

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Bifurcações geométricas de singularidades de curvas planas

Tiago Suzuki Tokuda

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em
Matemática (PPG-Mat)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Tiago Suzuki Tokuda

Bifurcações geométricas de singularidades de curvas planas

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Farid Tari

Coorientador: Prof. Dr. Marco Antônio do Couto Fernandes

USP – São Carlos
Março de 2024

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

T646b Tokuda, Tiago Suzuki
Bifurcações geométricas de singularidades de
curvas planas / Tiago Suzuki Tokuda; orientador
Farid Tari; coorientador Marco Antônio do Couto
Fernandes. -- São Carlos, 2024.
82 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação
em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas
e de Computação, Universidade de São Paulo, 2024.

1. Bifurcações. 2. Deformações geométricas. 3.
Curvas planas. 4. Inflexões. 5. Vértices. I. Tari,
Farid, orient. II. Fernandes, Marco Antônio do
Couto, coorient. III. Título.

Tiago Suzuki Tokuda

Geometric bifurcations of singularities of plane curves

Master dissertation submitted to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Master Program in Mathematics. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Farid Tari

Co-advisor: Prof. Dr. Marco Antônio do Couto Fernandes

USP – São Carlos

March 2024

Este trabalho é dedicado aos meus pais, Marlene e Roberto, ao meu irmão, Douglas e à minha avó, Maria.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a todos que direta ou indiretamente contribuíram para que este trabalho pudesse ser realizado. Em especial, agradeço:

Primeiramente ao meu orientador, Farid, a quem sou eternamente grato por sua imensa paciência e apoio durante esses dois anos de mestrado. Muito obrigado por todas as conversas comigo e por ter me aconselhado e me motivado tanto, principalmente nos momentos mais difíceis desse período. Sei que é impossível poder retribuir, mas queria que você soubesse que agradeço do fundo do meu coração por ter tido a honra de poder ter sido orientado por você durante esse período.

Ao meu coorientador, Marco, por todas as reuniões e conversas que me auxiliaram imensamente durante o período. Gostaria de agradecer profundamente, também, por todas as valiosas correções e sugestões para a dissertação, por sempre disponibilizar seu tempo para me ajudar e sanar minhas dúvidas e por ser ter sido sempre tão atencioso e paciente.

Aos meus pais, Marlene e Roberto, por todo o carinho, dedicação e amor que vocês me deram durante toda a minha vida. O apoio incondicional de vocês durante toda a minha vida é um privilégio que sou eternamente grato por ter. Vocês são meus heróis, devo tudo a vocês, muito obrigado.

Ao meu irmão, Douglas, meu companheiro durante toda a vida, por estar ao meu lado desde sempre me apoiando e me incentivando a fazer o meu melhor. “Ter um irmão é ter, pra sempre, uma infância lembrada com segurança em outro coração”.

A minha falecida avó, Maria, por ter cuidado tanto de mim durante a minha infância e por ter despertado em mim o amor pela matemática e por ciência, duas das coisas que mais gosto de aprender até hoje. Queria muito que você pudesse viver esse momento comigo. Muito obrigado por tudo, sempre estarei acompanhando você em minhas memórias.

À toda a minha família e aos meus amigos por todo apoio que me deram.

A todos os professores que contribuíram com a minha formação. Aos professores do Departamento de Matemática e aos funcionários do ICMC.

Agradeço à CAPES e à FAPESP (nº 2022/00133-0) pelo auxílio financeiro.

*“The cosmos is also within us, we’re made of star stuff. We are a way for the cosmos to know
itself.”
(Carl Sagan)*

RESUMO

TOKUDA, T. S. **Bifurcações geométricas de singularidades de curvas planas**. 2024. 82 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2024.

O estudo das singularidades de curvas planas (reais para o nosso caso) é um assunto clássico. O plano pode ser dotado de uma métrica, por exemplo a métrica euclidiana ou Minkowski. Assim, ao deformar a curva, é de se esperar que a geometria concentrada na singularidade (os vértices, inflexões, bitangencias, auto-interseções, pontos tipo luz no caso de curvas no plano Minkowski) aparecem na curva deformada. O nosso trabalho apresenta um estudo de tais deformações.

Palavras-chave: Bifurcações, Deformações geométricas, Curvas planas, Inflexões, Vértices, Singularidades.

ABSTRACT

TOKUDA, T. S. **Geometric bifurcations of singularities of plane curves**. 2024. 82 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2024.

The study of singularities of planar curves (real in our case) is a classical subject. The plane can be equipped with a metric, such as the Euclidean or Minkowski metric. Thus, when deforming the curve, it is expected that the geometry concentrated at the singularity (the vertices, inflections, bitangencies, self-intersections, light-like points in the case of curves in Minkowski space) will appear in the deformed curve. Our work presents a study of such deformations.

Keywords: Bifurcations, Geometric deformations, Planar curves, Inflections, Vertices, Singularities.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Evolutas de elipses: a diferença entre os comprimentos dos eixos principais da elipse à esquerda é notável, enquanto na elipse à direita é pequena.	33
Figura 2 – Polígono de Newton de C	39
Figura 3 – Exemplos de configurações de duas curvas se intersectando tangencialmente em um ponto dependendo da ordem de contato entre as duas. A figura de cima representa ordem de contato par e a figura de baixo representa ordem de contato ímpar.	48
Figura 4 – As configurações de \mathbf{H}_1 de acordo com a Proposição 2.1.5. A curva escura representa $f = 0$ ou $f = k$, a curva clara $V_h = 0$ e a curva pontilhada $I_h = 0$. Os pontos abertos representam os mínimos de curvatura, os pontos fechados representam os máximos de curvatura e os quadrados fechados representam as inflexões.	51
Figura 5 – Casos de configurações dos ramos tangentes à $x = ay$: $\mathbf{V}_1\mathbf{I}_2$, $\mathbf{V}_2\mathbf{I}_3$ e $\mathbf{V}_2\mathbf{I}_1$. A curva escura representa $f = 0$, a curva clara representa $V_h = 0$, e a curva pontilhada representa $I_h = 0$	52
Figura 6 – Caso \mathbf{H}_1 (iia): O sinal de κ' seguindo as orientações indicadas pelas setas em $f = k$. Antes da curva $f = k$ intersectar um ramo de vértices “Máx”, a derivada κ' de κ é positiva, se anula no ramo de vértices e se torna negativa posteriormente. Portanto, as interseções dos ramos de vértices “Máx” e as curvas $f = k$ são os vértices em $f = k$ onde κ atinge um máximo local. Analogamente, as interseções dos ramos de vértices “Mín” e as curvas $f = k$ são os vértices em $f = k$ onde κ atinge um mínimo local de curvatura de $f = k$ quando k passa por zero.	53
Figura 7 – Seções planas paralelas ao plano tangente em um ponto elíptico não umbílico ($a \neq 1$) com $f = k$ (vermelho), $I_f = 0$ (azul) e $V_f = 0$ (verde) representados. Note que como I_f e V_f dependem apenas das derivadas parciais de $f = k$, para qualquer nível k , temos essas curvas em cada plano paralelo com projeções no nível zero iguais.	54
Figura 8 – Interseções dos níveis de f , representado pelas curvas fechadas, com os ramos do conjunto V_e , representados pelos três ramos transversais para o caso elíptico com $a = 1$	55
Figura 9 – O polígono de Newton de uma cúspide de Gauss hiperbólica.	56

Figura 10 – Esquerda: o conjunto de vértices $V_p = 0$ (ramos com espessura fina), o conjunto de inflexões $I_p = 0$ (ramo tracejado) e o conjunto de zeros $f_p = 0$ (ramo de espessura grossa) para o caso parabólico. Centro: Um esboço da curva de nível $f_p = k$ para $k \neq 0$, representando os vértices (círculos) e inflexões (quadrados). Direita: O polígono de Newton para o caso parabólico	59
Figura 11 – $f = 0$ em vermelho com a origem sendo ponto parabólico em azul.	59
Figura 12 – Seções planas paralelas ao plano tangente do caso parabólico com os vértices indicados em pontos pretos.	59
Figura 13 – Esquerda: Vértices e pontos de inflexão no caso de uma cúspide de Gauss elíptica : as curvas marcadas como V são o conjunto de vértices, aquelas marcadas como I são o conjunto de pontos de inflexão, e $f_g = k$ é uma curva de nível de f_g . Conforme k aumenta passando por 0, a curva passa do conjunto vazio para uma curva com quatro vértices e dois pontos de inflexão. Direita: O polígono de Newton para uma cúspide de Gauss hiperbólica. . . .	61
Figura 14 – Esboço do caso da cúspide de Gauss hiperbólica, $b^2 > 0$, $4c^4 < b^2 < 8c^4$ (portanto $c^4 > 0$); veja a Proposição 2.4.1. A figura à esquerda tem D_1 e D_2 conforme a Proposição 2.4.3, com o mesmo sinal (negativo), e a figura à direita com sinais opostos ($D_1 > 0$). As curvas escuras são $f = 0$ à esquerda de cada figura e $f = k$ para os dois sinais de k pequeno e não nulo à direita. As curvas claras são os VG_i da Proposição 2.4.2, rotulados por i , e a curva pontilhada é o único ramo do conjunto de inflexões. Como antes, as orientações estão indicadas, os pontos fechados são máximos, os pontos abertos são mínimos de curvatura e os quadrados são inflexões.	63
Figura 15 – Esboço do caso da cúspide de Gauss hiperbólica, $b^2 > 0$, $c^4 < 0$ (portanto, $b^2 > 8c^4$); veja a Proposição 2.4.1. A figura à esquerda tem D_1 e D_2 conforme a Proposição 2.4.3, com o mesmo sinal (negativo), e a figura à direita com sinais opostos ($D_1 > 0$). As curvas escuras são $f = 0$ à esquerda de cada figura e $f = k$ para os dois sinais de k suficientemente pequeno e não nulo à direita. As curvas claras são os VG_i da Proposição 2.4.2, rotuladas por i , e as curvas pontilhadas são os três ramos do conjunto de inflexões. Assim como anteriormente, as orientações estão indicadas, os pontos fechados são máximos, os pontos abertos são mínimos de curvatura e os quadrados são inflexões.	64
Figura 16 – Análogo à Figura 15, para esse caso, $b^2 > 0$, $b^2 > 8c^4$, $c^4 > 0$; veja a Proposição 2.4.1.	64
Figura 17 – Representação da estratificação do espaço de jatos, quando f possui singularidade A_1^+ projetada no espaço gerado por a_{00} , a_{10} e a_{11} de acordo com o Teorema 3.3.1.	72

Figura 18 – Posição relativa de $I = 0$ (esquerda), γ_3 e γ_4 (direita) com relação aos setores de $f = 0$	76
Figura 19 – Caso $N_1N_2 < 0$. À esquerda temos a posição de γ_1 e γ_2 e à direita temos estas curvas junto com as demais. Os pontos vermelhos são os vértices e os quadrados azuis são as inflexões.	77
Figura 20 – Posição de γ_1 e γ_2 com relação aos setores de $f = 0$ no caso $N_1N_2 > 0$	77
Figura 21 – Posição de $f = 0$, $I = 0$ (azul) e $V = 0$ (vermelho) no caso $N_1N_2 > 0$. Os pontos vermelhos são os vértices e os quadrados azuis são as inflexões. . . .	77
Figura 22 – Configuração dos vértices e inflexões do Teorema 3.3.3. Na esquerda, temos dois ramos transversais do conjunto de vértices intersectando a curva nos 4 pontos de vértices (pontos verdes) a deformação $f = t$, para $t > 0$. No centro, temos que $f = 0$ representa apenas um ponto. Na direita, temos o conjunto vazio para $t < 0$	79

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Todos os germes simples de funções.	28
Tabela 2 – As possibilidades para os contatos entre os ramos de $f = 0$ e dos ramos das curvas de vértices $V_f = 0$ e inflexões $I_f = 0$. (\mathbf{V}_i representa os casos de contato de ordem $i + 2$ entre os respectivos ramos de $f = 0$ e $V_f = 0$ para $1 \leq i \leq 3$ inteiro e \mathbf{I}_j representa os casos de contato de ordem $j + 1$ entre os respectivos ramos de $f = 0$ e $I_f = 0$ para $1 \leq j \leq 3$ inteiro. Assim, $\mathbf{V}_i\mathbf{I}_j$ representa quando os casos \mathbf{V}_i e \mathbf{I}_j ocorrem simultaneamente nos respectivos ramos). O conjunto VT é o conjunto de M onde (2.11) e (2.12) são satisfeitas.	44

SUMÁRIO

1	PRELIMINARES	25
1.1	Teoria de Singularidades	25
1.1.1	<i>Germes de aplicações diferenciáveis</i>	25
1.1.2	<i>Ações de grupos e grupos de Mather</i>	26
1.1.3	<i>Deformações \mathcal{R}-versais</i>	29
1.1.4	<i>Transversalidade</i>	31
1.2	Geometria diferencial	32
1.2.1	<i>Curvas parametrizadas</i>	32
1.2.2	<i>Superfícies regulares</i>	34
1.2.3	<i>Blow-up</i>	36
2	VÉRTICES E INFLEXÕES DE SEÇÕES PLANAS DE SUPERFÍCIES SUAVES EM \mathbb{R}^3	41
2.1	Ponto hiperbólico	44
2.2	Ponto elíptico	54
2.3	Ponto parabólico	55
2.4	Cúspide de Gauss não degenerada	60
2.4.1	<i>Cúspide de Gauss hiperbólica</i>	62
3	DEFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS DE CURVAS PLANAS COM SINGULARIDADE MORSE	65
3.1	FRS-equivalência	65
3.2	Estratificação do espaço dos k -jatos	66
3.3	Curvas com singularidade Morse	68
3.3.1	<i>Estratos do espaço dos k-jatos</i>	69
3.3.2	<i>Deformações geométricas</i>	72
3.3.2.1	<i>Deformações geométricas da singularidade A_1^-</i>	72
3.3.2.2	<i>Deformações geométricas da singularidade A_1^+</i>	78
	REFERÊNCIAS	81

INTRODUÇÃO

O estudo das singularidades de curvas planas (reais para o nosso caso) é um assunto clássico. O plano pode ser dotado de uma métrica, por exemplo, a métrica euclidiana ou Minkowski. Assim, ao deformar uma curva, é de se esperar que a geometria concentrada na singularidade (os vértices, inflexões, bitangências, auto-interseções, pontos tipo luz no caso de curvas no plano Minkowski) apareçam na curva deformada. O nosso trabalho visa o estudo de tais deformações.

O estudo desse trabalho faz parte da tentativa de responder à pergunta feita em (SALARINOGHABI; TARI, 2017) para curvas parametrizadas, mas vale para subvariedades dos espaços euclidianos e Minkowski, a saber,

(Q): existe uma teoria de desdobramentos versais que leva em consideração as singularidades de uma subvariedade juntamente com a sua geometria?

Existem trabalhos para uma dada curva parametrizada que levam em consideração as inflexões concentradas na singularidade (DIAS; NUÑO-BALLESTEROS, 2008), ((DIAS; TARI, 2018), (SINHA; TARI, 2013), (WALL, 2013)). Porém, a questão (Q) continua em aberto. Wall abordou em (WALL, 2013) a questão (Q) usando invariantes da curva e propôs modelos de “famílias versais” sem definir uma relação de equivalência entre famílias.

Foi proposto em (SALARINOGHABI; TARI, 2017) um método geométrico (usando transversalidade no espaço dos k -jatos) para estudar as deformações das singularidades de uma curva plana parametrizada considerando seus pontos de inflexão e seus vértices (ou seja, sua geometria local plana e redonda). O método é chamado de “Flat and Round Singularity theory for plane curves” (FRS).

Os trabalhos em (SALARINOGHABI; TARI, 2017) foram estendidos em (FRANCISCO, 2019) para curvas parametrizadas no plano Minkowski. Em (DIAS; TARI, 2018), foi obtido fórmulas que fornecem limitantes superiores dos números de inflexões e vértices que aparecem nas deformações de singularidades de curvas parametrizadas. Em (SALARINOGHABI; HASEGAWA; TARI, 2023), os autores consideram as deformações geométricas dos discriminantes de germes de aplicações do plano ao plano. Tais deformações fornecem informações sobre a geometria dos contornos aparentes (perfis) de projeções de superfícies no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 a planos.

Neste trabalho consideramos (germes de) curvas no plano euclidiano dadas por $f(x, y) = 0$, onde $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ é um germe de uma função C^∞ . Uma \mathcal{R} -classificação extensa das singularidades de tais funções por ação de difeomorfismos na fonte é dada por Arnold ((AR-

NOLD; GUSEIN-ZADE; VARCHENKO, 1985)). Desdobramentos \mathcal{R} -versais de singularidades de codimensões baixas se encontram em (BRÖCKER, 1975). Porém, difeomorfismos destroem a geometria da curva.

Em (DIATTA; GIBLIN, 2007), os autores estudaram a geometria de seções por *planos paralelos* de superfícies lisas. Mais precisamente, estudam a configuração dos vértices e inflexões em uma família de curvas a 1-parâmetro obtida pelo processo acima e fornecem uma lista de todas as possibilidades genéricas. Os trabalhos (CAPITANIO; DIATTA, 2009; DIATTA; GIBLIN, 2007) são estudos de deformações geométricas da curva $f(x, y) = 0$ em famílias de curvas dadas por $f(x, y) = t$, com t perto de zero. Em nosso trabalho, estudaremos qualquer deformação de f . O nosso trabalho fornecerá informações sobre a geometria de seções por *qualquer plano* de superfícies lisas no caso em que f possui uma singularidade Morse.

Essa dissertação está dividida em duas partes. A primeira parte, composta pelo Capítulo 2, aborda o estudo de vértices e inflexões de seções planas de superfícies em \mathbb{R}^3 , tendo como base o trabalho de Diatta e Giblin (DIATTA; GIBLIN, 2007). A outra parte, constituída pelo Capítulo 3, apresenta os resultados oriundos dessa dissertação sobre as configurações de vértices e inflexões de deformações geométricas genéricas de curvas $f(x, y) = 0$ com singularidade Morse.

O Capítulo 1 tem como finalidade trazer alguns assuntos clássicos da Teoria de Singularidades e da Geometria Diferencial utilizados durante a dissertação.

PRELIMINARES

Neste capítulo, serão apresentados alguns elementos da Teoria de Singularidades e da Geometria Diferencial que desempenham um papel importante neste trabalho. Para obter informações mais detalhadas e demonstrações dos resultados mencionados, ver (ARNOLD; GUSEIN-ZADE; VARCHENKO, 1985), (BRÖCKER, 1975), (BRUCE; GIBLIN, 1992), (GIBSON, 1979), (IZUMIYA *et al.*, 2016), (MOND; NUÑO-BALLESTEROS, 2020), (WALL, 1981).

1.1 Teoria de Singularidades

1.1.1 Germes de aplicações diferenciáveis

Sejam U e V abertos no espaço euclidiano \mathbb{R}^n . Duas funções diferenciáveis $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são equivalentes em $x \in U \cap V$ se existir uma vizinhança $W \subset U \cap V$ de x tal que $f = g$ em W e, neste caso, denotamos por $f \sim g$. Note que \sim é uma relação de equivalência, as classes de equivalência são chamadas de **germe de função diferenciável** em x . Um germe em x é representado por $f : (\mathbb{R}^n, x) \rightarrow (\mathbb{R}, y)$, onde $y = f(x)$.

O conjunto dos germes de funções diferenciáveis na origem é denotado por

$$\mathcal{E}_n = \{f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é suave}\}.$$

Observe que \mathcal{E}_n é um anel comutativo local com único ideal maximal que é o ideal dos germes que se anulam na origem, denotado por

$$\mathcal{M}_n = \{f \in \mathcal{E}_n \mid f(0) = 0\}.$$

Em um sistema de coordenada (x_1, \dots, x_n) de \mathbb{R}^n , o ideal \mathcal{M}_n é dado por

$$\mathcal{M}_n = \mathcal{E}_n \cdot \{x_1, \dots, x_n\}.$$

Para k inteiro positivo, o ideal dado pela k -ésima potência de \mathcal{M}_n é o conjunto de germes $f \in \mathcal{M}_n$ cujas derivadas parciais de ordem menor ou igual a $k - 1$ se anulam, isto é,

$$\mathcal{M}_n^k = \left\{ f \in \mathcal{E}_n \mid \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(0) = 0, \text{ para } |\alpha| \leq k - 1 \right\},$$

com $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $\alpha! = (\alpha_1)! \dots (\alpha_n)!$ e $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$.

O **espaço dos k -jatos** $J^k(n, 1)$ é o espaço vetorial real definido pelo quociente

$$J^k(n, 1) = \frac{\mathcal{E}_n}{\mathcal{M}_n^{k+1}}.$$

Os elementos de $J^k(n, 1)$ são chamados de k -jatos. Note que o espaço $J^k(n, 1)$ é uma variedade, pois é um espaço vetorial. Para cada $f \in \mathcal{E}_n$ e cada $a \in (\mathbb{R}^n, 0)$, a **aplicação extensão k -jato**

$$j^k f : U \rightarrow J^k(n, 1)$$

associa a cada $a \in (\mathbb{R}^n, 0)$ o polinômio de Taylor de $f(x+a) - f(a)$ de ordem k na origem com $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $0 \in U$. Assim, o **k -jato** de um germe de função diferenciável $f \in \mathcal{E}_n$, calculado na origem, é dado por

$$j^k f(0) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} \left(\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha} \right) (0) x^\alpha.$$

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ uma aplicação suave e denote por $df : TU \rightarrow T\mathbb{R}^p$ sua diferencial. A aplicação f é dita singular em $x \in U$ se o posto da aplicação linear dada pela derivada $df_x : T_x U \rightarrow T_{f(x)} \mathbb{R}^p$ é menor do que $\min(m, p)$. Assim, se $(df)_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ não possui posto máximo, ou seja, se $\text{rank}(df)_x < \min(n, p)$, o ponto x é um **ponto singular** de f . Caso contrário, dizemos que f é não-singular em x ou x é um **ponto regular** de f .

O **conjunto singular** de f , denotado por $\Sigma(f)$, é o conjunto de pontos singulares de f , ou seja,

$$\Sigma(f) = \{x \in U \mid \text{rank}(df)_x < \min(n, p)\}.$$

O **conjunto criminante** de f , representado por $C_r(f)$, é dado por

$$C_r(f) = \{x \in U \mid \text{rank}(df)_x < p\}.$$

Quando $n \geq p$, $C_r(f) = \Sigma(f)$, e quando $n < p$, $C_r(f) = U$. O **discriminante** de f , denotado por $\Delta(f)$, é a imagem de $C_r(f)$ por f :

$$\Delta(f) = f(C_r(f)).$$

1.1.2 Ações de grupos e grupos de Mather

Uma ação de um grupo (G, \cdot) em um conjunto M não vazio é uma aplicação

$$\phi : G \times M \rightarrow M$$

dada por $\phi(g, x) = g \cdot x$ que satisfaz

- i. $\phi(1, x) = x$,
- ii. $\phi(g \cdot h, x) = \phi(g, \phi(h, x))$,

para todo $x \in M$, $g, h \in G$, onde 1 é o elemento neutro de G .

Dada uma ação ϕ de um grupo G em M , dois elementos x e y de M são ditos equivalentes se existir $g \in G$ tal que $y = g \cdot x$. As classes de equivalência dessa relação de equivalência são chamadas de **órbitas**. A órbita de G por $x \in M$ é denotada por

$$G \cdot x = \{g \cdot x \mid g \in G\} \subset M$$

também chamada de G -órbita de x .

Suponha que (G, \cdot) é um grupo de Lie, ou seja, G é uma variedade diferenciável com as operações de multiplicação e de inversão **diferenciáveis** e M é uma variedade diferenciável. A ação de G em M é dita diferenciável quando a aplicação ϕ é diferenciável.

Dado G um grupo de Lie agindo suavemente em uma variedade M , então as órbitas são subvariedades imersas em M . Observe que as órbitas não são necessariamente subvariedades mergulhadas, ou seja, a aplicação inclusão da órbita sob sua imagem em M pode não ser um homeomorfismo. Porém, supondo que todas as órbitas são subvariedades mergulhadas, então, para qualquer ponto $x \in M$, temos que a aplicação $\phi_x : G \rightarrow G \cdot x$ dada por $g \mapsto g \cdot x$ é uma submersão e, assim, $\dim G \cdot x \leq \dim G$ para todo $x \in M$. Para esses casos, temos válido o seguinte teorema importante para a classificação de singularidades (ver (GIBSON, 1979) e (MOND; NUÑO-BALLESTEROS, 2020)).

Teorema 1.1.1 (Lema de Mather). Seja ϕ uma ação de um grupo de Lie G em uma variedade M e seja N uma subvariedade conexa de M . Então N está contida em uma única órbita se, e somente se:

1. $T_y N \subseteq T_y G \cdot y$ para qualquer $y \in N$.
2. $\dim T_y G \cdot y$ é constante para qualquer $y \in N$.

Considere o grupo \mathcal{R} de Mather de germes de difeomorfismos de $(\mathbb{R}^n, 0)$ em $(\mathbb{R}^n, 0)$. Dois germes de funções f e g em \mathcal{E}_n são ditos **\mathcal{R} -equivalentes** se $f = g \circ h^{-1}$ para algum $h \in \mathcal{R}$.

Fixando um sistema de coordenadas (x_1, \dots, x_n) em $(\mathbb{R}^n, 0)$, o **espaço tangente** à \mathcal{R} -órbita de f em f é definido como

$$L\mathcal{R} \cdot f = \mathcal{M}_n \cdot \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\}.$$

Quando o contexto de interesse não fixa a origem, temos um **grupo de Mather estendido** denotado por \mathcal{R}_e e o **espaço tangente estendido** à \mathcal{R} -órbita de f em f , definido como

$$L\mathcal{R}_e \cdot f = \mathcal{E}_n \cdot \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\}.$$

A **codimensão** da \mathcal{R} -órbita de f é definida como

$$\text{cod}(f, \mathcal{R}) = \dim_{\mathbb{R}} \frac{\mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_n}{L\mathcal{R} \cdot f}$$

e a **codimensão estendida** da \mathcal{R}_e -órbita de f em f é dada por

$$\text{cod}_e(f, \mathcal{R}) = \dim_{\mathbb{R}} \frac{\mathcal{E}_n}{L\mathcal{R}_e \cdot f}.$$

A codimensão estendida da órbita de f é chamada de **número de Milnor** de f e denotado por $\mu(f)$.

Um germe $f \in \mathcal{E}_n$ é **k - \mathcal{R} -finitamente determinado** se $f \sim_{\mathcal{R}} g$ para todo $g \in \mathcal{E}_n$ com $j^k f = j^k g$. O menor inteiro positivo k satisfazendo esta condição é chamado de grau de determinação finita de f . O germe $f \in \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_n$ é \mathcal{R} -finitamente determinado se é k - \mathcal{R} -finitamente determinado para algum k .

Teorema 1.1.2. (WALL, 1981) Para $f \in \mathcal{E}_n$ as seguintes afirmações são equivalentes:

- (1) f é \mathcal{R} -finitamente determinado;
- (2) $\mathcal{M}_n^k \cdot \mathcal{E}_n \subset L\mathcal{R} \cdot f$, para algum k ;
- (3) $\text{cod}(f, \mathcal{R}) < \infty$;
- (4) $\text{cod}_e(f, \mathcal{R}) < \infty$.

Seja $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ um germe suave. Dizemos que f tem uma singularidade **simples** se existir um número finito de \mathcal{R} -classes (classes de equivalência da ação pelo grupo \mathcal{R}) tais que, para qualquer deformação $F(x, u) = f_u(x)$, todos os germes f_u pertencem a alguma dessas \mathcal{R} -classes.

A Tabela 1 mostra a classificação de todas as singularidades simples de funções em $(\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ usando o grupo \mathcal{R} de Arnold (ARNOLD, 1972), conhecida como a **classificação ADE**. Arnold provou que qualquer singularidade simples é \mathcal{R} -equivalente a germes A_k , D_k ou a um dos três singularidades excepcionais E_6 , E_7 ou E_8 .

Nome	Forma normal	$\text{cod}_{\mathcal{R}}(f)$
$A_k, k \geq 0$	$\pm x_1^{k+1} + Q(x_2, \dots, x_n)$	k
$D_k, k \geq 4$	$x_1^2 x_2 \pm x_2^{k-1} + Q(x_3, \dots, x_n)$	k
E_6	$x_1^3 + x_2^4 + Q(x_3, \dots, x_n)$	6
E_7	$x_1^3 + x_1 x_2^4 + Q(x_3, \dots, x_n)$	7
E_8	$x_1^3 + x_2^5 + Q(x_3, \dots, x_n)$	8
$Q(x_r, \dots, x_n) = \pm x_r^2 \pm \dots \pm x_n^2$.		

Tabela 1 – Todos os germes simples de funções.

Definição 1.1.1. Duas famílias de germes de funções F e $G : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^a, (0,0)) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ são P - \mathcal{R}^+ -**equivalentes** se existir um germe de difeomorfismo $\Phi : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^a, (0,0)) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^a, (0,0))$ da forma $\Phi(x, u) = (\alpha(x, u), \psi(u))$ e um germe de função $c : (\mathbb{R}^a, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$G(x, u) = F(\varphi(x, u)) + c(u).$$

Na Definição 1.1.1, a letra “P” representa parametrização (já que temos uma família de germes de difeomorfismos $\psi(-, u)$ de \mathbb{R}^n parametrizados por u) e o “+” representa a adição do termo $c(u)$.

A Definição 1.1.1 de P - \mathcal{R}^+ -equivalência pode ser estendida para as famílias $F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^a, (0,0)) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ e $G : (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^a, (0,0)) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ com $n \neq p$. Adicionamos uma forma quadrática não degenerada $Q(y_{n+1}, \dots, y_{n+p})$ a F e uma forma quadrática não degenerada $Q_0(z_{p+1}, \dots, z_{n+p})$ a G e são consideradas as duas famílias de germes $F + Q$ e $G + Q_0$ de $(\mathbb{R}^{n+p} \times \mathbb{R}^a, (0,0)) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$.

1.1.3 Deformações \mathcal{R} -versais

Considere o grupo \mathcal{R} de Mather e $f \in \mathcal{E}_n$. Um **desdobramento** a a -parâmetros de f , denotado por (a, F) , é um germe

$$F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^a, (0,0)) \rightarrow (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^a, (0,0)),$$

com $F(x, u) = (\bar{F}(x, u), u)$ e $\bar{F}(x, 0) = f(x)$, para todo $x \in (\mathbb{R}^n, 0)$ e $u \in (\mathbb{R}^a, 0)$. O espaço \mathbb{R}^a é chamado **espaço de parâmetros**. A aplicação \bar{F} é chamada de **deformação** de f . É denotado $\bar{F}_u : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ o germe definido por $\bar{F}_u(x) = \bar{F}(x, u)$.

Um **morfismo** entre dois desdobramentos (a, F) e (b, G) de f é um par $(\alpha, \psi) : (a, F) \rightarrow (b, G)$, em que $\alpha : (\mathbb{R}^a, 0) \rightarrow (\mathcal{R}, Id)$ e $\psi : (\mathbb{R}^a, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^b, 0)$ tal que $\bar{F}_u = \alpha(u) \cdot \bar{G}_{\psi(u)}$, onde Id é a identidade de \mathcal{R} e a operação “ \cdot ” é a ação de \mathcal{R} em \mathcal{E}_n . Assim, (a, F) é chamado induzido ou **\mathcal{R} -induzido** de (b, G) por (α, ψ) . Dois desdobramentos são equivalentes ou **\mathcal{R} -equivalentes** se ψ é um germe de difeomorfismo.

Um desdobramento (a, F) de f é **versal** ou **\mathcal{R} -versal** se qualquer outro desdobramento (b, G) de f pode ser induzido por (a, F) . Essas definições também são aplicadas para os grupos estendidos \mathcal{R}_e .

Dada uma família de germes de funções F , escrevemos

$$\dot{F}_i(x) = \frac{\partial F}{\partial u_i}(x, 0).$$

Teorema 1.1.3. (WALL, 1981) Um desdobramento (a, F) de $f \in \mathcal{E}_n$ é \mathcal{R} -versal se, e somente se,

$$L\mathcal{R} \cdot f + \mathbb{R} \cdot \{\dot{F}_1, \dots, \dot{F}_a\} = \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_n,$$

onde $u = (u_1, \dots, u_a) \in \mathbb{R}^a$ e $\dot{F}_i(x) = \frac{\partial F}{\partial u_i}(x, 0)$. Além disso, (a, F) é um desdobramento \mathcal{R}_e -versal se, e somente se,

$$L\mathcal{R}_e \cdot f + \mathbb{R} \cdot \{\dot{F}_1, \dots, \dot{F}_a\} = \mathcal{E}_n.$$

São associados a um desdobramento (a, F) de $f \in \mathcal{M}_n$ os seguintes conjuntos:

Conjunto Catástrofe:

$$C_F = \left\{ (x, u) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^a, (0, 0)) \mid \frac{\partial F}{\partial x_1}(x, u) = \dots = \frac{\partial F}{\partial x_n}(x, u) = 0 \right\};$$

Conjunto Discriminante:

$$D_F = \{u \in (\mathbb{R}^a, 0) \mid \exists x \in (\mathbb{R}^n, 0) \text{ tal que } (x, u) \in C_F \text{ e } f(x, u) = 0\};$$

Conjunto Bifurcação:

$$B_F = \{u \in (\mathbb{R}^a, 0) \mid \exists x \in (\mathbb{R}^n, 0) \text{ tal que } (x, u) \in C_F \text{ e } \text{rank}(\text{Hess } F(x, u)) < n\},$$

onde $\text{Hess } F(x, u)$ é a matriz Hessiana de F em (x, u) com relação às derivadas em x , isto é,

$$\text{Hess } F(x, u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}(x, u) & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_n}(x, u) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_1}(x, u) & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n^2}(x, u) \end{pmatrix}.$$

Teorema 1.1.4. Uma deformação $F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^a, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ de um germe de função f em \mathcal{M}_n é $P\text{-}\mathcal{R}^+$ -versal se e somente se

$$L\mathcal{R}_e \cdot f + \mathbb{R} \cdot \{1, \dot{F}_1, \dots, \dot{F}_a\} = \mathcal{E}_n.$$

Definição 1.1.2. Dizemos que duas famílias F e G são estavelmente $P\text{-}\mathcal{R}^+$ -equivalentes se $F + Q$ e $G + Q_0$ forem $P\text{-}\mathcal{R}^+$ -equivalentes.

Teorema 1.1.5. Seja $f \in \mathcal{M}_n^2$ um germe \mathcal{R} -finitamente determinado com $1 \leq \text{cod}_e(f; \mathcal{R}) \leq 4$. Então, qualquer deformação $P\text{-}\mathcal{R}^+$ -miniversal de f é $P\text{-}\mathcal{R}^+$ -equivalente a uma das seguintes famílias de germes, onde $Q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2$:

1. $A_2: Q(x_2, \dots, x_n) + x_1^3 + u_1 x_1$;
2. $A_3: Q(x_2, \dots, x_n) \pm x_1^4 + u_2 x_1^2 + u_1 x_1$;
3. $A_4: Q(x_2, \dots, x_n) + x_1^5 + u_3 x_1^3 + u_2 x_1^2 + u_1 x_1$;
4. $A_5: Q(x_2, \dots, x_n) \pm x_1^6 + u_4 x_1^4 + u_3 x_1^3 + u_2 x_1^2 + u_1 x_1$;
5. $D_4^-: Q(x_3, \dots, x_n) + x_1^3 - x_1 x_2^2 + u_3(x_1^2 + x_2^2) + u_2 x_2 + u_1 x_1$;
6. $D_4^+: Q(x_3, \dots, x_n) + x_1^3 + x_2^3 + u_3 x_1 x_2 + u_2 x_2 + u_1 x_1$;
7. $D_5: Q(x_3, \dots, x_n) + x_1^2 x_2 + x_2^4 + u_4 x_2^2 + u_3 x_1^2 + u_2 x_2 + u_1 x_1$.

1.1.4 Transversalidade

Uma **parametrização** (n -dimensional) de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^p$ é uma aplicação suave $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^p$, onde $U \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto, $\phi(U) = X$ e $\phi : U \rightarrow X$ é um difeomorfismo. O subconjunto $N \subset \mathbb{R}^p$ é uma **variedade diferenciável** de dimensão n se para todo $x \in N$ existe uma vizinhança aberta V de x em \mathbb{R}^p e uma parametrização $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^p$, com $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $\phi(U) = N \cap V$. A aplicação $\phi^{-1} : V \cap N \rightarrow U$ é chamada de **carta** ou **sistema de coordenadas**.

Dada uma variedade n -dimensional N , uma **subvariedade** de N é uma variedade $M \subset N$. Se M possui dimensão m , então a **codimensão** de M em N é $n - m$.

Dada uma variedade $N \subset \mathbb{R}^p$ de dimensão n , e $x \in N$, o **espaço tangente** a N em x é definido como a imagem da aplicação linear $d\phi_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ e é denotado por $T_x N$, onde $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ é uma parametrização de N com $\phi(0) = x$. Essa definição é independente da escolha da parametrização, e $T_x N$ é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^p com dimensão n .

Sejam $M \subset \mathbb{R}^p$ e $N \subset \mathbb{R}^q$ variedades de dimensão m e n , respectivamente. A função $f : M \rightarrow N$ é chamada aplicação suave em $x \in M$, quando existe uma vizinhança aberta U de x em \mathbb{R}^p e uma aplicação $F : U \rightarrow \mathbb{R}^q$ de classe C^∞ tal que $F|_{M \cap U} = f$. Além disso, $dF_x : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ é uma aplicação linear com $dF_x(T_x M) \subset T_y N$, onde $y = f(x)$. A restrição de dF_x a $T_x M$ é chamada de **diferencial** de f em x e denotada por $df_x : T_x M \rightarrow T_y N$. Essa definição independe da escolha de F .

Em uma aplicação suave $f : N \rightarrow M$, um ponto $x \in N$ é chamado de **ponto singular** ou **singularidade** se a diferencial de f em x não é uma submersão ou uma imersão, ou seja, quando $\text{rank}(df_x) < \min\{\dim M, \dim N\}$.

Dois subespaços vetoriais U e V de um espaço vetorial W se intersectam transversalmente se $U \oplus V = W$. Duas subvariedades N_1 e N_2 de N se intersectam transversalmente em $x \in N_1 \cap N_2$ quando $T_x N_1$ e $T_x N_2$ se intersectam transversalmente em $T_x N$. Quando N_1 e N_2 se intersectam transversalmente em todo $x \in N_1 \cap N_2$, então N_1 e N_2 são ditas **transversais** em N .

Dada uma aplicação suave $f : N \rightarrow P$ e Q uma subvariedade de P , f é **transversal a Q** (notação: $f \pitchfork Q$), se para todo $x \in N$ com $y = f(x) \in Q$, temos

$$d_x f(T_x N) + T_y Q = T_y P.$$

Se $Q = \{y\}$, então y é um **valor regular** de f se $f \pitchfork Q$, caso contrário, y é **valor crítico**.

Proposição 1.1.1. (GIBSON, 1979) Sejam $f : N \rightarrow P$ uma aplicação suave e Q uma subvariedade de P com $f \pitchfork Q$. Então, $M = f^{-1}(Q)$ é uma subvariedade de N de mesma codimensão que Q , ou vazio.

1.2 Geometria diferencial

1.2.1 Curvas parametrizadas

Uma **curva parametrizada** diferenciável (suave) do plano é uma aplicação diferenciável (de classe C^∞) γ de um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ em \mathbb{R}^2 . A variável $t \in I$ é dita parâmetro da curva e o subconjunto de \mathbb{R}^2 dos pontos $\gamma(t)$, $t \in I$, é chamado **traço da curva**.

Sejam $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada diferenciável com $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. O vetor $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$ é chamado **vetor tangente** a γ em t . Uma curva parametrizada diferenciável $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita regular se $\gamma'(t) \neq (0, 0)$ para todo $t \in I$.

Sejam I e J intervalos abertos de \mathbb{R} , $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular e $h: J \rightarrow I$ uma função diferenciável (de classe C^∞), cuja derivada de primeira ordem é não nula em todos os pontos de J e tal que $h(J) = I$. Então, a função composta $\gamma \circ h: J \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva regular que tem o mesmo traço que γ , chamada **reparametrização** de γ por h . A função h é dita mudança de parâmetro.

Uma curva regular $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita **parametrizada pelo comprimento de arco** se, para cada $t_0, t_1 \in I$, $t_0 \neq t_1$, o comprimento do arco da curva γ de t_0 a t_1 é igual a $t_1 - t_0$. Isto é,

$$\int_{t_0}^{t_1} |\gamma'(t)| dt = t_1 - t_0.$$

Uma curva regular $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é parametrizada pelo comprimento de arco se, e somente se, para todo $t \in I$, $|\gamma'(t)| = 1$. Supondo que a curva $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é parametrizada pelo comprimento de arco denotamos o parâmetro do comprimento de arco por s . Então, $t(s) = \gamma'(s)$ é um vetor tangente unitário à γ . É denotado por $n(s)$ o **vetor normal** à γ obtido pela rotação de $t(s)$ no sentido anti-horário por um ângulo de $\frac{\pi}{2}$. Segue de $\langle t(s), t(s) \rangle = 1$ que $\langle t'(s), t(s) \rangle = 0$, então

$$t'(s) = \kappa(s)n(s),$$

para alguma função suave $\kappa(s)$, chamada **curvatura** de γ em s .

Quando o parâmetro t da curva γ não é necessariamente o parâmetro do comprimento de arco, a curvatura é dada por

$$\kappa(t) = \frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t))}{\|\gamma'(t)\|^3}.$$

(Pode-se reparametrizar γ pelo comprimento de arco e usar a regra da cadeia para obter a fórmula acima, veja, por exemplo (BRUCE; GIBLIN, 1992)). Se escrevermos $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, então

$$\kappa = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}},$$

onde todas as funções são avaliadas em t .

A função curvatura determina completamente a curva a menos de movimentos rígidos (ou seja, a menos de translações e rotações em torno de pontos no plano) fato esse destacado pelo seguinte resultado.

Teorema 1.2.1 (Teorema Fundamental das Curvas Planas). Dada uma função suave $\kappa(s) : I \rightarrow \mathbb{R}$, existe uma curva suave e regular $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizada pelo comprimento de arco s com curvatura $\kappa(s)$. A curva γ é única a menos de movimentos rígidos em \mathbb{R}^2 .

Um ponto de **inflexão** de γ é um ponto onde $\kappa(t) = 0$. Um ponto de inflexão é chamado de inflexão ordinária se $\kappa(t) = 0$ mas $\kappa'(t) \neq 0$. Um **vértice** de γ é um ponto onde $\kappa(t) \neq 0$ e $\kappa'(t) = 0$. Um vértice é chamado de vértice ordinário se $\kappa(t) \neq 0$, $\kappa'(t) = 0$ e $\kappa''(t) \neq 0$. Uma curva suave $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ possui uma **cúspide ordinária** em $t_0 \in I$ se t_0 é um ponto singular de γ e os vetores $\gamma''(t_0)$ e $\gamma'''(t_0)$ são linearmente independentes.

A **evoluta** de uma curva $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é a curva plana ε parametrizada por

$$\varepsilon(t) = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)}n(t), t \in I.$$

A evoluta é bem definida e é uma curva suave, exceto nos pontos de vértices de γ , como podemos ilustrar na Figura 1. É possível usar técnicas clássicas de geometria diferencial para estudar sua geometria.

Proposição 1.2.1. (IZUMIYA *et al.*, 2016) A evoluta de uma curva suave e regular $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva regular, exceto nos pontos correspondentes aos vértices de γ . A evoluta possui uma singularidade cúspide ordinária nos pontos correspondentes aos vértices ordinários de γ .

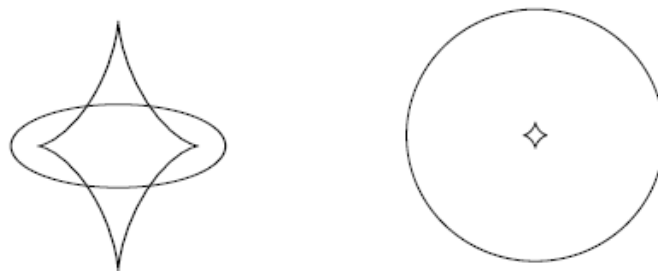


Figura 1 – Evolutas de elipses: a diferença entre os comprimentos dos eixos principais da elipse à esquerda é notável, enquanto na elipse à direita é pequena.

Sejam $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular, com $\gamma(t_0) = 0$, e $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma submersão na origem. Dizemos que as curvas γ e $F^{-1}(0)$ têm **contato de ordem k em $t = t_0$** (ou possuem k -contato em $t = t_0$) se a função $g = F \circ \gamma$ satisfaz

$$g(t_0) = g'(t_0) = \dots = g^{(k-1)}(t_0) = 0 \quad \text{e} \quad g^{(k)}(t_0) \neq 0,$$

ou seja, g tem singularidade A_{k-1} em t_0 .

O contato entre γ e retas ou círculos dá origem a duas funções especiais, respectivamente: a função altura e a função distância ao quadrado.

Seja $a \in \mathbb{R}^n$. A **função distância ao quadrado** sobre γ a partir de a é a função $f_d : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f_d(t) = \|\gamma(t) - a\|^2 = (\gamma(t) - a) \cdot (\gamma(t) - a).$$

Seja $u \in S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. A **função altura** sobre γ na direção de u é a função $f_h : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f_h(t) = \langle \gamma(t), u \rangle.$$

Observe que $\gamma(t) \cdot u$ é a distância de $\gamma(t)$ ao hiperplano que passa pela origem 0 e é perpendicular a u .

A curva γ tem um vértice ordinário (resp. vértice de ordem superior) em $t = t_0$ se e somente se ela tem contato 4 (resp. 5) com algum círculo, ou seja, f_d tem singularidade A_3 (resp. A_4) em t_0 .

A curva γ tem uma inflexão ordinária (resp. inflexão de ordem superior) em $t = t_0$ se e somente se tem contato de ordem 3 (resp. 4) com sua reta tangente, ou seja, f_h tem singularidade A_2 (resp. A_3) em t_0 .

1.2.2 Superfícies regulares

Dizemos que $M \subset \mathbb{R}^3$ é uma **superfície regular** se, para cada $p \in M$, existe uma vizinhança V de p em \mathbb{R}^3 e uma aplicação $\phi : U \rightarrow V \cap M$ de um aberto U do \mathbb{R}^2 sobre $V \cap M$ tal que ϕ é um homeomorfismo diferenciável e a diferencial $d\phi_q$ é injetiva para todo $q \in U$ (ou seja, M é uma variedade de dimensão 2 em \mathbb{R}^3). A aplicação $\phi : U \rightarrow V \cap M$ é chamada de parametrização local da superfície M .

Dada uma superfície M e um ponto $p \in M$, tome uma parametrização local $\phi : U \rightarrow M$ com $p = \phi(q)$. O espaço vetorial $T_pM := d\phi_q(\mathbb{R}^2)$ é o chamado **plano tangente** a M em p .

Associada ao produto interno usual de \mathbb{R}^3 , temos a forma quadrática $I_p : T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p \geq 0.$$

Essa forma quadrática I_p é chamada de **primeira forma fundamental** da superfície M no ponto p . Dado $w \in T_pM$, podemos escrever $w = a\phi_u + b\phi_v$. Temos que

$$I_p(w) = I_p(a\phi_u + b\phi_v) = a^2E + 2abF + b^2G,$$

onde

$$E = \langle \phi_u, \phi_u \rangle_p, \quad F = \langle \phi_u, \phi_v \rangle_p, \quad G = \langle \phi_v, \phi_v \rangle_p,$$

são os coeficientes da primeira forma fundamental na base $\{\phi_u, \phi_v\}$ de T_pM . A partir de agora, omitiremos o subscrito p quando for claro pelo contexto a que ponto nos referimos.

A primeira forma fundamental é meramente a expressão de como a superfície M herda o produto interno de \mathbb{R}^3 . Geometricamente, a primeira forma fundamental nos possibilita fazer

medidas sobre a superfície, como comprimentos de curvas, ângulos de vetores tangentes e áreas de regiões sem fazer menção ao espaço ambiente \mathbb{R}^3 , onde está a superfície.

O vetor normal unitário da superfície em p é dado por $N(p) = \frac{\phi_u \times \phi_v}{\|\phi_u \times \phi_v\|}(q)$. A aplicação $N : \phi(U) \rightarrow \mathbb{S}^2$ toma seus valores na esfera unitária \mathbb{S}^2 . A aplicação $N : \phi(U) \rightarrow \mathbb{S}^2$ é chamada de **aplicação normal de Gauss** de M .

A diferencial $dN_p : T_pM \rightarrow T_pM$ é uma aplicação linear auto-adjunta (ver (CARMO, 2016)). A forma quadrática $II_p : T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $II_p(v) = \langle -dN_p(v), v \rangle$ é chamada de **segunda forma fundamental** de M em $p \in \phi(U)$.

Seja $\alpha = \phi(u, v)$ uma parametrização de uma curva em M com $\alpha(0) = p$. Dessa forma, temos $\alpha' = \phi_u u' + \phi_v v'$. Assim,

$$dN(\alpha') = N'(u(t), v(t)) = N_u u' + N_v v'.$$

Portanto, na base $\{\phi_u, \phi_v\}$ a expressão da segunda forma fundamental é dada por

$$\begin{aligned} II_p(\alpha') &= \langle -dN_p(v), v \rangle = -\langle N_u u' + N_v v', \phi_u u' + \phi_v v' \rangle \\ &= e(u')^2 + 2f u' v' + g(v')^2, \end{aligned}$$

onde $e = -\langle N_u, \phi_u \rangle_p = \langle N, \phi_{uu} \rangle_p$, $f = -\langle N_u, \phi_v \rangle_p = -\langle N_v, \phi_u \rangle_p = \langle N, \phi_{uv} \rangle_p$, $g = -\langle N_v, \phi_v \rangle_p = \langle N, \phi_{vv} \rangle_p$, são os coeficientes da segunda forma fundamental na base $\{\phi_u, \phi_v\}$ de T_pM .

Como dN_p é auto-adjunta, para cada $p \in \phi(U)$, existe uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de T_pM tal que

$$dN_p(e_1) = -\kappa_1 e_1, \quad dN_p(e_2) = -\kappa_2 e_2,$$

com κ_1 e κ_2 sendo o máximo e o mínimo da segunda forma fundamental restrita ao círculo unitário de T_pM . Convencionaremos $\kappa_1 \geq \kappa_2$. Os vetores e_1 e e_2 são chamados vetores principais de ϕ em p , as direções determinadas por eles são as **direções principais**, e κ_1 e κ_2 são as **curvaturas principais**. Um ponto $p \in \phi(U)$ é dito **umbílico** se $\kappa_1 = \kappa_2$.

Se p não é um ponto umbílico, ou seja, se $\kappa_1 \neq \kappa_2$, existem duas direções principais ortogonais em p , e_1 e e_2 . Nos pontos umbílicos, toda direção tangente é considerada uma direção principal.

A **curvatura Gaussiana** de M em p é definida por $K = \det(dN_p)$. A **curvatura média** de M em p é $H = -\frac{1}{2} \text{tr}(dN_p)$, onde tr é o traço da matriz da aplicação. Segue, portanto, que $K(p) = \kappa_1 \kappa_2$ e $H(p) = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$. Um ponto $p \in \phi(U)$ é dito:

- Elíptico, se $\det(dN_p) > 0$;
- Hiperbólico, se $\det(dN_p) < 0$;
- Parabólico, se $\det(dN_p) = 0$ com $dN_p \neq 0$;

- Planar, se $dN_p = 0$.

Usando o contato da superfície com planos em p , temos que p é

- Elíptico, se f_h possui singularidade A_1^+ ;
- Hiperbólico, se f_h possui singularidade A_1^- ;
- Parabólico, se f_h possui singularidade A_2 .

O **conjunto parabólico** da superfície M é o conjunto de todos os pontos parabólicos de M . Um ponto parabólico p onde a função altura ao longo da direção normal à superfície M possui uma singularidade A_3 é chamado de **cúspide de Gauss**. A cúspide de Gauss p é chamada **elíptica** se a função altura ao longo da direção normal em p possui uma singularidade A_3^+ em p , e **hiperbólica** se possui uma singularidade A_3^- em p .

As curvaturas K e H ainda podem ser expressas em termos dos coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais da seguinte forma (veja, por exemplo, (CARMO, 2016)).

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}.$$

As curvaturas principais κ_1 e κ_2 são as soluções da equação quadrática

$$\kappa^2 - 2H\kappa + K = 0;$$

portanto, uma é igual a $H + \sqrt{H^2 - K}$ e a outra é igual a $H - \sqrt{H^2 - K}$.

Em cada ponto p na superfície M , podemos escolher um sistema de coordenadas em \mathbb{R}^3 de modo que p seja a origem, T_pM seja o plano $z = 0$ e a superfície M seja localmente o gráfico de alguma função $z = f(x, y)$, com (x, y) em um subconjunto aberto U de \mathbb{R}^2 contendo a origem. Então, temos a parametrização na forma de Monge

$$\phi(x, y) = (x, y, f(x, y)), \quad (x, y) \in U,$$

de M em p . Dizemos que M é **parametrizada localmente na forma de Monge** $z = f(x, y)$ na origem p . Note que a expansão de Taylor de f na origem não possui termos constantes ou lineares.

1.2.3 Blow-up

Os germes de curvas singulares são fundamentais para esse estudo. Esses objetos podem ser complicados, porém, existem transformações, chamadas *blow-up* ou explosões, que modificam o espaço ambiente e simplificam a curva. É possível realizar uma sucessão de transformações desta natureza de tal maneira que chegamos a uma situação onde a curva seja a mais

simples possível e, além disso, a curva resultante esteja de certa forma bem posicionada no espaço ambiente.

Cada *blow-up* possui um centro, que será uma singularidade da curva. A explosão transforma este centro em uma reta projetiva, que chamamos de divisor excepcional. A imagem da curva pelo *blow-up*, neste novo espaço, é chamado transformado estrito da curva.

Em resumo, após um número finito de *blow-ups*, o transformado estrito final de uma curva é uma curva não singular transversal ao divisor excepcional. A demonstração desse fato é realizada em (TRICHES, 2018). Ela é baseada no controle de determinados índices associados à curva e o principal argumento usado nesta demonstração é que um destes índices deve diminuir após um *blow-up*.

São consideradas duas cópias de \mathbb{R}^2 , chamadas W_1 e W_2 , com coordenadas (x, t) e (u, y) , respectivamente. Através da transformação

$$\begin{aligned} W_1 \setminus \{t = 0\} &\longrightarrow W_2 \setminus \{u = 0\} \\ (x, t) &\mapsto \left(\frac{1}{t}, tx\right), \end{aligned} \quad (1.1)$$

identificamos os pontos de $W_1 \setminus \{t = 0\}$ e $W_2 \setminus \{u = 0\}$ e assim construímos uma superfície $\tilde{\mathbb{R}}^2$ dada pela imagem dessa transformação.

Seja $\pi : \tilde{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicação definida como segue:

$$\pi(x, t) = (x, tx), \quad \text{para } (x, t) \in W_1;$$

$$\pi(u, y) = (uy, y), \quad \text{para } (u, y) \in W_2.$$

A aplicação π está bem definida, ou seja, respeita a identificação que dá origem a $\tilde{\mathbb{R}}^2$. Agora, seja $(0, 0)$ a origem de \mathbb{R}^2 , então

$$\pi^{-1}(0, 0) = \{(0, t) \in W_1\} \cup \{(u, 0) \in W_2\}.$$

Observe que, pela identificação de (1.1), obtemos que $\pi^{-1}(0, 0)$ é exatamente a reta projetiva \mathbb{P}^1 . Além disso,

$$\pi : \tilde{\mathbb{R}}^2 \setminus \pi^{-1}(0, 0) \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

é diferenciável.

A aplicação $\pi : \tilde{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é chamada de **blow-up** ou **explosão** da origem de \mathbb{R}^2 . A origem é o **centro do blow-up** e sua pré-imagem, $\pi^{-1}(0, 0)$, é chamada de **divisor excepcional**.

Na prática, a explosão é realizada em cartas locais. Sejam (x, y) coordenadas na origem de \mathbb{R}^2 . A aplicação $\pi^{-1}(x, y) = (x, tx)$ é chamada de primeira carta do *blow-up* e o ponto $p_1 = (0, 0)$ nas coordenadas locais (x, t) é a origem da primeira carta. Analogamente, $\pi^{-1}(x, y) = (uy, y)$ é chamada segunda carta do *blow-up* e o ponto $p_2 = (0, 0)$ nas coordenadas locais (u, y) é a

origem da segunda carta. Note que p_2 é o ponto no infinito do espaço projetivo \mathbb{P}^1 na carta local (x, t) , e vice-versa. Todos os outros pontos de $\pi^{-1}(0)$ estão em \mathbb{P}^1 são representados nas duas cartas através da correspondência $u = \frac{1}{t}$.

Seja $(0, 0)$ a origem de \mathbb{R}^2 . Na primeira carta, temos

$$\pi^{-1}(0, 0) = \pi^{-1}(x = y = 0) = \{x = tx = 0\} = \{x = 0\},$$

ou seja, todos os pontos do divisor excepcional são da forma $(0, t)$ na primeira carta. Já na segunda carta, temos que

$$\pi^{-1}(0, 0) = \pi^{-1}(x = y = 0) = \{uy = y = 0\} = \{y = 0\},$$

isto é, os pontos do divisor excepcional são da forma $(u, 0)$ na segunda carta.

Considere agora, na origem de \mathbb{R}^2 , o eixo $x = \{y = 0\}$. O transformado deste eixo na primeira carta é dado por

$$\pi^{-1}(y = 0) = \{tx = 0\} = \{t = 0\} \cup \{x = 0\}.$$

Isso significa que, após explosão, o eixo x se divide em duas partes: $\{t = 0\}$, que é o eixo x nas coordenadas locais (x, t) ; e $\{x = 0\}$. A curva $\{t = 0\}$ é chamada de **transformado estrito** do eixo x . Já $\{x = 0\}$ é exatamente a expressão do divisor excepcional $\pi^{-1}(0, 0)$ na primeira carta. Observe que estas duas curvas são transversais na origem p_1 . Na segunda carta, o transformado do eixo x é simplesmente $\{y = 0\}$, isto é, aparece apenas a parte divisora do transformado.

Analogamente, o transformado do eixo y é dado na segunda carta por

$$\pi^{-1}(x = 0) = \{uy = 0\} = \{u = 0\} \cup \{y = 0\},$$

em que $\{u = 0\}$ é o transformado estrito e $\{y = 0\}$ o divisor excepcional. Na segunda carta, o transformado é apenas $\{x = 0\}$.

Desta maneira, após a explosão da origem de \mathbb{R}^2 , é possível continuar explodindo pontos no divisor excepcional. O que é vital observar é que:

1. Em cada explosão, o divisor excepcional é uma reta projetiva \mathbb{P}^1 transversal aos divisores "mais antigos";
2. Tudo o que está fora do centro de explosão é preservado.

Dada uma sequência de n *blow-ups*, o divisor total (ou simplesmente divisor) é uma união de n retas projetivas, duas a duas transversais. Cada interseção é chamada de **esquina**.

O polígono de Newton é utilizado para dois fins: o Método de Newton, que consiste em realizar mudanças de variáveis a fim de encontrar uma parametrização para a curva $f(x, y) = 0$; e para o processo de redução de singularidades da curva. Apresentamos brevemente a seguir

o Método de Newton em que, no nosso caso, estamos interessados em seu uso para a redução de singularidades de curvas. Os chamados polígonos de Newton de cada curva serão usados em cada etapa de redução de uma singularidade usando como referência principal (TRICHES, 2018). Se uma curva é dada por $f(x, y) = 0$, o algoritmo permite encontrar uma série $y = y(x)$ com expoentes racionais tal que $f(x, y(x)) = 0$.

Seja $C = \{f(x, y) = 0\}$ uma curva, em que

$$f(x, y) = \sum_{i, j \in \mathbb{N}} a_{ij} x^i y^j.$$

Considere no plano (i, j) o conjunto $N(f)$ dos pares (i, j) tais que $a_{ij} \neq 0$. Este subconjunto do primeiro quadrante de \mathbb{R}^2 é chamado **Nuvem de Newton** de $f(x, y)$. O **Polígono de Newton** é definido como a fronteira do fecho convexo de $N(f)$. Observe que o fecho convexo de um conjunto X pode ser definido como o menor conjunto convexo contendo X , ou ainda a interseção de todos os conjuntos convexos contendo X . Com isso, pode-se entender o Polígono de Newton como um polígono com dois lados infinitos, um horizontal e um vertical (possivelmente distintos dos eixos coordenados).

Exemplo 1.2.1. Consideramos a seguinte curva algébrica

$$C = \{y^5 + xy^3 + x^3y + x^5 = 0\}.$$

A nuvem de Newton dessa curva é $N(f) = \{(0, 5); (1, 3); (3, 1); (5, 0)\}$, assim, seu polígono de Newton possui ambos os lados infinitos coincidindo com os eixos coordenados como podem ser visto na Figura 2.

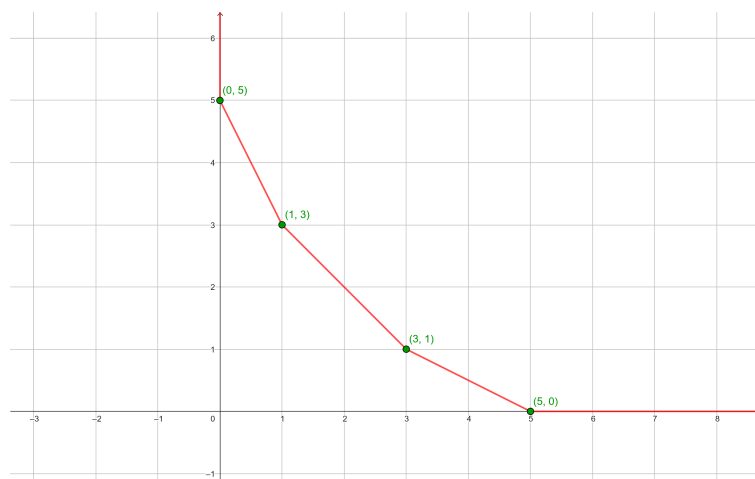


Figura 2 – Polígono de Newton de C .

VÉRTICES E INFLEXÕES DE SEÇÕES PLANAS DE SUPERFÍCIES SUAVES EM \mathbb{R}^3

Sejam M uma superfície regular e \mathbf{p} um ponto em M . Essa superfície é considerada localmente em \mathbf{p} na forma de Monge, ou seja, como gráfico $z = f(x, y)$ de uma função diferenciável $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ com $(0, 0) \in U$ e $f(0, 0) = 0$ e $T_{\mathbf{p}}M = \{z = 0\}$ em $\mathbf{p} = (0, 0, 0)$. Em (DIATTA; GIBLIN, 2007), são consideradas as interseções de M com uma família de planos $z = k$ paralelos a $T_{\mathbf{p}}M$. As interseções são as curvas de nível $f(x, y) = k$ de f com $k \in (\mathbb{R}, 0)$, e o objetivo do trabalho (DIATTA; GIBLIN, 2007) é determinar quantos pontos de inflexão e vértices estas curvas possuem e quais são suas posições relativas. Observe que a curva $f = 0$ é singular.

O estudo em (DIATTA; GIBLIN, 2007) foi feito levando em consideração a natureza do ponto, em que \mathbf{p} é elíptico, hiperbólico, parabólico e cúspide de Gauss. Denotaremos as derivadas parciais usando índices como f_x , etc.

Associadas à função f , duas funções, I_f e V_f , determinam as inflexões e vértices, respectivamente, da curva $f = k$. Seus conjuntos de zeros $I_f = 0$ e $V_f = 0$ contém a união de todas as inflexões e vértices, respectivamente, das curvas planas dadas por $f(x, y) = k$, com $k \in (\mathbb{R}, 0)$.

Para obter as expressões de I_f e V_f procede-se da seguinte maneira.

Seja $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ um germe de função suave, com

$$f(x, y) = a_{10}x + a_{11}y + a_{20}x^2 + a_{21}xy + a_{22}y^2 + a_{30}x^3 + a_{31}x^2y + a_{32}xy^2 + a_{33}y^3 + O(4),$$

podemos supor que $f_y \neq 0$ e pelo Teorema da função implícita, é possível supor que a curva $f(x, y) = k$ é localmente dada por $y = h(x)$, com h uma função suave de uma variável. Portanto,

$$f(x, h(x)) = k, \quad \forall x \in (\mathbb{R}, 0). \quad (2.1)$$

A curvatura da curva parametrizada $\gamma(x) = (x, h(x))$ é dada por

$$\kappa(x) = \frac{h''(x)}{(1 + (h'(x))^2)^{3/2}}. \quad (2.2)$$

Derivando (2.2), obtemos

$$\kappa'(x) = \frac{h'''(x) + h'''(x)h'(x)^2 - 3h'(x)h''(x)^2}{(1 + h'(x)^2)^{5/2}}. \quad (2.3)$$

Usando a regra da cadeia em (2.1), temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}f(x, h(x)) &\equiv 0 \iff \\ f_x(x, h(x)) + f_y(x, h(x))h'(x) &= 0 \end{aligned}$$

ou seja,

$$h'(x) = -\frac{f_x(x, h(x))}{f_y(x, h(x))}. \quad (2.4)$$

Derivando (2.4), temos

$$h'' = \frac{(f_{xy} + f_{yy}h')f_x - (f_{xx} + f_{xy}h')f_x}{f_y^2} = \frac{2f_x f_y f_{xy} - f_y^2 f_{xx} - f_x^2 f_{yy}}{f_y^3}, \quad (2.5)$$

onde as derivadas parciais de f são calculadas em $(x, h(x))$. Procedendo da mesma forma, derivando (2.5) obtemos que

$$\begin{aligned} h''' &= \frac{-3f_{xy}^2 f_x^3 - 3f_y f_{xy} (f_y f_{xx} - 3f_x f_{xy}) f_x}{f_y^5} \\ &+ \frac{f_y (f_{xxy} f_x^3 - f_{xy} (3f_{xx} f_x^2 + (6f_{xy}^2 - 3f_y f_{yx}) f_x + f_y (f_{yyy} f_x - 3f_{yy} f_{yx})))}{f_y^5}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Substituindo as derivadas de h em κ e κ^2 , temos

$$\kappa = \frac{f_{xx} f_y^2 - 2f_{xy} f_x f_y + f_{yy} f_x^2}{(f_x^2 + f_y^2)^{3/2}}, \quad (2.7)$$

$$\kappa^2 = \frac{(f_{xx} f_y^2 - 2f_{xy} f_x f_y + f_{yy} f_x^2)^2}{(f_x^2 + f_y^2)^3}, \quad (2.8)$$

ou seja, $\kappa(x) = 0$ se e somente se $f_{xx} f_y^2 - 2f_{xy} f_x f_y + f_{yy} f_x^2 = 0$. Assim,

$$I_f = f_{xx} f_y^2 - 2f_{xy} f_x f_y + f_{yy} f_x^2.$$

Agora, substituindo as derivadas de h em κ' , obtemos

$$\kappa'(x) = \frac{1}{f_y^7 \left(\frac{f_x^2}{f_y^2} + 1\right)^{5/2}} \left(3f_x (f_{yy} f_x^2 + f_y (f_y f_{xx} - 2f_x f_{xy}))^2\right)$$

$$\begin{aligned}
& + (f_y^2 + f_x^2) (3f_{yy}^2 f_x^3 + 3f_y f_{yy} (f_y f_{xx} - f_x f_{xy}) f_x \\
& - f_y (f_{yyy} f_x^3 + f_y (3f_{xyy} f_x^2 + 3(2f_y^2 + f_y f_{xy}) f_x + f_y (f_y f_{xxx} - 3f_y f_{xx}))))). \quad (2.9)
\end{aligned}$$

Assim, como $\kappa'(x) = 0 \iff V_f = 0$, temos

$$\begin{aligned}
V_f &= (f_x^2 + f_y^2) (-f_y^3 f_{xxx} + 3f_x f_y^2 f_{xxy} - 3f_x^2 f_y f_{xyy} + f_x^3 f_{yyy}) \\
&+ 3f_x f_y (f_y^2 f_{xx}^2 + (f_x^2 - f_y^2) f_{xx} f_{yy} - f_x^2 f_{yy}^2) \\
&+ 6f_x f_y f_{xy}^2 (f_x^2 - f_y^2) + 3f_{xy} (f_{xx} f_y^4 - 3f_x^2 f_y^2 (f_{xx} - f_{yy}) - f_{yy} f_x^4).
\end{aligned}$$

O resultado principal em (DIATTA; GIBLIN, 2007) é o seguinte.

Teorema 2.0.1. Seja $f = k$ uma seção de uma superfície genérica M por planos paralelos e próximos ao plano tangente em \mathbf{p} . Então, para uma vizinhança suficientemente pequena U de \mathbf{p} em M , existe $\varepsilon > 0$ tal que $f = k$ possui exatamente $v(\mathbf{p})$ vértices e $i(\mathbf{p})$ inflexões em U , para cada $0 < |k| \leq \varepsilon$, onde $v(\mathbf{p})$ e $i(\mathbf{p})$ satisfazem as seguintes igualdades. Será usado \leftrightarrow para indicar o número de vértices ou inflexões em cada lado de uma transição em $f = 0$ (onde ocorre a mudança de sinal de k), quando $f = k$ tem dois ramos. A notação $m + n$ indica o número de vértices ou inflexões nos dois ramos.

- (E) Se \mathbf{p} é um ponto elíptico, então para algum sinal de k a seção é localmente vazia; no caso não-umbílico, para seções com sinal de k que não são localmente vazias, temos $v(\mathbf{p}) = 4$, $i(\mathbf{p}) = 0$. Da mesma forma, se \mathbf{p} é um ponto umbílico genérico (termos quadráticos de f não devem dividir os termos cúbicos), então $v(\mathbf{p}) = 6$ e $i(\mathbf{p}) = 0$ (esse caso é conhecido e estudado, por exemplo, em (PORTEOUS, 1994, §15.3)).
- (H) No caso em que \mathbf{p} é um ponto hiperbólico, $v(\mathbf{p})$ é um dos seguintes casos. Para \mathbf{p} pertencente a uma região aberta de M , temos $2 + 2 \leftrightarrow 2 + 2$ ou $1 + 1 \leftrightarrow 3 + 3$. Em outros casos, que ocorrem ao longo de curvas ou pontos isolados de M , temos, adicionalmente, $3 + 2 \leftrightarrow 2 + 1$ ou $3 + 1 \leftrightarrow 2 + 2$. Além disso, $i(\mathbf{p})$ satisfaz: $1 + 1 \leftrightarrow 0 + 2$ ou $1 + 2 \leftrightarrow 0 + 1$. A lista inteira se encontra na Tabela 2.
- (P) Caso \mathbf{p} seja um ponto parabólico, mas não uma cúspide de Gauss, $v(\mathbf{p}) = 3$ e $i(\mathbf{p}) = 2$.
- (CGE) Quando \mathbf{p} é uma cúspide de Gauss elíptica, $v(\mathbf{p}) = 4$ e $i(\mathbf{p}) = 2$ para um dos sinais de k e para o outro sinal o conjunto de nível é vazio.
- (CGH) Se \mathbf{p} é uma cúspide de Gauss hiperbólica, temos que: $v(\mathbf{p}) : 1 + 3 \leftrightarrow 4 + 4$ ou $2 + 2 \leftrightarrow 4 + 4$, e para cada um desses casos, podemos ter as configurações $i(\mathbf{p}) : 1 + 1 \leftrightarrow 0 + 0$ ou $2 + 2 \leftrightarrow 0 + 2$ ou $1 + 1 \leftrightarrow 0 + 4$.

Símbolo	Ramo $x = ay$	Ramo $x = -ay$	Codimensão	Descrição
H_1	V_1I_1	V_1I_1	0	o caso mais genérico
H_2	V_2I_1	V_1I_1	1	curvas ao longo do conjunto VT
H_3	V_2I_1	V_2I_1	2	auto-intersecção do conjunto VT
H_4	V_3I_1	V_1I_1	2	pontos isolados do conjunto VT
H_5	V_1I_2	V_1I_1	1	curvas na região hiperbólica
H_6	V_2I_1	V_1I_2	2	pontos isolados
H_7	V_1I_2	V_1I_2	2	pontos isolados
H_8	V_2I_3	V_1I_1	2	V_2I_2 e V_1I_3 não ocorrem

Tabela 2 – As possibilidades para os contatos entre os ramos de $f = 0$ e dos ramos das curvas de vértices $V_f = 0$ e inflexões $I_f = 0$. (V_i representa os casos de contato de ordem $i + 2$ entre os respectivos ramos de $f = 0$ e $V_f = 0$ para $1 \leq i \leq 3$ inteiro e I_j representa os casos de contato de ordem $j + 1$ entre os respectivos ramos de $f = 0$ e $I_f = 0$ para $1 \leq j \leq 3$ inteiro. Assim, V_iI_j representa quando os casos V_i e I_j ocorrem simultaneamente nos respectivos ramos). O conjunto VT é o conjunto de M onde (2.11) e (2.12) são satisfeitas.

A seguir daremos os detalhes da demonstração do Teorema 2.0.1. Todos os resultados são de (DIATTA; GIBLIN, 2007).

São tomados os eixos x e y como direções principais na origem, de modo que a superfície M assume a forma local de Monge com

$$z = f(x, y) = \frac{1}{2} (\kappa_1 x^2 + \kappa_2 y^2) + b_0 x^3 + b_1 x^2 y + b_2 x y^2 + b_3 y^3 + \\ + c_0 x^4 + c_1 x^3 y + c_2 x^2 y^2 + c_3 x y^3 + c_4 y^4 + \\ + d_0 x^5 + d_1 x^4 y + d_2 x^3 y^2 + d_3 x^2 y^3 + d_4 x y^4 + d_5 y^5 + \text{t.o.s.} \quad (2.10)$$

para $(x, y) \in (\mathbb{R}^2, 0)$, onde κ_1 e κ_2 são as curvaturas principais de M na origem (e t.o.s. são os termos de ordem superior). As homotetias não mudam a geometria da seção, então multiplicando x , y e z por constantes não nulas, a expressão (2.10) é simplificada e, assim, temos coeficiente de x^2 igual a 1.

2.1 Ponto hiperbólico

Para o caso em que o ponto \mathbf{p} é hiperbólico temos que as curvatura principais κ_1 e κ_2 possuem sinais opostos. Desse modo, é possível tomar $j^2 f(x, y) = x^2 - a^2 y^2$, onde $a > 0$. Adota-se para esse caso, as notações V_h e I_h para V_f e I_f respectivamente.

Proposição 2.1.1. (i) O conjunto de vértices $V_h = 0$ possui exatamente quatro ramos VH_1 , VH_2 , VH_3 e VH_4 passando por $(0, 0)$, onde VH_1 é tangente à direção principal $x = 0$, VH_2 é tangente à direção principal $y = 0$, VH_3 é tangente à direção assintótica $x - ay = 0$ e VH_4 é tangente à direção assintótica $x + ay = 0$.

(ii) Os conjuntos de nível de $f = 0$ e $I_h = 0$ possuem exatamente dois ramos em uma vizinhança de $(0, 0)$, um deles é tangente à reta $x - ay = 0$ e o outro é tangente à reta $x + ay = 0$.

Demonstração. (i) De fato, tome o 4-jato de V_h dado por $q(x, y) := j^4 V_h = 192a^2(1+a^2)xy(x-ay)(x+ay)$ ($a \neq 0$). Com isso, por definição, se provarmos que $q(x, y)$ é 4- \mathcal{R} -determinada, então V_h será uma singularidade 4- \mathcal{R} -determinada. Para mostrar que $q(x, y)$ é 4- \mathcal{R} -determinada, verificamos que

$$\frac{\partial q}{\partial x} = 192a^4(1+a^2)(3x^2y - a^2y^3), \quad \frac{\partial q}{\partial y} = 192a^4(1+a^2)(x^3 - 3a^2y^2x),$$

de modo que $\mathcal{M}_2^2 \left\langle \frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial y} \right\rangle$ é gerado por $e_1 = x^2(3x^2y - a^2y^3)$, $e_2 = xy(3x^2y - a^2y^3)$, $e_3 = y^2(3x^2y - a^2y^3)$, $e_4 = x^2(x^3 - 3a^2y^2x)$, $e_5 = xy(x^3 - 3a^2y^2x)$, $e_6 = y^2(x^3 - 3a^2y^2x)$. Por fim, determinamos que $\mathcal{M}_2^2 \left\langle \frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial y} \right\rangle$ contém o ideal \mathcal{M}_2^5 . De fato, a partir de uma combinação linear entre e_2 e e_6 , obtemos os geradores x^3y^2 e xy^4 de \mathcal{M}_2^5 em $\mathcal{M}_2^2 \left\langle \frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial y} \right\rangle$. Com x^3y^2 e e_4 , obtemos x^5 . Por e_1 e e_5 , obtemos x^4y e x^2y^3 . Finalmente, por x^2y^3 e e_3 , obtemos o último gerador de \mathcal{M}_2^5 , y^5 . Logo, q é 4- \mathcal{R} -determinado, o que implica que V_h é 4- \mathcal{R} -determinada. Portanto, a função V_h é \mathcal{R} -equivalente ao seu 4-jato. Logo, o conjunto de zeros de V_h , $V_h = 0$ é difeomorfo a quatro retas $x = 0$, $y = 0$, $x - ay = 0$ e $x + ay = 0$ (um dos fatores de q deve ser zero). Assim, $V_h = 0$ são curvas que se intersectam na origem com direções tangentes às retas $x = 0$, $y = 0$, $x - ay = 0$ e $x + ay = 0$.

(ii) Agora, note que as funções f e I_h são do tipo Morse. De fato, $j^2 f = x^2 - a^2y^2$ e $j^2 I_h = -8x^2a^2 + 8a^4y^2$ (2- \mathcal{R} -determinadas). Assim, ambas são \mathcal{R} -equivalentes às suas formas quadráticas e, portanto, possuem ramos tangente as retas em $x = ay$ e $x = -ay$.

Portanto, segue o que queríamos demonstrar. □

Agora, determinemos as posições relativas dos ramos de $f = 0$, $V_h = 0$ e $I_h = 0$. Os ramos VH_1 e VH_2 são tangentes às direções principais $x = 0$ e $y = 0$, logo, são sempre transversais aos ramos de f e I_h . Assim, vejamos o que ocorre com VH_3 e VH_4 , e os ramos do conjunto de inflexões.

Observação 2.1.1. Denotaremos por $f^{(n)}(a)$ a parte homogênea de grau n da expansão em série de Taylor de f em $(x, y) = (a, 1)$. Por exemplo, $f^{(3)}(a) = b_0a^3 + b_1a^2 + b_2a + b_3$, e $f^{(4)}(a) = c_0a^4 + c_1a^3 + c_2a^2 + c_3a + c_4$. Da mesma forma, $f^{(n)}(-a)$ é o resultado da substituição $x = -a$, $y = 1$ no mesmo polinômio homogêneo de grau n .

Proposição 2.1.2. (i) Os ramos VH_3, VH_4 do conjunto de vértices podem ser parametrizadas por $(x(y), y)$ com o 3-jato de x dado por:

$$VH_3 : x = ay - \frac{1}{2a} f^{(3)}(a) y^2 + \frac{1}{4a^3(1+a^2)} \left(f^{(3)}(a) (3b_0a^5 + b_1a^4 + (5b_0 - b_2)a^3 + (3b_1 - 3b_3)a^2b_2a - b_3) - 4a^2(1+a^2)f^{(4)}(a) \right) y^3$$

$$= ay + c_{2v}^+ y^2 + c_{3v}^+ y^3;$$

$$VH_4 : x = -ay + c_{2v}^- y^2 + c_{3v}^- y^3.$$

(ii) Os ramos de $f = 0$ podem ser parametrizadas por $(x(y), y)$ com o 3-jato de x dado por:

$$f_1 : x = ay - \frac{1}{2a} f^{(3)}(a) y^2$$

$$+ \frac{1}{8a^3} \left(f^{(3)}(a) (5b_0 a^3 + 3b_1 a^2 + b_2 a - b_3) - 4a^2 f^{(4)}(a) \right) y^3$$

$$= ay + c_{2f}^+ y^2 + c_{3f}^+ y^3;$$

$$f_2 : x = -ay + c_{2f}^- y^2 + c_{3f}^- y^3.$$

(iii) Os ramos de $I_h = 0$ podem ser parametrizados por $(x(y), y)$, sendo que o 3-jato de x é dado por:

$$IH_1 : x = ay + \frac{1}{8a^3} \left(-3f^{(3)}(a) (3b_0 a^3 + b_1 a^2 - b_2 a - 3b_3) + 8a^2 f^{(4)}(a) \right) y^3$$

$$= ay + c_{3i}^+ y^3;$$

$$IH_2 : x = -ay + c_{3i}^- y^3.$$

Demonstração. (i) Vamos obter a expressão do 3-jato de $x(y)$ para VH_3 . Como a curva deve ser tangente à $x = ay$, o 3-jato de $x(y)$ é da forma $ay + c_{2v}^+ y^2 + c_{3v}^+ y^3$, vamos calcular c_{2v}^+ e c_{3v}^+ . Assim, obtemos um polinômio $p(y)$. Temos que $V(x(y), y)$ é identicamente nulo. Assim, se tomamos $p(y) = V(ay + c_{2v}^+ y^2 + c_{3v}^+ y^3, y)$, vamos escolher c_{2v}^+ e c_{3v}^+ de modo a zerar os jatos de $p(y)$. O 5-jato de $p(y)$ é dado por

$$j^5 p(y) = 192a^5 (a^2 + 1) y^5 (a(a(ab_0 + b_1) + b_2 + 2c_{2v}^+) + b_3).$$

Isolando o coeficiente c_{2v}^+ em $j^5 p(y) = 0$, obtemos

$$c_{2v}^+ = \frac{-a^3 b_0 - a^2 b_1 - ab_2 - b_3}{2a}.$$

Utilizando $f^{(3)}(a)$ para simplificar essa expressão, temos

$$c_{2v}^+ = \frac{-f^{(3)}(a)}{2a}.$$

Para determinar o coeficiente c_{3v}^+ , devemos calcular 6-jato de $p(y)$. Note que

$$j^6 p(y) = y^6 (3264a^7 b_0 c_{2v}^+ + 1728a^9 b_0 c_{2v}^+ + 1920a^6 b_1 c_{2v}^+ + 384a^8 b_1 c_{2v}^+$$

$$+ 576a^5 b_2 c_{2v}^+ - 960a^7 b_2 c_{2v}^+ - 768a^4 b_3 c_{2v}^+ - 2304a^6 b_3 c_{2v}^+$$

$$+ 576a^5 (c_{2v}^+)^2 + 576a^7 (c_{2v}^+)^2 + 384a^6 c_{3v}^+ + 384a^8 c_{3v}^+).$$

Isolamos c_{3v}^+ e substituímos $c_{2v}^+ = \frac{-f^{(3)}(a)}{2a}$, obtendo a expressão de c_{3v}^+ dependendo apenas dos coeficientes de f . Podemos simplificar usando $f^{(3)}(a)$ e $f^{(4)}(a)$ e obtemos

$$c_{3v}^+ = \frac{1}{4a^3(1+a^2)} \left(f^{(3)}(a) \left(3b_0a^5 + b_1a^4 + (5b_0 - b_2)a^3 + (3b_1 - 3b_3)a^2b_2a - b_3 \right) - 4a^2(1+a^2)f^{(4)}(a) \right) y^3.$$

Agora, vamos obter a expressão do 3-jato de $x(y)$ para VH_4 . Para esse caso, como VH_4 é tangente à $x = -ay$, o 3-jato de x é da forma $x = -ay + c_{2v}^-y^2 + c_{3v}^-y^3$ e procedemos de forma similar para calcular c_{2v}^- e c_{3v}^- .

(ii) e (iii) são análogos ao item (i).

□

Proposição 2.1.3. Os ramos do conjunto de vértices e os da curva $f = 0$ possuem pelo menos contato de ordem 3 na origem.

Demonstração. Podemos parametrizar, por exemplo, o ramo VH_3 usando sua equação apresentada na Proposição 2.1.2. Tomamos $\gamma: (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$, com $\gamma(y) = (x(y), y)$, onde $j^3x = ay + c_{2v}^+y^2 + c_{3v}^+y^3$. Além disso, usando a equação do ramo de $f = 0$ tangente à VH_3 , também apresentada na Proposição 2.1.2, que é $x = ay + c_{2f}^+y^2 + c_{3f}^+y^3$, definimos a função $F(x, y) = -x + ay + c_{2f}^+y^2 + c_{3f}^+y^3$, cujo o conjunto de zeros $F^{-1}(0)$ é dado pela equação anterior. Tomando a composição $g = F \circ \gamma$, temos que

$$\begin{aligned} g(x, y) &= F(\gamma(y)) = F(ay + c_{2v}^+y^2 + c_{3v}^+y^3, y) \\ &= ay + c_{2v}^+y^2 + c_{3v}^+y^3 - (ay + c_{2f}^+y^2 + c_{3f}^+y^3) \\ &= (c_{3v}^+ - c_{3f}^+)y^3. \end{aligned}$$

Portanto, $g^{(k)}(0, 0) = 0$ para $k = 0, 1, 2$. Analogamente, temos o caso VH_4 e o ramo de $f = 0$ correspondente.

□

Localmente a ordem de contato entre duas curvas permite determinar a posição relativa entre elas. Se a ordem for ímpar, então uma das curvas possui interseção com as duas regiões definida pela outra. Se a ordem for par, então uma das curvas está localmente contida em uma das regiões definidas pela outra. Veja a Figura 3.

Proposição 2.1.4 (Condição de 4-contato). A condição para o ramo de vértices VH_3 ter pelo menos contato de ordem 4 com o ramo correspondente de $f = 0$ na origem é dada por

$$C_{4v}^+ = f^{(3)}(a) \left(b_0a^5 - b_1a^4 + (5b_0 - 3b_2)a^3 - (5b_3 - 3b_1)a^2 + b_2a - b_3 \right) - 4a^2(1+a^2)f^{(4)}(a) = 0. \quad (2.11)$$

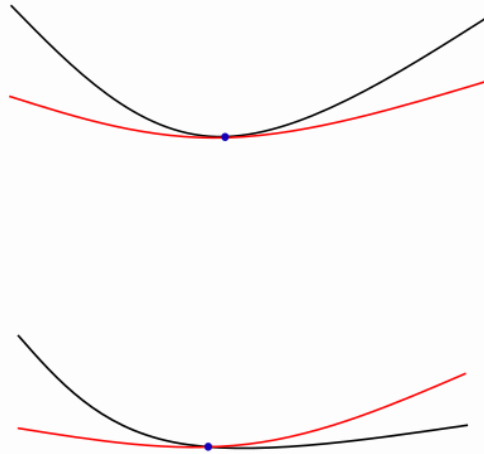


Figura 3 – Exemplos de configurações de duas curvas se intersectando tangencialmente em um ponto dependendo da ordem de contato entre as duas. A figura de cima representa ordem de contato par e a figura de baixo representa ordem de contato ímpar.

Da mesma forma, a condição para VH_4 ter pelo menos contato de grau 4 com o ramo correspondente de $f = 0$ é obtida substituindo a por $-a$, resultando em

$$C_{4v}^- = -f^{(3)}(-a) \left(b_0 a^5 + b_1 a^4 + (5b_0 - 3b_2) a^3 + (5b_3 - 3b_1) a^2 + b_2 a + b_3 \right) - 4a^2 (1 + a^2) f^{(4)}(-a) = 0. \quad (2.12)$$

Demonstração. Considere a mesma parametrização γ do ramo VH_3 e a função F possui o correspondente ramo de $f = 0$ como conjunto de zeros, como na demonstração da Proposição 2.1.3. Para essas curvas possuírem pelo menos contato de ordem 4 na origem, é preciso que $g^{(k)}(0,0) = 0$, $k = 0, 1, 2, 3$. Como já vimos na Proposição 2.1.3, a condição $g^{(k)}(0,0) = 0$ para $k = 0, 1, 2$ sempre ocorre. Para que essa condição ocorra para $k = 3$, é preciso que $0 = g^{(3)}(0,0) = c_{3v}^+ - c_{3f}^+$, ou seja, é necessário que $c_{3v}^+ - c_{3f}^+ = 0$, donde obtemos a condição (2.11). De forma análoga, temos para VH_4 e o ramo de $f = 0$ correspondente, obtemos a condição (2.12). □

O conjunto de **Transição de Vértices (VT)** na superfície M é o conjunto de pontos onde (2.11) ou (2.12) é satisfeita.

Observe que não há termos quadráticos nessas expansões, ou seja, ambos os ramos da curva de inflexão $I_h = 0$ possuem inflexão na origem, pela curvatura ser zero usando (2.2). Além disso, os ramos de $I_h = 0$ e $f = 0$ tangentes a $x = ay$ têm contato de ordem 2, a menos que esse ramo de $f = 0$ também tenha uma inflexão (ou seja, $f^{(3)}(a) = 0$). Pelo mesmo motivo, os ramos de $I_h = 0$ e $f = 0$ tangentes a $x = -ay$ têm contato de ordem 2.

No decorrer do texto, será utilizada as seguintes notações: \mathbf{V}_1 denota o caso em que um ramo de $f = 0$ e o ramo correspondente de $V_h = 0$ têm contato de ordem 3 (\mathbf{V}_i são os casos de

contato de ordem $i + 2$, para $1 \leq i \leq 3$ inteiro), \mathbf{I}_1 denota o caso em que um ramo de $f = 0$ e o ramo correspondente de $V_h = 0$ possuem contato de ordem 2 (\mathbf{I}_j são os casos de contato de ordem $j + 1$, para $1 \leq j \leq 3$ inteiro).

Podemos combinar as possibilidades de contato acima nos dois ramos de $f = 0$ tangentes à $x = \pm ay$ para obtermos as configurações possíveis.

Proposição 2.1.5. No caso \mathbf{H}_1 ,

- (i) A transição de vértices $2 + 2 \leftrightarrow 2 + 2$ ocorre quando os lados esquerdos das equações (2.11) e (2.12) possuem sinais opostos.
- (ii) A transição de vértices $1 + 1 \leftrightarrow 3 + 3$ ocorre quando os lados esquerdos das equações (2.11) e (2.12) possuem mesmos sinais.
 - (iia) A transição de inflexões $1 + 1 \leftrightarrow 2 + 0$ ocorre quando, além de (ii), no caso em que ambos os sinais são negativos, temos $f^{(3)}(a)f^{(3)}(-a) > 0$ e no caso em que ambos os sinais são positivos, temos $f^{(3)}(a)f^{(3)}(-a) < 0$.
 - (iib) A transição de inflexões $2 + 0 \leftrightarrow 1 + 1$ ocorre quando, além de (ii), no caso em que ambos os sinais são negativos, temos $f^{(3)}(a)f^{(3)}(-a) < 0$ e no caso em que ambos os sinais são positivos, temos $f^{(3)}(a)f^{(3)}(-a) > 0$.

Ver Figura 4.

Demonstração. (i) De fato, quando k é suficientemente pequeno, na direção principal $x = 0$, a interseção entre $f = k$ e $V_h = 0$ é dada por $f(VH_1) - k - V_h(VH_1) = -a^2y^2 - k + O(3) = 0$, e cada termo deve se anular, assim, $-a^2y^2 - k = 0$. Como $a > 0$, essa equação possui duas raízes quando $k < 0$ e não possui raízes quando $k > 0$. Da mesma forma, temos que quando k é suficientemente pequeno, na direção principal $y = 0$, a interseção entre $f = k$ e $V_h = 0$ é dada por $f(VH_2) - k - V_h(VH_2) = x^2 - k + O(3) = 0$, e cada termo deve se anular, assim, $x^2 - k = 0$. Como $a \neq 0$, essa equação possui duas raízes quando $k > 0$ e não possui raízes quando $k < 0$. Assim, em cada ramo de $f = k$, temos 1 vértice advindo dos ramos de $V_h = 0$ nas direções principais.

Nas direções $x = ay$ e $x = -ay$, temos que $f(VH_3) - k - V_h(VH_3) = 0$ e $f(VH_4) - k - V_h(VH_4) = 0$, onde VH_3 e VH_4 denotam as respectivas parametrizações dos ramos usando os jatos encontrados e assim, quando $C_{4v}^+y^3 = k$ e $C_{4v}^-y^3 = k$, ou seja, localmente, para $k > 0$, temos uma solução em cada ramo e para $k < 0$ também. Logo, em cada ramo de $f = k$, temos 1 vértice advindo dos ramos de $V_h = 0$ nas direções $x = ay$ e $x = -ay$, $k \neq 0$.

- (ii) Por uma análise análoga ao o item (i), em cada ramo de $f = k$, temos 1 vértice advindo dos ramos de $V_h = 0$ nas direções principais.

Nas direções $x = ay$ e $x = -ay$, temos que $f(VH_3) - k - V_h(VH_3) = 0$ e $f(VH_4) - k - V_h(VH_4) = 0$ e assim, quando $C_{4v}^+ y^3 = k$ e $C_{4v}^- y^3 = k$, ou seja, localmente, temos para um dos sinais de k dois vértices em um mesmo ramo já que C_{4v}^+ e C_{4v}^- possuem mesmo sinal e para o outro sinal de k nenhuma solução. Logo, totalizando os vértices encontrados, temos $1 + 1 \leftrightarrow 3 + 3$.

(ia) De fato, quando k é suficientemente pequeno, nas direções $x = ay$ e $x = -ay$, temos que $f(IH_1) - k - I_h(IH_1) = 0$ e $f(IH_2) - k - I_h(IH_2) = 0$ e assim, quando $-\frac{1}{2a}f^{(3)}(a)y^2 = k$ e $\frac{1}{2a}f^{(3)}(-a)y^2 = k$, ou seja, localmente, para um dos sinais de k , temos duas inflexões em um dos ramos e nenhum no outro e para o outro sinal de k temos uma inflexão em cada ramo. Para determinar geometricamente o sinal de k em que ocorre cada configuração, usamos o contato entre as combinações dos respectivos ramos IH_1 , f_1 e VH_3 e entre IH_2 , f_2 e VH_4 . O sinal das condições de contato entre os ramos de $f = k$ e $V_h = 0$ permite verificar as posições das interseções dos ramos durante as deformações para k suficientemente pequeno como na Figura 4 e, assim, a quantidade de inflexões que aparecem. Analisando essas configurações obtemos o que desejamos. Observe que para o item (i), independentemente dos sinais dessas condições, temos $1 + 1 \leftrightarrow 2 + 0$.

(iib) Análogo ao caso (ia).

□

Lema 2.1.1. (i) A condição para $\mathbf{V}_1\mathbf{I}_2$ no ramo tangente à $x = ay$ é $f^{(3)}(a) = 0$ e $f^{(4)}(a) \neq 0$. A configuração de $f = 0$, $V_h = 0$ e $I_h = 0$ é determinada pelo sinal de $f^{(4)}(a)$, como ilustrado na Figura 5.

(ii) Se supomos que as condições $\mathbf{V}_2\mathbf{I}_2$ ou $\mathbf{V}_1\mathbf{I}_3$ ocorram no ramo tangente a $x = ay$, temos $f^{(3)}(a) = f^{(4)}(a) = 0$ e $f^{(5)}(a) \neq 0$ e obtemos o caso $\mathbf{V}_2\mathbf{I}_3$. A configuração de $f = 0$, $V_h = 0$ e $I_h = 0$ é determinada pelo sinal de $f^{(5)}(a)$, como ilustrado na Figura 5.

Demonstração. (i) Para esse caso, é preciso que VH_3 e o ramo de $f = 0$ correspondente possuam ordem de contato 3 e IH_1 e o ramo de $f = 0$ correspondente também possuam ordem de contato 3. Observe que para isso, os ramos de $I_h = 0$ e $f = 0$ tangentes à $x = ay$ devem possuir o mesmo 2-jato e 3-jato distinto, assim, usamos as fórmulas das Proposições 2.1.2 e 2.1.4, e temos necessariamente que $f^{(3)}(a) = 0$. Além disso, $I_h = 0$ e $f = 0$ possuem 3-jatos diferentes quando $f^{(4)}(a) \neq 0$, uma vez que os coeficientes de y^3 nas duas séries de Taylor, nesse caso, são $\frac{f^{(4)}(a)}{a}$ e $-\frac{f^{(4)}(a)}{2a}$, respectivamente. Como o coeficiente de y^3 na série de Taylor de VH_3 é $-\frac{f^{(4)}(a)}{a}$ e de f_1 é igual à $-\frac{f^{(4)}(a)}{2a}$, para esse caso, temos que eles também serão não nulos e encontramos as duas configurações dos ramos representadas na Figura 5.

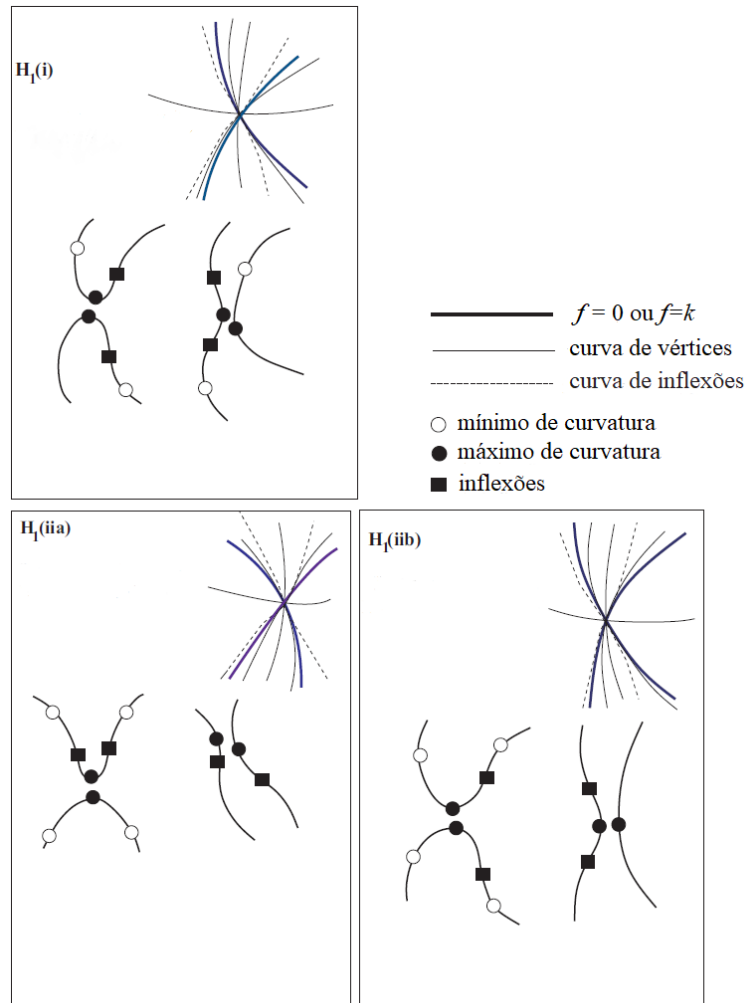


Figura 4 – As configurações de \mathbf{H}_1 de acordo com a Proposição 2.1.5. A curva escura representa $f = 0$ ou $f = k$, a curva clara $V_h = 0$ e a curva pontilhada $I_h = 0$. Os pontos abertos representam os mínimos de curvatura, os pontos fechados representam os máximos de curvatura e os quadrados fechados representam as inflexões.

- (ii) Agora, para o caso $\mathbf{V}_2\mathbf{I}_2$, é preciso que VH_3 e o ramo de $f = 0$ correspondente possuam ordem de contato 4 e IH_1 e o ramo de $f = 0$ correspondente possuam ordem de contato 3. Pelo item (i) e por \mathbf{V}_2 , temos $f^{(3)}(a) = 0$ e $f^{(4)}(a) = 0$. Ou seja, o contato entre IH_1 e o ramo de $f = 0$ correspondente possuem 3-jatos iguais (e contato entre VH_3 e o ramo de $f = 0$ correspondente, também), logo devemos encontrar os 5-jatos de VH_3 , f_1 e IH_1 substituindo $f^{(3)}(a) = 0$ e $f^{(4)}(a) = 0$. Assim,, temos que os coeficientes de y^4 nas três expansões de Taylor dos ramos são $f = 0 : -\frac{1}{2a}f^{(5)}(a)$, $V_h = 0 : -\frac{5}{2a}f^{(5)}(a)$ e $I_h = 0 : \frac{5}{2a}f^{(5)}(a)$, os quais, sendo não nulos, obtemos $\mathbf{V}_2\mathbf{I}_3$ e as configurações ilustradas na Figura 5.

Agora, para o caso $\mathbf{V}_1\mathbf{I}_3$, é preciso que VH_3 e o ramo de $f = 0$ correspondente possuam ordem de contato 3 e IH_1 e o ramo de $f = 0$ correspondente possuam ordem de contato 4 também. Pelo item (i) e por \mathbf{I}_3 , temos $f^{(3)}(a) = 0$ e $f^{(4)}(a) = 0$. Ou seja, o contato entre VH_3 e o ramo de $f = 0$ correspondente possuem 3-jatos iguais (e contato entre IH_1 e o

ramo de $f = 0$ correspondente, também), logo devemos encontrar os 5-jatos de VH_3 , f_1 e IH_1 substituindo $f^{(3)}(a) = 0$ e $f^{(4)}(a) = 0$. Assim, obtemos o mesmo resultado anterior, temos que os coeficientes de y^4 nas três expansões de ramos são $f = 0 : -\frac{1}{2a}f^{(5)}(a)$, $V_h = 0 : -\frac{5}{2a}f^{(5)}(a)$ e $I_h = 0 : \frac{5}{2a}f^{(5)}(a)$, os quais, sendo não nulos, obtemos $\mathbf{V}_2\mathbf{I}_3$ e as configurações ilustradas na Figura 5.

□

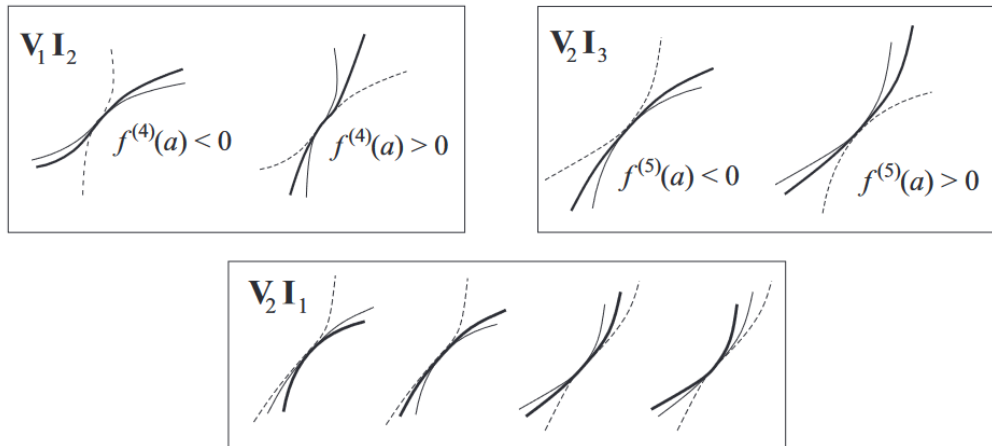


Figura 5 – Casos de configurações dos ramos tangentes à $x = ay$: $\mathbf{V}_1\mathbf{I}_2$, $\mathbf{V}_2\mathbf{I}_3$ e $\mathbf{V}_2\mathbf{I}_1$. A curva escura representa $f = 0$, a curva clara representa $V_h = 0$, e a curva pontilhada representa $I_h = 0$.

Os outros caso também requerem uma análise da do contato dos ramos $f = 0$, $V_h = 0$ e $I_h = 0$ de maneira análoga.

Para determinar quais vértices correspondem a máximos ou mínimos de curvatura, precisamos verificar o sinal da derivada κ' da curvatura κ nas regiões determinadas pelos ramos do conjunto de vértices. Os diferentes ramos do conjunto de vértices dividem localmente o plano em regiões onde κ' tem sinal constante, e os ramos dos vértices são os locais de pontos onde κ' se anula. Vale ressaltar que o sinal de κ' não depende da orientação da curva, mas tem o mesmo sinal que a condição do vértice $V_h(x, y)$.

Para determinar localmente o sinal de κ' em uma região específica, como na região entre os ramos de vértices tangentes à $y = 0$ e à $x - ay = 0$, podemos verificar o sinal de $V_h(x, y)$ ao longo de uma reta dentro dessa região. Por exemplo, podemos escolher a reta $x = 2ay$, que está, localmente, dentro da região de interesse. Ao longo dessa reta, o sinal da condição do vértice é positivo para valores pequenos de y , como pode ser visto na expansão de Taylor de V_h em $x = 2ay$, $V_h(2ay, y) = 1152(a^7 + a^9)y^4 + O(y^5)$, com $a > 0$. Como $a > 0$, podemos concluir que esses ramos de vértices correspondem a mínimos de curvatura, já que κ' deve se anular apenas nos ramos do conjunto de vértices e, assim, nessa região interna, localmente, κ' deve possuir sempre mesmo sinal representado, por exemplo, pelo sinal do valor de $V_h(2ay, y)$, que é positivo. Podemos completar o sinal de κ' em todas as outras regiões da mesma forma ($x = \frac{ay}{2}$,

$V_h(\frac{ay}{2}, y) = -72(a^7 + a^9)y^4 + O(y^5)$, com $a > 0$ e o sinal alternando dependendo da direção). Isso descreve completamente o crescimento de κ nas curvas de nível de f no plano.

Sempre orientaremos os ramos $f = k$ conforme indicado na Figura 6, e nessa orientação κ' terá um máximo ou mínimo definido em um determinado ramo de vértice.

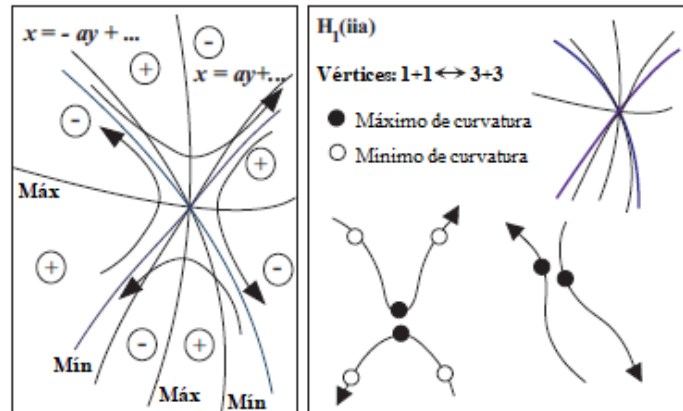


Figura 6 – Caso $H_1(ii)$: O sinal de κ' seguindo as orientações indicadas pelas setas em $f = k$. Antes da curva $f = k$ intersectar um ramo de vértices “Máx”, a derivada κ' de κ é positiva, se anula no ramo de vértices e se torna negativa posteriormente. Portanto, as interseções dos ramos de vértices “Máx” e as curvas $f = k$ são os vértices em $f = k$ onde κ atinge um máximo local. Analogamente, as interseções dos ramos de vértices “Mín” e as curvas $f = k$ são os vértices em $f = k$ onde κ atinge um mínimo local de curvatura de $f = k$ quando k passa por zero.

Proposição 2.1.6. Nas notações da Proposição 2.1.2, a curvatura limite das curvas de nível $f = k$, quando $k \rightarrow 0$, em vértices nos seus ramos é dada, a menos de sinal, por

- infinito, ao longo de VH_1 e VH_2 ;
- $f^{(3)}(a)/a(1+a^2)^{3/2}$, ao longo de VH_3 ;
- $-f^{(3)}(-a)/a(1+a^2)^{3/2}$, ao longo de VH_4 .

Demonstração. Para a prova, usamos as expansões de Taylor dos ramos do conjunto vértice, fornecidas acima na Proposição 2.1.2, e a equação (2.8). Para o ramo VH_1 , encontramos que o numerador e o denominador de κ^2 são $64a^8y^4 + O(y^5)$ e $64a^{12}y^6 + O(y^7)$ respectivamente, de modo que, conforme $y \rightarrow 0$, a curvatura limite é infinita. A prova para VH_2 é semelhante. Para VH_3 , o numerador e o denominador são $64a^4f^{(3)}(a)^2y^6 + O(y^7)$ e $64a^6(1+a^2)^3y^6 + O(y^7)$ e segue o resultado. O caso para VH_4 é análogo.

□

2.2 Ponto elíptico

Nesta seção, consideramos o caso em que $\mathbf{p} = (0, 0, 0)$ é um ponto elíptico. Usando a equação (2.10), podemos escrever a função f em termos do seu polinômio de Taylor de segunda ordem como

$$f_e(x, y) = x^2 + a^2y^2 + b_0x^3 + b_1x^2y + b_2xy^2 + b_3y^3 + \text{t.o.s.}, \quad (2.13)$$

onde a é uma constante positiva. Note que as curvas de nível $f_e(x, y) = k$ são vazias quando $k < 0$ ou são curvas regulares fechadas quando $k > 0$, ver Figura 7.

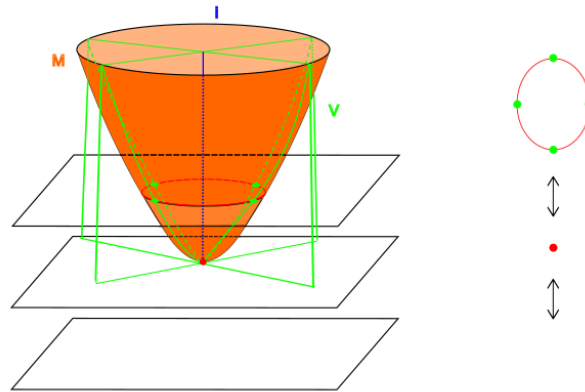


Figura 7 – Seções planas paralelas ao plano tangente em um ponto elíptico não umbílico ($a \neq 1$) com $f = k$ (vermelho), $I_f = 0$ (azul) e $V_f = 0$ (verde) representados. Note que como I_f e V_f dependem apenas das derivadas parciais de $f = k$, para qualquer nível k , temos essas curvas em cada plano paralelo com projeções no nível zero iguais.

Podemos distinguir dois casos aqui: o caso em que $a \neq 1$ e o caso $a = 1$, ou seja, quando \mathbf{p} é um ponto umbílico.

Para provar o Teorema 2.0.1 no caso elíptico, procedemos da mesma forma que no caso anterior a partir da função V_e , calculando seu 4-jato, dado por

$$-192a^4xy(a^2 - 1)(x^2 + a^2y^2).$$

Quando $a \neq 1$, só podem existir dois ramos reais de $V_e = 0$, com tangentes $x = 0$ e $y = 0$.

A função de inflexões I_e possui 2-jato

$$8a^2(x^2 + a^2y^2).$$

Assim, o conjunto $I_e = 0$ não contém pontos reais além da origem.

As seções $f_e = k$ tem quatro vértices para $k > 0$ pequeno, assim como no caso de uma elipse, já que os zeros da função de vértice serão dados por dois ramos tangentes às direções principais $x = 0$ e $y = 0$ em que $f_e = k$ intersectará ambos em dois pontos.

A curvatura nos vértices tende a infinito quando $k \rightarrow 0$ por valores positivos. De fato, usamos a equação (2.13), assim como na Proposição 2.1.6 e temos que a curvatura nos vértice tende a infinito quando $k \rightarrow 0$ por valores positivos.

Para o caso umbílico, quando $a = 1$, note que o 4-jato de V_u se anula. Assim, para simplificar, considere o 5-jato de $\frac{1}{192}V_u$, já que o conjunto de zeros se mantém multiplicando por constantes:

$$\begin{aligned} j^5 \left(\frac{1}{192} V_u \right) &= px^5 - 3qx^4y - 2px^3y^2 - 2qx^2y^3 - 3pxy^4 + qy^5 \\ &= (x^2 + y^2) (px^3 - 3qx^2y - 3pxy^2 + qy^3), \end{aligned} \quad (2.14)$$

em que $p = b_3 - b_1$ e $q = b_2 - b_0$.

Considerando que o primeiro fator em (2.14), $(x^2 + y^2)$, se anula apenas quando $x^2 + y^2 = 0$, analisamos os zeros apenas do outro fator. O discriminante da forma cúbica do segundo fator em (2.14) é dado por

$$108 (p^2 + q^2)^2,$$

que se anula apenas quando $p = q = 0$. Dessa forma, a menos que isso ocorra, o discriminante é estritamente positivo e temos três raízes distintas para a cúbica, ou seja, os ramos de $V_u = 0$ devem ser exatamente três ramos distintos transversais se intersectando na origem. Segue que quando tomamos as seções $f_u = k$, para $k > 0$ suficientemente pequeno, temos a interseção em dois pontos para cada um desses três ramos, ou seja, temos 6 vértices, ver Figura 8.

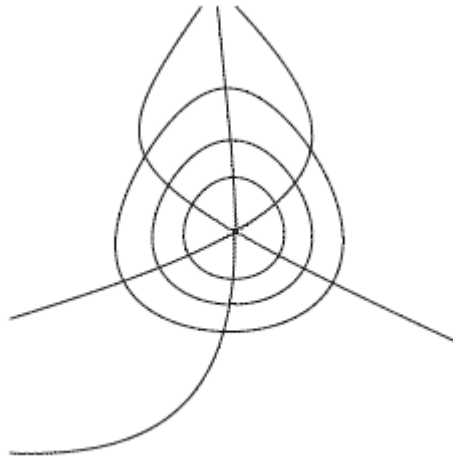


Figura 8 – Interseções dos níveis de f , representado pelas curvas fechadas, com os ramos do conjunto V_e , representados pelos três ramos transversais para o caso elíptico com $a = 1$.

Como a função de inflexões é de Morse (2 - \mathcal{R} -determinado) e é dada por $8(x^2 + y^2) + t.o.s.$, para $k > 0$ suficientemente pequeno, não temos interseções entre $I_u = 0$ e $f_u = k$, ou seja, não temos inflexões.

2.3 Ponto parabólico

Em um ponto parabólico \mathbf{p} em uma superfície M em \mathbb{R}^3 , uma das curvaturas principais é zero e o contato da superfície com seu plano tangente possui uma singularidade $A_{\geq 2}$. Nesta

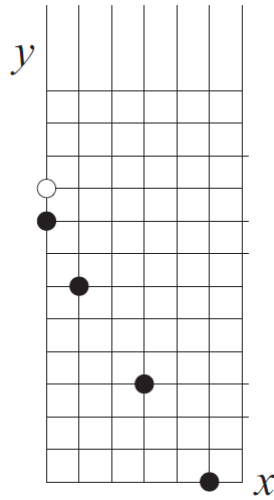


Figura 9 – O polígono de Newton de uma cúspide de Gauss hiperbólica.

seção, focamos no caso de pontos parabólicos ordinários, onde o contato é exatamente A_2 . Uma das curvaturas principais se anula e após uma homotetia das variáveis x , y e z na equação (2.10) e uma rotação dos eixos coordenados, a função f pode ser escrita como

$$f_p(x, y) = x^2 + b_0x^3 + b_1x^2y + b_2xy^2 + b_3y^3 + \text{t.o.s.}$$

onde $b_3 \neq 0$. Observe que o caso em que $b_3 = 0$ corresponde a uma cúspide de Gauss, a qual será analisada na próxima seção.

Proposição 2.3.1. (i) O conjunto de vértices $V_p = 0$ possui três ramos, um suave e outros dois com cúspides ordinárias;

(ii) O conjunto de inflexões $I_p = 0$ possuem dois ramos, um suave e um com cúspide ordinária;

(iii) O conjunto de nível $f_p = 0$ possui um ramo com cúspide ordinária.

Demonstração. A singularidade de V_p é muito degenerada, assim, para obtermos os ramos de $V_p = 0$, usamos o Polígono de Newton. O polígono de Newton da função V_p contém os seguintes monômios

$$192b_3x^5 + 864b_3x^3y^3 + 648b_3xy^6 + 324b_2b_3y^8.$$

Como $b_3 \neq 0$, todos os termos necessariamente estão presentes, com possível exceção do último. Quando $b_2 = 0$, o último termo se anula, nesse caso, a curva parabólica (conjunto parabólico) é tangente à direção principal $x = 0$ na origem. Quando isso ocorre, o termo $e = 324b_3c_3y^9$, estará presente no polígono de Newton, a menos que $c_3 = 0$. Genericamente, $b_2 = c_3 = 0$ não ocorrerá na superfície M . Assim, o polígono de Newton possui os termos x^5 , x^3y^3 , xy^6 e, ou y^8 ou y^9 . Veja a Figura 9.

Vamos escrever a expressão acima como $g(x, y) = ax^5 + bx^3y^3 + cxy^6 + dy^8$, onde $a = 192b_3$, $b = 864b_3$, $c = 648b_3$ e $d = 324b_2b_3$ e consideramos o caso em que $d \neq 0$. Note que

a, b, c e $b^2 - 4ac = 248832b^4$ são todos diferentes de zero, já que estamos supondo $b_3 \neq 0$. A função V_p será, então, da forma $g+$ termos acima do polígono de Newton. Os últimos termos são combinações lineares de monômios $x^m y^n$ onde $3m + 2n > 15$ e $(m, n) \neq (0, 8)$. Primeiramente, fazemos um *blow-up* usando $x = ty$ de modo que a transformação de *blow-down* (transformação inversa do *blow-up*) seja $(t, y) \rightarrow (ty, y)$, e $y = 0$ seja o divisor excepcional. O resultado após cancelar y^5 é:

$$at^5 + bt^3y + cty^2 + dy^3 + \text{combinação linear de monômios } t^m y^{m+n-5}.$$

Observe que $m + n > 5$ para todos os monômios acima do polígono de Newton ($m + n > m + 2n/3 > 5$). Portanto, ao intersectar com $y = 0$, obtemos cinco pontos coincidentes na origem $t = y = 0$ (e não há pontos enviados ao infinito, ou seja, $y = tx$ não produz pontos no divisor excepcional, com $a \neq 0$).

Para o segundo *blow-up*, usamos $y = ut$, com transformação de *blow-down* $(t, u) \rightarrow (t, ut)$ e encontramos, após cancelar t^3 :

$$at^2 + but + cu^2 + du^3 + \text{combinação linear de monômios } u^{m+n-5} t^{2m+n-8},$$

e $2m + n - 8 > 0$ para todos os monômios acima do polígono de Newton. Isso intersecta com $t = 0$ em $cu^2 + du^3 = 0$, ou seja, uma cúspide na origem e um cruzamento transversal do eixo u em $u = -c/d$, já que $d \neq 0$. O cruzamento transversal nos fornece um ramo suave da curva resultante do *blow-up* $V_p = 0$, parametrizado por t , usando o teorema da função implícita, e ao fazer o *blow-down*, obtemos um dos ramos da curva $V_p = 0$, de fato, também um ramo suave. Nenhum outro ponto é obtido do *blow-up* alternativo $t = uy$.

Fazendo o *blow-up* na origem pela terceira vez, usando $t = uw$, com transformação de *blow-down* $(w, u) \rightarrow (uw, u)$, obtemos após cancelar u^2 :

$$aw^2 + bw + c + du + \text{combinação linear de monômios } u^{3m+2n-15} w^{2m+n-8},$$

e novamente $3m + 2n - 15 > 0$ para todos os pontos acima do polígono de Newton. Finalmente, essa curva se encontra com o divisor excepcional $u = 0$ em pontos distintos, já que $b^2 \neq 4ac$, cada um deles gera um cruzamento transversal de $u = 0$, de modo que os dois ramos da curva resultantes do *blow-up* podem ser parametrizados localmente por u , usando o teorema da função implícita. Podemos aplicar o *blow-down* para os dois ramos restantes (de fato, cúspides ordinárias) de $V_p = 0$.

Caso $b_2 = 0$, o coeficiente d se anula e assim, obtemos

$$aw^2 + bw + c + eu^2 + \text{combinação linear de monômios } u^{3m+2n-15} w^{2m+n-8},$$

e o resultado que obtemos segue inalterado.

□

Proposição 2.3.2. Considere $b_3 > 0$.

(i) A parametrização do ramo suave VP_1 do conjunto de vértice tem os seguintes 3-jatos:

$$- VP_1 : \left(-\frac{1}{2}b_2t^2 + \frac{b_2(b_1-3b_3)-c_3}{2}t^3, t \right).$$

Os dois ramos cuspidais do conjunto de vértices tem os seguintes 4-jatos:

$$- VP_2 : (x'_3t^3 - \frac{1}{2}b_2t^4, -t^2).$$

$$- VP_3 : (x''_3t^3 - \frac{1}{2}b_2t^4, -t^2).$$

$$2x'_3 = \sqrt{9 + 3\sqrt{3}\sqrt{b_3}}, \text{ e } 2x''_3 = \sqrt{9 - 3\sqrt{3}\sqrt{b_3}}.$$

(ii) Os ramos do conjunto de inflexões pode ser parametrizado por

$$- (3b_3t, -b_2t + \dots).$$

$$- \left(\frac{1}{2}\sqrt{3b_3}t^3 - \frac{3}{8}b_2t^4 + \dots, -t^2 \right).$$

(iii) Uma parametrização do conjunto de nível $f_p = 0$ possui o seguinte 5-jato

$$- \left(\sqrt{b_3}t^3 - \frac{1}{2}b_2t^4 + \frac{b_2^2+4b_1b_3-4c_4}{8\sqrt{b_3}}t^5, -t^2 \right).$$

Demonstração. Todas as parametrizações são obtidas pelo mesmo processo realizado na Proposição 2.1.2.

□

Observação: Se $b_3 < 0$, então na Proposição 2.3.2 usamos $y = t^2$ em vez de $y = -t^2$ e substituímos $\sqrt{b_3}$ por $\sqrt{-b_3}$ sempre que ocorrer. Os dois casos em (i) são, então, invertidos.

Comparando os coeficientes dos termos de t^3 dos ramos cuspidais em (i), (ii) e (iii), temos $\frac{1}{2\sqrt{3}b_3} < x'_3 < \sqrt{b_3} < x_3$. Concluimos que o ramo de $f_p = 0$ está sempre entre os dois ramos cuspidais do conjunto de vértices e também o ramo cuspidal do conjunto de inflexões está dentro dessas três cúspides, veja a Figura 10.

Portanto, cada curva de nível $f_p = k$ possui apenas três vértices, próximos à origem, para valores pequenos de k . Assim, quando k passa por 0, o número de vértices das curvas $f_p = k$ permanece inalterado, $3 \leftrightarrow 3$, como afirmado no Teorema 2.0.1. O número de inflexões não muda à medida que k passa por 0: cada curva $f = k$ possui duas inflexões próximas à origem. Portanto, a transição das inflexões é $2 \leftrightarrow 2$. Ver Figuras 11 e 12.

Proposição 2.3.3. A curvatura limite das curvas de nível $f_p = k$ é infinita à medida que $k \rightarrow 0$, nos vértices de qualquer um dos ramos do conjunto de vértices.

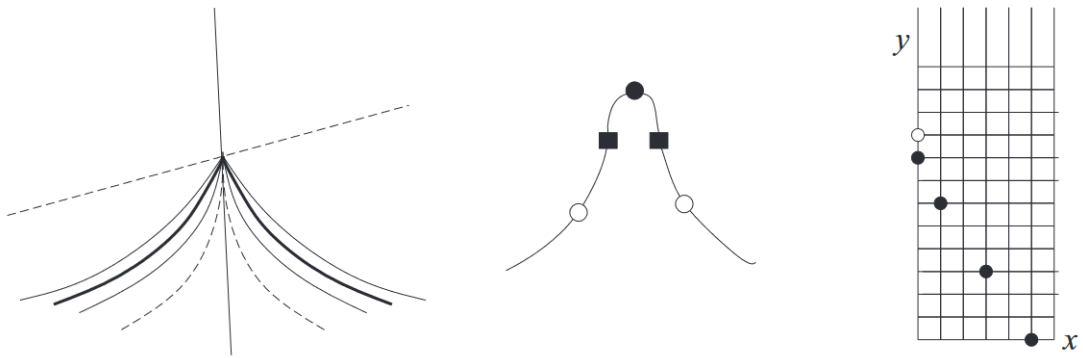


Figura 10 – Esquerda: o conjunto de vértices $V_p = 0$ (ramos com espessura fina), o conjunto de inflexões $I_p = 0$ (ramo tracejado) e o conjunto de zeros $f_p = 0$ (ramo de espessura grossa) para o caso parabólico. Centro: Um esboço da curva de nível $f_p = k$ para $k \neq 0$, representando os vértices (círculos) e inflexões (quadrados). Direita: O polígono de Newton para o caso parabólico

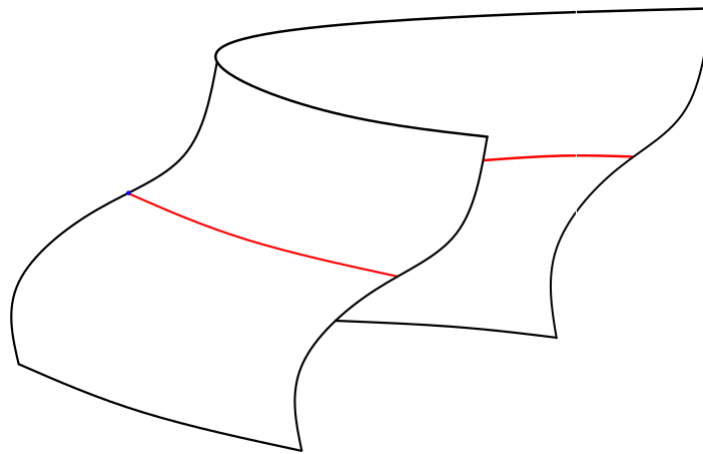


Figura 11 – $f = 0$ em vermelho com a origem sendo ponto parabólico em azul.

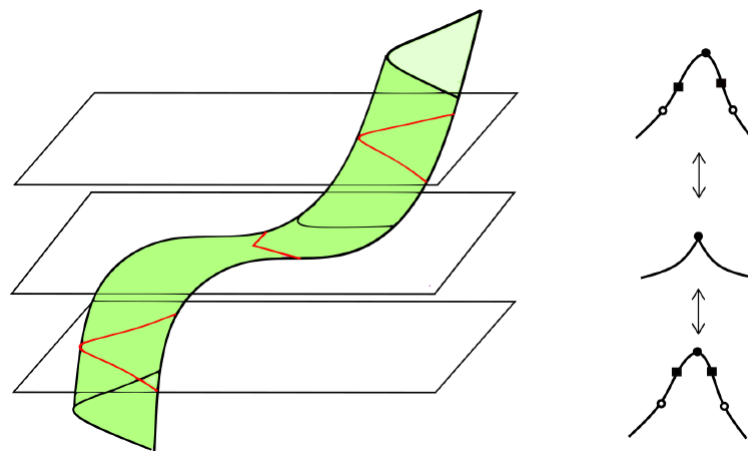


Figura 12 – Seções planas paralelas ao plano tangente do caso parabólico com os vértices indicados em pontos pretos.

Demonstração. Basta calcularmos o limite da função da equação (2.2) pelas curvas dadas pelos ramos de V_p parametrizadas em 2.3.2. De fato, usando $b_3 \neq 0$, obtemos que o ramo VP_1 $\kappa^2 \rightarrow t^{-4}$, enquanto para os ramos VP_2 e VP_3 , temos $\kappa^2 \rightarrow t^{-2}$. Assim, o limite é infinito para todos os casos. \square

2.4 Cúspide de Gauss não degenerada

Em uma cúspide de Gauss não degenerada, a superfície pode ser representada na forma de Monge (2.10), com

$$f_g(x, y) = x^2 + b_0x^3 + b_1x^2y + b_2xy^2 + c_0x^4 + c_1x^3y + c_2x^2y^2 + c_3xy^3 + c_4y^4 + \text{t.o.s.},$$

onde $b_2^2 - 4c_4 \neq 0$, ou seja, em que os termos x^2 , xy^2 e y^4 , são não-degenerados. Mudando o sinal de x se necessário, podemos supor que $b_2 > 0$. Consideramos os dois seguintes casos:

- Cúspides de Gauss elípticas: $b_2^2 - 4c_4 < 0$. Então, a curva $f_g = k$ é localmente uma curva fechada com $k > 0$ e vazio para $k < 0$ ($f_g \sim_{\mathcal{R}} x^2 + y^4$, singularidade A_3^+);
- Cúspides de Gauss hiperbólica: $b_2^2 - 4c_4 > 0$. Então, $f_g = k$ possui dois ramos disjuntos para $k \neq 0$ e dois ramos tangentes para $k = 0$. ($f_g \sim_{\mathcal{R}} x^2 - y^4$, singularidade A_3^-).

Note que a direção principal $x = 0$ é tangente à curva parabólica em uma cúspide de Gauss. Em uma vizinhança de uma cúspide de Gauss hiperbólica, a condição do vértice é dada por

$$V_g = 192(c_3 - b_1b_2)x^6 + 192(4c_4 - b_2^2)x^5y + \text{t.o.s.}$$

Como $b_2^2 - 4c_4 \neq 0$, o coeficiente de x^5y é não-nulo.

- Proposição 2.4.1.** (i) No caso de uma cúspide de Gauss elíptica, i.e., quando $b_2^2 - 4c_4 < 0$, existem dois ramos reais suaves no conjunto de vértices $V_g = 0$ passando pela origem, um deles é tangente ao eixo $x = 0$, e o outro tangente à $(b_2^2 - 4c_4)y = (c_3 - b_1b_2)x$.
- (ii) No caso em que $b_2^2 - 4c_4 > 0$ (quando temos um cúspide de Gauss hiperbólica), o conjunto de vértices, possui seis ramos reais suaves VG_i para $i = 1, \dots, 6$. Todos com exceção de VG_6 são tangentes à $x = 0$ enquanto VG_6 é tangente à $(b_2^2 - 4c_4)y = (c_3 - b_1b_2)x$.
- (iii) Se em adição à $b_2^2 - 4c_4 > 0$, temos a condição $b_2^2 - 8c_4 > 0$ satisfeita, então o conjunto de inflexões possui três ramos suaves, enquanto, se $b_2^2 - 8c_4 < 0$, então existe apenas um ramo suave.

Demonstração. Provaremos o número de ramos afirmado a partir do polígono de Newton da mesma forma que na prova da Proposição 2.3.1. O polígono de Newton para V_g é ilustrado na Figura 13. Os termos no polígono de Newton são:

$$192(c_3 - b_1b_2)x^6 - 192(b_2^2 - 4c_4)x^5y - 480b_2(b_2^2 - 4c_4)x^4y^3$$

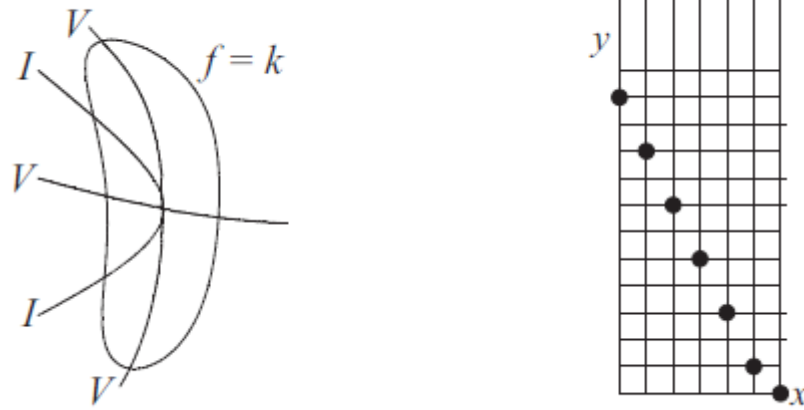


Figura 13 – Esquerda: Vértices e pontos de inflexão no caso de uma cúspide de Gauss elíptica : as curvas marcadas como V são o conjunto de vértices, aquelas marcadas como I são o conjunto de pontos de inflexão, e $f_g = k$ é uma curva de nível de f_g . Conforme k aumenta passando por 0, a curva passa do conjunto vazio para uma curva com quatro vértices e dois pontos de inflexão. Direita: O polígono de Newton para uma cúspide de Gauss hiperbólica.

$$-48(b_2^2 - 4c_4)(7b_2^2 + 12c_4)x^3y^5 - 24b_2(b_2^2 - 4c_4)(b_2^2 + 36c_4)x^2y^7 \\ + 24(b_2^2 - 4c_4)(b_4^2 - 10b_2c_4 - 16c_4^2)xy^9 + 24b_2c_4(b_2^2 - 4c_4)(b_2^2 - 8c_4)y^{11}.$$

Ignorando o primeiro termo e em seguida cancelando o y , os termos restantes formam um polinômio quártico em x e y^2 que tem raízes distintas. De fato, esse polinômio se fatora como

$$(b_2^2 - 4c_4)(2x + b_2y^2)(x^2 + b_2xy^2 + c_4y^4)(4x^2 + 4b_2xy^2 - (b_2^2 - 8c_4)y^4).$$

O discriminante é uma constante não nula multiplicada por $(b_2^2 - 4c_4)^{18}$, e o número de raízes reais é um para uma cúspide elíptica e cinco para uma cúspide hiperbólica. Dois *blow-ups* $x = ty$ e $y = tu$ são suficientes para encontrar os ramos reais do ponto singular $V_g = 0$.

Podemos parametrizar os ramos do conjunto de inflexões da seguinte forma. Substituindo $x = x_1y + x_2y^2 + \dots$ na condição de inflexão $I_g = 0$, obtemos a solução $x_1 = 0$, implicando que os ramos de inflexão são todos tangentes ao eixo y . Então, o coeficiente z de y^2 é uma solução de uma equação cúbica $I(z) = 0$, onde

$$I(z) = -4c_4(b_2^2 - 8c_4) - 6b_2(b_2^2 - 8c_4)z + 48c_4z^2 + 8b_2z^3. \quad (2.15)$$

com discriminante $D = 6912(b_2^2 - 8c_4)(b_2^2 - 4c_4)^4$. Portanto, $D > 0$, fornecendo 3 soluções para z , se e somente se $b_2^2 - 8c_4 > 0$. No entanto, se $b_2^2 < 4c_4$ (cúspide elíptica), então $c_4 > 0$, o que implica que $b_2^2 < 8c_4$ e o caso com 3 soluções se aplica apenas a cúspides hiperbólicas.

□

Proposição 2.4.2. Quando $b_2^2 - 4c_4 > 0$ (cúspide de Gauss hiperbólica), os ramos do conjunto de vértices, tangentes à direção principal $x = 0$, podem ser parametrizados da seguinte forma:

$$\begin{aligned} VG_1 : x &= -\frac{1}{2} \left(b_2 - \sqrt{b_2^2 - 4c_4} \right) y^2 + \text{t.o.s.}, & VG_2 : x &= -\frac{1}{2} \left(b_2 + \sqrt{b_2^2 - 4c_4} \right) y^2 + \text{t.o.s.}, \\ VG_3 : x &= -\frac{1}{2} \left(b_2 - \sqrt{2b_2^2 - 8c_4} \right) y^2 + \text{t.o.s.}, & VG_4 : x &= -\frac{1}{2} \left(b_2 + \sqrt{2b_2^2 - 8c_4} \right) y^2 + \text{t.o.s.} \\ VG_5 : x &= -\frac{1}{2} b_2 y^2 - \frac{1}{2} (c_3 - b_1 b_2) y^3 + \text{t.o.s.} \end{aligned}$$

O conjunto de nível $f_g = 0$ possui dois ramos que podem ser parametrizados da seguinte forma:

$$FG_1 : x = -\frac{1}{2} \left(b_2 - \sqrt{b_2^2 - 4c_4} \right) y^2 + \text{t.o.s.}, \quad FG_2 : x = -\frac{1}{2} \left(b_2 + \sqrt{b_2^2 - 4c_4} \right) y^2 + \text{t.o.s.}$$

Demonstração. Uma vez que sabemos o número de ramos suaves, podemos encontrar as suas expansões de Taylor usando o mesmo método de substituição de séries de potências que foi usado nos casos anteriores como na Proposição 2.1.2. \square

Esta Proposição implica, em particular, que o ramo VG_1 do vértice e o ramo FG_1 de $f_g = 0$ têm pelo menos contato de ordem 3 na origem. O mesmo ocorre para VG_2 e FG_2 . As condições para contato de ordem 4 são apresentadas abaixo e como as cúspides de Gauss são isoladas em uma superfície genérica, apenas os sinais das expressões abaixo serão importantes.

Proposição 2.4.3. O ramo de vértices VG_1 e o ramo FG_1 de $f_g = 0$ têm pelo menos contato de 4 pontos na origem se e somente se $D_1 = 0$, onde

$$D_1 = -b_1 b_2^2 + b_1 b_2 \sqrt{b_2^2 - 4c_4} + 2b_1 c_4 + b_2 c_3 - c_3 \sqrt{b_2^2 - 4c_4} - 2d_5.$$

O mesmo vale para VG_2 e FG_2 se e somente se $D_2 = 0$, onde

$$D_2 = b_1 b_2^2 + b_1 b_2 \sqrt{b_2^2 - 4c_4} - 2b_1 c_4 - b_2 c_3 - c_3 \sqrt{b_2^2 - 4c_4} + 2d_5.$$

Demonstração. A prova é similar a demonstração da Proposição 2.1.4. Considere as parametrizações γ do ramo VG_1 e a mesma função F possui o ramo FG_1 correspondente como conjunto de zeros utilizadas na demonstração da Proposição 2.1.3. Para essas curvas possuírem pelo menos contato de ordem 4 na origem, é preciso que $g^{(k)}(0, 0) = 0$, $k = 0, 1, 2, 3$. Como já vimos na Proposição 2.1.3, a condição $g^{(k)}(0, 0) = 0$ para $k = 0, 1, 2$ sempre ocorre. Para que essa condição ocorra para $k = 3$, é preciso que $0 = g^{(3)}(0, 0) = D_1$, donde obtemos a primeira equação. De forma análoga, temos para VG_2 e o ramo FG_2 correspondente a condição (2.12). \square

2.4.1 Cúspide de Gauss hiperbólica

Os sinais dos D_i determinam as posições relativas dos ramos VG_1 e FG_1 . Mais precisamente, $D_1 > 0$ se e somente se, acima do eixo- x , a curva VG_1 está à direita de FG_1 . (Abaixo

do eixo- x , isso é invertido, já que eles têm contato de ordem 3 na origem). Da mesma forma, $D_2 > 0$ se e somente se, acima do eixo- x , VG_2 está à direita de FG_2 . Note que tanto $D_1 > 0$ quanto $D_2 > 0$ podem ser considerados como condições sobre o coeficiente d_5 .

Sejam x_{2i} , $i = 1, \dots, 5$, os coeficientes de y^2 na expansão do ramo VG_i conforme a Proposição 2.4.2, e seja z_0 ou $z_1 < z_2 < z_3$ os valores reais das raízes da equação (2.15). Assim, os z_i são os coeficientes de y^2 na expansão dos ramos do conjunto de inflexões: $x = z_i y^2 + \dots$. Lembramos que também assumimos que $b^2 > 0$.

Proposição 2.4.4. (a) Suponha que $b_2^2 - 8c_4 > 0$.

(1) Se $c_4 > 0$, então $x_{24} < x_{22} < z_1 < x_{25} < x_{21} < z_2 < 0 < x_{23} < z_3$.

(2) Se $c_4 < 0$, então $x_{24} < x_{22} < z_1 < x_{25} < 0 < z_2 < x_{21} < x_{23} < z_3$.

(b) Suponha que $b_2^2 - 8c_4 < 0$. Então $x_{24} < x_{22} < z_0 < x_{25} < x_{21} < x_{23} < 0$.

Demonstração. O resultado segue a partir das expressões da Proposição 2.4.2 e do sinal do polinômio $I(z)$ em (2.15) para os valores de x_{2i} . \square

Essas situações estão ilustradas nas figuras 14, 15 e 16. O sinal da derivada da curvatura é determinado como no caso hiperbólico; isso determina o padrão de máximos e mínimos da curvatura. As afirmações do Teorema 2.0.1 caso (GGH), seguem a partir dos diagramas dessa figuras.

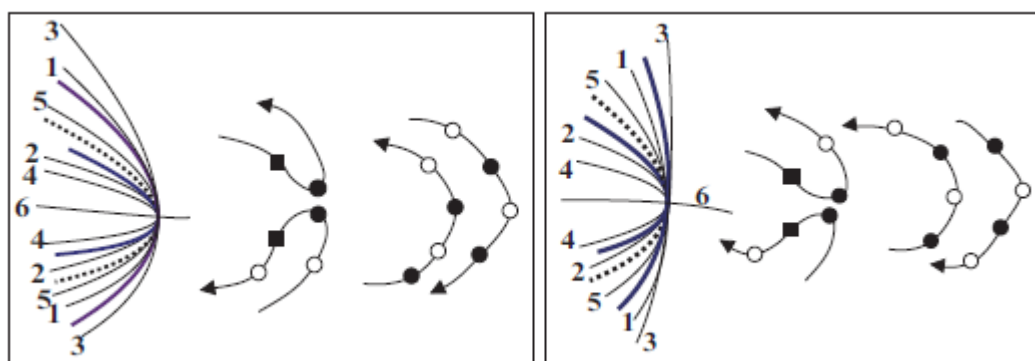


Figura 14 – Esboço do caso da cúspide de Gauss hiperbólica, $b^2 > 0$, $4c^4 < b^2 < 8c^4$ (portanto $c^4 > 0$); veja a Proposição 2.4.1. A figura à esquerda tem D_1 e D_2 conforme a Proposição 2.4.3, com o mesmo sinal (negativo), e a figura à direita com sinais opostos ($D_1 > 0$). As curvas escuras são $f = 0$ à esquerda de cada figura e $f = k$ para os dois sinais de k pequeno e não nulo à direita. As curvas claras são os VG_i da Proposição 2.4.2, rotulados por i , e a curva pontilhada é o único ramo do conjunto de inflexões. Como antes, as orientações estão indicadas, os pontos fechados são máximos, os pontos abertos são mínimos de curvatura e os quadrados são inflexões.

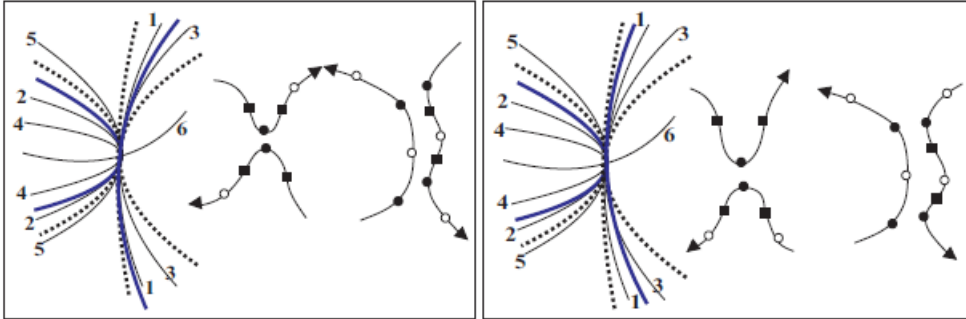


Figura 15 – Esboço do caso da cúspide de Gauss hiperbólica, $b^2 > 0$, $c^4 < 0$ (portanto, $b^2 > 8c^4$); veja a Proposição 2.4.1. A figura à esquerda tem D_1 e D_2 conforme a Proposição 2.4.3, com o mesmo sinal (negativo), e a figura à direita com sinais opostos ($D_1 > 0$). As curvas escuras são $f = 0$ à esquerda de cada figura e $f = k$ para os dois sinais de k suficientemente pequeno e não nulo à direita. As curvas claras são os VG_i da Proposição 2.4.2, rotuladas por i , e as curvas pontilhadas são os três ramos do conjunto de inflexões. Assim como anteriormente, as orientações estão indicadas, os pontos fechados são máximos, os pontos abertos são mínimos de curvatura e os quadrados são inflexões.

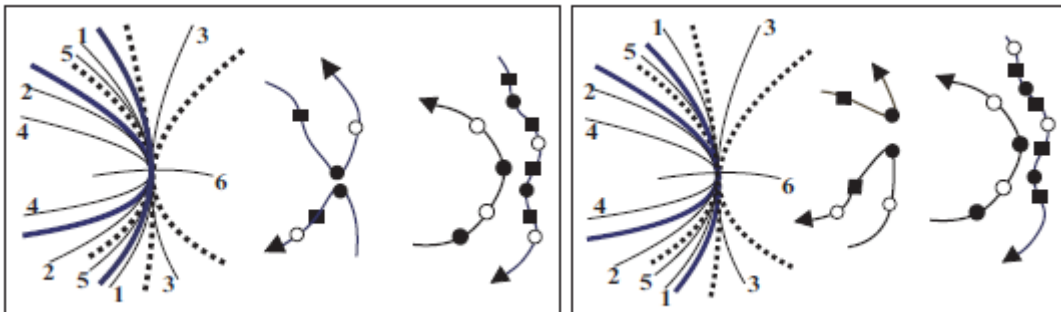


Figura 16 – Análogo à Figura 15, para esse caso, $b^2 > 0$, $b^2 > 8c^4$, $c^4 > 0$; veja a Proposição 2.4.1.

DEFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS DE CURVAS PLANAS COM SINGULARIDADE MORSE

Neste capítulo, apresentamos os resultados obtidos sobre as deformações geométricas de curvas planas com singularidade Morse. Introduzimos inicialmente o conceito de *FRS*-equivalência de famílias de germes de curvas planas e o conceito de deformação geométrica genérica.

Provamos que a família $f(x, y) + t = 0$ é genericamente uma deformação geométrica genérica do germe da curva $f(x, y) = 0$ quando f possui uma singularidade Morse.

3.1 FRS-equivalência

Difeomorfismos não preservam a geometria de curvas como os pontos de inflexões e vértices. Portanto, não podemos usar o grupo \mathcal{R} para estudar as deformações quando estamos interessados nessas propriedades geométricas da curva $f = 0$.

Assim, descrevemos um método, introduzido em (SALARINOUGHABI, 2016) para curvas parametrizadas, para estudar a geometria de deformações de curvas planas singulares $f = 0$ com $f \in \mathcal{M}_2$, denominado **FRS-deformações** de curvas planas. Quando a curva é regular, o método é chamado *FR*-deformações.

Considere dois germes de deformações a m parâmetros, f_s e g_u , de um germe $f \in \mathcal{M}_2$, que induzem no espaço de parâmetros $(\mathbb{R}^m, 0)$ as estratificações S_1 e S_2 . As deformações f_s e g_u são **FRS-equivalentes** se existir um germe de homeomorfismo $k : (\mathbb{R}^m, (S_1, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^m, (S_2, 0))$, de modo que:

- (i) f_s é \mathcal{R} -equivalente a $g_{k(s)}$ em cada estrato de S_1 ;
- (ii) $f_s = 0$ e $g_{k(s)} = 0$ possuem o mesmo número de inflexões e vértices em cada estrato;

- (iii) A posição relativa das singularidades, dos pontos de inflexões e dos pontos de vértices em $f_s = 0$ e $g_{k(s)} = 0$ é a mesma em cada estrato.

Também pode ser definida a noção de *FRS*-equivalência de deformações de uma curva plana com números distintos de parâmetros. Uma deformação a m parâmetros f_s e uma deformação a n parâmetros g_u (onde $n > m$) de um germe $f \in \mathcal{M}_2$ são *FRS*-equivalentes se \tilde{f}_s e g_u forem *FRS*-equivalentes, onde \tilde{f}_s é a família a n parâmetros dada por:

$$\tilde{f}_s(x, s_1, \dots, s_m, \tilde{s}_{m+1}, \dots, \tilde{s}_n) = f_s(x, s_1, \dots, s_m).$$

Definimos a **aplicação de Monge-Taylor**, por $\phi : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow \mathbb{R}^6$,

$$\phi(x, y, t) = \left(F(x, y, t), F_x(x, y, t), F_y(x, y, t), \frac{F_{xx}(x, y, t)}{2}, F_{xy}(x, y, t), \frac{F_{yy}(x, y, t)}{2} \right).$$

Dizemos que um germe de uma deformação a m -parâmetros f_s de um germe $f \in \mathcal{M}_2$ é ***FRS*-genérica** ou geométrica genérica se a família de aplicações de Monge-Taylor ϕ_{f_s} associada a f_s é transversal a estratificação S em $j^k \phi_{f_s}(0, 0, 0)$. O objetivo é mostrar que quaisquer deformações *FRS*-genéricas de f são *FRS*-equivalentes. Assim, teremos um modelo de uma deformação geométrica genérica.

3.2 Estratificação do espaço dos k -jatos

Para estudarmos as *FRS*-deformações de acordo com a definição anterior, devemos estratificar o espaço dos k -jatos. Vamos definir a estratificação seguindo (SALARINOGHABI; TARI, 2017; SALARINOGHABI; HASEGAWA; TARI, 2023; SINHA; TARI, 2013).

Sejam $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ um germe de função suave, com

$$f(x, y) = a_{10}x + a_{11}y + a_{20}x^2 + a_{21}xy + a_{22}y^2 + a_{30}x^3 + a_{31}x^2y + a_{32}xy^2 + a_{33}y^3 + O(4),$$

e a deformação de f , $F : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ com

$$F(x, y, t) = A_{00}(t) + A_{10}(t)x + A_{11}(t)y + A_{20}(t)x^2 + A_{21}(t)xy + A_{22}(t)y^2 + A_{30}(t)x^3 + A_{31}(t)x^2y + A_{32}(t)xy^2 + A_{33}(t)y^3 + O(4).$$

Como o espaço dos k -jatos é um espaço vetorial, o identificamos como $J^k(2, 1) \sim \mathbb{R}^{(k+1)(k+2)/2}$ de modo que f é relacionada com o ponto $(a_{00}, a_{10}, a_{11}, a_{20}, \dots, a_{kk})$. Estratificamos o subespaço vetorial de k -jatos que fixam a origem

$$\mathcal{V} = \{(a_{00}, a_{10}, a_{11}, a_{20}, \dots, a_{kk}) \mid a_{00} = 0\} \subset J^k(2, 1).$$

Suponha que $f = 0$ seja uma curva regular com $f_y(0, 0) \neq 0$. Usando o teorema da função implícita, temos $f(x, h(x)) = 0$ com h um germe de função suave. Assim, a curvatura é dada por

(2.7) e sua derivada por (2.9). Logo, para um t fixado, a curva $F(x, y, t) = 0$ possui uma inflexão na origem se, e somente se,

$$I_f = f_{xx}f_y^2 - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}f_x^2 = 0.$$

Portanto, o estrato de inflexões no espaço dos k -jatos é dado por

$$I = \{(a_{00}, a_{10}, a_{11}, a_{20}, \dots, a_{kk}) \mid a_{20}a_{11}^2 - a_{21}a_{11}a_{10} + a_{22}a_{10}^2 = 0\}.$$

Da mesma forma, para t fixado, a curva $F(x, y, t) = 0$ possui um vértice na origem quando

$$\begin{aligned} V_f = & (f_x^2 + f_y^2) (-f_y^3 f_{xxx} + 3f_x f_y^2 f_{xxy} - 3f_x^2 f_y f_{xyy} + f_x^3 f_{yyy}) \\ & + 3f_x f_y (f_y^2 f_{xx}^2 + (f_x^2 - f_y^2) f_{xx} f_{yy} - f_x^2 f_{yy}^2) + 6f_x f_y f_{xy}^2 (f_x^2 - f_y^2) \\ & + 3f_{xy} (f_{xx} f_y^4 - 3f_x^2 f_y^2 (f_{xx} - f_{yy}) - f_{yy} f_x^4) = 0. \end{aligned}$$

Assim, o estrato de vértices no espaço dos k -jatos é

$$\begin{aligned} V = & \{(a_{00}, a_{10}, a_{11}, a_{20}, \dots, a_{kk}) \mid 3a_{10}a_{11} (4a_{20}a_{22} (a_{10}^2 - a_{11}^2) - 4a_{10}^2 a_{22}^2 + 4a_{11}^2 a_{20}^2) \\ & + 6a_{10}a_{11} a_{21}^2 (a_{10}^2 - a_{11}^2) + 3a_{21} (-2a_{10}^4 a_{22} - 3a_{10}^2 a_{11}^2 (2a_{20} - 2a_{22}) + 2a_{11}^4 a_{20}) \\ & + (a_{10}^2 + a_{11}^2) (6a_{10}^3 a_{33} - 6a_{10}^2 a_{11} a_{32} + 6a_{10} a_{11}^2 a_{31} - 6a_{11}^3 a_{30}) = 0\}. \end{aligned}$$

Como as inflexões de ordem 2 são definidas onde a curvatura e sua derivada se anulam, temos que seu estrato é dado por $I(2) = I \cap V$. Realizando algumas simplificações vemos que

$$\begin{aligned} I(2) = & \{(a_{00}, a_{10}, a_{11}, a_{20}, \dots, a_{kk}) \mid a_{20}a_{11}^2 - a_{21}a_{11}a_{10} + a_{22}a_{10}^2 = 0 \text{ e} \\ & (a_{10}^2 + a_{11}^2)(-a_{11}^3 a_{30} + a_{10}a_{11}^2 a_{31} - a_{10}^2 a_{11} a_{32} + a_{10}^3 a_{33}) = 0\}. \end{aligned}$$

Além disso, precisamos obter o estrato de vértices de ordem 2. Derivando κ' , dada por (2.3), obtemos

$$\begin{aligned} \kappa''(x) = & \frac{1}{(h'(x)^2 + 1)^{7/2}} \left(h^{(4)}(x) - 3h''(x)^3 + h^{(4)}(x)h'(x)^4 + 2h^{(4)}(x)h'(x)^2 \right. \\ & \left. + 12h'(x)^2 h''(x)^3 - 9h'''(x)h'(x)^3 h''(x) - 9h^{(3)}(x)h'(x)h''(x) \right). \end{aligned}$$

As expressões das derivadas h' , h'' e h''' em função das derivadas de f são dadas por (2.4), (2.5) e (2.6), respectivamente. Derivando h''' , obtemos

$$\begin{aligned} h^{(4)} = & \left(\frac{1}{f_y^7} \right) \left(-3(4f_y^5 + 1)f_{yy}f_x^4 - 6f_y f_{yy}^2 (f_y(2f_y^5 + 1)f_{xx} - 2(4f_y^5 + 1)f_x f_{xy})f_x^2 \right. \\ & + f_{yy}(-3f_{xx}^2 f_y^4 - 12(f_y^5 + 1)f_x^3 f_{xxy} f_y^2 + 6f_x^2 (f_y(2f_y^5 + 1)f_{xxy} - 2(5f_y^5 + 1)f_{xy}^2) f_y^2 \\ & + 2(2f_y^5 + 3)f_{yyy} f_x^4 f_y + f_x(-4f_{xxx} f_y^9 + 24f_{xy} f_{xx} f_y^8 + 12f_{xy} f_{xx} f_y^3 + 4) \\ & \left. + f_y(4f_{xy} f_{xxx} f_y^9 - 12f_{xy} (f_{xy} f_{xx} + f_x f_{xxy}) f_y^8 + 12f_x f_{xy} (2f_{xy}^2 + f_x f_{xxy}) f_y^7 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -4f_{yyy}f_x^3f_{xy}f_y^6 - f_{xxx}f_y^5 + (6f_{xx}f_{xxy} + 4f_xf_{xxy})f_y^4 - 6f_x(2f_{xyy}f_{xx} \\
& + 2f_{xy}f_{xxy} + f_xf_{xxy})f_y^3 + 2f_x^2(12f_{xy}f_{xyy} + 2f_xf_{xyyy} + 3f_{yyy}f_{xx})f_y^2 \\
& - f_x^3(f_{yyyy}f_x + 12f_{yyy}f_{xy})f_y - 4f_{xy}).
\end{aligned}$$

Substituindo as derivadas de h em κ'' , obtemos

$$\begin{aligned}
\kappa'' = & \frac{1}{f_y^5(f_y^2 + f_x^2)^3 \sqrt{\frac{f_x^2}{f_y^2} + 1}} \left(3(f_y^2 - 4f_x^2)(f_{yy}f_x^2 + f_y(f_yf_{xx} - 2f_xf_{xy}))^3 \right. \\
& + 9f_x(f_y^2 + f_x^2)(-3f_{yy}^2f_x^3 + 3f_yf_{yy}(f_xf_{xy} - f_yf_{xx}))f_x \\
& + f_y(f_{yyy}f_x^3 + f_y(3f_{xyy}f_x^2 + 3(2f_{xy}^2 + f_yf_{xxy}))f_x \\
& \left. + f_y(f_yf_{xxx} - 3f_{xy}f_{xx})) \right) (f_{yy}f_x^2 + f_y(f_yf_{xx} - 2f_xf_{xy})) \\
& + (f_y^2 + f_x^2)^2 (9f_{yy}^3f_x^4 + 6f_yf_{yy}^2(f_yf_{xx} - 2f_xf_{xy}))f_x^2 \\
& - f_yf_{yy}(f_y((3f_{xx}^2 + 4f_xf_{xxx})f_y^2 + 6f_x(f_xf_{xxy} - 2f_{xy}f_{xx}))f_y \\
& + 24f_x^2(f_{xy}^2 + f_xf_{xyy})) - 2f_{yyy}f_x^4) + f_y^2(-f_{yyyy}f_x^4 + 2f_{yyy}(3f_yf_{xx} - 4f_xf_{xy}))f_x^2 \\
& + f_y(4f_{xyyy}f_x^3 + 6(6f_{xy}f_{xyy} - f_yf_{xxyy}))f_x^2 + 4(6f_{xy}^3 - 3f_yf_{xyy}f_{xx} + f_y^2f_{xxy})f_x \\
& \left. + f_y(-f_{xxx}f_y^2 + 6f_{xx}f_{xxy}f_y + 4f_{xy}f_{xxx}f_y - 12f_{xy}^2f_{xx})) \right).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
V(2) = & V \cap \{ (a_{00}, a_{10}, a_{11}, a_{20}, \dots, a_{kk}) \mid 12 \left(2(a_{11}^2 - 4a_{10}^2)(a_{10}^2a_{22} - a_{10}a_{11}a_{21} + a_{11}^2a_{20})^3 \right. \\
& + 9a_{10}(a_{10}^2 + a_{11}^2)(a_{10}^2a_{22} - a_{10}a_{11}a_{21} + a_{11}^2a_{20})(-2a_{10}^3a_{22}^2 + a_{10}^2a_{11}(a_{10}a_{33} + a_{21}a_{22}) \\
& + a_{11}^3(a_{10}a_{31} - a_{20}a_{21}) + a_{10}a_{11}^2(a_{10}a_{32} - 2a_{20}a_{22} + a_{21}^2) + a_{11}^4a_{30}) \\
& + 2(a_{10}^2 + a_{11}^2)^2(3a_{10}^4a_{22}^3 + a_{10}^3a_{11}a_{22}(a_{10}a_{33} - 2a_{21}a_{22}) - a_{10}^2a_{11}^2(a_{10}^2a_{44} + 2a_{10}a_{21}a_{33} \\
& + 4a_{10}a_{22}a_{32} - 2a_{20}a_{22}^2 + 2a_{21}^2a_{22}) + a_{11}^5(a_{10}a_{41} + a_{20}a_{31} + a_{21}a_{30}) \\
& - a_{11}^4(a_{20}(2a_{10}a_{32} + a_{21}^2) + a_{10}(a_{10}a_{42} + 2a_{22}a_{30}) + a_{20}^2a_{22}) - a_{11}^6a_{40} \\
& \left. \left. + a_{10}a_{11}^3(a_{21}(3a_{10}a_{32} + 2a_{20}a_{22}) + a_{10}(a_{10}a_{43} + 3a_{20}a_{33} - a_{22}a_{31}) + a_{21}^3) \right) \right) = 0 \}.
\end{aligned}$$

Por fim, o estrato singular é dado por

$$S = \{(a_{00}, a_{10}, a_{11}, a_{20}, \dots, a_{kk}) \mid a_{10} = a_{11} = 0\}.$$

Note que $S \subset I$ e $S \subset V$.

3.3 Curvas com singularidade Morse

Nesta seção vamos considerar o caso em que f possui uma singularidade do tipo Morse na origem e obter um modelo para as deformações geométricas genéricas do germe da curva $f(x, y) = 0$.

3.3.1 Estratos do espaço dos k -jatos

Se f possui uma singularidade do tipo Morse na origem, então $a_{21}^2 - 4a_{20}a_{22} \neq 0$. Assim, a_{20} , a_{21} e a_{22} não podem ser simultaneamente nulos. Suponha, sem perda de generalidade, que $a_{22} \neq 0$.

Considerando a_{20} , a_{21} e a_{22} fixos, vemos que o estrato das inflexões é dado por $g(a_{10}, a_{11}) = 0$, onde g é o polinômio homogêneo de grau 2 dado por

$$g(a_{10}, a_{11}) = a_{20}a_{11}^2 - a_{21}a_{10}a_{11} + a_{22}a_{10}^2.$$

Logo, quando $g(a_{10}, a_{11}) = 0$, temos que

$$a_{10}^2 - \frac{a_{21}a_{11}a_{10}}{a_{22}} + \frac{a_{20}a_{11}^2}{a_{22}} = 0.$$

Completando quadrado na expressão acima, concluímos que

$$a_{10}^2 - \frac{2a_{21}a_{11}a_{10}}{2a_{22}} + \left(\frac{a_{21}a_{11}}{2a_{22}}\right)^2 - \left(\frac{a_{21}a_{11}}{2a_{22}}\right)^2 + \frac{a_{20}a_{11}^2}{a_{22}} = 0.$$

Assim,

$$\left(a_{10} - \frac{a_{21}}{2a_{22}}a_{11}\right)^2 + \left(\frac{a_{21}^2 - 4a_{22}a_{20}}{4a_{22}^2}\right)a_{11}^2 = 0. \quad (3.1)$$

Suponha que $a_{21}^2 - 4a_{20}a_{22} > 0$, ou seja, f possui uma singularidade A_1^+ na origem. Considere o germe de difeomorfismo $h : (\mathbb{R}^5, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^5, 0)$ dado por

$$h(a_{10}, a_{11}, a_{20}, a_{21}, a_{22}) = \left(a_{10} - \left(\frac{a_{21}a_{11}}{2a_{22}}\right), a_{11}\sqrt{\left(\frac{a_{21}^2 - 4a_{22}a_{20}}{4a_{22}^2}\right)}, a_{20}, a_{21}, a_{22}\right).$$

Logo,

$$(g \circ h)(a_{10}, a_{11}, a_{20}, a_{21}, a_{22}) = a_{10}^2 + a_{11}^2.$$

Como o difeomorfismo h fixa o estrato S , concluímos que I deve ser exatamente igual à S .

Por outro lado, caso $a_{21}^2 - 4a_{22}a_{20} < 0$, ou seja, f possui uma singularidade A_1^- na origem, reescrevemos (3.1) da seguinte maneira:

$$\left(a_{10} - \frac{a_{21}}{2a_{22}}a_{11}\right)^2 - \left(\frac{-(a_{21}^2 - 4a_{22}a_{20})}{4a_{22}^2}\right)a_{11}^2 = 0.$$

Assim, considere o germe de $h : (\mathbb{R}^5, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^5, 0)$ dado por

$$h(a_{10}, a_{11}, a_{20}, a_{21}, a_{22}) = \left(a_{10} - \left(\frac{a_{21}a_{11}}{2a_{22}}\right), a_{11}\sqrt{\left(\frac{-(a_{21}^2 - 4a_{22}a_{20})}{4a_{22}^2}\right)}, a_{20}, a_{21}, a_{22}\right).$$

Portanto,

$$(g \circ h)(a_{10}, a_{11}, a_{20}, a_{21}, a_{22}) = a_{10}^2 - a_{11}^2.$$

Note que o difeomorfismo h fixa o estrato S , assim, o estrato I é união de duas hipersuperfícies se intersectando transversalmente ao longo de S .

Para estudar o estrato V , considere o polinômio g_1 nas variáveis a_{10} e a_{11} dado por

$$\begin{aligned} g_1(a_{10}, a_{11}) &= 3a_{10}a_{11} (4a_{20}a_{22} (a_{10}^2 - a_{11}^2) - 4a_{10}^2a_{22}^2 + 4a_{11}^2a_{20}^2) + 6a_{10}a_{11}a_{21}^2 (a_{10}^2 - a_{11}^2) \\ &\quad + 3a_{21} (-2a_{10}^4a_{22} - 3a_{10}^2a_{11}^2(2a_{20} - 2a_{22}) + 2a_{11}^4a_{20}) \\ &\quad + (a_{10}^2 + a_{11}^2) (6a_{10}^3a_{33} - 6a_{10}^2a_{11}a_{32} + 6a_{10}a_{11}^2a_{31} - 6a_{11}^3a_{30}) \\ &= 6a_{10}^5a_{33} - 6a_{10}^4a_{11}a_{32} - 6a_{10}^4a_{21}a_{22} + 6a_{10}^3a_{11}^2a_{31} \\ &\quad + 6a_{10}^3a_{11}^2a_{33} + 12a_{10}^3a_{11}a_{20}a_{22} + 6a_{10}^3a_{11}a_{21}^2 - 12a_{10}^3a_{11}a_{22}^2 - 6a_{10}^2a_{11}^3a_{30} \\ &\quad - 6a_{10}^2a_{11}^3a_{32} - 18a_{10}^2a_{11}^2a_{20}a_{21} + 18a_{10}^2a_{11}^2a_{21}a_{22} + 6a_{10}a_{11}^4a_{31} + 12a_{10}a_{11}^3a_{20}^2 \\ &\quad - 12a_{10}a_{11}^3a_{20}a_{22} - 6a_{10}a_{11}^3a_{21}^2 - 6a_{11}^5a_{30} + 6a_{11}^4a_{20}a_{21}. \end{aligned}$$

Note que o estrato V é definido pelos zeros desse polinômio. O 4-jato desse polinômio com relação às variáveis a_{10} e a_{11} é

$$\begin{aligned} l &= -a_{10}^4a_{21}a_{22} + 2a_{10}^3a_{11}a_{20}a_{22} + a_{10}^3a_{11}a_{21}^2 - 2a_{10}^3a_{11}a_{22}^2 \\ &\quad - 3a_{10}^2a_{11}^2a_{20}a_{21} + 3a_{10}^2a_{11}^2a_{21}a_{22} + 2a_{10}a_{11}^3a_{20}^2 \\ &\quad - 2a_{10}a_{11}^3a_{20}a_{22} - a_{10}a_{11}^3a_{21}^2 + a_{11}^4a_{20}a_{21}. \end{aligned}$$

De acordo com a classificação de Arnold (ver (ARNOLD; GUSEIN-ZADE; VARCHENKO, 1985)), um germe de aplicação possui uma singularidade do tipo X_9 quando for \mathcal{R} -equivalente à $x^4 + ax^2y^2 + y^4$, com $a \neq 4$. Esta singularidade é 4- \mathcal{R} -determinada e para que g_1 tenha uma singularidade X_9 na origem basta que o discriminante de l em relação a a_{10} , denotado por $\Delta(l)$, seja não nulo. Assim, temos que

$$\Delta(l) = -4a_{11}^{12} (a_{21}^2 - 4a_{20}a_{22})^3 ((a_{20} - a_{22})^2 + a_{21}^2)^3,$$

ou seja, $\Delta(l) = 0$ quando $a_{21}^2 - 4a_{20}a_{22} = 0$ ou quando $a_{20} = a_{22}$ e $a_{21} = 0$. Como f possui uma singularidade de Morse, então $a_{21}^2 - 4a_{20}a_{22} \neq 0$. Vamos supor que $a_{20} \neq a_{22}$ e $a_{21} \neq 0$, ou seja, que o ponto é não umbílico. Assim, $\Delta(l) \neq 0$ e h possui uma singularidade X_9 . Como tal singularidade é 4- \mathcal{R} -determinada, $g_1 \sim_{\mathcal{R}} l$.

Como o discriminante é não nulo, l não possui fatores lineares (reais) repetidos. Assim, $g_1 = 0$ será o estrato singular, ou difeomorfo a dois hiperplanos transversais em S ou difeomorfo a 4 hiperplanos transversais em S .

Note que

$$l = (a_{11}^2a_{20} - a_{10}a_{11}a_{21} + a_{10}^2a_{22})(2a_{10}a_{11}a_{20} - a_{10}^2a_{21} + a_{11}^2a_{21} - 2a_{10}a_{11}a_{22}).$$

Observe que o segundo fator é um polinômio homogêneo de grau 2 nas variáveis a_{10} e a_{11} com discriminante estritamente positivo ($(a_{20} - a_{22})^2 + a_{21}^2 > 0$), logo ele possui dois fatores lineares

reais distintos. Por outro lado, o primeiro fator de I também é um polinômio homogêneo de grau 2 nas variáveis a_{10} e a_{11} , porém, ele possui dois fatores lineares quando $a_{21}^2 - 4a_{20}a_{22} > 0$ (f possui uma singularidade A_1^-) e é irredutível quando $a_{21}^2 - 4a_{20}a_{22} < 0$ (f possui uma singularidade A_1^+).

Portanto, genericamente, se f possui uma singularidade A_1^- (resp. A_1^+), então V é difeomorfo a 4 (resp. 2) hiperplanos transversais em S .

Para determinar os estratos de inflexões de segunda ordem, calculamos os resultantes em relação à a_{10} entre as condições algébricas de I e de V . Isso é feito para determinar quando elas possuem raízes em comum (o resultante é nulo quando dois polinômios possuem raízes em comum, e é não nulo caso contrário). Obtemos

$$R_1 = 8a_{11}^2 a_{22} (3a_{21}^2 + 4a_{20}a_{22}) (a_{20}^2 + a_{21}^2 - 2a_{20}a_{22} + a_{22}^2),$$

assim, se $a_{22}(3a_{21}^2 + 4a_{20}a_{22})(a_{20}^2 + a_{21}^2 - 2a_{20}a_{22} + a_{22}^2) \neq 0$ temos que $I(2)$ é formado apenas pelo conjunto singular.

Para as condições algébricas de $V(2)$, temos o seguinte resultante

$$R_2 = -128a_{11}^6 a_{22}^2 (3a_{21}^2 + 4a_{20}a_{22}) (a_{20}^2 + a_{21}^2 - 2a_{20}a_{22} + a_{22}^2)^2 (3a_{20}^2 a_{21}^2 + 3a_{21}^4 + 100a_{20}^3 a_{22} + 94a_{20}a_{21}^2 a_{22} + 20a_{20}^2 a_{22}^2 - 161a_{21}^2 a_{22}^2 - 84a_{20}a_{22}^3 - 36a_{22}^4).$$

Genericamente, podemos supor

$$a_{22}^2 (3a_{21}^2 + 4a_{20}a_{22}) (a_{20}^2 + a_{21}^2 - 2a_{20}a_{22} + a_{22}^2)^2 (3a_{20}^2 a_{21}^2 + 3a_{21}^4 + 100a_{20}^3 a_{22} + 94a_{20}a_{21}^2 a_{22} + 20a_{20}^2 a_{22}^2 - 161a_{21}^2 a_{22}^2 - 84a_{20}a_{22}^3 - 36a_{22}^4) \neq 0,$$

e temos que $V(2)$ também é apenas o conjunto singular S .

Resumimos as contas acima no seguinte resultado.

Teorema 3.3.1. Seja $\mathcal{V} = \{(a_{00}, a_{10}, a_{11}, a_{20}, \dots, a_{kk}) \mid a_{00} = 0\}$ o espaço dos k -jatos e $f \in \mathcal{V}$ com singularidade Morse. Então, genericamente temos a seguinte estratificação do espaço dos k -jatos \mathcal{V} , $k \geq 4$:

- (1) Se f possui singularidade A_1^- , I é a união de duas variedades regulares de codimensão 1 em \mathcal{V} transversais ao longo de S . Se f possui singularidade A_1^+ , o estrato I coincide com S e possui codimensão 2 em \mathcal{V} .
- (2) Se f possui singularidade A_1^- , o estrato V é a união de quatro variedades regulares de codimensão 1 em \mathcal{V} duas a duas transversais ao longo do estrato S . Se f possui singularidade A_1^+ , V é a união de duas variedades regulares de codimensão 1 em \mathcal{V} transversais ao longo de S .
- (3) O estrato $I(2)$ é S em uma vizinhança de $j^k f(0, 0)$ com codimensão 2.

(4) O estrato $V(2)$ é S em uma vizinhança de $j^k f(0,0)$ com codimensão 2.

A Figura 17 exibe a estratificação do espaço dos k -jatos de acordo com o Teorema 3.3.1 quando f possui uma singularidade A_1^+ .

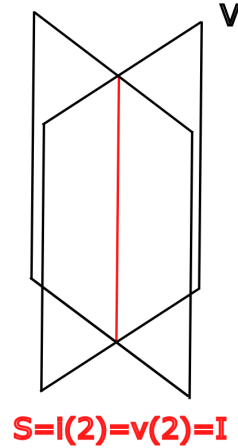


Figura 17 – Representação da estratificação do espaço de jatos, quando f possui singularidade A_1^+ projetada no espaço gerado por a_{00} , a_{10} e a_{11} de acordo com o Teorema 3.3.1.

3.3.2 Deformações geométricas

Seja $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ um germe de uma função diferenciável com uma singularidade Morse, e escreva

$$f(x, y) = a_{20}x^2 + a_{21}xy + a_{22}y^2 + a_{30}x^3 + a_{31}x^2y + a_{32}xy^2 + a_{33}y^3 + O(4).$$

Vamos estudar os dois casos onde a singularidade de f é A_1^- ou A_1^+ .

3.3.2.1 Deformações geométricas da singularidade A_1^-

Se f possui singularidade A_1^- podemos realizar uma rotação e uma homotetia para garantir que $a_{20} = 0$, $a_{21} = 1$ e $a_{22} < 0$. Suponha que F seja uma deformação de f , com

$$F(x, y, t) = A_{00}(t) + A_{10}(t)x + A_{11}(t)y + A_{20}(t)x^2 + A_{21}(t)xy + A_{22}(t)y^2 \\ + A_{30}(t)x^3 + A_{31}(t)x^2y + A_{32}(t)xy^2 + A_{33}(t)y^3 + O(4).$$

Suponha que F seja \mathcal{R} -versal, pelo Teorema 1.1.3, devemos ter $A'_{00}(t) \neq 0$. De fato, temos $L\mathcal{R} \cdot f = \{x, y\}$ e, assim, o complementar do espaço tangente em \mathcal{E}_2 é gerado por $\mathbb{R} \cdot \{1\}$. Além disso, como F é uma deformação de f , temos $A_{00}(0) = A_{10}(0) = A_{11}(0) = 0$ e $A_{ij}(0) = a_{ij}$, $1 < j \leq i$. Como $A'_{00}(0) \neq 0$, podemos realizar uma mudança na variável t caso necessário e supor que $A_{00}(t) = t$.

Pelo Teorema 3.3.1, o estrato das inflexões de primeira ordem é difeomorfo à união dois hiperplanos, S_1 e S_2 . Consideremos os estratos projetados em $J^2(2, 1)$, pois os jatos superiores

não influenciam nas contas do caso genérico. Assim, podemos parametrizar esses conjuntos, respectivamente, por

$$\begin{aligned} s_1(a_{00}, a_{10}, a_{20}, a_{21}, a_{22}) &= (a_{00}, a_{10}, a_{10}, a_{20}, a_{21}, a_{22}) \text{ e} \\ s_2(a_{00}, a_{10}, a_{20}, a_{21}, a_{22}) &= (a_{00}, a_{10}, -a_{10}, a_{20}, a_{21}, a_{22}). \end{aligned}$$

Também, podemos parametrizar o conjunto singular por

$$\Sigma(a_{00}, a_{20}, a_{21}, a_{22}) = (a_{00}, 0, 0, a_{20}, a_{21}, a_{22}).$$

Vamos verificar quando a aplicação de Monge-Taylor, definida por $\phi : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow \mathbb{R}^6$, $\phi(x, y, t) = (F(x, y, t), F_x(x, y, t), F_y(x, y, t), \frac{F_{xx}(x, y, t)}{2}, F_{xy}(x, y, t), \frac{F_{yy}(x, y, t)}{2})$, é transversal ao estrato das singularidades e , conseqüentemente, ao estrato de inflexões e ao estrato de vértices, já que $S \subset I$ e $S \subset V$. Assim, pela Proposição 1.1.1 a imagem inversa dos estratos por ϕ serão subvariedades.

Os pontos $q_1 = (0, 0, 0, 1, a_{22})$, $q_2 = (0, 0, 0, 1, a_{22})$ e $q_0 = (0, 0, 1, a_{22})$ são as imagens inversas de $\phi(0, 0, 0)$ por s_1 , s_2 e Σ , respectivamente. Calculando a diferencial das parametrizações Σ , s_1 e s_2 nos pontos q_0 , q_1 e q_2 obtemos

$$d\Sigma_{q_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; ds_{1q_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; ds_{2q_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim, Σ , s_1 e s_2 são regulares, pois possuem posto máximo, e $S = S_1 \cap S_2$ é regular em $\phi(0, 0, 0)$.

Os espaços tangentes destes conjuntos são gerados pelos vetores linhas das matrizes anteriores. Com isso, vemos que os espaços tangentes a S_1 em q_1 (resp. a S_2 em q_2) é gerado por $\{e_1, e_2 + e_3, e_4, e_5, e_6\}$ (resp. $\{e_1, e_2 - e_3, e_4, e_5, e_6\}$), onde e_i são os vetores da base canônica $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ de \mathbb{R}^6 . Chamamos esse espaço de P_1 (resp. P_2). O espaço tangente à Σ é gerado por $\{e_1, e_4, e_5, e_6\}$, e o chamamos P_S .

Calculando a derivada de ϕ em $(0, 0, 0)$, temos

$$d\phi_{(0,0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & A'_{10}(0) \\ 1 & 2a_{22} & A'_{11}(0) \\ 3a_{30}(0) & a_{31}(0) & A'_{20}(0) \\ 2a_{31}(0) & 2a_{32}(0) & A'_{21}(0) \\ a_{32}(0) & 3a_{33}(0) & A'_{22}(0) \end{pmatrix}.$$

A imagem de $d\phi_{(0,0,0)}$ é o espaço vetorial V gerado pelos 3 vetores das colunas da matriz acima. Logo, Φ ser transversal a P_S é equivalente a $V + P_S = \mathbb{R}^6$. Para isso, é suficiente mostrar que dois vetores em V completam uma base de \mathbb{R}^6 com os geradores $\{e_1, e_4, e_5, e_6\}$ de P_S . Isso é imediato, pois os dois primeiros vetores coluna da matriz completam a base. Ou seja, ϕ é transversal à S e, portanto, à I e V . Analogamente temos ϕ transversal a P_1 e P_2 . Assim, a imagem inversa de S_1 e S_2 (que formam o conjunto I , junto com Σ) por ϕ são superfícies regulares em $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$.

Note que como $A_{00}(t) = t$, temos que $\frac{\partial F}{\partial t} \neq 0$, assim, pelo Teorema da Função Implícita, existe uma função suave $t(x, y)$ tal que $F(x, y, t(x, y)) = 0$. Ou seja, a imagem de $(x, y, t(x, y))$ em \mathbb{R}^3 é exatamente $F^{-1}(0)$. Para encontrar o estrato das inflexões em \mathbb{R}^3 , calculamos o 3-jato da função de inflexão $I(x, y) = I_F(x, y, t(x, y))$, dado por

$$j^3 I = -2y(a_{22}y + x) (xA'_{10}(0) + yA'_{11}(0) + 12a_{22}a_{30}x + 4a_{22}a_{31}y - 4a_{31}x - 4a_{32}y - 1).$$

Os 2-jatos de I e f são respectivamente $2y(a_{22}y + x)$ e $y(x + a_{22}y)$. Notemos que o 2-jato de I e f coincidem a menos de uma constante não nula, isso implica que as duas curvas de $F^{-1}(0)$ são tangentes as duas curvas de $I^{-1}(0)$. Os ramos de $F^{-1}(0)$ podem ser parametrizados por

$$\alpha_1(s) = (s, -a_{30}s^2 + (-a_{22}a_{30}^2 + a_{30}a_{31} - a_{40})s^3),$$

$$\begin{aligned} \alpha_2(s) = & (-a_{22}s + (a_{22}^3a_{30} - a_{22}^2a_{31} + a_{22}a_{32} - a_{33})s^2 + (-3a_{22}^5a_{30}^2 + a_{32}a_{33} \\ & - a_{22}^4(-5a_{30}a_{31} + a_{40}) - a_{22}^3(2a_{31}^2 + 4a_{30}a_{32} - a_{41}) - a_{22}^2(-3a_{31}a_{32} \\ & - 3a_{30}a_{33} + a_{42}) - a_{22}(a_{32}^2 + 2a_{31}a_{33} - a_{43}) - a_{44})s^3, s). \end{aligned}$$

Por outro lado, os ramos de $I^{-1}(0)$ são parametrizados por

$$\beta_1(s) = (s, s^3(a_{30}(A'_{10}(0) + (9a_{22} - 3)a_{30}) + 2a_{40})),$$

$$\begin{aligned} \beta_2(s) = & \left(-a_{22}s + s^3(9a_{22}^5a_{30}^2 - 15a_{22}^4a_{30}a_{31} + 6a_{22}^3a_{31}^2 + 12a_{22}^3a_{30}a_{32} - 9a_{22}^2a_{31}a_{32} + 3a_{22}a_{32}^2 \right. \\ & - 9a_{22}^2a_{30}a_{33} + 6a_{22}a_{31}a_{33} - 3a_{32}a_{33} + 2a_{22}^4a_{40} - 2a_{22}^3a_{41} + 2a_{22}^2a_{42} - 2a_{22}a_{43} + 2a_{44} \\ & + a_{22}^4a_{30}A'_{10}(0) - a_{22}^3a_{31}A'_{10}(0) + a_{22}^2a_{32}A'_{10}(0) - a_{22}a_{33}A'_{10}(0) - a_{22}^3a_{30}(A'_{11}(0)) \\ & \left. + a_{22}^2a_{31}(A'_{11}(0)) - a_{22}a_{32}(A'_{11}(0)) + a_{33}(A'_{11}(0))), s \right). \end{aligned}$$

Se $a_{30} \neq 0$ e $N_0 = a_{22}^3a_{30} - a_{22}^2a_{31} + a_{22}a_{32} - a_{33} \neq 0$, as tangências entre as curvas α_i e β_i são de ordem 2.

Assim como nas inflexões, pelo Teorema da Função Implícita, denotamos a função de vértices $V(x, y) = V_F(x, y, t(x, y))$. Note que

$$j^4 V = -6y(x + a_{22}y)(x^2 + 2a_{22}xy - y^2).$$

Logo, o estrato dos vértices é dada por 4 curvas planas, uma vez que estamos considerando o caso A_1^- . Obtemos os 4-jatos de parametrizações de tais curvas são dados por

$$\begin{aligned} \gamma_1(s) = & (s, -a_{30}s^2 - 2((a_{22}a_{30}^2 - a_{30}a_{31} + a_{40})s^3 + s^4((4 - 12a_{22}^2)a_{30}^3 + 6a_{31}a_{40} - 5a_{50} \\ & - a_{40}A'_{10}(0) + a_{30}^2(18a_{22}a_{31} - 5a_{32} - a_{22}a'_{10}(0)) - 12a_{22}a_{30}a_{40} \\ & + 5a_{30}a_{41} - 6a_{30}a_{31}a_{31} + a_{30}A'_{10}(0)a_{31})), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_2(s) = & \left(-a_{22}s + (a_{22}(a_{22}^2a_{30} - a_{22}a_{31} + a_{32}) - a_{33})s^2 - \frac{1}{(1 + a_{22}^2)}2(2a_{22}^7a_{30}^2 \right. \\ & - a_{32}a_{33} + a_{22}^6(-3a_{30}a_{31} + a_{40}) + a_{22}^5(3a_{30}^2 + a_{31}^2 + 2a_{30}a_{32} - a_{41}) \\ & + a_{22}^4(-a_{31}a_{32} - a_{30}(5a_{31} + a_{33}) + a_{40} + a_{42}) + a_{22}(a_{32}^2 + 2a_{31}a_{33} - a_{33}^2 \\ & - a_{43}) + a_{22}^3(2a_{31}^2 + 4a_{30}a_{32} - a_{41} - a_{43}) + a_{44} + a_{22}^2(-3a_{31}a_{32} - 3a_{30}a_{33} \\ & \left. + a_{32}a_{33} + a_{42} + a_{44}))s^3, s \right), \end{aligned}$$

$$\gamma_3(s) = \left(s, \left(a_{22} - \sqrt{1 + a_{22}^2} \right) s + \frac{1}{2}(s^2(y''_{3v})) + \frac{1}{6}(s^3(y^{(3)}_{3v})) \right),$$

e

$$\gamma_4(s) = \left(s, (a_{22} + \sqrt{1 + a_{22}^2})s + \frac{1}{2}s^2(y''_{4v}) + \frac{1}{6}s^3(y^{(3)}_{4v}) \right),$$

onde $\gamma_3(s) = (s, y_{3v})$ e $\gamma_4(s) = (s, y_{4v})$. Notamos que γ_i é tangente à curva α_i e β_i , $i = 1, 2$. A condição para genericidade, ou seja, para que o contato entre as curvas γ_i , e α_i , $i = 1, 2$, seja o menor possível é dado pelas seguintes expressões:

$$N_1 = a_{22}a_{30}^2 - a_{30}a_{31} + a_{40} \neq 0,$$

e

$$\begin{aligned} N_2 = & a_{22}^7a_{30}^2 - a_{32}a_{33} + a_{22}^6(-a_{30}a_{31} + a_{40}) + a_{22}^5(3a_{30}^2 - a_{41}) + a_{22}^4(a_{31}a_{32} \\ & + a_{30}(-5a_{31} + a_{33}) + a_{40} + a_{42}) + a_{22}(a_{32}^2 + 2(a_{31} - a_{33})a_{33} - a_{43}) \\ & + a_{22}^3(4a_{30}a_{32} - a_{32}^2 + 2a_{31}(a_{31} - a_{33}) - a_{41} - a_{43}) + a_{44} \\ & + a_{22}^2(-3a_{31}a_{32} - 3a_{30}a_{33} + 3a_{32}a_{33} + a_{42} + a_{44}) \neq 0. \end{aligned}$$

Teorema 3.3.2. Seja $f : (\mathbb{R}^2, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ um germe de uma função suave com singularidade A_1^- . Então toda deformação geométrica de f é FRS-equivalente à $F : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ com $F(x, y, t) = f(x, y) + t$. Temos as seguintes configurações geométricas genéricas para F :

- (i) A transição de vértices $2 + 2 \leftrightarrow 2 + 2$ ocorre quando $(N_1N_2) < 0$. Neste caso a transição de inflexões é $1 + 1 \leftrightarrow 2 + 0$;
- (ii) A transição de vértices $1 + 1 \leftrightarrow 3 + 3$ ocorre quando $(N_1N_2) > 0$.
- (iii) A transição de inflexões $1 + 1 \leftrightarrow 2 + 0$ ocorre quando $N_1, N_2 > 0$ e $(a_{30}N_0) < 0$ ou $N_1, N_2 < 0$ e $(a_{30}N_0) > 0$;

- (iib) A transição de inflexões $2 + 0 \leftrightarrow 1 + 1$ ocorre quando $N_1, N_2 > 0$ e $(a_{30}N_0) > 0$ ou $N_1, N_2 < 0$ e $(a_{30}N_0) < 0$.

Demonstração. Se f possui singularidade A_1^- , podemos realizar uma rotação e uma homotetia de modo a escrever

$$f(x, y) = x^2 - a^2y^2 + a_{30}x^3 + a_{31}x^2y + a_{32}xy^2 + a_{33}y^3 + O(4)$$

com $a > 0$. Além disso, $f = 0$ divide qualquer vizinhança da origem em 4 setores.

Os ramos do conjunto de inflexão $I = 0$ são sempre tangentes aos ramos de $f = 0$ com ordem de contato 2. Assim, a posição relativa entre eles é dada na Figura 18 à esquerda. Além disso, sabemos que γ_3 e γ_4 são transversais aos ramos de $f = 0$. Note que os coeficientes angulares das retas tangentes à γ_3 e γ_4 possuem sinais diferentes. Logo, estas curvas não estão contidas nos mesmos setores definidos por $f = 0$ (ver Figura 18 à direita).

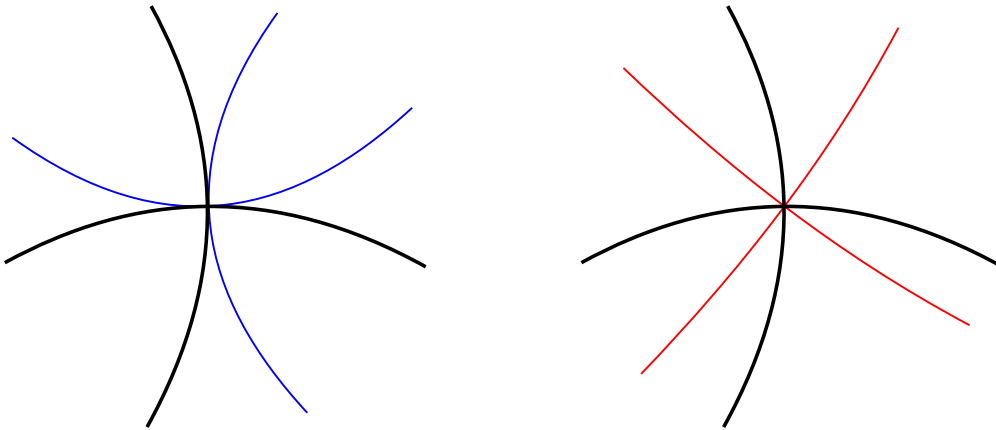


Figura 18 – Posição relativa de $I = 0$ (esquerda), γ_3 e γ_4 (direita) com relação aos setores de $f = 0$.

Suponha que $N_1N_2 < 0$. Assim, γ_1 e γ_2 , que possuem uma ordem de contato 3 com os ramos de $f = 0$, estão contidas em setores (definidos por $f = 0$) diferentes (ver Figura 19 à esquerda). Analisando a ordem de contato das demais curvas mencionadas com os ramos de $f = 0$, concluímos que a única configuração possível para tais curvas é como na Figura 19 à direita.

Por outro lado, se $N_1N_2 > 0$, então γ_1 e γ_2 estão contidas nos mesmos setores definidos por $f = 0$ (Ver Figura 20). Assim, temos duas possibilidades para a posição destas curvas com relação aos ramos de $I = 0$, analisando os coeficientes das parametrizações concluímos que: se $a_{30}N_0N_1 < 0$ temos o caso da Figura 21 (esquerda), ou se $a_{30}N_0N_1 > 0$ temos o caso da Figura 21 (direita).

Como F é versal, sabemos que como será a deformação de f para t suficientemente pequeno. Portanto, a quantidade e as posições dos vértices e inflexões seguem das interseções das deformações de $f = 0$ com os ramos de $I = 0$ e $V = 0$. Note que as configurações (e todos os

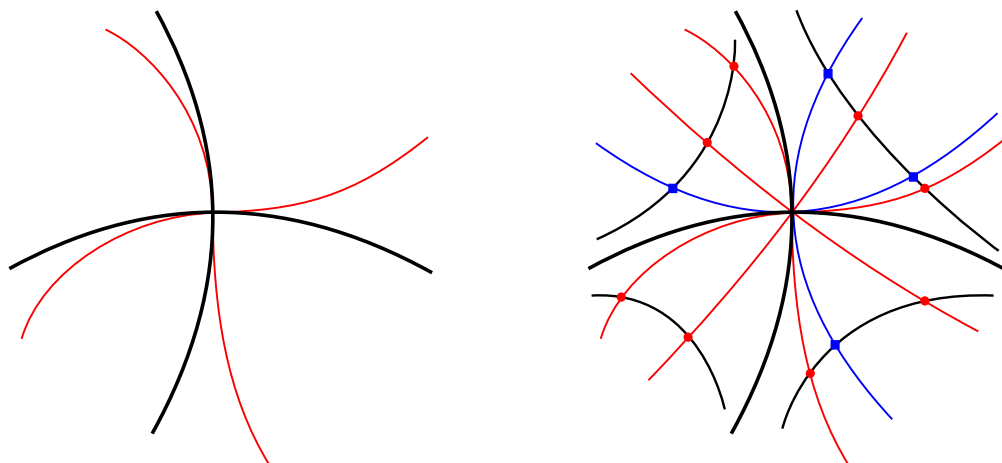


Figura 19 – Caso $N_1N_2 < 0$. À esquerda temos a posição de γ_1 e γ_2 e à direita temos estas curvas junto com as demais. Os pontos vermelhos são os vértices e os quadrados azuis são as inflexões.

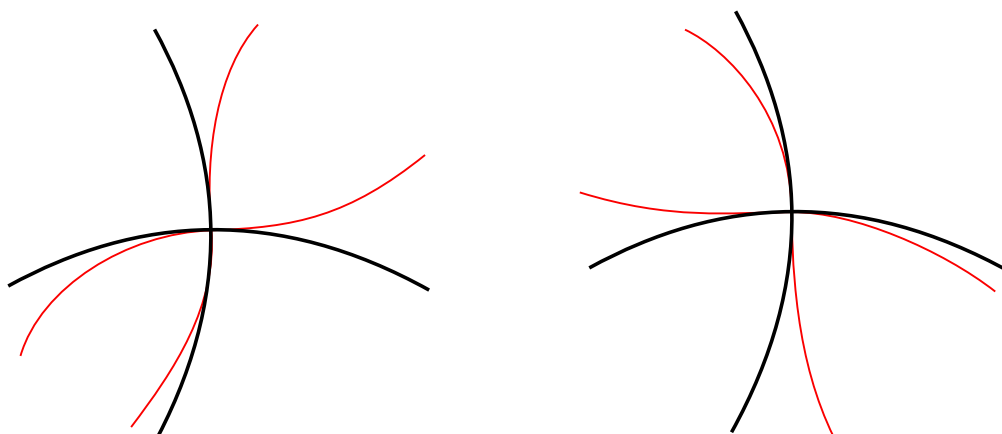


Figura 20 – Posição de γ_1 e γ_2 com relação aos setores de $f = 0$ no caso $N_1N_2 > 0$.

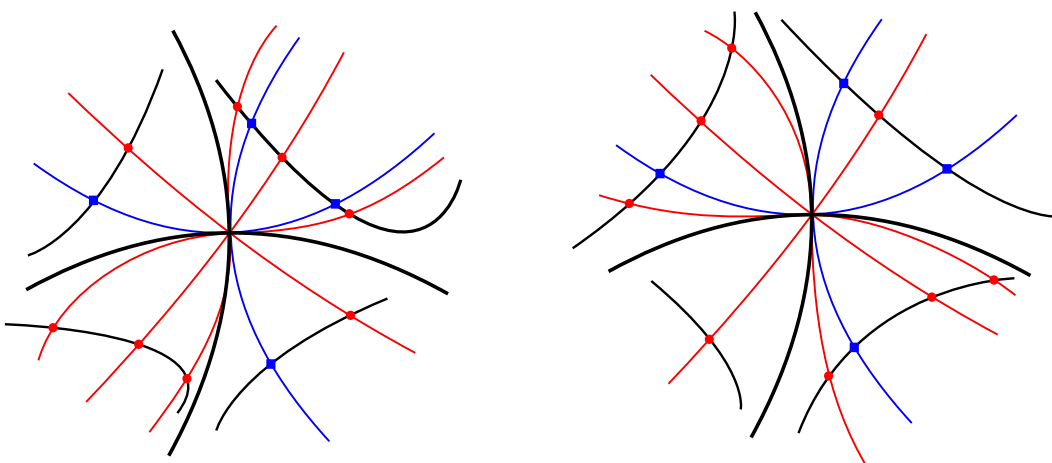


Figura 21 – Posição de $f = 0$, $I = 0$ (azul) e $V = 0$ (vermelho) no caso $N_1N_2 > 0$. Os pontos vermelhos são os vértices e os quadrados azuis são as inflexões.

cálculos anteriores) dependem apenas da função f e do fato da deformação ser \mathcal{R} -versal. Deste modo, concluímos que as deformações geométricas de f é \mathcal{R} -equivalente à $f(x, y) + t$.

Concluímos que as deformações geométricas de f são FRS -equivalentes à $f(x, y) + t$.

□

Podemos representar esses casos conforme a Figura 4.

3.3.2.2 Deformações geométricas da singularidade A_1^+

Se f possui singularidade A_1^+ , podemos realizar uma rotação e uma homotetia e tomar $a_{20} = 1$, $a_{21} = 0$ e $a_{22} = a^2$ (com $a > 0$ e $a \neq 1$ para ponto elíptico não umbílico). Para que a deformação F seja \mathcal{R} -versal, como anteriormente, devemos ter $A_{00}(t) = t$. Como F é uma deformação de f , temos $A_{10}(0) = A_{11}(0) = 0$ e $A_{ij}(0) = a_{ij}$, $1 < j \leq i$. Pelo Teorema 3.3.1, o estrato das inflexões de primeira ordem é o conjunto singular S . O estrato de vértices são duas variedades regulares transversais em S . Assim, podemos parametrizar esses conjuntos, respectivamente, por

$$s_1(a_{00}, a_{10}, a_{20}, a_{21}, a_{22}) = (a_{00}, a_{10}, a_{10}, a_{20}, a_{21}, a_{22})$$

e

$$s_2(a_{00}, a_{10}, a_{20}, a_{21}, a_{22}) = (a_{00}, a_{10}, -a_{10}, a_{20}, a_{21}, a_{22}).$$

Também, podemos parametrizar o estrato singular e, conseqüentemente, o estrato de inflexões

$$S = \Sigma(a_{00}, a_{20}, a_{21}, a_{22}) = (a_{00}, 0, 0, a_{20}, a_{21}, a_{22}).$$

Vamos verificar se a aplicação de Monge-Taylor é transversal ao estrato das singularidades. O ponto $q_0 = (0, 1, 0, a^2)$ é a imagem inversa de $\phi(0, 0, 0)$ por Σ . Calculando a diferencial da parametrização Σ no ponto q_0 , obtemos

$$d\Sigma_{q_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim, Σ é regular em $\phi(0, 0, 0)$ e o espaço tangente à Σ é gerado por $\{e_1, e_4, e_5, e_6\}$. O chamamos de P_S .

Calculando a diferencial de ϕ em $(0, 0, 0)$, temos

$$d\phi_{(0,0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & A'_{10}(0) \\ 0 & 2a^2 & A'_{11}(0) \\ 3a_{30} & a_{31} & A'_{20}(0) \\ 2a_{31} & 2a_{32} & A'_{21}(0) \\ a_{32} & 3a_{33} & A'_{22}(0) \end{pmatrix}.$$

A imagem de $d\phi_{(0,0,0)}$ é o espaço vetorial V gerado pelos 3 vetores das colunas da matriz acima. Logo, ϕ ser transversal a P_S é equivalente à $V + P_S = \mathbb{R}^6$. Para isso, é suficiente mostrar que dois vetores em V completam uma base de \mathbb{R}^6 com os geradores $\{e_1, e_4, e_5, e_6\}$ de P_S . Isso é imediato, pois os dois primeiros vetores coluna da matriz completam a base. Assim, a imagem inversa de $I = S$ por ϕ é uma superfície regular em $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ e ϕ ser transversal à S e, conseqüentemente, à I e à V .

Note que como $A_{00}(t) = t$, temos que $\frac{\partial F}{\partial t} \neq 0$, assim, pelo Teorema da Função Implícita, existe uma função suave $t(x, y)$ tal que $F(x, y, t(x, y)) = 0$. Ou seja, a imagem de $(x, y, t(x, y))$ em \mathbb{R}^3 é exatamente $F^{-1}(0)$. Para encontrar o estrato das inflexões em \mathbb{R}^3 , calculamos o 2-jato da função de inflexão $I(x, y) = I_F(x, y, t(x, y))$, dado por

$$j^2 I = -8a^2 (a^2 y^2 + x^2).$$

Dessa forma, assim como em ((DIATTA; GIBLIN, 2007)), f não possui inflexões fora da origem. Além disso, temos que o 4-jato de V é dado por

$$j^4 V = -192(-1 + a)a^4(1 + a)xy(x^2 + a^2 y^2).$$

Assim, como $a \neq 1$, temos 2 ramos tangentes as direções principais $x = 0$ e $y = 0$.

Teorema 3.3.3. Seja $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ um germe de uma função suave com singularidade A_1^+ . Então, toda deformação genérica de f é *FRS*-equivalente à $F : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ com $F(x, y, t) = f(x, y) + t$. Temos a configuração geométrica genéricas para F dada pela transição de vértices de primeira ordem $4 \leftrightarrow 0$ e não existem inflexões fora da origem. Ver figura 22.

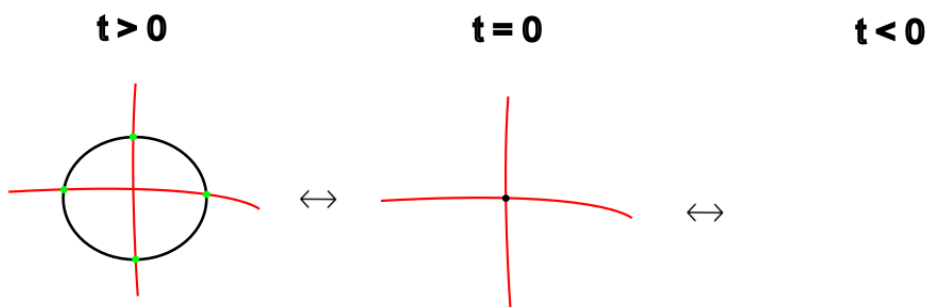


Figura 22 – Configuração dos vértices e inflexões do Teorema 3.3.3. Na esquerda, temos dois ramos transversais do conjunto de vértices intersectando a curva nos 4 pontos de vértices (pontos verdes) a deformação $f = t$, para $t > 0$. No centro, temos que $f = 0$ representa apenas um ponto. Na direita, temos o conjunto vazio para $t < 0$.

Demonstração. Neste caso temos que a deformação de $f = 0$ será por um lado uma curva regular fechada e, por outro lado, será um conjunto vazio. Como $I = 0$ só possui a origem e $V = 0$ são duas curvas regulares transversais na origem, concluímos que a transição de vértices é $4 \leftrightarrow 0$ (ver

Figura 22). Por fim, note que as configurações (e todos os cálculos anteriores) dependem apenas da função f e do fato da deformação ser \mathcal{R} -versal. Deste modo, concluímos que as deformações geométricas de f é \mathcal{R} -equivalente à $f(x, y) + t$.

Concluímos que as deformações geométricas de f são FRS -equivalentes à $f(x, y) + t$.

□

REFERÊNCIAS

ARNOLD, V. I. Normal forms of functions near degenerate critical points, the weyl groups $A_k - D_k - E_k$ and lagrangian singularities. **Funkcional. Anal. i Priložen.**, v. 6, n. 4, p. 3–25, 1972. Citado na página 28.

ARNOLD, V. I.; GUSEIN-ZADE, S. M.; VARCHENKO, A. N. **Singularities of Differentiable Maps. Vol. I. The Classification of Critical Points, Caustics and Wave Fronts**. Boston, MA: Birkhäuser Boston, Inc., 1985. v. 1. (Monographs in Mathematics, v. 1). Translated from the Russian by Ian Porteous and Mark Reynolds. Citado nas páginas 24, 25 e 70.

BRUCE, J. W.; GIBLIN, P. J. **Curves and Singularities**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1992. Citado nas páginas 25 e 32.

BRÖCKER, T. **Differentiable Germs and Catastrophes**. Cambridge: Cambridge University Press, 1975. (London Mathematical Society Lecture Note Series, 17). Translated from the German, last chapter and bibliography by L. Lander. Citado nas páginas 24 e 25.

CAPITANIO, G.; DIATTA, A. Perestroikas of vertex sets at umbilic points. **Funct. Anal. Other Math**, v. 2, p. 165–178, 2009. Citado na página 24.

CARMO, M. P. D. **Differential Geometry of Curves and Surfaces: Revised and Updated Second Edition**. [S.l.]: Courier Dover Publications, 2016. Citado nas páginas 35 e 36.

DIAS, F. S.; NUÑO-BALLESTEROS, J. J. Plane curve diagrams and geometrical applications. **Q. J. Math**, v. 59, p. 287–310, 2008. Citado na página 23.

DIAS, F. S.; TARI, F. On vertices and inflexions of plane curves. **J. Singul.**, v. 17, p. 70–80, 2018. Citado na página 23.

DIATTA, A.; GIBLIN, P. Vertices and inflexions of plane sections of surfaces in \mathbb{R}^3 . **Real and Complex Singularities**, p. 71–97, 2007. Citado nas páginas 24, 41, 43, 44 e 79.

FRANCISCO, A. P. **Deformações geométricas de curvas no plano Minkowski**. Tese (Doutorado) — Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2019. Citado na página 23.

GIBSON, C. G. **Singular points of smooth mappings**. [S.l.]: Pitman, 1979. v. 25. (Research Notes in Mathematics, v. 25). Citado nas páginas 25, 27 e 31.

IZUMIYA, S.; ROMERO-FUSTER, M. C.; RUAS, M. A. S.; TARI, F. **Differential Geometry from a Singularity Theory Viewpoint**. Hackensack, NJ: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2016. Citado nas páginas 25 e 33.

MOND, D.; NUÑO-BALLESTEROS, J. J. **Singularities of Mappings: The Local Behaviour of Smooth and Complex Analytic Mappings**. [S.l.]: Springer, 2020. v. 357. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, v. 357). Citado nas páginas 25 e 27.

- PORTEOUS, I. R. **Geometric Differentiation**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1994. Citado na página 43.
- SALARINOGHABI, M. **Flat and Round Singularity Theory**. Tese (Doutorado) — Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2016. Citado na página 65.
- SALARINOGHABI, M.; HASEGAWA, M.; TARI, F. Geometric deformations of discriminants of map-germs from the plane to the plane. In preparation. 2023. Citado nas páginas 23 e 66.
- SALARINOGHABI, M.; TARI, F. Flat and round singularity theory of plane curves. **Q. J. Math.**, v. 68, n. 4, p. 1289–1312, 2017. Citado nas páginas 23 e 66.
- SINHA, R. O.; TARI, F. Projections of space curves and duality. **Q. J. Math.**, v. 64, p. 281–302, 2013. Citado nas páginas 23 e 66.
- TRICHES, F. **Redução de singularidades de curvas analíticas em \mathbb{C}^2** . Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, 2018. Citado nas páginas 37 e 39.
- WALL, C. T. C. Finite determinacy of smooth map-germs. **Bull. Lond. Math. Soc.**, Wiley Online Library, v. 13, n. 6, p. 481–539, 1981. Citado nas páginas 25, 28 e 29.
- _____. Flat singularity theory. **J. Lond. Math. Soc.**, v. 87, p. 622–640, 2013. Citado na página 23.

