ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS USP,

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

TRABALHO DE MESTRADO

RELAÇÕES ENTRE DIFERENTES DEFINIÇÕES DE ESTABILIDADE NO SENTIDO DE LYAPUNOFF

JOSÉ GERALDDO DOS REIS

Orientador:

Prof. NELSON ONUCHIC

SÃO CARLOS

1972

José Geraldo dos Reis

Orientador: Prof. Nelson Onuchic

Relações entre diferentes definições de estabilidade no sentido de Lyapunoff

Trabalho apresentado à Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, para obtenção do título de "Mestre em Matemática".

Departamento de Matemática
Escola de Engenharia de São Carlos - USP

AGRADECIMENTOS

Desejamos agradecer às seguintes pessoas:

Ao Professor Dr. Nelson Onuchic, pela orientação segura, sem a qual este trabalho não teria sido realizado.

Aos Professores Dr. Geraldo Garcia Duarte e Euclydes Custódio de Lima Filho, pelo estímulo e facilidades a nós concedidas.

À Professora Lourdes de la Rosa Onuchic, com quem discutimos a forma final de apresentação, pela sua inestimável ajuda.

Aos nossos colegas, professores Maria Aparecida de Paiva Franco e Antonio Acra Freiria, com quem discutimos diversos aspectos do trabalho.

À sra. Hilda Bruno, que eficientemente datilografou as notas originais.

À todos aqueles que direta ou indiretamente nos auxiliaram.

INTRODUÇÃO

O principal objetivo deste trabalho é estudar diversas relações, existentes entre os diferentes conceitos de estabilidade no sentido de Lyapunoff.

No Capítulo I apresentamos alguns fatos básicos, incluindo as definições dos vários tipos de estabilidade. Estudamos, nesta parte, algumas implicações entre os diversos conceitos, assim como, contra exemplos, que servem para provar a não equivalência entre diferentes conceitos. Dentro deste primeiro capítulo desejamos realçar os teoremas 2 e 3. Embora o conteúdo e as demonstrações dos mesmos sejam naturais, não encontramos na literatura uma prova explícita dos mesmos.

No Capítulo II estudamos casos particulares. No primeiro parágrafo estudamos os sistemas de equações diferenciais periódicas e autônomas. No segundo parágrafo consideramos o caso em que o sistema é linear. Apresentamos, também neste parágrafo, alguns resultados básicos, sobre sistemas lineares. Chamamos atenção para a observação que segue o teorema 6.

SUMMARY

The main objective of this work is to study differents types of stability in the sense of Lyapunov.

In Chapter I we discuss several relationships among the differents concepts of stability.

Several exemples are also discussed in detail.

In Chapter II we consider the concept of stability for the special cases in which the system are linear, autonomous and periodic.

CAPÍTULO I

PRELIMINARES - DEFINIÇÕES - RELAÇÕES - EXEMPLOS

1. PRELIMINARES

Com o objetivo de apresentar e discutir diferentes conceitos de estabilidade da solução $x(t) \equiv 0$ da equação

$$\dot{x} = f(t,x) \tag{1}$$

vamos dar algumas notações, definições e alguns fatos básicos.

Estaremos sempre supondo $f(t,x)$ contínua em $[0,\infty) \times \Omega$, onde Ω é um aberto do R^n, e ainda mais, que temos unicidade de solução em relação às condições iniciais.

Indicaremos por $x(t;t_o,x_o)$ a solução que passa por x_o no instante $t = t_o$.

Sabemos que existe t^+ tal que $x(t;t_o,x_o)$ é definida em $[t_o,t^+)$, $t^+ \leq \infty$, e de tal forma que $x(t;t_o,x_o)$ não pode ser estendida à direita de t^+ como solução de (1). Quando $t^+ = \infty$ dizemos que $x(t;t_o,x_o)$ é definida no futuro. Se $x(t;t_o,x_o)$ é definida no futuro e limitada em $[t_o,\infty)$ dizemos que ela é limitada no futuro.

No que se segue $\|\cdot\|$ representa uma conveniente norma do R^n.

Uma condição suficiente e de grande interesse para se verificar quando $x(t;t_o,x_o)$ é limitada no futuro é dada por:

Lema: "Seja $x(t)$ uma solução de (1), tal que $x(t) \in K \subset \Omega$, $t_0 \leq t < t^+$, onde K é compacto. Então $t^+ = \infty$

De particular interesse neste trabalho é o teorema da continuidade em relação às condições iniciais que enunciaremos a seguir, numa forma particular, conveniente aos propósitos do trabalho.

Teorema: Seja $\varphi(t)$ solução de (1) definida em $[a,b]$. Então dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon,a,b)$, tal que, $a \leq t_0 \leq b$ e $\|x_0 - \varphi(t_0)\| < \delta$ implicam $\|x(t; t_0,x_0) - \varphi(t)\| < \varepsilon$ para $t_0 \leq t \leq b$.

2. DEFINIÇÕES DE ESTABILIDADE

Vamos supor $x = 0$ um ponto de equilíbrio de (1), isto é, $f(t,0)=0$ para $0 \leq t \leq \infty$, e estudar a estabilidade de $x = 0$. Não há perda de generalidade em considerar apenas a solução $x(t) \equiv 0$, como veremos posteriormente. Portanto, as seguintes definições dizem respeito à solução $x(t) \equiv 0$ de (1).

(I). ESTABILIDADE NO SENTIDO DE LYAPUNOFF: Dado $\varepsilon > 0$ e $t_0 \geq 0$, existe $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon, t_0)$, tal que $\|x_0\| < \delta_0$ implica $\|x(t; t_0,x_0)\| < \varepsilon$ para $t \geq t_0$.

Observações:

a) Decorre do teorema da continuidade em relação às condições iniciais que basta ter-se a propriedade para um $\bar{t}_o \geq 0$ fixo para a mesma ser válida para qualquer $t_o \geq 0$.

b) O fato de se ter $\|x(t; t_o, x_o)\| < \varepsilon$, para ε suficientemente pequeno, implica de acordo com o lema, que $x(t; t_o, x_o)$ é definida e limitada no futuro.

(II). **ESTABILIDADE UNIFORME**: Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que $t_o \geq 0, \|x_o\| < \delta(\varepsilon)$ implicam $\|x(t; t_o, x_o)\| < \varepsilon$ para $t \geq t_o$

(III). **ESTABILIDADE QUASE-ASSINTÓTICA**: Para cada $t_o \geq 0$ existe um $\delta_o = \delta_o(t_o)$, tal que $\|x_o\| < \delta_o$ implica $x(t; t_o, x_o) \to 0$ com $t \to \infty$.

Observação: Também neste caso, em decorrência do teorema da continuidade em relação às condições iniciais, basta ter-se a propriedade verificada para um $\bar{t}_o$ para a mesma ser válida para todo $t_o \geq 0$.

(IV). **ESTABILIDADE QUASE-ASSINTÓTICA UNIFORME**: Existe um $\delta_o > 0$, tal que $t_o \geq 0$, $\|x_o\| < \delta_o$ implicam $x(t; t_o, x_o) \to 0$ com $t \to \infty$.

(V). **ESTABILIDADE ASSINTÓTICA**: Valem (I) e (III).

Observação: Pelas mesmas razões citadas em (I) e (III) basta termos a propriedade para um $\bar{t}_o \geq 0$, para a mesma ser válida para todo $t_o \geq 0$.

(VI). **ESTABILIDADE EQUIASSINTÓTICA**: Existe um $\delta_o > 0$ e para cada $\varepsilon > 0$ um $T(\varepsilon)$, tal que $\|x_o\| < \delta_o$ implica $\|x(t;0,x_o)\| < \varepsilon$ para $t \geq T(\varepsilon)$.

Observação: Esta definição é equivalente à seguinte: Dados $t_o \geq 0$, $\varepsilon > 0$, existe $\delta_o = \delta_o(t_o)$ e $T(\varepsilon, t_o)$ tal que $\|x_o\| < \delta_o$ implica $\|x(t;t_o,x_o)\| < \varepsilon$ para $t \geq t_o + T(\varepsilon, t_o)$. Esta equivalência decorre imediatamente do teorema da continuidade em relação às condições iniciais.

(VII). **ESTABILIDADE EQUIASSINTÓTICA UNIFORME**: Existe um $\delta_o > 0$ e para cada $\varepsilon > 0$ um $T(\varepsilon)$, tal que $\|x_o\| < \delta_o$ implica $\|x(t;t_o,x_o)\| < \varepsilon$ para $t \geq t_o + T(\varepsilon)$.

(VIII). **ESTABILIDADE ASSINTÓTICA UNIFORME**: Valem (VII) e (II).

(IX). **ESTABILIDADE ASSINTÓTICA EXPONENCIAL**: Existem $\lambda > 0$, $\rho > 0$, $\beta > 0$, tal que $\|x_o\| < \rho$ implica

$$\|x(t;t_o,x_o)\| \leq \beta \exp\left[-\lambda(t-t_o)\right] \|x_o\| \quad \text{para } t \geq t_o.$$

Observação: Esta definição é equivalente à seguinte: Existe $\lambda > 0$ e para cada $\varepsilon > 0$ um $\delta(\varepsilon) > 0$, tal que $\|x_0\| < \delta(\varepsilon)$ implica $\|x(t;t_0,x_0)\| \leq \varepsilon \exp[-\lambda(t-t_0)]$ para $t \geq t_0$.

Vamos mostrar em seguida como definir a estabilidade de uma solução definida no futuro.

Seja $\varphi(t)$ solução de (1) definida em $[\tau,\infty)$. Consideremos em (1) a mudança de variável $y = x - \varphi(t)$. Então vem $\dot{y} = \dot{x} - \dot{\varphi}(t) = f(t,x) - f(t,\varphi(t)) = f(t,y+\varphi(t)) - f(t,\varphi(t))$ ou seja

$$\dot{y} = g(t,y), \tag{1'}$$

onde $g(t,y) = f(t,y+\varphi(t)) - f(t,\varphi(t))$, com $g(t,0) = 0$ para $t \geq \tau$

Assim temos um novo sistema (1') do qual $y=0$ é um ponto de equilíbrio. Observamos que por esta mudança de variável a solução $x = \varphi(t)$ de (1) vai na solução $y=0$ de (1'). Dizemos que a solução $\varphi(t)$ de (1) é estável num dos sentidos dados acima se a solução $y=0$ de (1) é estável no correspondente sentido.

3. RELAÇÕES ENTRE OS DIFERENTES CONCEITOS DE ESTABILIDADE

Veremos agora algumas relações entre estas definições.

Teorema 1: As seguintes implicações são válidas.

a) (IX) $\Rightarrow$ (VIII) $\Rightarrow$ (II) $\Rightarrow$ (I)

b) (IX) $\Rightarrow$ (VIII) $\Rightarrow$ (VII) $\Rightarrow$ (VI) $\Rightarrow$ (V); (V) $\Rightarrow$ (III) e (V) $\Rightarrow$ (I)

c) (IX) $\Rightarrow$ (VIII) $\Rightarrow$ (VII) $\Rightarrow$ (IV) $\Rightarrow$ (III)

Demonstração:

a) Da estabilidade assintótica exponencial temos que existe $\lambda>0$ e para cada $\varepsilon>0$ um $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, tal que $\|x_0\|<\delta\ (\varepsilon)$ implica $\|x(t;t_0,x_0)\| \leq \varepsilon \exp[-\lambda(t-t_0)]$ para $t \geq t_0 \geq 0$. Devemos mostrar que valem (II) e (VII). É imediato que vale a estabilidade uniforme, pois dado $\varepsilon>0$ existe $\delta(\varepsilon)>0$, tal que $\|x_0\|<\delta(\varepsilon)$, $t \geq t_0 \geq 0$, implicam $\|x(t;t_0,x_0)\| \leq \varepsilon \exp[-\lambda(t-t_0)] < \varepsilon$. Para mostrar a estabilidade equiassintótica uniforme tomemos $\delta_0=\delta(1)$. (δ_0 caracterizante da estabilidade equiassintótica uniforme). Então $\|x_0\|<\delta_0$, $t \geq t \geq 0$, implicam $\|x(t;t_0,x_0)\| < 1 \exp[-\lambda(t-t_0)]$.

Dado pois $\varepsilon>0$, devemos encontrar $T(\varepsilon)$ tal que $\varepsilon \geq e^{-\lambda(t-t_0)}$ para $t \geq t_0+T(\varepsilon)$. Podemos supor $\varepsilon<1$. Temos então $\log\varepsilon \geq -\lambda(t-t_0)$ de onde vem $t \geq t_0 - \dfrac{\log\varepsilon}{\lambda}$.

Logo $T(\varepsilon) = -\dfrac{\log\varepsilon}{\lambda}$. Portanto (IX) implica (VIII).

(VIII implica (II). Por definição

(II) implica (I). Basta tomar $\delta(\varepsilon,t_0)=\delta(\varepsilon)$.

b) (IX) implica (VIII). Mostrado na parte (a).

(VIII) implica (VII). Da definição.

(VII) implica (VI). Basta tomar $t_0=0$ $\delta_0(0)=\delta_0$.

(VI) implica (V). É imediato que (VI) implica (III). De fato, dado $t_0=0$, $\varepsilon>0$, existe por (VI), $\delta_0>0$ e $T(\varepsilon)$, tal que $\|x_0\|<\delta_0$, $t \geq T(\varepsilon)$ implicam $\|x(t;0,x_0)\|<\varepsilon$. Mas isto signi fica que $x(t;0,x_0) \to 0$ com $t \to \infty$. A propriedade vale pois para $t_0 = 0$.

Portanto, de acordo com a observação que segue a definição, temos que a mesma é válida para todo $t_0 \geq 0$.

Mostremos agora que (VI) implica (I). Seja $\bar{t}_0 = 0$.

Dado $\varepsilon > 0$, existe δ_0, $0 < \delta_0 < \varepsilon$, e $T(\varepsilon)$, tal que $\|x_0\| < \delta_0$ implica $\|x(t;t_0,x_0)\| < \varepsilon$ para $t \geq T(\varepsilon)$. Mas devido ao teorema da continuidade em relação às condições iniciais, podemos garantir a existência de $0 < \delta_1 < \delta_0$, tal que $\|x_0\| < \delta_1$ implica $\|x(t;0,x_0)\| < \delta_0$ para $t \in [0,T(\varepsilon)]$. Logo $\|x_0\| < \delta_1$ implica $\|x(t;0,x_0)\| < \varepsilon$ para $t \geq 0$. Portanto, de acordo com a observação que segue a definição a propriedade vale para $\bar{t}_0 = 0$, logo vale para todo $t_0 \geq 0$ o que mostra que (I) está satisfeita.

(V) Implica (I). Da definição.
(V) Implica (III). Da definição.

c) Em vista da parte (b) basta mostrar que:

(VII) $\Rightarrow$ (IV) $\Rightarrow$ (III). De fato. Suponhamos que a estabilidade equiassintótica uniforme esteja satisfeita, isto é, existe $\delta_0 > 0$ e para cada $\varepsilon > 0$ um $T(\varepsilon)$, tal que $\|x_0\| < \delta_0$ implica $\|x(t;t_0,x_0)\| < \varepsilon$ para $t \geq t_0 + T(\varepsilon)$. Mas isto significa que $x(t;t_0,x_0) \to 0$ com $t \to \infty$, ou seja, (IV) está satisfeita.

(IV) implica (III). Basta tomar $\delta_0(t_0) = \delta_0$, caracterizante de (IV).

<u>Teorema 2</u>: (II) e (III) <u>implicam</u> (VI)

<u>Demonstração</u>:

Da estabilidade quase-assintótica de $x(t) \equiv 0$ vem que existe $\delta_0 = \delta_0(0)$, tal que $\|x_0\| < \delta_0$ implica $x(t;0,x_0) \to 0$ com $t \to \infty$. Afirmamos que $0 < \eta < \delta_0$ satisfaz à exigência da equiassintocidade.

Suponhamos que não, isto é, existe $\varepsilon > 0$ tal que não podemos achar $T(\varepsilon)$ com a propriedade desejada. Portanto, existem sequências $\{x_i\}$ e $\{t_i\}$ com $\|x_i\| < \eta$ e $t_i \to \infty$, tal que

$$\|x(t_i;0,x_i)\| \geq \varepsilon \qquad \text{(a)}$$

A sequência $\{x_i\}$ possui uma subsequência convergente que também denotaremos por $\{x_i\}$. Seja $x_i \to x_0$, $\|x_0\| \leq \eta$.

Da estabilidade uniforme temos que existe $0 < \delta(\varepsilon) < \eta$ tal que $\|\tilde{x}\| < \delta(\varepsilon)$ implica $\|x(t;t_0,\tilde{x})\| < \varepsilon$ para $t \geq t_0 \geq 0$. $\forall t_0$ Afirmamos que $\|x(t;0,x_i)\| \geq \delta(\varepsilon)$ para $t \in [0,t_i]$. Por absurdo suponhamos que não. Então existe $0 \leq \bar{t}_i \leq t_i$ com $\|x(\bar{t}_i,0,x_i)\| < \delta(\varepsilon)$. Da estabilidade uniforme segue-se que $\|x(t,0,x_i)\| < \varepsilon$ para $t \geq \bar{t}_i$. No ponto $t = t_i$ tem-se então $\|x(t_i,0,x_i)\| < \varepsilon$, absurdo por (a). Portanto, $\|x(t,0,x_i)\| \geq \delta(\varepsilon)$ para $t \in [0,t_i]$. Seja $\tau > 0$ qualquer. Podemos supor $t_i > \tau$ a menos de um número finito de índices. Consideremos o intervalo $[0,\tau]$. Como $x_i \to x_0$, vem pelo teorema da continuidade em relação às condições iniciais que $x(t;0,x_i)$ converge uniformemente para $x(t;0,x_0)$ em $[0,\tau]$. Como

$\|x(t;0,x_i)\| \geq \delta(\varepsilon)$, vem que $\|x(t;0,x_0)\| \geq \delta(\varepsilon)$ em $[0,\tau]$ para qualquer τ. Mas $\|x_0\| \leq \eta < \delta_0$. Portanto $x(t;0,x_0) \to 0$ com $t \to \infty$, o que é absurdo. Logo η satisfaz à exigência da equiassintocidade.

<u>Teorema 3</u>: (II) <u>e</u> (IV) <u>implicam</u> (VIII)

<u>Demonstração</u>:

É suficiente mostrar que (II) e (IV) implicam (VII).

Da estabilidade quase assintótica uniforme temos que existe $\delta_0 > 0$, tal que $\|x_0\| < \delta_0$ implica $x(t;t_0,x_0) \to 0$ com $t \to \infty$. Afirmamos que $0 < \eta < \delta_0$ satisfaz à exigência da equiassintocidade uniforme. Suponhamos que não, isto é, existem $\varepsilon > 0$ e $t_0 \geq 0$ para os quais não é possível encontrar $T(\varepsilon)$ com a propriedade desejada. Logo, existem sequências $\{t_i\}$ e $\{x_i\}$ com $t_0 < t_i$, para qualquer i, $t_i \to \infty$ e $\|x_i\| < \eta$, tal que

$$\|x(t_i;t_0,x_i)\| \geq \varepsilon \qquad \text{(a)}$$

A sequência $\{x_i\}$ possui uma subsequência convergente que também denotaremos por $\{x_i\}$. Seja $x_i \to x_0$, $\|x_0\| \leq \eta$.

Da estabilidade uniforme segue-se que existe $\delta(\varepsilon) > 0$, tal que $\|\tilde{x}\| < \delta(\varepsilon)$ implica $\|x(t;t_0,\tilde{x})\| < \varepsilon$ para $t \geq t_0 \geq 0$. Afirmamos que $\|x(t;t_0,x_i)\| \geq \delta(\varepsilon)$ para $t \in [t_0,t_i]$. Por absurdo suponhamos que não.

Então existe $t_0 \leq \bar{t}_i \leq t_i$ com $\|x(\bar{t}_i,t_0,x_i)\| < \delta(\varepsilon)$. Da estabilidade uniforme vem que $\|x(t;t_0,x_i)\| < \varepsilon$ para $t \geq \bar{t}_i$. No ponto $t = t_1$ temos $\|x(t_i t_o, x_i)\| < \varepsilon$, absurdo por (a). Portanto $\|x(t;t_o,x_i)\| \geq \delta(\varepsilon)$ para $t \in [t_o, t_i]$. Seja $\tau > t_o > 0$ qualquer. Podemos supor $t_i > \tau$ a menos de um número finito de índices.

Consideremos o intervalo $[t_o, \tau]$. Como $x_i \to x_o$, pelo teorema da continuidade em relação às condições iniciais vem que $x(t;t_o,x_i)$ converge uniformemente para $x(t;t_o,x_o)$ em $[t_o,\tau]$, para qualquer τ. Mas $\|x_o\| \leq \eta < \delta_o$ o que implica $x(t;t_o,x_o) \to 0$ com $t \to \infty$. Mas como $\|x(t;t_o,x_i)\| \geq \delta(\varepsilon)$ vem que $\|x(t;t_o,x_o)\| \geq \delta(\varepsilon)$ em $[t_o,\tau]$ para qualquer τ. O que é absurdo. Logo η satisfaz à exigência da equiassintocidade uniforme. Note-se que η não depende de t_o. Portanto (VIII) está satisfeita.

Teorema 4: Quando $n = 1$ estabilidade quase-assintótica implica estabilidade equiassintótica.

Demonstração:

Da estabilidade quase-assintótica temos que existe $\delta_o = \delta_o(0)$ tal que $\|x_o\| < \delta_o$ implica $x(t;0,x_o) \to 0$ com $t \to \infty$.

Consideremos duas soluções $x(t;0,x_1)$ e $x(t;0,x_2)$ tais que $\|x_1\| < \delta_o$ e $\|x_2\| < \delta_o$ e ainda mais $x_1 > 0$ e $x_2 < 0$. Temos então $x(t;0,x_1) \to 0$ com $t \to \infty$ e $x(t;0,x_2) \to 0$ com $t \to \infty$. Além disso, em vista da condição de unicidade em relação às condições iniciais nenhuma delas atinge o valor zero, isto é, $x(t;0,x_1) > 0$ e $x(t;0,x_2) < 0$ para qualquer $t \geq 0$. Como

$x(t;0,x_1)$ e $x(t;0,x_2)$ tendem a zero, dado $\varepsilon > 0$ existe $\bar{t}$ tal que $|x(t;0,x_1)| < \varepsilon$ para $t \geq \bar{t}$ e $|x(t;0,x_2)| < \varepsilon$ para $t \geq \bar{t}$.

Seja $\delta = \min\{|x_1|, |x_2|\}$. Tomemos $\|x_0\| < \delta$. Como temos unicidade de solução, $x(t;0,x_0)$ permanecerá sempre entre $x(t;0,x_1)$ e $x(t;0,x_2)$ para $t \geq 0$. Logo para $t \geq \bar{t}$ vem $|x(t;0,x_0)| < \varepsilon$. Portanto a estabilidade equiassintótica está satisfeita com $\delta_0 = \delta$ e $T(\varepsilon) = \bar{t}$.

4. EXEMPLOS

Os seguintes exemplos esclarecem mais as relações entre os diferentes tipos de estabilidade.

Exemplo 1: Este exemplo mostra que (VI) não implica (II) nem mesmo para equações lineares de primeira ordem. [6], pg.189, ex.1.

Consideremos a equação diferencial:

$$\dot{x} = -\left[13+12 \text{ sen} \log(t+1) + 12\,(t+1)^{-1} \cos \log(t+1)\right] x$$

Uma solução geral é

$$x = x(0) \exp\left\{-\left[13 + 12 \text{ sen} \log(t+1)\right] t\right\}$$

Notemos que $|x(t)| \leq |x(0)|\, e^{-t}$. Mostremos que (VI) está satisfeita. De fato, tomemos $\delta_0 = 1$ (δ_0 caracterizante de (VI). Disto vem que $|x(0)| < \delta_0$ implica $|x(t)| < e^{-t}$. Dado $0 < \varepsilon < 1$, vamos escolher $T = T(\varepsilon)$ tal que $e^{-T} < \varepsilon$. Notemos que $e^{-T} < \varepsilon$ é equivalente a $T > -\log \varepsilon$. Portanto basta termos $T(\varepsilon) > -\log \varepsilon$ e (VI) está verificada. Entretanto, pondo $t_n = \exp[(4n+1)\pi/2] - 1$ e $t'_n = \exp[(4n+3)\pi/2] - 1$, vem que

$x'_n = x(t'_n) = x_o \exp\left\{-\left[13+12 \operatorname{sen}(4n+3)\ \pi/2\right] \exp\left[(4n+3)\ \pi/2\right] -1\right\}$ de onde vem

$$x'_n = x_o \exp\left\{1 - \exp\left[(4n+3)\ \pi/2\right]\right\} = x_o \exp(-t'_n)$$

Por outro lado

$$x_n = x(t_n) = x_o \exp\left\{-25(\exp\left[(4n+1)\ \pi/2\right] -1)\right\} = x_o \exp(-25\ t_n)$$

O que nos dá

$$x'_n/x_n = \exp\left\{(25-e^{\pi}) \exp\left[(4n+1)\ \pi/2 - 24\right]\right\}$$

Portanto $x'_n/x_n \to \infty$ com $n \to \infty$. Logo não vale (II).

<u>Exemplo 2</u>: Este exemplo mostra que (VII) não implica (VIII) nem mesmo quando f é linear e a equação é de primeira ordem [6] pg. 189 ex.2.

Consideremos a equação diferencial:

$$\dot{x} = (6t \operatorname{sen} t - 2t)\ x$$

Uma solução geral é

$$x(t) = x(0) \exp(6 \operatorname{sen} t - 6t \cos t - t^2)$$

Temos $x(t)/x_o = \exp(t \operatorname{sen} t - 6t \cos t - t^2 - 6 \operatorname{sen} t_o \cos t_o - t_o^2)$ onde $x_o = x(t_o)$, disto vem que

$$x/x_o \leq \exp(6 + 6t - t^2 + 6t_o + t_o - t_o t + t\, t_o)$$

de onde resulta:

$$x/x_o \leq \exp\left[12 + (t+t_o)(6-t+t_o)\right]$$

Pondo $T > 6$, $t \geq t_o + T$, observando que $6-t+t_o < 0$, vem

$$x/x_o \leq \exp\left[12 + T(6-T)\right]$$

Portanto $x/x_0 < \varepsilon$ se $T(\varepsilon) = T$ é suficientemente grande. Portanto (VII) está satisfeita, Entretanto, pondo $t_n = n\pi, n=1,2,\ldots,$ temos

$$\frac{x_{2n+1}}{x_{2n}} = \frac{\exp\left[6(2n+1)\pi - (2n+1)^2 \pi^2\right]}{\exp\left[-12n\pi - 4n^2\pi^2\right]}$$

onde $x_n = x(t_n)$, disto resulta:

$$x_{2n+1}/x_{2n} = \exp\left[(4n+1)\pi \quad (6-\pi)\right] \quad \text{logo}$$

$x_{2n+1}/x_{2n} \to \infty$ com $n \to \infty$. Logo (II) não está satisfeito, portanto (VIII) também não.

<u>Exemplo 3</u>: Este exemplo mostra que (VIII) não implica (IX). [6] pg.190, ex.3. Diferentemente dos exemplos anteriores este é não linear, pois como veremos adiante, no caso linear (VIII) e (IX) são equivalentes.

Consideremos a equação $\dot{x} = -x^3$. Uma solução é

$$x(t) = x_0 \left[1+2\,x_0^2\,(t-t_0)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

Vale (II), pois dado $\varepsilon > 0$ basta tomarmos $0 < \delta(\varepsilon) < \varepsilon$. De fato, se $|x_0| < \delta(\varepsilon)$ temos

$$|x(t)| = \frac{|x_0|}{\sqrt{1+2x_0^2\,(t-t_0)}} < \varepsilon \text{ para } t \geq t_0$$

Portanto (II) está satisfeita. Mostremos que vale (VII). Dado $\varepsilon < 1$, tomemos $\delta_0 = 1$ (δ_0 caracterizante de (VI). Então se $|x_0| < \delta_0$, vem

$$|x(t)| = \frac{|x_o|}{\sqrt{1+2x_o^2(t-t_o)}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x_o^2}+2(t-t_o)}}$$

Queremos $\dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{x_o^2}+2(t-t_o)}} < \varepsilon$, isto é, equivalente à

$\dfrac{1}{\frac{1}{x_o^2}+2(t-t_o)} < \varepsilon^2$, que é equivalente à $\dfrac{1}{x_o^2}+2(t-t_o) > \dfrac{1}{\varepsilon^2}$, o

que dá $t > t_o + \dfrac{1}{2\varepsilon^2} - \dfrac{1}{2x_o^2}$

Observando que $\dfrac{1}{2x_o^2} > 0$, temos que $|x(t)| < \varepsilon$ para $t \geq t_o + T(\varepsilon)$, onde $T(\varepsilon) = \dfrac{1}{2\varepsilon^2}$ e $\|x_o\| < \delta_o = 1$. Logo vale (VII). Entretanto, não vale (IX).

Por absurdo, suponhamos que (IX) está satisfeita, isto é, existem $\lambda > 0$, $\rho > 0$, $\beta > 0$, tal que $|x_o| < \rho$ implica

$|x(t;t_o,x_o)| < \beta \exp[-\lambda(t-t_o)]\,|x_o|$ para $t \geq t_o \geq 0$

Em nosso caso particular teríamos:

$|x(t)| = \dfrac{|x_o|}{\sqrt{1+2x_o^2(t-t_o)}} < \beta \exp[-\lambda(t-t_o)]\,|x_o|$, o que nos dá

$\dfrac{1}{\sqrt{1+2x_o^2(t-t_o)}} < \beta \exp[-\lambda(t-t_o)]$ que é equivalente à

$1 + 2x_0^2(t-t_0) > \beta^{-2} \exp[2\lambda(t-t_0)]$, para $t = t_0 = 0$. que é um absurdo. Logo (IX) não está satisfeita.

<u>Exemplo 4</u>: Birkoff-Rota [1], pg. 145; ex.6; mostram que (III) não implica (V), nem mesmo para sistemas autônomos.

CAPÍTULO II

ESTABILIDADE PARA SISTEMAS PERIÓDICOS, AUTONOMOS E LINEARES

1. SISTEMAS PERIÓDICOS E AUTONOMOS

Vamos agora à estabilidade do sistema

$$\frac{dx}{dt} = F(t,x) \tag{2}$$

Vamos supor $F(t,x)$ periódica em t, ou seja, existe $\omega > 0$ tal que, $F(t+\omega,x) = F(t,x)$ e que $x \equiv 0$ é ponto de equilíbrio de (2), isto é, $F(t,0) = 0$. Vamos considerar o caso autônomo, ou seja, $F(t,x) = G(x)$ como caso particular do caso periódico.

Para estes dois tipos de sistemas valem os seguintes teoremas:

<u>Teorema 5</u>: Se a solução $x(t) \equiv 0$ de (2) é <u>estável</u>, então ela <u>é uniformemente estável</u>.

<u>Demonstração</u>:

Da estabilidade simples temos que para qualquer $\varepsilon > 0$ existe um $\delta_1(\omega,\varepsilon)$, tal que $\|x_0\| < \delta_1(\omega,\varepsilon)$ implica $\|x(t;\omega, x_0)\| < \varepsilon$ para $t \geq \omega$. O teorema da continuidade em relação às condições iniciais garante a existência de um $\delta_0 = \delta(\omega,\delta_1)$, tal que, se $\|x_0\| < \delta_0$ e $t_0 \in [0,\omega]$ temos $\|x(t;t_0,x_0)\| < \delta_1$ para $t_0 \leq t \leq \omega$. Portanto se $t_0 \in [0,\omega]$ e $\|x_0\| < \delta_0$ vamos ter $\|x(t;t_0, x_0)\| < \varepsilon$ para todo $t \geq t_0$.

Estudemos agora o caso em que $t_0 \notin [0,\omega]$. Se $t_0 \notin [0,\omega]$, podemos garantir que existe $K \geq 1$, inteiro, tal que, $K\omega \leq t_0 < (K+1)\omega$.

Da periodicidade de $F(t,x)$, vem que se $x(t;t_0,x_0)$ é solução, então $x(t-K\omega;\ t_0-K\omega, x_0)$ também é solução. De fato.

Seja $y(t) = x(t-K\omega;\ t_0-K\omega, x_0)$. Disto resulta

$\dot{y}(t) = \dot{x}(t-K\omega;\ t_0-K\omega, x_0) = F(t-K\omega, x(t-K\omega)) = F(t, x(t-K\omega)) =$

$= F(t, y(t))$. Portanto $y(t) = x(t-K\omega)$ também é solução. Pondo $\tau = t_0 - K\omega$, vem que $0 \leq \tau < \omega$. Observando que

$x(t_0,t_0,x_0) = x(t_0-K\omega, t_0-K\omega, x_0)$ vem, pela unicidade de solução em relação às condições iniciais, que

$x(t;t_0,x_0) \equiv x(t-K\omega, t_0-K\omega, x_0)$. De fato, ambas passam por (t_0,x_0).

Como $0 \leq \tau < \omega$ e $x(t-K\omega, t_0-K\omega, x_0) \equiv x(t-K\omega, \tau, x_0)$, fazendo

$\|x_0\| < \delta_0$ vem que: $\|x(t,t_0,x_0)\| \equiv \|x(t-K\omega, t_0-K\omega, x_0)\| < \varepsilon$ para $t-K\omega \geq t_0 - K\omega$, ou seja $t \geq t_0$. Portanto $x(t) \equiv 0$ é uniformemente estável.

<u>Teorema 6</u>: <u>Para o sistema</u> (2) <u>estabilidade assintótica</u> implica <u>estabilidade assintótica uniforme</u>.

<u>Demonstração</u>:

No teorema anterior vimos que estabilidade simples implica estabilidade uniforme. Portanto já temos estabilidade uniforme e estabilidade assintótica. Em vista do teorema 2, do primeiro capítulo, deste trabalho, temos estabilidade equiassintótica. Resta, pois, mostrar que estabilidade equiassintótica implica, no caso periódico, estabilidade equiassintótica uniforme. De fato, da estabilidade equiassintótica existe $\delta_0(\omega)$ e $T(\omega, \varepsilon)$, tal que $\|x_0\| < \delta_0(\omega)$ implica $\|x(t, \omega, x_0)\| < \varepsilon$ para $t \geq \omega + T(\omega, \varepsilon)$. Pelo teorema da continuidade em relação às condições iniciais podemos garantir a existência de $\delta = \delta(\omega, \delta_0)$, tal que $\|x_0\| < \delta$ e $t_0 \in [0, \omega]$ implicam $\|x(t; t_0, x_0)\| < \delta_0$ para $t_0 \leq t \leq \omega$, e portanto $\|x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon$ para $t \geq \omega + T(\omega, \varepsilon)$. Pondo $T(\varepsilon) = \omega + T(\omega, \varepsilon)$ e lembrando que $t_0 \geq 0$ vem $\|x(t; t_0, x_0\| < \varepsilon$ para $t \geq t_0 + T(\varepsilon)$. Logo o teorema vale para qualquer $t_0 \in [0, \omega]$. Tomemos agora $t_0 \notin [0, \omega]$. Da mesma forma que no teorema anterior podemos garantir a existência de K, tal que $K\omega \leq t_0 < (K+1)\omega$.

Sabemos também que $x(t-K\omega, t_0 - K\omega, x_0)$ é solução e ainda mais, $x(t-K\omega, t_0 - K\omega, x_0) \equiv x(t; t_0, x_0)$. Fazendo $\tau = t_0 - K\omega$, mos $0 \leq \tau < \omega$. Portanto se $\|x_0\| < \delta$, temos

$$\|x(t-K\omega, t_0 - K\omega, x_0)\| < \varepsilon \quad \text{para} \quad t-K\omega \geq t_0 - K\omega + T(\varepsilon)$$

de onde vem $t \geq t_0 + T(\omega)$. Mas $\|x(t - K\omega, t_0 - K\omega, x_0)\| = \|x(t, t_0, x_0)\|$. Logo temos a estabilidade equiassintótica uniforme com $\delta_0 = \delta(\omega)$ e $T(\varepsilon) = T(\omega, \varepsilon) + \omega$.

Algumas observações devem ser feitas sobre este teorema. Este teorema encontra-se demonstrado de maneira diferente em [8]. Entretanto, na primeira parte da demonstração em [8], o fato do sistema ser periódico só é usado para ter-se estabilidade equiassintótica como decorrência da estabilidade assintótica.

Mas esta parte é mais geral como mostramos em nosso teorema 2 do primeiro capítulo. Observamos também que em nosso teorema 2 do primeiro capítulo, fazemos uma demonstração que consideramos mais simples que a primeira parte de [8] usando o teorema da continuidade em relação às condições iniciais em vez do teorema de Ascoli no espaço das funções contínuas de $[0,\infty)$ no R^n.

<u>Teorema 7: Para o sistema (2) estabilidade quase-assintótica implica estabilidade quase-assintótica uniforme.</u>

<u>Demonstração</u>:

Da estabilidade quase-assintótica vem que existe $\delta_0(\omega)$, tal que, $\|x_0\| < \delta_0(\omega)$ implica $x(t;\omega, x_0) \to 0$, com $t \to \infty$. Do teorema da continuidade em relação às condições iniciais, vem que existe $\delta = \delta(\delta_0, \omega)$, tal que $t_0 \in [0,\omega]$ e $\|x_0\| < \delta_0$ implicam $\|x(t;t_0,x_0)\| < \delta_0$ para $t_0 < t \leq \omega$. Em particular no ponto ω, isto é, $\|x(\omega,t_0,x_0)\| < \delta_0$ o que implica $x(t;t_0,x_0) \to 0$ com $t \to \infty$. Dado $t_0 \notin [0,\omega]$, sabemos que existe K,inteiro, tal que $K\omega = t_0 < (K+1)\omega$, e também que $x(t-K\omega;t_0-K\omega, x_0)$ é solução coincidente com $x(t;t_0,x_0)$. Fazendo $\tau = t_0 - K\omega$ vem que $0 \leq \tau < \omega$. Portanto se $\|x_0\| < \delta$, $x(t-K\omega;\ \tau, x_0) \to 0$ com $t \to \infty$ e consequentemente $x(t;t_0,x_0) \to 0$ com $t \to \infty$. Logo estabilidade quase-assintótica implica estabilidade quase-assintótica uniforme.

2. SISTEMAS LINEARES

Vamos considerar agora o sistema linear

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \tag{3}$$

onde $A(t)$ é uma matriz nxn, função de t, contínua para $t \geq 0$. Se $X(t)$ é uma matriz fundamental do sistema matricial $X' = A(t)\,X$ que é o sistema associado a (3), então a solução de (3) que passa pelo ponto (t_o, x_o) é dada por

$$x(t;t_o,x_o) = X(t)X^{-1}(t_o)x_o$$

Vamos enunciar alguns lemas, específicos do caso linear, que serão usados no estudo da estabilidade para estes sistemas. Estes lemas são:

Lema 1: A solução $x(t) \equiv 0$ de (3) é estável se e somente se toda solução fôr estável.

Lema 2: A solução $x(t) \equiv 0$ é estável se e somente se toda solução é limitada, o que ocorre se e somente se toda matriz fundamental é limitada.

Lema 3: A solução $x(t) \equiv 0$ é uniformemente estável se e somente se $U(t)U^{-1}(s)$ é limitada para $t \geq s \geq 0$, onde $U(t)$ é matriz fundamental qualquer. Observamos que $U(t)U^{-1}(s)$ não depende da particular matriz fundamental.

No caso linear temos as seguintes relações entre os diferentes conceitos de estabilidade.

Teorema 8: Para o sistema (3) estabilidade quase-assintótica implica estabilidade equiassintótica.

Demonstração:

Da estabilidade quase-assintótica vem que existe $\delta_0 = \delta_0\ (0)$, tal que $\|x_0\| < \delta_0$ implica $x(t;0,x_0) \to 0$ com $t \to \infty$. Mostremos que qualquer solução $x(t)$ tende a zero com $t \to \infty$. De fato. Dado $x(t)$, solução qualquer, tomamos $\tilde{x}(t) = \frac{\delta}{2} \frac{x(t)}{\|x(0)\|}$. $\tilde{x}(t)$ também é solução e $\|\tilde{x}(0)\| = \frac{\delta_0}{2} < \delta_0$, portanto $\tilde{x}(t) \to 0$ com $t \to \infty$. Logo, $x(t) \to 0$ com $t \to \infty$. Isto implica que todo elemento de $X(t)$, onde $X(t)$ é matriz fundamental, tende a zero com t tendendo ao infinito. Então dado $\varepsilon > 0$, existe $T(0, \varepsilon) = T(\varepsilon)$, tal que $\|X(t)\, X^{-1}(0)\| \leq \|X(t)\|\ \|X^{-1}(0)\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta_0}$ para $t \geq T(\varepsilon)$. Logo $\|X(t)\, X^{-1}(0)\|\ \|x_0\| < \varepsilon$ se $\|x_0\| < \delta_0$ e $t \geq T(\varepsilon)$. Portanto a estabilidade equiassintótica está satisfeita.

Teorema 9: Para o sistema (3) estabilidade assintótica uniforme implica estabilidade assintótica exponencial.

Demonstração:

Da estabilidade uniforme segue-se que existe uma constante $N \geq 1$ tal que $\|X(t)X^{-1}(t_0)\| < N$ para todo $t \geq t_0 \geq 0$, onde $X(t)$ é matriz fundamental. Da estabilidade equiassintótica uniforme vem que existem ρ, $T \geq 0$ tal que $\|X(t)\, X^{-1}(t_0)\| < 1/2$ para $t \geq t_0 + T$ e $\|x_0\| < \rho$. Entretanto $\|X(t)\, X^{-1}(t_0)\| =$
$= \|X(t)X^{-1}(t_0 + T)\ X(t_0 + T)\ X^{-1}(t_0)\| \leq \|X(t)X^{-1}(t_0 + T)\|$
$\|X(t_0 + T)\, X^{-1}(t_0)\|$.

Observando que pela estabilidade equiassintótica uniforme vem $\|X(t_o + T)\ X^{-1}(t_o)\| < 1/2$ e $\|X(t)\ X^{-1}(t_o + T)\| < 1/2$ para $t \geq t_o + 2T$, temos

$\|X(t)\ X^{-1}(t_o)\| < 2^{-2} < 2^{-2}N$ para $t \geq t_o + 2T$ e $\|x_o\| < \rho$.

Mostremos agora por indução que $\|X(t)\ X^{-1}(t_o)\| < 2^{-K}N$ para $t \geq t_o + KT$, $K = 0,1,2,\ldots$ Ja mostramos que vale para $K = 0,1,2,.$ Suponhamos a propriedade válida $K = m-1$ e **mostremos** que vale para $K = m$.

$$\|X(t)\ X^{-1}(t_o)\| = \|X(t)\ X^{-1}(t_o + (m-1)\ T)\ X(t_o + (m-1)T)\ X^{-1}(t_o)\| \leq$$
$$\leq \|X(t)\ X^{-1}(t_o + (m-1)T)\|\ \ \|X(t_o + (m-1)T)\ X^{-1}(t_o)\|$$

Notando que, devido à estabilidade equiassintótica uniforme, temos $\|X(t)\ X^{-1}(t_o + (m-1)T)\| < \frac{1}{2}$ para $t \geq t_o + mT$ e $\|X(t_o + (m-1)T)X^{-1}(t_o)\| < N/2^{m-1}$, pela hipótese de indução, para $t \geq t_o + (m-1)T$, vem $\|X(t)\ X^{-1}(t_o)\| < N\ \ 2^{-m+1}.\ 2^{-1} = 2^{-m}N$. para $t \geq t_o + mT$

Pondo $\lambda = \frac{\log 2}{T}$ vem que $\|X(t)\ X^{-1}(t_o)\| < 2N\ \rho^{-\lambda(t - t_o)}$ para $t \geq t_o$. De fato. Dado $\bar{t} \geq t_o$ temos que existe K inteiro tal que $t_o + KT \leq \bar{t} < t_o + (K+1)T$ ou seja $\bar{t} - t_o < (K+1)T$. Porém, se $\bar{t} \geq t_o + KT$ vem que $\|X(\bar{t})\ X^{-1}(t_o)\| < N\,2^{-K}$. Basta mostrar pois que $N\,2^{-K} < 2\,N\rho^{-\lambda(\bar{t}-t_o)}$, ou seja $2^{-K} < 2\,\rho^{-\lambda(\bar{t}-t_o)}$

Mas como $0 \leq \bar{t} - t_o < (K+1)T$ vem

$$2\,\rho^{-\lambda(\bar{t}-t_o)} > 2\,\rho^{-\lambda(K+1)T} = 2\,\rho^{-\frac{\log 2}{T}(K+1)T} = 2\,\rho^{-\log 2\,(K+1)} = 2^{-K}.$$

Portanto temos:

$$\|X(t)X^{-1}(t_o)\| < 2N\rho^{-\lambda(t-t_o)} \quad \text{para} \quad t \geq t_o \geq 0.$$

Tomando $\|x_o\| < \rho$ vem

$$\|X(t;t_o,x_o)\| \leq \|X(t)X^{-1}(t_o)\| \; \|X_o\| \leq 2N\rho^{-\lambda(t-t_o)}\rho$$

Portanto a estabilidade assintótica exponencial está verificada.

BIBLIOGRAFIA

[1] BIRKHOFF,G - ROTA, G.C.: Ordinary Differential Equations, Ginn and Company, N.Y., 1962.

[2] CODDINGTON, E.A. - LEVINSON, N.: Theory of Differential Equations, McGraw-Hill, 1955.

[3] HALANAY,A: Differential Equations, Stability, Oscilations, Time Lag. Academic Press, N.Y., 1966.

[4] HALE, J.K.: Ordinary Differential Equations, John Wiley & Sons, Inc. 1969

[5] IMAZ,C - VOREL, Z: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Limusa - Wiley, Mexico, 1968.

[6] MASSERA, J.L.: Contributions to Stability Theory. An. Math. 64: 182-206, 1956.

[7] PONTRIAGUINE, L: Équations Différentielles Ordinaires, Éditions Mir. Moscou, 1969.

[8] YOSHIZAWA, P.: Stability theory by Liapunov's Second Method The Mathematical Society of Japan. 1966