PLÁCIDO ZOÉGA TÁBOAS

ORIENTADOR : PROF.Dr.NELSON ONUCHIC

SÔBRE O COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO PARA UMA CLASSE DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS COM RETARDAMENTO NO TEMPO

Trabalho apresentado à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo para a obtenção de Mestrado em Ciências.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS - USP

1970

À Carmen Maria e aos meus pais

AGRADECIMENTOS

De um modo especial ao Prof.Dr. Nelson Onuchic, que sugeriu êste trabalho, pela orientação, pelo estímulo e pelo exemplo de seriedade científica que é.

Ao Departamento de Matemática da F.F.C.L. de Rio Claro (ao qual estamos vinculados), particularmente à pessôa do Prof.Dr.Mário Tourasse Teixeira, por nos haver concedido todo o apôio necessário.

Aos colegas do grupo de Equações Diferenciais da Escola de Engenharia de São Carlos, pelo clima de cordialidade em que temos trabalhado.

Às pessoas ou entidades que de algum modo colaboraram conôsco.

Plácido Zoéga Táboas

Êste trabalho dependeu parcialmente de auxílios das seguintes entidades:

CAPES (através de uma bôlsa de pós-graduação, 1967).

CNPq (através de auxílios concedidos ao Depto.de Matemática da Escola de Engenharia de São Carlos).

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO

O objetivo dêste trabalho é estudar alguns problemas relacionados com as propriedades no infinito de soluções da equação diferencial com retardamento no tempo

$$(E) \qquad \dot{x} = A(t)x + f(t, x_t),$$

onde $x \in X$ (aqui e no que segue X denota indistintamente um dos espaços n-dimensionais R^n ou C^n), $A(t)$ é uma matriz $n \times n$ localmente Lebesgue-integrável em $J = [0, \infty)$, ou seja, cada uma de suas colunas é uma função localmente Lebesgue-integrável de J em X, e $f(t, x_t) \in X$. As definições precisas concernentes à equação (E) encontram-se na secção 2.

Propomo-nos estabelecer condições de existência para soluções de (E) em certos espaços funcionais. Como observa C. Corduneanu em [3] a própria pertinência de uma solução a um tal espaço já lhe garante certas propriedades de carater global. Portanto, nossos objetivos são essencialmente a determinação de tais condições de existência.

Pretendemos dar uma extensão natural a (E) de resultados de Hartman e Onuchic [5], obtidos originalmente para o sistema ordinário perturbado

$$\dot{x} = A(t)x + f(t, x).$$

O método de abordagem aqui empregado é completamente análogo ao utilizado por Hartman e Onuchic, o qual depende essencialmente de resultados de Massera e Schäffer contidos em [6] e do teorema do ponto fixo de Tychonoff. Isto é decorrência do fato de ser êste trabalho todo inspirado em [5] .

A seção 2 é dedicada à colocação das bases para o desenvolvimento das seções 3 e 4 . Constitui-se de uma ligeira introdução às Equações com Retardamento no Tempo e de uma apresentação não sistemática de resultados da teoria das Equações Ordinárias e da Análise Funcional. As referências bibliográficas alí contidas enviam o leitor a obras que fornecem um tratamento mais detalhado à matéria relacionada.

O corpo dêste trabalho, por assim dizer, é a seção 3. Contém o teorema central - teorema 3.1 - e uma análise de suas implicações. O lema 3.1, inspirado em [5 , lemma 2.1] recebe aqui uma formulação restrita aos espaços do tipo $L^p(X)$ mas, em contrapartida, as hipóteses sôbre a aplicação $f(t,\varphi)$ aparecem enfraquecidas. A relevância do lema 3.1 está em facilitar o manejo do teorema central.

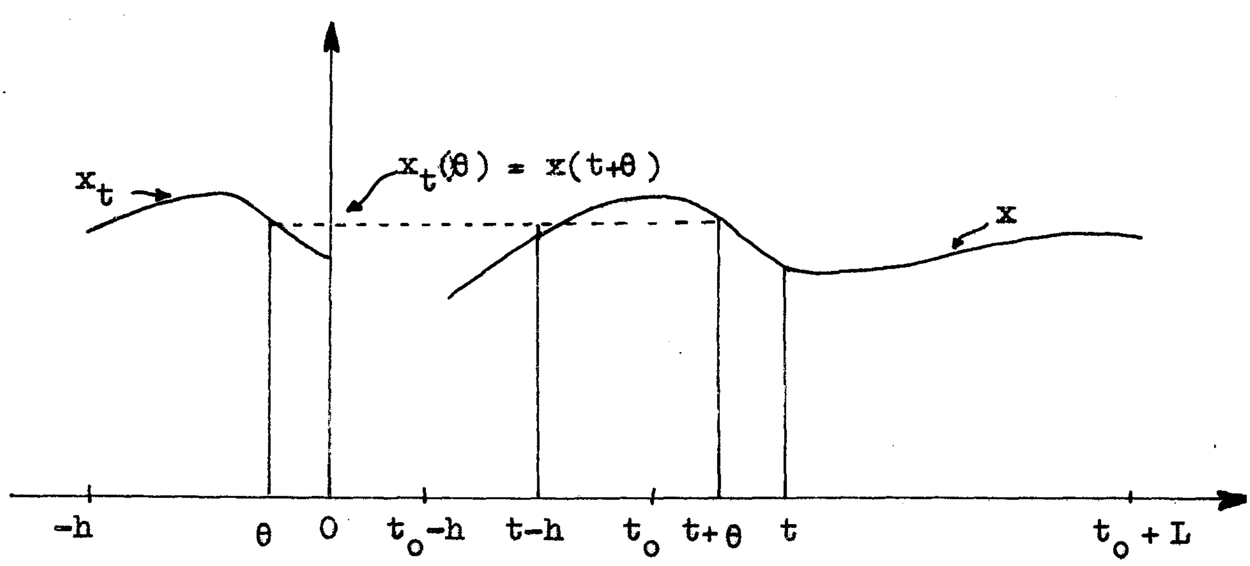
Na seção 4 apresentamos e discutimos duas situações em que se aplicam os resultados da seção anterior.

2. ALGUNS FATOS BÁSICOS

Consideremos $0 \leqslant h < \infty$ e o espaço de Banach $C = C([-h, 0], X)$ das funções contínuas de $[-h, 0]$ em X, munido com a norma $\| \cdot \|$, definida por:

$$\| \varphi \| = \sup |\varphi(t)| , -h \leqslant t \leqslant 0 ,$$

onde $| \cdot |$ denota qualquer norma sôbre X, o que fica implícito daqui em diante. Sejam $0 < L \leqslant \infty$, t_o real e x uma função contínua de $[t_o - h, t_o + L)$ em X. Para cada t, $t_o \leqslant t < t_o + L$, definimos $x_t \in C$ por $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $-h \leqslant \theta \leqslant 0$. Na figura abaixo damos uma ilustração desta situação para o caso em que x é uma função escalar



De posse destas idéias, estamos agora em condições de estabelecer as definições de equação diferencial com retardamento no tempo e de solução de uma tal equação.

Seja $F(t, \varphi)$ uma aplicação de $[t_0, t_0 + L) \times C$ em X. A equação diferencial

(2.1) $$\dot{x}(t) = F(t, x_t)$$

é, por definição, <u>uma equação diferencial com retardamento no tempo</u>

Seja $I = [t_0 - h, t_0 + \delta]$, $0 < \delta < L$,
ou $I = [t_0 - h, t_0 + \delta)$, $0 < \delta \leq L$.

Uma <u>solução da equação (2.1) no intervalo I</u> é uma função x de I em X, contínua em I e derivável em $I - [t_0 - h, t_0)$, satisfazendo $\dot{x}(t) = F(t, x_t)$, para $t > t_0$ e $t \in I$.

<u>Observações</u>: 1) A condição de derivabilidade exigida acima é entendida em t_0 como a existência da derivada à direita e, em $t_0 + \delta$, da derivada à esquerda.

2) A equação (E) é do tipo da equação (2.1) como se pode verificar tomando $t_0 = 0$, $L = \infty$ e fazendo $F(t, \varphi) = A(t)\varphi(0) + f(t, \varphi)$, para (t, φ) em $J \times C$.

3) As equações diferenciais ordinárias podem ser vistas como casos especiais das equações com retardamento tomando-se $h = 0$.

4) Como estamos interessados na equação (E), de acôrdo com a observação 2), podemos pensar sempre em $[t_0, t_0 + L) = J$.

A seguir formularemos o problema do valor inicial para equações com retardamento no tempo. Sejam $t_o \geqslant 0, \phi \in C$ e $F(t, \varphi)$ uma aplicação de $J \times C$ em X. <u>O problema do valor inicial</u>

$$(2.2) \qquad \dot{x}(t) = F(t, x_t), \ x_{to} = \phi$$

consistem em determinar uma função x, definida em um intervalo $[t_o - h, t_o + \alpha]$ com valores em X, contínua nêsse intervalo e derivável em $[t_o, t_o + \alpha]$, satisfazendo às seguintes condições:

(i) $x_{to} = \phi$, ou seja, $x(t_o + \theta) = \phi(\theta)$, $\theta \in [-h, 0]$.

(ii) $\dot{x}(t) = F(t, x_t)$, $t \in [t_o, t_o + \alpha]$.

Uma tal função é chamada <u>solução do problema (2.2) no intervalo</u> $[t_o - h, t_o + \alpha]$.

O teorema abaixo dá condições bastante gerais para a existência e unicidade de solução do problema do valor inicial.

<u>Teorema 2.1</u> - <u>Suponhamos que $F(t, \varphi)$ seja contínua em $J \times C$ e que, dados T, H, $0 < T < \infty$, $0 < H < \infty$, exista uma constante $M = M(T, H) > 0$, tal que</u>:

$|F(t, \varphi_1) - F(t, \varphi_2)| \leqslant M \| \varphi_1 - \varphi_2 \|$; para $\varphi_j \in C$; $\| \varphi_j \| \leqslant H$; $j = 1, 2$; $0 \leqslant t \leqslant T$.

<u>Então, para todo t_0, $0 \leqslant t_0 < T$, e todo $\phi \in C$, $\|\phi\| < H$, existe α, $0 < \alpha < \infty$, tal que o problema (2.2) possui uma única solução em $[t_0 - h, t_0 + \alpha]$.</u>

O teorema acima é análogo ao de Picard - Lindelöf para as equações ordinárias. Uma prova baseada no teorema do ponto fixo de Banach é encontrada em [9, pag. 9], bem como uma clara introdução à teoria das equações com retardamento no tempo.

Indicaremos com L o espaço das funções reais definidas em J, localmente Lebesgue - integráveis, munido com a topologia da convergência em média de L^1 nos intervalos limitados de J.

Seja L(X) o espaço das funções x, de J em X, mensuráveis com a propriedade seguinte: se definirmos em J a função real φ por $\varphi(t) = |x(t)|$, $t \in J$, então $\varphi \in L$. Consideremos aqui L(X) como espaço vetorial topológico localmente convexo definido pela família de semi-normas

(p_a), $0 < a < \infty$, onde

$$p_a(x) = \int_0^a |x(t)|\,dt\ ,\ x \in L(X)\ ,\ 0 < a < \infty\ .$$

Nos espaços L(X) identificaremos sempre duas funções que coincidem em J a menos de um conjunto de medida nula.

Seja B um subespaço vetorial de L(X) e suponhamos que B seja um espaço de Banach segundo uma certa norma $|\cdot|_B$. Dizemos, por definição, que B é mais forte que L(X) se a topologia de espaço de Banach de B é mais fina que a induzida pela de L(X).

O fato da topologia de espaço de Banach de B ser mais fina que a induzida pela de L(X) é equivalente a dizer-se que, para todo real positivo a, existe um número $\alpha_B = \alpha(a, B)$ de modo que

(2.3) $\quad \int_0^a |x(t)|\, dt \leqslant \alpha_B |x|_B$, para todo $x \in B$.

Os espaços seguintes são exemplos de espaços de Banach mais fortes que L(X).

1) $L^p(X)$, $1 \leqslant p < \infty$: espaço das funções x de J em X, mensuráveis, com $|x|^p$ Lebesgue-integrável. Evidentemente $L^p(X) \subset L(X)$. Além disso, se $x \in L^p(X)$, $1 \leqslant p < \infty$, tomando-se $\alpha(p, a) = a^{\frac{1}{p'}}$, com $1/p' = 1 - \frac{1}{p}$, tem-se de acôrdo com a desigualdade de Hölder

$$\int_0^a |x(t)|\, dt \leqslant \alpha(p, a)\left(\int_J |x(t)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}} .$$

2) $L^\infty(X)$: espaço das funções x de J em X, mensuráveis, limitadas em quase tôda parte e com a norma $|x|_\infty =$

$= \operatorname{supess} |x(t)|$, $t \in J$. A expressão "supess $|x(t)|$, $t \in J$" (supremo essencial) é entendida do seguinte modo:

$$\sup_{t \in J} \operatorname{ess} |x(t)| = \inf_{E \subset J} \left(\sup_{t \in J - E} |x(t)| \right),$$

onde o ínfimo é tomado sôbre todos os conjuntos $E \subset J$ de medida nula. Neste caso basta tomar $\alpha_B = a$ para se verificar a relação (2.3).

3) $L_0^\infty(X)$: subespaço de $L^\infty(X)$ das funções x tais que $\lim_{t \to \infty} \operatorname{ess} x(t) = 0$, onde a expressão "$\lim_{t \to \infty} \operatorname{ess} x(t) = 0$" significa que x coincide em quase tôda parte com uma função y de J em X tal que $\lim_{t \to \infty} y(t) = 0$.

Denotaremos com $C(X)$ o espaço das funções contínuas de J em X munido com a topologia da convergência uniforme nos intervalos limitados de J.

Consideremos os sistemas lineares ordinários homogêneo e não homogêneo:

(2.4) $\quad \overset{\circ}{x} = A(t)x$

(2.5) $\quad \overset{\circ}{x} = A(t)x + g(t)$

com $g \in L(X)$ e onde $A(t)$ é uma matriz $n \times n$ localmente Lebesgue integrável em J.

Se D é um espaço de Banach mais forte que L(X), definimos uma <u>D - solução de (2.4), ou de (2.5)</u>, como uma solução x(t) de (2.4), ou de (2.5), que pertença a D.

Diremos que um par (B, D) de espaços de Banach mais fortes que L(X) é <u>A(t) - admissível</u> se a cada função $g \in B$ corresponder uma D - solução de (2.5).

Consideremos o subespaço X_{OD} de X formado pelos pontos iniciais $x(0) \in X$, de tôdas as D - soluções x de (2.4) e seja X_{1D} algum subespaço de X complementar de X_{OD} (no sentido de ser X soma direta de X_{OD} com X_{1D}). Indicaremos com P_{OD} a projeção de X sôbre X_{OD}, anulando X_{1D}. Indicamos anàlogamente com P_{1D} a projeção de X sôbre X_{1D}, anulando X_{OD}.

Visando o teorema fundamental da próxima seção apresentaremos a seguir um lema básico - lema 2.2 - devido a Schäffer e Massera [6, p. 295]. Com êsse objetivo faremos antes algumas considerações preliminares.

<u>TEOREMA 2.2</u> - <u>Sejam A(t) matriz n x n localmente Lebesgue - integrável em J e D um espaço de Banach mais forte que L(X). Então existem constantes C_0 e C_1 de modo que para tôda D - solução x(t) de (2.4) se tem</u>:

(2.6) $$|x|_D \leqslant C_0 |x(0)| \quad ; \quad |x(0)| \leqslant C_1 |x|_D .$$

<u>PROVA</u>:

PROVA :

A aplicação φ, que associa a cada D-solução $x(t)$ de (2.4) o seu ponto inicial, $x(0) \in X_{OD}$, é linear, biunívoca e sôbre. Isto é, a aplicação φ é um isomorfismo de espaços vetoriais. Como a dimensão de X_{OD} é finita, temos que φ e φ^{-1} são contínuas. Assim, existem constantes C_o e C_1 tais que $|\varphi(x)| \leq C_1 |x|_D$ e $|\varphi^{-1}(x(0))|_D \leq C_o |x(0)|$, para tôda D-solução $x(t)$ de (2.4). Estas desigualdades equivalem às (2.6) e completam nossa prova.

Seja (B, D) um par de espaços de Banach mais fortes que $L(X)$. Consideremos o conjunto D_T das funções $x(t) \in D$ que são absolutamente contínuas nos intervalos compactos de J e tais que $g(t) = (\dot{x}(t) - A(t)x(t)) \in B$. Definamos um operador $T : D_T \rightarrow B$ por $Tx = g$, para todo $x \in D_T$.

TEOREMA 2.3 - Sejam $A(t)$ uma matriz $n \times n$ localmente Lebesgue-integrável em J e (B, D) um par de espaços de Banach mais fortes que $L(X)$. Então o operador $T : D_T \rightarrow B$ é fechado, ou seja, seu gráfico $G(T) = \{(x, g) \in D \times B \mid x \in D_T, g = Tx\}$ é fechado em $D \times B$.

PROVA :

Mostraremos que se (x_n) é uma seqüência de elementos de D_T de modo que $x_n \to x \in D$ e $g_n = Tx_n \to g \in B$, quando $n \to \infty$, então $x \in D_T$ e $g = Tx$. Isto é, se $(x_n, g_n) \in G(T)$ e $(x_n, g_n) \to (x, g)$, quando $n \to \infty$, em $D \times B$, então $(x, g) \in G(T)$.

Temos $\dot{x}_n - \dot{x}_m = A(t)(x_n - x_m) + (g_n - g_m)$, ou seja, $x_n - x_m$ é solução de (2.5) com $g = g_n - g_m$, para quaisquer índices m, n.

Para tôda solução de (2.5) num intervalo $[0, a]$, segue da teoria geral dos sistemas lineares que

$$|x(t)| \leqslant \left\{|x(r)| + \int_0^a |g(s)|ds\right\} \cdot \exp \int_0^a |A(s)|ds, \tag{2.7}$$

para $t, r \in [0, a]$.

Integrando-se em relação a r, sôbre $[0, a]$, vem que:

$$|x(t)| \leqslant \left\{a^{-1} \int_0^a |x(s)|ds + \int_0^a |g(s)|ds\right\} \cdot \exp \int_0^a |A(s)|ds, \quad t \in [0, a]. \tag{2.8}$$

Aplicando (2.8) a $x_n - x_m$, obtemos, para

$$0 \leqslant t \leqslant a, \; |x_n(t) - x_m(t)| \leqslant$$

$$\leqslant \left\{a^{-1} \int_0^a |x_n(s) - x_m(s)|ds + \int_0^a |g_n(s) - g_m(s)|ds\right\} \cdot \exp \int_0^a |A(s)|ds.$$

Do fato de serem B e D, mais fortes que L(X) resulta existirem constantes α_D e α_B de modo que:

$$\int_0^a |x_n(s) - x_m(s)|ds \leqslant \alpha_D |x_n - x_m|_D,$$

$$\int_0^a |g_n(s) - g_m(s)|ds \leqslant \alpha_B |g_n - g_m|_B.$$

Portanto, para todo $t \in [0, a]$, vem:

$$|x_n(t) - x_m(t)| \leqslant \left\{ a^{-1}\alpha_D |x_n - x_m|_D + \alpha_B |g_n - g_m|_B \right\} \cdot \exp \int_0^a |A(s)| ds.$$

Desta desigualdade decorre que $x_n(t)$ converge uniformemente para $x(t)$ em $[0, a]$. Assim, $\int_0^t A(s)x_n(s)ds$ converge uniformemente em $[0, a]$ para $\int_0^t A(s)\, x(s)ds$.

Como $g_n \longrightarrow g$ em B, quando $n \longrightarrow \infty$, e convergência em B implica convergência em $L(X)$, resulta que g_n converge para g em $L(X)$. Assim para todo $t > 0$, $\int_a^t g_n(s)$ converge para $\int_a^t g(s)ds$.

O fato de ser $g_n = Tx_n$ equivale a $\dot{x}_n = A(t)x_n + g_n$ e, portanto, $x_n(t) = x_n(a) + \int_a^t A(s)x_n(s)ds + \int_a^t g_n(s)ds$.

Passando ao limite ambos os membros, para $n \longrightarrow \infty$, em virtude do que observamos acima segue que:

$$x(t) = x(a) + \int_a^t A(s)x(s)ds + \int_a^t g(s)ds,$$

donde se conclui que $x \in D_T$ e $g = Tx$, ou seja, $(x,g) \in G(T)$.

Dêste modo a prova está completa.

<u>Observação</u>: Tomando $\tilde{D}_T \subset D_T$ por $\tilde{D}_T = \{x \in D_T | x(0) \in X_{1D}\}$ a prova acima garante que o teorema 2.3 continua válido quando substituimos D_T por $\tilde{D}_T$ e T por sua restrição $\tilde{T}$ a $\tilde{D}_T$.

O lema abaixo é uma formulação conveniente para a prova do lema 2.2 de um resultado mais geral que pode ser en contrado em [13, Th. 6, p.163].

<u>LEMA 2.1</u> - <u>Sejam B_1 e B_2 dois espaços de Banach e $B \subset B_1$ um subespaço vetorial de B_1 não necessàriamente completo. Seja $T : B \to B_2$ um operador linear sôbre. Supomos que T é fechado, ou seja, que seu gráfico $G(T) = \{(x, Tx) \in B_1 \times B_2 \mid x \in B\}$ é fechado em $B_1 \times B_2$.</u>

<u>Então existe uma constante C tal que, para todo $y \in B_2$, existe $x \in B$ com $Tx = y$ e $|x|_{B_1} \leqslant C|Tx|_{B_2}$. Em particular, se T é biunívoca, $|x|_{B_1} \leqslant C|Tx|_{B_2}$, $x \in B$.</u> (a notação para as nôrmas é óbvia).

<u>LEMA 2.2</u> - <u>Sejam $A(t)$ como acima e (B, D) um par de espaços de Banach $A(t)$ - admissível. Seja $\xi_0 \in X_{0D}$.</u>

<u>Então, se $g(t) \in B$, (2.5) possui uma única D - solução $x(t)$ satisfazendo</u>

$$P_{0D}\, x(0) = \xi_0 . \tag{2.9}$$

<u>Além disso, existem constantes C_0 e K, dependendo de $A(t)$, B, D e X_{1D} (mas não de g ou ξ_0) tais que</u>

$$|x|_D \leqslant C_0 |\xi_0| + K|g|_B \tag{2.10}$$

<u>PROVA</u>:

Inicialmente mostremos que se $\xi_0 \in X_{0D}$ e $g(t) \in B$, além disso (2.5) possuir uma D - solução $x(t)$ tal que $P_{0D}\, x(0) = \xi_0$, então esta solução será única. De fato, supondo que $\tilde{x}(t)$ é uma D - solução de (2.5) com a mesma propriedade, $x(t) - \tilde{x}(t)$ seria uma D - solução de (2.4) com $x(0) - \tilde{x}(0) = 0$ e, portanto, $x(t) \equiv \tilde{x}(t)$.

Mostremos agora a existência de uma tal D - solução supondo, primeiramente, $\xi_0 = 0$. Provaremos então que existe uma D - solução $x(t)$ de (2.5) com $x(0) \in X_{1D}$, isto é $P_{0D}\, x(0) = 0$.

Dado $g(t) \in B$, como (B, D) é $A(t)$ - admissível, existe uma D - solução $x(t)$ de (2.5). Coloquemos $x(0) = x_0 + x_1$, com $x_0 \in X_{0D}$ e $x_1 \in X_{1D}$. Denotemos com $x_0(t)$ a solução de (2.4) tal que $x_0(0) = x_0$; como $x_0 \in X_{0D}$, temos que $x_0(t) \in D$. Então $x_1(t) = (x(t) - x_0(t)) \in D$. Além disso, esta é a solução de (2.5) com $x_1(0) = x(0) - x_0(0) = x_0 + x_1 - x_0 = x_1 \in X_{1D}$, ou seja, $P_{0D}\, x_1(0) = 0$.

Assim, a cada $g(t) \in B$ corresponde uma única D - solução $x(t)$ de (2.5) satisfazendo $x(0) \in X_{1D}$. Dêste modo, o operador $\tilde{T} : \tilde{D}_T \longrightarrow B$, mencionado na observação subsequente ao teorema 2.3 definido por $\tilde{T}x = g$, é linear, biunívoco, sôbre e, pela mesma observação, é fechado. De acôrdo com o lema 2.1, existe uma constante K de modo que $|x|_D \leqslant K |g|_B$.

Está provado o lema para o caso $\xi_o = 0$.

Suponhamos agora $\xi_o \neq 0$ e seja $g(t) \in B$. Consideremos a D-solução $x_1(t)$ de (2.5) tal que $x_1(0) \in X_{1D}$. Assim, se $\bar{x}(t)$ é a D-solução de (2.4) com $\bar{x}(0) = \xi_o$, $x(t) = \bar{x}(t) + x_1(t)$ é a D-solução de (2.5) com $P_{OD}\,\bar{x}(0) + P_{OD}x_1(0) = \xi_o$.

Temos $|x|_D \leqslant |\bar{x}|_D + |x_1|_D$.

De acôrdo com o teorema 2.2, existe uma constante C_o tal que $|\bar{x}|_D \leqslant C_o|\bar{x}(0)| = C_o|\xi_o|$. Como já obtivemos para o caso $\xi_o = 0$, existe uma constante K, independente de $g(t) \in B$, tal que $|x_1|_D \leqslant K|g|_B$. Dêste modo,

$$|x|_D \leqslant C_o|\xi_o| + K|g|_B .$$

Isto completa a prova.

Os teoremas de Ascoli e do ponto fixo de Tychonoff são essenciais para a prova do teorema 3.1. Em vista disso os recordamos a seguir. O teorema 2.5 é uma formulação conveniente aos nossos objetivos do teorema habitualmente referido na literatura como "teorema de Tychonoff" (teorema 2.6). Sua prova a partir do teorema 2.6 foi extraída de [8].

Se E e F são espaços topológicos, C(E, F) é o conjun to das funções contínuas de E em F.

TEOREMA 2.4 (Ascoli) - Sejam E um espaço localmente compacto, F um espaço completamente regular e $H \subset C(E, F)$. Para que H seja relativamente compacto no espaço $C(E, F)$, munido com a topologia da convergência uniforme e nas partes compactas de E, é necessário e suficiente que H seja equicontínuo e que, para todo $x \in E$, $H(x)$ seja relativamente compacto em F.

Para uma prova, ver p.ex. [1].

TEOREMA 2.5 (Tychonoff) - Seja E um espaço vetorial topológico localmente convexo completo. Sejam $A \subset E$ um conjunto fechado e convexo, T uma aplicação contínua de A em A tal que a imagem $T(A)$ de A seja relativamente compacta em E. Então T possui pelo menos um ponto fixo, ou seja, existe $x \in A$ tal que $Tx = x$.

TEOREMA 2.6. - Sejam E um espaço vetorial topológico localmente convexo, $A \subset E$ um conjunto compacto convexo e T uma aplicação contínua de A em A.

Então T possui pelo menos um ponto fixo.

Prova do Teorema 2.5 a partir do Teorema 2.6 : Temos, por hipótese que $B = \overline{T(A)}$ é compacto. Como A é fechado e $T(A) \subset A$ segue que $B \subset A$.

Indiquemos com K a envoltória convexa fechada de B. Como A é fechado e convexo temos $K \subset A$. Sendo E completo, K é compacto como envoltória convexa fechada de um conjunto compacto. [2 , p. 81] .

Portanto, K é compacto, convexo e $T(K) \subset T(A) \subset B \subset K$ e do teorema 2.6 segue que a restrição de T a K tem um ponto fixo.

Assim está terminada a prova.

Observação : Neste trabalho, as referências ao teorema do ponto fixo de Tychonoff são relacionadas à formulação do teorema 2.5.

Finalizaremos esta seção apresentando um resultado que nos será útil na seção 4. Trata-se do seguinte lema :

LEMA 2.3 - Seja $h(t)$ uma função real, com $h(t) \geq 0$, para $t \geq t_0$ e $\int_{t_0}^{\infty} h(t)dt < \infty$.

Então existe uma função real $\varphi(t)$, contínua para $t \geq t_0$, $\varphi(t) \geq 1$ e $\varphi(t) \to \infty$, quando $t \to \infty$, de modo que $\int_{t_0}^{\infty} \varphi(t)h(t)dt < \infty$.

<u>Prova</u> :

Coloquemos $\int_{t_0}^{\infty} h(t)dt = \alpha$. Definimos uma sequência crescente (a_n) de modo que $a_n \to \infty$, quando $n \to \infty$, pondo $a_0 = t_0$ e, para $n = 1, 2, \ldots$, escolhendo a_n de modo que $\int_{a_{n-1}}^{a_n} h(t)dt = \alpha / 2^n$. Nestas condições, obtemos :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{a_{n-1}}^{a_n} h(t)dt = \int_{t_0}^{\infty} h(t)dt = \alpha$$

Definimos agora a função real $\sigma(t)$, para $t \geq t_0$, pondo $\sigma(t) = n$ em $[a_{n-1}, a_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ Dêste modo, podemos escrever que

$$\int_{t_0}^{\infty} \sigma(t)h(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\alpha}{2^n} < \infty$$

e se torna fácil construir nestas condições uma função contínua $\varphi(t)$, com $\varphi(t) \geq 1$, $\varphi(t) \to \infty$ quando $t \to \infty$ e $\varphi(t) \leq \sigma(t)$. Uma tal função terá evidentemente as propriedades requeridas no lema 2.3.

Fica assim completa a nossa prova.

3. TEOREMA FUNDAMENTAL E CONSEQUÊNCIAS

Nesta seção está contido o teorema central dêste trabalho, ou seja, o teorema 3.1. Trata-se, como já dissemos, de uma extensão natural de um engenhoso resultado de Hartman e Onuchic [5, th. 1.1] originalmente enunciado para as equações ordinárias.

No que segue, dada uma função $\Phi \in C$, com $\Phi(0) = 0$, identificaremos cada $x(t) \in L(X)$ com a função $\tilde{x}(t)$ de $[-h, \infty)$ em X, $0 \leqslant h < \infty$, definida por

$$(3.1) \qquad \tilde{x}(t) = \begin{cases} x(t), \text{ se } t \geqslant 0 \\ \\ \Phi(t) + x(0), \text{ se } -h \leqslant t \leqslant 0 . \end{cases}$$

Seja (B, D) um par de espaços de Banach mais fortes que $L(X)$. Consideremos a bola $V = V_{D\rho} = \{x(t) \in D \mid |x|_D \leqslant \rho\}, \rho > 0$, e ponhamos $S = V \cap C(X)$, denotando com $\bar{S}$ a aderência de S em $C(X)$.

<u>TEOREMA 3.1</u> - <u>Sejam $A(t)$ matriz $n \times n$ localmente Lebesgue-integrável em J e $f(t, \varphi)$ uma função de $J \times C$ em X satisfazendo às seguintes condições</u>:

(a) <u>(B, D) é um par de espaços de Banach mais fortes que $L(X)$ $A(t)$-admissível</u>.

(b) Seja $\Phi \in C$, com $\Phi(0) = 0$. A aplicação $x(t) \to f(t, x_t)$ é contínua de $\bar{S}$, como subespaço de $C(X)$, em B. (x_t, $0 \leq t < \infty$, faz sentido em vista da identificação que fizemos entre $x(t)$ e $\tilde{x}(t)$).

(c) Existe uma constante $r > 0$ tal que $|f(t, x_t)|_B < r$, para todo $x(t) \in \bar{S}$.

(d) Existe $\lambda(t) \in L$ tal que $|f(t, x_t)| \leq \lambda(t)$, $x(t) \in \bar{S}$, $t \in J$.

Seja $\xi_0 \in X_{0D}$.

Então existem constantes positivas, C_0 e K, dependendo apenas de B, D e X_{1D}, de modo que se

(3.2) $$C_0 |\xi_0| + Kr \leq \rho_{\sigma},$$

segue que (E) tem pelo menos uma solução $x(t) \in S$ satisfazendo (2.9) com $x_0 = \Phi + x(0)$.

Prova:

Seja $y(t) \in \bar{S}$. De acôrdo com a condição (b), $f(t, y_t) \in B$ e, do lema 2.2 segue que

(3.3) $$\dot{x} = A(t)x + f(t, y_t)$$

tem uma única D-solução $x(t)$ satisfazendo (2.9) e (2.10), onde $g(t) = f(t, y_t)$. Seja $T_0 : \bar{S} \to D$ o operador que associa a cada $y(t) \in \bar{S}$ a correspondente D-solução $x(t)$ de (3.3).

Dêste modo, se $y(t) \in \overline{S}$ e $x(t) = T_o[y(t)]$, segue de (2.10) que $|x|_D \leqslant C_o|\xi_o| + K|f(t, y_t)|_B$ e, combinando esta relação com a hipótese (c) e depois com (3.2), obtemos que $|x|_D \leqslant \rho$. Portanto, $T_o\overline{S} \subset S$.

Consideremos $y^j(t) \in \overline{S}$, $g_j(t) = f(t, y^j_t)$, $x_j(t) = T_o[y^j(t)]$, $j = 1, 2$. Nestas condições, $x_1(t) - x_2(t)$ é a D-solução de (2.5), onde $g = g_1 - g_2$, com $P_{OD}(x_1(0) - x_2(0)) = 0$. Dêste fato resulta que

$$(3.4) \qquad |x_1 - x_2|_D \leqslant K|g_1 - g_2|_B$$

e isto significa que a aplicação $g(t) = f(t, y_t) \rightarrow x(t)$, de algum subconjunto de B em D, que associa a cada $g(t) = f(t, y_t)$ a única D-solução de (3.3) satisfazendo (2.9) e (2.10), é contínua.

Uma vez que, pela hipótese (b), a aplicação $y(t) \rightarrow g(t) = f(t, y_t)$, é contínua de $\overline{S} \subset C(X)$ em B, o operador T_o é contínuo de $\overline{S} \subset C(X)$ em $S \subset D$ como composição de aplicações contínuas.

Provemos agora que T_o é um operador contínuo de $\overline{S}$ em S, considerando $\overline{S}$ e S como subespaços de C(X). Para tanto lançaremos mão novamente da desigualdade (2.8), ou seja, para tôda solução x(t) de (2.5) temos:

$$(3.5) \quad |x(t)| \leqslant [T^{-1}\int_0^T |x(s)|ds + \int_0^T |g(s)|ds] \cdot \exp \int_0^T |A(s)|ds,$$

$$0 \leqslant t \leqslant T.$$

Do fato de serem B e D mais fortes que L(X), decorre através de (2.3) que existem constantes $\alpha_B(T)$ e $\alpha_D(T)$, com

$$\int_0^T |x(t)|dt \leqslant \alpha_D(T)|x|_D \; ; \; \int_0^T |g(t)|dt \leqslant \alpha_B(T)|g|_B$$

quaisquer que sejam $x \in D$ e $g \in B$.

Assim, resulta de (3.5) que, para $0 \leqslant t \leqslant T$ e $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$, $|x_1(t) - x_2(t)| \leqslant$

$$\leqslant [T^{-1} \alpha_D(T)|x_1 - x_2|_D + \alpha_B(T)|g_1 - g_2|_B] \exp\int_0^T |A(s)|ds$$

e, de acôrdo com (3.4), temos:

$$(3.6) \quad |x_1(t)-x_2(t)| \leqslant [T^{-1}\alpha_D(T)K + \alpha_B(T)]\,|g_1-g_2|_B \exp\int_0^T |A(s)|ds.$$

Seja $\varepsilon > 0$.

Existe, de acôrdo com (3.6), $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon, T) > 0$ tal que $|g_1 - g_2|_B < \delta_1$ implica que $|x_1(t) - x_2(t)| < \varepsilon$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Mas, pela hipótese (b), existe $\delta = \delta(\delta_1, T) > 0$ tal que $|y^1(\tau) - y^2(\tau)| < \delta$, $0 \leqslant \tau \leqslant T$, implica que $|g_1 - g_2|_B = |f(t, y^1_t) - f(t, y^2_t)|_B < \delta_1$. Dêste modo, $|y^1(\tau) - y^2(\tau)| < \delta$, $0 \leqslant \tau \leqslant T$, implica que $|x_1(t) - x_2(t)| < \varepsilon$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Portanto, T_0 é contínuo de $\bar{S} \subset C(X)$ em $\bar{S} \subset C(X)$.

Demonstremos agora que $T_0\bar{S}$ é relativamente compacto em C(X). De fato, se $x(t) \in T_0\bar{S}$, (3.5) combinado com a hipó tese (c) e o fato de termos $T_o\bar{S} \subset S$ implica que $|x(t)| \leqslant c(T)$, para $0 \leqslant t \leqslant T$, onde

$$c(T) = [T^{-1}\alpha_D(T)\rho + \alpha_B(T)r] \exp \int_0^T |A(s)| ds .$$

Portanto, $T_o\bar{S}$ é uniformemente limitado nos intervalos limitados de J.

Se $x(t) \in T_o\bar{S}$, sabemos que $x(t)$ é solução de (3.3), portanto podemos por

$$x(t_2) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} A(s)x(s)ds + \int_{t_1}^{t_2} f(s,y_s)ds, 0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant T,$$

donde resulta, pela hipótese (d) e pela propriedade de c(T), que:

$$|x(t_2) - x(t_1)| \leqslant c(T) \int_{t_1}^{t_2} |A(s)| ds + \int_{t_1}^{t_2} \lambda(s) ds, 0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant T .$$

Como o segundo membro desta última desigualdade independe de $x(t) \in T_o S$ e tende para zero, quando $|t_2 - t_1| \to 0$, segue que $T_o\bar{S}$ é equicontínuo nos intervalos da forma $[0, T]$. Observemos agora que C(X) é um espaço vetorial topológico localmente convexo e completo [2] e que $\bar{S}$ é fechado e convexo como aderência de um convexo.

Desta forma, as conclusões que tiramos até aqui mostram que as hipóteses do teorema do ponto fixo de Tychonoff estão satisfeitas. Portanto o operador $T_o : \bar{S} \to S$ tem pelo menos um ponto fixo $x(t) \in T_o\bar{S} \subset S$.

Completamos assim a prova do teorema 3.1.

A hipótese (a) do teorema 3.1 é a mais difícil de ser testada. Massera e Schäffer em [6] dão condições necessárias e suficientes para que um par (B , D) de espaços de Banach seja A(t) - admissível com $B = L^1(X)$ e $D = L^\infty(X)$ ou $D = L_0^\infty(X)$. Abaixo nos limitaremos a enunciar essas condições.

Primeiramente, o par $(L^1(X), L^\infty(X))$ é A(t) - admissível se, e sòmente se, o par $(L^1(X), L_0^\infty(X))$ o fôr. Uma condição necessária e suficiente para que o par $(L^1(X), L_0^\infty(X))$, ou equivalentemente o par $(L^1(X), L^\infty(X))$, seja A(t) - admissível é que exista uma constante C com a propriedade seguinte:

(3.7) $$|U(t)\, P_{0D} U^{-1}(s)| \leqslant C, \quad 0 \leqslant s \leqslant t$$

(3.8) $$|U(t)\, P_{1D} U^{-1}(s)| \leqslant C, \quad 0 \leqslant t \leqslant s$$

onde U(t) é a matriz fundamental de (2.4) com $U(0) = I_n$ (matriz identidade de ordem n). Nas relações (3.7), (3.8), D pode ser entendido como $L_0^\infty(X)$ ou $L^\infty(X)$.

Êste resultado simplifica em alguns casos nas aplicações o problema de testar a hipótese (a) do teorema 3.1.

O exemplo seguinte ilustra uma situação em que se aplicam as condições acima.

Exemplo 1: Suponhamos que a matriz $A(t) = A$ seja constante e que seus auto-valores com parte real nula sejam todos sòmente raízes simples dos divisores elementares. Seja J a forma canônica de Jordan da matriz A. Podemos colocar $J = \mathrm{diag}(J^- \ J^0 \ J^+)$, onde J^- é um bloco onde apenas aparecem os auto-valores λ com $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$, em J^0 só aparecem os auto-valores λ com $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$ e, em J^+, só aqueles com $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$. Nossa hipótese sôbre os divisores elementares e os auto-valores λ, com $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$, é necessária e suficiente para que o bloco J^0 seja diagonal [ver, p. ex., 4, p. 148]. Suponhamos ainda que J^+, J^0, e J^- tenham, respectivamente, ordens p, r e q. Òbviamente, $p + q + r = n$ e nada impede que um ou dois dêsses números se anulem.

Por uma mudança de variáveis $y = Px$, onde P é uma matriz não-singular, a equação (2.4) se transforma em

$$(2.4') \qquad \mathring{y} = Jy, \qquad J = PAP^{-1}.$$

Dado $g(t) \in L^1(X)$, por simples substituição verifica-se que existe uma $L_0^\infty(X)$-solução $y(t)$ de $\mathring{y} = Jy + g(t)$ se e sòmente se, $x(t) = P^{-1}y(t)$ fôr uma $L_0^\infty(X)$-solução de $\mathring{x} = Ax + Pg(t)$. Assim, $(L^1(X), L_0^\infty(X))$ é A-admissível se, e sòmente se, fôr J-admissível. Fixemo-nos portanto na matriz J e no sistema (2.4').

A matriz fundamental $U(t)$ de (2.4'), com $U(0) = I_n$, é dada por $U(t) = \operatorname{diag}(e^{J^- t}\ e^{J^0 t}\ e^{J^+ t})$. Assim, para $D = L_0^\infty(X)$, o espaço X_{0D} é o espaço dos $x = (x_1, \ldots, x_q, 0, \ldots, 0) \in X$, e P_{0D} é dada por $P_{0D}(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_q, 0, \ldots, 0)$. Logo,

$$|U(t)P_{0D}U^{-1}(s)| = \left| \begin{pmatrix} e^{J^- t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{J^0 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{J^+ t} \end{pmatrix} P_{0D} \begin{pmatrix} \bar{e}^{J^- s} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{e}^{J^0 s} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{e}^{J^+ s} \end{pmatrix} \right| =$$

$$= \left| \begin{pmatrix} e^{J^- t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{J^0 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{J^+ t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{e}^{J^- s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} e^{J^-(t-s)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right|$$

é limitada para $0 \leqslant s \leqslant t$, ficando desta forma verificada a condição (3.7).

Tomemos agora por X_{1D} o espaço dos

$$x = (0, \ldots 0, x_{q+1}, \ldots, x_n).$$

Dêste modo, temos :

$$|U(t)P_{1D}U^{-1}(s)| = \left| \begin{pmatrix} e^{J^- t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{J^0 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{J^+ t} \end{pmatrix} P_{1D} \begin{pmatrix} \bar{e}^{J^- s} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{e}^{J^0 s} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{e}^{J^+ s} \end{pmatrix} \right| =$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} e^{J^- t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{J^0 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{J^+ t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-J^0 s} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-J^+ s} \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{J^0 (t-s)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{J^+ (t-s)} \end{pmatrix} \right\|$$

que é limitada para $0 \leqslant t \leqslant s$, cumprindo-se também a condição (3.8).

Observemos finalmente que, existe algum auto-valor λ_0 de A com parte real nula e que é raíz de multiplicidade $m > 1$ de algum divisor elementar se, e sòmente se, existir um bloco J_{λ_0} na forma canônica de Jordan, "contido" em J^0, de ordem $m > 1$ e que pode ser escrito na forma

$$J\lambda_0 = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 \dots 0 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ 0 & 0 & 0 \dots 1 \\ 0 & 0 & 0 \dots \lambda_0 \end{pmatrix} .$$

Assim, lembrando que

$$e^{J\lambda_0 t} = e^{\lambda_0 t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} \dots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ 0 & 1 & t \dots & \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ 0 & 0 & 0 \dots\dots & t \\ 0 & 0 & 0 \dots\dots & 1 \end{pmatrix}$$

podemos garantir que pelo menos um elemento de $e^{J\lambda_o t}$, portanto de $e^{J^o t}$, é produto de $e^{\lambda o t}$ por um polinômio em t de grau $m-1 \geqslant 1$. Logo, $e^{J^o t}$ não é limitada para $t \leqslant 0$. Então, se nossas hipóteses iniciais não forem satisfeitas, a condição (3.8) não se cumpre.

O resultado da análise acima pode ser resumido na seguinte asserção.

"Uma condição necessária e suficiente para que $(L^1(X), L_o^{\infty}(X))$, e portanto $(L^1(X), L^{\infty}(X))$, seja A - admissível é que os auto-valores de A com parte real nula, quando existirem, sejam raízes simples dos divisores elementares".

A seguir daremos condições suficientes sôbre os espaços B e D e sôbre a função $f(t, \varphi)$ para que sejam verificadas as hipóteses (b), (c) e (d) do teorema 3.1.

Suponhamos que β seja um espaço de Banach de funções reais definidas em J com as seguintes propriedades:

(i) β é mais forte que $L = L(R)$

(ii) se $\varphi(t) \in \beta$, $\phi(t)$ é mensurável em J e $|\phi(t)| \leqslant |\varphi(t)|$, $0 \leqslant t < \infty$, então $\phi(t) \in \beta$ e $|\phi|_\beta \leqslant |\varphi|_\beta$.

(iii) Se $h_{[o,T]}(t)$ é a função característica de um intervalo $[0, T]$, então $h_{[0,T]}(t) \in \beta$.

(iv) β é "lean" em ∞ [10], isto é, se $\varphi(t) \in \beta$, então $h_{[0,T]}\varphi \longrightarrow \varphi$ em β, com $T \longrightarrow \infty$ ($h_{[0,T]}(t) \cdot \varphi(t) \in \beta$, por (ii)).

Os espaços L^p, $1 \leqslant p < \infty$, e L_0^∞ são exemplos de espaços que satisfazem às condições (i) - (iv), entretanto L^∞ não satisfaz à condição (iv) como se pode verificar imediatamente tomando $\varphi(t) \equiv 1$.

Um espaço com as propriedades que descrevemos acima e que utilizaremos mais adiante é dado a seguir. Seja $\phi(t)$ uma função real, mensurável em J, positiva e tal que $\phi(t)$ e $1/\phi(t)$ sejam localmente limitadas. Definimos $L^\infty_{\phi,0}$ como o espaço das funções reais $\varphi(t)$ tais que $\varphi(t)/\phi(t) \in L_0^\infty$ com norma $|\varphi|_{\phi,0} = |\varphi/\phi|_\infty$. Dêste modo $L^\infty_{\phi,0}$ satisfaz (i) - (iv).

Uma condição suficiente para que uma função $\lambda(t)$ pertença a $L^\infty_{\phi,0}$ é que

$$(3.9) \qquad 0 \leqslant \lambda(t) \leqslant \phi(t)\ ; \quad \lambda(t) = o(\phi(t)),\ t \longrightarrow \infty .$$

<u>Hipótese (H) sôbre f</u>: Seja $\emptyset \in C$, com $\emptyset(0) = 0$, e consideremos a bola $V = \{\varphi \in C \mid \ \|\varphi\| \leqslant \rho + \|\emptyset\|\}$, $\rho > 0$, e a aplicação $f(t, \varphi)$ que leva $J \times V$ num subespaço Y de X. Suponhamos ainda que se verifiquem as seguintes condições:

(1) $f(t, \varphi)$ é mensurável em t para cada $\varphi \in V$ fixado e contínua em φ para cada $t \in J$ fixado.

(2) Existe uma função real $\lambda(t)$, mensurável em J, tal que:

$$|f(t, \varphi)| \leqslant \lambda(t), \; t \geqslant 0, \; \|\varphi\| \leqslant \rho + \|\emptyset\| . \tag{3.10}$$

O lema seguinte nos fornece condições suficientes para que se verifiquem as hipóteses (b), (c) e (d) do teorema 3.1.

<u>LEMA 3.1</u> - <u>Sejam $B = L^p(Y)$, $1 \leqslant p < \infty$, $D = L^\infty(X)$ ou $D = L^\infty_c(X)$ e suponhamos que $f(t, \varphi)$ satisfaça à hipótese (H), com $\lambda(t) \in L^p$. Então as condições (b), (c) e (d) do teorema 3.1 estão satisfeitas, com $r = |\lambda(t)|_p$ em (c)</u>.

<u>Prova</u>:

Todo nosso trabalho nesta prova se resumirá em verificar a condição (b), ou seja, que a aplicação $x(t) \to f(t, x_t)$ é contínua de $\bar{S}$, como subespaço de $C(X)$, em B.

Tendo sempre em conta a identificação dada em (3.1), temos que, se $x(t) \in \bar{S}$, a função (da variável t) $f(t, x_t)$ é mensurável em J.

Como $\lambda(t) \in L^p$ e (3.10) é verificado segue que $f(t, x_t) \in L^p(Y)$, para $x(t) \in \bar{S}$.

Seja $x_n(t) \in \bar{S}$, $n = 1, 2, \ldots$, com $x_n(t) \to x(t)$ em $\bar{S}$, quando $n \to \infty$. Como a topologia de $\bar{S}$ é a induzida pela de $C(X)$, segue que $x_n(t) \to x(t)$, quando $n \to \infty$, uniformemente nos intervalos limitados de J. Dêste fato e da continuidade de $f(t, \varphi)$ em φ, para cada $t \in J$, com $\|\varphi\| \leqslant \rho + \|\emptyset\|$, decorre que $f(t, x_{n_t}) \to f(t, x_t)$, quando $n \to \infty$, pontualmente em J. Como $\lambda(t) \in L^p$ temos, como consequência do teorema da convergência dominada [12, th. 4. 4a], que

$$|f(t, x_{n_t}) - f(t, x_t)|_p \to 0, \text{ quando } n \to \infty$$

Assim, a aplicação $x(t) \to f(t, x_t)$ é contínua de $\bar{S}$ em $B = L^p(Y)$, estando verificada a condição (b).

A condição (c) está satisfeita em virtude de (3.10) com $r = |\lambda|_p$ e (d) é consequência imediata de (3.10).

Fica assim completa a nossa prova.

O lema 3.1 é relacionado com um resultado de Hartman e Onuchic [5, lemma 2.1] para o caso ordinário. Entretanto, a formulação que aparece aqui apresenta alguma diferença além das naturais adaptações ao nosso contexto. Como dissemos na seção 1, Hartman e Onuchic enunciam o resultado para espaços de Banach mais gerais que os do tipo $B = L^p(Y)$, $1 \leq p < \infty$, com os quais trabalhamos. Por outro lado, não fazemos aqui a hipótese de que a continuidade em φ da aplicação $f(t, \varphi)$ seja uniforme em t para t variando em intervalos limitados de J.

Um lema análogo ao discutido em [5, lemma 2.1] é dado a seguir. Com êsse objetivo colocaremos antes duas definições.

Se β é um espaço de Banach de funções reais mensuráveis definidas em J, satisfazendo (i) - (iv), $\beta(X)$ representa o espaço de Banach das funções φ de J em X, mensuráveis, de modo que $|\varphi(t)| \in \beta$. Em $\beta(X)$ consideramos a norma $|\varphi|_{\beta(X)} = \|\varphi(t)\|_\beta$, que abreviaremos com $|\varphi|_\beta$.

<u>Hipótese ($\hat{H}$) sôbre f</u>: Suponhamos que a aplicação $f(t, \varphi)$ satisfaça às condições da hipótese (H), sendo a condição (1) substituida por

(1') $f(t, \varphi)$ é mensurável em $t \in J$ para cada $\varphi \in V$ fixado e contínua em $\varphi \in V$ para cada $t \in J$ fixado, uniformemente em t para t variando em intervalos limitados.

<u>LEMA 3.2</u> - <u>Seja B um espaço de Banach do tipo $B = \beta(Y)$</u>,

<u>onde β satisfaz (i) - (iv). Seja $D = L^\infty(X)$ ou $D = L_0^\infty(X)$. Se $f(t, \varphi)$ satisfaz à hipótese $(\hat{H})$, com $\lambda(t) \in \beta$, então as condições (b), (c) e (d) do teorema 3.1 estão satisfeitas, com $r = |\lambda(t)|_\beta$ em (c).</u>

<u>Prova</u>:

As condições (c) e (d) estão satisfeitas pelas mesmas razões que no lema 3.1. Neste caso, só nos resta verificar a condição (b).

Na condição (2) da hipótese (H), que está contida em $(\hat{H})$, temos que $\lambda(t) \in \beta$, então $f(t, x_t) \in B$, para todo $x(t) \in C(X)$, com $|x(t)| \leqslant \rho$.

Seja $\varepsilon > 0$. De acôrdo com (iv), existe $T > 0$ de modo que $|h_{[T,\infty)}(t)\,\lambda(t)|_\beta < \varepsilon/4$.

Sabemos pela condição (1') que $f(t, \varphi)$ é contínua em φ uniformemente em t, para $t \in [0, T]$, portanto, existe $\delta > 0$, independente de $t \in [0, T]$, tal que se $x(t), y(t) \in \bar{S}$ e $|x(t)-y(t)| < \delta$, então $|f(t,x_t) - f(t,y_t)| < \dfrac{\varepsilon}{2|h_{[0,T]}|_\beta}$, se $t \in [0, T]$, donde para todo $t \in J$ tem-se:

$$|f(t,x_t)-f(t,y_t)| < h_{[0,T]}(t)\,\frac{\varepsilon}{2|h_{[0,T]}|_\beta} + 2h_{[T,\infty)}(t)\,\lambda(t).$$

O segundo membro da última relação é um elemento de

β ; além disso, para todo $x(t) \in \bar{S}$, a função $f(t, x_t)$ é mensurável em J. Assim, em vista da condição (ii), podemos escrever :

$$|f(t, x_t) - f(t, y_t)|_\beta \leqslant$$

$$\leqslant |h_{[0,T]}|_\beta \cdot \frac{\varepsilon}{2|h_{[0,T]}|_\beta} + 2|h_{[T,\infty)}(t) \cdot \lambda(t)|_\beta < \varepsilon .$$

Dêste modo completamos a prova da condição (b) e com ela a do lema 3.2.

A prova do lema 3.2 é uma adaptação ao caso com retardamento no tempo da que se encontra em [8, lema 2.3].

O exemplo seguinte mostra uma situação em que se aplica o lema 3.1, mas não o lema 3.2.

<u>Exemplo 2</u>: Seja fixado θ, $-h \leqslant \theta \leqslant 0$. Pomos $\delta = \rho + \|\phi\|$. Definamos $f(t, \varphi)$ de $J \times V$ em R por

$$f(t, \varphi) = \begin{cases} t^{-1/2}\varphi(\theta) & , 0 < t \leqslant 1 \\ t^{-2}\varphi(\theta) & , 1 \leqslant t < \infty \\ 0 & , t = 0 \end{cases}$$

Consideremos $\lambda(t) \in L^p$, $1 \leqslant p < \infty$, definida por

$$\lambda(t) = \begin{cases} \delta t^{-\frac{1}{2p}} & , 0 < t \leqslant 1 \\ \delta t^{-2/p} & , 1 \leqslant t < \infty \\ 0 & , t = 0 \end{cases}$$

A aplicação $f(t, \varphi)$ satisfaz claramente à hipótese (H), portanto o lema 3.1 garante neste caso as condições (b), (c) e (d) do teorema 3.1, com $X = Y = R$. Entretanto, a continuidade de $f(t, \varphi)$ em φ não é uniforme em t para t variando em intervalos da forma $[0, T]$, $0 < T < \infty$, logo, o lema 3.2 não é aplicável a esta situação.

O teorema seguinte é uma combinação do lema 3.2 com o teorema 3.1.

TEOREMA 3.2 - Seja $A(t)$ matriz $n \times n$ localmente Lebesgue-integrável em J. Sejam B um espaço de Banach do tipo $B = \beta(Y)$ com β satisfazendo (i)-(iv) e $D = L^{\infty}(X)$ [ou $D = L_0^{\infty}(X)$]. Suponhamos ainda que (B, D) seja $A(t)$-admissível e que $f(t, \varphi)$ seja uma aplicação satisfazendo à hipótese $(\hat{H})$, com $\lambda(t) \in \beta$. Sejam $\xi_0 \in X_{0D}$ e $r = |\lambda(t)|_{\beta}$.

Então, se (3.2) está satisfeita, (E) tem pelo menos uma solução $x(t)$, com $x_0 = \emptyset + x(0)$, satisfazendo (2.9) e $|x(t)| \leqslant \rho$, para $t \in J$ [e $x(t) \to 0$, quando $t \to \infty$].

Prova:

Trata-se apenas de aplicar o lema 3.2 para verificar as hipóteses do teorema 3.1.

B e D são espaços de Banach mais fortes que L(X) e, como a condição (a) do teorema 3.1 é uma de nossas hipóteses, é suficiente verificar as condições (b), (c) e (d). Mas, as hipóteses do lema 3.2 estão satisfeitas e portanto, valem as condições (b), (c) e (d). Observando que as conclusões do teorema 3.1 coincidem com as do nosso teorema quando $D = L^{\infty}(X)$ [ou $D = L_0^{\infty}(X)$], completamos nossa prova.

O teorema precedente poderia ser estabelecido similarmente com base no lema 3.1 como segue.

<u>TEOREMA 3.3</u> - <u>Seja $A(t)$ matriz $n \times n$ localmente Lebesgue-integrável em J. Sejam $B = L^p(Y)$, $1 \leq p < \infty$, e $D = L^{\infty}(X)$ ou [$D = L_c^{\infty}(X)$]. Suponhamos ainda que (B, D) seja $A(t)$-admissível e que $f(t, \varphi)$ seja uma aplicação satisfazendo à hipótese (H), com $\lambda(t) \in L^p$. Sejam $\xi_0 \in X_{OD}$ e $r = |\lambda(t)|_p$. Então, valem as conclusões do teorema 3.2.</u>

Uma prova pode ser dada de maneira completamente análoga à do teorema 3.2, combinando agora o lema 3.1 com o teorema 3.1.

Finalizamos esta seção apresentando um teorema que constitui um caso particular do teorema 3.1. É bastante manejável para as aplicações.

TEOREMA 3.4 - Sejam $A(t)$ matriz $n \times n$ localmente Lebesgue - integrável em J e $D = L^{\infty}(X)$ [ou $D = L_0^{\infty}(X)$]. Suponhamos que $f(t, \varphi)$ satisfaça a hipótese $(\hat{H})$, com $\emptyset = 0$, e admitamos que:

(I) $\lambda(t) \in L^1$ e $(L^1(Y), D)$ seja $A(t)$ - admissível,

ou (II) exista uma função real $\phi(t)$ mensurável em J, com $\phi(t)$, $1/\phi(t)$ localmente limitadas, de modo que:

1) $\lambda(t) \leqslant \phi(t)$ e $\lambda(t) = o(\phi(t))$, $t \to \infty$

2) $(L^{\infty}_{\phi, 0}(Y), D)$ é $A(t)$ - admissível.

Então existem constantes positivas C_0 e K de modo que, se $|\xi_0|$ fôr suficientemente pequeno e T suficientemente grande no sentido de se ter, no caso (I),

$$C_0 |\xi_0| + K \int_T^{\infty} \lambda(t) dt \leqslant \rho, \tag{3.11}$$

ou, no caso (II),

$$C_0 |\xi_0| + K \lambda(t)/\phi(t) \leqslant \rho, \tag{3.12}$$

(E) tem uma solução $x(t)$ para $t \geqslant T$, com $|x(t)| \leqslant \rho$[e $|x(t)| \to 0$, com $t \to \infty$] e

$$P_{0D}\, U^{-1}(T)\, x(T) = \xi_0, \tag{3.13}$$

onde $U(t)$ é a matriz fundamental da (2.4) com $U(0) = I$.

PROVA :

Substituindo $f(t,\varphi)$ por $\hat{f}(t,\varphi) = h_{[T,\infty)}(t)f(t,\varphi)$ e $\lambda(t)$ por $\hat{\lambda}(t) = h_{[T,\infty)}(t)\,\lambda(t)$ e, tendo em conta que se $\beta = L^1$ ou $\beta = L^{\infty}_{\phi,0}$, então β satisfaz às condições (i) - (iv), estamos em condições de aplicar o teorema 3.2 com $\beta = L^1$ no caso (I) e $\beta = L^{\infty}_{\phi,0}$ no caso (II).

Assim, existe pelo menos uma solução $\hat{x}(t)$ de $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + \hat{f}(t, x_t)$, para $t \geq 0$, satisfazendo $|\hat{x}(t)| \leq \rho$ [e $\hat{x}(t) \to 0$, com $t \to \infty$] com $P_{0D}\,\hat{x}(0) = \xi_0$ e $\hat{x}_0 = \emptyset + \hat{x}(0) = \hat{x}(0)$. Mas, $x(t) = \hat{x}(t)$ para $t \geq T$ é solução de (E) em $[T, \infty)$. Além disso, $x(T) = \hat{x}(T) = U(T)\hat{x}(0)$, donde $\hat{x}(0) = U^{-1}(T)x(T)$. Logo, $|x(t)| \leq \rho$ para $t \geq T$ [e $x(t) \to 0$, com $t \to \infty$] e $P_{0D}U^{-1}(T)x(T) = \xi_0$.

Dêste modo, está completa a prova.

Uma significativa aplicação do teorema acima, com a hipótese (II), a problemas de integração assintótica no caso ordinário é encontrada em [7].

4 . APLICAÇÕES

(A) Consideremos o sistema

$$(4.1)\qquad \begin{aligned} \dot{u}_1(t) &= u_2(t) \\ \dot{u}_2(t) &= u_3(t) \\ &\vdots \\ \dot{u}_n(t) &= h(t,(u_1)_t,(u_2)_t,\dots,(u_n)_t)\ ,\ n \geq 2\ , \end{aligned}$$

onde $h(t\ ,\ \varphi_1,\dots,\ \varphi_n)$ é uma aplicação contínua de $J \times C$ em X (onde C^n é o produto cartesiano de n fatores iguais ao espaço $C = C(\ [-h\ ,\ 0\ ]\ ,R))$. Consideremos ainda um polinômio em t de grau $n-1$, $P(t) = a_0 + a_1 t + \dots$ $\dots\ a_{n-1}t^{n-1}$, $a_j =$ constante, $j = 1, \dots, n-1$, $a_{n-1} \neq 0$.

O problema que se põe é o de saber se existe uma solução $(u_1(t)\ ,\ u_2(t)\ ,\ \dots\ ,\ u_n(t))$ de (4.1) de modo que

$$(4.2)\qquad \begin{aligned} & u_1(t) - P(t) \to 0 \\ & u_2(t) - \dot{P}(t) \to 0 \\ & \vdots \\ & u_n(t) - P^{(n-1)}(t) \to 0\ ,\ \text{quando } t \to \infty \end{aligned}$$

<u>ESCÓLIO</u>: o sistema (4.1) é equivalente à equação escalar de ordem n

$$u^{(n)}(t) = h(t, u_t, \mathring{u}_t, \dots, u^{(n-1)}{}_t), n \geqslant 2 \tag{4.3}$$

Observando que uma solução da equação ordinária de ordem n, $x^{(n)} = 0$, é um polinômio da forma $P(t)$, o problema colocado é o de encontrar condições sôbre a perturbação $h(t, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ para que a equação (4.3) tenha uma solução que, juntamente com suas derivadas até ordem $n-1$, estejam próximas de $P(t)$ e suas respectivas derivadas, para t suficientemente grande, no sentido de (4.2). Evidentemente o problema sugere condições de pequenez para $h(t, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$.

Consideremos a seguinte mudança de variáveis

$$u_j = P^{(j-1)}(t) + x_j, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Assim o sistema (4.1) fica

$$\begin{aligned} \mathring{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \mathring{x}_2(t) &= x_3(t) \\ &\vdots \\ \mathring{x}_n(t) &= h(t, P_t + (x_1)_t, \mathring{P}_t + (x_2)_t, \dots \\ &\quad \dots, (n-1)!\, a_{n-1}(x_n)_t) \end{aligned} \tag{4.4}$$

e as condições (4.2) podem agora ser escritas

$$x_1^{(j-1)}(t) \longrightarrow 0, \text{ quando } t \longrightarrow \infty, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Êste fato sugere a aplicação do teorema (3.4) fazendo $D = L_0^{\infty}(X)$. Para tanto, observemos que o sistema (4.3) na forma matricial é equivalente a uma equação do tipo da equação (E), ou seja,

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ h(t, P_t + (x_1)_t, \dot{P}_t + (x_2)_t, \dots, (n-1)!\, a_{n-1}(x_n)_t) \end{pmatrix}$$

onde

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Afim de que a hipótese $(\hat{H})$ esteja satisfeita, assumiremos que se cumpra a condição :

$$(4.5) \qquad |h(t, P_t + \varphi_1, \dots, (n-1)!\, a_{n-1}\varphi_n)| \leqslant \lambda(t),$$

para $\|\varphi_j\| \leqslant \rho$, $j = 1, 2, \dots, n$, e onde $\lambda(t)$ é uma função real mensurável em J.

Além disso, visando empregar o teorema (3.4) no caso (II), consideremos uma função $\phi(t) > 0$, mensurável em J, com $\phi(t)$ e $1/\phi(t)$ localmente limitadas em J e ainda satisfazendo $0 \leqslant \lambda(t) \leqslant \phi(t)$, de modo que o par $(L^{\infty}_{\phi,0}(Y), D)$ seja A(t) - admissível, onde

$$L^{\infty}_{\phi,0}(Y) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \varphi(t) \end{pmatrix} \in L^{\infty}_{\phi,0}(X) \right\}$$

tem a norma induzida pela de $L^{\infty}_{\phi,0}(X)$.

Procuraremos agora dar condições para que o par $(L^{\infty}_{\phi,0}(Y), D)$ seja A(t) - admissível. Com êsse objetivo, consideremos uma função $\varphi(t) \in L^{\infty}_{\phi,0}$ e o sistema ordinário

$$(4.6) \qquad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= \varphi(t) \end{aligned}$$

que, na forma matricial é dado por $\dot{x} = A(t)x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \varphi(t) \end{pmatrix}$, onde

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \varphi(t) \end{pmatrix} \varepsilon Y$ e $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Para que seja satisfeita a condição de $A(t)$ - admissibilidade deve existir uma solução $x_n(t) = \int_{t_0}^{t} \varphi(s)ds + c$ da última equação (4.6) que satisfaça $x_n(t) \to 0$, quando $t \to \infty$ (lembrando que $D = L_0^{\infty}(X)$). Assim, devemos ter $x_n(t) = \int_{\infty}^{t} \varphi(s)ds$ e, fazendo o mesmo raciocínio para as equações restantes concluímos que existirá uma solução $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ do sistema (4.6), com $x(t) \to 0$, quando $t \to \infty$, se a integral

$$x_1(t) = \int_{\infty}^{t} dt_1 \int_{\infty}^{t_1} dt_2 \ldots \int_{\infty}^{t_{n-1}} \varphi(s)ds, \quad t \geqslant T \tag{4.7}$$

onde T é alguma constante não negativa, fôr convergente.

Uma condição necessária e suficiente para a convergência de (4.7) é que $\int^{\infty} t^{u-1} |\varphi(t)| dt < \infty$ [11]. Por razões que ficarão claras logo abaixo tomaremos a função escalar $\lambda(t)$ positiva e de modo que se tenha

$$\int^{\infty} t^{n-1} \lambda(t) dt < \infty$$

Nestas condições, existe uma função escalar $\mu(t) \geqslant 1$, com $\mu(t) \to \infty$, quanto $t \to \infty$, tal que $\int^{\infty} t^{n-1} \lambda(t) \mu(t) dt < \infty$, de acôrdo com o lema 2.3.

Se tomarmos $\phi(t) = \mu(t) \lambda(t)$ estaremos em condições de aplicar o teorema 3.4 - caso (II). De fato, da própria escôlha segue $\lambda(t) \leqslant \phi(t)$ e que $\lambda(t) = o(\phi(t))$, $t \to \infty$. Além disso, se $\varphi(t) \in L^{\infty}_{\phi,0}$, tem-se $\varphi(t) = o(\mu(t)\lambda(t))$, $t \to \infty$, o que acarreta para qualquer constante $M > 0$, que $|\varphi(t)| \leqslant M\mu(t)\lambda(t)$, para t suficientemente grande. Assim,

$$\int^{\infty} t^{n-1} |\varphi(t)| dt \leqslant M \int^{\infty} t^{n-1} \mu(t)\lambda(t) dt < \infty$$

o que justifica a escôlha de $\lambda(t)$ e implica que

$$\int_{\infty}^{t} dt_1 \int_{\infty}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{\infty}^{t_{n-1}} \varphi(s) ds < \infty$$

donde a existência de uma D - solução de (4.6) e portanto, a $A(t)$ - admissibilidade de $(L^{\infty}_{\phi,0}, D)$.

Logo o teorema 3.4 garante a existência de uma solução do sistema (4.4) dentro das condições requeridas e, por conseguinte, de uma solução de (4.1) satisfazendo às condições (4.2).

Dêste modo, podemos resumir: Para que (4.1) tenha uma solução satisfazendo às condições (4.2) é suficiente que existam uma constante ρ e uma função $\lambda(t) > 0$ tais que:

$$|h(t, P_t + \varphi_1, \ldots, (n-1)!\, a_{n-1} \varphi_n)| \leqslant \lambda(t),$$

$$\text{para } \|\varphi_j\| < \rho, \; j = 1, \ldots, n.$$

e

$$\int t^{n-1} \lambda(t) dt < \infty.$$

(B) Suponhamos que a matriz $A(t) = A$ seja constante e que seus auto-valores de parte real nula sejam raízes simples dos divisores elementares. Seja $\lambda(t)$ uma função real mensurável em J de modo que

$$(4.7) \qquad |f(t,\varphi)| \leq \lambda(t), \qquad t \in J, \qquad \varphi \in C$$

$$(4.8) \qquad \int^{\infty} \lambda(t)dt < \infty$$

Suponhamos ainda que a matriz A tenha p auto-valores com parte real positiva, q auto valores com parte real negativa e r auto-valores com parte real zero, onde admitimos a possibilidade de um ou dois dos inteiros p, q e r serem zero. Nestas condições, se $f(t,\varphi)$ é contínua, para $t \geq 0$, decorre do teorema 3.4 - caso I - que a equação

$$(4.9) \qquad \dot{x}(t) = Ax(t) + f(t, x_t)$$

tem uma família a q-parâmetros de soluções $x(t)$ satisfazendo $x(t) \to 0$, quando $t \to \infty$.

De fato, de acôrdo com a discussão feita anteriormente, exemplo 1 - sec. 3, o par $(L^1(X), L_0^{\infty}(X))$ é A-admissível e $X_{0,L_0^{\infty}(X)}$ é um subespaço q-dimensional de X. Da hipótese de continuidade sôbre $f(t,\varphi)$ e da relação (4.7) segue que $f(t,\varphi)$ satisfaz a condição $(\hat{H})$.

Portanto, em virtude de ser $X_{0,L_0^\infty(X)}$ um espaço q-dimensional, podemos garantir a existência de uma família a q - parâmetros de soluções com a propriedade requerida.

<u>OBSERVAÇÃO</u> : 1) O resultado acima garante a existência de uma família de soluções $x(t)$, com $x(t) \to 0$, quando $t \to \infty$, a q - parâmetros, podendo eventualmente existir uma família dependendo de um número maior de parâmetros. Entretanto, dentro das condições requeridas, esta é a máxima generalidade em que se pode enunciar o resultado. De fato, se tomarmos $f(t, \varphi) \equiv 0$, a equação (4.9) se reduz uma equação ordinária linear homogênea e, portanto, a cada ξ_0 corresponde uma única solução e, neste caso, q é o número máximo de parâmetros.

2) Quando $q = 0$ a expressão "existe uma família a q - parâmetros de soluções "significa que existe uma única solução.

REFERÊNCIAS

[1] N.Bourbaki : "Espaçes Vectoriels Topologiques", Chapitre II - Hermann (1953)

[2] - : "Topologie Génerale" Chapitre X - Hermann (1949)

[3] C. Corduneanu : "Problèmes Globaux dans la Théorie des Équations Intégrales de Volterra" - Annali di Matematica, V. 67 (1964) 349 - 364 .

[4] I.M. Gel'fand : "Lectures on Linear Algebra" - Interscience (1961)

[5] P.Hartman , N.Onuchic : "On the Asymptotic Integration of Ordinary Differential Equations" - Pacific Journal of Mathematics , V. 13, Nº 4 (1963)

[6] J.L.Massera , J.J. Schäffer : "Linear Differential Equations and Functional Analysis, IV" - Mathematische Annalen, V. 139 (1960) 287-342.

[7] N.Onuchic : "Asymptotic Relationships Infinity between two Systems of Ordinary Differential Equations" - Journal of Differential Equations, V. 3, Nº 1 (Jan. 1967)

[8] - : "Comportamento Assintótico das Soluções de um Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias" - F.F.C.L. Rio Claro (1965)

[9] - ; O.L.Linhares , L.R.Onuchic : "Equações Diferenciais Funcionais" - Instituto de Pesqui - sas Matemáticas da U.S.P. e F.F.C.L. de Rio Cla- ro (1965)

[10] J.J.Schaffer : "Linear Differential Equations and Functional Analysis , VI" - Mathematische Annalen, V. 154 (1962), 354 - 400

[11] Z. Szmydt : "Sur l'Allure Asymptotique des Intégrales de Certains Systèmes d'Équations Diferentielles non Linéaires" - Annales Polonici Mathematici , I.2 (1955) 253 - 276.

[12] J.H. Williamson : "Lebesgue Integration" - Holt (1962)

[13] A. Zaanen : "Linear Analysis" - Interscience (1953).

ON THE ASYMPTOTIC BEHAVIOR FOR A CLASS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH TIME DELAY (SUMMARY)

The objective of this work is to study certain properties near the infinity of the solutions of the differential system

$$\dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + f(t\,,x_t)\ ,$$

where f is a perturbation with time delay.

The idea is to extend results of a paper by P. Hartman and N. Onuchic, quoted in the work, concerning the ordinary sistem $\dot{x} = A(t)x + f(t, x)$. We use essentially the same tool as in the mentioned paper of Hartman and Onuchic, which is strongly dependent on the results of J. Massera and J. Schäffer on linear differential equations and functional analysis.

We make also applications of the mentioned extension.