Estabilidade e oscilação de soluções de equações diferenciais com retardos e impulsos

Luciene Parron Gimenes

Estabilidade e oscilação de soluções de equações diferenciais com retardos e impulsos

Luciene Parron Gimenes

Orientadora: ***Profa. Dra. Márcia Cristina Anderson Braz Federson***

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências - Matemática.

"VERSÃO REVISADA APÓS A DEFESA"

Data da Defesa: 07 de março de 2007
Visto do Orientador:

USP - São Carlos

Março/2007

Ao meus pais Paulo
e Madalena.
Ao meu marido
Claudinei.

Agradecimentos

Agradeço à Deus por ter me dado forças para superar os obstáculos que encontrei ao longo desta caminhada e por tudo que conquistei.

Aos meus pais, Paulo e Madalena, que confiaram em mim e estiveram sempre ao meu lado me incentivando.

Ao meu marido, Claudinei Cardoso Arantes, pelo incentivo e compreensão. Muito obrigada por você estar sempre ao meu lado. Durante todo este período você me deu forças e me ajudou a suportar as dificuldades e a distância. Sem seu apoio eu não teria chegado até aqui.

Aos meu amigos, que me animaram e que compartilharam comigo os momentos bons e ruins. Em especial, as minhas amigas de república que me acolheram e que foram, nestes últimos anos, minha família.

Às funcionárias da Biblioteca pela dedicação, atenção e eficiência.

Aos professores Valdir, Sandra, Ladeira e, em especial, ao professor Plácido pela colaboração e pelas inúmeras idéias.

À Professora Dra. Márcia Federson que esteve sempre me orientando, me incentivando e me mostrando o caminho pra seguir em frente. Muito obrigada!

Finalmente, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro para realização deste trabalho.

Resumo

O objetivo deste trabalho é investigar propriedades qualitativas de certas equações diferenciais funcionais retardadas de segunda ordem quando lhes são impostos controles de impulsos adequados. Os principais resultados dizem respeito a estabilidade e oscilação por impulsos. Mais especificamente, consideramos algumas equações e provamos que suas soluções triviais podem ser estabilizadas por impulsos. Em seguida, consideramos uma destas equações e provamos que suas soluções podem se tornar oscilatórias com a imposição apropriada de controles de impulsos. Apresentamos alguns exemplos que ilustram nossos resultados.

Além do objetivo acima, procuramos produzir um texto que compreendesse a teoria fundamental das equações diferenciais funcionais retardadas impulsivas, teoria esta que, até então, não podia ser encontrada num único texto como este. Desenvolvemos e discutimos existência, unicidade, continuação de soluções, intervalo maximal de existência e dependência contínua de soluções dos valores iniciais para equações diferenciais retardadas impulsivas.

Finalmente, destacamos que a maioria dos resultados novos apresentados neste trabalho já foram publicados. Veja [9], [10] e [11].

Abstract

The purpose of this work is to investigate qualitative properties of certain second order delay differential equations when some proper impulse controls are added to them. The main results concern the stability and oscillation by impulses. More specifically, we consider some equations and prove that their trivial solutions can be stabilized by impulses. We also consider one of these equations and prove that all solutions oscillate when proper impulse controls are imposed. We give some examples to illustrate our results.

Because dealing with systems with both delays and impulses is a recent interest of some mathematicians we also considered producing a text that would encompass the fundamental theory of retarded functional differential equations with impulses. Up to now such theory could not be found in a single text as this one. Therefore we discuss and develop basic aspects of the theory as existence, uniqueness, continuability of solutions, maximal interval of existence and continuous dependence of solutions on initial values for impulsive retarded differential equations.

Finally we would like to mention that most of new results presented in this work were published. See [9], [10] and [11].

Índice

Introdução

O objetivo deste trabalho é investigar propriedades qualitativas de Equações Diferenciais Funcionais Retardadas (EDFRs) de segunda ordem sujeitas à pertubações instantâneas, chamadas impulsos.

Equações diferenciais com impulsos são apropriadas para descreverem processos de evolução que sofrem variações de estado de curta duração e que podem ser consideradas instantâneas. Este fenômeno é chamado impulso ou ação impulsiva e corresponde às descontinuidades de primeira espécie das soluções ou de suas derivadas.

Uma aplicação das equações impulsivas aparece, por exemplo, na teoria de impacto. Um impacto é uma interação de corpos em um curto espaço de tempo e pode ser considerado como uma ação impulsiva. Nesta direção, mencionamos sistemas do tipo bilhar que podem ser modelados por equações diferenciais de segunda ordem com a ação dos impulsos agindo somente sobre a primeira derivada da solução, uma vez que as posições de bolas colidindo não mudam no momento da ação do impulso (impacto), porém suas velocidades adquirem incrementos finitos.

Na investigação de soluções de equações diferenciais retardadas impulsivas, as técnicas clássicas usadas em equações sem impulsos devem ser adaptadas a fim de levar-se em consideração os efeitos impulsivos. Equações com retardos e impulsos são importantes, por exemplos, em modelos que descrevem corpos viscoelásticos colidindo [14]. O interesse neste tipo de equações (EDFRs impulsivas) tem crescido muito nos últimos anos e a pesquisa nesta direção tem produzido um número considerável de publicações. Podemos citar [9, 10, 11, 17, 22, 25, 30, 31, 34], entre outros.

Existem várias publicações bem recentes sobre problemas envolvendo estabilidade de soluções de equações impulsivas. No entanto, a pesquisa em problemas que também envolvem retardamento ainda se encontra em seu estágio inicial. O mesmo podemos dizer da pesquisa sobre oscilação de soluções de equações retardadas impulsivas. Portanto, por se tratar de uma área de interesse recente e ainda com poucas publicações, é que direcionamos nossa investigação a estudo de sistemas com retardados e impulsos.

Iniciamos este trabalho (Capítulo 1), relembrando alguns fatos básicos da teoria conhecida de equações diferenciais retardadas. Em seguida, apresentamos, desenvolvemos e discutimos a teoria básica das EDFRs impulsivas. Devido ao fato de vários autores assumirem a existência de soluções de EDFRs com impulsos em seus trabalhos, decidimos, na segunda seção deste capítulo, discutir amplamente, fazendo todos os detalhes, o tópico "existência de soluções" para equações diferencias retardadas impulsivas. Além de resultados sobre existência, apresentamos resultados sobre unicidade, continuação de soluções, intervalo maximal de existência e dependência contínua dos valores iniciais para soluções de EDFRs com impulsos. Este último tópico também é discutido amplamente. Ainda neste capítulo, apresentamos conceitos de estabilidade de soluções e a definição de solução oscilatória.

Em [9], consideramos certas EDFRs de segunda ordem e provamos que suas soluções triviais podem se tornar exponencialmente contínuas com respeito aos parâmetros iniciais em um intervalo de tempo $[t_0, T)$, após a imposição de impulsos apropriados. Motivados por este trabalho, no Capítulo 2, nós consideramos equações mais gerais do que as apresentadas em [9] e, por meio de funções de Lyapunov, estabelecemos condições suficientes para garantirmos a estabilidade exponencial das soluções triviais impondo certos controles de impulsos. Isto generaliza o trabalho anterior [9], pois basta restringirmos o resultado obtido em algum intervalo. Nossos resultados também generalizam os resultados de [24] e estão apresentados em [10].

No Capítulo 3, consideramos a primeira equação do Capítulo 2 e adaptamos as técnicas utilizadas em [13] e em [28] a fim de estabelecermos condições para que todas as soluções desta equação possam se tornar oscilatórias sob ação impulsiva. Os resultados deste capítulo podem ser encontrados em [11].

CAPÍTULO

1

EDFRs impulsivas

Iniciaremos este capítulo resgatando algumas definições básicas e enunciando alguns resultados essenciais da teoria das equações diferenciais funcionais retardadas que serão úteis no decorrer deste trabalho. As demonstrações de tais resultados serão omitidas, pois elas são conhecidas e podem ser encontradas em [12], por exemplo.

Em seguida, na segunda seção deste capítulo, vamos tratar de equações diferenciais retardadas sujeitas à ação impulsiva em tempos pré-fixados. Nosso objetivo principal em tal seção será o resultado sobre existência de solução global. Aqui, cabe mencionarmos o fato de que, em muitos artigos sobre propriedades qualitativas de soluções de equações impulsivas (retardadas ou não), assume-se a priori que existe uma solução (local ou global, dependendo da necessidade) e, então, propõem-se resultados sobre estabilidade, oscilação, etc. Assim, partindo do pressuposto de que existe ao menos uma solução, os resultados são obtidos. Entretanto, as hipóteses assumidas não são suficientes para garantir a existência de uma solução local ou global e, portanto, os resultados obtidos em tais artigos podem compreender o conjunto vazio de soluções. Podemos citar alguns artigos onde assume-se, a priori, que a equação impulsiva em questão admite solução. Veja, por exemplo, [1, 26, 30, 33, 34].

A questão da existência de soluções para equações diferenciais impulsivas não é tão simples assim. Nos últimos anos, surgiram vários artigos que estudam a existência, unicidade e continuação de soluções de equações retardadas impulsivas. Podemos citar [4, 5, 6, 9, 19, 21, 23].

Ainda na segunda seção deste capítulo, vamos tratar da unicidade e continuação de soluções, intervalo maximal de existência e dependência contínua de soluções dos dados iniciais.

Na última seção deste capítulo, trataremos dos conceitos de estabilidade e oscilação de soluções de equações diferenciais retardadas impulsivas.

1.1 EDFRs - conceitos e resultados básicos

Vamos iniciar esta seção relembrando o conceito de equação diferencial funcional com retardamento (EDFR). Em seguida, enunciaremos resultados sobre existência, unicidade e dependência contínua de soluções desta equação.

Sejam a, b números reais, n um inteiro maior ou igual a 1, $\mathbb{R}^n$ o espaço vetorial n-dimensional sobre os reais com norma denotada por $|\cdot|$ e $C([a,b],\mathbb{R}^n)$ o espaço de Banach das funções contínuas de $[a,b]$ em $\mathbb{R}^n$ com a topologia da convergência uniforme. Em particular, tomando $r > 0$, $C = C([-r,0],\mathbb{R}^n)$ denota o espaço de Banach das funções contínuas de $[-r,0]$ em $\mathbb{R}^n$ com a norma

$$\|\varphi\| = \sup_{-r\leq\theta\leq 0} |\varphi(\theta)|.$$

Seja $V \subseteq \mathbb{R} \times C$ um aberto. Então $C(V,\mathbb{R}^n)$ é o espaço das funções contínuas de V em $\mathbb{R}^n$ e $C^0(V,\mathbb{R}^n)$ é o espaço das funções contínuas e limitadas de V em $\mathbb{R}^n$. O espaço $C^0(V,\mathbb{R}^n)$ se torna um espaço de Banach com a norma induzida de $C(V,\mathbb{R}^n)$.

Dados $\sigma \in \mathbb{R}$, $A > 0$ e $x \in C([\sigma - r, \sigma + A),\mathbb{R}^n)$, então para cada $t \in [\sigma, \sigma + A)$, seja $x_t \in C([-r,0],\mathbb{R}^n)$ definido por

$$x_t(\theta) = x(t+\theta), \quad -r \leq \theta \leq 0.$$

Definição 1.1. *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times C$ um aberto e $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma função. Dizemos que a equação*

$$x'(t) = f(t, x_t), \qquad \left(x' = \frac{dx}{dt}\right), \tag{1.1}$$

é uma equação diferencial funcional retardada sobre Ω.

A seguir, definiremos o conceito de solução da equação (1.1).

Definição 1.2. *Uma solução da equação (1.1) é uma função $x \in C([\sigma - r, \sigma + A), \mathbb{R}^n)$, onde $\sigma \in \mathbb{R}$ e $A > 0$, tal que $(t, x_t) \in \Omega$ e $x(t)$ satisfaz a equação (1.1), para $t \in [\sigma, \sigma + A)$.*

Dados $\sigma \in \mathbb{R}$ e $\varphi \in C$, dizemos que $x(\sigma, \varphi, f)$ é uma solução da equação (1.1) com valor inicial φ em σ, ou simplesmente uma solução por (σ, φ), se existe $A > 0$ tal que $x(\sigma, \varphi, f)$ é uma solução da equação (1.1) sobre $[\sigma - r, \sigma + A)$ e $x_\sigma(\sigma, \varphi, f) = \varphi$.

De posse destas notações e terminologias, podemos enunciar alguns resultados básicos cujas demonstrações podem ser encontradas em [12].

A prova do teorema seguinte é decorrente do conhecido Teorema do Ponto Fixo de Schauder.

Teorema 1.3. (Existência local) *Suponhamos que Ω seja um subconjunto aberto de $\mathbb{R} \times C$ e $f \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Se $(\sigma, \varphi) \in \Omega$, então existe uma solução local de (1.1) por (σ, φ). Mais geralmente, se $W \subseteq \Omega$ é compacto e $f \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$, então existe uma vizinhança $V \subseteq \Omega$ de W tal que $f \in C^0(V, \mathbb{R}^n)$, existem uma vizinhança $U \subseteq C^0(V, \mathbb{R}^n)$ de f e um $\alpha > 0$ tal que, para $(\sigma, \varphi) \in W$ e $g \in U$, existe uma solução $x(\sigma, \varphi, g)$ de (1.1) por (σ, φ) em $[\sigma - r, \sigma + \alpha]$.*

Teorema 1.4. (Dependência Contínua) *Suponhamos que $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times C$ seja aberto, $(\sigma^0, \varphi^0) \in \Omega$, $f^0 \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e x^0 seja uma solução de (1.1), por (σ^0, φ^0), a qual existe e é única sobre $[\sigma^0 - r, b]$. Sejam $W^0 \subseteq \Omega$ o conjunto compacto definido por*

$$W^0 = \{(t, {x^0}_t); t \in [\sigma^0, b]\}$$

e V^0 uma vizinhança de W^0 sobre a qual f^0 é limitada. Se $(\sigma^k, \varphi^k, f^k)$, $k = 1, 2, \ldots$, satisfaz $\sigma^k \to \sigma^0$, $\varphi^k \to \varphi^0$ e $|f^k - f^0| \to 0$ quando $k \to \infty$, então existe um $k^0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $k \geq k^0$, a EDFR (f^k) é tal que cada solução $x^k = x^k(\sigma^k, \varphi^k, f^k)$ por (σ^k, φ^k) existe sobre $[\sigma^k - r, b]$

e $x^k \to x^0$ *uniformemente sobre* $[\sigma^0 - r, b]$. *Como pode ocorrer de nem todas as* x^k *estarem definidas em* $[\sigma^0 - r, b]$, *quando escrevemos* $x^k \to x^0$ *uniformemente sobre* $[\sigma^0 - r, b]$, *entendemos que, para qualquer* $\varepsilon > 0$, *existe um* $k_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *tal que para* $k \geq k_1(\varepsilon)$, $x^k(t)$ *está definida sobre* $[\sigma^0 - r + \varepsilon, b]$ *e* $x^k \to x^0$ *uniformemente sobre* $[\sigma^0 - r + \varepsilon, b]$.

A seguir, enunciaremos um teorema que garante a existência de uma única solução local de (1.1) passando por (σ, φ).

Teorema 1.5. (Unicidade) *Sejam* $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times C$ *um aberto,* $(\sigma, \varphi) \in \Omega$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *contínua e* $f(t, \varphi)$ *localmente Lipschtiziana com relação a* φ *em* Ω. *Então existe uma única solução de* (1.1) *passando por* (σ, φ).

1.2 EDFRs impulsivas - teoria fundamental

Para a teoria fundamental de equações diferenciais ordinárias impulsivas, indicamos o livro [15]. No caso de equações diferenciais funcionais com retardo e impulsos, não temos o conhecimento de um livro na literatura que aborde sua teoria fundamental. Por este motivo, resolvemos organizar a teoria geral sobre as equações diferenciais retardadas com impulsos tomando o cuidado de desenvolver e esclarecer muitos aspectos obscuros das demonstrações. Assim, incluímos neste texto resultados fundamentais que tratam da existência, unicidade e dependência contínua de soluções dos valores iniciais, intervalo maximal de existência e continuação de soluções para EDFRs com impulsos. Começaremos, todavia, com alguns comentários gerais sobre equações diferenciais ordinárias com efeito impulsivo destacando algumas peculiaridades que ficarão mais evidentes quando considerarmos retardos.

Uma descrição de um sistema diferencial ordinário com impulsos em que cada impulso ocorre em tempos pré-fixados pode ser dada por:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t \neq t_k, \\ \Delta x(t) = I_k(x(t)), & t = t_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, \end{cases} \tag{1.2}$$

onde assume-se que existem os limites laterais $x(t_k^+) = \lim_{h\to 0^+} x(t_k + h)$ e $x(t_k^-) = \lim_{h\to 0^+} x(t_k - h)$, e $\Delta x(t_k) = x(t_k^+) - x(t_k)$, $k = 1, 2, \ldots$.

Os efeitos impulsivos aplicados às equações diferenciais ordinárias mais simples afetam o comportamento das soluções das mesmas. Os exemplos a seguir mostram que a continuação e a continuidade das soluções de (1.2) são afetadas pela ação impulsiva.

Exemplo 1.6. [veja [15], p. 4] Consideremos a equação diferencial impulsiva

$$\begin{cases} x'(t) = 0, & t \neq k, \\ \Delta x(t) = \dfrac{1}{x(t)-1}, & t = k, \qquad k = 1, 2, \ldots. \end{cases} \tag{1.3}$$

A solução $x(t)$ da equação diferencial ordinária $x' = 0$ existe para todo t. Mas a solução do sistema (1.3), com condição inicial $x(0) = 1$, está definida apenas para $0 \leq t \leq 1$, já que a função $I_k(x) = \dfrac{1}{x-1}$ não está definida para $x = 1$. □

Exemplo 1.7. [veja [15], p. 5] Consideremos a equação diferencial impulsiva

$$\begin{cases} x'(t) = 1 + x^2(t), & t \neq \dfrac{k\pi}{4}, \\ \Delta x(t) = -1, & t = \dfrac{k\pi}{4}, \quad k = 1, 2, \ldots. \end{cases} \tag{1.4}$$

Neste caso, a solução $x(t)$ da equação diferencial ordinária $x' = 1 + x^2$ com condição inicial $x(0) = 0$ é contínua no intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. No entanto, a solução do problema impulsivo (1.4) com a mesma condição inicial é dada por

$$x(t) = \tan\left(t - \frac{k\pi}{4}\right), \qquad t \in \left(\frac{k\pi}{4}, \frac{(k+1)\pi}{4}\right].$$

Esta solução é periódica de período $\dfrac{\pi}{4}$ e tem descontinuidades de primeira espécie em $t = \dfrac{k\pi}{4}$, $k = 1, 2, \ldots$. A figura abaixo ilustra este fato. □

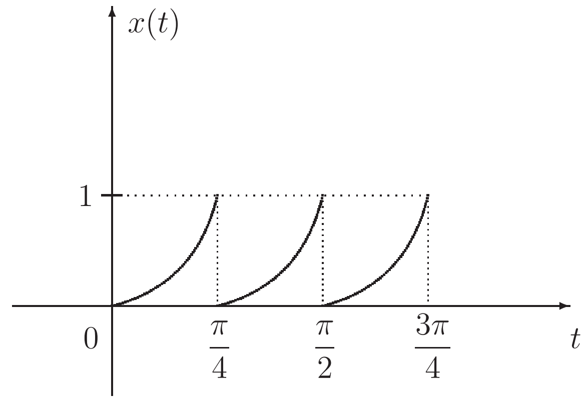

Figura 1.1: Curva integral do sistema impulsivo (1.4), com condição inicial $x(0) = 0$.

Os impulsos aplicados às equações diferencias retardadas acarretam algumas dificuldades peculiares que não ocorrem no caso ordinário. No caso das equações diferenciais retardadas, os impulsos representam, em geral, descontinuidades de primeira espécie nos termos x_t pertencentes ao espaço de fase. Assim, o espaço de fase clássico $C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ não é conveniente. Por esta razão, introduziremos um espaço mais geral.

Quando falamos em impulsos, estamos tratando de perturbações de duração tão curta que podem ser consideradas instantâneas. E, quando considerarmos efeitos impulsivos, iremos nos dedicar ao estudo de equações diferenciais retardadas com impulsos a tempos pré-fixados. Sendo assim, trabalharemos com instantes de impulsos que são conhecidos de antemão.

A seguir, listamos algumas notações essenciais para prosseguirmos com o nosso estudo sobre equações diferenciais retardadas impulsivas.

Para uma função $\psi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$, usaremos a notação abreviada $\psi(t^+) = \lim\limits_{s \to t^+} \psi(s)$ e $\psi(t^-) = \lim\limits_{s \to t^-} \psi(s)$ para indicarmos, respectivamente, os limites laterais à direita e à esquerda de ψ em t, quando existirem.

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$ e $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Denotamos por $PC([a, b], D)$ o espaço formado pelas funções $\psi : [a, b] \to D$ que são contínuas exceto em um número finito de pontos e cujos limites laterais $\psi(t^+)$ e $\psi(t^-)$ existem, com $\psi(t^+) = \psi(t)$, para todo $t \in [a, b)$. Esta classe de funções contém, portanto, funções que são contínuas à direita com uma quantidade finita de descontinuidades de primeira espécie à esquerda.

Denotamos por $PC([a,\infty),D)$ o espaço das funções $\psi:[a,\infty)\to D$ tais que para todo $c>a$, a restrição $\psi|_{[a,c]}\in PC([a,c],D)$. As funções de $PC([a,\infty),D)$ têm, no máximo, uma quantidade enumerável de pontos de descontinuidade que formam uma sequência crescente tendendo ao infinito.

Em $PC([a,b],D)$, consideramos a norma usual do supremo denotando-a por $\|\cdot\|$. Em $PC([a,\infty),D)$ consideramos a topologia da convergência uniforme localmente, isto é, em cada subconjunto compacto de $[a,\infty)$.

Se $x\in PC([t_0-r,\sigma],\mathbb{R}^n)$, onde $t_0\in\mathbb{R}_+$ e $\sigma\geq t_0$, então, para cada $t\in[t_0,\sigma]$, definimos $x_t\in PC([-r,0],\mathbb{R}^n)$ por

$$x_t(s)=x(t+s),\quad -r\leq s\leq 0.$$

Também definimos $x_{t^-}\in PC([-r,0],\mathbb{R}^n)$ por

$$x_{t^-}(s)=\begin{cases} x(t+s), & -r\leq s<0,\\ x(t^-), & s=0,\end{cases} \tag{1.5}$$

onde $t\in(t_0,\sigma]$.

Em geral, para funções contínuas por partes $x\in PC([t_0-r,\infty),\mathbb{R}^n)$, o limite $\lim\limits_{s\to t^-} x_s$, para $t>t_0-r$, não existe com respeito à norma $\|\cdot\|$ e também não podemos afirmar que $x_{t^-}=\lim\limits_{s\to t^-} x_s$.

Sejam $J\subset\mathbb{R}^+$ um intervalo da forma $[a,b)$, com $0\leq a<b\leq\infty$, e $D\subset\mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Consideremos a sequência $0\leq t_0<t_1<t_2<\ldots<t_k<\ldots$, com $\lim\limits_{k\to\infty}t_k=\infty$ e o problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t)=f(t,x_t), & t\geq t_0,\ \ t\neq t_k,\\ x_{t_0}=\phi, \end{cases} \tag{1.6}$$

onde $t_0\in\mathbb{R}_+$ e $\phi\in PC([-r,0],\mathbb{R}^n)$. Também consideremos, nos instantes de impulsos t_k, $k=1,2,\ldots$, a condição impulsiva

$$\Delta x(t)=I(t,x_{t^-}),\quad t>t_0,\ \ t=t_k, \tag{1.7}$$

onde $\Delta x(t_k)=x(t_k)-x(t_k^-)$, $f,I:J\times PC([-r,0],D)\to\mathbb{R}^n$ e $\psi(0)+I(t_k,\psi)\in D$, para todo $(t_k,\psi)\in J\times PC([-r,0],D)$ com $\psi(0^-)=\psi(0)$.

Definição 1.8. *Seja* $[t_0, t_0 + \alpha] \subset J$*, com* $\alpha > 0$*. Uma solução do problema impulsivo* (1.6)-(1.7) *em* $[t_0, t_0 + \alpha]$ *é uma função* $x \in PC([t_0 - r, t_0 + \alpha], D)$ *que satisfaz as seguintes propriedades:*

(a) $x(t)$ *é contínua em* $[t_0, t_0 + \alpha] \setminus \{t_k; k \in \mathbb{N}\}$*, os limites laterais* $x(t_k^-)$ *e* $x(t_k^+)$ *existem e* $x(t)$ *é contínua à direita em* $t_k \in [t_0, t_0 + \alpha]$*,* $k = 1, 2, \ldots$*;*

(b) $x(t)$ *satisfaz a equação* (1.6)*, para todo* $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$*;*

(c) $x(t_k)$*, tal que* $t_k \leq t_0 + \alpha$*, satisfaz a equação* (1.7)*, para todo* $k \in \mathbb{N}$*.*

Denotamos por $x(t) = x(t; t_0, \phi)$, ou simplesmente $x = x(t_0, \phi)$, uma solução de (1.6)-(1.7).

Observemos que a solução $x(t)$ coincide com $\phi(t - t_0)$, para $t_0 - r \leq t \leq t_0$. Assim, uma solução $x(t)$ de (1.6)-(1.7) existindo em $[t_0 - r, t_0 + \alpha]$ e sofrendo efeitos de impulsos nos instantes $\{t_k\}_{k=1}^m$, onde $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m \leq t_0 + \alpha$, pode ser descrita por

$$x(t) = \begin{cases} x(t; t_0, \phi), & t \in [t_0 - r, t_1), \\ x(t; t_k, x_{t_k}), & t \in [t_k, t_{k+1}), \quad k = 1, 2, \ldots, m-1, \\ x(t; t_m, x_{t_m}), & t \in [t_m, t_0 + \alpha). \end{cases}$$

Agora, se uma solução $x(t)$ existe sobre o intervalo $[t_0 - r, \infty)$, então $x(t)$ sofre infinitos impulsos nos instantes $\{t_k\}_{k=1}^\infty$, onde $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k < \ldots$ e $\lim\limits_{k \to \infty} t_k = \infty$, isto é, os instantes de impulsos não se acumulam. Neste caso, podemos expressar a solução da seguinte maneira

$$x(t) = \begin{cases} x(t; t_0, \phi), & t \in [t_0 - r, t_1), \\ x(t; t_k, x_{t_k}), & t \in [t_k, t_{k+1}), \quad k = 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

isto é, para cada $k \in \mathbb{N}$ e cada $t \in [t_k, t_{k+1})$, $x(t; t_k, x_{t_k})$ representa uma solução de (1.6)-(1.7), onde t_k denota o instante inicial e x_{t_k} representa a função inicial.

Em [19] e [21], os autores consideram a equação diferencial retardada impulsiva (1.6)-(1.7) e provam um resultado de existência local aplicando o Teorema do Ponto Fixo de Schauder. No entanto, os detalhes da prova foram omitidos e, por este motivo, decidimos refazê-la com detalhes e incluí-la neste texto. A idéia da prova é transformar (1.6)-(1.7) em um problema de ponto fixo e, depois, aplicando o Teorema do Ponto Fixo de Schauder, encontrar uma solução em cada subintervalo $[t_0 - r, t_1)$ e $[t_k, t_{k+1})$, $k \in \mathbb{N}$. A solução desejada será, conseqüentemente, obtida pela "colagem" das soluções destes subintervalos. Tal procedimento é denominado "método dos passos" por alguns autores.

Sejam $t_0 \in J$ e $\alpha > 0$ tais que $[t_0, t_0 + \alpha] \subset J$. Vamos assumir que a função $f : J \times PC([-r, 0], D) \to \mathbb{R}^n$ satisfaça as condições indicadas abaixo.

(i) Para cada $x \in PC([t_0 - r, t_0 + \alpha), D)$, a função $t \mapsto f(t, x_t)$ pertence a $PC([t_0, t_0 + \alpha), \mathbb{R}^n)$.

(ii) Para cada $t \in J$, $f(t, \psi)$ é uma função contínua em ψ, onde $\psi \in PC([-r, 0], D)$.

(iii) Para cada conjunto compacto $F \subset D$, existe $M > 0$ tal que $|f(t, \psi)| \leq M$, para todo par $(t, \psi) \in [t_0, t_0 + \alpha] \times PC([-r, 0], F)$.

O lema a seguir nos fornece uma formulação integral de uma solução de (1.6)-(1.7).

Lema 1.9. *Consideremos o problema* (1.6)-(1.7)*, onde f satisfaz a condição (i) acima. Então $x \in PC([t_0 - r, t_0 + \alpha], D)$, onde $\alpha > 0$ e $[t_0 - r, t_0 + \alpha] \subset J$, é uma solução de* (1.6)-(1.7) *se e, somente se,*

$$x(t) = \begin{cases} \phi(t - t_0), & t \in [t_0 - r, t_0], \\ \phi(0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s, x_s)\, ds, & t \in (t_0, t_1), \\ x(t_k^-) + I(t_k, x_{t_k^-}) + \displaystyle\int_{t_k}^{t} f(s, x_s)\, ds, & t \in [t_k, t_{k+1}), \quad k = 1, 2, \cdots, m-1, \\ x(t_m^-) + I(t_m, x_{t_m^-}) + \displaystyle\int_{t_m}^{t} f(s, x_s)\, ds, & t \in [t_m, t_0 + \alpha] \end{cases}$$

ou equivalentemente,

$$x(t) = \begin{cases} \phi(t - t_0), & t \in [t_0 - r, t_0], \\ \phi(0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s, x_s)\, ds + \sum_{k;\ t_k \in (t_0, t]} I(t_k, x_{t_k^-}), & t \in (t_0, t_0 + \alpha]. \end{cases}$$

Na sequência, iremos apresentar um resultado que garante a existência de uma solução local de (1.6)-(1.7). Para a prova, faremos uso do Teorema de Ascoli-Arzelà clássico e do Teorema do Ponto Fixo de Schauder enunciados a seguir.

Teorema 1.10. **(Ascoli-Arzelà)** *Sejam K um espaço métrico compacto e $E \subset C(K, \mathbb{R}^m)$. Suponhamos que exista uma constante $N > 0$ tal que $|f(x)| \leq N$, para quaisquer $x \in K$ e $f \in E$, e que E seja equicontínuo. Então E é relativamente compacto.*

Teorema 1.11. **(Teorema do Ponto Fixo de Schauder)** *Se U é um subconjunto convexo limitado de um espaço de Banach X e $T : U \to U$ é completamente contínua, então T tem um ponto fixo em U.*

O teorema, a seguir, encontra-se em [19]. No entanto, como mencionamos, a sua demonstração não está precisa ou completa. Por este motivo, nós a incluímos neste texto e apresentaremos a prova passo a passo.

Teorema 1.12. **(Existência Local)** *Consideremos o problema (1.6)-(1.7) e suponhamos que f satisfaça as condições $(i) - (iii)$. Então, para cada $(t_0, \phi) \in J \times PC([-r, 0], \mathbb{R}^n)$, existe uma solução $x = x(t_0, \phi)$ de (1.6)-(1.7) em $[t_0 - r, t_0 + \alpha]$, para algum $\alpha > 0$.*

Demonstração: Seja $(t_0, \phi) \in J \times PC([-r, 0], D)$. Escolhemos $T > 0$ tal que $[t_0, t_0 + T] \subset J$. Estamos supondo que $\phi(0) \in D$ e D é um conjunto aberto. Podemos, então, tomar $\varepsilon > 0$ tal que

$$F_1 = \{z \in \mathbb{R}^n;\ |z - \phi(0)| \leq \varepsilon\} \subset D.$$

Como $\phi \in PC([-r, 0], D)$, então o fecho da imagem de ϕ, que denotaremos por F_2, é um subconjunto compacto de D. Logo $F = F_1 \cup F_2$ também é um subconjunto compacto de D. A condição (iii) sobre f implica que existe uma constante positiva M tal que

$$|f(t, \psi)| \leq M, \qquad \text{para todo } (t, \psi) \in [t_0, t_0 + T] \times PC([-r, 0], F).$$

Seja $\alpha > 0$ suficientemente pequeno tal que $\alpha \leq T$ e $M\alpha \leq \varepsilon$ e suponhamos que $t_k \notin (t_0, t_0 + \alpha]$, para todo $k \in \mathbb{N}$, isto é, estamos supondo que o intervalo $(t_0, t_0 + \alpha]$ não possui instantes de impulso. Para $0 < \alpha_0 \leq \alpha$, definimos

$$\mathcal{A}(t_0, \phi, \varepsilon, \alpha_0) = \{x \in PC([t_0 - r, t_0 + \alpha_0], D);\ x_{t_0} = \phi,\ x \text{ é contínua em } (t_0, t_0 + \alpha_0] \text{ e}$$

$$|x(t) - \phi(0)| \leq \varepsilon, \quad \forall\, t \in (t_0, t_0 + \alpha_0]\}\,.$$

Notemos que se $x \in \mathcal{A}(t_0, \phi, \varepsilon, \alpha_0)$, então $x_t \in PC([-r, 0], F)$, para todo $t \in [t_0, t_0 + \alpha_0]$. Assim, para t neste intervalo, existe $M > 0$ tal que $|f(t, x_t)| \leq M$, pela condição (iii). Além disso, as funções de $\mathcal{A}(t_0, \phi, \varepsilon, \alpha_0)$ restritas ao intervalo $[t_0, t_0 + \alpha_0]$ são contínuas. Também é fácil provar que $\mathcal{A}(t_0, \phi, \varepsilon, \alpha_0)$ é um subconjunto convexo, fechado e limitado de $PC([t_0 - r, t_0 + \alpha_0], D)$.

Para cada $\mu = 1, 2, 3, \cdots$, consideremos o operador

$$N_0 : PC([t_0 - r, t_0 + \alpha], D) \longrightarrow PC([t_0 - r, t_0 + \alpha], D)$$

dado por

$$N_0(x^{(\mu)})(t) = \begin{cases} \phi(t - t_0), & t \in [t_0 - r, t_0], \\ \phi(0), & t \in (t_0, t_0 + \frac{\alpha}{\mu}], \\ \phi(0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t - \frac{\alpha}{\mu}} f(s, x_s^{(\mu)})\, ds, & t \in (t_0 + \dfrac{\alpha}{\mu}, t_0 + \alpha], \end{cases} \tag{1.8}$$

onde $x^{(\mu)}(t)$ está associado à função $x(t)$ da seguinte maneira

$$x^{(\mu)}(t) = \begin{cases} x(t), & t \in [t_0 - r, t_0] \cup (t_0 + \frac{\alpha}{\mu}, t_0 + \alpha], \\ x(t_0), & t \in (t_0, t_0 + \frac{\alpha}{\mu}]. \end{cases}$$

Primeiramente, para $\mu = 1$, o operador N_0 fica definido por

$$N_0(x^{(1)})(t) = \begin{cases} \phi(t - t_0), & t \in [t_0 - r, t_0], \\ \phi(0), & t \in (t_0, t_0 + \alpha]. \end{cases} \tag{1.9}$$

Notemos que, para $\mu = 1$, N_0 está bem definido em $\mathcal{A}(t_0, \phi, \varepsilon, \alpha)$ e deixa $\mathcal{A}(t_0, \phi, \varepsilon, \alpha)$ invariante, isto é, $N_0(\mathcal{A}(t_0, \phi, \varepsilon, \alpha)) \subset \mathcal{A}(t_0, \phi, \varepsilon, \alpha)$.

Seja $\mu \geq 2$. Para cada $t \in [t_0, t_0 + \frac{2\alpha}{\mu}]$, afirmamos que $N_0(x^{(\mu)}) \in \mathcal{A}(t_0, \phi, \varepsilon, \frac{2\alpha}{\mu})$. De fato, para $t \in [t_0 - r, t_0 + \frac{\alpha}{\mu}]$, as duas primeiras expressões em (1.8) implicam que $N_0(x^{(\mu)})$ está bem definido e pertence a $\mathcal{A}(t_0, \phi, \varepsilon, \frac{\alpha}{\mu})$. Agora, para $t \in (t_0 + \frac{\alpha}{\mu}, t_0 + \frac{2\alpha}{\mu}]$, temos

$$\begin{aligned} |N_0(x^{(\mu)})(t) - \phi(0)| &= \left| \int_{t_0}^{t - \frac{\alpha}{\mu}} f(s, x_s^{(\mu)})\, ds \right| \leq \int_{t_0}^{t - \frac{\alpha}{\mu}} |f(s, x_s^{(\mu)})|\, ds \\ &\leq \int_{t_0}^{t_0 - \frac{\alpha}{\mu}} M\, ds \leq \int_{t_0}^{t_0 + \frac{\alpha}{\mu}} M\, ds = M\frac{\alpha}{\mu} \leq \frac{\varepsilon}{\mu} \leq \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Logo $N_0(x^{(\mu)})$ está bem definido em $[t_0, t_0 + \frac{2\alpha}{\mu}]$ e, quando restrito à este intervalo, sua imagem pertence a $\mathcal{A}(t_0, \phi, \varepsilon, \frac{2\alpha}{\mu})$.

Suponhamos que $N_0(x^{(\mu)})$ esteja bem definido sobre o intervalo $[t_0 - r, t_0 + \frac{k\alpha}{\mu}]$, para algum k, com $1 < k < \mu$, e quando restrito à este intervalo, $N_0(x^{(\mu)})$ pertença a $\mathcal{A}(t_0, \phi, \varepsilon, \frac{k\alpha}{\mu})$. Assim (1.8) define $N_0(x^{(\mu)})$ como uma função contínua para $t \in \left(t_0 + k\frac{\alpha}{\mu}, t_0 + (k+1)\frac{\alpha}{\mu}\right]$. A desigualdade em (1.10) também está satisfeita para t neste intervalo. Logo $N_0(x^{(\mu)})$ restrito a $\left(t_0 + k\frac{\alpha}{\mu}, t_0 + (k+1)\frac{\alpha}{\mu}\right]$ está bem definido e $N_0(x^{(\mu)})(t) \in \mathcal{A}\left(t_0, \phi, \varepsilon, (k+1)\frac{\alpha}{\mu}\right)$. Por indução, concluímos que $N_0(x^{(\mu)})$ está bem definido e deixa $\mathcal{A}(t_0, \phi, \varepsilon, \alpha)$ invariante.

O próximo passo é mostrarmos que N_0 tem um ponto fixo em $\mathcal{A}(t_0, \phi, \varepsilon, \alpha)$. Notemos que $\phi(t - t_0)$ é um ponto fixo de N_0 quando nos restringimos ao intervalo $[t_0 - r, t_0]$, isto é,

$$N_0(x^{(\mu)})|_{[t_0 - r, t_0]} = x^{(\mu)}|_{[t_0 - r, t_0]},$$

onde $x^{(\mu)} \in \mathcal{A}(t_0, \phi, \varepsilon, \alpha)$. Com isto, resta-nos provar que N_0, restrito ao intervalo $[t_0, t_0 + \alpha]$, possui um ponto fixo ou, mais precisamente, que $N_0(x^{(\mu)})|_{[t_0, t_0+\alpha]} = x^{(\mu)}|_{[t_0, t_0+\alpha]}$, para algum $x^{(\mu)} \in \mathcal{A}(t_0, \phi, \varepsilon, \alpha)$.

Para $0 < \alpha_0 \le \alpha$, definimos

$$\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}(t_0, \varepsilon, \alpha_0) = \{x \in C([t_0, t_0 + \alpha_0], D);\ |x(t) - x(t_0)| \le \varepsilon,\ \forall\, t \in (t_0, t_0 + \alpha_0]\}\,.$$

Denotemos, simplesmente, $N_0 = N_0|_{\mathcal{A}_0}$. Então, pelo o que já observamos anteriormente,

$$N_0 : \mathcal{A}_0 \longrightarrow \mathcal{A}_0$$

está definido por

$$N_0(x^{(\mu)})(t) = \begin{cases} \phi(0), & t \in [t_0, t_0 + \frac{\alpha}{\mu}], \\ \phi(0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t - \frac{\alpha}{\mu}} f(s, x_s^{(\mu)})\, ds, & t \in (t_0 + \dfrac{\alpha}{\mu}, t_0 + \alpha], \end{cases} \tag{1.11}$$

onde $x^{(\mu)}$ está restrito ao intervalo $[t_0, t_0 + \alpha]$.

Provaremos as afirmações seguintes com respeito à N_0.

1. N_0 é contínuo.

Seja $\mu \in \mathbb{N}^*$ arbitrariamente fixado e sejam $x^{(\mu)}$, $y^{(\mu)} \in \mathcal{A}_0$. A seguir, vamos considerar $x^{(\mu)}$ e $y^{(\mu)}$ restritas à $[t_0, t_0+\alpha]$ e denotaremos simplesmente por $x^{(\mu)}$ e $y^{(\mu)}$ respectivamente. Se $t \in [t_0, t_0 + \frac{\alpha}{\mu}]$, a afirmação é claramente verdadeira. Agora, se $t \in (t_0 + \frac{\alpha}{\mu}, t_0 + \alpha]$, temos

$$|N_0(x^{(\mu)})(t) - N_0(y^{(\mu)})(t)| \leq \int_{t_0}^{t-\frac{\alpha}{\mu}} |f(s, x_s^{(\mu)}) - f(s, y_s^{(\mu)})|\, ds, \tag{1.12}$$

onde $x^{(\mu)}$, $y^{(\mu)} \in \mathcal{A}_0$. Para cada $t \in J$ fixo, $f(t,\psi)$ é uniformemente contínua em ψ, para toda $\psi \in \mathcal{A}_0$. Então dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x_t^{(\mu)} - y_t^{(\mu)}\| < \delta, \quad x^{(\mu)}, y^{(\mu)} \in \mathcal{A}_0$$

implica que

$$|f(t, x_t^{(\mu)}) - f(t, y_t^{(\mu)})| < \epsilon, \quad \forall\, t \in [t_0, t_0+\alpha].$$

Segue de (1.12) que

$$|N_0(x^{(\mu)})(t) - N_0(y^{(\mu)})(t)| \leq \int_{t_0}^{t-\frac{\alpha}{\mu}} \epsilon\, ds \leq \int_{t_0}^{t_0+\alpha} \epsilon\, ds \leq \epsilon\alpha.$$

Logo, se $\max\limits_{t\in[t_0+\frac{\alpha}{\mu}, t_0+\alpha]} |x^{(\mu)}(t) - y^{(\mu)}(t)| < \delta$, então

$$\|N_0(x^{(\mu)}) - N_0(y^{(\mu)})\| \leq \epsilon\alpha.$$

2. $N_0(\mathcal{A}_0)$ é equicontínuo.

Sejam $y^{(\mu)} \in \mathcal{A}_0$ e $t_1, t_2 \in [t_0, t_0+\alpha]$. Considerando a notação da afirmação anterior, temos

$$|N_0(y^{(\mu)})(t_1) - N_0(y^{(\mu)})(t_2)| \leq \int_{t_2-\frac{\alpha}{\mu}}^{t_1-\frac{\alpha}{\mu}} |f(s, y_s^{(\mu)})|\, ds \leq M|t_1 - t_2|$$

que tende a 0 quando $t_1 \to t_2$, para todo $\mu \in \mathbb{N}^*$. Logo $N_0(\mathcal{A}_0)$ é equicontínuo sobre o intervalo $[t_0, t_0+\alpha]$.

3. $N_0(\mathcal{A}_0)$ é uniformemente limitado.

Notemos que, para todo $t \in [t_0, t_0+\alpha]$ e para toda função $x^{(\mu)} \in \mathcal{A}_0$,

$$|N_0(x^{(\mu)})(t)| \leq \varepsilon + |\phi(0)|,$$

ou seja, $N_0(\mathcal{A}_0)$ é uniformemente limitado.

4. N_0 é completamente contínuo.

Sabemos, pela afirmação $1.$, que N_0 é contínuo. Resta-nos mostrar que N_0 é compacto. Para tanto, mostraremos que $N_0(\mathcal{A}_0)$ é relativamente compacto através do Teorema de Ascoli-Arzelà aplicado à $N_0(\mathcal{A}_0)$. Mas isto segue diretamente das afirmações $2.$ e $3.$ que dizem que $N_0(\mathcal{A}_0)$ é equicontínuo e uniformemente limitado, para todo $\mu \in \mathbb{N}^*$. Portanto N_0 é compacto.

Assim, as condições do Teorema do Ponto Fixo de Schauder (Teorema 1.11) estão satisfeitas. Conseqüentemente, N_0 tem um ponto fixo, digamos $y_1^{(\mu)}(t)$ em $\mathcal{A}_0$.

Pela compacidade de N_0, existe uma subsequência $\{y_1^{(\mu_k)}\}$ da sequência de funções $\{y_1^{(\mu)}\}$ que converge uniformemente para alguma função $y_1(t)$, $t \in [t_0, t_0+\alpha]$, quando $k \to \infty$. Então, definimos

$$x_1(t) = \begin{cases} \phi(t-t_0), & t \in [t_0-r, t_0] \\ y_1(t), & t \in (t_0, t_0+\alpha]. \end{cases} \tag{1.13}$$

Observemos que, para cada $t \in [t_0, t_0+\alpha]$ fixo, $\|{x_1}_t^{(\mu_k)} - {x_1}_t\| \to 0$, quando $k \to \infty$ e, então,

$$\lim_{k\to\infty} f(t, {x_1}_t^{(\mu_k)}) = f(t, {x_1}_t).$$

Como ${x_1}_t^{(\mu_k)} \in \mathcal{A}_0$, temos $|f(t, {x_1}_t^{(\mu_k)})| \leq M$, para $t \in [t_0, t_0+\alpha]$. Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\lim_{k\to\infty} \int_{t_0}^t f(s, {x_1}_s^{(\mu_k)})\, ds = \int_{t_0}^t f(s, {x_1}_s)\, ds, \quad \forall\, t \in [t_0, t_0+\alpha].$$

Sabendo que $N_0({y_1}^{(\mu_k)}) = {y_1}^{(\mu_k)}$, de (1.11), para $t \in [t_0 + \frac{\alpha}{\mu_k}, t_0+\alpha]$, temos

$$\begin{aligned} {y_1}_t^{(\mu_k)}(t) &= \phi(0) + \int_{t_0}^{t-\frac{\alpha}{\mu_k}} f(s, {x_1}_s^{(\mu_k)})\, ds \\ &= \phi(0) + \int_{t_0}^{t} f(s, {x_1}_s^{(\mu_k)})\, ds - \int_{t-\frac{\alpha}{\mu_k}}^{t} f(s, {x_1}_s^{(\mu_k)})\, ds. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Quando $k \to \infty$, (1.14) se torna

$$y_1(t) = \phi(0) + \int_{t_0}^t f(s, {x_1}_s)\, ds. \tag{1.15}$$

Assim $x_1(t)$, dado por (1.13), é equivalente a

$$x_1(t) = \begin{cases} \phi(t-t_0), & t \in [t_0-r, t_0] \\ \phi(0) + \displaystyle\int_{t_0}^t f(s, {x_1}_s)\, ds, & t \in (t_0, t_0+\alpha] \end{cases} \tag{1.16}$$

e, segundo o Lema 1.9, $x_1(t)$ é uma solução de (1.6) sobre o intervalo $[t_0 - r, t_0 + \alpha]$.

Seja $t_1 \in (t_0, t_0 + \alpha]$, o primeiro instante de impulso. Vamos, agora, considerar o problema

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x_t), & t_1 < t \leq t_0 + \alpha \\ x(t) = x_1(t - t_1), & t_1 - r \leq t < t_1, \\ x(t_1) = x(t_1^-) + I(t_1, x_{t_1^-}) \end{cases} \tag{1.17}$$

Por hipótese, temos $x(t_1^-) + I(t_1, x_{t_1^-}) = x_{t_1^-}(0) + I(t_1, x_{t_1^-}) \in D$. Então podemos escolher $\varepsilon > 0$ tal que

$$F_1 = \{z \in \mathbb{R}^n;\ |z - x_1(0)| \leq \varepsilon\} \subset D.$$

Como $x_1 \in PC([t_1 - r, t_1], D)$, então o fecho da imagem de x_1, que denotaremos por F_2, é um subconjunto compacto de D. Assim, $F = F_1 \cup F_2$ também é um subconjunto compacto de D e a condição (iii) sobre f nos diz que existe uma constante positiva M tal que $|f(t, \psi)| \leq M$, para todo $(t, \psi) \in [t_1, t_0 + \alpha] \times PC([-r, 0], F)$.

Para $0 < \alpha_0 \leq \alpha$, definimos

$$\mathcal{A}(t_1, x_1, \varepsilon, \alpha_0) = \{x \in PC([t_1 - r, t_0 + \alpha_0], D);\ x_{t_1} = x_1, x \text{ é contínua em } (t_1, t_0 + \alpha_0] \text{ e}$$

$$|x(t) - x_1(0)| \leq \varepsilon, \quad \forall\, t \in (t_1, t_0 + \alpha_0]\}\,.$$

Notemos que se $x \in \mathcal{A}(t_1, x_1, \varepsilon, \alpha_0)$, então $x_t \in PC([-r, 0], F)$, para todo $t \in [t_1, t_0 + \alpha_0]$. Assim, para t neste intervalo, temos $|f(t, x_t)| \leq M$.

Para cada $\mu = 1, 2, 3, \ldots$, consideremos o operador

$$N_1 : PC([t_1 - r, t_0 + \alpha], D) \longrightarrow PC([t_1 - r, t_0 + \alpha], D)$$

definido por

$$N_1(x^{(\mu)})(t) = \begin{cases} x_1(t - t_1), & t \in [t_1 - r, t_1], \\ x_1(0), & t \in (t_1, t_1 + \frac{\alpha}{\mu}], \\ x_1(0) + \displaystyle\int_{t_1}^{t - \frac{\alpha}{\mu}} f(s, x_s^{(\mu)})\, ds, & t \in (t_1 + \dfrac{\alpha}{\mu}, t_0 + \alpha]. \end{cases} \tag{1.18}$$

De maneira análoga ao operador N_0, podemos provar que $N_1(x^{(\mu)})$ está bem definido e deixa $\mathcal{A}(t_1, x_1, \varepsilon, \alpha_0)$ invariante.

É claro que $x_1(t - t_0)$ já é um ponto fixo de N_1 quando este operador está restrito à $[t_1 - r, t_1]$. Com isto, resta-nos provar que N_1, restrito ao intervalo $[t_1, t_0 + \alpha]$, possui um ponto fixo.

Definimos, agora,

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}(t_1, \varepsilon, \alpha_0) = \{x \in C([t_1, t_0 + \alpha_0], D);\ |x(t) - x(t_1)| \le \varepsilon, \quad \forall\, t \in (t_1, t_0 + \alpha_0]\}\,.$$

Denotemos, simplesmente, $N_1 = N_1|_{\mathcal{A}_1}$. Então,

$$N_1 : \mathcal{A}_1 \longrightarrow \mathcal{A}_1$$

está definido por

$$N_1(x^{(\mu)})(t) = \begin{cases} x_1(0), & t \in [t_1, t_1 + \frac{\alpha}{\mu}], \\ x_1(0) + \displaystyle\int_{t_1}^{t - \frac{\alpha}{\mu}} f(s, x_s^{(\mu)})\, ds, & t \in (t_1 + \dfrac{\alpha}{\mu}, t_0 + \alpha]. \end{cases} \tag{1.19}$$

Seguindo os passos das afirmações $1.$ a $4.$, agora aplicadas à N_1 em lugar de N_0, encontramos um ponto fixo de N_1, digamos $y_2^{(\mu)}(t)$ em $\mathcal{A}_1$. Pela compacidade de N_1, existe uma subsequência $\{y_2^{(\mu_k)}\}$ da sequência de funções $\{y_2^{(\mu)}\}$ que converge uniformemente para alguma função $y_2(t)$, com $t \in [t_1, t_0 + \alpha]$, quando $k \to \infty$.

Então, definimos

$$x_2(t) = \begin{cases} x_1(t), & t \in [t_0 - r, t_1] \\ y_2(t), & t \in [t_1, t_0 + \alpha]. \end{cases}$$

Analogamente ao ponto fixo $y_1(t)$, obtemos

$$y_2(t) = x_1(0) + \int_{t_1}^{t} f(s, x_{2s})\, ds = x(t_1^-) + I(t_1, x_{t_1^-}) + \int_{t_1}^{t} f(s, x_{2s})\, ds.$$

Logo

$$x_2(t) = \begin{cases} \phi(t - t_0), & t \in [t_0 - r, t_0], \\ \phi(0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s, x_{1s})\, ds, & t \in (t_0, t_1), \\ x(t_1^-) + I(t_1, x_{t_1^-}) + \displaystyle\int_{t_1}^{t} f(s, x_{2s})\, ds, & t \in [t_1, t_0 + \alpha] \end{cases}$$

é uma solução de (1.17) em $[t_0 - r, t_0 + \alpha]$.

Analogamente, para $t = t_k$, $k \in \mathbb{N}$, consideremos o problema

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x_t), & t_k < t \leq t_0 + \alpha \\ x(t) = x_k(t - t_k), & t_k - r \leq t < t_k, \\ x(t_k) = x(t_k^-) + I(t_k, x_{t_k^-}), \end{cases} \tag{1.20}$$

o operador

$$N_k(x^{(\mu)})(t) = \begin{cases} x_k(t - t_k), & t \in [t_k - r, t_k], \\ x_k(0), & t \in (t_k, t_k + \frac{\alpha}{\mu}], \\ x_k(0) + \displaystyle\int_{t_k}^{t - \frac{\alpha}{\mu}} f(s, x_s^{(\mu)})\, ds, & t \in (t_k + \dfrac{\alpha}{\mu}, t_0 + \alpha]. \end{cases} \tag{1.21}$$

e o conjunto

$$\mathcal{A}_k = \mathcal{A}(t_k, \varepsilon, \alpha_0) = \left\{ x \in C([t_k, t_0 + \alpha_0], D);\ |x(t) - x(t_k)| \leq \varepsilon, \quad \forall\, t \in (t_k, t_0 + \alpha_0] \right\}.$$

Consideremos, a restrição $N_k|_{\mathcal{A}_k}$ que denotaremos por N_k. Então,

$$N_k : \mathcal{A}_k \longrightarrow \mathcal{A}_k$$

está dado por

$$N_k(x^{(\mu)})(t) = \begin{cases} x_k(0), & t \in (t_k, t_k + \frac{\alpha}{\mu}], \\ x_k(0) + \displaystyle\int_{t_k}^{t - \frac{\alpha}{\mu}} f(s, x_s^{(\mu)})\, ds, & t \in (t_k + \dfrac{\alpha}{\mu}, t_0 + \alpha]. \end{cases} \tag{1.22}$$

Seguindo os passos das afirmações $1.$ a $4.$, agora aplicadas à N_k, encontramos um ponto fixo de N_k, digamos $y_{k+1}(t)$, em $\mathcal{A}_k$. Logo,

$$x_{k+1}(t) = \begin{cases} x_k(t), & t \in [t_0 - r, t_k], \\ y_{k+1}(t), & t \in [t_k, t_0 + \alpha] \end{cases} = \begin{cases} \varphi(t - t_0), & t \in [t_0 - r, t_0] \\ y_1(t), & t \in [t_0, t_1) \\ y_2(t), & t \in [t_1, t_2) \\ \dots \\ y_{k+1}(t), & t \in [t_k, t_0 + \alpha] \end{cases}$$

é uma solução de (1.20) em $[t_0 - r, t_0 + \alpha]$. Então, seguindo este processo,

$$x(t) = \begin{cases} x_m(t), & t \in [t_0 - r, t_m), \\ y_{m+1}(t), & t \in [t_m, t_0 + \alpha] \end{cases} = \begin{cases} \varphi(t - t_0), & t \in [t_0 - r, t_0] \\ y_1(t), & t \in [t_0, t_1) \\ y_2(t), & t \in [t_1, t_2) \\ \dots \\ y_{k+1}(t), & t \in [t_k, t_{k+1}) \\ \dots \\ y_{m+1}(t), & t \in [t_m, t_0 + \alpha] \end{cases}$$

é uma solução de (1.6)-(1.7) em $[t_0 - r, t_0 + \alpha]$, onde $m = \max\{k \in \mathbb{N};\ t_k \leq t_0 + \alpha\}$. Logo,

$$x(t) = \begin{cases} \phi(t - t_0), & t \in [t_0 - r, t_0], \\ \phi(0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s, x_s)\, ds, & t \in (t_0, t_1), \\ x(t_1^-) + I(t_1, x_{t_1^-}) + \displaystyle\int_{t_1}^{t} f(s, x_s)\, ds, & t \in [t_1, t_2), \\ \dots \\ x(t_k^-) + I(t_k, x_{t_k^-}) + \displaystyle\int_{t_k}^{t} f(s, x_s)\, ds, & t \in [t_k, t_{k+1}), \\ \dots \\ x(t_m^-) + I(t_m, x_{t_m^-}) + \displaystyle\int_{t_m}^{t} f(s, x_s)\, ds, & t \in [t_m, t_0 + \alpha] \end{cases} \tag{1.23}$$

é uma solução do problema (1.6)-(1.7) em $[t_0 - r, t_0 + \alpha]$. ■

Observação 1.1. Percebemos, no decorrer da prova do Teorema 1.12, que as hipóteses (i) e (iii) poderiam ser substituídas por:

(i') A função $t \mapsto f(t, x_t)$ é Lebesgue integrável.

(iii') Para cada conjunto compacto $F \subset D$, existe uma função localmente Lebesgue integrável $M_F : [t_0, t_0 + \alpha] \to \mathbb{R}$ tal que para quaisquer $t_1, t_2 \in [t_0, t_0 + \alpha]$ e $\psi \in PC([-r, 0], F)$,

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} f(s, \psi(s))\ ds \right| \leq \int_{t_1}^{t_2} M_F(s)\ ds.$$

Se considerássemos as hipóteses mais fracas (i') e (iii'), juntamente com (ii), poderíamos provar o Teorema 1.12 de forma análoga à prova original. No entanto, com estas novas hipóteses, a solução da equação diferencial (1.6)-(1.7) também seria no sentido fraco, ou seja, a solução encontrada satisfaria a equação (1.6)-(1.7) quase sempre no sentido de medida de Lebesgue.

A seguir, mostraremos alguns resultados que tratam da continuação de soluções de (1.6)-(1.7) ao intervalo maximal de existência. Tais resultados foram extraídos de [19].

Definição 1.13. *Se x e y são soluções de (1.6)-(1.7) sobre os intervalos J_1 e J_2, respectivamente, onde J_1 está propriamente contido em J_2 e estes intervalos são semi-abertos à direita, e se $x(t) = y(t)$ para todo $t \in J_1$, então y é uma continuação própria à direita de x, ou simplesmente, uma continuação de x. Uma solução x de (1.6)-(1.7) definida sobre J_1 é dita continuável se existe alguma continuação y de x. Caso contrário, x é não-continuável e o intervalo J_1 é chamado de intervalo maximal de existência de x.*

Na Definição 1.13, observamos que se J_1 é da forma $[t_0 - r, t_0 + \alpha_1)$, então o intervalo J_2 pode ser $[t_0 - r, t_0 + \alpha_2]$ para algum $\alpha_2 \geq \alpha_1$ ou $[t_0 - r, t_0 + \alpha_2)$ para algum $\alpha_1 < \alpha_2 \leq \infty$. Analogamente, se J_1 é da forma $[t_0 - r, t_0 + \alpha_1]$, então J_2 pode ser do tipo $[t_0 - r, t_0 + \alpha_2]$ para algum $\alpha_2 > \alpha_1$ ou do tipo $[t_0 - r, t_0 + \alpha_2)$ para algum $\alpha_1 < \alpha_2 \leq \infty$.

Se x é uma solução continuável de (1.6)-(1.7) sobre algum intervalo, então segue do Lema de Zorn que x pode ser continuada a um intervalo maximal de existência.

Por ser mais natural para sistemas físicos reais e por ser de nosso interesse nos próximos capítulos, nos concentraremos no estudo da continuação à direita de soluções. O próximo teorema corresponde ao Teorema 2 em [19].

Teorema 1.14. *Consideremos o problema impulsivo (1.6)-(1.7) e suponhamos que f satisfaça as condições $(i) - (iii)$. Sejam $(t_0, \phi) \in J \times PC([-r, 0], D)$ e $x = x(t_0, \phi)$ uma solução de (1.6)-(1.7). Suponhamos que x esteja definida em $[t_0 - r, t_0 + \alpha]$, onde $\alpha > 0$ e $[t_0, t_0 + \alpha] \subset J$. Então x é continuável. Agora se x está definida sobre um intervalo da forma $[t_0 - r, t_0 + \beta]$, onde $0 < \beta < \infty$ e $[t_0, t_0 + \beta] \subset J$, e x é não-continuável, então para todo conjunto compacto $G \subset D$, existe uma sequência de números $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ com $t_0 < t_k < t_{k+1}$ e $\lim\limits_{k \to \infty} t_k = t_0 + \beta$ tal que $x(t_k) \notin G$.*

Demonstração: Suponhamos que $x = x(t_0, \phi)$ seja uma solução de (1.6)-(1.7) definida sobre o intervalo $[t_0 - r, t_0 + \alpha]$ para algum $\alpha > 0$, onde $[t_0, t_0 + \alpha] \subset J$. Definimos $\bar{t_0} = t_0 + \alpha$ e $\bar{\phi} = x_{\bar{t_0}}$. Pelo Teorema 1.12, sabemos que existe uma solução (local) $y = y(\bar{t_0}, \bar{\phi})$ de (1.6)-(1.7) sobre $[\bar{t_0} - r, \bar{t_0} + \beta]$ para algum $\beta > 0$, onde $\bar{t_0} \in J$ denota o novo instante inicial e $\bar{\phi} \in PC([-r, 0], D)$ a nova função inicial. Por extensão do domínio de definição da função x, podemos tomar $x(t) = y(t)$, para $t \in (\bar{t_0}, \bar{t_0} + \beta]$. É claro que esta nova função definida em $[t_0 - r, t_0 + \alpha + \beta]$ também é uma solução de (1.6)-(1.7) e, por sua vez, uma continuação da solução original x.

Suponhamos que $x = x(t_0, \phi)$ seja uma solução não-continuável de (1.6)-(1.7) definida em $[t_0 - r, t_0 + \beta)$ para algum $0 < \beta < \infty$, onde $[t_0, t_0 + \beta) \subset J$. Suponhamos, por contradição, que existam um compacto $F_1 \subset D$ e uma constante $0 < \beta_1 < \beta$ tais que $x(t) \in F_1$ para todo $t \in [t_0 + \beta_1, t_0 + \beta)$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que β_1 esteja suficientemente próximo de β tal que $t_k \notin [t_0 + \beta_1, t_0 + \beta)$, $k \in \mathbb{N}$. Denotamos por F_2 o fecho da imagem de x quando restrita ao intervalo $[t_0 - r, t_0 + \beta_1]$. Então F_2 é um conjunto compacto propriamente contido em D. O conjunto $G = F_1 \cup F_2 \subset D$ é claramente compacto e $x(t) \in G$, para todo $t \in [t_0 - r, t_0 + \beta)$.

A condição (iii) implica que existe uma constante $M > 0$ tal que $|f(t, \psi)| \leq M$, para todo $(t, \psi) \in [t_0, t_0 + \beta] \times PC([-r, 0], G)$. Em particular, $|f(t, x_t)| \leq M$, para $t \in [t_0, t_0 + \beta)$. Assim, dados $t, \bar{t} \in [t_0 + \beta_1, t_0 + \beta)$, pelo Lema 1.9, temos

$$|x(t) - x(\bar{t})| = \left| \int_{\bar{t}}^{t} f(s, x_s)\, ds \right| \leq \int_{\bar{t}}^{t} |f(s, x_s)|\, ds \leq M\, |t - \bar{t}|. \tag{1.24}$$

De (1.24) e usando o Critério de Cauchy, existe $\omega = \lim\limits_{t \to (t_0 + \beta)^-} x(t)$ e $\omega \in G$. Logo x pode ser continuada como uma solução de (1.6)-(1.7) a $t_0 + \beta$, definindo-se $x(t_0 + \beta) = \omega$, se $t_0 + \beta \neq t_k$ para todo k, e $x(t_0 + \beta) = \omega + I(t_k, x_{t_k^-})$, se $t_0 + \beta = t_k$ para algum k. No entanto, isso contradiz a hipótese de que x é não-continuável. Logo, para todo conjunto compacto $G \in D$, existe uma sequência estritamente crescente de instantes $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em $(t_0, t_0 + \beta)$ que converge para $t_0 + \beta$ tal que $x(t_k) \notin G$, qualquer que seja $k \in \mathbb{N}$. ■

A primeira parte do Teorema 1.14 afirma que o intervalo maximal de existência de uma solução não-continuável de (1.6)-(1.7) é aberto à direita. A segunda parte diz que uma solução não-continuável x ou está definida para todo $t \in J$ ou está definida sobre um subintervalo próprio limitado de J e, neste último caso, a solução ou se torna ilimitada quando $t \to t_0 + \beta$, isto é, $\limsup_{t \to t_0+\beta} |x(t)| = \infty$, ou ela assume valores arbitrariamente próximos da fronteira de D quando $t \to t_0 + \beta$. No caso especial em que $J = \mathbb{R}^+$ e $D = \mathbb{R}^n$, o Teorema 1.14 diz que soluções limitadas de (1.6)-(1.7) são continuáveis a $t = \infty$.

Nosso próximo passo é estabelecermos condições que garantam a existência de soluções globais do problema (1.6)-(1.7) visto que já sabemos que soluções limitadas podem ser estendidas ao intervalo $[t_0 - r, +\infty)$. Mas, antes, precisamos enunciar uma generalização da desigualdade de Gronwall.

Lema 1.15. **(Desigualdade de Gronwall)** *Sejam* $g, h \in PC([a, b], \mathbb{R}_+)$, $c \in \mathbb{R}_+$ *e*

$$g(t) \leq c + \int_a^b g(s)h(s)\,ds,$$

para todo $t \in [a, b]$. *Então*

$$g(t) \leq c\,\exp\left(\int_a^t h(s)\,ds\right),$$

para todo $t \in [a, b]$.

Demonstração: A prova segue aplicando a desigualdade de Gronwall (caso contínuo [3]) a cada intervalo de continuidade da função $g(t)$. ■

Os resultados sobre existência global e unicidade de soluções foram estudados por Xinzhi Liu e George Ballinger em [21]. Trataremos destes resultados nos parágrafos seguintes. Além da Desigualdade de Gronwall, necessitaremos do lema seguinte.

Lema 1.16. *Seja* $x \in PC([t_0 - r, t_0 + \alpha], D)$ *e definamos a função* $g(t) = \|x_t\|$, *para* $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$. *Então* $g \in PC([t_0, t_0 + \alpha], \mathbb{R}_+)$ *e os únicos possíveis pontos de descontinuidade de* g *são* t^* *ou* $t^* - r$, *onde* t^* *denota um ponto de descontinuidade de* x.

Demonstração: Seja $\tau_1 \in [t_0, t_0 + \alpha)$. Notemos que $g(\tau_1) = \| x_{\tau_1} \| = \sup_{t \in [\tau_1 - r, \tau_1]} |x(t)|$. Inicialmente, provaremos que $g(\tau_1^+) = g(\tau_1)$. Como x é contínua à direita, em particular nos pontos τ_1 e $\tau_1 - r$, então dado $\varepsilon > 0$, existe $0 < \delta < t_0 + \alpha - \tau_1$ tal que se $t \in [\tau_1, \tau_1 + \delta]$, então

$|x(t)-x(\tau_1)| \le \dfrac{\varepsilon}{2}$ e $|x(t-r)-x(\tau_1-r)| \le \dfrac{\varepsilon}{2}$. Seja $\tau_2 \in (\tau_1, \tau_1+\delta]$. Se $t \in [\tau_1, \tau_2]$, então

$$|x(t)| \le |x(\tau_1)| + \frac{\varepsilon}{2} \le g(\tau_1) + \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \forall\, t \in [\tau_1 - r, \tau_2].$$

Como $[\tau_2 - r, \tau_2] \subset [\tau_1 - r, \tau_2]$, então $g(\tau_2) \le g(\tau_1) + \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Analogamente, se $t \in [\tau_1 - r, \tau_2 - r]$, vale

$$\begin{aligned} |x(t)| &\le |x(t) - x(\tau_1 - r)| + |x(\tau_1 - r) - x(\tau_2 - r)| + |x(\tau_2 - r)| \\ &\le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + g(\tau_2) = \varepsilon + g(\tau_2), \qquad \forall\, t \in [\tau_1 - r, \tau_2]. \end{aligned}$$

Como o intervalo $[\tau_1 - r, \tau_1]$ está contido em $[\tau_1 - r, \tau_2]$, isto implica que $g(\tau_1) \le g(\tau_2) + \varepsilon$. Logo $|g(\tau_1) - g(\tau_2)| \le \varepsilon$ e, portanto, $g(\tau_1^+) = g(\tau_1)$.

Observemos que, para provarmos que g é contínua à direita em τ_1, usamos apenas o fato de que x é contínua à direita em τ_1 e em $\tau_1 - r$. Pelo mesmo argumento, podemos provar que $g(\tau_1^-) = g(\tau_1)$, para todo $\tau_1 \in (t_0, t_0 + \alpha]$, desde que x seja contínua à esquerda nos pontos τ_1 e $\tau_1 - r$. Além disso, se $\tau_1 \in (t_0, t_0 + \alpha]$ e τ_1 ou $\tau_1 - r$ é um ponto de descontinuidade de x, então é fácil ver que $g(\tau_1^-)$ existe. Logo, g é uma função contínua à direita em $[t_0, t_0 + \alpha)$ e é contínua à esquerda em cada ponto $\tau_1 \in (t_0, t_0 + \alpha]$ a menos que τ_1 ou $\tau_1 - r$ seja um ponto de descontinuidade de x. Neste caso, $g(\tau_1^-)$ existe. Assim, os pontos de descontinuidade de g ocorrem somente nos instantes t^* ou $t^* - r$, onde t^* é um ponto de descontinuidade da função x, como queríamos concluir. ■

No início deste capítulo, assumimos que $\psi(0) + I(t_k, \psi) \in D$, para todo k e para todo $\psi \in PC([-r, 0], D)$ com $\psi(0^-) = \psi(0)$. Esta condição foi necessária para garantirmos que as soluções estavam definidas e que poderiam ser continuadas após os instantes de impulso. Ela também assegura que as soluções pertencem ao domínio de f após a ação impulsiva. Quando $D = \mathbb{R}^n$, é claro que esta condição está satisfeita.

Agora estamos aptos para enunciarmos e provarmos o teorema referente à existência de uma solução de (1.6)-(1.7) em $[t_0 - r, \infty)$. Para tanto, vamos assumir que $J = \mathbb{R}_+$ e $D = \mathbb{R}^n$ e adicionar a seguinte hipótese sobre f:

(iv) Existem funções $h_1, h_2 \in PC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ tais que, para todo $(t, \psi) \in \mathbb{R}_+ \times PC([-r, 0], \mathbb{R}^n)$,

$$|f(t, \psi)| \le h_1(t) + h_2(t)\|\psi\|.$$

De posse dessa condição adicional, o teorema a seguir afirma que existe uma solução global do problema (1.6)-(1.7). A prova deste resultado pode ser encontrado em [21], Teorema 3.5, p. 645.

Teorema 1.17. (Existência Global) *Suponhamos que f satisfaça $(i)-(iv)$. Então, para cada $(t_0,\phi)\in\mathbb{R}_+\times PC([-r,0],\mathbb{R}^n)$, existe uma solução (local) $x=x(t_0,\phi)$ de (1.6)-(1.7) que pode ser estendida ao intervalo $[t_0-r,\infty)$.*

Demonstração: Sejam $(t_0,\phi)\in\mathbb{R}_+\times PC([-r,0],\mathbb{R}^n)$ e $x=x(t_0,\phi)$ uma solução local de (1.6)-(1.7) a qual existe pelo Teorema 1.12. Se x é continuável, então pelo Teorema 1.14 podemos estendê-la a um intervalo maximal de existência da forma $[t_0-r,t_0+\beta)$, para algum $0<\beta\leq\infty$. Assim, resta-nos saber se x é continuável ou não-continuável sobre $[t_0-r,t_0+\beta)$ para um β finito.

Suponhamos que $\beta<\infty$ e que x seja não-continuável sobre o intervalo $[t_0-r,t_0+\beta)$. Seja $\{t_k\}_{k=1}^m$ a sequência de instantes de impulsos da solução x em $[t_0-r,t_0+\beta)$. Pelo Teorema 1.14, a solução se torna ilimitada quando $t\to t_0+\beta$. Mostraremos que x é limitada sobre $[t_0-r,t_0+\beta)$ e, então, chegaremos a uma contradição.

Seja $M_i=\sup\{h_i(t);\ t\in[t_0,t_0+\beta]\}$, para $i=1,2$. É fácil ver que M_1 e M_2 são números finitos. Sejam $B_1=\beta M_1$, $B_2=\beta M_2$, $B_3=\|\phi\|$ e $B_4=|\phi(0)|+\displaystyle\sum_{k=1}^m|I(t_k,x_{t_k^-})|$. No caso em que x não sofre impulsos, basta considerarmos $B_4=|\phi(0)|$.

Pelo Lema 1.9 e pela hipótese (iv), para $t\in[t_0,t_0+\beta)$, temos

$$
\begin{aligned}
|x(t)| &\leq |\phi(0)|+\left|\int_{t_0}^t f(s,x_s)\,ds\right|+\left|\sum_{k;t_k\in(t_0,t]}I(t_k,x_{t_k^-})\right|\\
&\leq |\phi(0)|+\int_{t_0}^t|f(s,x_s)|\,ds+\sum_{k;t_k\in(t_0,t]}|I(t_k,x_{t_k^-})|\\
&\leq B_4+\int_{t_0}^t(h_1(s)+h_2(s)\,\|x_s\|)\,ds\\
&\leq B_4+B_1+\int_{t_0}^t h_2(s)\,\|x_s\|\,ds.
\end{aligned}
$$

Portanto

$$\|x_t\|\leq B_4+B_1+B_3+\int_{t_0}^t h_2(s)\,\|x_s\|\,ds,\qquad\forall\, t\in[t_0,t_0+\beta). \tag{1.25}$$

Definimos $g(t)=\|x_t\|$, $t\in[t_0,t_0+\beta)$, e tomamos $0<\beta_1<\beta$. Então, pelo Lema 1.16, $g\in PC([t_0,t_0+\beta_1],\mathbb{R}_+)$. Além disso, vale

$$g(t) \leq B_4 + B_1 + B_3 + \int_{t_0}^{t_0+\beta_1} g(s)h_2(s)\,ds, \qquad t \in [t_0, t_0+\beta_1]. \tag{1.26}$$

Daí, pela Desigualdade de Gronwall (Lema 1.15), temos

$$g(t) \leq (B_4 + B_1 + B_3)\exp\left(\int_{t_0}^{t} h_2(s)\,ds\right) \leq (B_4 + B_1 + B_3)\exp(B_2).$$

Seja $B = (B_4 + B_1 + B_3)\exp(B_2)$. Então $g(t) \leq B$, para todo $t \in [t_0, t_0+\beta_1]$. Por (1.25), podemos concluir que $\|x_t\| \leq B$ para $t \in [t_0, t_0+\beta_1]$, ou seja,

$$|x(t)| \leq B, \quad t \in [t_0 - r, t_0 + \beta_1]. \tag{1.27}$$

Como (1.27) vale para qualquer β_1 arbitrariamente perto de β, então (1.27) está satisfeita para $t \in [t_0 - r, t_0 + \beta]$, isto é,

$$|x(t)| \leq B, \quad t \in [t_0 - r, t_0 + \beta].$$

Portanto a solução x é limitada, o que é uma contradição. Isto prova o teorema. ■

Observação 1.2. Observemos que a hipótese (iv) pode ser enfraquecida. Poderíamos substituí-la pela seguinte hipótese:

(iv') Existem funções h_1, $h_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ localmente Lebesgue integráveis tais que para todo $(t,\psi) \in \mathbb{R}_+ \times PC([-r,0],\mathbb{R}^n)$, vale

$$\left|\int_{t_0}^{t} f(s,\psi)\,ds\right| \leq \int_{t_0}^{t} \left(h_1(s) + h_2(s)\|\psi\|\right)\,ds.$$

Desde que assumíssemos as condições (i'), (ii) e (iii'), pela prova do Teorema 1.17, notamos que (iv') seria suficiente, com a mesma demonstração, para a existência global de uma solução fraca.

Vamos prosseguir com nossa exposição a fim de apresentarmos um teorema que garante a unicidade de solução de (1.6)-(1.7). Antes, porém, apresentaremos a definição de solução única deste problema.

Definição 1.18. *Uma solução $x = x(t_0,\phi)$ de* (1.6)-(1.7) *é dita única, se dada qualquer outra solução $y = y(t_0,\phi)$ de* (1.6)-(1.7)*, então $x(t) = y(t)$ sobre o intervalo comum de existência.*

Para a prova da unicidade de soluções de (1.6)-(1.7), precisamos supor que

(v) $f : J \times PC([-r, 0], D) \to \mathbb{R}^n$ é localmente Lipschtiziana em ψ, isto é, para cada $t_0 \in J$ e $\alpha > 0$, onde $[t_0, t_0 + \alpha] \subset J$, e para cada compacto $F \subset D$, existe uma constante $L > 0$ tal que

$$|f(t, \psi_1) - f(t, \psi_2)| \leq L\|\psi_1 - \psi_2\|,$$

para quaisquer $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$ e $\psi_1, \psi_2 \in PC([-r, 0], F)$.

Observação 1.3. Observemos que a hipótese (v) implica que (ii) está satisfeita. De fato, se f é localmente Lipschtiziana em ψ, então f também é contínua em ψ. Além disso, se supormos que f satisfaz as propriedades (i) e (v), então ela também satisfaz (iii), pois $|f(t, \psi)| \leq L\|\psi\| + |f(t, 0)|$ para $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$, onde $\|\psi\| \leq \sup\{|z|;\ z \in F\}$ e $|f(t, 0)|$ é limitada superiormente por uma constante, já que $f(t, 0)$ é uma função contínua por partes em t e, portanto, limitada. Logo, se assumimos as condições (i) e (v) sobre f, então, pelo Teorema 1.12, podemos garantir a existência de uma solução local de (1.6)-(1.7).

Teorema 1.19. (Unicidade) *Suponhamos que f satisfaça as condições (i) e (v). Se existir uma solução de (1.6)-(1.7) em $[t_0 - r, t_0 + \alpha)$, onde $0 < \alpha \leq \infty$ e $[t_0, t_0 + \alpha) \subset J$, então ela é única.*

Demonstração: Suponhamos que $x = x(t_0, \phi)$ e $y = y(t_0, \phi)$ sejam duas soluções de (1.6)-(1.7) em $[t_0 - r, t_0 + \alpha)$, onde $0 < \alpha \leq \infty$ e $[t_0, t_0 + \alpha) \subset J$, as quais existem pelo Observação 1.3. Suponhamos, também, que x seja diferente de y. Como $x(t) = y(t) = \phi(t - t_0)$ para $t \in [t_0 - r, t_0]$, então existe algum $t \in (t_0, t_0 + \alpha)$ para o qual $x(t) \neq y(t)$. Definimos

$$\tau_1 = \inf\{t \in (t_0, t_0 + \beta);\ x(t) \neq y(t)\}.$$

Então $\tau_1 \in [t_0, t_0 + \alpha)$ e $x(t) = y(t)$, para $t \in [t_0 - r, \tau_1)$. Se $\tau_1 > t_0$ e τ_1 não é um instante de impulso t_k para qualquer $k \in \mathbb{N}$, então $x(\tau_1) = x(\tau_1^-) = y(\tau_1^-) = y(\tau_1)$, enquanto que, se $\tau_1 > t_0$ e $\tau_1 = t_k$ para algum k, então $x(\tau_1) = x(\tau_1^-) + I(\tau_1, x_{\tau_1^-}) = y(\tau_1^-) + I(\tau_1, y_{\tau_1^-}) = y(\tau_1)$. Logo $x(t) = y(t)$ para todo $t \in [t_0 - r, \tau_1]$.

Seja $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $\tau_1 + \varepsilon \leq t_0 + \alpha$ e $t_k \notin (\tau_1, \tau_1 + \varepsilon]$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Pela fórmula integral dada no Lema 1.9, temos

$$x(t) - y(t) = \int_{t_0}^{t} [f(s, x_s) - f(s, y_s)]\, ds, \tag{1.28}$$

para $t \in [\tau_1, \tau_1 + \varepsilon]$.

Sejam $S = \{x(t) - y(t);\ \ t \in [t_0 - r, \tau_1 + \varepsilon]\}$ e $F = \overline{S}$ o fecho de S. Então F é um subconjunto compacto de D. Como f é localmente Lipschitziana com relação à sua segunda variável, existe uma constante $L > 0$ tal que

$$|f(t, \psi_1) - f(t, \psi_2)| \leq L\|\psi_1 - \psi_2\|,$$

para quaisquer $t \in [t_0 - r, \tau_1 + \varepsilon]$ e $\psi_1, \psi_2 \in PC([-r, 0], F)$. Seja $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que $\delta < \min\{\varepsilon, \frac{1}{2L}\}$. Então, para todo $t \in [\tau_1, \tau_1 + \delta]$, temos $x_t, y_t \in PC([-r, 0], F)$ e de (1.28), obtemos

$$\begin{aligned}
|x(t) - y(t)| &\leq \int_{\tau_1}^{t} |f(s, x_s) - f(s, y_s)|\, ds \leq \int_{\tau_1}^{t} L\, \|x_s - y_s\|\, ds \\
&\leq L \int_{\tau_1}^{t} \left(\sup_{u \in [\tau_1, s]} |x(u) - y(u)| \right) ds \\
&\leq L \int_{\tau_1}^{\tau_1 + \delta} \left(\sup_{u \in [\tau_1, \tau_1 + \delta]} |x(u) - y(u)| \right) ds \\
&= L\, \delta \sup_{u \in [\tau_1, \tau_1 + \delta]} |x(u) - y(u)| \\
&\leq \frac{1}{2} \sup_{u \in [\tau_1, \tau_1 + \delta]} |x(u) - y(u)| = 0, \qquad t \in [\tau_1, \tau_1 + \delta],
\end{aligned}$$

já que não existe momento de impulso em $[\tau_1, \tau_1 + \delta]$. Isto implica que $x(t) = y(t)$, para $t \in [\tau_1, \tau_1 + \delta]$, o que contradiz a definição de τ_1 e conclui a prova. ■

Observação 1.4. Poderíamos obter o mesmo resultado sobre a unicidade de soluções (no sentido fraco), se considerássemos as hipóteses (i'), (ii) e (iii') e se substituíssemos a hipótese (v) por:

(v') Para cada conjunto compacto $F \subset D$, existe uma função localmente Lebesgue integrável $L_F(t)$ tal que, para quaisquer $t_1, t_2 \in [t_0, t_0 + \alpha]$ e $\psi_1, \psi_2 \in PC([-r, 0], F)$, vale

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} [f(s, \psi_1(s)) - f(s, \psi_2(s))]\, ds \right| \leq \int_{t_1}^{t_2} L_F(s)\, \|\phi_1 - \psi_2\|\, ds.$$

Observemos que a hipótese (v') é mais fraca que (v) e implica que (iv') está satisfeita. Com estas condições, podemos provar o Teorema 1.19 de forma análoga à demonstração original.

Agora, iremos nos dedicar ao estudo da dependência contínua de soluções do problema impulsivo (1.6)-(1.7) com respeito às condições iniciais. Estes resultados foram extraídos de [23], bem como a discussão que apresentamos a seguir.

Uma maneira de se definir a noção de dependência contínua é a seguinte. Seja $(t_0, \phi) \in J \times PC([-r, 0], D)$ e suponhamos que $x = x(t_0, \phi)$ seja uma solução de (1.6)-(1.7) em $[t_0 - r, t_0 + \alpha]$ para algum $\alpha > 0$ tal que $[t_0, t_0 + \alpha] \subset J$. Para todo $\varepsilon > 0$, existe algum $\delta > 0$ tal que se $(t_0^*, \phi^*) \in J \times PC([-r, 0], D)$, onde $|t_0 - t_0^*| \leq \delta$ e $\|\phi - \phi^*\| \leq \delta$, e se $y = y(t_0^*, \phi^*)$ é uma solução de (1.6)-(1.7), então y existe em $[t_0^* - r, t_0 + \alpha]$ ou pode ser estendida a este intervalo e $|x(t) - y(t)| \leq \varepsilon$, para todo $t \in [\bar{t} - r, t_0 + \alpha]$, onde $\bar{t} = \max\{t_0, t_0^*\}$. Esta é, essencialmente, a definição dada por Hale e Lunel em [12] em seus estudos sobre dependência contínua de EDFRs (veja o Teorema 1.4 enunciado na primeira seção deste capítulo).

Quando δ, da definição de dependência contínua dada acima, também depende do valor particular de t no intervalo $[\bar{t} - r, t_0 + \alpha]$, a noção de dependência contínua se torna mais fraca. Neste caso, toda solução $y = y(t_0^*, \phi^*)$ de (1.6)-(1.7) satisfazendo $|t_0 - t_0^*| \leq \delta$ e $\|\phi - \phi^*\| \leq \delta$ é continuável até o instante t e, neste instante particular, temos $|x(t) - y(t)| \leq \varepsilon$.

Primeiramente, notemos que se $t_0^* \neq t_0$ na definição de dependência contínua, então, devido às descontinuidades de x, não podemos ter $|x(t) - y(t)| \leq \varepsilon$ para $t \in [\bar{t} - r, \bar{t}]$, isto é, não vale $\|x_{\bar{t}} - y_{\bar{t}}\| \leq \varepsilon$, mesmo tendo a desigualdade esperada para $t \in [\bar{t}, t_0 + \alpha]$. De fato, se ϕ tivesse uma ou mais descontinuidades, digamos nos pontos $-r < s_1 < s_2 < \cdots < s_m \leq 0$ e pudéssemos escolher $\phi^* = \phi$, então estaríamos interessados na dependência contínua com respeito à t_0. Assim $t_0^* \to t_0$ e $\|x_{\bar{t}} - y_{\bar{t}}\|$ não tenderia a zero necessariamente. Por outro lado, não teríamos este problema, se $t_0^* = t_0$ e considerássemos somente a dependência contínua com respeito à função inicial ϕ.

Agora fixemos uma função inicial e vamos perturbar o instante inicial. Uma solução $y = y(t_0^*, \phi)$ não pode estar perto de uma solução dada $x = x(t_0, \phi)$ sobre o intervalo $[\bar{t} - r, \bar{t}]$, onde $\bar{t} = \max\{t_0, t_0^*\}$, independente de quão perto t_0^* esteja de t_0. Outra observação importante é que não podemos esperar que soluções de (1.6)-(1.7) dependam continuamente de t_0, se t_0 é um instante de impulso. Se $t_0 = t_k$ para algum k, então pela nossa definição de solução de (1.6)-(1.7), não podemos considerar uma solução $x = x(t_0, \phi)$ que sofre um impulso instantâneo no instante inicial t_0. Além disso, se t_0^* for escolhido de forma que $0 < t_0 - t_0^* \leq \delta$ para um $\delta > 0$ arbitrariamente pequeno, então a solução correspondente $y = y(t_0^*, \phi)$ poderia sofrer impulso em $t = t_0^*$ e, neste caso, a solução y poderia se afastar muito de x nos instantes $t \geq t_0$. Mesmo se modificássemos a definição de dependência contínua de (1.6)-(1.7) excluindo a possibilidade de haver impulso no instante inicial, ainda assim não teríamos a dependência contínua com relação a t_0, como podemos observar nos exemplos a seguir.

Um dos problemas para estabelecermos a dependência contínua com relação a t_0 vem da função impulsiva I. Em geral, somente podemos esperar que soluções de (1.6)-(1.7) dependam continuamente de t_0, se a função I não envolver retardos. Para ilustrarmos este fato, consideremos o exemplo a seguir.

Exemplo 1.20. [veja [23], p. 489] Consideremos a equação impulsiva

$$\begin{aligned} x'(t) &= 0, && t \neq k, \\ \Delta x(t) &= x(t-1), && t = k, \end{aligned} \tag{1.29}$$

onde $k = 1, 2, \ldots$. Notemos que os retardos estão presentes apenas no operador de impulso. Consideremos a função inicial ϕ dada por

$$\phi(s) = \begin{cases} 0, & s \in [-1, 0), \\ 1, & s = 0. \end{cases} \tag{1.30}$$

Sendo $t_0 = 0$ e resolvendo (1.29)-(1.30), encontramos

$$x(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 1], \\ 2, & t \in [1, 2). \end{cases} \tag{1.31}$$

Por outro lado, para $\delta > 0$ suficientemente pequeno, se $t_0^* = \delta$ e $y = x(\delta, \phi)$, então $y(t) = 1$, para todo $t \in [\delta, 2)$, é solução de (1.29)-(1.30). Neste caso, estas soluções não estão perto de nenhuma outra solução do problema impulsivo dado. No entanto, este problema pode ser contornado se considerarmos que o instante inicial t_0 não está em nenhum intervalo da forma $[t_k - r, t_k]$. É claro que isto se torna muito restrito, se o retardo r é relativamente grande comparado com a diferença

$t_{k-1} - t_k$, $k = 1, 2, \ldots$. □

Sabemos que soluções de equações diferenciais retardadas não-impulsivas dependem continuamente do dado inicial (t_0, ϕ), se f é uma função contínua e $f(t, \psi)$ satisfaz uma condição local de Lipschitz em ψ. No caso mais geral, obtemos a dependência contínua sob a hipótese de que f é uma função contínua e que as soluções do sistema são únicas [12]. Infelizmente, estes fatos não permanecem válidos quando passamos para o espaço das funções contínuas por partes. Não podemos mais garantir a dependência contínua com respeito à t_0 sob tais condições. Podemos constatar isto com um exemplo de uma função f que satisfaz as condições (i) e (v) assumidas nesta seção. Com estas hipóteses, o Teorema 1.19 assegura a unicidade de solução de (1.6) (sem a ação de impulsos).

Exemplo 1.21. [veja [23], p. 490] Consideremos a equação diferencial retardada

$$x'(t) = f(t, x_t), \tag{1.32}$$

onde $f : \mathbb{R}_+ \times PC([-1, 0], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ é dada por

$$f(t, \psi) = \begin{cases} \psi(-t), & t \in [0, 1], \\ \psi(-1), & t \in (1, \infty). \end{cases} \tag{1.33}$$

Assim, a equação (1.32) pode ser reescrita da seguinte forma

$$x'(t) = x(t - h(t)), \tag{1.34}$$

onde $h(t)$ é definida por

$$h(t) = \begin{cases} t, & t \in [0, 1], \\ 1, & t \in (1, \infty). \end{cases} \tag{1.35}$$

É fácil ver que h é contínua, $0 \leq h(t) \leq 1$, para todo $t \in \mathbb{R}_+$, e $t - h(t)$ é não-decrescente em $\mathbb{R}_+$. Também é verdade que $f(t) = x(t - h(t))$ satisfaz as condições (i), (ii), (iii) e (v).

Agora, seja a função inicial definida por

$$\phi(s) = \begin{cases} 1, & s \in [-1, -\rho), \\ 0, & s \in [-\rho, 0], \end{cases} \tag{1.36}$$

onde $0 \leq \rho < 1$ é uma constante. Consideremos, inicialmente, o instante inicial $t_0 = \rho$. Resolvendo a equação (1.34), obtemos $x(t) = 0$, para todo $t \geq 0$. Agora se $0 < \delta < 1 - \rho$ e $t_0^* = \rho + \delta$, então resolvendo (1.34)-(1.36) encontramos $y(t) = t - (\rho + \delta)$ como solução. Em particular, $y(1) = 1 - (\rho + \delta)$. Quando $\delta \to 0^+$, então $y(1) \to 1 - \rho$, ou seja, $y(1)$ não se aproxima de $x(1) = 0$. Logo as soluções de (1.34) não dependem continuamente de t_0. $\square$

Continuando nossa discussão sobre os aspectos da dependência contínua em equações diferenciais retardadas impulsivas, convém mencionarmos outro fato importante que pode ser notado no exemplo que acabamos de ver. A equação (1.34) é um exemplo típico de uma equação em que o método dos passos poderia ser aplicado sobre qualquer intervalo da forma $[\rho, \infty)$, onde $\rho \geq 0$. Este exemplo também ilustra o fato de que não é tão simples passarmos da teoria de dependência contínua de soluções de equações diferenciais ordinárias para uma equação diferencial retardada impulsiva. Infelizmente, a dependência contínua de soluções com respeito ao instante inicial, ou mais geralmente, com relação aos dados iniciais, não é uma propriedade que possa ser transmitida para equações mais gerais como o sistema (1.6)-(1.7), mesmo sob fortes hipóteses de suavidade sobre f.

Alguns resultados estabelecem a dependência contínua de soluções com respeito ao instante inicial para classes de funções muito restritas. Obviamente, funções suaves que não envolvem retardados podem possuir esta propriedade. Além disso, se nos restringirmos à classe de funções iniciais contínuas, ao conjunto de instantes inicias que não são momentos de impulsos e assumirmos que I não envolve retardos, é possível mostrarmos a dependência contínua com relação ao instante inicial. Mas, a dependência contínua de soluções de (1.6)-(1.7) com respeito ao instante inicial não vale em geral. Por outro lado, a dependência contínua com respeito à função inicial pode ser obtida desde que algumas hipóteses de suavidade sobre f e I sejam assumidas.

A seguir, vamos introduzir um teorema que estabelece a dependência contínua com respeito à função inicial ϕ. Mas antes, formalizaremos a definição de dependência contínua de soluções de (1.6)-(1.7) com respeito à função inicial.

Definição 1.22. *As soluções de* (1.6)-(1.7) *são continuamente dependentes da função inicial se para toda solução* $x = x(t_0, \phi)$ *de* (1.6)-(1.7) *definida sobre o intervalo* $[t_0 - r, t_0 + \alpha]$*, onde* $(t_0, \phi) \in J \times PC([-r, 0], D)$*,* $\alpha > 0$*, e* $[t_0, t_0 + \alpha] \subset J$*, e para todo* $\varepsilon > 0$*, existe algum* $\delta > 0$ *tal* *que para $\phi^* \in PC([-r,0],D)$ com $\|\phi-\phi^*\| \leq \delta$, se $y = y(t_0,\phi^*)$ é uma solução de (1.6)-(1.7), então y está definida ou pode ser continuada a $[t_0-r,t_0+\alpha]$ e $|x(t)-y(t)| \leq \varepsilon$, para todo $t \in [t_0-r,t_0+\alpha]$.*

Para soluções definidas em intervalos semi-abertos à direita da forma $[t_0-r,t_0+\alpha)$, a Definição 1.22 continua válida. Basta restringirmos x ao intervalo $[t_0-r,t_0+\alpha_1]$, onde $0<\alpha_1<\alpha$.

Provaremos que soluções de (1.6) dependem continuamente da função inicial e, depois, aplicaremos este resultado para provarmos um teorema correspondente para o problema impulsivo (1.6)-(1.7). Estes teoremas correspondem, respectivamente, aos Teoremas 4.1 e 4.2 de [23].

Teorema 1.23. *Suponhamos que f satisfaça as condições (i) e (v). Então as soluções de (1.6) dependem continuamente da função inicial.*

Demonstração: Seja $(t_0,\phi) \in J \times PC([-r,0],D)$ e suponhamos que $x = x(t_0,\phi)$ seja uma solução de (1.6) definida em $[t_0-r,t_0+\alpha]$, onde $\alpha>0$ e $[t_0,t_0+\alpha] \subset J$.

Seja $\varepsilon>0$ e suponhamos, sem perda de generalidade, que ε seja escolhido suficientemente pequeno tal que, para algum $t \in [t_0-r,t_0+\alpha]$, o conjunto $S = \{z \in \mathbb{R}^n;\ |x(t)-z| \leq \varepsilon\}$ esteja contido em algum subconjunto compacto F de D. Seja $L>0$ a constante de Lipschitz para f associada ao intervalo $[t_0,t_0+\alpha]$ e ao conjunto compacto $F \subset D$. Definimos $\delta = e^{-L\alpha}\varepsilon/(\alpha L+1)$ e notemos que $0<\delta<\varepsilon$.

Agora, seja $\phi^* \in PC([-r,0],D)$ satisfazendo $\|\phi-\phi^*\| \leq \delta$ e suponhamos que $y = y(t_0,\phi^*)$ seja uma solução de (1.6) definida em $[t_0-r,t_0+\beta]$ para algum $\beta>0$ tal que $[t_0,t_0+\beta] \subset J$. Pelo Teorema 1.14, podemos estender a solução y ao intervalo maximal de existência $[t_0-r,t_0+\alpha_1)$ para algum $\beta<\alpha_1 \leq \infty$. Precisamos provar que se $\alpha_1>\alpha$, então y pode ser continuada pelo menos ao intervalo $[t_0-r,t_0+\alpha]$ e que $|x(t)-y(t)| \leq \varepsilon$, para todo $t \in [t_0-r,t_0+\alpha]$.

Seja $\alpha_1 \leq \alpha$. Então, pelo Teorema 1.14, sabemos que existe um instante $t \in [t_0-r,t_0+\alpha_1)$ tal que $y(t) \notin F$ e, em particular, $|x(t)-y(t)| \geq \varepsilon$. Mostraremos que $|x(t)-y(t)| \leq \varepsilon$, para todo $t \in [t_0-r,t_0+\alpha_1) \cap [t_0-r,t_0+\alpha)$. Isto implicará que $y(t) \in F$ para todo t e, portanto, $\alpha_1>\alpha$.

Suponhamos, por contradição, que $|x(t)-y(t)|>\varepsilon$ para algum $t\in[t_0-r,t_0+\alpha_1)\cap[t_0-r,t_0+\alpha)$. Definimos

$$t^*=\inf\{t\in[t_0-r,t_0+\alpha_1)\cap[t_0-r,t_0+\alpha];\ |x(t)-y(t)|>\varepsilon\}.$$

Para $t\in[t_0-r,t_0]$, temos $|x(t)-y(t)|=|\phi(t-t_0)-\phi^*(t-t_0)|\le\delta<\varepsilon$. Como as soluções de (1.6) são contínuas quando restritas ao intervalo $[t_0,t_0+\alpha_1)\cap[t_0,t_0+\alpha]$, obtemos $t_0<t^*<\min\{t_0+\alpha,t_0+\alpha_1\}$, $|x(t^*)-y(t^*)|=\varepsilon$ e $|x(t)-y(t)|\le\varepsilon$ para $t\in[t_0-r,t^*]$. Logo, $x_t,y_t\in PC([-r,0],F)$ para todo $t\in[t_0,t^*]$.

Para $t\in[t_0,t^*]$, temos

$$\begin{aligned}|x(t)-y(t)| &\le |\phi(0)-\phi^*(0)|+\int_{t_0}^t|f(s,x_s)-f(s,y_s)|\,ds\\ &\le |\phi(0)-\phi^*(0)|+\int_{t_0}^t L\|x_s-y_s\|\,ds\\ &\le |\phi(0)-\phi^*(0)|+\int_{t_0}^t\left(\|\phi-\phi^*\|+\sup_{u\in[t_0,s]}|x(u)-y(u)|\right)ds.\end{aligned}\tag{1.37}$$

Sejam $g(t_0)=|\phi(0)-\phi^*(0)|$ e $g(t)=\sup_{u\in[t_0,t]}|x(u)-y(u)|$, para $t\in(t_0,t^*]$. Então $g\in C([t_0,t^*],\mathbb{R}_+)$. Como o lado direito de (1.37) é não-decrescente em t, obtemos

$$\begin{aligned}g(t) &\le |\phi(0)-\phi^*(0)|+L\int_{t_0}^t\left(\|\phi-\phi^*\|+\sup_{u\in[t_0,s]}|x(u)-y(u)|\right)ds\\ &\le |\phi(0)-\phi^*(0)|+\alpha L\|\phi-\phi^*\|+L\int_{t_0}^t g(s)\,ds\\ &\le (\alpha L+1)\delta+L\int_{t_0}^t g(s)\,ds,\end{aligned}\tag{1.38}$$

para $t\in[t_0,t^*]$. Logo, pela Desigualdade de Gronwall (Lema 1.15), vale

$$g(t)\le(\alpha L+1)\delta e^{L(t-t_0)}=e^{L(t-\alpha-t_0)}\varepsilon,\quad \forall\,t\in[t_0,t^*].\tag{1.39}$$

Sendo $t^*<t_0+\alpha$, então $g(t^*)\le e^{L(t^*-\alpha-t_0)}\varepsilon<\varepsilon$. Isto implica que $\sup_{u\in[t_0,t^*]}|x(u)-y(u)|<\varepsilon$. Mas isto contradiz o fato de que $|x(t^*)-y(t^*)|=\varepsilon$, o que conclui a prova do teorema. ■

A seguir, provaremos este mesmo resultado para a equação (1.6) sujeita à ação impulsiva (1.7).

Teorema 1.24. (Dependência Contínua) *Suponhamos que f satisfaça as condições (i) e (v). Além disso, suponhamos que $I(t,\psi)$ seja contínuo em ψ e $\psi(0)+I(t_k,\psi)\in D$, para toda $\psi\in PC([-r,0],D)$ tal que $\psi(0^-)=\psi(0)$, $k=1,2,\dots$. Então todas as soluções de (1.6)-(1.7) dependem continuamente da função inicial.*

Demonstração: Seja $(t_0,\phi)\in J\times PC([-r,0],D)$ e suponhamos que $x=x(t_0,\phi)$ seja uma solução de (1.6)-(1.7) definida em $[t_0-r,t_0+\alpha]$, onde $\alpha>0$ e $[t_0,t_0+\alpha]\subset J$. Se $t_0+\alpha<t_1$, então x é simplesmente uma solução de (1.6) (sem impulso) e, pelo Teorema 1.23, x depende continuamente de ϕ.

Suponhamos que $t_0+\alpha=t_k$, para algum $k\in\mathbb{N}$. Seja $\varepsilon>0$. Sendo $I(t,\psi)$ uma função contínua em ψ, então existe algum $0<\bar\delta\le\frac{\varepsilon}{2}$ tal que, para $\psi\in PC([-r,0],D)$, $\|x_{t_k^-}-\psi\|\le\bar\delta$, implica

$$|I(t_k,x_{t_k^-})-I(t_k,\psi)|\le\frac{\varepsilon}{2}.$$

Podemos definir $x(t_k)=x(t_k^-)$ e, desta maneira, x é contínua em $[t_0,t_k]$. Logo, podemos aplicar o Teorema 1.23, sendo δ e ε dados pela Definição 1.22 com ε substituído por $\bar\delta$.

Seja $\phi^*\in PC([-r,0],D)$ tal que $\|\phi-\phi^*\|\le\delta$. Então toda solução $y=y(t_0,\phi^*)$ de (1.6)-(1.7) existe ou pode ser estendida como uma solução de (1.6) ao intervalo $[t_0-r,t_k]$ e, sobre o intervalo $[t_0-r,t_k)$, vale $|x(t)-y(t)|\le\bar\delta$. Definindo $y(t_k)=y(t_k^-)+I(t_k,y_{t_k^-})$ temos, então, uma solução de (1.6)-(1.7) a qual é única pelo Teorema 1.19.

Como $|x(t_k)-y(t_k)|\le\bar\delta\le\varepsilon$ para $t\in[t_0-r,t_k)$, então $\|x_{t_k^-}-y_{t_k^-}\|\le\bar\delta$. Em $t=t_k$ temos

$$\begin{aligned}|x(t_k^-)-y(t_k^-)| &= |x(t_k^-)+I(t_k,x_{t_k^-})-y(t_k^-)-I(t_k,y_{t_k^-})|\\ &\le |x(t_k^-)-y(t_k^-)|+|I(t_k,x_{t_k^-})-I(t_k,y_{t_k^-})|\\ &\le \bar\delta+\frac{\varepsilon}{2}\le\varepsilon.\end{aligned}$$

Logo, para todo $t\in[t_0-r,t_k]$, obtemos $|x(t)-y(t)|\le\varepsilon$, e isto conclui o caso em que $t_0+\alpha=t_k$.

Suponhamos, agora, que $t_{k+m-1}<t_0+\alpha\le t_{k+m}$ para algum inteiro positivo m. Para a solução x restrita à $[t_{k+m-1}-r,t_0+\alpha]$, consideremos t_{k+m-1} e $x_{t_{k+m-1}}$ como sendo, respectivamente, o instante inicial e a função inicial. Dada $\psi^*\in PC([-r,0],D)$, seja $\delta_1>0$ tal que $\|x_{t_{k+m-1}}-\phi^*\|\le\delta_1$. Então toda solução $y=y(t_{k+m-1},\phi^*)$ de (1.6)-(1.7) existe ou pode ser continuada a $[t_{k+m-1}-r,t_0+\alpha]$. A existência de δ_1 segue do que mostramos anteriormente.

Analogamente, se $m \geq 2$, então para $i = 1, 2, \ldots, m-1$, consideremos x restrita ao intervalo $[t_{k+m-i-1} - r, t_{k+m-i}]$, onde $t_{k+m-i-1}$ e $x_{t_{k+m-i-1}}$ são condições iniciais. Seja $\delta_{i+1} > 0$ definido indutivamente tal que $\delta_{i+1} < \delta_i$ e $\|x_{t_{k+m-i-1}} - \phi^*\| \leq \delta_{i+1}$, onde $\phi^* \in PC([-r, 0], D)$ é dada. Então toda solução $y = y(t_{k+m-i-1}, \phi^*)$ de (1.6)-(1.7) ou já existe e é maximal ou pode ser continuada à $[t_{k+m-i-1} - r, t_{k+m-i}]$ e irá satisfazer $|x(t) - y(t)| \leq \delta_i$, para $t \in [t_{k+m-i-1} - r, t_{k+m-i}]$.

Finalmente, seja $\delta > 0$ escolhido de maneira que dado $\phi^* \in PC([-r, 0], D)$ satisfazendo $\|\phi - \phi^*\| \leq \delta$ e dada uma solução $y = y(t_0, \phi^*)$ de (1.6)-(1.7), então ou y existe e é maximal ou pode ser estendida a $[t_0 - r, t_k]$ e, neste caso, $|x(t) - y(t)| \leq \delta_m$, para todo t neste intervalo.

Com esta escolha de δ, podemos mostrar que toda solução $y = y(t_0, \phi^*)$ de (1.6)-(1.7), com $\phi^* \in PC([-r, 0], D)$ e $\|\phi - \phi^*\| \leq \delta$, pode ser continuada ao intervalo $[t_0 - r, t_0 + \alpha]$ e satisfaz $|x(t) - y(t)| \leq \varepsilon$, para todo $t \in [t_0 - r, t_0 + \alpha]$. Isto se dá devido ao fato de que y pode ser continuada à $[t_0 - r, t_k]$ e, neste intervalo, $|x(t) - y(t)| \leq \varepsilon_m$. Em particular, $\|x_{t_k} - y_{t_k}\| \leq \varepsilon_m$. Logo, y pode ser continuada à $[t_0 - r, t_{k+1}]$ e $|x(t) - y(t)| \leq \varepsilon_{m-1}$, para todo $t \in [t_0 - r, t_{k+1}]$, ou se $m = 1$ e $t_0 + \alpha \leq t_{k+1}$, então y pode ser continuada à $[t_0 - r, t_0 + \alpha]$ e $|x(t) - y(t)| \leq \varepsilon$ para todo $t \in [t_0 - r, t_0 + \alpha]$. Repetindo este argumento $m - 1$ vezes, então y que pode ser continuada nos instantes de impulso t_{k+2}, t_{k+3}, $\ldots$, t_{k+m+1} e, portanto, até $t_0 + \alpha$. Sobre cada intervalo $[t_0 - r, t_{k+i}]$, vale $|x(t) - y(t)| \leq \delta_{m-i}$ e, finalmente, obtemos $|x(t) - y(t)| \leq \varepsilon$, para todo $t \in [t_0 - r, t_0 + \alpha]$. ∎

Em [9], estudamos a dependência contínua com respeito aos dados iniciais de dois tipos de sistemas de equações diferenciais retardadas com $N \geq 1$ retardos. Provamos que a solução nula depende "*exponencialmente*" do dado inicial (t_0, ϕ) através de impulsos apropriados. No capítulo 2, estendemos este resultado provando que a solução nula destes sistemas pode ser exponencialmente estabilizada por impulsos. Por se tratar de uma prova análoga, não trataremos da dependência contínua destas equações, pois basta restringir os resultados sobre estabilidade impulsiva em um certo intervalo $[t_0, T)$ (veja Observação 2.3).

1.3 EDFRs impulsivas - noções qualitativas

Uma das partes mais importantes da teoria qualitativa das equações diferenciais é a teoria de estabilidade. No próximo capítulo, visaremos o estudo da estabilidade de equações diferenciais retardadas com impulsos e, por este motivo, apresentaremos alguns conceitos de estabilidade a seguir.

Consideremos o problema impulsivo (1.6)-(1.7) e assumamos que $0 \in D$, $J = \mathbb{R}_+$, $f(t,0) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$, e $I(t_k, 0) = 0$ para todo $t_k \in \mathbb{R}_+$, $k \in \mathbb{N}$. Isto implica que $x(t) = 0$ é uma solução de (1.6)-(1.7). Baseados em [18] e em [20], vamos definir conceitos básicos de estabilidade para a solução nula de (1.6)-(1.7).

Definição 1.25. A solução nula $x(t) = 0$ do problema (1.6)-(1.7) é dita

(S) *estável*, se para todo $\varepsilon > 0$ e $t_0 \in \mathbb{R}_+$, existe algum $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ tal que se $\phi \in PC([-r,0], D)$ com $\|\phi\| \leq \delta$ e $x(t) = x(t; t_0, \phi)$ é uma solução de (1.6)-(1.7), então $x(t)$ está definida e $|x(t)| \leq \varepsilon$, para todo $t \geq t_0$;

(US) *uniformemente estável*, se δ em (S) é independente de t_0;

(AS) *assintoticamente estável*, se (S) vale e para todo $t_0 \in \mathbb{R}_+$, existe algum $\eta = \eta(t_0) > 0$ tal que se $\phi \in PC([-r,0], D)$ com $\|\phi\| \leq \delta$, então $\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$;

(UAS) *uniformemente assintoticamente estável*, se (US) vale e existe algum $\eta > 0$ tal que para todo $\gamma > 0$, existe algum $T = T(\eta, \gamma) > 0$ tal que se $\phi \in PC([-r,0], D)$ com $\|\phi\| \leq \delta$, então $|x(t)| \leq \gamma$ para $t \geq t_0 + T$;

(ES) *exponencialmente estável* se, para toda condição inicial $x_{t_0} = \phi$, existem constantes positivas $\alpha > 0$ e $M \geq 1$ tais que

$$|x(t)| \leq M\|\phi\| \exp\left[-\alpha(t - t_0)\right], \qquad t \geq t_0.$$

(I) *instável*, se (S) não vale.

O conceito de estabilidade estabelecida em (S) é usualmente definida com as duas desigualdades $\|\phi\| \leq \delta$ e $|x(t; t_0, \phi)| \leq \varepsilon$ sendo substituídas pelas desigualdades restritas $\|\phi\| < \delta$ e

$|x(t; t_0, \phi)| < \varepsilon$ respectivamente. De fato, estas duas maneiras de definir estabilidade são equivalentes. Uma vantagem em não usarmos a desigualdade restrita é que quando lidamos com funções contínuas por partes observamos que se $\phi \in PC([-r, 0], D)$ e $|\phi(s)| < \delta$ para todo $s \in [-r, 0]$, então, de $\|\phi\| \leq \delta$, não podemos concluir que $\|\phi\| < \delta$. Além disso, se ϕ for contínua, então poderíamos afirmar que $\|\phi\| < \delta$. Por esta razão, preferimos definir (S) como está na Definição 1.25.

Estes conceitos também podem ser atribuídos às equações diferencias retardadas não-impulsivas, basta considerarmos o problema (1.6) (sem impulso) e supormos que $f(t, 0) = 0$, para todo $t \in \mathbb{R}_+$. Para mais informações, consulte [12].

Para estudarmos a estabilidade de uma equação diferencial, podemos utilizar funções de Lyapunov as quais nos permitem obter informações sobre a estabilidade sem conhecermos a solução.

No Capítulo 2, trabalharemos com certas equações diferenciais funcionais de segunda ordem com retardos e provaremos que existe uma sequência de impulsos que tornam a solução nula exponencialmente estável (ES). As funções de Lyapunov constituem as principais ferramentas na obtenção da prova deste resultado. Na verdade, aplicaremos o segundo método de Lyapunov.

O segundo método direto de Lyapunov é um método usado para estudarmos a estabilidade sem usarmos a forma explícita das soluções. Este método tenta obter informações diretamente pelo uso, juntamente com as equações diferenciais, de funções adequadas convenientemente chamadas de funções de Lyapunov.

No decorrer deste trabalho, o segundo método direto de Lyapunov designará funções $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ (chamadas funções de Lyapunov) com $V(t, 0) = 0$ tais que

(i) V é contínua em $[t_{k-1}, t_k) \times \mathbb{R}^n$ e para quaisquer $x \in \mathbb{R}^n$ e $t \in [t_{k-1}, t_k)$, $k \in \mathbb{N}$, o limite

$$\lim_{(t,y)\to(t_{k-1}^+, x)} V(t, y) = V(t_{k-1}, x),$$

existe;

(ii) $V(t, x)$ é continuamente diferenciável sobre $(t_{k-1}, t_k) \times \mathbb{R}^n$.

Definição 1.26. *Dada uma função* $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$*, a derivada superior à direita de* V *com respeito à* (1.6)-(1.7) *está definida por:*

$$D^+V(t, \psi(0)) = \lim_{h \to 0^+} \sup \frac{1}{h}[V(t+h, \psi(0) + hf(t, \psi)) - V(t, \psi(0))],$$

para todo $t \neq t_k$ *em* $\mathbb{R}_+$ *e* $\psi \in PC([-r, 0], \mathbb{R}^n)$*.*

O nosso objetivo nos próximos capítulos será investigar propriedades qualitativas das soluções de equações diferenciais com impulsos e retardos. Além da estabilidade, vamos investigar oscilação de soluções.

Agora, vamos definir uma solução oscilatória do problema impulsivo (1.6)-(1.7).

Definição 1.27. *Dizemos que uma função* $x(t)$ *é positiva no futuro (respectivamente negativa no futuro), se existe um número real* T *tal que* $x(t) > 0$ *(respectivamente* $x(t) < 0$*) para todo* $t \geq T$*.*

Definição 1.28. *Uma solução de* (1.6)-(1.7) *é dita não-oscilatória, se ela é positiva no futuro ou negativa no futuro. Caso contrário, ela é chamada oscilatória.*

No Capítulo 3, consideraremos uma das equações diferenciais retardadas estudadas no Capítulo 1 e provaremos que esta equação pode se tornar oscilatória pela imposição de controles de impulsos adequados.

CAPÍTULO

2

Estabilidade exponencial impulsiva

Inspirados por argumentos utilizados por Xiang Li e Peixuan Weng em [16], provamos em [9] que as soluções nulas de certas equações diferenciais de segunda ordem com retardo podem ser exponencialmente estabilizadas por impulsos sobre algum intervalo $[t_0, T)$, com $T > t_0$. Na verdade, provamos que a solução nula de cada uma destas equações depende continuamente das condições iniciais. Ainda em [9], provamos a existência local de solução dos problemas impulsivos por meio do Teorema do Ponto Fixo de Schaefer. A dependência contínua com relação aos dados iniciais foi obtida por meio de funções de Lyapunov.

Em [11], diante de resultados obtidos por Liu e Ballinger em [21], pudemos excluir algumas hipóteses de [9], sem perder a existência global de soluções, e obtivemos resultados mais gerais envolvendo estabilidade. Tais resultados estão apresentamos em [11].

Neste capítulo, vamos expor os resultados principais de [11]. Apresentaremos certas equações diferenciais retardadas de segunda ordem e, através de funções de Lyapunov, estabeleceremos resultados que garantem a estabilidade exponencial por controles de impulso da solução nula, isto é, impondo impulsos adequados em certos intervalos de tempos, todas as soluções da equação convergem exponencialmente para zero. Desta forma, exibiremos as equações estudadas em [9] e [11] e provaremos que a solução nula de cada uma destas equações pode ser estabilizada exponencialmente por impulsos, ou seja, soluções que estão “próximas” da solução nula convergem exponencialmente para zero por controles de impulsos adequados.

Além de [16], os resultados que apresentamos neste capítulo também generalizam os resultados de [24].

2.1 Introdução

Consideremos a seguinte equação diferencial retardada

$$\begin{cases} x''(t) + f(t, x(t), x'(t)) + g(t, x(t), x(t-\tau)) = 0, \quad t \geq t_0, \quad t \neq t_k, \quad k = 1, 2, \ldots \\ x_{t_0} = \varphi \\ x'(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$ é uma sequência monótona crescente ilimitada de números reais, $f, g : [t_0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas tais que $f(t, 0, 0) = g(t, 0, 0) = 0$ e $\varphi, \varphi' : [-\tau, 0] \to \mathbb{R}$ possuem pelo menos um número finito de descontinuidades as quais são de primeira espécie. Além disso, φ e φ' são contínuas à direita nestes pontos (de descontinuidade).

Também consideremos os impulsos nos instantes t_k, $k = 1, 2, \ldots$,

$$x(t_k) = I_k(x(t_k^-)) \quad \text{e} \quad x'(t_k) = J_k(x'(t_k^-)), \tag{2.2}$$

onde I_k, $J_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são contínuas e $I_k(0) = J_k(0) = 0$, $k \in \mathbb{N}$.

Assumiremos as seguintes hipóteses:

(H_1) Existe uma constante $F > 0$ tal que, para quaisquer $t \geq t_0$ e u, v em $\mathbb{R}$,

$$|f(t, u, v)| \leq F\,|\,u\,|.$$

(H_2) Existe uma constante $G > 0$ tal que, para quaisquer $t \geq t_0$ e u, v em $\mathbb{R}$,

$$|g(t,u,v)| \leq G\,|\,v\,|.$$

Agora, definimos uma solução do problema impulsivo (2.1)-(2.2).

Definição 2.1. *Uma função $x : [t_0 - \tau, t_0 + \alpha) \to \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, é dita uma solução do problema (2.1)-(2.2) com condição inicial (t_0, φ, y_0), se*

(i) $x(t)$ e $x'(t)$ são contínuas em $[t_0, t_0 + \alpha) \setminus \{t_k; k \in \mathbb{N}\}$, existem os limites laterais $x(t_k^-)$, $x'(t_k^-)$, $x(t_k^+)$, $x'(t_k^+)$ com $x(t_k^+) = x(t_k)$ e $x'(t_k^+) = x'(t_k)$, para cada $k \in \mathbb{N}$;

(ii) $x(t)$ satisfaz (2.1);

(iii) para cada $k \in \mathbb{N}$, $x(t_k)$ e $x'(t_k)$ satisfazem (2.2).

Denotamos por $x(t) = x(t; t_0, \varphi, y_0)$ a solução de (2.1)-(2.2) começando em (t_0, φ, y_0). Na observação a seguir, constataremos a existência de uma solução global de (2.1)-(2.2).

Observação 2.1. Definindo $y(t) = x'(t)$, a equação não-impulsiva em (2.1) pode ser transformada no seguinte sistema

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -g(t, x(t), x(t-\tau)) - f(t, x(t), y(t)), \quad t \geq t_0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Seja $H : [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$H(t, x_0, x_1, x_2) = g(t, x_0, x_1) + f(t, x_0, x_2).$$

Então, para todo $(t, \psi) \in [t_0, \infty) \times PC([-\tau, 0], \mathbb{R}^2)$, com $\psi = (\psi_1, \psi_2)$, podemos definir

$$h(t, \psi) = (\,\psi_2(0), -H(t, \psi_1(0), \psi_1(-\tau), \psi_2(0))\,)\,.$$

Sejam $z(t) = (x(t), y(t))$ e $z_t = (x_t, y_t)$. Então $z_t \in PC([-\tau, 0], \mathbb{R}^2)$ e

$$\begin{aligned} h(t, z_t) &= (\,y_t(0), -H(t, x_t(0), x_t(-\tau), y_t(0))\,) \\ &= (\,y(t), -g(t, x(t), x(t-\tau)) - f(t, x(t), y(t))\,). \end{aligned}$$

Por (2.2), vale $z(t_k) = (x(t_k), y(t_k)) = (I_k(x(t_k{}^-), J_k(x'(t_k{}^-)), k = 1, 2, \ldots$. Assim, o sistema (2.3)-(2.2) se reduz ao seguinte problema diferencial impulsivo de primeira ordem

$$\begin{cases} z'(t) = h(t, z_t), & t \geq t_0, \quad t \neq t_k, \\ z(t_k) = N_k(z(t_k{}^-)), \end{cases} \tag{2.4}$$

onde $N_k(z(t_k{}^-)) = (I_k(x(t_k{}^-), J_k(x'(t_k{}^-))$. Portanto, o problema de segunda ordem (2.1)-(2.2) pode ser visto como o problema de primeira ordem (2.4). Pelas hipóteses (H_1) e (H_2), a função $h : [t_0, \infty) \times PC([-\tau, 0], \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^2$ é contínua e satisfaz

$$|h(t, \psi)| \leq (1 + F + G)\|\psi\|.$$

Logo, pelo Teorema 1.17, existe uma solução de (2.4) que pode ser estendida ao intervalo $[t_0 - \tau, \infty)$. Assim, existe uma solução de (2.1)-(2.2) em $[t_0 - \tau, \infty)$.

Notemos que as condições $g(t, 0, 0) = f(t, 0, 0) = 0$ e $I_k(0) = J_k(0) = 0$ implicam que $x \equiv 0$ é uma solução de (2.1)-(2.2) com $\varphi \equiv 0$ e $y_0 = 0$.

A seguir, definimos estabilidade exponencial por impulsos da solução nula da equação (2.1).

Definição 2.2. *A solução nula da equação* (2.1) *é exponencialmente estabilizada por impulsos, se existem* $\alpha > 0$, *uma sequência* $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ *com*

$$t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k \longrightarrow \infty \quad \textit{quando} \quad k \longrightarrow \infty,$$

e sequências de funções, $\{I_k\}$ *e* $\{J_k\}$ *tais que para todo* $\varepsilon > 0$, *existe um* $\delta > 0$ *tal que se a solução* $x(t)$ *de* (2.1)-(2.2) *satisfaz*

$$\sqrt{\|\varphi\|^2 + y_0{}^2} \leq \delta, \tag{2.5}$$

então

$$\sqrt{x^2(t) + x'^2(t)} \leq \varepsilon \exp[-\alpha(t - t_0)], \qquad t \geq t_0. \tag{2.6}$$

Em particular, quando a equação sofre os mesmos tipos de impulso em cada instante de impulso, isto é, quando os impulsos são periódicos, dizemos que trata-se da estabilidade exponencial impulsiva por impulsos periódicos.

Definição 2.3. *A solução nula da equação* (2.1) *é exponencialmente estabilizada por impulsos periódicos, se existem* $\alpha > 0$*, uma sequência* $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *com*

$$t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k \longrightarrow \infty \quad \textit{quando} \quad k \longrightarrow \infty,$$

e $t_k - t_{k-1} = c > 0$*, e sequências de funções,* $\{I_k\}$ *e* $\{J_k\}$ *tais que*

$$I_1(u) = \ldots = I_k(u) = \ldots, \quad k = 1, 2, \ldots, \forall\, u \in \mathbb{R}$$
$$J_1(u) = \ldots = J_k(u) = \ldots, \quad k = 1, 2, \ldots, \forall\, u \in \mathbb{R}$$

tal que para todo $\varepsilon > 0$*, existe um* $\delta > 0$ *tal que se a solução* $x(t)$ *de* (2.1)-(2.2) *satisfaz*

$$\sqrt{\|\varphi\|^2 + {y_0}^2} \leq \delta, \tag{2.7}$$

então

$$\sqrt{x^2(t) + x'^2(t)} \leq \varepsilon \exp[-\alpha(t - t_0)], \quad t \geq t_0. \tag{2.8}$$

2.2 Teoremas de estabilidade

Nesta seção, provaremos que a solução nula da equação (2.1) pode ser exponencialmente estabilizada por impulsos. Para motivarmos este resultado, consideremos a seguinte equação

$$x''(t) + a\, x(t - \tau) + b\, x(t) = 0, \quad t \geq t_0. \tag{2.9}$$

Afirmamos que a equação (2.9) é instável para determinados coeficientes $a, b \in \mathbb{R}$. Consideremos sua equação característica

$$\lambda^2 + a\, \mathrm{e}^{-\tau\lambda} + b = 0. \tag{2.10}$$

A instabilidade de (2.9) provém da existência de uma raiz característica com parte real positiva. Tomando $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $1 + a\, \mathrm{e}^{-\tau} + b = 0$, então $\lambda = 1$ é uma raiz característica da equação (2.10). Logo, a equação (2.9) é instável para tais valores de a e b. Notemos que $f(t, u, v) = bu$ e $g(t, u, v) = av$ satisfazem as condições (H_1) e (H_2).

No que segue, provaremos que a solução nula de uma equação mais geral do que (2.9) pode ser exponencialmente estabilizada por impulsos.

Teorema 2.4. *Consideremos a equação* (2.1) *e suponhamos que as hipóteses* (H_1) *e* (H_2) *estejam satisfeitas. Além disso, suponhamos que*

$$G\tau < \exp\left[-\beta\tau\right], \tag{2.11}$$

onde $\beta = \max\{1, F+G\}$. *Então a solução nula de* (2.1) *pode ser exponencialmente estabilizada por impulsos.*

Demonstração: Por (2.11), podemos garantir a existência de constantes $\alpha > 0$ e $\ell \geq \tau$ tais que

$$G\tau \leq \exp\left[-\alpha(\ell+\tau)\right]\exp\left[-\beta\ell\right]. \tag{2.12}$$

Sejam α e ℓ como em (2.12). Então, podemos escolher uma sequência $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $t_0 < t_1 < \ldots < t_k < \ldots$ e $\lim\limits_{k\to+\infty} t_k = +\infty$, com $\tau \leq t_k - t_{k-1} \leq \ell$. Sejam

$$I_k(u) = d_k u \quad \text{e} \quad J_k(v) = d_k v, \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{2.13}$$

onde

$$d_k = p_k - G\tau$$

e

$$p_k = \exp[-\alpha(t_{k+1} - t_k + \tau)]\exp\left[-\beta(t_{k+1} - t_k)\right].$$

Então d_k é um número real não-negativo, pois $p_k \geq G\tau$ por (2.12).

Para todo $\varepsilon > 0$, seja

$$\delta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}(1+G\tau)}\exp\left[-\alpha(t_1 - t_0)\right]\exp\left[-\beta(t_1 - t_0)\right]. \tag{2.14}$$

Mostraremos que, para cada solução $x(t)$ do problema (2.1)-(2.2) tal que

$$\sqrt{\|\varphi\|^2 + {y_0}^2} \leq \delta,$$

temos

$$\sqrt{x^2(t) + x'^2(t)} \leq \varepsilon\exp[-\alpha(t - t_0)], \qquad t \geq t_0.$$

Consideremos o funcional de Lyapunov

$$V(\psi) = |\psi_1(0)| + |\psi_2(0)| + G\int_{-\tau}^{0} |\psi_1(s)|ds,$$

onde $\psi \in PC([-\tau, 0], \mathbb{R}^2)$, $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t))$.

Seja $z(t) = (x(t), y(t))$ uma solução de (2.3). Sendo $\psi = z_t$ e recordando que $z_t = (x_t, y_t)$ e $y(t) = x'(t)$, obtemos

$$V(t) = V(z_t) = |x(t)| + |x'(t)| + G\int_{-\tau}^{0} |x_t(s)|ds.$$

É fácil ver que

$$\sqrt{x^2(t) + x'^2(t)} \leq |x(t)| + |x'(t)| \leq \sqrt{2\left[x^2(t) + x'^2(t)\right]}\,.$$

Além disso, a função $V(t)$ satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $V(t) \geq |x(t)| + |x'(t)|$.

(ii) $V(t) \leq (1 + G\tau)\left(\,\|x_t\| + |x'(t)|\,\right)$, pois

$$V(t) \leq |x(t)| + |x'(t)| + \|x_t\|\, G\int_{-\tau}^{0} ds \leq (1 + G\tau)(\,\|x_t\| + |x'(t)|).$$

(iii) $V'(t) \leq \beta V(t)$, para todo $t \in (t_0, t_1)$, onde $V'(t)$ denota o limite superior da derivada à direita de $V(t)$ ao longo da solução de (2.1)-(2.2) (veja Definição 1.26). De fato, temos

$$\begin{aligned}
V'(t) &= x'(t)\mathrm{sgn}[x(t)] + x''(t)\mathrm{sgn}[x'(t)] + G|x(t)| - G|x(t-\tau)| \\
&= x'(t)\mathrm{sgn}[x(t)] + \left[-g(t, x(t), x(t-\tau)) - f(t, x(t), x'(t))\right]\mathrm{sgn}[x'(t)] \\
&\quad\; + G|x(t)| - G|x(t-\tau)| \\
&\leq |x'(t)| + |g(t, x(t), x(t-\tau))| + |f(t, x(t), x'(t))| + G|x(t)| - G|x(t-\tau)| \\
&\leq |x'(t)| + G|x(t-\tau)| + F|x(t)| + G|x(t)| - G|x(t-\tau)| \\
&= |x'(t)| + (F+G)|x(t)| \\
&\leq \beta\left(|x(t)| + |x'(t)|\right) \leq \beta V(t).
\end{aligned}$$

Resolvendo $V'(t) \leq \beta V(t)$, obtemos

$$V(t) \leq V(t_0)\exp\left[\beta(t - t_0)\right], \quad \forall\, t \in (t_0, t_1). \tag{2.15}$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
|x(t)|+|x'(t)| &\leq V(t) \leq V(t_0)\exp[\beta(t-t_0)] \leq V(t_0)\exp[\beta(t_1-t_0)]\\
&\leq (1+G\tau)(\,\|x_{t_0}\|+|x'(t_0)|\,)\exp[\beta(t_1-t_0)]\\
&\leq (1+G\tau)\sqrt{2}\delta\exp[\beta(t_1-t_0)]\\
&= \varepsilon\exp[-\alpha(t_1-t_0)]\\
&\leq \varepsilon\exp[-\alpha(t-t_0)]
\end{aligned}
$$

e, portanto,

$$
\sqrt{x^2(t)+x'^2(t)} \leq |x(t)|+|x'(t)| \leq \varepsilon\exp[-\alpha(t-t_0)], \qquad t\in(t_0,t_1). \tag{2.16}
$$

Mas, pela continuidade à direita de $x(t)$ e $x'(t)$, (2.16) também está satisfeita para $t\in[t_0,t_1)$, isto é,

$$
\sqrt{x^2(t)+x'^2(t)} \leq \varepsilon\exp[-\alpha(t-t_0)], \qquad t\in[t_0,t_1). \tag{2.17}
$$

Agora, repetimos o procedimento acima para $t\in(t_1,t_2)$. Observemos que as propriedades (i) e (iii) continuam satisfeitas. Analogamente a (2.15), pela definição de p_1 e sabendo que $\tau \leq t_1-t_0$, obtemos

$$
\begin{aligned}
V(t) &\leq V(t_1^+)\exp[\beta(t_2-t_1)]\\
&= \left(|x(t_1^+)|+|x'(t_1^+)|+G\int_{-\tau}^{0}|x(t_1+s)|ds\right)\exp[\beta(t_2-t_1)]\\
&= \left(|x(t_1)|+|x'(t_1)|+G\int_{t_1-\tau}^{t_1}|x(s)|ds\right)\exp[\beta(t_2-t_1)]\\
&= \left(|I_1(x(t_1{}^-))|+|J_1(x'(t_1{}^-))|+G\int_{t_1-\tau}^{t_1}|x(s)|ds\right)\exp[\beta(t_2-t_1)]\\
&= \left(d_1[|x(t_1{}^-)|+|x'(t_1{}^-)|]+G\int_{t_1-\tau}^{t_1}|x(s)|ds\right)\exp[\beta(t_2-t_1)]\\
&\leq d_1\sup_{t_1-\tau\leq t\leq t_1}[|x(t)|+|x'(t)|]\exp[\beta(t_2-t_1)]\\
&\quad+\sup_{t_1-\tau\leq t\leq t_1}|x(t)|G\tau\exp[\beta(t_2-t_1)]\\
&\leq (d_1+G\tau)\sup_{t_1-\tau\leq t\leq t_1}[|x(t)|+|x'(t)|]\exp[\beta(t_2-t_1)].\\
&\leq (d_1+G\tau)\varepsilon\exp[-\alpha(t_1-t_0-\tau)]\exp[\beta(t_2-t_1)]\\
&= p_1\varepsilon\exp[-\alpha(t_1-t_0-\tau)]\exp[\beta(t_2-t_1)]\\
&= \varepsilon\exp[-\alpha(t_2-t_0)] \leq \varepsilon\exp[-\alpha(t-t_0)].
\end{aligned}
$$

Logo, para $t \in (t_1, t_2)$, vale

$$\sqrt{x^2(t) + x'^2(t)} \leq |x(t)| + |x'(t)| \leq V(t) \leq \varepsilon \exp[-\alpha(t - t_0)].$$

Portanto,

$$\sqrt{x^2(t) + x'^2(t)} \leq \varepsilon \exp[-\alpha(t - t_0)], \qquad t \in (t_1, t_2). \tag{2.18}$$

Pela continuidade à direita de $x(t)$ e $x'(t)$, a desigualdade (2.18) está satisfeita para $t \in [t_1, t_2)$, isto é,

$$\sqrt{x^2(t) + x'^2(t)} \leq \varepsilon \exp[-\alpha(t - t_0)], \qquad t \in [t_1, t_2). \tag{2.19}$$

Daí, pelas equações (2.17) e (2.19), obtemos

$$\sqrt{x^2(t) + x'^2(t)} \leq \varepsilon \exp[-\alpha(t - t_0)], \qquad t \in [t_0, t_2). \tag{2.20}$$

Da mesma forma, utilizando os argumentos acima, podemos concluir que para todo $k \in \mathbb{N}$, temos

$$\sqrt{x^2(t) + x'^2(t)} \leq \varepsilon \exp[-\alpha(t - t_0)], \qquad t \in [t_0, t_k), \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Portanto,

$$\sqrt{x^2(t) + x'^2(t)} \leq \varepsilon \exp[-\alpha(t - t_0)], \qquad t \geq t_0,$$

o que conclui a prova. ■

Corolário 2.5. *Suponhamos que as hipóteses do Teorema 2.4 estejam satisfeitas. Então a solução nula da equação (2.1) pode ser exponencialmente estabilizada por impulsos periódicos.*

Demonstração: Escolhemos uma sequência $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $t_0 < t_1 < \ldots < t_k < \ldots$ e $\lim_{k\to\infty} t_k = \infty$, com $t_k - t_{k-1} = \ell$. Sejam

$$I_k(u) = d\,u \qquad \text{e} \qquad J_k(v) = d\,v, \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{2.21}$$

onde

$$d = p - G\tau \qquad \text{e} \qquad p = \exp[-\alpha(\ell + \tau)] \exp[-\beta\ell].$$

O restante da prova será omitido, pois é análogo à prova do Teorema 2.4. ■

Agora consideraremos as equações diferenciais de segunda ordem estudadas em [9] e aplicaremos os resultados obtidos neste capítulo. Sejam

$$\begin{cases} x''(t) + \sum_{i=1}^{N} a_i(t)\, x(t-\tau_i) + f(t, x(t), x'(t)) = 0, \quad t \geq t_0, \quad t \neq t_k, \ \ k = 1, 2, \ldots \\ x_{t_0}(s) = \varphi(s), \quad -\tau_N \leq s \leq 0, \\ x'(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{2.22}$$

e

$$\begin{cases} x''(t) + \sum_{i=1}^{N} \int_{t-\tau_i}^{t} b_i(t-u)x(u)du + f(t, x(t), x'(t)) = 0, \quad t \geq t_0, \quad t \neq t_k, \ \ k = 1, 2, \ldots \\ x_{t_0}(s) = \varphi(s), \quad -\tau_N \leq s \leq 0, \\ x'(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{2.23}$$

sob as seguintes hipóteses: $0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_N$, $a_i : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, N$, são funções contínuas por partes, $b_i : [0, \tau_i] \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, N$, são funções Lebesgue integráveis, f é uma função contínua, com $f(t, 0, 0) = 0$ para todo $t \geq t_0$, e a hipótese (H_1) está satisfeita.

Também consideremos os impulsos nos instantes t_k, para $k = 1, 2, \ldots$, dados por (2.2).

Em [9], nos restringimos ao intervalo de existência $[t_0 - \tau_N, T]$, para um certo T. Agora, a fim de obtermos a existência global de soluções dos problemas (2.22)-(2.2) e (2.23)-(2.2) e seguindo a notação da Observação 2.1, definimos

$$H(t, x_0, x_1, \ldots, x_N, x_{N+1}) = -\sum_{i=1}^{N} a_i(t)\, x_i - f(t, x_0, x_{N+1})$$

para a equação (2.22) e

$$\overline{H}(t, x_0, x_1, \ldots, x_N, x_{N+1}) = -\sum_{i=1}^{N} \int_{t}^{t+\tau_i} b_i(t - s + \tau_i)x_i \, du - f(t, x_0, x_{N+1})$$

para a equação (2.23). Pela Observação 2.1, temos a existência de soluções dos problemas (2.22)-(2.2) e (2.23)-(2.2) sobre o intervalo $[t_0 - \tau_N, \infty)$.

Usando a mesma idéia da prova do Teorema 2.4, podemos provar que a solução nula de cada uma das equações (2.22) e (2.23) pode ser exponencialmente estabilizada por impulsos.

A seguir, formalizamos tais resultados.

Teorema 2.6. *Suponhamos que* (H_1) *esteja satisfeita. Seja* $A > 0$ *tal que*

$$| a_i(t)| \leq A, \quad i = 1, \ldots, N, \qquad t \geq t_0. \tag{2.24}$$

Se

$$A\tau < \exp[-\beta\tau], \tag{2.25}$$

onde $\tau = \sum_{i=1}^{N} \tau_i$ *e* $\beta = \max\{1, AN + F\}$*, então a solução nula de* (2.22) *pode ser exponencialmente estabilizada por impulsos.*

Demonstração: Pela hipótese (2.25), existem $\alpha > 0$ e $\ell \geq \tau$ tais que

$$A\tau \leq \exp[-\alpha(\ell + \tau)] \exp[-\beta\ell]. \tag{2.26}$$

Sejam α e ℓ como definimos em (2.26). Assim, podemos escolher uma sequência $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $t_0 < t_1 < \ldots < t_k < \ldots$ e $\lim_{k\to\infty} t_k = \infty$, com $\tau \leq t_k - t_{k-1} \leq \ell$. Sejam

$$I_k(u) = d_k u \qquad \text{e} \qquad J_k(v) = d_k v, \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{2.27}$$

onde

$$d_k = p_k - A\tau$$

e

$$p_k = \exp[-\alpha(t_{k+1} - t_k + \tau)] \exp[-\beta(t_{k+1} - t_k)].$$

Então d_k é um número não-negativo, pois $p_k \geq A\tau$ por (2.26).

Para todo $\varepsilon > 0$, seja

$$\delta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}(1 + A\tau)} \exp[-\alpha(t_1 - t_0)] \exp[-\beta(t_1 - t_0)]. \tag{2.28}$$

Consideremos a função de Lyapunov

$$V(t) = |x(t)| + |x'(t)| + \sum_{i=1}^{N} \int_{t-\tau_i}^{t} |a_i(s + \tau_i)||x(s)|ds.$$

É fácil ver que

$$\sqrt{x^2(t) + x'^2(t)} \leq |x(t)| + |x'(t)| \leq \sqrt{2\left[x^2(t) + x'^2(t)\right]}.$$

Além disso, $V(t)$ satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $V(t) \geq |x(t)| + |x'(t)|$.

(ii) $V(t) \leq (1 + A\tau)\,[\,\|x_t\| + |x'(t)|\,]$.

(iii) $V'(t) \leq \beta V(t)$, para todo $t \in (t_0, t_1)$, onde $V'(t)$ denota o limitante superior à direita da derivada de $V(t)$ ao longo da solução do problema (2.22)-(2.2). De fato, temos

$$\begin{aligned}
V'(t) \quad &= \quad x'(t)\mathrm{sgn}[x(t)] + x''(t)\mathrm{sgn}[x'(t)] + \sum_{i=1}^{N} |a_i(t+\tau_i)||x(t)| - \sum_{i=1}^{N} |a_i(t)||x(t-\tau_i)| \\
&= \quad x'(t)\mathrm{sgn}[x(t)] + \left[-\sum_{i=1}^{N} a_i(t)x(t-\tau_i) - f(t, x(t), x'(t))\right] \mathrm{sgn}[x'(t)] \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{N} |a_i(t+\tau_i)||x(t)| - \sum_{i=1}^{N} |a_i(t)||x(t-\tau_i)| \\
&\leq \quad |x'(t)| + \sum_{i=1}^{N} |a_i(t)||x(t-\tau_i)| + |f(t, x(t), x'(t))| + \sum_{i=1}^{N} |a_i(t+\tau_i)||x(t)| \\
&\qquad - \sum_{i=1}^{N} |a_i(t)||x(t-\tau_i)| \\
&\leq \quad |x'(t)| + \sum_{i=1}^{N} |a_i(t+\tau_i)||x(t)| + F|x(t)| \\
&\leq \quad |x'(t)| + (AN + F)|x(t)| \\
&\leq \quad \beta\,(|x(t)| + |x'(t)|) \leq \beta V(t).
\end{aligned}$$

Resolvendo $V'(t) \leq \beta V(t)$, obtemos

$$V(t) \leq V(t_0) \exp\,[\beta(t - t_0)], \quad \forall\, t \in (t_0, t_1). \tag{2.29}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
|x(t)| + |x'(t)| \quad &\leq \quad V(t) \leq V(t_0) \exp\,[\beta(t - t_0)] \leq V(t_0) \exp\,[\beta(t_1 - t_0)] \\
&\leq \quad (1 + A\tau)(\,\|x_{t_0}\| + |x'(t_0)|\,) \exp\,[\beta(t_1 - t_0)] \\
&\leq \quad (1 + A\tau)\sqrt{2}\delta \exp\,[\beta(t_1 - t_0)] \\
&= \quad \varepsilon \exp\,[-\alpha(t_1 - t_0)] \\
&\leq \quad \varepsilon \exp\,[-\alpha(t - t_0)]
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\sqrt{x^2(t)+x'^2(t)} \leq |x(t)|+|x'(t)| \leq \varepsilon \exp\left[-\alpha(t-t_0)\right], \qquad t\in(t_0,t_1). \tag{2.30}$$

Mas, pela continuidade à direita de $x(t)$ e $x'(t)$, (2.30) também está satisfeita para $t\in[t_0,t_1)$, isto é,

$$\sqrt{x^2(t)+x'^2(t)} \leq \varepsilon \exp\left[-\alpha(t-t_0)\right], \qquad t\in[t_0,t_1). \tag{2.31}$$

Agora, repetimos o procedimento acima para $t\in(t_1,t_2)$. Observemos que as propriedades (i) e (iii) continuam satisfeitas. Analogamente a (2.29), pela definição de p_1 e sabendo que $\tau\leq t_1-t_0$, obtemos

$$\begin{aligned}
V(t) &\leq V(t_1^+)\exp\left[\beta(t_2-t_1)\right]\\
&= \left(|x(t_1^+)|+|x'(t_1^+)|+\sum_{i=1}^{N}\int_{t_1-\tau_i}^{t_1}|a_i(s+\tau_i)||x(s)|ds\right)\exp\left[\beta(t_2-t_1)\right]\\
&= \left(|x(t_1)|+|x'(t_1)|+\sum_{i=1}^{N}\int_{t_1-\tau_i}^{t_1}|a_i(s+\tau_i)||x(s)|ds\right)\exp\left[\beta(t_2-t_1)\right]\\
&= \left(|I_1(x(t_1{}^-))|+|J_1(x'(t_1{}^-))|+\sum_{i=1}^{N}\int_{t_1-\tau_i}^{t_1}|a_i(s+\tau_i)||x(s)|ds\right)\exp\left[\beta(t_2-t_1)\right]\\
&= \left(d_1[|x(t_1{}^-)|+|x'(t_1{}^-)|]+\sum_{i=1}^{N}\int_{t_1-\tau_i}^{t_1}|a_i(s+\tau_i)||x(s)|ds\right)\exp\left[\beta(t_2-t_1)\right]\\
&\leq d_1\sup_{t_1-\tau_i\leq t\leq t_1}\left[|x(t)|+|x'(t)|\right]\exp\left[\beta(t_2-t_1)\right]\\
&\quad+\sup_{t_1-\tau_i\leq t\leq t_1}|x(t)|A\tau\exp\left[\beta(t_2-t_1)\right]\\
&\leq (d_1+A\tau)\sup_{t_1-\tau_i\leq t\leq t_1}\left[|x(t)|+|x'(t)|\right]\exp\left[\beta(t_2-t_1)\right].\\
&\leq (d_1+A\tau)\varepsilon\exp\left[-\alpha(t_1-t_0-\tau)\right]\exp\left[\beta(t_2-t_1)\right]\\
&= p_1\varepsilon\exp\left[-\alpha(t_1-t_0-\tau)\right]\exp\left[\beta(t_2-t_1)\right]\\
&= \varepsilon\exp\left[-\alpha(t_2-t_0)\right]\leq\varepsilon\exp\left[-\alpha(t-t_0)\right].
\end{aligned}$$

Logo, para $t\in(t_1,t_2)$, vale

$$\sqrt{x^2(t)+x'^2(t)} \leq |x(t)|+|x'(t)| \leq V(t) \leq \varepsilon \exp\left[-\alpha(t-t_0)\right].$$

Portanto,

$$\sqrt{x^2(t)+x'^2(t)} \leq \varepsilon \exp\left[-\alpha(t-t_0)\right], \qquad t\in(t_1,t_2). \tag{2.32}$$

Pela continuidade à direita de $x(t)$ e $x'(t)$, a desigualdade (2.32) está satisfeita para $t \in [t_1, t_2)$, isto é,

$$\sqrt{x^2(t) + x'^2(t)} \le \varepsilon \exp\left[-\alpha(t - t_0)\right], \qquad t \in [t_1, t_2). \tag{2.33}$$

Daí, pelas equações (2.31) e (2.33), obtemos

$$\sqrt{x^2(t) + x'^2(t)} \le \varepsilon \exp\left[-\alpha(t - t_0)\right], \qquad t \in [t_0, t_2). \tag{2.34}$$

Da mesma forma, utilizando os argumentos acima, podemos concluir que para todo $k \in \mathbb{N}$, temos

$$\sqrt{x^2(t) + x'^2(t)} \le \varepsilon \exp\left[-\alpha(t - t_0)\right], \qquad t \in [t_0, t_k), \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Portanto,

$$\sqrt{x^2(t) + x'^2(t)} \le \varepsilon \exp\left[-\alpha(t - t_0)\right], \qquad t \ge t_0,$$

o que conclui a prova. ■

Teorema 2.7. *Suponhamos que (H_1) esteja satisfeita. Seja $B > 0$ tal que*

$$\int_0^{\tau_i} |\, b_i(s)|\, ds \le B, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{2.35}$$

Se

$$B\tau < \exp\left[-\beta\tau\right], \tag{2.36}$$

onde $\tau = \sum_{i=1}^{N} \tau_i$ e $\beta = \max\{1, BN + F\}$, então a solução nula da equação (2.23) pode ser exponencialmente estabilizada por impulsos.

Demonstração: Pela hipótese (2.36), existem $\alpha > 0$ e $\ell \ge \tau$ tais que

$$B\tau \le \exp\left[-\alpha(\ell + \tau)\right] \exp\left[-\beta\ell\right]. \tag{2.37}$$

Sejam α e ℓ como em (2.37). Assim, podemos escolher uma sequência $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $t_0 < t_1 < \ldots < t_k < \ldots$ e $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = \infty$, com $\tau \le t_k - t_{k-1} \le l$. Sejam

$$I_k(u) = d_k u \qquad \text{e} \qquad J_k(v) = d_k v, \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{2.38}$$

onde

$$d_k = p_k - B\tau$$

e

$$p_k = \exp[-\alpha(t_{k+1} - t_k + \tau)] \exp\left[-\beta(t_{k+1} - t_k)\right].$$

Então d_k é um número real não-negativo, pois $p_k \geq B\tau$ por (2.37).

Para todo $\varepsilon > 0$, seja

$$\delta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}(1 + B\tau)} \exp\left[-\alpha(t_1 - t_0)\right] \exp\left[-\beta(t_1 - t_0)\right]. \tag{2.39}$$

Consideremos a função de Lyapunov

$$V(t) = |x(t)| + |x'(t)| + \sum_{i=1}^{N} \int_{t-\tau_i}^{t} \left[\int_u^t |b_i(u - s + \tau_i)||x(s)|ds\right] du.$$

O restante da prova será omitido, pois segue analogamente à prova do Teorema 2.4. ■

Observação 2.2. Seguindo os passos da prova do Corolário 2.5, podemos provar que as soluções nulas das equações (2.22) e (2.23) podem ser exponencialmente estabilizadas por impulsos periódicos.

Observação 2.3. Em [9], mostramos que sob certas condições a solução nula de (2.22) pode ser exponencialmente estabilizada em um certo intervalo $[t_0, T)$, isto é, verificamos que a Definição 2.2 vale para $t_0 \leq t < T$. Isto, na verdade, nos diz que a solução nula de (2.22) depende continuamente das condições iniciais. Podemos constatar o mesmo fato, quando consideramos a equação (2.23).

2.3 Um caso similar

Consideremos, agora, a equação diferencial de segunda ordem com retardo distribuído

$$\begin{cases} x''(t) + f(x(t))\, x'(t) + \displaystyle\int_{t-1}^{t} g(x(s))\, ds = 0, \;\; t \geq t_0, \quad t \neq t_k, \quad k = 1, 2, \ldots \\ x_{t_0} = \varphi \\ x'(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{2.40}$$

onde $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções continuamente diferenciáveis tais que $f(0) = g(0) = 0$ sujeitas às condições:

$(\mathcal{H}_1)$ Existe uma constante $F > 0$ tal que para quaisquer u e v em $\mathbb{R}$,

$$|f(u)v| \leq F\,|\,u\,|.$$

$(\mathcal{H}_2)$ Existe uma constante $G > 0$ tal que para todo $u \in \mathbb{R}$,

$$|g(u)| \leq G\,|\,u\,|.$$

Também consideremos os impulsos nos instantes t_k, $k = 1, 2, \ldots$, dados pela equação (2.2).

Podemos reescrever as Definições 2.1, 2.2 e 2.3 apropriadas para a equação (2.40), bem como garantir a existência de solução (Observação 2.1) para esta equação.

Com base em argumentos geométricos utilizados por M. Z. Baptistini e P. Z. Táboas em [2], provaremos que a solução nula da equação (2.40) é instável. Este fato se concretizará no próximo lema que estabelece a existência de uma raiz com parte real positiva para a equação característica corresponde à equação (2.40). Mas, antes de enunciarmos este lema, vamos obter a equação característica de (2.40).

Observe que podemos reescrever a equação (2.40) na forma do sistema

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -f(x(t))\,y(t) - \displaystyle\int_{t-1}^{t} g(x(s))\,ds. \end{cases} \tag{2.41}$$

Primeiramente, precisamos linearizar o sistema (2.41) em uma vizinhança da origem. Por expansão em série de Taylor, temos

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -[f(0) + f'(0)x + o(x^2)]\,y(t) - \displaystyle\int_{t-1}^{t} [g(0) - g'(0)x(s)]\,ds \end{cases} \tag{2.42}$$

isto é,

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -k\,y(t) - \displaystyle\int_{t-1}^{t} x(s)\,ds, \end{cases} \tag{2.43}$$

onde $f'(0) = k \in \mathbb{R}$ e $g'(0) = 1$.

O sistema (2.43) nos fornece a equação característica de (2.40) que é dada por

$$H(\lambda) = \lambda^3 + k\lambda^2 - e^{-\lambda} + 1 = 0. \tag{2.44}$$

Lema 2.8. *Se* $\dfrac{2}{\pi^2} \leq k \leq \dfrac{4}{\pi^2}$, *então existe pelo menos uma raiz* $\lambda = a + bi$ *de* (2.44) *com* $a > 0$.

Demonstração: Seja $\lambda = a + ib$ uma raiz não-nula de $H(\lambda)$. Então $H(\lambda) = 0$ e podemos supor, sem perda de generalidade, que $b \geq 0$, já que $H(\overline{\lambda}) = \overline{H(\lambda)}$.

Substituindo $\lambda = a + ib$ em (2.44) e igualando partes real e imaginária, a equação (2.44) torna-se equivalente ao sistema

$$\begin{aligned} a^3 - 3ab^2 + ka^2 - b^2k + 1 &= e^{-a}\cos b \\ b^3 - 3a^2b - 2abk &= e^{-a}\mathrm{senb} \end{aligned}$$

ou, em forma vetorial,

$$e^a(a^3 - 3ab^2 + ka^2 - b^2k + 1, b^3 - 3a^2b - 2abk) = (\cos b, \mathrm{senb}) \tag{2.45}$$

Para cada $a \geq 0$, as equações

$$\begin{aligned} \gamma_a &= e^a(a^3 - 3ab^2 + ka^2 - b^2k + 1) \\ \eta_a &= e^a(b^3 - 3a^2b - 2abk), \qquad\qquad b \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

descrevem um ramo de um laço no plano $\gamma_a\eta_a$, enquanto $v(b) = (\cos b, \mathrm{senb})$ descreve um círculo unitário orientado no sentido anti-horário quando $b \geq 0$ cresce, conforme a figura seguinte.

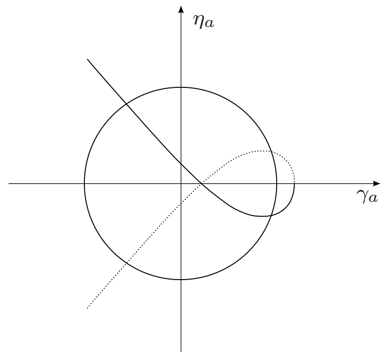

Figura 2.1: Caso $a \geq 0$

Observemos que $\lambda = a + \widetilde{b}i$, a, $\tilde{b} \in \mathbb{R}$, é uma solução de (2.44) se, e somente se, os pontos correspondentes a $b = \widetilde{b}$ no laço $(\gamma_a(b), \eta_a(b))$ e no círculo unitário $v(b)$ coincidem.

Para cada $a \geq 0$, seja b_a uma solução da equação

$$e^a(a^3 - 3ab^2 + ka^2 - b^2k + 1) = \cos b. \tag{2.46}$$

Definimos $d(a)$ como sendo a diferença seguinte

$$d(a) = e^a(b^3 - 3a^2b - 2abk) - \mathrm{sen} b. \tag{2.47}$$

Em particular, quando $a = 0$ em (2.46) e em (2.47), existem um único $b_0 \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ e um $k \in \mathbb{R}$ conveniente, a saber $k \in \left[\frac{2}{\pi^2}, \frac{4}{\pi^2}\right]$, para os quais valem

$$-b_0^2k + 1 = \cos \mathrm{b_0} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{d(0) = b_0^3 - sen\, b_0} > 0.$$

Em outras palavras, quando $a = 0$, existe $b_0 \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ tal que o ponto correspondente a (γ_0, η_0) e o ponto do círculo unitário estão sobre a mesma reta vertical e a desigualdade $d(0) > 0$ garante que este ponto está fora do círculo. Veja Figura 2.2.

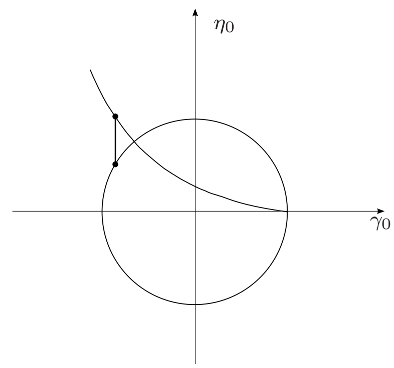

Figura 2.2: Caso $a = 0$

Atribuindo o valor 1 para a, utilizamos o software Maple para garantir que existem $b_1 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e $k \in \left[\frac{2}{\pi^2}, \frac{4}{\pi^2}\right]$ satisfazendo a equação (2.46) e tais que $d(1) < 0$. Notemos, então, que para $a = 1$, o ponto correspondente $b = b_1$ do ramo do laço e o ponto corresponde a b_1 do círculo pertencem a uma mesma reta vertical. A desigualdade $d(1) < 0$ nos diz que este ponto está no interior círculo. Veja Figura 2.3.

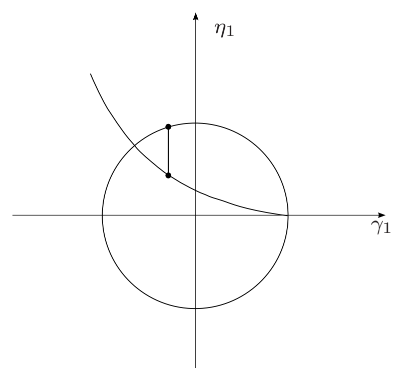

Figura 2.3: Caso $a = 1$

Logo existe $a \in (0, 1)$ tal que $d(a) = 0$. Portanto existe uma raiz $\lambda = a + bi$ de $H(\lambda)$, com $\mathcal{R}(\lambda) = a > 0$, onde $\mathcal{R}(\lambda)$ denota a parte real de λ. ■

Seguindo os passos da prova do Teorema 2.4, provaremos que a solução nula de (2.40) pode ser exponencialmente estabilizada por impulsos, ou seja, após a imposição de impulsos apropriados, provaremos que a solução nula de (2.40), que por sua vez é instável, se torna exponencialmente estável.

Teorema 2.9. *Consideremos a equação* (2.40) *e suponhamos que as hipóteses* $(\mathcal{H}_1)$ *e* $(\mathcal{H}_2)$ *estejam satisfeitas. Além disso, suponhamos que*

$$G < \exp[-\beta], \tag{2.48}$$

onde $\beta = \max\{1, F + G\}$. *Então a solução nula da equação* (2.40) *pode ser exponencialmente estabilizada por impulsos.*

Demonstração: Por (2.48), podemos garantir a existência de constantes $\alpha > 0$ e $\ell \geq 1$ tais que

$$G \leq \exp[-\alpha(\ell+1)] \exp[-\beta\ell]. \tag{2.49}$$

Sejam α e ℓ como em (2.49). Então podemos escolher uma sequência $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $t_0 < t_1 < \ldots < t_k < \ldots$ e $\lim\limits_{k\to+\infty} t_k = +\infty$, com $1 \leq t_k - t_{k-1} \leq \ell$. Sejam

$$I_k(u) = d_k u \quad \text{e} \quad J_k(v) = d_k v, \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{2.50}$$

onde

$$d_k = p_k - G$$

e

$$p_k = \exp[-\alpha(t_{k+1} - t_k + \tau)] \exp[-\beta(t_{k+1} - t_k)].$$

Para todo $\varepsilon > 0$, seja

$$\delta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}(1+G)} \exp[-\alpha(t_1 - t_0)] \exp[-\beta(t_1 - t_0)]. \tag{2.51}$$

Consideremos a função de Lyapunov

$$V(t) = |x(t)| + |x'(t)| + G \int_{t-1}^{t} \int_{u}^{t} |x(s)| ds\, du.$$

A função $V(t)$ satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $V(t) \geq |x(t)| + |x'(t)|$.

(ii) $V(t) \leq (1+G)\,(\,\|x_t\| + |x'(t)|\,)$.

(iii) $V'(t) \leq \beta V(t)$, para todo $t \in (t_0, t_1)$. De fato, temos

$$\begin{aligned}
V'(t) &= x'(t)\mathrm{sgn}[x(t)] + x''(t)\mathrm{sgn}[x'(t)] + G\int_{t-1}^{t} |x(t)|\,du - G\int_{t-1}^{t} |x(s)|\,ds \\
&= x'(t)\mathrm{sgn}[x(t)] + \left[-f(x(t))x'(t) - \int_{t-1}^{t} g(x(s))\,ds\right]\mathrm{sgn}[x'(t)] \\
&\quad + G\int_{t-1}^{t} |x(t)|\,du - G\int_{t-1}^{t} |x(s)|\,ds \\
&\leq |x'(t)| + |f(x(t))x'(t)| + G\int_{t-1}^{t} |x(s)|\,ds + G\int_{t-1}^{t} |x(t)|\,du - G\int_{t-1}^{t} |x(s)|\,ds \\
&\leq |x'(t)| + F|x(t)| + G\int_{t-1}^{t} |x(t)|\,du \\
&= |x'(t)| + (F+G)|x(t)| \\
&\leq \beta\left(|x(t)| + |x'(t)|\right) \leq \beta V(t).
\end{aligned}$$

Resolvendo $V'(t) \leq \beta V(t)$, obtemos

$$V(t) \leq V(t_0)\exp\left[\beta(t-t_0)\right], \quad \forall\, t \in (t_0, t_1). \tag{2.52}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
|x(t)| + |x'(t)| &\leq V(t) \leq V(t_0)\exp\left[\beta(t-t_0)\right] \leq V(t_0)\exp\left[\beta(t_1-t_0)\right] \\
&\leq (1+G)\left(\,\|x_{t_0}\| + |x'(t_0)|\,\right)\exp\left[\beta(t_1-t_0)\right] \\
&\leq (1+G)\sqrt{2}\delta\exp\left[\beta(t_1-t_0)\right] \\
&= \varepsilon\exp\left[-\alpha(t_1-t_0)\right] \\
&\leq \varepsilon\exp\left[-\alpha(t-t_0)\right]
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\sqrt{x^2(t) + x'^2(t)} \leq \varepsilon\exp\left[-\alpha(t-t_0)\right], \qquad t \in [t_0, t_1). \tag{2.53}$$

Agora, repetimos o procedimento acima para $t \in (t_1, t_2)$. Analogamente a (2.52), pela definição de p_1 e sabendo que $1 \leq t_1 - t_0$, obtemos

$$\begin{aligned}
V(t) &\leq V(t_1^+)\exp[\beta(t_2-t_1)] \\
&= \left(|x(t_1^+)| + |x'(t_1^+)| + G\int_{t_1-1}^{t_1}\int_u^{t_1}|x(s)|ds\right)\exp[\beta(t_2-t_1)] \\
&= \left(|x(t_1)| + |x'(t_1)| + G\int_{t_1-1}^{t_1}\int_u^{t_1}|x(s)|ds\right)\exp[\beta(t_2-t_1)] \\
&= \left(|I_1(x(t_1{}^-))| + |J_1(x'(t_1{}^-))| + G\int_{t_1-1}^{t_1}\int_u^{t_1}|x(s)|ds\right)\exp[\beta(t_2-t_1)] \\
&= \left(d_1[|x(t_1{}^-)| + |x'(t_1{}^-)|] + G\int_{t_1-1}^{t_1}\int_u^{t_1}|x(s)|ds\right)\exp[\beta(t_2-t_1)] \\
&\leq d_1 \sup_{t_1-1\leq t\leq t_1}[|x(t)|+|x'(t)|]\exp[\beta(t_2-t_1)] \\
&\quad + \sup_{t_1-1\leq t\leq t_1}|x(t)|G\exp[\beta(t_2-t_1)] \\
&\leq (d_1+G)\sup_{t_1-1\leq t\leq t_1}[|x(t)|+|x'(t)|]\exp[\beta(t_2-t_1)]. \\
&\leq (d_1+G)\varepsilon\exp[-\alpha(t_1-t_0-1)]\exp[\beta(t_2-t_1)] \\
&= p_1\varepsilon\exp[-\alpha(t_1-t_0-1)]\exp[\beta(t_2-t_1)] \\
&= \varepsilon\exp[-\alpha(t_2-t_0)] \leq \varepsilon\exp[-\alpha(t-t_0)].
\end{aligned}$$

Logo, para $t \in (t_1, t_2)$, vale

$$\sqrt{x^2(t)+x'^2(t)} \leq |x(t)|+|x'(t)| \leq V(t) \leq \varepsilon\exp[-\alpha(t-t_0)].$$

Portanto,

$$\sqrt{x^2(t)+x'^2(t)} \leq \varepsilon\exp[-\alpha(t-t_0)], \qquad t \in (t_1, t_2). \tag{2.54}$$

Pela continuidade à direita de $x(t)$ e $x'(t)$, a desigualdade (2.54) está satisfeita para $t \in [t_1, t_2)$, isto é,

$$\sqrt{x^2(t)+x'^2(t)} \leq \varepsilon\exp[-\alpha(t-t_0)], \qquad t \in [t_1, t_2). \tag{2.55}$$

Pelas equações (2.53) e (2.55), obtemos

$$\sqrt{x^2(t)+x'^2(t)} \leq \varepsilon\exp[-\alpha(t-t_0)], \qquad t \in [t_0, t_2). \tag{2.56}$$

Da mesma forma, podemos concluir que para todo $k \in \mathbb{N}$, vale

$$\sqrt{x^2(t)+x'^2(t)} \leq \varepsilon\exp[-\alpha(t-t_0)], \qquad t \in [t_0, t_k), \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Portanto,

$$\sqrt{x^2(t) + x'^2(t)} \leq \varepsilon \exp\left[-\alpha(t - t_0)\right], \qquad t \geq t_0,$$

o que conclui a prova. ■

Observação 2.4. Seguindo os passos da prova do Corolário 2.5, podemos provar que a solução nula da equação (2.40) também pode ser exponencialmente estabilizada por impulsos periódicos.

2.4 Exemplos

Exemplo 2.10. A equação (2.9) exibe-nos um exemplo de uma equação instável que pode se tornar exponencialmente estável impondo-se impulsos apropriados. Com efeito, tomemos $F = |\, b \,|$, $G = |\, a \,|$, $\beta = \max\{1, F + G\}$ e $\ell = \tau$ e, suponhamos que

$$G\tau \exp\left[\beta\tau\right] < 1.$$

Desta forma, podemos escolher $\alpha \geq 0$ tal que

$$G\tau < \exp\left[-2\alpha\tau\right]\, \exp\left[-\beta\tau\right].$$

Logo,

$$G\tau < \exp\left[-\beta\tau\right].$$

Nos instantes t_k, com $t_k - t_{k-1} = \ell = \tau$, consideremos os seguintes impulsos

$$I_k(x(t_k^-)) = d\, x(t_k^-) \qquad \text{e} \qquad J_k(x'(t_k^-)) = d\, x'(t_k^-), \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

onde $d = \exp[-(2\alpha + \beta)\tau] - G\tau$. Logo as hipóteses do Corolário 2.5 estão satisfeitas e, portanto, a equação (2.9) pode ser exponencialmente estabilizada por impulsos periódicos. □

Exemplo 2.11. Consideremos a equação

$$x''(t) - 0.00324\, x(t-2) - 0.00512\, x(t-1) = 0, \quad t \geq 0 \tag{2.57}$$

cuja equação característica é

$$\lambda^2 - 0.00324\,\mathrm{e}^{-2\lambda} - 0.00512\,\mathrm{e}^{-\lambda} = 0. \tag{2.58}$$

Por intermédio do software Maple, podemos exibir uma raiz característica com parte real positiva. Logo a equação não-impulsiva (2.57) é instável.

Tomando $A = 0.00512$, $\ell = \tau = \tau_1 + \tau_2 = 3$ e $\alpha = \dfrac{1}{9}$, então $\beta = \max\{1, AN\} = 1$ e vale

$$A\tau < \exp\left[-\alpha(\ell+\tau)\right]\,\exp\left[-\beta\ell\right] < \exp\left[-\beta\ell\right] = \exp\left[-\ell\right].$$

Nos instantes t_k, com $t_k - t_{k-1} = \ell$, $k = 1, 2, \ldots$, escolhemos os impulsos

$$I_k(x(t_k^-)) = d\,x(t_k^-) \qquad \text{e} \qquad J_k(x'(t_k^-)) = d\,x'(t_k^-),$$

onde $d = \exp(-3.66667) - 0.01536$. Logo as hipóteses do Teorema 2.6 estão satisfeitas e, portanto, a equação (2.57) pode ser exponencialmente estabilizada por impulsos periódicos. $\square$

Capítulo

3

Oscilação por impulsos

Algumas equações diferenciais retardadas não-impulsivas possuem soluções que são não-oscilatórias. No entanto, tais soluções podem se tornar oscilatórias se acrescentarmos a elas certos controles impulsivos. Neste sentido, visamos neste capítulo o estudo do comportamento oscilatório das soluções de uma das equações diferenciais de segunda ordem estudadas no Capítulo 2 e provamos que, sob ação impulsiva, todas as soluções são oscilatórias em determinadas condições. Este capítulo também foi desenvolvido em forma de artigo. Veja referência [10].

3.1 Introdução

Nos últimos anos, tem havido um aumento relevante de trabalhos que tratam do estudo sobre o comportamento oscilatório de equações diferenciais de segunda ordem não-lineares com retardo. Por exemplo, veja os artigos recentes [8, 27, 31, 32, 34, 35]. Constatamos um número considerável de artigos sobre equações diferenciais ordinárias de segunda ordem não-linear com impulsos, entre eles, [7, 13, 26]. Contudo, existem poucos artigos que tratam de equações diferenciais de segunda ordem não-lineares com retardo e impulsos. Neste último caso, encontramos, por exemplo, [28, 29, 33].

Em [13], Zhimin He e Weigao Ge estudaram o comportamento oscilatório da seguinte equação diferencial ordinária não-linear de segunda ordem com efeitos impulsivos

$$\begin{cases} (r(t)(x'(t))^{\sigma})' + f(t,x(t)) = 0, \quad t \geq t_0, \quad t \neq t_k \\ x(t_k^+) = I_k(x(t_k)), \qquad\qquad x'(t_k{}^+) = J_k(x'(t_k)), \;\; k = 1,2\ldots, \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_k < \ldots$ com $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = +\infty$ e σ é um quociente qualquer de inteiros ímpares positivos.

Em [28], Mingshu Peng e Weigao Ge provaram um teorema sobre oscilação para a equação diferencial retardada impulsiva de segunda ordem

$$\begin{cases} (r(t)(x'(t))^{\sigma})' + f(t,x(t),x(t-\tau)) = 0, \quad t \geq t_0, \quad t \neq t_k \\ x(t_k^+) = I_k(x(t_k)), \quad x'(t_k{}^+) = J_k(x'(t_k)), \;\; k = 1,2\ldots, \\ x(t) = \phi(t), \quad t_0 - \tau \leq t \leq t_0, \end{cases} \tag{3.2}$$

onde $\tau > 0$, $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_k < \ldots$ com $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = +\infty$ e $t_{k+1} - t_k > \tau$.

Nestes artigos, a saber [13] e [28], os autores verificam o comportamento oscilatório estudando os sinais de $x(t)$ e $x'(t)$. Enquanto estes autores assumem de antemão que suas equações admitem soluções, nós supomos que f e g são dominadas por funções contínuas (veja as hipóteses (H_1) e (H_2) abaixo) para garantirmos a existência de uma solução em $[t_0 - r, +\infty)$.

Nós consideramos a equação diferencial impulsiva

$$\begin{cases} x''(t) + f(t,x(t),x'(t)) + g(t,x(t),x(t-\tau)) = 0, \quad t \geq t_0, \quad t \neq t_k \\ x(t_k) = I_k(x(t_k{}^-)), \quad x'(t_k) = J_k(x'(t_k{}^-)), \quad k = 1,2\ldots, \end{cases} \tag{3.3}$$

onde $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_k < \ldots$ com $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = +\infty$ e $t_{k+1} - t_k > \tau$.

Também consideremos a condição de inicial

$$x(t) = \phi(t), \quad t_0 - \tau \leq t \leq t_0, \tag{3.4}$$

onde $\phi, \phi' : [t_0 - \tau, t_0] \to \mathbb{R}$ possuem um número finito de descontinuidades de primeira espécie e são contínuas à direita nestes pontos. Vamos supor que

(H_1) $f : [t_0 - \tau, +\infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e não-negativa e $f(t, u, v) \leq z(t)$, para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}$, onde $z(t)$ é contínua em $[t_0 - \tau, \infty)$;

(H_2) $g : [t_0 - \tau, +\infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua, $ug(t, u, v) > 0$, para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}$ tais que $uv > 0$ e também

$$\frac{g(t,u,v)}{\varphi(v)} \geq p(t) \qquad \text{e} \qquad \frac{g(t,u,v)}{v} \leq q(t),$$

para todo $v \neq 0$, onde $p(t)$ e $q(t)$ são funções contínuas em $[t_0 - \tau, \infty)$, $p(t) \geq 0$ e $x\varphi(x) > 0$, para todo $x \neq 0$ e $\varphi'(x) \geq 0$;

(H_3) para todo $k \in \mathbb{N}$, I_k, $J_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são contínuas e existem constantes positivas a_k, b_k, c_k e d_k tais que

$$a_k \leq \frac{I_k(x)}{x} \leq b_k, \qquad c_k \leq \frac{J_k(x)}{x} \leq d_k, \qquad x \neq 0;$$

(H_4) $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \int_{t_0}^{t} \prod_{t_0 < t_k < s} \frac{c_k}{b_k}\, ds = +\infty\,.$

Observemos que a equação acima foi apresentada no Capítulo 2. Assim, para a definição de uma solução do problema impulsivo (3.3)-(3.4) veja Definição 2.1. No que segue, $x(t)$ denotará uma solução de (3.3)-(3.4).

Na Observação 2.1, reduzimos a equação (3.3)-(3.4) ao problema diferencial impulsivo de primeira ordem (2.4). De posse das hipóteses (H_1)-(H_3), em particular, o fato de f e g serem dominadas por funções contínuas, podemos mostrar que as hipóteses do Teorema 1.17 estão satisfeitas. Isto implica a existência global (à direita) de soluções de (2.4). Logo, podemos garantir que existe uma solução de (3.3)-(3.4) em $[t_0 - r, +\infty)$.

A seguir, apresentamos um lema que é uma versão do Teorema $1.4.1$ de [15], onde substituímos continuidade à esquerda pela continuidade à direita das funções $m(t)$ e $m'(t)$ em t_k, para $k \in \mathbb{N}$. A prova segue analogamente à prova em [15].

Lema 3.1. *Suponhamos que*

(i) a sequência $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *seja tal que* $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_k < \ldots$ *e* $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = +\infty$.

(ii) $m, m' : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *sejam contínuas em* $\mathbb{R}_+ \setminus \{t_k; k \in \mathbb{N}\}$*, existam os limites laterais* $m(t_k^-)$*,* $m'(t_k^-)$*,* $m(t_k^+)$*,* $m'(t_k^+)$ *e* $m(t_k^+) = m(t_k)$*,* $k = 1, 2, \ldots$.

(iii) para $k = 1, 2, \ldots$ *e* $t \geq t_0$*, tenhamos*

$$m'(t) \leq p(t)\, m(t) + q(t), \quad t \neq t_k \tag{3.5}$$

$$m(t_k) \leq d_k m(t_k{}^-) + b_k, \tag{3.6}$$

onde $p, q \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$*,* d_k *e* b_k *são constantes reais com* $d_k \geq 0$*. Então vale a desigualdade*

$$\begin{aligned} m(t) \leq\ & m(t_0) \prod_{t_0<t_k<t} d_k \exp\left(\int_{t_0}^t p(s)ds\right) + \int_{t_0}^t \prod_{s<t_k<t} d_k \exp\left(\int_s^t p(u)du\right) q(s)ds \\ & + \sum_{t_0<t_k<t} \prod_{t_k<t_j<t} d_j \exp\left(\int_{t_k}^t p(s)ds\right) b_k, \quad t \geq t_0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

No caso em que as desigualdades (3.5) e (3.6) se encontram com o sinal contrário, a desigualdade (3.7) é obtida com sinal contrário.

3.2 Resultados principais

Esta seção é dedicada à prova de que toda solução de (3.3)-(3.4) é oscilatória sobre as hipóteses (H_1) a (H_4).

Lema 3.2. *Suponhamos que as hipóteses* (H_1)-(H_4) *estejam satisfeitas e que exista* $T \geq t_0$ *tal que* $x(t) > 0$*, para* $t \geq T - \tau$*. Então* $x'(t_k) \geq 0$ *e* $x'(t) \geq 0$*, para* $t \in [t_k, t_{k+1})$*, onde* $t_k \geq T$*.*

Demonstração: Suponhamos que $x(t) > 0$, para $t \geq T - \tau$. Então $x(t - \tau) > 0$, $t \geq T$. Primeiramente, provaremos que $x'(t_k^-) \geq 0$, $t_k \geq T$. Suponhamos o contrário. Seja $t_j \geq T$ tal que $x'(t_j^-) < 0$. De (H_3) e (3.3), obtemos

$$x'(t_j) = J_j(x'(t_j^-)) \leq c_j x'(t_j^-) < 0.$$

Seja $x'(t_j) = -\alpha$, $\alpha > 0$. De (H_1) e (H_2), dado $t \in [t_j, t_{j+1})$, vale

$$x''(t) \leq -g(t, x(t), x(t-\tau)) \leq -p(t)\varphi(x(t-\tau)) \leq 0.$$

Então $x'(t)$ é decrescente em $t \in [t_j, t_{j+1})$. Além disso, temos

$$\begin{aligned}
x'(t_{j+1}^-) &\leq x'(t_j) = -\alpha < 0, \\
x'(t_{j+2}^-) &\leq x'(t_{j+1}) = J_{j+1}(x'(t_{j+1}^-)) \leq c_{j+1}x'(t_{j+1}^-) \leq c_{j+1}(-\alpha) < 0, \\
x'(t_{j+3}^-) &\leq x'(t_{j+2}) = J_{j+2}(x'(t_{j+2}^-)) \leq c_{j+2}x'(t_{j+2}^-) \leq c_{j+2}c_{j+1}(-\alpha) < 0.
\end{aligned}$$

Daí, por indução, obtemos

$$x'(t_{j+n}^-) \leq -\prod_{i=1}^{n-1} c_{j+i}\,\alpha < 0. \tag{3.8}$$

Portanto $x'(t)$ é decrescente em $[t_j, +\infty)$.

Agora consideremos as desigualdades diferenciais impulsivas

$$\begin{aligned}
x''(t) &\leq 0, \quad t > t_j, \quad t \neq t_k, \ \ k = j+1, j+2, \ldots \\
x'(t_k) &\leq c_k\, x'(t_k^-), \qquad k = j+1, j+2, \ldots.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 3.1 com $m(t) = x'(t)$, temos

$$m(t) \leq m(t_j^-) \prod_{t_j < t_k < t} c_k,$$

isto é,

$$x'(t) \leq x'(t_j^-) \prod_{t_j < t_k < t} c_k. \tag{3.9}$$

De (3.9) e sabendo que $x(t_k) = I_k(x(t_k^-)) \leq b_k x(t_k^-)$, para $k = j+1, j+2, \ldots$, segue do Lema 3.1, que

$$x(t) \leq \prod_{t_j < t_k < t} b_k \left[x(t_j^-) + x'(t_j^-) \int_{t_j}^{t} \prod_{t_j < t_k < s} \frac{c_k}{b_k}\, ds \right]. \tag{3.10}$$

De (H_4) e tomando j suficientemente grande, obtemos $x(t) \leq 0$. Mas isto contradiz o fato de que $x(t) > 0$, para $t \geq T - \tau$. Logo $x'(t_k^-) \geq 0$, $t_k \geq T$.

Segue de (H_3) que $x'(t_k) \geq c_k\, x'(t_k^-) \geq 0$ para todo $t_k \geq T$. Como $x'(t)$ é decrescente em $[t_k, t_{k+1})$, obtemos $x'(t) \geq x'(t_k) \geq 0$, $t \in [t_k, t_{k+1})$, $t_k \geq T$ e a prova está completa. ■

Quando $x(t)$ é negativa no futuro, diante das hipóteses (H_1) a (H_4), podemos provar de maneira análoga que $x'(t_k) \leq 0$ e $x'(t) \leq 0$, para $t \in [t_k, t_{k+1})$, onde $t_k \geq T$.

Teorema 3.3. *Suponhamos que as hipóteses* (H_1)-(H_4) *estejam satisfeitas e que exista um inteiro positivo* k_0 *tal que* $a_k \geq 1$*, para todo* $k \geq k_0$*. Se*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \prod_{t_0<t_k<u} \frac{1}{d_k}\, p(u)\, du = +\infty, \tag{3.11}$$

então toda solução de (3.3)-(3.4) *oscila.*

Demonstração: Suponhamos, sem perda de generalidade, que $k_0 = 1$. Seja $x(t)$ uma solução não-oscilatória de (3.3)-(3.4). Vamos assumir que $x(t) > 0$, $t \geq t_0$. Pelo Lema 3.2, sabemos que $x'(t) \geq 0$ e $x'(t_k) \geq 0$, $t \in [t_k, t_{k+1})$, onde $t_k \geq t_0$.

De (H_3) e pelo fato de que $a_k \geq 1$, $k = 1, 2, \ldots$, obtemos

$$x(t_0) < x(t_1^-) \leq x(t_1) \leq x(t_2^-) \leq \ldots .$$

Logo $x(t)$ é não-decrescente em $[t_0, +\infty)$.

Agora seja

$$m(t) = \frac{x'(t)}{\varphi(x(t-\tau))}. \tag{3.12}$$

Então $m(t_k) \geq 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$, e $m(t) \geq 0$, $t \geq t_0$. De (H_1) e da equação (3.3), obtemos

$$\begin{aligned} m'(t) &= \frac{-f(t, x(t), x'(t)) - g(t, x(t), x(t-\tau))}{\varphi(x(t-\tau))} - \frac{x'(t)\varphi'(x(t-\tau))x'(t-\tau)}{\varphi^2(x(t-\tau))} \\ &\leq -p(t), \qquad t \geq t_0, \qquad t \neq t_k,\ \ t_k + \tau. \end{aligned}$$

Segue de (H_3), (3.3) e dos fatos de que $a_k \geq 1$ e $\varphi'(x) \geq 0$ que, para todo $k \geq k_0 = 1$, valem

$$m(t_k) = \frac{x'(t_k)}{\varphi(x(t_k - \tau))} \leq \frac{d_k x'(t_k^-)}{\varphi(x(t_k^- - \tau))} = d_k m(t_k^-) \tag{3.13}$$

e

$$m(t_k + \tau) = \frac{x'(t_k + \tau)}{\varphi(x(t_k))} \leq \frac{x'(t_k^- + \tau)}{\varphi(a_k x(t_k^-))} \leq \frac{x'(t_k^- + \tau))}{\varphi(x(t_k^-))} = m(t_k^- + \tau). \tag{3.14}$$

Pelas equações (3.13) e (3.14) e pelo Lema 3.1, obtemos

$$m(t) \leq m(s) \prod_{s<t_k<t} d_k - \int_s^t \prod_{u<t_k<t} d_k\, p(u)\, du, \quad t_0 \leq s \leq t. \tag{3.15}$$

Sejam $s \to t_0$ e $t \to t_1^-$. De (3.13) e (3.15), temos

$$m(t_1) \le d_1 m(t_1^-) \le d_1 \left[m(t_0) - \int_{t_0}^{t_1} p(u)\,du \right] = d_1 m(t_0) - d_1 \int_{t_0}^{t_1} p(u)\,du. \tag{3.16}$$

Analogamente, pelas desigualdades (3.14) e (3.16) e sabendo que $t_2 - t_1 > \tau$, obtemos

$$\begin{aligned} m(t_2) \le d_2 m(t_2^-) &\le d_2 \left[m(t_1+\tau) - \int_{t_1+\tau}^{t_2} p(u)\,du \right] \\ &\le d_2 \left[m(t_1^- + \tau) - \int_{t_1+\tau}^{t_2} p(u)\,du \right] \\ &\le d_2 \left[m(t_1) - \int_{t_1}^{t_2} p(u)\,du \right] \\ &\le d_2\, d_1 m(t_0) - d_2\, d_1 \int_{t_0}^{t_1} p(u)\,du - d_2 \int_{t_1}^{t_2} p(u)\,du. \end{aligned}$$

Por indução, temos

$$\begin{aligned} m(t_n) &\le d_1 d_2 \cdots d_n m(t_0) - d_1 d_2 \cdots d_n \int_{t_0}^{t_1} p(u)\,du - d_2 \cdots d_n \int_{t_1}^{t_2} p(u)\,du \\ &\quad - \cdots - d_{n-1} d_n \int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} p(u)\,du - d_n \int_{t_{n-1}}^{t_n} p(u)\,du \\ &= \prod_{t_0 < t_k < t_{n+1}} d_k \left[m(t_0) - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \prod_{t_0 < t_k < u} \frac{1}{d_k}\, p(u)\,du \right]. \end{aligned}$$

Uma vez que (3.11) está satisfeita e $m(t_n) \ge 0$, fazendo $n \to +\infty$, chegamos a uma contradição e isto conclui a prova. ■

O Teorema 3.3 e a desigualdade (3.11) nos permitem provar os seguintes corolários.

Corolário 3.4. *Suponhamos que as hipóteses* (H_1)-(H_4) *estejam satisfeitas e que exista um inteiro positivo* k_0 *tal que* $a_k \ge 1$ *e* $d_k \le 1$*, para todo* $k \ge k_0$*. Se*

$$\int_{t_0}^{+\infty} p(u)\,du = +\infty,$$

então toda solução de (3.3)-(3.4) *oscila.*

Demonstração: Suponhamos, sem perda de generalidade, que $k_0 = 1$. Como $\dfrac{1}{d_k} \ge 1$, temos

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \prod_{t_0<t_k<u} \frac{1}{d_k}\, p(u)\, du = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \prod_{t_0<t_k<u} \frac{1}{d_k}\, p(u)\, du \right)$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n\to+\infty} \left(\int_{t_0}^{t_1} p(u)\, du + \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{d_1} p(u)\, du + \int_{t_2}^{t_3} \frac{1}{d_1 d_2} p(u)\, du + \cdots \right. \\ &\qquad \left. + \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{1}{d_1 d_2 \cdots d_{n-1}} p(u)\, du + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{1}{d_1 d_2 \cdots d_n} p(u)\, du \right) \\ &\geq \lim_{n\to+\infty} \left(\int_{t_0}^{t_1} p(u)\, du + \int_{t_1}^{t_2} p(u)\, du + \int_{t_2}^{t_3} p(u)\, du + \cdots \right. \\ &\qquad \left. + \int_{t_{n-1}}^{t_n} p(u)\, du + \int_{t_n}^{t_{n+1}} p(u)\, du \right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left(\int_{t_0}^{t_{n+1}} p(u) du \right) = +\infty\,. \end{aligned}$$

Logo a condição (3.11) está satisfeita. Portanto, pelo Teorema 3.3, toda solução do problema impulsivo (3.3)-(3.4) oscila. ■

Corolário 3.5. *Suponhamos que* (H_1)-(H_4) *estejam satisfeitas e que existam um inteiro positivo* k_0 *e uma constante* $\alpha > 0$ *tais que* $a_k \geq 1$ *e* $\dfrac{1}{d_k} \geq t_{k+1}^{\alpha}$, *para todo* $k \geq k_0$. *Se*

$$\int_{t_1}^{+\infty} t^{\alpha} p(t)\; dt = +\infty,$$

então toda solução de (3.3)-(3.4) *oscila.*

Demonstração: Suponhamos, sem perda de generalidade, que $k_0 = 1$ e $t_1 \geq 1$. Como $\dfrac{1}{d_k} \geq t_{k+1}^{\alpha}$, para todo $k \geq k_0$, obtemos

$$1 \leq t_1 < \ldots < t_k < t_{k+1} < \ldots$$

e

$$\begin{aligned} \frac{1}{d_1} &\geq t_2^{\alpha}, \\ \frac{1}{d_1}\frac{1}{d_2} &\geq t_2^{\alpha}\, t_3^{\alpha} \geq t_3^{\alpha}, \ldots, \\ \frac{1}{d_1}\frac{1}{d_2}\cdots\frac{1}{d_n} &\geq t_2^{\alpha}\, t_3^{\alpha} \cdots t_{n+1}^{\alpha} \geq t_{n+1}^{\alpha}, \ldots. \end{aligned}$$

Logo

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\prod_{t_0<t_k<u}\frac{1}{d_k}\,p(u)\,du=\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\prod_{t_0<t_k<u}\frac{1}{d_k}\,p(u)\,du\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n\to+\infty}\left(\int_{t_0}^{t_1}p(u)\,du+\int_{t_1}^{t_2}\frac{1}{d_1}\,p(u)\,du+\int_{t_2}^{t_3}\frac{1}{d_1d_2}\,p(u)\,du+\cdots\right.\\
&\qquad\left.+\int_{t_{n-1}}^{t_n}\frac{1}{d_1d_2\cdots d_{n-1}}\,p(u)\,du+\int_{t_n}^{t_{n+1}}\frac{1}{d_1d_2\cdots d_n}\,p(u)\,du\right)\\
&\ge \lim_{n\to+\infty}\left(\int_{t_0}^{t_1}p(u)\,du+\int_{t_1}^{t_2}t_2^{\alpha}\,p(u)\,du+\int_{t_2}^{t_3}t_3^{\alpha}\,p(u)\,du+\cdots\right.\\
&\qquad\left.+\int_{t_{n-1}}^{t_n}t_n^{\alpha}\,p(u)\,du+\int_{t_n}^{t_{n+1}}t_{n+1}^{\alpha}\,p(u)\,du\right)\\
&\ge \lim_{n\to+\infty}\left(\int_{t_1}^{t_2}u^{\alpha}\,p(u)\,du+\int_{t_2}^{t_3}u^{\alpha}\,p(u)\,du+\cdots\right.\\
&\qquad\left.+\int_{t_{n-1}}^{t_n}u^{\alpha}\,p(u)\,du+\int_{t_n}^{t_{n+1}}u^{\alpha}\,p(u)\,du\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(\int_{t_1}^{t_{n+1}}u^{\alpha}\,p(u)du\right)=\int_{t_1}^{+\infty}u^{\alpha}\,p(u)\,du=+\infty\,.
\end{aligned}$$

Portanto, a condição (3.11) está satisfeita. Pelo Teorema 3.3, toda solução de (3.3)-(3.4) oscila. ■

Teorema 3.6. *Suponhamos que* (H_1)-(H_4) *estejam satisfeitas e que* $\varphi(ab)\ge\varphi(a)\varphi(b)$, *para todo* $ab\neq 0$. *Se*

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\prod_{t_0<t_k<u}\frac{\varphi(a_k)}{d_k}\,p(u)\,du=+\infty, \tag{3.17}$$

então toda solução de (3.3)-(3.4) *oscila.*

Demonstração: Seja $x(t)$ uma solução não-oscilatória de (3.3)-(3.4). Suponhamos que $x(t)>0$, $t\ge t_0$. Pelo Lema 3.2, $x'(t)\ge 0$ e $x'(t_k)\ge 0$, $t\in[t_k,t_{k+1})$, onde $t_k\ge t_0$. Seja $m(t)$ definido como em (3.12). Então $m(t_k)\ge 0$ para $k=1,2,\ldots$ e $m(t)\ge 0$, $t\ge t_0$. De (H_1) e (3.3), temos

$$m'(t)\ \le\ -p(t),\qquad t\ge t_0,\quad t\neq t_k,\ \ t_k+\tau.$$

Segue de (H_3), (3.3) e dos fatos de que $\varphi(ab)\ge\varphi(a)\varphi(b)$ e $\varphi'(x)\ge 0$ que, para $k=1,2,\ldots$,

$$m(t_k)\ =\ \frac{x'(t_k)}{\varphi(x(t_k-\tau))}\le\frac{d_kx'(t_k^-)}{\varphi(x(t_k^--\tau))}=d_km(t_k^-) \tag{3.18}$$

e

$$\begin{aligned} m(t_k+\tau) &= \frac{x'(t_k+\tau)}{\varphi(x(t_k))} \leq \frac{x'(t_k^-+\tau)}{\varphi(a_k x(t_k^-))} \\ &\leq \frac{x'(t_k^-+\tau))}{\varphi(a_k)\varphi(x(t_k^-))} = \frac{1}{\varphi(a_k)} m(t_k^-+\tau). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Usando (3.18) e (3.19), pelo Lema 3.1, obtemos

$$m(t) \leq m(s) \prod_{s<t_k<t} d_k - \int_s^t \prod_{u<t_k<t} d_k\, p(u)\, du, \quad t_0 \leq s \leq t. \tag{3.20}$$

Sejam $s \to t_0$ e $t \to t_1^-$. Segue de (3.19) e (3.20) que

$$m(t_1) \leq d_1 m(t_1^-) \leq d_1 \left[m(t_0) - \int_{t_0}^{t_1} p(u)\, du \right] = d_1 m(t_0) - d_1 \int_{t_0}^{t_1} p(u)\, du. \tag{3.21}$$

Analogamente, pelas desigualdades (3.19), (3.21) e sabendo que $t_2 - t_1 > \tau$, obtemos

$$\begin{aligned} m(t_2) \leq d_2 m(t_2^-) &\leq d_2 \left[m(t_1+\tau) - \int_{t_1+\tau}^{t_2} p(u)\, du \right] \\ &\leq d_2 \left[\frac{1}{\varphi(a_1)} m(t_1^-+\tau) - \int_{t_1+\tau}^{t_2} p(u)\, du \right] \\ &\leq d_2 \left[\frac{1}{\varphi(a_1)} m(t_1) - \int_{t_1}^{t_2} p(u)\, du \right] \\ &\leq \frac{d_2\, d_1}{\varphi(a_1)} m(t_0) - \frac{d_2\, d_1}{\varphi(a_1)} \int_{t_0}^{t_1} p(u)\, du - d_2 \int_{t_1}^{t_2} p(u)\, du. \end{aligned}$$

Por indução, obtemos

$$\begin{aligned} m(t_n) \quad \leq \quad & \frac{d_1 d_2 \cdots d_n}{\varphi(a_1)\varphi(a_2)\cdots\varphi(a_{n-1})} \left[m(t_0) - \int_{t_0}^{t_1} p(u)\, du - \frac{\varphi(a_1)}{d_1} \int_{t_1}^{t_2} p(u)\, du \right. \\ & - \cdots - \frac{\varphi(a_1)\varphi(a_2)\cdots\varphi(a_{n-2})}{d_1 d_2 \cdots d_{n-2}} \int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} p(u)\, du \\ & \left. - \frac{\varphi(a_1)\varphi(a_2)\cdots\varphi(a_{n-1})}{d_1 d_2 \cdots d_{n-1}} \int_{t_{n-1}}^{t_n} p(u)\, du \right] \\ = \quad & \frac{d_1 d_2 \cdots d_n}{\varphi(a_1)\varphi(a_2)\cdots\varphi(a_{n-1})} \left[m(t_0) - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \prod_{t_0<t_k<u} \frac{\varphi(a_k)}{d_k}\, p(u)\, du \right]. \end{aligned}$$

Uma vez que (3.17) está satisfeita e $m(t_n) \geq 0$, fazendo $n \to +\infty$ chegamos a uma contradição e isto conclui a prova. ∎

Corolário 3.7. *Suponhamos que* (H_1)-(H_4) *estejam satisfeitas e que existam um inteiro positivo* k_0 *e uma constante* $\alpha > 0$ *tais que* $\dfrac{\varphi(a_k)}{d_k} \geq t_{k+1}^{\alpha}$, *para todo* $k \geq k_0$. *Se*

$$\int_{t_1}^{+\infty} t^{\alpha} p(t)\, dt = +\infty,$$

então toda solução de (3.3)-(3.4) *oscila.*

A prova do Corolário 3.7 será omitida, pois sua prova pode ser deduzida do Teorema 3.6 que, por sua vez, é similar à prova do Corolário 3.5.

3.3 Um exemplo

Consideremos a equação diferencial retardada impulsiva

$$\begin{cases} x''(t) + x(t-\tau) + \arctan|x'(t)| = 0, \quad t \geq 0, \quad t \neq t_k \\ x(t_k) = \left(\dfrac{k+1}{k}\right) x(t_k^-), \qquad x'(t_k) = x'(t_k^-), \quad k = 1, 2, \ldots, \\ x(t) = \phi(t), \quad -\tau \leq t \leq 0, \end{cases} \tag{3.22}$$

onde $t_{k+1} - t_k > \tau > 0$, $k = 1, 2, \ldots$ e $\phi, \phi' : [-\tau, 0] \to \mathbb{R}$ são funções contínuas.

Como $\varphi(v) = v$, $p(t) = 1$, $a_k = b_k = \dfrac{k+1}{k}$ e $c_k = d_k = 1$, $k = 1, 2, \ldots$, então as hipóteses (H_1), (H_2) e (H_3) estão satisfeitas. Notemos que

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{t_0}^{t} \prod_{t_0<t_k<s} \frac{c_k}{b_k}\, ds = \int_{t_0}^{+\infty} \prod_{t_0<t_k<s} \frac{k}{k+1}\, ds$$

$$\begin{aligned} &= \int_{t_0}^{t_1} \prod_{t_0<t_k<s} \frac{k}{k+1}\, ds + \int_{t_1}^{t_2} \prod_{t_0<t_k<s} \frac{k}{k+1}\, ds + \int_{t_2}^{t_3} \prod_{t_0<t_k<s} \frac{k}{k+1}\, ds + \cdots \\ &= (t_1 - t_0) + \frac{1}{2}(t_2 - t_1) + \frac{1}{3}(t_3 - t_2) + \cdots \\ &> \tau\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots\right) = +\infty\,. \end{aligned}$$

Logo a hipótese (H_4) também está satisfeita.

Seja $k_0 = 1$. Então $a_k \geq 1$ e $d_k = 1$, para todo $k \geq 1$. Como

$$\int_{t_0}^{+\infty} p(u)\, du = \int_0^{+\infty} du = +\infty,$$

pelo Corolário 3.5, concluímos que toda solução $x(t)$ do problema (3.22) oscila. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] D. D. Bainov; M. B. Dimitrova; A. B. Dishliev, *Oscillation of the bounded solutions of impulsive differential-difference equations of second order*, Appl. Math. Comput. 114 (2000), 61-68.

[2] M. Z. Baptistini; P. Z. Táboas, *On the stability of some exponential polynonials*, J. Math. Anal. Appl. 205 (1997), 259-272.

[3] R. Bellman, *Stability theory of differential equations*, Dover (1969).

[4] M. Benchohra; J. Henderson; S. K. Ntouyas, *An existence result for first-order impulsive functional differential equations in Banach spaces*, Comput. Math. Appl. 42 (2001), 1303-1310.

[5] M. Benchohra; J. Henderson; S. K. Ntouyas, A. Quahab, *Higher order impulsive functional differential equations with variable times*, Dynam. Systems Appl. 12 (2003), 383-392.

[6] M. Benchohra; J. Henderson; S. K. Ntouyas, A. Quahab, *Impulsive functional differential equations with variable times*, Comput. Math. Appl. 47 (2004), 1659-1665.

[7] Y. Chen; W. Feng, *Oscillations of second order nonlinear ODE with impulses*, J. Math. Anal. Appl. 210 (1997), 150-169.

[8] J. Džurina, *Oscillation criteria for second order nonlinear retarded differential equations*, Math. Slovaca 54 (2004), 245-253.

[9] L. P. Gimenes; M. Federson, *Existence and impulsive stability for second order retarded differential equations*, Appl. Math. Comput. 177 (1) (2006), 44-62. (doi:10.1016/j.amc.2005.10.038).

[10] L. P. Gimenes; M. Federson, *Oscillation by impulses for a second order delay differential equation*, Comput. Math. Appl. 52 (2006), 819-828. (doi:10.1016/j.camwa.2006.06.001).

[11] L. P. Gimenes; M. Federson; P. Z. Táboas, *Impulsive stability for systems of second order differential equation*, Nonlinear Anal. 67 (2007). (doi:10.1016/j.na.2006.06.006).

[12] J. K. Hale; S. M. V. Lunel, *Introduction to functional differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1993.

[13] Z. He; W. Ge, *Oscillations of second-order nonlinear impulsive ordinary differential equations*, J. Comput. Appl. Math. 158 (2003), 397-406.

[14] V. V. Koslov; D. V. Treshcheëv, *Billiards - A genetic introduction to the dynamics of systems with impacts*, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Isle, 1991.

[15] V. Lakshmikantham; D. D. Bainov; P. S. Simeonov, *Theory of impulsive differential equations*, World Scientific, Singapore, 1989.

[16] X. Li; P. Weng, *Impulsive stabilization of two kinds of second-order linear delay differential equations*, J. Math. Anal. Appl. 291 (2004), 270-281.

[17] W. Li; H. Huo, *Global attractivity of positive periodic solutions for an impulsive delay periodic model of respiratory dynamics*, J. Comput. Appl. Math. 174 (2005), 227-238.

[18] B. Liu; X. Liu; K. L. Teo; Q. Wang, *Razumikhin-type theorems on exponential stability of impulsive delay systems*, IMA J. Appl. Math. 71 (2006), 47-61.

[19] X. Liu; G. Ballinger, *Existence and uniqueness results for impulsive delay differential equations*, Dyn. Contin. Discrete Impuls. Systems 5 (1999), 579-591.

[20] X. Liu; G. Ballinger, *Uniform asymptotic stability of impulsive delay differential equations*, Comput. Math. Appl. 41 (2001), 903-915.

[21] X. Liu; G. Ballinger, *Existence and continuability of solutions for differential equations with delays and state-dependent impulses*, Nonlinear Anal. 51 (2002), 633-647.

[22] X. Liu; G. Ballinger, *Boundedness for impulsive delay differential equations and applications to population growth models*, Nonlinear Anal. 53 (2003), 1041-1062.

[23] X. Liu; G. Ballinger, *Continuous dependence on initial values for impulsive delay differential equations*, Appl. Math. Lett. 17 (2004) 483-490.

[24] X. Liu; B. Xu, *Exponentially asymptotic stability with impulsive effect for delay-differential systems*, Impulsive Dynamical Systems and Applications 2 (2004) 59-66.

[25] Z. Luo; J. Shen, *New razumikhin type theorems for impulsive functional differential equations*, Appl. Math. Comput. 125 (2002), 375-386.

[26] J. Luo, *Second-order quasilinear oscillation with impulses*, Comput. Math. Appl. 46 (2003), 279-291.

[27] Q. Meng; J. Yan, *Bounded oscillation for second order non-linear neutral delay differential equations in critical and non-critical cases*. Nonlinear Anal. 64 (2006), 1543-1561.

[28] M. Peng; W. Ge, *Oscillation criteria for second-order nonlinear differential equations with impulses*, Comput. Math. Appl. 39 (2000), 217-225.

[29] M. Peng, *Oscillation theorems of second-order nonlinear neutral delay difference equations with impulses*, Comput. Math. Appl. 44 (2002), 741-748.

[30] P. Qi-lin, *Qualitative analysis for a class of second-order nonlinear system with delay*, Appl. Math. Mech. 22 (2001), 842-845.

[31] X. Lin, *Oscillation of second-order nonlinear neutral differential equations*, J. Math. Anal. Appl. 309 (2005), 442-452.

[32] Y. G. Sun; S. H. Saker, *Oscillation for second-order nonlinear neutral delay difference equations*, Appl. Math. Comput. 163 (2005), 909-918.

[33] J. Yan, *Oscillation properties of a second-order impulsive delay differential equation*, Comput. Math. Appl. 47 (2004), 253-258.

[34] Q. Yang; L. Yang; S. Zhu, *Interval criteria for oscillation of second-order nonlinear neutral differential equations*, Comput. Math. Appl. 46 (2003), 903-918.

[35] B. G. Zhang; Zhu Shanliang, *Oscillation of second-order nonlinear delay dynamic equations on time scales*, Comput. Math. Appl. 49 (2005), 599-609.

Índice Remissivo