UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Boa colocação e comportamento assintótico de soluções de equações diferenciais abstratas com retardo dependendo do estado

Denis Fernandes da Silva

Tese de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPG-Mat)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Denis Fernandes da Silva

Boa colocação e comportamento assintótico de soluções de equações diferenciais abstratas com retardo dependendo do estado

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Alex Hernandez Morales
Coorientador: Prof. Dr. Alexandre Nolasco de Carvalho

USP – São Carlos
Fevereiro de 2021

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

S586b

Silva, Denis Fernandes da
Boa colocação e comportamento assintótico de soluções de equações diferenciais abstratas com retardo dependendo do estado / Denis Fernandes da Silva; orientador Eduardo Alex Hernandez Morales; coorientador Alexandre Nolasco de Carvalho. -- São Carlos, 2021.
90 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2021.

1. Retardo dependendo do estado. 2. Solução estrita. 3. Boa colocação. 4. Atrator global. 5. EDP's com retardo dependendo do estado. I. Morales, Eduardo Alex Hernandez, orient. II. Carvalho, Alexandre Nolasco de, coorient. III. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Denis Fernandes da Silva

Wellposedness and asymptotic behavior of solutions of abstract differential equations with state-dependent delay

Thesis submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP – in accordance with the requirements of the Mathematics Graduate Program, for the degree of Doctor in Science. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Eduardo Alex Hernandez Morales
Co-advisor: Prof. Dr. Alexandre Nolasco de Carvalho

USP – São Carlos
February 2021

AGRADECIMENTOS

Os agradecimentos principais são direcionados ao meu orientador Eduardo Alex Hernandez Morales, ao meu coorientador Alexandre Nolasco de Carvalho e aos demais professores e funcionários do Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC-USP), ao supervisor do meu estágio de pesquisa Professor Jianhong Wu e aos demais membros e funcionários do Laboratório de Matemática Industrial e Aplicada (LIAM) da York University e todos aqueles que tornaram possível a execução deste trabalho.

Agradecimentos especiais são direcionados a minha família e amigos pelo suporte e companheirismo, principalmente durante este período tão adverso.

Agradeço também aos professores dos departamentos por onde passei que me incentivaram durante essa longa jornada. Em especial, aos professores Michelle Pierri e Eduardo Hernandez por sempre acreditarem no meu potencial, me incentivarem e me orientarem no decorrer deste percurso.

Agradeço o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Finalmente, agradeço a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo suporte financeiro essencial para a execução deste projeto (Processos 2017/01776-3 e 2019/06685-1).

RESUMO

SILVA, D. F. . **Boa colocação e comportamento assintótico de soluções de equações diferenciais abstratas com retardo dependendo do estado**. 2021. 90 p. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2021.

Neste trabalho é estudada a existência e unicidade de soluções locais e globais, a boa colocação e a existência de atrator global para equações diferenciais funcionais abstratas com retardo dependente do estado. Alguns exemplos relativos à equações diferenciais parciais com retardo dependente de estado são apresentados.

Palavras-chave: Retardo dependendo do estado, solução estrita, boa colocação, atrator global, EDP's com retardo dependendo do estado.

ABSTRACT

SILVA, D. F. . **Wellposedness and asymptotic behavior of solutions of abstract differential equations with state-dependent delay**. 2021. 90 p. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2021.

In this work is studied the existence and uniqueness of local and global solutions, the well-posedness and the existence of global attractor for abstract functional differential equations with state-dependent delay. Some examples concerning partial differential equations with state dependent delay are presented.

Keywords: State dependent delay, strict solution, well-posedness, global attractor, PDEs with state dependent delay.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 13
1.1 Notações e definições premilinares 16

2 EQUAÇÕES INTEGRO-DIFERENCIAIS ABSTRATAS COM RETARDO DEPENDENDO DO ESTADO 19
2.1 Boa colocação 19
2.2 Exemplos 30

3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ABSTRATAS COM RETARDO DEPENDENDO DO ESTADO 33
3.1 Existência e unicidade de solução 35
3.1.1 Existência e unicidade de soluções locais 35
3.1.2 Soluções maximais e globais 43
3.2 Boa colocação e atratores 52
3.2.1 Boa colocação, dissipatividade e atratores em $\mathfrak{B}$ 53
3.2.1.1 Boa colocação relativa ao espaço $\mathfrak{B}$. 53
3.2.1.2 Compacidade de $(S_{\mathfrak{B}}(t))_{t\geq 0}$ em $\mathfrak{B}$ 60
3.2.1.3 O problema autônomo, dissipatividade e atrator global em $\mathfrak{B}$ 61
3.2.2 Boa colocação, dissipatividade e atratores em $\mathfrak{B}_\gamma$ 65
3.2.2.1 Boa colocação relativa ao espaço $\mathfrak{B}_\gamma$ 65
3.2.2.2 Compacidade de $S_{\mathfrak{B}_\gamma}(t)$ em $\mathfrak{B}_\gamma$ 70
3.2.2.3 O problema autônomo, dissipatividade e atrator global em $\mathfrak{B}_\gamma$ 71
3.2.3 Atrator global em $\mathscr{C} = C([-p,0];X)$ 72
3.3 Exemplos 75
3.3.1 Existência e unicidade de solução 76
3.3.2 Existência de atrator global 80

REFERÊNCIAS 83

APÊNDICE A SEMIGRUPO ANALÍTICO E PROBLEMA SEMILINEAR ABSTRATO 87

APÊNDICE B SEMIGRUPO DE FUNÇÕES CONTÍNUAS 89

CAPÍTULO

1

INTRODUÇÃO

Equações diferenciais com retardo são uma linha de pesquisa de intensa atividade e uma das mais antigas em sistemas dinâmicos de dimensão infinita. Mais recentemente, equações diferenciais com retardo dependo do estado têm atraído atenção de muitos pesquisadores por melhor descrever muitos processos de evolução.

Um ponto a ser destacado, que diferencia a teoria de equações diferenciais com retardo dependendo do estado para outros tipos de retardo, é o fato de a função $u \mapsto u(\cdot - \sigma(u_{(\cdot)}))$ não ser Lipschitz no espaço das funções contínuas, o principal espaço de fase no qual a teoria de equações diferenciais com retardo é desenvolvido. Isto tem implicações importantes na boa colocação do problema estudado e, em geral, este problema não é bem colocado no espaço de funções contínuas $C([-p,0];X)$. Mais ainda, a adição do termo $u(\cdot - \sigma(u_{(\cdot)}))$ faz com que equações diferenciais com retardo dependendo do estado sejam intrinsecamente não lineares e mais complexas que as equações diferenciais com retardo usuais.

Este trabalho é dedicado ao estudo de equações diferenciais abstratas com retardo dependo de estado. Mais especificamente, nosso objetivo é encontrar espaços de fase nos quais conseguímos estabelecer a boa colocação das classes de problemas adotadas e, desta forma, estudar o comportamento assintótico das soluções globais dos mesmos. Este trabalho é divido em dois capítulos nos quais estudamos duas classes gerais de equações diferenciais abstratas com retardo dependendo do estado.

Relativo a literatura, para equações diferenciais ordinárias em espaços de dimensão finita citamos os trabalhos (DRIVER, 1963) e (DRIVER, 1984), o estudo (HARTUNG *et al.*, 2006), e os trabalhos (AIELLO; FREEDMAN; WU, 1992), (WALTHER, 2003) e as referências contidas nestes. Para equações diferenciais parciais e abstratas com retardo dependo do estado, mencionamos o trabalho inicial (HERNANDEZ; PROKOPCZYK; LADEIRA, 2006) os recentes trabalhos de Hernandez et al. (HERNANDEZ; PIERRI; WU, 2016), (HERNANDEZ; WU, 2019b), (HERNANDEZ; WU, 2019a) e (HERNANDEZ; FERNANDES; WU, 2020) sobre

existência de soluções locais e globais e boa colocação do problemas abstratos, e os trabalhos (KRISZTIN; REZOUNENKO, 2016), (KOSOVALIĆ *et al.*, 2013), (KOSOVALIĆ; CHEN; WU, 2017), (LV; YUAN; PEI, 2016) e (REZOUNENKO; WU, 2006).

Relacionado à existência e propriedades qualitativas de soluções e atratores para problemas abstratos e equações diferenciais parciais com retardo dependo do estado, mencionamos os trabalhos de Rezounenko (REZOUNENKO, 2012), (REZOUNENKO, 2011), (REZOUNENKO, 2010), (REZOUNENKO, 2009) e (REZOUNENKO, 2008), e Rezounenko et. al. (KRISZTIN; REZOUNENKO, 2016), (REZOUNENKO; WU, 2006) e (CHUESHOV; REZOUNENKO, 2015). Para outros trabalhos sobre o comportamento assintótico de soluções, veja (KRISZTIN; REZOUNENKO, 2016), (KOSOVALIĆ *et al.*, 2013), (KOSOVALIĆ; CHEN; WU, 2017), (LV; YUAN; PEI, 2016), (LV; PEI; YUAN, 2019) e (REZOUNENKO; WU, 2006).

No Capítulo 2, continuamos os estudos iniciados em (HERNANDEZ; PIERRI; WU, 2016) e (HERNANDEZ; WU, 2019a) sobre equações diferenciais abstratas com retardo dependendo do estado. Mais especificamente, estudamos a existência de soluções estritas globais e a boa colocação para uma classe geral de equações integro-diferenciais abstratas com retardo dependendo do estado da forma

$$u'(t) = Au(t) + F(t, u(t), \int_0^t K(t,\tau)u(\tau - \sigma(\tau, u(\tau)))d\tau), \quad t \in [0,a], \tag{1.1}$$

$$u_0 = \varphi \in C_{Lip}([-p,0];X), \tag{1.2}$$

nos quais $A : D(A) \subset X \to X$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico de operadores lineares limitados $(T(t))_{t\geq 0}$ definidos no espaço de Banach $(X, \|\cdot\|)$, $K(\cdot)$ é uma aplicação com imagem numa classe de operadores em X e $F(\cdot), \sigma(\cdot)$ são funções continuas adequadas.

O estudo do modelo (1.1)-(1.2) é motivado por uma extensa literatura em equações integro-diferenciais ordinárias e parciais surgindo na teoria de dinâmicas de populações, veja, em particular, os trabalhos influentes de Briton (BRITTON, 1990), os trabalhos (GOPALSAMY, 1980), (GOURLEY; BRITTON, 1996) e (GOURLEY, 1996), e as referências contidas nestes. Como motivação, também mencionamos os trabalhos de Cooke & Huang (COOKE; HUANG, 1996) e Alt (ALT, 1979) sobre equações integro-diferenciais ordinárias com retardo dependendo do estado e por Zhang & Vandewalle (ZHANG; VANDEWALLE, 2006) sobre equações integro-diferenciais com memória.

Em nossos estudos, estabelecemos condições não excessivamente restritivas para o problema (1.1)-(1.2) estar bem colocado relativo aos espaços

$$\mathfrak{B} := \{\varphi \in C_{Lip}([-p,0];X) : \varphi(0) \in D(A)\},$$

munido da norma $\| \varphi \|_{\mathfrak{B}} = \| \varphi \|_{C([-p,0];X)} + \| A\varphi(0) \|$, e $C([-p,a];X)$, (veja Teorema 1). Do Teorema 1 obtemos que $\| u_t(\cdot,\varphi) - u_s(\cdot,\varphi) \|_{C([-p,0];X)} \to 0$ quando $s \to t$ e $\| u_t(\cdot,\varphi) - u_t(\cdot,\psi) \|_{C([-p,0];X)} \to 0$ quando $\| \psi - \varphi \|_{\mathfrak{B}} \to 0$, onde $u(\cdot,\psi)$ denota a única solução estrita do

(1.1) com condição inicial ψ. Resultados de boa colocação para o problema (1.1)-(1.2) também são provados relacionados aos espaços de funções C^1.

Para provar nossos resultados, usamos algumas das ideias em (HERNANDEZ; PIERRI; WU, 2016) e (HERNANDEZ; WU, 2019a). Usando os desenvolvimentos em (HERNANDEZ; WU, 2019a), estabelecemos a existência global e unicidade de soluções estritas para (1.1)-(1.2), um problema não considerado em (HERNANDEZ; WU, 2019a), trabalhando em $\mathfrak{B}$. Além disso, de (HERNANDEZ; WU, 2019a) assumimos uma condição de integrabilidade natural sobre a aplicação com operadores valores $K(\cdot)$ (a condição $\mathscr{L}_\alpha$), que permite obter estimativas úteis para $[u_K(\cdot,\varphi)-v_K(\cdot,\psi)]_{C^\alpha([0,a];X)}$ e $[F(\cdot,u(\cdot),u_K(\cdot))-F(\cdot,v(\cdot),v_K(\cdot))]_{C^\alpha([0,a];X)}$, onde a expressão z_K denota a função $z_K:[0,a]\to X$ dada por $z_K(t)=\int_0^t K(t,s)z(s-\sigma(s,z(s)))ds$. Estas estimativas são fundamentais para provar nossos resultados.

Este capítulo é dividido em três seções. Nossos resultados abstratos são apresentados na Seção 2.1. Na Proposição 2 e no Corolário 1 provamos a existência e unicidade de soluções estritas globais para (1.1)-(1.2). Este resultado estende os resultados encontrados em (HERNANDEZ; PIERRI; WU, 2016) e (HERNANDEZ; WU, 2019a) sobre existência e unicidade de soluções locais. Na mesma seção estabelecemos diferentes estimativas para $u(\cdot,\varphi)$, $u(\cdot,\varphi)-u(\cdot,\psi)$ e $F(\cdot,u(\cdot),u_K(\cdot))-F(\cdot,v(\cdot),v_K(\cdot))$, necessárias para provar nossos resultados principais, Teorema 1 e Proposição 4.

Os resultados relativos ao Capítulo 2 foram submetidos para a publicação e podem ser encontrados em (HERNANDEZ; FERNANDES; WU, 2020).

Já no Capítulo 3, estudamos a existência e unicidade de soluções locais e globais, a boa colocação e a existência de atratores para uma classe geral de equações diferenciais abstratas com retardo dependendo do estado na forma

$$u'(t) = Au(t)+F(t,u(t),u(t-\sigma(t,u_t))), \quad t\geq 0, \tag{1.3}$$

$$u_0 = \varphi\in\mathscr{C}:=C([-p,0];X), \tag{1.4}$$

nos quais $A:D(A)\subset X\to X$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo analítico e compacto de operadores lineares limitados $(T(t))_{t\geq 0}$ definido no espaço de Banach $(X,\|\cdot\|)$, $F(\cdot),\sigma(\cdot)$ são funções contínuas adequadas e, para todo $t\geq 0$, a função história $u_t\in C([-p,0];X)$ é definida por $u_t(\theta)=u(t+\theta)$ para $\theta\in[-p,0]$.

Nesse capítulo, estabelecemos diferentes resultados sobre existência e unicidade de soluções fracas e estritas locais e globais, boa colocação e existência de atrator global para a versão autônoma de (1.3)-(1.4). Para estabelecer nossos resultados, usamos algumas ideias de (HERNANDEZ; PIERRI; WU, 2016), (HERNANDEZ; WU, 2019b), (HERNANDEZ; WU, 2019a) e (HERNANDEZ; FERNANDES; WU, 2020) o que permite estudar a existência e unicidade de soluções em espaços de funções Lipschitz. Em particular, estudamos a boa colocação de (1.3)-(1.4) relativo aos espaços $\mathfrak{B}:=\{\psi\in C_{Lip}([-p,0];X):\ \varphi(0)\in D(A)\}$ e $\mathfrak{B}_\gamma:=\{\psi\in C_{Lip}([-p,0];X)\cap C([-p,0];X_\gamma):\ \psi(0)\in D(A)\}$ ($\gamma\in(0,1)$ e X_γ é o domínio da

$\gamma-$potência fracionária de A) munidos das normas $\| \varphi \|_{\mathfrak{B}}=\| \varphi \|_{C([-p,0];X)} + \| A\varphi(0) \|$ e $\| \varphi \|_{\mathfrak{B}_\gamma}=\| \varphi \|_{C([-p,0];X_\gamma)} + \| A\varphi(0) \|$ respectivamente. As observações anteriores permitem introduzir as famílias de aplicações $(S_{\mathfrak{B}}(t))_{t\geq 0}$ e $(S_{\mathfrak{B}_\gamma}(t))_{t\geq 0}$ associadas às soluções globais do problema (1.3)-(1.4) relativas aos espaços $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{B}_\gamma$ respectivamente ($S_{\mathfrak{D}}(t)\varphi = u_t(\cdot,\varphi)$ para $t \geq 0$, $\varphi \in \mathfrak{D}$, e $\mathfrak{D} = \mathfrak{B}, \mathfrak{B}_\gamma$), e estudar a existência de atratores (para a versão autônoma de (1.3)-(1.4)) nesses espaços e no espaço $\mathscr{C} = C([-p,0];X)$. Este método requer o estudo da boa colocação, dissipatividade e a compacidade de $(S_{\mathfrak{B}}(t))_{t\geq 0}$ e $(S_{\mathfrak{B}_\gamma}(t))_{t\geq 0}$ usando normas com peso, mas é mais direto e mais geral que os métodos utilizados na literatura associada, formada basicamente pelos interessantes trabalhos de Rezounenko citados anteriormente. Nos trabalhos de Rezounenko (REZOUNENKO, 2012), (REZOUNENKO, 2011) e (REZOUNENKO, 2009) os resultados são provados introduzindo diferentes propriedades para a função retardo dependendo do estado $\sigma(\cdot)$, o que minimiza ou elimina a perda da Lipschizinidade das funções da forma $u \to u(\sigma(\cdot,u(\cdot)))$ e $u \to u_{(\sigma(\cdot,u(\cdot)))}$. O mesmo objetivo tem o conceito de retardo dependendo do estado seletivo (state-dependent selective delay) introduzido em (REZOUNENKO; WU, 2006). Uma estratégia diferente é adotada em (CHUESHOV; REZOUNENKO, 2015), no qual é estudada a existência de um atrator global e exponencial de dimensão finita. Os resultados em (CHUESHOV; REZOUNENKO, 2015) são provados assumindo que X é um espaço de Hilbert, que A é um operador positivo com espectro discreto, trabalhando em espaços de funções Lipschitz de valores em $D((-A)^{\frac{1}{2}})$ e usando método de Galerkin. Para outros trabalhos relacionados ao estudo de comportamento assintótico de soluções, citamos (HERNANDEZ; WU, 2019b), (KRISZTIN; REZOUNENKO, 2016), (KOSOVALIĆ *et al.*, 2013), (KOSOVALIĆ; CHEN; WU, 2017), (LV; YUAN; PEI, 2016) e (LV; PEI; YUAN, 2019).

1.1 Notações e definições premilinares

Neste trabalho, $C([b,c];X)$, $C^\gamma([b,c];X)$, $\gamma \in (0,1)$, e $C_{Lip}([b,c];X)$ munidos das normas denotados por $\| \cdot \|_{C([b,c];X)}$, $\| \cdot \|_{C^\gamma([b,c];X)}$ e $\| \cdot \|_{C_{Lip}([b,c];X)}$ são os usuais espaços das funções contínuas, Holder contínuas e Lipschitz contínuas respectivamente. Por conveniência, observamos que $\| \cdot \|_{C^\gamma([b,c];X)}=\| \cdot \|_{C([b,c];X)} +[\cdot]_{C^\gamma([b,c];X)}$, $\| \cdot \|_{C_{Lip}([b,c];X)}=\| \cdot \|_{C([b,c];X)} +[\cdot]_{C_{Lip}([b,c];X)}$, onde $[\xi]_{C^\gamma([b,c];X)} = \sup_{t,s\in[b,c],t\neq s} \frac{\|\xi(s)-\xi(t)\|}{|t-s|^\gamma}$ e $[\xi]_{C_{Lip}([b,c];X)} = \sup_{t,s\in[b,c],t\neq s} \frac{\|\xi(s)-\xi(t)\|}{|t-s|}$.

Neste trabalho, assumimos que $0 \in \rho(A)$ e $(-A)^\beta$ $(\beta \geq 0)$ denota a β-potência fracionária $(-A)^\beta : D((-A)^\beta) \subset X \mapsto X$ de A. Usamos o símbolo X_β para o domínio de $(-A)^\beta$ munido com a norma $\| x \|_\beta=\| (-A)^\beta x \|$. Mais ainda, por simplicidade, assumimos que C_i e $C_{i,\beta} > 0$, $i = 0,1,2$, são constantes positivas tais que $\| (-A)^i T(t) \| \leq \frac{C_i}{t^i}$, $\| (-A)^{i+\beta} T(t) \| \leq \frac{C_{i,\beta}}{t^\beta}$ para todo $\beta > 0$, $t > 0$ e $i = 0,1,2$.

Seja $(Z, \| \cdot \|_Z)$ um espaço normado. Para $r > 0$ e $z \in Z$, a bola de centro em z e raio r em Z será dentada por $B_r(z,Z) := \{x \in Z : \| x-z \|_Z \leq r\}$. Além disso, para $A \subset Z$, $\overline{A}^Z$ denota o fecho do conjunto A em $(Z, \| \cdot \|_Z)$.

Definição 1. A seguir, $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}_\lambda$, $\lambda \in (0,1]$, são os espaços $C([-p,0];X)$ e $C([-p,0];X_\lambda)$ munidos com as normas uniforme denotadas por $\|\cdot\|_{\mathscr{C}}$ e $\|\cdot\|_{\mathscr{C}_\lambda}$ respectivamente. Além disso, para $a>0$ e $\gamma \in (0,1]$, temos que $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_a$, $\mathfrak{B}_\gamma$ e $\mathfrak{B}^1$ são os espaços

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}: &= \{\psi \in C_{Lip}([-p,0];X) : \psi(0) \in D(A)\},\\
\mathfrak{B}_a: &= \{u \in C([-p,a];X) : u_0 \in \mathfrak{B},\, u_{|_{[0,a]}} \in C([0,a];X_1)\}\\
\mathfrak{B}_\gamma: &= \{\psi \in C_{Lip}([-p,0];X) \cap C([-p,0];X_\gamma) : \psi(0) \in D(A)\},\\
\mathfrak{B}^1: &= \{\psi \in C^1([-p,0];X) : \psi(0) \in D(A),\, \psi'(0^-) = A\psi(0)\},
\end{aligned}$$

munidos das normas $\| \psi \|_{\mathfrak{B}} = \| \psi \|_{\mathscr{C}} + \| A\psi(0) \|$, $\|\cdot\|_{\mathfrak{B}_a} = \|\cdot\|_{C([-p,a];X)} + \|\cdot\|_{C([0,a];X_1)}$, onde X_1 é o espaço $D(A)$ munido da norma $\| x \|_1 = \| Ax \|$, $\| \psi \|_{\mathfrak{B}_\gamma} = \| \psi \|_{\mathscr{C}_\gamma} + \| A\psi(0) \|$ e $\| \psi \|_{\mathfrak{B}^1} = \| \psi \|_{C^1([-p,0];X)} + \| A\psi(0) \|$ respectivamente.

CAPÍTULO

2

EQUAÇÕES INTEGRO-DIFERENCIAIS ABSTRATAS COM RETARDO DEPENDENDO DO ESTADO

Neste capítulo, estudamos a existência de soluções estritas globais e a boa colocação para uma classe geral de equações integro-diferenciais abstratas com retardo dependendo do estado da forma

$$u'(t) = Au(t) + F(t, u(t), \int_0^t K(t,\tau)u(\tau - \sigma(\tau, u(\tau)))d\tau), \quad t \in [0,a], \tag{2.1}$$

$$u_0 = \varphi \in C_{Lip}([-p,0];X), \tag{2.2}$$

onde $A : D(A) \subset X \to X$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico de operadores lineares limitados $(T(t))_{t\geq 0}$ definidos no espaço de Banach $(X, \|\cdot\|)$, $K(\cdot)$ é uma aplicação com imagem numa classe de operadores em X e $F(\cdot), \sigma(\cdot)$ são funções continuas adequadas.

2.1 Boa colocação

Nesta seção, estudamos a existência e unicidade de soluções estritas globais e a boa colocação do problema (2.1)-(2.2). Nos restante deste capítulo, $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{B}^1$ são os espaços

$$\begin{aligned} \mathfrak{B} &= \{\varphi \in C_{Lip}([-p,0];X) : \varphi(0) \in D(A)\}, \\ \mathfrak{B}^1 &= \{\varphi \in C^1([-p,0];X) : \varphi(0) \in D(A), \varphi'(0^-) = A\varphi(0)\}, \end{aligned}$$

munidos das normas $\| \varphi \|_{\mathfrak{B}} = \| A\varphi(0) \| + \| \varphi \|_{C([-p,0];X)}$ e $\| \varphi \|_{\mathfrak{B}^1} = \| A\varphi(0) \| + \| \varphi \|_{C^1([-p,0];X)}$ respectivamente. A escolha dos espaços $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{B}^1$ são baseadas em considerações técnicas da teoria de semigrupos. Esses espaços foram considerados anteriormente em (KRISZTIN; REZOUNENKO, 2016), (LV; YUAN; PEI, 2016) e (WALTHER, 2003).

Notação 1. Por conveniência, para uma função $u \in C([-p,b];X)$, $b \in (0,a]$, usamos os símbolos u^σ e u_K para as funções $u^\sigma : [0,b] \to X$ e $u_K : [0,b] \to X$ definidas por $u^\sigma(t) = u(t-\sigma(t,u(t)))$ e $u_K(t) = \int_0^t K(t,s)u^\sigma(s)ds$.

Observação 1. Por simplicidade, assumiremos sempre que $F(\cdot)$ e $\sigma(\cdot)$ são Lipschitz e escrevemos $[F]_{C_{Lip}}$ e $[\sigma]_{C_{Lip}}$ no lugar de $[F]_{C_{Lip}([0,a]\times X\times X;X)}$ e $[\sigma]_{C_{Lip}([0,a]\times X;[0,p])}$. Similarmente, para $v \in C_{Lip}([-p,b];X)$ escrevemos $[v]_{C_{Lip}[-p,b]}$ no lugar $[v]_{C_{Lip}([-p,b];X)}$. Similar notações serão adotadas para outros tipos de espaços de funções.

Definição 2. Uma função $u \in C([-p,b];X)$ é chamada uma solução fraca de (2.1)-(2.2) em $[-p,b]$ se $u_0 = \varphi$ e

$$u(t) = T(t)\varphi(0) + \int_0^t T(t-s)F(s,u(s),u_K(s))ds, \quad \forall\, t \in [0,b]. \tag{2.3}$$

Definição 3. Uma função $u \in C([-p,b];X)$ é chamada uma solução estrita de (2.1)-(2.2) em $[-p,b]$ se $u_{|_{[0,b]}} \in C^1([0,b];X)$, $u(t) \in D(A)$ para todo $t \in [0,b]$, $Au_{|_{[0,b]}} \in C([0,b];X)$, $u_0 = \varphi$ e $u(\cdot)$ satisfaz (2.1) em $[0,b]$.

Relativos às definições, observamos que nomenclaturas similares serão utilizadas para os problemas definidos em $[-p,b)$.

De (HERNANDEZ; WU, 2019a), incluímos as condições a seguir.

$\mathfrak{L}_\alpha$: $\alpha \in (0,1]$, $K : [0,a]\times[0,a] \mapsto \mathscr{L}(X)$ é uma função integrável, $K(t,\cdot) \in L^{\frac{1}{(1-\alpha)}}([0,t],\mathscr{L}(X))$ para todo $t \in [0,a]$ (tomamos $L^{\frac{1}{(1-\alpha)}} = L^\infty$ para $\alpha = 1$); para todo $b \in [0,a]$

$$\Theta(b) = \sup_{s\in[0,b]} \Big(\int_0^s \| K(s,\tau) \|_{\mathscr{L}(X)}^{\frac{1}{1-\alpha}} d\tau\Big)^{(1-\alpha)} < \infty, \text{ se } \alpha < 1, \tag{2.4}$$

$$\Theta(b) = \sup_{s\in[0,b]} \| K(s,\cdot) \|_{L^\infty([0,s];\mathscr{L}(X))} < \infty, \quad \text{se } \alpha = 1, \tag{2.5}$$

e para todo $s \in [0,a]$ existe uma função $L_{K,\alpha,s} \in L^1([0,s];\mathbb{R}^+)$ tal que

$$\| K(t,\tau) - K(s,\tau) \| \le L_{K,\alpha,s}(\tau) \mid t-s \mid^\alpha, \ \forall\ 0 \le \tau \le s \le t \le a, \tag{2.6}$$

e $\Upsilon(b) = (\Theta(b) + \sup_{s\in[0,b]} \| L_{K,\alpha,s} \|_{L^1([0,s];\mathbb{R})}) < \infty$ para todo $b \in [0,a]$.

Incluímos agora alguns lemas úteis. A prova do Lema 1 segue procedendo como na prova do (HERNANDEZ; WU, 2019a, Lema 3.1). Por completude, incluiremos uma prova curta.

Lema 1. Assuma que a condição $\mathfrak{L}_\alpha$ esteja satisfeita, $u \in C([-p,b];X)$ e $v \in C_{Lip}([-p,b];X)$. Então, $u_K \in C^\alpha([0,b];X)$, $[u_K]_{C^\alpha[0,b]} \leq \Upsilon(b) \parallel u \parallel_{C[-p,b]}$ e

$$\begin{aligned}
\parallel u^\sigma - v^\sigma \parallel_{C[0,b]} &\leq \parallel \varphi - \psi \parallel_{C[-p,0]} + \Psi(b,v,\psi) \parallel u - v \parallel_{C[0,b]}, \\
\parallel u_K - v_K \parallel_{C[0,b]} &\leq \Theta(b) b^\alpha (\parallel \varphi - \psi \parallel_{C[-p,0]} + \Psi(b,v,\psi) \parallel u - v \parallel_{C[0,b]}), \\
[u_K - v_K]_{C[0,b]} &\leq \Upsilon(b)(\parallel \varphi - \psi \parallel_{C[-p,0]} + \Psi(b,v,\psi) \parallel u - v \parallel_{C[0,b]}),
\end{aligned}$$

onde $u_0 = \varphi$, $v_0 = \psi$ e $\Psi(b,v,\psi) = 1 + ([\psi]_{C_{Lip}[-p,0]} + [v]_{C_{Lip}[0,b]})[\sigma]_{C_{Lip}}$.

Demonstração. A desigualdade para $[u_K]_{C^\alpha([0,b];X)}$ é provada em (HERNANDEZ; WU, 2019a, Lema 3.1). Relacionada à segunda desigualdade, observamos que

$$\begin{aligned}
&\parallel u^\sigma - v^\sigma \parallel_{C[0,b]} \\
&\leq \parallel u(\cdot - \sigma(\cdot,u(\cdot))) - v(\cdot - \sigma(\cdot,u(\cdot))) \parallel_{C[0,b]} \\
&\quad + \parallel v(\cdot - \sigma(\cdot,u(\cdot))) - v(\cdot - \sigma(\cdot,v(\cdot))) \parallel_{C[0,b]} \\
&\leq \parallel u - v \parallel_{C[-p,b]} + [v]_{C_{Lip}[-p,b]} \mid \sigma(\cdot,u(\cdot)) - \sigma(\cdot,v(\cdot)) \mid_{C[0,b]} \\
&\leq \parallel u - v \parallel_{C[-p,b]} + [v]_{C_{Lip}[-p,b]} [\sigma]_{C_{Lip}} \parallel u - v \parallel_{C[0,b]} \\
&\leq \parallel \varphi - \psi \parallel_{C[-p,0]} + (1 + ([\psi]_{C_{Lip}[-p,0]} + [v]_{C_{Lip}[0,b]})[\sigma]_{C_{Lip}} \parallel u - v \parallel_{C[0,b]}.
\end{aligned}$$

Observando que $\parallel u_K - v_K \parallel_{C[0,b]} \leq \parallel u^\sigma - v^\sigma \parallel_{C[0,b]} \Theta(b) b^\alpha$ obtemos a terceira desigualdade. Para provar a última desigualdade, para $0 \leq s < t \leq b$ observamos que

$$\begin{aligned}
&\parallel u_K(t) - v_K(t) - (u_K(s) - v_K(s)) \parallel \\
&\leq \left(\int_0^s \parallel K(t,\tau) - K(s,\tau) \parallel d\tau + \int_s^t \parallel K(t,\tau) \parallel d\tau\right) \parallel u^\sigma - v^\sigma \parallel_{C[0,b]} \\
&\leq (\parallel L_{K,\alpha,s} \parallel_{L^1([0,s];\mathbb{R})} + \Theta(b)) \parallel u^\sigma - v^\sigma \parallel_{C[0,b]} (t-s)^\alpha,
\end{aligned}$$

o que permite finalizar a prova utilizando a segunda desigualdade. □

A seguir, na Proposição 1 e Corolário 1, estabelecemos a existência de solução estrita maximal, um problema que não foi considerado em (HERNANDEZ; WU, 2019a).

Proposição 1. Assuma que o semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ é compacto, a condição $\mathfrak{L}_\alpha$ esteja satisfeito, $\alpha \in (0,1)$ e $\varphi \in \mathfrak{B}$. Então, existe uma única solução estrita $u(\cdot,\varphi) \in C_{Lip}([-p,b];X)$ de (2.1)-(2.2) em $[-p,b]$ para algum $0 < b \leq a$.

Demonstração. Seja $R > C_0 \parallel \varphi \parallel_{C[-p,0]}$. Selecionamos agora $0 < b \leq \min\{1,a\}$ tal que $R > C_0(\parallel \varphi \parallel_{C[-p,0]} + \parallel F(\cdot,0,0) \parallel_{C[0,a]} b + [F]_{C_{Lip}} R(1 + \Upsilon(a) a^\alpha) b)$.

Seja $\mathscr{S}(R,\varphi) = \{u \in C([-p,b];X) : u_0 = \varphi, \parallel u \parallel_{C[-p,b]} \leq R\}$, munido com a métrica $d(u,v) = \parallel u - v \parallel_{C([0,b];X)}$ e $\Gamma : \mathscr{S}(R,\varphi) \to C([-p,b];X)$ a aplicação definida por $\Gamma u = \varphi$ em $[p,0]$ e

$$\Gamma u(t) = T(t)\varphi(0) + \int_0^t T(t-s) F(s,u(s),u_K(s)) ds, \quad \text{for } t \in [0,b].$$

Do Lema 1, para $u \in \mathscr{S}(R,\varphi)$ e $t \in [0,b]$, observamos que

$$\| \Gamma u(t) \| \leq C_0(\| \varphi \|_{C[-p,0]} + \| F(\cdot,0,0) \|_{C[0,a]} b + [F]_{C_{Lip}} R(1+\Upsilon(a)a^{\alpha})b) \leq R,$$

o que implica que $\Gamma\mathscr{S}(R,\varphi) \subset \mathscr{S}(R,\varphi)$. Além do anterior, observando que $\widetilde{R} := \sup_{u\in\mathscr{S}(R,\varphi)} \| F(\cdot,u(\cdot),u_K(\cdot)) \|_{C[0,b]} < \infty$, para $t \in [0,b)$ e $h > 0$ tal que $t+h \in [0,b]$ vemos que

$$\begin{aligned} &\| \Gamma u(t+h) - \Gamma u(t) \| \\ &\leq \| (T(t+h)-T(t))\varphi(0) \| + C_0\widetilde{R}h + \widetilde{R}\int_0^t \| T(t+h-s) - T(t-s) \| \, ds, \end{aligned}$$

o que implica que $\{\Gamma u : u \in \mathscr{S}(R,\varphi)\}$ é equicontínua em $[0,b]$. Além disso, para $u \in \mathscr{S}(R,\varphi)$, $t \in (0,b]$ e $0 < \varepsilon < t$ temos que

$$\begin{aligned} \Gamma u(t) &= T(t)\varphi(0) + T(\varepsilon)\int_0^{t-\varepsilon} T(t-\varepsilon-s)F(s,u(s),u_K(s))ds \\ &\quad + \int_{t-\varepsilon}^t T(t-s)F(s,u(s),u_K(s))ds \\ &\quad \in \{T(t)\varphi(0)\} + T(\varepsilon)(t-\varepsilon)C_0\widetilde{R}B_1(0;X) + C_0\widetilde{R}\varepsilon\Lambda B_1(0;X), \end{aligned}$$

e, assim, $\Gamma(\mathscr{S}(R,\varphi))(t) = \{\Gamma u(t) : u \in \mathscr{S}(R,\varphi)\} \subset K_\varepsilon + D_\varepsilon$, onde $K_\varepsilon := \{T(t)\varphi(0)\} + T(\varepsilon)(t-\varepsilon)C_0\widetilde{R}B_1(0;X)$ é compacto em X e o diâmetro do conjunto $D_\varepsilon := C_0\widetilde{R}\varepsilon\Lambda B_1(0;X)$ converge para zero quando $\varepsilon \downarrow 0$. Isto prova que $\Gamma(\mathscr{S}(R,\varphi))(t)$ é relativamente compacto.

Das observações acima, Γ é uma aplicação completamente contínua de $\mathscr{S}(R,\varphi)$ nele mesmo e do Teorema do Ponto Fixo de Schauder, existe uma única solução fraca $u(\cdot,\varphi) \in \mathscr{S}(R,\varphi)$ de (2.1)-(2.2) em $[-p,b]$.

Do item (a) Lema 17, $u \in C^{\alpha}([0,b];X)$ o que implica que $F(\cdot,u(\cdot),u_K)$ pertence a $C^{\alpha}([0,b];X)$. Usando agora o item (b) do Lema 17 obtemos que $u(\cdot)$ é uma solução estrita em $[-p,b]$ e $u_{|_{[0,b]}} \in C^1([0,b];X)$, o que mostra que $u \in C_{Lip}([-p,b];X)$ desde que $\varphi(\cdot)$ é Lipschitz.

Para finalizar, provaremos a unicidade. Se $v \in C([0,b];X)$ é uma solução fraca de (2.1)-(2.2) em $[-p,b]$, usando o Lema 1 vemos que

$$\| u(t) - v(t) \| \leq C_0 \int_0^t [F]_{C_{Lip}}(1+\Upsilon(a)a^{\alpha}\Psi(b,u(\cdot,\varphi),\varphi)) \| u - v \|_{C[0,s]} \, ds,$$

e, assim,

$$\| u - v \|_{C[0,t]} \leq C_0 \int_0^t [F]_{C_{Lip}}(1+\Upsilon(a)a^{\alpha}\Psi(b,u(\cdot,\varphi),\varphi)) \| u - v \|_{C[0,s]} \, ds,$$

o que implica que $u(\cdot) = v(\cdot)$ em $[0,b]$. □

Corolário 1. Suponha que as condições na Proposição 1 estão satisfeitas e assuma que $[F]_{C_{Lip}}(1+\Upsilon(a)a^{\alpha})a < 1$. Então, existe uma única solução estrita $u(\cdot,\varphi) \in C_{Lip}([-p,a];X)$ de (2.1)-(2.2) em $[-p,a]$.

Demonstração. Das hipóteses, podemos selecionar $R > 0$ grande o suficiente tal que $R > C_0(\| \varphi \|_{C[-p,0]} + \| F(\cdot,0,0) \|_{C[0,a]} a + [F]_{C_{Lip}} R(1+\Upsilon(a)a^{\alpha})a)$. A prova pode ser completada agora usando o argumento da Proposição 1 com 'a' no lugar de 'b'. □

Procedendo como na pova de (HERNANDEZ; WU, 2019a, teorema 3.2), podemos provar a Proposição a seguir sobre existência de soluções locais.

Proposição 2. Suponha que a condição $\mathfrak{L}_1$ esteja satisfeitas e $\varphi \in \mathfrak{B}$. Então, existe uma única solução estrita $u(\cdot,\varphi) \in C_{Lip}([-p,b];X)$ de (2.1)-(2.2) em $[-p,b]$ para algum $0 < b \leq a$.

Proposição 3. Suponha que as condições na Proposição 1 ou na Proposição 2 estão satisfeitas. Se $\varphi \in \mathfrak{B}$, então existe uma única solução estrita $u(\cdot,\varphi) \in C_{Lip}([-p,a];X)$ de (2.1)-(2.2) em $[-p,a]$ e constantes positivas $\Lambda_1(a), \Lambda_2(a)$, independentes de $\varphi \in \mathfrak{B}$, tal que

$$\| u(\cdot,\varphi) \|_{C[0,a]} \leq \Lambda_1(a) \| \varphi \|_{C[-p,0]} + \Lambda_2(a). \tag{2.7}$$

Demonstração. Da Proposição 1 ou Proposição 2, existe $0 < b_1 \leq a$ e uma única solução estrita $u^1 \in C_{Lip}([-p,b_1];X)$ de (2.1)-(2.2) em $[-p,b_1]$. Assumindo $b_1 < a$ e observando que $u^1_b(\cdot,\varphi) \in \mathfrak{B}$, da Proposição 1 ou Proposição 2 obtemos que existe $0 < b_2 \leq a$ e uma única solução estrita $u^2(\cdot,u_{b_1}) \in C_{Lip}([b_1-p,b_1+b_2];X)$ do problema

$$\begin{aligned} w'(t) &= Aw(t) + F(t,w(t),w^1_K(t)), \quad t \in [b_1,b_1+b_2], \\ w_{b_1} &= u_{b_1}(\cdot,\varphi), \end{aligned}$$

onde $w^1_K(t) = \int_0^{b^1} K(t,\tau)u^1(\tau-\sigma(\tau,u(\tau))d\tau + \int_{b^1}^t K(t,\tau)w(\tau-\sigma(\tau,w(\tau))d\tau$.

Definindo $u : [-p,b_1+b_2] \to X$ por $u(\cdot) = u^1(\cdot)$ em $[-p,b_1]$ e $u(\cdot) = u^2(\cdot)$ em $[b_1,b_2]$, temos que $u(\cdot)$ é uma solução estrita de (2.1)-(2.2) em $[-p,b_1+b_2]$. Mais ainda, procedendo de maneira similar obtemos uma solução (estrita) maximal $u(\cdot,\varphi) \in C(I_{\max};X)$ de (2.1)-(2.2). A seguir, provaremos que $I_{max} = [-p,a]$.

Seja $u(\cdot) = u(\cdot,\varphi)$ e $b_\varphi = \sup I_{\max}$. Para $t \in [0,b_\varphi)$, podemos ver que

$$\| u(t) \| \leq C_0 \| \varphi(0) \| + C_0 \int_0^t ([F]_{C_{Lip}}(\| u(s) \| + \| u_K(s) \|) + \| F(s,0,0) \|)ds,$$

e usando o Lema 1 obtemos que

$$\begin{aligned} \| u \|_{C[-p,t]} &\leq (1+C_0)(\| \varphi \|_{C[-p,0]} + a \| F(\cdot,0,0) \|_{C[0,a]}) \\ &\quad + C_0[F]_{C_{Lip}} \int_0^t (1+\Upsilon(a)a^{\alpha}) \| u \|_{C[-p,s]} ds, \end{aligned} \tag{2.8}$$

o que implica que $u(\cdot)$ e $F(\cdot,u(\cdot),u_K(\cdot))$ são limitadas em $I_{\max}$. Mais ainda, do item (a) do Lema 17 obtemos que $u \in C^{\alpha}([0,b_\varphi);X)$ e que $\lim_{t\to b_\varphi} u(t,\varphi)$ existe. Definindo $v : [-p,b_\varphi] \to X$ por $v(\cdot) = u(\cdot)$ em $[-p,b_\varphi)$ e $v(b_\varphi) := \lim_{t\to b_\varphi} u(t,\varphi)$, podemos mostrar que $v(\cdot)$ é uma solução

fraca de (2.1)-(2.2) em $[-p,b_\varphi]$, o que implica que $I_{\max}=[-p,b_\varphi]$. Mais ainda, também temos que $u\in C^\alpha([0,b_\varphi];X)$ e $F(\cdot,u(\cdot),u_K(\cdot))\in C^\alpha([0,b_\varphi];X)$.

Assuma $b_\varphi<a$. Do item (b) do Lema 17 e Lema 1, $u(\cdot)$ é uma solução estrita em $[-p,b_\varphi]$ e

$$\begin{aligned}\| Au \|_{C[0,b_\varphi]} &\leq C_0 \| A\varphi(0) \| +(C_0+1) \| F(\cdot,u(\cdot),u_K(\cdot)) \|_{C[0,b]}\\ &\quad +C_1[F(\cdot,u(\cdot),u_K(\cdot))]_{C^\alpha[0,b_\varphi]}b_\varphi^\alpha\alpha^{-1}\\ &\leq C_0 \| A\varphi(0) \| +(C_0+1) \| F(\cdot,u(\cdot),u_K(\cdot)) \|_{C[0,b]}\\ &\quad +C_1b_\varphi^\alpha\alpha^{-1}[F]_{C_{Lip}}(a^{1-\alpha}+[u]_{C^\alpha[0,b_\varphi]}+\Upsilon(b) \| u \|_{C[-p,b_\varphi]}), \end{aligned}\tag{2.9}$$

o que implica que $Au(\cdot)$ é limitada em $[0,b_\varphi]$. Assim, $u'(\cdot,\varphi)$ é também limitada em $[0,b_\varphi]$ e $u(\cdot,\varphi)\in C_{Lip}([-p,b_\varphi];X)$ desde que $\varphi\in C_{Lip}([-p,0];X)$.

Observando agora que $u_{|_{[b_\varphi-p,b_\varphi]}}\in C_{Lip}([b_\varphi-p,b_\varphi];X)$ e que $u(b_\varphi,\varphi)\in D(A)$, da Proposição 1 ou Proposição 2 obtemos que existe $c>0$ e uma solução estrita $v\in C([b_\varphi-p,b_\varphi+c],X)$ do problema

$$w'(t) = Aw(t)+F(t,w(t),w_K(t))), \quad t\in[b_\varphi,b_\varphi+c], \tag{2.10}$$

$$w_{b_\varphi} = u_{b_\varphi}(\cdot,\varphi), \tag{2.11}$$

onde $w_K(t)=\int_0^{b_\varphi}K(t,\tau)u(\tau-\sigma(\tau,u(\tau))d\tau+\int_{b_\varphi}^t K(t,\tau)w(\tau-\sigma(\tau,w(\tau))d\tau$, o que permite construir uma solução estrita de (2.1)-(2.2) em $[-p,b_\varphi+c]$. Isto implica que $b_\varphi=a$.

Do anterior, $u(\cdot,\varphi)$ é uma solução estrita de (2.1)-(2.2) em $[-p,a]$. Mais ainda, procedendo como na última parte da prova da Proposição 1 provamos a unicidade de $u(\cdot,\varphi)$ e de (2.8) obtemos que (2.7). Isto completa a prova. □

Observação 2. A seguir, assumimos sempre que as condições na Proposição 3 são satisfeitas. Além disso, $u(\cdot,\psi)$ denota a única solução estrita em $C_{Lip}([-p,a];X)$ de (2.1) com condição inicial $\psi\in\mathfrak{B}$ e para $u\in C([-p,a];X)$, $F_{u(\cdot)}$ é a função $F_{u(\cdot)}:[0,a]\to X$ dada por $F_{u(\cdot)}(\cdot)=F(\cdot,u(\cdot),u_K(\cdot))$.

Lema 2. Existem constantes positivas $\Lambda_i(a)$, $i=3,4$, independentes de $\varphi\in\mathfrak{B}$, tal que

$$\max\{\| Au(\cdot,\varphi) \|_{C[0,a]},[u(\cdot,\varphi)]_{C_{Lip}[0,a]}\}\leq\Lambda_3(a) \| \varphi \|_{\mathfrak{B}}+\Lambda_4(a). \tag{2.12}$$

Demonstração. Sejam $\varphi\in\mathfrak{B}$ e $u(\cdot)=u(\cdot,\varphi)$. Do Lema 1 temos que

$$\begin{aligned}\| F_{u(\cdot,\varphi)} \|_{C[0,a]} &\leq [F]_{C_{Lip}}(\| u \|_{C[0,a]}+\| u_K \|_{C[0,a]})+\| F_0 \|_{C[0,a]}\\ &\leq [F]_{C_{Lip}}(\| u \|_{C[0,a]}+\Upsilon(a)a^\alpha \| u \|_{C[-p,a]})+\| F_0 \|_{C[0,a]}\\ &\leq [F]_{C_{Lip}}(\| u \|_{C[0,a]}+\Upsilon(a)a^\alpha(\| \varphi \|_{C([-p,0])}+\| u \|_{C[0,a]}))\\ &\quad +\| F_0 \|_{C[0,a]}\\ &\leq \alpha_1(a) \| \varphi \|_{C([-p,0])}+\alpha_2(a) \| u \|_{C[0,a]}+\alpha_3(a), \end{aligned}\tag{2.13}$$

onde $\alpha_i(a)$, $i = 1,\ldots,3$ são constantes independentes de $\varphi(\cdot)$. Definindo $\alpha_4(a) = (\frac{C_1}{\alpha(1-\alpha)} + C_0)a^{1-\alpha}$, do item (a) do Lema 17 e da última desigualdade, obtemos que

$$\begin{aligned}
[u]_{C^\alpha[0,a]} &\leq [T(\cdot)\varphi(0)]_{C^\alpha[0,a]} + \| F_{u(\cdot,\varphi)} \|_{C[-p,a]} \alpha_4(a) \\
&\leq C_0 a^{1-\alpha} \| A\varphi(0) \| + \alpha_1(a) \| \varphi \|_{C[-p,0]} \\
&\quad + \alpha_2(a) \| u \|_{C[0,a]} + \alpha_3(a) \\
&\leq \alpha_5(a) \| \varphi \|_{\mathfrak{B}} + \alpha_2(a) \| u \|_{C[0,a]} + \alpha_3(a), \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

onde $\alpha_5(a)$, é uma constante independente de $\varphi(\cdot)$. Do anterior, (2.9), (2.7), (2.13) e (2.14), obtemos que

$$\| Au(\cdot) \|_{C[0,a]} \leq \alpha_6(a) \| \varphi \|_{\mathfrak{B}} + \alpha_7(a),$$

onde $\alpha_i(a)$, $i = 6,7$, são constantes independentes de $\varphi(\cdot)$. Mais ainda, podemos obter uma desigualdade similar para $[u]_{C_{Lip}[0,a]}$ observando que $u(\cdot,\varphi)$ é uma solução estrita e que $[u]_{C_{Lip}[0,a]} \leq \| u' \|_{C[0,a]} \leq \| Au \|_{C[0,a]} + \| F_{u(\cdot,\varphi)} \|_{C[0,a]}$. □

Lema 3. Sejam $\varphi, \psi \in \mathfrak{B}$, $u = u(\cdot,\varphi)$ e $v = u(\cdot,\psi)$. Então $F(\cdot,u(\cdot),u_K(\cdot))$ pertence a $C^\alpha([0,a];X)$ e

$$\begin{aligned}
&[F_{u(\cdot,\varphi)}]_{C^\alpha[0,a]} \\
&\quad \leq [F]_{C_{Lip}}(a^{1-\alpha} + \Upsilon(a) \| \varphi \|_{C[-p,0]}) + (1+\Upsilon(a)) \| u \|_{C^\alpha[0,a]}), \\
&\| F_{u(\cdot,\varphi)} - F_{u(\cdot,\psi)} \|_{C[0,a]} \\
&\quad \leq [F]_{C_{Lip}}(\Upsilon(a)a^\alpha \| \varphi - \psi \|_{C[-p,0]} + (1+\Upsilon(a)a^\alpha \Psi(a,v,\psi)) \| u - v \|_{C[0,a]}).
\end{aligned}$$

Demonstração. Do Lema 1, podemos ver que

$$\begin{aligned}
&[F_{u(\cdot,\varphi)}]_{C^\alpha[0,a]} \\
&\quad \leq [F]_{C_{Lip}}(a^{1-\alpha} + [u]_{C^\alpha[0,a]} + \Upsilon(a) \| u \|_{C[-p,a]}) \\
&\quad \leq [F]_{C_{Lip}}(a^{1-\alpha} + \Upsilon(a) \| \varphi \|_{C[-p,0]}) + (1+\Upsilon(a)) \| u \|_{C^\alpha[0,a]}).
\end{aligned}$$

Novamente usando o Lema 1, temos que

$$\begin{aligned}
&\| F_{u(\cdot,\varphi)} - F_{u(\cdot,\psi)} \|_{C[0,a]} \\
&\quad \leq [F]_{C_{Lip}}(\| u - v \|_{C[0,a]} + \| u_K - v_K \|_{C[0,a]}) \\
&\quad \leq [F]_{C_{Lip}}(\| u - v \|_{C[0,a]} + a^\alpha [u_K - v_K]_{C^\alpha[0,a]}) \\
&\quad \leq [F]_{C_{Lip}} \| u - v \|_{C[0,a]} \\
&\qquad + [F]_{C_{Lip}} \Upsilon(a) a^\alpha (\| \varphi - \psi \|_{C[-p,0]} + \Psi(a,v,\psi) \| u - v \|_{C[0,a]}) \\
&\quad \leq [F]_{C_{Lip}}(\Upsilon(a)a^\alpha \| \varphi - \psi \|_{C[-p,0]} + (1+\Upsilon(a)a^\alpha \Psi(a,v,\psi)) \| u - v \|_{C[0,a]}),
\end{aligned}$$

o que permite finalizar a prova. □

Lema 4. Existe $\Lambda_5(a) > 0$ tal que

$$\| u(\cdot,\varphi) - v(\cdot,\psi) \|_{C[-p,a]} \leq \Lambda_5(a) \| \varphi - \psi \|_{\mathfrak{B}} e^{\Lambda_5(a)\Psi(a,u(\cdot,\psi),\psi))a}, \tag{2.15}$$

para todo $\varphi, \psi \in \mathfrak{B}$.

Demonstração. Do Lema 3, para $t \in [0,a]$, temos que

$$\begin{aligned}
&\| u(\cdot,\varphi) - u(\cdot,\psi) \|_{C[0,t]} \\
&\leq C_0 \| \varphi - \psi \|_{C[-p,0]} + \int_0^t C_0[F]_{C_{Lip}} \Upsilon(a) a^{\alpha} \| \varphi - \psi \|_{C[-p,0]} \, ds \\
&\quad + \int_0^t C_0[F]_{C_{Lip}} (1 + \Upsilon(a) a^{\alpha} \Psi(a,u(\cdot,\psi),\psi)) \| u - v \|_{C[0,s]} \, ds \\
&\leq C_0(1 + [F]_{C_{Lip}} \Upsilon(a) a^{1+\alpha}) \| \varphi - \psi \|_{C[-p,0]} \\
&\quad + C_0[F]_{C_{Lip}} (1 + \Upsilon(a) a^{\alpha} \Psi(a,u(\cdot,\psi),\psi)) \int_0^t \| u - v \|_{C[0,s]} \, ds,
\end{aligned}$$

e, assim, $\| u(\cdot,\varphi) - v(\cdot,\psi) \|_{C[0,a]} \leq \alpha_1(a) \| \varphi - \psi \|_{\mathfrak{B}} e^{\alpha_2(a)\Psi(a,u(\cdot,\psi),\psi))a}$, onde $\alpha_1(a), \alpha_2(a)$ são constantes independentes de $\varphi(\cdot)$ e $\psi(\cdot)$. Usando esta desigualdade obtemos (2.15). □

Para estimar $\| Au(\cdot,\varphi) - Au(\cdot,\psi) \|$, de (HERNANDEZ; WU, 2019a) incluímos a condição a seguir.

$\mathfrak{F}_\alpha$: $\alpha \in (0,1)$, $F(\cdot)$ é Frechet diferenciável em $X \times X$, $D_2F(\cdot)$ é contínua em $[0,b] \times (X \times X)$ e existe $L_F > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
&\| F(t,(x,y)) - F(s,(x,y)) \| \\
&\quad + \| D_2F(t,(x,y)) - D_2F(s,(x,y)) \|_{\mathscr{L}(X\times X,X)} \leq L_F \mid t - s \mid^{\alpha}, \\
&\| D_2F(s,(x_1,y_1)) - D_2F(s,(x_2,y_2)) \|_{\mathscr{L}(X\times X,X)} \\
&\qquad \leq L_F(\| x_1 - x_2 \| + \| y_1 - y_2 \|),
\end{aligned}$$

para todo $0 \leq s,t \leq b \leq a$, $x, x_i, y, y_i \in X$.

Procedendo como na prova de (HERNANDEZ; O'REGAN; PONCE, 2014, Lema 2.2), podemos provar o próximo resultado.

Lema 5. Suponha que a condição $\mathfrak{F}_\alpha$ esteja satisfeita, $\varphi, \psi \in \mathfrak{B}$, $u = u(\cdot,\varphi)$ e $v = u(\cdot,\psi)$. Então

$$\begin{aligned}
&[F_{u(\cdot,\varphi)} - F_{u(\cdot,\psi)}]_{C^{\alpha}[0,a]} \\
&\leq L_F B_\alpha(u,v)(\| u - v \|_{C[0,a]} + \| u_K - v_K \|_{C[0,a]}) \\
&\quad + (L_F B(u,v) + \| d_2F(\cdot,0,0) \|_{C[0,a]})([u - v]_{C^{\alpha}[0,a]} + [u_K - v_K]_{C^{\alpha}[0,a]}),
\end{aligned} \tag{2.16}$$

onde $B_\alpha(u,v) = 1 + [u]_{C^{\alpha}[0,a]} + [u_K]_{C^{\alpha}[0,a]} + [v]_{C^{\alpha}[0,a]} + [v_K]_{C^{\alpha}[0,a]}$ and $B(u,v) = \| u \|_{C[0,a]} + \| u_K \|_{C[0,a]} + \| v \|_{C[0,a]} + \| v_K \|_{C[0,a]}$.

Observação 3. É conveniente reescrever as desigualdades no Lema 5 e no Lema 3. Para $h \in C^{\alpha}([-p,a];X)$, observe que

$$\begin{aligned}
[h]_{C^{\alpha}[0,a]} + [h_K]_{C^{\alpha}[0,a]} &\leq [h]_{C^{\alpha}[0,a]} + \Upsilon(a) \parallel h \parallel_{C[-p,a]} \\
&\leq \Upsilon(a) \parallel h_0 \parallel_{C[-p,0]} + (1+\Upsilon(a)) \parallel h \parallel_{C^{\alpha}[0,a]}, \\
\parallel h \parallel_{C[0,a]} + \parallel h_K \parallel_{C[0,a]} & \\
&\leq \parallel h \parallel_{C[0,a]} + \Upsilon(a)a^{\alpha} \parallel h \parallel_{C[-p,a]} \\
&\leq \Upsilon(a)a^{\alpha} \parallel h_0 \parallel_{C[-p,0]} + (1+\Upsilon(a)a^{\alpha}) \parallel h \parallel_{C[0,a]} .
\end{aligned}$$

Observe também que existe $\alpha(a) > 0$ independente de $\varphi(\cdot)$ e $\psi(\cdot)$ tal que $B_{\alpha}(u,v) + B(u,v) \leq \alpha(a)\mathscr{S}_1(u,v)$, onde $\mathscr{S}_1(u,v) = 1 + \parallel \varphi \parallel_{C[-p,0]} + \parallel \psi \parallel_{C[-p,0]} + \parallel u \parallel_{C^{\alpha}[0,a]} + \parallel v \parallel_{C^{\alpha}[0,a]}$. Do anterior, podemos reescrever as desigualdades no Lema 5 e no Lema 3 na forma

$$\begin{aligned}
&[F_{u(\cdot,\varphi)} - F_{u(\cdot,\psi)}]_{C^{\alpha}[0,a]} \\
&\quad \leq \Lambda_6(a)\mathscr{S}_1(u,v)(\parallel \varphi - \psi \parallel_{C[-p,0]} + \parallel u - v \parallel_{C[0,a]} + [u-v]_{C^{\alpha}[0,a]}), \\
&\parallel F_{u(\cdot,\varphi)} - F_{u(\cdot,\psi)} \parallel_{C[0,a]} \\
&\quad \leq \Lambda_6(a)(\parallel \varphi - \psi \parallel_{C[-p,0]} + \Psi(a,v,\psi) \parallel u - v \parallel_{C[0,a]}),
\end{aligned}$$

onde $\Lambda_6(a)$ é uma constante positiva independente de $\varphi(\cdot)$ e $\psi(\cdot)$.

Lema 6. Se a condição $\mathfrak{F}_{\alpha}$ está satisfeita, então existe $\Lambda_7(a) > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
&[u(\cdot,\varphi) - u(\cdot,\psi)]_{C^{\alpha}[-p,a]} \\
&\quad \leq \Lambda_7(a)(\parallel \varphi - \psi \parallel_{\mathfrak{B}} + \Psi(a,u(\cdot,\psi),\psi) \parallel u(\cdot,\varphi) - u(\cdot,\psi) \parallel_{C[0,a]}),
\end{aligned} \tag{2.17}$$

para todo $\varphi, \psi \in \mathfrak{B}$.

Demonstração. Seja $\alpha_1(a) = (\frac{C_1}{\alpha(1-\alpha)} + C_0)a^{1-\alpha}$. Do item (a) do Lema 17 e observacao 3, obtemos que

$$\begin{aligned}
&[u(\cdot,\varphi) - u(\cdot,\psi)]_{C^{\alpha}[0,a]} \\
&\quad \leq a^{1-\alpha}C_0 \parallel A\varphi(0) - A\psi(0) \parallel + \alpha_1(a) \parallel F_{u(\cdot,\varphi)} - F_{u(\cdot,\psi)} \parallel_{C[0,a]} \\
&\quad \leq a^{1-\alpha}C_0 \parallel A\varphi(0) - A\psi(0) \parallel \\
&\qquad + \alpha_1(a)\Lambda_6(a)(\parallel \varphi - \psi \parallel_{C[-p,0]} + \Psi(a,u(\cdot,\psi),\psi) \parallel u - v \parallel_{C[0,a]}),
\end{aligned}$$

o que permite finalizar a prova. □

Lema 7. Existe $\Lambda_8(a) > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
&\parallel Au(\cdot,\varphi) - Au(\cdot,\psi) \parallel_{C[0,a]} \\
&\quad \leq \Lambda_8(a)\mathscr{S}_1(u,v) \parallel \varphi - \psi \parallel_{\mathfrak{B}} \\
&\qquad + \Lambda_8(a)(\mathscr{S}_1(u,v) + \mathscr{S}_1(u,v)\Psi(a,v,\psi) + \Psi(a,v,\psi)) \parallel u(\cdot,\varphi) - u(\cdot,\psi) \parallel_{C[0,a]},
\end{aligned} \tag{2.18}$$

para todo $\varphi, \psi \in \mathfrak{B}$, onde $u = u(\cdot,\varphi)$ e $v = u(\cdot,\psi)$.

Demonstração. Observando que $\varphi(0)-\psi(0)\in D(A)$ e $F_{u(\cdot,\varphi)}-F_{u(\cdot,\psi)}\in C^{\alpha}([0,a];X)$ (Veja Lema 5), temos que $u(\cdot)-v(\cdot)$ é uma solução estrita de

$$w'(t)=Aw(t)+F_{u(\cdot,\varphi)}(t)-F_{u(\cdot,\psi)}(t),\qquad t\in[0,a],$$

com condição inicial $w(0)=\varphi(0)-\psi(0)$. Do item (b) do Lema 17 vemos que

$$\begin{aligned}&\| Au(\cdot,\varphi)-Au(\cdot,\psi)\|_{C[0,a]}\\ &\quad\leq\ C_0\| A\varphi(0)-A\psi(0)\|+(C_0+1)\| F_{u(\cdot,\varphi)}-F_{u(\cdot,\psi)}\|_{C[0,a]}\\ &\qquad+C_1\frac{a^{\alpha}}{\alpha}[F_{u(\cdot,\varphi)}-F_{u(\cdot,\psi)}]_{C^{\alpha}[0,a]},\end{aligned}\tag{2.19}$$

e combinando as estimativas na observação 3 e no Lema 6, obtemos (2.18). □

Para estabelecer o resultado a seguir, incluímos a próxima definição.

Definição 4. Sejam $(\mathscr{S},\|\cdot\|_S)$ e $(\mathscr{W},\|\cdot\|_W)$ espaços normados tais que $(\mathscr{S},\|\cdot\|_S)\hookrightarrow C([-p,a];X)$ e $(\mathscr{W},\|\cdot\|_W)\hookrightarrow C([-p,0];X)$. Dizemos que o problema (2.1)-(2.2) está bem colocado relativo aos espaços $(\mathscr{W},\|\cdot\|_S)$ e $(\mathscr{S},\|\cdot\|_{\mathscr{S}})$, se para todo $\varphi\in\mathscr{W}$ existe uma única solução fraca $u(\cdot,\varphi)$ de (2.1)-(2.2), $u(\cdot,\varphi)\in\mathscr{S}$ e $\| u(\cdot,\varphi)-u(\cdot,\psi)\|_{\mathscr{S}}\to 0$ quando $\| \psi-\varphi\|_{\mathscr{W}}\to 0$.

Podemos estabelecer agora o primeiro Teorema. Neste resultado, $\mathfrak{B}_a$ é o espaço

$$\mathfrak{B}_a=\{u\in C([-p,a];X):u_0\in\mathfrak{B},\, u_{|_{[0,a]}}\in C([0,a];X_1)\}$$

munido da norma $\|\cdot\|_{\mathfrak{B}_a}=\|\cdot\|_{C([-p,a];X)}+\|\cdot\|_{C([0,a];X_1)}$, onde X_1 é o espaço $D(A)$ munido da norma $\| x\|_1=\| Ax\|$.

Teorema 1. Assuma que as condições na Proposição 3 e a condição $\mathfrak{F}_{\alpha}$ estão satisfeitas. Então o problema (2.1)-(2.2) está bem colocado relativo aos espaços $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{B}_a$.

Demonstração. Seja $\varphi,\psi\in\mathfrak{B}$. A existência de uma única solução estrita $u(\cdot,\psi)\in\mathfrak{B}_a$ de (2.1) com condição inicial ψ segue da Proposição 3. Por outro lado, do Lema 4 temos que

$$\| u(\cdot,\varphi)-u(\cdot,\psi)\|_{C[0,a]}\leq\Lambda_5(a)\| \varphi-\psi\|_{\mathfrak{B}}\, e^{\Lambda_5(a)\Psi(a,u(\cdot,\varphi),\varphi)a}\to 0,\tag{2.20}$$

quando $\| \psi-\varphi\|_{\mathfrak{B}}\to 0$. Além disso, usando a notação $u=u(\cdot,\varphi)$ e $v=u(\cdot,\psi)$, do Lema 7 obtemos que

$$\begin{aligned}&\| Au(\cdot,\varphi)-Au(\cdot,\psi)\|_{C[0,a]}\\ &\quad\leq\ \Lambda_8(a)\mathscr{S}_1(u,v)\| \varphi-\psi\|_{\mathfrak{B}}\\ &\qquad+\Lambda_8(a)(\mathscr{S}_1(u,v)+\mathscr{S}_1(u,v)\Psi(a,u,\varphi)+\Psi(a,u,\varphi))\| u(\cdot,\varphi)-u(\cdot,\psi)\|_{C[0,a]}\,.\end{aligned}\tag{2.21}$$

De (2.7) e (2.12), podemos ver que $\mathscr{S}_1(u,v)$ é limitada para $\psi(\cdot)$ em subconjuntos limitados de $\mathfrak{B}$, o que implica usando (2.20) que $\| Au(\cdot,\varphi)-Au(\cdot,\psi)\|_{C([0,a];X)}\to 0$ quando $\| \psi-\varphi\|_{\mathfrak{B}}\to 0$. Do anterior, temos que $\| u(\cdot,\varphi)-u(\cdot,\psi)\|_{\mathfrak{B}_a}\to 0$ quando $\| \psi-\varphi\|_{\mathfrak{B}}\to 0$. □

A seguir, para $\varphi \in \mathfrak{B}$ e $t \geq 0$ usamos a notação $S(t)$ para a aplicação $S(t) : \mathfrak{B} \to C([-p,0];X)$ dada por $S(t)\varphi = u_t(\cdot,\varphi)$. Do Teorema 1, temos o próximo resultado.

Corolário 2. Assuma que a condições no Teorema 1 estão satisfeitas e seja $\varphi \in \mathfrak{B}$. Então $\| S(t)\varphi - S(t)\psi \|_{C([-p,0];X)} \to 0$ quando $\| \varphi - \psi \|_{\mathfrak{B}} \to 0$ e $\| S(t)\varphi - S(s)\varphi \|_{C([-p,0];X)} \to 0$ quando $s \to t$.

Demonstração. A primeira afirmação segue do Teorema 1. A segunda afirmação segue observando que $u(\cdot,\varphi)$ é Lipschtz em $[-p,a]$. □

No resultado a seguir, $\mathfrak{B}^1$ é o espaço introduzido no começo da seção.

Proposição 4. Assuma que $F(0,\cdot,0) = 0$ e que as condições no Teorema 1 estão satisfeitas. Então o problema (2.1)-(2.2) está bem colocado relativo aos espaços $\mathfrak{B}^1$ e $C^1([-p,a];X)$.

Demonstração. Seja $\varphi, \psi \in \mathfrak{B}^1$. Da Proposição 3, existe uma única solução estrita $u(\cdot,\psi)$ de (2.1) em $[-p,a]$ com condição inicial ψ. Mais ainda, da condição $F(0,\cdot,0) = 0$ temos que $u'(0^+,\psi) = A\psi(0)$, o que implica que $u(\cdot,\psi) \in C^1([-p,a];X)$.

Seja $u = u(\cdot,\varphi)$ e $v = u(\cdot,\psi)$. Observando que $u(\cdot)$ e $v(\cdot)$ são soluções estritas, temos que

$$\begin{aligned} &\| u'(\cdot,\varphi) - u'(\cdot,\psi) \|_{C[0,a]} \\ &\qquad \leq \| Au(\cdot,\varphi) - Au(\cdot,\psi) \|_{C[0,a]} + \| F_{u(\cdot,\varphi)} - F_{u(\cdot,\psi)} \|_{C[0,a]} \end{aligned}$$

Do Teorema 1, $\| Au(\cdot,\varphi) - Au(\cdot,\psi) \|_{C([0,a];X)} \to 0$ as $\| \psi - \varphi \|_{\mathfrak{B}} \to 0$. Mais ainda, da observação 3 e (2.15) temos que

$$\begin{aligned} &\| F_{u(\cdot,\varphi)} - F_{u(\cdot,\psi)} \|_{C[0,a]} \\ &\qquad \leq \Lambda_6(a)(\| \varphi - \psi \|_{C[-p,0]} + \Psi(a,u,\varphi) \| u - v \|_{C[0,a]}) \\ &\qquad \leq \Lambda_6(a) \| \varphi - \psi \|_{C[-p,0]} \\ &\qquad\quad + \Lambda_6(a)\Lambda_5(a)\Psi(a,u,\varphi) \| \varphi - \psi \|_{\mathfrak{B}} \, e^{\Lambda_5(a)\Psi(a,u(\cdot,\varphi),\varphi))a} \to 0, \end{aligned}$$

quando $\| \psi - \varphi \|_{\mathfrak{B}} \to 0$.

Das observações anteriores, vemos que $\| u(\cdot,\varphi) - u(\cdot,\psi) \|_{C^1([0,a];X)} \to 0$ quando $\| \psi - \varphi \|_{\mathfrak{B}} \to 0$, o que permite finalizar a prova. □

Finalizamos esta seção com o corolário a seguir.

Corolário 3. Se as condições na Proposição 4 estão satisfeitas e $\varphi \in \mathfrak{B}$, então $\| S(t)\varphi - S(s)\varphi \|_{\mathfrak{B}^1} \to 0$ quando $s \to t$ e $\| S(t)\varphi - S(t)\psi \|_{\mathfrak{B}^1} \to 0$ quando $\| \varphi - \psi \|_{\mathfrak{B}^1} \to 0$.

2.2 Exemplos

Nesta seção, estudamos alguns exemplos de equações diferenciais parciais com retardo dependendo do estado motivado por diferentes trabalhos e aplicações, veja por exemplo (ALT, 1979), (BRITTON, 1990), (COOKE; HUANG, 1996), (GOURLEY; BRITTON, 1996), (GOPALSAMY, 1980), (GOURLEY, 1996), (HERNANDEZ; PIERRI; WU, 2016), (HERNANDEZ; WU, 2019a), (REZOUNENKO; WU, 2006), (SHAKOURIFAR; ENRIGHT, 2011), (YI; CHEN; WU, 2012) e (ZHANG; VANDEWALLE, 2006).

A seguir, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \in \{1,2,3\}$, é um subconjunto aberto com fronteira suave, $X = L^2(\overline{\Omega})$ e A é operador Laplaciano com condição de Dirichlet e $D(A) = \{u \in X : u = 0 \text{ em } \partial\Omega \text{ e } \Delta u \in X\}$. É bem conhecido que A é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico e compacto $(T(t))_{t\geq 0}$ em X. A seguir, adotamos todas as notações e propriedades consideradas nas seções anteriores e assumimos que $f \in C_{Lip}([0,a] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ e $\zeta \in C_{Lip}([0,a] \times X; [0,p])$.

Iniciamos estudando alguns dos exemplos em (HERNANDEZ; WU, 2019a). Considere o problema

$$\begin{aligned} w'(t,\xi) &= \Delta w(t,\xi) + f(t, \int_0^t \beta(t,s) w(s - \zeta(s, w(s,\cdot)), \xi) ds), && (2.22)\\ w(t,\cdot) &= 0, \text{ on } \partial\Omega, && (2.23)\\ w(s,\xi) &= \varphi(s,\xi), \quad s \in [-p,0], && (2.24) \end{aligned}$$

para $\xi \in \Omega$, $t \in [0,a]$, onde $\beta \in C([0,a] \times [0,a]; \mathbb{R})$ e a família de aplicações $\{\beta(\cdot,\tau) : \tau \in [0,a]\}$ é limitada em $C^\alpha([0,a]; \mathbb{R})$ para algum $\alpha \in (0,1)$.

Para aplicar os resultados obtidos na seção anterior, definimos $F : [0,a] \times X \to X$, $K(t,s) : X \to X$ e $\sigma : [0,a] \times X \to \mathbb{R}$ por $F(t,x)(\xi) = f(t, x(\xi))$, $K(t,s)x(\xi) = \beta(t,s)x(\xi)$ e $\sigma(s,x) = \zeta(s,x)$. Desta forma, vemos que F é Lipschitz e que a condição $\mathfrak{L}_\alpha$ está satisfeita. No resultado a seguir, que segue da Proposição 3, dizemos que $u \in C([-p,a]; X)$ é uma solução estrita de (2.22)-(2.24) em $[-p,a]$ e $u(\cdot)$ é uma solução estrita do problema associado (2.1)-(2.2) em $[-p,a]$. Adotamos nomenclaturas similares nos exemplos seguintes.

Proposição 5. Sob as condições anteriores, para todo $\varphi \in \mathfrak{B}$ existe uma única solução estrita $u(\cdot,\varphi) \in C_{Lip}([-p,a]; X)$ de (2.22)-(2.24) em $[-p,a]$. Se, além disso, $f \in C^2([0,a] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ e existe $L_f > 0$ tal que

$$\text{Condition } \mathfrak{f}_\alpha\text{: } | f(t,x) - f(s,x) |_{\mathbb{R}^N} + | D_2 f(t,x) - D_2 f(s,x) | \leq L_f \, | t - s |^\alpha,$$
$$| D_2 f(t,x) - D_2 f(t,y) | \leq L_f \, | x - y |_{\mathbb{R}^n},$$

para todo $0 \leq s,t \leq a$ e $x,y \in \mathbb{R}^N$, então o problema está bem colocado relativo aos espaços $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{B}_a$, $\| S(t)\varphi - S(t)\psi \|_{C([-p,0];X)} \to 0$ quando $\| \varphi - \psi \|_{\mathfrak{B}} \to 0$ e $\| S(t)\varphi - S(s)\varphi \|_{C([-p,0];X)} \to 0$ quando $s \to t$.

Demonstração. Somente observamos que a condição $\mathfrak{f}_\alpha$ implica que a condição $\mathfrak{F}_\alpha$ está verificada. □

Estudamos agora o problema

$$
\begin{aligned}
w'(t,\xi) &= \Delta w(t,\xi) + f(t, \int_0^t \frac{\rho(s)}{(t-s)^\alpha} w(s-\zeta(s,w(s,\cdot)),\xi)ds), && (2.25)\\
w(t,\cdot)_{|\partial\Omega} &= 0, && (2.26)\\
w(s,\xi) &= \varphi(s,\xi) \quad s\in[-p,0], && (2.27)
\end{aligned}
$$

para $\xi \in \Omega$, $t \in [0,a]$, onde $\alpha \in (0,\frac{1}{2})$ e $\rho \in C([0,a];\mathbb{R})$.

Sejam $K(t,s)$ e $L_{K,\alpha,s} : [0,s] \to \mathbb{R}$ as funções definidas por $K(t,s)x(\xi) = \frac{\rho(s)}{(t-s)^\alpha}x(\xi)$ e $L_{K,\alpha,s}(\tau) = \frac{\rho(\tau)}{(s-\tau)^{2\alpha}}$. Para $0 \le \tau < s < t \le b \le a$, temos que

$$
(\int_0^t \| K(t,s) \|_{\mathscr{L}(X)}^{\frac{1}{1-\alpha}} ds)^{1-\alpha} \le \| \rho \|_{C[0,a]} a^{1-2\alpha} (\frac{1-\alpha}{1-2\alpha})^{1-\alpha}
$$

e $\| K(t,\tau) - K(s,\tau) \|_{\mathscr{L}(X)} \le \frac{\|\rho\|_{C[0,a]}}{(s-\tau)^{2\alpha}} \mid t-s \mid^\alpha$, o que implica que a condição $\mathfrak{L}_\alpha$ está satisfeita. Do Teorema 1 temos o próximo resultado.

Proposição 6. Se a condição $\mathfrak{f}_\alpha$ está satisfeita, então o problema (2.25)-(2.27) está bem colocado relativo aos espaços $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{B}_a$, $\| S(t)\varphi - S(t)\psi \|_{C([-p,0];X)} \to 0$ quando $\| \varphi - \psi \|_{\mathfrak{B}} \to 0$ e $\| S(t)\varphi - S(s)\varphi \|_{C([-p,0];X)} \to 0$ quando $s \to t$.

Para finalizar esta seção, consideramos o problema

$$
\begin{aligned}
w'(t,\xi) &= \Delta w(t,\xi) + \mu(t) \int_0^t \int_\Omega \gamma(t,s,y-\xi) w(s-\zeta(s,w(s)),y)dyds, && (2.28)\\
w(t,\cdot)_{|\partial\Omega} &= 0, && (2.29)\\
w(s,\xi) &= \varphi(s,\xi), \ \ s\in[-p,0], && (2.30)
\end{aligned}
$$

para $(t,\xi) \in [0,a]\times\Omega$, onde $\gamma \in C([0,a]\times[0,a]\times\mathbb{R}^N;\mathbb{R})$ e $\mu \in C^\alpha([0,a];\mathbb{R})$ para algum $\alpha \in (0,1)$.

Para estudar este problema, definimos $K : [0,a]\times[0,a] \to \mathscr{L}(X)$ e $F : [0,a]\times X \to X$ por $K(t,s)x(\xi) = \int_\Omega \gamma(t,s,y-\xi)x(y)dy$ e $F(t,x)(\xi) = \mu(t)x(\xi)$, e assumimos que existe $\chi \in C([0,a]\times\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^+)$ tal que

$$
\mid \gamma(t,s,x) - \gamma(t',s,x) \mid \le \chi(s,x) \mid t-t' \mid^\alpha, \quad \forall\, t,t',s \in [0,a], x \in \mathbb{R}^N,
$$

e que $\widetilde{\chi}(\cdot) = (\int_\Omega \int_\Omega \mid \chi(\cdot,x-y)^2 dydx)^{\frac{1}{2}}$ pertence a $L^1([0,a])$.

Do anterior, a condição $\mathfrak{L}_\alpha$ está satisfeita com $L_{K,\alpha,s}(\cdot) = \chi(\cdot)$ e $\Theta(b) = \sup_{t\in[0,b]}(\int_0^t(\int_\Omega\int_\Omega \gamma(t,s,x-y)^2 dydx)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{1-\alpha}} dt$. Observando que $F(\cdot)$ é "não Lispchitz", para estabelecer o resultado a seguir, precisamos incluir algumas observações.

A prova do Teorema 1 segue de algumas desigualdades presentes em diferentes proposições e lemas. Observando que $F(\cdot)$ é linear, temos que as únicas (possíveis) diferenças "qualitativas" relativas às essas desigualdades pode aparecerem nas estimativas de $[F_{u(\cdot,\varphi)}]_{C^\alpha([0,a];X)}$ e

$[F_{u(\cdot,\varphi)} - F_{u(\cdot,\psi)}]_{C^\alpha([0,a];X)}$ (veja Lema 3 e Lema 5). No presente caso, a estimativa de $[F_{u(\cdot,\varphi)} - F_{u(\cdot,\psi)}]_{C^\alpha([0,a];X)}$ (o que também permite estimar também $[F_{u(\cdot,\varphi)}]_{C^\alpha([0,a];X)}$) pode se obtida sem o uso do (HERNANDEZ; O'REGAN; PONCE, 2014, Lema 2.2). Usando a última desigualdade no Lema 1, obtemos a desigualdade

$$\begin{aligned}[F_{u(\cdot,\varphi)} - F_{u(\cdot,\psi)}]_{C^\alpha[0,a]} &\leq \| \mu \|_{C^\alpha} \| u_K(\cdot,\varphi) - u_K(\cdot,\psi) \|_{C^\alpha[0,a]} \\ &\leq \| \mu \|_{C^\alpha} (\Theta(a)a^\alpha + \Upsilon(a))(\| \varphi - \psi \|_{C[-p,0]} + \Psi(a,v,\psi) \| u - v \|_{C[0,a]}),\end{aligned}$$

o que é "qualitativamente" mais simples que a desigualdade no Lema 5. Da observações anteriores e do Teorema 1, obtemos o resultado a seguir.

Proposição 7. O problema (2.28)-(2.30) está bem colocado relativo aos espaços $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{B}_a$.

CAPÍTULO

3

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ABSTRATAS COM RETARDO DEPENDENDO DO ESTADO

Neste capítulo, estudamos a existência e unicidade de soluções locais e globais, a boa colocação e a existência de atratores para uma classe de equações diferenciais abstratas com retardo dependendo do estado na forma

$$u'(t) = Au(t) + F(t, u(t), u(t - \sigma(t, u_t))), \quad t \geq 0, \tag{3.1}$$

$$u_0 = \varphi \in \mathscr{C} := C([-p, 0]; X), \tag{3.2}$$

onde $A : D(A) \subset X \to X$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo analítico e compacto de operadores lineares limitados $(T(t))_{t \geq 0}$ definido no espaço de Banach $(X, \| \cdot \|)$, $F(\cdot), \sigma(\cdot)$ são funções contínuas adequadas e, para $t \geq 0$, a função história $u_t \in C([-p, 0]; X)$ é definida por $u_t(\theta) = u(t + \theta)$, para $\theta \in [-p, 0]$.

Neste capítulo, estabelecemos diferentes resultados sobre existência e unicidade de soluções fracas e estritas locais e globais, boa colocação e existência de atrator global para a versão autônoma de (3.1)-(3.2).

Nossos resultados sobre existência e unicidade de soluções serão provadas assumindo uma condição do tipo Lipschitz em $F(\cdot)$ e $\sigma(\cdot)$, o que nos permite estender e generalizar os resultados em (HERNANDEZ; PIERRI; WU, 2016), (HERNANDEZ; WU, 2019b), (HERNANDEZ; WU, 2019a) e (HERNANDEZ; FERNANDES; WU, 2020).

Definição 5. (HERNANDEZ; WU; CHADHA, 2020) Sejam Y_i, $i = 1, 2$, espaços de Banach, $q \geq 1$ e $P \in C([0, \infty) \times Y_1; Y_2)$. Dizemos que $P(\cdot)$ é localmente L^q-Lipschitz, se existe uma função integrável $[P]_{(\cdot,\cdot)} : [0, \infty) \times [0, \infty) \to \mathbb{R}^+$ e uma função não decrescente $\mathscr{W}_P : [0, \infty) \mapsto [0, \infty)$ tais que $[P]_{(t,\cdot)} \in L^q([0, a]; \mathbb{R}^+)$, para todo $t \geq 0$ e $a > 0$, e

$$\| P(t, x) - P(s, y) \|_{Y_2} \leq [P]_{(t,s)} \mathscr{W}_P(\max\{\| x \|_{Y_1}, \| y \|_{Y_1}\})(| t - s | + \| x - y \|_{Y_1}), \tag{3.3}$$

para quase todo ponto (q.t.p.) $t,s \in [0,\infty)$ e todo $x,y \in Y_1$. A seguir, usamos a notação $L^q_{Lip}(Y_1;Y_2)$ para o conjunto formado pelas funções que satisfazem esta condição.

Observação 4. (HERNANDEZ; WU; CHADHA, 2020) Como um exemplo de uma função em $L^q_{Lip}(Y_1;Y_2)$, considere a função $G:[0,+\infty)\times X \to X$ dada por $G(t,x) = \sqrt[\theta]{t}f(x)$, onde $\theta > 1$ e $f : X \to X$ é uma função localmente Lipschitz. A função $G(\cdot)$ não é localmente Lipschitz, mas $G \in L^q_{Lip}(X;X)$ com $q \in [1, \frac{\theta}{1-\theta})$, $[G]_{(t,s)} = \frac{1}{\theta}s^{\frac{1}{\theta}-1} \parallel f \parallel_\infty + \sqrt[\theta]{s}[f]_{C_{Lip}(X)}$ para $t > s > 0$, $[G]_{(t,0)} = t^{\frac{1}{\theta}-1} \parallel f \parallel_\infty$ para $t > 0$, $[G]_{(t,t)} = \sqrt[\theta]{t}[f]_{C_{Lip}(X)}$ para $t > 0$, e $[G]_{(0,0)} = 0$, onde $\parallel f \parallel_\infty := \max_{x\in X} \parallel f(x) \parallel$.

Notação 2. Para $l > 1$ usamos a notação l' para $l' = \frac{l}{l-1}$. De forma usual, para $l = 1$ tome $l' = \infty$. Mais ainda, para $r,q \in [1,\infty)$, usamos a notação $\Theta(q,r) = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$. Se $\Theta(q,r) < 1$, usamos a notação $\Lambda(q,r) \in [1,\infty]$ para o número definido pela relação $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{\Lambda(q,r)} = 1$.

Notação 3. Precisamos de algumas notações adicionais.

(a) Para $b > 0$ e $u \in C([-p,b];X)$, usamos a notação u^σ para a função $u^\sigma : [0,b] \to X$ dada por $u^\sigma(t) = u(t-\sigma(t,u_t))$ para $t \in [0,b]$. Além disso, para $v \in C_{Lip}([-p,b];X)$ escrevemos simplesmente $[v]_{C_{Lip}([-p,b])}$ no lugar de $[v]_{C_{Lip}([-p,b];X)}$. Similares notações são usadas para outros tipos de espaços de funções contínuas.

(b) Para $b > 0$ e $u \in C([-p,b];X)$, usamos a notação $F^\sigma(u)$ para a função $F^\sigma(u) : [0,b] \to X$ dada por $F^\sigma(u)(s) = F(s,u(s),u^\sigma(s))$ para $s \in [0,b]$.

(c) $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}_\lambda$, $\lambda \in (0,1]$, são os espaços $C([-p,0];X)$ e $C([-p,0];X_\lambda)$ munidos com as normas uniforme denotadas por $\parallel \cdot \parallel_{\mathscr{C}}$ e $\parallel \cdot \parallel_{\mathscr{C}_\lambda}$ respectivamente. Além disso, $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{B}_\gamma$, com $\gamma \in (0,1]$, são os espaços

$$\begin{aligned} \mathfrak{B} : &= \{\psi \in C_{Lip}([-p,0];X) : \psi(0) \in D(A)\}, \\ \mathfrak{B}_\gamma : &= \{\psi \in C_{Lip}([-p,0];X) \cap C([-p,0];X_\gamma) : \psi(0) \in D(A)\}, \end{aligned}$$

munidos das normas $\parallel \psi \parallel_{\mathfrak{B}} = \parallel \psi \parallel_{\mathscr{C}} + \parallel A\psi(0) \parallel$ e $\parallel \psi \parallel_{\mathfrak{B}_\gamma} = \parallel \psi \parallel_{\mathscr{C}_\gamma} + \parallel A\psi(0) \parallel$.

Incluímos os seguintes lemas úteis.

Lema 8. Sejam $(Z, \parallel \cdot \parallel_Z)$ um espaço Banach, $\mathscr{D} = C([-p,0];Z)$ e $b > 0$. Se $u,v \in C([-p,b];Z)$, $\eta \in L^r_{Lip}(\mathscr{D};Z);[0,p])$ e $u \in C_{Lip}([-p,b];Z)$, então $u_{(\cdot)} \in C_{Lip}([0,b];\mathscr{D})$, $[u_{(\cdot)}]_{C_{Lip}([0,b];\mathscr{D})} \leq [u]_{C_{Lip}([-p,b];Z)}$, e para $s \in [0,b)$ e $h > 0$ com $s+h \in [0,b]$,

$$\begin{aligned} \mid \eta(s+h,u_{s+h}) - \eta(s,u_s) \mid &\leq [\eta]_{(s+h,s)}\mathscr{W}_\eta(\rho_1)(1+[u]_{C_{Lip}([-p,b];Z)})h, \\ \parallel u^\eta(s+h) - u^\eta(s) \parallel_Z &\leq [u]_{C_{Lip}([-p,b];Z)}(1+[\eta]_{(s+h,s)}\mathscr{W}_\eta(\rho_1)(1+[u]_{C_{Lip}([-p,b];Z)}))h, \\ \parallel u^\eta(s) - v^\eta(s) \parallel_Z &\leq (1+[u]_{C_{Lip}([-p,b];Z)}[\eta]_{(s,s)}\mathscr{W}_\eta(\rho_2)) \parallel u-v \parallel_{C([-p,s];Z)}, \end{aligned}$$

onde $\rho_1 = \parallel u \parallel_{C([-p,b];Z)}$ e $\rho_2 = \max\{\parallel u \parallel_{C([-p,b];Z)}, \parallel v \parallel_{C([-p,b];Z)}\}$.

Para o caso de funções α-Holder, obtemos o seguinte resultado.

Lema 9. Sejam $(Z, \|\cdot\|_Z)$ um espaço Banach, $\mathscr{D} = C([-p,0];Z)$ e $b > 0$. Assuma $u, v \in C([-p,b];Z)$, $\eta \in L^r_{Lip}(\mathscr{D};[0,p])$, $u_{|_{[0,b]}} \in C^\alpha([0,b];Z)$ e $u_0 \in C^\alpha([-p,0];Z)$. Então $u \in C^\alpha([-p,b];Z)$, $[u]_{C^\alpha([-p,b];Z)} \leq [u_0]_{C^\alpha([-p,0];Z)} + [u]_{C^\alpha([0,b];Z)}$, e para $s \in [0,b)$ e $h > 0$ com $s+h \in [0,b]$,

$$
\begin{aligned}
| \eta(s+h, u_{s+h}) - \eta(s, u_s) | &\leq [\eta]_{(s+h,s)} \mathscr{W}_\eta(\rho_1)(b^{1-\alpha} + [u]_{C^\alpha([-p,b];Z)})h^\alpha, \\
\| u^\eta(s+h) - u^\eta(s) \|_Z &\leq [u]_{C^\alpha([-p,b],Z)}(b^{\alpha-\alpha^2} + [\eta]^\alpha_{(s+h,s)} \mathscr{W}_\eta(\rho_1)^\alpha (b^{\alpha-\alpha^2} + [u]^\alpha_{C^\alpha([-p,b],Z)}))h^{\alpha^2}, \\
\| u^\eta(s) - v^\eta(s) \|_Z &\leq \| u - v \|_{C([-p,s];Z)} + [u]_{C^\alpha([-p,b];Z)} [\eta]^\alpha_{(s,s)} \mathscr{W}^\alpha_\eta(\rho_2) \| u - v \|^\alpha_{C([-p,s];Z)},
\end{aligned}
$$

onde $\rho_1 = \| u \|_{C([-p,b];Z)}$ e $\rho_2 = \max\{\| u \|_{C([-p,b];Z)}, \| v \|_{C([-p,b];Z)}\}$.

Completamos esta seção com o próximo resultado onde apresentamos uma desigualdade tipo Gronwall.

Lema 10. Sejam $q, q' \in [1,\infty]$ tais que $\Theta(q,q') \leq 1$. Assuma $\xi \in C([c,d];\mathbb{R}^+)$, $\beta \in L^q([c,d];\mathbb{R}^+)$, $\alpha \in L^{q'}([c,d];\mathbb{R}^+)$ e que $\xi(t) \leq \alpha(t) + \int_c^t \beta(s)\xi(s)ds$ para todo $t \in [c,d]$. Então

$$
\xi(t) \leq \alpha(t) + \int_c^t \alpha(s)\beta(s)e^{\int_s^t \beta(\tau)d\tau}ds, \ \forall t \in [c,d]. \tag{3.4}
$$

Se $\alpha(\cdot)$ é não decrescente, então $\xi(t) \leq \alpha(t)e^{\int_c^t \beta(s)ds}$ para todo $t \in [c,d]$.

Demonstração. Seja $h : [c,d] \to \mathbb{R}^+$ definida por $h(t) = \int_c^t \beta(s)\xi(s)ds$. Então, h é contínua e diferenciável em quase todos os pontos (q.t.p.) com $h'(t) = \beta(t)\xi(t) \leq \beta(t)\alpha(t) + \beta(t)h(t)$ q.t.p. para $t \in (c,d)$, e, assim,

$$
\frac{d}{dt}(h(t)e^{-\int_c^t \beta(s)ds}) = h'(t)e^{-\int_c^t \beta(s)ds} - \beta(t)h(t)e^{-\int_c^t \beta(s)ds} \leq \beta(t)\alpha(t)e^{-\int_c^t \beta(s)ds},
$$

q.t.p. para $t \in (c,d)$. O que implica que $h(t) \leq \int_c^t \alpha(s)\beta(s)e^{\int_s^t \beta(\tau)d\tau}ds$ e nos permite obter (3.4). A última afirmação segue de (3.4) observando que

$$
\xi(t) \leq \alpha(t) + \alpha(t)\int_c^t \beta(s)e^{\int_s^t \beta(\tau)d\tau}ds = \alpha(t) + \alpha(t)(e^{\int_c^t \beta(s)ds} - 1).
$$

□

3.1 Existência e unicidade de solução

3.1.1 Existência e unicidade de soluções locais

Nesta seção estudamos a existência e unicidade de soluções locais para o problema abstrato

$$
\begin{aligned}
u'(t) &= Au(t) + F^\sigma(u)(t), \quad t > 0, && (3.5) \\
u_0 &= \varphi \in \mathscr{C}. && (3.6)
\end{aligned}
$$

Definição 6. Dado $b > 0$, uma função $u \in C([-p,b];X)$ é dita ser uma solução fraca do problema (3.5)-(3.6) em $[-p,b]$ se $u_0 = \varphi$ e

$$u(t) = T(t)\varphi(0) + \int_0^t T(t-s)F^{\sigma}(u)(s)ds, \quad \forall t \in [0,b].$$

Definição 7. Dado $b > 0$, uma função $u \in C([-p,b];X)$ é dita ser uma solução estrita do problema (3.5)-(3.6) em $[-p,b]$ se $u_0 = \varphi$, $u_{|_{[0,b]}} \in C([0,b];X_1) \cap C^1([0,b];X)$ e $u(\cdot)$ satisfaz (3.5) em $[0,b]$.

Para apresentar os resultados nesta seção incluímos as condições a seguir onde usamos a notação $X_0 = X$.

$H^{\theta,q}_{F,\gamma_1,\gamma_2}$: $q \in [1,\infty]$, $\theta \geq 0$, $0 \leq \gamma_2 \leq \gamma_1 \leq 1$ e $F \in L^q_{Lip}(X_{\gamma_1} \times X_{\gamma_2}; X_\theta)$.

$H^r_{\sigma,\gamma}$: $r \in [1,\infty]$ e $\sigma \in L^r_{Lip}(\mathscr{C}_\gamma;[0,p])$.

$\mathscr{H}^{\theta,q}_{F,\gamma_1,\gamma_2}$: $\theta \geq 0$, $0 \leq \gamma_2 \leq \gamma_1 \leq 1$, $q > 1$, $F : [0,\infty) \times X_{\gamma_1} \times X_{\gamma_2} \to X_\theta$, $F(t,\cdot)$ é uma função contínua para todo $t \geq 0$, a função $F(\cdot,x,y)$ é integrável for todo $(x,y) \in X_{\gamma_1} \times X_{\gamma_2}$ e existem funções localmente integráveis $\mathfrak{L}_{F,i} \in L^q_{loc}([0,\infty);[0,\infty))$, $i = 1,2$, e uma função não decrescente $\mathfrak{W} : [0,\infty) \to [0,\infty)$ tal que

$$\| F(t,x,y) \|_\theta \leq \mathfrak{L}_{F,1}(t)\mathfrak{W}(\max\{\| x \|_{X_{\gamma_1}}, \| y \|_{X_{\gamma_2}}\}) + \mathfrak{L}_{F,2}(t)$$

para todo $(t,x,y) \in [0,\infty) \times X_{\gamma_1} \times X_{\gamma_2}$.

$\mathfrak{H}^{\theta,q}_{F,\gamma_1,\gamma_2}$: $q \geq 1$, $\theta \geq 0$, $0 \leq \gamma_2 \leq \gamma_1 \leq 1$, $F \in C([0,\infty) \times X_{\gamma_1} \times X_{\gamma_2}; X_\theta)$ e existem funções contínuas $L_{F,i} \in C([0,\infty))$, $i = 1,2$ tais que

$$\| F(t,x,y) \|_\theta \leq L_{F_1}(t)(\| x \|_{X_{\gamma_1}} + \| y \|_{X_{\gamma_2}}) + L_{F_2}(t)$$

para todo $(t,x,y) \in [0,\infty) \times X_{\gamma_1} \times X_{\gamma_2}$.

$\mathrm{H}_{T,\omega}$: $\omega > 0$ e para todo $\theta \in [0,1)$ existe $D_{i,\theta} > 0$ tal que $\| (-A)^{i+\theta}T(s) \| \leq D_{i,\theta}\frac{e^{-\omega s}}{s^{i+\theta}}$ e $\| T(t) \| \leq D_{0,0}e^{-\omega t}$ para todo $s > 0$, $t \geq 0$ e $i \in \mathbf{N}$.

Notação 4. Para evitar notações excessivas, independente de γ e θ, usaremos os mesmos símbolos $[F]_{(\cdot,\cdot)}$ e $\mathscr{W}_F(\cdot)$ para as funções nas condições acima.

Podemos estabelecer e provar agora nosso primeiro resultado sobre existência de soluções locais. No restante deste trabalho, "a" denota um número real positivo.

Teorema 2. Assuma que as condições $H^{\theta,q}_{F,\gamma_1,\gamma_2}$ e H^r_{σ,γ_2} estão satisfeitas com $\Theta(q,r) \leq 1$, $\varphi \in C_{Lip}([-p,0];X_{\gamma_2})$, $\varphi(0) \in X_{\gamma_1}$, $T(\cdot)\varphi(0) \in C_{Lip}([0,a];X_{\gamma_1})$ e

$$\Phi_1(b) := \sup_{h,c\in[0,b],h+c\in[0,b]} \| \frac{[F]_{(\cdot+h,\cdot)}}{(c-\cdot)^{\gamma_1}}(2+[\sigma]_{(\cdot+h,\cdot)}) \|_{L^1([0,c])} \to 0 \text{ quando } b \to 0, \quad (3.7)$$

$$\Phi_2(b) := \sup_{c\in[0,b]} \| \frac{[F]_{(\cdot,\cdot)}}{(c-\cdot)^{\gamma_1}}(2+[\sigma]_{(\cdot,0)}) \|_{L^1([0,c])} \to 0 \text{ quando } b \to 0. \quad (3.8)$$

Se $F(\cdot,\varphi(0),\varphi(-\sigma(0,\varphi))) \in L^\infty([0,a];X_{\gamma_1})$, então existe uma única solução fraca $u(\cdot,\varphi) \in C([-p,b];X_{\gamma_2})$ para o problema abstrato (3.5)-(3.6) em $[-p,b]$ para algum $0 < b \leq a$ tal que $u(\cdot,\varphi) \in C_{Lip}([-p,b];X_{\gamma_2})$ e $u(\cdot,\varphi)_{|_{[0,b]}} \in C_{Lip}([0,b];X_{\gamma_1})$.

Demonstração. Para começar, assuma $F(\cdot,\varphi(0),\varphi(-\sigma(0,\varphi))) \in L^\infty([0,a];X_{\gamma_1})$. Seja

$$\begin{aligned}\Lambda &= [T(\cdot)\varphi(0)]_{C_{Lip}([0,a];X_{\gamma_1})} + [\varphi]_{C_{Lip}([-p,0];X_{\gamma_2})} \\ &\quad + C_{0,\gamma_1} \parallel F(\cdot,\varphi(0),\varphi(-\sigma(0,\varphi))) \parallel_{L^\infty([0,a];X_{\gamma_1})} \end{aligned} \tag{3.9}$$

e $R > \Lambda(1+\parallel(-A)^{\gamma_2-\gamma_1}\parallel)$. Usando as condições (3.7) e (3.8), podemos selecionar $0 < b \leq \min\{1,a\}$ tal que

$$(1+\parallel(-A)^{\gamma_2-\gamma_1}\parallel)[\Lambda + 2C_{0,\gamma_1} \parallel (-A)^{-\theta} \parallel (\Phi_1(b)+\Phi_2(b))\widetilde{\mathscr{W}_{F,\sigma}}(R)(1+R)^2] < R, \tag{3.10}$$

onde $\widetilde{\mathscr{W}_{F,\sigma}}(s) = \widetilde{\mathscr{W}_F}(s)(1+\widetilde{\mathscr{W}_\sigma}(s))$ e $\widetilde{\mathscr{W}_h}(s) = \mathscr{W}_h(s(a+2p)+\parallel\varphi\parallel_{\mathscr{C}_{\gamma_2}} + \parallel\varphi(0)\parallel_{\gamma_1})$ para $h = F,\sigma$.

Seja $\mathscr{Y}(b,R)$ o espaço definido por

$$\begin{aligned}\mathscr{Y}(b,R) &:= \{u \in C([-p,b];X_{\gamma_2}) : u_0 = \varphi,\ u_{|_{[0,b_1]}} \in C([0,b];X_{\gamma_1}), \\ &\qquad [u_{|_{[0,b_1]}}]_{C_{Lip}([0,b];X_{\gamma_1})} \leq R,\ [u]_{C_{Lip}([-p,b];X_{\gamma_2})} \leq R\}, \end{aligned} \tag{3.11}$$

munido da métrica $d(u,v) = \max_{i=1,2} \parallel u-v \parallel_{C([0,b];X_{\gamma_i})}$ e $\Gamma : \mathscr{Y}(b,R) \to C([-p,b];X)$ definido por $(\Gamma u)_0 = \varphi$ e

$$\Gamma u(t) = T(t)\varphi(0) + \int_0^t T(t-s)F^\sigma(u)(s)ds, \quad t \in [0,b]. \tag{3.12}$$

Para provar que $\Gamma(\cdot)$ é uma contração em $\mathscr{Y}(b,R)$, a seguir assumimos que $u,v \in \mathscr{Y}(b,R)$. Inicialmente, estabeleceremos algumas desigualdades úteis.

Para estimar $[\Gamma u]_{C_{Lip}([0,b];X_{\gamma_1})}$ e $[\Gamma u]_{C_{Lip}([-p,b];X_{\gamma_2})}$, para $s \in [0,b]$ notamos que

$$\parallel u^\sigma(s) - \varphi(-\sigma(0,\varphi)) \parallel_{\gamma_2} \leq [u]_{C_{Lip}([-p,b];X_{\gamma_2})}(s + \mid \sigma(s,u_s) - \sigma(0,\varphi) \mid) \leq R(a+2p), \tag{3.13}$$

$$\parallel u^\sigma(s) \parallel_{\gamma_2} \leq \parallel u^\sigma(s) - \varphi(-\sigma(0,\varphi)) \parallel_{\gamma_2} + \parallel \varphi(-\sigma(0,\varphi)) \parallel_{\gamma_2} \leq R(a+2p) + \parallel \varphi \parallel_{\mathscr{C}_{\gamma_2}}, \tag{3.14}$$

$$\parallel u(s) \parallel_{\gamma_1} \leq \parallel u(s) - \varphi(0) \parallel_{\gamma_1} + \parallel \varphi(0) \parallel_{\gamma_1} \leq Ra + \parallel \varphi(0) \parallel_{\gamma_1}, \tag{3.15}$$

$$\max\{\parallel u(s) \parallel_{\gamma_1}, \parallel u^\sigma(s) \parallel_{\gamma_2}\} \leq R(a+2p) + \parallel \varphi \parallel_{\mathscr{C}_{\gamma_2}} + \parallel \varphi(0) \parallel_{\gamma_1}. \tag{3.16}$$

Além disso, do Lema 8 e da estimativas acima, para $s,h \in [0,b)$ com $s+h \in [0,b]$, temos que

$$
\begin{aligned}
&\| F^{\sigma}(u)(s+h) - F^{\sigma}(u)(s) \| \leq \| (-A)^{-\theta} \| \| F^{\sigma}(u)(s+h) - F^{\sigma}(u)(s) \|_{\theta} \\
&\leq \| (-A)^{-\theta} \| [F]_{(s+h,s)} \widetilde{\mathscr{W}_F}(R)(h + [u]_{C_{Lip}([0,b];X_{\gamma_1})} h + [u^{\sigma}]_{C_{Lip}([0,b];X_{\gamma_2})} h) \\
&\leq \| (-A)^{-\theta} \| [F]_{(s+h,s)} \widetilde{\mathscr{W}_F}(R)(1 + [u]_{C_{Lip}([0,b];X_{\gamma_1})}) h \\
&\quad + \| (-A)^{-\theta} \| [F]_{(s+h,s)} \widetilde{\mathscr{W}_F}(R)[u]_{C_{Lip}([-p,b];X_{\gamma_2})}(1 + [\sigma]_{(s+h,s)} \widetilde{\mathscr{W}_{\sigma}}(R)(1 + [u]_{C_{Lip}([-p,b];X_{\gamma_2})}))h \\
&\leq \| (-A)^{-\theta} \| [F]_{(s+h,s)} \widetilde{\mathscr{W}_F}(R)(1+R)h \\
&\quad + \| (-A)^{-\theta} \| [F]_{(s+h,s)} \widetilde{\mathscr{W}_F}(R)(1 + \widetilde{\mathscr{W}_{\sigma}}(R))R(1 + [\sigma]_{(s+h,s)}(1+R))h \\
&\leq \| (-A)^{-\theta} \| [F]_{(s+h,s)} \widetilde{\mathscr{W}_F}(R)(1 + \widetilde{\mathscr{W}_{\sigma}}(R))(1+R)(1 + (1 + [\sigma]_{(s+h,s)}(1+R)))h \\
&\leq \| (-A)^{-\theta} \| [F]_{(s+h,s)} \widetilde{\mathscr{W}_F}(R)(1 + \widetilde{\mathscr{W}_{\sigma}}(R))(1+R)^2(2 + [\sigma]_{(s+h,s)})h \\
&\leq \| (-A)^{-\theta} \| \widetilde{\mathscr{W}_{F,\sigma}}(R)(1+R)^2 [F]_{(s+h,s)}(2 + [\sigma]_{(s+h,s)})h. \qquad (3.17)
\end{aligned}
$$

De modo similar, obtemos que

$$
\| F^{\sigma}(u)(s) - F(s, \varphi(0), \varphi(-\sigma(0,\varphi))) \| \leq \| (-A)^{-\theta} \| \widetilde{\mathscr{W}_{F,\sigma}}(R)(1+R)^2 [F]_{(s,s)}(2 + [\sigma]_{(s,0)})s.
$$

Observando que semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ é analítico, é fácil ver $(\Gamma u)_{|_{[0,b]}} \in C([0,b];X_{\gamma_1})$. Mais ainda, usando a desigualdade acima, para $t \in [0,b)$ e $h > 0$ com $t+h \in [0,b]$, temos que

$$
\begin{aligned}
&\| \Gamma u(t+h) - \Gamma u(t) \|_{\gamma_1} \\
&\leq [T(\cdot)\varphi(0)]_{C_{Lip}([0,b];X_{\gamma_1})} h + \int_0^h \| T(t+h-\tau)(-A)^{\gamma_1} F(\tau, \varphi(0), \varphi(-\sigma(0,\varphi))) \| \, d\tau \\
&\quad + \int_0^h \| (-A)^{\gamma_1} T(t+h-\tau) \| \| F^{\sigma}(u)(\tau) - F(\tau, \varphi(0), \varphi(-\sigma(0,\varphi)) \| \, d\tau \\
&\quad + \int_0^t \| (-A)^{\gamma_1} T(t-\tau) \| \| F^{\sigma}(u)(\tau+h) - F^{\sigma}(u)(\tau) \| \, d\tau \\
&\leq [T(\cdot)\varphi(0)]_{C_{Lip}([0,b];X_{\gamma_1})} h + C_0 \| F(\cdot, \varphi(0), \varphi(-\sigma(0,\varphi))) \|_{L^{\infty}([0,a];X_{\gamma_1})} h \\
&\quad + C_{0,\gamma_1} \| (-A)^{-\theta} \| \widetilde{\mathscr{W}_{F,\sigma}}(R)(1+R)^2 (\int_0^h \frac{[F]_{(\tau,\tau)}}{(h-\tau)^{\gamma_1}}(2 + [\sigma]_{(\tau,0)}) d\tau) h \\
&\quad + C_{0,\gamma_1} \| (-A)^{-\theta} \| \widetilde{\mathscr{W}_{F,\sigma}}(R)(1+R)^2 \int_0^t \frac{[F]_{(\tau+h,\tau)}}{(t-\tau)^{\gamma_1}}(2 + [\sigma]_{(s+h,s)}) d\tau) h \\
&\leq \Lambda h + C_{0,\gamma_1} \| (-A)^{-\theta} \| (\Phi_2(b) + \Phi_1(b)) \widetilde{\mathscr{W}_{F,\sigma}}(R)(1+R)^2 h, \qquad (3.18)
\end{aligned}
$$

o que implica que $[\Gamma u]_{C_{Lip}([0,b];X_{\gamma_1})} \leq R$. Mais ainda, das estimativas acima e (3.10) obtemos que

$$
\begin{aligned}
&[\Gamma u]_{C_{Lip}([-p,b];X_{\gamma_2})} \\
&\leq \max\{[\varphi]_{C_{Lip}([-p,0];X_{\gamma_2})}, \| (-A)^{\gamma_2 - \gamma_1} \| [\Gamma u]_{C_{Lip}([0,b];X_{\gamma_1})}\} \\
&\leq \max\{R, \| (-A)^{\gamma_2 - \gamma_1} \| (\Lambda + C_{0,\gamma_1} \| (-A)^{-\theta} \| (\Phi_2(b) + \Phi_1(b)) \widetilde{\mathscr{W}_{F,\sigma}}(R)(1+R)^2)\} \\
&\leq R,
\end{aligned}
$$

o que nos permite obter que $\Gamma(\cdot)$ e uma função com valores em $\mathscr{Y}(b,R)$.

Provaremos agora que $\Gamma(\cdot)$ é uma contração em $\mathscr{Y}(b,R)$. Para $t \in [0,b]$ podemos ver que

$$
\begin{aligned}
&\| \Gamma u(t) - \Gamma v(t) \|_{X_{\gamma_1}} \\
&\leq \int_0^t \| T(t-\tau) \|_{\gamma_1} \| (-A)^{-\theta} \| \| F^{\sigma}(u)(\tau) - F^{\sigma}(v)(\tau) \|_{\theta} \, d\tau \\
&\leq C_{0,\gamma_1} \| (-A)^{-\theta} \| \int_0^t \frac{[F]_{(\tau,\tau)}}{(t-s)^{\gamma_1}} \widetilde{\mathscr{W}_F}(R)(\| u(\tau) - v(\tau) \|_{X_{\gamma_1}} + \| u^{\sigma}(\tau) - v^{\sigma}(\tau) \|_{X_{\gamma_2}}) d\tau \\
&\leq C_{0,\gamma_1} \| (-A)^{-\theta} \| \int_0^t \frac{[F]_{(\tau,\tau)}}{(t-s)^{\gamma_1}} \widetilde{\mathscr{W}_F}(R) \| u - v \|_{C([0,b];X_{\gamma_1})} \, d\tau \\
&\quad + C_{0,\gamma_1} \| (-A)^{-\theta} \| \int_0^t \frac{[F]_{(\tau,\tau)}}{(t-s)^{\gamma_1}} \widetilde{\mathscr{W}_F}(R)(1 + R[\sigma]_{(\tau,\tau)} \widetilde{\mathscr{W}_\sigma}(R)) \| u - v \|_{C([0,b];X_{\gamma_2})} \, d\tau \\
&\leq 2C_{0,\gamma_1} \| (-A)^{-\theta} \| \widetilde{\mathscr{W}_{F,\sigma}}(R) \int_0^t \frac{[F]_{(\tau,\tau)}}{(t-s)^{\gamma_1}} (1 + R[\sigma]_{(\tau,\tau)}) d(u,v) d\tau \\
&\leq 2C_{0,\gamma_1} \| (-A)^{-\theta} \| \widetilde{\mathscr{W}_{F,\sigma}}(R)(1+R) \int_0^t \frac{[F]_{(\tau,\tau)}}{(t-s)^{\gamma_1}} (1 + [\sigma]_{(\tau,\tau)}) d\tau d(u,v) \\
&\leq 2C_{0,\gamma_1} \| (-A)^{-\theta} \| \Phi_1(b) \widetilde{\mathscr{W}_{F,\sigma}}(R)(1+R) d(u,v),
\end{aligned}
$$

o que implica que

$$
\begin{aligned}
\| \Gamma u - \Gamma v \|_{C([0,b];X_{\gamma_1})} &\leq 2C_{0,\gamma_1} \| (-A)^{-\theta} \| \Phi_1(b) \widetilde{\mathscr{W}_{F,\sigma}}(R)(1+R) d(u,v), \\
\| \Gamma u - \Gamma v \|_{C([0,b];X_{\gamma_2})} &\leq 2 \| (-A)^{\gamma_2 - \gamma_1} \| C_{0,\gamma_1} \| (-A)^{-\theta} \| \Phi_1(b) \widetilde{\mathscr{W}_{F,\sigma}}(R)(1+R) d(u,v).
\end{aligned}
$$

Dos resultados acima e (3.10) segue que $\Gamma(\cdot)$ é uma contração em $\mathscr{Y}(b,R)$ e existe uma única solução fraca $u(\cdot,\varphi) \in C_{Lip}([-p,b];X_{\gamma_2})$ de (3.5)-(3.6) em $[-p,b]$ tal que $u(\cdot,\varphi)_{|_{[0,b]}} \in C_{Lip}([0,b];X_{\gamma_1})$. □

Proposição 8. Assuma que as condições do Teorema 2, com exceção das condições sobre $\Phi_2(b)$ e $F(\cdot,\varphi(0),\varphi(-\sigma(0,\varphi)))$, são verificadas. Se $F(0,\varphi(0),\varphi(-\sigma(0,\varphi))) \in X_{\gamma_1}$ e

$$
\Phi_3(b) \quad := \quad \sup_{c \in [0,b]} \| \frac{[F]_{(\cdot,0)}}{(c-\cdot)^{\gamma_1}} (2 + [\sigma]_{(\cdot,0)}) \|_{L^1([0,c])} \to 0 \text{ quando } b \to 0, \tag{3.19}
$$

então existe uma única solução fraca $u(\cdot,\varphi) \in C_{Lip}([-p,b];X_{\gamma_2})$ em $[-p,b]$ para algum $0 < b \leq a$ tal que $u(\cdot,\varphi) \in C_{Lip}([-p,b];X_{\gamma_2})$ e $u(\cdot,\varphi)_{|_{[0,b]}} \in C_{Lip}([0,b];X_{\gamma_1})$.

Demonstração. A prova desta proposição segue diretamente da prova do Teorema 2 modificando a estimativa (3.18) usando $F(0,\varphi(0),\varphi(-\sigma(0,\varphi)))$ e $\Phi_3(b)$ no lugar de $F(\tau,\varphi(0),\varphi(-\sigma(0,\varphi)))$ e $\Phi_2(b)$. Omitiremos os detalhes adicionais. □

Observação 5. Relacionado à condição (3.7), assumindo $[F]_{(t,s)} = s^{\gamma-1}$ e $[\sigma]_{(t,s)} = 1$ para

$0 < s < t \leq a$ e $\gamma \in (0,1)$. Neste caso, da estimativa

$$\begin{aligned} \| \frac{[F]_{(\cdot+h,\cdot)}[\sigma]_{(\cdot+h,\cdot)}}{(c-\cdot)^{\gamma}} \|_{L^1([0,c])} &= \int_0^c \frac{d\tau}{\tau^{1-\gamma}(c-\tau)^{\gamma}} \geq \int_{\frac{c}{2}}^c \frac{d\tau}{(\frac{c}{2})^{1-\gamma}(c-\tau)^{\gamma}} + \int_0^{\frac{c}{2}} \frac{d\tau}{\tau^{1-\gamma}(\frac{c}{2})^{\gamma}} \\ &\geq \frac{2^{1-\gamma}}{c^{1-\gamma}} \frac{1}{1-\gamma}[c^{1-\gamma} - (\frac{c}{2})^{1-\gamma}] + (\frac{2}{c})^{\gamma}\frac{1}{\gamma}[c^{\gamma} - (\frac{c}{2})^{\gamma}] \\ &\geq \frac{2^{1-\gamma}}{1-\gamma}[1 - \frac{1}{2^{1-\gamma}}] + \frac{2^{\gamma}}{\gamma}[1 - \frac{1}{2^{\gamma}}] \geq \frac{2^{\gamma}-1}{\gamma}, \end{aligned}$$

temos que a condição (3.7) não é satisfeita apesar da integrabilidade de $\frac{[F]_{(\cdot+h,\cdot)}[\sigma]_{(\cdot+h,\cdot)}}{(c-\cdot)^{\gamma}}$ em $[0,c]$.

Motivado pela última observação, introduzimos os resultados a seguir.

Corolário 4. Suponha que as condições H^r_{σ,γ_2} e $H^{\theta,q}_{F,\gamma_1,\gamma_2}$ são verificadas com $\Theta(q,r) < 1$ e $\frac{1}{\Lambda(q,r)} > \gamma_1$, $\varphi \in C_{Lip}([-p,0];X_{\gamma_2})$, $\varphi(0) \in X_{\gamma_1}$ e $T(\cdot)\varphi(0) \in C_{Lip}([0,a];X_{\gamma_1})$. Se $F(\cdot,\varphi(0),\varphi(-\sigma(0,\varphi))) \in L^{\infty}([0,a];X_{\gamma_1})$ e

$$\begin{aligned} \Phi_4(c) &:= \sup_{h\in[0,1]} \| [F]_{(\cdot+h,\cdot)} \|_{L^q([0,c])} \| (2+[\sigma]_{(\cdot+h,\cdot)}) \|_{L^r([0,c])} < \infty, \\ \Phi_5(c) &:= \| [F]_{(\cdot,\cdot)} \|_{L^q([0,c])} \| (2+[\sigma]_{(\cdot,0)}) \|_{L^r([0,c])} < \infty, \end{aligned}$$

para algum $c > 0$, então existe uma única solução fraca $u(\cdot,\varphi) \in C_{Lip}([-p,b];X_{\gamma_2})$ de (3.5)-(3.6) em $[-p,b]$ para algum $0 < b \leq \min\{a,c\}$ tal que $u(\cdot,\varphi)_{|_{[0,b]}} \in C_{Lip}([0,b];X_{\gamma_1})$.

Demonstração. O resultado segue do Teorema 2 observando que

$$\begin{aligned} \Phi_1(b) &\leq \sup_{h,d\in[0,b],d+h\in[0,b]} \| \frac{[F]_{(\cdot+h,\cdot)}}{(d-\cdot)^{\gamma_1}}(2+[\sigma]_{(\cdot+h,\cdot)}) \|_{L^1([0,d])} \\ &\leq \sup_{h,c\in[0,b],h+c\in[0,b]} \| \frac{1}{(d-\cdot)^{\gamma_1}} \|_{L^{\Lambda(q,r)}} \| [F]_{(\cdot+h,\cdot)} \|_{L^q([0,b])} \| (2+[\sigma]_{(\cdot+h,\cdot)}) \|_{L^r([0,b])} \\ &\leq b^{\frac{1}{\Lambda(q,r)}-\gamma_1}[1-\gamma_1\Lambda(q,r)]^{-\frac{1}{\Lambda(q,r)}}\Phi_4(b) \to 0, \text{ quando } b \to 0, \\ \Phi_2(b) &\leq \frac{b^{\frac{1}{\Lambda(q,r)}-\gamma_1}}{[1-\gamma_1\Lambda(q,r)]^{\frac{1}{\Lambda(q,r)}}}\Phi_5(b) \to 0 \text{ quando } b \to 0. \end{aligned}$$

□

Da Proposição 8, obtemos o seguinte corolário.

Corolário 5. Assuma que as condições $H^{\theta,q}_{F,\gamma_1,\gamma_2}$ e H^r_{σ,γ_2} estão satisfeitas com $\Theta(q,r) < 1$ e $\frac{1}{\Lambda(q,r)} > \gamma_1$, $\varphi \in C_{Lip}([-p,0];X_{\gamma_2})$, $\varphi(0) \in X_{\gamma_1}$ e $T(\cdot)\varphi(0) \in C_{Lip}([0,a];X_{\gamma_1})$. Se $F(0,\varphi(0),\varphi(-\sigma(0,\varphi))) \in X_{\gamma_1}$ e, para algum $c > 0$, $\Phi_4(c) < \infty$ e

$$\Phi_6(c) := \| [F]_{(\cdot,0)} \|_{L^q([0,c])} \| (2+[\sigma]_{(\cdot,0)}) \|_{L^r([0,c])} < \infty,$$

então existe uma única solução fraca $u(\cdot,\varphi) \in C_{Lip}([-p,b];X_{\gamma_2})$ de (3.5)-(3.6) em $[-p,b]$ para algum $0 < b \leq a$ tal que $u(\cdot,\varphi) \in C_{Lip}([0,b];X_{\gamma_1})$.

Para estudar a existência de uma solução estrita, incluímos o lema a seguir.

Lema 11. Assuma que $\Theta(q,r) = \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$. Então existe um número real $\chi(q,r) \in (0,1)$ tal que para todo $\alpha \in (\chi(q,r),1)$ e $t > 0$, as funções $\frac{[F]_{(t,\cdot)}}{(t-\cdot)^{1-\alpha}}$ e $\frac{[F]_{(t,\cdot)}[\sigma]^{\alpha}_{(t,\cdot)}}{(t-\cdot)^{1-\alpha^2}}$ são integráveis em $[0,t]$ e $\sup_{t\in[0,a]}(\| \frac{[F]_{(t,\cdot)}[\sigma]^{\alpha}_{(t,\cdot)}}{(t-\cdot)^{1-\alpha^2}} \|_{L^1([0,t])} + \| \frac{[F]_{(t,\cdot)}}{(t-\cdot)^{1-\alpha}} \|_{L^1([0,t])}) < \infty$ para todo $a > 0$.

Demonstração. Para $\alpha \in (0,1)$, temos que $\frac{1}{q} + \frac{\alpha}{r} < 1$, e definindo $\mu_\alpha = \frac{qr}{qr-r-\alpha q}$ segue que $\mu_\alpha > 1$ e $\frac{1}{q} + \frac{\alpha}{r} + \frac{1}{\mu_\alpha} = 1$. Se $1-(1-\alpha^2)\mu_\alpha > 0$, então $\frac{[F]_{(t,\cdot)}}{(t-\cdot)^{(1-\alpha^2)}}[\sigma]^{\alpha}_{(t,\cdot)}$ é integrável em $[0,t]$ desde que

$$\begin{aligned}
\| \frac{[F]_{(t,\cdot)}}{(t-\cdot)^{(1-\alpha^2)}}[\sigma]^{\alpha}_{(t,\cdot)} \|_{L^1([0,t])} &\leq \| [F]_{(t,\cdot)} \|_{L^q([0,t])} \| [\sigma]_{(t,\cdot)} \|^{\alpha}_{L^r([0,t])} \| \frac{1}{(t-\cdot)^{(1-\alpha^2)\mu_\alpha}} \|_{L^{\mu_\alpha}([0,t))} \\
&\leq \| [F]_{(t,\cdot)} \|_{L^q([0,t])} \| [\sigma]_{(t,\cdot)} \|^{\alpha}_{L^r([0,t])} \frac{t^{\frac{1}{\mu_\alpha}-(1-\alpha^2)}}{(1-(1-\alpha^2)\mu_\alpha)^{\frac{1}{\mu_\alpha}}}.
\end{aligned}$$

Mais ainda, observando que $0 < 1-(1-\alpha^2)\mu_\alpha < 1-(1-\alpha)\mu_\alpha$ obtemos que $\frac{[F]_{(t,\cdot)}}{(t-\cdot)^{(1-\alpha)}}$ é integrável em $[0,t]$ e

$$\begin{aligned}
\| \frac{[F]_{(t,\cdot)}}{(t-\cdot)^{(1-\alpha)}} \|_{L^1([0,t])} &\leq \| [F]_{(t,\cdot)} \|_{L^q([0,t])} \| 1 \|^{\alpha}_{L^r([0,t])} \| \frac{1}{(t-\cdot)^{(1-\alpha)\mu_\alpha}} \|_{L^{\mu_\alpha}([0,t))} \\
&\leq \| [F]_{(t,\cdot)} \|_{L^q([0,t])} \frac{t^{\frac{\alpha}{r}+\frac{1}{\mu_\alpha}-(1-\alpha)}}{(1-(1-\alpha)\mu_\alpha)^{\frac{1}{\mu_\alpha}}}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, a desigualdade $1-(1-\alpha^2)\mu_\alpha > 0$ é equivalente a $\alpha^2 - \frac{\alpha}{r} - \frac{1}{q} > 0$, e observando que as raízes do polinômio de segunda ordem $P(\alpha) = \alpha^2 - \frac{\alpha}{r} - \frac{1}{q} > 0$ são $\alpha_\pm(q,r) = \frac{1}{2r}\left(1 \pm (1+4\frac{r^2}{q})^{\frac{1}{2}}\right)$e que $0 < \alpha_+ < 1$ pois $\Theta(q,r) < 1$, concluímos que as funções $\frac{[F]_{(t,\cdot)}[\sigma]^{\alpha}_{(t,\cdot)}}{(t-\cdot)^{1-\alpha^2}}$ e $\frac{[F]_{(t,\cdot)}}{(t-\cdot)^{1-\alpha}}$ são integráveis para $\alpha \in (\alpha_+(q,r),1)$. Assim, as afirmações são verificadas para $\chi(q,r) = \alpha_+(q,r)$. □

Relativo a existência de solução estrita, temos o os resultados a seguir.

Proposição 9. Assuma que as condições no Teorema 2 (respectivamente, Proposição 8) estão satisfeitas, $\varphi(0) \in D(A)$ e seja $u(\cdot,\varphi)$ a solução fraca do problema (3.5)-(3.6) em $[-p,b]$ no Teorema 2 (respectivamente, Proposição 8). Se, além disso, $\Theta(q,r) < 1$ e

$$\Phi_7(a) := \sup_{s\in[0,a]} \| [F]_{(s,\cdot)} \|_{L^q([0,s])} (2 + \| [\sigma]_{(s,\cdot)} \|_{L^r([0,s])}) < \infty,$$

então $u(\cdot,\varphi)$ é uma solução estrita do problema (3.5)-(3.6) em $[-p,b]$.

Demonstração. A seguir, usaremos as notações introduzidas na prova Teorema 2. Para começar, observamos que para $t \in [0,b]$

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \| AT(t-s)(F^\sigma(u)(s) - F^\sigma(u)(t) \| \, ds \\
&\leq \int_0^t \| AT(t-s) \| \| (-A)^{-\theta} \| \| (F^\sigma(u)(s) - F^\sigma(u)(t) \|_\theta \, ds \\
&\leq \| (-A)^{-\theta} \| \widetilde{\mathscr{W}}_{F,\sigma}(R)(1+R)^2 \int_0^t \frac{C_1}{t-s}[F]_{(t,s)}(2+[\sigma]_{(t,s)})(t-s)ds \\
&\leq \| (-A)^{-\theta} \| \widetilde{\mathscr{W}}_{F,\sigma}(R)(1+R)^2 C_1 \Phi_1(b) < \infty,
\end{aligned}$$

o que permite obter que $\int_0^t T(t-s)(F^\sigma(u)(s) - F^\sigma(u)(t))ds \in D(A)$ e, consequentemente, que $u(t) \in D(A)$ para todo $t \in [0,b]$ desde que

$$\begin{aligned}
Au(t) &= AT(t)\varphi(0) + A\int_0^t T(t-s)F^\sigma(u)(t)ds + A\int_0^t T(t-s)(F^\sigma(u)(s) - F^\sigma(u)(t))ds \\
&= T(t)A\varphi(0) + (T(t)-I)F^\sigma(u)(t) + A\int_0^t T(t-s)(F^\sigma(u)(s) - F^\sigma(u)(t))ds. \quad (3.20)
\end{aligned}$$

Provaremos agora que $Au \in C([0,b];X)$. Usando (3.20) e definindo $v : [0,b] \to X$ por $v(\tau) = \int_0^\tau T(\tau - s)(F^\sigma(u)(s) - F^\sigma(u)(\tau))ds$, para $\tau \in [0,b]$, podemos ver que $Au(t) = T(t)A\varphi(0) + (T(t)-I)F^\sigma(u)(t) + Av(t)$, para $t \in [0,b]$.

A seguir, provaremos que $Av \in C([0,b];X)$. Para $t \in [0,b)$ e $h > 0$ com $t+h \leq b$ temos que

$$\begin{aligned}
&\| Av(t+h) - Av(t) \| \\
&\leq \| \int_0^t A(T(t+h-s) - T(t-s))(F^\sigma(u)(s) - F^\sigma(u)(t))ds \| \\
&\quad + \| (T(t+h) - T(h))(F^\sigma(u)(t) - F^\sigma(u)(t+h)) \| \\
&\quad + \| \int_t^{t+h} AT(t+h-s)(F^\sigma(u)(s) - F^\sigma(u)(t+h))ds \| \\
&\leq \| (-A)^{-\theta} \| \widetilde{\mathscr{W}}_{F,\sigma}(R)(1+R)^2 \int_0^t \int_{t-s}^{t+h-s} \| (-A)^2 T(\tau) \| [F]_{(t,s)}(2+[\sigma]_{(t,s)})(t-s)d\tau ds \\
&\quad + 2C_0 \| F^\sigma(u)(t+h) - F^\sigma(u)(t) \| \\
&\quad + \| (-A)^{-\theta} \| \widetilde{\mathscr{W}}_{F,\sigma}(R)(1+R)^2 C_1 \int_t^{t+h} [F]_{(t+h,s)}(2+[\sigma]_{(t+h,s)})ds.
\end{aligned}$$

Escolhendo $\alpha \in (\chi(q,r),1)$ e observando que

$$\int_{t-s}^{t+h-s} \frac{(t-s)}{\tau^2} d\tau \leq (t-s)^{1-\alpha} \int_{t-s}^{t+h-s} \tau^{\alpha-2} d\tau \leq \frac{1}{(t-s)^{1-\alpha}} \frac{h^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

obtemos que

$$\begin{aligned}
&\| Av(t+h) - Av(t) \| \\
&\leq \| (-A)^{-\theta} \| \widetilde{\mathscr{W}}_{F,\sigma}(R)(1+R)^2 C_2 \int_0^t \frac{[F]_{(t,s)}}{(t-s)^{1-\alpha}}(2+[\sigma]_{(t,s)})ds \frac{h^{1-\alpha}}{1-\alpha} \\
&\quad + 2C_0 \| F^\sigma(u)(t+h) - F^\sigma(u)(t) \| \\
&\quad + \| (-A)^{-\theta} \| \widetilde{\mathscr{W}}_{F,\sigma}(R)(1+R)^2 C_1 \Phi_7(a) h^{\frac{1}{\Lambda(q,r)}},
\end{aligned}$$

o que nos permite obter Av é contínua a direita em $[0,b)$. Procedendo de maneira similar, conseguimos provar que Av é contínua a esquerda em $(0,b]$. Do anterior obtemos que $Av \in C([0,b];X)$, o que nos permite concluir que $Au \in C([0,b];X)$ e finalizamos a prova. □

Corolário 6. Assuma que as condições no Corolário 4 (respectivamente, Corolário 5) estão satisfeitas, $\varphi(0) \in D(A)$ e seja $u(\cdot,\varphi)$ a solução fraca do problema (3.5)-(3.6) em $[-p,b]$ no Corolário 4 (respectivamente, Corolário 5). Se, além disso, $\Phi_7(a) < \infty$, então $u(\cdot,\varphi)$ é uma solução estrita do problema (3.5)-(3.6) em $[-p,b]$.

Corolário 7. Suponha $\varphi \in C_{Lip}([-p,0];X_{\gamma_2})$, $\varphi(0) \in X_{\gamma_1}$, $T(\cdot)\varphi(0) \in C_{Lip}([0,a];X_{\gamma_1})$,$\theta \geq 0$, $0 \leq \gamma_2 \leq \gamma_1 < 1$, $F \in C_{Lip}([0,a] \times X_{\gamma_1} \times X_{\gamma_2};X_\theta)$ e $\sigma \in C_{Lip}([0,a] \times \mathscr{C}_{\gamma_2};[0,p])$. Se $F(\cdot,\varphi(0),\varphi(-\sigma(0,\varphi))) \in L^\infty([0,a];X_{\gamma_1})$ ou $F(0,\varphi(0),\varphi(-\sigma(0,\varphi))) \in X_{\gamma_1}$, então existe uma única solução fraca $u(\cdot,\varphi) \in C_{Lip}([-p,b];X_{\gamma_2})$ de (3.5)-(3.6) em $[-p,b]$ para algum $0 < b \leq a$ tal que $u(\cdot,\varphi)_{|_{[0,b]}} \in C_{Lip}([0,b];X_{\gamma_1})$. Se $\varphi(0) \in D(A)$, então $u(\cdot,\varphi)$ é uma solução estrita.

Observação 6. Os resultados de solução fraca e estrita para o caso onde as condições $H^{0,q}_{F,0,0}$ e $H^r_{\sigma,0}$ são verificadas seguem de forma trivial dos resultados anteriores.

3.1.2 Soluções maximais e globais

Nesta seção estudaremos o intervalo maximal de existência de solução e concentraremos nossos estudos no caso onde $F(\cdot)$ e $\sigma(\cdot)$ verificam as condições $H^{0,q}_{F,0,0}$ e $H^r_{\sigma,0}$.

A seguir, usamos a notação $I_{\max}$ para o domínio de uma solução maximal , $I^+_{\max} = I_{\max} \cap \mathbb{R}^+$ e $\chi(q,r) = \alpha_+(q,r) = \frac{1}{2r}(1+(1+4\frac{r^2}{q})^{\frac{1}{2}})$ é o número na prova do Lema 11.

Proposição 10. Assuma que as condições $H^{0,q}_{F,0,0}$ e $H^r_{\sigma,0}$ são satisfeitas, $\Theta(q,r) < 1$, $\varphi \in \mathfrak{B}$ e que

$$\max\{\Phi_4(a),\Phi_5(a),\Phi_7(a)\} < \infty \text{ ou } \max\{\Phi_4(a),\Phi_6(a),\Phi_7(a)\} < \infty, \tag{3.21}$$

para todo $a > 0$. Então existe uma única solução estrita maximal localmente Lipschitz $u(\cdot,\varphi) \in C(I_{\max};X)$ do problema (3.5)-(3.6). Adicionalmente, se $\chi(q,r) < \frac{1}{q'}$ e $b_\varphi := \sup I_{\max} < \infty$, então $I = [-p,b_\varphi)$ e $\limsup_{t\to b_\varphi} \| u(t) \| = \infty$. Em particular, se $I_{\max}$ é limitado e $\alpha_+(q,r) + \frac{1}{q} = \frac{1}{2r}\left(1+(1+4\frac{r^2}{q})^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{q} < 1$, então $u(\cdot)$ é ilimitada.

Demonstração. Observando que as hipóteses no Teorema 2 ou na Proposição 8 estão satisfeitas, temos que existe uma única solução estrita $v \in C([-p,b];X)$ de (3.5)-(3.6) em $[-p,b]$ para algum $b > 0$. Como $v(b) \in D(A)$ temos que $T(\cdot - b)v(b) \in C_{Lip}([b,a];X)$ para todo $a > b$ e que $v_b \in C_{Lip}([-p,0];X)$. Novamente, procedendo como no Teorema 2 ou na Proposição 8, obtemos que existe $b_1 > 0$ e uma única solução estrita $w \in C_{Lip}([b-p,b+b_1];X)$ do problema

$$w'(t) = Aw(t) + F(t,w(t),w^\sigma(t)), \quad t \in [b,b+b_1], \tag{3.22}$$

$$w_b = v_b. \tag{3.23}$$

Definindo $z:[-p,b+b_1]\mapsto X$ por $z(t)=v(t)$ para $t\in[-p,b]$ e $z(t)=w(t)$ para $t\in[b,b+b_1]$, obtemos uma solução estrita Lipschitz de (3.5)-(3.6) em $[-p,b+b_1]$. Dos resultados acima e do Lema de Zorn conseguimos obter a existência de uma única solução estrita maximal localmente Lipschitz $u\in C(I_{\max};X)$ de (3.5)-(3.6).

Assuma agora que $\chi(q,r)<\frac{1}{q'}$, $b_\varphi:=\sup I_{\max}<\infty$ e suponha $\rho:=\| u \|_{C(I_{\max};X)}<\infty$. Observando que $F^\sigma(u)(\cdot)\in L^q([0,b_\varphi])$, do Lema 17 (veja (d)) e do Lema 11, para $\alpha\in(\chi(q,r),\frac{1}{q'})$ temos que $u\in C^\alpha([0,b_\varphi);X)$ e que as funções $\frac{[F]_{(t,\cdot)}}{(t-\cdot)^{1-\alpha}}$ e $\frac{[F]_{(t,\cdot)}[\sigma]^\alpha_{(t,\cdot)}}{(t-\cdot)^{1-\alpha^2}}$ são integráveis em $[0,t]$ para todo $t\in[0,b_\varphi)$. Dos resultados acima, $\bar u(b_\varphi):=\lim_{t\to b_\varphi}u(t)$ existe e a função $\bar u:[-p,b_\varphi]\to X$ dada por $\bar u(t)=u(t)$ para $t\in[-p,b_\varphi)$ e $\bar u(b_\varphi):=\lim_{t\to b_\varphi}u(t)$ é uma solução fraca de (3.5)-(3.6) em $[-p,b_\varphi]$ e $\bar u\in C^\alpha([-p,b_\varphi];X)$. Usando agora a segunda desigualdade no Lema 9 e a notação $\mathscr{W}_{F,\sigma}(\rho)=\mathscr{W}_F(\rho)(1+\mathscr{W}_\sigma(\rho))$, para $t\in[0,b_\varphi]$ obtemos

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t \| AT(t-s)(F^\sigma\bar u(s)-F^\sigma\bar u(t)) \| ds\\
&\leq C_1\mathscr{W}_F(\rho)\int_0^t\frac{[F]_{(t,s)}}{t-s}\Big((t-s)+[\bar u]_{C^\alpha([0,b_\varphi])}(t-s)^\alpha+\| \bar u^\sigma(s)-\bar u^\sigma(t) \|\Big)ds\\
&\leq C_1\mathscr{W}_F(\rho)(\int_0^t[F]_{(t,s)}ds+[\bar u]_{C^\alpha([0,b_\varphi])}\int_0^t\frac{[F]_{(t,s)}}{(t-s)^{1-\alpha}}ds)\\
&+ C_1\mathscr{W}_{F,\sigma}(\rho)[\bar u]_{C^\alpha([-p,b_\varphi])}(1+a^{\alpha-\alpha^2}+[\bar u]^\alpha_{C^\alpha([-p,b_\varphi])})^2\int_0^t\frac{[F]_{(t,s)}}{(t-s)^{1-\alpha^2}}(1+[\sigma]^\alpha_{(t,s)})ds,
\end{aligned}
$$

o que implica que a função $s\to AT(t-s)(F^\sigma\bar u(s)-F^\sigma\bar u(t))$ é integrável em $[0,t]$ para todo $t\in[0,b_\varphi]$. Usando este fato, vamos provar que $\bar u(\cdot)$ é uma solução estrita procedendo como na prova da Proposição 9. Resta somente provar que $t\mapsto\bar v(t):=\int_0^tAT(t-s)(F^\sigma(\bar u)(s)-F^\sigma(\bar u)(t))ds$ é contínua em $[0,b_\varphi]$ o que implica que é $A\bar u\in C([0,b_\varphi];X)$. Para $t\in[0,b_\varphi]$ e $h>0$ tais que $t+h\leq b_\varphi$, temos que

$$
\begin{aligned}
\| \bar v(t+h)-\bar v(t) \| &\leq \| \int_0^tA(T(t+h-s)-T(t-s))(F^\sigma(u)(s)-F^\sigma(u)(t))ds \|\\
&\quad+\| (T(t+h)-T(h))(F^\sigma(\bar u)(t)-F^\sigma(\bar u)(t+h)) \|\\
&\quad+\| \int_t^{t+h}AT(t+h-s)(F^\sigma(\bar u)(s)-F^\sigma(u)(t+h))ds \|\\
&\leq \int_0^t\int_{t-s}^{t+h-s}\| (-A)^2T(\tau)(F^\sigma(\bar u)(s)-F^\sigma(\bar u)(t)) \| d\tau ds\\
&\quad+2C_0\| F^\sigma(\bar u)(t+h)-F^\sigma(\bar u)(t) \|\\
&\quad+\| \int_t^{t+h}AT(t+h-s)(F^\sigma(\bar u)(s)-F^\sigma(u)(t+h))ds \| .
\end{aligned}
$$

Do anterior e procedendo como no Lema 11, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\| \bar{v}(t+h) - \bar{v}(t) \| \\
&\leq C_2 \mathscr{W}_F(\rho)\Big(\int_0^t [F]_{(t,s)} ds h + [\bar{u}]_{C^\alpha([0,b_\varphi])} \int_0^t \frac{[F]_{(t,s)}}{(t-s)^{2(1-\alpha)}} ds \frac{h^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big) \\
&\quad + C_2 \mathscr{W}_{F,\sigma}(\rho)[\bar{u}]_{C^\alpha([-p,b_\varphi])}(1 + a^{\alpha-\alpha^2} + [\bar{u}]^\alpha_{C^\alpha([-p,b_\varphi])})^2 \int_0^t \frac{[F]_{(t,s)}}{(t-s)^{2(1-\alpha^2)}} ds \frac{h^{1-\alpha^2}}{1-\alpha^2} \\
&\quad + C_2 \mathscr{W}_{F,\sigma}(\rho)[\bar{u}]_{C^\alpha([-p,b_\varphi])}(1 + a^{\alpha-\alpha^2} + [\bar{u}]^\alpha_{C^\alpha([-p,b_\varphi])})^2 \int_0^t \frac{[F]_{(t,s)}}{(t-s)^{2(1-\alpha)}} [\sigma]^\alpha_{(t,s)} ds \frac{h^{1-\alpha^2}}{1-\alpha^2} \\
&\quad + 2C_0 \| F^\sigma(\bar{u})(t+h) - F^\sigma(\bar{u})(t) \| \\
&\quad + C_1 \mathscr{W}_F(\rho)\Big(\int_t^{t+h} [F]_{(t+h,s)} ds + [\bar{u}]_{C^\alpha([0,b_\varphi])} \int_t^{t+h} \frac{[F]_{(t+h,s)}}{(t+h-s)^{1-\alpha}} ds\Big) \\
&\quad + C_1 \mathscr{W}_{F,\sigma}(\rho)[\bar{u}]_{C^\alpha([-p,b_\varphi])}(1 + a^{\alpha-\alpha^2} + [\bar{u}]^\alpha_{C^\alpha([-p,b_\varphi])})^2 \int_t^{t+h} \frac{[F]_{(t+h,s)}}{(t+h-s)^{1-\alpha^2}} ds \\
&\quad + C_1 \mathscr{W}_{F,\sigma}(\rho)[\bar{u}]_{C^\alpha([-p,b_\varphi])}(1 + a^{\alpha-\alpha^2} + [\bar{u}]^\alpha_{C^\alpha([-p,b_\varphi])})^2 \int_t^{t+h} \frac{[F]_{(t+h,s)}}{(t+h-s)^{1-\alpha^2}} [\sigma]^\alpha_{(t+h,s)} ds, \\
&\leq C_2 \mathscr{W}_F(\rho)\Big(\int_0^t [F]_{(t,s)} ds h + [\bar{u}]_{C^\alpha([0,b_\varphi])} \int_0^t \frac{[F]_{(t,s)}}{(t-s)^{2(1-\alpha)}} ds \frac{h^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big) \\
&\quad + C_2 \mathscr{W}_{F,\sigma}(\rho)[\bar{u}]_{C^\alpha([-p,b_\varphi])}(1 + a^{\alpha-\alpha^2} + [\bar{u}]^\alpha_{C^\alpha([-p,b_\varphi])})^2 \int_0^t \frac{[F]_{(t,s)}}{(t-s)^{2(1-\alpha^2)}} ds \frac{h^{1-\alpha^2}}{1-\alpha^2} \\
&\quad + C_2 \mathscr{W}_{F,\sigma}(\rho)[\bar{u}]_{C^\alpha([-p,b_\varphi])}(1 + a^{\alpha-\alpha^2} + [\bar{u}]^\alpha_{C^\alpha([-p,b_\varphi])})^2 \int_0^t \frac{[F]_{(t,s)}}{(t-s)^{2(1-\alpha)}} [\sigma]^\alpha_{(t,s)} ds \frac{h^{1-\alpha^2}}{1-\alpha^2} \\
&\quad + 2C_0 \| F^\sigma(\bar{u})(t+h) - F^\sigma(\bar{u})(t) \| \\
&\quad + C_1 \mathscr{W}_F(\rho)\Phi_7(b_\varphi)\Big(h^{\frac{1}{q'}} + [\bar{u}]_{C^\alpha([0,b_\varphi])} \frac{h^{\frac{\alpha}{r}+\frac{1}{\mu_\alpha}-(1-\alpha)}}{(1-(1-\alpha)\mu_\alpha)^{\frac{1}{\mu_\alpha}}}\Big) \\
&\quad + C_1 \mathscr{W}_{F,\sigma}(\rho)[\bar{u}]_{C^\alpha([-p,b_\varphi])}(1 + a^{\alpha-\alpha^2} + [\bar{u}]^\alpha_{C^\alpha([-p,b_\varphi])})^2 \Phi_7(b_\varphi) \frac{h^{\frac{1}{\mu_\alpha}-(1-\alpha^2)}}{(1-(1-\alpha^2)\mu_\alpha)^{\frac{1}{\mu_\alpha}}},
\end{aligned}
$$

onde μ_α é a contante definida na prova do Lema 11. Do anterior e procedendo como na prova da Proposição 9, concluímos que $\bar{v} \in C([-p,b_\varphi];X)$ o que implica que $\bar{u}(\cdot)$ é uma solução estrita em $[-p,b_\varphi]$ e $\bar{u} \in C_{Lip}([-p,b_\varphi];X)$. Isso implica que $b_\varphi \in I_{\max}$ e que $\bar{u} = u$ em $[-p,b_\varphi]$ desde que u é uma solução estrita maximal localmente Lipschitz.

Do anterior, $u(\cdot)$ é uma solução estrita em $[-p,b_\varphi]$, $u(b_\varphi) \in D(A)$, $T(\cdot - b_\varphi)u(b_\varphi) \in C_{Lip}([0,a];X)$ e $u_{b_\varphi} \in C_{Lip}([-p,0];X)$, e procedendo novamente como no Teorema 2 obtemos que existe $b' > 0$ e uma única solução estrita $u^1 \in C_{Lip}([b_\varphi - p, b_\varphi + b'];X)$ de

$$
w'(t) = Aw(t) + F^\sigma w(t), \quad t \in [b_\varphi, b_\varphi + b'], \; w_{b_\varphi} = u_{b_\varphi},
$$

o que uma contradição com a maximalidade de $u(\cdot)$. Do anterior, concluímos que $u(\cdot)$ é ilimitada em $I_{\max}$. □

Corolário 8. Se $F \in C_{Lip}([0,\infty) \times X \times X; X)$, $\sigma \in C_{Lip}([0,\infty) \times \mathscr{C}; [0,p])$ e $\varphi \in \mathfrak{B}$, então existe uma única solução estrita localmente Lipschitz $u(\cdot,\varphi) \in C([0,\infty); X)$ de (3.5)-(3.6).

Demonstração. Procedendo como na prova da Proposição 10, podemos provar que existe uma solução estrita maximal localmente Lipschitz. Logo, observando que

$$\| u(t) \| \leq C_0(\| \varphi \|_{\mathscr{C}} + b_\varphi \| F^\sigma(0) \|_{C([0,b_\varphi];X)}) + 2C_0 \int_0^t [F]_{C_{Lip}} \| u \|_{C([-p,\tau];X)} \, d\tau,$$

para todo $t \in I_{max}$, obtemos que $u(\cdot,\varphi)$ é limitada em I_{max}. Podemos finalizar a prova usando a segunda afirmação na Proposição 10. □

Para completar esta seção, estabeleceremos e provaremos alguns resultados usando o Teorema do ponto fixo de Schauder. Para provar o próximo resultado, usaremos basicamente a condição $\mathscr{H}^{\theta,q}_{F,\gamma_1,\gamma_2}$. Por conveniência, consideraremos os casos $\gamma_1 = 0$ e $\gamma_1 > 0$ separadamente.

Proposição 11. Suponha que $\varphi \in \mathscr{C}_{\gamma_2}$, $\varphi(0) \in X_{\gamma_1}$, $\gamma_1 > 0$, $2\gamma_1 < \frac{1}{q'}$, a condição $\mathscr{H}^{\theta,q}_{F,\gamma_1,\gamma_2}$ é verificada e o semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ é compacto. Então, existe uma solução fraca maximal $u \in C(I_{\max}; X_{\gamma_2})$ do problema (3.5)-(3.6) tal que $u_{|_{I^+_{\max}}} \in C(I^+_{\max}; X_{\gamma_1})$, onde $I^+_{\max} = I_{\max} \cap \mathbb{R}^+$. Mais ainda, se $I_{\max}$ é limitado, então $u(\cdot)$ é ilimitado.

Demonstração. A seguir, provaremos o caso $\gamma_1 > \theta > 0$. Os casos $\theta = 0$ e $\theta \geq \gamma_1$ podem ser provados usando o mesmo argumento. Seja $R > C_0 \max\{\| \varphi \|_{\mathscr{C}_{\gamma_2}}, \| \varphi(0) \|_{\gamma_1}\}$ e $\delta > 0$ tais que

$$\max_{i=1,2}\{C_0 \| \varphi(0) \|_{\gamma_i} + \frac{C_{0,\gamma_i-\theta}\delta^{\frac{1}{q'}+\theta-\gamma_i}}{(1-(\gamma_i-\theta)q')^{\frac{1}{q'}}} \mathfrak{W}(R)(\| \mathfrak{L}_{F,1} \|_{L^q([0,\delta])} + \| \mathfrak{L}_{F,2} \|_{L^q([0,\delta])})\} \leq R.$$

Seja $\mathscr{S}(R,\varphi)$ o espaço definido por

$$\mathscr{S}(R,\varphi) = \Big\{ u \in C([-p,\delta]; X_{\gamma_2}) : u_0 = \varphi,\, u_{|_{[0,\delta]}} \in C([0,\delta]; X_{\gamma_1}), \\ \max\{\| u \|_{C([0,\delta];X_{\gamma_1})}, \| u \|_{C([-p,\delta];X_{\gamma_2})}\} \leq R \Big\},$$

munido da métrica $d(u,v) := \max_{i=1,2} \| u - v \|_{C([0,\delta];X_{\gamma_i})}$. Seja $\Gamma : \mathscr{S}(R,\varphi) \mapsto C([-p,\delta];X)$ a aplicação definida na prova do Teorema 2 e considere a decomposição $\Gamma u(t) = T(t)\varphi(0) + \Gamma_1 u(t)$.

Seja $u \in \mathscr{S}(R,\varphi)$ e $0 < \nu < \min\{\gamma_1, \frac{1}{q'} - \gamma_1\}$. Observando que $\| F(t,u(t),u^\sigma(t)) \|_\theta \leq \mathfrak{L}_{F,1}(t)\mathfrak{W}(R) + \mathfrak{L}_{F,2}(t)$, da última afirmação do Lema 17, obtemos que $\{\Gamma_1 v : v \in \mathscr{S}(R,\varphi)\}$ é limitado em $C^\nu([0,\delta]; X_{\gamma_1})$, o implica que $\{\Gamma u_{|_{[0,b]}} : u \in \mathscr{S}(R,\varphi)\}$ é um subconjunto equicontínuo de $C([0,\delta]; X_{\gamma_1})$ e $C([0,\delta]; X_{\gamma_2})$ desde que $X_{\gamma_1} \hookrightarrow X_{\gamma_2}$.

Para mostrar que $\Gamma(\mathscr{S}(R,\varphi))(t) = \{\Gamma u(t) : u \in \mathscr{S}(R,\varphi)\}$ é relativamente compacto em X_{γ_1} para todo $t \in [0,\delta]$, para $0 \le c < d \le \delta$ observamos que

$$\begin{aligned}
&\| (-A)^{\gamma_1} \int_c^d T(d-\tau)F^{\sigma}(u)(\tau)d\tau \| \\
&\quad \le \int_c^d \| (-A)^{\gamma_1-\theta} T(d-\tau)(-A)^{\theta} F^{\sigma}(u)(\tau)d\tau \| \\
&\quad \le \int_c^d \frac{C_{0,\gamma_1-\theta}}{(d-\tau)^{\gamma_1-\theta}} (\mathfrak{L}_{F,1}(\tau)\mathfrak{W}(R) + \mathfrak{L}_{F,2}(\tau))d\tau \\
&\quad \le R_1(c,d) := C_{0,\gamma_1-\theta}(\mathfrak{W}(R) \| \mathfrak{L}_{F,1} \|_{L^q([c,d])} + \| \mathfrak{L}_{F,2} \|_{L^q([c,d])}) \frac{(d-c)^{\frac{1}{q'}+\theta-\gamma_1}}{[1-q'(\gamma_1-\theta)]^{\frac{1}{q'}}}.
\end{aligned}$$

Desta estimativa, vemos que

$$\begin{aligned}
(-A)^{\gamma_1}\Gamma u(t) &= (-A)^{\gamma_1} T(t)\varphi(0) + T(\varepsilon)\int_0^{t-\varepsilon} (-A)^{\gamma_1} T(t-\varepsilon-s)F^{\sigma}(u)(s)ds \\
&\quad + \int_{t-\varepsilon}^{t} (-A)^{\gamma_1} T(t-s)F^{\sigma}(u)(s)ds \\
&\in \{(-A)^{\gamma_1} T(t)\varphi(0)\} + T(\varepsilon)R_1(0,\delta)B_1(0;X) + R_1(t-\varepsilon,t)B_1(0;X), \quad (3.24)
\end{aligned}$$

e, assim, $\Gamma\mathscr{S}(R,\varphi)(t) = \{\Gamma u(t) : u \in \mathscr{S}(R,\varphi)\} \subset K_\varepsilon + D_\varepsilon$, onde $\overline{K}_\varepsilon$ é compacto em X_{γ_1} e o diâmetro de D_ε (relativo a norma de X_{γ_1}) converge para zero quando $\varepsilon \downarrow 0$. O que prova que $\Gamma(\mathscr{S}(R,\varphi))(t)$ é relativo compacto em X_{γ_1}.

Por outro lado, para $t \in [0,\delta]$ é fácil ver que

$$\| (-A)^{\gamma_i}\Gamma u(t) \| \le C_0 \| \varphi(0) \|_{\gamma_i} + \frac{C_{0,\gamma_i-\theta}\delta^{\frac{1}{q'}+\theta-\gamma_i}}{(1-(\gamma_i-\theta)q')^{\frac{1}{q'}}} \mathfrak{W}(R)(\| \mathfrak{L}_{F,1} \|_{L^q([0,\delta])} + \| \mathfrak{L}_{F,2} \|_{L^q([0,\delta])}) \le R,$$

o que mostra que $\Gamma(\mathscr{S}(R,\varphi)) \subset \mathscr{S}(R,\varphi)$. Do anterior e do Teorema do ponto fixo de Schauder, obtemos que existe uma solução fraca $u^1(\cdot,\varphi) \in \mathscr{S}(R,\varphi)$ de (3.5)-(3.6) em $[-p,\delta]$.

Observando que $u(\cdot)$ é uma função limitada de valores em X_{γ_1} e $u_\delta \in \mathscr{C}_{\gamma_2}$, podemos usar o argumento anterior para provar que existe $\delta_1 > 0$ e uma solução fraca $u^2(\cdot,\varphi) \in C([\delta-p,\delta+\delta_1];X)$ do problema

$$\begin{aligned}
w'(t) &= Aw(t) + F^{\sigma}(w)(t), \quad t \in [\delta,\delta+\delta_1], && (3.25)\\
w_\delta &= u_\delta \in \mathscr{C}_{\gamma_2}. && (3.26)
\end{aligned}$$

Colando as soluções $u^1(\cdot)$ e $u^2(\cdot)$ obtemos uma solução fraca $u \in C([-p,\delta+\delta_1];X_{\gamma_1})$ de (3.5)-(3.6), e procedendo de forma usual, obtemos que existe uma solução fraca maximal $u \in C(I_{\max};X_{\gamma_2})$ do problema (3.5)-(3.6) tal que $u_{|_{I^+_{\max}}} \in C(I^+_{\max};X_{\gamma_1})$.

Para finalizar, assuma que $b_\varphi = \sup I_{\max} < \infty$ e suponha $\sup_{t\in[0,b_\varphi)} \| u(t) \|_{\gamma_1} < \infty$. Neste caso, da condição $\mathscr{H}^{\theta,q}_{F,\gamma_1,\gamma_2}$ temos que $F^{\sigma}(u) \in L^q([0,b_\varphi))$ e do item (e) do Lema 17 segue que $u - T(\cdot)\varphi(0) \in C^{\nu}([0,b_\varphi);X_{\gamma_1})$ para $\nu = \min\{\gamma_1, \frac{1}{q'} - \gamma_1\}$, o que implica que X_{γ_1}-$\lim_{t\to b_\varphi} u(t)$

existe. Do anterior, é fácil ver que a função $\bar{u}:[-p,b_\varphi]\to X$ dada por $\bar{u}(t)=u(t)$ para $t\in[-p,b_\varphi)$ e $\bar{u}(b_\varphi):=\lim_{t\to b_\varphi}u(t)$, é uma solução fraca com valores em X_{γ_2} de (3.5)-(3.6) em $[-p,b_\varphi]$ e que $\bar{u}_{|_{[0,b_\varphi]}}\in C([0,b_\varphi];X_{\gamma_1})$. O que implica que $I_{\max}=[-p,b_\varphi]$. Finalmente, procedendo como acima, podemos provar que existe uma solução fraca $u\in C([-p,b_\varphi+\delta'];X_{\gamma_2})$ de (3.5)-(3.6) para algum $\delta'>0$ tal que $u_{|_{[0,b_\varphi+\delta']}}\in C([0,b_\varphi+\delta'];X_{\gamma_1})$, o que é uma contradição com a maximalidade de $u(\cdot)$. O que prova que $u(\cdot)$ é ilimitada se $I_{\max}$ é limitado. □

Corolário 9. Se $\varphi\in\mathscr{C}$, a condição $\mathscr{H}^{0,q}_{F,0,0}$ está satisfeita e o semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ e compacto, então existe uma solução fraca maximal $u\in C(I_{\max};X)$ de (3.5)-(3.6). A solução $u(\cdot)$ é ilimitado se $I_{\max}$ é limitado.

Demonstração. A prova segue do argumento na prova da Proposição 11, mas usando o item (d) no Lema 17 no lugar do item (e). Omitiremos os detalhes adicionais. □

Corolário 10. Assuma que as condições na Proposição 11 estejam satisfeitas e assuma que $\limsup_{\xi\to\infty}\frac{\mathfrak{W}(\xi)}{\xi}<\infty$. Então existe uma solução fraca $u(\cdot,\varphi)\in C([-p,\infty);X_{\gamma_2})$ do problema (3.5)-(3.6) tal que $u(\cdot,\varphi)$ é uma função contínua com valores em X_{γ_1} no intervalo $[0,\infty)$.

Demonstração. Provaremos somente o caso $\gamma_1\geq\gamma_2>\theta\geq 0$. A prova dos outros casos são similares. A existência de uma solução fraca maximal $u(\cdot)\in C(I_{\max};X)$ segue da Proposição 11. Assuma $b_\varphi=\sup I_{\max}<\infty$ o que implica $\sup_{t\in[0,b_\varphi)}\| u(t)\|_{\gamma_1}=\infty$. Seja $c\in(0,b_\varphi)$ e $\Lambda(c,\cdot):[c,b_\varphi)\mapsto\mathbb{R}^+$, $\Upsilon:[0,b_\varphi)\mapsto\mathbb{R}^+$ as funções dadas por $\Lambda(c,s)=\| u\|_{C([c,s];X_{\gamma_1})}+\| u\|_{C([c-p,s];X_{\gamma_2})}$ e $\Upsilon(s)=(\| \mathfrak{L}_{F,1}\|_{L^q([s,b_\varphi])}+\| \mathfrak{L}_{F,2}\|_{L^q([s,b_\varphi])})\max_{i=1,2}\frac{(b_\varphi-s)^{\frac{1}{q'}+\theta-\gamma_i}}{(1-(\gamma_i-\theta)q')^{\frac{1}{q'}}}$. Usando as notações anteriores, para $t\in[c,b_\varphi)$ temos que

$$\begin{aligned}
\| u(t)\|_{\gamma_1} &\leq C_0\| u(c)\|_{\gamma_1}+\int_c^t\| (-A)^{\gamma_1-\theta}T(t-\tau)\|\| F^\sigma(u)(\tau)\|_\theta\,d\tau\\
&\leq C_0\| u(c)\|_{\gamma_1}+\int_c^t\frac{C_{0,\gamma_1-\theta}}{(t-\tau)^{\gamma_1-\theta}}\mathfrak{W}(\Lambda(c,s))\mathfrak{L}_{F,1}(\tau)d\tau+\int_c^t\frac{C_{0,\gamma_1-\theta}}{(t-\tau)^{\gamma_1-\theta}}\mathfrak{L}_{F,2}(\tau)d\tau\\
&\leq C_0\| u(c)\|_{\gamma_1}+C_{0,\gamma_1-\theta}\mathfrak{W}(\Lambda(c,t))\Upsilon(c)+C_{0,\gamma_1-\theta}\Upsilon(c),
\end{aligned}$$

e, assim,

$$\sup_{s\in[c,t]}\| u(s)\|_{\gamma_1}\leq C_0\| u(c)\|_{\gamma_1}+C_{0,\gamma_1-\theta}\mathfrak{W}(\Lambda(c,t))\Upsilon(c)+C_{0,\gamma_1-\theta}\Upsilon(c).$$

Procedendo de maneira similar, obtemos que

$$\sup_{s\in[c,t]}\| u(s)\|_{\gamma_2}\leq C_0\| u(c)\|_{\gamma_2}+C_{0,\gamma_2-\theta}\mathfrak{W}(\Lambda(c,t))\Upsilon(c)+C_{0,\gamma_2-\theta}\Upsilon(c),$$

o que implica

$$\sup_{s\in[c-p,t]}\| u(s)\|_{\gamma_2}\leq C_0\sup_{s\in[c-p,c]}\| u(s)\|_{\gamma_2}+C_{0,\gamma_2-\theta}\mathfrak{W}(\Lambda(c,t))\Upsilon(c)+C_{0,\gamma_1-\theta}\Upsilon(c).$$

Das estimativas anteriores, podemos ver que

$$\Lambda(c,t) \leq C_0\Lambda(c,c) + \max_{i=1,2} C_{0,\gamma_i}\mathfrak{W}(\Lambda(c,t))\Upsilon(c) + \max_{i=1,2} C_{0,\gamma_i}\Upsilon(c),$$

e $1 \leq \max_{i=1,2} C_{0,\gamma_i} \limsup_{\xi\to\infty} \frac{\mathfrak{W}(\xi)}{\xi}\Upsilon(c)$, desde que $\Lambda(c,t) \to \infty$ as $t \to b_\varphi$, o que é uma contradição com o fato $\Upsilon(c) \to 0$ quando $c \to b_\varphi$. A afirmação segue agora da Proposição 11. □

Corolário 11. Se as condições no Corolário 9 estão satisfeita e $\limsup_{\xi\to\infty} \frac{\mathfrak{W}(\xi)}{\xi} < \infty$, então existe uma solução fraca $u(\cdot,\varphi) \in C([-p,\infty);X)$ do problema (3.5)-(3.6).

Demonstração. A prova segue procedendo como na prova do Corolário 10 e utilizando a última afirmação no Corolário 9. □

Corolário 12. Assuma que $\varphi \in \mathscr{C}_{\gamma_2}, \gamma_1 > 0$, $2\gamma_1 < \frac{1}{q'}$, $\varphi(0) \in X_{\gamma_1}$, a condição $H^{\theta,q}_{F,\gamma_1,\gamma_2}$ é verificada, o semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ é compacto e $\limsup_{\xi\to\infty} \mathscr{W}_F(\xi) < \infty$. Então existe uma solução fraca $u(\cdot,\varphi) \in C([-p,\infty);X_{\gamma_2})$ do problema (3.5)-(3.6) tal que $u(\cdot,\varphi)_{|_{[0,\infty)}} \in C([0,\infty);X_{\gamma_1})$. Em particular, a afirmação anterior é verdadeira se $\mathscr{W}_F(\cdot)$ é limitado ou $F(\cdot)$ é Lipschitz.

Demonstração. A prova segue com pequenas alterações das demonstrações da Proposição 11 e do Corolário 10. □

Relacionado com a existência de solução estrita global, temos o resultado a seguir.

Proposição 12. Assuma que as condições $H^{0,q}_{F,0,0}$, $H^r_{\sigma,0}$ e $\mathscr{H}^{0,q}_{F,0,0}$ estão satisfeitas, $\varphi \in \mathfrak{B}$, $(T(t))_{t\geq 0}$ é compacto, $\Theta(q,r) < 1$ e que a condição (3.21) seja válida. Se $\limsup_{\xi\to\infty} \frac{\mathfrak{W}(\xi)}{\xi} < \infty$, então existe uma única solução estrita $u(\cdot,\varphi)$ de (3.5)-(3.6) definida em $[0,\infty)$.

Demonstração. Da Proposição 10, existe uma única solução estrita maximal localmente Lipschitz $u(\cdot) = u(\cdot,\varphi) \in C(I_{\max};X)$ de (3.5)-(3.6). Do Corolário 11, temos que existe uma uma solução fraca $v \in C([-p,\infty);X)$ de (3.5)-(3.6). Seja $a \in I_{\max}$ e $\rho = \| u \|_{C_{Lip}([-p,a];X)} + \| v \|_{C([-p,a];X)}$. Procedendo como na prova do Teorema 2, para $t \in (0,a]$ encontramos que

$$\| u - v \|_{C([0,t];X)} \leq 2C_0\widetilde{\mathscr{W}}_{F,\sigma}(\rho)(1+\rho)\int_0^t [F]_{(\tau,\tau)}(1+[\sigma]_{(\tau,\tau)}) \| u - v \|_{C([0,\tau];X)}\, d\tau,$$

o que implica que $u(\cdot) = v(\cdot)$ em $[0,a]$. Consequentemente, $u(\cdot) = v(\cdot)$ em $I_{\max}$ e $u(\cdot)$ é limitado em $I_{\max}$.

Do anterior, se $b_\varphi = \sup I_{\max} < \infty$, temos que $\lim_{t\to b_\varphi} u(t) = v(b_\varphi)$. Mais ainda, observando que $u(\cdot)$ é uma solução fraca em $[-p,b_\varphi]$, $F^\sigma(u) \in C([0,b_\varphi];X)$, do item (a) no Lema 17, temos que $u \in C^\alpha([0,b_\varphi];X)$ para todo $\alpha \in (\chi(q,r),1)$, onde $\chi(q,r)$ é o número no Lema 11. Procedendo agora como na segunda parte da Proposição 10 (veja estimativa (3.24)), podemos provar que $u(\cdot)$ é uma solução estrita em $[0,b_\varphi]$, o que implica que $b_\varphi \in I_{\max} = [-p,b_\varphi]$ desde que $u(\cdot)$ é uma solução estrita maximal.

Continuando como na parte final da prova da Proposição 10, obtemos que existe uma solução estrita de (3.24), o que implica que existe uma solução estrita de (3.5)-(3.6) definida em $[-p, b_\varphi + b_1]$ para algum $b_1 > 0$. O que permite finalizar a demonstração. $\square$

Nos resultados a seguir, assuma que as condições $H^{\theta,q}_{F,\gamma_1,\gamma_2}$, H^r_{σ,γ_2} e $\mathrm{H}_{T,\omega}$ estão satisfeitas e para $x > 0$ usamos a notação a seguir.

$$\begin{aligned}
\Phi_1(x) &:= \sup_{h\geq 0, c>0} \| e^{-\omega(c-\cdot)}\overline{\mathscr{W}}_{F,\sigma}(\cdot,x)\frac{[F]_{(\cdot+h,\cdot)}}{(c-\cdot)^{\gamma_1}}(2+[\sigma]_{(\cdot+h,\cdot)}) \|_{L^1([0,c])},\\
\Phi_2(x) &:= \sup_{c>0} \| e^{-\omega(c-\cdot)}\overline{\mathscr{W}}_{F,\sigma}(\cdot,x)\frac{[F]_{(\cdot,\cdot)}}{(c-\cdot)^{\gamma_1}}(2+[\sigma]_{(\cdot,0)}) \|_{L^1([0,c])}\\
\Phi_3(x) &:= \sup_{c>0} \| e^{-\omega(c-\cdot)}\overline{\mathscr{W}}_{F,\sigma}(\cdot,x)\frac{[F]_{(\cdot,0)}}{(c-\cdot)^{\gamma_1}}(2+[\sigma]_{(\cdot,0)}) \|_{L^1([0,c])},
\end{aligned}$$

onde $\overline{\mathscr{W}}_{F,\sigma}(s,x) = \overline{\mathscr{W}}_F(s,x)(1+\overline{\mathscr{W}}_\sigma(s,x))$ e $\overline{\mathscr{W}}_h(s,x) = \mathscr{W}_h(x(s+2p) + \| \varphi \|_{\mathscr{C}_{\gamma_2}} + \| \varphi(0) \|_{\gamma_1})$ para $h = F, \sigma$.

Usando as ideias da prova do Teorema 2, podemos provar os resultados a seguir sobre existência de soluções globais.

Proposição 13. Assuma que as condições $H^{\theta,q}_{F,\gamma_1,\gamma_2}$, H^r_{σ,γ_2} e $\mathrm{H}_{T,\omega}$ estão satisfeitas, $\Theta(q,r) \leq 1$, $\varphi \in C_{Lip}([-p,0];X_{\gamma_2})$, $T(\cdot)\varphi(0) \in C_{Lip}([0,\infty);X_{\gamma_1})$ e $F(\cdot,\varphi(0),\varphi(-\sigma(0,\varphi))) \in L^\infty([0,\infty);X_{\gamma_1})$. Suponha que $\Phi_i(x) < \infty$, $i = 1,2$, para todo $x > 0$ e que a função $P : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ dada por

$$P(x) = (1+\| (-A)^{\gamma_2-\gamma_1} \|)[\Lambda + 2D_{0,\gamma_1} \| (-A)^{-\theta} \| (\Phi_1(x)+\Phi_2(x))(1+x)^2] - x,$$

onde

$$\begin{aligned}
\Lambda &= [T(\cdot)\varphi(0)]_{C_{Lip}([0,\infty);X_{\gamma_1})} + [\varphi]_{C_{Lip}([-p,0];X_{\gamma_2})}\\
&\quad + \frac{D_{0,0}}{\omega} \| F(\cdot,\varphi(0),\varphi(-\sigma(0,\varphi))) \|_{L^\infty([0,\infty);X_{\gamma_1})},
\end{aligned} \tag{3.27}$$

tem uma raiz positiva. Então existe uma única solução estrita $u(\cdot,\varphi) \in C([-p,\infty);X_{\gamma_2})$ de (3.5)-(3.6).

Demonstração. A prova segue da demonstração do Teorema 2. A seguir apresentaremos resumidamente os argumentos desta prova. Seja $R > 0$ a raiz de $P(\cdot)$ e $\mathscr{Y}(R)$ o espaço definido por

$$\begin{aligned}
\mathscr{Y}(R) &:= \{u \in C([-p,\infty);X_{\gamma_2}) : u_0 = \varphi,\ u_{|_{[0,\infty)}} \in C([0,\infty);X_{\gamma_1}),\\
&\qquad [u_{|_{[0,b_1]}}]_{C_{Lip}([0,\infty);X_{\gamma_1})} \leq R,\ [u]_{C_{Lip}([-p,\infty);X_{\gamma_2})} \leq R\},
\end{aligned}$$

munido da métrica $\mathfrak{D}(u,v) = \max_{i=1,2} \| u - v \|_{C([0,\infty);X_{\gamma_i})}$. Seja $\Gamma : \mathscr{Y}(R) \to C([-p,\infty);X)$ definido de forma usual (veja 3.12).

Provaremos a seguir que $\Gamma(\cdot)$ é uma contração. Inicialmente, observe que a desigualdade (3.13)-(3.17) continua válida e que

$$(1+\| (-A)^{\gamma_2-\gamma_1} \|)[\Lambda+2D_{0,\gamma_1} \| (-A)^{-\theta} \|\| (\Phi_1(R)+\Phi_2(R))(1+R)^2] < R. \tag{3.28}$$

Procedendo como na primeira parte de prova do Teorema 2, vemos que

$$\max\{\| u(s) \|_{\gamma_1}, \| u^{\sigma}(s) \|_{\gamma_2}\} \leq R(s+2p)+\| \varphi \|_{\mathscr{C}_{\gamma_2}} + \| \varphi(0) \|_{\gamma_1}, \ \forall s>0. \tag{3.29}$$

Usando esta desigualdade e procedendo como na prova citada, para $t,h \in [0,\infty)$ e $u,v \in \mathscr{Y}(R)$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\| \Gamma u(t+h)-\Gamma u(t) \|_{\gamma_1} \\
&\quad\leq [T(\cdot)\varphi(0)]_{C_{Lip}([0,\infty);X_{\gamma_1})}h+\frac{D_{0,0}}{\omega} \| F(\cdot,\varphi(0),\varphi(-\sigma(0,\varphi))) \|_{L^{\infty}([0,\infty);X_{\gamma_1})} h \\
&\qquad +D_{0,\gamma_1} \| (-A)^{-\theta} \| (1+R)^2(\int_0^h \frac{e^{-\omega(h-s)}}{(h-s)^{\gamma_1}}\overline{\mathscr{W}}_{F,\sigma}(\tau,R)[F]_{(\tau,\tau)}(2+[\sigma]_{(\tau,0)})d\tau)h \\
&\qquad +D_{0,\gamma_1} \| (-A)^{-\theta} \| (1+R)^2 \int_0^t \frac{e^{-\omega(t-s)}}{(t-s)^{\gamma_1}}\overline{\mathscr{W}}_{F,\sigma}(\tau,R)[F]_{(\tau+h,\tau)}(2+[\sigma]_{(s+h,s)})d\tau)h \\
&\quad\leq \Lambda h+D_{0,\gamma_1} \| (-A)^{-\theta} \| (\Phi_2(R)+\Phi_1(R))(1+R)^2h, \\
&\| \Gamma u(t+h)-\Gamma u(t) \|_{\gamma_2} \\
&\quad\leq \| (-A)^{\gamma_2-\gamma_1} \| \Lambda h+D_{0,\gamma_1} \| (-A)^{\gamma_2-\gamma_1} \|\| (-A)^{-\theta} \| (\Phi_2(R)+\Phi_1(R))(1+R)^2h,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\| \Gamma u(t)-\Gamma v(t) \|_{\gamma_1} \\
&\quad\leq 2D_{0,\gamma_1} \| (-A)^{-\theta} \| (1+R) \int_0^t \frac{e^{-\omega(t-s)}}{(t-s)^{\gamma_1}}\overline{\mathscr{W}}_{F,\sigma}(\tau,R)[F]_{(\tau,\tau)}(1+[\sigma]_{(\tau,\tau)})d\tau\mathfrak{D}(u,v) \\
&\quad\leq 2D_{0,\gamma_1} \| (-A)^{-\theta} \| \Phi_1(R)(1+R)\mathfrak{D}(u,v),
\end{aligned}$$

o que implica usando (3.28) que $[\Gamma u]_{C_{Lip}([-0,\infty);X_{\gamma_1})} \leq R$, $[\Gamma u]_{C_{Lip}([-p,\infty);X_{\gamma_2})} \leq R$ e

$$\begin{aligned}
\| \Gamma u-\Gamma v \|_{C([0,\infty);X_{\gamma_1})} &\leq 2D_{0,\gamma_1} \| (-A)^{-\theta} \| \Phi_1(R)(1+R)\mathfrak{D}(u,v), \\
\| \Gamma u-\Gamma v \|_{C([0,\infty);X_{\gamma_2})} &\leq 2 \| (-A)^{\gamma_2-\gamma_1} \| D_{0,\gamma_1} \| (-A)^{-\theta} \| \Phi_1(R)(1+R)\mathfrak{D}(u,v).
\end{aligned}$$

Do anterior e (3.28), segue que $\Gamma(\cdot)$ é a contração em $\mathscr{Y}(R)$ e existe uma única solução fraca $u \in C_{Lip}([-p,\infty);X_{\gamma_2})$ de (3.5)-(3.6) tal que $u_{|_{[0,\infty)}} \in C_{Lip}([0,\infty);X_{\gamma_1})$.

Finalmente, usando que $u(\cdot)$ é uma solução estrita de (3.5)-(3.6) segue da prova do Teorema 2, omitimos os detalhes adicionais. □

Corolário 13. Assuma que a $\mathrm{H}_{T,\omega}$ esteja satisfeita, $1 \geq \gamma_1 \geq \gamma_2 \geq 0$, $T(\cdot)\varphi(0) \in C_{Lip}([0,\infty);X_{\gamma_1})$, $\varphi \in C_{Lip}([-p,0];X_{\gamma_2})$, $F \in C_{Lip}([0,\infty)\times X_{\gamma_1}\times X_{\gamma_2};X_{\theta})$ e $\sigma \in C_{Lip}([0,\infty)\times \mathscr{C}_{\gamma_2};[0,p])$. Se $F(\cdot,\varphi(0),\varphi(-\sigma(0,\varphi))) \in L^{\infty}([0,\infty);X_{\gamma_1})$ e $1 > 4((1+\| (-A)^{\gamma_2-\gamma_1} \|)\Lambda+1)\alpha$, onde Λ é o número definido em (3.27) e

$$\alpha = (1+\| (-A)^{\gamma_2-\gamma_1} \|)2D_{0,\gamma_1} \| (-A)^{-\theta} \| 2[F]_{C_{Lip}}(2+[\sigma]_{C_{Lip}})(\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\gamma_1}), \tag{3.30}$$

então existe uma única solução estrita $u(\cdot,\varphi) \in C([-p,\infty);X_{\gamma_2})$ do problema (3.5)-(3.6).

Demonstração. A afirmação segue da Proposição 13 definindo $P(\cdot)$ por

$$P(x) = (1+\| (-A)^{\gamma_2-\gamma_1} \|)\Lambda + \alpha(1+x)^2 - x$$

e usando que $\Phi_1(x) = \Phi_2(x) = [F]_{C_{Lip}}(2+[\sigma]_{C_{Lip}})(\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\gamma_1})$ para todo $x>0$. Finalmente, observando que a condição $1 > 4((1+\| (-A)^{\gamma_2-\gamma_1} \|)\Lambda+1)\alpha$ implica que $P(\cdot)$ tem uma uma raiz positiva. □

Procedendo como na prova da Proposição 13 e do Corolário 13, podemos provar os resultados a seguir.

Proposição 14. Assuma que as condições na Proposição 13, com exceção das condições sobre $F(\cdot,\varphi(0),\varphi(-\sigma(0,\varphi)))$ e $\Phi_2(.)$, estão satisfeitas. Se $F(0,\varphi(0),\varphi(-\sigma(0,\varphi))) \in X_{\gamma_1}$, $\Phi_3(x) < \infty$ para todo $x>0$ e que a função $Q:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ definida por

$$Q(x) = (1+\| (-A)^{\gamma_2-\gamma_1} \|)[\widetilde{\Lambda} + 2D_{0,\gamma_1} \| (-A)^{-\theta} \| (\Phi_1(x)+\Phi_3(x))(1+x)^2] - x,$$

onde

$$\begin{aligned}\widetilde{\Lambda} &= [T(\cdot)\varphi(0)]_{C_{Lip}([0,\infty);X_{\gamma_1})} + [\varphi]_{C_{Lip}([-p,0];X_{\gamma_2})} \\ &\quad + \frac{D_{0,0}}{\omega} \| F(0,\varphi(0),\varphi(-\sigma(0,\varphi))) \|_{X_{\gamma_1}}, \end{aligned} \tag{3.31}$$

tem uma raiz positiva, então existe uma única solução estrita $u(\cdot,\varphi) \in C([-p,\infty);X_{\gamma_2})$ de (3.5)-(3.6).

Corolário 14. Assuma que a condição $\mathrm{H}_{T,\omega}$ esteja satisfeita, $1 \geq \gamma_1 \geq \gamma_2 \geq 0$, $\varphi \in C_{Lip}([-p,0];X_{\gamma_2})$, $T(\cdot)\varphi(0) \in C_{Lip}([0,a];X_{\gamma_1})$, $F \in C_{Lip}([0,\infty)\times X_{\gamma_1}\times X_{\gamma_2};X_\theta)$ e $\sigma \in C_{Lip}([0,\infty)\times\mathscr{C}_{\gamma_2};[0,p])$. Se $F(0,\varphi(0),\varphi(-\sigma(0,\varphi))) \in X_{\gamma_1}$ e $1 > 4((1+\| (-A)^{\gamma_2-\gamma_1} \|)\Lambda+1)\alpha$, onde α e $\widetilde{\Lambda}$ são os números em (3.31) e (3.30), então existe uma única solução estrita $u(\cdot,\varphi) \in C([-p,\infty);X_{\gamma_2})$ de (3.5)-(3.6) tal que $u(\cdot,\varphi)_{|_{[0,\infty)}} \in C_{Lip}([-p,\infty);X_{\gamma_1})$.

3.2 Boa colocação e atratores

Neste capítulo estudaremos a boa colocação e a existência de atratores para problema (3.5)-(3.6). Estudaremos esses tópicos considerando diferentes espaços de fase. Para iniciar, introduzimos a definição a seguir.

Definição 8. Seja $(\mathscr{D},\|\cdot\|_{\mathscr{D}})$ um espaço normado continuamente imerso em $(\mathscr{C},\|\cdot\|_{\mathscr{C}})$. Dizemos que o problema (3.5)-(3.6) está bem colocado relativo ao espaço $(\mathscr{D},\|\cdot\|_{\mathscr{D}})$ se para todo $\varphi\in\mathscr{D}$ e $a>0$ existe uma única solução fraca $u(\cdot,\varphi)\in C([-p,a];X)$ of (3.5)-(3.6) tal que $u_t(\cdot,\varphi)\in\mathscr{D}$ para todo $t\in[0,a]$ e $\sup_{t\in[0,a]} \| u_t(\cdot,\varphi)-u_t(\cdot,\psi) \|_{\mathscr{D}} \to 0$ quando $\| \varphi-\psi \|_{\mathscr{D}} \to 0$.

Notação 5. No restante deste trabalho, para um conjunto $\mathscr{D}\subset\mathscr{C}$ tal que para todo $\varphi\in\mathscr{C}$ existe uma solução fraca $u(\cdot)$ de (3.5)-(3.6) definida em $[-p,\infty)$, usaremos a notação $(S_{\mathscr{D}}(t))_{t\geq 0}$ para a família de aplicações (possivelmente) multivalorada definidas por $S_{\mathscr{D}}(t)\varphi = \{u_t(\cdot) : u(\cdot)$ é uma solução de (3.5)-(3.6) em $[-p,\infty)\}$.

3.2.1 Boa colocação, dissipatividade e atratores em $\mathfrak{B}$

Nesta seção, estudaremos a boa colocação e a existência de atrator para o problema (3.5)-(3.6) relativas ao espaço $\mathfrak{B}$. Com esse objetivo, no restante desta seção assumiremos que a condição a seguir esteja verificada.

$\mathscr{H}_1$: As condições $H^{0,q}_{F,0,0}$, $H^{\theta,q}_{F,\gamma,0}$, $H^{r}_{\sigma,0}$ e $\mathfrak{H}^{0,q}_{F,0,0}$ estão satisfeitas com $\Theta(q,r)<1$, o semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ é compacto e a condição (3.21) está verificada.

Observação 7. Se a condição $\mathscr{H}_1$ é verificada, da Proposição 12 temos que para todo $\varphi\in\mathfrak{B}$ existe uma única solução estrita $u(\cdot,\varphi)\in C([0,\infty);X)$ de (3.5)-(3.6). Mais ainda, do Corolário 10, para todo $\psi\in\mathscr{C}$ existe uma solução fraca $v(\cdot)\in C([0,\infty);X)$ de (3.5)-(3.6).

Dividiremos esta seção em duas subseções.

3.2.1.1 Boa colocação relativa ao espaço $\mathfrak{B}$.

Para estudar este problema no espaço $\mathfrak{B}$, precisaremos dos lemas a seguir.

Lema 12. Se a condição $\mathscr{H}_1$ está satisfeita e $\gamma\in(0,1)$, então existe funções não decrescentes $\mathscr{H}_i\in C([0,\infty);[0,\infty))$, $i=1,\dots,4$, independentes de $\varphi\in\mathfrak{B}$, tais que

$$\begin{aligned}\| u(\cdot,\varphi)\|_{C([0,t];X)} &\leq \mathscr{H}_1(t)\,\|\varphi\|_{\mathscr{C}}+\mathscr{H}_2(t),\ \forall\varphi\in\mathfrak{B},\ t\geq 0, &(3.32)\\ \| u(\cdot,\varphi)\|_{C([0,t];X_\gamma)} &\leq \mathscr{H}_3(t)\,\|\varphi\|_{\mathfrak{B}}+\mathscr{H}_4(t),\ \forall\varphi\in\mathfrak{B},\ t\geq 0. &(3.33)\end{aligned}$$

Demonstração. Seja $\varphi\in\mathfrak{B}$ e $u(\cdot)=u(\cdot,\varphi)\in C([0,\infty);X)$ a solução estrita na observação 7. Usando a condição $\mathfrak{H}^{0,q}_{F,0,0}$, para $t\in[0,a]$ temos que

$$\| u(t)\|\leq C_0\|\varphi(0)\|+C_0\int_0^t L_{F,1}(s)(\| u\|_{C([0,s);X)}+\| u^\sigma(s)\|)ds+C_0\int_0^t L_{F,2}(s)ds,$$

e, assim,

$$\| u\|_{C([-p,t];X)}\leq C_0\|\varphi\|_{\mathscr{C}}+2C_0\int_0^t L_{F,1}(s)\,\| u\|_{C([-p,s];X)}\,ds+C_0\int_0^t L_{F,2}(s)ds,$$

e $\| u(\cdot,\varphi)\|_{C([0,t])}\leq C_0(\|\varphi\|+\| L_{F,2}\|_{L^1([0,t])})e^{2C_0\|L_{F,2}\|_{L^1([0,t])}}$, o que prova a primeira desigualdade. Mais ainda, usando (3.32), obtemos

$$\begin{aligned}\| u(t)\|_\gamma &\leq C_0\|(-A)^\gamma\varphi(0)\|+C_{0,\gamma}\int_0^t\frac{\|F^\sigma(u)(s)\|}{(t-s)^\gamma}ds\\ &\leq C_0\|(-A)^\gamma\varphi(0)\|+2C_{0,\gamma}\int_0^t\frac{L_{F,1}(s)}{(t-s)^\gamma}\| u\|_{C([-p,s];X)}\,ds+\int_0^t\frac{L_{F,2}(s)}{(t-s)^\gamma}ds\\ &\leq C_0\|(-A)^\gamma\varphi(0)\|+2C_{0,\gamma}(\mathscr{H}_1(t)\,\|\varphi\|_{\mathscr{C}}+\mathscr{H}_2(t))\frac{t^{1-\gamma}}{1-\gamma}\| L_{F,1}\|_{C([0,t])}\\ &\quad +C_{0,\gamma}\| L_{F,2}\|_{C([0,t])}\frac{t^{1-\gamma}}{1-\gamma}, &(3.34)\end{aligned}$$

o que nos permite obter (3.33). □

Observação 8. Da prova do Lema 12, podemos ver que a desigualdade (3.32) continua válida no caso de uma solução fraca de (3.5)-(3.6) com condição inicial $\psi \in \mathscr{C}$.

Lema 13. Assuma que a condição $\mathscr{H}_1$ está satisfeita e $(1-\theta) < \frac{1}{q'}$. Então, existem uma função não decrescente $\mathscr{H}_6 : [0,\infty) \mapsto [0,\infty)$ e uma função contínua $\mathscr{H}_5 : [0,\infty) \times [0,\infty) \to [0,\infty)$, independentes de $\varphi \in \mathfrak{B}$, tais que $\mathscr{H}_5(s,x) \leq \mathscr{H}_5(t,y)$ se $s \leq t$ e $x \leq y$, e

$$\max\{\| Au(\cdot,\varphi) \|_{C([0,t];X)}, [u(\cdot,\varphi)]_{C_{Lip}([0,t])}\} \leq \mathscr{H}_5(t, \| \varphi \|_{\mathfrak{B}}) + \mathscr{H}_6(t), \ \forall \varphi \in \mathfrak{B}, t \geq 0. \quad (3.35)$$

Demonstração. Sejam $\mathscr{H}_i(\cdot)$, $i = 1,\ldots,4$, as funções no Lema 12 e $\widetilde{\mathscr{H}} : [0,\infty) \times \mathfrak{B} \mapsto [0,\infty)$ as função definida por $\widetilde{\mathscr{H}}(t,\psi) := (\mathscr{H}_1(t) + \mathscr{H}_3(t)) \| \psi \|_{\mathfrak{B}} + \mathscr{H}_2(t) + \mathscr{H}_4(t)$ para $(t,\psi) \in$: $[0,\infty) \times \mathfrak{B}$. Do Lema 12, para $\varphi \in \mathfrak{B}$, $u = u(\cdot,\varphi)$, $a > 0$ e $s,t \in [0,a]$, podemos ver que

$$\begin{aligned}
&\| F^{\sigma}(u)(s) - F^{\sigma}(0)(s) \|_{\theta} \\
&\quad \leq [F]_{(s,s)} \mathscr{W}_F (\max\{(\| u \|_{C([0,s];X_\gamma)}, \| u^{\sigma} \|_{C([0,s];X)})\}(\| u \|_{C([0,s];X_\gamma)} + \| u^{\sigma} \|_{C([0,s];X)}) \\
&\quad \leq [F]_{(s,s)} \mathscr{W}_F (\widetilde{\mathscr{H}}(s,\varphi) + 1)(\widetilde{\mathscr{H}}(s,\varphi) + 1). \qquad (3.36)
\end{aligned}$$

Usando esta desigualdade e observando que $\widetilde{\mathscr{H}}(\cdot,\varphi)$ é não decrescente, obtemos que

$$\begin{aligned}
\| Au(t,\varphi) \| &\leq \| AT(t)\varphi(0) \| + \int_0^t \| (-A)^{1-\theta} T(t-s) \| \| F^{\sigma}(0)(s) \|_{\theta} \, ds \\
&\quad + \int_0^t \| (-A)^{1-\theta} T(t-s) \| \| F^{\sigma}(u)(s) - F^{\sigma}(0)(s) \|_{\theta} \, ds \\
&\leq C_0 \| A\varphi(0) \| + \int_0^t \frac{C_{0,1-\theta}}{(t-s)^{1-\theta}} \| F^{\sigma}(0)(s) \|_{\theta} \, ds \\
&\quad + \mathscr{W}_F (\widetilde{\mathscr{H}}(t,\varphi) + 1)(\widetilde{\mathscr{H}}(t,\varphi) + 1) \int_0^t \frac{C_{0,1-\theta}[F]_{(s,s)}}{(t-s)^{1-\theta}} ds,
\end{aligned}$$

o que permite obter

$$\begin{aligned}
&\| Au(\cdot,\varphi) \|_{C([0,t];X)} \\
&\quad \leq C_0 \| A\varphi(0) \| + C_{0,1-\theta} \| F^{\sigma}(0) \|_{C([0,t];X_\theta)} \frac{t^{\theta}}{\theta} \\
&\qquad + \mathscr{W}_F (\widetilde{\mathscr{H}}(t,\varphi) + 1)(\widetilde{\mathscr{H}}(t,\varphi) + 1) C_{0,1-\theta} \| [F]_{(\cdot,\cdot)} \|_{L^q([0,t])} \frac{t^{\frac{1}{q'} - (1-\theta)}}{(1 - q'(1-\theta))^{\frac{1}{q'}}}.
\end{aligned}$$

Mais ainda, da desigualdade anterior, da desigualdade (3.32), da condição $\mathfrak{H}^{0,q}_{F,0,0}$ e observando que as funções $L_{F,i}(\cdot)$ são contínuas e que

$$\begin{aligned}
&[u(\cdot,\varphi)]_{C_{Lip}([0,t];X)} \\
&\quad \leq \| u' \|_{C([0,t];X))} \leq \| Au \|_{C([0,t];X))} + \| F_u \|_{C([0,t];X))} \\
&\quad \leq \| Au \|_{C([0,t];X))} + 2 \| u \|_{C([-p,t];X))} \| L_{F,1} \|_{C([0,t];X))} + \| L_{F,2} \|_{C([0,t];X))}, \qquad (3.37)
\end{aligned}$$

obtemos (3.35). Isto completa a prova. □

Observação 9. Para provar o próximo teorema, é conveniente introduzir algumas notações. Assuma as condições no Lema 13 estão satisfeitas. Sejam $\mathscr{H}_i(t)$, $i = 1,2$, as funções no Lema 12. Para $\varphi \in \mathfrak{B}$, $\psi \in \mathscr{C}$, $u = u(\cdot,\varphi)$ a solução estrita associada e $v = v(\cdot,\psi)$ uma solução fraca com condição inicial ψ, definimos as funções

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathscr{W}_L}(t,\varphi,\psi) &= W_L((\mathscr{H}_1(t)+1)(\| \varphi \|_{\mathscr{C}} + \| \psi \|_{\mathscr{C}}) + \mathscr{H}_2(t)), \quad L = F,\sigma, t \geq 0,\\
\widetilde{\mathscr{W}_{F,\sigma}}(\cdot) &= \widetilde{\mathscr{W}_F}(\cdot)(1+\widetilde{\mathscr{W}_\sigma}(\cdot)),
\end{aligned}$$

Usando as desigualdades no Lema 8 e Lema 13, para $t \geq 0$ temos que

$$\begin{aligned}
&\| u^\sigma(t,\varphi) - v^\sigma(t,\psi) \|\\
&\leq (1+[u^\sigma(\cdot,\varphi)]_{C_{Lip}([0,t];X)}[\sigma]_{(t,t)}\widetilde{\mathscr{W}_\sigma}(t,\varphi,\psi)) \| u(\cdot,\varphi) - v(\cdot,\psi) \|_{C([-p,t];X))}\\
&\leq (1+[u^\sigma(\cdot,\varphi)]_{C_{Lip}([0,t];X)})(1+[\sigma]_{(t,t)})(1+\widetilde{\mathscr{W}_\sigma}(t,\varphi,\psi)) \| u(\cdot,\varphi) - v(\cdot,\psi) \|_{C([-p,t];X))} .
\end{aligned}$$

Notando que $[u^\sigma(\cdot,\varphi)]_{C_{Lip}([-p,t];X)} \leq [\psi_1]_{C_{Lip}([-p,0];X)} + [u^\sigma(\cdot,\varphi)]_{C_{Lip}([0,t];X)}$ e usando as notações no Lema 13 e definindo $S_1(\varphi)(t) := (1+([\varphi]_{C_{Lip}([-p,0];X)} + \mathscr{H}_5(t,\| \varphi \|_{\mathfrak{B}}) + \mathscr{H}_6(t))$, reescrevemos a última desigualdade na forma

$$\begin{aligned}
&\| u^\sigma(t,\varphi) - v^\sigma(t,\psi) \|\\
&\leq S_1(\varphi)(t)(1+[\sigma]_{(t,t)})(1+\widetilde{\mathscr{W}_\sigma}(t,\varphi,\psi))(\| \varphi - \psi \|_{\mathscr{C}} + \| u(\cdot,\varphi) - v(\cdot,\psi) \|_{C([0,t];X)}). \quad (3.38)
\end{aligned}$$

Dos resultados anteriores, temos a proposição a seguir.

Proposição 15. Suponha que a condição $\mathscr{H}_1$ esteja satisfeita. Então existe uma função $\mathscr{H}_7 : [0,\infty)\times[0,\infty)\times[0,\infty) \to [0,\infty)$ tal que $\mathscr{H}_7(t,s_1,s_2,s_3) \leq \mathscr{H}_7(t',s_1',s_2',s_3')$ se $t \leq t'$, $s_i \leq s_i'$, $i = 1,\ldots,3$, e

$$\| u(\cdot,\varphi) - v(\cdot,\psi) \|_{C([0,t];X)} \leq \mathscr{H}_7(t,\| \varphi \|_{\mathfrak{B}},[\varphi]_{C_{Lip}([-p,0];X)},\| \psi \|_{\mathscr{C}}) \| \varphi - \psi \|_{\mathscr{C}} \quad (3.39)$$

para todo $\varphi \in \mathfrak{B}$, $\psi \in \mathscr{C}$, $t \geq 0$ e para toda solução fraca $v(\cdot,\psi) \in C([-p,\infty);X)$ da equação (3.5) com condição inicial ψ. Em particular, $\| u_t(\cdot,\varphi) - v_t(\cdot,\psi) \|_{\mathscr{C}} \to 0$ quando $\| \psi - \varphi \|_{\mathscr{C}} \to 0$.

Demonstração. Usando o Lema 13, a condição $H^{0,q}_{F,0,0}$ e as notações introduzidas na observação 9, para $\varphi \in \mathfrak{B}$, $\psi \in \mathscr{C}$, $u(\cdot) = u(\cdot,\varphi)$, uma solução fraca $v(\cdot) = v(\cdot,\psi)$ de (3.5) com condição inicial $\psi \in \mathscr{C}$ e $t \geq 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\| u(t,\varphi) - v(t,\psi) \|\\
&\leq C_0 \| \varphi - \psi \|_{\mathscr{C}} + C_0 \int_0^t [F]_{(s,s)}\widetilde{\mathscr{W}_F}(s,\varphi,\psi)(\| u(s) - v(s) \| + \| u^\sigma(s) - v^\sigma(s) \|)\, ds\\
&\leq C_0 \| \varphi - \psi \|_{\mathscr{C}} + C_0\widetilde{\mathscr{W}_F}(t,\varphi,\psi)\int_0^t [F]_{(s,s)} \| u - v \|_{C([0,s];X)}\, ds\\
&\quad + C_0\widetilde{\mathscr{W}_F}(t,\varphi,\psi)\int_0^t [F]_{(s,s)}S_1(\varphi)(s)(1+[\sigma]_{(s,s)})(1+\widetilde{\mathscr{W}_\sigma}(s,\varphi,\psi)) \| \varphi - \psi \|_{\mathscr{C}}\, ds\\
&\quad + C_0\widetilde{\mathscr{W}_F}(t,\varphi,\psi)\int_0^t [F]_{(s,s)}S_1(\varphi)(s)(1+[\sigma]_{(s,s)})(1+\widetilde{\mathscr{W}_\sigma}(s,\varphi,\psi)) \| u - v \|_{C([0,s];X)}\, ds,
\end{aligned}$$

e, assim,

$$\begin{aligned}
&\| u(\cdot,\varphi)-v(\cdot,\psi)\|_{C([0,t])}\\
&\quad\leq\ C_0(1+S_1(\varphi)(t)\widetilde{\mathscr{W}}_{F,\sigma}(t,\varphi,\psi)\,\|\,[F]_{(\cdot,\cdot)}(1+[\sigma]_{(\cdot,\cdot)})\,\|_{L^1([0,t])})\,\|\,\varphi-\psi\,\|_{\mathscr{C}}\\
&\qquad+C_0(1+S_1(\varphi)(t))\widetilde{\mathscr{W}}_{F,\sigma}(t,\varphi,\psi)\int_0^t[F]_{(s,s)}(1+[\sigma]_{(s,s)})\,\|\,u-v\,\|_{C([0,s];X)}\,ds,
\end{aligned}$$

o que nos permite finalizar a demonstração usando o Lema 10. □

Para estudar a boa colocação do problema (3.5)-(3.6) relativa ao espaço $\mathfrak{B}$, precisaremos estabelecer estimativas adequadas para $\| Au(t,\varphi)-Av(t,\psi)\|$. Com esse objetivo, precisaremos introduzir algumas hipóteses adicionais e novos lemas. A seguir, para $q,r\in[1,\infty]$ tais que $\Theta(q,r)<1$, usamos a notação $\Lambda(q,r)$ para o número positivo tal que $\Theta(q,r)+\frac{1}{\Lambda(q,r)}=1$.

Lema 14. Suponha que a condição $\mathscr{H}_1$ está verificada. Se $\gamma\leq\theta$ ou $\gamma>\theta$ e $1>(\gamma-\theta)\Lambda(q,r)$, então para todo $a>0$ existe uma função $\mathscr{H}_9:[0,\infty)\times[0,\infty)\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ tal que $\mathscr{H}_9(s_1,s_2,s_3)\leq\mathscr{H}_9(s_1',s_2',s_3')$ se $s_i\leq s_i'$, $i=1,\ldots,3$ e

$$\| u(\cdot,\varphi)-u(\cdot,\psi)\|_{C([0,t];X_\gamma)}\leq\mathscr{H}_9(\|\varphi\|_{\mathfrak{B}},[\varphi]_{C_{Lip}([-p,0];X)},\|\psi\|_{\mathfrak{B}})\,\|\varphi-\psi\|_{\mathfrak{B}},$$

para todo $\varphi,\psi\in\mathfrak{B}$ e $t\in[0,a]$.

Demonstração. Sejam $a>0$, $\varphi,\psi\in\mathfrak{B}$, $u=u(\cdot,\varphi)$, $v=u(\cdot,\psi)$ e $\widetilde{\mathscr{W}}_F^\gamma:[0,a]\times\mathfrak{B}\times\mathfrak{B}\to\mathbb{R}^+$ definido por

$$\widetilde{\mathscr{W}}_F^\gamma(t,\psi_1,\psi_2)=\mathscr{W}_F((\mathscr{H}_1(t)+\mathscr{H}_3(t)+1)(\|\psi_1\|_{\mathfrak{B}}+\|\psi_2\|_{\mathfrak{B}})+(\mathscr{H}_2(t)+\mathscr{H}_4(t))),$$

onde $\mathscr{H}_i(\cdot)$, $i=1,\ldots,4$, são as funções no 12.

Inicialmente, assuma que $\gamma-\theta>0$, $1>(\gamma-\theta)\Lambda(q,r)$ e $\Theta\in(0,1)$. Das condições anteriores, temos que as funções $\frac{[F]_{(\cdot,\cdot)}}{(s-\cdot)^{\gamma-\theta}}$ e $\frac{[F]_{(\cdot,\cdot)}}{(s-\cdot)^{\gamma-\theta}}(1+[\sigma]_{(\cdot,\cdot)})$ são integráveis em $[0,s]$ para todo $s\in[0,a]$. Mais ainda, podemos selecionar $0<\delta\leq a$ tal que

$$\begin{aligned}
\Lambda(t,r)\ &:=\ (C_0+C_{0,\gamma-\theta}\widetilde{\mathscr{W}}_F^\gamma(a,\varphi,\psi))S_1(\varphi)(a)(\|(-A)^{-\gamma}\|+1)\int_r^t\frac{[F]_{(\tau,\tau)}}{(t-\tau)^{\gamma-\theta}}(1+[\sigma]_{(\tau,\tau)})d\tau\\
&<\ \Theta,
\end{aligned}\tag{3.40}$$

para todo $0\leq r<t\leq s\leq a$ com $|t-r|\leq\delta$, onde $S_1(\varphi)(\cdot)$ é a função introduzida na observação 9. Seja $\Lambda_\infty>\max\{1,\sup_{r\leq t\leq a}\Lambda(t,r)\}$.

Usando Lema 12, Lema 13, a condição $H^{\theta,q}_{F,\gamma,0}$, o fato que $F^{\sigma}(u)$ e $F^{\sigma}(v)$ pertence a $C([0,a];X_{\theta})$ e as notações na observação 9, para $t\in[0,\delta]$ vemos que

$$
\begin{aligned}
&\| u(t,\varphi)-u(t,\psi)\|_{\gamma}\\
&\leq C_0\|(-A)^{\gamma-1}\|\|A\varphi(0)-A\psi(0)\|\\
&\quad+\int_0^t\|(-A)^{\gamma-\theta}T(t-s)\|\|(-A)^{\theta}F^{\sigma}(u)(s)-(-A)^{\theta}F^{\sigma}(v)(s)\|\,ds\\
&\leq C_0\|(-A)^{\gamma-1}\|\|\varphi-\psi\|_{\mathfrak{B}}\\
&\quad+C_{0,\gamma-\theta}\int_0^t\frac{[F]_{(s,s)}}{(t-s)^{\gamma-\theta}}\widetilde{\mathscr{W}}^{\gamma}_{F}(s,\varphi,\psi)(\|u(s)-v(s)\|_{X_{\gamma}}+\|u^{\sigma}(s)-v^{\sigma}(s)\|)ds\\
&\leq C_0\|(-A)^{\gamma-1}\|\|\varphi-\psi\|_{\mathfrak{B}}+C_{0,\gamma-\theta}\widetilde{\mathscr{W}}^{\gamma}_{F}(t,\varphi,\psi)\int_0^t\frac{[F]_{(s,s)}}{(t-s)^{\gamma-\theta}}\|u-v\|_{C([0,s];X_{\gamma})}\,ds\\
&\quad+C_{0,\gamma-\theta}\widetilde{\mathscr{W}}^{\gamma}_{F,\sigma}(t,\varphi,\psi)\int_0^t\frac{[F]_{(s,s)}}{(t-s)^{\gamma-\theta}}S_1(\varphi)(s)(1+[\sigma]_{(s,s)})\|\varphi-\psi\|_{\mathscr{C}}\,ds\\
&\quad+C_{0,\gamma-\theta}\widetilde{\mathscr{W}}^{\gamma}_{F,\sigma}(t,\varphi,\psi)\int_0^t\frac{[F]_{(s,s)}}{(t-s)^{\gamma-\theta}}S_1(\varphi)(s)(1+[\sigma]_{(s,s)})\|u-v\|_{C([0,s];X)}\,ds\\
&\leq C_0\|(-A)^{\gamma-1}\|\|\varphi-\psi\|_{\mathfrak{B}}\\
&\quad+C_{0,\gamma-\theta}S_1(\varphi)(a)\widetilde{\mathscr{W}}^{\gamma}_{F,\sigma}(t,\varphi,\psi))\int_0^t\frac{[F]_{(s,s)}}{(t-s)^{\gamma-\theta}}(1+[\sigma]_{(s,s)})ds\,\|\varphi-\psi\|_{\mathfrak{B}}\\
&\quad+C_{0,\gamma-\theta}\widetilde{\mathscr{W}}^{\gamma}_{F}(t,\varphi,\psi)\int_0^t\frac{[F]_{(s,s)}}{(t-s)^{\gamma-\theta}}\|u-v\|_{C([0,s];X_{\gamma})}\,ds\\
&\quad+C_{0,\gamma-\theta}S_1(\varphi)(a)\widetilde{\mathscr{W}}^{\gamma}_{F}(t,\varphi,\psi)\int_0^t\frac{[F]_{(s,s)}}{(t-s)^{\gamma-\theta}}(1+[\sigma]_{(s,s)})\|(-A)^{-\gamma}\|\|u-v\|_{C([0,s];X_{\gamma})}\,ds
\end{aligned}
\tag{3.41}
$$

e, assim,

$$
\|u(t,\varphi)-u(t,\psi)\|_{\gamma}\leq\Lambda(t,0)\|\varphi-\psi\|_{\mathfrak{B}}+\Lambda(t,0)\|u-v\|_{C([0,t];X_{\gamma})}\,. \tag{3.42}
$$

Do anterior, temos que

$$
\|u(\cdot,\varphi)-u(\cdot,\psi)\|_{C([0,t];X_{\gamma})}\leq\Lambda_{\infty}\|\varphi-\psi\|_{\mathfrak{B}}+\Theta\|u-v\|_{C([0,t];X_{\gamma})},
$$

e

$$
\|u(\cdot,\varphi)-u(\cdot,\psi)\|_{C([0,t];X_{\gamma})}\leq\frac{\Lambda_{\infty}}{1-\Theta}\|\varphi-\psi\|_{\mathfrak{B}},\quad\forall t\in[0,\delta]. \tag{3.43}
$$

Adicionalmente ao anterior, notando que (3.41) vale para todo $t\geq 0$ e usando a definição de $\Lambda(\cdot)$, para $t\in[\delta,2\delta]$ temos que

$$
\begin{aligned}
\|u(t,\varphi)-u(t,\psi)\|_{\gamma}&\leq\Lambda(t,0)\|\varphi-\psi\|_{\mathfrak{B}}+\Lambda(\delta,0)\|u(\cdot,\varphi)-u(\cdot,\psi)\|_{C([0,\delta];X_{\gamma})}\\
&\quad+\Lambda(t,\delta)\|u-v\|_{C([0,t];X_{\gamma})}\\
&\leq\Lambda_{\infty}\|\varphi-\psi\|_{\mathfrak{B}}+\Lambda_{\infty}\frac{\Lambda_{\infty}}{1-\Theta}\|\varphi-\psi\|_{\mathfrak{B}}+\Theta\|u-v\|_{C([0,t];X_{\gamma})},
\end{aligned}
$$

e observando que $\Lambda_\infty > 1$, de (3.43) obtemos que

$$\| u - v \|_{C([0,t];X_\gamma)} \leq \Lambda_\infty \| \varphi - \psi \|_{\mathfrak{B}} + \frac{\Lambda_\infty^2}{1-\Theta} \| \varphi - \psi \|_{\mathfrak{B}} + \Theta \| u - v \|_{C([0,t];X_\gamma)},$$

e

$$\| u(\cdot,\varphi) - u(\cdot,\psi) \|_{C([0,2\delta];X_\gamma)} \leq \left(\frac{\Lambda_\infty}{1-\Theta} + \frac{\Lambda_\infty^2}{(1-\Theta)^2}\right) \| \varphi - \psi \|_{\mathfrak{B}}, \qquad \forall t \in [\delta, 2\delta]. \tag{3.44}$$

Continuando como anterior, obtemos que

$$\| u(\cdot,\varphi) - u(\cdot,\psi) \|_{C([0,k\delta];X_\gamma)} \leq \sum_{i=1}^{k} \frac{\Lambda_\infty^i}{(1-\Theta)^i} \| \varphi - \psi \|_{\mathfrak{B}}, \tag{3.45}$$

o que permite obter o resultado para o caso $\gamma > \theta$ desde que os números Λ_∞ e Θ dependem das funções $\widetilde{\mathscr{W}_F^\gamma}(a,\varphi,\psi)$ e $S_1(\varphi)(a)$ que dependem de $\| \varphi \|_{\mathfrak{B}}$, $[\varphi]_{C_{Lip}([-p,0];X)}$ e $\| \psi \|_{\mathfrak{B}}$.

O caso $\gamma - \theta \leq 0$ segue procedendo como anterior. Observando somente que neste caso, podemos usar a Desigualdade de Gronwall pois o operador $\| (-A)^{\gamma-\theta} T(t-s) \|$ são uniformemente limitado em $\{(t,s) : 0 \leq s \leq t \leq a\}$. Omitiremos os detalhes adicionais. □

Podemos provar agora o próximo Teorema sobre a boa colocação relativa ao espaço $\mathfrak{B}$.

Teorema 3. Suponha que a condição $\mathscr{H}_1$ está satisfeita e $\theta > 0$. Se $\gamma \leq \theta$ ou $\gamma > \theta$ e $1 > (\gamma - \theta)\Lambda(q,r)$, o problema (3.5)-(3.6) está bem colocado relativo ao espaço $\mathfrak{B}$. Mais ainda, para todo $a > 0$ existe uma função contínua $\mathscr{H}_{10} : [0,\infty) \times [0,\infty) \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ tal que $\mathscr{H}_{10}(s_1,s_2,s_3) \leq \mathscr{H}_{10}(s_1',s_2',s_3')$ se $s_i \leq s_i'$, $i = 1,\ldots,3$ e

$$\| u_t(\cdot,\varphi) - u_t(\cdot,\psi) \|_{\mathfrak{B}} \leq \mathscr{H}_{10}(\| \varphi \|_{\mathfrak{B}}, [\varphi]_{C_{Lip}([-p,0];X)}, \| \psi \|_{\mathfrak{B}}) \| \varphi - \psi \|_{\mathfrak{B}}, \tag{3.46}$$

para todo $\varphi, \psi \in \mathfrak{B}$ e $t \in [0,a]$.

Demonstração. Sejam $a > 0$ e $\widetilde{\mathscr{W}_L^\gamma}, \widetilde{\mathscr{W}_{F,\sigma}^\gamma} : [0,a] \times \mathfrak{B} \times \mathfrak{B} \to \mathbb{R}^+$, com $L = F, \sigma$, as funções definidas por

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathscr{W}_L^\gamma}(t,\psi_1,\psi_2) &= \mathscr{W}_L((\mathscr{H}_1(t) + \mathscr{H}_3(t) + 1)(\| \psi_1 \|_{\mathfrak{B}} + \| \psi_2 \|_{\mathfrak{B}}) + (\mathscr{H}_2(t) + \mathscr{H}_4(t))), \\
\widetilde{\mathscr{W}_{F,\sigma}^\gamma}(\cdot) &= \widetilde{\mathscr{W}_F^\gamma}(\cdot)(1 + \widetilde{\mathscr{W}_\sigma^\gamma}(\cdot)),
\end{aligned}$$

onde $\mathscr{H}_i(\cdot)$, $i = 1,\ldots,4$, são as funções no Lema 12. Seja $\Upsilon : [0,a] \mapsto [0,\infty)$ a função dada por $\Upsilon(s) = \int_0^s \frac{[F]_{(\tau,\tau)}}{(s-\tau)^{1-\theta}}(1 + [\sigma]_{(\tau,\tau)})d\tau$. Sejam $\varphi, \psi \in \mathfrak{B}$, $u = u(\cdot,\varphi)$ e $v = u(\cdot,\psi)$. Do Lema 12 e

da condição $H^{\theta,q}_{F,\gamma,0}$, para $t \in (0,a]$ obtemos que

$$
\begin{aligned}
&\| Au(t,\varphi) - Au(t,\psi) \| \\
&\leq C_0 \| A\varphi(0) - A\psi(0) \| + \int_0^t \| (-A)^{1-\theta} T(t-s)((-A)^\theta F^\sigma(u)(s) - (-A)^\theta F^\sigma(v)(s)) \| \, ds \\
&\leq C_0 \| A\varphi(0) - A\psi(0) \| + C_{0,1-\theta} \int_0^t \frac{[F]_{(s,s)}}{(t-s)^{1-\theta}} \widetilde{\mathscr{W}}^\gamma_F(s,\varphi,\psi) \| u - v \|_{C([0,s];X_\gamma)} \, ds \\
&\quad + C_{0,1-\theta} \int_0^t \frac{[F]_{(s,s)}}{(t-s)^{1-\theta}} \widetilde{\mathscr{W}}^\gamma_F(s,\varphi,\psi) \| u^\sigma - v^\sigma \|_{C([0,s];X)} \, ds \\
&\leq C_0 \| \varphi - \psi \|_{\mathfrak{B}} + C_{0,1-\theta} \widetilde{\mathscr{W}}^\gamma_F(a,\varphi,\psi) \int_0^t \frac{[F]_{(s,s)}}{(t-s)^{1-\theta}} \| u - v \|_{C([0,s];X_\gamma)} \, ds \\
&\quad + C_{0,1-\theta} \widetilde{\mathscr{W}}^\gamma_{F,\sigma}(a,\varphi,\psi) \int_0^t \frac{[F]_{(s,s)} S_1(\varphi)(s)}{(t-s)^{1-\theta}} (1 + [\sigma]_{(s,s)}) \| \varphi - \psi \|_{C([-p,0])} \, ds \\
&\quad + C_{0,1-\theta} \widetilde{\mathscr{W}}^\gamma_{F\sigma}(a,\varphi,\psi) \int_0^t \frac{[F]_{(s,s)} S_1(\varphi)(s)}{(t-s)^{1-\theta}} (1 + [\sigma]_{(s,s)}) \| u - v \|_{C([0,s];X)} \, ds \\
&\leq C_0 \| \varphi - \psi \|_{\mathfrak{B}} + C_{0,1-\theta} \widetilde{\mathscr{W}}^\gamma_F(a,\varphi,\psi) \Upsilon(t) \| u - v \|_{C([0,t];X_\gamma)} \\
&\quad + C_{0,1-\theta} \widetilde{\mathscr{W}}^\gamma_{F,\sigma}(a,\varphi,\psi) S_1(\varphi)(a) \Upsilon(t) \| \varphi - \psi \|_{\mathscr{C}} \\
&\quad + C_{0,1-\theta} \widetilde{\mathscr{W}}^\gamma_{F,\sigma}(a,\varphi,\psi) S_1(\varphi)(a) \Upsilon(t) \| (-A)^{-\gamma} \| \| u - v \|_{C([0,t];X_\gamma)},
\end{aligned} \tag{3.47}
$$

o que implica que

$$
\begin{aligned}
\| Au(t,\varphi) - Au(t,\psi) \| \leq\ & (C_0 + C_{0,1-\theta} \widetilde{\mathscr{W}}^\gamma_{F,\sigma}(a,\varphi,\psi) S_1(\varphi)(a) \Upsilon(t)) \| \varphi - \psi \|_{\mathfrak{B}} \\
& + C_{0,1-\theta} \widetilde{\mathscr{W}}^\gamma_F(a,\varphi,\psi) \Upsilon(t) \| u - v \|_{C([0,t];X_\gamma)} \\
& + C_{0,1-\theta} \widetilde{\mathscr{W}}^\gamma_{F,\sigma}(a,\varphi,\psi) S_1(\varphi)(a) \Upsilon(t) \| u - v \|_{C([0,t];X)} .
\end{aligned}
$$

O resultado segue desta desigualdade, Proposição 15, Lema 14, observando que as funções $S_1(\varphi)(\cdot)$ e $\widetilde{\mathscr{W}}^\gamma_{F,\sigma}(\cdot)$ dependem de $\| \varphi \|_{\mathfrak{B}}, [\varphi]_{C_{Lip}([-p,0];X)}$ e $\| \psi \|_{\mathfrak{B}}$, e utilizando que

$$
\begin{aligned}
\| u_t(\cdot,\varphi) - u_t(\cdot,\psi) \|_{\mathfrak{B}} \leq\ & \| \varphi - \psi \|_{C([-p,0])} + \| u(\cdot,\varphi) - u(\cdot,\psi) \|_{C([0,t];X)} \\
& + \| Au(t,\varphi) - Au(t,\psi) \| \\
\leq\ & \| \varphi - \psi \|_{C([-p,0])} + (\| (-A)^{-1} \| + 1) \| u(\cdot,\varphi) - u(\cdot,\psi) \|_{C([0,a];X_1)} .
\end{aligned}
$$

□

Da prova do Teorema 3, temos o próximo corolário.

Corolário 15. Assuma $F \in C_{Lip}([0,a] \times X \times X; X) \cap C_{Lip}([0,a] \times X_\gamma \times X; X_\theta)$, $\theta > 0$ e $\sigma \in C_{Lip}([0,a] \times \mathscr{C}; [0,p])$. Se $\gamma \leq \theta$ ou $\gamma > \theta$ e $1 > (\gamma - \theta)$, então as afirmações no Teorema 3 são verificadas.

A seguir, usaremos a notação $S_{\mathfrak{B}}$ para a aplicação $S_{\mathfrak{B}} : [0,+\infty) \times \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$ definida por $S_{\mathfrak{B}}(t)\varphi = u_t(\cdot,\varphi)$. Dos resultados anteriores temos o próximo corolário.

Corolário 16. Se as condições no Teorema 3 ou Corolário 15 estão satisfeitas, então $S_{\mathfrak{B}} : [0,\infty) \times \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$ é contínua.

Demonstração. Seja $(t,\varphi) \in [0,\infty) \times \mathfrak{B}$. Então, para $h > 0$, $s \in [0,t+h]$ e $\psi \in \mathfrak{B}$ obtemos que

$$\begin{aligned}
\| S_{\mathfrak{B}}(t)\varphi - S_{\mathfrak{B}}(s)\psi \|_{\mathfrak{B}} &= \| u_t(\cdot,\varphi) - u_s(\cdot,\psi) \|_{\mathscr{C}} + \| Au(t,\varphi) - Au(s,\psi) \| \\
&\leq \| u_t(\cdot,\varphi) - u_s(\cdot,\varphi) \|_{\mathscr{C}} + \| u_s(\cdot,\varphi) - u_s(\cdot,\psi) \|_{\mathscr{C}} \\
&\quad + \| Au(t,\varphi) - Au(s,\varphi) \| + \| Au(s,\varphi) - Au(s,\psi) \| \\
&\leq [u(\cdot,\varphi)]_{C_{Lip}([-p,t+h];X)} |t-s| + \| Au(t,\varphi) - Au(s,\varphi) \| \\
&\quad + \| u_s(\cdot,\varphi) - u_s(\cdot,\psi) \|_{\mathfrak{B}},
\end{aligned}$$

o que permite finalizar a prova utilizando o Lema 13 e o Teorema 3. □

3.2.1.2 Compacidade de $(S_{\mathfrak{B}}(t))_{t\geq 0}$ em $\mathfrak{B}$

Nesta seção, estudaremos a compacidade da família de aplicações $(S_{\mathfrak{B}}(t))_{t\geq 0}$.

Proposição 16. Se as condições $\mathscr{H}_1$ e $H^{\theta,q}_{F,\gamma,0}$ estão verificadas com $\theta > 0$ e $(1-\theta) < \frac{1}{q'}$, então $S_{\mathfrak{B}}(t)$ é compacto para todo $t > p$.

Demonstração. Sejam $a > t > p$, $l > 0$ e $B := B_l(0,\mathfrak{B})$. Seja $\mathscr{H}^*(t) := (1+\| (-A)^{-\gamma} \|)(\mathscr{H}_3(t)+1)l + \mathscr{H}_4(t)$, onde $\mathscr{H}_i(\cdot)$, $i = 3,4$, são as funções no Lema 12 e $\Theta_1 = [1-(1-\theta)q']$. Inicialmente, estudaremos a equicontinuidade do conjunto $\{u_t(\cdot,\varphi) : \varphi \in B\}$ relativa à norma $\| \cdot \|_{C([-p,0],X_1)}$.

Sejam $\varphi \in B = B_l(0,\mathfrak{B})$, $u = u(\cdot,\varphi)$ a solução estrita associada e considere a decomposição $u(t) = T(t)\varphi(0) + v(t,\varphi)(t)$. Do Lema 12 e da condição $H^{\theta,q}_{F,\gamma,0}$, notamos que

$$\begin{aligned}
&\| u \|_{C([0,\tau];X_\gamma)} + \| u^\sigma \|_{C([0,\tau];X)} \\
&\qquad \leq \| u \|_{C([0,\tau];X_\gamma)} + (\| \varphi \|_{\mathscr{C}} + \| (-A)^{-\gamma} \| \| u \|_{C([0,\tau];X_\gamma)}) \\
&\qquad \leq (1+\| (-A)^{-\gamma} \|) \| u \|_{C([0,\tau];X_\gamma)} + \| \varphi \|_{\mathscr{C}} \\
&\qquad \leq (1+\| (-A)^{-\gamma} \|)(\mathscr{H}_3(\tau) \| \varphi \|_{\mathfrak{B}} + \mathscr{H}_4(\tau)) + \| \varphi \|_{\mathscr{C}} \\
&\qquad \leq \mathscr{H}^*(\tau), \\
&\| F^\sigma(u)(\tau) \|_\theta \leq [F]_{(\tau,\tau)} \mathscr{W}_F(\mathscr{H}^*(\tau))(\| u \|_{C([0,\tau];X_\gamma)} + \| u^\sigma \|_{C([0,\tau];X)}) + \| F^\sigma(0)(\tau) \|_\theta \\
&\qquad \leq [F]_{(\tau,\tau)} \mathscr{W}_F(\mathscr{H}^*(\tau))\mathscr{H}^*(\tau) + \| F^\sigma(0)(\tau) \|_\theta,
\end{aligned}$$

o que implica que o conjunto de funções $\{v(\cdot,\psi) : \psi \in B\}$ é limitado em $L^q([0,a];X_\theta)$. Usando este fato e a última afirmação no Lema 17, obtemos que o conjunto de funções $\{Av(\cdot,\psi) : \psi \in B\}$ é limitado em $C^\nu([0,a];X)$ para $\nu = \frac{1}{q'} - (1-\theta)$. Mais ainda, observando

$$\| AT(t+h)\psi(0) - AT(t)\psi(0) \| \leq \frac{C_1}{t} h \| A\psi(0) \| \leq \frac{C_1}{p} hl,$$

obtemos que $\{Au_t(\cdot,\psi) : \psi \in B\}$ é equicontínuo em $[-p,0]$ para todo $t > p$.

A seguir, mostraremos que $\{u(s,\varphi) : \varphi \in B\}$ é relativamente compacto em X_1 para todo $s \in [t-p,t]$. Para $s \in [t-p,t]$ e $0 < \varepsilon < s$ observamos que

$$\begin{aligned}
&\| A \int_0^{s-\varepsilon} T(s-\varepsilon-\tau)F^\sigma(u)(\tau)d\tau \| \\
&\leq \int_0^{s-\varepsilon} \| (-A)^{1-\theta}T(s-\varepsilon-\tau) \| \| F^\sigma(u)(\tau) \|_{X_\theta} \, d\tau \\
&\leq \int_0^{s-\varepsilon} \frac{C_{1-\theta}}{(s-\varepsilon-\tau)^{1-\theta}}([F]_{(\tau,\tau)}\mathscr{W}_F(\mathscr{H}^*(\tau))\mathscr{H}^*(\tau) + \| F^\sigma(0)(\tau) \|_\theta)d\tau \\
&\leq R_1 := C_{1-\theta}\mathscr{W}_F(\mathscr{H}^*(a))\mathscr{H}^*(a)\frac{a^{\frac{\Theta_1}{q'}}}{\Theta_1^{\frac{1}{q'}}} \| [F]_{(\cdot,\cdot)} \|_{L^q([0,a])} + \| F^\sigma(0) \|_{C([0,t];X_\theta)} C_{1-\theta}\frac{a^\theta}{\theta}.
\end{aligned}$$

De maneira similar, podemos provar que

$$\begin{aligned}
&\int_{s-\varepsilon}^{s} \|(-A)^{1-\theta}T(s-\tau)(-A)^\theta F^\sigma(u)(\tau)\|d\tau \\
&\leq R_2(\varepsilon) := C_{1-\theta}\mathscr{W}_F(\mathscr{H}^*(a))\mathscr{H}^*(a)\| [F]_{(\cdot,\cdot)} \|_{L^q([0,a])}\frac{\varepsilon^{\frac{\Theta_1}{q'}}}{\Theta_1^{\frac{1}{q'}}} + C_{1-\theta}\frac{\varepsilon^\theta}{\theta} \| F^\sigma(0)(\cdot) \|_{C([0,a];X_\theta)}.
\end{aligned}$$

Do anterior, obtemos que

$$\begin{aligned}
Au(s) &= T(s)A\varphi(0) + T(\varepsilon)\int_0^{s-\varepsilon}(-A)^{1-\theta}T(s-\varepsilon-\tau)(-A)^\theta F^\sigma(u)(\tau)d\tau \\
&\quad + \int_{s-\varepsilon}^{s}(-A)^{1-\theta}T(s-\tau)(-A)^\theta F^\sigma(u)(\tau)d\tau \\
&\in T(s)B_l(0;X) + T(\varepsilon)B_{R_1}(0;X) + R_2(\varepsilon)B_1(0;X),
\end{aligned}$$

e, assim, $\{Au(s,\varphi) : \varphi \in B\} \subset T(s)B_l(0;X) + T(\varepsilon)B_{R_1}(0;X) + R_2(\varepsilon)B_1(0;X)$, o que mostra que $\{Au(s,\varphi) : \varphi \in B\}$ é relativamente compacto em X desde que $T(s)B_l(0;X) + T(\varepsilon)B_{R_1}(0;X)$ é relativamente compacto em X e $R_2(\varepsilon) \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$.

Do anterior, o conjunto $AS(t)B = \{Au_t(\cdot,\varphi) : \varphi \in B\}$ é relativamente compacto em $C([-p,0];X)$ e observando que $\{[u(\cdot,\psi)]_{C_{Lip}([-p,0];X)}; \psi \in B\}$ é limitado (veja Lema 13) e que $(\mathfrak{B}, \|\cdot\|_{C([-p,0];X_1)}) \hookrightarrow (\mathfrak{B}, \|\cdot\|_{\mathfrak{B}})$, obtemos que o conjunto $\overline{S_{\mathfrak{B}}(t)B}^{\mathfrak{B}}$, onde $\overline{C}^{\mathfrak{B}}$ denota o fecho do conjunto C em $\mathfrak{B}$, é compacto em $\mathfrak{B}$. □

O próximo resultado é uma direta consequência da Proposição 16.

Corolário 17. Assuma que $F \in C_{Lip}([0,a] \times X \times X; X) \cap C_{Lip}([0,a] \times X_\gamma \times X; X_\theta)$ para algum $\theta > 0$ e $\sigma \in C_{Lip}([0,a] \times \mathscr{C}; [0,p])$, então $S_{\mathfrak{B}}(t)$ é compacto para todo $t > p$.

3.2.1.3 O problema autônomo, dissipatividade e atrator global em $\mathfrak{B}$

Nesta seção, estudaremos a existência de atrator em $\mathfrak{B}$ para problema autônomo

$$u'(t) = Au(t) + F^\sigma(u)(t), \quad t \geq 0, \tag{3.48}$$

$$u_0 = \varphi, \tag{3.49}$$

com $F^{\sigma}(u)(t) = F(u(t), u^{\sigma}(t))$ e $u^{\sigma}(t) = u(t - \sigma(u_t))$. Como citado na observação 7, se a condição $\mathscr{H}_1$ é verificado, para todo $\varphi \in \mathfrak{B}$ existe uma única solução estrita $u(\cdot, \varphi) \in C([-p, \infty); X)$ de (3.48)-(3.49). Para desenvolver nossos estudos, precisamos estabelecer algumas estimativas para $\| u(t, \varphi) \|_{X_\nu}$ for $\nu = 1, \gamma$. A seguir, consideraremos a seguinte condição.

$\mathscr{H}_{1,\mathrm{A}}$: $0 < \gamma \leq 1$, $F \in C_{Lip}(X \times X; X) \cap C_{Lip}(X_\gamma \times X; X_\gamma)$, a condição $\mathrm{H}_{T,\omega}$ está satisfeita, a função $\sigma(\cdot)$ pertence ao espaço $C_{Lip}(\mathscr{C}; [0, p])$ e $2\mu < \omega$, onde $\mu := C_0 [F]_{C_{Lip}} e^{\omega p}$ e $[F]_{C_{Lip}}$, por simplicidade, denota a Lipschitz constante de $F(\cdot)$ em ambos espaços $C_{Lip}(X \times X; X)$ e $C_{Lip}(X_\gamma \times X; X_\gamma)$.

Procedendo como na prova de (YOU; YUAN, 2010, Proposição 3.1), podemos provar o resultado a seguir.

Proposição 17. Se a condição $\mathscr{H}_{1,\mathrm{A}}$ está verificada, $\varphi \in \mathscr{C}$ e $u(\cdot)$ é uma solução fraca de (3.48)-(3.49) em $[-p, \infty)$, então

$$\| S_{\mathfrak{B}}(t)\varphi \|_{\mathscr{C}} \leq C_0 \| \varphi \|_{\mathscr{C}} e^{\omega p + (2\mu - \omega)t} + \frac{\| F^{\sigma}(0) \|}{\omega - 2\mu} C_0 e^{\omega p} (1 - e^{(2\mu - \omega)t}), \ \forall t \geq 0.$$

Demonstração. Seja $t \geq 0$, então para $\theta \in [-p, 0]$ temos que

$$\begin{aligned}
\| S_{\mathfrak{B}}(t)\varphi(\theta) \| &\leq C_0 e^{-\omega(t+\theta)} \| \varphi \|_{\mathscr{C}} + \int_0^{t+\theta} C_0 e^{-\omega(t+\theta-s)} \| F(u(s,\varphi), u^{\sigma}(s,\varphi)) \| ds \\
&\leq C_0 e^{\omega p} e^{-\omega t} \| \varphi \|_{\mathscr{C}} \\
&\quad + C_0 e^{\omega p} e^{-\omega t} \int_0^{t+\theta} e^{\omega s} (2[F]_{C_{Lip}} \| S_{\mathfrak{B}}(s)\varphi \|_{C([-p,0];X)} + \| F^{\sigma}(0) \|) ds \\
&\leq C_0 e^{\omega p} e^{-\omega t} \| \varphi \|_{\mathscr{C}} + C_0 e^{\omega p} \| F^{\sigma}(0) \| e^{-\omega t} \int_0^t e^{\omega s} ds \\
&\quad + 2C_0 e^{\omega p} [F]_{C_{Lip}} e^{-\omega t} \int_0^t e^{\omega s} \| S_{\mathfrak{B}}(s)\varphi \|_{C([-p,0];X)} ds,
\end{aligned}$$

o que implica que

$$\begin{aligned}
e^{\omega t} \| S_{\mathfrak{B}}(t)\varphi \|_{C([-p,0];X)} &\leq C_0 e^{\omega p} \| \varphi \|_{C([-p,0];X)} + \frac{C_0}{\omega} \| F^{\sigma}(0) \| e^{\omega p} (e^{\omega t} - 1) \\
&\quad + 2\mu \int_0^t e^{\omega s} \| S_{\mathfrak{B}}(s)\varphi \|_{C([-p,0];X)} ds,
\end{aligned}$$

para todo $t \geq 0$ e permite finalizar a prova utilizando a desigualdade de Gronwall. □

Nos resultados a seguir, $\Gamma : [0, \infty) \to [0, \infty)$ denota de função Gama, isto é, $\Gamma(x) = \int_0^\infty s^{x-1} e^{-s} ds$ para $x > 0$. Usando a proposição anterior, podemos provar o próximo resultado.

Proposição 18. Suponha que a condição $\mathscr{H}_{1,\mathrm{A}}$ esteja satisfeita. Se $\varphi \in \mathfrak{B}$, então

$$\begin{aligned}
\| (S_{\mathfrak{B}}(t)\varphi)(0) \|_{X_\gamma} &\leq \frac{2C_0 e^{\omega p+(2\mu-\omega)t}}{2e^{\omega p}-1}(1+\| A^{\gamma-1} \|) \| \varphi \|_{\mathfrak{B}} + \frac{C_0 \| F^\sigma(0) \|_{X_\gamma}}{\omega-\mu e^{-\omega p}} \\
&\quad + \frac{C_0 \| F^\sigma(0) \|}{\omega-\mu e^{-\omega p}}[\frac{\mu}{\omega-2\mu} + \frac{e^{\omega p+(\mu e^{-\omega p}-\omega)t}}{2e^{\omega p}-1}], \\
\| (S_{\mathfrak{B}}(t)\varphi)(0) \|_{X_1} &\leq (C_0 e^{-\omega t} + \frac{C_{1-\gamma}\mu e^{-\omega p}}{\gamma(2e^{\omega p}-1)} e^{\omega p+(2\mu-\omega)t} t^\gamma)[2(e^{\omega p}+\| A^{1-\gamma} \|)+1] \| \varphi \|_{\mathfrak{B}} \\
&\quad + \frac{C_{1-\gamma}\Gamma(\gamma)\omega^{1-\gamma}}{\omega-\mu e^{-\omega p}} \| F^\sigma(0) \|_{X_\gamma} \\
&\quad + \frac{C_{1-\gamma}\mu e^{-\omega p}}{\omega-\mu e^{-\omega p}} \| F^\sigma(0) \| [(\frac{\Gamma(\gamma)\mu}{\omega^\gamma(\omega-2\mu)} + \frac{e^{\omega p+(\mu e^{-\omega p}-\omega)t} t^\gamma}{\gamma(2e^{\omega p}-1)})].
\end{aligned}$$

Demonstração. Observando que $u(t,\varphi) = (S_{\mathfrak{B}}(t)\varphi)(0)$ é uma solução estrita, para $t > 0$ obtemos que

$$\begin{aligned}
\| u(t) \|_{X_\gamma} &\leq \| T(t)\varphi(0) \|_{X_\gamma} + \int_0^t \| T(t-s) \| \| F^\sigma(0)(s) \|_{X_\gamma} ds \\
&\quad + \int_0^t \| T(t-s) \| \| F^\sigma(u)(s) - F^\sigma(0)(s) \|_{X_\gamma} ds \\
&\leq C_0 e^{-wt} \| (-A)^{\gamma-1} \| \| A\varphi(0) \| + \| F^\sigma(0) \|_{X_\gamma} C_0 \int_0^t e^{-w(t-s)} ds \\
&\quad + C_0 [F]_{C_{Lip}} \int_0^t e^{-w(t-s)} (\| u(s) \|_{X_\gamma} + \| u^\sigma(s) \|) ds,
\end{aligned}$$

e, assim,

$$\begin{aligned}
e^{wt} \| u(t) \|_{X_\gamma} &\leq C_0 \| (-A)^{\gamma-1} \| \| A\varphi(0) \| + \| F^\sigma(0) \|_{X_\gamma} \frac{C_0}{\omega}(e^{wt}-1) \\
&\quad + \mu e^{-\omega p} \int_0^t e^{ws} \| u(s) \|_{X_\gamma} ds + \mu e^{-\omega p} \int_0^t e^{ws} \| u^\sigma(s) \| ds. \qquad (3.50)
\end{aligned}$$

Observando que $\| u^\sigma(s) \| \leq \| S(s)\varphi \|_{\mathfrak{B}}$, da Proposição 17 temos que

$$\begin{aligned}
&\mu e^{-\omega p} \int_0^t e^{ws} \| u^\sigma(s) \| ds \\
&\leq \mu e^{-\omega p}(C_0 e^{\omega p} \| \varphi \|_{\mathscr{C}} \int_0^t e^{\omega s} e^{(2\mu-\omega)s} ds + \frac{\| F^\sigma(0) \|}{\omega-2\mu} C_0 e^{\omega p} \int_0^t e^{\omega s}(1-e^{(2\mu-\omega)s}) ds) \\
&\leq C_0 \frac{e^{-\omega p}}{2} \| \varphi \|_{\mathscr{C}} (e^{2\mu t}-1) + \frac{\mu \| F^\sigma(0) \|}{\omega-2\mu} C_0 [(\frac{e^{\omega t}}{\omega} - \frac{e^{2\mu t}}{2\mu}) - (\frac{1}{\omega} - \frac{1}{2\mu})],
\end{aligned}$$

e usando está desigualdade em (3.50),

$$
\begin{aligned}
& e^{\omega t} \parallel u(t) \parallel_{X_\gamma} \\
\leq\ & C_0(\parallel (-A)^{\gamma-1} \parallel + \frac{e^{-\omega p}}{2}(e^{2\mu t}-1)) \parallel \varphi \parallel_{\mathfrak{B}} + \parallel F^\sigma(0) \parallel_{X_\gamma} \frac{C_0}{\omega}(e^{wt}-1) \\
& + \frac{\mu \parallel F^\sigma(0) \parallel}{\omega - 2\mu} C_0[(\frac{e^{\omega t}}{\omega} - \frac{e^{2\mu t}}{2\mu}) - (\frac{1}{\omega} - \frac{1}{2\mu})] + \mu e^{-\omega p} \int_0^t e^{ws} \parallel u(s) \parallel_{X_\gamma} ds \\
\leq\ & C_0(1 + \parallel (-A)^{\gamma-1} \parallel) \parallel \varphi \parallel_{\mathfrak{B}} e^{2\mu t} - \frac{\parallel F^\sigma(0) \parallel}{2(\omega - 2\mu)} C_0(e^{2\mu t}-1) \\
& + \frac{C_0}{\omega}(\parallel F^\sigma(0) \parallel_{X_\gamma} + \frac{\mu}{\omega - 2\mu} \parallel F^\sigma(0) \parallel)(e^{\omega t}-1) + \mu e^{-\omega p} \int_0^t e^{ws} \parallel u(s) \parallel_{X_\gamma} ds
\end{aligned}
$$

Do anterior e do Lema 10, segue que

$$
\begin{aligned}
& e^{\omega t} \parallel u(t) \parallel_{X_\gamma} \\
\leq\ & C_0(1 + \parallel (-A)^{\gamma-1} \parallel) \parallel \varphi \parallel_{\mathfrak{B}} e^{2\mu t} - \frac{\parallel F^\sigma(0) \parallel}{2(\omega - 2\mu)} C_0(e^{2\mu t}-1) \\
& + \frac{C_0}{\omega}(\parallel F^\sigma(0) \parallel_{X_\gamma} + \frac{\mu}{\omega - 2\mu} \parallel F^\sigma(0) \parallel)(e^{\omega t}-1) \\
& + \mu e^{-\omega p} \int_0^t C_0(1 + \parallel (-A)^{\gamma-1} \parallel) \parallel \varphi \parallel_{\mathfrak{B}} e^{2\mu s} e^{\mu e^{-\omega p}(t-s)} ds \\
& - \mu e^{-\omega p} \int_0^t \frac{\parallel F^\sigma(0) \parallel}{2(\omega - 2\mu)} C_0(e^{2\mu s}-1) e^{\mu e^{-\omega p}(t-s)} ds \\
& + \mu e^{-\omega p} \frac{C_0}{\omega} \int_0^t (\parallel F^\sigma(0) \parallel_{X_\gamma} + \frac{\mu}{\omega - 2\mu} \parallel F^\sigma(0) \parallel)(e^{\omega s}-1) e^{\mu e^{-\omega p}(t-s)} ds \\
=\ & C_0(1 + \parallel (-A)^{\gamma-1} \parallel) \parallel \varphi \parallel_{\mathfrak{B}} e^{2\mu t} - \frac{\parallel F^\sigma(0) \parallel}{2(\omega - 2\mu)} C_0(e^{2\mu t}-1) \\
& + \frac{C_0}{\omega}(\parallel F^\sigma(0) \parallel_{X_\gamma} + \frac{\mu}{\omega - 2\mu} \parallel F^\sigma(0) \parallel)(e^{\omega t}-1) \\
& + C_0(1 + \parallel (-A)^{\gamma-1} \parallel) \parallel \varphi \parallel_{\mathfrak{B}} \frac{(e^{2\mu t} - e^{\mu e^{-\omega p} t})}{2e^{\omega p} - 1} \\
& - \frac{\parallel F^\sigma(0) \parallel}{2(\omega - 2\mu)} C_0[\frac{(e^{2\mu t} - e^{\mu e^{-\omega p} t})}{2e^{\omega p} - 1} - (e^{\mu e^{-\omega p} t} - 1)] \\
& + \frac{C_0}{\omega}(\parallel F^\sigma(0) \parallel_{X_\gamma} + \frac{\mu \parallel F^\sigma(0) \parallel}{\omega - 2\mu})[\frac{\mu e^{-\omega p}}{\omega - \mu e^{-\omega p}}(e^{\omega t} - e^{\mu e^{-\omega p} t}) - (e^{\mu e^{-\omega p} t} - 1)],
\end{aligned}
$$

o que nos permite estabelecer a primeira desigualdade.

A segunda desigualdade segue usando que $\parallel u^\sigma(s) \parallel \leq \parallel S(s)\varphi \parallel_{\mathfrak{B}}$, Proposição 17, Proposição 18 e a desigualdade

$$
\begin{aligned}
\parallel AS(t)\varphi(0) \parallel \ \leq\ & C_0 e^{-\omega t} \parallel A\varphi(0) \parallel + C_{1-\gamma}\omega^{-\gamma}\Gamma(\gamma) \parallel F^\sigma(0) \parallel_\gamma \\
& + C_{1-\gamma} \int_0^t \frac{e^{-\omega(t-s)}}{(t-s)^{1-\gamma}} [F]_{C_{Lip}} (\parallel u(s) \parallel_\gamma + \parallel u^\sigma(s) \parallel) ds. \qquad (3.51)
\end{aligned}
$$

□

Usando os resultados anteriores, o Corolário 17 e a Proposição 31, temos o próximo corolário.

Corolário 18. Assuma que as condições na Proposição 18 e na Proposição 16 estão satisfeitas. Então o semigrupo $(S_{\mathfrak{B}}(t))_{t\geq 0}$ é limitado dissipativo, eventualmente compacto e, consequentemente, possui um atrator global $\mathscr{A}_{\mathfrak{B}}$ in $\mathfrak{B}$. Se $F^{\sigma}(0)=0$, então $\mathscr{A}_{\mathfrak{B}}=\{0\}$.

3.2.2 Boa colocação, dissipatividade e atratores em $\mathfrak{B}_{\gamma}$

Nesta seção, estudaremos a boa colocação e a existência de atratores relativa ao espaço $\mathfrak{B}_{\gamma}$, $\gamma\in(0,1)$. Com esse objetivo, assumiremos que $F\in L^{q}_{Lip}(X_{\gamma}\times X_{\gamma};X_{\theta})$ para algum $0\leq\theta\leq\gamma\leq 1$, o que é uma condição mais fraca do que a utilizada no caso do espaço $\mathfrak{B}$, permitindo incluir uma extensiva variedade de funções.

Para simplificar o enunciado dos próximos resultados, introduzimos a condição a seguir.

$\mathscr{H}_2$ As condições $H^{0,q}_{F,0,0}$, $H^{\theta,q}_{F,\gamma,\gamma}$, $H^{r}_{\sigma,0}$ e $\mathfrak{H}^{0,q}_{F,0,0}$ estão satisfeitas com $0<\theta\leq\gamma\leq 1$ e $\Theta(q,r)<1$, o semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ é compacto e a condição (3.21) está verificada.

3.2.2.1 Boa colocação relativa ao espaço $\mathfrak{B}_{\gamma}$

Se a condição $\mathscr{H}_2$ está verificada, da Proposição 12 temos que para cada $\varphi\in\mathfrak{B}_{\gamma}\subset\mathfrak{B}$ existe uma única solução estrita $u(\cdot,\varphi)$ de (3.5)-(3.6) definida em $[-p,\infty)$. Além disso, do Corolário 10, para todo $\psi\in\mathscr{C}$ existe uma solução fraca $v(\cdot,\psi)\in C([-p,\infty);X)$ de (3.5) com condição inicial $\psi(\cdot)$.

Lema 15. Suponha que a condição $\mathscr{H}_2$ esteja satisfeita e $\gamma<\frac{1}{q'}$. Então existe funções contínuas não decrescentes $\mathscr{G}_i\in C([0,\infty);[0,\infty))$, $i=1,\ldots,4$, independentes de $\varphi\in\mathfrak{B}_{\gamma}$, tais que

$$\| u(\cdot,\varphi)\|_{C([-p,t];X)}\leq\mathscr{G}_1(t)\|\varphi\|_{\mathscr{C}}+\mathscr{G}_2(t), \tag{3.52}$$

$$\| u(\cdot,\varphi)\|_{C([-p,t];X_{\gamma})}\leq\mathscr{G}_3(t)\|\varphi\|_{\mathscr{C}_{\gamma}}+\mathscr{G}_4(t), \tag{3.53}$$

para todo $\varphi\in\mathfrak{B}_{\gamma}$. Mais ainda, se $0<1-\theta<\frac{1}{q'}$, então existem funções contínuas não decrescentes $\mathscr{G}_5:[0,\infty)\times[0,\infty)\mapsto[0,\infty)$ e $\mathscr{G}_6:[0,\infty)\mapsto[0,\infty)$, independentes de $\varphi\in\mathfrak{B}_{\gamma}$, tais que $\mathscr{G}_5(t_1,x_1)\leq\mathscr{G}_5(t_2,x_2)$ se $t_1\leq t_2$ e $x_1\leq x_2$, e

$$\max\{\| Au(\cdot,\varphi)\|_{C([0,t];X)},[u(\cdot,\varphi)]_{C_{Lip}([0,t];X)}\}\leq\mathscr{G}_5(t,\|\varphi\|_{\mathfrak{B}_{\gamma}})+\mathscr{G}_6(t), \tag{3.54}$$

para todo $\varphi\in\mathfrak{B}_{\gamma}$ e $t\geq 0$.

Demonstração. A prova segue combinando as provas do Lema 12 e Lema 13. A prova de (3.52) é direta. A prova de (3.53) segue da estimativa (3.34) observando que $C_0\|(-A)^{\gamma}\varphi(0)\|\leq C_0\|$

$\varphi \|_{\mathscr{C}_\gamma}$. Mais ainda, procedendo como na prova do Lema 13, usando (3.53), a condição $H^{\theta,q}_{F,\gamma,\gamma}$ e observando que

$$\begin{aligned}
&\| F^\sigma(u)(s) - F^\sigma(0)(s) \|_\theta \\
&\quad \leq \mathscr{W}_F(\max\{\| u \|_{C([0,s];X_\gamma)}, \| u^\sigma \|_{C([0,s];X_\gamma)}\})(\| u \|_{C([0,s];X_\gamma)} + \| u^\sigma \|_{C([0,s];X_\gamma)}) \\
&\quad \leq \mathscr{W}_F(2(\mathscr{G}_3(t) \| \varphi \|_{\mathscr{C}_\gamma} + \mathscr{G}_4(t)))2(\mathscr{G}_3(t) \| \varphi \|_{\mathscr{C}_\gamma} + \mathscr{G}_4(t)), \quad \forall s > 0, \qquad (3.55)
\end{aligned}$$

para $t \geq 0$ obtemos

$$\begin{aligned}
&\| Au(t,\varphi) \| \\
&\leq C_0 \| A\varphi(0) \| + \int_0^t \| (-A)^{1-\theta} T(t-s) \| \| (-A)^\theta F^\sigma(0)(s) \| ds \\
&\quad + \int_0^t (-A)^{1-\theta} T(t-s) \| \| (-A)^\theta F^\sigma(u)(s) - (-A)^\theta F^\sigma(0)(s) \| ds \\
&\leq C_0 \| \varphi \|_{\mathfrak{B}_\gamma} + \int_0^t \frac{C_{0,1-\theta}}{(t-s)^{1-\theta}} \| F^\sigma(0)(s) \|_\theta ds \\
&\quad + \int_0^t \frac{C_{0,1-\theta}[F]_{(s,s)}}{(t-s)^{1-\theta}} \mathscr{W}_F(2(\mathscr{G}_3(s) \| \varphi \|_{\mathscr{C}_\gamma} + \mathscr{G}_4(s)))2(\mathscr{G}_3(s) \| \varphi \|_{\mathscr{C}_\gamma} + \mathscr{G}_4(s)) ds \\
&\leq C_0 \| \varphi \|_{\mathfrak{B}_\gamma} + \| F^\sigma(0) \|_{C([0,t];X_\theta)} C_{0,1-\theta} \frac{t^\theta}{\theta} \\
&\quad + \mathscr{W}_F(2(\mathscr{G}_3(t) \| \varphi \|_{\mathscr{C}_\gamma} + \mathscr{G}_4(t)))2(\mathscr{G}_3(t) \| \varphi \|_{\mathscr{C}_\gamma} + \mathscr{G}_4(t)) C_{0,1-\theta} \int_0^t \frac{[F]_{(s,s)}}{(t-s)^{1-\theta}} ds,
\end{aligned}$$

o que implica (3.54) utilizando (3.37). □

O resultado a seguir está relacionado com a boa colocação de (3.5)-(3.6) relativo ao espaço $\mathfrak{B}_\gamma$.

Teorema 4. Assuma que as condições $\mathscr{H}_2$ and $H^r_{\sigma,\gamma}$ estão satisfeitas com $\theta > 0$, $\max\{\gamma, 1-\theta\} < \frac{1}{q'}$ e $\gamma < 1 - \Theta(q,r)$. Então, para todo $a > 0$ e $l > 0$ existe uma função $\mathscr{G}_7 : [0,\infty) \times [0,\infty) \times [0,\infty) \mapsto [0,\infty)$ tal que $\mathscr{G}_7(x_1,y_1,z_1) \leq \mathscr{G}_7(x_2,y_2,z_2)$ se $x_1 \leq x_2$, $y_1 \leq y_2$ e $z_1 \leq z_2$, e

$$\| u(\cdot,\varphi) - v(\cdot,\psi) \|_{C([0,t];X_\gamma)} \leq \mathscr{G}_7(\| \varphi \|_{\mathfrak{B}_\gamma}, [\varphi]_{C_{Lip}([-p,0];X)}, \| \psi \|_{\mathscr{C}_\gamma}) \| \varphi - \psi \|_{\mathscr{C}_\gamma}, \qquad (3.56)$$

para todo $t \in [0,a]$, $\varphi \in B_l(0,\mathfrak{B}_\gamma)$, $\psi \in B_l(0,\mathscr{C}_\gamma)$ e toda solução fraca $v(\cdot,\psi) \in C([-p,\infty);X)$ de (3.5) com condição inicial ψ. Mais ainda, o problema (3.5)-(3.6) está bem posto relativa ao espaço $\mathfrak{B}_\gamma$.

Demonstração. Sejam $a > 0$, $l > 0$, $\mu = \Lambda(q,r)$ (veja observação 2), e $\mathscr{G}_i(\cdot)$, $i = 1,\ldots,6$ as funções no Lema 15. Adicionalmente, defina as funções

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathscr{W}_L}(t,\varphi,\psi) &= W_L(\mathscr{G}_1(t)(\| \varphi \|_{\mathscr{C}} + \| \psi \|_{\mathscr{C}}) + \mathscr{G}_2(t)), \quad L = F, \sigma, t \geq 0, \\
\widehat{\mathscr{W}_{F,\sigma}}(\cdot,\varphi) &= \widehat{\mathscr{W}_F}(\cdot,\varphi)(1 + \widehat{\mathscr{W}_\sigma}(\cdot,\varphi)).
\end{aligned}$$

Da prova do Lema 15 podemos ver que $\| u(\cdot,\varphi) \|_{C([-p,t];X)} \leq \mathscr{G}_1(t) \| \varphi \|_{\mathscr{C}} + \mathscr{G}_2(t)$ para todo $t \geq 0$ e $\psi \in B_l(0,\mathscr{C}_\gamma)$. Usando está desigualdades e procedendo como na observação 9, para $0 \leq s \leq a$ vemos que

$$\| u^\sigma(s) - v^\sigma(s) \| \leq S_2(\varphi)(s)(1+\widehat{\mathscr{W}_\sigma}(a,\varphi,\psi))(1+[\sigma]_{(s,s)})(\| \varphi - \psi \|_{\mathscr{C}} + \| u - v \|_{C([0,s])}),$$

onde $S_2(\varphi)(s) := (1+([\varphi]_{C_{Lip}([-p,0];X)} + \mathscr{G}_5(s,\| \varphi \|_{\mathfrak{B}_\gamma}) + \mathscr{G}_6(s))$.

Observando que para $0 \leq c \leq t$

$$\sup_{c\leq s\leq t} \int_c^s \frac{[F]_{(\tau,\tau)}}{(s-\tau)^\gamma}(1+[\sigma]_{(\tau,\tau)})d\tau \leq \frac{(t-c)^{\frac{1}{\mu}-\gamma}}{(1-\gamma\mu)^{\frac{1}{\mu}}} \| [F]_{(\cdot,\cdot)} \|_{L^q([c,t])} \| (1+[\sigma]_{(\cdot,\cdot)}) \|_{L^r([c,t])},$$

e definindo

$$\Lambda(s,t,\varphi,\psi) := 2C_{0,\gamma}(1+\| (-A)^{-\gamma} \|)S_2(\varphi)(a)(1+\widehat{\mathscr{W}_{F,\sigma}}(a,\varphi,\psi)) \int_c^s \frac{[F]_{(\tau,\tau)}}{(s-\tau)^\gamma}(1+[\sigma]_{(\tau,\tau)})d\tau,$$

podemos selecionar $0 < \delta \leq a$ tal que $\Lambda(s,t,\varphi,\psi) < \frac{1}{2}$, para todo $c \in [0,a]$, $\varphi \in B_l(0,\mathfrak{B}_\gamma)$ e $\psi \in B_l(0,\mathscr{C}_\gamma)$.

Usando as notações acima e a condição $H^{0,q}_{F,0,0}$, para $t \in [0,\delta]$, $\varphi \in B_l(0,\mathfrak{B}_\gamma)$ e $\psi \in B_l(0,\mathscr{C}_\gamma)$ obtemos que

$$\begin{aligned}
&\| u(t,\varphi) - v(t,\psi) \|_{X_\gamma} \\
&\leq C_0 \| \varphi - \psi \|_{\mathscr{C}_\gamma} + \int_0^t \| (-A)^\gamma T(t-s) \| \| F^\sigma(u)(s) - F^\sigma(v)(s) \| ds \\
&\leq C_0 \| \varphi - \psi \|_{\mathscr{C}_\gamma} + C_{0,\gamma} \int_0^t \frac{[F]_{(s,s)}}{(t-s)^\gamma} \widehat{\mathscr{W}_F}(s,\varphi,\psi)(\| u(s) - v(s) \| + \| u^\sigma(s) - v^\sigma(s) \|)ds \\
&\leq C_0 \| \varphi - \psi \|_{\mathscr{C}_\gamma} + C_{0,\gamma}\widehat{\mathscr{W}_F}(t,\varphi,\psi) \int_0^t \frac{[F]_{(s,s)}}{(t-s)^\gamma} \| u - v \|_{C([0,s];X)} ds \\
&\quad + C_{0,\gamma}\widehat{\mathscr{W}_{F,\sigma}}(t,\varphi,\psi)S_2(\varphi)(t) \int_0^t \frac{[F]_{(s,s)}}{(t-s)^\gamma}(1+[\sigma]_{(s,s)}) \| \varphi - \psi \|_{\mathscr{C}} ds \\
&\quad + C_{0,\gamma}\widehat{\mathscr{W}_{F,\sigma}}(t,\varphi,\psi)S_2(\varphi)(t) \int_0^t \frac{[F]_{(s,s)}}{(t-s)^\gamma}(1+[\sigma]_{(s,s)}) \| u - v \|_{C([0,s];X)},
\end{aligned} \tag{3.57}$$

o que implica que

$$\| u(t,\varphi) - v(t,\psi) \|_{X_\gamma} \leq [C_0 + \Lambda(0,t,\varphi,\psi)] \| \varphi - \psi \|_{\mathscr{C}_\gamma} + \Lambda(0,t,\varphi,\psi) \| u - v \|_{C([0,t];X_\gamma)},$$

e

$$\| u(\cdot,\varphi) - v(\cdot,\psi) \|_{C([0,t];X_\gamma)} \leq (C_0 + \Lambda(0,a,\varphi,\psi)) \| \varphi - \psi \|_{\mathscr{C}_\gamma} + \frac{1}{2} \| u - v \|_{C([0,t];X_\gamma)}. \tag{3.58}$$

Do anterior, obtemos que

$$\| u(\cdot,\varphi) - v(\cdot,\psi) \|_{C([0,t];X_\gamma)} \leq 2(C_0 + \Lambda(0,a,\varphi,\psi)) \| \varphi - \psi \|_{\mathscr{C}_\gamma}, \quad \forall t \in [0,\delta].$$

Procedendo como acima e observando que a desigualdade (3.57) está satisfeita para todo $t \in [0,a]$, para $0 \leq s \leq t$, para $t \in [\delta, 2\delta]$ podemos ver que

$$
\begin{aligned}
&\| u(t,\varphi) - v(t,\psi) \|_{X_\gamma} \\
&\leq [C_0 + \Lambda(0,a,\varphi,\psi)] \| \varphi - \psi \|_{\mathscr{C}_\gamma} + \Lambda(0,\delta,\varphi,\psi) \| u - v \|_{C([0,\delta];X_\gamma)} \\
&\quad + \Lambda(\delta,t,\varphi,\psi) \| u - v \|_{C([0,t];X_\gamma)} \\
&\leq [C_0 + \Lambda(0,a,\varphi,\psi)] \| \varphi - \psi \|_{\mathscr{C}_\gamma} + \Lambda(0,a,\varphi,\psi) 2(C_0 + \Lambda(0,a,\varphi,\psi)) \| \varphi - \psi \|_{\mathscr{C}_\gamma} \\
&\quad + \Lambda(\delta,t,\varphi,\psi) \| u - v \|_{C([0,t];X_\gamma)} \\
&\leq 2[C_0 + \Lambda(0,a,\varphi,\psi)]^2 \| \varphi - \psi \|_{\mathscr{C}_\gamma} + \frac{1}{2} \| u - v \|_{C([0,t];X_\gamma)},
\end{aligned}
$$

o que nos permite obter que

$$
\| u - v \|_{C([0,t];X_\gamma)} \leq 2^2 [C_0 + \Lambda(0,a,\varphi,\psi)]^2 \| \varphi - \psi \|_{\mathscr{C}_\gamma}, \quad \forall t \in [0, 2\delta].
$$

para todo $t \in [0,2\delta]$ desde que $C_0 \geq 1$. Procedendo como acima, obtemos que

$$
\| u - v \|_{C([0,k\delta];X_\gamma)} \leq 2^k [C_0 + \Lambda(0,a,\varphi,\psi)]^k \| \varphi - \psi \|_{\mathscr{C}_\gamma},
$$

para todo $t \in [0,k\delta]$, $\varphi \in B_l(0,\mathfrak{B}_\gamma)$ e $\psi \in B_l(0,\mathscr{C}_\gamma)$. Da desigualdade anterior e definição de $\Lambda(0,a,\varphi,\psi)$ obtemos (3.56).

Para mostrar que o problema (3.5)-(3.6) está bem colocado relativo ao espaço $\mathfrak{B}_\gamma$, precisamos estimar o termo $\| Au(t,\varphi) - Au(t,\psi) \|$. Por conveniência, para $t \in [0,a]$ e $\psi \in B_l(\varphi,\mathfrak{B}_\gamma)$ a seguir usamos a notação $\widehat{\mathscr{W}_F^\gamma}(t,\varphi,\psi) = W_F(\mathscr{G}_3(t)(\| \varphi \|_{\mathscr{C}_\gamma} + \| \psi \|_{\mathscr{C}_\gamma}) + \mathscr{G}_4(t))$.

Usando a condição $H^{\theta,q}_{F,\gamma,\gamma}$ e (3.56), para $t \in [0,a]$ vemos que

$$
\begin{aligned}
&\| Au(t,\varphi) - Av(t,\psi) \| \\
&\leq \| T(t)(A\varphi(0) - A\psi(0)) \| + \int_0^t \| (-A)^{1-\theta} T(t-s) \| \| F^\sigma(u)(s) - F^\sigma(v)(s) \|_\theta \, ds \\
&\leq C_0 \| \varphi - \psi \|_{\mathfrak{B}_\gamma} + C_{1-\theta} \int_0^t \frac{[F]_{(s,s)}}{(t-s)^{1-\theta}} \widehat{\mathscr{W}}^\gamma_F(s,\varphi,\psi) \| u - v \|_{C([0,s];X_\gamma)} \, ds \\
&\quad + C_{1-\theta} \int_0^t \frac{[F]_{(s,s)}}{(t-s)^{1-\theta}} \widehat{\mathscr{W}}^\gamma_F(s,\varphi,\psi) \| u^\sigma - v^\sigma \|_{C([0,s];X_\gamma)} \, ds \\
&\leq C_0 \| \varphi - \psi \|_{\mathfrak{B}_\gamma} \\
&\quad + C_{1-\theta} \widehat{\mathscr{W}}^\gamma_F(a,\varphi,\psi) \int_0^t \frac{[F]_{(s,s)}}{(t-s)^{1-\theta}} \mathscr{G}_7(s, \| \varphi \|_{\mathfrak{B}_\gamma}, [\varphi]_{C_{Lip}([-p,0];X)}, \| \psi \|_{\mathscr{C}_\gamma}) \| \varphi - \psi \|_{\mathscr{C}_\gamma} \, ds \\
&\quad + C_{1-\theta} \widehat{\mathscr{W}}^\gamma_F(a,\varphi,\psi) \int_0^t \frac{[F]_{(s,s)}}{(t-s)^{1-\theta}} ds \| u^\sigma - v^\sigma \|_{C([0,a];X_\gamma)} \\
&\leq \Lambda_1 \| \varphi - \psi \|_{\mathfrak{B}_\gamma} + \Lambda_2 \| u^\sigma - v^\sigma \|_{C([0,a];X_\gamma)} \\
&\leq \Lambda_1 \| \varphi - \psi \|_{\mathfrak{B}_\gamma} + \Lambda_2 \| u(\cdot - \sigma(\cdot, v_{(\cdot)})) - v(\cdot - \sigma(\cdot, v_{(\cdot)})) \|_{C([-p,a];X_\gamma)} \\
&\quad + \Lambda_2 \| u(\cdot - \sigma(\cdot, u_{(\cdot)})) - u(\cdot - \sigma(\cdot, v_{(\cdot)})) \|_{C([-p,a];X_\gamma)} \\
&\leq \Lambda_1 \| \varphi - \psi \|_{\mathfrak{B}_\gamma} + \Lambda_2 \mathscr{G}_7(a, \| \varphi \|_{\mathfrak{B}_\gamma}, [\varphi]_{C_{Lip}([-p,0];X)}, \| \psi \|_{\mathscr{C}_\gamma}) \| \varphi - \psi \|_{\mathscr{C}_\gamma} \\
&\quad + \Lambda_2 \| u(\cdot - \sigma(\cdot, u_{(\cdot)})) - u(\cdot - \sigma(\cdot, v_{(\cdot)})) \|_{C([0,a];X_\gamma)} \\
&\leq \Lambda_3 \| \varphi - \psi \|_{\mathfrak{B}_\gamma} \\
&\quad + \Lambda_2 \| u(\cdot - \sigma(\cdot, u_{(\cdot)})) - u(\cdot - \sigma(\cdot, v_{(\cdot)})) \|_{C([-p,a];X_\gamma)},
\end{aligned} \tag{3.59}
$$

onde Λ_i, $i = 1,2,3$, são independentes de $\psi \in B_l(\varphi, \mathfrak{B}_\gamma)$. Observando que $\sigma \in C([0,a] \times \mathscr{C}_\gamma; [-p,0])$, temos que $\sigma(s, v_s) \to \sigma(s, u_s)$ quando $\psi \to \varphi$ em $\mathfrak{B}_\gamma$ uniformemente para $s \in [0,a]$, o que implica que

$$
\| u(\cdot - \sigma(\cdot, u_{(\cdot)})) - u(\cdot - \sigma(\cdot, v_{(\cdot)})) \|_{C([0,a];X_\gamma)} \to 0 \quad \text{quando } \psi \to \varphi \text{ em } \mathfrak{B}_\gamma. \tag{3.60}
$$

Finalmente, de (3.59) e (3.60), obtemos que $\| Au(t,\varphi) - Au(t,\psi) \| \to 0$ quando $\psi \to \varphi$ em $\mathfrak{B}_\gamma$, o que implica $\| u_t(\cdot,\varphi) - u_t(\cdot,\psi) \|_{\mathfrak{B}_\gamma} \to 0$ quando $\psi \to \varphi$ em $\mathfrak{B}_\gamma$ e completa a demonstração. □

A seguir, $S_{\mathfrak{B}_\gamma} : [0,+\infty) \times \mathfrak{B}_\gamma \to \mathfrak{B}_\gamma$ é a aplicação definida por $S_{\mathfrak{B}_\gamma}(t)\varphi = u_t(\cdot,\varphi)$. Dos resultados anteriores, obtemos o corolário a seguir.

Corolário 19. Se as condições no Teorema 4 estão satisfeitas, então $S_{\mathfrak{B}_\gamma} : [0,\infty) \times \mathfrak{B}_\gamma \to \mathfrak{B}_\gamma$ é contínuo.

Demonstração. Seja $(t,\varphi) \in [0,\infty) \times \mathfrak{B}_\gamma$. Então, para $(s,\psi) \in [0,\infty) \times \mathfrak{B}_\gamma$ temos que

$$
\begin{aligned}
\| S_{\mathfrak{B}}(t)\varphi - S_{\mathfrak{B}}(s)\psi \|_{\mathfrak{B}_\gamma} &= \| u_t(\cdot,\varphi) - u_s(\cdot,\psi) \|_{\mathscr{C}_\gamma} + \| Au(t,\varphi) - Au(s,\psi) \| \\
&\leq \| u_t(\cdot,\varphi) - u_s(\cdot,\varphi) \|_{\mathscr{C}_\gamma} + \| u_s(\cdot,\varphi) - u_s(\cdot,\psi) \|_{\mathscr{C}_\gamma} \\
&\quad + \| Au(s,\psi) - Au(s,\varphi) \| + \| Au(s,\varphi) - Au(t,\varphi) \|,
\end{aligned}
$$

o que permite finalizar a prova usando o Teorema 4 e o fato que $u(\cdot,\varphi)$ é uma solução estrita. $\square$

3.2.2.2 Compacidade de $S_{\mathfrak{B}_\gamma}(t)$ em $\mathfrak{B}_\gamma$

A seguir, estudamos a compacidade do família de aplicações $(S_{\mathfrak{B}_\gamma}(t))_{t\geq 0}$.

Proposição 19. Se a condição $\mathscr{H}_2$ está verificada, $\theta > 0$ e $(1-\theta) < \frac{1}{q'}$ e o semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ é compacto. Então $S_{\mathfrak{B}_\gamma}(t)$ é compacto definido de $\mathfrak{B}_\gamma$ em $\mathfrak{B}_\gamma$ para todo $t > p$.

Demonstração. Sejam $t > p$, $l > 0$ e $B := B_l(0,\mathfrak{B}_\gamma)$. Do Lema 15, temos que $\| u(\cdot,\psi) \|_{C([0,t];X_\gamma)} \leq \rho_l(t) := \mathscr{G}_3(t)l + \mathscr{G}_4(t)$ para todo $\psi \in B$, $\| (-A)^\theta F^\sigma(u(\cdot,\psi))(s) \| \leq \mathscr{W}_F(\rho_l(t))[F]_{(s,s)}\rho_l(t) + \| F^\sigma(0)(s) \|_\theta$ para todo $s \in [0,t]$. Consequentemente, o conjunto de funções $\{(-A)^\theta F^\sigma(u(\cdot,\psi)) : \psi \in B\}$ é limitado em $L^q([0,t];X)$.

Do anterior e da última afirmação no Lema 17, é fácil ver o conjunto de funções

$$\{\tau \mapsto \int_0^\tau T(\tau-s)(-A)^\theta F^\sigma(u(\cdot,\varphi))(s)ds : \varphi \in B\}$$

é limitado em $C^{\frac{1}{q'}-(1-\theta)}([0,t];X_{1-\theta})$ e observando que

$$AS_{\mathfrak{B}_\gamma}(t)(\tau) = T(t+\tau)A\varphi(0) + (-A)^{1-\theta}\int_0^{t+\tau} T(t+\tau-s)(-A)^\theta F^\sigma(u(\cdot,\varphi))(s)ds,$$

para $\tau \in [-p,0]$, podemos obter que $\{AS_{\mathfrak{B}_\gamma}(t)\varphi : \varphi \in B\}$ é equicontínuo em $C([-p,0];X)$, o que implica que $\{S_{\mathfrak{B}_\gamma}(t)\varphi : \varphi \in B\}$ é um subconjunto equicontínuo de $\mathfrak{B}_\gamma$.

Seja $s \in [t-p,t]$. Para $\varphi \in B$ e $0 < \varepsilon < s$, vemos que

$$\begin{aligned}
&\int_0^{s-\varepsilon} \| (-A)^{1-\theta}T(s-\varepsilon-\tau)(-A)^\theta F^\sigma(u)(\tau) \| \, d\tau \\
&\leq \int_0^{s-\varepsilon} \frac{C_{1-\theta}}{(s-\varepsilon-\tau)^{1-\theta}} \left(\mathscr{W}_F(\rho_l(t))[F]_{(\tau,\tau)}\rho_l(t) + \| F^\sigma(0)(\tau) \|_\theta\right) d\tau \\
&\leq R_1(t) := \tilde{\rho}_l(t)\frac{t^{\frac{1}{q'}-(1-\theta)}}{[1-(1-\theta)q']^{\frac{1}{q'}}}, \\
&\int_{s-\varepsilon}^{s} \|(-A)^{1-\theta}T(s-\tau)(-A)^\theta F^\sigma(u)(\tau)\| d\tau \\
&\leq R_2(t,\varepsilon) := \tilde{\rho}_l(t)\frac{\varepsilon^{\frac{1}{q'}-(1-\theta)}}{[1-(1-\theta)q']^{\frac{1}{q'}}},
\end{aligned}$$

onde $\tilde{\rho}_l(t) := C_{1-\theta}\left(\mathscr{W}_F(\rho_l(t))\rho_l(t)\| [F]_{(\cdot,\cdot)} \|_{L^q([0,t])} + \| F^\sigma(0)(\cdot) \|_{L^q([0,t];X_\theta)}\right)$. Usando o anterior e procedendo como na parte final da prova da Proposição 16, obtemos que o conjunto $\{S_{\mathfrak{B}_\gamma}(t)(\varphi)(\tau) : \varphi \in B\}$ é relativamente compacto em X_1 para todo $\tau \in [-p,0]$.

Das observações acima e do Critério de Arzela-Ascoli, obtemos que o conjunto de funções $S_{\mathfrak{B}_\gamma}(t)B$ é relativamente compacto no espaço $\mathfrak{C}_\gamma := \{\psi \in C([-p,0];X_\gamma) : \psi(0) \in D(A)\}$ munido da norma $\| \varphi \|_{\mathfrak{C}_\gamma} = \| \varphi \|_{C([-p,0];X_\gamma)} + \| A\varphi(0) \|$. Assim, se $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequencia

em B, existe $\psi \in \mathfrak{C}_\gamma$ tal que $\| u(\cdot,\varphi_n) - \psi \|_{\mathfrak{C}_\gamma} \to 0$ quando $n \to \infty$. Por outro lado, do Lema 15 (veja (3.54)), temos que $\sup_{n\in\mathbb{N}}[u(\cdot,\varphi)]_{C_{Lip}([-p,t];X)} < \infty$ o que implica que $\psi \in C_{Lip}([-p,0];X)$ e nos permite concluir que $S_{\mathfrak{B}_\gamma}(t)B$ é relativamente compacto em $\mathfrak{B}_\gamma$. O que completa a prova. □

3.2.2.3 O problema autônomo, dissipatividade e atrator global em $\mathfrak{B}_\gamma$

Para estabelecer os resultados desta seção, introduzimos a próxima condição.

$\mathscr{H}_{2,\mathrm{A}}$: $0 < \gamma \leq 1$, $F \in C_{Lip}(X \times X;X) \cap C_{Lip}(X_\gamma \times X_\gamma;X_\gamma)$, a condição $\mathrm{H}_{T,\omega}$ está satisfeita, $\sigma \in C_{Lip}(\mathscr{C};[0,p])$, e $2\mu < \omega$, onde $\mu := C_0[F]_{C_{Lip}}e^{\omega p}$ e $[F]_{C_{Lip}}$ é a constante de Lipschitz de F em ambos espaços $C_{Lip}(X \times X;X)$ e $C_{Lip}(X_\gamma \times X_\gamma;X_\gamma)$.

Procedendo como na prova da Proposição 18, podemos provar o resultado a seguir.

Proposição 20. Se a condição $\mathscr{H}_{2,\mathrm{A}}$ está satisfeita, então

$$\| S_{\mathfrak{B}_\gamma}(t)\varphi \|_{\mathfrak{B}_\gamma} \leq C_0 e^{\omega p + (2\mu-\omega)t} \| \varphi \|_{\mathfrak{B}_\gamma} + \| F^\sigma(0) \|_\gamma \frac{C_0 e^{\omega p}}{\omega - 2\mu}(1 - e^{(2\mu-\omega)t}), \forall \varphi \in \mathfrak{B}_\gamma, t > 0.$$

Demonstração. Seja $t \geq 0$, então para $\theta \in [-p,0]$ obtemos que

$$\begin{aligned}
\| S_{\mathfrak{B}_\gamma}(t)\varphi(\theta) \|_{X_\gamma} &\leq C_0 e^{-\omega(t+\theta)} \| \varphi \|_{\mathscr{C}_\gamma} + \int_0^{t+\theta} C_0 e^{-\omega(t+\theta-s)} \| F(u(s,\varphi),u^\sigma(s,\varphi)) \|_{X_\gamma} ds \\
&\leq C_0 e^{\omega p} e^{-\omega t} \| \varphi \|_{\mathscr{C}_\gamma} \\
&\quad + C_0 e^{\omega p} e^{-\omega t} \int_0^{t+\theta} e^{\omega s}(2[F]_{C_{Lip}} \| S_{\mathfrak{B}_\gamma}(s)\varphi \|_{C([-p,0];X_\gamma)} + \| F^\sigma(0) \|_{X_\gamma}) ds \\
&\leq C_0 e^{\omega p} e^{-\omega t} \| \varphi \|_{\mathscr{C}_\gamma} + C_0 e^{\omega p} \| F^\sigma(0) \|_{X_\gamma} e^{-\omega t} \int_0^t e^{\omega s} ds \\
&\quad + 2C_0 e^{\omega p}[F]_{C_{Lip}} e^{-\omega t} \int_0^t e^{\omega s} \| S_{\mathfrak{B}_\gamma}(s)\varphi \|_{C([-p,0];X_\gamma)} ds,
\end{aligned}$$

o que implica que

$$\begin{aligned}
e^{\omega t} \| S_{\mathfrak{B}_\gamma}(t)\varphi \|_{C([-p,0];X_\gamma)} &\leq C_0 e^{\omega p} \| \varphi \|_{C([-p,0];X_\gamma)} + \frac{C_0}{\omega} \| F^\sigma(0) \|_{X_\gamma} e^{\omega p}(e^{\omega t} - 1) \\
&\quad + 2\mu \int_0^t e^{\omega s} \| S_{\mathfrak{B}_\gamma}(s)\varphi \|_{C([-p,0];X_\gamma)} ds,
\end{aligned}$$

para $t \geq 0$ e permite finalizar a demonstração utilizando a desigualdade de Gronwall. □

A seguir, Γ denota a função Gama. Em relação à dissipatividade, temos o resultado a seguir.

Proposição 21. Assuma que a condição $\mathscr{H}_{2,\mathrm{A}}$ esteja verificada. Então

$$\begin{aligned}
\| AS_{\mathfrak{B}_\gamma}(t)\varphi(0) \| &\leq (C_0 e^{-\omega t} + 2\mu C_{1-\gamma}\gamma^{-1} t^\gamma e^{(2\mu-\omega)t}) \| \varphi \|_{\mathfrak{B}_\gamma} \\
&\quad + C_{1-\gamma} \| F^\sigma(0) \|_{X_\gamma} [\frac{\Gamma(\gamma)}{\omega^\gamma} + \frac{2\mu}{\gamma(\omega - 2\mu)} t^\gamma (1 - 2\mu e^{(2\mu-\omega)t})],
\end{aligned}$$

para todo $t > 0$ e $\varphi \in \mathfrak{B}_\gamma$.

Demonstração. O resultado segue usando a Proposição 20 observando que

$$\begin{aligned} \| AS_{\mathfrak{B}_\gamma}(t)\varphi(0) \| &\leq C_0 e^{-\omega t} \| A\varphi(0) \| + C_{1-\gamma}\omega^{-\gamma}\Gamma(\gamma) \| F^\sigma(0) \|_\gamma \\ &\quad + 2C_{1-\gamma}[F]_{C_{Lip}} \int_0^t \frac{e^{-\omega(t-s)}}{(t-s)^{1-\gamma}} \| S_{\mathfrak{B}_\gamma}(s)\varphi \|_{\mathfrak{B}_\gamma} ds, \quad \forall t > 0. \end{aligned}$$

□

O próximo resultado segue combinando a Proposição 19, a Proposição 20 e a Proposição 21.

Corolário 20. Assuma que a condição $\mathscr{H}_{2,\mathrm{A}}$ esteja satisfeitas e $\gamma > 0$. Então semigrupo $(S_{\mathfrak{B}_\gamma}(t))_{t\geq 0}$ possui um atrator global $\mathscr{A}_{\mathfrak{B}_\gamma}$ em $\mathfrak{B}_\gamma$. Mais ainda, se $F^\sigma(0) = 0$, então $\mathscr{A}_{\mathfrak{B}_\gamma} = \{0\}$.

3.2.3 Atrator global em $\mathscr{C} = C([-p,0];X)$

Nesta seção, usando os resultados nas seções 3.2.1.3 e 3.2.2.3, estudaremos a existência de atrator para o problema (3.48)-(3.49) no espaço $\mathscr{C}$. Este problema é diferente do estudado nas seções citadas pois $(S_{\mathscr{C}}(t))_{t\geq 0}$ é (possivelmente) uma família de aplicações multivaloradas em $\mathscr{C}$. Por simplicidade, nesta seção assumiremos que o semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ é compacto e que $F \in C_{Lip}(X \times X; X)$ e $\sigma(\cdot) \in C_{Lip}(\mathscr{C}; [0,p])$, o que implica que as condições no Corolário 9 e no Corolário 11 estão satisfeitas, e que para todo $\varphi \in \mathscr{C}$ existe uma solução fraca $u(\cdot,\varphi)$ de (3.48)-(3.49) definida em $[-p,\infty)$. A seguir, para $\varphi \in \mathscr{C}$ e $\mathscr{D} \subset \mathscr{C}$ definimos os conjuntos

$$\begin{aligned} X(\varphi) &= \{u(\cdot,\varphi) : u(\cdot,\varphi) \text{ é uma solução fraca de (3.48)-(3.49) }\}, \\ S_{\mathscr{C}}(t)\varphi &= \{u_t(\cdot) : u \in X(\varphi)\}, \quad S_{\mathscr{C}}(t)\mathscr{D} = \cup_{\varphi\in\mathscr{D}} S_{\mathscr{C}}(t)\varphi. \end{aligned} \tag{3.61}$$

Procedendo como na prova de (CARABALLO; MARÍN-RUBIO; VALERO, 2005, lema 8), podemos mostrar o próximo resultado.

Lema 16. A aplicação $S_{\mathscr{C}} : \mathbb{R}^+ \times \mathscr{C} \to \mathscr{P}(\mathscr{C})$ define um semigrupo multivalorado (m-semigrupo), isto é, $S_{\mathscr{C}}(0)\varphi = \{\varphi\}$ e $S_{\mathscr{C}}(t+s)\varphi = S_{\mathscr{C}}(t)S_{\mathscr{C}}(s)\varphi$ para todo $t,s \geq 0$.

Demonstração. É fácil ver que a aplicação está bem definida e $S_{\mathscr{C}}(0)\varphi = \{\varphi\}$. Seja $t,s \geq 0$ e $\psi \in S_{\mathscr{C}}(t+s)\varphi$ então existe $v \in X(\varphi)$ tal que $v_{t+s} = \psi$. Claramente $v_s \in S_{\mathscr{C}}(s)\varphi$. A seguir, definindo $w : [0,\infty) \to X$ por $w(r) = v(r+s)$ para $r \geq 0$, temos que $w \in X(v_s)$ e $\psi = v_{t+s} = w_t \in S_{\mathscr{C}}(t)v_s \subset S_{\mathscr{C}}(t)S_{\mathscr{C}}(s)\varphi$. De onde concluímos que $S_{\mathscr{C}}(t+s)\varphi \subset S_{\mathscr{C}}(t)S_{\mathscr{C}}(s)\varphi$.

Considere agora $t,s \geq 0$ e $\psi \in S_{\mathscr{C}}(t)S_{\mathscr{C}}(s)\varphi$, então existem $v \in X(\varphi)$ e $w \in X(v_s)$ tais que $\psi = w_t$. Defina agora $z : [0,\infty) \to X$ por

$$z = \begin{cases} v(r) & \text{para } r \in [-p,s], \\ w(r-s) & \text{para } r \in [s,\infty). \end{cases} \tag{3.62}$$

Desde que $w \in X(v_s)$, temos que z está bem definido e que $z \in X(\varphi)$, o que implica que $\psi = w_t = z_{t+s} \in S_{\mathscr{C}}(t+s)\varphi$ e $S_{\mathscr{C}}(t)S_{\mathscr{C}}(s)\varphi \subset S_{\mathscr{C}}(t+s)\varphi$. A Prova está completa. □

A seguir, apresentamos o principal resultado desta seção.

Proposição 22. Para $t > 2p$, a aplicação $S_{\mathscr{C}}(t)$ leva subconjuntos limitados de $\mathscr{C}$ em subconjuntos limitados de $\mathfrak{B}$

Demonstração. Sejam $t > 2p$, $\alpha \in (0,1)$, $\rho > 0$, $\varphi \in B := B_\rho(0,\mathscr{C})$, $u(\cdot) \in X(\varphi)$ e considere a decomposição $u(t) = T(t)\varphi(0) + v(t)$.

Seja $\varepsilon > 0$ tal que $2p + \varepsilon < t$. Para estimar $\| Au(r) \|$, precisamos estimar $[u]_{C^\alpha([\varepsilon,r];X)}$ e $\| F^\sigma u \|_{C([0,r];X)}$. Para $s \in [0,t]$, podemos ver que

$$\| u \|_{C([-p,s];X)} \leq C_0(\| \varphi \|_{\mathscr{C}} + r \| F^\sigma(0) \|) + 2C_0[F]_{C_{Lip}} \int_0^s \| u \|_{C([-p,s];X)} \, ds,$$

que nos permite obter que

$$\begin{aligned} \| u \|_{C([-p,s];X)} &\leq \rho_1(t) := C_0(\rho + t \| F^\sigma(0) \|)e^{2C_0[F]_{C_{Lip}}t}, \\ \| F^\sigma u \|_{C([0,t];X)} &\leq \rho_2(t) := 2[F]_{C_{Lip}}\rho_1(t) + \| F^\sigma(0) \| . \end{aligned}$$

Por outro lado, do Lema 17, Lema 9 e última estimativa, obtemos que

$$\begin{aligned} [u]_{C^\alpha([\varepsilon,s];X)} &\leq C_0 t^{1-\alpha} \| AT(\varepsilon)\varphi(0) \| + [v]_{C^\alpha([0,t];X)} \\ &\leq C_0 t^{1-\alpha} \| AT(\varepsilon)\varphi(0) \| + \| F^\sigma u \|_{C([0,t];X)} \left(\frac{C_1}{\alpha(1-\alpha)} + C_0\right)t^{1-\alpha} \\ &\leq \rho_3(t,\varepsilon) := C_0 C_1 \frac{t^{1-\alpha}}{\varepsilon} \| \varphi(0) \| + \rho_2(t)\left(\frac{C_1}{\alpha(1-\alpha)} + C_0\right)t^{1-\alpha}, \quad (3.63) \\ [u^\sigma]_{C^{\alpha^2}([p+\varepsilon,t];X)} &\leq [u]_{C^\alpha([\varepsilon,t];X)}\left(t^{(\alpha-\alpha^2)} + [\sigma]^\alpha_{C_{Lip}}[u]^\alpha_{C^\alpha([\varepsilon,t];X)}\right) \\ &\leq \rho_4(t,\varepsilon) := \rho_3(t,\varepsilon)\left(t^{(\alpha-\alpha^2)} + [\sigma]^\alpha_{C_{Lip}}\rho_3^\alpha(t,\varepsilon)\right), \quad (3.64) \end{aligned}$$

o que nos permite obter que $F^\sigma u \in C^{\alpha^2}([p+\varepsilon,t];X)$ para todo $\varepsilon > 0$ tal que $2p + \varepsilon < t$ e

$$[F^\sigma(u)]_{C^{\alpha^2}([p+\varepsilon,t];X)} \leq \rho_5(t,\varepsilon) := [F]_{Lip}(\rho_3(t,\varepsilon)t^{(\alpha-\alpha^2)} + \rho_4(t,\varepsilon)). \quad (3.65)$$

A seguir, vamos mostrar que $u \in C([p+\varepsilon,r];D(A)) \cap C^1([p+\varepsilon,r];X)$ para todo $\varepsilon > 0$ tal que $p + \varepsilon < t$. Seja $\varepsilon > 0$ é tal que $2p + \varepsilon < t$. Como $2p + \frac{\varepsilon}{2} < 2p + \varepsilon < t$, temos que $F^\sigma u \in C^{\alpha^2}([p+\frac{\varepsilon}{2},r];X)$. Para $s \in [p+\varepsilon,t]$ escreva $v(s) = v_1(s) + v_2(s)$ onde

$$\begin{cases} v_1(s) = T(s-(p+\frac{\varepsilon}{2}))v(p+\frac{\varepsilon}{2}) + \int_{p+\frac{\varepsilon}{2}}^s T(s-\tau)F^\sigma u(s)d\tau, \\ v_2(s) = \int_{p+\frac{\varepsilon}{2}}^s T(s-\tau)(F^\sigma u(\tau) - F^\sigma u(s))d\tau. \end{cases} \quad (3.66)$$

É fácil ver que $v_1(s), v_2(s) \in D(A)$ para todo $s \in [p+\varepsilon,t]$ e

$$\begin{cases} Av_1(s) = T(s-(p+\frac{\varepsilon}{2}))Av(p+\frac{\varepsilon}{2}) + (T(s-(p+\frac{\varepsilon}{2})) - I)F^\sigma u(s), \\ Av_2(s) = \int_{p+\frac{\varepsilon}{2}}^s AT(s-\tau)(F^\sigma u(\tau) - F^\sigma u(s))d\tau, \end{cases} \quad (3.67)$$

o que nos permite concluir que $Av_1(s) \in C([p+\varepsilon,t];X)$. Logo, para mostrar que $Av \in C([p+\varepsilon,t];X)$ resta somente mostrar que $Av_2 \in C([p+\varepsilon,t];X)$. Para $s \in [p+\varepsilon,t]$ e $h>0$ tal que $s+h<t$ temos que

$$
\begin{aligned}
&\| Av_2(s+h) - Av_2(s) \| \\
&\leq \| \int_{p+\frac{\varepsilon}{2}}^{s} A(T(s+h-\tau)-T(s-\tau))(F^{\sigma}(u)(\tau)-F^{\sigma}(u)(t))d\tau \| \\
&\quad + \| (T(s+h)-T(h))(F^{\sigma}(u)(s)-F^{\sigma}(u)(s+h)) \| \\
&\quad + \| A\int_{s}^{s+h} T(s+h-\tau)(F^{\sigma}(u)(\tau)-F^{\sigma}(u)(s+h))d\tau \| \\
&\leq \int_{p+\frac{\varepsilon}{2}}^{s}\int_{s-\tau}^{s+h-\tau} \| (-A)^2T(\theta)(F^{\sigma}(u)(\tau)-F^{\sigma}(u)(s)) \| \, d\theta d\tau \\
&\quad +2C_0[F^{\sigma}(u)]_{C^{\alpha^2}([p+\varepsilon,r];X)}h^{\alpha^2} + C_1[F^{\sigma}(u)]_{C^{\alpha^2}([p+\varepsilon,r];X)}\int_{s}^{s+h}(s+h-\tau)^{\alpha^2-1}d\tau \\
&\leq C_2[F^{\sigma}(u)]_{C^{\alpha^2}([p+\frac{\varepsilon}{2},r];X)}\int_{p+\frac{\varepsilon}{2}}^{s}\int_{s-\tau}^{s+h-\tau}\theta^{2-\alpha^2}d\theta d\tau + \rho_5(t,\varepsilon)(2C_0+\frac{C_1}{\alpha^2})h^{\alpha^2} \\
&\leq [\rho_5(t,\frac{\varepsilon}{2})\frac{C_2}{\alpha^2(1-\alpha^2)} + \rho_5(t,\varepsilon)(2C_0+\frac{C_1}{\alpha^2})]h^{\alpha^2}.
\end{aligned}
$$

Desta forma, temos que $Av_2 \in C^{\alpha^2}([p+\varepsilon,t];X)$ e, consequente, $Au \in C([p+\varepsilon,t];X)$. Mais ainda, desde que $T(s)\varphi(0) \in C((0,t];D(A)) \cap C^1((0,t];X)$ e da arbitrariedade da escolha de ε, segue que $u \in C((p,t];D(A)) \cap C^1((p,t];X)$ e $u_t \in \mathscr{C}$. Então, $S_{\mathscr{C}}(t)B \subset \mathfrak{B}$.

Usando as observações anteriores e a representação

$$
u(t) = T(t)\varphi(0) + \int_0^{p+\varepsilon} T(t-s)F^{\sigma}u(s)ds + \int_{p+\varepsilon}^{t} T(t-s)F^{\sigma}u(s)ds, \tag{3.68}
$$

temos que

$$
\begin{aligned}
\| Au(t) \| &\leq \| AT(t)\varphi(0) \| + \int_0^{p+\varepsilon} \| AT(t-s)F^{\sigma}u(s) \| \, ds \\
&\quad + \| A\int_{p+\varepsilon}^{t} T(t-s)F^{\sigma}u(t)ds \| + \int_{p+\varepsilon}^{t} \| AT(t-s)(F^{\sigma}u(s)-F^{\sigma}u(t)) \| \, ds \\
&\leq \frac{C_1}{t}\rho + \int_0^{p+\varepsilon}\frac{C_1}{t-s}\rho_2(t)ds + \| (T(t-(p+\varepsilon))-I)F^{\sigma}u(t) \| \\
&\quad + \int_{p+\varepsilon}^{t}\frac{C_1[F]_{C_{Lip}}}{t-s}(\| u(s)-u(t) \| + \| u^{\sigma}(s)-u^{\sigma}(t) \|)ds \\
&\leq \frac{C_1}{t}\rho + \frac{C_1\rho_2(t)(p+\varepsilon)}{t-(p+\varepsilon)} + 2C_0\rho_2(t) + \int_{p+\varepsilon}^{t}\frac{C_1[F]_{C_{Lip}}}{t-s}[u]_{C^{\alpha}([\varepsilon,t];X)}(t-s)^{\alpha}ds \\
&\quad + \int_{p+\varepsilon}^{t}\frac{C_1[F]_{C_{Lip}}}{t-s}[u^{\sigma}]_{C^{\alpha^2}([p+\varepsilon,t];X)}(t-s)^{\alpha^2}ds \\
&\leq \frac{C_1}{t}\rho + \frac{C_1\rho_2(t)(p+\varepsilon)}{t-(p+\varepsilon)} + 2C_0\rho_2(t) + C_1[F]_{C_{Lip}}\rho_3(t,\varepsilon)\frac{t^{\alpha}}{\alpha} \\
&\quad + C_1[F]_{C_{Lip}}\rho_3(t,\varepsilon)(t^{(\alpha-\alpha^2)} + [\sigma]^{\alpha}_{C_{Lip}}\rho_3^{\alpha}(t,\varepsilon))\frac{t^{\alpha^2}}{\alpha^2},
\end{aligned}
$$

e, assim,

$$\rho_6(t) := \sup\{\| Au(t) \|: u \in X(\varphi), \varphi \in B := B_\rho(0,\mathscr{C})\} < \infty, \tag{3.69}$$

e $S_{\mathscr{C}}(t)B \subset B_{\rho_1(t)+\rho_6(t)}(0,\mathfrak{B})$. O que completa a demonstração. □

Corolário 21. Assuma que as condições no Corolário 18 estão satisfeitas e seja $\mathscr{A}_{\mathfrak{B}}$ o atrator global de $(S_{\mathfrak{B}}(t))_{t\geq 0}$ in $\mathfrak{B}$. Então, $\mathscr{A}_{\mathfrak{B}}$ é o atrator global de $(S_{\mathscr{C}}(t))_{t\geq 0}$ in $\mathscr{C}$.

Demonstração. Observando que $(\mathfrak{B}, \|\cdot\|_{\mathfrak{B}}) \hookrightarrow (\mathscr{C}, \|\cdot\|_{\mathscr{C}})$, temos que $\mathscr{A}_{\mathfrak{B}}$ é compacto em $\mathscr{C}$. Mais ainda, da Proposição 22, para um subconjunto limitado $C \subset \mathscr{C}$ e $r > 2p$, temos que $S_{\mathscr{C}}(r)C$ é limitado em $\mathfrak{B}$ e da unicidade de solução para condições iniciais em $\mathfrak{B}$, para $\psi \in S_{\mathscr{C}}(r)C$ e $s \geq 0$ obtemos que $S_{\mathscr{C}}(s)\psi = \{S_{\mathfrak{B}}(s)\psi\}$ e $S_{\mathscr{C}}(s+r)C = S_{\mathscr{C}}(s)S_{\mathscr{C}}(r)C = S_{\mathfrak{B}}(s)S_{\mathscr{C}}(r)C$. Do anterior e usando as notações $dist_{\mathscr{C}}$ e $dist_{\mathfrak{B}}$ para as semidistâncias de Hausdorff induzidas por $\|\cdot\|_{\mathscr{C}}$ e $\|\cdot\|_{\mathfrak{B}}$ nos espaços $\mathscr{C}$ e $\mathfrak{B}$, para $t \geq r > 2p$ obtemos

$$dist_{\mathscr{C}}(S_{\mathscr{C}}(t)C, \mathscr{A}_{\mathfrak{B}}) \leq dist_{\mathfrak{B}}(S_{\mathfrak{B}}(t-r)S_{\mathscr{C}}(r)C, \mathscr{A}_{\mathfrak{B}}) \to 0 \text{ as } t \to \infty,$$

o que mostra que $\mathscr{A}_{\mathfrak{B}}$ atrai os subconjuntos limitados de $\mathscr{C}$ sob a ação de $S_{\mathscr{C}}(\cdot)$. Finalmente, observando que $S_{\mathscr{C}}(t)\mathscr{A}_{\mathfrak{B}} = S_{\mathfrak{B}}(t)\mathscr{A}_{\mathfrak{B}} = \mathscr{A}_{\mathfrak{B}}$, concluímos que $\mathscr{A}_{\mathfrak{B}}$ é um atrator global de $S_{\mathscr{C}}(\cdot)$ no espaço $\mathscr{C}$. □

Procedendo como na prova da Proposição 22, temos o resultado a seguir.

Proposição 23. Para $t > 2p$, a aplicação $S_{\mathscr{C}}(t)$ leva subconjuntos limitados de $\mathscr{C}$ em subconjuntos limitados de $\mathfrak{B}_\gamma$.

Demonstração. A prova segue procedendo como na prova da Proposição 22 e observando que para $t > 2p$, $\rho > 0$, $B := B_\rho(0,\mathscr{C})$, $u(\cdot) \in X(\varphi)$ e $\tau \in [t-p,t]$

$$\begin{aligned} \| u(\tau) \|_\gamma &\leq \frac{C_\gamma}{\tau^\gamma}\rho + \int_0^\tau \frac{C_\gamma}{(t-s)^\gamma}(2[F]_{Lip}\rho_1(s) + \| F(0,0) \|)ds \\ &< \rho_7(t) := \frac{C_\gamma}{p^\gamma}\rho + C_\gamma(2[F]_{Lip}\rho_1(t) + \| F(0,0) \|)\frac{t^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \end{aligned}$$

o que implica que $S_{\mathscr{C}}(t)B \subset B_{\rho_7(t)+\rho_6(t)}(0,\mathfrak{B}_\gamma)$. □

Corolário 22. Suponha que as condições no Corolário 20 estão satisfeitas e seja $\mathscr{A}_{\mathfrak{B}_\gamma}$ o atrator global de $(S_{\mathfrak{B}_\gamma}(t))_{t\geq 0}$ em $\mathfrak{B}_\gamma$. Então, $\mathscr{A}_{\mathfrak{B}_\gamma}$ é um atrator global de $(S_{\mathscr{C}}(t))_{t\geq 0}$ em $\mathscr{C}$.

3.3 Exemplos

Nesta seção, estudaremos a existência de soluções locais e globais e a existência de atratores para alguns exemplos de equações diferenciais parciais com retardo dependendo do

estado. Com esse objetivo, dividiremos este seção em duas subseções. No restante deste seção, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um subconjunto aberto e limitado com fronteira suave $\partial\Omega$, $X = L^2(\Omega)$ e o operador $A : D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \subset X \to X$ dado por $Au = \Delta_\xi u$. É bem conhecido que A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de operadores lineares e limitados $(T(t))_{t\geq 0}$ em X que é analítico e compacto.

Observando que $-A : D(A) \subset X \to X$ é um operador linear auto-adjunto positivamente definido com domínio denso e que $(-A)^{-1}$ é compacto, temos existe uma base ortonormal $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de X tal que cada e_i é um autovetor de $-A$ com autovalor associado λ_i, $0 < \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq \lambda_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, e $\lambda_n \to \infty$ quando $n \to \infty$. Mais ainda, $T(t)x = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} < x, e_n > e_n$, para $t > 0$ e $x \in X$, e, para $\gamma > 0$, temos que $X_\gamma = \{w \in X : \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n^\gamma < w, e_n >)^2 < \infty\}$ e $(-A)^\gamma w = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^\gamma < w, e_n > e_n$ para $w \in X_\gamma$.

3.3.1 Existência e unicidade de solução

Problema 1

Inicialmente, consideraremos a equação diferencial parcial

$$\begin{aligned} u'(t,\xi) &= \Delta_\xi u(t,\xi) + \beta(t)\int_\Omega b(u(t-\zeta(t,u_t),y))g(\xi,y)dy, \ \ t \geq 0, \xi \in \Omega, && (3.70)\\ u(\theta,y) &= \varphi(\theta,y), \ \ \theta \in [-p,0], y \in \Omega, && (3.71)\\ u(t,\cdot)_{|\partial\Omega} &= 0, && (3.72) \end{aligned}$$

onde Δ_ξ é o operador Laplaciano na variável ξ, $\varphi \in \mathscr{C} = C[-p,0];X)$, $b \in C_{Lip}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, $\zeta \in C_{Lip}([0,\infty)\times\mathscr{C};[0,p])$, $\beta \in C([0,\infty);\mathbb{R})$, $g \in C^2(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$, $g(\xi,y) = 0$ para todo $(\xi,y) \in \partial\Omega\times\Omega$, e $L_{g,1} = (\int_\Omega\int_\Omega g^2(\theta,\tau)d\theta\tau)^{\frac{1}{2}}$, $L_{g,2} = (\int_\Omega\int_\Omega(\Delta_\xi g(y,\xi))^2 d\xi dy)^{\frac{1}{2}}$ são finitos. Por simplicidade, assumimos que $b(0) = 0$.

Adicionalmente, suponha que $\beta(\cdot)$ é diferenciável em quase todos os pontos (q.t.p.) em $[0,\infty)$ e que existe uma função $\xi_\beta : \mathbf{U} = \{(t,s) : 0 \leq s \leq t < \infty\} \mapsto \mathbb{R}^+$ tal que $\mid \beta(t) - \beta(s) \mid \leq \beta'(\xi_\beta(t,s)) \mid t-s \mid$ e $s \leq \xi_\beta(t,s) \leq t$ para todo $(t,s) \in \mathbf{U}$, e que a função $[\beta]_{(\cdot,\cdot)} = \beta'(\xi_\beta(\cdot,\cdot))$ é L^q-localmente integrável em $\mathbf{U}$ para algum $q > 1$.

Para representar o problema (3.70)-(3.72) na forma abstrata (3.5)-(3.6), definimos a aplicação $\sigma : [0,\infty)\times\mathscr{C} \mapsto [0,p]$ e $F : [0,\infty)\times X \mapsto X$ por $\sigma(t,\psi) = \zeta(t,\psi)$ e

$$F(t,x)(\xi) = \beta(t)\int_\Omega b(x(y))g(\xi,y)dy.$$

Das hipóteses anteriores, vemos que $F \in L^q_{Lip}(X;X_1)$, $\Delta_\xi F(t,x)(\xi) = \beta(t)\int_\Omega b(x(y))\Delta_\xi g(\xi,y)dy$ e

$$\begin{aligned} \| AF(t,x) \| &\leq |\beta(t)|[b]_{C_{Lip}(\Omega)}(\int_\Omega\int_\Omega(\Delta_\xi g(\xi,y))^2 d\xi dy)^{\frac{1}{2}} \| x \| = \| \beta \|_{C([0,t])}[b]_{C_{Lip}(\Omega)}L_{2,g} \| x \|,\\ &\| AF(t,x_1) - AF(s,x_2) \| \\ &\leq ([\beta]_{(t,s)} + \| \beta \|_{C([0,a])}) \| b \|_{C_{Lip}(\mathbb{R}^n)} (L_{g,1} + L_{g,2})(\mid t-s \mid + \| x_1 - x_2 \|), \end{aligned}$$

para todo $t,s \in [0,a]$, $a > 0$ e todo $x_1, x_2 \in X$.

Do anterior, para $c > 0$, definimos

$$\begin{aligned} \widetilde{\Phi}_1(c) &:= \sup_{h\in[0,1]} \| [\beta]_{(\cdot+h,\cdot)} \|_{L^q[0,c]}, \\ \widetilde{\Phi}_2(c) &:= \sup_{s\in[0,c]} \| [\beta]_{(s,\cdot)} \|_{L^q[0,s]} . \end{aligned}$$

A seguir, dizemos que uma função $u \in C([0,a]\times\Omega;\mathbb{R}^n)$ é uma solução estrita de (3.70)-(3.72) em $[0,b]$, e a função $v : [0,\infty) \to X$ definida por $v(t)(\xi) = u(t,\xi)$ é uma solução estrita do problema abstrato associado (3.1)-(3.2). Nos próximos exemplos adotamos nomenclaturas similares.

Usando as observações anteriores, do Teorema 2, Proposição 9 e da Proposição 12, temos o próximo resultado.

Proposição 24. Assuma que as condições acima estão satisfeitas.

(a) Se $\varphi \in \mathscr{C}$, então existe uma solução fraca $v(\cdot) \in C([-p,\infty);X)$ do problema (3.70)-(3.72).

(b) Se $\varphi \in C_{Lip}([-p,0];X_\gamma)$, $T(\cdot)\varphi(0) \in C_{Lip}([0,a];X_\gamma)$, $\frac{1}{q'} > \gamma$ e $\widetilde{\Phi}_1(c) < \infty$ para algum $c > 0$. Então existe uma solução fraca $u(\cdot,\varphi) \in C([-p,b];X_\gamma)$ do problema (3.70)-(3.72) para algum $0 < b \le c$. Mais ainda, se $\varphi(0) \in D(A)$ e $\widetilde{\Phi}_2(c) < \infty$, então $u(\cdot,\varphi)$ é uma solução estrita.

(c) Se $\varphi \in \mathfrak{B}$ (ou $\varphi \in \mathfrak{B}_\gamma$ para algum $\gamma \in (0,1)$) e $\max\{\widetilde{\Phi}_1(c), \widetilde{\Phi}_2(c)\} < \infty$ para todo $c > 0$, então existe uma única solução estrita $u(\cdot,\varphi) \in C([-p,\infty);X)$ de (3.70)-(3.72).

Problema 2

Estudamos agora o problema

$$u'(t,\xi) = Au(t)(\xi) + \sum_{i\in H} \beta_i(t)\langle F_i(u(t-\zeta(t,u_t)),e_i\rangle e_i,\ t \ge 0,\ \xi \in \Omega, \tag{3.73}$$

$$u(t,\cdot)_{|\partial\Omega} = 0, \quad t \ge 0, \tag{3.74}$$

$$u(\theta,y) = \varphi(\theta,y), \quad \theta \in [-p,0], y \in \Omega, \tag{3.75}$$

onde

$$F_i(x)(\xi) = \int_\Omega b(x(y))f_i(\xi - y)dy,$$

$\varphi \in C([-p,0];X)$, $H \subset \mathbb{N}$ é finito, a função $b(\cdot)$, $\zeta(\cdot)$ são como no primeiro exemplo, $f_i \in C(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ para todo $i \in H$ e $L_f = \sum_{i\in H}(\int_\Omega\int_\Omega f_i^2(\theta-\tau)d\theta d\tau)^{\frac{1}{2}}$ é finito. Assumimos também que as funções $\beta_i(\cdot)$, $i \in H$, são diferenciáveis q.t.p. e suponha que $\xi_{\beta_i} : \mathbf{U} = \{(t,s) : 0 \le s \le t < \infty\} \mapsto [0,\infty)$ são funções tais que $| \beta_i(t) - \beta_i(s) | \le \beta_i'(\xi_{\beta_i}(t,s)) \mid t-s \mid$ e $s \le \xi_{\beta_i}(t,s) \le t$ para todo $(t,s) \in \mathbf{U}$ e $i \in H$. De maneira similar ao primeiro exemplo, a seguir assumimos que as

funções $[\beta_i]_{(\cdot,\cdot)}$, $i \in H$, dada por $[\beta_i]_{(\cdot,\cdot)} = \beta_i'(\xi_{\beta_i}(\cdot,\cdot))$ pertencem ao espaço $L^q(\mathbf{U})$ para algum $q > 1$.

Neste caso, definimos $\sigma(\cdot)$ como no primeiro exemplo e $F : [0,\infty) \times X \to X$ por

$$F(t,x)(\xi) = \sum_{i\in H} \beta_i(t)\langle \int_\Omega b(x(y))f_i(\xi - y)dy, e_i\rangle e_i.$$

Sob estas condições, podemos ver que $F \in L^q_{Lip}(X;X) \cap L^q_{Lip}(X_\gamma;X_\theta)$ para todo $\gamma, \theta \in [0,1]$ e

$$\begin{aligned}
&\| F(t,x_1) - F(s,x_2) \| \\
&\qquad \leq \| b \|_{C_{Lip}(\mathbb{R}^n)} L_f(1 + m(\Omega)^{\frac{1}{2}}) \sum_{i\in H} ([\beta_i]_{(t,s)} + \| \beta_i \|_{C([0,a])})(| t - s | + \| x_1 - x_2 \|), \\
&\qquad \| F(t,x_1) - F(s,x_2) \|_\theta \leq \max_{i\in H} | \lambda_i^\theta | \| F(t,x_1) - F(s,x_2) \|, \\
&\qquad\qquad \| F(t,x) \| \leq \sum_{i\in H} \| \beta_i \|_{C([0,t])} [b]_{C_{Lip}(\mathbb{R}^n)} L_f \| x \|,
\end{aligned}$$

para todo $x, y \in X$, $0 \leq s \leq t \leq a$ e $a > 0$. Do anterior, para $c > 0$, definimos

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Phi}_3(c) &:= \sup_{h\in[0,1]} \sum_{i\in H} \| [\beta_i]_{(\cdot+h,\cdot)} \|_{L^q[0,c]}, \\
\widetilde{\Phi}_4(c) &:= \sup_{s\in[0,c]} \sum_{i\in H} \| [\beta_i]_{(s,\cdot)} \|_{L^q[0,s]} .
\end{aligned}$$

Usando as observações anteriores e do Teorema 2, Proposição 9 e da Proposição 12, obtemos o próximo resultado.

Proposição 25. Assuma que as condições acima estão satisfeitas.

(a) Se $\varphi \in \mathscr{C}$, então existe uma solução fraca $v(\cdot) \in C([-p,\infty);X)$ do problema (3.70)-(3.72).

(b) Se $\varphi \in C_{Lip}([-p,0];X_\gamma)$, $T(\cdot)\varphi(0) \in C_{Lip}([0,a];X_\gamma)$, $\frac{1}{q'} > \gamma$ e $\widetilde{\Phi}_3(c) < \infty$ para algum $c > 0$. Então existe uma solução fraca $u(\cdot,\varphi) \in C([-p,b];X_\gamma)$ do problema (3.70)-(3.72) para algum $0 < b \leq a$. Mais ainda, se $\varphi(0) \in D(A)$ e $\widetilde{\Phi}_4(c) < \infty$, então $u(\cdot,\varphi)$ é uma solução estrita.

(c) Se $\varphi \in \mathfrak{B}$ (ou $\varphi \in \mathfrak{B}_\gamma$ para algum $\gamma \in (0,1)$) e $\max\{\widetilde{\Phi}_3(c), \widetilde{\Phi}_4(c)\} < \infty$ para todo $c > 0$, então existe uma única solução estrita $u(\cdot,\varphi) \in C([-p,\infty);X)$ de (3.70)-(3.72).

Problema 3

A seguir, estudamos brevemente o problema anterior para o caso em que H é enumerável. Considere o problema

$$u'(t,\xi) = Au(t)(\xi) + \sum_{i\in H} \beta_i(t)\langle F_i(u(t - \zeta(t,u_t)), e_i\rangle e_i, \ t \geq 0, \ \xi \in \Omega, \tag{3.76}$$

sob a condição (3.74) e (3.75) e assuma que $H \subset \mathbb{N}$ é enumerável. Para estudar o problema, supomos que as funções $\beta_i(\cdot)$, $b(\cdot)$ e $f_i(\cdot)$, $i \in H$, verificam as condições do exemplo anterior e existe $\theta_0 \in [0,1)$ tal que

$$\Lambda_F(t,s) := \sum_{i\in H} \mid \lambda_i^{\theta_0} \mid ([\beta_i]_{(t,s)} + \| \beta_i \|_{C([0,t])}) L_{f_i} < \infty,$$

para todo $0 \leq s \leq t$, onde $L_{f_i} = (\int_\Omega \int_\Omega f_i^2(\theta - \tau) d\theta d\tau)^{\frac{1}{2}}$. Sob estas condições e definindo $F(\cdot)$ como anterior, podemos ver que $F \in L^q_{Lip}(X;X) \cap L^q(X_\gamma;X_\theta)$ para todo $0 \leq \theta \leq \theta_0$. Mais ainda, para $0 \leq \theta \leq \theta_0$ temos que

$$\begin{aligned} & \| F(t,x_1) - F(s,x_2) \|_{X_\theta} \\ & \leq \| b \|_{C_{Lip}(\mathbb{R}^n)} (1 + m(\Omega)^{\frac{1}{2}}) \max_{i\in H} \mid \lambda_i \mid^{\theta-\theta_0} \Lambda_F(t,s)(\mid t-s \mid + \| x_1 - x_2 \|), \\ \| F(t,x) \|_{X_\theta} & \leq \max_{i\in H} \mid \lambda_i \mid^{\theta-\theta_0} \sum_{i\in H} \mid \lambda_i \mid^{\theta_0} \| \beta_i \|_{C([0,t])} [b]_{C_{Lip}(\mathbb{R}^n)} L_{f_i} \| x \|, \end{aligned}$$

Do anterior, para $c > 0$, definimos

$$\begin{aligned} \widetilde{\Phi}_5(c) & := \sup_{h\in[0,1]} \| \Lambda_F(\cdot + h, \cdot) \|_{L^q[0,c]}, \\ \widetilde{\Phi}_6(c) & := \sup_{s\in[0,c]} \| \Lambda_F(s, \cdot) \|_{L^q[0,s]} . \end{aligned}$$

Similar à proposição anterior, do Teorema 2, Proposição 9 e da Proposição 12, temos o resultado a seguir.

Proposição 26. Assuma que as condições acima estão satisfeitas.

(a) Se $\varphi \in \mathscr{C}$, então existe uma solução fraca $v(\cdot) \in C([-p,\infty);X)$ do problema (3.70)-(3.72).

(b) Se $\varphi \in C_{Lip}([-p,0];X_\gamma)$, $T(\cdot)\varphi(0) \in C_{Lip}([0,a];X_\gamma)$, $\frac{1}{q'} > \gamma$ e $\widetilde{\Phi}_5(c) < \infty$ para algum $c > 0$. Então existe uma solução fraca $u(\cdot,\varphi) \in C([-p,b];X_\gamma)$ do problema (3.70)-(3.72) para algum $0 < b \leq c$. Mais ainda, se $\varphi(0) \in D(A)$ e $\widetilde{\Phi}_2(c) < \infty$, então $u(\cdot,\varphi)$ é uma solução estrita.

(c) Se $\varphi \in \mathfrak{B}$ (ou $\varphi \in \mathfrak{B}_\gamma$ para algum $\gamma \in (0,1)$) e $\max\{\widetilde{\Phi}_5(c), \widetilde{\Phi}_6(c)\} < \infty$ para todo $c > 0$, então existe uma única solução estrita $u(\cdot,\varphi) \in C([-p,\infty);X)$ de (3.70)-(3.72).

Problema 4

No próximo exemplo, estudamos o problema

$$u'(t,\xi) = Au(t)(\xi) + F(u(t-\zeta(t,u_t)))(\xi), \quad t \geq 0, \xi \in \Omega, \tag{3.77}$$

$$u(\theta,y) = \varphi(\theta,y), \qquad \theta \in [-p,0], y \in \Omega, \tag{3.78}$$

onde $\zeta(\cdot)$ e $\sigma(\cdot)$ são como nos exemplos anteriores, $F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\theta_n\langle f_n(x),e_n\rangle e_n$, $f_n\in C_{Lip}(X;X)$ e $\{\theta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de números reais tais que $\sum_{n=1}^{\infty}(\theta_n\lambda_n^{\theta})^2([f_n]_{C_{Lip}(X)}+\parallel f_n(0)\parallel)$ é convergente para algum $\theta\in(0,1]$. Das hipóteses anteriores, $F\in C_{Lip}(X;X)\cap C_{Lip}(X;X_\gamma)\cap C_{Lip}(X_\gamma;X_\gamma)$ para todo $\gamma\in[0,\theta)$, e para $x,y\in X$ e $\gamma\in[0,\theta)$, temos que

$$\begin{aligned}\parallel F(x)\parallel_{X_\gamma} &\leq (\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{2\gamma}\theta_n^2)^{\frac{1}{2}}\parallel f_n(x)\parallel\leq \max_{i\in\mathbb{N}}\mid\lambda_i\mid^{\gamma-\theta}(\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{2\theta}\theta_n^2)^{\frac{1}{2}}([f_n]_{C_{Lip}(X)}\parallel x\parallel+\parallel f_n(0)\parallel),\\ &\parallel F(x)-F(y)\parallel_{X_\gamma}\leq \max_{i\in\mathbb{N}}\mid\lambda_i\mid^{\gamma-\theta}(\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{2\theta}\theta_n^2)^{\frac{1}{2}}[f_n]_{C_{Lip}(X)}\parallel x-y\parallel.\end{aligned}$$

Combinando o Teorema 2, Proposição 9 e da Proposição 12, obtemos o próximo resultado.

Proposição 27. Assuma que as condições acima estão satisfeitas.

(a) Se $\varphi\in\mathscr{C}$, então existe uma solução fraca $v(\cdot)\in C([-p,\infty);X)$ de (3.73)-(3.75).

(b) Se $\varphi\in C_{Lip}([-p,0];X_\gamma)$, $T(\cdot)\varphi(0)\in C_{Lip}([0,a];X_\gamma)$, para algum $\gamma\in[0,\min\{\theta,\frac{1}{q'}\})$, então existe uma solução fraca $u(\cdot,\varphi)\in C([-p,a];X_\gamma)$ do problema (3.73)-(3.75). Mais ainda, se $\varphi(0)\in D(A)$, então $u(\cdot,\varphi)$ é uma solução estrita.

(c) Se $\varphi\in\mathfrak{B}$ (ou $\varphi\in\mathfrak{B}_\gamma$ para algum $\gamma\in[0,\theta)$), então existe uma única solução estrita $u(\cdot,\varphi)\in C([-p,\infty);X)$ de (3.73)-(3.75) em $[-p,\infty)$.

3.3.2 Existência de atrator global

Nesta seção, estudamos a existência de atratores para os problemas considerados na seção 3.3.1. Para isto, assumiremos a seguir que $\zeta\in C_{Lip}(\mathscr{C};[0,p])$, $\sigma(\cdot)$ é definido como na seção anterior e adotamos as notações das seções anteriores. Mais ainda, das condições na seção 3.3.1, temos que a condição H_{T,λ_1} está satisfeita.

Inicialmente, consideramos a versão autônoma do problema (3.70), dada por

$$u'(t,\xi) = \Delta u(t,\xi)+\int_\Omega b(u(\zeta(u_t),y))g(\xi,y)dy,\ \ t\geq 0,\ \xi\in\Omega, \tag{3.79}$$

$$u(\theta,y) = \varphi(\theta,y),\qquad \theta\in[-p,0],\ y\in\Omega, \tag{3.80}$$

$$u(t,\cdot)\mid_{\partial\Omega} = 0, \tag{3.81}$$

e assumimos que as hipóteses no exemplo (3.70)-(3.72) são verificadas.

Dos comentários no primeiro exemplo, temos que a função $F:X\to X$ dada por

$$F(x)(\xi)=\int_\Omega b(x(y))g(\xi,y)dy, \tag{3.82}$$

é tal que $[F]_{C_{Lip}(X;X)}\leq[b]_{C_{Lip}}[b]_{C_{Lip}}L_{g,1}$, $[F]_{C_{Lip}(X;X_1)}\leq[b]_{C_{Lip}}L_{g,2}$ e $\parallel F(x)\parallel\leq[b]_{C_{Lip}}L_{g,1}\parallel x\parallel$. Se, adicionalmente, assumirmos que

$$2C_0\max\{[F]_{C_{Lip}(X;X)},[F]_{C_{Lip}(X;X_1)}\}e^{\lambda_1 p}\leq 2C_0[b]_{C_{Lip}}\max\{L_{g,1},L_{g,2}\}e^{\lambda_1 p}<\lambda_1,$$

segue que a condição $\mathscr{H}_{1,\mathrm{A}}$ está satisfeita para todo $\gamma \in [0,1]$. Do Corolário 18, obtemos o próximo resultado.

Proposição 28. Sob as condições anteriores, o problema (3.77)-(3.78) possui um atrator global $\mathscr{A}_{\mathfrak{B}}$ em $\mathfrak{B}$ e $\mathscr{A}_{\mathfrak{B}} = \{0\}$ desde que $b(0) = 0$. Mais ainda, $\mathscr{A}_{\mathfrak{B}}$ é um atrator global em $\mathscr{C}$.

Procedendo como no último exemplo, podemos estabelecer resultados similares para os problemas autônomos associados às equações (3.73)-(3.75) e (3.77)-(3.78). Especificamente, do Corolário 18, obtemos o próximo resultado.

Proposição 29. (Problema (3.73)-(3.75)) Suponha que as condições usadas na seção anterior para estudar o problema (3.73)-(3.75) estão satisfeitas. Se

$$2C_0 \parallel b \parallel_{C_{Lip}(\mathbb{R}^n)} L_f(1+m(\Omega))(1+\parallel (-A)^{\gamma} \parallel \max_{i\in H}\{\lambda_i^{\gamma}\})e^{\lambda_1 p} < \lambda_1,$$

então o problema (3.73)-(3.75) tem um atrator global $\mathscr{A}_{\mathfrak{B}}$ em $\mathfrak{B}$ e $\mathscr{A}_{\mathfrak{B}} = \{0\}$ desde que $b(0) = 0$. Mais ainda, $\mathscr{A}_{\mathfrak{B}}$ é um atrator global em $\mathscr{C}$.

Proposição 30. (Problema (3.77)-(3.78)) Se as hipóteses usadas na seção para estudar o problema (3.77)-(3.78) estão satisfeitas e $2C_0\parallel (-A)^{\gamma} \parallel \max_{i\in\mathbb{N}} \mid \lambda_i \mid^{\gamma-\theta} (\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2\theta}\theta_n^2)^{\frac{1}{2}}[f_n]_{C_{Lip}(X)}e^{\lambda_1 p} < \lambda_1$, então o problema (3.77)-(3.78) possui um atrator global $\mathscr{A}_{\mathfrak{B}_\gamma}$ em $\mathfrak{B}_\gamma$ Se $f_n(0) = 0$ para todo $n \in \mathbf{N}$, $\mathscr{A}_{\mathfrak{B}_\gamma} = 0$. Mais ainda, $\mathscr{A}_{\mathfrak{B}_\gamma}$ é também um atrator global em $\mathscr{C}$.

REFERÊNCIAS

AIELLO, W. G.; FREEDMAN, H. I.; WU, J. Analysis of a model representing stage-structured population growth with state-dependent time delay. **SIAM Journal on Applied Mathematics**, Society for Industrial & Applied Mathematics (SIAM), v. 52, n. 3, p. 855–869, jun 1992. Citado na página 13.

ALT, W. Periodic solutions of some autonomous differential equations with variable time delay. In: **Functional differential equations and approximation of fixed points (Proc. Summer School and Conf., Univ. Bonn, Bonn, 1978)**. [S.l.]: Springer, Berlin, 1979. (Lecture Notes in Math., v. 730), p. 16–31. Citado nas páginas 14 e 30.

BRITTON, N. F. Spatial structures and periodic travelling waves in an integro-differential reaction-diffusion population model. **SIAM Journal on Applied Mathematics**, v. 50, n. 6, p. 1663–1688, 1990. ISSN 0036-1399. Citado nas páginas 14 e 30.

CARABALLO, T.; MARÍN-RUBIO, P.; VALERO, J. Autonomous and non-autonomous attractors for differential equations with delays. **Journal of Differential Equations**, Elsevier BV, v. 208, n. 1, p. 9–41, jan 2005. Citado na página 72.

CARVALHO, A. N.; LANGA, J. A.; ROBINSON, J. C. **Attractors for infinite-dimensional non-autonomous dynamical systems**. [S.l.]: Springer-Verlag GmbH, 2012. ISBN 1461445809. Citado na página 90.

CHOLEWA, J. **Global attractors in abstract parabolic problems**. Cambridge, UK New York: Cambridge University Press, 2000. ISBN 9780511526404. Citado na página 90.

CHUESHOV, I.; REZOUNENKO, A. V. Finite-dimensional global attractors for parabolic nonlinear equations with state-dependent delay. **Communications on Pure & Applied Analysis**, American Institute of Mathematical Sciences (AIMS), v. 14, n. 5, p. 1685–1704, 2015. Citado nas páginas 14 e 16.

COOKE, K. L.; HUANG, W. Z. On the problem of linearization for state-dependent delay differential equations. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 124, n. 5, p. 1417–1426, 1996. ISSN 0002-9939. Citado nas páginas 14 e 30.

DRIVER, R. D. A functional-differential system of neutral type arising in a two-body problem of classical electrodynamics. In: **Internat. Sympos. Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics**. [S.l.]: Academic Press, New York, 1963. p. 474–484. Citado na página 13.

____. A neutral system with state-dependent delay. **Journal of Differential Equations**, v. 54, n. 1, p. 73–86, 1984. ISSN 0022-0396. Citado na página 13.

GOPALSAMY, K. Pursuit-evasion wave trains in prey-predator systems with diffusionally coupled delays. **Bulletin of Mathematical Biology**, v. 42, n. 6, p. 871–887, 1980. ISSN 0092-8240. Citado nas páginas 14 e 30.

GOURLEY, S. A. Instability in a predator-prey system with delay and spatial averaging. **IMA Journal of Applied Mathematics**, v. 56, n. 2, p. 121–132, 1996. ISSN 0272-4960. Citado nas páginas 14 e 30.

GOURLEY, S. A.; BRITTON, N. F. A predator-prey reaction-diffusion system with nonlocal effects. **Journal of Mathematical Biology**, v. 34, n. 3, p. 297–333, 1996. ISSN 0303-6812. Citado nas páginas 14 e 30.

HALE, J. **Asymptotic behavior of dissipative systems**. Providence, R.I: American Mathematical Society, 1988. ISBN 082181527X. Citado na página 90.

HARTUNG, F.; KRISZTIN, T.; WALTHER, H.-O.; WU, J. Functional differential equations with state-dependent delays: theory and applications. In: **Handbook of differential equations: ordinary differential equations. Vol. III**. [S.l.]: Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 2006, (Handb. Differ. Equ.). p. 435–545. Citado na página 13.

HERNANDEZ, E.; FERNANDES, D.; WU, J. Well-posedness of abstract integro-differential equations with state-dependent delay. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 148, n. 4, p. 1595–1609, 2020. ISSN 0002-9939. Citado nas páginas 13, 15 e 33.

HERNANDEZ, E.; O'REGAN, D.; PONCE, R. On C^{α}-holder classical solutions for non-autonomous neutral differential equations: the nonlinear case. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v. 420, n. 2, p. 1814–1831, 2014. ISSN 0022-247X. Citado nas páginas 26 e 32.

HERNANDEZ, E.; PIERRI, M.; WU, J. $C^{1+\alpha}$-strict solutions and wellposedness of abstract differential equations with state dependent delay. **Journal of Differential Equations**, Elsevier BV, v. 261, n. 12, p. 6856–6882, dec 2016. Citado nas páginas 13, 14, 15, 30 e 33.

HERNANDEZ, E.; PROKOPCZYK, A.; LADEIRA, L. A note on partial functional differential equations with state-dependent delay. **Nonlinear Analysis. Real World Applications. An International Multidisciplinary Journal**, v. 7, n. 4, p. 510–519, 2006. ISSN 1468-1218. Citado na página 13.

HERNANDEZ, E.; WU, J. Existence and uniqueness of $C^{1+\alpha}$-strict solutions for integro-differential equations with state-dependent delay. **Differential and Integral Equations. An International Journal for Theory & Applications**, v. 32, n. 5-6, p. 291–322, 2019. ISSN 0893-4983. Citado nas páginas 13, 14, 15, 20, 21, 23, 26, 30 e 33.

____. Existence, uniqueness and qualitative properties of global solutions of abstract differential equations with state-dependent delay. **Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society**, Cambridge University Press (CUP), v. 62, n. 3, p. 771–788, jan 2019. Citado nas páginas 13, 15, 16 e 33.

HERNANDEZ, E.; WU, J.; CHADHA, A. Existence, uniqueness and approximate controllability of abstract differential equations with state-dependent delay. **Journal of Differential Equations**, Elsevier BV, v. 269, n. 10, p. 8701–8735, nov 2020. Citado nas páginas 33 e 34.

KOSOVALIĆ, N.; CHEN, Y.; WU, J. Algebraic-delay differential systems: C^0-extendable submanifolds and linearization. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 369, n. 5, p. 3387–3419, 2017. ISSN 0002-9947. Citado nas páginas 14 e 16.

KOSOVALIĆ, N.; MAGPANTAY, F. M. G.; CHEN, Y.; WU, J. Abstract algebraic-delay differential systems and age structured population dynamics. **Journal of Differential Equations**, v. 255, n. 3, p. 593–609, 2013. ISSN 0022-0396. Citado nas páginas 14 e 16.

KRISZTIN, T.; REZOUNENKO, A. Parabolic partial differential equations with discrete state-dependent delay: classical solutions and solution manifold. **Journal of Differential Equations**, v. 260, n. 5, p. 4454–4472, 2016. ISSN 0022-0396. Citado nas páginas 14, 16 e 19.

LUNARDI, A. **Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems**. [S.l.]: Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 1995. xviii+424 p. (Modern Birkhäuser Classics). [2013 reprint of the 1995 original] [MR1329547]. ISBN 978-3-0348-0556-8; 978-3-0348-0557-5. Citado na página 87.

LV, Y.; PEI, Y.; YUAN, R. Principle of linearized stability and instability for parabolic partial differential equations with state-dependent delay. **Journal of Differential Equations**, v. 267, n. 3, p. 1671–1704, 2019. ISSN 0022-0396. Citado nas páginas 14 e 16.

LV, Y.; YUAN, R.; PEI, Y. Smoothness of semiflows for parabolic partial differential equations with state-dependent delay. **Journal of Differential Equations**, v. 260, n. 7, p. 6201–6231, 2016. ISSN 0022-0396. Citado nas páginas 14, 16 e 19.

PAZY, A. **Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations**. [S.l.]: Springer-Verlag, New York, 1983. v. 44. viii+279 p. (Applied Mathematical Sciences, v. 44). ISBN 0-387-90845-5. Citado na página 90.

REZOUNENKO, A. V. On a class of PDEs with nonlinear distributed in space and time state-dependent delay terms. **Mathematical Methods in the Applied Sciences**, v. 31, n. 13, p. 1569–1585, 2008. ISSN 0170-4214. Citado na página 14.

____. Differential equations with discrete state-dependent delay: uniqueness and well-posedness in the space of continuous functions. **Nonlinear Analysis. Theory, Methods & Applications. An International Multidisciplinary Journal**, v. 70, n. 11, p. 3978–3986, 2009. ISSN 0362-546X. Citado nas páginas 14 e 16.

____. Non-linear partial differential equations with discrete state-dependent delays in a metric space. **Nonlinear Analysis. Theory, Methods & Applications. An International Multidisciplinary Journal**, v. 73, n. 6, p. 1707–1714, 2010. ISSN 0362-546X. Citado na página 14.

____. Non-local PDEs with a state-dependent delay term presented by Stieltjes integral. **Comptes Rendus Mathématique. Académie des Sciences. Paris**, v. 349, n. 3-4, p. 179–183, 2011. ISSN 1631-073X. Citado nas páginas 14 e 16.

____. A condition on delay for differential equations with discrete state-dependent delay. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v. 385, n. 1, p. 506–516, 2012. ISSN 0022-247X. Citado nas páginas 14 e 16.

REZOUNENKO, A. V.; WU, J. A non-local PDE model for population dynamics with state-selective delay: local theory and global attractors. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v. 190, n. 1-2, p. 99–113, 2006. ISSN 0377-0427. Citado nas páginas 14, 16 e 30.

SHAKOURIFAR, M.; ENRIGHT, W. H. Reliable approximate solution of systems of volterra integro-differential equations with time-dependent delays. **SIAM Journal on Scientific Computing**, v. 33, n. 3, p. 1134–1158, 2011. ISSN 1064-8275. Citado na página 30.

WALTHER, H.-O. The solution manifold and C^1-smoothness for differential equations with state-dependent delay. **Journal of Differential Equations**, v. 195, n. 1, p. 46–65, 2003. ISSN 0022-0396. Citado nas páginas 13 e 19.

YI, T.; CHEN, Y.; WU, J. Global dynamics of delayed reaction-diffusion equations in unbounded domains. **Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik. ZAMP. Journal of Applied Mathematics and Physics. Journal de Mathématiques et de Physique Appliquées**, v. 63, n. 5, p. 793–812, 2012. ISSN 0044-2275. Citado na página 30.

YOU, H.; YUAN, R. Global attractor for some partial functional differential equations with finite delay. **Nonlinear Analysis. Theory, Methods & Applications. An International Multidisciplinary Journal**, v. 72, n. 9-10, p. 3566–3574, 2010. ISSN 0362-546X. Citado na página 62.

ZHANG, C.; VANDEWALLE, S. General linear methods for Volterra integro-differential equations with memory. **SIAM Journal on Scientific Computing**, v. 27, n. 6, p. 2010–2031, 2006. ISSN 1064-8275. Citado nas páginas 14 e 30.

APÊNDICE

A

SEMIGRUPO ANALÍTICO E PROBLEMA SEMILINEAR ABSTRATO

Neste seção, incluiremos alguns resultados úteis relativos ao problema de Cauchy abstrato

$$u'(t) = Au(t) + \xi(t), \quad t \in [0,a], \tag{A.1}$$

$$u(0) = x \in X. \tag{A.2}$$

onde A é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico em um espaço de Banach X.

Definição 9. Uma função $u \in C([-p,b];X)$, $b > 0$, é dita ser uma solução fraca do problema (A.1)-(A.2) em $[-p,b]$ se $u_0 = x$ e

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)\xi(s)ds, \quad \forall t \in [0,b].$$

Definição 10. Uma função $u \in C([-p,b];X)$, $b > 0$ é dita ser uma solução estrita do problema (A.1)-(A.2) em $[-p,b]$ se $u_0 = x$, $u_{|_{[0,b]}} \in C([0,b];X_1) \cap C^1([0,b];X)$ e $u(\cdot)$ satisfaz (A.1) em $[0,b]$.

No lema a seguir, que segue dos resultados em (LUNARDI, 1995, Chapter IV), $u \in C([0,b];X)$ é a solução fraca de (A.1)-(A.2) e $\xi : [0,b] \mapsto X$ é uma função integrável.

Lema 17. Sob as condições anteriores, obtemos o seguintes resultados.

(a) Se $\xi \in L^\infty([0,b];X)$, $\alpha \in (0,1)$ e $T(\cdot)x \in C^\alpha([0,a];X)$, então $u \in C^\alpha([0,b];X)$ e

$$[u]_{C^\alpha([0,b];X)} \leq \| \xi \|_{L^\infty([0,b];X)} \left(\frac{C_1}{\alpha(1-\alpha)} + C_0\right) b^{1-\alpha} + [T(\cdot)x]_{C^\alpha([0,a];X)}.$$

(b) Se $\alpha \in (0,1)$, $\xi \in C^\alpha([0,b];X)$ e $x \in X_1$, então $u(\cdot)$ é uma solução estrita de (A.1)-(A.2) em $[0,b]$ e $\| Au \|_{C([0,b];X)} \leq C_0 \| Ax \| + (C_0+1) \| \xi \|_{C([0,b];X)} + C_1 [\xi]_{C^\alpha([0,b],X)} \frac{b^\alpha}{\alpha}$.

(c) Se $\xi \in C_{Lip}([0,b];X)$ e $x \in X_1$, então $u(\cdot)$ é uma solução de (A.1)-(A.2) em $[0,b]$ e

$$\| Au \|_{C([0,b];X)} \leq C_0 \| Ax \| + (C_0+1) \| \xi \|_{C([0,b];X)} + C_1 [\xi]_{C_{Lip}([0,b],X)} a.$$

(d) Se $q, q' > 1$ com $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$, $\xi \in L^q([0,b];X)$, $\alpha \in (0, \frac{1}{q'})$ e $T(\cdot)x \in C^\alpha([0,a];X)$, então $u \in C^\alpha([0,b];X)$ e

$$[u]_{C^\alpha([0,b];X)} \leq \| \xi \|_{L^q([0,b];X)} b^{\frac{1}{q'}-\alpha} \left(\frac{C_1}{(1-q'\alpha)^{\frac{1}{q'}}} + C_0 \right) + [T(\cdot)x]_{C^\alpha([0,a];X)}.$$

(e) Sejam $\gamma \geq 0$ e $p, p' > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ e $2\gamma < \frac{1}{p'}$. Assuma $\xi \in L^p([0,b];X)$ e $T(\cdot)x \in C^\mu([0,b];X_\gamma)$, então $u \in C^\theta([0,b];X_\gamma)$ para $\theta = \min\{\mu, \frac{1}{p'} - \gamma\}$ e

$$[u]_{C^\theta([0,b];X_\gamma)} \leq [T(\cdot)x]_{C^\mu([0,b];X_\gamma)} b^{\mu-\theta} + \| \xi \|_{L^p([0,b])} \left(\frac{C_{0,\gamma} b^{\frac{1}{p'}-\gamma-\theta}}{(1-\gamma p')^{\frac{1}{p'}}} + \frac{C_{1,\gamma} b^{\frac{1}{p'}-\gamma-\theta}}{\gamma(1-2\gamma p')^{\frac{1}{p'}}} \right).$$

APÊNDICE

B

SEMIGRUPO DE FUNÇÕES CONTÍNUAS

Nesta seção, $(Z, \|\cdot\|_Z)$ é um espaço normado e $(S(t))_{t\geq 0}$ é uma família de aplicações definidas de Z em Z.

Definição 11. Uma família de aplicações $(S(t))_{t\geq 0} \subset C(Z)$ é dita ser um semigrupo de funções contínuas em Z se

(I) $S(0)x = x$ para todo $x \in Z$, e

(II) $S(s)S(t) = S(t+s)$ para todo $t, s \geq 0$.

Se, adicionalmente, temos que

(III) $(t,x) \mapsto S(t)x$ é continua em $[0,\infty) \times Z$,

a família é dita ser um C_0-semigrupo de funções contínuas.

A seguir, A, B e C são subconjuntos de Z.

Definição 12. A semidistância de Hausdorff entre os subconjuntos A e B é definido por

$$dist_H(A,B) := \sup_{x\in A} \inf_{y\in B} \| x - y \|_Z .$$

Definição 13. Dizemos que

(i) B é invariante sob a ação do $(S(t))_{t\geq 0}$ se $S(t)B = B$ para todo $t \geq 0$, e

(ii) B atrai C sob a ação de $(S(t))_{t\geq 0}$, se $\lim_{t\to\infty} dist_H(S(t)C, B) = 0$.

Definição 14. Seja $(S(t))_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo em Z.

1. $(S(t))_{t\geq 0}$ é dito ser eventualmente compacto, se existe $t_0 \geq 0$ tal que $\overline{S(t_0)B}$ é compacto em Z para todo subconjunto limitado $B \subset Z$.

2. $(S(t))_{t\geq 0}$ é dito ser limitado dissipativo se existe um subconjunto limitado $W \subset Z$ tal que W atrai todos os subconjuntos limitados de Z sob a ação de $(S(t))_{t\geq 0}$.

Definição 15. Um subconjunto $\emptyset \neq B \subset Z$ é dito ser um global atrator de $(S(t))_{t\geq 0}$ se B é compacto, invariante e atrai todo subconjunto limitado de Z sob a ação de $(S(t))_{t\geq 0}$.

De (CARVALHO; LANGA; ROBINSON, 2012, Corolário 2.18) e (CARVALHO; LANGA; ROBINSON, 2012, Corolário 2.21), temos o resultado a seguir.

Proposição 31. (CARVALHO; LANGA; ROBINSON, 2012, Corolário 2.21) Se $(S(t))_{t\geq 0}$ é limitado dissipativo e eventualmente compacto, então $(S(t))_{t\geq 0}$ possui um atrator global.

Para detalhes adicionais sobre C_0-semigrupos e atratores, veja (CHOLEWA, 2000), (HALE, 1988) e (PAZY, 1983).

ICMC USP
SÃO CARLOS