UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Traço de distribuições e geração de semigrupos de operadores lineares sobre espaços localmente convexos

Bruno Vicente Marchi de Macedo

Tese de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPG-Mat)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

Bruno Vicente Marchi de Macedo

Traço de distribuições e geração de semigrupos de operadores lineares sobre espaços localmente convexos

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências – Matemática. *EXEMPLAR DE DEFESA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Éder Rítis Aragão Costa

USP – São Carlos
Outubro de 2020

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

M141t

Macedo, Bruno Vicente Marchi
Traço de distribuições e geração de semigrupos de operadores lineares sobre espaços localmente convexos / Bruno Vicente Marchi Macedo; orientador Éder Rítis Aragão Costa. -- São Carlos, 2020.
132 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2020.

1. Traço de distribuições. 2. Semigrupos de operadores lineares. I. Costa, Éder Rítis Aragão, orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Bruno Vicente Marchi de Macedo

Trace of distributions and generation of semigroups of linear operators on locally convex spaces

Thesis submitted to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP – in accordance with the requirements of the Mathematics Graduate Program, for the degree of Doctor in Science. *EXAMINATION BOARD PRESENTATION COPY*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Éder Rítis Aragão Costa

USP – São Carlos
October 2020

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha companheira Thays pelo apoio durante o momentos difíceis desta jornada.

Agradeço aos meus pais Ana e Vicente por sempre incentivarem a curiosidade pelo saber.

Agradeço a todos os Professores que compartilharam comigo não só seus conhecimentos, mas também o apreço pela Matemática. Em especial, agradeço ao meu orientador Éder pela imensa ajuda no desenvolvimento do projeto de tese, por ser sempre paciente e bem-humorado.

Agradeço a Capes pelo apoio financeiro.

"O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001".

RESUMO

MACEDO, B. V. M. **Traço de distribuições e geração de semigrupos de operadores lineares sobre espaços localmente convexos**. 2020. 132 p. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2020.

Neste trabalho apresentaremos uma noção de traço para distribuições em um certo subespaço de $\mathscr{D}'(\Omega)$. Essa noção de traço fornece sentido para o problema de Dirichlet com a equação de Laplace na bola unitária, no caso em que a condição de contorno é uma distribuição qualquer, de modo que a fórmula integral de Poisson continua produzindo soluções para o problema.

Apresentamos também um resultado de geração de semigrupos de operadores lineares sobre um espaço vetorial topológico localmente convexo. No caso em que este espaço é Fréchet, mostraremos que tal resultado generaliza o Teorema clássico de geração de semigrupos analíticos de operadores lineares contínuos sobre um espaço de Banach.

Palavras-chave: Traço, Distribuições, Semigrupos de operadores lineares, Espaços localmente convexos.

ABSTRACT

MACEDO, B. V. M. **Trace of distributions and generation of semigroups of linear operators on locally convex spaces**. 2020. 132 p. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2020.

In this work, we will present a notion of trace for distributions in a certain subspace of $\mathscr{D}'(\Omega)$. This notion of trace provides meaning to the Dirichlet problem with the Laplace equation on the unit ball, in the case where the boundary condition is any distribution, such that Poisson's integral formula continues to produce solutions to the problem.

We also present a result of the generation of semigroups of linear operators on a locally convex topological vector space. When this space is Fréchet, we will show that such result generalizes the classical Theorem of generation of analytical semigroups of continuous linear operators on a Banach space.

Keywords: Trace, Distributions, Semigroups of linear operators, Locally convex spaces.

SUMÁRIO

CAPÍTULO

1

INTRODUÇÃO

A ideia principal deste trabalho é usar a Teoria da Distribuições e a Análise de Fourier para encontrar e descrever as soluções de algumas equações diferenciais parciais lineares para casos em que as condições iniciais ou de fronteira são mais singulares do que o usual.

Este trabalho ficou dividido em duas partes independentes entre si. Na primeira parte, presente no Capítulo 3, é apresentado um resultado sobre a geração de semigrupos sobre espaços vetoriais topológicos localmentes convexos, no caso em que o gerador é um operador linear que chamamos de pseudosetorial, e mostramos que é possível aplicar tal resultado a uma classe de operadores pseudodiferenciais com coeficientes constantes. Na segunda parte, presente no Capítulo 4, apresentamos um conceito de traço para distribuições em um subespaço de $\mathscr{D}'(\Omega)$, mostramos como esse conceito generaliza outros conceitos de traço já conhecidos e como ele pode dar sentido ao problema de Dirichlet com a equação de Laplace, no caso em que a condição de contorno é uma distribuição qualquer.

Para compreender nossa motivação para o desenvolvimento da Capítulo 3, a título de exemplo, considere a equação do calor:

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) = \Delta u(x,t), & \text{para } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x), & \text{para } x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{1.1}$$

onde Δ representa o operador de Laplace na variável x, isto é,

$$\Delta u(x,t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x,t)$$

e $u_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ é uma função. Se $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para algum $p \in [1,\infty)$, então uma forma de abordar o problema (1.1) é olhar Δ como um operador linear (não-limitado) sobre $L^p(\mathbb{R}^n)$, u como uma aplicação $u : [0,\infty) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ e reescrever (1.1) como a equação diferencial ordinária:

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = \Delta u(t), & \text{para } t \in (0,\infty) \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Como $-\Delta$ é um operador setorial, o semigrupo $\{e^{t\Delta}\}_{t\geq 0}$ gerado por Δ é obtido pela fórmula integral de Cauchy

$$e^{t\Delta} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{t\lambda}(\lambda-\Delta)^{-1}\,\mathrm{d}\lambda,$$

onde Γ é uma curva que contorna o espectro de Δ (ver Teorema 1.3.4 em (HENRY, 1981)), e temos que $u:[0,\infty)\to L^p(\mathbb{R}^n)$ definida por $u(t)=e^{t\Delta}u_0$ é a solução de (1.2). No entanto, se para todo $p\in[1,\infty)$ temos que $u_0\notin L^p(\mathbb{R}^n)$ o problema (1.1) não pode ser abordado dessa forma. Uma alternativa para usar essa abordagem, mesmo quando a condição inicial u_0 é mais singular que funções em $L^p(\mathbb{R}^n)$, é desenvolver um resultado de geração de semigrupos em espaços vetoriais topológicos localmente convexos.

Esse tema vem sendo desenvolvido em alguns trabalhos. Em (BABALOLA, 1974), por exemplo, é apresentado uma generalização do Teorema de Hille-Yosida (ver (PAZY, 1983)) para espaços vetoriais localmente convexos completos. Em (ARAGÃO-COSTA; SILVA, 2020), o grupo $\{e^{tA}\}_{t\in\mathbb{R}}$ de operadores lineares contínuos sobre um espaço de Fréchet $(X,\{p_j\}_{j\in\mathbb{N}})$ é definido através da fórmula

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(tA)^k}{k!},$$

por meio da introdução do espaço $\mathscr{L}_{sc}(X)$ dos operadores lineares contínuos fortemente compatíveis com a família de seminormas $\{p_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, mostrando que se $A\in\mathscr{L}_{sc}(X)$, então a série acima converge em $\mathscr{L}_{sc}(X)$.

Neste trabalho apresentamos uma versão do Teorema 1.3.4 em (HENRY, 1981) para espaços vetoriais topológicos localmente convexos, isto é, geraremos o semigrupo $\{e^{-tA}\}_{t\geq 0}$ através da fórmula integral de Cauchy

$$e^{-tA} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{t\lambda}(\lambda+A)^{-1}\,\mathrm{d}\lambda, \tag{1.3}$$

no caso em que A é um operador que denominamos por operador pseudosetorial.

A maior dificuldade em generalizar os teoremas de geração de semigrupos para espaços vetoriais topológicos localmente convexos, encontra-se no fato que, diferentemente do caso em que X é um espaço de Banach, quando X é um espaço vetorial localmente convexo (ou mesmo um espaço de Fréchet), não há uma maneira “natural"de munir o espaço dos operadores lineares contínuos $\mathscr{L}(X)$ com uma estrutura de espaço vetorial topológico localmente convexo. No caso em que queremos gerar o semigrupo $\{e^{-tA}\}_{t\geq 0}$ através de (1.3), tentar munir $\mathscr{L}(X)$ com uma estrutura de espaço vetorial topológico localmente convexo é muito interessante, porque neste caso a integral do lado direito de (1.3), caso convergisse, teria um sentido. Nesse trabalho, contornamos essa dificuldade considerando o espaço de todos os operadores lineares (incluindo os descontínuos) sobre X, que denotamos por $L(X)$, em vez de considerar $\mathscr{L}(X)$.

Mostraremos que podemos aplicar o Teorema de geração de semigrupos do Capítulo 3 para uma classe de operadores pseudodiferenciais com coeficientes constantes sobre o espaço de

Schwartz. No entanto, há uma grande dificuldade em aplicar tal Teorema para o caso em que Ω é um conjunto aberto limitado em $\mathbb{R}^n$, como mencionaremos a seguir.

Se considerarmos a equação do calor (1.1), trocando $\mathbb{R}^n$ por Ω subconjunto aberto limitado de $\mathbb{R}^n$, devemos adicionar uma condição de contorno para o problema ficar bem posto. Desta forma, a formulação para a equação do calor com condição de contorno de Dirichlet é a seguinte:

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) = \Delta u(x,t), & \text{para } (x,t) \in \Omega \times (0,\infty) \\ u(x,t) = 0, & \text{para } (x,t) \in \partial\Omega \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x), & \text{para } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1.4}$$

Como antes, podemos reescrever a EDP como uma EDO (1.2) no espaço $L^p(\Omega)$. A condição de contorno do problema (1.4) é incorporada ao problema (1.2) através do domínio do operador de Laplace $D(\Delta)$. Por exemplo, se $p = 2$ e Ω é de classe C^2, temos que $D(\Delta) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ (ver Capítulo 4 de (VRABIE, 2003)), enquanto para o problema (1.1), temos $D(\Delta) = H^2(\mathbb{R}^n)$. Assim, para estudar o problema (1.4) com condição inicial u_0 em $\mathscr{D}'(\Omega)$ (ou em um subespaço de $\mathscr{D}'(\Omega)$), devemos conseguir incorporar a condição de contorno ao domínio $D(\Delta) \subset \mathscr{D}'(\Omega)$.

Observe que $H_0^1(\Omega)$ é formado pelas funções em $H^1(\Omega)$ com traço em $\partial\Omega$ igual a 0, onde o sentido de traço para uma função em $H^1(\Omega)$ é apresentado em (ADAMS; FOURNIER, 2003), e por isso o domínio do operador de Laplace $D(\Delta) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ é adequado para estudar o problema (1.4) quando $u_0 \in L^2(\Omega)$. Logo ter uma noção de traço para distribuições parece muito interessante para dar sentido e conseguir estudar o problema (1.4), no caso em que u_0 é uma distribuição que não pertence aos espaços L^p's.

Em (CORDARO, 1999) é apresentada uma noção de traço, denominada valor de fronteira, entretanto essa noção é restrita a funções holomorfas $f : I \times i(0,\delta) \to \mathbb{C}$ tais que existem $C > 0$ e $N \in \mathbb{N}$ de modo que f verifica a estimativa

$$|f(x+iy)| \leq \frac{C}{y^N}$$

para todo $x + iy \in I \times i(0,\delta)$.

Considerando Ω uma aberto com fronteira suave, no Capítulo 4 apresentamos um conceito de traço para distribuições em um subespaço de $\mathscr{D}'(\Omega)$, denominamos tal subespaço por espaço das distribuições em Ω com traço em $\partial\Omega$ e o denotamos por $\mathscr{D}'_{\partial\Omega}(\Omega)$. O traço de uma distribuição em $\mathscr{D}'_{\partial\Omega}(\Omega)$, como mostramos, será uma distribuição em $\mathscr{D}'(\partial\Omega)$, por este motivo começamos o Capítulo 4 abordando um espaço de distribuições sobre uma variedade suave M que é apresentado em (HÖRMANDER, 1980), o qual denotamos por $\mathscr{D}'_1(M)$.

A noção de traço apresentada no Capítulo 4 fornece sentido para o Problema de Dirichlet com a equação de Laplace:

$$\begin{cases} \Delta U = 0, & \text{em } \Omega \\ U = u_0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.5}$$

no caso em $u_0 \in \mathscr{D}'(\partial\Omega)$, interpretando a condição de contorno como o traço de U em $\partial\Omega$ é igual a u_0. No caso em que $\Omega = B$ é a bola unitária em $\mathbb{R}^{n+1}$, temos que a fórmula integral de Poisson

$$U(x) = \frac{1-|x|^2}{(n+1)\omega_{n+1}} \int_{\partial B} \frac{u_0(y)}{|x-y|^{n+1}} \, \mathrm{d}S_y$$

fornece as soluções para o problema (1.5) quando $u_0 \in C(\partial B)$.

No Capítulo 4 apresentamos um Teorema onde mostramos que a fórmula integral de Poisson contínua fornecendo solução para o problema (1.5) no caso em que $u_0 \in \mathscr{D}'(\partial B)$. Para formular e demonstrar tal Teorema foi necessário olhar a distribuição u_0 como um funcional linear contínuo sobre o espaço $C^\infty(\partial\Omega)$, por este motivo apresentamos no Capítulo 4 o espaço dos funcionais lineares contínuos sobre $C^\infty(M)$, denotado por $\mathscr{E}'(M)$, onde M é uma variedade suave. A conexão entre os espaços de distribuições $\mathscr{D}'_1(M)$ e $\mathscr{E}'(M)$ é feita por um terceiro espaço de distribuições apresentado no Capítulo 4, denotado por $\mathscr{D}'_2(M)$.

No Capítulo 2 são apresentados alguns conceitos básicos da Teoria das distribuições e da Análise de Fourier que serão utilizados nos Capítulos 3 e 4.

CAPÍTULO

2

PRELIMINARES

2.1 Nets

Como sabemos a convergência de sequências caracteriza a topologia de um espaço métrico, já que caracteriza seus fechados. No entanto, o mesmo não ocorre em um espaço topológico qualquer. Por exemplo, seja $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ o conjunto das sequências em $\mathbb{R}$ munido com a topologia box, isto é, a topologia gerada pela base

$$\mathscr{B} = \left\{ \prod_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j) : j \in \mathbb{N} \text{ e } a_j < b_j \right\}.$$

É imediato que $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ é denso em $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, no entanto dada qualquer sequência $(x^k) \subset \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ onde $x^k = (x_1^k, x_2^k, ...)$, existe $B \in \mathscr{B}$ tal que $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, ...) \in B$ e $B \cap \{x^k : k \in \mathbb{N}\} = \emptyset$. De fato, basta usar o argumento diagonal de Cantor considerando

$$B = \prod_{j=1}^{\infty} \left(\sqrt{2} - |x_j^j - \sqrt{2}|, \sqrt{2} + |x_j^j - \sqrt{2}| \right).$$

Portanto, não existe uma sequência em $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ que converge para $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, ...)$.

Para caracterizar um espaço topológico qualquer a partir da convergência de determinados objetos necessitamos que esses objetos sejam um pouco mais gerais que as sequências. Esses objetos são os nets.

Definição 1. Um conjunto dirigido é um conjunto Υ munido de uma relação binária $\lesssim$ que satisfaz:

(i) $\alpha \lesssim \alpha$ para todo $\alpha \in \Upsilon$.

(ii) Se $\alpha, \beta, \gamma \in \Upsilon$ são tais que $\alpha \lesssim \beta$ e $\beta \lesssim \gamma$ então $\alpha \lesssim \gamma$.

(iii) Dados $\alpha, \beta \in \Upsilon$ existe $\gamma \in \Upsilon$ tal que $\alpha \lesssim \gamma$ e $\beta \lesssim \gamma$.

Neste caso, dizemos também que $\lesssim$ é uma pré-ordem filtrante, onde pré-ordem se refere a relação $\lesssim$ satisfazer (i) e (ii) e filtrante se refere a relação $\lesssim$ satisfazer (iii).

Um net em um conjunto X é uma aplicação $\Upsilon \ni \alpha \mapsto x_\alpha \in X$, de um conjunto dirigido Υ em X. Indicaremos tal net por $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha\in\Upsilon}$ ou simplesmente por $\langle x_\alpha \rangle$ quando estiver claro qual é o conjunto dirigido Υ em questão.

Exemplo 1. $\mathbb{N}$ é um conjunto dirigido com a pré-ordem filtrante $\leq$.

Exemplo 2. Seja M um espaço métrico e $a \in M$, $M\backslash\{a\}$ é um conjunto dirigido com a relação $\lesssim$ definida por:

$$x \lesssim y \Longleftrightarrow d(x,a) \geq d(y,a).$$

Exemplo 3. Dado um intervalo $[a,b]$ o conjunto $\mathscr{P}$ de todas as partições de $[a,b]$ é um conjunto dirigido com a relação $\lesssim$ definida por:

$$P \lesssim Q \Longleftrightarrow \|Q\| \leq \|P\|.$$

Exemplo 4. Seja X um espaço topológico e $x \in X$, o conjunto $\mathscr{N}_x$ de todas as vizinhanças de x é um conjunto dirigido pela inclusão inversa, isto é, dados $U,V \in \mathscr{N}_x$ dizemos que $U \lesssim V$ quando $V \subset U$.

Exemplo 5. Se Υ_1, Υ_2 são conjuntos dirigidos pelas relações $\lesssim_1$ e $\lesssim_2$, então $\Upsilon_1 \times \Upsilon_2$ fica dirigido com a relação $\lesssim$ definida por:

$$(\alpha,\beta) \lesssim (\alpha',\beta') \Longleftrightarrow \alpha \lesssim_1 \alpha' \text{ e } \beta \lesssim_2 \beta'.$$

Definição 2. Seja $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha\in\Upsilon}$ um net em X e $E \subset X$. Dizemos que,

(a) $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha\in\Upsilon}$ está eventualmente em E quando existe $\alpha_0 \in \Upsilon$ tal que $x_\alpha \in E$ sempre que $\alpha \gtrsim \alpha_0$.

(b) $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha\in\Upsilon}$ está frequentemente em E quando para todo $\alpha \in \Upsilon$ existe $\beta \in \Upsilon$ com $\beta \gtrsim \alpha$ e $x_\beta \in E$.

Se X é um espaço topológico, dizemos que um net $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha\in\Upsilon}$ converge para $x \in X$ quando dada qualquer vizinhança U de x o net $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha\in\Upsilon}$ está eventualmente em U e denotamos esta convergência por $x_\alpha \xrightarrow[\alpha\in\Upsilon]{X} x$ ou simplesmente por $x_\alpha \to x$.

Dizemos também que x é um valor de aderência de $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha\in\Upsilon}$ quando para toda vizinhança U de x o net $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha\in\Upsilon}$ está frequentemente em U.

Proposição 1. Seja X um espaço topológico, E um subconjunto de X e $x \in X$. Então:

(a) $x \in \overline{E}$ se, e somente se, existe um net $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha\in\Upsilon}$ em E tal que $x_\alpha \xrightarrow[\alpha\in\Upsilon]{X} x$.

(b) $x \in E'$ se, e somente se, existe um net $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha\in\Upsilon}$ em $E\backslash\{x\}$ tal que $x_\alpha \xrightarrow[\alpha\in\Upsilon]{X} x$.

Demonstração. (a) Seja $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha \in \Upsilon}$ em E tal que $x_\alpha \xrightarrow[\alpha \in \Upsilon]{X} x$. Dada uma vizinhança U de x existe $\alpha_0 \in \Upsilon$ tal que $x_\alpha \in U$ para todo $\alpha \gtrsim \alpha_0$, em particular, $x_{\alpha_0} \in U \cap E$, logo $U \cap E \neq \emptyset$. Portanto, $x \in \overline{E}$.

Reciprocamente, suponhamos que $x \in \overline{E}$ e para cada vizinhança U de x seja $x_U \in U$, assim o conjunto $\mathcal{N}_x$ de todas as vizinhanças de x dirigido pela inclusão inversa, obtemos o net $\langle x_U \rangle_{U \in \mathcal{N}_x}$. Dada uma vizinhança U_0 de x, para todo $U \subset U_0$ temos que $x_U \in U \subset U_0$. Portanto, $x_U \xrightarrow[U \in \mathcal{N}_x]{} x$.

(b) Temos que $x \in E'$ se, e somente se, $x \in \overline{E \backslash \{x\}}$, logo o (b) segue de (a). □

O próximo resultado nos mostra que assim como a continuidade de uma função entre espaços métricos é descrita através da convergência das sequências, a continuidade de uma função entre espaços topológicos é descrita através da convergência dos nets.

Proposição 2. Sejam X, Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma função. Então f é contínua em um ponto $x \in X$ se, e somente se, para todo $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha \in \Upsilon}$ em X tal que $x_\alpha \xrightarrow[\alpha \in \Upsilon]{X} x$ temos que $f(x_\alpha) \xrightarrow[\alpha \in \Upsilon]{Y} f(x)$.

Demonstração. Suponhamos que f é contínua em $x \in X$ e seja $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha \in \Upsilon}$ em X tal que $x_\alpha \xrightarrow[\alpha \in \Upsilon]{X} x$. Se $V \in \mathcal{N}_{f(x)}$ então $f^{-1}(V) \in \mathcal{N}_x$, logo existe $\alpha_0 \in \Upsilon$ tal que $x_\alpha \in f^{-1}(V)$ para todo $\alpha \gtrsim \alpha_0$, então $f(x_\alpha) \in V$ para todo $\alpha \in \alpha_0$. Portanto $f(x_\alpha) \xrightarrow[\alpha \in \Upsilon]{Y} f(x)$.

Reciprocamente, se f não é contínua em x existe $V \in \mathcal{N}_x$ tal que $f^{-1}(V) \notin \mathcal{N}_x$, ou seja, $x \notin \operatorname{int}(f^{-1}(V))$, ou ainda, $x \in [\operatorname{int}(f^{-1}(V))]^c = \overline{[f^{-1}(V)]^c} = \overline{f^{-1}(V^c)}$. Então pela proposição anterior existe $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha \in \Upsilon}$ em $f^{-1}(V^c)$ tal que $x_\alpha \xrightarrow[\alpha \in \Upsilon]{X} x$. Por outro lado, como $\langle f(x_\alpha) \rangle_{\alpha \in \Upsilon}$ é um net em V^c segue que $\langle f(x_\alpha) \rangle_{\alpha \in \Upsilon}$ não converge para $f(x)$. □

Proposição 3. Sejam X, Y espaços topológicos e consideremos $X \times Y$ munido com a topologia produto. Um net $\langle (x_\alpha, y_\alpha) \rangle_{\alpha \in \Upsilon}$ em $X \times Y$ converge para $(x, y) \in X \times Y$ se, e somente se, $x_\alpha \xrightarrow[\alpha \in \Upsilon]{X} x$ em X e $y_\alpha \xrightarrow[\alpha \in \Upsilon]{Y} y$ em Y.

Demonstração. Suponhamos que o net $\langle (x_\alpha, y_\alpha) \rangle_{\alpha \in \Upsilon}$ em $X \times Y$ converge para $(x, y) \in X \times Y$, então dadas uma vizinhança U de x e uma vizinhança V de y, como $U \times V$ é uma vizinhança de (x, y), existe $\alpha_0 \in \Upsilon$ tal que $(x_\alpha, y_\alpha) \in U \times V$ para todo $\alpha \gtrsim \alpha_0$, ou ainda, $x_\alpha \in U$ e $y_\alpha \in V$ para todo $\alpha \gtrsim \alpha_0$. Portanto, $x_\alpha \xrightarrow[\alpha \in \Upsilon]{X} x$ e $y_\alpha \xrightarrow[\alpha \in \Upsilon]{Y} y$.

Reciprocamente, suponhamos que $x_\alpha \xrightarrow[\alpha \in \Upsilon]{X} x$ e $y_\alpha \xrightarrow[\alpha \in \Upsilon]{Y} y$. Dada uma vizinhança W de (x, y), da definição da topologia produto, existem vizinhanças U de x e V de y tais que $U \times V \subset W$. Por outro lado, das convergências $x_\alpha \xrightarrow[\alpha \in \Upsilon]{X} x$ e $y_\alpha \xrightarrow[\alpha \in \Upsilon]{Y} y$, existem $\alpha_1, \alpha_2 \in \Upsilon$ tais que $x_\alpha \in U$ para todo $\alpha \gtrsim \alpha_1$ e $y_\alpha \in V$ para todo $\alpha \gtrsim \alpha_2$. Tomando $\alpha_0 \in \Upsilon$ tal que $\alpha_0 \gtrsim \alpha_1$ e $\alpha_0 \gtrsim \alpha_2$, obtemos que $x_\alpha \in U$ e $y_\alpha \in V$ para todo $\alpha \gtrsim \alpha_0$, logo $(x_\alpha, y_\alpha) \in U \times V \subset W$ para todo $\alpha \gtrsim \alpha_0$. Portanto, $\langle (x_\alpha, y_\alpha) \rangle_{\alpha \in \Upsilon} \xrightarrow[\alpha \in \Upsilon]{X \times Y} (x, y)$. $\square$

2.2 Espaços vetoriais topológicos

Por vezes em alguns espaços vetoriais é necessário considerar uma topologia que não é gerada por uma norma. Entretanto é muito interessante quando tal topologia se comporta bem com a estrutura algébrica do espaço vetorial, como é o caso dos espaços vetoriais topológicos que definiremos a seguir.

Definição 3. Um espaço vetorial topológico é um espaço vetorial X sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), munido de uma topologia de modo que as aplicações soma $s : X \times X \to X$ e multiplicação de escalar por vetor $m : \mathbb{K} \times X \to X$ definidas por

$$s(x, y) = x + y \quad \text{e} \quad m(\lambda, x) = \lambda x$$

são contínuas.

Definição 4. Seja X um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, uma seminorma em X é uma função $p : X \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $p(x) \geq 0$

(ii) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$

(iii) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$

para quaisquer $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.

Assim como uma norma gera uma topologia em um espaço vetorial normado através das bolas que tal norma define, a definição abaixo nos mostra um processo para obter uma topologia para um espaço vetorial através de uma família de seminormas.

Definição 5. Seja X um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e Λ uma família de seminormas em X. Dizemos que a família de seminormas Λ é separante se $p(x) = 0$ para todo $p \in \Lambda$ somente quando $x = 0$.

Dados $x \in X$, $p \in \Lambda$ e $r > 0$, seja $B_p(x, r) := \{y \in X; p(x - y) < r\}$. O conjunto,

$$\left\{ U \subset X; \forall x \in U \text{ existem } N \in \mathbb{N},\ p_j \in \Lambda \text{ para } j = 1, \ldots, N \text{ e } r > 0 \text{ tais que } \bigcap_{j=1}^{N} B_{p_j}(x, r) \subset U \right\}$$

é uma topologia em X, a qual chamamos de topologia gerada pela família de seminormas Λ.

Seja X um espaço vetorial munido de uma família de seminormas Λ, sempre que nada for dito, estaremos considerando em X a topologia gerada pela família de seminormas Λ.

Segue diretamente da definição anterior que $B_p(x,r)$ é um aberto em X para quaisquer $p \in \Lambda$, $x \in X$ e $r > 0$ e que

$$\mathscr{B} = \left\{ \bigcap_{j=1}^{N} B_{p_j}(x,r); x \in X, r > 0, N \in \mathbb{N} \text{ e } p_j \in \Lambda \text{ para } j = 1,...,N \right\} \tag{2.1}$$

é uma base para a topologia de X.

Teorema 1. Seja X um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ munido de uma família de seminormas Λ. Então

(a) Um net $\langle x_\beta \rangle_{\beta \in \Upsilon}$ converge para $x \in X$ se, e somente se, $p(x_\beta - x) \xrightarrow[\beta \in \Upsilon]{} 0$ para todo $p \in \Lambda$.

(b) X é um espaço vetorial topológico.

(c) X é Hausdorff se, e somente se, Λ é separante.

Demonstração. (a) Suponhamos que o net $\langle x_\beta \rangle_{\beta \in B}$ converge para $x \in X$. Então, dados $p \in \Lambda$ e $\varepsilon > 0$, como $B_p(x,\varepsilon)$ é uma vizinhança de x, existe $\beta_0 \in \Upsilon$ tal que $x_\beta \in B_p(x,\varepsilon)$ para todo $\beta_0 \in \Upsilon$ tal que $\beta \gtrsim \beta_0$. Logo $p(x_\beta - x) < \varepsilon$ para todo $\beta \gtrsim \beta_0$. Portanto, $p(x_\beta - x) \xrightarrow[\beta \in \Upsilon]{} 0$.

Reciprocamente, suponhamos que $p(x_\beta - x) \xrightarrow[\beta \in \Upsilon]{} 0$ para toda $p \in \Lambda$. Dada uma vizinhança U de x, da definição da topologia de X, existem $N \in \mathbb{N}$, $p_j \in \Lambda$ para $j = 1,...,N$ e $r > 0$ tais que $x \in \bigcap_{j=1}^{N} B_{p_j}(x,r) \subset U$. Da hipótese, para cada $j = 1,...,N$ existe β_j tal que $p_j(x_\beta - x) < r$ para todo $\beta \gtrsim \beta_j$. Tomando $\beta_0 \in \Upsilon$ tal que $\beta_0 \gtrsim \beta_j$ para todo $j = 1,...,N$, obtemos que $p_j(x_\beta - x) < r$ para quaisquer $\beta \gtrsim \beta_0$ e $j \in \{1,...,N\}$, logo $x_\beta \in \bigcap_{j=1}^{N} B_{p_j}(x,r) \subset U$ para todo $\beta \gtrsim \beta_0$ e portanto $x_\beta \xrightarrow[\beta \in \Upsilon]{X} x$.

(b) Seja $\langle (x_\beta, y_\beta) \rangle_{\beta \in \Upsilon}$ um net em $X \times X$ que converge para $(x,y) \in X \times X$, então $x_\beta \xrightarrow[\beta \in \Upsilon]{X} x$ e $y_\beta \xrightarrow[\beta \in \Upsilon]{X} y$. Dado $p \in \Lambda$, por (a), temos que $p(x_\beta - x) \xrightarrow[\beta \in \Upsilon]{} 0$ e $p(y_\beta - y) \xrightarrow[\beta \in \Upsilon]{} 0$. Como

$$p(s(x_\beta, y_\beta) - s(x,y)) = p(x_\beta + y_\beta - (x+y)) \leq p(x_\beta - x) + p(y_\beta - y),$$

segue que $p(s(x_\beta, y_\beta) - s(x,y)) \xrightarrow[\beta \in \Upsilon]{} 0$. Novamente por (a), segue que $s(x_\beta, y_\beta) \xrightarrow[\beta \in \Upsilon]{X} s(x,y)$ e portanto s é contínua.

Analogamente, usando a desigualdade

$$p(\lambda_\beta x_\beta - \lambda x) = p(\lambda_\beta (x_\beta - x) + (\lambda_\beta - \lambda)x) \leq |\lambda_\beta| p(x_\beta - x) + |\lambda_\beta - \lambda| p(x)$$

e o item (a), obtemos que a aplicação produto de escalar por vetor é contínua.

(c) Suponhamos que X é Hausdorff e seja $x \in X \backslash \{0\}$. Temos que existem abertos disjuntos U e V tais que $x \in U$ e $0 \in V$, pela definição da topologia em X, existem $N \in \mathbb{N}$, $p_j \in \Lambda$ para $j = 1, ..., N$ e $r > 0$ tais que $\bigcap_{j=1}^{N} B_{p_j}(x, r) \subset U$. Segue que $0 \notin \bigcap_{j=1}^{N} B_{p_j}(x, r)$, logo existe $k \in \{1, 2 \ldots, N\}$ tal que $0 \notin B_{p_k}(x, r)$ e então $p_k(x) = p_k(x - 0) \geq r > 0$. Portanto Λ é separante.

Por outro lado, se Λ é separante, dados $x, y \in X$ com $x \neq y$, existe $p \in \Lambda$ tal que $p(x - y) > 0$. Sejam $r = p(x - y)$, $\overline{x} \in B_p\left(x, \frac{r}{2}\right)$ e $\overline{y} \in B_p\left(y, \frac{r}{2}\right)$, temos que

$$p(\overline{x} - \overline{y}) \geq p(x - \overline{y}) - p(x - \overline{x}) \geq p(x - y) - p(\overline{y} - y) - p(x - \overline{x}) > r - \frac{r}{2} - \frac{r}{2} = 0,$$

logo $x \neq y$. Portanto $B_p\left(x, \frac{r}{2}\right)$ e $B_p\left(y, \frac{r}{2}\right)$ são conjuntos abertos disjuntos, logo X é Hausdorff. □

Definição 6. Se X é um espaço vetorial topológico cuja topologia é gerada por uma família Λ de seminormas sobre X, dizemos que $X = (X, \Lambda)$ é um espaço vetorial topológico localmente convexo.

Observação 1. Seja $X = (X, \Lambda)$ um espaço vetorial topológico localmente convexo, observe que a base $\mathscr{B}$ para a topologia de X definida em (2.1) é formada por conjuntos convexos, pois dados $p \in \Lambda$, $x \in X$ e $r > 0$ o conjunto $B_p(x, r)$ é convexo. Além disso, se X é um espaço vetorial topológico cuja topologia possui uma base formada por conjuntos convexos é possível mostrar que tal topologia é gerada por uma família de seminormas (ver Capítulo 7 de (TREVES, 1967)).

Teorema 2. Sejam $X = (X, \Lambda_X)$ e $Y = (Y, \Lambda_Y)$ espaços vetoriais topológicos localmente convexos e $T : X \to Y$ é um operador linear. Então T é contínuo se, e somente se, dada $q \in \Lambda_Y$ existem $p_1, p_2, ..., p_N \in \Lambda_X$ e uma constante $C > 0$, tais que

$$q(Tx) \leq C \sum_{j=1}^{N} p_j(x)$$

para todo $x \in X$.

Demonstração. Suponhamos que T é contínuo, então dada $q \in \Lambda_Y$, como o conjunto $B_q^Y(0, 1) = \{y \in Y : q(y) < 1\}$ é um aberto que contém a origem, segue que $T^{-1}\left(B_q^Y(0, 1)\right)$ é um aberto que contém a origem. Consequentemente existem $p_1, p_2, ..., p_N \in \Lambda_X$ e $r > 0$, tais que

$$\bigcap_{j=1}^{n} B_{p_j}^X(0, r) \subset T^{-1}\left(B_q^Y(0, 1)\right).$$

Dado $x \in X$, temos dois casos: (i) $p_j(x) \neq 0$ para algum $j \in \{1, 2, ..., N\}$. Nesse caso, como

$$p_j\left(\frac{r}{2\sum_{k=1}^{N} p_k(x)} x\right) = \frac{r}{2} \frac{p_j(x)}{\sum_{k=1}^{N} p_k(x)} \leq \frac{r}{2} < r$$

para todo $j \in \{1, 2, ..., N\}$, temos que

$$\frac{r}{2\sum_{k=1}^{N} p_k(x)} x \in \bigcap_{j=1}^{n} B_{p_j}^X(0, r) \subset T^{-1}\left(B_q^Y(0, 1)\right).$$

Logo
$$q\left(T\left(\frac{r}{2\sum_{k=1}^{N}p_k(x)}x\right)\right)<1,$$
de onde segue que,
$$q(Tx)<\frac{2}{r}\sum_{k=1}^{N}p_k(x).$$
(ii) $p_j(x)=0$ para todo $j\in\{1,2,...,N\}$. Nesse caso, dado $t>0$, temos que $p_j(tx)=tp_j(x)=0$ para todo $j\in\{1,2,...,N\}$, logo
$$tx\in\bigcap_{j=1}^{n}B^X_{p_j}(0,r)\subset T^{-1}\left(B^Y_q(0,1)\right)$$
e então $tq(Tx)=q(T(tx))<1$. Temos assim que
$$q(Tx)<\frac{1}{t}$$
para todo $t>0$ e portanto $q(Tx)=0$. Com isso,
$$q(Tx)=0\leq 0=\frac{2}{r}\sum_{k=1}^{N}p_k(x).$$
□

Note que, quando $(X,\|\cdot\|_X)$ é um espaço normado, a topologia em X gerada pela família unitária de seminormas $\{\|\cdot\|_X\}$ é exatamente a topologia induzida pela norma $\|\cdot\|_X$, dessa forma o seguinte Corolário é um caso particular do Teorema 2.

Corolário 1. Sejam $X=(X,\Lambda)$ um espaço vetorial topológico localmente convexo e $f:X\to\mathbb{K}$ é um funcional linear. Temos que f é contínuo se, e somente se, existem $p_1,p_2,...,p_N\in\Lambda$ e uma constante $C>0$ tais que
$$|f(x)|\leq C\sum_{j=1}^{N}p_j(x)$$
para qualquer $x\in X$.

A seguir são apresentados alguns exemplos de espaços vetoriais topológicos localmente convexos.

Exemplo 6 (O Espaço $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ **).** Sejam $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ um aberto, $A=\{K\subset\Omega; K \text{ é compacto}\}$ e
$$L^1_{\text{loc}}(\Omega):=\{f:\Omega\to\mathbb{C}; f \text{ é mensurável e } f|_K\in L^1(K) \text{ para qualquer } K\subset\Omega \text{ compacto}\}.$$
A família de seminormas $\{P_{L^1_{\text{loc}}(\Omega),K}\}_{K\in A}$ em $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ definidas por
$$P_{L^1_{\text{loc}}(\Omega),K}(f)=\int_K|f(x)|dx$$
é separante. Portanto $L^1_{\text{loc}}(\Omega)=\left(L^1_{\text{loc}}(\Omega),\{P_{L^1_{\text{loc}}(\Omega),K}\}_{K\in A}\right)$ é um espaço vetorial topológico localmente convexo e Hausdorff.

Exemplo 7 (**O** Espaço $C^m(\Omega)$). Ainda com $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e o mesmo A do Exemplo 6, dado $m \in \mathbb{Z}_+$, seja

$$C^m(\Omega) := \{\phi : \Omega \to \mathbb{C}; \phi \text{ é de classe } C^m\}.$$

A família de seminormas $\{P_{C^m(\Omega),K}\}_{K\in A}$, definidas por

$$P_{C^m(\Omega),K}(\phi) = \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_K |\partial^\alpha \phi|$$

é separante. Então $C^m(\Omega) = \left(C^m(\Omega), \{P_{C^m(\Omega),K}\}_{K\in A}\right)$ é um espaço vetorial topológico localmente convexo e Hausdorff.

Exemplo 8 (**O** Espaço $C^\infty(\Omega)$). Ainda com $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e o mesmo A do Exemplo 6, seja

$$C^\infty(\Omega) := \{\phi : \Omega \to \mathbb{C}; \phi \text{ é de classe } C^k \text{ para todo } k \in \mathbb{N}\}.$$

A família de seminormas $\{P_{C^\infty(\Omega),m,K}\}_{(m,K)\in\mathbb{Z}_+\times A}$ definidas por

$$P_{C^\infty(\Omega),m,K}(\phi) = \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_K |\partial^\alpha \phi|$$

é separante. Então $C^\infty(\Omega) = \left(C^\infty(\Omega), \{P_{C^\infty(\Omega),m,K}\}_{(m,K)\in\mathbb{Z}_+\times A}\right)$ é um espaço vetorial topológico localmente convexo e Hausdorff.

Exemplo 9 (**O** Espaço $C_c^\infty(K)$). Seja $E \subset \mathbb{R}^n$ definimos

$$C_c^\infty(E) := \{\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \text{supp}(\phi) \text{ é um compacto contido em } E\}$$

Dado um compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, a família de seminormas $\left\{P_{C_c^\infty(K),m}\right\}_{m\in\mathbb{Z}_+}$ em $C_c^\infty(K)$ definidas por

$$P_{C_c^\infty(K),m}(\phi) = \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha \phi|$$

é separante. Portanto $C_c^\infty(K) = \left(C_c^\infty(K), \left\{P_{C_c^\infty(K),m}\right\}_{m\in\mathbb{Z}_+}\right)$ é um espaço vetorial topológico localmente convexo e Hausdorff.

Exemplo 10 (**O** Espaço de Schwartz $\mathscr{S}$). Consideremos o espaço de Schwartz

$$\mathscr{S} := \left\{\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|)^N |\partial^\alpha \phi(x)| < \infty \quad \forall N \in \mathbb{Z}_+ \text{ e } \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n\right\}$$

munido da família de seminormas $\{\|\cdot\|_{(N,\alpha)}\}_{(N,\alpha)\in\mathbb{Z}_+\times\mathbb{Z}_+^n}$ definidas por

$$\|\phi\|_{(N,\alpha)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|)^N |\partial^\alpha \phi(x)|.$$

Como a família de seminormas $\{\|\cdot\|_{(N,\alpha)}\}_{(N,\alpha)\in\mathbb{Z}_+\times\mathbb{Z}_+^n}$ é separante, segue que $\mathscr{S} = \left(\mathscr{S}, \{\|\cdot\|_{(N,\alpha)}\}_{(N,\alpha)\in\mathbb{Z}_+\times\mathbb{Z}_+^n}\right)$ é um espaço vetorial topológico localmente convexo e Hausdorff.

A proposição a seguir nos mostra que se X é um espaço vetorial topológico, cuja a topologia é gerada por uma família enumerável e separante de seminormas, então X é metrizável.

Proposição 4. Sejam $X = (X, \{p_m\}_{m\in\mathbb{N}})$ um espaço vetorial topológico localmente convexo, munido de uma família enumerável e separante de seminormas $\{p_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, τ a topologia em X gerada por esta família de seminormas e $d : X \times X \to \mathbb{R}$ a aplicação definida por:

$$d(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_m(x-y)}{2^m(1+p_m(x-y))}. \tag{2.2}$$

Temos que d é uma métrica sobre X e sendo $\tilde{\tau}$ a topologia em X gerada pela métrica d, temos que $\tilde{\tau} = \tau$.

Demonstração. De fato, dados $x,y,z \in X$, temos que $d(x,y) = d(y,x) \geq 0$ e como a família de seminormas $\{p_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ é separante

$$\begin{aligned} d(x-y)=0 \ &\Leftrightarrow \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_m(x-y)}{2^m(1+p_m(x-y))} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{p_m(x-y)}{2^m(1+p_m(x-y))} = 0 \qquad \forall m \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow p_m(x-y) = 0 \qquad \forall m \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow x = y. \end{aligned}$$

Além disso, sendo $f : [0,\infty) \to [0,1)$ a função definida por

$$f(t) = \frac{t}{1+t}$$

para todo $t \geq 0$, temos que

$$f'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} > 0$$

para todo $t \geq 0$, logo f é crescente e então

$$\begin{aligned} &\frac{p_m(x-y)}{1+p_m(x-y)} + \frac{p_m(y-z)}{1+p_m(y-z)} = \frac{p_m(x-y)(1+p_m(y-z))+p_m(y-z)(1+p_m(x-y))}{(1+p_m(x-y))(1+p_m(y-z))} \\ &= \frac{p_m(x-y)+p_m(y-z)+2p_m(x-y)p_m(y-z)}{1+p_m(x-y)+p_m(y-z)+p_m(x-y)p_m(y-z)} \\ &\geq \frac{p_m(x-y)+p_m(y-z)+p_m(x-y)p_m(y-z)}{1+p_m(x-y)+p_m(y-z)+p_m(x-y)p_m(y-z)} \\ &= f(p_m(x-y)+p_m(y-z)+p_m(x-y)p_m(y-z)) \\ &\geq f(p_m(x-z)) = \frac{p_m(x-z)}{1+p_m(x-z)} \end{aligned}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Segue que $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ e portanto d é uma métrica sobre X. Como f é bijetiva e $f^{-1} : [0,1) \to [0,\infty)$ é dada por

$$f^{-1}(t) = \frac{t}{1-t},$$

temos que f^{-1} é contínua no ponto 0, logo dados $j \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f^{-1}(t) < \varepsilon$ para todo $t \in [0, 2^j\delta)$, assim

$$\begin{aligned} d(x,y) < \delta &\Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_m(x-y)}{2^m(1+p_m(x-y))} < \delta \\ &\Rightarrow f(p_j(x-y)) = \frac{p_j(x-y)}{(1+p_(x-y))} < 2^j\delta \\ &\Rightarrow p_j(x-y) = f^{-1}(f(p_j(x-y))) < \varepsilon \end{aligned}$$

e então temos que a aplicação identidade $Id\colon (X,\tilde{\tau}) \to (X,\tau)$ é continua, logo $\tau \subset \tilde{\tau}$. Por outro lado, dado $\varepsilon > 0$, seja $j \in \mathbb{N}$ tal que $2^{1-j} < \varepsilon$, temos que

$$\begin{aligned} & p_m(x-y) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall m = 1, \dots, j \\ \Rightarrow & \sum_{m=1}^{j} \frac{p_m(x-y)}{2^m(1+p_m(x-y))} < \sum_{m=1}^{j} \frac{\varepsilon}{2^{m+1}} < \frac{\varepsilon}{2} \\ \Rightarrow & d(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_m(x-y)}{2^m(1+p_m(x-y))} < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{m=j+1}^{\infty} \frac{1}{2^m} = \frac{\varepsilon}{2} + 2^{-j} < \varepsilon, \end{aligned}$$

logo a aplicação identidade $Id\colon (X,\tau) \to (X,\tilde{\tau})$ é continua. Portanto $\tilde{\tau} \subset \tau$. □

Definição 7. Seja X um espaço vetorial topológico e $(x_\alpha)_{\alpha\in\Upsilon}$ um net em X. Dizemos que $(x_\alpha)_{\alpha\in\Upsilon}$ é um net de Cauchy se $x_\alpha - x_\beta \xrightarrow[(\alpha,\beta)\in\Upsilon\times\Upsilon]{X} 0$. Dizemos que X é completo se todo net de Cauchy em X é convergente. Dizemos que X é sequencialmente completo se toda sequência de Cauchy é convergente.

Definição 8. Seja $X = (X, \{p_m\}_{m\in\mathbb{N}})$ um espaço vetorial topológico localmente convexo tal que a família enumerável de seminormas $\{p_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ é separante. Dizemos que $X = (X, \{p_m\}_{m\in\mathbb{N}})$ é um espaço de Fréchet se X é completo.

Lema 1 (Baire)**.** Seja X um espaço métrico completo e $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência de subconjuntos fechados em X. Se $\text{int}X_k = \emptyset$ para todo $k \in \mathbb{N}$, então

$$\text{int}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k\right) = \emptyset.$$

Demonstração. Ver (BRÉZIS, 2011). □

Se $X = (X, \{p_m\}_{m\in\mathbb{N}})$ é um espaço de Fréchet, temos que $X = (X,d)$ é um espaço métrico completo onde a métrica d é apresentada na Proposição 4. Logo o Lema de Baire é válido em espaços de Fréchet e podemos enunciar e demonstrar a seguinte generalização do Princípio da Limitação Uniforme:

Teorema 3 (Banach-Steinhaus)**.** Sejam $X = (X, \{p_m\}_{m\in\mathbb{N}})$ um espaço de Fréchet, $Y = (Y, \Lambda)$ um espaço vetorial topológico localmente convexo e $\mathscr{T}$ um conjunto de operadores lineares contínuos de X em Y. Dada $q \in \Lambda$, se

$$\sup_{T\in\mathscr{T}} q(Tx) < \infty$$

para todo $x \in X$, então existem $C > 0$ e $j \in \mathbb{N}$ tais que

$$q(Tx) \leq C \sum_{m=1}^{j} p_m(x)$$

para todo $x \in X$ e $T \in \mathscr{T}$.

Demonstração. Dado $m \in \mathbb{N}$, seja

$$X_m = \{x \in X : q(Tx) \leq m \text{ para todo } T \in \mathscr{T}\},$$

como

$$\sup_{T\in\mathscr{T}} q(Tx) < \infty$$

para todo $x \in X$, temos que

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} X_m = X.$$

Além disso, como todo $T \in \mathscr{T}$ é um operador contínuo e $q : Y \to \mathbb{R}$ é uma aplicação contínua, segue que

$$X_k = \bigcap_{T\in\mathscr{T}} T^{-1}\left(q^{-1}([0,k])\right)$$

é fechado em X. Como $\operatorname{int}X = X$ e $X \neq \emptyset$, segue do Lema de Baire que existe $k \in \mathbb{N}$, tal que $\operatorname{int}X_k \neq \emptyset$, então existem $y \in X_k$, $j \in \mathbb{N}$ e $r > 0$, tais que

$$\bigcap_{m=1}^{j} B_{p_m}(y,r) \subset X_k.$$

Dado $x \in X$, temos que

$$\frac{r}{2}\left(\sum_{m=1}^{j} p_m(x)\right)^{-1} x + y \in \bigcap_{m=1}^{j} B_{p_m}(y,r) \subset X_k,$$

logo

$$q\left(\frac{r}{2}\left(\sum_{m=1}^{j} p_m(x)\right)^{-1} Tx + Ty\right) \leq k$$

para todo $T \in \mathscr{T}$ e segue que

$$\frac{r}{2}\left(\sum_{m=1}^{j} p_m(x)\right)^{-1} q(Tx) - q(Ty) \leq k.$$

para todo $T \in \mathscr{T}$. Portanto

$$q(Tx) \leq \frac{2}{r}(k+q(Ty)) \sum_{m=1}^{j} p_m(x)$$

para todo $x \in X$ e $T \in \mathscr{T}$. $\square$

Corolário 2. Sejam $X = (X, \{p_m\}_{m\in\mathbb{N}})$ um espaço de Fréchet, $Y = (Y, \Lambda)$ um espaço vetorial topológico localmente convexo e $(T_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{L}(X,Y)$ uma sequência de operadores lineares contínuos. Se para todo $x \in X$ a sequência $(T_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ é convergente em Y, então o operador $T : X \to Y$ definido por

$$Tx = \lim_{k\to\infty} T_k x$$

pertence a $\mathscr{L}(X,Y)$.

Demonstração. Seja $p \in \Lambda$, temos que $p(T_k x - Tx) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, logo

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} p(T_k x) \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} [p(T_k x - Tx) + p(Tx)] = p(Tx) + \sup_{k\in\mathbb{N}} p(T_k x - Tx) < \infty$$

para todo $x \in X$. Pelo Teorema anterior, existem $C > 0$ e $j \in \mathbb{N}$ tais que

$$p(T_k(x)) \leq C \sum_{m=1}^{j} p_m((x))$$

para todo $x \in X$ e $k \in \mathbb{N}$. Logo fazendo $k \to \infty$ na estimativa acima, obtemos

$$p(T(x)) \leq C \sum_{m=1}^{j} p_m((x)),$$

para todo $x \in X$. Portanto $T \in \mathscr{L}(X,Y)$. $\square$

2.3 O espaço das funções teste $C_c^\infty(\Omega)$

Nesta seção apresentaremos o espaço $C_c^\infty(\Omega)$, o qual é fundamental para definir o conceito de distribuição.

Definição 9 (Espaço das funções teste $C_c^\infty(\Omega)$). Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, munimos o espaço $C_c^\infty(\Omega)$ com a topologia limite indutivo $\mathscr{T}_{\mathscr{D}}$ definida por

$$\mathscr{T}_{\mathscr{D}} := \{U \subset C_c^\infty(\Omega); U \cap C_c^\infty(K) \text{ é um aberto em } C_c^\infty(K) \text{ para todo } K \subset \Omega \text{ compacto } \}.$$

Podemos nos perguntar se $C_c^\infty(\Omega)$ não é o espaço trivial $\{0\}$, isto é, se existe alguma função $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\phi \neq 0$. A seguir, daremos um exemplo de tal ϕ.

Exemplo 11. Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ definida por

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{t}}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Verificamos facilmente por indução que para cada $k \in \mathbb{N}$ temos $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ e existe um polinômio P_k tal que,

$$f^{(k)}(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \leq 0 \\ P_k\left(\frac{1}{t}\right) e^{-\frac{1}{t}}, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

portanto $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Seja $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}}, & \text{se } \leq x \in B(0,1) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Temos que ϕ é a função f composta com a função $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto 1-|x|^2 \in \mathbb{R}$, como esta última função também é de classe C^∞ segue que $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Por outro lado $\operatorname{supp}(\phi) \subset \overline{B(0,1)}$, portanto $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $x_0 \in \Omega$ e $\varepsilon > 0$ tais que $\overline{B(0,\varepsilon)} \subset \Omega$, então temos que função $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $\psi(x) = \phi\left(\varepsilon^{-1}(x-x_0)\right)$ pertence a $C_c^\infty\left(\overline{B(0,\varepsilon)}\right) \subset C_c^\infty(\Omega)$.

Proposição 5. As inclusões $i_K : C_c^\infty(K) \to C_c^\infty(\Omega)$ com $K \subset \Omega$ compacto são contínuas. Além disso, $\mathscr{T}_\mathscr{D}$ é a maior topologia sobre $C_c^\infty(\Omega)$ que torna tais inclusões i_K contínuas.

Demonstração. Fixado $K \subset \Omega$ compacto, seja $U \subset C_c^\infty(\Omega)$ um aberto, temos que $i_K^{-1}(U) = U \cap C_c^\infty(K)$ é um aberto em $C_c^\infty(K)$ pela definição da topologia de $C_c^\infty(\Omega)$. Portanto, $i_K : C_c^\infty(K) \to C_c^\infty(\Omega)$ é contínua. Por outro lado, se $\mathscr{T}$ é outra topologia sobre $C_c^\infty(\Omega)$ que torna as inclusões $i_K : C_c^\infty(K) \to C_c^\infty(\Omega)$ com $K \subset \Omega$ compacto contínuas, então dado $U \in \mathscr{T}$ e $K \subset \Omega$ compacto, temos que $U \cap C_c^\infty(K) = i_K^{-1}(U)$ é um aberto em $C_c^\infty(K)$, logo $U \in \mathscr{T}_\mathscr{D}$. □

Proposição 6. Sejam X um espaço topológico e $f : C_c^\infty(\Omega) \to X$ uma função. Então f é contínua se, e somente se, sua restrição $f|_{C_c^\infty(K)} : C_c^\infty(K) \to X$ é contínua para qualquer $K \subset \Omega$ compacto.

Demonstração. Suponhamos que f é contínua e seja $K \subset \Omega$ compacto, temos então que $f|_{C_c^\infty(K)} = f \circ i_K$ é contínua pela Proposição 5. Reciprocamente, se dado $K \subset \Omega$ compacto temos $f|_{C_c^\infty(K)} : C_c^\infty(K) \to X$ contínua, então para $U \subset X$ aberto $f^{-1}(U) \cap C_c^\infty(K) = f|_{C_c^\infty(K)}^{-1}(U)$ é um aberto em $C_c^\infty(K)$. Como o compacto $K \subset \Omega$ é tomado arbitrariamente, segue que $f^{-1}(U)$ é um aberto em $C_c^\infty(\Omega)$. □

Proposição 7. Seja $f : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ um funcional linear, então f é contínuo se, e somente se, para todo $K \subset \Omega$ compacto existe $m \in \mathbb{Z}_+$ e uma constante $C > 0$ tais que

$$|f(\phi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq j} \sup_{\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha \phi|,$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(K)$.

Demonstração. Segue imediatamente da Proposição 6 e do Corolário 1. □

2.4 O espaço das distribuições $\mathscr{D}'(\Omega)$

Nesta seção apresentamos o espaço das distribuições $\mathscr{D}'(\Omega)$ e algumas propriedades deste espaço.

Definição 10. Seja X um espaço vetorial topológico, o dual de X, o qual denotamos por X' é o espaço de todos os funcionais lineares contínuos sobre X. Munimos X' com a família de seminormas $\{P_{X',x}\}_{x \in X}$ definidas por

$$P_{X',x}(f) = |\langle f, x \rangle|$$

para toda $f \in X'$.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, o espaço das distribuições, denotado por $\mathscr{D}'(\Omega)$, é o dual do espaço das funções teste $C_c^\infty(\Omega)$. Isto é, uma distribuição é um funcional linear contínuo $f : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$.

Observe que a Proposição 7 nos dá uma caracterização para as distribuições.

Exemplo 12. Seja $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, temos que $\widetilde{f} : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ definida por

$$\langle \widetilde{f}, \phi \rangle = \int_\Omega f\phi$$

é uma distribuição. De fato, é evidente que $\widetilde{f}$ é linear, além disso, dado $K \in \Omega$ temos que

$$|\langle \widetilde{f}, \phi \rangle| = \left| \int_\Omega f\phi \right| = \left| \int_K f\phi \right| \leq \int_K |f\phi| \leq \left(\int_K |f| \right) \sup_{\mathbb{R}^n} |\phi|,$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(K)$. Pela Proposição 7, $\widetilde{f} \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Temos ainda que a aplicação $L^1_{\text{loc}}(\Omega) \ni f \mapsto \widetilde{f} \in \widetilde{f} \in \mathscr{D}'(\Omega)$ é linear, injetiva e contínua. A linearidade de tal aplicação é evidente e a injetividade é obtida por consequência do Teorema da diferenciação de Lebesgue (ver (FOLLAND, 1999), página 98). Já a continuidade segue pelo Teorema 2, pois

$$P_{\mathscr{D}'(\Omega),\phi}(\widetilde{f}) = |\langle \widetilde{f}, \phi \rangle| \leq \left(\sup_{\mathbb{R}^n} |\phi| \right) \int_{\text{supp}(\phi)} |f| = \left(\sup_{\mathbb{R}^n} |\phi| \right) P_{L^1_{\text{loc}}(\Omega),\text{supp}(\phi)}(f)$$

para quaisquer $\phi \in C_c^\infty(K)$ e $f \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Como é usual, iremos identificar a função f com a distribuição $\widetilde{f}$, nesse sentido, temos que $L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathscr{D}'(\Omega)$.

O Exemplo 12, mostra que $\mathscr{D}'(\Omega)$ contém todas a funções de $L^1_{loc}(\Omega)$, é natural nos perguntar se existe alguma distribuição que não seja uma função de $L^1_{loc}(\Omega)$. A seguir temos um exemplo de uma distribuição deste tipo.

Exemplo 13. Seja $\delta : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ definida por

$$\langle \delta, \phi \rangle = \phi(0).$$

Segue da Proposição 7 que δ é uma distribuição, conhecida como a distribuição delta de Dirac.

Suponhamos que $\delta = f$ para alguma $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, como

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\phi = \langle f, \phi \rangle = \langle \delta, \phi \rangle = \phi(0) = 0$$

para qualquer $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$, segue $f = 0$ quase sempre em $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. Assim

$$\langle \delta, \phi \rangle = \langle f, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f\phi = 0$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, o que contraria a existência de $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\phi(0) = 1$, já que neste caso teremos $\langle \delta, \phi \rangle = \phi(0) = 1$. Portanto, $\phi \notin L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Segue do Princípio da Limitação Uniforme (Teorema 3) o seguinte resultado.

Proposição 8. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathscr{D}'(\Omega)$. Suponhamos que para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ o limite $\lim_{k\to\infty} \langle u_k, \varphi \rangle$ existe. Seja $u : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ o funcional definido por

$$\langle u, \varphi \rangle = \lim_{k\to\infty} \langle u_k, \varphi \rangle$$

para toda função teste $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Temos que $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$.

Em particular, $\mathscr{D}'(\Omega)$ é um espaço sequencialmente completo.

Demonstração. A linearidade de u segue da linearidade do limite. Mostraremos que $u : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ é contínuo. Seja $K \subset \Omega$ compacto, temos que $\left\langle (u_k)|_{C_c^\infty(K)}, \varphi \right\rangle \xrightarrow[k\to\infty]{} \left\langle u|_{C_c^\infty(K)}, \varphi \right\rangle$ para toda $\varphi \in C_c^\infty(K)$. Então, como $C_c^\infty(K)$ é um espaço de Fréchet, segue do Corolário 2 que $u|_{C_c^\infty(K)} : C_c^\infty(K) \to \mathbb{C}$ é contínuo. Então, pela Proposição 6, temos que $u : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ é contínuo. Portanto $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$.

Em particular, se $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $\mathscr{D}'(\Omega)$, então o limite $\lim_{k\to\infty} \langle u_k, \varphi \rangle$ existe para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Seja $u : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ o funcional definido por

$$\langle u, \varphi \rangle = \lim_{k\to\infty} \langle u_k, \varphi \rangle$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, temos que $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ e $u_k \xrightarrow[k\to\infty]{\mathscr{D}'(\Omega)} u$. Portanto $\mathscr{D}'(\Omega)$ é sequencialmente completo. $\square$

2.5 Operações com distribuições

Definição 11. Sejam $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$ abertos e $L : C_c^\infty(\Omega) \to C_c^\infty(\Omega')$, $L' : C_c^\infty(\Omega') \to C_c^\infty(\Omega)$ operadores lineares contínuos tais que

$$\int_{\Omega'} (L\phi)\psi = \int_{\Omega} \phi(L'\psi),$$

para quaisquer $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ e $\psi \in C_c^\infty(\Omega')$. Dizemos que L' é o transposto formal de L e vice-versa.

Dado um operador L como na definição anterior, seu transposto formal L' nos dá uma maneira natural de criar uma extensão $\widetilde{L} : \mathscr{D}'(\Omega) \to \mathscr{D}'(\Omega')$ do operador L. Com efeito, definimos $\widetilde{L} : \mathscr{D}'(\Omega) \to \mathscr{D}'(\Omega')$ por

$$\langle \widetilde{L}u, \psi \rangle = \langle u, L'\psi \rangle$$

para quaisquer $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ e $\psi \in C_c^\infty(\Omega')$.

Observe que de fato $\widetilde{L}u \in \mathscr{D}'(\Omega')$ já que $\widetilde{L}u = u \circ L'$ é a composição de aplicações lineares e contínuas. Note também que

$$\langle \widetilde{L}\phi, \psi \rangle = \langle \phi, L'\psi \rangle = \int_{\Omega'} \phi(L'\psi) = \int_{\Omega} (L\phi)\psi = \langle L\phi, \psi \rangle,$$

para quaisquer $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ e $\psi \in C_c^\infty(\Omega')$, portanto $\widetilde{L}\phi = L\phi$. Por fim, temos que $\widetilde{L} : \mathscr{D}'(\Omega) \to \mathscr{D}'(\Omega')$ é linear e contínuo. A linearidade é evidente e a continuidade segue do Teorema 2, já que dada $\psi \in C_c^\infty(\Omega')$

$$P_{\mathscr{D}'(\Omega'),\psi}(\widetilde{L}u) = |\langle \widetilde{L}u, \psi \rangle| = |\langle u, L'\psi \rangle| = P_{\mathscr{D}'(\Omega),L'\psi}(u)$$

para toda $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$.

Exemplo 14 (Derivação)**.** Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $j \in \{1, 2, ..., n\}$ e consideremos o operador linear $L : C_c^\infty(\Omega) \to C_c^\infty(\Omega)$ definido por

$$L\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_j}.$$

O operador L é contínuo. De fato, dado $K \subset \Omega$ compacto e $\phi \in C_c^\infty(K)$, temos que $L\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \in C_c^\infty(K)$, além disso, dado $m \in \mathbb{K}$ temos que

$$\begin{aligned} P_{C_c^\infty(K),m}(L\phi) = P_{C_c^\infty(K),m}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right) &= \sum_{|\alpha| \le m} \sup \left| \partial^\alpha \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right) \right| \\ &= \sum_{|\alpha| \le m} \sup \left| \partial^{\alpha + e_j} \phi \right| \le \sum_{|\beta| \le m+1} \sup \left| \partial^\beta \phi \right| = P_{C_c^\infty(K),m+1}(\phi). \end{aligned}$$

Segue então que $L|_{C_c^\infty(K)} : C_c^\infty(K) \to C_c^\infty(K)$ é contínuo, assim das Proposições 5 e 6 concluímos que L é contínuo. Note ainda que dadas $\phi, \psi \in C_c^\infty(\Omega)$, tomando $r > 0$ tal que $\phi(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$

sempre que $x_j \notin (-r,r)$, temos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (L\phi)\psi &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\psi = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_j} \psi(x)\, dx_j \right) d\widehat{x} \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-r}^{r} \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_j} \psi(x)\, dx_j \right) d\widehat{x} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-r}^{r} \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_j} \psi(x)\, dx_j \right) d\widehat{x} \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\phi(r)\psi(r) - \phi(-r)\psi(-r) - \int_{\mathbb{R}} \phi(x) \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_j}\, dx_j \right) d\widehat{x} \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(- \int_{\mathbb{R}} \phi(x) \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_j}\, dx_j \right) d\widehat{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \phi \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right),
\end{aligned}$$

onde $\widehat{x}$ representa a (n-1)-upla obtida ao retirar a j-ésima coordenada de x. Portanto, o transposto formal do operador $\frac{\partial}{\partial x_j}$ é o operador $-\frac{\partial}{\partial x_j}$. Logo estendemos o operador $\frac{\partial}{\partial x_j} : C_c^\infty(\Omega) \to C_c^\infty(\Omega)$ ao operador $\frac{\partial}{\partial x_j} : \mathscr{D}'(\Omega) \to \mathscr{D}'(\Omega)$ pondo

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \phi \right\rangle = - \left\langle u, \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right\rangle,$$

para quaisquer $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ e $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Em geral, dado um multi-índice $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ o transposto formal do operador $\partial^\alpha : C_c^\infty(\Omega) \to C_c^\infty(\Omega)$ é o operador $(-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha : C_c^\infty(\Omega) \to C_c^\infty(\Omega)$. Logo definimos $\partial^\alpha : \mathscr{D}'(\Omega) \to \mathscr{D}'(\Omega)$ por

$$\langle \partial^\alpha u, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \phi \rangle$$

para quaisquer $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ e $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Exemplo 15 (**M**ultiplicação por uma função C^∞**).** Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $f \in C^\infty(\Omega)$ e $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Temos que $\operatorname{supp}(f\phi) \subset \operatorname{supp}(\phi)$, logo $f\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Desta forma, seja $L : C_c^\infty(\Omega) \to C_c^\infty(\Omega)$ o operador linear definido por

$$L\phi = f\phi.$$

Afirmamos que L é contínuo, de fato, dado $K \subset \Omega$ compacto é fácil ver que $L(C_c^\infty(K)) = C_c^\infty(K)$, além disso, dada $\phi \in C_c^\infty(K)$ e $m \in \mathbb{N}$ temos que

$$\begin{aligned}
P_{C_c^\infty(K),m}(L\phi) &= \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha (f\phi)| = \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{K} |\partial^\alpha (f\phi)| \\
&= \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{K} \left| \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha-\beta} f \partial^\beta \phi \right| \\
&= \sum_{|\alpha|\leq m} \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \sup_K |\partial^{\alpha-\beta} f| \sup_K |\partial^\beta \phi| \\
&\leq \sum_{|\alpha|\leq m} \sum_{\beta\leq\alpha} \max_{\substack{|\alpha|\leq m \\ \beta\leq\alpha}} \left\{ \binom{\alpha}{\beta} \sup_K |\partial^\beta f| \right\} \sup_K |\partial^\beta \phi| \\
&\leq \max_{\substack{|\alpha|\leq m \\ \beta\leq\alpha}} \left\{ \binom{\alpha}{\beta} \sup_K |\partial^\beta f| \right\} \sum_{|\alpha|\leq m} \sum_{\beta\leq\alpha} \sup_K |\partial^\beta \phi| \\
&\leq \max_{\substack{|\alpha|\leq m \\ \beta\leq\alpha}} \left\{ \binom{\alpha}{\beta} \sup_K |\partial^\beta f| \right\} \sum_{|\alpha|\leq m} \sum_{|\beta|\leq m} \sup_K |\partial^\beta \phi| \\
&\leq C \sum_{|\beta|\leq m} \sup_K |\partial^\beta \phi| = C \sum_{|\beta|\leq m} \sup_{\mathbb{R}^n} |\partial^\beta \phi| = C P_{C_c^\infty(K),m}(\phi),
\end{aligned}$$

de onde segue a continuidade de $L|_{C_c^\infty(K)} : C_c^\infty(K) \to C_c^\infty(K)$, portanto L é contínuo.

Note também que, para quaisquer $\phi, \psi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega (L\phi)\psi = \int_\Omega (f\phi)\psi = \int_\Omega \phi(f\psi) = \int_\Omega \phi(L\psi),$$

logo L é o transposto formal de L. Assim definimos a extensão $\widetilde{L} : \mathscr{D}'(\Omega) \to \mathscr{D}'(\Omega)$ de L por

$$\langle \widetilde{L}u, \phi \rangle := \langle u, L\phi \rangle = \langle u, f\phi \rangle,$$

para quaisquer $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ e $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Naturalmente, dada $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ denotamos $\widetilde{L}u$ por fu.

Exemplo 16 (**M**udança de variáveis)**.** Sejam $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$ abertos, $\Phi : \Omega' \to \Omega$ um difeomorfismo de classe C^∞ e $L : C_c^\infty(\Omega) \to C_c^\infty(\Omega')$ o operador linear definido por

$$L\varphi(x) = \begin{cases} \varphi \circ \Phi(x), & \text{se } x \in \Omega' \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Mostraremos que L é contínuo. Dado $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{0\}$, existem $N_\alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha_j \in \mathbb{Z}_+^n$ tal que $|\alpha_j| \leq |\alpha|$ para $j = 1, 2, \ldots, N_\alpha$, $m_\alpha \in \mathbb{N}$ tal que $|m_\alpha| \leq |\alpha|$, $m_{j,k} \in \{1, 2, \ldots, n\}$ e $\beta_{j,k} \in \mathbb{Z}_+^n$ tal que $|\beta_{j,k}| \leq |\alpha|$ para $j = 1, 2, \ldots, N_\alpha$ e $k = 1, 2, \ldots, m_\alpha$ tais que

$$\partial^\alpha (\varphi \circ \Phi) = \sum_{j=1}^{N_\alpha} \left([(\partial^{\alpha_j} \varphi) \circ \Phi] \prod_{k=1}^{m_\alpha} \partial^{\beta_{j,k}} \Phi_{m_{j,k}} \right). \tag{2.3}$$

onde $\Phi_{m_{j,k}}$ é a $m_{j,k}$-ésima função coordenada de Φ. De fato, temos que

$$\partial_l (\varphi \circ \Phi) = \sum_{j=1}^{n} [(\partial_j \varphi) \circ \Phi] \partial_l \Phi_k$$

para todo $l \in \{1,2,\dots,n\}$. Além disso, seja $m \in \mathbb{N}$ e suponhamos que $\partial^\alpha(\varphi \circ \Phi)$ pode ser escrita da forma (2.3) para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{0\}$ tal que $|\alpha| \leq m$. Seja $l \in \{1,2,\dots,n\}$, temos então que

$$\partial_l \partial^\alpha(\varphi \circ \Phi) = \sum_{j=1}^{N_\alpha} \sum_{q=1}^{n} \left([(\partial_r \partial^{\alpha_j} \varphi) \circ \Phi] \, \partial_l \Phi_q \prod_{k=1}^{m_\alpha} \partial^{\beta_{j,k}} \Phi_{m_{j,k}} \right)$$
$$+ \sum_{j=1}^{N_\alpha} \sum_{q=1}^{m_\alpha} \left([(\partial^{\alpha_j} \varphi) \circ \Phi] \prod_{k=1}^{m_\alpha} \partial^{\beta_{j,k}+\delta(k,q)e_l} \Phi_{m_{j,k}} \right)$$

onde δ é a função delta de Kronecker, isto é,

$$\delta(k,q) = \begin{cases} 1, & \text{se } k = q \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Logo, como $l \in \{1,2,\dots,n\}$ foi tomado arbitrariamente, segue que $\partial^\alpha(\varphi \circ \Phi)$ pode ser escrita da forma (2.3) para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{0\}$ tal que $|\alpha| \leq m+1$. Então, segue por indução sobre m, que $\partial^\alpha(\varphi \circ \Phi)$ pode ser escrita da forma (2.3) para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{0\}$.

Seja $K \subset \Omega$ compacto, temos que

$$\sup_{\mathbb{R}^n} |L\varphi| = \sup_{\mathbb{R}^n} |\varphi \circ \Phi| = \sup_{\mathbb{R}^n} |\varphi|,$$

além disso, dado $m \in \mathbb{N}$, considerando

$$C_m = \sup \left\{ |\partial^\alpha \Phi_k(x)| : x \in \Phi^{-1}(K), k \in \{1,2,\dots,n\} \text{ e } |\alpha| \leq m \right\},$$

temos que

$$\sup_{\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha(L\varphi)| = \sup_{\Phi^{-1}(K)} \left| \sum_{j=1}^{N_\alpha} \left([(\partial^{\alpha_j} \varphi) \circ \Phi] \prod_{k=1}^{m_\alpha} \partial^{\beta_{j,k}} \Phi_{m_{j,k}} \right) \right| \leq \sum_{j=1}^{N_\alpha} C_m^{m_\alpha} \sup_{\Phi^{-1}(K)} |(\partial^{\alpha_j} \varphi) \circ \Phi|$$
$$\leq N_\alpha C_m^{m_\alpha} \sum_{|\beta| \leq m} \sup_{\mathbb{R}^n} |\partial^\beta \varphi|$$

para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ tal que $|\alpha| \leq m$ e $\varphi \in C_c^\infty(K)$. Portanto, temos que $T : C_c^\infty(K) \to C_c^\infty\left(\Phi^{-1}(K)\right)$ é contínuo. Como $K \subset \Omega$ compacto foi tomado arbitrariamente, segue que T é contínuo.

Temos que

$$\int_{\Omega'} (T\varphi)\psi = \int_{\Omega'} (\varphi \circ \Phi)\psi = \int_\Omega \varphi \left[\psi \circ (\Phi^{-1}) \right] \left| \det[\operatorname{Jac}(\Phi^{-1})] \right|$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ e $\psi \in C_c^\infty(\Omega')$. Logo considerando o operador linear $L' : C_c^\infty(\Omega') \to C_c^\infty(\Omega)$ definido por

$$L'\psi(x) = \begin{cases} \psi(\Phi^{-1}(x)) \left| \det[\operatorname{Jac}(\Phi^{-1})(x)] \right|, & \text{se } x \in \Omega \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

para toda $\psi \in C_c^\infty(\Omega')$, pelo que já foi provado (trocando Φ por Φ^{-1}) e pelo Exemplo anterior, temos que L' é contínuo, logo é L' é o transposto formal de L. Seja $\tilde{L} : \mathscr{D}'(\Omega) \to \mathscr{D}'(\Omega')$ o operador linear contínuo definido por

$$\langle \tilde{L}u, \psi \rangle = \langle u, L'\psi \rangle$$

para quaisquer $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ e $\psi \in C_c^\infty(\Omega')$, representaremos $\tilde{L}u$ por $u \circ \Phi$, assim temos que

$$\langle u \circ \Phi, \psi \rangle = \langle u, L'\psi \rangle = \left\langle u, \psi \circ (\Phi^{-1}) \left|\det[\mathrm{Jac}(\Phi^{-1})]\right| \right\rangle$$

para quaisquer $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ e $\psi \in C_c^\infty(\Omega')$.

Como veremos na seção 4.2, a operação apresentada no exemplo anterior nos permitirá definir um espaço de distribuições sobre uma variedade suave.

2.6 Convolução

Definição 12. Sejam $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ funções mensuráveis. A convolução de f por g, denotada por $f * g$, é a função definida por

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\, dy$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ tal que a integral acima exista.

Observação 2. Se $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ são funções mensuráveis e $x \in \mathbb{R}^n$ é tal que $f * g(x)$ existe então,

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(x-z)\, dz = g * f(x).$$

Teorema 4 (Desigualdade de Young)**.** Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ onde $1 \leq p \leq \infty$, então $f * g(x)$ existe para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$, $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$.

Demonstração. De fato, como $f(y)g(\cdot - y) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$, $\|f(y)g(\cdot - y)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = |f(y)| \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ e

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\, dy = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

o resultado segue da desigualdade de Minkowski para integrais (ver (FOLLAND, 1999), página 194). □

Definição 13 (Translação)**.** Dado $y \in \mathbb{R}^n$ e uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definimos $\tau_y f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ por

$$\tau_y f(x) = f(x-y).$$

Lema 2. Sejam $1 \leq p < \infty$ e $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ temos que $\|\tau_y f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow[y \to 0]{} 0$.

Demonstração. Com efeito, seja $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ como g é uniformemente contínua, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|g(x-y) - g(x)| < \varepsilon^{\frac{1}{p}} \left[m\left(\mathrm{supp}(g) + \overline{B(0,1)} \right) \right]^{-\frac{1}{p}}$$

para todo $y \in \mathbb{R}^n$ tal que $|y| \leq \delta$, onde m representa a medida de Lebesgue. Assim dado $y \in \mathbb{R}^n$ tal que $|y| \leq \min\{\delta, 1\}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\tau_y g - g|^p = \int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y) - g(x)|^p \, dx = \int_{\mathrm{supp}(g) + \overline{B(0,1)}} |g(x-y) - g(x)|^p \, dx$$
$$\leq \int_{\mathrm{supp}(g) + \overline{B(0,1)}} \varepsilon \left[m\left(\mathrm{supp}(g) + \overline{B(0,1)} \right) \right]^{-1} = \varepsilon.$$

Portanto, $\|\tau_y g - g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow[y \to 0]{} 0$. Dada $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $\varepsilon > 0$, como $C_c(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^p(\mathbb{R}^n)$ (ver (FOLLAND, 1999), página 217), existe $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|f - g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon$. Logo

$$\begin{aligned} \|\tau_y f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\leq \|\tau_y(f-g)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|\tau_y g - g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|g - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \|f - g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|\tau_y g - g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|g - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \frac{2\varepsilon}{3} + \|\tau_y g - g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Como $\|\tau_y g - g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \frac{\varepsilon}{3}$ para y suficientemente pequeno, o resultado está demonstrado. □

Teorema 5. Sejam $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $a = \int_{\mathbb{R}^n} \phi$ e $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Para cada $t > 0$, seja $\phi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definida por

$$\phi_t(x) = t^{-n} \phi(t^{-1} x).$$

Então $f * \phi_t \to af$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$ quando $t \to 0+$.

Demonstração. Note que para todo $t > 0$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi_t(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} t^{-n} \phi(t^{-1} x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) \, dy = a.$$

Logo temos que

$$\begin{aligned} f * \phi_t(x) - af(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \phi_t(y) \, dy - f(x) \int_{\mathbb{R}^n} \phi_t(y) \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} [f(x-y) - f(x)] \phi_t(y) \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} [f(x-y) - f(x)] \phi(t^{-1} y) t^{-n} \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} [f(x - tz) - f(x)] \phi(z) \, dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} [\tau_{tz} f(x) - f(x)] \phi(z) \, dz. \end{aligned}$$

Segue então da desigualdade de Minkowski para integrais que

$$\|f * \phi_t(x) - af(x)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \|\tau_{tz} f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} |\phi(z)| \, dz.$$

Como para quaisquer $t > 0$ e $z \in \mathbb{R}^n$

$$\|\tau_{tz} f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} |\phi(z)| \leq (\|\tau_{tz} f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}) |\phi(z)| \leq 2\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} |\phi(z)|$$

e pelo lema 2 $\|\tau_{tz} f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} |\phi(z)| \xrightarrow[t \to 0+]{} 0$ para todo $z \in \mathbb{R}^n$, segue do Teorema da convergência dominada (ver (FOLLAND, 1999), página 54) que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|\tau_{tz} f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} |\phi(z)| \, dz \xrightarrow[t \to 0+]{} 0.$$

Portanto, $\|f * \phi_t(x) - af(x)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0$ quando $t \to 0+$. □

2.7 A transformada de Fourier

Definição 14. Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, sua transformada de Fourier $\widehat{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ (ou $\mathscr{F} f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$) é a função definida por

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx.$$

Observação 3. Temos que

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(\xi)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| |e^{-2\pi i \xi \cdot x}| dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Portanto, $\widehat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\|\widehat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$.

Observação 4. Seja $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $(\xi_j) \subset \mathbb{R}^n$ uma sequência convergindo para ξ. Dado $x \in \mathbb{R}^n$, pela continuidade da aplicação $\mathbb{R}^n \ni \eta \mapsto e^{-2\pi i \eta \cdot x} \in \mathbb{C}$ temos que

$$\lim_{j \to \infty} f(x) e^{-2\pi i \xi_j \cdot x} = f(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x}.$$

Além disso

$$|f(x) e^{-2\pi i \xi_j \cdot x}| \leq |f(x)| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ e } \forall j \in \mathbb{N},$$

logo pelo Teorema da convergência dominada segue que

$$\lim_{j \to \infty} \int f(x) e^{-2\pi i \xi_j \cdot x} dx = \int f(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx,$$

isto é,

$$\lim_{j \to \infty} \widehat{f}(\xi_j) = \widehat{f}(\xi).$$

Portanto $\widehat{f}$ é contínua.

Teorema 6. Sejam $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Então:

(a) $(\tau_y f)^\wedge(\xi) = e^{-2\pi i \xi \cdot y} \widehat{f}(\xi)$ e $\tau_\eta(\widehat{f})(\xi) = (e^{2\pi i \eta \cdot x} f(x))^\wedge(\xi)$.

(b) Se T é uma transformada linear invertível sobre $\mathbb{R}^n$ e $S = (T^*)^{-1}$ então $(f \circ T)^\wedge = |det T|^{-1} \widehat{f} \circ S$. Em particular se T é uma rotação, temos que $(f \circ T)^\wedge = \widehat{f} \circ T$. E se $Tx = t^{-1} x$ com $t > 0$ então $(f \circ T)^\wedge(\xi) = t^n \widehat{f}(t\xi)$.

(c) $(f * g)^\wedge = \widehat{f}\, \widehat{g}$.

(d) Se $x^\alpha f \in L^1$ para $|\alpha| \leq k$ então $f \in C^k$ e $\partial^\alpha \widehat{f} = ((-2\pi i x)^\alpha f)^\wedge$.

(e) Se $f \in C^k$, $\partial^\alpha f \in L^1$ para $|\alpha| \leq K$ e $\partial^\alpha f \in C_0$ para $|\alpha| \leq k-1$, então $(\partial^\alpha f)^\wedge(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \widehat{f}(\xi)$.

(f) $\mathscr{F}(L^1(\mathbb{R}^n)) \subset C_0(\mathbb{R}^n)$, onde $C_0(\mathbb{R}^n) = \left\{ \phi \in C(\mathbb{R}^n) : \lim_{x \to \infty} \phi(x) = 0 \right\}$.

Demonstração. (a) De fato,

$$\begin{aligned}(\tau_y f)^\wedge(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)e^{-2\pi i\xi\cdot x}\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(z)e^{-2\pi i\xi\cdot(z+y)}\,dz\\ &= e^{-2\pi i y\cdot\xi}\int_{\mathbb{R}^n} f(z)e^{-2\pi i\xi\cdot z}\,dz = e^{-2\pi i y\cdot\xi}\widehat{f}(\xi).\end{aligned}$$

Analogamente mostramos a outra igualdade.

(b) Com efeito,

$$\begin{aligned}(f\circ T)^\wedge(\xi) &= \int f(Tx)e^{-2\pi i\xi\cdot x}\,dx = |detT|^{-1}\int f(x)e^{-2\pi i\xi\cdot T^{-1}x}\,dx\\ &= |detT|^{-1}\int f(x)e^{-2\pi i S\xi\cdot x}\,dx = |detT|^{-1}\widehat{f}(S\xi) = |detT|^{-1}\widehat{f}\circ S(\xi).\end{aligned}$$

(c) Como $|f|,|g|\in L^1$ podemos aplicar o Teorema de Tonelli e em seguida aplicar o Teorema de Fubini, obtendo

$$\begin{aligned}(f*g)^\wedge(\xi) &= \int f*g(x)e^{-2\pi i\xi\cdot x}\,dx = \int\left(\int f(x-y)g(y)\,dy\right)e^{-2\pi i\xi\cdot x}\,dx\\ &= \int\left(\int f(x-y)g(y)e^{-2\pi i\xi\cdot x}\,dy\right)dx = \int\left(\int f(x-y)g(y)e^{-2\pi i\xi\cdot x}\,dx\right)dy\\ &= \int\left(\int f(x)g(y)e^{-2\pi i\xi\cdot(x+y)}\,dx\right)dy = \left(\int f(x)e^{-2\pi i\xi\cdot x}\,dx\right)\left(\int g(y)e^{-2\pi i\xi\cdot y}\,dy\right)\\ &= \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi).\end{aligned}$$

(d) Faremos por indução sobre $|\alpha|$. Primeiramente, se $|\alpha|=0$ então $\alpha=(0,\ldots,0)$ e a afirmação é obvia. Suponhamos que $|\alpha|=1$, então $\alpha=e_j$ para algum $j\in\{1,\ldots,n\}$. Temos que

$$\left|\frac{\partial}{\partial\xi_j}(f(x)e^{-2\pi i\xi\cdot x})\right| = |-2\pi i x_j f(x)e^{-2\pi i\xi\cdot x}| \le 2\pi|x_j f(x)| \quad \forall x,\xi\in\mathbb{R}.$$

Logo pelo Teorema da convergência dominada

$$\frac{\partial}{\partial\xi_j}\widehat{f}(\xi) = \int -2\pi i x_j f(x)e^{-2\pi i\xi\cdot x}\,dx = (-2\pi i x_j f(x))^\wedge(\xi) = (-2\pi i x_j f(x))^\wedge(\xi).$$

Além disso $\frac{\partial}{\partial\xi_j}\widehat{f}(\xi)$ é contínua pela igualdade acima. Suponhamos que a afirmação seja válida para $|\alpha|=N\le k-1$. Dado $|\alpha|=N+1$, existe $\alpha_j\neq 0$ para algum $j\in\{1,\ldots,n\}$. Logo pela hipótese de indução

$$\partial^{\alpha-e_j}\widehat{f} = ((-2\pi i x)^{\alpha-e_j}f)^\wedge.$$

Como $x^{e_j}(-2\pi i x)^{\alpha-e_j}f\in L^1$ do que já mostramos segue que $\partial^\alpha\widehat{f}$ existe, e além disso

$$\begin{aligned}\partial^\alpha\widehat{f} &= \partial^{e_j}(\partial^{\alpha-e_j}\widehat{f}) = \partial^{e_j}((-2\pi i x)^{\alpha-e_j}f)^\wedge = ((-2\pi i x_j)(-2\pi i x)^{\alpha-e_j}f)^\wedge\\ &= ((-2\pi i x)^{e_j}(-2\pi i x)^{\alpha-e_j}f)^\wedge = ((-2\pi i)^\alpha f)^\wedge.\end{aligned}$$

(e) Provaremos por indução sobre k. Para $k=0$ não há o que demonstrar. Provaremos o caso $k=1$. Se $|\alpha|=1$, então $\alpha=e_j$ para algum $j\in\{1,2,\ldots,n\}$ e temos que

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}f\right)^\wedge(\xi) &= \int\frac{\partial}{\partial x_j}f(x)e^{-2\pi i\xi\cdot x}\,dx\\ &= -\int f(x)(-2\pi i)\xi_j e^{-2\pi i\xi\cdot x}\,dx = 2\pi i\xi_j\widehat{f}(\xi).\end{aligned}$$

Suponhamos que a afirmação vale para $k \in \mathbb{N}$ e provaremos que vale para $k+1$. É suficiente então demonstrar que

$$(\partial^{\alpha} f)^{\wedge}(\xi) = (2\pi i\xi)^{\alpha} \widehat{f}(\xi)$$

para $|\alpha| = k+1$. Usando a hipótese de indução e o caso $k = 1$ temos que

$$\begin{aligned}(\partial^{\alpha} f)^{\wedge}(\xi) &= (\partial^{\alpha-e_j}\partial^{e_j} f)^{\wedge}(\xi) = (2\pi i\xi)^{\alpha-e_j}(\partial^{e_j} f)^{\wedge}(\xi) = (2\pi i\xi)^{\alpha-e_j} 2\pi i\xi_j \widehat{f}(\xi) \\ &= (2\pi i\xi)^{\alpha-e_j}(2\pi i\xi)^{e_j}\widehat{f}(\xi) = (2\pi i\xi)^{\alpha}\widehat{f}(\xi),\end{aligned}$$

onde $j \in \{1,\dots,n\}$ é tal que $\alpha_j \neq 0$.
(f) Suponhamos que $f \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$, então por (e) temos que

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j} f\right)^{\wedge} = 2\pi i\xi_j \widehat{f}(\xi).$$

Logo $|\xi_j||\widehat{f}(\xi)|$ é limitada para todo $j = 1,\dots,n$. Assim, como $|\xi||\widehat{f}(\xi)| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|\right) |\widehat{f}(\xi)|$, segue que $|\xi||\widehat{f}(\xi)|$ é limitada. Portanto

$$\lim_{|\xi|\to\infty} |\widehat{f}(\xi)| = \lim_{|\xi|\to\infty} \frac{1}{|\xi|}(|\xi||\widehat{f}(\xi)|) = 0.$$

□

Corolário 3. Temos que $\mathscr{F}(\mathscr{S}) \subset \mathscr{S}$, além disso a aplicação $\mathscr{F} : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ é contínua.

Demonstração. Ver Corolário 8.23 em (FOLLAND, 1999). □

Proposição 9. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{-\pi a|x|^2}$ onde $a \in \mathbb{C}$ é tal que $\mathrm{Re}(a) > 0$. Então

$$\widehat{f}(\xi) = a^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\pi}{a}|\xi|^2}.$$

Demonstração. Provaremos primeiramente o caso $n = 1$. Usando o Teorema 6 (d) segue que

$$\begin{aligned}\left(\widehat{f}\right)'(\xi) &= (-2\pi i x f)^{\wedge}(\xi) = \left(-2\pi i e^{-\pi a x^2}\right)^{\wedge}(\xi) \\ &= \left(\frac{i}{a}(-2\pi a)e^{-\pi a x^2}\right)^{\wedge}(\xi) = \frac{i}{a}(f')^{\wedge}(\xi) \\ &= \frac{i}{a} 2\pi i\xi \widehat{f}(\xi) = -\frac{2\pi}{a}\xi\widehat{f}(\xi).\end{aligned}$$

Assim temos que

$$\frac{d}{d\xi}(e^{\frac{\pi}{a}\xi^2}\widehat{f}(\xi)) = 2\frac{\pi}{a}\xi e^{\frac{\pi}{a}\xi^2}\widehat{f}(\xi) - e^{\frac{\pi}{a}\xi^2}\frac{2\pi}{a}\xi\widehat{f}(\xi) = 0,$$

logo $e^{\frac{\pi}{a}\xi^2}\widehat{f}(\xi)$ é constante. Além disso,

$$\widehat{f}(0) = \int e^{-2\pi i 0\cdot x} f(x)\,dx = \int e^{-\pi a x^2}\,dx. \tag{2.4}$$

Pelo Teorema de Tonelli temos que

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\pi a(x^2+y^2)}\,dx\,dy &= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi a x^2} e^{-\pi a y^2}\,dx\right)dy\\
&= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi a x^2}\,dx\right) e^{-\pi a y^2}\,dy = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi a x^2}\,dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi a y^2}\,dy\right),
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\pi a(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi a x^2}\,dx\right)^2. \tag{2.5}
$$

Por outro lado, consideremos o difeomorfismo C^1 $\varphi : (0,+\infty)\times(-\pi,\pi) \to \Omega$ definido por

$$
\varphi(t,\theta) = (t\cos\theta, t\sin\theta)
$$

onde $\Omega = \mathbb{R}^2\backslash\{(x,y) : x \leq 0 \text{ e } y = 0\}$. Usando o teorema de mudança de variáveis com a mudança $(x,y) = (t\cos\theta, t\sin\theta)$ segue que

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\pi a(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_{\Omega} e^{-\pi a(x^2+y^2)}\,dx\,dy &= \int_{(0,+\infty)\times(-\pi,\pi)} e^{-\pi a t^2} t\,dt\,d\theta\\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^{+\infty} e^{-\pi a t^2} t\,dt\right) d\theta = 2\pi\int_0^{+\infty} e^{-\pi a t^2} t\,dt\\
&=2\pi\left(-\frac{e^{-\pi a t^2}}{2\pi a}\right)\Bigg|_0^{+\infty} = 2\pi\frac{1}{2\pi a} = \frac{1}{a}
\end{aligned} \tag{2.6}
$$

De (2.4), (2.5) e (2.6) segue que $\widehat{f}(0) = a^{-\frac{1}{2}}$. Então

$$
e^{\frac{\pi}{a}\xi^2}\widehat{f}(\xi) = e^{\frac{\pi}{a}0^2}\widehat{f}(0) = \widehat{f}(0) = a^{-\frac{1}{2}}
$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. Portanto

$$
\widehat{f}(\xi) = a^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{a}\xi^2} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.
$$

No caso geral, temos que

$$
\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi a|x|^2} e^{-2\pi i\xi\cdot x}\,dx = \int_{\mathbb{R}^n}\prod_{j=1}^n e^{-\pi a x_j^2} e^{-2\pi i\xi_j x_j}\,dx\\
&= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}\cdots\left(\int_{\mathbb{R}}\prod_{j=1}^n e^{-\pi a x_j^2} e^{-2\pi i\xi_j x_j}\,dx_1\right)\ldots dx_{n-1}\right)dx_n\\
&= \prod_{j=1}^n\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi a x_j^2} e^{-2\pi i\xi_j x_j}\,dx_j = \prod_{j=1}^n a^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{a}\xi_j^2} = a^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\pi}{a}|\xi|^2}.
\end{aligned}
$$

□

Definição 15 (Transformada de Fourier Inversa)**.** Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, definimos sua transformada de Fourier inversa, denotada por $f^\vee$, da seguinte maneira

$$
f^\vee(x) = \int f(\xi) e^{-2\pi i\xi\cdot x}\,d\xi = \widehat{f}(-x).
$$

Os próximos resultados terão o objetivo de mostrar que dada $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ então $\left(\widehat{f}\right)^{\vee} = f$.

Observação 5. Uma simples aplicação do Teorema de Fubini com esse propósito falha, já que

$$\begin{aligned}\left(\widehat{f}\right)^{\vee}(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi \cdot x}\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-2\pi i \xi \cdot y}\, dy \right) e^{2\pi i \xi \cdot x}\, d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-2\pi i \xi \cdot y} e^{2\pi i \xi \cdot x}\, dy \right) d\xi\end{aligned}$$

e o integrando não está em $L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.

Lema 3. Se $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ então $\int \widehat{f} g = \int f \widehat{g}$.

Demonstração. Usando os Teoremas de Tonelli e Fubini segue que

$$\begin{aligned}\int \widehat{f} g &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x}\, dx \right) g(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(\xi) e^{-2\pi i \xi \cdot x}\, dx \right) d\xi \\ &= \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} f(x) g(\xi) e^{-2\pi i \xi \cdot x}\, dx\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(\xi) e^{-2\pi i \xi \cdot x}\, d\xi \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) e^{-2\pi i \xi \cdot x}\, d\xi \right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \widehat{g}(x)\, dx = \int f \widehat{g}.\end{aligned}$$

□

Teorema 7. Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ então f coincide em quase todo ponto com uma função contínua f_0 e $\left(\widehat{f}\right)^{\vee} = (f^{\vee})^{\wedge} = f_0$.

Demonstração. Dados $t > 0$ e $x \in \mathbb{R}^n$ seja $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$\phi(\xi) = e^{2\pi \xi \cdot x - \pi t^2 |\xi|^2}.$$

Usando o Teorema 6 (a) e a Proposição 9 segue que

$$\begin{aligned}\widehat{\phi}(y) &= \left(e^{2\pi \xi \cdot x - \pi t^2 |\xi|^2} \right)^{\wedge}(y) = \tau_x \left[\left(e^{-\pi t^2 |\xi|^2} \right)^{\wedge}(y)(y) \right] \\ &= \tau_x \left(t^{-n} e^{-\frac{\pi}{t^2}|y|^2} \right) = t^{-n} e^{-\frac{\pi}{t^2}|x-y|^2} = g_t(x-y),\end{aligned}$$

onde $g_t(y) = t^{-n} e^{-\frac{\pi}{t^2}|y|^2}$. Pelo Lema 3 temos então que

$$\begin{aligned}\int e^{-\pi t^2 |\xi|^2} e^{2\pi i \xi \cdot x} \widehat{f}(\xi)\, d\xi &= \int \phi(\xi) \widehat{f}(\xi)\, d\xi \\ &= \int \widehat{\phi}(y) f(y)\, dy = \int g_t(x-y) f(y)\, dy,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int e^{-\pi t^2 |\xi|^2} e^{2\pi i \xi \cdot x} \widehat{f}(\xi)\, d\xi = f * g_t(x). \tag{2.7}$$

Como $\int g(y)\,dy = 1$, pelo Teorema 5 segue que

$$f * g_t \underset{t\to 0}{\longrightarrow} f \text{ em } L^1(\mathbb{R}^n). \tag{2.8}$$

Por outro lado, como $\widehat{f} \in L^1$, pelo Teorema da convergência dominada temos que

$$\lim_{t\to 0} \int e^{-\pi t^2|\xi|^2} e^{2\pi i\xi\cdot x} \widehat{f}(\xi)\,d\xi = \int e^{2\pi i\xi\cdot x}\widehat{f}(\xi)\,dx = \left(\widehat{f}\right)^{\vee}(x). \tag{2.9}$$

Segue de (2.7), (2.8) e (2.9) que $\left(\widehat{f}\right)^{\vee} = f$ quase sempre e analogamente $f = (f^{\vee})^{\wedge}$ quase sempre. Como $\left(\widehat{f}\right)^{\vee}$ é contínua o teorema está demonstrado. □

Corolário 4. Se $f \in L^1$ e $\widehat{f} = 0$ então $f = 0$ quase sempre.

Demonstração. Se $\widehat{f} = 0$ então $\left(\widehat{f}\right)^{\vee} = 0$ logo $f = 0$ quase sempre. □

Corolário 5. $\mathscr{F}$ é um isomorfismo de $\mathscr{S}$ em $\mathscr{S}$, com inversa $\mathscr{F}^{-1} : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ definida por $\mathscr{F}^{-1}\phi = \phi^{\vee}$.

Demonstração. Pelo Corolário 3 $\mathscr{F} : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ é contínua. Além disso, como $f^{\vee}(x) = \widehat{f}(-x)$ segue que $\check{f} \in \mathscr{S}$ e a aplicação $\mathscr{S} \ni f \longrightarrow \check{f} \in \mathscr{S}$. Por fim, pelo Teorema 7 a última aplicação é a inversa da transformada de Fourier $\mathscr{F}$. □

Teorema 8 (Plancherel)**.** Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, então $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $\mathscr{F}\big|_{L^1\cap L^2}$ se estende unicamente para um isomorfismo unitário sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Consideremos o subespaço de $L^1(\mathbb{R}^n)$

$$V = \{f \in L^1(\mathbb{R}^n); \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)\}.$$

Dada $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, temos que $f = \left(\widehat{f}\right)^{\vee} \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, logo

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |f||f| \le \int_{\mathbb{R}^n} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}|f| \le \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Então $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e portanto $V \subset L^2(\mathbb{R}^n)$. Como $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S} \subset V$, segue que V é denso em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Além disso, dadas $f, g \in V$, pondo $h = \overline{\widehat{g}}$ temos que

$$\widehat{h}(\xi) = \int e^{-2\pi i\xi\cdot x}\overline{\widehat{g}(x)}\,dx = \int \overline{e^{-2\pi i\xi\cdot x}\widehat{g}(x)}\,dx = \overline{(\widehat{g})^{\vee}(\xi)} = \overline{g(\xi)},$$

então pelo Lema 3 segue que

$$\int f\overline{g} = \int f\widehat{h} = \int \widehat{f}h = \int \widehat{f}\overline{\widehat{g}}.$$

Portanto, $\mathscr{F}\big|_V$ preserva o produto internode $L^2(\mathbb{R}^n)$, em particular $\mathscr{F}\big|_V$ preserva a norma de $L^2(\mathbb{R}^n)$. Dada $f \in V$, temos que $f^{\vee} \in L^1(\mathbb{R})$ (pois $f^{\vee}(x) = \widehat{f}(-x)$) e $f = (f^{\vee})^{\wedge}$, assim $f^{\vee} \in V$ e $\mathscr{F}(f^{\vee}) = f$, mostrando assim que $\mathscr{F}(V) = V$.

Como $\mathscr{F} : V \to V$ é um isomorfismo unitário munindo V com o produto interno de $L^2(\mathbb{R}^n)$ e V é denso em $L^2(\mathbb{R}^n)$ segue que $\mathscr{F}$ se estende por continuidade a um isomorfismo unitário $\overline{\mathscr{F}} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$.

Provaremos que $\overline{\mathscr{F}} = \mathscr{F}$ em $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Sejam $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = e^{-\pi|x|^2}$ e $g_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ para $t > 0$ dada por

$$g_t(x) = t^{-n} g\left(\frac{x}{t}\right).$$

Como $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\int g = 1$, dada $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, segue pelo Teorema 5 que $(f * g_t) \xrightarrow[t\to 0]{} f$ em $L^1(\mathbb{R}^n)$ e em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Além disso, $(f * g_t)^\wedge = \widehat{f}\widehat{g_t} = \widehat{f} e^{-\pi|\xi|^2}$, logo como $\widehat{f}$ é limitada segue que $(f * g_t)^\wedge \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Portanto $f * g_t \in V$ para todo $t > 0$. Por fim, como $(f * g_t) \xrightarrow[t\to 0]{} f$ em $L^1(\mathbb{R}^n)$, segue que $(f * g_t)^\wedge \xrightarrow[t\to 0]{} \widehat{f}$ uniformemente, e como $(f * g_t) \xrightarrow[t\to 0]{} f$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$ temos que $(f * g_t)^\wedge \xrightarrow[t\to 0]{} \overline{\mathscr{F}}(f)$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Concluímos então que $\overline{\mathscr{F}}(f) = \widehat{f}$. □

2.8 O espaço das distribuições temperadas $\mathscr{S}'$

Dado um multi-índice $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ adotaremos a notação $D^\alpha = (2\pi i)^{-|\alpha|}\partial^\alpha$.

Seja $P(\xi) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha \xi^\alpha$ um polinômio e consideremos o operador diferencial parcial linear com coeficientes constantes $P(D) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha D^\alpha$ por ele determinado. Se $u \in \mathscr{S}$, temos pelo Teorema 6 (e) que $[P(D)u]^\wedge = P(\xi)\widehat{u}$. Desta forma a transformada de Fourier nos dá um método para tentar encontrar soluções para equação $P(D)u = f$. De fato, aplicando a transformada de Fourier obtemos a equação $P(\xi)\widehat{u} = \widehat{f}$, então se P não possui raízes reais segue que $\widehat{u} = P^{-1}\widehat{f}$. Assim obtemos que $u = \left(P^{-1}\widehat{f}\right)^\vee$. No entanto, para encontrar soluções através desse processo deve ser possível aplicar a transformada de Fourier em f e a transformada inversa em $P^{-1}\widehat{f}$. Nesse ponto notamos que quanto maior o domínio da transformada de Fourier, maior é a chance de encontrarmos uma solução utilizando essa técnica. Essa é a grande motivação para o estudo das distribuições temperadas.

Proposição 10. Seja $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\psi(0) = 1$ e dado $\varepsilon > 0$ seja $\psi^\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ definida por $\psi^\varepsilon(x) = \psi(\varepsilon x)$. Então para qualquer $\phi \in \mathscr{S}$, temos que $\psi^\varepsilon\phi \to \phi$ em $\mathscr{S}$ quando $\varepsilon \to 0+$. Em particular, $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\mathscr{S}$.

Demonstração. Fixado $N \in \mathbb{Z}_+$ e dado $\delta > 0$, como $\phi \in \mathscr{S}$ existe um compacto K tal que

$$(1 + |x|)^N|\phi(x)| < \delta$$

para todo $x \in \Omega\backslash K$. Como ψ é contínua no ponto 0 e $\psi(0) = 1$ segue imediatamente que $\psi^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{} 1$ uniformemente em K, logo existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $|\psi^\varepsilon(x) - 1| < \delta$, para quaisquer

$x \in K$ e $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Assim, para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$

$$\begin{aligned}\sup_{x\in K}(1+|x|)^N|\psi^\varepsilon(x)\phi(x)-\phi(x)| &= \sup_{x\in K}(1+|x|)^N|\phi(x)||\psi^\varepsilon(x)-1| \\ &\leq \left(\sup_{x\in K}(1+|x|)^N|\phi(x)|\right)\delta = \|\phi\|_{(N,0)}\delta.\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\mathbb{R}^n\setminus K}(1+|x|)^N|\psi^\varepsilon(x)\phi(x)-\phi(x)| &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n\setminus K}(1+|x|)^N|\psi^\varepsilon(x)||\phi(x)|+|\phi(x)| \\ &\leq \sup_{\mathbb{R}^n}|\psi|\sup_{x\in\mathbb{R}^n\setminus K}(1+|x|)^N|\phi(x)|+\sup_{x\in\mathbb{R}^n\setminus K}(1+|x|)^N|\phi(x)| \\ &\leq \left(\sup_{\mathbb{R}^n}|\psi|+1\right)\delta\end{aligned}$$

para todo $\varepsilon > 0$, logo

$$\|\psi^\varepsilon\phi-\phi\|_{(N,0)} \leq (\|\phi\|_{(N,0)}+\sup_{\mathbb{R}^n}|\psi|+1)\delta$$

sempre que $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Portanto $\|\psi^\varepsilon\phi-\phi\|_{(N,0)} \xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{} 0$.

Em geral dado $\alpha \in \mathbb{Z}_+$ temos que,

$$\begin{aligned}(1+|x|)^N|\partial^\alpha(\psi^\varepsilon\phi)(x)-\partial^\alpha\phi(x)| &= (1+|x|)^N\left|\left(\sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\partial^\beta\psi^\varepsilon(x)\partial^{\alpha-\beta}\phi(x)\right)-\partial^\alpha\phi(x)\right| \\ &\leq (1+|x|)^N\left(|\psi^\varepsilon(x)\partial^\alpha\phi(x)-\partial^\alpha\phi(x)|+\sum_{0<\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}|\partial^\beta\psi^\varepsilon(x)||\partial^{\alpha-\beta}\phi(x)|\right) \\ &= (1+|x|)^N\left(|\psi^\varepsilon(x)\partial^\alpha\phi(x)-\partial^\alpha\phi(x)|+\sum_{0<\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\varepsilon^{|\beta|}|\partial^\beta\psi(\varepsilon x)||\partial^{\alpha-\beta}\phi(x)|\right) \\ &\leq (1+|x|)^N\left(|\psi^\varepsilon(x)\partial^\alpha\phi(x)-\partial^\alpha\phi(x)|+\varepsilon\sum_{0<\beta\leq\alpha}\max_{\beta\leq\alpha}\left\{\binom{\alpha}{\beta}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|\partial^\beta\psi(x)|\right\}|\partial^{\alpha-\beta}\phi(x)|\right) \\ &= (1+|x|)^N|\psi^\varepsilon(x)\partial^\alpha\phi(x)-\partial^\alpha\phi(x)|+\varepsilon\max_{\beta\leq\alpha}\left\{\binom{\alpha}{\beta}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|\partial^\beta\psi(x)|\right\}\sum_{0<\beta\leq\alpha}\|\phi\|_{(N,\alpha-\beta)} \\ &= (1+|x|)^N|\psi^\varepsilon(x)\partial^\alpha\phi(x)-\partial^\alpha\phi(x)|+C\varepsilon \\ &= \|\psi^\varepsilon\partial^\alpha\phi-\partial^\alpha\phi\|_{(0,\alpha)}+C\varepsilon\end{aligned}$$

para quaisquer $x \in \mathbb{R}^n$ e $0 < \varepsilon < 1$. Segue então que,

$$\|\psi^\varepsilon\phi-\phi\|_{(N,\alpha)} \leq \|\psi^\varepsilon\partial^\alpha\phi-\partial^\alpha\phi\|_{(N,0)}+C\varepsilon \tag{2.10}$$

para todo $0 < \varepsilon < 1$. Como $\phi' = \partial^\alpha\phi \in \mathscr{S}$ temos pelo que já demonstramos que $\|\psi^\varepsilon\partial^\alpha\phi - \partial^\alpha\phi\|_{(N,0)} \to 0$ quando $\varepsilon \to 0+$. Portanto segue da estimativa (2.10) que $\|\psi^\varepsilon\phi-\phi\|_{(N,\alpha)} \to 0$ quando $\varepsilon \to 0+$, o que conclui a demonstração. $\square$

Observação 6. A inclusão $C_c^\infty(\Omega) \subset \mathscr{S}$ é contínua. De fato, dados $N \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ e $K \subset \Omega$ compacto, temos que

$$\begin{aligned}
\|\phi\|_{(N,\alpha)} &= \sup_K (1+|x|)^N |\partial^\alpha \phi| \\
&\leq \left(\sup_K (1+|x|)^N \right) \sum_{\beta \leq |\alpha|} \sup_K |\partial^\beta \phi| \\
&= \left(\sup_K (1+|x|)^N \right) P_{C_c^\infty(K),|\alpha|}(\phi),
\end{aligned}$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(K)$. Portanto a inclusão $C_c^\infty(K) \subset \mathscr{S}$ é contínua para qualquer $K \subset \Omega$ compacto, logo segue da Proposição 6 que a inclusão $C_c^\infty(\Omega) \subset \mathscr{S}$ é contínua.

Como a inclusão $C_c^\infty(\Omega) \subset \mathscr{S}$ é contínua, dada $u \in \mathscr{S}'$ temos que $u|_{C_c^\infty(\mathbb{R}^n)} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ e como $C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $\mathscr{S}$ segue que se $u|_{C_c^\infty(\mathbb{R}^n)} = 0$ então $u = 0$, além disso,

$$P_{\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n),\phi}\left(u|_{C_c^\infty(\mathbb{R}^n)}\right) = \left|\left\langle u|_{C_c^\infty(\mathbb{R}^n)}, \phi\right\rangle\right| = |\langle u, \phi\rangle| = P_{\mathscr{S}',\phi}(u).$$

Portanto a aplicação linear $\mathscr{S}' \ni u \to u|_{C_c^\infty(\mathbb{R}^n)} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ é injetiva e contínua. Desta forma, como é usual, iremos identificar $u \in \mathscr{S}'$ com $u|_{C_c^\infty(\mathbb{R}^n)} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, neste sentido temos então que $\mathscr{S}' \subset \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ com inclusão contínua.

Definição 16. Dizemos que uma distribuição $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ é temperada se $u \in \mathscr{S}'$, isto é, se u possui uma extensão linear contínua ao espaço $\mathscr{S}$. Dessa forma, dizemos que $\mathscr{S}'$ é o espaço das distribuições temperadas.

Exemplo 17. Dado $1 \leq p \leq \infty$, temos que $L^p(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}'$ com inclusão contínua.

Notemos inicialmente dado qualquer $1 \leq q \leq \infty$ temos que $\mathscr{S} \subset L^q(\mathbb{R}^n)$ com inclusão contínua. No caso $q = \infty$ basta notar que $\|\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \|\phi\|_{(0,0)}$. Suponhamos então que $1 \leq q < \infty$, seja $N \geq n+1$, dada $\phi \in \mathscr{S}$ temos que

$$\begin{aligned}
\|\phi\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q &= \int_{\mathbb{R}^n} |\phi|^q = \int_{\mathbb{R}^n} |\phi|^q (1+|x|)^{Nq}(1+|x|)^{-Nq} = \int_{\mathbb{R}^n} \left[\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\phi|(1+|x|)^N \right]^q (1+|x|)^{-Nq} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-Nq} \right) \|\phi\|_{(N,0)}^q \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-N} \right) \|\phi\|_{(N,0)}^q \leq C\|\phi\|_{(N,0)}^q.
\end{aligned}$$

Portanto, existe uma constante $C' > 0$ tal que $\|\phi\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C'\|\phi\|_{(N,0)}$ para toda $\phi \in \mathscr{S}$. Dada $f \in L^p(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, temos que $\widetilde{f} : \mathscr{S} \to \mathbb{C}$ definida por

$$\langle \widetilde{f}, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f\phi$$

é uma extensão linear e contínua de f. É evidente que $\widetilde{f}$ é uma extensão linear de f, para a continuidade usando a desigualdade de Hölder tem-se para toda $\phi \in \mathscr{S}$.

$$|\langle \widetilde{f}, \phi \rangle| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f\phi \right| \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|\phi\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C'\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|\phi\|_{(N,0)}. \tag{2.11}$$

Segue então que $f \in \mathscr{S}'$. Além disso, dada $\phi \in \mathscr{S}$ a estimativa (2.11) vale para qualquer $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, assim

$$P_{\mathscr{S}',\phi}(f) = |\langle \widetilde{f}, \phi \rangle| \leq C' \|\phi\|_{(N,0)} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Portanto a inclusão $L^p(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}'$ é contínua.

Assim como estendemos algumas operações em $C_c^\infty(\Omega)$ para $\mathscr{D}'(\Omega)$ através do transposto formal, utilizando o mesmo processo, podemos estender algumas operações em $\mathscr{S}$ para $\mathscr{S}'$. Utilizando o Lema 3 temos que o transposto formal da transformada de Fourier $\mathscr{F} : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ é a própria $\mathscr{F}$, assim podemos estender $\mathscr{F}$ a uma transformada de Fourier $\mathscr{F} : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}'$. A principal motivação para o estudo do espaço das distribuições temperadas $\mathscr{S}'$ é que tal espaço se torna um domínio substancialmente maior para a transformada de Fourier.

Definição 17. Dada $u \in \mathscr{S}'$, definimos sua transformada de Fourier $\widehat{u} \in \mathscr{S}'$ por

$$\langle \widehat{u}, \phi \rangle = \langle u, \widehat{\phi} \rangle$$

para toda $\phi \in \mathscr{S}$.

Observação 7. A aplicação $\mathscr{F} : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}'$ definida por $\mathscr{F}u = \widehat{u}$ é uma bijeção linear e contínua cuja inversa $\mathscr{F}^{-1} : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}'$ definida por $\mathscr{F}^{-1}u = u^\vee$ é contínua, onde

$$\langle u^\vee, \phi \rangle = \langle u, \phi^\vee \rangle$$

para toda $\phi \in \mathscr{S}$. De fato, a continuidade de $\mathscr{F}$ segue de

$$P_{S',\phi}(\widehat{u}) = |\langle \widehat{u}, \phi \rangle| = |\langle u, \widehat{\phi} \rangle| = P_{S',\widehat{\phi}}(u)$$

pelo Teorema 2 e a continuidade de $\mathscr{F}^{-1}$ segue analogamente. Além disso, é consequência imediata do Corolário 5 e das definições de $\mathscr{F}$ e de $\mathscr{F}^{-1}$ que $\mathscr{F} \circ \mathscr{F}^{-1} = I$ e que $\mathscr{F}^{-1} \circ \mathscr{F} = I$.

Observação 8. Sejam $\mathscr{F}_{L^1(\mathbb{R}^n)} : L^1(\mathbb{R}^n) \to C_0(\mathbb{R}^n)$, $\mathscr{F}_{L^2(\mathbb{R}^n)} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ e $\mathscr{F}_{\mathscr{S}'} : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}'$ as transformadas de Fourier já definidas, temos que $\mathscr{F}_{\mathscr{S}'} = \mathscr{F}_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ em $L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\mathscr{F}_{\mathscr{S}'} = \mathscr{F}_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$.

De fato, dadas $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in \mathscr{S}$, temos que

$$\langle \mathscr{F}_{L^1(\mathbb{R}^n)} f, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (\mathscr{F}_{L^1(\mathbb{R}^n)} f)\phi = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathscr{F}_{L^1(\mathbb{R}^n)} \phi) = \langle f, \mathscr{F}_{L^1(\mathbb{R}^n)} \phi \rangle = \langle \mathscr{F}_{\mathscr{S}'} f, \phi \rangle.$$

Então $\mathscr{F}_{L^1(\mathbb{R}^n)} f = \mathscr{F}_{\mathscr{S}'} f$ e portanto $\mathscr{F}_{\mathscr{S}'} = \mathscr{F}_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ em $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Por outro lado, já sabemos que $\mathscr{F}_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \mathscr{F}_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ em $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, logo $\mathscr{F}_{\mathscr{S}'} = \mathscr{F}_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ em $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Como $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ segue que $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^1(\mathbb{R}^n)$, assim $\mathscr{F}_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \mathscr{F}_{\mathscr{S}'} : L^2(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}'$ são operadores contínuos que coincidem em um conjunto denso, portanto $\mathscr{F}_{\mathscr{S}'} = \mathscr{F}_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Definição 18. Dizemos que $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tem crescimento lento, se para todo multi-índice $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ existe uma constante $C_\alpha > 0$ e um inteiro $N_\alpha \in \mathbb{Z}_+$ tal que

$$|\partial^\alpha \psi(x)| \leq C_\alpha (1+|x|)^{N_\alpha}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Proposição 11. Seja $u \in \mathscr{S}'$ temos que:

(i) $\partial^\alpha u \in \mathscr{S}'$ para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$.

(ii) Se $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tem de crescimento lento, então $\psi u \in \mathscr{S}'$.

Demonstração. (i) Inicialmente, note que o operador linear $L : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ definido por $L\phi = \partial^\alpha \phi$ é contínuo já que dado $N \in \mathbb{Z}_+$ e $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$, temos que

$$\|\partial^\alpha \phi\|_{(N,\beta)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|)^N |\partial_\beta(\partial^\alpha \phi)| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|)^N |\partial^{\alpha+\beta} \phi| = \|\phi\|_{(N,\alpha+\beta)}$$

para toda $\phi \in \mathscr{S}$.

Consideremos agora $\partial^\alpha_{\mathscr{S}'} u : \mathscr{S} \to \mathbb{C}$ definida por $\langle \partial^\alpha_{\mathscr{S}'} u, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \phi \rangle$ para toda $\phi \in \mathscr{S}$. Temos que $\partial^\alpha_{\mathscr{S}'} u = (-1)^{|\alpha|} u \circ L$ é contínua, além disso, $\partial^\alpha_{\mathscr{S}'} u$ é claramente uma extensão linear de $\partial^\alpha u$, portanto $\partial^\alpha u \in \mathscr{S}'$.

(ii) Analogamente à demonstração do item (i), é suficiente demonstrar que o operador linear $L : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ definido por $L\phi = \psi\phi$ é contínuo. De fato, dado $N \in \mathbb{Z}_+$ e $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, temos que

$$\begin{aligned}
\|\psi\phi\|_{(N,\alpha)} &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|)^N |\partial^\alpha(\psi\phi)| \\
&\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|)^N \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} |\partial^{\alpha-\beta}\psi||\partial^\beta \phi)| \\
&\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|)^N \sum_{\beta\leq\alpha} \max_{\beta\leq\alpha} \left\{ \binom{\alpha}{\beta} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\partial^{\alpha-\beta}\psi| \right\} |\partial^\beta \phi)| \\
&\leq \max_{\beta\leq\alpha} \left\{ \binom{\alpha}{\beta} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\partial^{\alpha-\beta}\psi| \right\} \sum_{\beta\leq\alpha} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|)^N |\partial^\beta \phi)| \\
&= C \sum_{\beta\leq\alpha} \|\phi\|_{(N,\beta)},
\end{aligned}$$

portanto a continuidade de L segue do Teorema 2. $\square$

CAPÍTULO

3

OPERADORES PSEUDOSETORIAIS E SEMIGRUPOS ANALÍTICOS

Nesse Capítulo, apresentaremos um resultado para a geração de semigrupos $\{e^{-tA}\}_{t\geq 0}$ de operadores lineares sobre X, para o caso em que X é um espaço topológico localmente convexo e A é um operador linear que denominamos pseudosetorial. Tal resultado surge a partir da generalização dos conceitos e técnicas usados na demonstração do Teorema 1.3.4 de (HENRY, 1981) para o caso em que X é um espaço topológico localmente convexo. Para simplificar a escrita, os espaços vetoriais considerados nesse Capítulo serão sempre complexos, isto é, o corpo de escalares será sempre $\mathbb{C}$, ainda que algumas definições e resultados possam ser enunciados para espaços vetoriais reais também.

3.1 Operadores setoriais e geração de semigrupos analíticos em espaços de Banach

Começaremos definindo alguns conceitos que serão usados neste capítulo e enunciando o clássico Teorema de geração de semigrupos analíticos $\{e^{-tA}\}_{t\geq 0} \subset \mathscr{L}(X)$, para o caso em que X é um espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \to X$ é um operador setorial.

Definição 19. Sejam X,Y,Z espaços vetoriais topológicos e $A : D(A) \subset X \to Y$ um operador linear. Dizemos que A é fechado se seu gráfico $\mathrm{Gr}(A)$ é fechado em $X \times Y$, onde

$$\mathrm{Gr}(A) = \{(x,Ax) \subset X \times Y : x \in X\}.$$

Dado $E \subset Z$, definimos o fecho sequencial de E em Z, denotado por $\overline{E}^{\mathrm{seq}}$, como sendo

$$\overline{E}^{\mathrm{seq}} = \left\{ x \in Z : \exists (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset E \text{ tal que } x_k \xrightarrow[k\to\infty]{Z} x \right\}$$

e dizemos que E é sequencialmente fechado se $\overline{E}^{\mathrm{seq}} = E$.

Dizemos que A é sequencialmente fechado se $\mathrm{Gr}(A)$ é sequencialmente fechado em $X \times Y$.

Definição 20 (Resolvente e Espectro)**.** Seja X um espaço vetorial topológico sobre $\mathbb{C}$ e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear, o conjunto resolvente de A denotado por $\rho(A)$ é o subconjunto de $\mathbb{C}$ formado por todos os $\lambda \in \mathbb{C}$, tais que:

(i) $(\lambda - A) : D(A) \subset X \to X$ é injetivo.

(ii) $\overline{R(\lambda - A)}^{\mathrm{seq}} = X$.

(iii) $(\lambda - A)^{-1} : R(\lambda - A) \to X$ é contínuo.

O operador $(\lambda - A)^{-1} : R(\lambda - A) \to X$ é chamado de operador resolvente.

O espectro de A, denotado por $\sigma(A)$, é definido por $\sigma(A) := \mathbb{C} \backslash \rho(A)$.

Definição 21 (Operador Setorial)**.** Seja $X = (X, \|\cdot\|_X)$ um espaço de Banach. Dizemos que um operador linear $A : D(A) : X \to X$ é setorial se A é fechado, densamente definido e existem um ângulo $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, uma constante $M \geq 0$ e um número real a, tais que o setor

$$\Sigma_{a,\theta} = \{\lambda \in \mathbb{C} \backslash \{a\} : \theta < |\mathrm{Arg}(\lambda - a)| \leq \pi\} \tag{3.1}$$

está contido no conjunto resolvente de A e

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \leq \frac{M}{|\lambda - a|} \tag{3.2}$$

para todo $\lambda \in \Sigma_{a,\theta}$, onde $\mathrm{Arg}(\lambda - a)$ é o argumento principal do número complexo $\lambda - a$.

Definição 22. Sejam X espaço vetorial topológico, $U \subset \mathbb{R}$ um aberto e $f : U \to X$ uma aplicação. Dizemos que f é analítica se para cada $t_0 \in U$ existem $\delta > 0$ e $x_j \in X$ para $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tais que $(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset U$ e

$$f(t) = \sum_{j=0}^{\infty} (t - t_0)^j x_j$$

para todo $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, isto é,

$$\sum_{j=0}^{k} (t - t_0)^j x_j \xrightarrow[k \to \infty]{X} f(t)$$

para todo $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.

Definição 23 (Semigrupo Analítico e Gerador Infinitesimal)**.** Seja X um espaço vetorial topológico, denotaremos por $L(X)$ o espaço vetorial de todos os operadores lineares $T : X \to X$, incluindo os descontínuos, enquanto o espaço vetorial dos operadores lineares contínuos será denotado por $\mathscr{L}(X)$.

Seja $\{T(t)\}_{t \geq 0} \subset L(X)$ uma família de operadores lineares e consideremos as propriedades:

(i) $T(0) = I$.

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$ para todo $t, s \geq 0$.

(iii) A aplicação $[0, +\infty) \ni t \mapsto T(t)x \in X$ é contínua para todo $x \in X$.

(iv) A aplicação $(0, +\infty) \ni t \mapsto T(t)x \in X$ é analítica para todo $x \in X$.

Se (i) e (ii) são verificadas, dizemos que $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um semigrupo de operadores lineares. Se (i), (ii) e (iii) são verificadas dizemos que $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um semigrupo fortemente contínuo. Se (i), (ii), (iii) e (iv) são verificadas dizemos que $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um semigrupo analítico. O gerador infinitesimal $L : D(L) \subset X \to X$ de um semigrupo analítico $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é o operador linear definido por

$$Lx = \lim_{t \to 0+} \frac{T(t)x - x}{t},$$

onde seu domínio $D(L)$ consiste de todos os $x \in X$ para os quais o limite acima existe.

Teorema 9. Sejam X um espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador setorial com ângulo ϕ e vértice a. Então $-A$ é o gerador infinitesimal do semigrupo analítico $\{e^{-tA}\}_{t \geq 0} \subset \mathscr{L}(X)$, onde

$$e^{-tA} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda + A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda \tag{3.3}$$

e $\Gamma : \mathbb{R} \to \rho(-A)$ é a curva definida por

$$\Gamma(s) = \begin{cases} Re^{it} - a & \text{se} \quad t \in [-\theta, \theta] \\ \frac{s}{\theta} Re^{i\theta} - a & \text{se} \quad t \in [\theta, +\infty) \\ -\frac{s}{\theta} Re^{-i\theta} - a & \text{se} \quad t \in (-\infty, -\theta] \end{cases}$$

com $R > 0$ e $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi - \phi)$.

A função $(0, +\infty) \ni t \to e^{-tA} \in \mathscr{L}(X)$ pode ser estendida para uma função analítica $\{z \in \mathbb{C} \backslash \{0\} : |\arg z| < \varepsilon\} \ni z \to e^{-zA} \in \mathscr{L}(X)$ para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Temos também que se $b \in \mathbb{R}$ é tal que $\operatorname{Re}\sigma(A) > b$, isto é, se $\operatorname{Re}\lambda > b$ para todo $\lambda \in \sigma(A)$, então existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|e^{-tA}\|_{\mathscr{L}(X)} \leq Ce^{-bt} \quad \text{e} \quad \|Ae^{-tA}\|_{\mathscr{L}(X)} \leq \frac{C}{t} e^{-bt}$$

para todo $t > 0$. Por fim, temos que

$$\frac{d}{dt}(e^{-tA}) = -Ae^{-tA}$$

para todo $t > 0$.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada na página 21 de (HENRY, 1981) e também na página 43 em (MACEDO, 2016). □

3.2 Conceitos e resultados fundamentais

Nesta seção apresentamos alguns conceitos e resultados para espaços vetoriais topológicos localmente convexos, tais conceitos e resultados são bem conhecidos em espaços de Banach e serão fundamentais para enunciar e demonstrar o principal resultado deste Capítulo.

Proposição 12. Seja $X = (X,\Lambda)$ um espaço vetorial topológico localmente convexo e sequencialmente completo. Se $A : D(A) \subset X \to X$ é um operador linear sequencialmente fechado e $\lambda \in \rho(A)$, então $(\lambda - A) : D(A) \to X$ é bijetivo.

Demonstração. Seja $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $R(\lambda - A)$, tal que $y_k \xrightarrow[k\to\infty]{X} y \in X$. Como $(\lambda - A)^{-1} : R(\lambda - A) \to X$ é contínuo, dada $q \in \Lambda$ existem $p_1, p_2, \ldots, p_m \in \Lambda$ e $C > 0$, tais que

$$q\left((\lambda - A)^{-1}y\right) \leq C\sum_{j=1}^{m} p_j(y)$$

para todo $y \in R(\lambda - A)$. Logo, seja $x_k = (\lambda - A)^{-1}y_k$ para $k \in \mathbb{N}$, temos que

$$q(x_k - x_l) = q\left((\lambda - A)^{-1}(y_k - y_l)\right) \leq C\sum_{j=1}^{m} p_j(y_k - y_l)$$

para quaisquer $m, l \in \mathbb{N}$ e então, como $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy, segue que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy. Temos então que existe $x \in X$ tal que $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{X} x$, pois X é sequêncialmente completo. Como $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequencia em $D(A)$ tal que $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{X} x$,

$$Ax_k = \lambda x_k - (\lambda - A)x_k = \lambda x_k - y_k \xrightarrow[k\to\infty]{X} \lambda x - y$$

e $A : D(A) \subset X \to X$ é sequencialmente fechado segue que $x \in D(A)$ e $Ax = \lambda x - y$. Então $(\lambda - A)x = y$, logo $y \in R(\lambda - A)$ e portanto

$$R(\lambda - A) = \overline{R(\lambda - A)}^{\text{seq}} = X.$$

□

Proposição 13 (Identidade do Resolvente)**.** Seja $X = (X,\Lambda)$ um espaço vetorial topológico localmente convexo e sequencialmente completo. Se $A : D(A) \subset X \to X$ é um operador linear fechado e $\lambda, \mu \in \rho(A)$, então

$$(\mu - A)^{-1} - (\lambda - A)^{-1} = (\lambda - \mu)(\mu - A)^{-1}(\lambda - A)^{-1}.$$

Consequentemente temos que,

$$(\mu - A)^{-1}(\lambda - A)^{-1} = (\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1}.$$

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned}(\mu - A)^{-1} &= (\mu - A)^{-1}(\lambda - A)(\lambda - A)^{-1} \\ &= (\mu - A)^{-1}[(\lambda - \mu)I + (\mu - A)](\lambda - A)^{-1} \\ &= (\lambda - \mu)(\mu - A)^{-1}(\lambda - A)^{-1} + (\lambda - A)^{-1}\end{aligned}$$

de onde segue a primeira igualdade. A segunda igualdade é óbvia se $\mu = \lambda$, por outro lado se $\mu \neq \lambda$, segue da primeira igualdade que

$$\begin{aligned}(\mu - A)^{-1}(\lambda - A)^{-1} &= (\lambda - \mu)^{-1}[(\mu - A)^{-1} - (\lambda - A)^{-1}] \\ &= (\mu - \lambda)^{-1}[(\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1}] = (\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1}\end{aligned}$$

□

Definição 24. Sejam (Y,d) um espaço métrico e $f : Y \to X$ uma aplicação. Dizemos que f é uniformemente contínua se, dados $p \in \Lambda$ e $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $p(f(x) - f(y)) < \varepsilon$ para todos $x,y \in Y$ tais que $d(x,y) < \delta$.

Proposição 14. Sejam (Y,d) um espaço métrico compacto e $f : Y \to X$ uma aplicação contínua. Então f é uniformemente contínua.

Demonstração. Dados $p \in \Lambda$ e $\varepsilon > 0$, da continuidade de f, segue que para cada $y \in Y$ existe $\delta_y > 0$ tal que $p(f(x) - f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $x \in Y$ tal que $d(x,y) < 2\delta$. Como Y é compacto, a cobertura aberta $\{B_d(y,\delta_y)\}_{y \in Y}$ possui uma subcobertura finita $\{B_d(y_j,\delta_{y_j})\}_{j=1}^{k}$, seja $\delta = \min\{\delta_{y_j} : j = 1,2,\dots,k\}$. Dados $x,y \in Y$ tais que $d(x,y) < \delta$, como $\{B_d(y_j,\delta_{y_j})\}_{j=1}^{k}$ é uma cobertura de Y temos que existe $m \in \{1,2,\dots,k\}$ tal que $y \in B_d(y_m,\delta_{y_m})$, logo $d(y,y_m) < \delta_{y_m} < 2\delta_{y_m}$ e

$$d(x,y_m) \leq d(x,y) + d(y,y_m) < \delta + \delta_{y_m} \leq 2\delta_{y_m}.$$

Então

$$p(f(x) - f(y)) \leq p(f(x) - f(y_m)) + p(f(y_m) - f(y)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portanto f é uniformemente contínua. □

Definição 25. Uma partição P de um intervalo $[a,b]$ é uma família finita $\{t_j\}_{j=0}^{N_P}$ de pontos em $[a,b]$ tais que $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{N_P} = b$. O módulo da partição $P = \{t_j\}_{j=0}^{N_P}$, denotado por $\|P\|$, é definido por $\|P\| = \max\{t_j - t_{j-1} : 1 \leq j \leq N_P\}$.

Dada uma curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, dizemos que γ tem variação limitada se existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\sum_{j=1}^{N_P} |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| \leq C$$

para qualquer partição $P = \{t_j\}_{j=0}^{N_P}$ de $[a,b]$. Neste caso definimos a variação total de γ, a qual denotamos por $V(\gamma)$, sendo

$$V(\gamma) = \sup\left\{\sum_{j=1}^{N_P} |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| : P = \{t_j\}_{j=0}^{N_P} \text{ é partição de } [a,b]\right\}.$$

Teorema 10. Sejam $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ uma curva de variação limitada e $f : [a,b] \to X$ uma função contínua, existe um único $y \in X$ com a seguinte propriedade:

Dados $p \in \Lambda$ e $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $P = \{t_j\}_{j=0}^{N_P}$ é uma partição de $[a,b]$ com $\|P\| < \delta$ então

$$p\left(y - \sum_{j=1}^{N_P}[\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})]f(\tau_j)\right) < \varepsilon$$

para quaisquer $\tau_j \in [t_j, t_{j-1}]$ com $j = 1, \ldots, N_P$.

Demonstração. Segue da Proposição 14 que f é uniformemente contínua, logo para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $\delta_k > 0$ tal que

$$p(f(t) - f(s)) < \frac{1}{k}$$

se $|t - s| < \delta_k$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, sejam

$$E_k := \left\{ \sum_{j=1}^{N_P}[\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})]f(\tau_j) : \begin{array}{l} P = \{t_j\}_{j=0}^{N_P} \text{ é partição de } [a,b],\ \|P\| < \delta_k \\ \text{e } \tau_j \in [t_j, t_{j-1}] \text{ para } j = 1, \ldots, N_P \end{array} \right\} \text{ e}$$

$$\operatorname{diam}_p(E_k) := \sup\{p(x-y) : x, y \in E_k\},$$

mostraremos que $\operatorname{diam}_p(E_k) \leq \frac{2}{k}$. Suponhamos que $P = \{t_j\}_{j=0}^{N_P}$ e $Q = \{s_j\}_{j=0}^{N_Q}$ sejam partições de $[a,b]$ tais que $\|P\| < \delta_k$ e $P \subset Q$, então para cada $j \in \{0, 1, \ldots, N_P\}$ existe $l_j \in \{0, 1, \ldots, N_Q\}$ tal que $s_{l_j} = t_j$ e naturalmente temos $0 = l_0 < l_1 < \ldots < l_{N_P} = N_Q$. Segue que

$$\begin{aligned}
&p\left(\sum_{j=1}^{N_P}[\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})]f(\tau_j) - \sum_{j=1}^{N_Q}[\gamma(s_j) - \gamma(s_{j-1})]f(\sigma_j)\right) \\
&= p\left(\sum_{j=1}^{N_P}\sum_{l=l_{j-1}}^{l_j}[\gamma(s_l) - \gamma(s_{l_{-1}})]f(\tau_j) - \sum_{j=1}^{N_P}\sum_{l=l_{j-1}}^{l_j}[\gamma(s_l) - \gamma(s_{l_{-1}})]f(\sigma_l)\right) \\
&= p\left(\sum_{j=1}^{N_P}\sum_{l=l_{j-1}}^{l_j}[\gamma(s_l) - \gamma(s_{l_{-1}})](f(\tau_j) - f(\sigma_l))\right) \\
&\leq \sum_{j=1}^{N_P}\sum_{l=l_{j-1}}^{l_j}|\gamma(s_l) - \gamma(s_{l_{-1}})|p(f(\tau_j) - f(\sigma_l)) \\
&\leq \sum_{j=1}^{N_P}\sum_{l=l_{j-1}}^{l_j}|\gamma(s_l) - \gamma(s_{l_{-1}})|\frac{1}{k} = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{N_P}\sum_{l=l_{j-1}}^{l_j}|\gamma(s_l) - \gamma(s_{l_{-1}})| \\
&= \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{N_Q}|\gamma(s_j) - \gamma(s_{j_{-1}})| \leq \frac{1}{k}V(\gamma)
\end{aligned}$$

para quaisquer $\tau_j \in [t_j, t_{j-1}]$ com $j = 1, \ldots, N_P$ e $\sigma_j \in [s_j, s_{j-1}]$ com $j = 1, \ldots, N_Q$, pois para quaisquer $1 \leq j \leq N_P$ e $l_{j-1} \leq l \leq l_j$

$$\sigma_l \in [s_l, s_{l-1}] \subset [s_{l_j}, s_{l_{j-1}}] = [t_j, t_{j-1}]$$

e então $|\tau_j - \sigma_l| < \delta_k$.

Assim para quaisquer, $P = \{t_j\}_{j=0}^{N_P}, Q = \{s_j\}_{j=0}^{N_Q}$ partições de $[a,b]$ denotando a partição $P \cup Q$ por $\{r_j\}_{j=0}^{N}$, como $P \subset P \cup Q$ e $Q \subset P \cup Q$, temos que

$$\begin{aligned}
& p\left(\sum_{j=1}^{N_P}[\gamma(t_j)-\gamma(t_{j-1})]f(\tau_j)-\sum_{j=1}^{N_Q}[\gamma(s_j)-\gamma(s_{j-1})]f(\sigma_j)\right) \\
& \leq p\left(\sum_{j=1}^{N_P}[\gamma(t_j)-\gamma(t_{j-1})]f(\tau_j)-\sum_{j=1}^{N}[\gamma(r_j)-\gamma(r_{j-1})]f(r_j)\right) \\
& + p\left(\sum_{j=1}^{N_Q}[\gamma(s_j)-\gamma(s_{j-1})]f(\sigma_j)-\sum_{j=1}^{N}[\gamma(r_j)-\gamma(r_{j-1})]f(r_j)\right) \\
& \leq \frac{1}{k}V(\gamma)+\frac{1}{k}V(\gamma)=\frac{2}{k}V(\gamma)
\end{aligned}$$

para quaisquer $\tau_j \in [t_j, t_{j-1}]$ com $j = 1, \ldots, N_P$ e $\sigma_j \in [s_j, s_{j-1}]$ com $j = 1, \ldots, N_Q$, como queríamos mostrar.

Para cada $k \in \mathbb{N}$ seja $y_k \in E_k$, como $E_m \subset E_k$ se $m \geq k$, então dado $k_0 \in \mathbb{N}$, para $k, m \geq k_0$ temos $y_k, y_m \in E_{k_0}$ e então $\|y_k - y_m\| \leq \frac{2}{k_0}V(\gamma)$. Portanto a sequência (y_k) é de Cauchy e, como X é sequencialmente completo, segue que tal sequência converge, seja y seu limite. Se $P = \{t_j\}_{j=0}^{N_P}$ é uma partição de $[a,b]$ com $\|P\| < \delta_k$, então

$$p\left(y_j - \sum_{j=1}^{N_P}[\gamma(t_j)-\gamma(t_{j-1})]f(\tau_j)\right) \leq \frac{2}{k}V(\gamma)$$

para qualquer $j \geq k$, fazendo $j \to \infty$ obtemos

$$p\left(y - \sum_{j=1}^{N_P}[\gamma(t_j)-\gamma(t_{j-1})]f(\tau_j)\right) \leq \frac{2}{k}V(\gamma).$$

Portanto, y tem a propriedade desejada. Se $x \in X$ tem a mesma propriedade de y, dada uma sequência de partições $P_k = \{t_j^k\}_{j=0}^{N_{P_k}}$ tal que $\|P_k\| \to 0$ quando $k \to \infty$, segue que

$$\sum_{j=1}^{N_{P_k}}[\gamma(t_j^k)-\gamma(t_{j-1}^k)]f(t_j^k) \xrightarrow[k\to\infty]{X} x \text{ e } \sum_{j=1}^{N_{P_k}}[\gamma(t_j^k)-\gamma(t_{j-1}^k)]f(t_j^k) \xrightarrow[k\to\infty]{X} y,$$

portanto $x = y$ pela unicidade do limite. □

Definição 26. Tal $y \in X$ do teorema anterior é chamado de integral de Riemann-Stieltjes de f com respeito a curva γ e denotado por $\int_a^b f d\gamma$. No caso especial em que γ é a identidade denotamos a integral $\int_a^b f d\gamma$ simplesmente por $\int_a^b f(t)dt$, tal integral é chamada de integral de Riemann de f.

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $\gamma : I \to \mathbb{K}$ uma curva de variação limitada sobre intervalos compactos,isto é, $\gamma|_{[a,b]}$ tem variação limitada para qualquer intervalo $[a,b] \subset I$. Consideremos também $f : I \to X$ uma função contínua.

Se $I = [a,b)$ com $-\infty < a < b \leq +\infty$, diremos que a integral $\int_a^b f d\gamma$ existe (ou converge) e definimos

$$\int_a^b f d\gamma := \lim_{c \to b-} \int_a^c f d\gamma$$

caso o limite acima exista.

Analogamente, se $I = (a,b]$ com $-\infty \leq a < b < +\infty$, diremos que a integral $\int_a^b f d\gamma$ existe (ou converge) e definimos

$$\int_a^b f d\gamma := \lim_{c \to a+} \int_a^c f d\gamma$$

caso o limite acima exista.

Se $I = (a,b)$ com $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, diremos que a integral $\int_a^b f d\gamma$ existe (ou converge) e definimos

$$\int_a^b f d\gamma := \int_a^c f|_{(a,c]} d\gamma + \int_c^b f|_{[c,b)} d\gamma$$

se dado $c \in (a,b)$ as duas integrais do lado direito existem.

Se I é um intervalo com extremos a e b, com $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, denotaremos a integral $\int_a^b f d\gamma$ por $\int_I f d\gamma$ também.

Proposição 15. Sejam $X = (X, \Lambda_X)$, (Y, Λ_Y) espaços vetoriais topológicos localmente convexos, Hausdorff e sequencialmente completos. Consideremos também $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $\gamma : I \to \mathbb{C}$ uma curva de variação limitada sobre intervalos compactos, $f : I \to X$ uma aplicação contínua e $E \subset X$ um subespaço vetorial. Temos que

(i) Se $I = [a,b]$ e $f(I) \subset E$, então existe uma sequência $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset E$ tal que

$$x_k \xrightarrow[k \to \infty]{X} \int_a^b f \, d\gamma. \tag{3.4}$$

(ii) Se $A : X \to Y$ é um operador sequencialmente contínuo e a integral $\int_I f \, d\gamma$ é convergente, então a integral $\int_I A \circ f \, d\gamma$ é convergente e

$$A\left(\int_I f \, d\gamma\right) = \int_I A \circ f \, d\gamma. \tag{3.5}$$

(iii) Se $A : D(A) \subset X \to Y$ é um operador sequencialmente fechado, $A \circ f : I \to Y$ é contínua e as integrais $\int_I f \, d\gamma$ e $\int_I A \circ f \, d\gamma$ são convergentes, então

$$A\left(\int_I f \, d\gamma\right) = \int_I A \circ f \, d\gamma.$$

Demonstração. (i) Consideremos

$$x_k := \sum_{j=1}^{k} \left[\gamma\left(a + (b-a)\frac{j}{k}\right) - \gamma\left(a + (b-a)\frac{j-1}{k}\right)\right] f\left(a + (b-a)\frac{j}{k}\right)$$

para $k \in \mathbb{N}$. Temos que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset E$ e pelo Teorema 10 temos (3.4).

(ii) Suponhamos $I = [a,b]$ e seja $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ a sequência apresentada no item (i). Temos que (3.4) ocorre e pelo Teorema 10

$$Ax_k = \sum_{j=1}^{k}\left[\gamma\left(a+(b-a)\frac{j}{k}\right)-\gamma\left(a+(b-a)\frac{j-1}{k}\right)\right]A\circ f\left(a+(b-a)\frac{j}{k}\right)\xrightarrow[k\to\infty]{Y}\int_I A\circ f\,d\gamma.$$

Portanto, como A é sequencialmente contínuo, temos (3.5).

Se $I = [a,b)$, seja $(c_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset (a,b)$, usando continuidade sequencial do operador A, temos então que

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^{c_k} A\circ f\,d\gamma = A\left(\lim_{k\to\infty}\int_a^{c_k} f\,d\gamma\right) = A\left(\int_I f\,d\gamma\right).$$

Então a integral $\int_I A\circ f\,d\gamma$ é convergente e temos (3.5). Os outros casos ($I = (a,b]$ e $I = (a,b)$) são análogos.

(iii) É similar a demonstração de (ii). $\square$

Definição 27. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $\gamma : I \to \mathbb{C}$ uma curva de variação limitada sobre intervalos fechados, fixado um $c \in I$ definimos a curva $|\gamma|_c : I \to \mathbb{R}$ por

$$|\gamma|_c(x) = \begin{cases} V(\gamma|_{[c,x]}) & \text{se } x \geq c \\ -V(\gamma|_{[x,c]}) & \text{se } x \leq c. \end{cases}$$

Seja $f : \gamma(I) \to X$ uma função contínua definimos

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_I f\circ\gamma\,d\gamma \text{ e}$$

$$\int_\gamma f(z)|dz| := \int_I f\circ\gamma\,d|\gamma|_c$$

caso existam as integrais do lado direito.

Observação 9. A definição de $\int_\gamma f(z)|dz|$ é independente da escolha de $c \in I$, de fato, basta notar que $|\gamma|_c(y) - |\gamma|_c(x) = V(\gamma|_{[x,y]})$ para quaisquer $x,y,c \in I$ com $x \leq y$ e que a integral $\int_\gamma f(z)|dz|$ só depende das diferenças $|\gamma|_c(y) - |\gamma|_c(x)$. Como para fins de integração não há diferença o $c \in I$ escolhido, denotaremos a curva $|\gamma|_c$ somente por $|\gamma|$.

Proposição 16. Sejam $\gamma : I \to \mathbb{C}$ uma curva de variação limitada sobre intervalos compactos e $f : \gamma(I) \to X$ uma função contínua. Se para toda $p \in \Lambda$ a integral $\int_\gamma p(f(z))|dz|$ existe, então a integral $\int_\gamma f(z)dz$ existe e

$$p\left(\int_\gamma f(z)dz\right) \leq \int_\gamma p(f(z))|dz|$$

para toda seminorma $p \in \Lambda$.

Demonstração. A demonstração é idêntica ao caso em que X é um espaço de Banach (ver Proposição 1.1.11 em (MACEDO, 2016)), trocando apenas a norma pela seminorma. □

Definição 28. Dizemos que uma curva $\gamma : I \to X$ é de classe C^1 por partes se existem $a_1 < a_2 < \ldots < a_N$ em I, tais que $\gamma|_{I\setminus(a_1,+\infty)}$, $\gamma|_{I\setminus(-\infty,a_N)}$ e $\gamma|_{[a_j,a_{j+1}]}$ para $j = 1,2,\ldots,N-1$ são curvas de classe C^1.

Teorema 11 (Fubini)**.** Sejam $I,J \subset \mathbb{R}$ intervalos, $\gamma : I \to \mathbb{C}$ e $\zeta : J \to \mathbb{C}$ curvas de classe C^1 por partes e $F : I \times J \to X$ uma função contínua. Suponhamos que, para quaisquer $t \in I$ e $s \in J$, as integrais

$$f(t) := \int_J F(t,s)\,d\zeta(s) \quad \text{e} \quad g(s) := \int_I F(t,s)\,d\gamma(t)$$

existam e que as funções $f : I \to X$ e $g : J \to X$ definidas dessa forma sejam contínuas. Suponhamos ainda que para toda seminorma $p \in \Lambda$

$$\int_{I\times J} p(F(t,s))|\gamma'(t)||\zeta'(s)|\,dtds < \infty,$$

onde a integral acima é a integral de Lebesgue. Então as integrais abaixo existem e vale

$$\int_I f\,d\gamma = \int_J g\,d\zeta. \tag{3.6}$$

Demonstração. A demonstração é idêntica ao caso em que X é um espaço de Banach (ver Teorema 1.2.9 em (MACEDO, 2016)), trocando apenas a norma pela seminorma. □

Definição 29. Sejam $\Omega \in \mathbb{C}$ um aberto e $f : \Omega \to X$ uma aplicação. Dizemos que f é holomorfa em $z_0 \in \Omega$ se o limite

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe. Neste caso, denotamos o limite acima por $f'(z_0)$ $\left(\text{ou } \frac{df(z_0)}{dz}\right)$ e dizemos que $f'(z_0)$ é a derivada de f no ponto z_0. Se f é holomorfa em todos os pontos de Ω dizemos que f é holomorfa em Ω ou simplesmente que f é holomorfa.

Proposição 17 (Hahn-Banach)**.** Seja $X = (X,\Lambda)$ um espaço vetorial topológico localmente convexo Hausdorff. Dado $x \in X\setminus\{0\}$, existe $\xi \in X'$ tal que $\xi(x) \neq 0$.

Demonstração. Ver Corolário 2 do Teorema 18.1 em (TREVES, 1967). □

Teorema 12 (Cauchy)**.** Sejam $\Omega \subset \mathbb{C}$ um aberto simplesmente conexo, $f : \Omega \to X$ uma aplicação holomorfa e $\gamma : [a,b] \to \Omega$ uma curva fechada (isto é, $\gamma(a) = \gamma(b)$) de variação limitada. Então

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Demonstração. Sabemos que o teorema é válido para $X = \mathbb{C}$ (ver Teorema 6.15 de (CONWAY, 1978)). Em geral, dados $\xi \in X'$ e $\lambda_0 \in \Omega$, temos que

$$\begin{aligned}(\xi \circ f)'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{\xi(f(z)) - \xi(f(z_0))}{z - z_0} &= \lim_{z \to z_0} \xi\left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right) \\ &= \xi\left(\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right) = \xi(f'(z_0)).\end{aligned}$$

Logo $\xi \circ f$ é holomorfa em Ω. Temos então que

$$\xi\left(\int_\gamma f(z)\,dz\right) = \int_\gamma \xi \circ f(z)\,dz = 0.$$

Portanto, como $\xi \in X'$ foi tomado arbitrariamente, segue da Proposição 17 que

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

□

3.3 Operadores pseudosetoriais e semigrupos analíticos em espaços vetoriais topológicos localmente convexos

Nesta seção apresentamos uma versão do Teorema 9 para o caso em que X é um espaço vetorial topológico localmente convexo, Hausdorff e sequencialmente completo. Começaremos apresentando o espaço onde convergirá a integral da fórmula integral de Cauchy:

$$e^{-tA} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\lambda + A)^{-1} e^{\lambda t}\, d\lambda.$$

Definição 30. Sejam $X = (X, \Lambda)$ um espaço vetorial topológico localmente convexo e $L(X)$ o espaço dos operadores lineares $T : X \to X$. Munimos o espaço $L(X)$ com a família de seminormas:

$$\Lambda_{L(X)} := \{q_{p,x} : p \in \Lambda \text{ e } x \in X\},$$

onde dados $p \in \Lambda$, $x \in X$ e $T \in L(X)$

$$q_{p,x}(T) = p(Tx).$$

Dessa forma, temos que $L(X) = \big(L(X), \Lambda_{L(X)}\big)$ é um espaço vetorial topológico localmente convexo.

O resultado a seguir nos mostra que o espaço $L(X)$ herda algumas propriedades do espaço X.

Proposição 18. Sejam $X = (X, \Lambda)$ um espaço vetorial topológico localmente convexo, $L(X) = \big(L(X), \Lambda_{L(X)}\big)$ o espaço vetorial topológico localmente convexo definido acima, $\langle T_\beta \rangle_{\beta \in \Upsilon}$ um net em $L(X)$ e $T, U \in L(X)$. Temos que:

(i) $T_\beta \xrightarrow[\beta\in\Upsilon]{L(X)} T$ se, e somente se, $T_\beta x \xrightarrow[\beta\in\Upsilon]{X} Tx$ para todo $x \in X$.

(ii) Se $T_\beta \xrightarrow[\beta\in\Upsilon]{L(X)} T$, então $T_\beta \circ U \xrightarrow[\beta\in\Upsilon]{L(X)} T \circ U$.

(iii) Se $U \in \mathscr{L}(X)$ e $T_\beta \xrightarrow[\beta\in B]{L(X)} T$, então $U \circ T_\beta \xrightarrow[\beta\in\Upsilon]{L(X)} U \circ T$.

(iv) Se Λ é separante, então $\Lambda_{L(X)}$ é separante. Logo se X é Hausdorff, então $L(X)$ é Hausdorff.

(v) Se X é sequencialmente completo, então $L(X)$ é sequencialmente completo. Se X é completo, então $L(X)$ é completo.

Demonstração. (i) De fato, $T_\beta \xrightarrow[\beta\in\Upsilon]{L(X)} T$ se, e somente se, $p(T_\beta x - Tx) = q_{p,x}(T_\beta - T) \xrightarrow[\beta\in\Upsilon]{} 0$ para quaisquer $x \in X$ e $p \in \Lambda$. O que ocorre se, e somente se, $T_\beta x \xrightarrow[\beta\in\Upsilon]{X} Tx$ para todo $x \in X$.

(ii) Segue imediatamente de (i).

(iii) Seja $x \in X$, segue da continuidade de (i) e da continuidade de U que $T_\beta(Ux) \xrightarrow[\beta\in\Upsilon]{L(X)} T(Ux)$. Portanto, segue de (i) que $U \circ T_\beta \xrightarrow[\beta\in\Upsilon]{L(X)} U \circ T$.

(iv) De fato, seja $T \in L(X)$ tal que $q_{p,x}(T) = 0$ para quaisquer $x \in X$ e $p \in \Lambda$. Então dado $x \in X$, temos que $p(Tx) = 0$ para todo $p \in \Lambda$, supondo que Λ é separante, segue $Tx = 0$. Portanto $T = 0$.

(v) Seja $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $L(X)$, então

$$p(T_k x - T_j x) = q_{p,x}(T_k - T_j) \xrightarrow[k,j\to\infty]{} 0$$

para quaisquer $x \in X$ e $p \in \Lambda$. Dado $x \in X$, temos então que $(T_k x)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em X, logo como X é sequêncialmente completo, temos que $(T_k x)_{k\in\mathbb{N}}$ é convergente. Seja $T : X \to X$ definido por

$$Tx = \lim_{k\to\infty} T_k x,$$

segue que $T \in L(X)$ e

$$q_{p,x}(T_k - T) = p(T_k x - Tx) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

para quaisquer $x \in X$ e $p \in \Lambda$. Então $T_k \xrightarrow[k\to\infty]{L(X)} T$ e portanto $L(X)$ é sequencialmente completo.

Supondo que X é completo a demonstração de que $L(X)$ é completo é idêntica a demonstração feita, trocando apenas a sequência $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ por um net $\langle T_\beta \rangle_{\beta\in\Upsilon}$. □

Definição 31 (Operador pseudosetorial)**.** Seja $X = (X,\Lambda)$ um espaço vetorial topológico localmente convexo e sequencialmente completo. Dizemos que um operador linear $A : D(A) : X \to X$ é pseudosetorial com vértice a e ângulo θ se A é sequencialmente fechado, $a \in \mathbb{R}$ e $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ são tais que o setor

$$\Sigma_{a,\theta} := \{\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{a\} : \theta < |\mathrm{Arg}(\lambda - a)|\} \tag{3.7}$$

está contido em $\rho(A)$ e dados $p \in \Lambda$ e $x \in X$, existe $C_{p,x} > 0$ tal que

$$q_{p,x}\left((\lambda - A)^{-1}\right) \leq \frac{C_{p,x}}{|\lambda - a|} \tag{3.8}$$

para todo $\lambda \in \Sigma_{a,\theta}$.

Proposição 19. Sejam $X = (X,\Lambda)$ um espaço vetorial topológico localmente convexo sequencialmente completo e $A : D(A) : X \to X$ um operador pseudosetorial com vértice a e ângulo θ. Então a aplicação $\Sigma_{a,\theta} \ni \lambda \mapsto (\lambda - A)^{-1} \in L(X)$ é holomorfa.

Demonstração. Fixados $\mu \in \Sigma_{a,\theta}$ e $q_{p,x} \in \Lambda_{L(X)}$, seja $y = (\mu - A)^{-1}x$. Dado $\lambda \in \Sigma_{a,\theta}$ tal que $|\mu - \lambda| < \frac{1}{2}|\mu - a|$, temos que

$$\begin{aligned} q_{p,x}\left((\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1}\right) &= p\left(\left[(\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1}\right]x\right) \\ &= |\mu - \lambda| p\left((\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1}x\right) \\ &= |\mu - \lambda| q_{p,y}\left((\lambda - A)^{-1}\right) \\ &\leq |\mu - \lambda| \frac{C_{p,y}}{|\lambda - a|^{\beta_{p,y}}} \\ &\leq |\mu - \lambda| \frac{2C_{p,y}}{|\mu - a|^{\beta_{p,y}}}, \end{aligned}$$

logo $q_{p,x}\left((\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1}\right) \xrightarrow[\lambda \to \mu]{} 0$. Portanto a aplicação $\Sigma_{a,\theta} \ni \lambda \mapsto (\lambda - A)^{-1} \in L(X)$ é contínua.

Segue da continuidade demonstrada, da identidade do resolvente (Proposição 13) e do item (ii) da Proposição 18 que

$$(\lambda - \mu)^{-1}\left((\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1}\right) = -(\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1} \xrightarrow[\lambda \to \mu]{L(X)} -(\mu - A)^{-2}.$$

Portanto a aplicação $\Sigma_{a,\theta} \ni \lambda \mapsto (\lambda - A)^{-1} \in L(X)$ é holomorfa. □

Temos agora todas as ferramentas para enunciar e demonstrar uma versão do Teorema 9 para o caso em que X é um espaço vetorial topológico localmente convexo, sequencialmente completo e Hausdorff.

Teorema 13. Seja $X = (X,\Lambda)$ um espaço vetorial topológico localmente convexo, sequencialmente completo e Hausdorff. Suponhamos que $A : D(A) \subset X \to X$ um operador pseudosetorial com vértice $a \in \mathbb{R}$ e ângulo $\theta_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$. Dado $t > 0$, seja

$$e^{-tA} := \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} (\lambda + A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda, \tag{3.9}$$

onde a integração acima é realizada em $L(X)$, a curva $\Gamma : \mathbb{R} \to \left(-\Sigma_{a,\theta}\right)$ é dada por:

$$\Gamma(s) = \begin{cases} Re^{it} - a & \text{se} \quad t \in [-\theta, \theta] \\ \frac{s}{\theta} Re^{i\theta} - a & \text{se} \quad t \in [\theta, +\infty) \\ -\frac{s}{\theta} Re^{-i\theta} - a & \text{se} \quad t \in (-\infty, -\theta] \end{cases},$$

$R > 0$ e $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi - \theta_0)$. Temos que:

(i) $e^{-tA}e^{-sA} = e^{-(t+s)A}$ para todos $t, s > 0$.

(ii) $e^{-tA}x \xrightarrow[t\to 0+]{X} x$ para todo $x \in D(A)$.

(iii) A aplicação

$$(0, +\infty) \ni t \mapsto e^{-tA} \in L(X)$$

se estende a uma aplicação

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : |\mathrm{Arg}(\lambda)| < \varepsilon\} \ni z \mapsto e^{-zA} \in L(X)$$

analítica.

(iv) Temos que $\mathrm{Im}(e^{-tA}) \subset D(A^k)$ para quaisquer $k \in \mathbb{N}$ e $t > 0$. Além disso, para quaisquer $p \in \Lambda$ e $x \in X$, existe $M_{p,x} > 0$ tal que

$$q_{p,x}\left(e^{-tA}\right) \leq M_{p,x}e^{-ta} \quad \text{e} \quad q_{p,x}\left(Ae^{-tA}\right) \leq \frac{M_{p,x}}{t}e^{-ta} \tag{3.10}$$

para todo $t > 0$.

(v) Dado $x \in D(A)$, se $e^{-tA}Ax \xrightarrow[t\to 0+]{X} Ax$, temos que

$$\frac{e^{-tA}x - x}{t} \xrightarrow[t\to 0+]{X} -Ax.$$

Em particular, se $x \in D(A^2)$, segue que a convergência acima ocorre.

Demonstração. Suponhamos inicialmente que $a = 0$. Sejam $0 < \varepsilon < \theta - \frac{\pi}{2}$, $S_\varepsilon = \{\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\} : |\mathrm{Arg}(\lambda)| < \varepsilon\}$ e $z \in S_\varepsilon$, definamos

$$e^{-zA} := \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{z\lambda}(\lambda + A)^{-1}d\lambda. \tag{3.11}$$

Mostraremos que a integral acima é convergente. De fato, temos que

$$\mathrm{Re}(z\lambda) = |z\lambda|\cos(\mathrm{Arg}(z\lambda)) = |z\lambda|\cos(|\mathrm{Arg}(z\lambda)|) = |z\lambda|\cos(|\mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}(\lambda)|), \tag{3.12}$$

assim dado $\lambda \in \Gamma((-\infty, -\theta] \cup [\theta, \infty))$, notando que $|\mathrm{Arg}(\lambda)| = \theta$, segue que

$$|\mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}(\lambda)| = |\mathrm{Arg}(\lambda) - \mathrm{Arg}(\bar{z})| \geq |\mathrm{Arg}(\lambda)| - |\mathrm{Arg}(\bar{z})| > \theta - \varepsilon > \frac{\pi}{2} \quad \text{e}$$

$$|\mathrm{Arg}(z)+\mathrm{Arg}(\lambda)| \leq |\mathrm{Arg}(z)|+|\mathrm{Arg}(\lambda)| < \varepsilon+\theta < \varepsilon-\theta+2\pi < \frac{3\pi}{2},$$

logo

$$\cos(|\mathrm{Arg}(z)+\mathrm{Arg}(\lambda)|) < \cos(\theta-\varepsilon) < 0. \tag{3.13}$$

Seja $q_{p,x} \in \Lambda_{L(X)}$, considerando $\Gamma_1 = \Gamma|_{(-\infty,-\theta]}$ e $\Gamma_2 = \Gamma|_{[\theta,\infty)}$, temos então que

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_j} q_{p,x}\left(e^{z\lambda}(\lambda+A)^{-1}\right)|d\lambda| &\leq \int_{\Gamma_j} |e^{z\lambda}| q_{p,x}\left((\lambda+A)^{-1}\right)|d\lambda| \int_{\Gamma_j} e^{\mathrm{Re}(z\lambda)}|\frac{C_{p,x}}{|\lambda|}|d\lambda| \\ &= \int_{\Gamma_j} e^{|z\lambda|\cos(|\mathrm{Arg}(z)+\mathrm{Arg}(\lambda)|)}|\frac{C_{p,x}}{|\lambda|}|d\lambda| \leq \int_{\Gamma_j} e^{|z\lambda|\cos(\theta-\varepsilon)}|\frac{C_{p,x}}{|\lambda|}|d\lambda| < \infty\end{aligned}$$

para $j = 1,2$. Portanto, pela Proposição 16, a integral em (3.11) converge, em particular a integral em (3.9) é convergente para todo $t > 0$.

(i) Seja $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ a curva definida por

$$\Phi(s) = \Gamma(s)+K$$

onde $K > 0$ é uma constante de modo que $\{\Gamma(s) : s \in \mathbb{R}\} \cap \{\Gamma(s)+K : s \in \mathbb{R}\} = \emptyset$. Fixados $t,s > 0$, pelo Teorema de Cauchy (Teorema 12), temos que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Phi} e^{s\mu}(\mu+A)^{-1}d\mu = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{s\lambda}(\lambda+A)^{-1}d\lambda = e^{-sA} \quad \text{e} \tag{3.14}$$

$$\int_{\Gamma} e^{t\lambda}(\mu-\lambda)^{-1}d\lambda = 0 \tag{3.15}$$

para todo $\mu \in \Phi$. Além disso, pela Fórmula Integral de Cauchy (ver Fórmula Integral de Cauchy 5.4 em (CONWAY, 1978)), temos que

$$\int_{\Phi} e^{s\mu}(\mu-\lambda)^{-1}d\mu = 2\pi i e^{s\lambda} \tag{3.16}$$

para todo $\lambda \in \Gamma$. Segue de (3.14), da identidade do resolvente (Proposição 13), do Teorema de

Fubini (Teorema 11), de (3.15) e (3.16) que

$$
\begin{aligned}
e^{-tA}e^{-sA} &= \left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{t\lambda}(\lambda+A)^{-1}d\lambda\right)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Phi e^{s\mu}(\mu+A)^{-1}d\mu\right)\\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Gamma\left(\int_\Phi e^{t\lambda}e^{s\mu}(\lambda+A)^{-1}(\mu+A)^{-1}d\mu\right)d\lambda\\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Gamma\left(\int_\Phi e^{t\lambda+s\mu}(\mu-\lambda)^{-1}\left[(\lambda+A)^{-1}-(\mu+A)^{-1}\right]d\mu\right)d\lambda\\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Gamma\left(\int_\Phi e^{t\lambda+s\mu}(\mu-\lambda)^{-1}(\lambda+A)^{-1}d\mu\right)d\lambda\\
&\quad - \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Gamma\left(\int_\Phi e^{t\lambda+s\mu}(\mu-\lambda)^{-1}(\mu+A)^{-1}d\mu\right)d\lambda\\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Gamma\left(\int_\Phi e^{t\lambda+s\mu}(\mu-\lambda)^{-1}(\lambda+A)^{-1}d\mu\right)d\lambda\\
&\quad - \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Phi\left(\int_\Gamma e^{t\lambda+s\mu}(\mu-\lambda)^{-1}(\mu+A)^{-1}d\lambda\right)d\mu\\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Gamma e^{t\lambda}\left(\int_\Phi e^{s\mu}(\mu-\lambda)^{-1}d\mu\right)(\lambda+A)^{-1}d\lambda\\
&\quad - \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Phi e^{\mu s}\left(\int_\Gamma e^{t\lambda}(\mu-\lambda)^{-1}d\lambda\right)(\mu+A)^{-1}d\mu\\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Gamma e^{t\lambda}2\pi i e^{s\lambda}(\lambda+A)^{-1}d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{(t+s)\lambda}(\lambda+A)^{-1}d\lambda = e^{-(t+s)A}.
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

(ii) Pelo Teorema de Cauchy (Teorema 12) e pela Fórmula Integral de Cauchy, temos que

$$
\int_\Gamma e^{t\lambda}(\lambda+A)^{-1}d\lambda = \int_{t^{-1}\Gamma} e^{t\lambda}(\lambda+A)^{-1}d\lambda \quad \text{e} \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{t^{-1}\Gamma} e^{t\lambda}\lambda^{-1}d\lambda = 1
$$

para todo $t>0$. Logo, dados $x\in D(A)$ e $p\in\Lambda$, temos que

$$
\begin{aligned}
p(e^{-tA}x-x) &= p\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{t\lambda}(\lambda+A)^{-1}x\,d\lambda - x\right)\\
&= p\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{t^{-1}\Gamma} e^{t\lambda}(\lambda+A)^{-1}x\,d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int_{t^{-1}\Gamma} e^{t\lambda}\lambda^{-1}x\,d\lambda\right)\\
&= \frac{1}{2\pi}p\left(\int_{t^{-1}\Gamma} e^{t\lambda}\left[(\lambda+A)^{-1}-\lambda^{-1}\right]x\,d\lambda\right)\\
&= \frac{1}{2\pi}p\left(\int_{t^{-1}\Gamma} e^{t\lambda}(\lambda+A)^{-1}\left[I-(\lambda+A)\lambda^{-1}\right]x\,d\lambda\right)\\
&= \frac{1}{2\pi}p\left(\int_{t^{-1}\Gamma} e^{t\lambda}\lambda^{-1}(\lambda+A)^{-1}Ax\,d\lambda\right) \le \frac{1}{2\pi}\int_{t^{-1}\Gamma}|e^{t\lambda}||\lambda|^{-1}q_{p,Ax}\left((\lambda+A)^{-1}\right)|d\lambda|\\
&\le \frac{1}{2\pi}\int_{t^{-1}\Gamma}|e^{t\lambda}||\lambda|^{-2}C_{p,Ax}|d\lambda| = \frac{t}{2\pi}\int_\Gamma|e^{\mu}||\mu|^{-2}C_{p,Ax}|d\mu| \xrightarrow[t\to 0+]{} 0.
\end{aligned}
$$

(iii) Usando o Teorema da convergência dominada para derivar sobre o sinal de integração, obtemos que

$$
\frac{d}{dz}(e^{-zA}) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda e^{z\lambda}(\lambda+A)^{-1}d\lambda. \tag{3.18}
$$

De fato, notando que (3.12) e (3.13) são válidas para quaisquer $z \in S_\varepsilon$ e $\lambda \in \Gamma((-\infty,-\theta]\cup[\theta,\infty))$, fixado $z_0 \in S_\varepsilon$, tomando $z \in S_\varepsilon$ tal que $|z-z_0| < \frac{|z_0|}{2}$ e considerando

$$c = \frac{\cos(\theta-\varepsilon)}{2}$$

temos que $c<0$ e

$$\begin{aligned}
\left|\frac{e^{z\lambda}-e^{z_0\lambda}}{z-z_0} - \lambda e^{z_0\lambda}\right| &\leq \left|\frac{e^{z\lambda}-e^{z_0\lambda}}{z-z_0}\right| + |\lambda|\left|e^{z_0\lambda}\right| \\
&\leq \sup\left\{\left|\lambda e^{w\lambda}\right| : w\in S_\varepsilon \text{ é tal que } |w-z_0| \leq \frac{|z_0|}{2}\right\} + |\lambda|\left|e^{z_0\lambda}\right| \\
&\leq |\lambda|\left(\sup\left\{e^{\mathrm{Re}(w\lambda)} : w\in S_\varepsilon \text{ é tal que } |w| \geq \frac{|z_0|}{2}\right\} + e^{\mathrm{Re}(z_0\lambda)}\right) \\
&\leq |\lambda|\left(\sup\left\{e^{2c|w||\lambda|} : w\in S_\varepsilon \text{ é tal que } |w| \geq \frac{|z_0|}{2}\right\} + e^{2c|z_0||\lambda|}\right) \\
&\leq |\lambda|\left(e^{c|z_0||\lambda|} + e^{2c|z_0||\lambda|}\right) \leq 2|\lambda| e^{c|z_0||\lambda|}
\end{aligned}$$

para todo $\lambda \in \Gamma((-\infty,-\theta]\cup[\theta,\infty))$. Temos também que existe $C>0$, tal que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{e^{z\lambda}-e^{z_0\lambda}}{z-z_0} - \lambda e^{z_0\lambda}\right| &\leq \left|\frac{e^{z\lambda}-e^{z_0\lambda}}{z-z_0}\right| + |\lambda|\left|e^{z_0\lambda}\right| \\
&\leq \sup\left\{\left|\lambda e^{w\lambda}\right| : w\in\mathbb{C} \text{ tal que } |w| \leq |z_0|+1\right\} + |\lambda|\left|e^{z_0\lambda}\right| \\
&\leq \sup\{|\mu e^{w\mu}| : w,\mu\in\mathbb{C} \text{ tais que } |w|\leq|z_0|+1 \text{ e } |\mu|\leq r\} \\
&\quad + \sup\{|\mu||e^{z_0\mu}| : \mu\in\mathbb{C} \text{ tal que } |\mu|\leq r\} \leq C
\end{aligned}$$

para todo $\lambda \in \Gamma([-\theta,\theta])$ e $z\in\mathbb{C}$ tal que $|z| \leq |z_0|+1$.

Assim, sejam $q_{p,x} \in \Lambda_{L(X)}$ e $\Gamma_3 = \Gamma|_{[-\theta,\theta]}$, usando a Proposição 16, pelo Teorema da Convergência Dominada temos que

$$\begin{aligned}
&q_{p,x}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j}\frac{e^{z\lambda}-e^{z_0\lambda}}{z-z_0}(\lambda+A)^{-1}d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j}\lambda e^{z_0\lambda}(\lambda+A)^{-1}d\lambda\right) \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_j}\left|\frac{e^{z\lambda}-e^{z_0\lambda}}{z-z_0} - \lambda e^{z_0\lambda}\right| q_{p,x}\left((\lambda+A)^{-1}\right)|d\lambda| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_j}\left|\frac{e^{z\lambda}-e^{z_0\lambda}}{z-z_0} - \lambda e^{z_0\lambda}\right| \frac{C_{p,x}}{|\lambda|^{\beta_{p,x}}}|d\lambda| \xrightarrow[z\to z_0]{} 0
\end{aligned}$$

para $j=1,2,3$. Portanto

$$q_{p,x}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{e^{z\lambda}-e^{z_0\lambda}}{z-z_0}(\lambda+A)^{-1}d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\lambda e^{z_0\lambda}(\lambda+A)^{-1}d\lambda\right) \xrightarrow[z\to z_0]{} 0.$$

(iv) Sejam $p\in\Lambda$ e $x\in X$, temos que

$$\begin{aligned}
q_{p,x}\left(e^{-tA}\right) &= q_{p,x}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{t\lambda}(\lambda+A)^{-1}d\lambda\right) = q_{p,x}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{t^{-1}\Gamma} e^{t\lambda}(\lambda+A)^{-1}d\lambda\right) \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{t^{-1}\Gamma}|e^{t\lambda}| q_{p,x}\left((\lambda+A)^{-1}\right)|d\lambda| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{t^{-1}\Gamma}|e^{t\lambda}|\frac{C_{p,x}}{|\lambda|}|d\lambda| = \frac{C_{p,x}}{2\pi}\int_{\Gamma}\frac{|e^{\mu}|}{|\mu|}|d\mu| < \infty.
\end{aligned}$$

para todo $t > 0$. Dado $t > 0$, temos também que

$$\int_\Gamma |e^{t\lambda}||\lambda| q_{p,x}\left((\lambda + A)^{-1}\right)|d\lambda| = \int_\Gamma |e^{t\lambda}| C_{p,x} |d\lambda| < \infty,$$

logo, como $p \in \Lambda$ e $x \in X$ foram tomados arbitrariamente, pela Proposição 16, a integral

$$\int_\Gamma e^{t\lambda}\lambda(\lambda + A)^{-1}\, d\lambda$$

converge em $L(X)$. Note que

$$A(\lambda + A)^{-1} = \mathrm{Id} - \lambda(\lambda + A)^{-1}$$

e pelo Teorema de Cauchy $\int_\Gamma e^{t\lambda}\mathrm{Id}\, d\lambda = 0$. Segue então que a integral

$$\int_\Gamma e^{t\lambda} A(\lambda + A)^{-1}\, d\lambda$$

converge em $L(X)$ e

$$\int_\Gamma e^{t\lambda} A(\lambda + A)^{-1}\, d\lambda = \int_\Gamma e^{t\lambda}\mathrm{Id}\, d\lambda - \int_\Gamma e^{t\lambda}\lambda(\lambda + A)^{-1}\, d\lambda = -\int_\Gamma e^{t\lambda}\lambda(\lambda + A)^{-1}\, d\lambda. \quad (3.19)$$

Dado $x \in X$, como A é sequencialmente fechado, pela Proposição 15, segue que $e^{-tA}x \in D(A)$ e

$$Ae^{-tA} = A\int_\Gamma e^{t\lambda}(\lambda + A)^{-1}\, d\lambda = \int_\Gamma e^{t\lambda} A(\lambda + A)^{-1}\, d\lambda. \quad (3.20)$$

Logo

$$\begin{aligned} q_{p,x}\left(Ae^{-tA}\right) &= q_{p,x}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{t\lambda} A(\lambda + A)^{-1}\, d\lambda\right) = q_{p,x}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{t\lambda}\lambda(\lambda + A)^{-1}\, d\lambda\right) \\ &= q_{p,x}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{t^{-1}\Gamma} e^{t\lambda}\lambda(\lambda + A)^{-1}\, d\lambda\right) \leq \frac{1}{2\pi}\int_{t^{-1}\Gamma} |e^{t\lambda}||\lambda| q_{p,x}\left((\lambda + A)^{-1}\right)|d\lambda| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{t^{-1}\Gamma} |e^{t\lambda}| C_{p,x}|d\lambda| = \frac{C_{p,x}}{2\pi t}\int_\Gamma |e^{\mu}||d\lambda| \end{aligned}$$

e portanto considerando

$$M_{p,x} = \frac{C_{p,x}}{2\pi}\max\left\{\int_\Gamma \frac{|e^{\mu}|}{|\mu|}|d\mu|, \int_\Gamma |e^{\mu}||d\lambda|\right\}$$

obtemos as estimativas (3.10). Observe que dado $x \in D(A)$, temos que

$$Ae^{-tA}x = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{t\lambda} A(\lambda + A)^{-1}x\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{t\lambda}(\lambda + A)^{-1}Ax\, d\lambda = e^{-tA}Ax$$

para todo $t > 0$. Logo dado $k \in \mathbb{N}$, supondo que $\mathrm{Im}(e^{-tA}) \subset D(A^k)$ para todo $t > 0$, temos que

$$A^k e^{-tA}x = A^k e^{-\frac{t}{2}A}e^{-\frac{t}{2}A}x = A^{k-1}e^{-\frac{t}{2}A}Ae^{-\frac{t}{2}A}x \in D(A)$$

para quaisquer $x \in X$ e $t > 0$. Logo $\mathrm{Im}(e^{-tA}) \subset D(A^{k+1})$ para todo $t > 0$. Portanto, segue por indução que $\mathrm{Im}(e^{-tA}) \subset D(A^k)$ para quaisquer $t > 0$ e $k \in \mathbb{N}$.

(v) Seja $x \in D(A)$ tal que $e^{-tA}Ax \xrightarrow[t\to 0+]{X} Ax$, segue de (ii)(iii) que a aplicação

$$[0,\infty) \ni t \mapsto e^{-At}x \in X$$

é continua em $[0,\infty)$ e diferenciável sobre $(0,\infty)$. Além disso, segue de (3.18), (3.19) e (3.20) que

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-At}x\right) = -Ae^{-At}x = -e^{-At}Ax$$

para todo $t > 0$. Como a aplicação $[0,\infty) \ni t \mapsto e^{-At}Ax \in X$ é contínua, segue que

$$e^{-At}x = x - \int_0^t e^{-As}Ax\,ds,$$

para todo $t \geq 0$. Considerando $p \in \Lambda$, temos então que

$$\begin{aligned} p\left(\frac{e^{-At}x - x}{t} + Ax\right) &= p\left(\frac{1}{t}\int_0^t e^{-As}Ax\,ds - Ax\right) \\ &= p\left(\frac{1}{t}\int_0^t e^{-As}Ax - Ax\,ds\right) \leq \frac{1}{t}\int_0^t p\left(e^{-As}Ax - Ax\right)ds \xrightarrow[t\to 0+]{} 0. \end{aligned}$$

Portanto

$$\frac{e^{-tA}x - x}{t} \xrightarrow[t\to 0+]{X} -Ax.$$

□

O Teorema anterior não é exatamente uma generalização para o Teorema 9, pois ele não conclui duas propriedades relevantes para o semigrupo $\{e^{-tA}\}_{t\geq 0}$. A primeira propriedade que não é garantida pelo Teorema anterior é a continuidade dos operadores do semigrupo $\{e^{-tA}\}_{t\geq 0}$ e a segunda é a continuidade da aplicação $t \ni [0,\infty) \mapsto e^{-tA}x \in X$, que é garantida apenas para $x \in D(A)$. No entanto, no caso em que $D(A) = X$ a segunda propriedade fica garantida e, como veremos na próxima seção, no caso em que A é um operador pseudodiferencial com coeficientes constantes sobre $\mathscr{S}'$ a primeira propriedade também será válida. Como veremos a seguir, essas duas propriedades são garantidas no caso em que X é um espaço de Fréchet e nesse caso o Teorema anterior se torna uma generalização do Teorema 9.

Corolário 6. Seja $X = (X,\Lambda)$ um espaço vetorial topológico localmente convexo, Hausdorff e sequencialmente completo. Se $A : X \to X$ é um operador pseudosetorial, então a família $\{e^{-tA}\}_{t\geq 0} \subset L(X)$ definida por (3.9) é um semigrupo analítico de operadores lineares sobre X, cujo gerador é $-A$.

Demonstração. Segue imediatamente do teorema anterior. □

Corolário 7. Sejam $X = (X,\{p_m\}_{m\in\mathbb{N}})$ um espaço de Fréchet, $A : D(A) \subset X \to X$ um operador pseudosetorial e $\{e^{-tA}\}_{t\geq 0} \subset L(X)$ a família definida por (3.9). Então $\{e^{-tA}\}_{t\geq 0} \subset \mathscr{L}(X)$ é um semigrupo analítico de operadores lineares contínuos sobre X, cujo gerador é $-A$. Além disso, dado $j \in \mathbb{N}$, existem $C_j > 0$ e $k_j \in \mathbb{N}$, tais que

$$p_j\left(e^{-tA}x\right) \leq C_j e^{-ta} \sum_{m=1}^{k_j} p_m(x) \quad \text{e} \quad p_j\left(Ae^{-tA}x\right) \leq \frac{C_j}{t} e^{-ta} \sum_{m=1}^{k_j} p_m(x) \tag{3.21}$$

para quaisquer $t > 0$ e $x \in X$.

Demonstração. Sejam $t > 0$ e $N \in \mathbb{N}$, pela Proposição 15, existe uma sequência $(T_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{L}(X)$ tal que

$$T_k \xrightarrow[k\to\infty]{L(X)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma|_{[-N,N]}} (\lambda + A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda.$$

Logo, pelo Princípio da Limitação Uniforme (ver Corolário 2), temos que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma|_{[-N,N]}} (\lambda + A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda \in \mathscr{L}(X).$$

Como

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma|_{[-N,N]}} (\lambda + A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda \xrightarrow[N\to\infty]{L(X)} e^{-tA},$$

pelo Princípio da Limitação Uniforme, temos que $e^{-tA} \in \mathscr{L}(X)$.

Seja $\mathscr{T} := \{e^{ta}e^{-tA} : t > 0\} \cup \{e^{ta}tAe^{-tA} : t > 0\} \subset \mathscr{L}(X)$, dado $j \in \mathbb{N}$, segue das estimativas (3.10) que $p_j(Tx) = q_{p_j,x}(Tx) \leq M_{p_j,x}$ para quaisquer $x \in X$ e $T \in \mathscr{T}$. Logo, pelo Princípio da Limitação uniforme (Teorema 3), existem $C_j > 0$ e $k_j \in \mathbb{N}$, tais que

$$p_j(Tx) \leq C_j \sum_{m=1}^{k_j} p_m(x)$$

para quaisquer $T \in \mathscr{T}$ e $x \in X$. Logo as estimativas (3.21) são válidas para quaisquer $t > 0$ e $x \in X$.

Sejam $x \in X$, $j \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$, como $D(A)$ e denso em X, existe $y \in D(A)$ tal que

$$(C_j + 1) \sup_{t\in[0,1]} \left\{e^{-ta}\right\} \sum_{m=1}^{\max\{j,k_j\}} p_m(x-y) < \varepsilon,$$

logo

$$\begin{aligned} p_j\left(e^{-tA}x - x\right) &\leq p_j\left(e^{-tA}x - e^{-tA}y\right) + p_j\left(e^{-tA}y - y\right) + p_j\left(y - x\right) \\ &\leq C_j e^{-ta} \sum_{m=1}^{k_j} p_m(x-y) + p_j\left(e^{-tA}y - y\right) + p_j\left(y - x\right) \\ &\leq 2\varepsilon + p_j\left(e^{-tA}y - y\right) \end{aligned}$$

para todo $t \in (0,1]$. Segue do Teorema anterior que $p_j\left(e^{-tA}y - y\right) \xrightarrow[t\to 0+]{} 0$, logo existe $\delta > 0$, tal que

$$p_j\left(e^{-tA}y - y\right) < \varepsilon$$

para todo $t \in (0,\delta)$. Temos então que

$$p_j\left(e^{-tA}x - x\right) < 3\varepsilon$$

para todo $t \in (0,\delta)$. Portanto $e^{-tA}x \xrightarrow[t\to 0+]{X} x$.

Segue então do Teorema anterior que $\{e^{-tA}\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo analítico de operadores lineares contínuos sobre X. Seja $L : D(L) \subset X \to X$ o gerador infinitesimal do semigrupo $\{e^{-tA}\}_{t\geq 0}$, segue de (v) do Teorema anterior que $D(A) \subset D(L)$ e $L|_{D(A)} = -A$.

Por fim, seja $T : X \to X$ o operador linear definido por

$$T := \int_0^{+\infty} e^{-t}e^{-At}dt. \tag{3.22}$$

Observe que, para toda $p \in \Lambda$ e $x \in X$, temos que

$$\int_0^{+\infty} q_{p,x}\left(e^{-t}e{-}At\right)dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}q_{p,x}\left(e{-}At\right)dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-t}C_{p,x}dt < \infty,$$

logo a integral em (3.22) converge e T está bem definido.

Dado $x \in X$ já provamos que $e^{-At}x \in D(A)$ para todo $t > 0$, logo como A é fechado, dado $j \in \mathbb{N}$ temos que

$$\int_{\frac{1}{j}}^{j} e^{-t}e^{-At}xdt \in D(A) \quad \text{e} \quad A\left(\int_{\frac{1}{j}}^{j} e^{-t}e^{-At}dt\right) = \int_{\frac{1}{j}}^{j} e^{-t}Ae^{-At}dt.$$

Além disso, integrando por partes, segue que

$$\begin{aligned}
\lim_{j\to\infty} A\left(\int_{\frac{1}{j}}^{j} e^{-t}e^{-At}xdt\right) &= \lim_{j\to\infty}\int_{\frac{1}{j}}^{j} e^{-t}Ae^{-At}dt \\
&= \lim_{j\to\infty}\left(\left(-e^{-t}e^{-At}x\right)\Big|_{\frac{1}{j}}^{j} - \int_{\frac{1}{j}}^{j} e^{-t}e^{-At}xdt\right) \\
&= \lim_{j\to\infty}\left(e^{-\frac{1}{j}}e^{-A\frac{1}{j}}x - e^{-j}e^{-Aj}x - \int_{\frac{1}{j}}^{j} e^{-t}e^{-At}xdt\right) \\
&= x - \int_0^{+\infty} e^{-t}e^{-At}xdt = x - Tx.
\end{aligned}$$

Logo novamente por A ser fechado segue que $Tx \in D(A)$ e $A(Tx) = x - Tx$. Note agora que, dado $x \in D(L)$ temos que $e^{-At}x \in D(A) \subset D(L)$ e

$$\begin{aligned}
Le^{-At}x = \lim_{s\to 0+}\frac{e^{-As}e^{-At}x - e^{-At}x}{s} &= \lim_{s\to 0+}\frac{e^{-At}e^{-As}x - e^{-At}x}{s} \\
= \lim_{s\to 0+} e^{-At}\left(\frac{e^{-As}x - x}{s}\right) &= e^{-At}\lim_{s\to 0+}\frac{e^{-As}x - x}{s} = e^{-At}Lx.
\end{aligned}$$

Assim, se $x \in D(L)$ temos que

$$\begin{aligned} T(Lx) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} e^{-At} Lx dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} L e^{-At} x dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t} A e^{-At} x dt = A\left(\int_0^{+\infty} e^{-t} e^{-At} x dt\right) \\ &= A(Tx) = x - Tx. \end{aligned}$$

Portanto $x = T(Lx) + Tx \in D(A)$, logo $D(L) \subset D(A)$. Então $D(L) = D(A)$ e $L = -A$. □

3.4 Operadores pseudodiferenciais com coeficientes constantes

Nesta seção caracterizaremos os operadores pseudodiferenciais com coeficientes coeficientes constantes que são pseudosetoriais, de modo a apresentar uma classe de operadores pseudodiferenciais com coeficientes coeficientes constantes para a qual o Teorema 13 pode ser aplicado.

Definição 32. Um operador pseudodiferencial com coeficientes contantes é um operador linear $a(D) : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}'$ definido por

$$a(D)u = [a(\xi)\widehat{u}]^{\vee}$$

para toda distribuição $u \in \mathscr{S}'$, onde $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ é uma função tal que existe $m \in \mathbb{N}$ de modo que para todo $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$, existe uma constante C_α satisfazendo

$$|\partial^\alpha a(\xi)| \leq C_\alpha (1 + |\xi|)^{m-|\alpha|} \tag{3.23}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. Dizemos que $a(D)$ tem ordem menor ou igual a m.

O resultado a seguir nos mostra como localizar o espectro de um operador pseudodiferencial com coeficientes constantes.

Proposição 20. Sejam $a(D) : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}'$ um operador pseudodiferencial com coeficientes constantes, $a(D)_{\mathscr{S}} : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ a restrição de $a(D)$ ao espaço $\mathscr{S}$ e $a(D)_{L^2(\mathbb{R}^n)} : D(a(D)_{L^2(\mathbb{R}^n)}) \subset L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ a restrição de $a(D)$ ao subespaço $D(a(D)_{L^2(\mathbb{R}^n)})$ de $L^2(\mathbb{R}^n)$, onde

$$D(a(D)_{L^2(\mathbb{R}^n)}) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) : a(D)u \in L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

Temos que

$$\{a(\xi) : \xi \in \mathbb{R}^n\} \subset \sigma(a(D)) \subset \overline{\{a(\xi) : \xi \in \mathbb{R}^n\}},$$

$$\{a(\xi) : \xi \in \mathbb{R}^n\} \subset \sigma(a(D)_{\mathscr{S}}) \subset \overline{\{a(\xi) : \xi \in \mathbb{R}^n\}} \quad \text{e}$$

$$\sigma(a(D)_{L^2(\mathbb{R}^n)}) = \overline{\{a(\xi) : \xi \in \mathbb{R}^n\}}.$$

Demonstração. Seja $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\overline{\{a(\xi) : \xi \in \mathbb{R}^n\}}$, temos que a função $\mathbb{R}^n \ni \xi \mapsto [\lambda - a(\xi)]^{-1} \in \mathbb{C}$ é de crecimento lento. De fato, dado $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$ tal que $\alpha \neq 0$, existem $N_\alpha \in \mathbb{N}$, $C^\alpha_k \in \mathbb{R}$, $m^\alpha_k \in \mathbb{N}$ tal que $m^\alpha_k \leq |\alpha| + 1$, $M^\alpha_k \in \mathbb{N}$ tal que $M^\alpha_k \leq |\alpha|$ para $k = 1, 2, \ldots, N_\alpha$ e $\beta^\alpha_{k,j} \in \mathbb{Z}^n_+$ para $k = 1, 2, \ldots, N_\alpha$ e $j = 1, 2, \ldots, |\alpha|$, de modo que

$$\partial^\alpha \left([\lambda - a(\xi)]^{-1}\right) = \sum_{k=1}^{N_\alpha} C^\alpha_k [\lambda - a(\xi)]^{-m^\alpha_k} \prod_{j=1}^{M^\alpha_k} \partial^{\beta^\alpha_{k,j}} a(\xi) \tag{3.24}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. Isto segue por indução sobre $|\alpha|$, pois temos que

$$\partial_l \left([\lambda - a(\xi)]^{-1}\right) = [\lambda - a(\xi)]^{-2} \partial_l a(\xi)$$

para quaisquer $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $l \in \{1, 2, \ldots, n\}$ e se (3.24) é válida, então

$$\begin{aligned}\partial^{\alpha + e_l} \left([\lambda - a(\xi)]^{-1}\right) &= \sum_{k=1}^{N_\alpha} C^\alpha_k m^\alpha_k [\lambda - a(\xi)]^{-m^\alpha_k - 1} \partial_l a(\xi) \prod_{j=1}^{M^\alpha_k} \partial^{\beta^\alpha_{k,j}} a(\xi) \\ &+ \sum_{k=1}^{N_\alpha} \left(C^\alpha_k [\lambda - a(\xi)]^{-m^\alpha_k} \sum_{o=1}^{M^\alpha_k} \prod_{j=1}^{M^\alpha_k} \partial^{\beta^\alpha_{k,j} + \delta_{j,o} e_l} a(\xi) \right)\end{aligned}$$

para quaisquer $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $l \in \{1, 2, \ldots, n\}$, onde $\delta_{j,o}$ é o delta de Kronecker, isto é,

$$\delta_{j,o} = \begin{cases} 1, & \text{se } j = o \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Como $\lambda \notin \overline{\{a(\xi) : \xi \in \mathbb{R}^n\}}$, existe $C > 1$ tal que $|\lambda - a(\xi)|^{-1} \leq C$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$, logo dado $\alpha \in \mathbb{Z}^+_n$ tal que $\alpha \neq 0$, usando (3.24) e a estimativa (3.23), segue que existe $C'_\alpha > 0$ satisfazendo

$$\left|\partial^\alpha \left([\lambda - a(\xi)]^{-1}\right)\right| \leq \sum_{k=1}^{N_\alpha} C^\alpha_k C^{|\alpha|+1} \prod_{j=1}^{M^\alpha_k} C_{\beta^\alpha_{k,j}} (1 + |\xi|)^m \leq C'_\alpha (1 + |\xi|)^{m|\alpha|}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Seja $w \in \mathscr{S}'$, segue da Proposição 11 que $[\lambda - a(\xi)]^{-1} w \in \mathscr{S}'$. Assim dadas $u, v \in \mathscr{S}'$, temos que

$$[\lambda - a(D)]u = v \iff u = \left([\lambda - a(\xi)]^{-1} \widehat{v}\right)^\vee,$$

logo $[\lambda - a(D)] : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}'$ é bijetivo e

$$[\lambda - a(D)]^{-1} v = \left([\lambda - a(\xi)]^{-1} \widehat{v}\right)^\vee.$$

Segue que $[\lambda - a(D)]^{-1}$ é contínuo e então $\lambda \in \rho(a(D))$. Portanto $\sigma(a(D)) \subset \overline{\{a(\xi) : \xi \in \mathbb{R}^n\}}$.

Como $[\lambda - a(D)] : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}'$ é injetivo, segue que $[\lambda - a(D)_{\mathscr{S}}] : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ é injetivo e $[\lambda - a(D)_{L^2(\mathbb{R}^n)}] : D(a(D)_{L^2(\mathbb{R}^n)}) \subset L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ é injetivo. Além disso, dada $\psi \in \mathscr{S}$ temos que

$$\varphi := \left([\lambda - a(\xi)]^{-1} \widehat{v}\right)^\vee \in \mathscr{S} \quad \text{e} \quad [\lambda - a(D)_{\mathscr{S}}]\varphi = \psi,$$

logo $[\lambda - a(D)_{\mathscr{S}}] : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ é bijetivo e

$$[\lambda - a(D)_{\mathscr{S}}]^{-1}\psi = \left([\lambda - a(\xi)]^{-1}\widehat{\psi}\right)^{\vee}.$$

Segue que $[\lambda - a(D)_{\mathscr{S}}]^{-1}$ é contínuo e então $\lambda \in \rho(a(D)_{\mathscr{S}})$. Portanto $\sigma(a(D)_{\mathscr{S}}) \subset \overline{\{a(\xi) : \xi \in \mathbb{R}^n\}}$. Como a aplicação $\mathbb{R}^n \ni \xi \mapsto [\lambda - a(\xi)]^{-1} \in \mathbb{C}$ é limitada, dada $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$, pelo Teorema 8 (Plancherel), temos que

$$u := \left([\lambda - a(\xi)]^{-1}\widehat{v}\right)^{\vee} \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Segue que $u \in D(a(D)_{L^2(\mathbb{R}^n)})$ e

$$[\lambda - a(D)_{L^2(\mathbb{R}^n)}]u = [\lambda - a(D)]u = ([\lambda - a(\xi)]\widehat{u})^{\vee} = v.$$

Logo $[\lambda - a(D)_{L^2(\mathbb{R}^n)}] : D(a(D)_{L^2(\mathbb{R}^n)}) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ é bijetivo e pelo Teorema 8 (Plancherel)

$$\begin{aligned}\left\|[\lambda - a(D)_{L^2(\mathbb{R}^n)}]^{-1}v\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \left\|\left([\lambda - a(\xi)]^{-1}\widehat{v}\right)^{\vee}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \left\|[\lambda - a(\xi)]^{-1}\widehat{v}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \left\|[\lambda - a(\xi)]^{-1}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|\widehat{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \left\|[\lambda - a(\xi)]^{-1}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\end{aligned}$$

para toda $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Então $(\lambda - a(D)_{L^2(\mathbb{R}^n)})^{-1} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ é contínuo, logo $\lambda \in \rho(a(D)_{L^2(\mathbb{R}^n)})$. Portanto $\sigma(a(D)_{L^2(\mathbb{R}^n)}) \subset \overline{\{a(\xi) : \xi \in \mathbb{R}^n\}}$.

Por outro lado, se $\lambda = a(\xi_0)$ para algum $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$, então

$$[\lambda - a(D)]\delta_{\xi_0}^{\vee} = \left([\lambda - a(\xi)]\delta_{\xi_0}\right)^{\vee} = 0.$$

Logo $\lambda \in \sigma(a(D))$ e portanto $\{a(\xi) : \xi \in \mathbb{R}^n\} \subset \sigma(a(D))$. Além disso, $[\lambda - a(D)_{\mathscr{S}}] : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ é bijetivo se, e somente se, o operador linear $T : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ definido por $T\varphi(\xi) = [\lambda - a(\xi)]\varphi(\xi)$ para quaisquer $\varphi \in \mathscr{S}$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$ é bijetivo. No entanto, temos $T\varphi(\xi_0) = 0$ para toda $\varphi \in \mathscr{S}$, logo T não é sobrejetivo. Assim $[\lambda - a(D)_{\mathscr{S}}] : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ não é bijetivo e então, como $a(D)_{\mathscr{S}}$ é sequêncialmente fechado (pois é contínuo) e $\mathscr{S}$ é completo, segue da Proposição 12 que $\lambda \in \sigma(a(D)_{\mathscr{S}})$. Portanto $\{a(\xi) : \xi \in \mathbb{R}^n\} \subset \sigma(a(D)_{\mathscr{S}})$.

Por fim, seja $\lambda \in \overline{\{a(\xi) : \xi \in \mathbb{R}^n\}}$, se $m(a^{-1}(\{\lambda\})) > 0$ (onde m representa a medida de Lebesgue), então existe $R > 0$ tal que $E := a^{-1}(\{\lambda\}) \cap B(0,R)$ é tal que $m(E) > 0$. Logo, como $0 < m(E) < \infty$, temos que $\chi_E \in L^2(\mathbb{R}^n)$ (onde χ_E é a função característica de E) e $(\chi_E)^{\vee} \neq 0$, já que $\chi_E \neq 0$. Além disso,

$$[\lambda - a(D)_{L^2(\mathbb{R}^n)}](\chi_E)^{\vee} = [\lambda - a(D)](\chi_E)^{\vee} = ([\lambda - a(\xi)]\chi_E)^{\vee} = 0^{\vee} = 0,$$

logo $\lambda \in \sigma(a(D)_{L^2(\mathbb{R}^n)})$. Por outro lado, se $m(a^{-1}(\{\lambda\})) = 0$, suponhamos que $\lambda \in \rho(a(D)_{L^2(\mathbb{R}^n)})$. Dado $k \in \mathbb{N}$, como $\lambda \in \overline{\{a(\xi) : \xi \in \mathbb{R}^n\}}$, existe $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$|\lambda - a(\xi_0)| < \frac{1}{2k}.$$

Da continuidade de a, segue que existe $\delta > 0$ tal que

$$|a(\xi) - a(\xi_0)| < \frac{1}{2k}$$

para todo $\xi \in B(\xi_0, \delta)$ e então

$$|\lambda - a(\xi)| \leq |\lambda - a(\xi_0)| + |a(\xi) - a(\xi_0)| < \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} = \frac{1}{k}$$

para todo $\xi \in B(\xi_0, \delta)$. Como $m(a^{-1}(\{\lambda\})) = 0$, temos que $B(\xi_0, \delta) \backslash a^{-1}(\{\lambda\})$ é um aberto não vazio. Sejam $v \in L^2(\mathbb{R}^n) \backslash \{0\}$ tal que $\operatorname{supp}(v) \subset B(\xi_0, \delta) \backslash a^{-1}(\{\lambda\})$ e $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ dada por

$$u(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad \xi \notin \operatorname{supp}(v) \\ [\lambda - a(\xi)]^{-1} v(\xi) & \text{se} \quad \xi \in \operatorname{supp}(v). \end{cases}$$

Temos que $[\lambda - a(D)_{L^2(\mathbb{R}^n)}]^{-1} v^\vee = u^\vee$, pois

$$[\lambda - a(D)_{L^2(\mathbb{R}^n)}] u^\vee = [\lambda - a(D)] u^\vee = ([\lambda - a(\xi)] u)^\vee = v^\vee.$$

Assim

$$\begin{aligned} \|[\lambda - a(D)_{L^2(\mathbb{R}^n)}]^{-1} v^\vee\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \|u^\vee\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &= \left(\int_{\operatorname{supp}(v)} |\lambda - a(\xi)|^{-2} |v(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\geq \left(\int_{\operatorname{supp}(v)} k^2 |v(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} = k\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = k\|v^\vee\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

e então $\|[\lambda - a(D)_{L^2(\mathbb{R}^n)}]^{-1}\|_{\mathscr{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} \geq k$. Como $k \in \mathbb{N}$ foi tomado arbitrariamente segue que $[\lambda - a(D)_{L^2(\mathbb{R}^n)}]^{-1}$ não é limitado, o que contraria $\lambda \in \rho(a(D)_{L^2(\mathbb{R}^n)})$. Portanto, $\lambda \in \sigma(a(D)_{L^2(\mathbb{R}^n)})$ e temos que $\overline{\{a(\xi) : \xi \in \mathbb{R}^n\}} \subset \sigma(a(D)_{L^2(\mathbb{R}^n)})$. $\square$

Observação 10. No exemplo anterior, temos que

$$\sigma(a(D)) \text{ é fechado} \iff \sigma(a(D)) = \overline{\{a(\xi) : \xi \in \mathbb{R}^n\}}$$

No entanto, nem sempre $\sigma(a(D))$ é fechado. Considere, por exemplo, $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definida por

$$a(\xi) = \frac{1}{1 + |\xi|^2}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. Tal função define um operador pseudodiferencial com coeficientes constantes $a(D)$ e então pela Proposição anterior

$$(0, 1] = \{a(\xi) : \xi \in \mathbb{R}^n\} \subset \sigma(a(D)) \subset \overline{\{a(\xi) : \xi \in \mathbb{R}^n\}} = [0, 1].$$

No entanto, temos que $a(D) : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}'$ é bijetivo e

$$a(D)^{-1} v = \left[\left(1 + |\xi|^2\right) \widehat{v} \right]^\vee$$

para todo $v \in \mathscr{S}'$, logo $a(D)^{-1}$ é contínuo. Portanto $0 \in \rho(a(D))$ e então $\sigma(a(D)) = (0, 1]$.

O próximo resultado caracteriza quando um operador pseudodiferencial com coeficientes é pseudosetorial.

Proposição 21. Sejam $a(D)$, $a(D)_{\mathscr{S}}$ e $a(D)_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ como na Proposição 20. São equivalentes:

(i) Existem $b_0 \in \mathbb{R}$ e um ângulo $\theta_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ tais que $\{a(\xi) : \xi \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{C}\backslash\Sigma_{b_0,\theta_0}$.

(ii) $a(D)_{\mathscr{S}} : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ é pseudosetorial.

(iii) $a(D) : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}'$ é pseudosetorial.

(iv) $a(D)_{L^2(\mathbb{R}^n)} : D(a(D)_{L^2(\mathbb{R}^n)}) \subset L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ é setorial.

Demonstração. Segue imediatamente da definição de operador setorial, da definição de operador pseudosetorial e da Proposição 20 que (ii) implica (i), (iii) implica (i) e (iv) implica (i). Suponhamos que a propriedade (i) é válida e sejam $b, \theta \in \mathbb{R}$ tais que $b < b_0$ e $\theta_0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Temos que

$$\sigma(a(D)) \subset \overline{\{a(\xi) : \xi \in \mathbb{R}^n\}} \subset \mathbb{C}\backslash\Sigma_{b_0,\theta_0} \subset \mathbb{C}\backslash\Sigma_{b,\theta},$$

logo $\Sigma_{b,\theta} \subset \rho(a(D))$. Analogamente, temos que $\Sigma_{b,\theta} \subset \rho(a(D)_{\mathscr{S}})$ e $\Sigma_{b,\theta} \subset \rho(a(D)_{L^2(\mathbb{R}^n)})$. Note que

$$\operatorname{dist}(\lambda, \{a(\xi) : \xi \in \mathbb{R}^n\}) \geq \operatorname{dist}\left(\lambda, \mathbb{C}\backslash\Sigma_{b_0,\theta_0}\right) \geq \operatorname{dist}\left(\lambda, \mathbb{C}\backslash\Sigma_{b,\theta_0}\right) \geq \operatorname{sen}(\theta-\theta_0)|\lambda - b| \tag{3.25}$$

para todo $\lambda \in \Sigma_{b,\theta}$. Além disso, existe $c > 0$ tal que

$$\operatorname{dist}(\lambda, \{a(\xi) : \xi \in \mathbb{R}^n\}) \geq \operatorname{dist}\left(\lambda, \mathbb{C}\backslash\Sigma_{b_0,\theta_0}\right) \geq c \tag{3.26}$$

para todo $\lambda \in \Sigma_{b,\theta}$. Dado $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, segue de (3.25), (3.26), (3.23) e (3.24) que existe $C'_\alpha > 0$ tal que

$$\left|\partial^\alpha \left([\lambda - a(\xi)]^{-1}\right)\right| \leq C'_\alpha (1+|\xi|)^{m|\alpha|}|\lambda - b|^{-1}$$

para quaisquer $\lambda \in \Sigma_{b,\theta}$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$. Logo dadas $\varphi \in \mathscr{S}$, $N \in Z_+$ e $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, existe $C^0_{(N,\alpha,\varphi)} > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
p_{(N,\alpha)}\left([\lambda - a(\xi)]^{-1}\widehat{\varphi}\right) &= \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} \left\{(1+|\xi|)^N \left|\partial^\alpha\left([\lambda - a(\xi)]^{-1}\widehat{\varphi}\right)\right|\right\} \\
&= \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} \left\{(1+|\xi|)^N \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left|\partial^{\alpha-\beta}\left([\lambda - a(\xi)]^{-1}\right)\right| \left|\partial^\beta(\widehat{\varphi})\right|\right\} \\
&\leq \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} \left\{(1+|\xi|)^N \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} C'_{\alpha-\beta}(1+|\xi|)^{m|\alpha-\beta|}|\lambda - b|^{-1} \left|\partial^\beta(\widehat{\varphi})\right|\right\} \\
&\leq |\lambda - b|^{-1} \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} C'_{\alpha-\beta} \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} \left\{(1+|\xi|)^{N+m|\alpha-\beta|}\left|\partial^\beta(\widehat{\varphi})\right|\right\} \\
&\leq C^0_{(N,\alpha,\varphi)}|\lambda - b|^{-1}
\end{aligned}$$

para todo $\lambda \in \Sigma_{b,\theta}$. Como a tranformada de Fourier inversa é um operador linear contínuo, dados $N \in Z_+$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ e $\varphi \in \mathscr{S}$, existem $C > 0$ e $M, k \in \mathbb{Z}_+$ tais que

$$p_{(N,\alpha)}([\lambda - a(D)_{\mathscr{S}}]^{-1}\varphi) = p_{(N,\alpha)}\left(\left([\lambda - a(\xi)]^{-1}\widehat{\varphi}\right)^{\vee}\right) \leq C \sum_{|\beta|\leq k} p_{(M,\beta)}\left([\lambda - a(\xi)]^{-1}\widehat{\varphi}\right)$$
$$\leq C \sum_{|\beta|\leq k} C^0_{(M,\beta,\varphi)}|\lambda - b|^{-1}$$

para todo $\lambda \in \Sigma_{b,\theta}$. Logo considerando

$$C_{(N,\alpha,\varphi)} := C \sum_{|\beta|\leq k} C^0_{(M,\beta,\varphi)}$$

obtemos que

$$p_{(N,\alpha)}([\lambda - a(D)_{\mathscr{S}}]^{-1}\varphi) \leq C_{(N,\alpha,\varphi)}|\lambda - b|^{-1}$$

para todo $\lambda \in \Sigma_{b,\theta}$. Portanto $a(D)_{\mathscr{S}} : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ é pseudosetorial.

Dadas $u \in \mathscr{S}'$ e $\varphi \in \mathscr{S}$, como $\widehat{u} : \mathscr{S} \to \mathbb{C}$ é um funcional linear contínuo existem $k, N \in \mathbb{Z}_+$ e $C_1 > 0$,, tais que

$$q_{\varphi}\left([\lambda - a(D)]^{-1}u\right) = \left|\left\langle[\lambda - a(D)]^{-1}u, \varphi\right\rangle\right| = \left|\left\langle\left([\lambda - a(\xi)]^{-1}\widehat{u}\right)^{\vee}, \varphi\right\rangle\right|$$
$$= \left|\left\langle\widehat{u}, [\lambda - a(\xi)]^{-1}\varphi^{\vee}\right\rangle\right| \leq C_1 \sum_{|\alpha|\leq k} p_{(N,\alpha)}\left([\lambda - a(\xi)]^{-1}\varphi^{\vee}\right)$$
$$= C_1 \sum_{|\alpha|\leq k} p_{(N,\alpha)}\left([\lambda - a(\xi)]^{-1}\widehat{\varphi}\right) \leq C_1 \sum_{|\alpha|\leq k} C^0_{N,\alpha,\varphi}|\lambda - b|^{-1}$$

para todo $\lambda \in \Sigma_{b,\theta}$. Considerando

$$C_{\varphi,u} := C_1 \sum_{|\alpha|\leq k} C^0_{N,\alpha,\varphi},$$

temos então que

$$q_{\varphi}\left([\lambda - a(D)]^{-1}u\right) \leq C_{\varphi,u}|\lambda - b|^{-1}$$

para todo $\lambda \in \Sigma_{b,\theta}$. Portanto $a(D) : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}'$ é pseudosetorial.

Por fim, segue do Teorema 8 (Plancherel) e de (3.25) que

$$\left\|[\lambda - a(D)_{L^2(\mathbb{R}^n)}]^{-1}u\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \left\|\left([\lambda - a(\xi)]^{-1}\widehat{u}\right)^{\vee}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \left\|[\lambda - a(\xi)]^{-1}\widehat{u}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$
$$\leq \frac{1}{\operatorname{sen}(\theta - \theta_0)|\lambda - b|}\|\widehat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \frac{1}{\operatorname{sen}(\theta - \theta_0)|\lambda - b|}\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

para quaisquer $\lambda \in \Sigma_{b,\theta}$ e $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Então

$$\left\|[\lambda - a(D)_{L^2(\mathbb{R}^n)}]^{-1}\right\|_{\mathscr{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} \leq \frac{1}{\operatorname{sen}(\theta - \theta_0)|\lambda - b|}$$

para todo $\lambda \in \Sigma_{b,\theta}$ e portanto $a(D)_{L^2(\mathbb{R}^n)} : D(a(D)_{L^2(\mathbb{R}^n)}) \subset L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ é setorial. $\square$

Proposição 22. Sejam $a(D):\mathscr{S}'\to\mathscr{S}'$ um operador pseudodiferencial pseudosetorial e $a(D)_{\mathscr{S}}:\mathscr{S}\to\mathscr{S}$ a restrição de $a(D)$ ao espaço $\mathscr{S}$. Temos que:

(i) Dados $\varphi\in\mathscr{S}$ e $t\geq 0$, temos que

$$e^{-ta(D)_{\mathscr{S}}}\varphi=\left[e^{-ta(\xi)}\widehat{\varphi}\right]^{\vee}.$$

(ii) Dados $u\in\mathscr{S}'$ e $t\geq 0$, temos que

$$e^{-ta(D)}u=\left[e^{-ta(\xi)}\widehat{u}\right]^{\vee}.$$

Em particular temos que $e^{-ta(D)}\in\mathscr{L}(X)$ para todo $t\geq 0$.

Demonstração. (i) Dado $\xi\in\mathbb{R}^n$, segue da Fórmula Integral de Cauchy que

$$e^{-ta(\xi)}=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda t}[\lambda+a(\xi)]^{-1}\,d\lambda,$$

logo

$$\begin{aligned}\left[e^{-ta(\xi)}\widehat{\varphi}\right]^{\vee}(x)&=\int_{\mathbb{R}^n}e^{-ta(\xi)}\widehat{\varphi}(\xi)e^{2\pi i\xi x}\,d\xi\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_\Gamma e^{\lambda t}[\lambda+a(\xi)]^{-1}\,d\lambda\right)\widehat{\varphi}(\xi)e^{2\pi i\xi x}\,d\xi\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_\Gamma e^{\lambda t}e^{2\pi i\xi x}[\lambda+a(\xi)]^{-1}\widehat{\varphi}(\xi)\,d\lambda\right)d\xi\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{\Gamma(s)t}e^{2\pi i\xi x}[\Gamma(s)+a(\xi)]^{-1}\widehat{\varphi}(\xi)\Gamma'(s)\,ds\right)d\xi.\end{aligned}$$

Note que a curva Γ é tal que existem constantes $C_1,C_2>0$ tais que $|\Gamma(s)+a(\xi)|\geq C_1$ e $|\Gamma(s)|\leq C_2$ para quaisquer $s\in\mathbb{R}$ e $\xi\in\mathbb{R}^n$. Desta forma

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}}\left|e^{\Gamma(s)t}e^{2\pi i\xi x}[\Gamma(s)+a(\xi)]^{-1}\widehat{\varphi}(\xi)\Gamma'(s)\right|\,ds\right)d\xi\\&\leq C_1^{-1}C_2\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}}\left|e^{\Gamma(s)t}\right||\widehat{\varphi}(\xi)|\,ds\right)d\xi\\&=C_1^{-1}C_2\int_{\mathbb{R}^n}|\widehat{\varphi}(\xi)|\,d\xi\int_{\mathbb{R}}\left|e^{\Gamma(s)t}\right|\,ds<+\infty.\end{aligned}$$

Assim usando o Teorema de Fubini obtemos que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{\Gamma(s)t}e^{2\pi i\xi x}[\Gamma(s)+a(\xi)]^{-1}\widehat{\varphi}(\xi)\Gamma'(s)\,ds\right)d\xi\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{\Gamma(s)t}e^{2\pi i\xi x}[\Gamma(s)+a(\xi)]^{-1}\widehat{\varphi}(\xi)\Gamma'(s)\,d\xi\right)ds\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} e^{\Gamma(s)t}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\xi x}[\Gamma(s)+a(\xi)]^{-1}\widehat{\varphi}(\xi)\,d\xi\right)\Gamma'(s)\,ds\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} e^{\Gamma(s)t}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\xi x}\left[(\Gamma(s)+a(D)_{\mathscr{S}})^{-1}\varphi\right]^{\wedge}(\xi)\,d\xi\right)\Gamma'(s)\,ds\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} e^{\Gamma(s)t}(\Gamma(s)+a(D)_{\mathscr{S}})^{-1}\varphi(x)\Gamma'(s)\,ds\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{\lambda t}\,[\lambda+a(D)_{\mathscr{S}}]^{-1}\,\varphi(x)\,d\lambda=\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{\lambda t}\,[\lambda+a(D)_{\mathscr{S}}]^{-1}\,\varphi\,d\lambda\right)(x)\\
&=\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{\lambda t}\,[\lambda+a(D)_{\mathscr{S}}]^{-1}\,d\lambda\right)\varphi(x)=e^{-ta(D)_{\mathscr{S}}}\varphi(x).
\end{aligned}$$

(ii) De fato, seja $\varphi\in\mathscr{S}$, temos que

$$\begin{aligned}
\left\langle\left[e^{-ta(\xi)}\widehat{u}\right]^{\vee},\varphi\right\rangle&=\left\langle u,\left[e^{-ta(\xi)}\widehat{\varphi}\right]^{\vee}\right\rangle=\left\langle u,e^{-ta(D)_{\mathscr{S}}}\varphi\right\rangle\\
&=\left\langle u,\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{\lambda t}\,[\lambda+a(D)_{\mathscr{S}}]^{-1}\,d\lambda\,\varphi\right\rangle\\
&=\left\langle u,\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{\lambda t}\,[\lambda+a(D)_{\mathscr{S}}]^{-1}\,\varphi\,d\lambda\right\rangle\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\left\langle u,e^{\lambda t}\,[\lambda+a(D)_{\mathscr{S}}]^{-1}\,\varphi\right\rangle d\lambda\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\left\langle e^{\lambda t}u,\left[(\lambda+a(\xi))^{-1}\widehat{\varphi}\right]^{\vee}\right\rangle d\lambda\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\left\langle e^{\lambda t}\left[(\lambda+a(\xi))^{-1}\widehat{u}\right]^{\vee},\varphi\right\rangle d\lambda\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\left\langle e^{\lambda t}\,[\lambda+a(D)]^{-1}\,u,\varphi\right\rangle d\lambda\\
&=\left\langle\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{\lambda t}\,[\lambda+a(D)]^{-1}\,u\,d\lambda,\varphi\right\rangle=\left\langle e^{-ta(D)}u,\varphi\right\rangle.
\end{aligned}$$

□

CAPÍTULO

4

TRAÇO DE DISTRIBUIÇÕES E O PROBLEMA DE DIRICHLET COM CONDIÇÕES DE FRONTEIRA SINGULARES

Neste Capítulo apresentaremos uma noção de traço para distribuições em um certo subespaço de $\mathscr{D}'(\Omega)$. Essa noção de traço fornece sentido para o problema de Dirichlet com a equação de Laplace no caso em que a condição de contorno é uma distribuição qualquer. Mostraremos que, no caso em que a condição de contorno é uma distribuição arbitrária, ainda é possível obter solução para o problema de Dirichlet no disco, associado à equação de Laplace, usando a fórmula integral de Poisson. Começaremos apresentando alguns espaços de distribuições sobre uma variedade suave.

4.1 Variedades suaves

Definiremos a seguir o conceito de variedade suave.

Definição 33. Seja M um espaço topológico, um atlas $\mathscr{A}$ suave n-dimensional sobre M é um conjunto de aplicações $h : V_h \to U_h$, que satisfaz:

(i) Dada $h : V_h \to U_h$ em $\mathscr{A}$, temos que V_h é um subconjunto aberto de M, U_h é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e h é um homeomorfismo.

(ii) Se $h_1 : V_{h_1} \to U_{h_1}$, $h_2 : V_{h_2} \to U_{h_2}$ pertencem a $\mathscr{A}$ e $V_{h_1} \cap V_{h_2} \neq \emptyset$, então a aplicação $h_1 \circ h_2^{-1} : h_2(V_{h_1} \cap V_{h_2}) \to h_1(V_{h_1} \cap V_{h_2})$ é de classe C^∞.

(iii) $\bigcup_{h \in \mathscr{A}} V_h = M$.

Cada $h \in \mathscr{A}$ é chamada uma carta e sua inversa $h^{-1} : U_h \to V_h$ é chamada uma parametrização do aberto $V_h \subset M$. Uma variedade suave $M = (M, \mathscr{A})$ de dimensão n é um espaço topológico M munido de um atlas suave $\mathscr{A}$ n-dimensional.

Dado $k \in \mathbb{Z}_+$, podemos definir o conceito de variedade de classe C^k de forma análoga, trocando apenas C^∞ por C^k no item (ii), no caso em que $k = 0$ a variedade é chamada variedade topológica. No entanto usaremos apenas o conceito de variedade suave neste trabalho. A seguir apresentamos dois exemplos simples de variedades suaves, mais exemplos são apresentados na seção 1.3 em (BURNS; GIDEA, 2005).

Exemplo 18. Temos que $\{\mathrm{Id}\}$ (onde $\mathrm{Id} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é a função identidade) é um atlas n-dimensional suave sobre $\mathbb{R}^n$. Portanto $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n, \{\mathrm{Id}\})$ é uma variedade suave de dimensão n.

Exemplo 19. Sejam $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a esfera de raio 1 e $\pi_j : \mathbb{S}^n \backslash \{(0,0,\ldots,0,(-1)^j)\} \to \mathbb{R}^n$, para $j = 0,1$, a função definida por

$$\pi_j(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = \frac{1}{1-(-1)^j x_{n+1}}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

para todo $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n \backslash \{(0,0,\ldots,0,(-1)^j)\}$. Temos que $\{\pi_0, \pi_1\}$ é um atlas suave n-dimensional sobre $\mathbb{S}^n$. Portanto, $\mathbb{S}^n$ munida do atlas suave $\{\pi_0, \pi_1\}$ é uma variedade suave de dimensão n.

Assim como os espaços topológicos são os espaços sobre os quais podemos falar de continuidade de aplicações, as variedades são os espaços sobre os quais podemos falar de diferenciabilidade de aplicações.

Definição 34. Sejam $M = (M, \mathscr{A}_M)$ uma variedade suave de dimensão m, $N = (N, \mathscr{A}_N)$ uma variedade suave de dimensão n e $f : M \to N$ uma aplicação. Dado $k \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$, dizemos que f é de classe C^k, se f é contínua e para todo $x \in M$ existem $h_1 : V_{h_1} \to U_{h_1}$ em $\mathscr{A}_M$ e $h_2 : V_{h_2} \to U_{h_2}$ em $\mathscr{A}_N$ tais que $x \in V_{h_1}$, $f(x) \in V_{h_2}$ e a aplicação $h_2 \circ f \circ h_1^{-1} : h_1(f^{-1}(V_2) \cap V_1) \to U_{h_2}$ é de classe C^k. Dizemos que f é um difeomorfismo de classe C^k se f é bijetiva, f é de classe C^k e f^{-1} é de classe C^k.

Lembremos que se (M, τ_1) e (M, τ_2) são espaços topológicos então $\tau_1 = \tau_2$ se, e somente se, $\mathrm{Id} : (M, \tau_1) \to (M, \tau_2)$ é um homeomorfismo. No entanto, pode ocorrer de M ser um espaço topológico munido de dois atlas suaves n-dimensionais $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2$, a aplicação $\mathrm{Id} : (M, \mathscr{A}_1) \to (M, \mathscr{A}_2)$ ser um difeomorfismo de classe C^∞ mas $\mathscr{A}_1 \neq \mathscr{A}_2$, como é o caso quando $M = \mathbb{R}^n$, $\mathscr{A}_1 = \{\mathrm{Id}\}$ e $\mathscr{A}_2 = \{-\mathrm{Id}\}$. O que ocorre neste caso é que $(M, \mathscr{A}_1)$ e $(M, \mathscr{A}_2)$ tem a mesma estrutura C^∞, o que será definido adiante.

Definição 35. Seja M um espaço topológico, dizemos que um atlas suave n-dimensional $\mathscr{A}$, sobre M, é maximal, se para todo atlas suave n-dimensional $\mathscr{A}'$, sobre M, com $\mathscr{A}' \supset \mathscr{A}$, tivermos que $\mathscr{A}' = \mathscr{A}$.

Proposição 23. Seja $M = (M, \mathscr{A}_0)$ uma variedade suave de dimensão n, existe um único atlas suave n-dimensional maximal $\mathscr{A}$ sobre M tal que $\mathscr{A}_0 \subset \mathscr{A}$. Dizemos que $\mathscr{A}$ é o atlas maximal da variedade M, ou ainda, que $\mathscr{A}$ é a estrutura C^∞ de M.

Demonstração. Seja $\mathscr{A}$ o conjunto formado por todos os homeomorfismos $h_1 : V_{h_1} \to U_{h_1}$ com as seguintes propriedades: $V_{h_1} \subset M$ é aberto, $U_{h_1} \subset \mathbb{R}^n$ é aberto e dada $h_2 : V_{h_2} \to U_{h_2}$ em $\mathscr{A}$ tal que $V_{h_1} \cap V_{h_2} \neq \emptyset$, temos que a aplicação $h_1 \circ h_2^{-1} : h_2(V_{h_1} \cap V_{h_2}) \to h_1(V_{h_1} \cap V_{h_2})$ é um difeomorfismo de classe C^∞.

Pela definição de $\mathscr{A}$, temos que $\mathscr{A}$ verifica (i) da Definição 33 e $\mathscr{A}_0 \subset \mathscr{A}$, logo $\mathscr{A}$ verifica (iii) da Definição 33. Sejam $h_j : V_{h_j} \to U_{h_j}$ em $\mathscr{A}$ para $j = 1, 2$ tais que $V_{h_1} \cap V_{h_2} \neq \emptyset$, $x \in V_{h_1} \cap V_{h_2}$ e $h_3 : V_{h_3} \to U_{h_3}$ em $\mathscr{A}_0$ tal que $x \in V_{h_3}$. Temos que

$$h_1 \circ h_2^{-1} = h_1 \circ h_3^{-1} \circ h_3 \circ h_2^{-1} = (h_1 \circ h_3^{-1}) \circ (h_2 \circ h_3^{-1})^{-1}$$

em $h_2(V_{h_1} \cap V_{h_2} \cap V_{h_3})$, logo pela definição de $\mathscr{A}$ temos que $h_1 \circ h_2^{-1}$ é de classe C^∞ na $h_2(V_{h_1} \cap V_{h_2} \cap V_{h_3})$. Como $h_2(V_{h_1} \cap V_{h_2} \cap V_{h_3}) \subset h_2(V_{h_1} \cap V_{h_2})$ é um aberto contendo $h_2(x)$ e $x \in V_{h_1} \cap V_{h_2}$ foi tomado arbitrariamente, segue que $h_1 \circ h_2^{-1} : h_2(V_{h_1} \cap V_{h_2}) \to h_1(V_{h_1} \cap V_{h_2})$ é de classe C^∞. Então $\mathscr{A}$ verifica (ii) da Definição 33. Portanto $\mathscr{A}$ é um atlas n-dimensional suave sobre M tal que $\mathscr{A}_0 \subset \mathscr{A}$.

Por outro lado seja $\mathscr{A}_1$ um atlas n-dimensional suave sobre M tal que $\mathscr{A}_0 \subset \mathscr{A}_1$, dado $h_1 \in \mathscr{A}_1$, como $\mathscr{A}_1$ verifica (ii) da Definição 33, segue da definição de $\mathscr{A}$ que $h_1 \in \mathscr{A}$. Temos então que $\mathscr{A}_1 \subset \mathscr{A}$. Logo se $\mathscr{A}'$ é um atlas n-dimensional suave sobre M tal que $\mathscr{A}' \supset \mathscr{A}$, então $\mathscr{A}' \supset \mathscr{A}_0$ e temos que $\mathscr{A}' \subset \mathscr{A}$. Portanto $\mathscr{A}$ é maximal. Se $\mathscr{A}_2$ é outro atlas n-dimensional suave maximal sobre M tal que $\mathscr{A}_0 \subset \mathscr{A}_2$, então $\mathscr{A}_2 \subset \mathscr{A}$ e como $\mathscr{A}_2$ é maximal segue que $\mathscr{A}_2 = \mathscr{A}$. $\square$

Outro conceito que usaremos neste trabalho é o conceito de subvariedade, o que a seguir apresentamos.

Definição 36. Sejam M uma variedade com atlas m-dimensional suave maximal $\mathscr{A}$ (como apresentado na Proposição 23), $n \leq m$ um natural e $N \subset M$. Dizemos que N é uma subvariedade suave de M se, para todo $x \in N$, existe $h : V_h \to U_h$ em $\mathscr{A}$ tal que $x \in V_h$ e $h(V_h \cap N) = U_h \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$.

Observe que, na definição anterior, o atlas suave $\mathscr{A}$ induz um atlas suave sobre N da seguinte maneira: seja $I : \mathbb{R}^n \times \{0\} \to \mathbb{R}^n$ a aplicação definida por $I(y, 0) = y$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$, dado $x \in N$, seja $h_{h_x} : V_{h_x} \to U_{h_x}$ em $\mathscr{A}$ tal que $x \in V_{h_x}$ e $h(V_{h_x} \cap N) = U_{h_x} \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$. Definindo $\tilde{h}_x : V_{h_x} \cap N \to I(U_{h_x} \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}))$ por $\tilde{h}_x = I \circ h|_{V_{h_x} \cap N}$, segue imediatamente do fato de $\mathscr{A}$ um atlas suave sobre M que $\{\tilde{h}_x\}_{x \in N}$ é um atlas suave sobre N.

Exemplo 20. A esfera $\mathbb{S}^n$ é uma subvariedade de $\mathbb{R}^{n+1}$. De fato, sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ o conjunto aberto

$$\Omega = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) : x_{n+1} > 0\}$$

e $f : \Omega \to \Omega$ a função definida por

$$f(x) = \frac{|x|}{x_{n+1}} x$$

para todo $x \in \Omega$. Temos que f é um difeomorfismo de classe C^∞, cuja inversa $f^{-1} : \Omega \to \Omega$ é dada por

$$f^{-1}(x) = \frac{x_{n+1}}{|x|} x$$

para todo $x \in \Omega$. Dado $x \in \Omega$, como

$$f(x) = \left(\frac{|x|x_1}{x_{n+1}}, \frac{|x|x_2}{x_{n+1}}, \ldots, \frac{|x|x_n}{x_{n+1}}, |x| \right),$$

temos que a última coordenada de $f(x)$ é igual a 1 se, e somente se, $|x| = 1$. Sejam

$$\Omega' := \Omega - (0,0,\ldots,0,1) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1} - 1) : (x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in \Omega\}$$

e $h : \Omega \to \Omega'$ definida por

$$h(x) = f(x) - (0,0,\ldots,0,1)$$

para todo $x \in \Omega$. Segue que h é um difeomorfismo de classe C^∞ e $h(\Omega \cap \mathbb{S}^n) = \Omega' \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$. Dados $j \in \{0,1\}$ e $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, seja $T_{j,k} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ definida por

$$T_{j,k}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, \underbrace{x_{n+1}}_{k\text{-ésima posição}}, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n, \underbrace{(-1)^j x_k}_{(n+1)\text{-ésima posição}})$$

para todo $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Temos que $T_{j,k}$ é uma isometria linear, logo é um difeomorfismo de classe C^∞. Sejam $\Omega_{j,k} = T_{j,k}^{-1}(\Omega)$ e $h_{j,k} := h \circ T_{j,k} : \Omega_{j,k} \to \Omega'$, temos que $h_{j,k}$ é um difeomorfismo de classe C^∞ tal que $h_{j,k}(\Omega_{j,k} \cap \mathbb{S}^n) = \Omega' \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$.

Como

$$\bigcup_{j=0}^{1} \bigcup_{k=1}^{n} \Omega_{j,k} = \bigcup_{j=0}^{1} \bigcup_{k=1}^{n} \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) : (-1)^j x_k > 0\} = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \supset \mathbb{S}^n$$

e o atlas maximal da variedade suave $\mathbb{R}^{n+1} = (\mathbb{R}^{n+1}, \{\mathrm{Id}\})$ é formado por todos os difeomorfismos de classe C^∞ entre abertos de $\mathbb{R}^{n+1}$, segue que a esfera $\mathbb{S}^n$ é uma subvariedade de $\mathbb{R}^{n+1}$.

4.2 Distribuições sobre variedades

Consideraremos nesta seção uma variedade suave M de dimensão n, Hausdorff, com base enumerável de abertos. Denotaremos por $\mathscr{A}$ o atlas maximal de M, para cada carta $h \in \mathscr{A}$

denotaremos por V_h o conjunto aberto de M que é o domínio de h e por U_h o conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ que é a imagem de h, temos assim que $h: V_h \to U_h$ é um difeomorfismo de classe C^∞.

Apresentaremos a seguir alguns tipos de espaços de distribuições sobre M e algumas relações entre esses espaços. Como encontrado em (HÖRMANDER, 1980), um tipo de espaço de distribuições sobre M pode ser definido por:

Definição 37. Uma distribuição sobre M é uma família $\{u_h\}_{h\in\mathscr{A}}$ tal que para cada $h \in \mathscr{A}$, $u_h \in \mathscr{D}'(U_h)$ e se $h_1, h_2 \in \mathscr{A}$ são tais que $V_{h_1} \cap V_{h_2} \neq \emptyset$, então

$$u_{h_2} = u_{h_1} \circ (h_1 \circ h_2^{-1}), em\; h_2(V_1 \cap V_2).$$

Representaremos por $\mathscr{D}'_1(M)$ o espaço das distribuições sobre M.

Dadas $u \in \mathscr{D}'_1(M)$ e $h \in \mathscr{A}$ usaremos também a notação $u \circ h^{-1}$ para representar u_h e consideraremos em $\mathscr{D}'_1(M)$ a topologia gerada pela família de seminormas $\{p_{h,\varphi} : h \in \mathscr{A}$ e $\varphi \in C_c^\infty(U_h)\}$, sendo

$$p_{h,\varphi}(u) = |\langle u_h, \varphi\rangle|.$$

O resultado a seguir demonstra que a convergência em $\mathscr{D}'_1(M)$ não precisa ser verificada em todas as seminormas, sendo suficiente apenas considerar as $p_{h,\varphi}$ para h num atlas qualquer, não necessariamente o maximal.

Proposição 24. Sejam $\mathscr{A}_0 \subset \mathscr{A}$ um atlas sobre M, $\langle u_\alpha\rangle_{\alpha\in\Upsilon} \subset \mathscr{D}'_1(M)$ um net e $u \in \mathscr{D}'_1(M)$ tais que $u_\alpha \circ h^{-1} \xrightarrow[\alpha\in\Upsilon]{\mathscr{D}'(U_h)} u \circ h^{-1}$ para qualquer $h \in \mathscr{A}_0$. Então $u_\alpha \xrightarrow[\alpha\in\Upsilon]{\mathscr{D}'_1(M)} u$.

Demonstração. Sejam $h \in \mathscr{A}$, $\varphi \in C_c^\infty(U_h)$ e $h_j \in \mathscr{A}_0$ para $j = 1, 2 \ldots, m$ tais que

$$h^{-1}(\operatorname{supp}(\varphi)) \subset \bigcup_{j=1}^m V_{h_j}.$$

Segue da inclusão acima que

$$\operatorname{supp}(\varphi) \subset \bigcup_{j=1}^m h\left(V_{h_j} \cap V_h\right),$$

logo existem $\varphi_j \in C_c^\infty\left(h\left(V_{h_j} \cap V_h\right)\right)$ para $j = 1, 2 \ldots, m$ tais que

$$\sum_{j=1}^m \varphi_j = \varphi.$$

Então temos que

$$\begin{aligned}\langle v \circ h^{-1}, \varphi\rangle &= \sum_{j=1}^m \langle v \circ h^{-1}, \varphi_j\rangle = \sum_{j=1}^m \left\langle (v \circ h_j^{-1}) \circ (h_j \circ h^{-1}), \varphi_j \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^m \left\langle v \circ h_j^{-1}, \varphi_j \circ (h \circ h_j^{-1}) \left|\det\left[\operatorname{Jac}\left(h \circ h_j^{-1}\right)\right]\right| \right\rangle\end{aligned}$$

para toda $v \in \mathscr{D}'_1(M)$, logo considerando $v = u_\alpha - u$, concluimos que

$$|\langle u_\alpha \circ h^{-1} - u \circ h^{-1}, \varphi \rangle| \xrightarrow[\alpha \in \Upsilon]{} 0.$$

Portanto $u_\alpha \xrightarrow[\alpha \in \Upsilon]{\mathscr{D}'_1(M)} u$. □

Proposição 25. Se M é compacta, então dada $u \in \mathscr{D}'_1(M)$, existe uma sequência $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(M)$ tal que $\varphi_k \xrightarrow[k\to\infty]{\mathscr{D}'_1(M)} u$.

Demonstração. Sejam $h_j \in \mathscr{A}$ para $j = 1,2,\ldots,m$ tais que $\bigcup_{j=1}^m V_j = M$, existem $\psi_j \in C_c^\infty(V_{h_j})$ para $j = 1,2,\ldots,m$ tais que

$$\sum_{j=1}^n \psi_j = 1.$$

Dado $j \in \{1,2,\ldots,m\}$ consideremos a família $\psi_j u := \left\{(\psi \circ h^{-1})u_h\right\}_{h\in\mathscr{A}}$, temos que

$$(\psi \circ h_1^{-1})u_{h_1} = \left[\psi \circ h_2^{-1} \circ \left(h_2 \circ h_1^{-1}\right)\right]\left[u_{h_2} \circ \left(h_2 \circ h_1^{-1}\right)\right] = \left[(\psi \circ h_2^{-1})u_{h_2}\right] \circ \left(h_2 \circ h_1^{-1}\right)$$

para quaisquer $h_1, h_2 \in \mathscr{A}$, logo $\psi_j u \in \mathscr{D}'_1(M)$. Como $\psi_j \in C_c^\infty(V_{h_j})$, segue que $\psi_j \circ h_j^{-1} \in C_c^\infty(U_{h_j})$, logo existem $U_j \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $K_j \subset \mathbb{R}^n$ compacto, tais que

$$\operatorname{supp}(\psi_j \circ h_j^{-1}) \subset U_j \subset K_j \subset U_{h_j}.$$

Como

$$\operatorname{supp}\left[(\psi_j \circ h_j^{-1})u_{h_j}\right] \subset \operatorname{supp}(\psi_j \circ h_j^{-1}) \subset U_j \subset U_{h_j},$$

existe uma sequência $(\psi_{j,k})_{k\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(U_j)$, tal que

$$\psi_{j,k} \xrightarrow[k\to\infty]{\mathscr{D}'(U_{h_j})} (\psi_j \circ h_j^{-1})u_{h_j}.$$

Seja $\varphi_{j,k} : M \to \mathbb{C}$ definida por

$$\varphi_{j,k}(x) = \begin{cases} \psi_{j,k} \circ h_j, & \text{se } x \in V_{h_j} \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

temos que $\psi_{j,k}$ é C^∞ em V_{h_j} e $\psi_{j,k} = 0$ em $M \setminus h_j^{-1}(K_j)$. Note que como K_j é compacto, segue que $h_j^{-1}(K_j)$ é compacto e então $h_j^{-1}(K_j)$ é fechado em M, pois M é Hausdorff. Logo $M \setminus h_j^{-1}(K_j)$ é aberto em M e como

$$V_{h_j} \cup \left[M \setminus h_j^{-1}(K_j)\right] = V_{h_j} \cup (M \setminus V_{h_j}) = M, \tag{4.1}$$

segue que $\psi_{j,k} \in C^\infty(M)$. Temos que

$$\varphi_{j,k} \circ h_j^{-1} = \psi_{j,k} \xrightarrow[k\to\infty]{\mathscr{D}'(U_{h_j})} (\psi_j \circ h_j^{-1})u_{h_j},$$

além disso, dado $x \in M \setminus h_j^{-1}(K_j)$, seja $h_x \in \mathscr{A}$ tal que $V_{h_x} \subset M \setminus h_j^{-1}(K_j)$, temos que

$$\varphi_{j,k} \circ h_x^{-1} = 0 \xrightarrow[k\to\infty]{\mathscr{D}'(U_{h_x})} 0 = (\psi_j \circ h_x^{-1})u_{h_x}.$$

Segue que (4.1) que $\{h_j\} \cup \{h_x : x \in M \setminus h_j^{-1}(K_j)\}$ é um atlas, logo pela Proposição anterior

$$\varphi_{j,k} \xrightarrow[k\to\infty]{\mathscr{D}_1'(M)} \psi_j u.$$

Portanto

$$\sum_{j=1}^{m} \varphi_{j,k} \xrightarrow[k\to\infty]{\mathscr{D}_1'(M)} \sum_{j=1}^{m} \psi_j u = u.$$

□

Definiremos agora um outro tipo de espaço de distribuições sobre M, que será concebido como o dual topológico do espaço $C_c^\infty(M)$. Para isso, apresentaremos primeiro uma topologia em $C_c^\infty(M)$.

Definição 38. Munimos o espaço $C_c^\infty(M)$ com a topologia τ co-induzia pelo conjunto de aplicações $\{I_h : C_c^\infty(U_h) \to C_c^\infty(M)\,;\, h \in \mathscr{A}\}$ onde I_h é definida por

$$I_h(\varphi)(x) = \begin{cases} (\varphi \circ h)(x), \text{ se } x \in V_h \\ 0, \text{ se } \ x \in M \setminus h^{-1}\big(\operatorname{supp}(\varphi)\big) \end{cases}$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(U_h)$. Isto é, τ é a maior topologia em $C_c^\infty(M)$ que torna I_h contínua para toda $h \in \mathscr{A}$, ou ainda

$$\tau = \big\{\mathscr{U} \subset C_c^\infty(M) : I_h^{-1}(\mathscr{U}) \text{ é aberto em } C_c^\infty(U_h) \text{ para toda } h \in \mathscr{A}\big\}.$$

Definimos

$$\mathscr{D}_2'(M) := \{u : C_c^\infty(M) \to \mathbb{C} : u \text{ é linear e contínuo}\}$$

e munimos $\mathscr{D}_2'(M)$ com a topologia fraca*, isto é, a topologia gerada pela família de seminormas $\{p_\varphi : \mathscr{D}_2'(M) \to \mathbb{R}\,;\, \varphi \in C_c^\infty(M)\}$, onde p_φ é definida por $p_\varphi(u) = |\langle u, \varphi\rangle|$.

Proposição 26. Sejam X um espaço topológico e $f : C_c^\infty(M) \to X$ uma aplicação, são equivalentes:

(i) f é contínua.

(ii) $f \circ I_h : C_c^\infty(U_h) \to X$ é contínua para todo $h : V_h \to U_h$ em $\mathscr{A}$.

(iii) $f \circ I_h|_{C_c^\infty(K)} : C_c^\infty(K) \to X$ é contínua para quaisquer $h : V_h \to U_h$ em $\mathscr{A}$ e $K \subset U_h$ compacto.

Demonstração. Como $I_h : C_c^\infty(U_h) \to C_c^\infty(M)$ é contínua para toda $h \in \mathscr{A}$, segue que (i) implica (ii). Dado $K \subset U_h$ compacto, como a inclusão $I_K : C_c^\infty(K) \to C_c^\infty(U_h)$ é contínua e $f \circ I_h|_{C_c^\infty(K)} = f \circ I_h \circ I_K$, temos que (ii) implica (iii). Por fim, suponhamos que (iii) é válida e seja $W \subset X$ aberto, temos que $I_h^{-1}\left(f^{-1}(W)\right) \cap C_c^\infty(K) = \left[f \circ I_h|_{C_c^\infty(K)}\right]^{-1}(W)$ é aberto em $C_c^\infty(K)$ para quaisquer $h \in \mathscr{A}$ e $K \subset U_h$ compacto, logo $I_h^{-1}\left(f^{-1}(W)\right)$ é aberto em $C_c^\infty(U_h)$ para toda $h \in \mathscr{A}$. Portanto $f^{-1}(W)$ é aberto em $C_c^\infty(M)$, provando que f é contínua. □

De fundamental importância para o que desenvolveremos neste texto é também o espaço $C^\infty(M)$ e, por isso, precisamos fixar um sentido de convergência para as funções desta classe, o que fazemos na definição a seguir. Dada essa noção de convergência, um novo espaço dual também surge.

Definição 39. Munimos o espaço $C^\infty(M)$ com a topologia gerada pela família de seminormas $\left\{p_{h,K,m} : h \in \mathscr{A}, K \subset U_h \text{ compacto e } m \in \mathbb{Z}_+\right\}$, onde $p_{h,K,m} : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ é definida por

$$p_{h,K,m}(\varphi) = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_K |\partial^\alpha(\varphi \circ h^{-1})|.$$

Definimos

$$\mathscr{E}'(M) := \left\{u : C^\infty(M) \to \mathbb{C};\, u \text{ é linear e contínuo}\right\}$$

e munimos $\mathscr{E}'(M)$ com a topologia fraca*, isto é, com a topologia gerada pela família de seminormas $\left\{p_\varphi : \varphi \in C^\infty(M)\right\}$, onde p_φ é definida por $p_\varphi(u) = |\langle u, \varphi \rangle|$.

Proposição 27. Sejam $\mathscr{A}_0 \subset \mathscr{A}$ um atlas, $\langle \varphi_\alpha \rangle_{\alpha \in \Upsilon} \subset C^\infty(M)$ um net e $\varphi \in C^\infty(M)$, tais que $p_{h,K,m}(\varphi_\alpha - \varphi) \xrightarrow[\alpha \in \Upsilon]{} 0$ para quaisquer $h \in \mathscr{A}_0$, $K \subset U_h$ compacto e $m \in \mathbb{Z}_+$. Então $\varphi_\alpha \xrightarrow[\alpha \in \Upsilon]{C^\infty(M)} \varphi$.

Demonstração. Dados $h \in \mathscr{A}$ e $K \subset U_h$ compacto e $m \in \mathbb{Z}_+$, seja $\{h_j\}_{j=1}^q \subset \mathscr{A}_0$, uma família finita tal que $h^{-1}(K) \subset \bigcup_{j=1}^q V_{h_j}$. Dados $j \in \{1, 2, \ldots, q\}$ e $k \in \mathbb{N}$, seja

$$U_j^k = \left\{x \in U_h : \operatorname{dist}\left(x, \mathbb{R}^n \setminus h(V_h \cap V_{h_j})\right) > \frac{1}{k}\right\}.$$

Dado $x \in K$, seja $j \in \{1, 2, \ldots, q\}$ tal que $h^{-1}x \subset V_{h_j}$, como $x = h(h^{-1}x) \in h(V_h \cap V_{h_j})$, segue que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{dist}\left(x, \mathbb{R}^n \setminus h(V_h \cap V_{h_j})\right) > \frac{1}{k_0}$, logo $x \in U_j^{k_0}$. Então

$$K \subset \bigcup_{k=1}^\infty \left(\bigcup_{j=1}^q U_j^k\right).$$

Como K é compacto e U_j^k é aberto para todo $j \in \{1, 2, \ldots, q\}$ e $k \in \mathbb{N}$, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^q U_j^l.$$

Dado $j \in \{1,2,\ldots,q\}$, seja
$$K_j := K \cap \overline{U_j^l},$$
então K_j é compacto, $K_j \subset h(V_h \cap V_{h_j})$ e
$$K = \bigcup_{j=1}^{q} K_j.$$
Sejam $\tilde{K}_j := h_j \circ h^{-1}(K_j)$ para $j = 1,2,\ldots,q$, existe $C > 0$ tal que
$$\begin{aligned}
p_{h,K,m}(\varphi) &= \sum_{|\beta|\leq m} \sup_K |\partial^\beta(\varphi \circ h^{-1})| \leq \sum_{|\beta|\leq m} \sum_{j=1}^{m} \sup_{K_j} |\partial^\beta(\varphi \circ h^{-1})| \\
&= \sum_{j=1}^{m} \sum_{|\beta|\leq m} \sup_{K_j} \left|\partial^\beta \left[\varphi \circ h_j^{-1} \circ (h_j \circ h^{-1})\right]\right| \leq C \sum_{j=1}^{m} \sum_{|\beta|\leq m} \sup_{\tilde{K}_j} |\partial^\beta(\varphi \circ h_j^{-1})| \\
&= C \sum_{j=1}^{m} p_{h_j,\tilde{K}_j,m}(\varphi).
\end{aligned}$$
para toda $\varphi \in C^\infty(M)$, de onde segue o resultado. □

Proposição 28. $C^\infty(M)$ é um espaço de Fréchet.

Demonstração. Como M possui base enumerável de abertos, existe um atlas enumerável $\{h_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A}$. Para cada $j \in \mathbb{N}$, sejam $\{U_{j,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma família de abertos em $\mathbb{R}^n$ e $\{K_{j,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma família de compactos em $\mathbb{R}^n$, tais que
$$U_{j,k} \subset K_{j,k} \subset U_{j,k+1}$$
para todo $k \in \mathbb{N}$ e
$$\bigcup_{k=1}^{\infty} U_{j,k} = U_{h_j}.$$
Dado $j \in \mathbb{N}$ e $K \subset U_{h_j}$ compacto, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que
$$K \subset U_{j,k} \subset K_{j,k},$$
assim
$$p_{h_j,K,m}(\varphi) = \sum_{|\beta|\leq m} \sup_K |\partial^\beta(\varphi \circ h_j^{-1})| \leq \sum_{|\beta|\leq m} \sup_{K_{j,k}} |\partial^\beta(\varphi \circ h_j^{-1})| = p_{h_j,K_{j,k},m}(\varphi)$$
para toda $\varphi \in C^\infty(M)$. Segue da estimativa acima e da Proposição 28 que a família de seminormas $\{p_{h_j,K_{j,k},m} : j,k \in \mathbb{N} \text{ e } m \in \mathbb{Z}_+\}$ gera a topologia de $C^\infty(M)$. Seja $\varphi \in C^\infty(M)$, tal que $\varphi \neq 0$, existe $x_0 \in M$ tal que $\varphi(x_0) \neq 0$. Sejam $j,k \in \mathbb{N}$, tais que $x_0 \in h_j^{-1}(K_{j,k})$, temos que
$$p_{h_j,K_{j,k},0}(\varphi) = \sup_{K_{j,k}} |\varphi \circ h^{-1}| = \sup_{h_j^{-1}(K_{j,k})} |\varphi| \geq |\varphi(x_0)| > 0.$$

Portanto a família de seminormas $\left\{p_{h_j,K_{j,k},m} : j,k \in \mathbb{N} \text{ e } m \in \mathbb{Z}_+\right\}$ é separante.

Resta-nos provar que $C^\infty(M)$ é completo. Seja $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $C^\infty(M)$, então dado $h \in \mathscr{A}$ a sequência $(\varphi_k \circ h^{-1})_{k\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $C^\infty(U_h)$, logo como $C^\infty(U_h)$ é completo, existe $\varphi_h \in C^\infty(U_h)$ tal que $\varphi_k \circ h^{-1} \xrightarrow[k\to\infty]{C^\infty(U_h)} \varphi_h$.
Dado $x \in M$, temos que a sequência $(\varphi_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ converge em $\mathbb{C}$, pois seja $h \in \mathscr{A}$ tal que $x \in V_h$

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k \circ h^{-1}(h(x)) = \varphi_h(h(x)).$$

Seja $\varphi : M \to \mathbb{C}$ definida por

$$\varphi(x) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x),$$

temos que $\varphi \circ h^{-1} = \varphi_h$ para toda $h \in \mathscr{A}$, logo $\varphi \in C^\infty(M)$ e $\varphi_k \xrightarrow[k\to\infty]{C^\infty(M)} \varphi$. Portanto $C^\infty(M)$ é completo. □

A seguir, destacamos alguns fatos relacionando as convergências em $C^\infty(M)$ e $\mathscr{E}'(M)$.

Proposição 29. Sejam $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{E}'(M)$ uma sequência e $u_0 \in \mathscr{E}'(M)$ tais que $u_k \xrightarrow[k\to\infty]{\mathscr{E}'(M)} u_0$. Temos que:

(i) Se $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(M)$ e $\varphi_0 \in C^\infty(M)$ são tais que $\varphi_k \xrightarrow[k\to\infty]{C^\infty(M)} \varphi_0$, então $\langle u_k, \varphi_k\rangle \xrightarrow[k\to\infty]{} \langle u_0, \varphi_0\rangle$.

(ii) Se $\mathscr{K} \subset C^\infty(M)$ é compacto, então

$$\sup_{\varphi\in\mathscr{K}} |\langle u_k - u_0, \varphi\rangle| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0. \tag{4.2}$$

Demonstração. Pelo Teorema da Limitação Uniforme, existem $\{h\}_{j=1}^q \subset \mathscr{A}$, $K \subset U_h$ compacto, $m \in \mathbb{Z}_+$ e $C > 0$, tais que

$$|\langle u_k, \varphi\rangle| \leq C \sum_{j=1}^{q} p_{h_j,K,m}(\varphi)$$

para quaisquer $k \in \mathbb{N}$ e $\varphi \in C^\infty(M)$. Logo

$$\begin{aligned}|\langle u_k, \varphi_k\rangle - \langle u_0, \varphi_0\rangle| &\leq |\langle u_k, \varphi_k - \varphi_0\rangle| + |\langle u_k - u_0, \varphi_0\rangle| \\ &\leq C p_{h,K,m}(\varphi_k - \varphi_0) + |\langle u_k - u_0, \varphi_0\rangle| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,\end{aligned}$$

o que prova (i).
Seja $\mathscr{K} \subset C^\infty(M)$ um compacto e suponhamos que (4.2) não ocorra, então existem $\varepsilon > 0$, uma subsequência $\left(u_{k_j}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ de $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e uma sequência $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(M)$, tais que

$$\left|\left\langle u_{k_j} - u_0, \varphi_j\right\rangle\right| > \varepsilon \tag{4.3}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Como $\mathscr{K}$ é compacto, passando a uma subsequência se necessário, podemos supor que $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é convergente, seja $\varphi_0 \in C^\infty(M)$ o limite dessa subsequência. Segue de (i) que

$$\left\langle u_{k_j} - u_0, \varphi_j\right\rangle \xrightarrow[k\to\infty]{} \langle 0, \varphi_0\rangle = 0,$$

o que contraria (4.3). Portanto (4.2) ocorre, o que prova (ii). □

Definição 40. Seja $u \in \mathscr{D}'_2(M)$ definimos o suporte de u, denotado por $\mathrm{supp}(u)$, como sendo

$$\mathrm{supp}(u) = \big\{x \in M : \text{ não existe } V \subset M \text{ vizinhança de } x \text{ tal que } u|_{C_c^\infty(V)} = 0\big\}.$$

Proposição 30. As seguintes afirmações são válidas:

(i) Dada $\psi \in C^\infty(M)$, o operador linear $T : C_c^\infty(M) \to C_c^\infty(M)$ definido por $T(\varphi) = \psi\varphi$ é contínuo.

(ii) Sejam $K \subset M$ compacto e $V_1, V_2, \ldots, V_k$ abertos em M tais que $K \subset \bigcup_{j=1}^k V_j$. Existem $\psi_j \in C_c^\infty(V_j)$ para $j = 1, 2, \ldots, k$, tais que $\sum_{j=1}^k \psi_j = 1$ em uma vizinhança de K.

(iii) Sejam $\varphi \in C_c^\infty(M)$ e $V_1, V_2, \ldots, V_k$ abertos em M tais que $\mathrm{supp}(\varphi) \subset \bigcup_{j=1}^k V_j$. Então existem $\varphi_j \in C_c^\infty(V_j)$ para $j = 1, 2, \ldots, k$ tais que $\sum_{j=1}^k \varphi_j = \varphi$.

(iv) Seja $u \in \mathscr{D}'_2(M)$, temos que $\langle u, \varphi\rangle = 0$ para toda $\varphi \in C_c^\infty(M \backslash \mathrm{supp}(u))$.

(v) Sejam $u \in \mathscr{D}'_2(M)$ tal que $\mathrm{supp}(u)$ é compacto e $V_1, V_2, \ldots, V_k$ abertos em M tais que $\mathrm{supp}(u) \subset \bigcup_{j=1}^k V_j$. Então existem $u_1, u_2, \ldots, u_k \in \mathscr{D}'_2(M)$ tais que $\mathrm{supp}(u_j) \subset\subset V_j$ para $j = 1, 2, \ldots, k$ e $\sum_{j=1}^k u_j = u$.

Demonstração. (i) Seja $h \in \mathscr{A}$, dada $\varphi \in C_c^\infty(U_h)$ temos que

$$T \circ I_h(\varphi) = \psi I_h(\varphi) = \psi(\varphi \circ h) = I_h\left([\psi \circ h^{-1}]\varphi\right) = I_h \circ \tilde{T}(\varphi),$$

onde $\tilde{T} : C_c^\infty(U_h) \to C_c^\infty(U_h)$ é o operador linear definido por $\tilde{T}\varphi = [\psi \circ h^{-1}]\varphi$ para toda $\varphi \in C_c^\infty(U_h)$. Como $\tilde{T} : C_c^\infty(U_h) \to C_c^\infty(U_h)$ e $I_h : C_c^\infty(U_h) \to C_c^\infty(M)$ são contínuos, segue que $T \circ I_h : C_c^\infty(U_h) \to C_c^\infty(M)$ é contínuo. Portanto, segue da Proposição 26, que $T : C_c^\infty(M) \to C_c^\infty(M)$ é contínuo.

(ii) Suponhamos inicialmente o caso em que existem $h_1, h_2, \ldots, h_k \in \mathscr{A}$ tais que $V_j \subset V_{h_j}$ para $j = 1, 2, \ldots, k$. Existem compactos $K_1, K_2, \ldots, K_k \subset M$ e $V \subset M$ aberto, tais que $K_j \subset V_j$ para $j = 1, 2, \ldots, k$ e $K \subset V \subset \bigcup_{j=1}^k K_j$. De fato, dados $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ e $m \in \mathbb{N}$, seja

$$U_j^m = \begin{cases} \big\{x \in h_j(V_j) : \mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^n \backslash h_j(V_j)) > m^{-1}\big\}, & \text{se } h_j(V_j) \neq \mathbb{R}^n \\ \mathbb{R}^n, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Temos que $U_j^m \subset \mathbb{R}^n$ é aberto para quaisquer $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ e $m \in \mathbb{N}$. Dados $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ e $m \in \mathbb{N}$, seja $W_j^m = U_j^m \cap B_{\mathbb{R}^n}(0, m)$, temos que

$$\bigcup_{m=1}^\infty W_j^m = h_j(V_j) \quad \text{e} \quad \overline{W_j^m} \subset \overline{U_j^m} \subset h_j(V_j).$$

Logo

$$K \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{k} h_j^{-1}(W_j^m)$$

e então, como K é compacto, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{k} h_j^{-1}(W_j^{m_0}).$$

Definindo $K_j := h_j^{-1}\left(\overline{W_j^m}\right)$ para $j = 1,2,\dots,k$ e $V = \bigcup_{j=1}^k h_j^{-1}(W_j^{m_0})$, como $\overline{W_j^m}$ é compacto e $\overline{W_j^m} \subset h_j(V_j)$, segue que K_j é compacto e $K_j \subset V_j$ para $j = 1,2,\dots,k$, além disso $K \subset V \subset \bigcup_{j=1}^k K_j$.

Dado $j \in \{1,2,\dots,k\}$, pelo Corolário I.2.2 de (HOUNIE, 1979), existe $\varphi_j \in C_c^\infty(h_j(V_j))$ tal que $\varphi_j = 1$ em $h(K_j)$, logo tomando $\xi_j = \varphi_j \circ h$, temos que $\xi_j \in C_c^\infty(V_j)$ e $\varphi_j = 1$ em K_j. Sejam $\psi_1 = \xi_1$ e

$$\psi_j = \xi_j \prod_{m=1}^{j-1}(1-\xi_m)$$

para $j = 2,3,\dots,k$. Temos que $\psi_j \in C_c^\infty(V_j)$ e

$$\begin{aligned}
1 - \sum_{j=1}^{k} \psi_j &= 1 - \xi_1 - \xi_2(1-\xi_1) - \cdots - \xi_k \prod_{m=1}^{k-1}(1-\xi_m) \\
&= (1-\xi_1)\left[1 - \xi_2 - \xi_3(1-\xi_2) - \cdots - \xi_k \prod_{m=2}^{k-1}(1-\xi_m)\right] \\
&= (1-\xi_1)(1-\xi_2)\left[1 - \xi_3 - \xi_4(1-\xi_3) - \cdots - \xi_k \prod_{m=3}^{k-1}(1-\xi_m)\right] \\
&= \cdots = \prod_{m=1}^{k}(1-\xi_m).
\end{aligned}$$

Portanto $\sum_{j=1}^k \psi_j = 1$ em V. No caso geral, sejam $h_1, h_2, \dots, h_m \in \mathscr{A}$ tais que $K \subset \bigcup_{j=1}^m V_{h_j}$, temos que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{k} \bigcup_{l=1}^{m} \left(V_j \cap V_{h_l}\right).$$

Logo, pelo caso já demonstrado, existem $\psi_{j,l} \in C_c^\infty(V_j \cap V_{h_l})$ para $j = 1,2,\dots,k$ e $l = 1,2,\dots,m$, tais que $\sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^m \psi_{j,l} = 1$ em uma vizinhança de K. Considerando $\psi_j = \sum_{l=1}^m \psi_{j,l}$ para $j = 1,2,\dots,k$, temos o que desejamos.

(iii) Por (ii) existem $\psi_j \in C_c^\infty(V_j)$ para $j = 1,2,\dots,k$ tais que $\sum_{j=1}^k \psi_j = 1$ em uma vizinhança de K. Dado para $j \in \{1,2,\dots,k\}$, seja $\varphi_j = \varphi\psi_j$, temos que $\varphi_j \in C_c^\infty(V_j)$ e

$$\sum_{j=1}^{k} \varphi_j = \sum_{j=1}^{k} \varphi\psi_j = \varphi \sum_{j=1}^{k} \psi_j = \varphi.$$

(iv) Seja $\varphi \in C_c^\infty(M \backslash \mathrm{supp}(u))$, como $\mathrm{supp}(\varphi) \subset M \backslash \mathrm{supp}(u)$, segue da definição do suporte de u que para cada $x \in \mathrm{supp}(\varphi)$, existe uma vizinhança aberta V_x de x, tal que $u|C_c^\infty(V_x) = 0$. Como $\mathrm{supp}(\varphi)$ é compacto, a cobertura aberta $\{V_x\}_{x \in \mathrm{supp}(\varphi)}$ de $\mathrm{supp}(\varphi)$ possui uma subcobertura finita $\{V_{x_j}\}_{j=1}^k$. Segue de (iii) que existem $\varphi_j \in C_c^\infty(V_{x_j})$ para $j = 1, 2, \ldots, k$, tais que $\sum_{j=1}^k \varphi_j = \varphi$. Portanto, temos que

$$\langle u, \varphi \rangle = \left\langle u, \sum_{j=1}^k \varphi_j \right\rangle = \sum_{j=1}^k \langle u, \varphi_j \rangle = 0.$$

(v) Por (ii), existem $\psi_j \in C_c^\infty(V_j)$ para $j = 1, 2, \ldots, k$ e um aberto $V \subset M$ tais que $\mathrm{supp}(u) \subset V$ e $\sum_{j=1}^k \psi_j = 1$ em V. Dado $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, seja $u_j : C_c^\infty(M) \to \mathbb{C}$ definida por $\langle u_j, \varphi \rangle = \langle u, \psi_j \varphi \rangle$ para toda $\varphi \in C_c^\infty(M)$. Segue de (i) que $u_j \in \mathscr{D}_2'(M)$, além disso, se $\varphi \in C_c^\infty(M \backslash \mathrm{supp}(\psi_j))$ temos que $\langle u_j, \varphi \rangle = \langle u, \psi_j \varphi \rangle = \langle u, 0 \rangle = 0$, logo temos que $u_j|_{C_c^\infty(M \backslash \mathrm{supp}(\psi_j))} = 0$ e então $\mathrm{supp}(u_j) \subset \mathrm{supp}(\psi_j) \subset\subset V_j$.

Dada $\varphi \in C_c^\infty(M)$ e $x \in V$ temos que

$$\left(\sum_{j=1}^k \psi_j(x) \right) \varphi(x) - \varphi(x) = 0,$$

logo

$$\mathrm{supp}(u) \subset V \subset M \backslash \mathrm{supp} \left(\left(\sum_{j=1}^k \psi_j \right) \varphi - \varphi \right)$$

e então

$$\mathrm{supp} \left(\left(\sum_{j=1}^k \psi_j \right) \varphi - \varphi \right) \subset M \backslash V \subset M \backslash \mathrm{supp}(u).$$

Usando (iv), temos que

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{j=1}^k u_j, \varphi \right\rangle &= \sum_{j=1}^k \langle u_j, \varphi \rangle = \sum_{j=1}^k \langle u, \psi_j \varphi \rangle = \left\langle u, \left(\sum_{j=1}^k \psi_j \right) \varphi \right\rangle \\ &= \left\langle u, \left(\sum_{j=1}^k \psi_j \right) \varphi - \varphi \right\rangle + \langle u, \varphi \rangle = \langle u, \varphi \rangle . \end{aligned}$$

Portanto $\sum_{j=1}^k u_j = u$. □

Proposição 31. São válidas as seguintes afirmações:

(i) A inclusão $C_c^\infty(M) \subset C^\infty(M)$ é contínua.

(ii) $C_c^\infty(M)$ é denso em $C^\infty(M)$.

(iii) Se $u \in \mathscr{E}'(M)$, então $u|_{C_c^\infty(M)} \in \mathscr{D}_2'(M)$. Além disso, u tem suporte compacto.

(iv) Se $u \in \mathscr{D}_2'(M)$ tem suporte compacto, então existe uma única $v \in \mathscr{E}'(M)$ tal que $v|_{C_c^\infty(M)} = u$.

Demonstração. Para mostrar que a inclusão $C_c^\infty(M) \subset C^\infty(M)$ é contínua, da Proposição 26, é suficiente provar que para quaisquer $h_1 \in \mathscr{A}$ e $K_1 \subset U_{h_1}$ compacto, o operador linear $C_c^\infty(K_1) \ni \varphi \mapsto \varphi \circ h_1 \in C_c^\infty(M)$ é contínuo. Sejam $h_2 \in \mathscr{A}$, $K_2 \subset U_{h_2}$ compacto, $m \in \mathbb{Z}_+$ e consideremos $K = h_1^{-1}(K_1) \cap h_2^{-1}(K_2)$, se $K = \emptyset$ temos que

$$p_{h_2,K_2,m}(\varphi \circ h_1) = \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{K_2} |\partial^\alpha(\varphi \circ h_1 \circ h_2^{-1})| = 0 \leq \sup_{K_1} |\varphi|.$$

Por outro lado, se $K \neq \emptyset$, existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} p_{h_2,K_2,m}(\varphi \circ h_1) &= \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{K_2} |\partial^\alpha(\varphi \circ h_1 \circ h_2^{-1})| = \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{h_2(K)} |\partial^\alpha(\varphi \circ h_1 \circ h_2^{-1})| \\ &\leq C \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{h_1(K)} |\partial^\alpha \varphi| \leq C \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{K_1} |\partial^\alpha \varphi| \end{aligned}$$

o que mostra (i).
Portanto, se $u \in \mathscr{E}'(M)$ temos que $u|_{C_c^\infty(M)} \in \mathscr{D}_2'(M)$. Além disso, segue da continuidade de $u : C^\infty(M) \to \mathbb{C}$ que existem $h_j \in \mathscr{A}$, $K_j \subset U_{h_j}$ compacto para $j = 1, 2, ..., k$, $m \in \mathbb{Z}_+$ e $C > 0$, tais que

$$|\langle u, \varphi \rangle| \leq C \sum_{j=1}^{k} \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{K_j} |\partial^\alpha(\varphi \circ h_j^{-1})|$$

para toda $\varphi \in C^\infty(M)$. Assim, seja $K = \bigcup_{j=1}^k h_j^{-1}(K_j)$ e $\varphi \in C_c^\infty(M \backslash K)$, temos que

$$|\langle u, \varphi \rangle| \leq C \sum_{j=1}^{k} \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{K_j} |\partial^\alpha(\varphi \circ h_j^{-1})| = 0,$$

logo $\mathrm{supp}(u) \subset K$, o que mostra (iii).
Suponhamos que $u \in \mathscr{D}_2'(M)$ e exista $h \in \mathscr{A}$ tal que $\mathrm{supp}(u)$ é um compacto contido em V_h e provemos que existe $v \in \mathscr{E}'(M)$ tal que $v|_{C_c^\infty(M)} = u$. De fato, seja $V \subset M$ aberto, tal que $\mathrm{supp}(u) \subset V \subset \overline{V} \subset V_h$ e $\psi \in C_c^\infty(V_h)$ tal que $\psi = 1$ em V, definamos $v : C^\infty(M) \to \mathbb{C}$ por $\langle v, \varphi \rangle = \langle u, \psi\varphi \rangle$ para toda $\varphi \in C^\infty(M)$. Como $u : C_c^\infty(M) \to \mathbb{C}$ é linear, segue que $v : C^\infty(M) \to \mathbb{C}$ é linear, além disso, como $u \in \mathscr{D}_2'(M)$, temos que $u \circ I_h \in \mathscr{D}'(U_h)$, logo seja $K = h(\mathrm{supp}(\psi))$ existem $m \in \mathbb{Z}_+$ e $C_0 > 0$ tais que

$$|\langle u \circ I_h, \varphi \rangle| \leq C_0 \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{K} |\partial^\alpha \varphi|$$

para toda $\varphi \in C^\infty(K)$. Logo, existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |\langle v, \varphi \rangle| &= |\langle u, \psi\varphi \rangle| = |\langle u \circ I_h, (\psi \circ h^{-1})(\varphi \circ h^{-1}) \rangle| \\ &\leq C_0 \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{K} |\partial^\alpha[(\psi \circ h^{-1})(\varphi \circ h^{-1})]| \\ &\leq C \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{K} |\partial^\alpha(\varphi \circ h^{-1})| = C p_{h,K,m}(\varphi) \end{aligned}$$

para toda $\varphi \in C^\infty(M)$. Segue então que $v : C^\infty(M) \to \mathbb{C}$ é continua, portanto $v \in \mathscr{E}'(M)$. Além disso, dada $\varphi \in C_c^\infty(M)$ temos que

$$\langle u, \varphi \rangle = \langle u, \psi\varphi \rangle + \langle u, (1-\psi)\varphi \rangle = \langle v, \varphi \rangle,$$

pois $\operatorname{supp}((1-\psi)\varphi) \cap \operatorname{supp}(u) = \emptyset$. Portanto $v|_{C_c^\infty(M)} = u$.

Em geral, dada $u \in \mathscr{D}'_2(M)$ com suporte compacto, sejam $h_j \in \mathscr{A}$ e $u_j \in \mathscr{D}'_2(M)$ para $j = 1, 2, ..., k$, tais que $\operatorname{supp}(u) \subset \bigcup_{j=1}^k V_{h_j}$, $\operatorname{supp}(u_j) \subset\subset V_{h_j}$ e $\sum_{j=1}^k u_j = u$. Como já provado, para cada $j \in \{1, 2, .., k\}$ existe $v_j \in \mathscr{E}'(M)$ tal que $v_j|_{C_c^\infty(M)} = u_j$, logo $v = \sum_{j=1}^k v_j$ é tal que $v \in \mathscr{E}'(M)$ e $v|_{C_c^\infty(M)} = u$.

Por fim, sejam $\varphi \in C^\infty(M)$, $h \in \mathscr{A}$, $K \subset U_h$ compacto, $m \in \mathbb{Z}_+$ e consideremos $\psi \in C_c^\infty(V_h)$ tal que $\psi = 1$ em uma vizinhança de K. Temos que

$$p_{h,K,m}(\varphi - \psi\varphi) = \sum_{|\alpha| \le m} \sup_K |\partial^\alpha[\varphi \circ h^{-1} - (\psi \circ h^{-1})(\varphi \circ h^{-1})]| = 0.$$

Portanto, $C_c^\infty(M)$ é denso em $C^\infty(M)$ e então dada $u \in \mathscr{D}'_2(M)$ com suporte compacto, existe uma única $v \in \mathscr{E}'(M)$ tal que $v|_{C_c^\infty(M)} = u$. □

Corolário 8. Se M é compacta, então $\mathscr{E}'(M) = \mathscr{D}'_2(M)$.

Suponhamos agora que M é uma subvariedade n-dimensional de $\mathbb{R}^{n+1}$. Nesse caso, existe uma forma natural de identificar os espaços $\mathscr{D}'_1(M)$ e $\mathscr{D}'_2(M)$.

Comecemos com a seguinte consideração: Dada $f \in L^1_{loc}(M)$, seja $\tilde{f} : C_c^\infty(M) \to \mathbb{C}$ o funcional linear definido por

$$\langle \tilde{f}, \varphi \rangle = \int_M f\varphi.$$

Dadas $h \in \mathscr{A}$ e $\varphi \in C_c^\infty(U_h)$, temos que

$$\langle \tilde{f}, I_h \circ \varphi \rangle = \int_M f\,(I_h \circ \varphi) = \int_{U_h} (f \circ h^{-1})\,\varphi \left|\partial_1\left(h^{-1}\right) \times \partial_2\left(h^{-1}\right) \times \cdots \times \partial_n\left(h^{-1}\right)\right|,$$

onde dados $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^{n+1}$, $x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n$ representa o produto vetorial de n vetores em $\mathbb{R}^{n+1}$, isto é, $x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n$ é o único vetor em $\mathbb{R}^{n+1}$ que satisfaz:

$$x \cdot (x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n) = \det(x, x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

para todo $x \in \mathbb{R}^{n+1}$. Seja $K \subset U_h$ um compacto, segue então que

$$\begin{aligned}
\left|\langle \tilde{f}, I_h \circ \varphi \rangle\right| &\le \int_K |f \circ h^{-1}||\varphi| \left|\partial_1\left(h^{-1}\right) \times \partial_2\left(h^{-1}\right) \times \cdots \times \partial_n\left(h^{-1}\right)\right| \\
&\le \left(\int_K |f \circ h^{-1}| \left|\partial_1\left(h^{-1}\right) \times \partial_2\left(h^{-1}\right) \times \cdots \times \partial_n\left(h^{-1}\right)\right|\right) \sup |\varphi|,
\end{aligned}$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(K)$, logo $\tilde{f} \circ I_h|_{C_c^\infty(K)}$ é contínuo. Portanto, pela Proposição 26, segue que $\tilde{f} \in \mathscr{D}'_2(M)$. Agora, se $\varphi \in C_c^\infty(M)$, pela compacidade de $\operatorname{supp}(\varphi)$, existem $h_1, h_2, \ldots, h_k \in \mathscr{A}$

tais que $\mathrm{supp}(\varphi) \subset \bigcup_{j=1}^{k} V_{h_j}$. Além disso, pela Proposição 30, existem $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k \in C_c^\infty(M)$, tais que $\mathrm{supp}(\varphi_j) \subset V_{h_j}$ para $j = 1, 2, ..., k$ e $\sum_{j=1}^{k} \varphi_j = \varphi$. Temos então que

$$\left\langle \tilde{f}, \varphi \right\rangle = \int_M f\varphi = \sum_{i=1}^{k} \int_{U_{h_j}} (f \circ h_j^{-1})(\varphi_j \circ h_j^{-1}) \left| \partial_1 \left(h_j^{-1} \right) \times \partial_2 \left(h_j^{-1} \right) \times \cdots \times \partial_n \left(h_j^{-1} \right) \right|.$$

Temos assim que $\left\langle \tilde{f}, \varphi \right\rangle$ pode ser obtido por meio da família $\{f \circ h^{-1}\}_{h \in \mathscr{A}}$. Quando $u \in \mathscr{D}_1'(M)$, a expressão acima nos sugere uma forma de definir $\tilde{u} \in \mathscr{D}_2'(M)$.

Sejam $u = \{u_h\}_{h \in \mathscr{A}} \in \mathscr{D}_1'(M)$, $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k \in C_c^\infty(M)$ e $h_1, h_2, \ldots, h_k \in \mathscr{A}$ tais que

$$\mathrm{supp}(\varphi_j) \subset V_{h_j} \quad \text{para } j = 1, 2, ..., k \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{k} \varphi_j = \varphi, \tag{4.4}$$

definimos

$$\langle \tilde{u}, \varphi \rangle = \sum_{j=1}^{k} \left\langle u_{h_j}, (\varphi_j \circ h_j^{-1}) \left| \partial_1 \left(h_j^{-1} \right) \times \partial_2 \left(h_j^{-1} \right) \times \cdots \times \partial_n \left(h_j^{-1} \right) \right| \right\rangle. \tag{4.5}$$

Mostraremos a seguir que funcional $\tilde{u} : C_c^\infty(M) \to \mathbb{C}$ fica bem definido por (4.5), que $\tilde{u}$ pertence a $\mathscr{D}_2'(M)$ e a aplicação $\mathscr{D}_1'(M) \ni u \mapsto \tilde{u} \in \mathscr{D}_2'(M)$ é um homeomorfismo linear.

Teorema 14. São válidas as seguintes afirmações:

(i) Seja $u \in \mathscr{D}_1'(M)$, o funcional $\tilde{u} : C_c^\infty(M) \to \mathbb{C}$ dado por (4.5) está bem definido, isto é, se $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{k+m} \in C_c^\infty(M)$ e $h_1, h_2, \ldots, h_{k+m} \in \mathscr{A}$ são tais que $\mathrm{supp}(\varphi_j) \subset V_{h_j}$ para $j = 1, 2, \ldots, k+m$ e $\sum_{j=1}^{k} \varphi_j = \varphi = \sum_{j=k+1}^{k+m} \varphi_j$, então

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{k} \left\langle u_{h_j}, (\varphi_j \circ h_j^{-1}) \left| \partial_1 \left(h_j^{-1} \right) \times \partial_2 \left(h_j^{-1} \right) \times \cdots \times \partial_n \left(h_j^{-1} \right) \right| \right\rangle \\ &= \sum_{j=k+1}^{k+m} \left\langle u_{h_j}, (\varphi_j \circ h_j^{-1}) \left| \partial_1 \left(h_j^{-1} \right) \times \partial_2 \left(h_j^{-1} \right) \times \cdots \times \partial_n \left(h_j^{-1} \right) \right| \right\rangle. \end{aligned}$$

(ii) Seja $u \in \mathscr{D}_1'(M)$, temos que $\tilde{u} \in \mathscr{D}_2'(M)$.

(iii) Seja $T : \mathscr{D}_1'(M) \to \mathscr{D}_2'(M)$ o operador definido por $Tu = \tilde{u}$ para toda $u \in \mathscr{D}_1'(M)$. Temos que T é um homeomorfismo linear.

Demonstração. (i) Comecemos com o seguinte caso: Sejam $\varphi \in C_c^\infty(M)$ e $h_1, h_2 \in \mathscr{A}$ tais que $\mathrm{supp}(\varphi) \subset V_{h_1} \cap V_{h_2}$. Mostraremos que

$$\begin{aligned} &\left\langle u_{h_1}, (\varphi \circ h_1^{-1}) \left| \partial_1 \left(h_1^{-1} \right) \times \partial_2 \left(h_1^{-1} \right) \times \cdots \times \partial_n \left(h_1^{-1} \right) \right| \right\rangle \\ &= \left\langle u_{h_2}, (\varphi \circ h_2^{-1}) \left| \partial_1 \left(h_2^{-1} \right) \times \partial_2 \left(h_2^{-1} \right) \times \cdots \times \partial_n \left(h_2^{-1} \right) \right| \right\rangle. \end{aligned}$$

De fato, temos que

$$\begin{aligned}
&\left\langle u_{h_1}, (\varphi\circ h_1^{-1})\left|\partial_1\left(h_1^{-1}\right)\times\partial_2\left(h_1^{-1}\right)\times\cdots\times\partial_n\left(h_1^{-1}\right)\right|\right\rangle\\
&=\left\langle u_{h_1}, [\varphi\circ h_2^{-1}\circ(h_2\circ h_1^{-1})]\left|\partial_1\left(h_1^{-1}\right)\times\partial_2\left(h_1^{-1}\right)\times\cdots\times\partial_n\left(h_1^{-1}\right)\right|\right\rangle\\
&=\left\langle u_{h_1}\circ(h_1\circ h_2^{-1}), (\varphi\circ h_2^{-1})\,g\right\rangle=\left\langle u_{h_2}, (\varphi\circ h_2^{-1})\,g\right\rangle
\end{aligned}$$

onde $g\in C^\infty(h_2(V_{h_1}\cap V_{h_2}))$ é a função

$$g:=\left|\partial_1\left(h_1^{-1}\right)(h_1\circ h_2^{-1})\times\partial_2\left(h_1^{-1}\right)(h_1\circ h_2^{-1})\times\cdots\times\partial_n\left(h_1^{-1}\right)(h_1\circ h_2^{-1})\right|\left|\det\left[\mathrm{Jac}(h_1\circ h_2^{-1})\right]\right|.$$

Resta-nos mostrar que $g=\left|\partial_1\left(h_2^{-1}\right)\times\partial_2\left(h_2^{-1}\right)\times\cdots\times\partial_n\left(h_2^{-1}\right)\right|$ em $h_2(V_{h_1}\cap V_{h_2})$. Fixado $x\in h_2(V_{h_1}\cap V_{h_2})$, consideremos as matrizes T_1 e T_2 de dimensão $(n+1)\times(n+1)$:

$$T_1:=\begin{bmatrix} \\ \partial_1\left(h_1^{-1}\right)(h_1\circ h_2^{-1}(x)) & \partial_2\left(h_1^{-1}\right)(h_1\circ h_2^{-1}(x)) & \cdots & \partial_n\left(h_1^{-1}\right)(h_1\circ h_2^{-1}(x)) & y_1\\ \\ \end{bmatrix}$$

$$T_2:=\begin{bmatrix} \\ \partial_1\left(h_2^{-1}\right)(x) & \partial_2\left(h_2^{-1}\right)(x) & \cdots & \partial_n\left(h_2^{-1}\right)(x) & y_2\\ \\ \end{bmatrix}$$

onde $y_1=\partial_1\left(h_1^{-1}\right)(h_1\circ h_2^{-1}(x))\times\partial_2\left(h_1^{-1}\right)(h_1\circ h_2^{-1}(x))\times\cdots\times\partial_n\left(h_1^{-1}\right)(h_1\circ h_2^{-1}(x))$ e $y_2=\partial_1\left(h_2^{-1}\right)(x)\times\partial_2\left(h_2^{-1}\right)(x)\times\cdots\times\partial_n\left(h_2^{-1}\right)(x)$. Dado $j\in\{1,2,\ldots,n\}$, temos que

$$\begin{aligned}
&y_1\cdot\left(\left[\mathrm{Jac}\left(h_1^{-1}\right)(h_1\circ h_2^{-1}(x))\right]e_j\right)=y_1\cdot\left[\partial_j\left(h_1^{-1}\right)(h_1\circ h_2^{-1}(x))\right]\\
&=\det\left(\partial_1\left(h_1^{-1}\right)(h_1\circ h_2^{-1}(x)),\ldots,\partial_n\left(h_1^{-1}\right)(h_1\circ h_2^{-1}(x)),\partial_j\left(h_1^{-1}\right)(h_1\circ h_2^{-1}(x))\right)=0,
\end{aligned}$$

logo, por linearidade $y_1\cdot y=0$ para todo $y\in\mathrm{Im}\left(\mathrm{Jac}\left(h_1^{-1}\right)(h_1\circ h_2^{-1}(x))\right)$. Além disso, como h_1 é uma carta, temos que os vetores $\partial_1\left(h_1^{-1}\right)(h_1\circ h_2^{-1}(x)),\ldots,\partial_n\left(h_1^{-1}\right)(h_1\circ h_2^{-1}(x))$ são linearmente independentes, logo $y_1\cdot y=0$ se e somente se $y\in\mathrm{Im}\left(\mathrm{Jac}\left(h_1^{-1}\right)(h_1\circ h_2^{-1}(x))\right)$. Analogamente, temos que $y_2\cdot y=0$ se e somente se $y\in\mathrm{Im}\left(\mathrm{Jac}\left(h_2^{-1}\right)(x)\right)$. Em particular temos que $y_1\neq 0$ e $y_2\neq 0$. Como

$$\mathrm{Jac}\left(h_2^{-1}\right)(x)=\mathrm{Jac}\left(h_1^{-1}\circ h_1\circ h_2^{-1}\right)(x)=\left[\mathrm{Jac}\left(h_1^{-1}\right)(h_1\circ h_2^{-1}(x))\right]\mathrm{Jac}\left(h_2^{-1}\right)(x)$$

e $h_1\circ h_2^{-1}:h_2(V_{h_1}\cap V_{h_1})\to h_1(V_{h_1}\cap V_{h_1})$ é um difeomorfismo, segue $\mathrm{Im}\left(\mathrm{Jac}\left(h_1^{-1}\right)(h_1\circ h_2^{-1}(x))\right)=\mathrm{Im}\left(\mathrm{Jac}\left(h_2^{-1}\right)(x)\right)$. Então y_1,y_2 são vetores em $\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}$ tais que dado $y\in\mathbb{R}^{n+1}$ temos que $y_1\cdot y=0$ se e somente se $y_2\cdot y=0$, logo

$$y_2=\mathrm{sgn}(y_1\cdot y_2)\frac{|y_2|}{|y_1|}y_1.$$

Seja

$$T := \begin{bmatrix} & & & & 0 \\ & & & & 0 \\ \partial_1\left(h_1\circ h_2^{-1}\right)(x) & \partial_2\left(h_1\circ h_2^{-1}\right)(x) & \cdots & \partial_n\left(h_1\circ h_2^{-1}\right)(x) & 0 \\ & & & & \vdots \\ & & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \operatorname{sgn}(y_1\cdot y_2)\frac{|y_2|}{|y_1|} \end{bmatrix}$$

temos que

$$T_1T = \begin{bmatrix} \left[\operatorname{Jac}\left(h_1^{-1}\right)\left(h_1\circ h_2^{-1}(x)\right)\right]\left[\operatorname{Jac}\left(h_1\circ h_2^{-1}\right)(x)\right] & \operatorname{sgn}(y_1\cdot y_2)\frac{|y_2|}{|y_1|}y_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \operatorname{Jac}\left(h_1^{-1}\circ h_1\circ h_2^{-1}\right)(x) & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{Jac}\left(h_2^{-1}\right)(x) & y_2 \end{bmatrix} = T_2.$$

Logo

$$\begin{aligned} |y_2|^2 = y_2\cdot y_2 = \det(T_2) &= \det(T_1T) = \det(T_1)\det(T) \\ &= (y_1\cdot y_1)\det\left[\operatorname{Jac}\left(h_1\circ h_2^{-1}\right)(x)\right]\operatorname{sgn}(y_1\cdot y_2)\frac{|y_2|}{|y_1|} \\ &= |y_1|\det\left[\operatorname{Jac}\left(h_1\circ h_2^{-1}\right)(x)\right]\operatorname{sgn}(y_1\cdot y_2)|y_2| \end{aligned}$$

e então

$$g(x) = |y_1|\left|\det\left[\operatorname{Jac}\left(h_1\circ h_2^{-1}\right)(x)\right]\right| = |y_2| = \left|\partial_1\left(h_2^{-1}\right)(x)\times\partial_2\left(h_2^{-1}\right)(x)\times\cdots\times\partial_n\left(h_2^{-1}\right)(x)\right|$$

como queríamos mostrar.

Para demonstrar (i) é suficiente, e necessário, demonstrar a seguinte afirmação: se $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_k \in C_c^\infty(M)$ e $h_1,h_2,\ldots,h_k \in \mathscr{A}$ são tais que $\operatorname{supp}(\varphi_j)\subset V_{h_j}$ para $j=1,2,\ldots,k$ e $\sum_{j=1}^k \varphi_j = 0$, então

$$\sum_{j=1}^{k}\left\langle u_{h_j},(\varphi_j\circ h_j^{-1})\left|\partial_1\left(h_j^{-1}\right)\times\partial_2\left(h_j^{-1}\right)\times\cdots\times\partial_n\left(h_j^{-1}\right)\right|\right\rangle = 0.$$

Mostraremos por indução sobre k. Se $k=1$ temos que $\varphi_1 = 0$ e não há o que demonstrar. Suponhamos que a afirmação acima seja válida para $k\in\mathbb{N}$ e que $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_{k+1}\in C_c^\infty(M)$ e

$h_1, h_2, \dots, h_{k+1} \in \mathscr{A}$ são tais que $\operatorname{supp}(\varphi_j) \subset V_{h_j}$ para $j = 1, 2, \dots, k+1$ e $\sum_{j=1}^{k+1} \varphi_j = 0$. Temos que $-\varphi_{k+1} = \sum_{j=1}^{k} \varphi_j$ logo

$$\begin{aligned}\operatorname{supp}(\varphi_{k+1}) &\subset V_{h_{k+1}} \cap \operatorname{supp}\left(\sum_{j=1}^{k} \varphi_j\right) \subset V_{h_{k+1}} \cap \left(\bigcup_{j=1}^{k} \operatorname{supp}(\varphi_j)\right) \\ &\subset V_{h_{k+1}} \cap \left(\bigcup_{j=1}^{k} V_{h_j}\right) = \bigcup_{j=1}^{k} \left(V_{h_{k+1}} \cap V_{h_j}\right).\end{aligned}$$

Segue da Proposição 30 que existem $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k \in C_c^\infty(M)$ tais que $\operatorname{supp}(\psi_j) \subset V_{h_{k+1}} \cap V_{h_j}$ para $j = 1, 2, \dots, k$ e $\sum_{j=1}^{k} \psi_j = -\varphi_{k+1}$. Logo $\sum_{j=1}^{k} (\varphi_j - \psi_j) = 0$ e pela hipótese de indução temos que

$$\sum_{j=1}^{k} \left\langle u_{h_j}, (\varphi_j - \psi_j) \circ h_j^{-1} \left| \partial_1 \left(h_j^{-1}\right) \times \partial_2 \left(h_j^{-1}\right) \times \cdots \times \partial_n \left(h_j^{-1}\right) \right| \right\rangle = 0.$$

Usando a igualdade acima e o caso já demonstrado, temos que

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{k} \left\langle u_{h_j}, (\varphi_j \circ h_j^{-1}) \left| \partial_1 \left(h_j^{-1}\right) \times \partial_2 \left(h_j^{-1}\right) \times \cdots \times \partial_n \left(h_j^{-1}\right) \right| \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{k} \left\langle u_{h_j}, (\psi_j \circ h_j^{-1}) \left| \partial_1 \left(h_j^{-1}\right) \times \partial_2 \left(h_j^{-1}\right) \times \cdots \times \partial_n \left(h_j^{-1}\right) \right| \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{k} \left\langle u_{h_{k+1}}, (\psi_j \circ h_{k+1}^{-1}) \left| \partial_1 \left(h_{k+1}^{-1}\right) \times \partial_2 \left(h_{k+1}^{-1}\right) \times \cdots \times \partial_n \left(h_{k+1}^{-1}\right) \right| \right\rangle \\ &= \left\langle u_{h_{k+1}}, \left(\sum_{j=1}^{k} \psi_j \circ h_{k+1}^{-1}\right) \left| \partial_1 \left(h_{k+1}^{-1}\right) \times \partial_2 \left(h_{k+1}^{-1}\right) \times \cdots \times \partial_n \left(h_{k+1}^{-1}\right) \right| \right\rangle \\ &= -\left\langle u_{h_{k+1}}, (\varphi_{k+1} \circ h_{k+1}^{-1}) \left| \partial_1 \left(h_{k+1}^{-1}\right) \times \partial_2 \left(h_{k+1}^{-1}\right) \times \cdots \times \partial_n \left(h_{k+1}^{-1}\right) \right| \right\rangle.\end{aligned}$$

Portanto

$$\sum_{j=1}^{k+1} \left\langle u_{h_j}, (\varphi_j \circ h_j^{-1}) \left| \partial_1 \left(h_j^{-1}\right) \times \partial_2 \left(h_j^{-1}\right) \times \cdots \times \partial_n \left(h_j^{-1}\right) \right| \right\rangle = 0.$$

(ii) Dado $u \in \mathscr{D}_1'(M)$, a linearidade de $\tilde{u}$ segue da linearidade de $u \circ h^{-1}$ para toda $h \in \mathscr{A}$. Por outro lado, seja $h \in \mathscr{A}$, temos que

$$\langle \tilde{u} \circ I_h, \varphi \rangle = \langle \tilde{u}, I_h \varphi \rangle = \langle \tilde{u}, \varphi \circ h \rangle = \left\langle u_h, \varphi \left| \partial_1 \left(h^{-1}\right) \times \partial_2 \left(h^{-1}\right) \times \cdots \times \partial_n \left(h^{-1}\right) \right| \right\rangle$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(U_h)$. Logo $\tilde{u} \circ I_h : C_c^\infty(U_h) \to \mathbb{C}$ é contínua. Então, segue Proposição 26 que $\tilde{u} : C_c^\infty(M) \to \mathbb{C}$ é contínua e portanto $\tilde{u} \in \mathscr{D}_2'(M)$.

(iii) A linearidade de T segue direto da definição de $\tilde{u}$. Suponhamos que $u = \{u_h\}_{h \in \mathscr{A}} \in \mathscr{D}_1'(M)$ é tal que $\tilde{u} = 0$. Então dada $h \in \mathscr{A}$, temos que

$$\langle u_h, \varphi \rangle = \left\langle \tilde{u}, (\varphi \circ h) \left| \partial_1 \left(h^{-1}\right) \circ h \times \partial_2 \left(h^{-1}\right) \circ h \times \cdots \times \partial_n \left(h^{-1}\right) \circ h \right|^{-1} \right\rangle = 0$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(U_h)$, logo $u_h = 0$. Então $u = 0$ e portanto T é injetivo.

Por outro lado, seja $v \in \mathscr{D}_2'(M)$, dada $h \in \mathscr{A}$, definamos $u_h : C_c^\infty(U_h) \to \mathbb{C}$ por

$$\begin{aligned}\langle u_h, \varphi \rangle &:= \left\langle v, (\varphi \circ h) \left| \partial_1 \left(h^{-1}\right) \circ h \times \partial_2 \left(h^{-1}\right) \circ h \times \cdots \times \partial_n \left(h^{-1}\right) \circ h \right|^{-1} \right\rangle \\ &= \left\langle v \circ I_h, \varphi \left| \partial_1 \left(h^{-1}\right) \times \partial_2 \left(h^{-1}\right) \times \cdots \times \partial_n \left(h^{-1}\right) \right|^{-1} \right\rangle\end{aligned}$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(U_h)$. Pela Proposição 26, temos que $v \circ I_h : C_c^\infty(U_h) \to \mathbb{C}$ é contínua, logo $u_h \in \mathscr{D}'(U_h)$. Sejam $h_1, h_2 \in \mathscr{A}$ tais que $V_{h_1} \cap V_{h_1} \neq \emptyset$ e $\varphi \in C_c^\infty(h_2(V_{h_1} \cap V_{h_1}))$, temos que

$$\begin{aligned}&\left\langle u_{h_1} \circ (h_1 \circ h_2^{-1}), \varphi \right\rangle = \left\langle u_{h_1}, \left[\varphi \circ (h_2 \circ h_1^{-1})\right] \left|\det\left[\mathrm{Jac}(h_2 \circ h_1^{-1})\right]\right| \right\rangle \\ &= \left\langle u_{h_1}, \left[\varphi \circ (h_2 \circ h_1^{-1})\right] \left|\det\left[\mathrm{Jac}(h_1 \circ h_2^{-1})(h_2 \circ h_1^{-1})\right]\right|^{-1} \right\rangle \\ &= \left\langle v, \left[\varphi \circ (h_2 \circ h_1^{-1}) \circ h_1\right] (g \circ h_2)^{-1} \right\rangle \\ &= \left\langle v, (\varphi \circ h_2) \left| \partial_1 \left(h_2^{-1}\right) \circ h_2 \times \partial_2 \left(h_2^{-1}\right) \circ h_2 \times \cdots \times \partial_n \left(h_2^{-1}\right) \circ h_2 \right|^{-1} \right\rangle = \left\langle u_{h_2}, \varphi \right\rangle\end{aligned}$$

onde $g \in C^\infty(h_2(V_{h_1} \cap V_{h_2}))$ é a função definida na demonstração de (i). Assim, seja $u = \{u_h\}_{h \in \mathscr{A}}$, temos que $u \in \mathscr{D}_1'(M)$ e se $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k \in C_c^\infty(M)$ e $h_1, h_2, \ldots, h_k \in \mathscr{A}$ são tais que $\mathrm{supp}(\varphi_j) \subset V_{h_j}$ para $j = 1, 2, \ldots, k$ e $\sum_{j=1}^k \varphi_j = \varphi$, então

$$\langle \tilde{u}, \varphi \rangle = \sum_{j=1}^{k} \left\langle u_{h_j}, (\varphi_j \circ h_j^{-1}) \left| \partial_1 \left(h_j^{-1}\right) \times \partial_2 \left(h_j^{-1}\right) \times \cdots \times \partial_n \left(h_j^{-1}\right) \right| \right\rangle = \sum_{j=1}^{k} \left\langle v, \varphi_j \right\rangle = \langle v, \varphi \rangle .$$

Portanto T é sobrejetivo.

Seja $\langle u_\alpha \rangle_{\alpha \in \Upsilon}$ um net em $\mathscr{D}_1'(M)$ que converge a 0. Dada $\varphi \in C_c^\infty(M)$, sejam $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k \in C_c^\infty(M)$ e $h_1, h_2, \ldots, h_k \in \mathscr{A}$ tais que $\mathrm{supp}(\varphi_j) \subset V_{h_j}$ para $j = 1, 2, \ldots, k$ e $\sum_{j=1}^k \varphi_j = \varphi$, temos que

$$\langle T u_\alpha, \varphi \rangle = \sum_{j=1}^{k} \left\langle u_\alpha \circ h_j^{-1}, (\varphi_j \circ h_j^{-1}) \left| \partial_1 \left(h_j^{-1}\right) \times \partial_2 \left(h_j^{-1}\right) \times \cdots \times \partial_n \left(h_j^{-1}\right) \right| \right\rangle \xrightarrow[\alpha \in \Upsilon]{} 0.$$

Portanto, $T u_\alpha \xrightarrow[\alpha \in \Upsilon]{} 0$ em $\mathscr{D}_2'(M)$ e segue que T é contínuo.

Por fim, seja $\langle u_\alpha \rangle_{\alpha \in \Upsilon}$ um net em $\mathscr{D}_1'(M)$ tal que $T u_\alpha \xrightarrow[\alpha \in \Upsilon]{} 0$ em $\mathscr{D}_2'(M)$. Dada $h \in \mathscr{A}$, temos que

$$\left\langle u_\alpha \circ h^{-1}, \varphi \right\rangle = \left\langle T u_\alpha, (\varphi \circ h) \left| \partial_1 \left(h^{-1}\right) \circ h \times \partial_2 \left(h^{-1}\right) \circ h \times \cdots \times \partial_n \left(h^{-1}\right) \circ h \right|^{-1} \right\rangle \xrightarrow[\alpha \in \Upsilon]{} 0.$$

Portanto, $u_\alpha \xrightarrow[\alpha \in A]{\mathscr{D}_1'(M)} 0$ e segue que T^{-1} é contínuo. □

No caso em que M é uma subvariedade n-dimensional de $\mathbb{R}^{n+1}$, identificaremos (através de T) os espaços $\mathscr{D}_1'(M)$ e $\mathscr{D}_2'(M)$ e representaremos tais espaços apenas por $\mathscr{D}'(M)$, assim uma distribuição $u \in \mathscr{D}'(M)$ representará tanto uma família $\{u_h\}_{h \in \mathscr{A}}$ de distribuições quanto um funcional linear contínuo sobre $C_c^\infty(M)$.

4.3 Traço de distribuições

Nessa seção será introduzida uma noção de traço em um certo espaço de distribuições especiais. Apresentaremos um modo de entender o que pode ser o traço de uma distribuição e, em seguida, discutiremos resultados que demonstrarão que essa é, de fato, uma boa maneira para se definir o traço dstes objetos. Começaremos com o caso $U \in \mathscr{D}'(V \times (0,c))$, onde $V \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, e depois generalizaremos essa noção para distribuições $\mathbf{U} \in \mathscr{D}'(\Omega)$, no caso em que Ω é um aberto com fronteira suave.

Fixaremos a partir desta seção uma função teste $\phi \in C_c^\infty((0,1))$, tal que $\phi \geq 0$ e $\int \phi = 1$. Dado $\varepsilon > 0$, consideraremos também a função $\phi_\varepsilon \in C_c^\infty((0,\varepsilon))$ definida por

$$\phi_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\phi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Observe que $\int \phi_\varepsilon = 1$ para todo $\varepsilon > 0$.

4.3.1 O traço sobre $V \times \{0\}$ de distribuições em $\mathscr{D}'(V \times (0,c))$

Sejam $c \in (0,\infty]$, $V \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $f \in C(V \times [0,c))$ uma função e $f_{V\times\{0\}} : V \to \mathbb{C}$ definida por $f_{V\times\{0\}}(x) = f(x,0)$ para todo $x \in V$, a qual é contínua em V.

Para cada $\psi \in C_c^\infty(V)$, denotando por $\psi \otimes \phi_\varepsilon$ o produto tensorial de ψ por ϕ_ε, isto é, a função $\psi \otimes \phi_\varepsilon \in C_c^\infty(V \times (0,\varepsilon))$ definida por $\psi \otimes \phi_\varepsilon(x,t) = \psi(x)\phi_\varepsilon(t)$, para $(x,t) \in V \times (0,\varepsilon)$, concluímos que

$$\begin{aligned}
|\langle f, \psi \otimes \phi_\varepsilon\rangle - \langle f_{V\times\{0\}}, \psi\rangle| &= \left|\int_V \int_0^c f(x,t)\psi(x)\phi_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_V f(x,0)\psi(x)\,\mathrm{d}x\right| \\
&= \left|\int_V \int_0^c f(x,t)\psi(x)\phi_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_V f(x,0)\int_0^c \psi(x)\phi_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \int_V \int_0^c |f(x,t) - f(x,0)|\phi_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t\,|\psi(x)|\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathrm{supp}(\psi)} \int_0^\varepsilon |f(x,t) - f(x,0)|\phi_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t\,|\psi(x)|\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

para todo $\varepsilon \in (0,c)$. Seja $\varepsilon_0 \in (0,c)$, da continuidade uniforme de f em $\mathrm{supp}(\psi) \times [0,\varepsilon_0]$, segue que dado $\delta > 0$, existe $\varepsilon_1 \in (0,\varepsilon_0)$ tal que

$$|f(x,t) - f(x,0)| < \delta$$

para todo $(x,t) \in \mathrm{supp}(\psi) \times [0,\varepsilon_1]$. Logo

$$\begin{aligned}
|\langle f, \psi \otimes \phi_\varepsilon\rangle - \langle f_{V\times\{0\}}, \psi\rangle| &\leq \int_{\mathrm{supp}(\psi)} \int_0^\varepsilon |f(x,t) - f(x,0)|\phi_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t\,|\psi(x)|\,\mathrm{d}x \\
&\leq \int_{\mathrm{supp}(\psi)} \int_0^\varepsilon \delta\phi_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t\,|\psi(x)|\,\mathrm{d}x = \delta\|\psi\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$, demonstrando que

$$\langle f_{V\times\{0\}}, \psi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \langle f, \psi \otimes \phi_\varepsilon\rangle. \tag{4.6}$$

A igualdade acima representa a distribuição $f_{V\times\{0\}} \in \mathscr{D}'(V)$ em termos da distribuição $f \in \mathscr{D}'(V\times(0,c))$, dessa forma, tal igualdade sugere uma maneira de definir o traço de uma distribuição.

Definição 41. Sejam $c \in (0,\infty]$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, definimos o espaço das distribuições em $V\times(0,c)$ com traço em $V\times\{0\}$, denotado por $\mathscr{D}'_{V\times\{0\}}(V\times(0,c))$, como sendo

$$\mathscr{D}'_{V\times\{0\}}(V\times(0,c)) := \left\{ \mathbf{U} \in \mathscr{D}'(V\times(0,c)) : \lim_{\varepsilon\to 0^+} \langle \mathbf{U}, \psi\otimes\phi_\varepsilon\rangle \text{ existe para toda } \psi \in C_c^\infty(V)\right\}.$$

Dada $\mathbf{U} \in \mathscr{D}'_{V\times\{0\}}(V\times(0,c))$, definimos o traço de $\mathbf{U}$ em $V\times\{0\}$, como sendo o funcional linear $\mathbf{U}_{V\times\{0\}} : C_c^\infty(V) \to \mathbb{C}$ dado por

$$\langle \mathbf{U}_{V\times\{0\}}, \psi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \langle \mathbf{U}, \psi\otimes\phi_\varepsilon\rangle$$

para toda $\psi \in C_c^\infty(V)$.

Dadas $\Phi \in C_c^\infty(V\times(0,c))$ e $\psi \in C_c^\infty(V)$, definimos a seminorma $p_{(\Phi,\psi)} : \mathscr{D}'_{V\times\{0\}}(V\times(0,c)) \to \mathbb{R}$ por

$$p_{(\Phi,\psi)}(\mathbf{U}) := |\langle \mathbf{U}, \Phi\rangle| + \sup\left\{ |\langle \mathbf{U}, \psi\otimes\phi_\varepsilon\rangle| : 0 < \varepsilon \le \min\{c,1\}\right\}$$

para toda distribuição $\mathbf{U} \in \mathscr{D}'_{V\times\{0\}}(V\times(0,c))$ e munimos o espaço $\mathscr{D}'_{V\times\{0\}}(V\times(0,c))$ com a família de seminormas $\left\{p_{(\Phi,\psi)} : \Phi \in C_c^\infty(V\times(0,c)) \text{ e } \psi \in C_c^\infty(V)\right\}$.

Observação 11. O espaço $\mathscr{D}'_{V\times\{0\}}(V\times(0,c))$ depende da função ϕ fixada a priori, no entanto, todos os resultados a seguir não dependem de qual função $\phi \in C_c^\infty((0,1))$, tal que $\phi \ge 0$ e $\int \phi = 1$, foi fixada. Por simplicidade, na definição anterior, não explicitamos esta dependência de ϕ na notação $\mathscr{D}'_{V\times\{0\}}(V\times(0,c))$.

O exemplo que antecede a definição mostra que $\mathscr{D}'_{V\times\{0\}}(V\times(0,c))$ é não vazio, pois ele estabelece que $C(V\times[0,c)) \subset \mathscr{D}'_{V\times\{0\}}(V\times(0,c))$.

Mostraremos a seguir que o traço de uma distribuição em $\mathscr{D}'_{V\times\{0\}}(V\times(0,c))$ é uma distribuição em $\mathscr{D}'(V)$

Proposição 32. Se $\mathbf{U} \in \mathscr{D}'_{V\times\{0\}}(V\times(0,c))$, então $\mathbf{U}_{V\times\{0\}} \in \mathscr{D}'(V)$. Em palavras, o traço de uma distribuição é ainda uma distribuição.

Demonstração. Para cada $\varepsilon \in (0,c)$, seja $I_\varepsilon : C_c^\infty(V) \to C_c^\infty(V\times(0,c))$ o operador linear definido por $I_\varepsilon\psi = \psi\otimes\phi_\varepsilon$ para toda $\psi \in C_c^\infty(V)$. Temos que I_ε é contínuo, logo $\mathbf{U}\circ I_\varepsilon \in \mathscr{D}'(V)$ para todo $\varepsilon \in (0,c)$. Além disso

$$\langle \mathbf{U}\circ I_\varepsilon, \psi\rangle = \langle \mathbf{U}, I_\varepsilon\psi\rangle = \langle \mathbf{U}, \psi\otimes\phi_\varepsilon\rangle \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} \langle \mathbf{U}_{V\times\{0\}}, \psi\rangle$$

para toda $\psi \in C_c^\infty(V)$. Em particular,

$$\langle \mathbf{U} \circ I_{\frac{1}{k}}, \psi \rangle \xrightarrow[k\to\infty]{} \langle \mathbf{U}_{V\times\{0\}}, \psi \rangle$$

para toda $\psi \in C_c^\infty(V)$. Portanto, da Proposição 8, segue que $\mathbf{U}_{V\times\{0\}} \in \mathscr{D}'(V)$. $\square$

Como mostrado em (CORDARO, 1999), o valor de fronteira de uma função holomorfa é definido a partir do seguinte resultado:

Proposição 33. Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto, $\alpha > 0$, $f : I \times i(0,\alpha) \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa, $N \in \mathbb{N}$ e $C > 0$ tais que

$$|f(x+iy)| \leq \frac{C}{y^N}$$

para todo $x+iy \in I \times i(0,\alpha)$. Então para cada $\psi \in C_c^\infty(I)$ o limite

$$\lim_{y\to 0+} \int_I f(x+iy)\psi(x)\,\mathrm{d}x \tag{4.7}$$

existe. Se $u : C_c^\infty(I) \to \mathbb{C}$ é o funcional linear definido por

$$\langle u, \psi \rangle = \lim_{y\to 0+} \int_I f(x+iy)\psi(x)\,\mathrm{d}x$$

para toda $\psi \in C_c^\infty(I)$, então $u \in \mathscr{D}'(I)$. Essa distribuição u é denominada valor de fronteira de f e é indicada por $b(f)$.

Demonstração. Dada $\psi \in C_c^\infty(I)$, seja $g_\psi : (0,\alpha) \to \mathbb{C}$ definida por

$$g_\psi(y) = \int_I f(x+iy)\psi(x)\,\mathrm{d}x$$

para todo $y \in (0,\alpha)$. Sejam $y_0 \in (0,\alpha)$ e $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset (0,\alpha)$ uma sequência que converge para y_0. Seja $K \subset I \times i(0,\alpha)$ o conjunto compacto $K := \operatorname{supp}(\psi) \times i\{y_k : k \in \mathbb{Z}_+\}$, como f é contínua temos que $\sup\{|f(x+iy)| : x+iy \in K\} < \infty$. Temos que

$$|f(x+iy_k)||\psi(x)| \leq \sup\{|f(t+iy)| : t+iy \in K\}|\psi(x)|$$

para quaisquer $k \in \mathbb{N}$ e $x \in I$, logo segue do Teorema da Convergência Dominada que

$$g_\psi(y_k) = \int_I f(x+iy_k)\psi(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[k\to\infty]{} \int_I f(x+iy_0)\psi(x)\,\mathrm{d}x = g_\psi(y_0).$$

Portanto, para qualquer $\psi \in C_c^\infty(I)$, temos que g_ψ é contínua.

Sejam $\varepsilon > 0$ tal que $[y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon] \subset I$ e $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $y_k \in (y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon)$ para todo $k \geq k_0$. Seja $K := \operatorname{supp}(\psi) \times [y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon]$, temos que K é compacto, logo da continuidade de $\partial_y f$ segue que $\sup\{|\partial_y f(t+iy)| : t+iy \in K\} < \infty$. Pela desigualdade do valor médio, temos que

$$\left|\frac{f(x+iy_k)-f(x+iy_0)}{y_k-y_0}\right||\psi(x)| \leq \sup\{|\partial_y f(t+iy)| : t+iy \in K\}|\psi(x)|$$

para quaisquer $x \in I$ e $k \geq k_0$. Então, pelo Teorema da Convergência Dominada, temos que

$$\frac{g_\psi(y_k) - g_\psi(y_0)}{y_k - y_0} = \int_I \frac{f(x+iy_k) - f(x+iy_0)}{y_k - y_0} \psi(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[k\to\infty]{} \int_I \partial_y f(x+iy_0)\psi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Portanto g_ψ é diferenciável, além disso, como f é holomorfa tem-se $\partial_y f = i\partial_x f$, logo

$$\begin{aligned}(g_\psi)'(y) &= \int_I \partial_y f(x+iy)\psi(x)\,\mathrm{d}x = i\int_I \partial_x f(x+iy)\psi(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -i\int_I f(x+iy)\psi'(x)\,\mathrm{d}x = -ig_{\psi'}(y)\end{aligned}$$

para todo $y \in (0,\alpha)$. Pelo que já foi demonstrado, temos que $g_{\psi'}$ é contínua. Portanto, para qualquer $\psi \in C_c^\infty(I)$, temos que $g_\psi \in C^1(0,\alpha)$.

Segue então, por indução sobre m, que para quaisquer $m \in \mathbb{N}$ e $\psi \in C_c^\infty(I)$, temos $g_\psi \in C^m(0,\alpha)$ e

$$(g_\psi)^{(m)}(y) = (-i)^m \int_I f(x+iy)\psi^{(m)}(x)\,\mathrm{d}x$$

para todo $y \in (0,\alpha)$.

Dados $\psi \in C_c^\infty(I)$ e $m \in \mathbb{N}$, existe $C_{(m,\psi)} > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\left|(g_\psi)^{(m)}(y)\right| &= \left|\int_I f(x+iy)\psi^{(m)}(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_I |f(x+iy)|\left|\psi^{(m)}(x)\right|\mathrm{d}x \\ &\leq \int_I \frac{C}{y^N}\left|\psi^{(m)}(x)\right|\mathrm{d}x \leq \frac{C_{(m,\psi)}}{y^N}.\end{aligned}$$

Por outro lado, sejam $a \in (0,\alpha)$ com $a < 1$, $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq 2$, $c_1 > 0$ e $g \in C^1(0,\alpha)$ tais que

$$|g'(y)| \leq \frac{c_1}{y^m}$$

para todo $y \in (0,a)$. Nessas condições, existe $c_2 > 0$ tal que para todo $y \in (0,a)$:

$$|g(y)| \leq \frac{c_2}{y^{m-1}}$$

De fato, pois pelo Teorema Fundamental do Cálculo vem

$$\begin{aligned}|g(y)| &\leq |g(a)| + |g(y) - g(a)| = |g(a)| + \left|\int_y^a g'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq |g(a)| + \int_y^a |g'(t)|\,\mathrm{d}t \\ &\leq |g(a)| + \int_y^a \frac{c_1}{t^m}\,\mathrm{d}t = |g(a)| + \frac{c_1}{(1-m)a^{m-1}} - \frac{c_1}{(1-m)y^{m-1}} \\ &\leq \frac{|g(a)|}{y^{m-1}} + \frac{c_1}{(m-1)y^{m-1}} \leq \frac{(m-1)|g(a)| + c_1}{y^{m-1}},\end{aligned}$$

para todo $y \in (0,a)$. Assim, basta por $c_2 = (m-1)|g(a)| + c_1$.

Então segue, por indução sobre m, que para todo $m \in \mathbb{N}$ com $m \leq N$, existe $C_m > 0$ tal que

$$\left|(g_\psi)^{(N-m+2)}(y)\right| \leq \frac{C_m}{y^{N-m+1}}$$

para todo $y \in (0,a)$. Logo temos que

$$\left|(g_\psi)^{(2)}(y)\right| \leq \frac{C_N}{y}$$

para todo $y \in (0,a)$. Analogamente ao que foi feito para a função g, segue do Teorema Fundamental do Cálculo que

$$\begin{aligned}
|(g_\psi)'(y)| &\leq |(g_\psi)'(a)| + |(g_\psi)'(y) - (g_\psi)'(a)| = |(g_\psi)'(a)| + \left|\int_y^a (g_\psi)^{(2)}(t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leq |(g_\psi)'(a)| + \int_y^a |(g_\psi)^{(2)}(t)|\,\mathrm{d}t \leq |(g_\psi)'(a)| + \int_y^a \frac{C_N}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= |(g_\psi)'(a)| + C_N \ln(a) - C_N \ln(y) \leq |(g_\psi)'(a)| - C_N \ln(y)
\end{aligned}$$

para todo $y \in (0,a)$. Como a função $\ln : (0,a) \to \mathbb{R}$ é Lebesgue integrável, segue que $(g_\psi)'$ é Lebesgue integrável em $(0,a)$, logo pelo Teorema da Convergência Dominada e pelo Teorema Fundamental do Cálculo segue que

$$\int_I f(x+iy)\psi(x)\,\mathrm{d}x = g_\psi(y) = g_\psi(a) - \int_y^a (g_\psi)'(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[y\to 0+]{} g_\psi(a) - \int_0^a (g_\psi)'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Portanto o limite (4.7) existe.

Seja $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset (0,\alpha)$ uma sequência convergindo para 0 e $u_k : C_c^\infty(I) \to \mathbb{C}$ o funcional linear definido por

$$\langle u_k, \psi\rangle = \int_I f(x+iy_k)\psi(x)\,\mathrm{d}x$$

para toda $\psi \in C_c^\infty(I)$. Como f é contínua, segue que $u_k \in \mathscr{D}'(I)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Além disso, seja $u : C_c^\infty(I) \to \mathbb{C}$ o funcional linear definido no enunciado desta Proposição, temos que $\langle u_k - u, \psi\rangle \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ para toda $\psi \in C_c^\infty(I)$. Portanto, como $\mathscr{D}'(I)$ é sequencialmente completo (Ver a Proposição 8), segue que $u \in \mathscr{D}'(I)$. □

O próximo resultado mostra que dada f uma função holomorfa satisfazendo a hipótese da Proposição anterior, olhando f como uma distribuição em $\mathscr{D}'(I \times (0,\alpha))$, temos que f possui traço em $I \times \{0\}$ e seu traço coincide com $b(f)$.

Proposição 34. Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto, $\alpha > 0$, $f : I \times i(0,\alpha) \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa, $N \in \mathbb{N}$ e $C > 0$ tais que

$$|f(x+iy)| \leq \frac{C}{y^N}$$

para todo $x + iy \in I \times i(0,\alpha)$. Consideremos $\mathbf{U} \in \mathscr{D}'(I \times (0,\alpha))$ a distribuição definida por

$$\langle \mathbf{U}, \Phi\rangle = \int_{I\times(0,c)} f(x+iy)\Phi(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

para toda $\Phi \in C_c^\infty(I \times (0,\alpha))$. Temos que $\mathbf{U} \in \mathscr{D}'_{I\times\{0\}}(I \times (0,\alpha))$ e $\mathbf{U}_{I\times\{0\}} = b(f)$.

Demonstração. De fato, dados $\psi \in C_c^\infty(I)$ e $\delta > 0$, seja $\varepsilon_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| \langle b(f), \psi \rangle - \int_I f(x+iy)\psi(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \delta$$

para todo $y \in (0, \varepsilon_0)$. Temos então que

$$\begin{aligned}
|\langle \mathbf{U}, \psi \otimes \phi_\varepsilon \rangle - \langle b(f), \psi \rangle| &= \left| \int_{I\times(0,\alpha)} f(x+iy)\psi(x)\phi_\varepsilon(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \langle b(f), \psi \rangle \right| \\
&= \left| \int_0^\alpha \int_I f(x+iy)\psi(x)\,\mathrm{d}x\,\phi_\varepsilon(y)\,\mathrm{d}y - \langle b(f), \psi \rangle \right| \\
&= \left| \int_0^\alpha \left(\int_I f(x+iy)\psi(x)\,\mathrm{d}x - \langle b(f), \psi \rangle \right) \phi_\varepsilon(y)\,\mathrm{d}y \right| \\
&\leq \int_0^\varepsilon \left| \int_I f(x+iy)\psi(x)\,\mathrm{d}x - \langle b(f), \psi \rangle \right| \phi_\varepsilon(y)\,\mathrm{d}y \\
&\leq \int_0^\varepsilon \delta \phi_\varepsilon(y)\,\mathrm{d}y = \delta
\end{aligned}$$

para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Portanto $\mathbf{U} \in \mathscr{D}'_{I\times\{0\}}(I \times (0,\alpha))$ e

$$\left\langle \mathbf{U}_{I\times\{0\}}, \psi \right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \langle \mathbf{U}, \psi \otimes \phi_\varepsilon \rangle = \langle b(f), \psi \rangle$$

para toda $\psi \in C_c^\infty(I)$. □

Teorema 15. Sejam $V \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $c \in (0, \infty]$, temos que $\mathscr{D}'_{V\times\{0\}}(V \times (0,c))$ é um espaço vetorial topológico localmente convexo, Hausdorff e sequencialmente completo.

Demonstração. Como a topologia de $\mathscr{D}'_{V\times\{0\}}(V \times (0,c))$ provém de uma família separante de seminormas, segue que $\mathscr{D}'_{V\times\{0\}}(V \times (0,c))$ é um espaço vetorial topológico localmente convexo e Hausdorff.

Seja $(\mathbf{U}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $\mathscr{D}'_{V\times\{0\}}(V \times (0,c))$, como

$$|\langle \mathbf{U}^k - \mathbf{U}^j, \Phi \rangle| = p_{(\Phi,0)}(\mathbf{U}^k - \mathbf{U}^j)$$

para quaisquer $k, j \in \mathbb{N}$ e $\Phi \in C_c^\infty(V \times (0,c))$, temos que $(\mathbf{U}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathscr{D}'(V \times (0,c))$. Como $\mathscr{D}'(V \times (0,c))$ é sequencialmente completo (Proposição 8), segue que existe $\mathbf{U} \in \mathscr{D}'(V \times (0,c))$ tal que $\mathbf{U}^k \xrightarrow[k\to\infty]{\mathscr{D}'(V\times(0,c))} \mathbf{U}$. Note que dados $k, j \in \mathbb{N}$, $\psi \in C_c^\infty(V)$, temos que

$$\begin{aligned}
|\langle \mathbf{U}^k_{V\times\{0\}} - \mathbf{U}^j_{V\times\{0\}}, \psi \rangle| &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} |\langle \mathbf{U}^k - \mathbf{U}^j, \psi \otimes \phi_\varepsilon \rangle| \\
&\leq \sup\left\{ |\langle \mathbf{U}^k - \mathbf{U}^j, \psi \otimes \phi_\varepsilon \rangle| : 0 < \varepsilon \leq \min\{c, 1\} \right\} = p_{(0,\psi)}(\mathbf{U}^k - \mathbf{U}^j),
\end{aligned}$$

logo $(\mathbf{U}^k_{V\times\{0\}})_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathscr{D}'(V)$. Como $\mathscr{D}'(V)$ é sequencialmente completo, segue que existe $u \in \mathscr{D}'(V)$ tal que $\mathbf{U}^k_{V\times\{0\}} \xrightarrow[k\to\infty]{\mathscr{D}'(V)} u$. Dados $\psi \in C_c^\infty(V)$ e $\delta > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\langle \mathbf{U}^k - \mathbf{U}^j, \psi \otimes \phi_\varepsilon\rangle| \leq \sup\left\{|\langle \mathbf{U}^k - \mathbf{U}^j, \psi \otimes \phi_{\varepsilon'}\rangle| : 0 < \varepsilon' \leq \min\{c,1\}\right\} = p_{(0,\psi)}(\mathbf{U}^k - \mathbf{U}^j) \leq \delta$$

para quaisquer $k, j \geq k_0$ e $0 < \varepsilon \leq \min\{c,1\}$. Fazendo $j \to \infty$, obtemos que

$$|\langle \mathbf{U}^k - \mathbf{U}, \psi \otimes \phi_\varepsilon\rangle| \leq \delta$$

para todo $k \geq k_0$ e $0 < \varepsilon \leq \min\{c,1\}$. Segue então que

$$\sup\left\{|\langle \mathbf{U}^k - \mathbf{U}, \psi \otimes \phi_\varepsilon\rangle| : 0 < \varepsilon \leq \min\{c,1\}\right\} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0. \tag{4.8}$$

Mostraremos agora que $\mathbf{U} \in \mathscr{D}'_{V\times\{0\}}(V \times (0,c))$ e $\mathbf{U}_{V\times\{0\}} = u$. De fato, dada $\psi \in C_c^\infty(V)$, temos que

$$|\langle \mathbf{U}, \psi \otimes \phi_\varepsilon\rangle - \langle u, \psi\rangle| \leq |\langle \mathbf{U} - \mathbf{U}^k, \psi \otimes \phi_\varepsilon\rangle| + |\langle \mathbf{U}^k, \psi \otimes \phi_\varepsilon\rangle - \langle \mathbf{U}^k_{V\times\{0\}}, \psi\rangle| + |\langle \mathbf{U}^k_{V\times\{0\}} - u, \psi\rangle|$$

para quaisquer $k \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon \in (0,c)$. Assim dado $\delta > 0$, como $\mathbf{U}^k_{V\times\{0\}} \xrightarrow[k\to\infty]{\mathscr{D}'(V)} u$ e por (4.8), tomando $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, segue que

$$|\langle \mathbf{U}, \psi \otimes \phi_\varepsilon\rangle - \langle u, \psi\rangle| \leq |\langle \mathbf{U}^k, \psi \otimes \phi_\varepsilon\rangle - \langle \mathbf{U}^k_{V\times\{0\}}, \psi\rangle| + \frac{\delta}{2}$$

para todo $\varepsilon \in (0,c)$. Logo existe $\varepsilon_0 \in (0,c)$ tal que

$$|\langle \mathbf{U}, \psi \otimes \phi_\varepsilon\rangle - \langle u, \psi\rangle| \leq \delta$$

para todo $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$. Portanto

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \langle \mathbf{U}, \psi \otimes \phi_\varepsilon\rangle = \langle u, \psi\rangle.$$

Por fim, como $\mathbf{U}^k \xrightarrow[k\to\infty]{\mathscr{D}'(V\times(0,c))} \mathbf{U}$, segue de (4.8) que $\mathbf{U}^k \xrightarrow[k\to\infty]{\mathscr{D}'_{V\times\{0\}}(V\times(0,c))} \mathbf{U}$. $\square$

Sejam $\mathbb{R}^{n+1}_+ := \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$, $\Gamma := \mathbb{R}^n \times \{0\}$ e $1 \leq p < \infty$. Quando $\mathbf{U}$ está no espaço de Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, uma forma de definir o traço de $\mathbf{U}$ em Γ pode ser encontrada em (BRÉZIS, 2011), a qual está baseada nos resultados apresentados na seguinte Proposição:

Proposição 35. Sejam $1 \leq p < \infty$ e $E = \{\Phi|_{\mathbb{R}^{n+1}_+} : \Phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+1})\}$. Temos que

(i) O espaço E é denso em $W^{1,p}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$.

(ii) Seja $T_0 : E \subset W^{1,p}(\mathbb{R}^{n+1}_+) \to L^p(\Gamma)$ o operador definido da seguinte maneira: dada $\Phi_0 \in E$, seja $\Phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ tal que $\Phi|_{\mathbb{R}^{n+1}_+} = \Phi_0$, definimos $T_0\Phi_0 = \Phi|_\Gamma$. O operador T_0 está bem definido e é contínuo.

Demonstração. (i) Ver Corolário 9.8 em (BRÉZIS, 2011).

(ii) Dada $\Phi_0 \in E$, sejam $\Phi_1, \Phi_2 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ tais que $\Phi_1|_{\mathbb{R}^{n+1}_+} = \Phi_0 = \Phi_2|_{\mathbb{R}^{n+1}_+}$, então segue por continuidade que $\Phi_1|_\Gamma = \Phi_2|_\Gamma$. Além disso, temos que $\Phi_1|_\Gamma \in C_c(\Gamma) \subset L^p(\Gamma)$, logo o operador T_0 está bem definido. A continuidade de T_0 está provada no Lema 9.9 em (BRÉZIS, 2011). □

Seja $1 \leq p < \infty$, como o operador da Proposição acima $T_0 : E \subset W^{1,p}(\mathbb{R}^{n+1}_+) \to L^p(\Gamma)$ é contínuo (logo é uniformemente contínuo), $L^p(\Gamma)$ é completo e E é denso em $W^{1,p}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, segue que existe um único operador linear contínuo $T : W^{1,p}(\mathbb{R}^{n+1}_+) \to L^p(\Gamma)$ que estende o operador T_0. Dada $\mathbf{U} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, como é feito em (BRÉZIS, 2011), é natural definir o traço de $\mathbf{U}$ em Γ por $T\mathbf{U} \in L^p(\Gamma)$.

Veremos a seguir, que o conceito de traço apresentado na Definição 41, coincide com o conceito de traço definido em (BRÉZIS, 2011) e mencionado acima.

Proposição 36. Sejam $1 \leq p < \infty$, $\mathbf{U} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ e $T : W^{1,p}(\mathbb{R}^{n+1}_+) \to L^p(\Gamma)$ o único operador linear contínuo que estende o operador $T_0 : E \subset W^{1,p}(\mathbb{R}^{n+1}_+) \to L^p(\Gamma)$ da proposição anterior. Temos que $\mathbf{U} \in \mathscr{D}'_\Gamma(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ e $\mathbf{U}_\Gamma = T\mathbf{U}(\,\cdot\,, 0)$. Além disso, a inclusão $W^{1,p}(\mathbb{R}^{n+1}_+) \subset \mathscr{D}'_\Gamma(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ é contínua.

Demonstração. Dados $t > 0$ e $F : \mathbb{R}^{n+1}_+ \to \mathbb{C}$, seja $F^t : \mathbb{R}^{n+1}_+ \to \mathbb{C}$ definida por

$$F^t(x,s) = F(x, t+s)$$

para todo $(x,s) \in \mathbb{R}^{n+1}_+$. Naturalmente, se $\mathbf{U} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, então $\mathbf{U}^t \in W^{1,p}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ para todo $t > 0$. Mostremos agora que

$$T(\mathbf{U}^t)(x,0) = \mathbf{U}(x,t)$$

para quase todo $(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}_+$.

De fato, seja $(\Phi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset E$ uma sequência tal que $\Phi_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \mathbf{U}$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, pelo Teorema 4.9 em (BRÉZIS, 2011), passando a uma subsequência se necessário, podemos supor que

$$\Phi_k(x,t) \xrightarrow[k\to\infty]{} \mathbf{U}(x,t)$$

para quase todo $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$. Para $t > 0$, temos

$$\|(\Phi_k)^t - \mathbf{U}^t\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} \leq \|\Phi_k - \mathbf{U}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^{n+1}_+)},$$

logo $(\Phi_k)^t \xrightarrow[k\to\infty]{} \mathbf{U}^t$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$. Segue pela continuidade de T que

$$(\Phi_k)^t(\,\cdot\,,0) = T[(\Phi_k)^t] \xrightarrow[k\to\infty]{L^p(\Gamma)} T(\mathbf{U}^t).$$

Assim, passando a uma subsequência se necessário, podemos supor que

$$\Phi_k(x,t) = (\Phi_k)^t(x,0) \xrightarrow[k\to\infty]{} T(\mathbf{U}^t)(x,0)$$

para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$. Portanto, $T(\mathbf{U}^t)(x,0) = \mathbf{U}(x,t)$ para quase todo $(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}_+$.

Agora, pondo $C := \|T\|_{\mathscr{L}\left(W^{1,p}(\mathbb{R}^{n+1}_+),L^p(\Gamma)\right)}$, temos

$$\begin{aligned}
|\langle \mathbf{U}, \psi\otimes\phi_\varepsilon\rangle| &\le \int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} |\mathbf{U}(x,t)||\psi(x)|\phi_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} |T(\mathbf{U}^t)(x,0)||\psi(x)|\phi_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} |T(\mathbf{U}^t)(x,0)||\psi(x)|\mathrm{d}x\,\phi_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t \\
&\le \int_0^\infty \|T(\mathbf{U}^t)(\,\cdot\,,0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\|\psi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}\phi_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \|T(\mathbf{U}^t)\|_{L^p(\Gamma)}\|\psi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}\phi_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t \\
&\le \int_0^\infty C\|\mathbf{U}^t\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^{n+1}_+)}\|\psi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}\phi_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t \\
&\le \int_0^\infty C\|\mathbf{U}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^{n+1}_+)}\|\psi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}\phi_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t = C\|\mathbf{U}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^{n+1}_+)}\|\psi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

para quaisquer $\mathbf{U} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\varepsilon > 0$.
Dadas $\mathbf{U} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\delta > 0$, seja $\Phi \in E$ tal que

$$\|\mathbf{U}-\Phi\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} < \frac{\delta}{4C\|\psi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}},$$

segue que

$$\begin{aligned}
&|\langle \mathbf{U}, \psi\otimes\phi_\varepsilon\rangle - \langle T\mathbf{U}(\,\cdot\,,0),\psi\rangle| \\
&\le |\langle \mathbf{U}-\Phi, \psi\otimes\phi_\varepsilon\rangle| + |\langle \Phi, \psi\otimes\phi_\varepsilon\rangle - \langle \Phi(\,\cdot\,,0),\psi\rangle| + |\langle T\mathbf{U}(\,\cdot\,,0)-\Phi(\,\cdot\,,0),\psi\rangle| \\
&\le C\|\mathbf{U}-\Phi\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^{n+1}_+)}\|\psi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} + |\langle \Phi, \psi\otimes\phi_\varepsilon\rangle - \langle \Phi(\,\cdot\,,0),\psi\rangle| + \|T\mathbf{U}-T\Phi\|_{L^p(\Gamma)}\|\psi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \\
&\le 2C\|\mathbf{U}-\Phi\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^{n+1}_+)}\|\psi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} + |\langle \Phi, \psi\otimes\phi_\varepsilon\rangle - \langle \Phi(\,\cdot\,,0),\psi\rangle| \\
&\le \frac{\delta}{2} + |\langle \Phi, \psi\otimes\phi_\varepsilon\rangle - \langle \Phi(\,\cdot\,,0),\psi\rangle|.
\end{aligned}$$

para todo $\varepsilon > 0$. Então existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$|\langle \mathbf{U}, \psi\otimes\phi_\varepsilon\rangle - \langle T\mathbf{U}(\,\cdot\,,0),\psi\rangle| < \delta$$

para todo $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$. Logo

$$|\langle \mathbf{U}, \psi\otimes\phi_\varepsilon\rangle - \langle T\mathbf{U}(\,\cdot\,,0),\psi\rangle| \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} 0.$$

Portanto, $\mathbf{U} \in \mathscr{D}'_\Gamma(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ e $\mathbf{U}_\Gamma = T\mathbf{U}(\,\cdot\,,0)$.

Além disso

$$\begin{aligned} p_{(\Phi,\psi)}(\mathbf{U}) &= |\langle \mathbf{U}, \Phi\rangle| + \sup_{\varepsilon\in(0,1]} |\langle \mathbf{U}, \psi\otimes\phi_\varepsilon\rangle| \\ &\leq \|\mathbf{U}\|_{L^p(\mathbb{R}^{n+1}_+)} \|\Phi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} + C\|\mathbf{U}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} \|\psi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \Big(\|\Phi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} + C\|\psi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}\Big) \|\mathbf{U}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^{n+1}_+)}, \end{aligned}$$

para quaisquer $\mathbf{U} \in \mathscr{D}'_\Gamma(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, $\Phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, consequentemente, a inclusão $W^{1,p}(\mathbb{R}^{n+1}_+) \subset \mathscr{D}'_\Gamma(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ é contínua. □

Nem todas as distribuições em $\mathscr{D}'_\Gamma(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ pertencem a $W^{1,p}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, na verdade, como mostra o próximo exemplo, as distribuições em $\mathscr{D}'_\Gamma(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ podem ser muito singulares. No entanto, mesmo funções em $C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ podem não estar em $\mathscr{D}'_\Gamma(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ (como veremos no Exemplo 22), já que o fato de $u \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ pertencer ou não a $\mathscr{D}'_\Gamma(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ depende do comportamento de u a medida que os pontos em $\mathbb{R}^{n+1}_+$ se aproximam da fronteira Γ.

Exemplo 21. Fixado $y \in \mathbb{R}^n$, consideremos a distribuição $\delta_{\mathbb{R}(y,1)} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ definida por

$$\big\langle \delta_{\mathbb{R}(y,1)}, \Phi \big\rangle = \int_{\mathbb{R}} \Phi(ty,t)\,\mathrm{d}t$$

para toda $\Phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$. Temos que $\delta_{\mathbb{R}(y,1)} \in \mathscr{D}'_\Gamma(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ e $\big(\delta_{\mathbb{R}(y,1)}\big)_\Gamma = \delta$.

De fato, dada $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\begin{aligned} \big|\big\langle \delta_{\mathbb{R}(y,1)}, \psi\otimes\phi_\varepsilon \big\rangle - \langle \delta, \psi\rangle\big| &= \left|\int_{\mathbb{R}} \psi(ty)\phi_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t - \psi(0)\right| = \left|\int_{\mathbb{R}} [\psi(ty)-\psi(0)]\phi_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |\psi(ty)-\psi(0)|\phi_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\varepsilon |\psi(ty)-\psi(0)|\phi_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} 0. \end{aligned}$$

Exemplo 22. Seja $F : \mathbb{R}^{n+1}_+ \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$F(x,t) = \frac{1}{t}$$

para todo $(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}_+$. Seja $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\int \psi = 1$, temos que

$$\begin{aligned} \langle F, \psi\otimes\phi_\varepsilon\rangle &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\psi(x)\phi_\varepsilon(t)}{t}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{\phi_\varepsilon(t)}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\varepsilon \frac{\phi_\varepsilon(t)}{t}\,\mathrm{d}t \geq \int_0^\varepsilon \frac{\phi_\varepsilon(t)}{\varepsilon}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} \infty. \end{aligned}$$

Portanto $F \notin \mathscr{D}'_\Gamma(\mathbb{R}^{n+1}_+)$.

4.3.2 O traço sobre $\partial\Omega$ de distribuições em $\mathscr{D}'(\Omega)$

Inspirados pela Definição 41, definiremos nessa seção o espaço das distribuições em $\mathscr{D}'(\Omega)$ com traço em $\partial\Omega$, que será denotado por $\mathscr{D}'_{\partial\Omega}(\Omega)$. Apresentaremos antes alguns conceitos e notações que serão utilizados.

Definição 42. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um conjunto aberto. Dizemos que Ω tem fronteira suave se $\partial\Omega$ é uma subvariedade suave de $\mathbb{R}^{n+1}$. Denotaremos o atlas maximal de $\partial\Omega$ simplesmente por $\mathscr{A}$ (omitindo a dependência de Ω).

Definição 43. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um aberto com fronteira suave. Dada $h \in \mathscr{A}$, consideremos $H_h^0 : U_h \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+1}$ a aplicação definida por

$$H_h^0(x,t) = h^{-1}(x) - t\nu(h^{-1}(x)),$$

em que $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ é a aplicação que associa a cada $y \in \partial\Omega$ o vetor unitário normal a $\partial\Omega$ no ponto y e que aponta para fora de Ω.
Denotemos por $\mathscr{A}_0$ o conjunto formado pelas cartas $h \in \mathscr{A}$ tais que existe um intervalo I satisfazendo as seguintes propriedades:

(i) I é aberto, $0 \in I$,

(ii) $H_h^0(U_h \times I)$ é aberto em $\mathbb{R}^{n+1}$,

(iii) $H_h^0 : U_h \times I \to H_h^0(U_h \times I)$ é um difeomorfismo de classe C^∞,

(iv) $H_h^0(U_h \times \{0\}) = H_h^0(U_h \times I) \cap \partial\Omega$ e $H_h^0(U_h \times I_+) = H_h^0(U_h \times I) \cap \Omega$, sendo $I_+ = I \cap (0,\infty)$.

Sejam $h \in \mathscr{A}_0$ e I_h a união de todos os intervalos I que verificam as propriedades acima, segue que I_h ainda verifica tais propriedades. Denotaremos por W_h o conjunto aberto $H_h^0(U_h \times I_h)$ e por $H_h : U_h \times I_h \to W_h$ o difeomorfismo de classe C^∞ definido pela restrição de H_h^0 a $U_h \times I_h$.

Exemplo 23. Seja $B := B(0,1) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a bola unitária centrada na origem, neste caso temos que $\mathscr{A}_0 = \mathscr{A}$. Além disso, para toda $h \in \mathscr{A}$, temos que $I_h = (-\infty, 1)$.
De fato, como $\nu(w) = w$ para todo $w \in \partial B$, dada $h \in \mathscr{A}$ temos que $H_h^0 : U_h \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+1}$ é dada por

$$H_h^0(x,t) = h^{-1}(x) - t\nu(h^{-1}(x)) = h^{-1}(x) - th^{-1}(x) = (1-t)h^{-1}(x).$$

Se $(x_1,t_1),(x_2,t_2) \in U_h \times (-\infty,1)$ são tais que $H_h^0(x_1,t_1) = H_h^0(x_2,t_2)$, então

$$1 - t_1 = \left|H_h^0(x_1,t_1)\right| = \left|H_h^0(x_2,t_2)\right| = 1 - t_2$$

logo $t_1 = t_2$. Assim temos que

$$h^{-1}(x_1) = (1-t_1)^{-1}H_h^0(x_1,t_1) = (1-t_2)^{-1}H_h^0(x_1,t_1) = (1-t_2)^{-1}H_h^0(x_2,t_2) = h^{-1}(x_2)$$

e então $x_1 = x_2$. Logo $(x_1,t_1) = (x_2,t_2)$ e portanto H_h^0 é injetiva sobre $U_h \times (-\infty,1)$.
Por outro lado, dados $(x,t) \in U_h \times (-\infty,1)$ e $j \in \{1,2,\dots,n\}$, temos que $\partial_{x_j}H_h^0(x,t) = (1-t)\partial_j h^{-1}(x)$, logo como $h \in \mathscr{A}$ temos que os vetores

$$\partial_{x_1}H_h^0(x,t), \partial_{x_2}H_h^0(x,t), \dots, \partial_{x_n}H_h^0(x,t)$$

são linearmente independentes. Além disso, como $\partial_t H_h^0(x,t) = -h^{-1}(x) = -\nu(h^{-1}(x))$ é não nulo e normal a ∂B em $h^{-1}(x)$, temos que $\partial_t H_h^0(x,t)$ é normal a $\partial_j h^{-1}(x)$ e então $\partial_t H_h^0(x,t)$ é normal a $\partial_{x_j}H_h^0(x,t)$ para todo $j \in \{1,2,\dots,n\}$. Logo, sendo $\partial_t H_h^0(x,t) = -h^{-1}(x)$ não nulo, temos que os vetores

$$\partial_{x_1}H_h^0(x,t), \partial_{x_2}H_h^0(x,t), \dots, \partial_{x_n}H_h^0(x,t) \text{ e } \partial_t H_h^0(x,t)$$

são linearmente independentes e então $(dH_h^0)(x,t) : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ é bijetivo. Segue do Teorema da Aplicação Inversa (ver (LIMA, 2010)) que $W_h := H_h^0(U_h \times (-\infty,1))$ é aberto e $H_h^0 : U_h \times (-\infty,1) \to W_h$ é um difeomorfismo de classe C^∞. Temos também que $H_h^0(U_h \times \{0\}) = H_h^0(U_h \times (-\infty,1)) \cap \partial B$ e $H_h^0(U_h \times (0,1)) = H_h^0(U_h \times (-\infty,1)) \cap B$. Portanto, $h \in \mathscr{A}_0$ e $(-\infty,1) \subset I_h$.

Por outro lado $1 \notin I_h$, pois caso contrário teríamos que

$$H_h(x,1) = H_h^0(x,t) = 0$$

para todo $x \in U_h$, logo $H_h : U_h \times I \to \mathbb{R}^{n+1}$ não seria injetiva, o que contraria $I = I_h$ satisfazer a propriedade (iii)da definição anterior. Logo temos que $I_h \subset (-\infty,1)$.

Proposição 37. Seja Ω um aberto com fronteira suave. Temos que $\bigcup_{h\in\mathscr{A}_0} V_h = \partial\Omega$, logo $\mathscr{A}_0$ é um atlas sobre $\partial\Omega$.

Demonstração. Dado $y \in \partial\Omega$, como Ω é de classe C^∞, existe $W_0 \subset \mathbb{R}^{n+1}$ aberto contendo y e $H_0 : B(0,1) \times (-1,1) \to W_0$ um difeomorfismo de classe C^∞ tal que $H_0(0,0) = y$, $H_0(B(0,1) \times \{0\}) = W_0 \cap \partial\Omega$ e $H_0(B(0,1) \times I_+) = W_0 \cap \Omega$.
Sejam $g : B(0,1) \to W_0 \cap \partial\Omega$ definida por

$$g(x) = H_0(x,0)$$

para todo $x \in W_0$ e $h := g^{-1}$, temos que $h \in \mathscr{A}$. Seja $H : B(0,1) \times (-1,1) \to \mathbb{R}^{n+1}$ definida por

$$H(x,t) = g(x) - t\nu(g(x))$$

para todo $(x,t) \in B(0,1) \times (-1,1)$. Como as aplicações $g : B(0,1) \to W_0 \cap \partial\Omega$, $\partial\Omega \ni w \mapsto w \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbb{R}^{n+1} \ni (x,t) \mapsto x \in \mathbb{R}^n$ e $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ são de classe C^∞, segue que H é de classe

C^∞. Além disso, temos que $\partial_{x_j}H(0,0) = \partial_{x_j}g(0) = \partial_{x_j}H_0(0,0)$ para todo $j \in \{1,2,...,n\}$ e $\partial_t H(0,0) = -\nu(y)$. Assim, como $\partial_{x_1}H_0(0,0), \partial_{x_2}H_0(0,0), ..., \partial_{x_n}H_0(0,0)$ são linearmente independentes e

$$\nu(y) \cdot \partial_{x_j}g(0) = 0$$

para todo $j \in \{1,2,...,n\}$, segue que $\partial_{x_1}H_0(0,0), \partial_{x_2}H_0(0,0), ..., \partial_{x_n}H_0(0,0)$ e $-\nu(y)$ são linearmente independentes. Pelo Teorema da Aplicação Inversa, existe $0 < \delta_0 < 1$ tal que $W_1 := H_0(B(0,\delta_0) \times (-\delta_0, \delta_0))$ é aberto e $H : H^{-1}(W_1) \to W_1$ é um difeomorfismo de classe C^∞.

É imediato que $H(H^{-1}(W_1) \cap \Gamma) \subset W_1 \cap \partial\Omega$. Por outro lado, como

$$H(B(0,\delta_0) \times \{0\}) = H_0(B(0,\delta_0) \times \{0\}) \subset H_0(B(0,\delta_0) \times (-\delta_0, \delta_0)) = W_1,$$

segue que $B(0,\delta_0) \times \{0\} \subset H^{-1}(W_1)$. Logo $B(0,\delta_0) \times \{0\} \subset H^{-1}(W_1) \cap \Gamma$, e então

$$\begin{aligned} W_1 \cap \partial\Omega &= H_0(B(0,\delta_0) \times (-\delta_0,\delta_0)) \cap \partial\Omega = H_0(B(0,\delta_0) \times \{0\}) \\ &= H(B(0,\delta_0) \times \{0\}) \subset H(H^{-1}(W_1) \cap \Gamma). \end{aligned}$$

Portanto,

$$H(H^{-1}(W_1) \cap \Gamma) = W_1 \cap \partial\Omega. \tag{4.9}$$

Seja $0 < \delta < 1$ tal que $B(0,\delta) \times (-\delta,\delta) \subset H^{-1}(W_1)$, como $H : H^{-1}(W_1) \to W_1$ é um difeomorfismo de classe C^∞, segue que $H(B(0,\delta) \times (-\delta,\delta))$ é aberto, $H : B(0,\delta) \times (-\delta,\delta) \to H(B(0,\delta) \times (-\delta,\delta))$ é um difeomorfismo de classe C^∞ e de (4.9) temos que

$$H(B(0,\delta) \times \{0\}) = H(B(0,\delta) \times (-\delta,\delta)) \cap \partial\Omega.$$

Como $H(B(0,\delta) \times (0,\delta))$ é conexo e está contido em $\Omega \cup \left(\mathbb{R}^{n+1} \backslash \overline{\Omega}\right)$, segue que $H(B(0,\delta) \times (0,\delta)) \subset \Omega$ ou $H(B(0,\delta) \times (0,\delta)) \subset \left(\mathbb{R}^{n+1} \backslash \overline{\Omega}\right)$, logo como $\nu(y)$ é o vetor unitário normal a $\partial\Omega$ em y que aponta para fora de Ω, temos que $H(B(0,\delta) \times (0,\delta)) \subset \Omega$. Analogamente, temos que $H(B(0,\delta) \times (-\delta,0)) \subset \Omega$ ou $H(B(0,\delta) \times (-\delta,0)) \subset \left(\mathbb{R}^{n+1} \backslash \overline{\Omega}\right)$, logo como $H(B(0,\delta) \times (-\delta,\delta)) \cap \left(\mathbb{R}^{n+1} \backslash \overline{\Omega}\right) \neq \emptyset$, segue que $H(B(0,\delta) \times (-\delta,0)) \subset \left(\mathbb{R}^{n+1} \backslash \overline{\Omega}\right)$. Portanto, $H(B(0,\delta) \times (0,\delta)) = H(B(0,\delta) \times (\delta,\delta)) \cap \Omega$. □

Definição 44. Definiremos o espaço das distribuições de Ω com traço em $\partial\Omega$, o qual denotaremos por $\mathscr{D}'_{\partial\Omega}(\Omega)$, como sendo o conjunto das distribuições $\mathbf{U} \in \mathscr{D}'(\Omega)$, tais que para quaisquer $h \in \mathscr{A}_0$ e $\psi \in C_c^\infty(U_h)$ o limite

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left\langle \mathbf{U}|_{W_h \cap \Omega} \circ (H_h)|_{U_h \times I_h^+}, \psi \otimes \phi_\varepsilon \right\rangle$$

existe, em que $I_h^+ = I_h \cap (0,\infty)$. Em outras palavras, temos que $\mathbf{U} \in \mathscr{D}'_{\partial\Omega}(\Omega)$ se, e somente se, para toda $h \in \mathscr{A}_0$ tivermos que $\mathbf{U}|_{W_h \cap \Omega} \circ (H_h)|_{U_h \times I_h^+} \in \mathscr{D}'_{U_h \times \{0\}}(U_h \times I_h^+)$.

Dadas $\mathbf{U} \in \mathscr{D}'_{\partial\Omega}(\Omega)$ e $h \in \mathscr{A}_0$, denotaremos por $\mathbf{U}^h_{\partial\Omega}$ o funcional linear sobre $C^\infty_c(U_h)$ definido por

$$\left\langle \mathbf{U}^h_{\partial\Omega}, \psi \right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left\langle \mathbf{U}|_{W_h\cap\Omega} \circ (H_h)|_{U_h\times I_h^+}, \psi \otimes \phi_\varepsilon \right\rangle$$

para toda $\psi \in C^\infty_c(U_h)$.

Muniremos o espaço $\mathscr{D}'_{\partial\Omega}(\Omega)$ com a topologia gerada pela família de seminormas

$$\left\{ p_{(\Phi,h,\psi)} : \Phi \in C^\infty_c(\Omega), h \in \mathscr{A}_0 \text{ e } \psi \in C^\infty_c(U_h) \right\},$$

onde

$$p_{(\Phi,h,\psi)}(\mathbf{U}) = |\langle \mathbf{U}, \Phi\rangle| + \sup\left\{ \left| \left\langle \mathbf{U}|_{W_h\cap\Omega} \circ (H_h)|_{U_h\times I_h^+}, \psi \otimes \phi_\varepsilon \right\rangle \right| : 0 < \varepsilon \le \min\{1, \sup I_h^+\} \right\}$$

para toda $\mathbf{U} \in \mathscr{D}'_{\partial\Omega}(\Omega)$.

Proposição 38. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um aberto com fronteira suave, $\mathbf{U} \in \mathscr{D}'_{\partial\Omega}(\Omega)$ e $h \in \mathscr{A}_0$. Temos que $\mathbf{U}^h_{\partial\Omega} \in \mathscr{D}'(U_h)$. Além disso, a família $\{\mathbf{U}^h_{\partial\Omega}\}_{h\in\mathscr{A}_0}$ se estende, de maneira única, a uma família $\{\mathbf{U}^h_{\partial\Omega}\}_{h\in\mathscr{A}}$ em $\mathscr{D}'(\partial\Omega)$.

Demonstração. Segue diretamente da definição anterior que $\mathbf{U}|_{W_h\cap\Omega} \circ (H_h)|_{U_h\times I_h^+} \in \mathscr{D}'_{U_h\times\{0\}}(U_h \times I_h^+)$ e $\mathbf{U}^h_{\partial\Omega}$ é o traço de $\mathbf{U}|_{W_h\cap\Omega} \circ (H_h)|_{U_h\times I_h^+}$ em $U_h \times \{0\}$. Logo, pela Proposição 32, segue que $\mathbf{U}^h_{\partial\Omega} \in \mathscr{D}'(U_h)$.

Como $\mathscr{A}_0$ é um atlas sobre $\partial\Omega$, para provar a segunda afirmação é suficiente (e necessário) mostrar que dadas $h_1, h_2 \in \mathscr{A}_0$, tais que $V_{h_1} \cap V_{h_2} \neq \emptyset$, temos que

$$\mathbf{U}^{h_1}_{\partial\Omega} = \mathbf{U}^{h_2}_{\partial\Omega} \circ (h_2 \circ h_1^{-1})$$

em $h_1(V_{h_1} \cap V_{h_2})$ (ver (HÖRMANDER, 1980), Teorema 6.3.4). De fato, dada $\psi \in C^\infty_c(h_1(V_{h_1} \cap V_{h_2}))$, temos que

$$\begin{aligned}
&\left\langle \mathbf{U}^{h_2}_{\partial\Omega} \circ (h_2 \circ h_1^{-1}), \psi \right\rangle = \left\langle \mathbf{U}^{h_2}_{\partial\Omega}, \psi \circ (h_1 \circ h_2^{-1}) \left|\det\left[\operatorname{Jac}\left(h_1 \circ h_2^{-1}\right)\right]\right| \right\rangle \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left\langle \mathbf{U}|_{W_{h_2}\cap\Omega} \circ (H_{h_2})|_{U_{h_2}\times I_{h_2}^+}, \left(\psi \circ (h_1 \circ h_2^{-1}) \left|\det\left[\operatorname{Jac}\left(h_1 \circ h_2^{-1}\right)\right]\right|\right) \otimes \phi_\varepsilon \right\rangle \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left\langle \mathbf{U}|_{W_{h_2}}, \left[\left(\psi \circ (h_1 \circ h_2^{-1}) \left|\det\left[\operatorname{Jac}\left(h_1 \circ h_2^{-1}\right)\right]\right|\right) \otimes \phi_\varepsilon\right] \circ H_{h_2}^{-1} \det|\operatorname{Jac}(H_{h_2}^{-1})| \right\rangle \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left\langle \mathbf{U}, \left[\left(\psi \circ (h_1 \circ h_2^{-1}) \left|\det\left[\operatorname{Jac}\left(h_1 \circ h_2^{-1}\right)\right]\right|\right) \otimes \phi_\varepsilon\right] \circ (H_{h_2}^{-1} \circ H_{h_1}) \circ H_{h_1}^{-1} \det|\operatorname{Jac}(H_{h_2}^{-1})| \right\rangle.
\end{aligned}$$

Note que $H_{h_2}^{-1} \circ H_{h_1} : h_1(V_{h_1} \cap V_{h_2}) \times (I_{h_1} \cap I_{h_2}) \to h_2(V_{h_1} \cap V_{h_2}) \times (I_{h_1} \cap I_{h_2})$ é dada por

$$H_{h_2}^{-1} \circ H_{h_1}(x,t) = \left(h_2 \circ h_1^{-1}(x), t\right)$$

para todo $(x,t) \in h_1(V_{h_1} \cap V_{h_2}) \times (I_{h_1} \cap I_{h_2})$, logo

$$\begin{aligned}
\det\left[\operatorname{Jac}(H_{h_2}^{-1})(H_{h_1}(x,t))\right] \det\left[\operatorname{Jac} H_{h_1}(x,t)\right] &= \det\left[\operatorname{Jac}(H_{h_2}^{-1} \circ H_{h_1})(x,t)\right] = \det\left[\operatorname{Jac}(h_2 \circ h_1^{-1})(x)\right] \\
&= \left(\det\left[\operatorname{Jac}(h_1 \circ h_2^{-1})(h_2 \circ h_1^{-1}(x))\right]\right)^{-1}
\end{aligned}$$

para todo $(x,t) \in h_1(V_{h_1} \cap V_{h_2}) \times (I_{h_1} \cap I_{h_2})$. Então

$$\left|\det\left[\operatorname{Jac}(H_{h_2}^{-1})(H_{h_1}(x,t))\right]\right| \left|\det\left[\operatorname{Jac}(h_1 \circ h_2^{-1})(h_2 \circ h_1^{-1}(x))\right]\right| = \left|\det\left[\operatorname{Jac} H_{h_1}(x,t)\right]\right|^{-1}$$

para todo $(x,t) \in h_1(V_{h_1} \cap V_{h_2}) \times (I_{h_1} \cap I_{h_2})$ e portanto

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left\langle \mathbf{U}, \left[\left(\psi \left|\det\left[\operatorname{Jac}\left(h_1 \circ h_2^{-1}\right) \circ (h_2 \circ h_1^{-1})\right]\right|\right) \otimes \phi_\varepsilon\right] \circ H_{h_1}^{-1} \left|\det[\operatorname{Jac}(H_{h_2}^{-1})]\right| \right\rangle \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left\langle \mathbf{U}, \left[\left(\psi \left|\det\left[\operatorname{Jac}\left(h_1 \circ h_2^{-1}\right) \circ (h_2 \circ h_1^{-1})\right]\right|\right) \otimes \phi_\varepsilon \left|\det[\operatorname{Jac}(H_{h_2}^{-1}) \circ H_{h_1}]\right|\right] \circ H_{h_1}^{-1} \right\rangle \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left\langle \mathbf{U}|_{W_{h_1} \cap \Omega}, \left[\psi \otimes \phi_\varepsilon \left|\det\left[\operatorname{Jac} H_{h_1}\right]\right|^{-1}\right] \circ H_{h_1}^{-1} \right\rangle \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left\langle \mathbf{U}|_{W_{h_1} \cap \Omega} \circ (H_{h_1})|_{U_{h_1} \times I_{h_1}^+}, \psi \otimes \phi_\varepsilon \right\rangle = \left\langle \mathbf{U}_{\partial\Omega}^{h_1}, \psi \right\rangle,
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

Definição 45. Seja $\mathbf{U} \in \mathscr{D}'_{\partial\Omega}(\Omega)$, denotaremos a distribuição $\{\mathbf{U}_{\partial\Omega}^h\}_{h \in \mathscr{A}} \in \mathscr{D}'(\partial\Omega)$ obtida na proposição anterior por $\mathbf{U}_{\partial\Omega}$ e diremos que $\mathbf{U}_{\partial\Omega}$ é o traço de $\mathbf{U}$ em $\partial\Omega$.

Teorema 16. $\mathscr{D}'_{\partial\Omega}(\Omega)$ é um espaço vetorial topológico localmente convexo, Hausdorff e sequencialmente completo.

Demonstração. Seja $(\mathbf{U}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $\mathscr{D}'_{\partial\Omega}(\Omega)$, como $\mathscr{D}'(\Omega)$ é sequencialmente completo, temos que existe $\mathbf{U} \in \mathscr{D}'(\Omega)$ tal que $\mathbf{U}_k \xrightarrow[k \to \infty]{\mathscr{D}'(\Omega)} \mathbf{U}$. Dada $h \in \mathscr{A}_0$, temos que $(\mathbf{U}_k|_{W_h \cap \Omega} \circ (H_h)|_{U_h \times I_h^+})_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathscr{D}'_{U_h \times \{0\}}(U_h \times I_h^+)$, logo pela demonstração do Teorema 15, temos que $\mathbf{U}|_{W_h \cap \Omega} \circ (H_h)|_{U_h \times I_h^+} \in \mathscr{D}'_{U_h \times \{0\}}(U_h \times I_h^+)$ e $\mathbf{U}_k|_{W_h \cap \Omega} \circ (H_h)|_{U_h \times I_h^+} \xrightarrow[k \to \infty]{\mathscr{D}'_{U_h \times \{0\}}(U_h \times I_h^+)} \mathbf{U}|_{W_h \cap \Omega} \circ (H_h)|_{U_h \times I_h^+}$. Portanto $\mathbf{U} \in \mathscr{D}'_{\partial\Omega}(\Omega)$ e $\mathbf{U}_k \xrightarrow[k \to \infty]{\mathscr{D}'_{\partial\Omega}(\Omega)} \mathbf{U}$. □

4.4 Problema de Dirichlet no disco

Consideremos a bola unitária centrada na origem $B := B(0,1) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e $f \in C(\partial B)$. Como mostrado em (GILBARG; TRUDINGER, 2001), sejam ω_{n+1} a medida de Lebesgue de B e $F : \overline{B} \to \mathbb{C}$ a função definida por

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - |x|^2}{(n+1)\omega_{n+1}} \displaystyle\int_{\partial B} \frac{f(y)}{|x-y|^{n+1}} \, \mathrm{d}S_y & \text{se} \quad x \in B \\ f(x) & \text{se} \quad x \in \partial B, \end{cases}$$

temos que $F \in C^2(B) \cap C\left(\overline{B}\right)$ e $\Delta F = 0$ em B.

Desta forma F resolve o problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta F = 0 & \text{em} \quad B \\ F = f & \text{em} \quad \partial B. \end{cases} \tag{4.10}$$

Olhando f como um funcional linear contínuo sobre $C^\infty(\partial B)$, podemos exprimir F como:

$$F(x) = \frac{1-|x|^2}{(n+1)\omega_{n+1}} \left\langle f, \frac{1}{|x-\cdot|^{n+1}} \right\rangle, \ x \in B.$$

Notemos que a expressão acima ainda faz sentido quando $f \in \mathscr{D}'(\partial B)$, o que torna natural querer provar que, nesse caso, a equação (4.10) continua satisfeita, se interpretarmos a igualdade $F = f$ em ∂B como sendo $F_{\partial B} = f$, ou seja, entendendo-a como o traço de F em ∂B sendo igual a f. Isso constitui a nossa próxima tarefa e, também, a principal aplicação dos resultados do nosso trabalho.

A Proposição seguinte, que será usada na demonstração do Lema 4, dá uma codição suficiente (e alternativa) para a demonstração da convergência das derivadas de um net no espaço das funções contínuas.

A importância do Lema 4 será evidenciada na demonstração do Teorema 17.

Proposição 39. Sejam M uma variedade suave de dimensão n, $\mathscr{A}$ o atlas maximal de M, $V \subset M$ aberto, $h_j : V \to U_j$ uma carta em $\mathscr{A}$ para $j = 0, 1, \ldots, n$ e $v_j \in \mathbb{R}^n$ para $j = 1, 2, \ldots, n$, tais que as derivadas direcionais

$$\frac{\partial\left(h_1^{-1}\right)}{\partial v_1}(h_1(y)), \frac{\partial\left(h_2^{-1}\right)}{\partial v_2}(h_2(y)), \ldots, \frac{\partial\left(h_n^{-1}\right)}{\partial v_n}(h_n(y))$$

são linearmente independentes para todo $y \in V$.

Sejam $m \in \mathbb{Z}_+$ e $(f_\alpha)_{\alpha\in\Upsilon}$ um net em $C^\infty(V)$, tal que o net $\left(f_\alpha \circ h_0^{-1}\right)_{\alpha\in\Upsilon}$ converge em $C^m(U_0)$.

Suponhamos também que o net $\left(\frac{\partial}{\partial v_j}\left(f_\alpha \circ h_j^{-1}\right)\right)_{\alpha\in\Upsilon}$ converge em $C^m(U_j)$ para todo $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
Então, $\left(f_\alpha \circ h_0^{-1}\right)_{\alpha\in\Upsilon}$ converge em $C^{m+1}(U_0)$.

Demonstração. Fixemos $k \in \{1, \ldots, n\}$ e $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$ tal que $|\beta| \leq m$. Dados $x \in U_0$, como

$$\frac{\partial\left(h_1^{-1}\right)}{\partial v_1}(h_1 \circ h_0^{-1}(x)), \frac{\partial\left(h_2^{-1}\right)}{\partial v_2}(h_2 \circ h_0^{-1}(x)), \ldots, \frac{\partial\left(h_n^{-1}\right)}{\partial v_n}(h_n \circ h_0^{-1}(x))$$

são linearmente independentes, então

$$(\mathrm{d}h_0)_{h_0^{-1}(x)}\left(\frac{\partial\left(h_1^{-1}\right)}{\partial v_1}(h_1 \circ h_0^{-1}(x))\right), \ldots, (\mathrm{d}h_0)_{h_0^{-1}(x)}\left(\frac{\partial\left(h_n^{-1}\right)}{\partial v_n}(h_n \circ h_0^{-1}(x))\right)$$

são linearmente independentes, logo existem únicos $a_1(x),\dots,a_n(x)$ em $\mathbb{R}$ tais que

$$
\begin{aligned}
e_k &= \sum_{j=1}^{n} a_j(x)(\mathrm{d}h_0)_{h_0^{-1}(x)}\left(\frac{\partial\left(h_j^{-1}\right)}{\partial v_1}(h_j\circ h_0^{-1}(x))\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n} a_j(x)\frac{\partial\left(h_0\circ h_j^{-1}\right)}{\partial v_j}\left(h_j\circ h_0^{-1}(x)\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n} a_j(x)\left[\mathrm{Jac}\left(h_0\circ h_j^{-1}\right)\left(h_j\circ h_0^{-1}(x)\right)\right]v_j.
\end{aligned}
$$

As funções $a_j : U_0 \to \mathbb{R}$ definidas acima para $j = 1,\dots,n$ são de classe C^∞, já que

$$
\begin{bmatrix} a_1(x)\\ a_2(x)\\ \vdots\\ a_n(x)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[\mathrm{Jac}\left(h_0\circ h_1^{-1}\right)\left(h_1\circ h_0^{-1}(x)\right)\right]v_1 & \cdots & \left[\mathrm{Jac}\left(h_0\circ h_n^{-1}\right)\left(h_n\circ h_0^{-1}(x)\right)\right]v_n \end{bmatrix}^{-1} e_k
$$

e a inversão de matrizes é uma operação contínua de $\{A\in\mathbb{R}^{n^2} : \det(A)\neq 0\}$ em $\mathbb{R}^{n^2}$.
Por outro lado, dado $j\in\{1,2,\dots,n\}$, segue por indução sobre $|\beta|$, que existem funções $b_j^\gamma \in C^\infty(U_0)$ para $\gamma\in\mathbb{Z}_+^n$ tal que $|\gamma|\le m$, de modo que

$$
\partial^\beta\left(f\circ h_0^{-1}\right) = \partial^\beta\left(f\circ h_j^{-1}\circ\left(h_j\circ h_0^{-1}\right)\right) = \sum_{|\gamma|\le m} b_j^\gamma\partial^\gamma\left(f\circ h_j^{-1}\right)\circ\left(h_j\circ h_0^{-1}\right)
$$

para toda $f\in C^\infty(V)$. Temos então que

$$
\begin{aligned}
&\partial^{e_k+\beta}\left(f\circ h_0^{-1}\right) = \partial^{e_k}\left[\partial^\beta\left(f\circ h_0^{-1}\right)\right] = \left[\nabla\left(\partial^\beta\left(f\circ h_0^{-1}\right)\right)\right]e_k\\
&= \left[\nabla\left(\partial^\beta\left(f\circ h_0^{-1}\right)\right)\right]\left[\sum_{j=1}^{n} a_j\left[\mathrm{Jac}\left(h_0\circ h_j^{-1}\right)\left(h_j\circ h_0^{-1}\right)\right]v_j\right]\\
&= \sum_{j=1}^{n} a_j\left[\nabla\left(\partial^\beta\left(f\circ h_0^{-1}\right)\right)\right]\left[\left[\mathrm{Jac}\left(h_0\circ h_j^{-1}\right)\left(h_j\circ h_0^{-1}\right)\right]v_j\right]\\
&= \sum_{j=1}^{n} a_j\left[\nabla\left(\partial^\beta\left(f\circ h_0^{-1}\right)\left(h_0\circ h_j^{-1}\right)\right)\circ\left(h_j\circ h_0^{-1}\right)\right]v_j\\
&= \sum_{j=1}^{n} a_j\left[\nabla\left(\sum_{|\gamma|\le m} b_j^\gamma\circ h_0\circ h_j^{-1}\left[\partial^\gamma\left(f\circ h_j^{-1}\right)\right]\right)\circ\left(h_j\circ h_0^{-1}\right)\right]v_j\\
&= \sum_{j=1}^{n} a_j\frac{\partial}{\partial v_j}\left(\sum_{|\gamma|\le m} b_j^\gamma\circ h_0\circ h_j^{-1}\left[\partial^\gamma\left(f\circ h_j^{-1}\right)\right]\right)\circ\left(h_j\circ h_0^{-1}\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{|\gamma|\le m} a_j\left(\frac{\partial}{\partial v_j}\left(b_j^\gamma\circ h_0\circ h_j^{-1}\right)\partial^\gamma\left(f\circ h_j^{-1}\right) + b_j^\gamma\circ h_0\circ h_j^{-1}\left[\partial^\gamma\left(\frac{\partial}{\partial v_j}\left(f\circ h_j^{-1}\right)\right)\right]\right)\circ\left(h_j\circ h_0^{-1}\right)
\end{aligned}
$$

para toda $f\in C^\infty(V)$. Aplicando a igualdade obtida acima para $f = f_{\alpha_1} - f_{\alpha_2}$, temos que dado $K\subset U_0$ compacto

$$
\sup_K\left|\partial^{e_k+\beta}\left(f_{\alpha_1}\circ h_0^{-1}\right) - \partial^{e_k+\beta}\left(f_{\alpha_2}\circ h_0^{-1}\right)\right| \xrightarrow[(\alpha_1,\alpha_2)\in\Upsilon\times\Upsilon]{} 0.
$$

Portanto o net $\left(\partial^{e_k+\beta}\left(f_\alpha \circ h_0^{-1}\right)\right)_{\alpha\in\Upsilon}$ é de Cauchy em $C(U_0)$ e então, como $C(U_0)$ é completo, tal net é convergente em $C(U_0)$. Como $k \in \{1,\ldots,n\}$ e $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$ tal que $|\beta| \leq m$ foram tomados arbitrariamente o resultado segue. □

Lema 4. Consideremos as notações apresentadas nas Definições 42 e 43 para o caso em que $\Omega = B$ é a bola unitária de $\mathbb{R}^{n+1}$ (ver o Exemplo 23). Dados $h \in \mathscr{A}$, $\psi \in C_c^\infty(U_h)$ e $\varepsilon \in (0,1]$, consideremos a função $f_{(h,\psi,\varepsilon)} : \partial B \to \mathbb{C}$ definida por

$$f_{(h,\psi,\varepsilon)}(y) = \frac{1}{(n+1)\omega_{n+1}} \int_{U_h\times(0,1)} \frac{\left(1-|H_h(x,t)|^2\right)\psi(x)\phi_\varepsilon(t)}{|H_h(x,t)-y|^{n+1}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

para todo $y \in \partial B$. Temos que:

(i) Dadas $h \in \mathscr{A}$, $\psi \in C_c^\infty(U_h)$ e $\varepsilon \in (0,1]$, temos $f_{(h,\psi,\varepsilon)} \in C^\infty(\partial B)$.

(ii) Dadas $h \in \mathscr{A}$ e $\psi \in C_c^\infty(U_h)$, se $\xi = \xi_{(h,\psi)} \in C^\infty(\partial B)$ é a função definida por

$$\xi(y) = \begin{cases} \psi(h(y))\left|\partial_1(h^{-1})(h(y)) \times \ldots \times \partial_n(h^{-1})(h(y))\right|^{-1}, & \text{se } y \in V_h \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

então $f_{(h,\psi,\varepsilon)} \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{C(\partial B)} \xi$.

(iii) Existe um atlas $\mathscr{A}_1 \subset \mathscr{A}$ tal que, se $h \in \mathscr{A}_1$, então a sequência $f_{(h,\psi,\varepsilon)}$ converge em $C^\infty(\partial B)$ quando $\varepsilon \to 0^+$.

Demonstração. (i) Seja $\tilde{h} \in \mathscr{A}$ e consideremos $a : U_h \times (0,1) \times U_{\tilde{h}} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$a(x,t,y) = \frac{1-|H_h(x,t)|^2}{(n+1)\omega_{n+1}|H_h(x,t)-\tilde{h}^{-1}(y)|^{n+1}} = \frac{1-(1-t)^2}{(n+1)\omega_{n+1}|(1-t)h^{-1}(x)-\tilde{h}^{-1}(y)|^{n+1}},$$

para todo $(x,t,y) \in U_h \times (0,1) \times U_{\tilde{h}}$. Temos que $a \in C^\infty(U_h \times (0,1) \times U_{\tilde{h}})$.

Dado $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, seja $g_\alpha : U_{\tilde{h}} \to \mathbb{C}$ definida por

$$g_\alpha(y) = \int_{U_h\times(0,1)} \partial_y^\alpha a(x,t,y)\psi(x)\phi_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

para todo $y \in U_{\tilde{h}}$. Sejam $y_0 \in U_{\tilde{h}}$ e $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset U_{\tilde{h}}$ tais que $y_k \xrightarrow[k\to\infty]{} y_0$, temos que

$$\partial_y^\alpha a(x,t,y_k)\psi(x)\phi_\varepsilon(t) \xrightarrow[k\to\infty]{} \partial_y^\alpha a(x,t,y_0)\psi(x)\phi_\varepsilon(t)$$

e sendo $\chi_\varepsilon : U_h \times (0,1) \to \mathbb{R}$ a função característica do compacto $\mathrm{supp}(\psi) \times \mathrm{supp}(\phi_\varepsilon)$, $K = \{y_k : k \in \mathbb{Z}_+\}$ e $C = \sup\left\{|\partial_y^\alpha a(x,t,y)| : t \in \mathrm{supp}(\phi_\varepsilon), x \in \mathrm{supp}(\psi) \text{ e } y \in K\right\}$, segue que

$$|\partial_y^\alpha a(x,t,y_k)\psi(x)\phi_\varepsilon(t)| \leq C\sup(\psi)\sup(\phi_\varepsilon)\chi_\varepsilon(x,t)$$

para todo $x \in U_h$, $t \in (0,1)$ e $k \in \mathbb{N}$. Logo pelo Teorema da Convergência Dominada

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} g_\alpha(y_k) &= \lim_{k\to\infty} \int_{U_h\times(0,1)} \partial_y^\alpha a(x,t,y_k)\,\psi(x)\phi_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &= \int_{U_h\times(0,1)} \partial_y^\alpha a(x,t,y_0)\,\psi(x)\phi_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t = g_\alpha(y_0).\end{aligned}$$

Portanto $g_\alpha \in C(U_{\tilde{h}})$ e, em particular, $f_{(h,\psi,\varepsilon)} \circ \tilde{h}^{-1} = g_0 \in C(U_{\tilde{h}})$.

Seja $m \in \mathbb{Z}_+$, suponhamos que $f_{(h,\psi,\varepsilon)} \circ \tilde{h}^{-1} \in C^m(U_{\tilde{h}})$ e $\partial^\alpha \left(f_{(h,\psi,\varepsilon)} \circ \tilde{h}^{-1}\right) = g_\alpha$ para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ tal que $|\alpha| \le m$. Dados $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ tal que $|\alpha| \le m$, $j \in \{1,2,\dots,n\}$ e $y_0 \in U_{\tilde{h}}$, consideremos $\delta > 0$ tal que $\overline{B(y_0,\delta)} \subset U_{\tilde{h}}$ e

$$C = \sup\left\{|\partial_y^{e_j+\alpha} a(x,t,y)| : t \in \operatorname{supp}(\phi_\varepsilon), x \in \operatorname{supp}(\psi) \text{ e } y \in \overline{B(y_0,\delta)}\right\}.$$

Seja $(t_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset (0,\delta)$ tal que $t_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, segue do Teorema do Valor Médio que

$$\left|\frac{\partial_y^\alpha a(x,t,y_0+t_k e_j) - \partial_y^\alpha a(x,t,y_0)}{t_k}\psi(x)\phi_\varepsilon(t)\right| \le C\psi(x)\phi_\varepsilon(t) \le C\sup(\psi)\sup(\phi_\varepsilon)\chi_\varepsilon(x,t)$$

para todo $x \in U_h$, $t \in (0,1)$ e $y \in \overline{B(y_0,\delta)}$. Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada, temos que

$$\begin{aligned}\partial_j\left[\partial^\alpha\left(f_{(h,\psi,\varepsilon)} \circ \tilde{h}^{-1}\right)\right](y_0) &= \partial_j g_\alpha(y_0) \\ &= \lim_{k\to\infty}\int_{U_h\times(0,1)} \frac{\partial_y^\alpha a(x,t,y_0+t_k e_j) - \partial_y^\alpha a(x,t,y_0)}{t_k}\psi(x)\phi_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &= \int_{U_h\times(0,1)} \partial_y^{e_j+\alpha} a(x,t,y_0)\,\psi(x)\phi_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t = g_{e_j+\alpha}(y_0).\end{aligned}$$

Como $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ tal que $|\alpha| \le m$, $j \in \{1,2,\dots,n\}$ e $y_0 \in U_{\tilde{h}}$, foram tomados arbitrariamente, segue que $f_{(h,\psi,\varepsilon)} \circ \tilde{h}^{-1} \in C^{m+1}(U_{\tilde{h}})$ e $\partial^\alpha\left(f_{(h,\psi,\varepsilon)} \circ \tilde{h}^{-1}\right) = g_\alpha$ para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ tal que $|\alpha| \le m+1$. Por indução sobre m, segue que $f_{(h,\psi,\varepsilon)} \circ \tilde{h}^{-1} \in C^\infty(U_{\tilde{h}})$ e $\partial^\alpha\left(f_{(h,\psi,\varepsilon)} \circ \tilde{h}^{-1}\right) = g_\alpha$ para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, mostrando que $f_{(h,\psi,\varepsilon)} \in C^\infty(V_{\tilde{h}})$. Portanto, como $\tilde{h} \in \mathscr{A}$ foi tomada arbitrariamente, segue que $f_{(h,\psi,\varepsilon)} \in C^\infty(\partial B)$.

(ii) Note que

$$\begin{aligned}&\int_{\partial B} \frac{1-(1-t)^2}{(n+1)\omega_{n+1}|(1-t)w-y|^{n+1}}\,\mathrm{d}S_w \\ &= \int_{\partial B} \frac{1-(1-t)^2}{(n+1)\omega_{n+1}(1-t)^{n+1}((1-t)^2-2(1-t)w\cdot y+1)^{\frac{n+1}{2}}}\,\mathrm{d}S_w \\ &= \int_{\partial B} \frac{1-(1-t)^2}{(n+1)\omega_{n+1}|w-(1-t)y|^{n+1}}\,\mathrm{d}S_w = 1\end{aligned}$$

para quaisquer $y \in \partial B$ e $t \in (0,1)$. Temos então que

$$
\begin{aligned}
\left|f_{(h,\psi,\varepsilon)}(y) - \xi(y)\right| &= \left|\int_{U_h\times(0,1)} \frac{\left(1-|H_h(x,t)|^2\right)\psi(x)\phi_\varepsilon(t)}{(n+1)\omega_{n+1}|H_h(x,t)-y|^{n+1}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \xi(y)\right| \\
&= \left|\int_0^1\int_{U_h} \frac{\left[1-(1-t)^2\right]\psi(x)}{(n+1)\omega_{n+1}|(1-t)h^{-1}(x)-y|^{n+1}}\,\mathrm{d}x\,\phi_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t - \xi(y)\right| \\
&= \left|\int_0^1\int_{V_h} \frac{\left[1-(1-t)^2\right]\psi(h(w))\left|\partial_1(h^{-1})(h(w))\times\ldots\times\partial_n(h^{-1})(h(w))\right|^{-1}}{(n+1)\omega_{n+1}|(1-t)w-y|^{n+1}}\,\mathrm{d}S_w\,\phi_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t - \xi(y)\right| \\
&= \left|\int_0^1\int_{\partial B} \frac{\left[1-(1-t)^2\right]\xi(w)}{(n+1)\omega_{n+1}|(1-t)w-y|^{n+1}}\,\mathrm{d}S_w\,\phi_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t - \xi(y)\right| \\
&= \left|\int_0^1\int_{\partial B} \frac{\left[1-(1-t)^2\right][\xi(w)-\xi(y)]}{(n+1)\omega_{n+1}|(1-t)w-y|^{n+1}}\,\mathrm{d}S_w\,\phi_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\le \int_0^1\int_{\partial B} \frac{\left[1-(1-t)^2\right]|\xi(w)-\xi(y)|}{(n+1)\omega_{n+1}|(1-t)w-y|^{n+1}}\,\mathrm{d}S_w\,\phi_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

para quaisquer $y \in \partial B$ e $\varepsilon \in (0,1]$. Dado $\eta > 0$, como ξ é uniformemente contínua, existe $\delta > 0$ tal que

$$|\xi(w) - \xi(y)| < \frac{\eta}{2}$$

para quaisquer $y, w \in \partial B$, tais que $|w-y| < \delta$. Logo

$$
\begin{aligned}
&\left|f_{(h,\psi,\varepsilon)}(y) - \xi(y)\right| \\
&\le \left(\int_0^1\int_{\partial B\cap\{w:|w-y|<\delta\}} + \int_0^1\int_{\partial B\cap\{w:|w-y|\ge\delta\}}\right) \frac{\left[1-(1-t)^2\right]|\xi(w)-\xi(y)|}{(n+1)\omega_{n+1}|(1-t)w-y|^{n+1}}\,\mathrm{d}S_w\,\phi_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t \\
&\le \frac{\eta}{2} + \int_0^\varepsilon\int_{\partial B\cap\{w:|w-y|\ge\delta\}} \frac{t(2-t)|\xi(w)-\xi(y)|}{(n+1)\omega_{n+1}(|w-y|-t)^{n+1}}\,\mathrm{d}S_w\,\phi_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t \\
&\le \frac{\eta}{2} + 4\sup_{\partial B}(\xi)\left(\frac{2}{\delta}\right)^{n+1}\varepsilon
\end{aligned}
$$

para quaisquer $y \in \partial B$ e $\varepsilon \in (0,1] \cap (0, \frac{\delta}{2})$. Segue que existe $\varepsilon_0 > 0$, tal que $\left|f_{(h,\psi,\varepsilon)}(y) - \xi(y)\right| < \eta$ para quaisquer $y \in \partial B$ e $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Portanto,

$$\sup_{y\in\partial B}\left|f_{(h,\psi,\varepsilon)}(y) - \xi(y)\right| \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} 0,$$

o que conclui (ii).

(iii) Consideremos agora a aplicação $g : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^n \to \partial B$ definida por

$$g(x) = \left(\prod_{j=1}^n \cos(x_j), \mathrm{sen}(x_1)\prod_{j=2}^n \cos(x_j), \mathrm{sen}(x_2)\prod_{j=3}^n \cos(x_j), \ldots, \mathrm{sen}(x_{n-1})\cos(x_n), \mathrm{sen}(x_n)\right)$$

para todo $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^n$. Mostraremos que o conjunto $\mathrm{Im}(g)$ é aberto em ∂B, $g : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^n \to \mathrm{Im}(g)$ é bijetiva $g^{-1} \in \mathscr{A}$.

Temos que g é injetiva. De fato, sejam $x, y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^n$ tais que $g_1(x) = g_1(y)$, então

$$\text{sen}(x_n) = [g(x)]_{n+1} = [g(y)]_{n+1} = \text{sen}(y_n),$$

onde $[g(x)]_{n+1}$ e $[g(y)]_{n+1}$ representam a $(n+1)$-ésima coordenada de $g(x)$ e $g(y)$, respectivamente. Logo, como sen : $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ é injetiva, temos que $x_n = y_n$. Seja $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ tal que $x_{n-j+1} = y_{n-j+1}$ para todo $j \in \{1, \ldots, k\}$, como

$$\begin{aligned}\text{sen}(x_{n-k}) \prod_{j=n-k+1}^{n} \cos(x_j) = [g(x)]_{n-k+1} = [g(y)]_{n-k+1} &= \text{sen}(y_{n-k}) \prod_{j=n-k+1}^{n} \cos(y_j) \\ &= \text{sen}(y_{n-k}) \prod_{j=n-k+1}^{n} \cos(x_j),\end{aligned}$$

e $\prod_{j=n-k+1}^{n} \cos(x_j) > 0$, segue que $\text{sen}(x_{n-k}) = \text{sen}(y_{n-k})$, logo $x_{n-k} = y_{n-k}$. Portanto, segue por indução sobre k que $x = y$.

Dado $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^n$ e $l \in \{1, 2, \ldots, n\}$, temos que $[\partial_l g(x)]_j = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$ tal que $l + 2 \leq j \leq n+1$, além disso, temos também que $[\partial_l g]_{l+1} = \prod_{j=l}^{n} \cos(x_j)$. Assim, sejam $\lambda_l \in \mathbb{R}$ para $l = 1, 2, \ldots, n$, tais que

$$\sum_{l=1}^{n} \lambda_l \partial_l g(x) = 0,$$

segue que

$$\lambda_n \cos(x_n) = \lambda_n [\partial_n g]_{n+1} = \sum_{l=1}^{n} \lambda_l [\partial_l g]_{n+1} = \left[\sum_{l=1}^{n} \lambda_l \partial_l g\right]_{n+1} = [0]_{n+1} = 0,$$

logo $\lambda_n = 0$. Seja $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $\lambda_{n-j+1} = 0$ para todo $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, temos que

$$\begin{aligned}\lambda_{n-k} \prod_{j=n-k}^{n} \cos(x_j) = \lambda_{n-k} [\partial_{n-k} g]_{n-k+1} &= \sum_{l=1}^{n-k} \lambda_l [\partial_l g]_{n-k+1} \\ &= \sum_{l=1}^{n} \lambda_l [\partial_l g]_{n-k+1} = \left[\sum_{l=1}^{n} \lambda_l \partial_l g\right]_{n-k+1} = [0]_{n-k+1} = 0,\end{aligned}$$

logo $\lambda_{n-k} = 0$. Portanto, por indução sobre k, segue que $\lambda_j = 0$ para todo $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Seja $V := \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \partial B : x_1 > 0\}$, temos que $\text{Im}(g) = V$. De fato, dado $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^n$ temos que $\cos^2(x_1) + \text{sen}^2(x_1) = 1$ e sendo $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, tal que

$$\prod_{j=1}^{k} \cos^2(x_j) + \text{sen}^2(x_1) \prod_{j=2}^{k} \cos^2(x_j) + \text{sen}^2(x_2) \prod_{j=3}^{k} \cos^2(x_j) + \ldots + \text{sen}^2(x_k) = 1,$$

temos que

$$\begin{aligned}&\prod_{j=1}^{k+1} \cos^2(x_j) + \text{sen}^2(x_1) \prod_{j=2}^{k+1} \cos^2(x_j) + \text{sen}^2(x_2) \prod_{j=3}^{k+1} \cos^2(x_j) + \ldots + \text{sen}^2(x_{k+1}) \\ &= \cos^2(x_{k+1}) \left(\prod_{j=1}^{k} \cos^2(x_j) + \text{sen}^2(x_1) \prod_{j=2}^{k} \cos^2(x_j) + \text{sen}^2(x_2) \prod_{j=3}^{k} \cos^2(x_j) + \ldots + \text{sen}^2(x_k) \right) \\ &+ \text{sen}^2(x_{k+1}) = \cos^2(x_{k+1}) + \text{sen}^2(x_{k+1}) = 1.\end{aligned}$$

Então segue por indução que

$$|g(x)|^2 = \prod_{j=1}^{n} \cos^2(x_j) + \operatorname{sen}^2(x_1) \prod_{j=2}^{n} \cos^2(x_j) + \operatorname{sen}^2(x_2) \prod_{j=3}^{n} \cos^2(x_j) + \ldots + \operatorname{sen}^2(x_n) = 1.$$

Portanto, temos que $\operatorname{Im}(g) \subset V$. Por outro lado, dado $y = (y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}) \in V$, seja $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ onde

$$x_j = \operatorname{arcsen}\left(y_{j+1} \left(\sum_{k=1}^{j+1} y_k^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \right),$$

mostraremos que $g(x) = y$. Observe que

$$\cos^2(x_n) = 1 - \operatorname{sen}^2(x_n) = 1 - y_{n+1}^2 = \sum_{j=1}^{n} y_j^2,$$

logo como $\cos(x_n) > 0$, segue que

$$\cos(x_n) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} y_j^2}.$$

Seja $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ e suponhamos que

$$\prod_{j=n-k+1}^{n} \cos(x_j) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n-k+1} y_j^2},$$

então

$$\begin{aligned}
\prod_{j=n-k}^{n} \cos^2(x_j) &= \cos^2(x_{n-k}) \prod_{j=n-k+1}^{n} \cos(x_j) = \cos^2(x_{n-k}) \sum_{j=1}^{n-k+1} y_j^2 \\
&= \left(1 - \operatorname{sen}^2(x_{n-k})\right) \sum_{j=1}^{n-k+1} y_j^2 = \left(1 - y_{n-k+1}^2 \left(\sum_{j=1}^{n-k+1} y_j^2 \right)^{-1} \right) \sum_{j=1}^{n-k+1} y_j^2 \\
&= \left[\left(\sum_{j=1}^{n-k+1} y_j^2 \right) - y_{n-k+1}^2 \right] \left(\sum_{j=1}^{n-k+1} y_j^2 \right)^{-1} \sum_{j=1}^{n-k+1} y_j^2 = \sum_{j=1}^{n-k} y_j^2.
\end{aligned}$$

Logo

$$\prod_{j=n-k}^{n} \cos(x_j) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n-k} y_j^2}.$$

Segue, por indução sobre k, que

$$\prod_{j=n-k+1}^{n} \cos(x_j) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n-k+1} y_j^2}$$

para todo $k \in \{1,2,\ldots,n\}$. Portanto

$$\begin{aligned}
g(x) &= \left(\prod_{j=1}^{n}\cos(x_j), \operatorname{sen}(x_1)\prod_{j=2}^{n}\cos(x_j), \operatorname{sen}(x_2)\prod_{j=3}^{n}\cos(x_j), \ldots, \operatorname{sen}(x_{n-1})\cos(x_n), \operatorname{sen}(x_n)\right)\\
&= \left(y_1, \operatorname{sen}(x_1)\sqrt{\sum_{j=1}^{2} y_j^2}, \operatorname{sen}(x_2)\sqrt{\sum_{j=1}^{3} y_j^2}, \ldots, \operatorname{sen}(x_{n-1})\sqrt{\sum_{j=1}^{n} y_j^2}, \operatorname{sen}(x_n)\right)\\
&= (y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}) = y
\end{aligned}$$

o que prova que $V \subset \operatorname{Im}(g)$.
Seja $h := g^{-1} : V \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)^n$, segue do Teorema da Aplicação Inversa que $h \in \mathscr{A}$ (ver Proposição 1.9.3 em (BURNS; GIDEA, 2005)).

A parametrização g tem a seguinte propriedade:

$$[tg(x) - g(y)] \cdot [t\partial_1 g(x) - \partial_1 g(y)] = 0$$

para quaisquer $t \in \mathbb{R}$ e $x, y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)^n$. De fato, dados $t \in \mathbb{R}$ e $x, y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)^n$, temos que

$$\begin{aligned}
&[tg(x) - g(y)] \cdot [t\partial_1 g(x) - \partial_1 g(y)]\\
&= [tg(x) - g(y)] \cdot \left(\operatorname{sen}(y_1)\prod_{j=2}^{n}\cos(y_j) - t\operatorname{sen}(x_1)\prod_{j=2}^{n}\cos(x_j), t\prod_{j=1}^{n}\cos(x_j) - \prod_{j=1}^{n}\cos(y_j), 0, 0, \ldots, 0\right)\\
&= \left(t\prod_{j=1}^{n}\cos(x_j) - \prod_{j=1}^{n}\cos(y_j)\right)\left(\operatorname{sen}(y_1)\prod_{j=2}^{n}\cos(y_j) - t\operatorname{sen}(x_1)\prod_{j=2}^{n}\cos(x_j)\right)\\
&+ \left(t\operatorname{sen}(x_1)\prod_{j=2}^{n}\cos(x_j) - \operatorname{sen}(y_1)\prod_{j=2}^{n}\cos(y_j)\right)\left(t\prod_{j=1}^{n}\cos(x_j) - \prod_{j=1}^{n}\cos(y_j)\right) = 0.
\end{aligned}$$

Dado $j \in \{1,2,\ldots,n\}$, seja $T_j : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ o operador linear definido por

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, x_{j+1}, x_3, x_4, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_2, x_{j+2}, x_{j+3}, \ldots, x_{n+1})$$

para todo $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Temos que T é bijetivo e $T(V) = V$. Dado $j \in \{1,2,\ldots,n\}$, sejam $g_j := T_j \circ g : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)^n \to V$ e $h_j := g_j^{-1}$, temos que $h_j \in \mathscr{A}$. Como T_j é um operador linear que preserva o produto interno de $\mathbb{R}^{n+1}$, temos que

$$\begin{aligned}
&\left[tg_j(x) - g_j(y)\right] \cdot \left[t\partial_1 g_j(x) - \partial_1 g_j(y)\right] = T_j\left(tg(x) - g(y)\right) \cdot T_j\left(t\partial_1 g(x) - \partial_1 g(y)\right)\\
&= [tg(x) - g(y)] \cdot [t\partial_1 g(x) - \partial_1 g(y)] = 0
\end{aligned}$$

para quaisquer $t \in \mathbb{R}$ e $x, y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ e $j \in \{1,2,\ldots,n\}$. Portanto,

$$\left[tg_j(x) - g_j(y)\right] \cdot \left[t\partial_1 g_j(x)\right] = \left[tg_j(x) - g_j(y)\right] \cdot \partial_1 g_j(y) \tag{4.11}$$

para quaisquer $t \in \mathbb{R}$ e $x, y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ e $j \in \{1,2,\ldots,n\}$. Observe que

$$\begin{aligned}
\partial_1 g_k(x) = \partial_1(T_k \circ g)(x) = T_k(\partial_1 g(x)) &= T_k\left(\left(\prod_{j=1}^{n}\cos(x_j)\right)e_2 - \left(\sin(x_1)\prod_{j=2}^{n}\cos(x_j)\right)e_1\right)\\
&= \left(\prod_{j=1}^{n}\cos(x_j)\right)e_{k+1} - \left(\sin(x_1)\prod_{j=2}^{n}\cos(x_j)\right)e_1,
\end{aligned}$$

para quaisquer $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)^n$ e $k \in \{1,2,\ldots,n\}$. Logo, como $\prod_{j=1}^n \cos(x_j) > 0$, para qualquer $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)^n$, segue que os vetores

$$\partial_1 g_1(x^1), \partial_1 g_2(x^2), \ldots, \partial_1 g_n(x^n)$$

são linearmente independentes para quaisquer $x^1, x^2, \ldots, x^n \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)^n$. Em particular, dado $y \in \partial B$, temos que

$$\partial_1 g_1(g_1^{-1}(y)), \partial_1 g_2(g_2^{-1}(y)), \ldots, \partial_1 g_n(g_n^{-1}(y)) \tag{4.12}$$

são linearmente independentes.

Por (ii), temos que $f_{(h_j,\psi,\varepsilon)} \circ g_j$ converge em $C\left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)^n\right)$ quando $\varepsilon \to 0^+$ para quaisquer $\psi \in C_c^\infty\left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)^n\right)$ e $j \in \{1,2,\ldots,n\}$.

Seja $m \in \mathbb{N}$ tal que $f_{(h_j,\psi,\varepsilon)} \circ g_j$ converge em $C^{m-1}\left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)^n\right)$ quando $\varepsilon \to 0^+$ para quaisquer $\psi \in C_c^\infty\left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)^n\right)$, $j \in \{1,2,\ldots,n\}$.

Dados $\psi \in C_c^\infty\left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)^n\right)$, $j,k \in \{1,2,\ldots,n\}$ e $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$ tal que $|\beta| \leq m-1$, seja $\tilde{\psi} \in C_c^\infty\left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)^n\right)$ definida por

$$\tilde{\psi}(x) = \psi\left(g_j^{-1} \circ g_k(x)\right) \left|\det\left[\operatorname{Jac}\left(g_j^{-1} \circ g_k\right)(x)\right]\right|$$

para todo $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)^n$. Usando a igualdade (4.11), temos que

$$\begin{aligned}
\partial^\beta \partial_1 \left(f_{(h_j,\psi,\varepsilon)} \circ g_k\right)(y) &= \partial_y^\beta \partial_{y_1} \left(\int_{U_{h_j} \times (0,1)} \frac{\left[1-(1-t)^2\right] \psi(x) \phi_\varepsilon(t)}{(n+1)\omega_{n+1} |(1-t)g_j(x) - g_k(y)|^{n+1}} \mathrm{d}x\mathrm{d}t\right) \\
&= \partial_y^\beta \partial_{y_1} \left(\int_{U_{h_k} \times (0,1)} \frac{\left[1-(1-t)^2\right] \psi\left(g_j^{-1} \circ g_k(x)\right) \phi_\varepsilon(t) \left|\det\left[\operatorname{Jac}\left(g_j^{-1} \circ g_k\right)(x)\right]\right|}{(n+1)\omega_{n+1} |(1-t)g_k(x) - g_k(y)|^{n+1}} \mathrm{d}x\mathrm{d}t\right) \\
&= \partial_y^\beta \left(\int_{U_{h_k} \times (0,1)} \frac{\left[1-(1-t)^2\right] \tilde{\psi}(x) \phi_\varepsilon(t)}{(n+1)\omega_{n+1}} \partial_{y_1} \left(\frac{1}{|(1-t)g_k(x) - g_k(y)|^{n+1}}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}t\right) \\
&= \partial_y^\beta \left(\int_{U_{h_k} \times (0,1)} \frac{\left[1-(1-t)^2\right] \tilde{\psi}(x) \phi_\varepsilon(t)}{(n+1)\omega_{n+1}} \frac{(n+1)[(1-t)g_k(x) - g_k(y)] \cdot [\partial_1 g_k(y)]}{|(1-t)g_k(x) - g_k(y)|^{n+3}} \mathrm{d}x\mathrm{d}t\right) \\
&= \partial_y^\beta \left(\int_{U_{h_k} \times (0,1)} \frac{\left[1-(1-t)^2\right] \tilde{\psi}(x) \phi_\varepsilon(t)}{(n+1)\omega_{n+1}} \frac{(n+1)[(1-t)g_k(x) - g_k(y)] \cdot [(1-t)\partial_1 g_k(x)]}{|(1-t)g_k(x) - g_k(y)|^{n+3}} \mathrm{d}x\mathrm{d}t\right) \\
&= \partial_y^\beta \left(\int_{U_{h_k} \times (0,1)} \frac{\left[1-(1-t)^2\right] \tilde{\psi}(x) \phi_\varepsilon(t)}{(n+1)\omega_{n+1}} \left[-\partial_{x_1} \left(\frac{1}{|(1-t)g_k(x) - g_k(y)|^{n+1}}\right)\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}t\right) \\
&= \partial_y^\beta \left(\int_0^1 \int_{U_{h_k}} \frac{\left[1-(1-t)^2\right] \tilde{\psi}(x) \phi_\varepsilon(t)}{(n+1)\omega_{n+1}} \left[-\partial_{x_1} \left(\frac{1}{|(1-t)g_k(x) - g_k(y)|^{n+1}}\right)\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}t\right) \\
&= \partial_y^\beta \left(\int_0^1 \int_{U_{h_k}} \frac{\left[1-(1-t)^2\right] \partial_1 \tilde{\psi}(x) \phi_\varepsilon(t)}{(n+1)\omega_{n+1} |(1-t)g_k(x) - g_k(y)|^{n+1}} \mathrm{d}x\mathrm{d}t\right) \\
&= \partial_y^\beta \left(\int_{U_{h_k} \times (0,1)} \frac{\left[1-(1-t)^2\right] \partial_1 \tilde{\psi}(x) \phi_\varepsilon(t)}{(n+1)\omega_{n+1} |(1-t)g_k(x) - g_k(y)|^{n+1}} \mathrm{d}x\mathrm{d}t\right) = \partial^\beta \left(f_{(h_k,\partial_1\tilde{\psi},\varepsilon)} \circ g_k\right)(y).
\end{aligned}$$

Então $\partial_1\left(f_{(h_j,\psi,\varepsilon)}\circ g_k\right)$ converge em $C^{m-1}\left(\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)^n\right)$ quando $\varepsilon\to 0^+$ para quaisquer $\psi\in C_c^\infty\left(\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)^n\right)$, $j,k\in\{1,2,\dots,n\}$. Logo, como os vetores em (4.12) são linearmente independentes para todo $y\in V$, temos pela Proposição 39 que $f_{(h_j,\psi,\varepsilon)}\circ g_j$ converge em $C^m\left(\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)^n\right)$ quando $\varepsilon\to 0^+$ para quaisquer $\psi\in C_c^\infty\left(\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)^n\right)$ e $j\in\{1,2,\dots,n\}$.

Portanto, por indução sobre m, segue que $f_{(h_j,\psi,\varepsilon)}\circ g_j$ converge em $C^\infty\left(\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)^n\right)$ quando $\varepsilon\to 0^+$ para quaisquer $\psi\in C_c^\infty\left(\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)^n\right)$ e $j\in\{1,2,\dots,n\}$. Em particular, considerando o caso $j=1$, temos que $f_{(h,\psi,\varepsilon)}\circ g$ converge em $C^\infty\left(\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)^n\right)$ quando $\varepsilon\to 0^+$ para qualquer $\psi\in C_c^\infty\left(\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)^n\right)$.

Sejam $\psi\in C_c^\infty\left(\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)^n\right)$, $w\in\partial B\backslash g(\mathrm{supp}(\psi))$, $h_w\in\mathscr{A}$ tal que $V_{h_w}\subset\partial B\backslash g(\mathrm{supp}(\psi))$ e $K\subset U_{h_w}$ um compacto. Dado $\beta\in\mathbb{Z}_+^n$, segue por indução sobre $|\beta|$ que existe $b_\beta\in C^\infty(U_h\times\mathbb{R}\times U_{h_w})$, tal que

$$\partial_y^\beta\left(\frac{1}{|(1-t)g(x)-h_w^{-1}(y)|^{n+1}}\right)=\frac{b_\beta(x,t,y)}{|(1-t)g(x)-h_w^{-1}(y)|^{n+1+2|\beta|}}$$

para quaisquer $x\in U_h$, $t\in(0,1)$ e $y\in U_{h_w}$. Como $g(\mathrm{supp}(\psi))$ e $h_w(K)$ são compactos disjuntos, segue que

$$d:=\mathrm{dist}(g(\mathrm{supp}\psi),h_w^{-1}(K))>0$$

além disso, temos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{|(1-t)g(x)-h_w^{-1}(y)|^{n+1+2|\beta|}}&\le\frac{1}{\left(|g(x)-h_w^{-1}(y)|-|g(x)-(1-t)g(x)|\right)^{n+1+2|\beta|}}\\&\le\frac{1}{(d-t)^{n+1+2|\beta|}}\le\left(\frac{2}{d}\right)^{n+1+2|\beta|}\end{aligned}$$

para quaisquer $x\in g(\mathrm{supp}(\psi))$, $y\in h_w^{-1}(K)$ e $t\in(0,\frac{d}{2})$. Logo

$$\begin{aligned}\left|\partial^\beta\left(f_{(h,\psi,\varepsilon)}\circ h_w^{-1}\right)(y)\right|&=\left|\partial_y^\beta\left(\int_{U_h\times(0,1)}\frac{\left[1-(1-t)^2\right]\psi(x)\phi_\varepsilon(t)}{(n+1)\omega_{n+1}|(1-t)g(x)-h_w^{-1}(y)|^{n+1}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)\right|\\&=\left|\int_{U_h\times(0,1)}\frac{t(2-t)\psi(x)\phi_\varepsilon(t)b_\beta(x,t,y)}{(n+1)\omega_{n+1}|(1-t)g(x)-h_w^{-1}(y)|^{n+1+2|\beta|}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right|\\&\le\int_0^1\int_{U_h}\frac{t(2-t)|\psi(x)||b_\beta(x,t,y)|}{(n+1)\omega_{n+1}|(1-t)g(x)-h_w^{-1}(y)|^{n+1+2|\beta|}}\,\mathrm{d}x\,\phi_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^\varepsilon\int_{g(\mathrm{supp}\psi)}\frac{t(2-t)|\psi(x)||b_\beta(x,t,y)|}{(n+1)\omega_{n+1}|(1-t)g(x)-h_w^{-1}(y)|^{n+1+2|\beta|}}\,\mathrm{d}x\,\phi_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t\\&\le\int_0^\varepsilon\int_{g(\mathrm{supp}\psi)}\frac{\varepsilon|\psi(x)||b_\beta(x,t,y)|}{(n+1)\omega_{n+1}|(1-t)g(x)-h_w^{-1}(y)|^{n+1+2|\beta|}}\,\mathrm{d}x\,\phi_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t\\&\le C\left(\frac{2}{d}\right)^{n+1+2|\beta|}\varepsilon\end{aligned}$$

para quaisquer $y\in K$ e $0<\varepsilon<\min\{1,\frac{d}{2}\}$. Logo

$$\sup_{y\in K}\left|\partial^\beta\left(f_{(h,\psi,\varepsilon)}\circ h_w^{-1}\right)(y)\right|\xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{}0.$$

Como $K \subset U_{h_w}$ compacto e $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$ foram tomados arbitrariamente, segue que

$$f_{(h,\psi,\varepsilon)} \circ h_w^{-1} \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{C_c^\infty(U_{h_w})} 0.$$

Seja $\mathscr{A}_2 = \{h_w : w \in \partial B \setminus g(\mathrm{supp}(\psi))\} \cup \{h\}$, temos que

$$\bigcup_{\tilde{h} \in \mathscr{A}_2} V_{\tilde{h}} = V_h \cup \bigcup_{w \in \partial B \setminus g(\mathrm{supp}(\psi))} V_{h_w} = V_h \cup [\partial B \setminus g(\mathrm{supp}(\psi))] = V_h \cup (\partial B \setminus V_h) = \partial B,$$

logo $\mathscr{A}_2$ é um atlas sobre ∂B, tal que $f_{(h,\psi,\varepsilon)} \circ \tilde{h}^{-1}$ converge em $C_c^\infty(U_{\tilde{h}})$ quando $\varepsilon \to 0^+$, para qualquer $\tilde{h} \in \mathscr{A}_2$. Portanto, pela Proposição 27, segue que $f_{(h,\psi,\varepsilon)}$ converge em $C^\infty(\partial B)$ quando $\varepsilon \to 0^+$.

Por fim, dados $j \in \{0,1\}$ e $k \in \{1,2,\ldots,n\}$, seja $T_{j,k} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ a aplicação definida por

$$T_{j,k}(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}) = (x_k,x_2,x_3,x_4,\ldots,x_{k-2},x_{k-1},(-1)^j x_1,x_{k+1},x_{k+2},\ldots,x_{n-1},x_n)$$

e $V_{j,k}$ o seguinte aberto em ∂B

$$V_{j,k} := \{w \in \partial B : (-1)^j w \cdot e_k > 0\}.$$

Temos que $T_{j,k}$ é um operador linear bijetivo que preserva o produto interno de $\mathbb{R}^{n+1}$ e $T_{j,k}(V) = V_{j,k}$ para quaisquer $j \in \{0,1\}$ e $k \in \{1,2,\ldots,n\}$. Dados $j \in \{0,1\}$ e $k \in \{1,2,\ldots,n\}$ sejam $g_{j,k} := T_{j,k} \circ g : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)^n \to V_{j,k}$ e $h_{j,k} := g_{j,k}^{-1}$. Temos que $h_{j,k} \in \mathscr{A}$ e

$$\begin{aligned}
f_{(h_{j,k},\psi,\varepsilon)} \circ \tilde{h}^{-1}(y) &= \int_{U_h \times (0,1)} \frac{\left[1-(1-t)^2\right] \psi(x)\phi_\varepsilon(t)}{(n+1)\omega_{n+1} \left|(1-t)g_{j,k}(x) - \tilde{h}^{-1}(y)\right|^{n+1}} \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&= \int_{U_h \times (0,1)} \frac{\left[1-(1-t)^2\right] \psi(x)\phi_\varepsilon(t)}{(n+1)\omega_{n+1} \left|(1-t)T_{j,k} \circ g(x) - \tilde{h}^{-1}(y)\right|^{n+1}} \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&= \int_{U_h \times (0,1)} \frac{\left[1-(1-t)^2\right] \psi(x)\phi_\varepsilon(t)}{(n+1)\omega_{n+1} \left|T_{j,k}\left((1-t)g(x) - T_{j,k}^{-1} \circ \tilde{h}^{-1}(y)\right)\right|^{n+1}} \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&= \int_{U_h \times (0,1)} \frac{\left[1-(1-t)^2\right] \psi(x)\phi_\varepsilon(t)}{(n+1)\omega_{n+1} \left|(1-t)g(x) - T_{j,k}^{-1} \circ \tilde{h}^{-1}(y)\right|^{n+1}} \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&= f_{(h,\psi,\varepsilon)} \circ \left(\tilde{h} \circ T_{j,k}\right)^{-1}(y)
\end{aligned}$$

para quaisquer $j \in \{0,1\}$, $k \in \{1,2,\ldots,n\}$, $\psi \in C_c^\infty\left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)^n\right)$, $\tilde{h} \in \mathscr{A}$, $y \in U_{\tilde{h}}$ e $\varepsilon \in (0,1]$. Logo, temos que $f_{(h_{j,k},\psi,\varepsilon)}$ converge em $C^\infty(\partial B)$ quando $\varepsilon \to 0^+$ para quaisquer $j \in \{0,1\}$, $k \in \{1,2,\ldots,n\}$ e $\psi \in C_c^\infty\left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)^n\right)$. Portanto, como $\mathscr{A}_1 := \{h_{j,k} : j \in \{0,1\} \text{ e } k \in \{1,2,\ldots,n\}\}$ é um atlas sobre ∂B, a afirmação (iii) está provada. $\square$

Lema 5. Sejam $\mathscr{A}_1 \subset \mathscr{A}$ um atlas, $\langle \mathbf{U}_\alpha \rangle_{\alpha \in \Upsilon} \subset \mathscr{D}'_{\partial B}(B)$ um net e $\mathbf{U} \in \mathscr{D}'_{\partial B}(B)$, tais que

$$p_{(\Phi,h,\psi)}(\mathbf{U}_\alpha - \mathbf{U}) \xrightarrow[\alpha \in \Upsilon]{} 0$$

para quaisquer $\Phi \in C_c^\infty(B)$, $h \in \mathscr{A}_1$ e $\psi \in C_c^\infty(U_h)$. Então $\mathbf{U}_\alpha \xrightarrow[\alpha \in \Upsilon]{\mathscr{D}'_{\partial B}(B)} \mathbf{U}$.

Demonstração. Sejam $\Phi \in C_c^\infty(B)$, $h \in \mathscr{A}$, $\psi \in C_c^\infty(U_h)$. Existem $h_j \in \mathscr{A}_1$ para $j = 1, 2 \ldots, m$ tais que

$$h^{-1}(\mathrm{supp}(\psi)) \subset \bigcup_{j=1}^m V_{h_j}.$$

Segue da inclusão acima que

$$\mathrm{supp}(\psi) \subset \bigcup_{j=1}^m h\left(V_{h_j} \cap V_h\right),$$

logo existem $\psi_j \in C_c^\infty\left(h\left(V_{h_j} \cap V_h\right)\right)$ para $j = 1, 2 \ldots, m$ tais que

$$\sum_{j=1}^m \psi_j = \psi.$$

Dado $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, sejam $U_j := h\left(V_h \cap V_{h_j}\right)$, $\tilde{U}_j := h_j\left(V_h \cap V_{h_j}\right)$, $W_j := H_h(U_j \times (0,1))$. Temos que $H_{h_j}^{-1} \circ H_h : U_j \times (0,1) \to \tilde{U}_j \times (0,1)$ é dada por

$$H_{h_j}^{-1} \circ H_h(x,t) = \left(h_j \circ h^{-1}(x), t\right)$$

para quaisquer $(x,t) \in U \times (0,1)$ e $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Temos também que

$$\det\left[\mathrm{Jac}\left(H_h^{-1} \circ H_{h_j}\right)(x,t)\right] = \det\left[\mathrm{Jac}\left(h \circ h_j^{-1}\right)(x)\right]$$

para quaisquer $(x,t) \in \tilde{U}_j \times (0,1)$ e $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Seja $\tilde{\psi}_j \in C_c^\infty(U_{h_j})$ definida por

$$\tilde{\psi}_j := \left(\psi_j \circ (h \circ h_j^{-1})\right) \left|\det\left[\mathrm{Jac}\left(h \circ h_j^{-1}\right)\right]\right|,$$

para $j = 1, 2, \ldots, m$, temos que

$$\begin{aligned}
&\left\langle \mathbf{U}|_{W_h \cap B} \circ (H_h)|_{U_h \times (0,1)}, \psi \otimes \phi_\varepsilon \right\rangle = \sum_{j=1}^m \left\langle \mathbf{U}|_{W_h \cap \Omega} \circ (H_h)|_{U_h \times (0,1)}, \psi_j \otimes \phi_\varepsilon \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^m \left\langle \mathbf{U}|_{W_j} \circ (H_h)|_{U_j \times (0,1)}, \left[\left(\psi_j \circ (h \circ h_j^{-1})\right) \otimes \phi_\varepsilon\right] \circ \left(H_{h_j}^{-1} \circ H_h\right) \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^m \left\langle \mathbf{U}|_{W_j} \circ (H_h)|_{U_j \times (0,1)} \circ \left(H_{h_j}^{-1} \circ H_h\right)^{-1}, \left[\left(\psi_j \circ (h \circ h_j^{-1})\right) \otimes \phi_\varepsilon\right] \left|\det\left[\mathrm{Jac}\left(H_h^{-1} \circ H_{h_j}\right)\right]\right| \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^m \left\langle \mathbf{U}|_{W_j} \circ (H_{h_j})|_{\tilde{U}_j \times (0,1)}, \left[\left(\psi_j \circ (h \circ h_j^{-1})\right) \left|\det\left[\mathrm{Jac}\left(h \circ h_j^{-1}\right)\right]\right|\right] \otimes \phi_\varepsilon \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^m \left\langle \mathbf{U}|_{W_{h_j} \cap B} \circ (H_{h_j})|_{U_{h_j} \times (0,1)}, \tilde{\psi}_j \otimes \phi_\varepsilon \right\rangle
\end{aligned}$$

para quaisquer $\varepsilon \in (0,1]$ e $\mathbf{U} \in \mathscr{D}'(B)$. Então

$$\sup_{\varepsilon\in(0,1]} \left|\left\langle \mathbf{U}|_{W_h\cap B} \circ (H_h)|_{U_h\times(0,1)}, \psi \otimes \phi_\varepsilon \right\rangle\right| \leq \sum_{j=1}^{m} \sup_{\varepsilon\in(0,1]} \left|\left\langle \mathbf{U}|_{W_{h_j}\cap B} \circ (H_{h_j})|_{U_{h_j}\times(0,1)}, \tilde{\psi}_j \otimes \phi_\varepsilon \right\rangle\right|$$

para todo $\mathbf{U} \in \mathscr{D}'_{\partial B}(B)$. O resultado segue da estimativa acima. $\square$

Teorema 17. Dada $u \in \mathscr{D}'(\partial B)$, seja $\mathbf{U} : B \to \mathbb{C}$ definida por

$$\mathbf{U}(x) = \frac{1-|x|^2}{(n+1)\omega_{n+1}} \left\langle u, \frac{1}{|x-\cdot|^{n+1}} \right\rangle, \tag{4.13}$$

para todo $x \in B$. Temos que $\mathbf{U} \in \mathscr{D}'_{\partial B}(B)$.

Além disso, se $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \in C(\partial B)$ é uma sequência tal que $f_k \xrightarrow[k\to\infty]{\mathscr{D}'(\partial B)} u$ e $F_k : B \to \mathbb{C}$ é definida por

$$F_k(x) = \frac{1-|x|^2}{(n+1)\omega_{n+1}} \left\langle f_k, \frac{1}{|x-\cdot|^{n+1}} \right\rangle \tag{4.14}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, então $F_k \xrightarrow[k\to\infty]{\mathscr{D}'_{\partial B}(B)} \mathbf{U}$. Em particular, $\mathbf{U}$ satisfaz o problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta\mathbf{U} = 0 & \text{em } B \\ \mathbf{U}_{\partial B} = u. \end{cases} \tag{4.15}$$

Demonstração. Consideremos a aplicação $\zeta : B \to C^\infty(\partial B)$ definida por

$$[\zeta(x)](y) = \frac{\left(1-|x|^2\right)}{(n+1)\omega_{n+1}|x-y|^{n+1}}$$

para quaisquer $x \in B$ e $y \in \partial B$. Mostraremos que ζ é contínua.
De fato, sejam $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset B$ uma sequência, $x_0 \in B$ tais que $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0$, $h \in \mathscr{A}$, $K \subset U_h$ compacto, $\beta \in \mathbb{Z}^n_+$ e $G : B \times U_h \to \mathbb{R}$ definida por

$$G(x,y) = \frac{\left(1-|x|^2\right)}{(n+1)\omega_{n+1}|x-h^{-1}(y)|^{n+1}}.$$

para todo $(x,y) \in B \times U_h$. Temos que $G \in C^\infty(B \times U_h)$, logo seja $K_0 = \{x_k : k \in \mathbb{Z}_+\}$, temos que K_0 é compacto e então $\partial_y^\beta G$ é uniformemente contínua em $K_0 \times K$. Logo dado $\eta > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left|\partial_y^\beta G(x,y) - \partial_y^\beta G(\tilde{x},\tilde{y})\right| < \eta$$

para quaisquer $(x,y),(\tilde{x},\tilde{y}) \in B \times U_h$ tais que $|(x,y)-(\tilde{x},\tilde{y})| < \delta$.

Assim, seja $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_k - x_0| < \delta$ para todo $k \geq k_0$, temos que

$$\left|\partial_y^\beta \left[\zeta(x_k)\circ h^{-1}\right](y) - \partial_y^\beta \left[\zeta(x_0)\circ h^{-1}\right](y)\right| = \left|\partial_y^\beta G(x_k,y) - \partial_y^\beta G(x_0,y)\right| < \delta$$

para todo $y \in K$ e $k \geq k_0$. Então

$$\sup_{y \in K} \left| \partial_y^\beta \left[\zeta(x_k) \circ h^{-1} \right](y) - \partial_y^\beta \left[\zeta(x_0) \circ h^{-1} \right](y) \right| \xrightarrow[k \to \infty]{} 0.$$

Como $h \in \mathscr{A}$, $K \subset U_h$ compacto, $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$ foram tomados arbitrariamente, segue que $\zeta(x_k) \xrightarrow[k \to \infty]{C^\infty(\partial B)} \zeta(x_0)$ e portanto ζ é contínua.

Sejam $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \in C(\partial B)$ uma sequência tal que $f_k \xrightarrow[k \to \infty]{\mathscr{D}'(\partial B)} u$ (a existência de tal sequência segue da Proposição 25), $F_k : B \to \mathbb{C}$ definida em (4.14) para $k \in \mathbb{N}$ e $K \subset B$ compacto, como ζ é contínua, temos que $\zeta(K) \subset C^\infty(\partial B)$ é compacto e então pela Proposição 29

$$\sup_{x \in K} |\mathbf{U}(x) - F_k(x)| = \sup_{x \in K} |\langle u, \zeta(x) \rangle - \langle f_k, \zeta(x) \rangle| \xrightarrow[k \to \infty]{} 0.$$

Portanto, como $K \subset B$ compacto foi tomado arbitrariamente, segue que $\mathbf{U} \in C(B)$ e $F_k \xrightarrow[k \to \infty]{C(B)} \mathbf{U}$. Em particular, $F_k \xrightarrow[k \to \infty]{\mathscr{D}'(B)} \mathbf{U}$ e então $\Delta \mathbf{U} = \lim_{k \to \infty} \Delta F_k = 0$.

Sejam $\mathscr{A}_1 \subset \mathscr{A}$ o atlas obtido no Lema 4, $h \in \mathscr{A}_1$, $\psi \in C_c^\infty(U_h)$, $\varepsilon \in (0,1]$, ξ e $f_{(h,\psi,\varepsilon)}$ as funções definidas no Lema 4, então

$$\begin{aligned}
&\left\langle (F_k - F_j) \circ (H_h)|_{U_h \times I_h^+}, \psi \otimes \phi_\varepsilon \right\rangle \\
&= \int_{U_h \times I_h^+} \frac{1 - |H_h(x,t)|^2}{(n+1)\omega_{n+1}} \left(\int_{\partial B} \frac{f_k(y) - f_j(y)}{|H(x,t) - y|^{n+1}} \, \mathrm{d}S_y \right) \psi(x) \phi_\varepsilon(t) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&= \int_{\partial B} f_k(y) - f_j(y) \left(\int_{U_h \times I_h^+} \frac{\left[1 - |H_h(x,t)|^2\right] \psi(x) \phi_\varepsilon(t)}{(n+1)\omega_{n+1} |H(x,t) - y|^{n+1}} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}S_y \\
&= \left\langle f_k - f_j, f_{(h,\psi,\varepsilon)} \right\rangle \quad \text{para quaisquer } k, j \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Seja $\gamma \colon [0,1] \to C^\infty(\partial B)$, definida por

$$\gamma(\varepsilon) = \begin{cases} f_{(h,\psi,\varepsilon)}, & \text{se } \varepsilon \in (0,1] \\ \xi, & \text{se } \varepsilon = 0, \end{cases}$$

segue do Lema 4 que γ é contínua no 0. Além disso, temos também que γ é contínua em $(0,1]$, logo γ é contínua. Temos então que $\gamma([0,1]) \subset C^\infty(\partial B)$ é compacto, logo segue da Proposição 29 que

$$\begin{aligned}
\sup_{\varepsilon \in (0,1]} \left| \left\langle (F_k - F_j) \circ (H_h)|_{U_h \times I_h^+}, \psi \otimes \phi_\varepsilon \right\rangle \right| &= \sup_{\varepsilon \in (0,1]} \left| \left\langle f_k(y) - f_j(y), f_{(h,\psi,\varepsilon)} \right\rangle \right| \\
&= \sup_{\varepsilon \in (0,1]} \left| \left\langle f_k(y) - f_j(y), \gamma(\varepsilon) \right\rangle \right| \\
&= \sup_{\varepsilon \in [0,1]} \left| \left\langle f_k(y) - f_j(y), \gamma(\varepsilon) \right\rangle \right| \xrightarrow[k,j \to \infty]{} 0.
\end{aligned}$$

Resulta então do Lema 5 que $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathscr{D}'_{\partial B}(B)$, logo como $\mathscr{D}'_{\partial B}(B)$ é sequencialmente completo, temos que $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência convergente em $\mathscr{D}'_{\partial B}(B)$. Portanto, como $F_k \xrightarrow[k\to\infty]{\mathscr{D}'(B)} \mathbf{U}$, segue que $\mathbf{U} \in \mathscr{D}'_{\partial B}(B)$ e $F_k \xrightarrow[k\to\infty]{\mathscr{D}'_{\partial B}(B)} \mathbf{U}$. Temos então que

$$\mathbf{U}_{\partial B} = \lim_{k\to\infty} (F_k)_{\partial B} = \lim_{k\to\infty} f_k = u.$$

$\square$

O Teorema anterior é muito importante para este trabalho, pois mostra que o conceito de traço apresentado na seção anterior atribui sentido para o problema de Dirichlet com a equação de Laplace no disco, de modo que a fórmula integral de Poisson continua fornecendo soluções, mesmo quando a condição de contorno é uma distribuição qualquer.

CAPÍTULO

5

CONCLUSÃO

Os resultados principais e mais importantes deste trabalho são o Teorema 13 e o Teorema 17.

O Teorema 13 apresenta uma forma de gerar um semigrupo $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ de operadores lineares sobre X, usando a fórmula integral de Cauchy, no caso em que X é um espaço vetorial topológico localmente convexo, Hausdorff, sequencialmente completo e A é um operador pseudosetorial sobre X. Como mostrado na seção 3.3, o Teorema 13 generaliza o Teorema clássico de geração de semigrupos analíticos de operadores lineares contínuos sobre um espaço de Banach (Teorema 1.3.4 em (HENRY, 1981), Teorema 9 neste trabalho) no caso em X é um espaço de Frechét. Na seção 3.4, mostramos que o Teorema 13 pode ser aplicado a uma classe de operadores pseudodiferenciais com coeficientes constantes.

O Teorema 17 mostra que, além de útil, a noção de traço apresentada na seção 4.3 é adequada para interpretar a condição de fronteira do problema de Dirichlet com a equação de Laplace:

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{U} = 0 & \text{em } B \\ \mathbf{U} = u & \text{em } \partial B \end{cases}$$

quando $u \in \mathscr{D}'(\partial B)$, a medida que a fórmula integral de Poisson continua oferecendo soluções nesse caso.

Como mencionado na introdução desse trabalho, os Capítulos 3 e Capítulo 4 são independentes entre si, mas juntos oferecem a possibilidade de estudar problemas como a equação do calor com condição de contorno de Dirichlet:

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) = \Delta u(x,t), & \text{para } (x,t) \in \Omega \times (0,\infty) \\ u(x,t) = 0, & \text{para } (x,t) \in \partial\Omega \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x), & \text{para } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

quando a condição inicial u_0 é mais singular que o usual, escrevendo tal problema em um problema da forma:

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = \Delta u(t), & \text{para } t \in (0,\infty) \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Considerando

$$\mathscr{D}'_0(\Omega) := \{\mathbf{U} \in \mathscr{D}'_{\partial\Omega}(\Omega) : \mathbf{U}_{\partial\Omega} = 0\} \text{ e}$$

$$E := \{\mathbf{U} \in \mathscr{D}'_{\partial\Omega}(\Omega) : \Delta\mathbf{U} \in \mathscr{D}'_{\partial\Omega}(\Omega)\}$$

resta-nos provar que $\Delta : \mathscr{D}'_0(\Omega) \cap E \to \mathscr{D}'_{\partial\Omega}(\Omega)$ é um operador pseudosetorial para que possamos aplicar aplicar o Teorema 13. Esta questão é não-trivial e será nosso próximo objeto de estudo.

REFERÊNCIAS

ADAMS, R. A.; FOURNIER, J. J. F. **Sobolev Spaces**. 2. ed. Amsterdam: Elsevier, 2003. Citado na página 15.

ARAGÃO-COSTA Éder R.; SILVA, A. P. Strongly compatible generators of groups on fréchet spaces. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v. 484, n. 123612, 2020. Citado na página 14.

BABALOLA, V. A. **Semigroups of operators on locally convex spaces**. [S.l.]: American Mathematical Society, 1974. Citado na página 14.

BRÉZIS, H. **Functional analysis, Sobolev spaces and partial differencial equations**. New York: Springer, 2011. Citado nas páginas 26, 105 e 106.

BURNS, K.; GIDEA, M. **Differential geometry and topology with a view to dynamical systems**. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 2005. Citado nas páginas 80 e 121.

CONWAY, J. B. **Functions of one complex variable**. 2. ed. New York: Springer-Verlag, 1978. Citado nas páginas 59 e 63.

CORDARO, P. **Teoria das distribuições e análise de Fourier**. [S.l.]: Notas manuscritas, 1999. Citado nas páginas 15 e 101.

FOLLAND, G. B. **Real analysis, modern techniques and their applications**. New York: John Wiley, 1999. Citado nas páginas 30, 36, 37 e 40.

GILBARG, D.; TRUDINGER, N. S. **Elliptic partial differential equations of second order**. Reprint of the 1998. Berlin: Springer, 2001. Citado na página 113.

HENRY, D. **Geometric theory of semilinear parabolic equations**. New York: Springer-Verlag, 1981. Citado nas páginas 14, 49, 51 e 129.

HOUNIE, J. **Teoria elementar das distribuições**. Rio de Janeiro: IMPA, 1979. Citado na página 90.

HÖRMANDER, L. **The analysis of linear partial differential operators I**. New York: Spring-Verlag, 1980. Citado nas páginas 15, 83 e 112.

LIMA, E. L. **Análise real vol. 2**. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2010. Citado na página 110.

MACEDO, B. **Caracterização de espaços de potência fracionária por meio de operadores pseudodiferenciais**. 2016. Disponível em: <https://teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55135/tde-01092016-105238/publico/BrunoVicenteMarchideMaced_revisada.pdf>. Acesso em: 19/08/2020. Citado nas páginas 51 e 58.

PAZY, A. **Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations**. New York: Springer-Verlag, 1983. Citado na página 14.

TREVES, F. **Topological vector spaces, distributions and kernels**. New York: Academic Press, 1967. Citado nas páginas 22 e 58.

VRABIE, I. I. **C_0-semigoups and Applications**. Amsterdam: Elsevier, 2003. Citado na página 15.