D.6) e (D.7) que

$$R(w^+) = \lambda_1 = R(w^-).$$

Pelo Lema anterior w^+ e w^- são autofunções de λ_1, isto é,

$$-\Delta w^+ = \lambda_1 w^+ \quad \text{e} \quad -\Delta w^- = \lambda_1 w^-.$$

Mas, como w^+, $w^- \geq 0$ pelo Teorema B.0.6, $w^+ > 0$ e $w^- > 0$, pois nenhum das duas é identicamente nula. Tal fato é impossível, uma vez que w^+ deve se anular quando $w^- \neq 0$ e vice-versa. Deste modo, w possui sinal constante e é não-nula em Ω. Portanto, podemos escolher uma $w_1 > 0$ em Ω que é uma autofunção correspondente é λ_1.

Suponhamos agora que λ_1 não seja simples. Assim, existiria outra autofunção ortogonal a w_1, digamos $\tilde{w}_1$. Deste modo,

$$0 = \int_\Omega \nabla w_1 \nabla \tilde{w}_1 \, dx = \int_\Omega w_1 \tilde{w}_1 \, dx,$$

o que é uma contradição, pois w_1 e $\tilde{w}_1$ tem sinal constante. Logo, λ_1 é um autovalor simples.

$\square$

Apêndice

E

Alguns resultados sobre Teoria do Grau

As demonstrações dos teoremas enunciados neste apêndice podem ser encontrados em [2]

E.1 Grau de Brouwer

E.1.1 Caso Regular

Definição E.1.1. *Seja* $S = \{x \in \Omega; J_f[x] = 0\}$, *onde* $J_f[x] = det[f'(x)]$.
Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um domínio limitado,* $\varphi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ *uma função de classe* $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ *e* $b \notin \varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S)$. *O Grau de Brouwer de* φ *em* Ω *relacionado a* b, *denotado por* $d(\varphi, \Omega, b)$ *é dado por*

$$d(\varphi, \Omega, b) = \begin{cases} 0, & se \quad b \notin \varphi(\overline{\Omega}), \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{N} sgn[J_\varphi[\xi_i]], & se \quad \varphi^{-1}(b) = \{\xi_1, \cdots, \xi_N\}, \end{cases}$$

onde $sgn : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \{-1, 1\}$ *é dada por* $sgn(t) = \begin{cases} 1, & se \quad t > 0, \\ -1, & se \quad t < 0. \end{cases}$

Lema E.1.1. *Seja $\varphi \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S)$. Então existe uma vizinhança U de φ na topologia $\mathcal{C}^1$ tal que para todo $\psi \in U$, tem-se que:*

(a) $b \notin \psi(\partial\Omega)$;

(b) Se $x \in \psi^{-1}(b)$, temos $J_\psi(x) \neq 0$; (isto é, $x \in \psi^{-1}(b) \Rightarrow x \notin S_\psi = \{x \in \overline{\Omega}; J_\psi(x) = 0\}$);

(c) $d(\psi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega, b)$.

Corolário E.1.1. *Seja $\varphi \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ e $b_1, b_2 \notin \varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S)$. Se b_1 e b_2 estiverem na mesma componente conexa de $\mathbb{R}^N \setminus \varphi(\partial\Omega)$, teremos $d(\varphi, \Omega, b_1) = d(\varphi, \Omega, b_2)$.*

E.1.2 Definição do Grau para $\varphi \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega)$.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e limitado e $\varphi \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$. Se $b \notin \varphi(\partial\Omega)$, existe $x \in \mathcal{C}_b \setminus \varphi(S)$, onde $\mathcal{C}_b$ é a componente conexa de $\mathbb{R}^N \setminus \varphi(\partial\Omega)$, pois do contrário teríamos:

$$\mathcal{C}_b \subset \varphi(S) \Rightarrow m(\varphi(S)) > 0,$$

o que é um absurdo pelo Teorema de Sard.

Definição E.1.2. *O grau de φ em Ω com relação a b é dado por:*

$$d(\varphi, \Omega, b) := d(\varphi, \Omega, x), \text{ onde } x \in \mathcal{C}_b \setminus \varphi(S).$$

Note que o grau está bem definido, pois, se $x, y \in \mathcal{C}_b \setminus \varphi(S)$, pelo Corolário E.1.1 devemos ter $d(\varphi, \Omega, x) = d(\varphi, \Omega, y)$.

Corolário E.1.2. *Seja $\varphi \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega)$. Então existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de φ em $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ induzida pela topologia $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ de maneira que se $\psi \in \mathcal{U}$, temos:*

(i) $b \notin \psi(\partial\Omega)$;

(ii) $d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b)$.

Corolário E.1.3. *Seja $H \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega} \times [0,1], \mathbb{R}^N)$ com $b \notin H(\partial\Omega \times [0,1])$. Então, $d(H(\cdot, t), \Omega, b) \equiv C$ em $[0,1]$, onde C é uma constante.*

E.1.3 Definição de Grau de Brouwer para funções contínuas.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado, $\varphi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ uma função contínua e $b \notin \varphi(\partial\Omega)$. Considere $r = dist(b, \varphi(\partial\Omega))$. Sabemos do Teorema da Aproximação de Weierstrass que existe $\psi \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, com

$$\|\varphi - \psi\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} < \frac{r}{2}.$$

Para a definição do Grau de Brouwer para funções contínuas utilizaremos os dois Lemas a seguir:

Lema E.1.2. *Sejam* $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ *com* $\|\varphi - \psi_i\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} < \dfrac{r}{2}$, $i = 1, 2$. *Então* $b \notin \psi_i(\partial\Omega)$, *para* $i = 1, 2$ *e*

$$d(\psi_1, \Omega, b) = d(\psi_2, \Omega, b).$$

Definição E.1.3. *O grau de Brouwer de* φ *em* Ω *com relação a* b *como sendo* $d(\varphi, \Omega, b) := d(\psi, \Omega, b)$ *para* $\psi \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ *e* $\|\varphi - \psi\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} < \frac{r}{2}$, *onde* $r = dist(b, \varphi(\partial\Omega))$.

Lema E.1.3. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um domínio limitado,* $\varphi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ *contínua e* $b \notin \varphi(\partial\Omega)$. *Então,* $d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi - b, \Omega, 0)$.

E.1.4 Principais propriedades do Grau de Brouwer:

1. Continuidade:
   Seja $\varphi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega)$. Então existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de φ em $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ de forma que:
   (a) $b \notin \psi(\partial\Omega)$, $\forall \psi \in \mathcal{U}$;
   (b) $d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b)$, $\forall \psi \in \mathcal{U}$.

2. Invariância do Grau por Homotopia Contínua:
   Seja $H \in \mathcal{C}(\overline{\Omega} \times [0, 1])$ com $b \notin H(\partial\Omega \times [0, 1])$. Então $d(H(\cdot, t), \Omega, b)$ é constante em $[0, 1]$.

3. O grau é constante em componentes conexas:
   Se b e b_1 estão na mesma componente conexa de $\mathbb{R}^N \setminus \varphi(\partial\Omega)$, temos $d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega, b_1)$.

4. Aditividade do grau:
   Seja $\varphi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ e $\Omega = \Omega_1 \bigcup \Omega_2$ com Ω_1 e Ω_2 abertos, limitados e disjuntos. Seja $b \notin \varphi(\partial\Omega_1) \cup \varphi(\partial\Omega_2)$. Então $d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega_1, b) + d(\varphi, \Omega_2, b)$.

E.1.5 Consequências das Propriedades Principais

No que segue $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto limitado.

1. $d(Id, \Omega, b) = \begin{cases} 1, & \text{se } b \in \Omega, \\ 0, & \text{se } b \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$

2. Seja $\varphi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ uma função contínua com $b \notin \varphi(\overline{\Omega})$. Então, $d(\varphi, \Omega, b) = 0$.

3. Se $d(\varphi, \Omega, b) \neq 0$, então existe $x_0 \in \Omega$ tal que $\varphi(x_0) = b$.

4. Se $d(\varphi, \Omega, b) \neq 0$, então $\varphi(\Omega)$ é uma vizinhança aberta de b, isto é, existe $r > 0$ tal que $B_r(b) \subset \varphi(\Omega)$.

5. Se $\varphi(\Omega)$ está contido em um subespaço próprio de $\mathbb{R}^n$, então $d(\varphi, \Omega, b) = 0$.

6. Propriedade da exclusão: Seja $K \subset \overline{\Omega}$ um fechado com $b \notin \varphi(K)$. Então, $d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega \setminus K, b)$.

7. Seja $\{\Omega_i\}_{i \in I}$ uma família de abertos contidos em Ω, dois a dois disjuntos com

$$\varphi^{-1}(b) \subset \bigcup_{i \in I} \Omega_i.$$

Então, $d(\varphi, \Omega_i, b) = 0$, a menos de um número finito de índices $i \in I$ e

$$d(\varphi, \Omega, b) = \sum_{i \in I} d(\varphi, \Omega_1, b).$$

8. Suponha que $\varphi = \psi$ em $\partial\Omega$ e que φ e ψ sejam funções contínuas. Então, para todo $b \notin \varphi(\partial\Omega) = \psi(\partial\Omega)$, temos $d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b)$.

E.1.6 Índice de Brouwer

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado, $\varphi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ uma função contínua e $b \in \mathbb{R}^N$. Suponhamos que exista $x_0 \in \Omega$ solução isolada da equação $\varphi(x) = b$. Assim, existe $r > 0$ tal que a equação

$$\varphi(x) = b, \quad \text{com} \quad x \in B_r(x_0),$$

tem x_0 como única solução . Neste caso definimos o índice de Brouwer de φ em x_0 relacionado a b e denotado por $i(\varphi, x_0, b)$ como sendo

$$i(\varphi, x_0, b) = d(\varphi, B_r(x_0), b).$$

Usando a propriedade da exclusão, temos

$$i(\varphi, x_0, b) = d(\varphi, B_r(x_0) \setminus K, b),$$

onde $K = \overline{B_r(x_0)} - B_\varepsilon(x_0)$, isto é, $i(\varphi, x_0, b) = d(\varphi, B_\varepsilon(x_0), b)$, para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Deste modo a definição pode ser dada por

$$i(\varphi, x_0, b) = \lim_{\varepsilon \to 0} d(\varphi, B_\varepsilon(x_0), b).$$

Teorema E.1.1. *Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^N$ contendo a origem e $\varphi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ uma função da forma*

$$\varphi(x) = x - Tx,$$

onde $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ é uma função de classe $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ com $T(0) = 0$. Se $J_\varphi[0] \neq 0$, temos

$$i(\varphi, 0, 0) = (-1)^\beta,$$

onde β denota a soma das multiplicidades algébricas dos valores característicos de $T'(0)$ contidos em $(0, 1)$.

E.2 O Grau de Leray-Schauder

Seja E um espaço de Banach munido de uma norma $\|\cdot\|$ e seja $\rho(A,B)$ a distância entre conjuntos A, $B \subset E$.

Definição E.2.1. *Seja $\Omega \subset E$ um aberto limitado. Diremos que uma aplicação da forma*

$$\begin{array}{rccc} \phi(x): & \overline{\Omega} \subset E & \to & E \\ & x & \mapsto & x - T(x) \end{array}$$

é uma perturbação de dimensão finita da identidade quando $T(\overline{\Omega})$ está contido em um subespaço de dimensão finita de E.

Definição E.2.2. *Seja $\phi : \overline{\Omega} \subset E \to E$ com $\phi = I - T$ uma perturbação de dimensão finita da identidade, com $\Omega \subset E$ um aberto limitado. Se $b \notin \phi(\partial\Omega)$, definimos o grau de ϕ em Ω com relação a b como*

$$d(\phi, \Omega, b) = d(\phi|_{\overline{\Omega}\cap F}, \Omega \cap F, b),$$

onde F é um subespaço de dimensão finita contendo b e $T(\overline{\Omega})$.

Vejamos que o grau está bem-definido. Sejam F_1 e F_2 subespaços de E com dimensão finita contendo b e $T(\overline{\Omega})$. Note que o espaço $F = F_1 \cap F_2$ é um subespaço de E com dimensão finita que contém b e $T(\overline{\Omega})$. Assim,

$$d(\phi|_{\overline{\Omega}\cap F_1}, \Omega \cap F_1, b) = d(\phi|_{\overline{\Omega}\cap F_1 \cap F}, \Omega \cap F_1 \cap F, b) = d(\phi|_{\overline{\Omega}\cap F}, \Omega \cap F, b).$$

De modo análogo,

$$d(\phi|_{\overline{\Omega}\cap F_2}, \Omega \cap F_2, b) = d(\phi|_{\overline{\Omega}\cap F}, \Omega \cap F, b).$$

Portanto, a definição do grau independe da escolha de F.

Definição E.2.3. *Sejam $(E, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial e $\Omega \subset E$ um aberto limitado. Diremos que T é uma aplicação compacta quando:*

1. *T é contínuo;*

2. *$T(\overline{\Omega})$ é relativamente compacto em E.*

Observação E.2.1. *Uma aplicação $T : E \to E$ é dita compacta quando T é contínua e para qualquer limitado $U \subset E$, $T(U)$ é relativamente compacto.*

Lema E.2.1. *Seja $K \subset E$ um compacto. Então dado $\varepsilon > 0$, existe um subespaço de dimensão finita F_ε e uma função contínua $g_\varepsilon : K \to F_\varepsilon$ tal que $\|x - g_\varepsilon(x)\| < \varepsilon$, $\forall x \in K$.*

Definição E.2.4. *Quando $T : \overline{\Omega} \subset E \to E$ é um operador compacto, dizemos que a aplicação $\phi = I - T$ é uma perturbação compacta da identidade.*

Definição E.2.5. *Uma aplicação é dita própria quando imagem inversa de compacto é um conjunto compacto.*

Lema E.2.2. *Seja $\phi = I - T : \overline{\Omega} \to E$ uma perturbação compacta da identidade. Então ϕ é uma aplicação fechada e própria.*

Nosso objetivo é definir o grau para uma aplicação $\phi = I - T$ que é uma perturbação compacta da identidade. Seja $b \notin \phi(\partial\Omega)$. Desde que $\phi(\partial\Omega)$ é um fechado, pois ϕ é fechada, temos $0 < r = \rho(b, \phi(\partial\Omega))$. Seja $K = \overline{T(\overline{\Omega})}$. Sendo T um operador compacto, temos que K é um conjunto compacto em E. Aplicando o Lema E.2.1, com $\varepsilon = \frac{r}{2}$, existe um subespaço de dimensão finita $F_{\frac{r}{2}}$ e uma aplicação contínua $g_{\frac{r}{2}} : K \to F_{\frac{r}{2}}$ tais que

$$\|y - g_{\frac{r}{2}}\| < \frac{r}{2}, \forall y \in K = \overline{T(\overline{\Omega})}.$$

Assim,

$$\|Tx - g_{\frac{r}{2}}(Tx)\| < \frac{r}{2}, \forall x \in \overline{\Omega}. \tag{E.1}$$

Considere a seguinte perturbação de dimensão finita da identidade: $\phi_r := I - T_r : \overline{\Omega} \to E$, onde $T_r = g_{\frac{r}{2}} \circ T : \overline{\Omega} \to F_{\frac{r}{2}}$. Notemos que:

1. $b \notin \phi_r(\partial\Omega)$.

   De fato, para $x_0 \in \partial\Omega$, temos:

   $$\|b - \phi_r(x_0)\| = \|b - \phi(x_0) + \phi(x_0) - \phi_r(x_0)\| \geq \|b - \phi(x_0)\| - \|\phi(x_0) - \phi_r(x_0)\| \geq$$

   $$\geq r - \|I(x_0) - T(x_0) - (I(x_0) - g_{\frac{r}{2}}(T(x_0)))\| = r - \|g_{\frac{r}{2}}(T(x_0)) - T(x_0)\| > r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}.$$

   Portanto, $b \notin \phi_r(\partial\Omega)$.

2. $\|\phi - \phi_r\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} < \frac{r}{2}$.
   De fato, pois para qualquer $x \in \overline{\Omega}$,

   $$\|\phi(x) - \phi_r(x)\| = \|g_{\frac{r}{2}(Tx) - Tx}\| \leq \frac{r}{2}.$$

   Logo, $\|\phi - \phi_r\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} = \sup_{x \in \overline{\Omega}} \|\phi(x) - \phi_r(x)\| \leq \frac{r}{2}$.
   Portanto, $\|\phi - \phi_r\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} \leq \frac{r}{2}$.

Definição E.2.6. *Seja $\phi = I - T : \overline{\Omega} \to E$ uma perturbação compacta da identidade e $b \notin \phi(\partial\Omega)$. Definimos o* ***Grau de Leray-Schauder*** *de ϕ em Ω relacionado a b como sendo:*

$$d(\phi, \Omega, b) = d(\phi_r, \Omega, b),$$

onde $\phi_r : \overline{\Omega} \to E$ é uma perturbação de dimensão finita da identidade verificando

$$\|\phi - \phi_r\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} \leq \frac{r}{2}. \tag{E.2}$$

.

Observação E.2.2. *1. A classe de perturbações de dimensão finita da identidade que realiza (E.2) é não-vazia, pois a perturbação* $\phi_r = I - T_r = g_{\frac{r}{2}} \circ T$ *cumpre tal condição.*

2. Vejamos que o grau de ϕ *em* Ω *relacionado a* b *está bem definido. Sejam* $\phi_i = I - T_i : \overline{\Omega} \to E$, $i = 1, 2$, *perturbações de dimensão finita da identidade com*

$$\|\phi - \phi_i\| < \frac{r}{2}, \quad i = 1, 2.$$

Afirmação: $d(\phi_1, \Omega, b) = d(\phi_2, \Omega, b)$.

Sejam F_i, $i = 1, 2$, *subespaços de dimensão finita contendo* $T_i(\overline{\Omega})$, *isto é*

$$T_1(\overline{\Omega}) \subset F_1 \quad e \quad T_2(\overline{\Omega}) \subset F_2.$$

Considere F *um subespaço de dimensão finita, contendo* $F_1 + F_2$ *e* b.

Logo,

$$T_1(\overline{\Omega}),\, T_2(\overline{\Omega}) \subset F \quad e \quad b \in F.$$

Sabemos, por definição, que

$$d(\phi_i, \Omega, b) = d(\phi_i|_{\overline{\Omega}\cap F}, \overline{\Omega} \cap F, b),\ i = 1, 2.$$

No que segue, consideremos $\tilde{\phi}_1 = \phi_1|_{\overline{\Omega}\cap F}$, $\tilde{\phi}_2 = \phi_2|_{\overline{\Omega}\cap F} : \overline{\Omega} \cap F \to F$ *e*

$$\begin{array}{rccl} H: & \theta \times [0,1] & \to & F \\ & (x,t) & \mapsto & H(x,t) = t\tilde{\phi}_1(x) + (1-t)\tilde{\phi}_2(x), \end{array}$$

onde $\theta = \overline{\Omega} \cap F$. *Note que* $b \notin H(\partial\theta \times [0,1])$, *com* $\partial\theta = \partial_F(\overline{\Omega} \cap F) \subset \partial\Omega$. *De fato, pois para* $x_0 \in \partial\theta$ *e* $t \in [0,1]$, *temos*

$$\begin{array}{rcl} \|b - H(x_0,t)\| & = & \|b - \phi(x_0) + \phi(x_0) - H(x_0,t)\| \\ & \geq & \|b - \phi(x_0)\| - \|\phi(x_0) - H(x_0,t)\| \\ & > & r - \|\phi(x_0) - (t\tilde{\phi}_1(x) + (1-t)\tilde{\phi}_2(x)) + t\phi(x_0) - t\phi(x_0)\| \\ & = & r - (t\|\phi(x_0) - \tilde{\phi}_1(x_0)\| + (1-t)\|\phi(x_0) - \tilde{\phi}_2(x_0)\|) \\ & \geq & r - t\dfrac{r}{2} - (1-t)\dfrac{r}{2} \\ & = & r - \dfrac{tr}{2} - \dfrac{r}{2} + \dfrac{rt}{2} \\ & = & \dfrac{r}{2}. \end{array}$$

Portanto,

$$\|b - \phi(x_0)\| \geq \frac{r}{2} > 0,$$

mostrando que $b \notin H(\partial\theta \times [0,1])$.

Pela invariância do Grau de Brouwer por homotopia, temos $d(H(\cdot,0),\theta,b) = d(H(\cdot,1),\theta,b)$. *Logo,* $d(\tilde{\phi}_1, \Omega \cap F, b) = d(\tilde{\phi}_2, \Omega \cap F, b)$, *implicando que* $d(\phi_1, \Omega, b) = d(\phi_2, \Omega, b)$, *como queríamos.*

E.2.1 Principais Propriedades do Grau de Leray-Schauder

1. Continuidade em relação ao operador T:

   Seja $\phi = I - T : \overline{\Omega} \to E$ uma perturbação compacta da identidade e $b \notin \phi(\partial\Omega)$. Então existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de T em $K(\overline{\Omega}, E)$ tal que:

   (a) $b \notin (I - \psi)(\partial\Omega)$, $\forall \psi \in \mathcal{U}$;

   (b) $d(\phi, \Omega, b) = d(I - \psi, \Omega, b)$, $\forall \psi \in \mathcal{U}$.

2. Invariância do Grau por Homotopia:

   Seja $T \in K(\overline{\Omega} \times [0,1], E)$ e $H(u,t) = u - T(u,t)$. Se $b \notin H(\partial\Omega \times [0,1])$, temos que $d(H(\cdot, t), \Omega, b)$ é constante em $[0,1]$.

3. Aditividade do Grau:

   Seja $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$, onde Ω_1 e Ω_2 são abertos, limitados e disjuntos, e $\phi = I - T : \overline{\Omega} \to E$ uma perturbação compacta da identidade. Se $b \notin \phi(\partial\Omega)$ e $b \notin \phi(\partial\Omega_i)$, $i = 1, 2$, então

$$d(\phi, \Omega, b) = d(\phi, \Omega_1, b) + d(\phi, \Omega_2, b).$$

E.2.2 Consequência das Propriedades Principais

1. Se $I : E \to E$ é a aplicação identidade, então:

$$d(I, \Omega, b) = \begin{cases} 1, & b \in \Omega, \\ 0, & b \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$$

2. Se $b \notin \phi(\overline{\Omega})$, então $d(\phi, \Omega, b) = 0$.

3. Se $d(\phi, \Omega, b) \neq 0$, então existe $u_0 \in \Omega$ tal que $\phi(u_0) = b$.

4. Se $d(\phi, \Omega, b) \neq 0$, então $\psi(\overline{\Omega})$ é uma vizinhança de b, isto é, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(b) \subset \phi(\Omega)$.

5. Se $\phi(\Omega)$ está contido em um subespaço próprio de E, devemos ter $d(\phi, \Omega, b) = 0$, $\forall b \notin \phi(\partial\Omega)$.

6. (Propriedade da exclusão). Se K é um subconjunto fechado de $\overline{\Omega}$ com $b \notin \phi(K)$, então $d(\phi, \Omega, b) = d(\phi, \Omega \setminus K, b)$.

7. Seja $\{\Omega_i\} i \in I$ uma família de abertos, dois a dois disjuntos e $\Omega = \cup_{i \in I} \Omega_i$. Se $b \in E$ é tal que $\phi^{-1}(b) \subset \cup_{i \in I} \Omega_i$, então $d(\phi, \Omega_i, b) = 0$, a menos de uma quantidade finita de índices i. Além disso, $d(\phi, \Omega, b) = \sum_{i \in I} d(\phi, \Omega_i, b)$.

8. Seja $\psi = I - S$, com $S \in K(\overline{\Omega}, E)$ tal que $\psi(x) = \phi(x)$ em $\partial\Omega$. Se $b \notin \phi(\partial\Omega)$, temos $d(\phi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b)$.

9. Não existe $\phi = I - T : \overline{B_1(0)} \to \partial B_1(0)$ perturbação compacta da identidade com $\phi|_{\partial B_1(0)} = Id|_{\partial B_1(0)}$.

10. (Teorema de Borsuk em dimensão infinita) Seja $\Omega \ni 0$ um aberto limitado de E simétrico com relação a origem. Se $T \in K(\overline{\Omega}, E)$ é ímpar em $\partial\Omega$ e $0 \notin \phi(\partial\Omega)$, onde $\phi = I - T$, então $d(\phi, \Omega, 0)$ é ímpar.

E.2.3 Índice de Leray-Schauder

Sejam $\phi = I - T$ uma perturbação compacta da identidade, $b \notin \phi(\partial\Omega)$ e u_0 uma solução isolada da equação $\phi(u) = b$. Então existe $r > 0$ tal que a única solução de $\phi(u) = b$ em $\overline{B_r(u_0)}$ é o próprio u_0. Fixando-se $K = \overline{B_r(u_0)} \setminus B_\varepsilon(u_0)$ com $0 < \varepsilon < r$, temos que

$$d(\phi, B_r(u_0), b) = d(\phi, B_\varepsilon(u_0), b), \forall\, \varepsilon > 0.$$

Definimos o índice de ϕ em u_0 com relação a b como sendo

$$i(\phi, u_0, b) = \lim_{\varepsilon \to 0} d(\phi, B_\varepsilon(u_0), b).$$

Teorema E.2.1. *Sejam $L : E \to E$ um operador linear compacto e $\phi = I - L$. Se 1 não é valor caraterístico de L, então*

$$i(\phi, 0, 0) = (-1)^\beta,$$

onde β é a soma das multiplicidades dos valores característicos de L contidos em $(0, 1)$.

Demonstração:

Observemos inicialmente que $\phi(0) = 0$ e que 0 é uma solução isolada de $\phi(u) = 0$. De fato, se existisse $u \neq 0$ tal que $u = Lu$, então 1 seria valor característico de L. Deste modo, faz sentido falar no índice $i(\phi, 0, 0)$. Sejam $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_p$ os valores característicos de L contidos em $(0, 1)$ e sejam $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ tais que

$$N_i = \ker(\mu_i L - I)^{\alpha_1}.$$

Consideremos

$$N = \bigoplus_{i=1}^{p} N_i,$$

o qual possui dimensão finita e, portanto, é fechado. Seja $F \subset E$ um subespaço tal que $E = N \oplus F$. Denotemos por $P : E \to N$ e $Q : E \to F$ as projeções, que são contínuas. Consequentemente as aplicações $L \circ P : E \to E$ e $L \circ Q : E \to E$ são compactas. Note também que N é invariante por L, isto é, $L(N) \subset N$.

Consideraremos agora

$$\begin{array}{rccl} H: & \overline{B_1(0)} \times [0,1] & \to & E \\ & (u,t) & \mapsto & H(u,t) = u - L(Pu) - tL(Qu). \end{array}$$

Note que a aplicação

$$\begin{array}{rccl} T: & \overline{B_1(0)} \times [0,1] & \to & E \\ & (u,t) & \mapsto & T(u,t) = L(Pu) + tL(Qu) \end{array}$$

é um operador compacto em $\overline{B_1(0)} \times [0,1]$, uma vez que as aplicação $L \circ P$ e $L \circ Q$ são compactas.

Afirmação 1: $0 \notin H(\partial B_1(0) \times [0,1])$.

De fato, para justificar tal afirmativa, vamos considerar o operador

$$S = \prod_{i=1}^{p} (\mu_i L - I)^{\alpha_i} : E \to E.$$

Uma vez que $(\mu_i x - 1)^{\alpha_i}$ são primos entre si, tem-se $\ker S = N$. Assim,

$$0 = H(u,t) \Leftrightarrow u - L(Pu) - L(Qu) = 0 \Leftrightarrow Pu + Qu - L(Pu) - L(Qu) = 0.$$

Portanto,

$$0 = H(u,t) \Leftrightarrow tL(Qu) - Qu = Pu - L(Pu) \in N, \tag{E.3}$$

implicando que $tL(Qu) - Qu \in N$.

1º CASO: $t \neq \mu_i$, para $i = 1, \cdots, p$.

Pela equação (E.3), temos que

$$S(tL(Qu) - Qu) = S(Pu - L(Pu)) = 0.$$

Logo,

$$S(tL(Qu) - Qu) = 0,$$

o que implica que

$$(tL - I)(S(Qu)) = 0,$$

uma vez que $S \circ L = L \circ S$. Sendo $t \neq \mu_i$, $i = 1, \cdots, p$, concluímos que

$$S(Qu) = 0 \Rightarrow Qu \in N \Rightarrow Qu \in N \cap F = \{0\} \Rightarrow Qu = 0.$$

Logo, $u = Pu + Qu = Pu$ e assim,

$$0 = H(u,t) \Leftrightarrow u = Lu,$$

implicando que 1 é valor característico associado a u, o que é um absurdo.

2º CASO: $t = \mu_i$, para algum $i = 1, \cdots, p$.

Sabemos que $(\mu_i L - I)S(Qu) = 0$, ou seja, $Qu \in \ker[(\mu_i L - I) \circ S]$. Pela definição de S,

$$Qu \in \ker \left[\prod_{k=1,\, k \neq i}^{p} (\mu_k L - I)^{a_k} \circ (\mu_i L - I)^{\alpha_{i+1}} \right].$$

Logo,

$$Qu \in \bigoplus_{i=1}^{p} \ker(\mu_k L - I)^{a_k} \bigoplus \ker(\mu_i L - I)^{\alpha_{i+1}} = \bigoplus_{i=1}^{p} N_k \bigoplus N_i = N,$$

chegando a uma contradição como no 1º CASO. Provamos assim a Afirmação 1. Usando a invariância do Grau por homotopia (propriedade (2) da seção E.2.1), temos

$$d(\phi, \overline{B_1(0)}, 0) = d(H(\cdot, 0), \overline{B_1(0)}, 0) = d(H(\cdot, 1), \overline{B_1(0)}, 0) = d(I - LPu, \overline{B_1(0)}, 0).$$

E, assim

$$i(\phi, 0, 0) = d((I - LP)|_N, \overline{B_1(0)} \cap N, 0),$$

ou seja,

$$i(\phi, 0, 0) = d((I - L)|_N, \overline{B_1(0)} \cap N, 0),$$

implicando que

$$i(\phi, 0, 0) = i((I - L)|_N, 0, 0) = (-1)^{\beta},$$

pois trata-se do índice de Brouwer (Teorema E.1.1) e β é a soma das multiplicidades dos valores característicos de L contidos em $(0, 1)$. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] BENCI, V., RABINOWITZ, P. H. Critical point theorems for indefinite functionals. **Invent. Math.**, 52, p. 241-273, 1979.

[2] BERESTYCKI, H. **Methodes Topologiques et problemes aux limites non lineares**. 1975. Thèse de 3e cycle (Mathématiques pures). L'Universite de Paris VI, Paris, 1975.

[3] BREZIS, H. **Analyse Fonctionnelle, Théorie et applications**. Paris: Masson, 1983.

[4] CLARK, D. C. A variant of the Ljusternik-Schnirelmann theory. **Indiana Univ. Math. J.**, 22, p. 65-74, 1972.

[5] DE FIGUEIREDO, D. G. **Lectures on the Ekeland variational principle with applications and detours**. Berlin New York: Published for the Tata Institue of Fundamental Research [by] Springer-Verlag, 1989.

[6] DE FIGUEIREDO, D. G. **Um convite às equações elípticas.** Não publicado.

[7] GILBARG, D., TRUDINGER, N. S. **Elliptic partial differential equations of second order**. 2ed. Berlin-New York: Springer-Verlag, 1998.

[8] KAVIAN, O. **Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques**. Heidelberg: Springer, 1993.

[9] KESAVAN, S. **Topics in Functional Analysis and Applications**. New Delhi: Wiley Eastern Limited, 1989.

[10] PALAIS, R. S. Critical point theory and the minimax principle. **Proc. Sympos. Pure Math.**, v. 15, p. 185-212, 1970.

[11] RABINOWITZ, P. H. **Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations**. Providence: AMS, 1986.

[12] RĂDULESCO,V. Remarks on a limiting case in the treatment of nonlinear problems with mountain pass geometry. **Studia Univ. Babes-Bolyai, Mathematica**, v. LV, n. 4, p. 99-106, 2010.

[13] STRUWE, M. **Variational methods : applications to nonlinear partial differential equations and hamiltonion systems**. Berlin: Springer, 1990.

[14] WILLEM, M. **Minimax theorems**. Boston: Birkhauser, 1996.