
Avanços em dinâmica parcialmente
hiperbólica e entropia para sistema iterado de
funções

Fernando Pereira Micena

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Avanços em dinâmica parcialmente hiperbólica e entropia para sistema iterado de funções

Fernando Pereira Micena

Orientador: *Prof. Dr. Ali Tahzibi*

Co-orientador: *Prof. Dr. Federico Juan Rodriguez Hertz*

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências - Matemática.
VERSÃO REVISADA.

USP – São Carlos
Abril de 2011

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

P619a Pereira Micena, Fernando
 Avanços em dinâmica parcialmente hiperbólica e
entropia para sistema iterado de funções. / Fernando
Pereira Micena; orientador Ali Tahzibi -- São
Carlos, 2.
 89 p.

 Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em
Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e
de Computação, Universidade de São Paulo, 2.

 1. difeomorfismos parcialmente hiperbólicos. 2.
continuidade absoluta. 3. folheação central. 4.
entropia . 5. sistema iterado de funções. I. Tahzibi,
Ali, orient. II. Título.

*A meus pais: José e
Dirce, meus irmãos
Marcelo e Raul,
minha esposa
Mirian e meu filho
João Miguel.*

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por tudo que Ele tem feito em minha vida. Meu agradecimento a Deus se fará a cada demonstração de gratidão aqui expressa, pois se sendo gratidão nestas linhas, há muito da presença de Deus em cada dia vivido e pessoas que me acompanharam e contribuíram para que chegasse a digitar esta tese de doutorado.

Agradeço a minha família, melhor dizendo, as minhas famílias: agradeço a meus pais José e Dirce. Maiores inspirações do meu caráter e minha vida. A meus pais e irmãos: Marcelo e Raul, agradeço por todo amor, força, confiança, companheirismo, amizade, lições de vida, e tantas coisas mais, que fizeram de mim muito da pessoa que sou. Sem estas pessoas tão especiais em minha vida, não chegaria aqui, ou no mínimo, o caminho seria muito mais penoso.

Agradeço a minha esposa Mirian pela força, ânimo, encorajamento,... Agradeço a ela por fazer-me descobrir o amor que não mede distâncias, amor maior e mais especial até então jamais vivido. E se faltam palavras para agradecer a minha esposa, é porque também não há palavras que descrevam quão importante e especial ela se faz em minha vida. A minha “riqueza”, meu filho João Miguel, agradeço por toda força que me fez descobrir e com ela lutar, e principalmente estar vivendo com ele e minha esposa, a inexplicável e mágica sensação do amor de pai.

Expresso meus agradecimentos aos orientadores Ali Tahzibi e Federico Hertz, agradeço o encorajamento, paciência, às cobranças e ensinamentos matemáticos,

sem os quais seria impossível desenvolver este trabalho. Não poderia deixar de agradecer também a todo empenho, ânimo e interesse por parte de Ali e Federico para que pudesse realizar algum avanço matemático. Sobretudo, sou grato à amizade e a liberdade que sempre tive com meus orientadores para tratar de assuntos não só de caráter matemático.

Meus agradecimentos a todo corpo técnico e docente do IMERL e da Faculdade de Ciências da UdelaR-Uruguay, especialmente os professores Raúl Ures e Jana Rodriguez-Hertz não só pelas discussões matemáticas, mas também pelas conversas animadas e descontraídas durante minha estada em Montevideo.

Aos grandes amigos e trairões Juliano Oler, Ubarana, Marcus Bronzi, Kleyber e Jean agradeço a amizade e apoio de todas as horas e por compartilhar a dinamicamente os laburos de doutorado em nossa área. Aqui também, não poderia esquecer meus grandes amigos com quem partilho discussões filosóficas (sérias ou não): Nazira e seu noivo Marcio Tavernari, Lígia, Ana Paula, Taciana, Suzete, Rafael Rossato, Thaís Jordão, André Furtado e o abutresco Marcos Pimenta.

A meus grandes amigos de Uruguay: Gabriel Núñez, Silvio Baercke, Ana María e Diego Bonilla, minha gratidão pela amizade, nobreza, por sempre poder contar com vocês quando as coisas se mostravam duras enquanto estava tão longe de casa. É claro, não poderia esquecer de agradecer a todos os amigos da pensão da Tota, incluindo a própria Tota.

Manifesto meus agradecimentos a todas as pessoas que me acompanharam nesta caminhada ou em parte dela, que contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho. Incluo aqui, todos os professores e funcionários de escolas que estudei, amigos dispersos pelo mundo e perdidos no tempo, ...

Finalmente, agradeço a CAPES e a FAPESP pelo apoio financeiro.

Abstract

In this work we study relations between Lyapunov exponents, absolute continuity of center foliation for conservative partially hyperbolic diffeomorphisms of \mathbb{T}^3 . About this theme, (on a C^1 – open and C^2 –dense set) of conservative partially hyperbolic C^2 diffeomorphisms of the 3-torus presents non absolutely continuous center foliation. So, we answer positively a question proposed in [20].

Also in this work, we study topological entropy for Iterated Functions Systems. In this setting, we give a proof for a conjecture proposed in [14] and firstly proved in [15]. We present a geometrical method that allows us to calculate the entropy for transformations of S^1 , like in [15]. Furthermore this method holds for more general cases, for example: non commutative transformations.

Key Words: Partially Hyperbolic Diffeomorphisms, Absolute Continuity, Lyapunov Exponent, Center Foliation, Entropy, Iterated Functions System.

Resumo

Neste trabalho estudamos relações entre expoente de Lyapunov e continuidade absoluta da folheação central para difeomorfismos parcialmente hiperbólicos conservativos de \mathbb{T}^3 . Sobre tal tema, provamos que tipicamente (C^1 – aberto e C^2 –denso) os difeomorfismos parcialmente hiperbólicos, conservativos de classe C^2 , do toro \mathbb{T}^3 , apresentam folheação central não absolutamente contínua. Desta maneira, respondemos positivamente uma pergunta proposta em [20].

Também neste trabalho, estudamos entropia topológica para Sistema Iterado de Funções. Neste contexto, damos uma nova demonstração para uma conjectura proposta em [14] e provada primeiramente em [15]. Apresentamos um método geométrico que nos permite calcular entropia para transformações de S^1 , como em [15]. Além de disso o método apresentado se verifica para casos mais gerais, como por exemplo: transformações não comutativas.

Palavras Chave: Difeomorfismos Parcialmente Hiperbólicos, Continuidade Absoluta, Expoente de Lyapunov, Folheação Central, Entropia, Sistema Iterado de Funções.

Conteúdo

1	Introdução à Dinâmica Parcialmente Hiperbólica	7
1.1	Difeomorfismos Dinamicamente Coerentes	11
1.2	Acessibilidade e Ergodicidade	13
1.3	Expoentes de Lyapunov e Continuidade Absoluta da Folheação Central	14
1.4	Resultados Obtidos	20
2	Ingredientes Principais	25
2.1	Conjugação Central	25
2.2	Continuidade Absoluta de Folheações	28
2.3	Sobre Equações Cohomológicas	34
3	Prova do Teorema A1	37
4	Prova do Teorema B 1	62
5	Introdução à Entropia para Sistema Iterado de Funções	67
6	Resultados Obtidos	69
6.1	Resultados Preliminares	69
6.2	Demonstração Geométrica da Conjectura de Friedland	78

1 Introdução à Dinâmica Parcialmente Hiperbólica

Definição 1.1 (Difeomorfismo Parcialmente Hiperbólico). *Um difeomorfismo f é chamado parcialmente hiperbólico, se existem uma decomposição contínua, Df invariante do fibrado tangente*

$$TM = E_f^s \oplus E_f^c \oplus E_f^u$$

e constantes $\nu_- \leq \nu_+ < \mu_- \leq 1 \leq \mu_+ < \lambda_- \leq \lambda_+$ e $C > 0$, satisfazendo

$$\frac{1}{C}\nu_-^n \|v\| \leq \|Df^n(x)v\| \leq C\nu_+^n \|v\|, \forall v \in E_f^s,$$

$$\frac{1}{C}\mu_-^n \|v\| \leq \|Df^n(x)v\| \leq C\mu_+^n \|v\|, \forall v \in E_f^c,$$

$$\frac{1}{C}\lambda_-^n \|v\| \leq \|Df^n(x)v\| \leq C\lambda_+^n \|v\|, \forall v \in E_f^u.$$

É possível escolher uma métrica riemanniana em M , tal que possamos tomar $C = 1$, na definição acima.

Um conceito importante, no que se refere a difeomorfismos parcialmente hiperbólico é o conceito de *center bunched*.

Definição 1.2 (Center Bunched). *Seja $f : M \rightarrow M$, um difeomorfismo parcialmente hiperbólico sobre uma variedade riemanniana compacta. O difeomorfismo f é chamado center bunched, se é possível escolher funções contínuas positivas $\nu, \widehat{\nu}, \lambda, \widehat{\lambda} : M \rightarrow \mathbb{R}$, satisfazendo:*

$$\nu, \widehat{\nu} < 1 \text{ e } \nu < \lambda < \widehat{\lambda}^{-1} < \widehat{\nu}^{-1},$$

tais que, para todo $v \in T_p M$, com $\|v\| = 1$, temos

$$\|Df(p)v\| < \nu(p), \quad \text{se } v \in E_f^s(p),$$

$$\lambda(p) < \|Df(p)v\| < \widehat{\lambda}(p)^{-1}, \quad \text{se } v \in E_f^c(p),$$

$$\widehat{\nu}(p)^{-1} < \|Df(p)v\|, \quad \text{se } v \in E_f^u(p)$$

e

$$\max\{\nu, \widehat{\nu}\} < \lambda \widehat{\lambda}.$$

No caso em que $\dim E^c = 1$, a condição de center bunched é satisfeita trivialmente. De fato, escolha $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e tome funções contínuas definidas como seguem:

$$\lambda(p) = (1 - \varepsilon) \|Df(p)|_{E_f^c(p)}\|,$$

$$\widehat{\lambda}(p) = [(1 + \varepsilon) \|Df(p)|_{E_f^c(p)}]^{-1},$$

$$\nu(p) = (1 + \varepsilon) \max_{x \in M} \{ \|Df(x)|E_f^s(x)\| \},$$

$$\widehat{\nu}(p) = [(1 - \varepsilon) \min_{x \in M} \{ \|Df(x)|E_f^u(x)\| \}]^{-1}.$$

O valor de $\varepsilon > 0$ é escolhido tal que $\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}$, esteja suficientemente próximo de um. Assim, temos, desde que $\varepsilon > 0$ seja suficientemente pequeno que

$$\max\{\nu, \widehat{\nu}\} < 1$$

e

$$\max\{\nu, \widehat{\nu}\} < \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} = \lambda \widehat{\lambda}.$$

Exemplo 1. Seja $A : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, o difeomorfismo de Anosov sobre o toro \mathbb{T}^2 , induzido pela transformação linear dada pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e considere $f_0 : \mathbb{T}^2 \times S^1 \rightarrow \mathbb{T}^2 \times S^1$, tal que $f_0 = A \times Id$, isto é $f_0(x, y, \theta) = (A(x, y), \theta)$, é um exemplo de difeomorfismo parcialmente hiperbólico com

$$T\mathbb{T}^3 = E_{f_0}^s \oplus E_{f_0}^c \oplus E_{f_0}^u,$$

onde

$$E_{f_0}^s(x, y, \theta) = E_A^s(x, y)$$

$$E_{f_0}^u(x, y, \theta) = E_A^u(x, y)$$

$$E_{f_0}^c(x, y, \theta) = T_\theta S^1$$

Exemplo 2. *Sejam $f : M \rightarrow M$, e $g : N \rightarrow N$, difeomorfismos parcialmente hiperbólicos e suponha que*

1. $\sup \|Df|E^s\| < \inf m(Dg)$
2. $\sup \|Dg\| < \inf m(Df|E^u)$

Aqui $m(\cdot)$ denota a conorma de uma matriz invertível A , de modo que

$$m(A) = \|A^{-1}\|^{-1}.$$

Considere $F = f \times g : M \times N \rightarrow M \times N$, assim F é um difeomorfismo parcialmente hiperbólico tal que

- $E_F^s = E_f^s$
- $E_F^u = E_f^u$
- $E_F^c = E_f^c \oplus TN$.

Exemplo 3 (Difeomorfismos de Anosov). *Suponha $A : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$, um automorfismo linear dado por uma matriz A , que tem três autovalores reais ν, μ, λ , satisfazendo*

$$0 < |\nu| < 1 < |\mu| < |\lambda|.$$

Sejam E_ν, E_μ, E_λ os auto espaços correspondentes aos autovalores ν, μ, λ respectivamente. Assim, o difeomorfismo $A : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$ é parcialmente hiperbólico com a seguinte decomposição do fibrado tangente de \mathbb{T}^3 .

- $E_A^s = E_\nu$
- $E_A^u = E_\lambda$
- $E_A^c = E_\mu$.

1.1 Difeomorfismos Dinamicamente Coerentes

Uma importante questão sobre difeomorfismos parcialmente hiperbólicos é sobre a integrabilidade das distribuições E^s, E^c, E^u . A teoria de Hirsh-Pugh-Shub [22], estabelece que as distribuições E_f^s and E_f^u , respectivamente estável forte e instável forte de um difeomorfismo parcialmente hiperbólico f , estas são unicamente integráveis às folheações \mathcal{F}_f^s and \mathcal{F}_f^u , respectivamente. Desta maneira, estudar integrabilidade das distribuições $E^\sigma, \sigma \in \{s, c, u\}$, resume-se a estudar a integrabilidade da distribuição central.

Definição 1.3. *Um difeomorfismo parcialmente hiperbólico f é chamado dinamicamente coerente se as direções $E_f^{cs} = E_f^c \oplus E_f^s$ e $E_f^{cu} = E_f^c \oplus E_f^u$ são integráveis. Sejam $\mathcal{F}_f^{cs}, \mathcal{F}_f^{cu}$ folheações tangentes a E_f^{cs} e E_f^{cu} , respectivamente. Por intersecção de tais folhas obtemos a folheação central, tangente a E_f^c . A saber*

$$\mathcal{F}^c = \mathcal{F}_f^{cs} \cap \mathcal{F}_f^{cu}.$$

Teorema 1.4 ([11]). *Suponha que $f : M \rightarrow M$ é um difeomorfismo parcialmente hiperbólico. Se o subfibrado central E_f^c é unicamente integrável, então f é dinamicamente coerente com E_f^{cs} e E_f^{cu} , também unicamente integráveis.*

Definição 1.5. *Seja M , uma variedade riemanniana simplesmente conexa. Uma folheação \mathcal{W} de M é quasi isométrica se existem constantes Q, b positivas tais que*

$$d_W(x, y) \leq Q^{-1}d_M(x, y) + b,$$

sempre que x, y estão na mesma folha W . Aqui d_W denota a métrica riemanniana sobre W e d_M a métrica riemanniana sobre M .

Em outras palavras dizer que uma folheação \mathcal{W} de \mathbb{R}^d é quasi isométrica, significa dizer as folhas da folheação \mathcal{W} não se dobram sobre si mesmas muitas vezes.

Teorema 1.6 ([10]). *Seja M uma variedade compacta riemanniana e $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo parcialmente hiperbólico e $\dim E_f^c = 1$. Se as folheações $\tilde{\mathcal{F}}^s$ e $\tilde{\mathcal{F}}^u$ são quasi isométricas no espaço de recobrimento \tilde{M} , então $E_f^{cu}, E_f^{cs}, E_f^c$ são localmente unicamente integráveis. Se f é central isométrica, isto é, $\|d_x f|_{E_f^c(x)}\| = 1$, para todo $x \in M$, então E_f^c é localmente unicamente integrável.*

Teorema 1.7 ([12]). *Seja $f : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$ um difeomorfismo parcialmente hiperbólico. Então $\tilde{\mathcal{F}}_f^s$ e $\tilde{\mathcal{F}}_f^u$ são quasi isométricas.*

Note que pelos teoremas 1.6 e 1.7 obtemos.

Teorema 1.8 ([12]). *Todo difeomorfismo parcialmente hiperbólico de \mathbb{T}^3 é dinamicamente coerente.*

1.2 Acessibilidade e Ergodicidade

Seja $\mathcal{PH}_m^r(M)$, o conjunto dos difeomorfismos parcialmente hiperbólicos de M , de classe C^r , que preservam a medida de Lebesgue m em M .

É conhecido de Anosov [1]:

Teorema 1.9 (Anosov [1]). *Seja $f : M \rightarrow M$ um C^2 difeomorfismo conservativo de Anosov em M , então f é ergódico*

A prova do teorema acima envolve o conceito de continuidade absoluta das folheações estável e instável e argumento de Hopf. Para o estudo de ergodicidade de difeomorfismos parcialmente hiperbólicos conservativos, Pugh-Shub propõem um programa que consiste em provar que a propriedade de acessibilidade (definida a seguir), implica ergodicidade. De fato, munidos de acessibilidade e continuidade absoluta é possível repetir o argumento de Hopf em $\mathcal{PH}_m^r(M)$, $r \geq 2$.

Definição 1.10 (Acessibilidade). *Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo parcialmente hiperbólico. Dizemos que f é acessível se quaisquer x e y em M podem ser conectados por um s, u caminho, isto é, um caminho composto por segmentos sobre folhas de \mathcal{F}_f^s e \mathcal{F}_f^u .*

Definição 1.11 (Acessibilidade Essencial). *Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo parcialmente hiperbólico. Dizemos que f é essencialmente acessível ou tem a propriedade da acessibilidade essencial se qualquer conjunto mensurável em M , composto por folhas inteiras de \mathcal{F}_f^s e \mathcal{F}_f^u , tem medida nula ou total.*

No caso em que $\dim E^c = 1$, a propriedade de acessibilidade é sempre estável.

Teorema 1.12 ([33]). *Acessibilidade é aberta e densa em $\mathcal{PH}_m^r(M)$, $r \geq 1$, se $\dim E^c = 1$.*

Em particular este teorema implica a estabilidade ergódica dos difeomorfismos parcialmente hiperbólicos ao longo de $\mathcal{PH}_m^r(M)$, $r \geq 2$, quando $\dim E^c = 1$. Mais precisamente,

Teorema 1.13 ([33]). *Acessibilidade essencial implica Kolmogorov (em particular, ergodicidade) em $\mathcal{PH}_m^r(M)$, $r \geq 2$, se $\dim E^c = 1$.*

O assunto de estabilidade ergódica é muito vasto e rico, porém em nosso estudo interessa encontrar conjuntos genéricos, de modo que o teorema 1.12, tem especial importância, como veremos na seção seguinte.

1.3 Expoentes de Lyapunov e Continuidade Absoluta da Folheação Central

Seja M , uma variedade compacta riemanniana e $f : M \rightarrow M$, um difeomorfismo parcialmente hiperbólico, preservando uma medida μ equivalente a medida de Lebesgue m sobre M . É conhecido que as distribuições E_f^s e E_f^u de difeomorfismos parcialmente hiperbólicos conservativos são unicamente integráveis a folheações \mathcal{F}^s e \mathcal{F}^u respectivamente e tais folheações gozam da propriedade de continuidade absoluta. Embora haja diferentes conceitos de continuidade absoluta (que veremos na próxima seção), por agora, entendamos a continuidade absoluta como o seguinte:

Uma folheação \mathcal{W} de M é absolutamente contínua se, dado um conjunto boreliano Z , tal que

$$\lambda_W(Z \cap W) = 0$$

para quase toda folha W , então $m(Z) = 0$.

A medida λ_W é a medida de Lebesgue sobre a folha W .

Uma folheação que não tem a propriedade da continuidade absoluta acima, chamamos de patológica.

A primeira relação entre expoente de Lyapunov na direção central e continuidade absoluta da folheação central, foi relatada em um manuscrito de Mañé. Considera-se $f : M \rightarrow M$ um C^2 difeomorfismo parcialmente hiperbólico, conservativo, dimensão de E^c igual a um, dinamicamente coerente e cujas folhas centrais são círculos. Nesta configuração, Mañé obteve:

Se o expoente central $\lambda^c > 0$ para Lebesgue quase todo ponto, então a folheação central não é absolutamente contínua.

Para ilustrar a ideia fundamental da demonstração de Mañé, vamos supor que os comprimentos das folhas centrais são uniformemente limitados, isto é, existe $C > 0$. De fato, tal que $\lambda_W(W) < C$ para toda folha central W , onde λ_W é a métrica riemanniana induzida sobre W .

Fixado $\alpha > 0$ suficientemente pequeno, é possível encontrar, via blocos de Pesin, um conjunto Ω de medida arbitrariamente próxima a um, tal que

$$\|Dx f^n|_{E^c(x)}\| > e^{n\alpha}, \quad x \in \Omega$$

para todo n suficientemente grande.

Pela propriedade de continuidade absoluta da folheação central, existe uma folha W que intersecta Ω em conjunto A , tal que $\lambda_W(A) > 0$. Desta maneira,

para n grande temos

$$C > \lambda_{f^n(W)}(f^n(W)) > \lambda_{f^n(W)}(f^n(A)) > e^{n\alpha} \lambda_W(A)$$

que é uma contradição, desde que n seja arbitrariamente grande.

Tomando f como acima, quando a codimensão de $E_f^c|E_f^{c\sigma}$, $\sigma \in \{s, u\}$ é igual a um, supor que as folhas centrais tem volume uniformemente limitado é o caso mais geral possível, ver [13], página 47. Em particular, quando $\dim M = 3$ e as folhas centrais de f são todas círculos, então o volume de tais folhas é uniformemente limitado.

Pesin-Hirayama reelaboraram e generalizaram o argumento de Mañé, no que segue:

Teorema 1.14 ([21]). *Seja $f : M \rightarrow M$ um C^2 difeomorfismo parcialmente hiperbólico preservando uma medida suave μ . Assuma que*

1. *a distribuição central E^c é integrável a uma folheação \mathcal{F}^c com todas folhas compactas;*
2. *a integral $\int_M \log |\det Df|_{E^c}| d\mu \neq 0$.*

Então a folheação central \mathcal{F}^c não é absolutamente contínua.

O seguinte exemplo ilustra a existência de um difeomorfismo parcialmente hiperbólico conservativo de \mathbb{T}^3 , as folhas centrais são círculos e possui expoente central nulo, em Lebesgue quase todo ponto, mas a folheação central não é absolutamente contínua.

Exemplo 4 (Exemplo de Katok).

Seja $\{f_t : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2 | t \in S^1\}$ uma família de difeomorfismos de Anosov preservando volume com a seguinte propriedade:

- Para cada $s, t \in S^1$, com $s \neq t$, os difeomorfismos f_s e f_t são conjugados por $h_{s,t} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ próximo à identidade, mas não diferenciável.

A existência da família f_t segue-se de resultado de De la Llave [25], perturbando um automorfismo linear de Anosov $A : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, numa vizinhança de um ponto fixo. Além disso, o resultado de De la Llave garante que podemos escolher f_t de modo que $h_{s,t}$ absolutamente contínua quando $s \neq t$.

Defina $F : \mathbb{T}^2 \times S^1 \rightarrow \mathbb{T}^2 \times S^1$, dada por $F(x, t) = (f_t(x), t)$. Considerando a medida de Lebesgue em $\mathbb{T}^3 = \mathbb{T}^2 \times S^1$ como o produto das medidas de Lebesgue $m_{\mathbb{T}^2} \times m_{S^1}$, então o difeomorfismo F preserva $m_{\mathbb{T}^3} = m_{\mathbb{T}^2} \times m_{S^1}$.

O difeomorfismo F é parcialmente hiperbólico e as folheações estável forte e instável forte para F satisfazem

$$\mathcal{W}_F^\sigma(x, t) = \mathcal{W}_{f_t}^\sigma(x) \times \{t\}, \quad \sigma \in \{s, u\}.$$

O difeomorfismo F é construído de forma que, fixados s e x a aplicação $t \mapsto h_{s,t}(x)$ seja diferenciável. Desta maneira, fixados x e s , a folha central passando por $z = (x, s)$ é parametrizada por

$$\alpha_z(t) = (h_{s,t}(x), t) \quad t \in S^1,$$

de modo que as folhas centrais são todas círculos.

Note que, por propriedade de conjugação

$$F(\alpha(t)) = (f_t(h_{s,t}(x)), t) = (h_{s,t}(f_s(x)), t) \quad t \in S^1,$$

Em outras palavras

$$F(\alpha_z(t)) = \alpha_{F(z)}(t).$$

que é a curva da folheação central passando por $F(x, s) = (f_s(x), s)$.

Lema 1.15. *O expoente de Lyapunov central de F , no exemplo de Katok, é nulo para Lebesgue quase todo ponto de \mathbb{T}^3 .*

Demonstração. Para qualquer $z \in \mathbb{T}^3$, a parametrização da folha central passando por $z = (x, s)$, satisfaz

$$\alpha_{F^n(z)}(t) = F^n(\alpha_z(t)).$$

Derivando ambos os lados da expressão acima em relação a t , no ponto $t = 0$, obtemos:

$$\left\| \frac{d}{dt} \alpha_{F^n(z)}(0) \right\| = \|D_z F^n|E_z^c\| \left\| \frac{d}{dt} \alpha_z(0) \right\|$$

as parametrizações $\alpha_z, z \in \mathbb{T}^3$ são tais que as derivadas com relação a t tenham normas uniformemente limitadas. Assim, para todo $z \in \mathbb{T}^3$ e n inteiro temos:

$$\|D_z F^n|E_z^c\|$$

é uniformemente limitado por uma constante positiva independente de z e n , logo

$$\frac{1}{n} \log \|D_x F^n|E_x^c\| \rightarrow 0.$$

Isto mostra que o expoente de Lyapunov central de F , é nulo para todo ponto $z \in \mathbb{T}^3$. ■

Mostremos que a folheação central não é absolutamente contínua, obtendo um conjunto \mathcal{R} , tal que $m_{\mathbb{T}^3}(\mathcal{R}) = 1$, mas a interseção de \mathcal{R} , com cada folha central consiste no máximo de um único ponto.

Seja $\mathcal{R} = \{(x, s) \in \mathbb{T}^3 | x \text{ é um ponto regular para } f_s\}$.

Lema 1.16. *O conjunto \mathcal{R} encontra cada folha de \mathcal{W}_F^c em no máximo um único ponto.*

Demonstração. Seja $(x, s) \in \mathcal{R}$ e fixe $t \neq s$. As medidas $m_{\mathbb{T}^2}$ e $(h_{s,t})_* m_{\mathbb{T}^2}$, são ambas ergódicas para f_t . Desde que $h_{s,t}$ não é absolutamente contínua, essas duas medidas são singulares. Assim, se x é um ponto regular para f_s , então $h_{s,t}(x)$ é regular para f_t e a medida $(h_{s,t})_* m_{\mathbb{T}^2}$. Como $m_{\mathbb{T}^2}$ e $(h_{s,t})_* m_{\mathbb{T}^2}$ são medidas singulares, temos que $h_{s,t}(x)$ não é regular para $f_t(x)$ e a medida $m_{\mathbb{T}^2}$. Em outras palavras, isto significa dizer que $(h_{s,t}(x), t) \notin \mathcal{R}$, se $t \neq s$. Desta maneira a curva $\alpha_{(x,s)}(t), t \in S^1$, intersecta \mathcal{R} , apenas em (x, s) . ■

Definição 1.17. *Dizemos que $f : \mathbb{T}^2 \times S^1 \rightarrow \mathbb{T}^2 \times S^1$, é uma extensão de rotação de um difeomorfismo de Anosov $A : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, se existem uma função contínua $\alpha : \mathbb{T}^2 \rightarrow S^1$ e um homeomorfismo $h : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$, que conjuga f e a aplicação $g : \mathbb{T}^2 \times S^1 \rightarrow \mathbb{T}^2 \times S^1$, com*

$$g(x, \theta) = (Ax, \alpha(x) + \theta)$$

Um importante resultado sobre rigidez deve a Ávila, Viana e Wilkinson [2].

Teorema 1.18 ([2]). *Seja f um difeomorfismo parcialmente hiperbólico conservativo de classe C^∞ de \mathbb{T}^3 . Assuma que a folheação central é absolutamente contínua, $\lambda^c = 0$ para Lebesgue quase todo ponto e que as folhas centrais são compactas. Então, a menos de recobrimento finito, f é C^∞ conjugado a uma extensão de rotação de um difeomorfismo de Anosov do toro \mathbb{T}^2 .*

1.4 Resultados Obtidos

Definamos os seguintes subconjuntos de $\mathcal{PH}_m^2(\mathbb{T}^3)$.

$$\mathcal{PH}_{m,+}^2(\mathbb{T}^3) = \{f \in \mathcal{PH}_m^2(\mathbb{T}^3) \mid \lambda^c > 0, m \text{ quase todo ponto.}\},$$

$$\mathcal{PH}_{m,-}^2(\mathbb{T}^3) = \{f \in \mathcal{PH}_m^2(\mathbb{T}^3) \mid \lambda^c < 0, m \text{ quase todo ponto.}\}.$$

Teorema 1.19 ([3]). *Sejam M uma variedade riemanniana compacta e ω uma forma de volume suave sobre M . Seja $f : M \rightarrow M$, um difeomorfismo C^2 , preservando ω e estavelmente ergódico. Suponha que TM admite uma decomposição dominada parcialmente hiperbólica $TM = E_f^s \oplus E_f^c \oplus E_f^u$, então C^1 arbitrariamente próximo a f existe um C^2 difeomorfismo $g : M \rightarrow M$, que preserva ω tal que λ_g^c é não nulo.*

Proposição 1.20. *Existem subconjuntos \mathcal{U}_σ , de $\mathcal{PH}_{m,\sigma}^2(\mathbb{T}^3)$, $\sigma \in \{+, -\}$, os quais são C^1 abertos e C^2 densos em $\mathcal{PH}_{m,\sigma}^2(\mathbb{T}^3)$. A união $\mathcal{U} = \bigcup_{\sigma \in \{+,-\}} \mathcal{U}_\sigma$ é C^1 aberta e densa em $\mathcal{PH}_m^2(\mathbb{T}^3)$.*

Demonstração. Para $\sigma \in \{+, -\}$, considere os conjuntos:

$$\mathcal{U}_\sigma = \{f \in \mathcal{PH}_{m,\sigma}^2(\mathbb{T}^3) \mid f \text{ é acessível.}\}.$$

O conjunto \mathcal{U}_σ é C^1 aberto, pelo teorema 1.13. De fato, seja $f \in \mathcal{U}_\sigma$, pelo teorema 1.13, existe uma C^1 vizinhança V_f de f , em $\mathcal{PH}_m^2(\mathbb{T}^3)$, tal que para toda $g \in V_f$, temos que g é acessível, portanto ergódica.

Como g é ergódica e $\dim E_g^c = 1$, pelo teorema ergódico de Birkhoff temos

$$\lambda_g^c = \int_{\mathbb{T}^3} \|D_x g|E_g^c(x)\| dm$$

que está suficientemente próximo de

$$\int_{\mathbb{T}^3} \|D_x f|E_f^c(x)\| dm = \lambda_f^c \neq 0.$$

Desde que V_f , seja escolhido adequadamente, concluímos que $\lambda_g^c \neq 0$, de fato tem o mesmo sinal de λ_f^c . O teorema 1.13, fornece a densidade no sentido C^2 de \mathcal{U}_σ em $\mathcal{PH}_{m,\sigma}^2$, $\sigma \in \{+, -\}$.

A união $\mathcal{U} = \bigcup_{\sigma \in \{+,-\}} \mathcal{U}_\sigma$ é C^1 denso em $\mathcal{PH}_m^2(\mathbb{T}^3)$. De fato, o teorema 1.19, juntamente com o teorema 1.13 tem como consequência que qualquer $f \in \mathcal{PH}_m^2(\mathbb{T}^3)$, pode ser C^1 aproximado por um $g \in \mathcal{PH}_m^2(\mathbb{T}^3)$, tal que g é ergódico pelo teorema 1.13. Se $\lambda^c(g) \neq 0$, o resultado está demonstrado. Agora se $\lambda_g^c = 0$, C^1 suficientemente próximo a g , existe um difeomorfismo \tilde{g} , como no teorema 1.19. Desde que \tilde{g} , pode ser tomado C^1 suficientemente próximo a g , então pelo teorema 1.13, temos \tilde{g} ergódica e $\lambda_{\tilde{g}}^c \neq 0$. ■

Pesin e Hasselblat em seu survey [20] conjecturaram:

Conjectura 1.21 (Hasselblatt-Pesin, [20]). *A folheação central de um difeomorfismo parcialmente hiperbólico, típico com expoentes centrais negativos não é absolutamente contínua.*

Neste trabalho, veremos que a conjectura acima é verdadeira para difeomorfismos parcialmente hiperbólicos do toro \mathbb{T}^3 . Abaixo, seguem os principais resultados obtidos neste trabalho.

Teorema A 1. *Existe um subconjunto $\mathcal{U} \subset \mathcal{PH}_{m,+}^2(\mathbb{T}^3)$ que é C^1 aberto e C^2 denso em $\mathcal{PH}_{m,+}^2(\mathbb{T}^3)$, tal que para todo $f \in \mathcal{U}$ a folheação central \mathcal{F}^c não é superiormente absolutamente contínua.*

O resultado vale para $\mathcal{PH}_{m,-}^2(\mathbb{T}^3)$, procedendo de forma análoga ao teorema acima para f^{-1} .

Como consequência do teorema A 1 e a proposição 1.20, temos a seguinte generalização do teorema A 1.

Corolário 1.22. *Existe um subconjunto $\mathcal{U} \subset \mathcal{PH}_m^2(\mathbb{T}^3)$, que é C^1 aberto e denso em $\mathcal{PH}_m^2(\mathbb{T}^3)$, tal que para todo $f \in \mathcal{U}$ a folheação central \mathcal{F}^c não é superiormente absolutamente contínua.*

Exemplo 5 (Exemplo de Mañé).

Começamos com um automorfismo linear de Anosov $A : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$, com autovalores $0 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2 < \lambda_3$. Seja p um ponto fixo para A e $\rho > 0$ pequeno. É possível fazer uma deformação de f numa vizinhança ρ de p , de modo a obter um novo ponto fixo de índice estável igual a dois. Tal construção é feita de modo que o novo difeomorfismo obtido f_0 , seja parcialmente hiperbólico, transitivo e dinamicamente coerente e $\lambda_{f_0}^c(x) < 0$, para Lebesgue quase todo ponto, ver [9].

Depois da bifurcação vão surgir dois pontos periódicos de índice estável igual a um, como na figura abaixo.

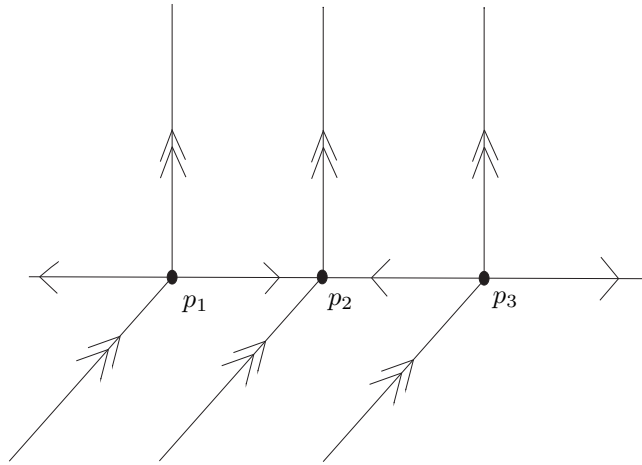


Figura 1: Exemplo de Mañé

Vale ressaltar que recentemente Yang-Viana [37] provaram que existe uma vizinhança C^1 aberta \mathcal{V} do exemplo de Mañé no toro \mathbb{T}^3 , no qual toda $f \in \mathcal{V}$ apresenta folheação \mathcal{F}_f^{cs} absolutamente contínua.

Neste caso, temos que a continuidade absoluta da folheação centro estável numa vizinhança de f_0 é uma propriedade robusta. No cenário conservativo os teorema A1 e corolário 1.22, nos diz que é impossível robustez de continuidade absoluta da folheação central.

Também estudamos o caso expoente central nulo ($\lambda_c = 0$). Em [19], temos que todo difeomorfismo parcialmente hiperbólico de \mathbb{T}^3 , apresenta folhas centrais do mesmo tipo topológico, isto é, ou todas as folhas centrais são círculos ou todas

retas. Afim de tentar entender folheações centrais absolutamente contínua em \mathbb{T}^3 , num primeiro momento, vemos que se $\lambda^c > 0$ e \mathcal{F}_f^c absolutamente contínua, então as folhas centrais de f não podem ser círculos, pelo teorema 1.14 em [21]. Gostaríamos de concluir que se \mathcal{F}_f^c é absolutamente contínua e $\lambda_f^c = 0$, então as folhas são círculos, a esse respeito, obtemos o seguinte:

Teorema B 1. *Seja $f : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$, um difeomorfismo parcialmente hiperbólico conservativo, $\lambda^c = 0$, para m quase todo ponto em \mathbb{T}^3 . Suponha que a folheação central é inferiormente absolutamente contínua e que $\frac{1}{n} \log \|D_x f^n|E_x^c\| \Rightarrow 0$, convergência uniforme para m quase todo ponto, então as folhas centrais da folheação central \mathcal{F}_f^c são círculos.*

De fato, para que a mesma demonstração do teorema acima seja verdadeira, basta que a hipótese de convergência uniforme seja verificada sobre uma única folha central.

Conjectura 1.23. *Seja $f : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$, um difeomorfismo parcialmente hiperbólico conservativo, $\lambda^c = 0$, para m quase todo ponto em \mathbb{T}^3 . Então as folhas de \mathcal{F}_f^c são todas círculos.*

2 Ingredientes Principais

2.1 Conjugação Central

Para o estudo sobre continuidade absoluta da folheação central é importante conhecer a estrutura topológica das folhas, da folheação central, em caso que esta existe. Um primeiro passo, consiste em entender tal estrutura topológica quando $\dim E^c = 1$.

Para difeomorfismos parcialmente hiperbólicos f do toro \mathbb{T}^d , $d \geq 3$, e $\dim E^c = 1$, Hammerlindl em [19], provou que com hipótese de quasi isometria das folheações instável e estável forte, as folhas centrais são todas do mesmo tipo topológico, isto é, ou são círculos ou são retas. Na verdade prova-se que as folhas centrais de f , tem o mesmo tipo topológico que as folhas centrais de sua linearização f_* , a induzida de f em $\pi_1(\mathbb{T}^d) = \mathbb{Z}^d$, que é uma aplicação linear que induz um difeomorfismo linear no toro \mathbb{T}^d , também parcialmente hiperbólico.

Proposição 2.1 ([19], [11], [12]). *Se $f : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$ é parcialmente hiperbólico, então as folheações $\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^c, \mathcal{F}^u$ são quasi isométricas.*

Teorema 2.2 ([19]). *Todo difeomorfismo parcialmente hiperbólico $f : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$ é centralmente conjugado com sua linearização, por um homeomorfismo h , tal que este homeomorfismo é bi-Lipschitz e leva folhas centrais de f em folhas centrais da linearização de f . Além disso, o levantamento \tilde{h} de h em \mathbb{R}^3 , está a uma distância limitada da identidade, isto é, $\|\tilde{h} - Id_{\mathbb{R}^3}\|$ é limitado.*

O termo centralmente conjugado, significa que para toda folha central L , da folheação central da linearização de f , temos:

$$h(A(L)) = f(h(L)),$$

onde A é o difeomorfismo parcialmente hiperbólico em \mathbb{T}^3 induzido pela linearização de f .

Na verdade o teorema acima é consequência de um resultado mais geral.

Teorema 2.3 ([19]). *Seja $f : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$, $d \geq 3$, um difeomorfismo parcialmente hiperbólico. Suponha que $\dim E^c = 1$ e que as folheações \mathcal{F}_f^s e \mathcal{F}_f^u são quasi isométricas, então f é centralmente conjugado com sua linearização, por um homeomorfismo h , tal que este homeomorfismo é bi-Lipschitz e leva folhas centrais da folheação central de f em folhas centrais da folheação central correspondente à linearização de f . Além disso, o levantamento \tilde{h} de h em \mathbb{R}^d , está a uma distância limitada da identidade, isto é,*

$$\|\tilde{h} - Id_{\mathbb{R}^d}\|$$

é limitado.

Note que, nas hipóteses dos teoremas 2.2 e 2.3 as folhas centrais de \mathcal{F}_f^c ou são todas círculos (no caso de linearização não Anosov), ou todas retas, quando a linearização de f for Anosov.

Além desta propriedade topológica é importante saber o comportamento a largas distâncias das folhas centrais sob ação de \tilde{f} , folhas no levantamento \mathbb{R}^d . Seja g a linearização de f , temos as seguintes propriedades:

Proposição 2.4 ([19]). *Para cada $k \in \mathbb{Z}$*

$$\|\tilde{f}^k - \tilde{g}^k\| = \|\tilde{f}^k - \tilde{g}^k\|_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \|\tilde{f}^k(x) - \tilde{g}^k(x)\| < +\infty$$

Proposição 2.5 ([19]).

$$\|\tilde{f}^k(x) - \tilde{f}^k(y)\| \sim \|\tilde{g}^k(x) - \tilde{g}^k(y)\|$$

Mais precisamente, para cada $k \in \mathbb{Z}$ e $C > 1$ existe $M > 0$ tal que para x, y ,

$$\|x - y\| > M \Rightarrow \frac{1}{C} < \frac{\|f^k(x) - f^k(y)\|}{\|g^k(x) - g^k(y)\|} < C.$$

Mais geralmente, para cada $k \in \mathbb{Z}$, $C > 1$, e uma aplicação linear $\pi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ existe $M > 0$ tal que $x, y \in \mathbb{R}^d$,

$$\|\pi(x - y)\| > M \Rightarrow \frac{1}{C} < \frac{\|\pi(\tilde{f}^k(x) - \tilde{f}^k(y))\|}{\|\pi(\tilde{g}^k(x) - \tilde{g}^k(y))\|} < C.$$

A conjugação via folhas centrais nos diz que folhas centrais de \mathcal{F}_f^c e sua imagem via h , em \mathbb{R}^d , estão sempre a uma distância limitada e uniforme, independente da folha de \mathcal{F}_f^c . Isto tem como consequência que se dois pontos x, y sobre a mesma folha central para f , então a inclinação da reta ligando estes dois pontos se aproxima uniformemente da direção central E_g^c , onde g é linearização de f . De fato, esta propriedade depende somente da condição de quasi isometria e pode ser escrita como segue.

Proposição 2.6 ([19]). *Seja $f : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$, $d \geq 3$ um difeomorfismo parcialmente hiperbólico e $g : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$ a correspondente linearização de f . Suponha que $\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u$ são quasi isométricas e que $\dim E^c = 1$, então o limite*

$$\lim_{\|y-x\| \rightarrow +\infty} \frac{y-x}{\|y-x\|} = E_g^\sigma, \quad y \in \mathcal{F}_x^\sigma, \quad \sigma \in \{s, c, u\}$$

existe uniformemente.

2.2 Continuidade Absoluta de Folheações

Falaremos agora sobre alguns conceitos de continuidade absoluta de folheações sobre uma variedade compacta, riemanniana M . Considere U um aberto de M e \mathcal{F} uma folheação local em U . Vamos sempre supor que as folhas da folheação \mathcal{F} , são subvariedades de classe C^1 . Denote por m o volume riemanniano em M . Para uma subvariedade Σ contida em M , denote por λ_Σ a medida de Lebesgue induzida em Σ . Denote por \hat{m} a projeção de m em U/\mathcal{F} e $\{m_L \mid L \in U/\mathcal{F}\}$ a decomposição de Rokhlin ao longo das folhas de \mathcal{F} .

Definição 2.7 (Folheação Inferiormente Absolutamente Contínua). *Seja \mathcal{F} uma folheação sobre M . Dizemos que \mathcal{F} é inferiormente absolutamente contínua, se todo conjunto de Z de medida zero, $m(Z) = 0$, e quase todo ponto p , a folha L_p passando por p encontra o conjunto Z em um conjunto de medida λ_{L_p} nula, isto é, $\lambda_{L_p}(Z) = 0$, para quase todo $p \in M$.*

Seja U , uma vizinhança coordenada local de M . Localmente, em termos de desintegração de Rokhlin a definição acima equivale a dizer que

$$\lambda_{L_p} \ll m_{L_p},$$

para m quase todo ponto $p \in U$.

Lema 2.8. *Suponha \mathcal{F} folheação local inferiormente absolutamente contínua, então existe um conjunto $Z \subset U$ de medida total tal que*

$$\lambda_{L_z} \ll m_{L_z}, \quad \forall z \in Z.$$

Demonstração. Defina uma nova medida \tilde{m}

$$\tilde{m} = \int \int d\lambda_L d\hat{m}(L).$$

Aqui $d\hat{m}$ denota a medida induzida por m no espaço quociente U/\mathcal{F} . Observe que \tilde{m} é uma medida de probabilidade sobre U .

Pela continuidade absoluta de \mathcal{F} , temos

$$\tilde{m} \ll m.$$

De fato, considere A um conjunto tal que $m(A) = 0$. Usando continuidade absoluta de \mathcal{F} existe um conjunto Z de medida total m tal que

$$\lambda_{Lz}(A \cap Z) = 0, \quad \forall z \in Z$$

então

$$0 = \int_{\mathcal{F}} \int_Z d\lambda_L(A \cap L) d\hat{m}(L) = \int_{\mathcal{F}} \int_U d\lambda_L(A \cap L) d\hat{m}(L) = \tilde{m}(A).$$

Pelo teorema de Radon-Nikodym existe uma função m mensurável $J : U \rightarrow \mathbb{R}$, não negativa em m quase todo ponto, tal que

$$\tilde{m} = Jdm \Rightarrow \int_{\mathcal{F}} \int \lambda_L d\hat{m}(L) = \int_{\mathcal{F}} \int J m_L d\hat{m}(L) = \int_{\mathcal{F}} \left(\int J|L m_L \right) d\hat{m}(L).$$

Pela unicidade estabelecida no teorema de decomposição de Rokhlin, temos

$$d\lambda_L = (J|L) dm_L$$

sobre um conjunto de medida m total. ■

Definição 2.9 (Folheação Superiormente Absolutamente Contínua). *Seja \mathcal{F} uma folheação sobre M . Dizemos que \mathcal{F} é superiormente absolutamente contínua, se para qualquer conjunto mensurável Z , tal que a intersecção $L_p \cap Z$ tem medida nula sobre a folha L_p , para quase todo ponto $p \in M$ então $m(Z) = 0$.*

Localmente, isto significa dizer que

$$m_{L_z} \ll \lambda_{L_z},$$

para quase todo ponto $z \in U$.

Pelos teorema de Radon-Nikodym e de Rokhlin, a equação acima equivale a

$$m \ll \tilde{m}.$$

É interessante saber quando, de fato temos que m_L e λ_L são equivalentes. Melhor dizendo, queremos saber em que condições uma dessas definições implica na outra.

Lema 2.10. *If $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo ergódico, conservativo, e \mathcal{F} uma folheação invariante por f . Suponha ainda que \mathcal{F} é mensurável e inferiormente absolutamente contínua, então \mathcal{F} é superiormente absolutamente contínua, isto é, m e \tilde{m} são equivalentes.*

Demonstração. Considere A um conjunto mensurável tal que

$$\lambda_{L_z}(A \cap L_z) = 0$$

para todo z em um conjunto de medida total, que chamaremos de B .

Suponha que A seja um conjunto f invariante. De fato, caso não seja podemos considerar

$$A' = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} f^i(A).$$

e trocamos A por A' . Como f restrita a cada folha $L \in \mathcal{F}$, é um difeomorfismo, então, restrito às folhas de \mathcal{F} , o difeomorfismo f preserva conjuntos de medida nula.

Como A é f invariante e f é ergódica, então $m(A) = 0$ ou $m(A) = 1$. Se $m(A) = 1$, então A seria um conjunto de medida total que encontra $L_z, z \in B$ em um conjunto de medida nula sobre a folha, mas isso não pode ocorrer, pois \mathcal{F}^c é inferiormente absolutamente contínua. Assim, $m(A) = 0$. ■

Sejam \mathcal{F} uma folheação sobre M e considere \mathcal{T} uma folheação transversal a \mathcal{F} . Aqui a transversalidade no sentido

$$p \in \mathcal{F}_p \cap \mathcal{T}_p \Rightarrow T_p M = T_p \mathcal{F}_p \oplus T_p \mathcal{T}_p.$$

Sendo assim, localmente uma folha de \mathcal{F} , intersecta uma folha de \mathcal{T} , tal interseção contém um único ponto. Isso nos permite definir uma transformação chamada holonomia via folhas de \mathcal{F} .

Sejam Σ e Σ' duas folhas de \mathcal{T} , tal que toda folha de \mathcal{F} que passa intersecta Σ também intersecta Σ' , defina

$$h_{\Sigma, \Sigma'} : \Sigma \rightarrow \Sigma', \quad h_{\Sigma, \Sigma'}(p) = \mathcal{F}_p \cap \Sigma'$$

A transformação $h_{\Sigma, \Sigma'}$ está bem definida e é chamada holonomia entre Σ e Σ' .

Definição 2.11 (Transversalmente Absolutamente Contínua). *Uma folheação \mathcal{F} de M é dita transversalmente absolutamente contínua se a holonomia via \mathcal{F} , entre quaisquer duas seções transversais a \mathcal{F} , preserva conjuntos de medida nula, isto*

é, dado um conjunto Z de medida nula em Σ , então $h_{\Sigma, \Sigma'}(Z)$, tem medida nula em Σ' .

Denotando por m_Σ e $m_{\Sigma'}$ as medidas de Lebesgue das seções Σ e Σ' respectivamente, a definição acima equivale a dizer que

$$(h_{\Sigma \Sigma'})_*(m_\Sigma) \ll m_{\Sigma'}.$$

Como a definição vale para quaisquer seções transversais, temos também

$$(h_{\Sigma' \Sigma})_*(m_{\Sigma'}) \ll m_\Sigma.$$

Proposição 2.12. *Seja \mathcal{F} , uma folheação transversalmente absolutamente contínua de classe C^1 . Nestas condições \mathcal{F} é inferiormente e superiormente absolutamente contínua.*

Demonstração. Fixando uma folheação suave transversal a \mathcal{F} , retifiquemos as folhas de \mathcal{F} , pela transformação

$$(x, y) \mapsto (x, y') = (x, h(0, x)(y)),$$

onde $h(z, x)(y)$ é a imagem de x pela transformação holonomia de seções transversais do nível z ao nível y .

Como a holonomia é absolutamente contínua tal mudança de variáveis leva m a uma medida do tipo $J dx dy$, $J > 0$. Por aplicação do Teorema de Fubini, segue o resultado. ■

Para mais detalhes dos conceitos expostos até aqui, pode-se consultar [32].

De agora em diante, sempre que dissermos folheação absolutamente contínua, estamos nos referindo à definição 2.9.

Para nós, no contexto de folheação central para difeomorfismos parcialmente hiperbólicos, será conveniente trabalhar com \mathcal{F}^c restrito a \mathcal{F}^{cu} ou \mathcal{F}^{cs} . Para este propósito, provemos:

Proposição 2.13. *Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo parcialmente hiperbólico, ergódico dinamicamente coerente sobre uma variedade compacta. Suponha que a folheação \mathcal{F}^c é superiormente absolutamente contínua, então a folheação central considerada com folheação de \mathcal{F}^{cu} e \mathcal{F}^{cs} , é superiormente absolutamente contínua, quaisquer que sejam as folhas de \mathcal{F}^{cu} e \mathcal{F}^{cs} consideradas.*

Demonstração. Suponha que exista um $z \in M$ tal que $\mathcal{F}^c|_{\mathcal{F}^{cs}}$ não é superiormente absolutamente contínua. Desta maneira, é possível escolher um conjunto A sobre uma placa aberta X sobre \mathcal{F}^{cs} tal que a medida de Lebesgue sobre tal placa, satisfaça $m_{cs}(A) > 0$ and $m_c(A) = 0$, para quase toda folha central em X .

Agora, saturamos X por \mathcal{F}^u e obtemos um novo conjunto B (saturação de A), com $m(B) > 0$. Usando que f é dinamicamente coerente, \mathcal{F}^{cu} está bem definida e desde que \mathcal{F}^u é transversalmente absolutamente contínua a u -holonomia (holonomia por folhas de \mathcal{F}_f^u) preserva conjuntos de medida zero de \mathcal{F}_f^c .

Como cada folha central restrita a B é obtida por u -holonomia, então quase toda folha central em B o intersecta em um conjunto de medida nula. Tome $B' = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(B)$. O conjunto B' é invariante e de medida positiva, como f é ergódico, então B' tem medida total. Agora, como f preserva conjuntos de medida zero sobre as folhas centrais obtemos B' um conjunto de medida total que intersecta cada folha central num conjunto de medida nula. Melhor dizendo B'^c é um conjunto de medida nula que intersecta quase toda folha central em um conjunto de medida total, o que contradiz a continuidade absoluta de \mathcal{F}_f^c .

A mesma ideia se aplica a $\mathcal{F}^c | \mathcal{F}^{cu}$. ■

2.3 Sobre Equações Cohomológicas

Uma importante ferramenta para nós são equações cohomológicas no contexto de medidas hiperbólicas.

Teorema 2.14 (Teorema de Livschitz para sistemas não uniformemente hiperbólicos,[24]).

Seja $f \in \text{Diff}^{1+\alpha}(M)$, $\alpha > 0$, e M uma variedade compacta riemanniana.

Suponha que μ é uma medida hiperbólica para f e $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função Hölder contínua satisfazendo

$$\sum_{i=0}^{m-1} \varphi(f^i(p)) = 0,$$

para todo ponto periódico p , com $f^m(p) = p$. Então existe uma função mensurável h , tal que para μ quase todo $x \in M$

$$\varphi(x) = h(f(x)) - h(x).$$

Um importante resultado envolvendo equações cohomológicas e acessibilidade é devido a Wilkinson [39]. De fato, quando $\dim E^c = 1$, e o difeomorfismo f é parcialmente hiperbólico acessível e conservativo, então a solução mensurável descrita no teorema 2.14 tem extensão contínua em M . Mais precisamente:

Teorema 2.15 ([39]). *Seja f um C^2 difeomorfismo parcialmente hiperbólico, acessível, center bunched e conservativo. Se existe uma solução mensurável H , para a equação*

$$\varphi(x) = H(f(x)) - H(x),$$

e φ como no teorema 2.14, então existe uma solução contínua $h = H$, para Lebesgue quase todo ponto .

Proposição 2.16. *Suponha no teorema 2.14, a medida $\mu = m$, medida de Lebesgue sobre M , então a solução h pode ser estendida mensuravelmente sobre toda variedade M .*

Demonstração. De fato, no teorema 2.14, quando $\mu = m$, a medida hiperbólica em questão então existe uma solução h definida em toda M . Sabemos por teorema 2.14 que a solução h , está definida em m , quase todo ponto e mais, tal conjunto pode ser tomado invariante, ver [24], página 692. Assim o conjunto de medida nula onde possivelmente ainda não esteja definida a solução da equação cohomológica tem medida nula, digamos Z , tal conjunto. Basta então que definamos uma solução neste conjunto. Sobre Z , defina a relação de equivalência:

$$x \sim y \Leftrightarrow y \in \mathcal{O}(x)$$

dois pontos se relacionam se um está na órbita do outro e vice-versa. Para cada classe de equivalência escolha um representante, digamos x e defina:

$$h(x) = 0, \varphi(x) = h(f(x))$$

$$h(f^2(x)) = \varphi(f(x)) + h(f(x))$$

indutivamente defina

$$h(f^{n+1})(x) = \varphi(f^n(x)) + h(f^n(x)),$$

para todo n , inteiro. A equação acima está bem definida sobre a órbita de x .

Repita este processo para cada classe de equivalência e podemos estender h para o conjunto de medida nula Z . A solução estendida de h , que é obtida é mensurável, pois o é restrito a um conjunto de medida total. ■

3 Prova do Teorema A1

A partir de agora passaremos à prova do teorema A1. Encontraremos condições para trabalhar em \mathcal{F}_f^c , tais quais em [16]. Observe que por [19], basta mostrar o resultado quando as folhas centrais são retas, ou equivalentemente, a linearização f_* de f é um automorfismo de Anosov de \mathbb{T}^3 . Quando as folhas são todas compactas, o resultado segue de [21]. De fato, no caso, todos os difeomorfismos parcialmente hiperbólicos de \mathbb{T}^3 , cujas folhas centrais são círculos e $\lambda > 0$, para Lebesgue quase todo ponto, tem folheação central não superiormente absolutamente contínua.

Para difeomorfismos parcialmente hiperbólicos cujas folhas centrais não são compactas, a ideia é fazer uma abordagem como no caso Anosov, estudado em [16]. Para tal proposta, lançaremos mão dos resultados estabelecidos em [19].

Será importante definir uma pseudométrica conveniente para trabalhar sobre a folheação \mathcal{F}_f^u .

Seja $f : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$, um difeomorfismo parcialmente hiperbólico de classe C^2 . Sobre cada uma das folheações \mathcal{F}_f^σ , $\sigma \in \{s, c, u\}$, sejam d^σ e m_σ , as respectivas métricas e medidas riemannianas sobre a folheação correspondente.

Considere

$$D_f^u(x) = \|Df(x)|E_f^u(x)\|$$

e

$$\rho_x(y) = \prod_{n \geq 1} \frac{D_f^u(f^{-n}(x))}{D_f^u(f^{-n}(y))}.$$

Este produto converge a uma densidade contínua $\rho_x(\cdot)$ sobre $\mathcal{F}^u(x)$.

Defina sobre $\mathcal{F}_p^u(x)$ a pseudo métrica \tilde{d}^u , do seguinte modo

$$\tilde{d}^u(x, y) = \int_x^y \rho_x(z) dm_u(z).$$

Usando a definição de \tilde{d}^u e mudança de variáveis podemos verificar que

$$\tilde{d}^u(f(x), f(y)) = D_f^u(x) \tilde{d}^u(x, y) \quad (1)$$

De fato

$$\tilde{d}^u(f(x), f(y)) = \int_{f(x)}^{f(y)} \rho_{f(x)}(z) dm_u(z) = \int_x^y \frac{D_f^u(x)}{D_f^u(z)} \cdot D_f^u(z) \rho_x(z) dm_u(z) = D_f^u(x) \tilde{d}^u(x, y).$$

A métrica \tilde{d}^u é comparável com a métrica d^u , isto significa

$$\text{para todo } K > 0 \text{ existe } C > 0 \text{ tal que } \frac{1}{C} \tilde{d}^u(x, y) \leq d^u(x, y) \leq C \tilde{d}^u(x, y) \quad (2)$$

sempre que $d^u(x, y) \leq K$, ver [17].

Lema 3.1 (Controle Geométrico). *Seja $f : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$ um difeomorfismo parcialmente hiperbólico. Fixe $x \in \mathbb{T}^3$ e tome a folha centro instável $\mathcal{F}_f^{cu}(x)$ passando por x . Sobre a folha \mathcal{F}_x^u , considere um ponto y , tal que $d^u(x, y) = 1$. Seja Q_∞ a faixa em $\mathcal{F}_f^{cu}(x)$ limitada pelas folhas centrais $\mathcal{F}_f^c(x)$ e $\mathcal{F}_f^c(y)$, então existem constantes positivas K e η , tais que:*

$$\eta \leq d^u(z, h_u(z)) \leq K,$$

onde $z \in \mathcal{F}_f^c(x)$ e $h_u(z) = \mathcal{F}_f^u(z) \cap \mathcal{F}_f^c(y)$, a imagem de z via holonomia instável $h_u : \mathcal{F}_f^c(x) \rightarrow \mathcal{F}_f^c(y)$.

Demonstração. Para a prova deste lema vamos considerar as folheações enunciadas no espaço de recobrimento \mathbb{R}^3 . Seja $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal como no teorema 2.2, levando folhas de \mathcal{F}_f^c em folhas de \mathcal{F}_A^c , tal que A , é linearização de f . Chame $L_x = h(\mathcal{F}_f^c(x))$ e $L_y = h(\mathcal{F}_f^c(y))$. Suponha que exista $x_n \in \mathcal{F}_f^c(x)$, tais que $d^u(x_n, y_n) \rightarrow 0$, onde $y_n = h_u(x_n)$. Por continuidade de h , temos que

$$\|h(x_n) - h(y_n)\| \rightarrow 0 \Rightarrow d(L_x, L_y) = 0,$$

o que é um absurdo, pois L_x e L_y são retas paralelas distintas em \mathbb{R}^3 , logo estão a uma distância positiva uma da outra. Desta maneira existe $\eta > 0$, tal que $d^u(a, b) > \eta$, para todo $a \in \mathcal{F}_f^c(x)$ e $b = h_u(a) \in \mathcal{F}_f^c(y)$.

Provemos outra desigualdade. Suponha que exista uma sequência $x_n \in \mathcal{F}_f^c(x)$, tal que $d^u(x_n, y_n) \rightarrow +\infty$, onde $y_n = h_u(x_n)$. Construamos $z_n \in \mathcal{F}_f^c(y)$, da seguinte maneira.

Seja $u_n = h(x_n)$, tome v_n o ponto sobre L_y , tal que

$$d(u_n, v_n) = d(L_x, L_y).$$

Por fim, considere $z_n = h^{-1}(v_n)$, temos

$$\|x_n - z_n\| = \|(x_n - h(x_n)) + (u_n - v_n) + (h(z_n) - z_n)\| \leq d + 2\delta,$$

tal que $d = \text{dist}(L_x, L_y)$ e $\delta = \|h - id_{\mathbb{R}^3}\|$.

Considere os triângulos \triangle_n , com vértices em x_n, z_n, y_n . Considere sobre cada um destes vértices respectivos ângulos $\widehat{x}_n, \widehat{y}_n, \widehat{z}_n$.

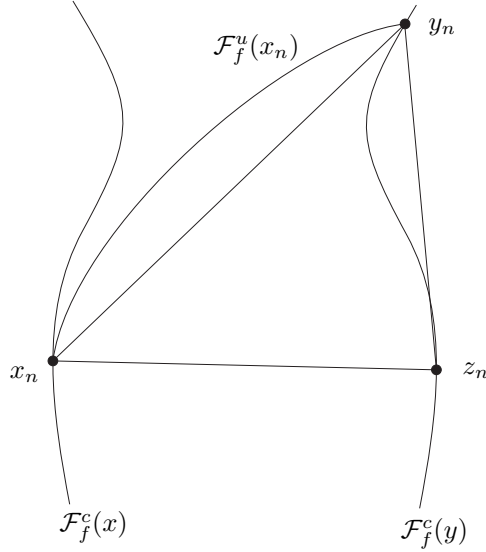


Figura 2: Triângulos Δ_n .

Note que $\|x_n - y_n\| \rightarrow +\infty$ por quasi isometria da folheação \mathcal{F}_f^u .

Note que

$$\|x_n - z_n\| + \|y_n - z_n\| \geq \|x_n - y_n\|$$

como $\|x_n - z_n\|$ é limitado, isto força que

$$\|y_n - z_n\| \rightarrow +\infty.$$

Temos que $\|x_n - y_n\|, \|y_n - z_n\| \rightarrow +\infty$, pela proposição 2.6 temos que o ângulo \widehat{y}_n converge a $\theta = \angle(E_A^c, E_A^u)$.

A menos de tomar uma subsequência, podemos supor que os ângulos $\widehat{x}_n \rightarrow \alpha$ e $\widehat{z}_n \rightarrow \beta$, com

$$0 < \alpha, \beta, \theta < \pi,$$

Pela lei dos senos, temos

$$\frac{\|x_n - z_n\|}{\sin \theta}$$

é limitado, porém

$$\frac{\|y_n - z_n\|}{\sin \alpha}, \frac{\|x_n - y_n\|}{\sin \beta} \rightarrow +\infty,$$

o que é uma contradição com a lei dos senos. Logo existe $K > 0$, tal que

$$d^u(z, h_u(z)) \leq K,$$

para todo $z \in \mathcal{F}_f^c(x)$. ■

Lema 3.2 (Uniformidade da Constante de Lipschitz para Pontos Afastados). *Fixe $x \in \mathbb{T}^3$, e K, η como no lema anterior. Considere, sobre um outro ponto $z \in \mathbb{T}^3$, a folha F_z^{cu} , duas seções $T, T' \subset \mathcal{F}_z^{cu}$ sobre folhas de \mathcal{F}_f^u , tais que a holonomia entre T e T' via folhas centrais*

$$h_c : T \rightarrow T'$$

esteja bem definida. Suponha que o diâmetro na métrica d^u , de T , seja $\frac{\eta}{2}$. Então

$$\frac{d^u(h(a), h(b))}{d^u(a, b)} \leq \frac{4K}{\eta}$$

sempre que $d^u(a, b) \geq \frac{\eta}{4}$.

Demonstração. Desde que o diâmetro de T é inferior a η , existem retângulos $Q_n \subset Q_\infty$, do lema 3.1 tais que $Q_n \rightarrow Q$, de modo que

$$Q = \bigcup_{z \in T} [z, h_c(z)],$$

e os intervalos fechados são tomados sobre as folhas centrais de $\mathcal{F}_f^c(z)$.

Assim, considerando h_n as holonomias em Q_n , temos que $h_n \rightrightarrows h_c$, e como Q_n são retângulos sobre Q_∞ , temos que o comprimento mínimo das folhas instáveis é pelo menos η o comprimento máximo das mesmas não excede a K . Assim, em Q_n ,

$$d^u(a_n, b_n) > \frac{\eta}{4} \Rightarrow d^u(h_n(a_n), h_n(b_n)) \leq K$$

Assim, pela convergência uniforme, para $a, b \in T$, temos

$$d^u(a, b) \geq \frac{\eta}{4} \Rightarrow d^u(h(a), h(b)) \leq K,$$

concluindo o resultado desejado. ■

Definição 3.3. *Seja \mathcal{F} uma folheação invariante para um difeomorfismo $f : M \rightarrow M$. Dizemos que uma folha L é periódica de período $n > 1$ se*

$$f^n(L) = L$$

e $f^k(L) \neq L$ para todo $0 < k < n$. Se $f(L) = L$, isto é, período 1, diremos que L é uma folha fixa.

Lema 3.4. *Seja $f : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$ um difeomorfismo parcialmente hiperbólico e L uma folha central periódica para f . Suponha que as folhas centrais de f são não compactas, então, a menos de substituir f por f^2 ou f^{-2} se necessário, temos:*

1. *Existem pontos periódicos de f sobre L , e tais pontos tem o mesmo período de L .*
2. *Existem pontos p_- e p_+ sobre L , e uma orientação conveniente sobre L tais que $f^k(x) > x$, para $x > p$ em L e $f^k(x) < x$, para todo $x < p$ em L .*

Aqui k é o período de L .

Demonstração. Procederemos a demonstração para folhas fixas. O caso periódico é análogo. Seja $A : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$ a linearização de f . Desde que as folhas centrais de \mathcal{F}^c são retas, então A um automorfismo linear de Anosov. Pelo teorema 2.2 considere $h : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$ levando folhas \mathcal{F}_A^c em \mathcal{F}_f^c . Considere λ o auto valor central de A . Podemos assumir que $\lambda > 1$, se isso não ocorrer, substitua f por f^2 ou f^{-2} , e procederemos da mesma forma, desde que a folheação central para f é a mesma para f^2 e f^{-2} . Suponha que L é imagem via h de uma folha W , de \mathcal{F}_A^c passando por 0. Fixe em W uma orientação e considere em L , a orientação que torna o homeomorfismo $h|_W : W \rightarrow L$ um homeomorfismo crescente.

O automorfismo A restrito a W age sobre W como

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = \lambda x.$$

Podemos ver W como \mathbb{R} e A agindo em W , como F age sobre \mathbb{R} .

Escolha um $M > 0$, grande o bastante, tal que pelo teorma 2.2, e proposição 2.4, tenhamos

$$\|\tilde{h} - Id_{\mathbb{R}^3}\| < M. \quad (3)$$

e

$$\|f_1 - f_2\| < M \quad (4)$$

para quaisquer funções $f_1, f_2 \in \{A, A \circ h, f, f \circ h\}$.

Sobre W , considere o ponto 0 e $\lambda^n, n > 0$ tal que

$$\lambda^n(\lambda - 1) > 100M.$$

Sobre L , defina $a_n = h(\lambda^n)$, e então pela equação (3)

$$\|a_n - \lambda^n\| < M.$$

Seguindo a notação, $A(\lambda^n) = \lambda^{n+1} > \lambda^n$, então pela equação (4),

$$\|f \circ h(\lambda^n) - A\lambda^n\| = \|f(a_n) - \lambda^{n+1}\| < M,$$

Como $\lambda^{n+1} - \lambda^n = \lambda^n(\lambda - 1) > 100M$, obtemos

$$f(a_n) > a_n \quad (5)$$

Desde que M é grande o bastante e \mathcal{F}_f^c é uma folheação quasi isométrica, então $a_n \in B_M(\lambda^n)$, $a_{n+1} \in B_M(\lambda^{n+1})$, e estas bolas não se intersectam.

Procedendo de maneira análoga, obtemos

$$f(-a_n) < -a_n. \quad (6)$$

Pelas desigualdades (5) e (6) temos

$$f([-a_n, a_n]) \supset [-a_n, a_n],$$

então f contém um ponto fixo sobre L .

Seja $x \in L, x > a_n$, então $x = h(c_x), c_x \in W$, com $c_x > \lambda_n$. Como anteriormente, obtemos $f(x) > x$, para todo $x > a_n$. Analogamente $f(x) < x$, para todo $x < -a_n$.

Assim, todo ponto fixo sobre L está em $[-a_n, a_n]$. O conjunto dos pontos fixos sobre L é fechado e limitado, tome

$$p_+ = \sup\{p \in [-a_n, a_n] | p = f(p)\},$$

$$p_- = \sup\{p \in [-a_n, a_n] | p = f(p)\}.$$

Note que $x > p_+$, então $f(x) > x$, pois se $f(x) \leq x$, tome y sobre L tal que $y > a_n$ e $y > x$, e assim, $f(y) > y$, neste caso existiria $c \in [x, y], c > p$, tal que $f(c) = c$, que é uma contradição com a definição de p_+ . Analogamente $f(x) < x, x < p_-$.

Agora, provemos que os pontos periódicos sobre L tem o mesmo período de L .

De fato, suponha que $p \in L$, e $f^n(L) = L$, com n o período de L , e $f^n(p) \neq p$. Suponha que $f^n(p) > p$, e $f^{kn}(p) = p$, com $kn, k > 1$ o período de p , então

$$f^n(p) > p, f^{2n}(p) > f^n(p) > p,$$

e procedendo o argumento,

$$f^{(k-1)n}(p) > \dots > f^n(p) > p, f^{kn}(p) = p > f^{(k-1)n}(p).$$

que é uma contradição . ■

Um interessante corolário que envolve pontos periódicos e a estrutura das folhas centrais é o seguinte.

Corolário 3.5. *Seja $f : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$ um difeomorfismo parcialmente hiperbólico que não tem pontos periódicos, então as folhas centrais de \mathcal{F}_f^c são círculos.*

Demonstração. De fato, se as folhas centrais não são círculos, pelo lema anterior f tem pontos periódicos. ■

Teorema 3.6 (Versão Conservativa do Teorema de Kupka-Smale [35], [36]). *Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo de uma variedade compacta riemanniana de dimensão maior ou igual a três, preservando uma forma de volume Ω sobre M . Então o conjunto $\mathcal{H}^r(n)$ é C^r aberto e denso em $Diff_\Omega^r(M)$. Aqui, $\mathcal{H}^r(n)$ denota o conjunto dos difeomorfismos sobre M , que preservam Ω , tais que todos pontos periódicos de período menor ou igual a n são hiperbólicos.*

Defina os conjuntos

$$\mathcal{U}_1 = \{f \in \mathcal{PH}_{m,+}^2(\mathbb{T}^3), \text{ acessível } |\lambda^u(p) \neq \lambda^u(q), \text{ para dois pontos periódicos } p \text{ e } q \},$$

$$\mathcal{V}_1 = \{f \in \mathcal{PH}_{m,+}^2(\mathbb{T}^3) \mid \text{ todos pontos fixos são hiperbólicos}\}.$$

O conjunto \mathcal{U}_1 é C^1 aberto e C^2 denso em $\mathcal{PH}_{m,+}^2(\mathbb{T}^3)$.

Pela versão conservativa do Teorema de Kupka-Smale [35], [36], temos \mathcal{V}_1 é C^1 aberto e C^2 denso em \mathcal{U}_+ . Recordemos que \mathcal{U}_+ , foi obtido na proposição 1.20.

Proposição 3.7. *Considere $f \in \mathcal{V}_1$, então \mathcal{F}_f^c é superiormente absolutamente contínua em \mathcal{F}_f^{cu} se e somente se \mathcal{F}_f^c é Lipschitz sobre \mathcal{F}_f^{cu} .*

Demonstração. A implicação: Lipschitz implica continuidade absoluta é trivial. Temos que estabelecer o outro lado da implicação.

Seja L uma folha fixa de \mathcal{F}_f^c , encontrada no lema 3.4. Isto significa que , $f(L) = L$. Pelo lema 3.4, existem pontos fixos p_+, p_- , tais que

$$f(x) > p_+ \text{ se } x > p_+$$

$$f(x) < p_- \text{ se } x < p_-.$$

Como $f \in \mathcal{V}_1$, p_+ e p_- são hiperbólicos , e pelas desigualdades acima, obtemos:

$$\|Df(p_{+,-})|E^c\| > 1.$$

Escolha um destes pontos, digamos $p = p_+$, para simplificar. Considere um pequeno retângulo Q sobre $\mathcal{F}_f^{cu}(p)$, construído da seguinte maneira:

Considere T_1 um intervalo do tipo $[p, \tilde{a}]$, de comprimento igual a um, sobre $\mathcal{F}_f^u(p)$, e $T_2 = [c, \tilde{c}]$ sobre uma folha de $\mathcal{F}_f^u(c)$, tal que a holonomia por folhas centrais

$$h : T_1 \rightarrow T_2$$

esteja bem definida e $h(p) = c$, $h(\tilde{a}) = \tilde{c}$.

Defina

$$Q = \cup_{x \in T_1} [x, h(x)]_c$$

onde $[x, h(x)]_c$ é o intervalo fechado começando em x e terminando em $h(x)$ sobre a folha central passando por x .

Desde que Q pode ser tomado de diâmetro arbitrariamente pequeno e como p é hiperbólico e $\|Df(p)|E^c\| > 1$, por continuidade, f^{-1} é uniformemente contra-tora em Q . Estamos assim habilitados a usar o argumento geométrico de lema 4 de [16], como segue.

Sabemos que $f^{-1}(Q) \subset Q$, pois $p \in Q$ que é um subconjunto da variedade instável local de p , dado no teorema da variedade instável. Como $\mathcal{F}_f^c|Q$ é absolutamente contínua, segue que

$$m_Q = \int d\widehat{m}_Q(z) \int \rho_z^c(t) dm_{P_z^c}(t), \quad (7)$$

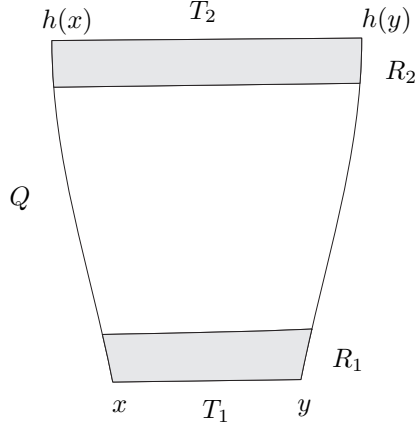
onde m_Q é a medida de Lebesgue sobre Q , a medida \widehat{m}_Q é a medida projeção de m_Q sobre $[p, \tilde{a}]$ e $P_z^c = \mathcal{F}_f^c(z)|Q$. Pelo fato de termos contração uniforme de f^{-1} restrito à folheação $\mathcal{F}_f^c|Q$, então por [30] e [8], as densidades satisfazem:

$$\Pi(x, y) := \frac{\rho_x^c(y)}{\rho_x^c(x)} = \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{\|Df(f^{-n}(x))|E^c(x)\|}{\|Df(f^{-n}(y))|E^c(y)\|}. \quad (8)$$

Podemos proceder como em [16], lema 4. Fixe $x, y \in T_1$. Fixe uma seção T_2 em Q , sobre uma folha da folheação \mathcal{F}_f^u e considere $h : T_1 \rightarrow T_2$ a holonomia por folhas centrais entre T_1 e T_2 . Seja $\varepsilon > 0$, pequeno e construamos retângulos R_1 e R_2 , com base respectivamente em $[x, y] \subset T_1$ e $[h(x), h(y)] \subset T_2$. Tais retângulos tem a seguinte propriedade:

$$m_{\mathcal{F}_f^c(z)}(\mathcal{F}_f^c(z) \cap R_i) = \varepsilon,$$

para todo $z \in T_1$ e $i = 1, 2$.



Das expressões (7) e (8), temos que

$$\frac{m_Q(R_1)}{m_Q(R_2)} = \frac{\int_{[x,y]} d\widehat{m}_Q(z) \int_{P_z^c \cap R_1} \rho_z^c(t) dm_{P_z^c}(t)}{\int_{[x,y]} d\widehat{m}_Q(z) \int_{P_z^c \cap R_2} \rho_z^c(t) dm_{P_z^c}(t)}. \quad (9)$$

Fixado $z \in [x, y]$, temos

$$\frac{\int_{P_z^c \cap R_1} \rho_z^c(t) dm_{P_z^c}(t)}{\int_{P_z^c \cap R_2} \rho_z^c(t) dm_{P_z^c}(t)} = \frac{\int_{P_z^c \cap R_1} \rho_z^c(z) \Pi(z, t) dm_{P_z^c}(t)}{\int_{P_z^c \cap R_2} \rho_z^c(z) \Pi(z, t) dm_{P_z^c}(t)}. \quad (10)$$

Pela equação (8), e a contração uniforme de f^{-1} em Q , na direção E_f^c , temos a existência de uma constante $K > 0$, tal que

$$\frac{1}{K} \leq \Pi(z, \cdot) \leq K,$$

para todo $z \in T_1$. Tendo em conta este fato e substituindo a expressão (10) em (9), obtemos que o quociente $\frac{m_Q(R_1)}{m_Q(R_2)}$ é também uniformemente limitado.

As áreas $m_Q(R_1)$ e $m_Q(R_2)$ são comparáveis com $\varepsilon m_{T_1}([x, y])$ e $\varepsilon m_{T_2}([h(x), h(y)])$, isto é existe $c > 0$, dependendo somente de Q , tal que

$$\frac{1}{c} \leq \frac{m_Q(R_1)}{m_{T_1}([x, y])}, \frac{m_Q(R_2)}{m_{T_2}([h(x), h(y)])} \leq c.$$

De fato, pois se $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno temos

$$\left(\frac{1}{2} \varepsilon \sin \theta_-\right) \cdot m_{T_1}([x, y]) \leq m_Q(R_1) \leq (2\varepsilon \sin \theta_+) \cdot m_{T_1}([x, y]),$$

$$\left(\frac{1}{2} \varepsilon \sin \theta_-\right) \cdot m_{T_2}([h(x), h(y)]) \leq m_Q(R_2) \leq (2\varepsilon \sin \theta_+) \cdot m_{T_2}([h(x), h(y)]),$$

onde

$$0 < \theta_- = \min_{x \in \mathbb{T}^3} \angle(E_f^c(x), E_f^u(x)) \text{ e } \theta_+ = \max_{x \in \mathbb{T}^3} \angle(E_f^c(x), E_f^u(x)) < \pi.$$

Desta maneira, temos que existe $C > 0$, dependendo somente de Q , tal que

$$\frac{1}{C} < \frac{m_{T_1}([x, y])}{m_{T_2}([h(x), h(y)])} < C,$$

já que

$$\frac{m_{T_1}([x, y])}{m_{T_2}([h(x), h(y)])} = \frac{\varepsilon m_{T_1}([x, y])}{m_Q(R_1)} \times \frac{m_Q(R_1)}{m_Q(R_2)} \times \frac{m_Q(R_2)}{\varepsilon m_{T_2}([h(x), h(y)])}.$$

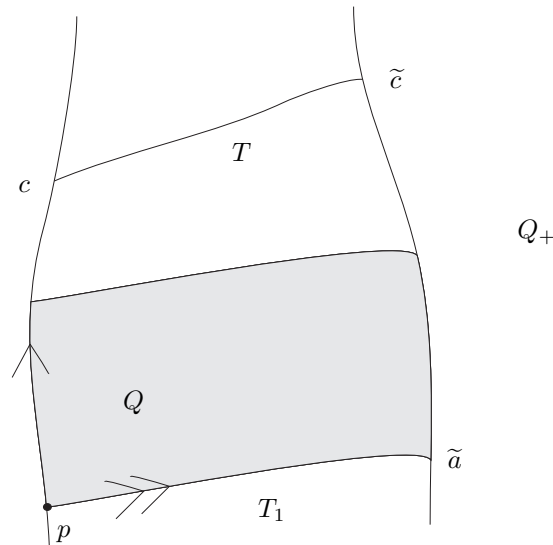
Concluimos que dadas quaisquer transversais T e T' contidas em Q e suportadas em folhas de \mathcal{F}_f^u , a holonomia por folhas centrais $h : T \rightarrow T'$ é uma

aplicação bi-Lipschitz uniformemente, isto é, com mesma constante de Lipschitz, independente das transversais T e T' . Além disso, a constante de Lipschitz depende somente de Q .

Agora, continuemos as folhas centrais $[a_1, c_1] \subset Q$ à folhas do tipo $[a_1, +\infty] \supset [a_1, c_1]$. Com tais intervalos, considere a faixa

$$Q_+ = \bigcup_{a \in T_1} [a, +\infty).$$

Provemos que a holonomia central sobre Q_+ é Lipschitz.



Considere T um intervalos compacto sobre uma folha de \mathcal{F}_f^u . Para simplificar usamos notação $T = [c, \tilde{c}]$. O intervalo T é tal que esteja bem definida a holonomia por folhas centrais

$$h : T_1 \rightarrow T.$$

Escolha um $N > 0$ suficientemente grande, tal que $f^{-N}c, f^N\tilde{c}, f^{-N}\tilde{a} \in Q$

$$\frac{\tilde{d}^u(f^{-N}c, f^N\tilde{c})}{\tilde{d}^u(p, f^{-N}\tilde{a})} = \left(\prod_{i=1}^N \frac{\exp \lambda^u(p)}{D_f^u(f^{-i}c)} \right) \frac{\tilde{d}^u(c, \tilde{c})}{\tilde{d}^u(p, \tilde{a})}. \quad (11)$$

Desde que o lado esquerdo da equação (11) é uniformemente limitado pela propriedade de Lipschitz, e pelo lema 3.2 temos que a última fração do lado direito é limitada independentemente de $p, \tilde{a}, c, \tilde{c}$, pois o comprimento de T_1 é um. Então o produto

$$\prod_{i=1}^N \frac{\exp \lambda^u(p)}{D_f^u(f^{-i}c)} \quad (12)$$

é uniformemente limitado por uma constante que independe de c, N .

Seja $[a_1, a_2] \in T_1$ e $[c_1, c_2] \in T$, tal que $h(a_i) = c_i, i = 1, 2$ e além disso $h(p) = c, h(\tilde{a}) = \tilde{c}$. Queremos estimar

$$\frac{\tilde{d}^u(c_1, c_2)}{\tilde{d}^u(a_1, a_2)}.$$

Primeiramente escolha um N suficientemente grande tal que $f^{-N}(c_i) \in Q, i = 1, 2$. Por propriedade de \tilde{d}^u , temos

$$\frac{\tilde{d}^u(f^{-N}c_1, f^{-N}c_2)}{\tilde{d}^u(p, f^{-N}a_1)} = \left(\prod_{i=1}^N \frac{\exp \lambda^u(p)}{D_f^u(f^{-i}c_1)} \right) \frac{\tilde{d}^u(c_1, c_2)}{\tilde{d}^u(p, a_1)} \quad (13)$$

Agora considere

$$\frac{\tilde{d}^u(f^{-N}c, f^{-N}c_1)}{\tilde{d}^u(p, f^{-N}a_1)} = \left(\prod_{i=1}^N \frac{\exp \lambda^u(p)}{D_f^u(f^{-i}c)} \right) \frac{\tilde{d}^u(c, c_1)}{\tilde{d}^u(p, a_1)} \quad (14)$$

Por propriedade de Lipschitz, o lado esquerdo em (13) e (14) são uniformemente limitados. O produto em (14) é uniformemente limitado independentemente de c e N , pelo estabelecido em (12). Então concluímos que

$$\frac{\tilde{d}^u(c, c_1)}{\tilde{d}^u(p, a_1)}$$

é uniformemente limitado. Isto implica que em (13) o termo

$$\frac{\tilde{d}^u(c_1, c)}{\tilde{d}^u(p, a_1)}$$

é uniformemente limitado. Assim, obtemos

$$\prod_{i=1}^N \frac{\exp \lambda^u(p)}{D_f^u(f^{-i}c_1)}. \quad (15)$$

é uniformemente limitado.

Como T_1 é compacto, da convergência $f^{-n}(a) \rightarrow p$, para todo $a \in T_1$, existe $C > 1$, independente de $a \in T_1$ tal que

$$\frac{1}{C} < \prod_{i=1}^N \frac{\exp \lambda^u(p)}{D_f^u(f^{-i}a)} < C. \quad (16)$$

o que significa dizer que o produto acima é uniformemente limitado, tal uniformidade se deve ao fato de f ser de classe C^2 e $a \in T_1 \subset \mathcal{F}_f^u(p)$.

Escolha um N , grande tal que $f^{-N}a_1, f^{-N}a_2, f^{-N}c_1, f^{-N}c_2 \in Q$.

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{d}^u(f^{-N}a_1, f^{-N}a_2)}{\tilde{d}^u(f^{-N}c_1, f^{-N}c_2)} &= \prod_{i=1}^N \frac{D_f^u(f^{-i}c_1)}{D_f^u(f^{-i}a_1)} \frac{\tilde{d}^u(a_1, a_2)}{\tilde{d}^u(c_1, c_2)} = \\ &= \left[\prod_{i=1}^N \frac{D_f^u(f^{-i}c_1)}{\exp \lambda^u(p)} \right] \left[\prod_{i=1}^N \frac{\exp \lambda^u(p)}{D_f^u(f^{-i}a_1)} \right] \frac{\tilde{d}^u(a_1, a_2)}{\tilde{d}^u(c_1, c_2)} \end{aligned} \quad (17)$$

Os dois produtos em (17) são uniformemente limitados, e pela propriedade de Lipschitz em Q , concluímos que

$$\frac{\tilde{d}^u(a_1, a_2)}{\tilde{d}^u(c_1, c_2)}$$

é uniformemente limitado por uma constante que depende somente de Q .

Para quaisquer pontos $b_1, b_2 \in T'$, T' sobre \mathcal{F}_f^u uma outra transversal a \mathcal{F}_f^c e b_1, b_2 obtidos por holonomia central de pontos a_1, a_2 respectivamente sobre T_1 , então

$$\frac{\tilde{d}^u(c_1, c_2)}{\tilde{d}^u(b_1, b_2)} = \frac{\tilde{d}^u(c_1, c_2)}{\tilde{d}^u(a_1, a_2)} \times \frac{\tilde{d}^u(b_1, b_2)}{\tilde{d}^u(c_1, c_2)}.$$

Os dois termos na equação são uniformemente limitados por uma constante que depende somente de Q , então o lado direito também o é.

Concluimos que a holonomia sobre a faixa Q_+ é Lipschitz.

Seja Q' uma placa compacta sobre \mathcal{F}_f^{cu} . Desde que as folhas centrais de f não são compactas, f é centralmente conjugado a um automorfismo linear de Anosov de \mathbb{T}^3 , então Q_+ é denso sobre o toro.

Por densidade de Q_+ existem subplacas $Q_n \subset Q_+$, convergindo a Q' ,

$$Q_n \rightarrow Q'.$$

Desde que a holonomia central depende continuamente da cu placa a qual está definida, temos

$$h_n \rightrightarrows h,$$

de modo que h_n são as holonomias centrais definidas sobre Q_n , e h a holonomia central sobre Q' . Como h_n são Lipschitz, de fato bi-Lipschitz, com constante $C(Q)$, dependendo somente de Q , por convergência uniforme de $\{h_n\}$ temos h é Lipschitz com a mesma constante $C(Q)$. ■

Proposição 3.8. *Seja $f : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$, a C^2 difeomorfismo parcialmente hiperbólico, acessível em $\mathcal{PH}_{m,+}^2(\mathbb{T}^3)$, então $\mathcal{F}^c | \mathcal{F}^{cu}$ é Lipschitz se e somente se $f \notin \mathcal{U}_1$, isto é, $\lambda^u(p) = \lambda^u(q)$, para quaisquer pontos periódicos p e q .*

Demonstração. Sejam T_1 e T_2 intervalos compactos sobre as folhas \mathcal{F}_f^u , tal que esteja bem definida a aplicação $h : T_1 \rightarrow T_2$, holonomia por folhas de \mathcal{F}_f^c .

Para não carregarmos notação vamos considerar

$$1 = \eta' = \frac{C\eta}{4 \cdot \min_{x \in \mathbb{T}^3} \|D_f^u(x)\|}, \quad (18)$$

de modo que η é como obtido no lema 3.1 e $C > 0$, como na propriedade (2).

Para x, y em T_1 , tais que $d^u(x, y) \geq 1$, por compacidade temos a propriedade de Lipschitz, isto é, existe $c > 0$, tal que

$$d^u(h(x), h(y)) \leq cd^u(x, y).$$

De fato, se isso não fosse verdade, para cada inteiro $n > 0$ existiria $x_n, y_n \in T_1$, with $d^u(x_n, y_n) \geq 1$, e $d^u(h(x_n), h(y_n)) > nd^u(x_n, y_n)$. Por compacidade de T_1 , podemos supor que $x_n \rightarrow x \in T_1$, $y_n \rightarrow y \in T_1$, and $d^u(x, y) \geq 1$, e então $d^u(h(x), h(y)) = +\infty$, o que não ocorre.

Considere agora, $x, y \in T_1$, e $d^u(x, y) < 1$. Lancemos mão da métrica \tilde{d}^u .

Considere o inteiro $n > 0$, tal que

$$\tilde{d}^u(f^{n-1}(x), f^{n-1}(y)) < 1 \leq \tilde{d}^u(f^n(x), f^n(y)).$$

Pelas propriedades de (1) e (2) de \tilde{d}^u , temos

$$\tilde{d}^u(f^n(x), f^n(y)) \geq C\frac{\eta}{4}, \quad d^u(f^n(x), f^n(y)) \geq \frac{\eta}{4}$$

e

$$\frac{\tilde{d}^u(h(x), h(y))}{\tilde{d}^u(x, y)} = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{D_f^u(f^i h(x))}{D_f^u(f^i x)} \frac{\tilde{d}^u(f^n h(x), f^n h(y))}{\tilde{d}^u(f^n x, f^n y)} \quad (19)$$

Pelo lema 3.2, existe uma constante universal c independente de x, y tal que

$$\frac{\tilde{d}^u(f^n h(x), f^n h(y))}{\tilde{d}^u(f^n x, f^n y)} \leq c \quad (20)$$

Observe que μ , medida de Lebesgue é uma medida hiperbólica para f , desde que $f \in \mathcal{PH}_{m,+}^2$.

O expoente de Lyapunov na direção E_f^u , é constante λ^u , sobre os pontos periódicos de f , isto acarreta que $\varphi = \frac{D_f^u(\cdot)}{\exp(\lambda^u)}$, satisfaça

$$\prod_{i=0}^{n-1} \varphi(f^i(p)) = 1,$$

para todo ponto periódico p , com n tal que $f^n(p) = p$

No contexto multiplicativo f, m e φ satisfazem as hipóteses do Teorema de Livschitz para sistemas não uniformemente hiperbólicos. Usando a proposição 2.16 o teorema 2.15, existe uma função contínua $F : \mathbb{T}^3 \rightarrow R$, tal que

$$\frac{F \circ f}{F} = \frac{D_f^u(\cdot)}{\exp(\lambda^u)}.$$

Por continuidade de F e compacidade de \mathbb{T}^3 , temos

$$\prod_{i=0}^{n-1} \frac{D_f^u(f^i h(x))}{D_f^u(f^i x)}$$

é uniformemente limitada em \mathbb{T}^3 .

Providos da equação (19) e (20), concluímos que h é Lipschitz.

Provemos agora que se λ^u não é constante sobre pontos periódicos de f , então a holonomia por folhas centrais em \mathcal{F}^{cu} não é Lipschitz. Por simplicidade arguiremos sobre pontos fixos.

Faremos a demonstração para pontos fixos. O caso ponto periódico se reduz a este, quando substituímos f por f^n , onde n é um múltiplo positivo dos períodos de p e q . Considere p e q dois pontos fixos sobre a mesma folha central e suponha que $\lambda^u(p) > \lambda^u(q)$. Seja T_1 um intervalo do tipo $[p, a]$ sobre $\mathcal{F}_f^u(p)$ e T_2 um intervalo do tipo $[q, b]$, tal que esteja bem definida a holonomia por folhas centrais

$$h : T_1 \rightarrow T_2,$$

tal que $h(p) = q, h(a) = b$. Considere a sequência $b_n = h(f^{-n}(a))$. Escolha $\varepsilon > 0$, tal que

$$D_f^u(x) < (1 + \varepsilon)D_f^u(p), x \in T_1$$

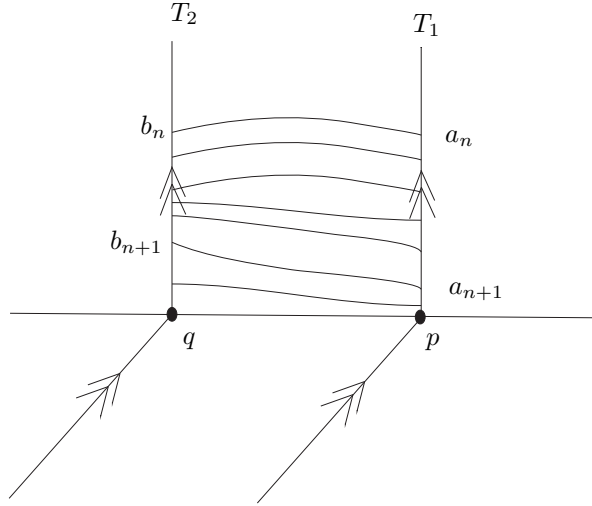
$$D_f^u(x) > (1 - \varepsilon)D_f^u(q), x \in T_2,$$

e

$$\frac{(1 + \varepsilon)D_f^u(p)}{(1 - \varepsilon)D_f^u(q)} = \frac{(1 + \varepsilon)e^{\lambda^u(p)}}{(1 - \varepsilon)e^{\lambda^u(q)}} > 1.$$

Assim, por f invariância das folheações \mathcal{F}_f^c e \mathcal{F}_f^u , temos $f(b_n) = b_{n+1}$ e então

$$\frac{d^u(h(a_n), h(p))}{d^u(a_n, p)} = \frac{d^u(b_n, q)}{d^u(a_n, p)} = \frac{d^u(f^{-n}(b), f^{-n}(q))}{d^u(f^{-n}(a), f^{-n}(p))} > \frac{(1 + \varepsilon)^n e^{\lambda^u(p)n}}{(1 - \varepsilon)^n e^{\lambda^u(q)n}} \frac{d^u(b, q)}{d^u(a, p)} \rightarrow +\infty.$$



No caso em que sobre uma mesma folha central, todos os pontos periódicos tenham mesmo expoente de Lyapunov na direção E^u , usamos os pontos periódicos extremais as saber p_+ e p_- , obtidos no lema 3.4. Podemos supor que p e q são pontos fixos para f .

Sejam p e q dois pontos periódicos extremais tais que $\lambda^u(p) > \lambda^u(q)$ e suponha que \mathcal{F}_f^c como folheação de \mathcal{F}_f^{cu} seja Lipschitz. Seja $Q \subset \mathcal{F}_f^{cu}(p)$ um retângulo com bases T_1 e T_2 subintervalos compactos sobre a folheação instável tais que a holonomia central $h : T_1 \rightarrow T_2$, seja um homeomorfismo. Vamos considerar T_1 um intervalo compacto $[p, \tilde{a}]$, de comprimento um, sobre $\mathcal{F}_f^u(p)$. Temos por hipótese que h é Lipschitz. Considere a faixa Q_+ , construída da seguinte maneira:

$$Q_+ = \bigcup_{x \in T_1} [x, +\infty),$$

tais intervalos, na intersecção acima, são tomados sobre as folhas centrais.

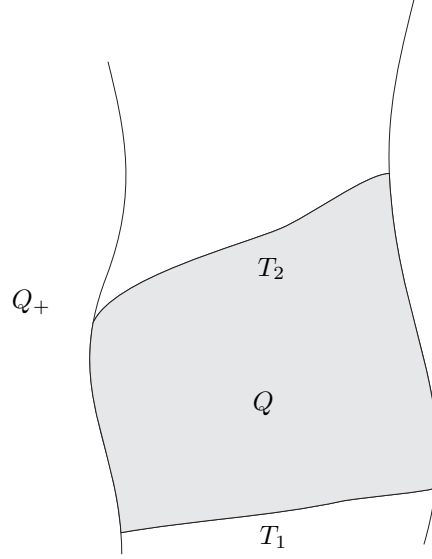


Figura 3: Regiões Q e Q_+ .

Conforme a proposição 3.7 a holonomia por folhas centrais é de fato uniformemente bi-Lipschitz, isto é, com a mesma constante de Lipschitz para quaisquer $T, T' \subset Q_+$, intervalos compactos sobre \mathcal{F}_f^u , e que $h : T \rightarrow T'$ seja homeomorfismo.

Seja $\delta > 0$ tal que $\frac{(1 + \delta)e^{\lambda^u(q)}}{e^{\lambda^u(p)}} < 1$. Seja $\varepsilon > 0$, tal que para todo ponto $z \in B(q, \varepsilon)$, tenhamos

$$|D_f^u(z)| < (1 + \delta)|D_f^u(q)| = (1 + \delta)e^{\lambda^u(b)}.$$

Fixe $N > 0$, por continuidade, existe $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ tal que

$$z \in B(q, \varepsilon') \Rightarrow f^{-i}(z) \in B(q, \varepsilon), i = 0, 1, \dots, N + 1.$$

Como $[p, +\infty]$ é denso em \mathbb{T}^3 , existe $c = c(\varepsilon', N) \in [p, +\infty] \cap B(q, \varepsilon')$. Considere $\tilde{c} \in \mathcal{F}_f^u(c)$, obtido como

$$\tilde{c} = \mathcal{F}_f^c(\tilde{a}) \cap \mathcal{F}_f^u(c).$$

Assim temos

$$\frac{\tilde{d}^u(p, f^{-N}(\tilde{a}))}{\tilde{d}^u(f^{-N}(c), f^{-N}(\tilde{c}))} = \prod_{i=1}^N \frac{D_f^u(f^{-i}(c))}{e^{\lambda^u(p)}} \frac{\tilde{d}^u(p, \tilde{a})}{\tilde{d}^u(c, \tilde{c})}$$

Por esta igualdade, a quantidade

$$\prod_{i=1}^N \frac{D_f^u(f^{-i}(c))}{e^{\lambda^u(p)}}$$

é uniformemente limitada, já que

$$\frac{\tilde{d}^u(p, f^{-N}(\tilde{a}))}{\tilde{d}^u(f^{-N}(c), f^{-N}(\tilde{c}))} \text{ e } \frac{\tilde{d}^u(p, \tilde{a})}{\tilde{d}^u(c, \tilde{c})}$$

também os são.

Por outro lado

$$\prod_{i=1}^{N+1} \frac{D_f^u(f^{-i}(c))}{e^{\lambda^u(p)}} \leq \frac{((1 + \delta)e^{\lambda^u(q)})^N}{e^{N\lambda^u(p)}} \rightarrow 0$$

quando $N \rightarrow +\infty$. A convergência a zero, contraria o fato da holonomia central ser bi-Lipschitz em Q_+ . Logo devemos ter $\lambda^u(p) = \lambda^u(q)$, quaisquer que sejam p e q pontos periódicos para f . ■

Proposição 3.9 (Conclusão da Prova do Teorema A 1). *Seja $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{V}_1$, C^1 aberto e C^2 denso em $\mathcal{PH}_{m,+}^2(\mathbb{T}^3)$. Se $f \in \mathcal{U}$, então a folheação central \mathcal{F}_f^c não é absolutamente contínua.*

Demonstração. Se $f \in \mathcal{U}$, então os expoentes de Lyapunov para f , na direção E_f^u não são constantes sobre pontos periódicos, então \mathcal{F}_f^c restrita a \mathcal{F}_f^{cu} não é

Lipschitz, pela proposição 3.8. Como $f \in \mathcal{V}_1$ e \mathcal{F}_f^c restrita a \mathcal{F}_f^{cu} não é Lipschitz, pela proposição 3.7, a folheação central não é absolutamente contínua. O teorema A1 está provado. ■

Observação 3.10. No caso em que no lema 3.4, fosse necessário substituir f por f^{-2} , a mesma demonstração se verifica trocando-se E_f^{cu} por $E_{f^{-2}}^{cu} = E_f^{cs}$ e definiríamos

$$\mathcal{U}_1 = \{f \in \mathcal{PH}_{m,+}^2(\mathbb{T}^3), \text{ acessível } |\lambda^s(p) \neq \lambda^s(q), \text{ para dois pontos periódicos } p \text{ e } q \}.$$

4 Prova do Teorema B 1

A partir de agora provaremos um resultado que nos diz como expoentes de Lyapunov e continuidade absoluta da folheação central acarretam informações sobre o tipo topológico das folhas centrais.

O resultado a seguir pode ser enunciado em \mathbb{T}^d , $d \geq 3$ e com demonstração idêntica ao que segue, desde que admitamos que $\dim E_f^c = 1$ e que as folheações \mathcal{F}_f^s , e \mathcal{F}_f^u sejam quasi isométricas.

Teorema 4.1. *Seja $f : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$, um difeomorfismo parcialmente hiperbólico conservativo, $\lambda^c = 0$, para m quase todo ponto em \mathbb{T}^3 . Suponha que a folheação central é inferiormente absolutamente contínua e que $\frac{1}{n} \log \|D_x f^n|_{E_x^c}\| \rightarrow 0$, convergência uniforme para m quase todo ponto, então as folhas centrais da folheação central \mathcal{F}_f^c são círculos.*

Demonstração. Seja A a linearização de f . Suponha por contradição que A é Anosov. Sendo A Anosov, suponha sem perda de generalidade que seu auto valor intermediário seja $\mu > 0$, tal que

$$0 < |\mu| < 1.$$

Isso é sempre possível, se necessário troque f por f^{-1} .

Seja $0 < \varepsilon$, pequeno, tal que

$$\frac{e^{-\varepsilon}}{|\mu|} > 1.$$

Escolha $n_0 > 0$ tal que

$$\frac{e^{-\varepsilon n_0}}{|\mu|^{n_0}} > \frac{4}{Q},$$

onde Q é a constante de quase isometria da folheação \mathcal{F}_f^c .

Desde que $\frac{1}{n} \log \|D_x f^n|E_x^c\| \rightrightarrows 0$, para m quase todo ponto, então para o valor ε acima, existe $n_1 > 0$, tal que

$$\|D_x f^n|E_x^c\| > e^{-n_1 \varepsilon} \quad (21)$$

sobre um conjunto Z , de medida total em \mathbb{T}^3 .

Tome $N = \max\{n_0, n_1\}$.

Fixe $N, C = 2$ e $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ como acima e escolha $M > 0$ suficientemente grande, de acordo com teoremas 2.6 e 2.5, e que ainda satisfaça

$$\|A^N(x - y)\| \leq 2|\mu|^N \|x - y\|$$

sempre que $y \in \mathcal{F}_x^c$ e $\|x - y\| \geq M$.

Isto é verdade pelo teorema 2.6. De fato, pelo teorema 2.6

$$\frac{x - y}{\|x - y\|} = v^c + e_M,$$

o vetor v^c é auto valor de A , na direção E_A^c e e_M é um vetor corretor que se anula uniformemente quando M tende a infinito.

Desta maneira,

$$A^N \left(\frac{x - y}{\|x - y\|} \right) = \mu^N v^c + A^N e_M = \mu^N \left(\frac{x - y}{\|x - y\|} \right) - \mu^N e_M + A^N e_M$$

e

$$\|A^N(x - y)\| \leq \|x - y\|(\mu^N + \mu^N\|e_M\| + \|A\|^N\|e_M\|)$$

desde que N está fixo, podemos escolher $M > 0$, tal que

$$\mu^N\|e_M\| + \|A\|^N\|e_M\| \leq \mu^N$$

pois $\mu^N\|e_M\| + \|A\|^N\|e_M\|$ converge uniformemente a zero quando M tende a infinito.

Desde que \mathcal{F}_f^c é absolutamente contínua, existe uma folha $L \in \mathcal{F}_f^c$ que intersecta Z , conforme (21), em um conjunto de medida total. Seja $[x, y]_c$ um seguimento sobre L tal que

$$\|x - y\| \geq M.$$

Denote o comprimento de arco sobre $[x, y]_c$ por $d\lambda$, assim:

$$\frac{\|f^N(x) - f^N(y)\|}{\|A^N(x - y)\|} \geq \frac{\int_{Z \cap [x, y]_c} \|D_x f^N|E_f^c(x)\| d\lambda}{2|\mu|^N\|x - y\|} \geq Q \frac{e^{-\varepsilon N}\|x - y\|}{2|\mu|^N\|x - y\|} \geq \frac{Qe^{-\varepsilon N}}{2|\mu|^N} > 2,$$

Logo

$$\frac{\|f^N(x) - f^N(y)\|}{\|A^N(x - y)\|} > 2,$$

que é uma contradição com o teorema 2.5. ■

Uma consequência imediata da demonstração do resultado anterior é a seguinte.

Corolário 4.2. *Seja $f : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$, $d \geq 3$ um difeomorfismo parcialmente hiperbólico, $\dim E_f^c = 1$, conservativo, $\lambda^c = 0$, para m quase todo ponto em \mathbb{T}^d . Suponha que as folheações \mathcal{F}_f^s e \mathcal{F}_f^u são quasi isométricas e que folheação central é inferiormente absolutamente contínua e $\frac{1}{n} \log \|D_x f^n|_{E_x^c}\| \rightrightarrows 0$, convergência uniforme para m quase todo ponto, então as folhas centrais da folheação central \mathcal{F}_f^c são círculos.*

Com mesmo raciocínio da demonstração do teorema B 1, temos:

Corolário 4.3. *Se f é um difeomorfismo parcialmente hiperbólico de \mathbb{T}^3 , tal que f atua isometricamente sobre folhas centrais, então estas são círculos. Mais geralmente, se f é difeomorfismo parcialmente hiperbólico do toro \mathbb{T}^d , $d \geq 3$ com $\dim E_f^c = 1$, $\mathcal{F}_f^u, \mathcal{F}_f^s$ quasi isométricos, tal que f é central isométrica, então as folhas centrais de \mathcal{F}_f^c são círculos.*

Uma pergunta que nos podíamos fazer é:

folheação central por círculos juntamente com convergência uniforme do expoente central a zero implicam continuidade absoluta da folheação central ?

A resposta é negativa. O exemplo de Katok, cuja folheação central não é absolutamente contínua, é um exemplo que satisfaz a hipótese de convergência uniforme de $\frac{1}{n} \log \|D_x F^n|_{E_x^c}\|$ a zero para todo ponto em \mathbb{T}^3 , e as folhas centrais são círculos.

Isto se verifica pois, tomando $\alpha_x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{T}^3$ uma parametrização da folha central passando por x , por construção do exemplo de Katok temos o seguinte

$$\alpha_{F^n(x)}(t) = F^n(\alpha_x(t)),$$

derivando ambos os lados da expressão acima em relação a t , no ponto $t = 0$, obtemos:

$$\left\| \frac{d}{dt} \alpha_{F^n(x)}(0) \right\| = \|D_x F^n|E_x^c\| \left\| \frac{d}{dt} \alpha_x(0) \right\|$$

as parametrizações $\alpha_x, x \in \mathbb{T}^3$ são tais que as derivadas com relação a t tenham normas uniformemente limitadas. Assim, para todo $x \in \mathbb{T}^3$ e n inteiro temos:

$$\|D_x F^n|E_x^c\|$$

é uniformemente limitado por uma constante positiva independente de x e n , logo

$$\frac{1}{n} \log \|D_x F^n|E_x^c\| \Rightarrow 0.$$

Uma consequência direta do teorema acima, juntamente com o teorema 1.18 é o seguinte corolário:

Corolário 4.4. *Seja $f : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$, um difeomorfismo de classe C^∞ , parcialmente hiperbólico e conservativo, tal que $\lambda^c = 0$, para m quase todo ponto em \mathbb{T}^3 . Suponha que a folheação central é absolutamente contínua e que $\frac{1}{n} \log \|D_x f^n|E_x^c\| \Rightarrow 0$, convergência uniforme para m quase todo ponto, então f é C^∞ conjugado a uma extensão de rotação de um difeomorfismo de Anosov do toro \mathbb{T}^2 , a menos de recobrimento finito.*

5 Introdução à Entropia para Sistema

Iterado de Funções

Em [15], os autores estudam uma definição de entropia para \mathbb{Z}^2 ações e verificam uma conjectura devido a Friedland.

Recordemos a definição de entropia de Friedland, para sistema iterado de funções. Assumamos que $S, T : X \rightarrow X$ são um par de transformações contínuas definidas em um espaço métrico compacto X . Podemos definir o espaço de órbitas

$$\mathcal{O}_{S,T} := \{(x_n)_{n \in \mathbb{Z}_+} \in \prod_{n \in \mathbb{Z}_+} X : T(x_n) = x_{n+1} \text{ ou } S(x_n) = x_{n+1}\}.$$

Em $\mathcal{O}_{S,T}$ vamos colocar a seguinte métrica

$$d(s, t) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{d_X(s_i, t_i)}{2^i}.$$

O espaço $\mathcal{O}_{S,T}$ munido com essa métrica é um espaço métrico compacto.

Assim, naturalmente, podemos definir a entropia do par (S, T) por $h(S, T) = h_\sigma$ onde $\sigma : \mathcal{O}_{S,T} \rightarrow \mathcal{O}_{S,T}$ é a aplicação shift. Vale mencionar que quando temos exatamente uma transformação T então $h(T) = h_{\sigma_T}$ onde σ_T é a aplicação shift associado ao espaço de órbitas de T .

Em [14], demonstra-se uma propriedade importante que esta definição de entropia satisfaz, a qual é expressa no teorema a seguir.

Teorema 5.1. *Sejam $S, T : X \rightarrow X$, X , espaço métrico compacto, tal que a capacidade limite $HD(X)$, seja igual a n . Suponha ainda que S, T são transformações Lipschitz, com constantes $L(S)$ e $L(T)$, respectivamente, então*

$$h(S, T) \leq \log(L(S)^n + L(T)^n).$$

Também podemos de alguma forma relacionar a entropia descrita acima para pares de transformações com a entropia de um *skew product* sobre a aplicação shift de Σ_2 . Para vermos isto, considere $Y := \Sigma_2 \times X$ e definimos o seguinte skew product :

$$\tilde{\sigma}((x_n), x) := (\sigma_2((x_n)), A_{x_0}(x))$$

onde $A_0 = S, A_1 = T$. Podemos checar que $\sigma : \mathcal{O}_{S,T} \rightarrow \mathcal{O}_{S,T}$ é um fator do skew product acima . A semi-conjugação $\pi : Y \rightarrow \mathcal{O}_{S,T}$ é contínua se S and T are Lipschitz. Assim, pelo teorema de Bowen a seguir, concluimos que

$$h(S, T) = h_\sigma \leq h_{\tilde{\sigma}} \leq \log(2) + \max\{h(S), h(T)\}.$$

Teorema 5.2. [5] *Sejam X e Y espaços métricos compactos e sejam $f : X \rightarrow X$, $g : Y \rightarrow Y$, $\pi : X \rightarrow Y$ transformações contínuas tais que π é sobrejetiva e $\pi f = g\pi$. Então*

$$h(f) \leq h(g) + \sup_{y \in Y} h(f, \pi^{-1}(y)).$$

É importante mencionar que em [14], há exemplos devidos a M. Boyle, nos quais tem-se dois (não-Lipschitz) homeomorfismos S, T com entropia zero, porém $h(S, T) = \infty$.

6 Resultados Obtidos

O objetivo de agora em diante é relacionar a entropia topológica definida por Friedland em [14], com os graus topológicos dos geradores (das dinâmicas) envolvidos.

6.1 Resultados Preliminares

Definição 6.1. *Seja (M, d) um espaço métrico e $f : M \rightarrow M$, uma transformação contínua. Dizemos que f é ε -expansora se existe $\lambda > 1$, tal que*

$$d(f(x), f(y)) \geq \lambda d(x, y),$$

sempre que $d(x, y) \leq \varepsilon$.

Como ε é universal na definição acima, vamos simplesmente mencionar o termo transformações expansoras.

No que segue vamos sempre considerar M um espaço métrico compacto conexo, e as transformações envolvidas serão sempre contínuas.

Um fato conhecido de Topologia Geral é que as transformações e sobrejetivas expansoras, de um espaço métrico M , compacto e conexo, são também aplicações de recobrimento e o grau topológico está bem definido, para qualquer $y \in M$ o número de pré-imagens de y é constante.

Temos o seguinte resultado.

Proposição 6.2. *Sejam $S, T : M \rightarrow M$ transformações expansoras de grau p e q respectivamente, então:*

$$h(S, T) \leq \log(p + q).$$

Demonstração. Sejam $\varepsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, e $\lambda \geq 1$, tal que $\lambda = \min\{\lambda(S), \lambda(T)\}$, onde $\lambda(S), \lambda(T)$, são para S, T como na definição 6.1. Estamos considerando ε de acordo com a definição 6.1, e mais, em cada subconjunto B com diâmetro menor ou igual a 2ε , as transformações S, T são injetoras. Considere $G \subset M$ um conjunto $(0, \varepsilon)$ -gerador minimal, isto é, para cada $y \in M$ existe $x \in G$, tal que

$$d(x, y) < \varepsilon.$$

Denote $r = \text{card}(G)$, cardinalidade de G . Vamos denotar por

$$(S, T)^{-n}(y), y \in M,$$

como sendo o conjunto das seqüências de comprimento $(n + 1)$, (a_0, \dots, a_n) tal que

$$a_{i+1} = S(a_i) \text{ ou } a_{i+1} = T(a_i), \text{ para } i = 0, \dots, n - 1 \text{ e } a_n = y.$$

Dado um conjunto $A \subset M$, vamos denotar

$$(S, T)^{-n}(A) = \bigcup_{y \in A} (S, T)^{-n}(y).$$

Observe que a cardinalidade de $(S, T)^{-n}(y)$ é sempre menor que $(p + q)^n$.

Seja $N = N(\varepsilon)$, tal que

$$\sum_{i=N}^{+\infty} \frac{\text{diam}(M)}{2^i} < \varepsilon,$$

onde $\text{diam}(M)$, denota o diâmetro de M .

Vamos considerar o conjunto \mathcal{S} , de todas seqüências infinitas do tipo

$$(a_0, \dots, a_{n+N}, S(a_{n+N}), S^2(a_{n+N}), \dots, S^k(a_{n+N}), \dots)$$

tais que

$$(a_0, \dots, a_{n+N})$$

são sequências de $(S, T)^{-(n+N)}G$. Note que $\text{card}(\mathcal{S}) \leq (p + q)^{n+N}$.

Afirmamos que \mathcal{S} é um conjunto $(n, 3\varepsilon)$ – gerador para $\sigma : \mathcal{O}_{S,T} \rightarrow \mathcal{O}_{S,T}$.

De fato, seja uma sequência

$$b = (b_0, \dots, b_{n+N}, \dots) \in \mathcal{O}_{S,T}.$$

Chame $x = b_{n+N} \in M$, sabemos que existe $T_{i_1} \in \{S, T\}$, tal que

$$T_{i_1}(b_{n+N-1}) = b_{n+N}.$$

Como G é $(0, \varepsilon)$ –gerador, existe $a_{n+N} = y \in G$, tal que

$$d(y, x = b_{n+N}) < \varepsilon,$$

o fato de T_{i_1} ser expansora com λ –expansão, garante que existe a_{n+N-1} , tal que

$$d(a_{n+N-1}, b_{n+N-1}) < \lambda^{-1}\varepsilon \leq \varepsilon \text{ e } T_{i_1}(a_{n+N-1}) = y.$$

Fazendo o mesmo procedimento para b_{n+N-1} e a_{n+N-1} , obtemos um a_{n+N-2} , tal que

$$d(a_{n+N-2}, b_{n+N-1}) < \lambda^{-2}\varepsilon \leq \varepsilon \text{ e } T_{i_2}(a_{n+N-2}) = a_{n+N-1}.$$

De uma maneira geral, encontramos $a_{n+N-i}, i = 0, \dots, n + N$ com

$$d(a_{n+N-i}, b_{n+N-i}) < \lambda^{-i} \varepsilon \leq \varepsilon, i = 0, \dots, n + N.$$

Considere o seguinte elemento de \mathcal{S} :

$$a = (a_0, \dots, a_{n+N}, S(a_{n+N}), S^2(a_{n+N}), \dots, S^k(a_{n+N}), \dots).$$

Da maneira como foi construída, para $0 \leq i \leq n - 1$ temos que

$$d(\sigma^i(a), \sigma^i(b)) < \sum_{j=i}^{n+N-1} \frac{\lambda^{-j} \varepsilon}{2^{j-i}} + \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\text{diam}(M)}{2^{n+N+j-i}} < 3\varepsilon$$

para $0 \leq i \leq n - 1$.

Temos provado que \mathcal{S} é $(n, 3\varepsilon)$ -gerador.

Desta maneira o conjunto $(n, 3\varepsilon)$ -gerador minimal para σ tem cardinalidade menor que $r \cdot (p + q)^{n+N}$, onde $r = \text{card}(G)$.

Assim, podemos concluir que para todo $\varepsilon > 0$

$$h(\sigma, 3\varepsilon) \leq \log(p + q),$$

fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, obtemos

$$h(S, T) = h(\sigma) \leq \log(p + q).$$

Como queríamos. ■

Note que esta demonstração continua verdadeira quando $p = 1$ ou $q = 1$.

A investigação continua neste sentido, afim de encontrarmos, neste contexto, a desigualdade oposta e concluir a igualdade $h(S, T) = \log(p + q)$.

Definição 6.3 (Ponto de Colapso de (S, T)). *Sejam $S, T : M \rightarrow M$, dizemos que um ponto $y \in M$ é um ponto de colapso de (S, T) , se*

$$S^{-1}(\{y\}) \cap T^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$$

Passemos a denotar o conjunto dos pontos de colapso de S, T por $\mathcal{D}(S, T)$, ou simplesmente \mathcal{D} , quando não houver ambiguidade.

Por indução finita podemos provar.

Lema 6.4. *Sejam $S, T : M \rightarrow M$, homeomorfismos locais, tais que $\mathcal{D} = \emptyset$, então $\text{card}((S, T)^{-n}(y)) = (p + q)^n$, para todo $y \in M$.*

Lema 6.5 (Lema Topológico 1). *Sejam $S, T : M \rightarrow M$, homeomorfismos locais, tais que $\mathcal{D} = \emptyset$, (ou equivalentemente $\text{card}(S^{-1}(\{y\}) \cup T^{-1}(\{y\})) = p + q$, onde $p = \text{deg}S, q = \text{deg}T$). Nessas condições existe $0 < \delta = \delta(M, S, T)$ com a propriedade:*

$$0 < d(x, y) < \delta \Rightarrow T_1(x) \neq T_2(y), T_1, T_2 \in \{S, T\}.$$

Demonstração. Da compacidade de M , e o fato de S, T serem homeomorfismos locais, já sabemos que existe um $\tilde{\delta} > 0$, tal que

$$0 < d(x, y) < \tilde{\delta} \Rightarrow S(x) \neq S(y), T(x) \neq T(y).$$

Nosso trabalho é encontrar $\delta > 0$, tais que

$$0 < d(x, y) < \delta \Rightarrow T(x) \neq S(y), S(x) \neq T(y).$$

Suponha que isso não aconteça, assim para cada $\delta_n = \frac{1}{n}$ existem $P_n, x_n, y_n \in M$, tais que

$$S(x_n) = T(y_n) = P_n$$

$$d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}.$$

A menos de tomar uma subsequência apropriada, podemos supor que $(x_n), (y_n), (P_n)$ convergem em M , para x, y, P respectivamente, donde $x = y$, assim teríamos

$$S(x) = T(x) = P,$$

logo, P é um ponto de colapso para (S, T) , o que é uma contradição. ■

O lema anterior ganha uma versão, que nos interessará futuramente.

Lema 6.6 (Lema Topológico 2). *Sejam $S, T : M \rightarrow M$, homeomorfismos locais. Suponha que exista um compacto $\emptyset \neq K \subset M$, tal que para todo $y \in K$ tem a propriedade, $\text{card}(S^{-1}(\{y\}) \cup T^{-1}(\{y\})) = p + q$, onde $p = \text{deg}S$, $q = \text{deg}T$. Nessas condições existe $0 < \delta = \delta(K, S, T)$ com a propriedade:*

$$0 < d(x, y) < \delta \Rightarrow T_1(x) \neq T_2(y), T_1, T_2 \in \{S, T\}, \forall y \in K.$$

A demonstração deste é análoga à demonstração anterior, devido à compacidade de K .

Proposição 6.7. *Se S, T estão nas condições do lema 6.5, então $h(S, T) \geq \log(p + q)$.*

Demonstração. Seja $y \in M$, afirmamos que o conjunto das sequencias

$$a = (a_0, \dots, a_n, \dots)$$

com

$$(a_0, \dots, a_n) \in (S, T)^{-n}(y),$$

é um conjunto $(n, \delta(M, S, T))$ separado. De fato, sejam y_1 e y_2 extremidades de caminhos em $(S, T)^{-n}(y)$. Em particular, existem T_{i_1}, \dots, T_{i_n} onde $T_{i_l} \in \{S, T\}, l = 1, \dots, n$ tais que

$$T_{i_n} \circ T_{i_{n-1}} \circ \dots \circ T_{i_1}(y_1) = y$$

analogamente, existem T_{j_1}, \dots, T_{j_n} onde $T_{j_l} \in \{S, T\}, l = 1, \dots, n$ tais que

$$T_{j_n} \circ T_{j_{n-1}} \circ \dots \circ T_{j_1}(y_2) = y.$$

Afirmamos que

$$\max\{d(y_1, y_2), d(T_{i_1}(y_1), T_{j_1}(y_2)), \dots, d(T_{i_{n-1}} \circ \dots \circ T_{i_1}(y_1), T_{j_{n-1}} \circ \dots \circ T_{j_1}(y_2))\} \geq \delta$$

onde $\delta = \delta(M, S, T)$.

Suponha que a desigualdade acima não ocorra, em particular temos que

$$d(T_{i_{n-1}} \circ \dots \circ T_{i_1}(y_1), T_{j_{n-1}} \circ \dots \circ T_{j_1}(y_2)) < \delta$$

e

$$T_{j_n} \circ T_{j_{n-1}} \circ \dots \circ T_{j_1}(y_2) = y = T_{i_n} \circ T_{i_{n-1}} \circ \dots \circ T_{i_1}(y_1).$$

Segue do lema 6.5 que

$$T_{i_{n-1}} \circ \dots \circ T_{i_1}(y_1) = T_{j_{n-1}} \circ \dots \circ T_{j_1}(y_2).$$

Aplicando um raciocínio análogo para $T_{i_{n-1}}$ e $T_{j_{n-1}}$, concluímos que:

$$T_{i_{n-2}} \circ \dots \circ T_{i_1}(y_1) = T_{j_{n-2}} \circ \dots \circ T_{j_1}(y_2).$$

Prosseguimos indutivamente até concluir que $y_1 = y_2$, necessariamente. Sendo assim, concluímos que, se há dois caminhos em $(S, T)^{-n}(y)$, tais que em cada passo as distâncias não superam δ , então tais caminhos são rigorosamente iguais. Logo para dois caminhos distintos, com extremidades y_1 e y_2 , vale

$$\max\{d(y_1, y_2), d(T_{i_1}(y_1), T_{j_1}(y_2)) \dots, d(T_{i_{n-1}} \circ \dots \circ T_{i_1}(y_1), T_{j_{n-1}} \circ \dots \circ T_{j_1}(y_2))\} \geq \delta$$

onde $\delta = \delta(M, S, T)$.

Assim, no sentido da definição de entropia de Friedland, temos que o número maximal de órbitas (n, δ) -separadas, para $\sigma : \mathcal{O}_{S,T} \rightarrow \mathcal{O}_{S,T}$, denotado por $S(\sigma, n, \delta)$ é maior que

$$\text{card}((S, T)^{-n}(y)) = (p + q)^n.$$

Assim, temos que $S(\sigma, n, \delta) \geq (p + q)^n$, donde concluímos:

$$h(S, T) = h_{\text{top}}(\sigma) \geq h(\sigma, \delta) = \log(p + q).$$

■

Corolário 6.8. *Sejam $S, T : M \rightarrow M$, transformações expansoras satisfazendo as hipóteses do lema 6.5, então*

$$h(S, T) = \log(p + q).$$

Demonstração. Segue das proposições 6.2 e 6.7. ■

O lema topológico 6.5, vale para o sistema iterado de uma função apenas, um sistema dinâmico. Sendo assim, a proposição 6.7, também válida para um sistema dinâmico, exige apenas homeomorfismo local, f não precisa ser diferenciável, e M basta ser um espaço métrico compacto e conexo.

Demonstração. O resultado segue diretamente do lema 6.5 e das proposições 6.2 e 6.7.

Exemplo 6 (Transformações Paralelas). *Sejam $S, T : S^1 \rightarrow S^1$, tais que $Sx = px + \alpha(\text{mod } 1)$ e $Tx = px + \beta(\text{mod } 1)$, com $\alpha \neq \beta(\text{mod } 1)$, e $p \geq 1$, então*

$$h(S, T) = \log(2p).$$

O resultado segue diretamente do lema 6.5 e das proposições 6.2 e 6.7.

O corolário 6.8 é uma boa inspiração para uma nova demonstração, da conjectura de Friedland.

6.2 Demonstração Geométrica da

Conjectura de Friedland

Antes da demonstração, vamos estabelecer que a medida m é a medida de Lebesgue normalizada em S^1 , isto é $m(S^1) = 1$.

Teorema 6.9 (Uma Prova Geométrica da Conjectura de Friedland). *Sejam $S, T : S^1 \rightarrow S^1$, tais que $Sx = px(\text{mod } 1)$, $Tx = qx(\text{mod } 1)$, tais que $1 < p < q$, então*

$$h(S, T) = \log(p + q).$$

Demonstração. Seja $\{a_0, \dots, a_{k-1}\}$, o conjunto dos pontos de colapso de S, T . Fixamos $0 < \varepsilon < 1$, suficientemente pequeno e os intervalos abertos $I_{l,\varepsilon}$, $l = 0, \dots, k-1$, com centro em a_l e raio $\frac{\varepsilon}{4k}$. Sejam $I = \bigcup_{l=0}^{k-1} I_{l,\varepsilon}$ e o compacto $K = S^1 \setminus I$.

Escolhemos também uma partição \mathcal{P} de $S^1 = [0, 1]/\sim$,

$$\mathcal{P} = \{0 = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$$

tal que $x_i < x_{i+1}$, $i = 0, \dots, n-2$ e $x_n = 1 \sim 0$.

Vamos exigir que $d(x_i, x_{i+1}) = \delta(\varepsilon)$ para todo $i = 0, \dots, n-1$, tal que

$$0 < \delta = \delta(\varepsilon) \leq \delta(K, S, T)$$

satisfazendo que

$$\text{card}(\mathcal{P} \cap I) \leq \varepsilon \text{card}(\mathcal{P}). \tag{22}$$

Chame $r = \text{card}(\mathcal{P})$. Observe que r , também só depende de ε . Queremos estimar a cardinalidade dos $(S, T)^{-n}(\mathcal{P})$ cujos elementos da sequência estão sempre em K , isto é, evitam o aberto I .

Note que $T^{-1}(\mathcal{P})$ e $S^{-1}(\mathcal{P})$ ambas são partições equidistribuídas em S^1 , nas quais os elementos das mesmas estão a uma distância menor que δ .

Assim, temos que

$$\text{card}(S^{-1}(\mathcal{P}) \cap I) \leq \varepsilon \text{card}(S^{-1}(\mathcal{P})) = \varepsilon pr$$

$$\text{card}(T^{-1}(\mathcal{P}) \cap I) \leq \varepsilon \text{card}(T^{-1}(\mathcal{P})) = \varepsilon qr.$$

Desta maneira, contando-se os caminhos, ainda que com suas respectivas repetições, temos que a quantidade de caminhos de $(S, T)^{-1}(\mathcal{P})$ que passam por I é menor que $\varepsilon r(p + q)$.

Procedendo o raciocínio para as partições $S^{-1}(\mathcal{P})$ e $T^{-1}(\mathcal{P})$, tomando-se para cada uma delas, as pré-imagens, via S e T respectivamente, obteremos os caminhos de $(S, T)^{-2}(\mathcal{P})$, contando-se caminhos repetidos, e com o mesmo argumento anterior obtemos que a quantidade de caminhos (y_0, y_1, y_2) de $(S, T)^{-2}(\mathcal{P})$, tal que $y_0 \in I$ é menor ou igual a $\varepsilon r(p + q)^2$.

Prosseguindo de maneira análoga, usando-se os graus das transformações S e T e contando as repetições dos caminhos, obtemos que para todo $n \geq 0$, a quantidade de caminhos (y_0, \dots, y_n) , com $y_0 \in I$ não excede $\varepsilon r(p + q)^n$.

Dentre todos os $r(p+q)^n$ caminhos de $(S, T)^{-n}(\mathcal{P})$, desde que se conte com as devidas repetições, estes que se repetem necessariamente devem passar por algum ponto de colapso, pelos lemas 6.5 e 6.6, e assim, obrigatoriamente passam por I .

Eliminando-se de $(S, T)^{-n}(\mathcal{P})$, todos aqueles caminhos (contando-se inclusive repetições) que passam por I , obteremos uma limitação inferior para a quantidade de caminhos que evitam I , assim:

$$\text{card}((S, T)^{-n}(\mathcal{P}) \cap K^{n+1}) \geq r(p+q)^n - r\varepsilon[1 + (p+q) + \dots + (p+q)^n].$$

Logo, temos que

$$\text{card}((S, T)^{-n}(\mathcal{P}) \cap K^{n+1}) \geq r(p+q)^n \left[1 - \varepsilon \left(\frac{p+q}{p+q-1} - \frac{1}{(p+q)^n(p+q-1)} \right) \right].$$

Assim, como na proposição 6.7, obtemos que

$$h(S, T) \geq \log(p+q).$$

Como a desigualdade oposta é verdadeira conforme 6.2, temos provada a conjectura de Friedland. ■

Definição 6.10. *Sejam $T_1, \dots, T_n, : M \rightarrow M$, dizemos que um ponto $y \in M$ é um ponto de colapso para (T_1, \dots, T_n) se existirem i, j com $i \neq j$, tais que*

$$T_i^{-1}(\{y\}) \cap T_j^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset.$$

O raciocínio da demonstração acima pode ser aplicado no caso de m -transformações do tipo $T_i x = p_i x + \alpha_i \pmod{1}$, $i = 1, \dots, m$, com $1 \leq p_1 < p_2 < \dots < p_m$. Uma vez que, dada uma transformação afim, expansora T de S^1 , dada por $Tx = px + \alpha$, com $p \geq 1$, temos que a pré-imagem de qualquer partição equidistribuída \mathcal{P} de S^1 , de diâmetro δ , é também uma partição de S^1 , cujo diâmetro é menor que δ . Assim,

o método da demonstração da Conjectura de Friedland é exatamente o mesmo para mostrar.

Teorema 6.11 (Sistema Iterados de Funções Com Geradores Não Comutativos).

Sejam $T_1, \dots, T_n : S^1 \rightarrow S^1$, tais que $T_i(x) = p_i x + \alpha_i \pmod{1}$, $p_i \geq 1$, $i = 1, \dots, n$, tais que para $i \neq j$ tenhamos $p_i \neq p_j$ ou $\alpha_i \neq \alpha_j$, então

$$h(T_1, \dots, T_n) = \log \left(\sum_{i=1}^n p_i \right).$$

Corolário 6.12 (\mathbb{Z}^d – Ações Diagonais em \mathbb{T}^k). Sejam $A_1, \dots, A_d : \mathbb{T}^k \rightarrow \mathbb{T}^k$, $k \geq 1$, tais que:

$$A_i(x_1, \dots, x_k) = (p_{i1}x_1 \pmod{1}, \dots, p_{ik}x_k \pmod{1}), i = 1, \dots, d,$$

tais que, dadas duas transformações A_i e A_j com $i \neq j$, temos

$$p_{il} \neq p_{jl}, \text{ para algum } 0 \leq l \leq k,$$

onde os p_{ij} são números inteiros positivos não nulos. Então

$$h(A_1, \dots, A_d) = \log \left(\sum_{i=1}^d \left(\prod_{l=1}^k p_{il} \right) \right) = \log \left(\sum_{i=1}^d \deg(A_i) \right),$$

$$\text{onde } \deg A_j = \prod_{l=1}^k p_{jl}.$$

Demonstração. Fixe $\varepsilon > 0$ e aplique o raciocínio da prova da Conjectura de Friedland, $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \dots \times \mathcal{P}_k$, onde cada \mathcal{P}_i é obtida em S^1 como no teorema 6.9. Note que as condições impostas garantem que o conjunto dos pontos de colapso das transformações é finita. Tendo em vista que as transformações A_j

são expansoras, procedendo como no teorema 6.9, vemos que os conjuntos (n, δ) separados crescem à ordem de $\left(\sum_{j=1}^d \deg A_j\right)^n$, donde obtém-se o resultado. ■

A fórmula expressa no corolário anterior é verificada se as transformações

$$A_i(x_1, \dots, x_k) = (p_{i1}x_1 + \alpha_{i1}(\text{mod}1), \dots, p_{ik}x_k + \alpha_{ik}(\text{mod}1)), i = 1, \dots, d,$$

satisfazem

$$p_{il} \neq p_{jl}, \text{ para algum } 0 \leq l \leq k$$

ou

$$\alpha_{il} \neq \alpha_{jl}(\text{mod}1), \text{ para algum } 0 \leq l \leq k.$$

Referências

- [1] D.V. Anosov, Geodesic Flows on Closed Riemannian Manifolds of Negative Curvature, *Trudy Mat. Inst. Steklov*, 90, A.M.S., Providence, RI, 1967.
- [2] A. Ávila, M. Viana and A. Wilkinson, Absolute continuity, Lyapunov exponents, and rigidity, in preparation.
- [3] A. Baraviera and C. Bonatti, Removing zero Lyapunov Exponents. *Ergodic Theory of Dynamical Systems*, 23 :1655–1670, 2003.
- [4] L.Barreira, Ya. Pesin. Nonuniform Hyperbolicity Dynamics of Systems with Nonzero Lyapunov Exponents. *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, Cambridge University Press, 2007.
- [5] R. Bowen. Entropy for Group Endomorphisms and Homogeneous Spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 3, 401–414, 1971.
- [6] R. Bowen. Entropy and the fundamental group. *Lecture notes in math.*, 668:21–29, 1978.
- [7] R. Bowen. Equilibrium States and the Ergodic Theory of Axiom A Diffeomorphism. *Lecture notes in math.*, 470, Springer,1975.

- [8] C. Bonatti, L. Díaz, M. Viana. Dynamics beyond uniform hyperbolicity. A global geometric and probabilistic perspective. *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, 102. Springer-Verlag, Berlin, 2005.
- [9] C. Bonatti, M. Viana. SRB measures for partially hyperbolic systems whose central direction is mostly contracting. *Israel J. Math.*, 115: 117–193, 2000.
- [10] M. Brin, On dynamical coherence. *Ergodic Theory of Dynamical Systems*, 23(2) :395–401, 2003.
- [11] M. Brin, D. Burago, S. Ivanov, On partially hyperbolic of 3–manifolds with commutative fundamental group . *Modern Dynamical Systems and Applications*, Boris Hasselblatt, M. Brin and Y. Pesin, eds, Cambridge Univ. Press, New York, 307–312, 2004.
- [12] M. Brin, D. Burago, S. Ivanov, Dynamical Coherence of Partially Hyperbolic Diffeomorphism of the 3–Torus. *Journal of Modern Dynamical Systems and Applications*, vol.3, No. 1, 1–11, 2009.
- [13] P. Carrasco, Compact Dynamical Foliations. *Ph.D Thesis*, University of Toronto, 2010.
- [14] S. Friedland, Entropy of graphs, semigroups and groups *Ergodic Theory of Z-actions*, M. Pollicott and K. Schmidt (eds.), *London Math. Soc.*, Lecture Note Ser. 228, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996, 319–343.
- [15] W. Geller, M. Pollicott, An entropy for Z^2 -actions with finite entropy generators *Fundamenta Mathematicae*, 157: 209–220, 1998.

- [16] A. Gogolev, How Typical are Pathological Foliations in Partially Hyperbolic Dynamics: An Example. preprint, 1–11, 2010.
- [17] A. Gogolev, M. Guysinsky, C^1 –differentiable conjugacy of Anosov diffeomorphisms on three dimensional torus. *Discrete contin. Dyn. Syst.*, (22), No.1-2, 183–200, 2008.
- [18] M. Gromov. Entropy, Homology and Semi-algebraic geometry. *Seminaire Bourbaki*, 663, 1985-1986.
- [19] A. Hammerlindl, Leaf Conjugacies on the Torus. *Ph.D Thesis*, University of Toronto, 2009.
- [20] B. Hasselblatt. Y. Pesin, Partially Hyperbolic Dynamical Systems. *Handbook of Dynamical Systems*. Vol 1B, 1–55, Elsevier B.V., Amsterdam, 2006.
- [21] M. Hirayama. Y. Pesin, Non-absolutely Continuous Foliations. *Israel Journal of Mathematics*, 160, 173–187, 2007.
- [22] M. Hirsch, C. Pugh and M. Shub, Invariant Manifolds. *Lecture Notes in Math.*, 583, Springer-Verlag, New York, 1977.
- [23] A. Katok. Lyapunov exponents, entropy and periodic orbits for diffeomorphisms. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (51):137–173, 1980.
- [24] A. Katok. Introduction to the Dynamical Systems. *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, Cambridge University Press, 1995.

- [25] R. de la Llave, Smooth conjugacy and SRB measures for uniformly and nonuniformly hyperbolic systems, *Communications in Mathematical Physics* 150, 289–320, 1992.
- [26] R.Mañé. Teoria Ergódica. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1983.
- [27] A. Manning. Topological Entropy and the first homology group. *Springer Lecture notes in math.*, 468:185–190, 1974.
- [28] M.Pollicott. Lectures on ergodic theory and Pesin theory on compact manifolds. London Mathematical Society Lecture Notes Series 180, Cambridge University Press, 2000.
- [29] C. Pugh. On the Entropy Conjecture. *Lecture notes in math.*, 468:257–261, 1977.
- [30] Ya. Pesin, Ya. Sinai. Gibbs measures for partially hyperbolic attractors. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 2 (1983), no. 3-4, 417-438.
- [31] C. Pugh, M. Shub, A. Wilkinson. Hölder Foliations. *Duke Math. J. Dynam. Systems*, 86(3) 517–546, 1997; Correction to “Hölder Foliations”, *Duke, Math. J.* 105 (2000), 105–106.
- [32] C. Pugh, M. Viana, and A. Wilkinson. Absolute continuity of foliations. In preparation.
- [33] F. Rodriguez Hertz, M. Rodriguez Hertz, R. Ures, Accessibility and stable ergodicity for partially hyperbolic diffeomorphisms with 1D-center bundle. *Invent. Math*, 172, No.2, 353–381, 2008.

- [34] F. Rodriguez Hertz, M. Rodriguez Hertz and R. Ures, A survey of partially hyperbolic dynamics. Partially hyperbolic dynamics, laminations, and Teichmüller flow *Fields Inst. Commun.*, 51, 35–87, 2007.
- [35] C. Robinson, Generic Properties of Conservative Systems
American Journal of Mathematics, vol. 92, No. 3:562–603, 1970.
- [36] C. Robinson, Generic Properties of Conservative Systems
American Journal of Mathematics, vol. 92, No. 4:897–906, 1970.
- [37] M. Viana, J. Yang Physical Measures and Absolute Continuite for One-Dimensional Center Direction, preprint
American Journal of Mathematics, vol. 92, No. 4:897–906, 1970.
- [38] A. Wilkinson, M. Shub, Pathological Foliations and removable zero exponents. *Invent. Math*, 139(3), 495–508, 2000.
- [39] A. Wilkinson, The cohomological equation for partially hyperbolic diffeomorphisms. preprint, 1–81, 2009.
preprint, 1–81, 2009.
- [40] Y. Yomdin. Volume growth and entropy. *Israel J. Math.*, 57(3):285–300, 1987.