UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Conjectura de Borel

Mariano Martin Rengifo Santander

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPG-Mat)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Mariano Martin Rengifo Santander

Conjectura de Borel

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Leandro Fiorini Aurichi

USP – São Carlos
Maio de 2021

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

R412c

Rengifo-Santander, Mariano Martin
Conjectura de Borel / Mariano Martin Rengifo-Santander; orientador Leandro Fiorini Aurichi. -- São Carlos, 2021.
88 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2021.

1. Jogos Topológicos. 2. Espaços Métricos. 3. Fundamentos da Matemática. 4. Teoria dos Conjuntos. 5. Números Ordinais e Cardinais. I. Aurichi, Leandro Fiorini, orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Mariano Martin Rengifo Santander

Borel's Conjecture

Dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP – in accordance with the requirements of the Mathematics Graduate Program, for the degree of Master in Science. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Leandro Fiorini Aurichi

USP – São Carlos
May 2021

Este trabalho é dedicado às vítimas da pandemia.

AGRADECIMENTOS

A pandemia me força a ficar longe das pessoas que me apoiam emocionalmente, por esse motivo, os agradecimentos principais são direcionados ao meu pai, à minha mãe, aos meus irmãos e à minha tia Hilda.

Durante os estudos de mestrado, compartilhei boas e más experiências com meus colegas, nunca esquecerei as risadas, mas, acima de tudo, sempre lembrarei da ajuda que recebi de meus amigos Omar, Pablo, Paulo, David, Lito, Juan, Elvis, Andreé, Andrés, Devis, Gabriel, Alexandre, Neilson, Eduardo e principalmente Mario. Sou muito grato a eles e também agradeço aos outros colegas que me ajudaram. Muito obrigado por tudo.

Um agradecimento especial é direcionado ao meu orientador, Professor Doutor Leandro Fiorini Aurichi, obrigado pelos ensinamentos, paciência, compreensão e apoio em tempos difíceis.

Também agradeço especialmente aos professores: Doutor Rodrigo Roque Dias, Doutora Lucia Renato Junqueira e Doutor Samuel Gomes da Silva. Suas observações ajudaram muito a melhorar o texto desta dissertação. Porém, assumo total responsabilidade por todos os erros e omissões contidos neste texto.

Finalmente, agradeço à Universidade de São Paulo e ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação pelas oportunidades que oferecem aos alunos para melhorar profissionalmente.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

“Porque eu quero te abraçar mais tarde,
estou me distanciando agora!”
(Martín Vizcarra)

RESUMO

RENGIFO-SANTANDER, M. M. **Conjectura de Borel**. 2021. 88 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2021.

A Conjectura de Borel diz que todo conjunto de números reais que tem medida nula forte é enumerável. Estendemos a noção de medida nula forte no contexto dos espaços métricos e dos espaços topológicos. Estudamos as relações entre a propriedade de Rothberger e a medida nula forte com alguns jogos topológicos. Mostramos as equivalências da Conjectura de Borel em termos dos jogos estudados.

Palavras-chave: Medida nula forte, propriedade de Rothberger.

ABSTRACT

RENGIFO-SANTANDER, M. M. **Borel's Conjecture**. 2021. 88 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2021.

Borel's Conjecture says that any set of real numbers that has strong measure zero is countable. We extend the notion of strong measure zero in the context of metric spaces and topological spaces. We studied the relations between the Rothberger's property and the strong measure zero with some topological games. We show the equivalences of Borel's Conjecture in terms of the games studied.

Keywords: Strong measure zero, Rothberger's property.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathfrak{b}$ — A menor cardinalidade para uma família ilimitada

ω_1 — O primeiro ordinal não enumerável

$\mathbb{R}$ — Conjunto dos números reais

ω — Conjunto dos números naturais

$\operatorname{diam}(A)$ — Diâmetro do conjunto A em um espaço métrico

$\bigcup_{i\in I} A_i$ — União de conjuntos A_i indexados pelo conjunto de índices I

$\mathbb{R}^{\omega}_{>0}$ — Conjunto de todas as sequências de números reais positivos

$\dot{\bigcup}_{i\in I} A_i$ — União de conjuntos disjuntos A_i indexados pelo conjunto de índices I

$\langle X, d\rangle$ — Espaço métrico X com a métrica d

$\cap$ — Interseção de conjuntos

$\mathbb{Z}^{\kappa}$ — Conjunto de todas as funções de domínio κ e contradomínio $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}$ — Conjunto dos números inteiros

$\prod_{i\in I} A_i$ — Produto cartesiano de conjuntos A_i indexados pelo conjunto de índices I

2^{ω} — Espaço de Cantor

π_n — Função projeção na $n-$ésima coordenada

$f^{-1}[A]$ — Imagem inversa do conjunto A pela função f

ω^{ω} — Conjunto de todas as sequências de números naturais

$\max A$ — Elemento máximo do conjunto A

$f \restriction A$ — A restrição da função f ao conjunto A

$\bigcap_{i\in I} A_i$ — Interseção de conjuntos A_i indexados pelo conjunto de índices I

$\mathbb{Q}$ — Conjunto dos números racionais

$d(x,y)$ — Distância entre os pontos x e y de um espaço métrico com a métrica d

$\bigcup \mathscr{C}$ — União de elementos da coleção $\mathscr{C}$

$d(x,A)$ — Distância do ponto x ao conjunto A em um espaço métrico com a métrica d

$\cup$ — União de conjuntos

$\mathbb{Q}_{>0}$ — Conjunto dos números racionais positivos

$B(a,r)$ — Bola aberta de centro a e raio r em um espaço métrico

$\inf A$ — Ínfimo do conjunto A

$\varnothing$ — O conjunto vazio

$\sup A$ — Supremo do conjunto A

$f : A \longrightarrow B$ — Função f de domínio A e contradomínio B

$\mathbb{R}_{>0}$ — Conjunto dos números reais positivos

$f[A]$ — Imagem do conjunto A pela função f

$\mathbb{C}$ — Conjunto dos números complexos

$2^{\aleph_0}$ — Cardinalidade do conjunto de números reais

$\min A$ — Elemento mínimo do conjunto A

$f^{(n)}$ — Derivada $n-$ésima da função f

$|A|$ — Cardinalidade do conjunto A

$\aleph_0$ — A menor cardinalidade para um conjunto infinito

$\aleph_1$ — A menor cardinalidade para um conjunto não enumerável

$MS(X)$ — Jogo de Mycielski-Solovay no espaço métrico X

$\mathscr{L}$ — A coleção de todos os conjuntos limitados de um espaço métrico

$\mathscr{L}^{<\omega}$ — Conjunto de todas as sequências finitas de conjuntos limitados

$\mathbb{R}_{>0}^{<\omega}$ — Conjunto de todas as sequências finitas de números reais positivos

$s^\frown q$ — A sequência finita obtida de adicionar a coordenada q no final da sequência finita s

$\mathbb{Q}_{>0}^{<\omega}$ — Conjunto de todas as sequências finitas de números racionais positivos

$[\mathscr{L}]^{<\omega}$ — A coleção de todos os subconjuntos finitos de $\mathscr{L}$

$\mathscr{P}(X)$ — A coleção de todos os subconjuntos do conjunto X

$B[a,r]$ — Bola fechada de centro a e raio r em um espaço métrico

$MS_\sigma(X,\mathscr{F})$ — Jogo Sigma de Mycielski-Solovay no espaço métrico $\sigma-$totalmente limitado X onde $\mathscr{F}$ é uma sequência crescente de conjuntos totalmente limitados tais que a união deles é X

$\limsup\limits_{n\in\omega} B_n$ — Limite superior dos conjuntos B_n

$\mathscr{L}_n$ — A coleção de todos os subconjuntos limitados de F_n onde F_n é um subconjunto totalmente limitado de um espaço métrico $\sigma-$totalmente limitado

$\overline{U}$ — Fecho do conjunto U

$\{0,1\}^n$ — Conjunto de todas as sequências de n coordenadas de zeros e uns

$\{0,1\}^\omega$ — Conjunto de todas as sequências de zeros e uns

$\mathring{E}$ — Interior do conjunto E

$\dot{\cup}$ — União de conjuntos disjuntos

$S_1(\mathscr{A},\mathscr{B})$ — Princípio de seleção

$S_1(\mathscr{O}(X),\mathscr{O}(X))$ — X é um espaço de Rothberger

$\mathscr{O}(X)$ — Conjunto de todas as coberturas abertas do espaço topológico X

$\mathscr{O}$ — Conjunto de todas as coberturas abertas de um espaço topológico

$G_1(\mathscr{A},\mathscr{B})$ — Jogo associado ao princípio de seleção $S_1(\mathscr{A},\mathscr{B})$

$G_1(\mathscr{O},\mathscr{O})$ — Jogo de Rothberger

$S_1(\mathscr{O},\mathscr{O})$ — Propriedade de Rothberger

τ — Topologia de um espaço topológico

$\tau^{<\omega}$ — Conjunto de todas as sequências finitas de conjuntos abertos

$\mathscr{O}^{<\omega}$ — Conjunto de todas as sequências finitas de coberturas abertas

τ_d — Topologia induzida pela métrica d

$(\tau\setminus\{\varnothing\})^{<\omega}$ — Conjunto de todas as sequências finitas de conjuntos abertos não vazios

$X^{<\omega}$ — Conjunto de todas as sequências finitas de elementos de X

ω^n — Conjunto de todas as sequências de n coordenadas de números naturais

$\omega^{<\omega}$ — Conjunto de todas as sequências finitas de números naturais

$[X]^{<\omega}\setminus\{\varnothing\}$ — Conjunto de todos os subconjuntos finitos não vazios de X

$([X]^{<\omega}\setminus\{\varnothing\})^{<\omega}$ — Conjunto de todas as sequências finitas de subconjuntos finitos não vazios de X

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 21

2 PRELIMINARES 25
2.1 Famílias ilimitadas 25
2.2 Generalizações de um conceito de medida 27
2.3 Algumas equivalências da Conjectura de Borel 34

3 JOGOS INFINITOS ASSOCIADOS À PROPRIEDADE DE MEDIDA NULA FORTE 47
3.1 Jogo de Mycielski-Solovay 47
3.2 Jogo Sigma de Mycielski-Solovay 51
3.3 Teorema de Galvin-Mycielski-Solovay sobre Produtos Cartesianos . 55
3.4 Conjectura de Prikry e a pergunta de Sierpiński 60
3.5 A pergunta de Fickett 62

4 JOGOS INFINITOS ASSOCIADOS À PROPRIEDADE DE ROTHBERGER 67
4.1 Princípios de seleção e o Jogo de Rothberger 68
4.2 Jogos duais e o Jogo ponto-aberto 73
4.3 Jogos equivalentes e o Jogo finito-aberto 78
4.4 Jogo Sigma de Rothberger, Jogo Sigma ponto-aberto e Jogo Sigma finito-aberto 83

REFERÊNCIAS 87

CAPÍTULO

1

INTRODUÇÃO

A maioria da terminologia e notação usada neste texto é baseada no paper de Leandro F. Aurichi e Rodrigo R. Dias (AURICHI; DIAS, 2020).

Esta dissertação tem como objetivo apresentar algumas relações existentes entre a propriedade de medida nula forte e a propriedade C'' de Rothberger (chamada simplesmente de propriedade de Rothberger). Em tal sentido, analisamos as relações entre os jogos topológicos associados à propriedade de medida nula forte e à propriedade de Rothberger. Este trabalho é organizado da seguinte forma:

No Capítulo 2 de preliminares o resultado principal é mostrar quatro equivalências da Conjectura de Borel que serão úteis para demonstrar outras equivalências em termos dos jogos dos próximos capítulos. Também são importantes as propriedades dos espaços de medida nula forte e dos espaços de Rothberger.

Na Seção 2.1 mostramos algumas propriedades de famílias ilimitadas que foram usadas por Aurichi e Dias (AURICHI; DIAS, 2020) para provar as quatro equivalências mencionadas.

Na Seção 2.2 apresentamos algumas generalizações de um conceito de medida. Borel (BOREL, 1919) introduziu a propriedade de medida nula forte para conjuntos de números reais. Carlson (CARLSON, 1993) generaliza a noção de medida nula forte para espaços métricos. Rothberger (ROTHBERGER, 1938) introduziu a propriedade C'' que é chamada de propriedade de Rothberger e generaliza a noção de medida nula forte para espaços topológicos. Scheepers (SCHEEPERS, 1999) introduziu a propriedade de medida nula topológica que generaliza a noção de medida nula forte para subconjuntos de um espaço topológico. Rothberger (ROTHBERGER, 1938) introduziu a propriedade de Rothberger-limitado que generaliza a noção de medida nula forte para subconjuntos de um grupo topológico. Aurichi e Dias (AURICHI; DIAS, 2020) analisaram os jogos associados de todas as propriedades mencionadas. Vamos analisar as propriedades mencionadas mas estamos interessados somente nos jogos associados à propriedade de medida nula forte e os jogos associados à propriedade de Rothberger.

Na Seção 2.3 apresentamos formalmente a Conjectura de Borel. Provamos que o espaço de Cantor não é Rothberger para mostrar a consistência da negação da Conjectura de Borel. Apresentamos a Conjectura de Borel para espaços métricos. Galvin conjecturou que Conjectura de Borel implica a Conjectura de Borel para espaços métricos. Carlson (CARLSON, 1993) demonstrou a Conjetura de Galvin. Aurichi e Dias (AURICHI; DIAS, 2020) introduziram a Conjectura R-Borel. Rothberger (ROTHBERGER, 1941) demonstrou que a Conjectura R-Borel implica a Conjectura de Borel. Apresentamos a Conjectura R-Borel para espaços métricos. Finalmente, demonstramos a equivalência entre as quatro conjectura mencionadas.

No Capítulo 3 apresentamos dois jogos topológicos associados à propriedade de medida nula forte: O Jogo de Mycielski-Solovay e o Jogo Sigma de Mycielski-Solovay.

Na Seção 3.1 definimos o Jogo de Mycielski-Solovay e as estratégias de seus jogadores. Também definimos quando temos que uma estratégia é vencedora. Essa definição pode ser estendida a outros jogos. Galvin, Mycielski e Solovay (GALVIN; MYCIELSKI; SOLOVAY, 2017) mostraram que um espaço métrico é enumerável se, e somente se, o Jogador II tem estratégia vencedora no Jogo de Mycielski-Solovay. Aurichi e Dias (AURICHI; DIAS, 2020) mostraram que um espaço métrico $\sigma-$totalmente limitado tem medida nula forte se, e somente se, o Jogador I não tem estratégia vencedora no Jogo de Mycielski-Solovay. A partir daí, são estabelecidas as primeiras equivalências da Conjectura de Borel em termos de jogos determinados de Mycielski-Solovay.

Na Seção 3.2 definimos o Jogo Sigma de Mycielski-Solovay e as estratégias de seus jogadores. Galvin, Mycielski e Solovay (GALVIN; MYCIELSKI; SOLOVAY, 2017) mostraram que, dado um espaço métrico $\sigma-$totalmente limitado, os conjuntos de medida nula forte dentro dele podem ser caracterizados pela inexistência de uma estratégia vencedora no Jogo de Mycielski-Solovay e, também, pela inexistência de uma estratégia vencedora no Jogo Sigma de Mycielski-Solovay.

Na Seção 3.3 mostramos a prova feita por Galvin, Mycielski e Solovay (GALVIN; MYCIELSKI; SOLOVAY, 2017) do Teorema de Galvin-Mycielski-Solovay sobre Produtos Cartesianos.

Na Seção 3.4 adaptamos um teorema a partir do paper de Galvin, Mycielski e Solovay (GALVIN; MYCIELSKI; SOLOVAY, 2017) para mostrar que a Conjectura de Prikry é verdadeira e responder a pergunta de Sierpiński

Na Seção 3.5 adaptamos um teorema a partir do paper de Galvin, Mycielski e Solovay (GALVIN; MYCIELSKI; SOLOVAY, 2017) para mostrar responder a pergunta de Fickett.

No Capítulo 4 apresentamos três jogos topológicos associados à propriedade de Rothberger: O Jogo de Rothberger, o Jogo ponto-aberto e o Jogo finito-aberto. No final deste capítulo definimos as variantes Sigma de esses jogos para obter doze equivalências da Conjectura de Borel.

Na Seção 4.1 apresentamos o princípio de seleção $S_1(\mathscr{A},\mathscr{B})$ e seu jogo associado $G_1(\mathscr{A},\mathscr{B})$ junto com as estratégias de seus jogadores. Em particular, observamos que a propriedade de Rothberger é definida por um tipo de princípio de seleção $S_1(\mathscr{O}(X),\mathscr{O}(X))$, onde $\mathscr{O}(X)$ denota o conjunto de todas as coberturas abertas do espaço topológico X, e seu jogo associado $G_1(\mathscr{O}(X),\mathscr{O}(X))$ é chamado de Jogo de Rothberger. Aurichi e Dias (AURICHI; DIAS, 2020) estabeleceram que, no caso dos espaços métricos compactos, a propriedades de medida nula forte e a prorpriedade de Rothberger são equivalentes. A partir daí, podemos concluir que o espaço de Cantor 2^{ω} não tem medida nula forte.

Na Seção 4.2 apresentamos a noção de jogos duais. Também definimos o Jogo ponto-aberto e as estratégias de seus jogadores. Galvin (GALVIN, 1978) demonstrou que o Jogo de Rothberger e o Jogo ponto-aberto são jogos duais. Telgarsky (TELGÁRSKY, 1975) e Galvin (GALVIN, 1978) mostraram que em um espaço topológico onde todo ponto é G_δ, o Jogador II tem estratégia vencedora no Jogo de Rothberger se, e somente se, o espaço é enumerável. Em particular, no campo dos espaços métricos, mostramos que a Conjectura de Borel implica que o Jogo de Rothberger e o Jogo ponto-aberto são jogos determinados.

Na Seção 4.3 apresentamos a noção de jogos equivalentes. Aurichi e Dias (AURICHI; DIAS, 2020) mostram que, no caso dos espaços métricos compactos, o Jogo de Mycielski-Solovay e o Jogo de Rothberger são jogos equivalentes. Definimos o Jogo finito-aberto e as estratégias de seus jogadores. Galvin (GALVIN, 1978) demonstrou que o Jogo de finito-aberto e o Jogo ponto-aberto são jogos equivalentes. A partir daí, deduzimos que o Jogo de Rothberger e o Jogo finito-aberto são jogos duais. Em particular, no campo dos espaços métricos deduzimos que a Conjectura de Borel implica que o Jogo finito-aberto é determinado. Concluimos que o Jogo de Rothberger, o Jogo ponto-aberto e o Jogo finito-aberto são jogos determinados se um deles é determinado.

Na Seção 4.4 apresentamos o Jogo Sigma de Rothberger, o Jogo Sigma ponto-aberto e o Jogo Sigma finito-aberto. Pawlikowski (PAWLIKOWSKI, 1994) demonstrou que se X é um espaço topológico de Rothberger, então o Jogador I não tem uma estratégia vencedora no Jogo Sigma de Rothberger em X. Demonstramos que se o Jogador I não tem uma estratégia vencedora no Jogo Sigma de Rothberger, então o Jogador I não tem uma estratégia vencedora no Jogo de Rothberger. Deduzimos que se X é um espaço topológico de Rothberger, então o Jogador I não tem uma estratégia vencedora no Jogo de Rothberger em X. Finalmente, obtemos doze equivalências da Conjectura de Borel.

CAPÍTULO

2

PRELIMINARES

Borel (BOREL, 1919) introduziu a propriedade de medida nula forte para conjuntos de números reais e percebeu que todo conjunto enumerável de números reais tem medida nula forte. A Conjectura de Borel é "todo conjunto de números reais tem medida nula forte é enumerável." A propriedade de medida nula forte pode ser generalizada para espaços métricos. A Conjectura de Borel para espaços métricos é "todo espaço métrico de medida nula forte é enumerável." Rothberger (ROTHBERGER, 1938) introduziu uma propriedade que generaliza a noção de medida nula forte para espaços topológicos. A Conjectura R-Borel é "todo conjunto de números reais que tem a propriedade de Rothberger é enumerável" e a Conjectura R-Borel para espaços métricos é "todo espaço métrico com a propriedade de Rothberger é enumerável." As quatro conjecturas mencionadas são equivalentes.

2.1 Famílias ilimitadas

Definição 2.1.1. Sejam $f, g \in \omega^\omega$. Dizemos que $f \leqslant^* g$ se $\{n \in \omega : f(n) > g(n)\}$ é finito.

Proposição 2.1.2. Se $f, g \in \omega^\omega$, então $f \leqslant^* g$ se, e somente se, existe $n_0 \in \omega$ tal que, para todo $n \geqslant n_0$, $f(n) \leqslant g(n)$.

Demonstração. Suponha que $f \leqslant^* g$. Pela Definição 2.1.1, $\{n \in \omega : f(n) > g(n)\}$ é finito. Seja $m = \max\{n \in \omega : f(n) > g(n)\}$. Nenhum $n > m$ pertence ao conjunto $\{n \in \omega : f(n) > g(n)\}$. Escreva $n_0 = m + 1$. Então, para todo $n \geqslant n_0$, $f(n) \leqslant g(n)$.

Reciprocamente, suponha que existe $n_0 \in \omega$ tal que, para todo $n \geqslant n_0$, $f(n) \leqslant g(n)$. Se n é um número natural tal que $f(n) > g(n)$, então $n < n_0$. Daí, $\{n \in \omega : f(n) > g(n)\} \subseteq n_0$. Assim, $\{n \in \omega : f(n) > g(n)\}$ é finito. Pela Definição 2.1.1, $f \leqslant^* g$.

□

Definição 2.1.3. Uma **pré-ordem** é uma relação reflexiva e transitiva.

Proposição 2.1.4. A relação $\leqslant^*$ é uma pré-ordem.

Demonstração. Considere $f \in \omega^\omega$ arbitrário. Temos que, para todo $n \geqslant 0$, $f(n) \leqslant f(n)$. Pela Proposição 2.1.2, $f \leqslant^* f$. Portanto, $\leqslant^*$ é reflexiva.

Considere $f, g, h \in \omega^\omega$ arbitrários com $f \leqslant^* g$ e $g \leqslant^* h$. Pela Proposição 2.1.2, existe $n_1 \in \omega$ tal que, para todo $n \geqslant n_1$, $f(n) \leqslant g(n)$, e também existe $n_2 \in \omega$ tal que, para todo $n \geqslant n_2$, $g(n) \leqslant h(n)$. Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Temos que, para todo $n \geqslant n_0$, $f(n) \leqslant g(n)$ e $g(n) \leqslant h(n)$. Então, para todo $n \geqslant n_0$, $f(n) \leqslant h(n)$. Pela Proposição 2.1.2, $f \leqslant^* h$. Portanto, $\leqslant^*$ é transitiva.

Assim, $\leqslant^*$ é uma pré-ordem.

□

Definição 2.1.5. Dizemos que uma família $F \subseteq \omega^\omega$ é uma **família ilimitada** se não existe $g \in \omega^\omega$ tal que, para todo $f \in F$, $f \leqslant^* g$.

Proposição 2.1.6. A família ω^ω é uma família ilimitada.

Demonstração. Considere $g \in \omega^\omega$ arbitrário. Defina $f \in \omega^\omega$ por $f(n) = g(n) + 1$ para cada $n \in \omega$. Logo o conjunto $\{n \in \omega : f(n) > g(n)\}$ é infinito. Pela Definição 2.1.1, $f \nleqslant^* g$. Portanto, ω^ω é uma família ilimitada.

□

Proposição 2.1.7. Nenhuma família enumerável é ilimitada.

Demonstração. Vamos assumir por contradição que $\{f_n : n \in \omega\}$ é uma família enumerável ilimitada em ω^ω. Defina $g \in \omega^\omega$ por $g(n) = \max\limits_{m \leqslant n} f_m(n)$. Pela Definição 2.1.5, existe algum $m \in \omega$ tal que $f_m \nleqslant^* g$. Pela Proposição 2.1.2, $f_m(n) > g(n)$ para algum $n \geqslant m$ mas isso contradiz a definição de g.

□

Definição 2.1.8. Definimos $\mathfrak{b}$ como sendo a menor cardinalidade possível de uma família ilimitada.

Observação 2.1.9. A Hipótese do Contínuo pode ser escrita como $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$. Pela Proposição 2.1.7, $\aleph_1 \leqslant \mathfrak{b}$. Pela Proposição 2.1.6, $\mathfrak{b} \leqslant 2^{\aleph_0}$. Logo a Hipótese do Contínuo implica que $\mathfrak{b} = \aleph_1$.

Proposição 2.1.10. Sejam as famílias $F \subseteq \omega^\omega$ e $G \subseteq \omega^\omega$ de maneira que, para cada $f \in F$, existe algum $g \in G$ tal que $f \leqslant^* g$. Se F é uma família ilimitada, então G também é uma família ilimitada.

Demonstração. Vamos usar a contrapositiva. Suponha que G não é uma família ilimitada. Então existe $h \in \omega^\omega$ tal que, para todo $g \in G$, $g \leqslant^* h$. Considere $f \in F$ arbitrário. Logo existe algum

$g \in G$ tal que $f \leqslant^* g$. Pela transitividade de $\leqslant^*$ e pelo que foi dito acima, temos que $f \leqslant^* h$. Portanto, F não é uma família ilimitada.

□

Lema 2.1.11. Se $\mathfrak{b} = \aleph_1$, então existe uma família ilimitada $\{g_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ em ω^ω tal que

$$\alpha < \beta < \omega_1 \Longrightarrow g_\alpha \leqslant^* g_\beta.$$

Demonstração. Considere $\{f_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ uma família ilimitada em ω^ω. Usando recursão transfinita, seja $g_0 = f_0$ e, para cada $\beta < \omega_1$, assuma já definido o conjunto $\{g_\alpha : \alpha < \beta\}$ que é enumerável. Fixe uma enumeração $\{h_n\}_{n\in\omega} = \{g_\alpha : \alpha < \beta\} \cup \{f_\beta\}$. Defina $g_\beta \in \omega^\omega$ por $g_\beta(n) = \max\limits_{m\leqslant n} h_m(n)$ de modo que, para cada $m \in \omega$, se $n \geqslant m$, então $g_\beta(n) \geqslant h_m(n)$. Portanto, $h_m \leqslant^* g_\beta$ para todo $m \in \omega$. Como $f_\beta = h_m$ para algum $m \in \omega$, $f_\beta \leqslant^* g_\beta$ para todo $\beta < \omega_1$. Pela Proposição 2.1.10, $\{g_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ é uma família ilimitada em ω^ω. Finalmente, se $\alpha < \beta < \omega_1$, então $g_\alpha = h_m$ para algum $m \in \omega$, de onde $g_\alpha \leqslant^* g_\beta$.

□

Pela Observação 2.1.9, a consequência do Lema 2.1.11 vale sob a Hipótese do Contínuo.

2.2 Generalizações de um conceito de medida

Émile Borel introduziu um tipo de generalização do conceito de medida em $\mathbb{R}$:

Definição 2.2.1. (BOREL, 1919) Um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ tem **medida nula forte** se, para qualquer sequência $\langle \varepsilon_n \rangle_{n\in\omega}$ de números reais positivos, existe uma sequência $\langle I_n \rangle_{n\in\omega}$ de intervalos abertos satisfazendo [1] $\operatorname{diam}(I_n) \leqslant \varepsilon_n$ para cada $n \in \omega$ e $X \subseteq \bigcup\limits_{n\in\omega} I_n$.

Todo conjunto de números reais que tem medida nula forte também tem medida nula de Lebesgue pois se $X \subseteq \mathbb{R}$ tem medida nula forte, então, para todo $\varepsilon > 0$, na Definição 2.2.1 podemos definir, para cada $n \in \omega$, $\varepsilon_n = \varepsilon$ e obtemos que X tem medida nula de Lebesgue.

Na medida nula de Lebesgue os diâmetros dos intervalos são menores que um número positivo fixo, enquanto na medida nula forte o diâmetro de cada intervalo deve diminuir se a sequência de números reais positivos estiver diminuindo. Por exemplo, sabemos que o Conjunto de Cantor do intervalo $[0,1]$ tem medida nula de Lebesgue. No processo iterativo da construção do Conjunto de Cantor, para $\varepsilon > 0$ fixo, podemos encontrar um $n \in \omega$ tal que todos os intervalos dos passos maiores que n têm comprimento menor que ε. Portanto, o Conjunto de Cantor tem medida nula de Lebesgue. Porém, não podemos concluir que o Conjunto de Cantor tem medida nula forte se a sequência de números reais positivos estiver diminuindo "mais rápido" do que diminui o comprimento dos intervalos do processo iterativo da construção do Conjunto de Cantor.

[1] $\operatorname{diam}(I_n) = \sup\{|x-y| : x, y \in I_n\}$

Podemos observar na Seção 4.1 que o Conjunto de Cantor não tem medida nula forte. Para isso vamos usar o fato bastante conhecido que Conjunto de Cantor do intervalo $[0,1]$ é homeomorfo a 2^ω pois os elementos do Conjunto de Cantor são os números reais entre 0 e 1 que na base 3 podem ser escritos usando somente os dígitos 0 e 2, isto é, o Conjunto de Cantor é homeomorfo a $\{0,2\}^\omega$ que é homeomorfo a $\{0,1\}^\omega = 2^\omega$ onde os conjuntos da forma $\{a,b\}$ tem a topologia discreta e o conjuntos da forma $\{a,b\}^\omega$ tem a topologia de Tychonoff segundo a Definição 2.3.2. A partir do Exemplo 2.3.3 vamos dizer que 2^ω é o espaço de Cantor.

Algumas propriedades simples que vamos usar:

Exemplo 2.2.2. (BOREL, 1919) Todo conjunto enumerável de números reais tem medida nula forte.

Demonstração. Considere um conjunto enumerável arbitrário $\{x_n\}_{n\in\omega} \subseteq \mathbb{R}$ e uma sequência arbitrária $\langle \varepsilon_n \rangle_{n\in\omega} \in \mathbb{R}^\omega_{>0}$. Para cada $n \in \omega$, defina $I_n = \left(x_n - \frac{\varepsilon_n}{2}, x_n + \frac{\varepsilon_n}{2}\right)$. Então a sequência de intervalos abertos $\langle I_n \rangle_{n\in\omega}$ satisfaz $\operatorname{diam}(I_n) \leqslant \varepsilon_n$ para cada $n \in \omega$ e $\{x_n\}_{n\in\omega} \subseteq \bigcup_{n\in\omega} I_n$. Portanto, $\{x_n\}_{n\in\omega}$ tem medida nula forte.

□

Exemplo 2.2.3. Todo subconjunto incluído em um conjunto de números reais que tem medida nula forte também tem medida nula forte.

Demonstração. Se $Y \subseteq X \subseteq \mathbb{R}$ e X tem medida nula forte, então, para qualquer sequência $\langle \varepsilon_n \rangle_{n\in\omega} \in \mathbb{R}^\omega_{>0}$, existe uma sequência $\langle I_n \rangle_{n\in\omega}$ de intervalos abertos satisfazendo $\operatorname{diam}(I_n) \leqslant \varepsilon_n$ para cada $n \in \omega$ e $Y \subseteq X \subseteq \bigcup_{n\in\omega} I_n$. Portanto, Y tem medida nula forte.

□

Exemplo 2.2.4. Se $r > 0$ e X é um conjunto de números reais que tem medida nula forte, então o conjunto $rX = \{rx : x \in X\}$ tem medida nula forte.

Demonstração. Sejam $r > 0$ e X um conjunto de números reais que tem medida nula forte. Considere uma sequência arbitrária $\langle \varepsilon_n \rangle_{n\in\omega} \in \mathbb{R}^\omega_{>0}$. Defina a sequência $\left\langle \frac{\varepsilon_n}{r} \right\rangle_{n\in\omega} \in \mathbb{R}^\omega_{>0}$. Como X tem medida nula forte, existe uma sequência $\langle I_n \rangle_{n\in\omega}$ de intervalos abertos satisfazendo $\operatorname{diam}(I_n) \leqslant \frac{\varepsilon_n}{r}$ para cada $n \in \omega$ e $X \subseteq \bigcup_{n\in\omega} I_n$. Então a sequência de intervalos abertos $\langle rI_n \rangle_{n\in\omega}$ satisfaz $\operatorname{diam}(rI_n) = r\operatorname{diam}(I_n) \leqslant \varepsilon_n$ para cada $n \in \omega$ e $rX \subseteq r\bigcup_{n\in\omega} I_n = \bigcup_{n\in\omega} rI_n$. Portanto, rX tem medida nula forte.

□

Exemplo 2.2.5. A união enumerável de conjuntos de números reais que têm medida nula forte também tem medida nula forte.

Demonstração. Seja $X = \bigcup_{k\in\omega} X_k$ onde cada X_k é um conjunto de números reais que tem medida nula forte. Considere uma sequência arbitrária $\langle \varepsilon_n \rangle_{n\in\omega} \in \mathbb{R}^{\omega}_{>0}$. Escolha uma partição de ω em uma quantidade infinita de conjuntos infinitos e disjuntos como $\omega = \dot{\bigcup}_{k\in\omega} M_k$. Para cada $k \in \omega$, considere a sequência $\langle \varepsilon_m \rangle_{m\in M_k}$. Como cada X_k tem medida nula forte, para cada $k \in \omega$, existe uma sequência de intervalos abertos $\langle I_{k,m} \rangle_{m\in M_k}$ satisfazendo $\operatorname{diam}(I_{k,m}) \leqslant \varepsilon_m$ para cada $m \in M_k$ e $X_k \subseteq \bigcup_{m\in M_k} I_{k,m}$. Então $X = \bigcup_{k\in\omega} X_k \subseteq \bigcup_{k\in\omega} \bigcup_{m\in M_k} I_{k,m}$ e, para cada $n \in \omega$, existe um único $k \in \omega$ tal que $n \in M_k$ e $\operatorname{diam}(I_{k,n}) \leqslant \varepsilon_n$. Portanto, X tem medida nula forte.

□

Pelo Exemplo 2.2.3 e pelo Exemplo 2.2.5 os seguentes conjuntos de números reais têm medida nula forte: O conjunto vazio, os conjuntos unitários, os conjuntos finitos e a união finita de conjuntos de números reais que têm medida nula forte.

Podemos observar na Seção e na Seção algumas caracterizações dos conjuntos de números reais que têm medida nula forte.

Timothy J. Carlson apontou no seu paper que a noção de medida nula forte é generalizada para espaços métricos arbitrários de forma obvia:

Definição 2.2.6. (CARLSON, 1993) Um espaço métrico $\langle X, d \rangle$ é dito ter **medida nula forte** se, para qualquer sequência $\langle \varepsilon_n \rangle_{n\in\omega}$ de números reais positivos, existe uma sequência $\langle A_n \rangle_{n\in\omega}$ de conjuntos satisfazendo [2] $\operatorname{diam}(A_n) \leqslant \varepsilon_n$ para cada $n \in \omega$ e $X = \bigcup_{n\in\omega} A_n$.

Observação 2.2.7. Se $X \subseteq \mathbb{R}$, então a Definição 2.2.6 é equivalente à Definição 2.2.1.

Pois, para ir da Definição 2.2.1 para a Definição 2.2.6, escrevemos $A_n = I_n \cap X$ para cada $n \in \omega$, e para ir da Definição 2.2.6 para a Definição 2.2.1, escolhemos intervalos I_n de diâmetro ε_n que cobrem cada A_n com $\operatorname{diam}(A_n) \leqslant \dfrac{\varepsilon_n}{2}$.

Observação 2.2.8. Qualquer subespaço de um espaço de medida nula forte também é de medida nula forte.

Pois, se Y é subespaço de um espaço de medida nula forte X, então, para qualquer sequência $\langle \varepsilon_n \rangle_{n\in\omega} \in \mathbb{R}^{\omega}_{>0}$, se $\langle A_n \rangle_{n\in\omega}$ é a sequência de conjuntos que satisfaz a definição de medida nula forte para X, então a sequência de conjuntos $\langle A_n \cap Y \rangle_{n\in\omega}$ satisfaz a definição de medida nula forte para Y.

Observação 2.2.9. Todo espaço métrico enumerável é de medida nula forte.

Pois, se $\{x_n\}_{n\in\omega}$ é um espaço métrico enumerável, então, para qualquer sequência $\langle \varepsilon_n \rangle_{n\in\omega} \in \mathbb{R}^{\omega}_{>0}$, a sequência de conjuntos unitários $\langle \{x_n\} \rangle_{n\in\omega}$ satisfaz a definição de medida nula forte para $\{x_n\}_{n\in\omega}$. Em particular, os espaços métricos finitos são de medida nula forte.

[2] $\operatorname{diam}(A_n) = \sup\{d(x,y) : x, y \in A_n\}$

Podemos observar algumas caracterizações da propriedade de medida nula forte para espaços métricos $\sigma-$totalmente limitadas e para espaços métricos compactos na Seção 3.2 e na Seção 4.1 respectivamente.

Fritz Rothberger introduziu a propriedade C'' que poderia ser vista como generalização da noção de medida nula forte para os espaços topológicos. Vamos usar a terminologia que Aurichi e Dias usam no seu paper (AURICHI; DIAS, 2020), a propriedade C'' é chamada por eles de propriedade de Rothberger:

Definição 2.2.10. (ROTHBERGER, 1938) Um espaço topológico X é dito ser **Rothberger** se, para qualquer sequência $\langle \mathscr{C}_n \rangle_{n\in\omega}$ de coberturas abertas de X, existe uma sequência $\langle U_n \rangle_{n\in\omega}$ tal que cada $U_n \in \mathscr{C}_n$ e $X = \bigcup\limits_{n\in\omega} U_n$.

Podemos observar a caracterização da propriedade de Rothberger como propriedade seletiva definida por um princípio de seleção na Seção 4.1

Na Seção 2.3 vamos mostrar vários resultados relacionados com a propriedade de medida nula forte e a propriedade de Rotherger para obter algumas equivalências da Conjectura de Borel.

No Capítulo 3 e no Capítulo 4 vamos ver jogos infinitos em espaços métricos de medida nula forte e em espaços de Rothberger respectivamente. Não vamos ver jogos infinitos em outros espaços que generalizam a noção de medida nula forte. Porém, vamos finalizar esta seção apontando mais algumas generalizações que apareceram na Introdução do paper de Aurichi e Dias (AURICHI; DIAS, 2020).

Marion Scheepers propôs uma propriedade semelhante à propriedade de Rothberger mas definida para um subconjunto de um espaço topológico:

Definição 2.2.11. (SCHEEPERS, 1999) Um subconjunto X de um espaço topológico Y é de **medida nula topológica** se, para qualquer sequência $\langle \mathscr{V}_n \rangle_{n\in\omega}$ de coberturas abertas de Y, podemos escolher $V_n \in \mathscr{V}_n$ para cada $n \in \omega$ de modo que $X \subseteq \bigcup\limits_{n\in\omega} V_n$.

Definição 2.2.12. Um **superespaço** de um espaço topológico X é um espaço topológico Y tal que $X \subseteq Y$ e todo conjunto aberto de X é a interseção de X com algum conjunto aberto de Y.

Na Introdução do paper de Aurichi e Dias (AURICHI; DIAS, 2020) apereceu uma relação entre a propriedade de Rothberger e a propriedade de medida nula topológica:

Proposição 2.2.13. Um espaço X é um espaço de Rothberger se, e somente se, X é de medida nula topológica em qualquer superespaço.

Demonstração. A prova da parte recíproca da proposição é trivial pois basta considerar X como um superespaço de X. Vamos provar a implicação direta.

Considere X um espaço de Rothberger. Considere Y qualquer superespaço topológico de X. Considere $\langle \mathscr{V}_n \rangle_{n\in\omega}$ uma sequência arbitrária de coberturas abertas de Y. Para cada $n \in \omega$, a coleção $\mathscr{C}_n = \{V \cap X : V \in \mathscr{V}_n\}$ é uma cobertura aberta de X. Logo existe uma sequência $\langle V_n \cap X : n \in \omega \rangle$ tal que cada $V_n \cap X \in \mathscr{C}_n$ e $X = \bigcup_{n\in\omega} (V_n \cap X) \subseteq \bigcup_{n\in\omega} V_n$. Então $V_n \in \mathscr{V}_n$ para cada $n \in \omega$ e $X \subseteq \bigcup_{n\in\omega} V_n$. Portanto, X é de medida nula topológica em Y.

□

Aurichi e Dias (AURICHI; DIAS, 2020) apontam na Introdução do paper deles que outro contexto particular no qual existe uma extensão natural da noção de medida nula forte é no contexto dos grupos topológicos:

Definição 2.2.14. Em um grupo $\langle G, * \rangle$, para cada $x \in G$ e $U \subseteq G$, definimos o conjunto

$$x * U = \{x * u : u \in U\}.$$

Fritz Rothberger introduziu uma propriedade que poderia ser vista como generalização da noção de medida nula forte para os subconjuntos de um grupo topológico:

Definição 2.2.15. (ROTHBERGER, 1938) Considere um grupo topológico $\langle G, * \rangle$ que tem elemento identidade e. Um subconjunto $X \subseteq G$ é chamado **Rothberger-limitado** se, para qualquer sequência de vizinhanças abertas de e, existe um translado esquerdo de cada vizinhança na sequência que juntos cobrem X. Isto é, existe uma sequência $\langle x_n \rangle_{n\in\omega}$ de elementos de G tal que

$$X \subseteq \bigcup_{n\in\omega} x_n * U_n.$$

Na Introdução do paper de Aurichi e Dias (AURICHI; DIAS, 2020), eles apontaram:

Proposição 2.2.16. Um subconjunto de $\mathbb{R}$ tem medida nula forte se, e somente se, for um subconjunto Rothberger-limitado de $\mathbb{R}$, onde $\mathbb{R}$ visto como um grupo topológico aditivo.

Demonstração. Suponha que $X \subseteq \mathbb{R}$ tem medida nula forte. Considere $\langle U_n \rangle_{n\in\omega}$ uma sequência arbitrária de vizinhanças abertas de 0. Para cada $n \in \omega$, escolhemos $\varepsilon_n > 0$ tal que $(-\varepsilon_n, \varepsilon_n) \subseteq U_n$. Como $X \subseteq \mathbb{R}$ tem medida nula forte, existem intervalos abertos I_n satisfazendo $\operatorname{diam}(I_n) \leqslant \varepsilon_n$ para cada $n \in \omega$ e $X \subseteq \bigcup_{n\in\omega} I_n$. Para cada $n \in \omega$, vamos escolher $x_n \in I_n$ e vamos definir $J_n = -x_n + I_n$. Logo $0 \in J_n$ e $\operatorname{diam}(J_n) \leqslant \varepsilon_n$ para cada $n \in \omega$. Daí, $J_n \subseteq (-\varepsilon_n, \varepsilon_n) \subseteq U_n$ para cada $n \in \omega$ Assim, $I_n = x_n + J_n \subseteq x_n + U_n$ para cada $n \in \omega$. Então $X \subseteq \bigcup_{n\in\omega} (x_n + U_n)$. Portanto, X é Rothberger-limitado.

Reciprocamente, suponha que $X \subseteq \mathbb{R}$ é Rothberger-limitado no grupo topológico $\langle \mathbb{R}, + \rangle$. Considere $\langle \varepsilon_n \rangle_{n\in\omega}$ uma sequência arbitrária de números reais positivos. Para cada $n \in \omega$, vamos definir $J_n = \left(-\frac{\varepsilon_n}{2}, \frac{\varepsilon_n}{2}\right)$. Como X é Rothberger-limitado e $\langle J_n \rangle_{n\in\omega}$ é uma sequência de

vizinhanças abertas de 0, existe uma sequência $\langle x_n \rangle_{n\in\omega}$ de números reais com

$$X \subseteq \bigcup_{n\in\omega} (x_n + J_n) = \bigcup_{n\in\omega} \left(x_n - \frac{\varepsilon_n}{2}, x_n + \frac{\varepsilon_n}{2} \right).$$

Para cada $n \in \omega$, vamos definir $I_n = \left(x_n - \frac{\varepsilon_n}{2}, x_n + \frac{\varepsilon_n}{2} \right)$. Assim, $\langle I_n \rangle_{n\in\omega}$ é uma sequência de intervalos abertos satisfazendo $\operatorname{diam}(I_n) \leqslant \varepsilon_n$ para cada $n \in \omega$ e $X \subseteq \bigcup_{n\in\omega} I_n$. Portanto, X tem medida nula forte.

□

Marion Scheepers mostrou que existem grupos topológicos Rothberger-limitados de cardinalidade infinita arbitrária:

Exemplo 2.2.17. (SCHEEPERS, 2011) Considere um número cardinal infinito κ. Seja o grupo de $\mathbb{Z}^\kappa = \prod_{\alpha\in\kappa} \mathbb{Z}$ com a operação adição de números inteiros em cada coordenada $\alpha \in \kappa$. Considere $\mathbb{Z}$ com a topologia discreta e $\mathbb{Z}^\kappa$ com a topologia de Tychonoff. Seja o $\sigma-$produto $\sigma(\mathbb{Z}^\kappa) = \{f \in \mathbb{Z}^\kappa : |\{\alpha \in \kappa : f(\alpha) \neq 0\}| < \aleph_0\}$. Então $\sigma(\mathbb{Z}^\kappa)$ visto como sub-grupo topológico de $\mathbb{Z}^\kappa$ é um grupo topológico Rothberger-limitado de cardinalidade κ.

Demonstração. Como $\sigma(\mathbb{Z}^\kappa)$ é o conjunto de funções de $\mathbb{Z}^\kappa$ que têm um número finito de coordenadas com valores diferentes de zero, a adição dos valores de dois funções de $\sigma(\mathbb{Z}^\kappa)$ em cada coordenada $\alpha \in \kappa$ tem como resultado uma função de Z^κ que tem um número finito de coordenadas com valores diferentes de zero, isto é, tal resultado é outro elemento de $\sigma(\mathbb{Z}^\kappa)$. Então $\sigma(\mathbb{Z}^\kappa)$ é subgrupo de $\mathbb{Z}^\kappa$. Portanto, $\sigma(\mathbb{Z}^\kappa)$ é um subgrupo topológico de $\mathbb{Z}^\kappa$ onde um conjunto aberto de $\sigma(\mathbb{Z}^\kappa)$ é a interseção de $\sigma(\mathbb{Z}^\kappa)$ com um conjunto aberto de $\mathbb{Z}^\kappa$.

Afirmação 1. $|\sigma(\mathbb{Z}^\kappa)| = \kappa$.

Demonstração. [da Afirmação 1] Para cada $n \in \omega$, definimos

$$\sigma_n(\mathbb{Z}^\kappa) = \{f \in \mathbb{Z}^\kappa : |\{\alpha \in \kappa : f(\alpha) \neq 0\}| \leqslant n\}.$$

Então $\sigma_0(\mathbb{Z}^\kappa) = \{0\}$ e para cada $n \in \omega \setminus \{0\}$, escolhendo $\alpha_i < \kappa$ e $m_i \in \mathbb{Z}$ para cada $i \in n$ podemos definir $f \in \sigma_n(\mathbb{Z}^\kappa)$ por

$$f(\alpha) = \begin{cases} m_i & \text{se } \alpha = \alpha_i; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então $|\sigma_n(\mathbb{Z}^\kappa)| = \kappa^n \cdot \aleph_0^n = \kappa$ para cada $n \in \omega \setminus \{0\}$. Portanto,

$$\kappa = |\sigma_1(\mathbb{Z}^\kappa)| \leqslant |\sigma(\mathbb{Z}^\kappa)| = \left| \bigcup_{n\in\omega} \sigma_n(\mathbb{Z}^\kappa) \right| \leqslant \aleph_0 \cdot \kappa = \kappa.$$

□

Assim, $\sigma(\mathbb{Z}^\kappa)$ é um grupo topológico de cardinalidade κ.

Resta verficar que $\sigma(\mathbb{Z}^\kappa)$ é Rothberger-limitado.

Considere $\langle U_n \rangle_{n\in\omega}$ qualquer sequência de vizinhanças abertas básicas de $\bar{0}$, isto é, para cada $n \in \omega$, $\bar{0} \in U_n$ e U_n é um conjunto de funções de $\sigma(\mathbb{Z}^\kappa)$ que têm os mesmos valores num número finito de coordenadas. Para cada $n \in \omega$, $f \in U_n$ se, e somente se, $f \in \sigma(\mathbb{Z}^\kappa)$ e existem conjuntos finitos $\{\alpha_0, \ldots, \alpha_{l_n}\} \subseteq \kappa$ e $\{m_0, \ldots, m_{l_n}\} \subseteq \mathbb{Z}$ tais que $f(\alpha_i) = m_i$ para cada $i \leqslant l_n$. Como $\bar{0} \in U_n$ para cada $n \in \omega$, $m_i = 0$ para cada $i \leqslant l_n$. Portanto, para cada $n \in \omega$, existe um subconjunto finito $F_n \subseteq \kappa$ de modo que $U_n = \{f \in \sigma(\mathbb{Z}^\kappa) : \forall \alpha \in F_n(f(\alpha) = 0)\}$. Agora, seja $C = \bigcup_{n\in\omega} F_n$. Como C é enumerável, $\sigma(\mathbb{Z}^C)$ também é enumerável. Fixe uma enumeração $\{g_n\}_{n\in\omega} = \sigma(\mathbb{Z}^C)$ e, para cada $n \in \omega$, defina $f_n \in \sigma(\mathbb{Z}^\kappa)$ por

$$f_n(\alpha) = \begin{cases} g_n(\alpha) & \text{se } \alpha \in C; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Portanto, $f_n \restriction C = g_n$.

<u>Afirmação 2.</u> $\sigma(\mathbb{Z}^\kappa) \subseteq \bigcup_{n\in\omega} (f_n + U_n)$.

Demonstração. [da Afirmação 2] Considere $h \in \sigma(\mathbb{Z}^\kappa)$ arbitrário,

$$|\{\alpha \in C : h(\alpha) \neq 0\}| \leqslant |\{\alpha \in \kappa : h(\alpha) \neq 0\}| < \aleph_0.$$

Então $h \restriction C \in \sigma(\mathbb{Z}^C)$, de onde, segue que $h \restriction C = g_m$ para algum $m \in \omega$. Defina $g \in \sigma(\mathbb{Z}^\kappa)$ por

$$g(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha \in C; \\ h(\alpha) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Portanto, $g \in U_m$. Note que $h = f_m + g$. Então, $h \in (f_m + U_m) \subseteq \bigcup_{n\in\omega} (f_n + U_n)$. Portanto,

$$\sigma(\mathbb{Z}^\kappa) \subseteq \bigcup_{n\in\omega} (f_n + U_n).$$

□

Assim, $\sigma(\mathbb{Z}^\kappa)$ é Rothberger-limitado.

□

No paper de Aurichi e Dias (AURICHI; DIAS, 2020), eles analisaram o Jogo de medida nula topológica e o Jogo fraco de Rothberger sobre espaços métricos com propriedades específicas para obter algumas caracterizações da propriedade de medida nula forte. Também analisaram o Jogo de Rothberger-Limite para obter algumas caracterizações dos subconjuntos Rothberger-limitados de grupos topológicos com propriedades específicas. Além disso, mostraram as equivalências da Conjectura de Borel em termos de todos os jogos analisados.

2.3 Algumas equivalências da Conjectura de Borel

Pelo Exemplo 2.2.2, todo conjunto enumerável de números reais tem medida nula forte. Depois de observar isso, Borel conjecturou a recíproca:

Definição 2.3.1. (BOREL, 1919) A **Conjectura de Borel** é a afirmação "Qualquer subconjunto de números reais que tem medida nula forte é enumerável".

Os resultados a seguir são úteis para mostrar a consistência da negação da Conjectura de Borel com ZFC.

Definição 2.3.2. Seja $\langle A_i \rangle_{i \in I}$ uma família de espaços topológicos. A **topologia de Tychonoff** de $\prod_{i \in I} A_i$ é a topologia gerada pela sub-base de todas as imagens inversas pelas projeções dos conjuntos abertos de A_i para cada $i \in I$.

Aurichi e Dias (AURICHI; DIAS, 2020) apontam na Introdução do paper deles:

Exemplo 2.3.3. O espaço de Cantor 2^ω não é de Rothberger.

Demonstração. Escreva $2^\omega = \prod_{n \in \omega} \{0,1\}$ onde $\{0,1\}$ recebe a topologia discreta e 2^ω recebe a topologia de Tychonoff. Como todo conjunto é um conjunto aberto na topologia discreta, temos que $\{0\}$ e $\{1\}$ são conjuntos abertos em $\{0,1\}$. Como, para cada $n \in \omega$, a projeção na $n-$ésima coordenada $\pi_n : 2^\omega \longrightarrow \{0,1\}$ é uma função contínua, para cada $n \in \omega$, as imagens inversas $\pi_n^{-1}[\{0\}]$ e $\pi_n^{-1}[\{1\}]$ são conjuntos abertos em 2^ω e

$$\pi_n^{-1}[\{0\}] \cup \pi_n^{-1}[\{1\}] = \pi_n^{-1}[\{0\} \cup \{1\}] = \pi_n^{-1}[\{0,1\}] = 2^\omega.$$

Para cada $n \in \omega$, defina $\mathscr{C}_n = \{\pi_n^{-1}[\{0\}], \pi_n^{-1}[\{1\}]\}$. Então $\langle \mathscr{C}_n \rangle_{n \in \omega}$ é uma sequência de coberturas abertas de 2^ω. Considere $\langle U_n \rangle_{n \in \omega}$ uma sequência arbitrária tal que cada $U_n \in \mathscr{C}_n$. Assim, para cada $n \in \omega$, existe algum $m_n \in 2$ tal que $U_n = \pi_n^{-1}[\{m_n\}]$. Defina $f \in 2^\omega$ por

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } m_n = 1; \\ 1 & \text{se } m_n = 0. \end{cases}$$

Se $g \in U_n$, então $g(n) = m_n \neq f(n)$, de onde, segue que, para todo $n \in \omega$, $f \notin U_n$. Portanto, $2^\omega \neq \bigcup_{n \in \omega} U_n$. Assim, 2^ω não é um espaço de Rothberger.

□

Na Introdução do paper de Aurichi e Dias (AURICHI; DIAS, 2020), eles apontam:

Proposição 2.3.4. A propriedade Rothberger é preservada por imagens contínuas.

Demonstração. Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \longrightarrow Y$ contínua. Se X é Rothberger, então vamos mostrar que $f[X]$ também é Rothberger. Considere $\langle \mathscr{D}_n \rangle_{n\in\omega}$ uma sequência arbitrária de coberturas abertas de $f[X]$, para cada $n \in \omega$, defina $\mathscr{C}_n = \{f^{-1}[D] : D \in \mathscr{D}_n\}$. Como $\langle \mathscr{C}_n \rangle_{n\in\omega}$ é uma sequência de coberturas abertas de X, existe uma sequência $\langle U_n \rangle_{n\in\omega}$ tal que cada $U_n \in \mathscr{C}_n$ e $X = \bigcup_{n\in\omega} U_n$. Note que, para cada $n \in \omega$, existe um $V_n \in \mathscr{D}_n$ tal que $U_n = f^{-1}[V_n]$, de onde $\langle V_n \rangle_{n\in\omega}$ é uma sequência tal que cada $V_n \in \mathscr{D}_n$ e $f[X] = \bigcup_{n\in\omega} V_n$. Portanto, $f[X]$ é Rothberger.

□

Auruchi e Dias (AURICHI; DIAS, 2020) na Introdução do paper deles apontam:

Observação 2.3.5. Se temos um conjunto compacto $K \subseteq \omega^\omega$, então, para cada $n \in \omega$, o conjunto compacto $\pi_n[K] \subseteq \omega$ é finito. Defina $F \in \omega^\omega$ por $F(n) = \max \pi_n[K]$.

Portanto, se $f \in K$, então, para todo $n \in \omega$, $f(n) \leqslant F(n)$. Isto é,

$$K \subseteq \{f \in \omega^\omega : \forall n \in \omega (f(n) \leqslant F(n))\}.$$

O teorema seguinte apareceu na Introdução do paper de Aurichi e Dias (AURICHI; DIAS, 2020). Na demonstração do teorema é usado o fato de que ω^ω e $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$ são homeomorfos. Possivelmente é bastante conhecido que ω^ω é homeomorfo a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Como $\mathbb{R}$ é homeomorfo a $[0,1]$, ω^ω é homeomorfo a $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$.

Teorema 2.3.6. (ROTHBERGER, 1941) A Hipótese do Contínuo implica que existe um conjunto não enumerável de números reais que tem medida nula forte e que não satisfaz a propriedade de Rothberger.

Demonstração. Sob a Hipótese do Contínuo, podemos escrever $2^\omega = \{h_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ e vale a consequência do Lema 2.1.11 pois, pela Observação 2.1.9, a Hipótese do Contínuo implica que $\mathfrak{b} = \aleph_1$. Portanto, podemos escolher uma família ilimitada $\{g_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ em ω^ω tal que $\alpha < \beta < \omega_1 \Longrightarrow g_\alpha \leqslant^* g_\beta$.

A partir de $\{g_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ e $\{h_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ vamos obter outra família indexada por ω_1. Para cada $\alpha \in \omega_1$, defina $f_\alpha \in \omega^\omega$ por $f_\alpha(n) = 2 \cdot g_\alpha(n) + h_\alpha(n)$ e escreva $Z = \{f_\alpha : \alpha < \omega_1\}$.

Agora, vamos obter uma função: $f_\alpha \mapsto h_\alpha$. Defina $\psi : \omega^\omega \longrightarrow 2^\omega$ tal que, para cada $n \in \omega$, $\psi(f)(n) = f(n) \bmod 2$.

<u>Afirmação 1.</u> A função $\psi \restriction Z : Z \longrightarrow 2^\omega$ é contínua e sobrejetora.

Demonstração. [da Afirmação 1] Se ψ é contínua, então $\psi \restriction Z$ é contínua. Para mostrar a continuidade de ψ basta verificar que a imagem inversa por ψ de todo conjunto aberto básico em 2^ω é um conjunto aberto em ω^ω. Considere B um conjunto aberto básico arbitrário em 2^ω. Um conjunto aberto básico em 2^ω é um conjunto de funções que têm os mesmos valores num

número finito de coordenadas. Então existem conjuntos finitos $\{n_i\}_{i\leqslant k} \subseteq \omega$ e $\{m_i\}_{i\leqslant k} \subseteq 2$ com $B = \{h \in 2^\omega : h(n_i) = m_i \forall i \leqslant k\}$ para algum $k \in \omega$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\psi^{-1}[B] &= \{f \in \omega^\omega : \psi(f) \in B\} \\
&= \{f \in \omega^\omega : \psi(f)(n_i) = m_i \forall i \leq k\} \\
&= \bigcap_{i\leq k} \{f \in \omega^\omega : \psi(f)(n_i) = m_i\} \\
&= \bigcap_{i\leq k} \{f \in \omega^\omega : f(n_i) = m_i \bmod 2\ \} \\
&= \bigcap_{i\leq k} \{f \in \omega^\omega : f(n_i) = 2j + m_i \text{ para algum } j \in \omega\} \\
&= \bigcap_{i\leq k} \bigcup_{j\in\omega} \{f \in \omega^\omega : f(n_i) = 2j + m_i\} \\
&= \bigcap_{i\leq k} \bigcup_{j\in\omega} \pi_{n_i}^{-1}[\{2j + m_i\}].
\end{aligned}$$

Como os conjuntos unitários são conjuntos abertos na topologia discreta de ω, as imagens inversas pelas projeções dos conjuntos unitários de ω são conjuntos abertos na topologia de Tychonoff de $\omega^\omega = \prod_{n\in\omega} \omega$. Como a união arbitrária de conjuntos abertos é um conjunto aberto e a interseção finita de conjuntos abertos é um conjunto aberto, $\psi^{-1}[B]$ é um conjunto aberto em ω^ω, de onde, segue que ψ é contínua. Portanto, também $\psi \restriction Z$ é contínua.

Por outro lado, note que, para todo $h_\alpha \in 2^\omega$, existe $f_\alpha \in Z$ tal que, para cada $n \in \omega$, $f_\alpha(n) = 2 \cdot g_\alpha(n) + h_\alpha(n)$. Então, para cada $n \in \omega$, $h_\alpha(n) = f_\alpha(n) \bmod 2$, isto é, para cada $n \in \omega$, $h_\alpha(n) = \psi(f_\alpha)(n)$. Portanto, $\psi \restriction Z : Z \longrightarrow 2^\omega$ é sobrejetora.

□

Agora, fixe um homeomorfismo $\varphi : \omega^\omega \longrightarrow [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ e escreva $X = \varphi[Z]$. Note que $X \subseteq [0,1] \setminus \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. Como Z é não enumerável e φ é bijetora, X é um conjunto não enumerável de números reais.

Vamos mostrar que X não é um espaço de Rotheberger.

Se X fosse um espaço de Rothberger então, pela Proposição 2.3.4, $\varphi^{-1}[X] = Z$ também seria um espaço de Rothberger. Pela Afirmação 1 acima, $\psi \restriction Z : Z \longrightarrow 2^\omega$ é contínua e sobrejetora. Então $\psi[Z] = 2^\omega$ e, pela Proposição 2.3.4, 2^ω também seria um espaço de Rothberger mas já vimos no Exemplo 2.3.3 que 2^ω não é um espaço de Rothberger. Portanto, X não é um espaço de Rothberger.

Afirmação 2. Se U é um conjunto aberto de $[0,1]$ tal que $[0,1] \cap \mathbb{Q} \subseteq U$, então $X \setminus U$ é enumerável.

Demonstração. [da Afirmação 2] Considere U um conjunto aberto de $[0,1]$ tal que $[0,1] \cap \mathbb{Q} \subseteq U$. Então $[0,1] \setminus U$ é um conjunto fechado e limitado tal que $[0,1] \setminus U \subseteq [0,1] \setminus \mathbb{Q}$. Logo $[0,1] \setminus U$ é um subconjunto compacto de $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$. Seja $K = \varphi^{-1}[[0,1] \setminus U]$. Como a compacidade é

preservada por homeomorfismos, K é um subconjunto compacto de ω^ω. A Observação 2.3.5 implica que existe $F \in \omega^\omega$ tal que $K \subseteq \{f \in \omega^\omega : \forall n \in \omega(f(n) \leqslant F(n))\}$. Como $\{g_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ é uma família ilimitada em ω^ω, vamos escolher $\eta \in \omega_1$ com $g_\eta \nleqslant^* F$. Note que se $\eta < \alpha < \omega_1$, então $g_\eta \leqslant^* g_\alpha$, de onde, segue que $g_\alpha \nleqslant^* F$ para todo $\alpha \in \omega_1 \setminus \eta$. Portanto, $f_\alpha \nleqslant^* F$ para todo $\alpha \in \omega_1 \setminus \eta$. Note que se $f \in Z \cap K$, então $f = f_\alpha$ para algum $\alpha < \omega_1$ e $f_\alpha(n) \leqslant F(n)$ para todo $n \in \omega$. Pela Proposição 2.1.2, $f_\alpha \leqslant^* F$ e pelo que foi dito acima, $\alpha \notin \omega_1 \setminus \eta$, isto é, $\alpha < \eta$. Portanto, $Z \cap K \subseteq \{f_\alpha : \alpha < \eta\}$, de onde, segue que $Z \cap K$ é enumerável. Como φ é bijetora, $\varphi[Z \cap K]$ também é enumerável. Note que $X \setminus U = X \cap [0,1] \setminus U = \varphi[Z] \cap \varphi[K] = \varphi[Z \cap K]$. Portanto, $X \setminus U$ é enumerável.

□

Vamos mostrar que X tem medida nula forte.

Considere $\langle \varepsilon_n \rangle_{n \in \omega}$ uma sequência arbitrária de números reais positivos. Fixe uma enumeração $\{q_k\}_{k \in \omega} = [0,1] \cap \mathbb{Q}$. Para cada $k \in \omega$, defina $I_{2k} = \left(q_k - \frac{\varepsilon_{2k}}{2}, q_k + \frac{\varepsilon_{2k}}{2}\right)$. Como a união de tais conjuntos é um conjunto aberto, $[0,1] \cap \bigcup_{k \in \omega} I_{2k}$ é um conjunto aberto de $[0,1]$ tal que $[0,1] \cap \mathbb{Q} \subseteq [0,1] \cap \bigcup_{k \in \omega} I_{2k}$. Pela Afirmação 2 acima, $X \setminus \left([0,1] \cap \bigcup_{k \in \omega} I_{2k}\right)$ é enumerável. Note que $X \setminus \bigcup_{k \in \omega} I_{2k} = X \setminus \left([0,1] \cap \bigcup_{k \in \omega} I_{2k}\right)$. Portanto, $X \setminus \bigcup_{k \in \omega} I_{2k}$ é enumerável. Fixe uma enumareção $\{x_m\}_{m \in \omega} = X \setminus \bigcup_{k \in \omega} I_{2k}$. Finalmente, para cada $m \in \omega$, defina $I_{2m+1} = \left(x_m - \frac{\varepsilon_{2m+1}}{2}, x_m + \frac{\varepsilon_{2m+1}}{2}\right)$. Como a união de tais intervalos cobre $X \setminus \bigcup_{k \in \omega} I_{2k}$, temos que $X \subseteq \bigcup_{n \in \omega} I_n$ e $\operatorname{diam}(I_n) \leqslant \varepsilon_n$ para cada $n \in \omega$. Portanto, X tem medida nula forte.

Assim, X é o conjunto de números reais que estamos procurando.

□

Corolário 2.3.7. A Hipótese do Contínuo implica que a Conjectura de Borel falha.

Demonstração. Vamos assumir que vale a Hipótese do Contínuo. Pelo Teorema 2.3.6, existe um conjunto não enumerável de números reais que tem medida nula forte. Portanto, a Conjectura de Borel falha.

□

Decorre do Corolário 2.3.7 que a negação da Conjetura de Borel é consistente com ZFC. Richard Laver (LAVER, 1976) usou a técnica de forcing para provar que a Conjectura de Borel é consistente com ZFC. Isto estabelece a independência da Conjectura de Borel com ZFC.

Timothy J. Carlson (CARLSON, 1993) apontou a generalização da propriedade de medida nula forte para espaços métricos segundo a Definação 2.2.6. Não obstante eu não saiba se está em outro lugar, acho natural generalizar a Conjectura de Borel para espaços métricos:

Definição 2.3.8. A **Conjectura de Borel para espaços métricos** é a afirmação "Todo espaço métrico de medida nula forte é enumerável".

Galvin conjecturou que a Conjectura de Borel implica a Conjectura de Borel para espaços métricos. Vamos mostrar a prova que Carlson fez da Conjectura de Galvin. Antes disso, precisamos de algumas definições e mostrar alguns resultados que Carlson aponta no seu paper.

Definição 2.3.9. Um espaço topológico é dito **separável** se possui algum subconjunto denso enumerável.

Carlson aponta na Seção de Preliminares de seu paper (CARLSON, 1993) que todo espaço métrico de medida nula forte dever ser separável. Antes de demonstrar isso vamos provar um lema técnico usando o Lema de Zorn:

Lema de Zorn. Se em um conjunto não vazio parcialmente ordenado toda cadeia tem limitante superior, então o conjunto parcialmente ordenado tem elemento maximal.

Lema 2.3.10. Seja $\langle X,d\rangle$ um espaço métrico. Para cada $r>0$ definimos a coleção

$$\mathscr{A}_r = \{A \subseteq X : \forall x,y \in A(x \neq y \Rightarrow d(x,y) > r)\}$$

Se, para todo $r>0$, temos que todos os conjuntos da coleção $\mathscr{A}_r$ são enumeráveis, então o espaço $\langle X,d\rangle$ é separável.

Demonstração. Considere $r>0$ fixo mas arbitrário. Observe que $\mathscr{A}_r \neq \varnothing$ pois o conjunto vazio e os conjuntos unitários pertencem a $\mathscr{A}_r$. Seja $\mathscr{C}$ qualquer cadeia em $\mathscr{A}_r$ com a ordem da inclusão.

Afirmação 1. [3] $\bigcup \mathscr{C} \in \mathscr{A}_r$.

Demonstração. [da Afirmação 1] Considere $x,y \in \bigcup \mathscr{C}$ arbitrários. Então existem $A,B \in \mathscr{C} \subseteq \mathscr{A}_r$ tal que $x \in A$ e $y \in B$. Como $\mathscr{C}$ é cadeia, $A \subseteq B$ ou $B \subseteq A$. Daí, $x,y \in B \in \mathscr{A}_r$ ou $x,y \in A \in \mathscr{A}_r$. Em ambos os casos: $x \neq y \Rightarrow d(x,y) > r$. Portanto, $\bigcup \mathscr{C} \in \mathscr{A}_r$.

□

Pela Afirmação 1 acima, toda cadeia em $\mathscr{A}_r$ tem limitante superior. Como as hipóteses do Lema de Zorn são satisfeitas, cada $\mathscr{A}_r$ tem algum elemento maximal. Para cada $r>0$, escolhemos um elemento maximal $M_r \in \mathscr{A}_r$.

Afirmação 2. [4] $d(z,M_r) \leqslant r$ para todo $z \in X$.

[3] $\bigcup \mathscr{C} = \bigcup_{C \in \mathscr{C}} C$

[4] $d(z,M_r) = \inf\{d(z,y) : y \in M_r\}$

Demonstração. [da Afirmação 2] Suponha o contrário. Isto é, $d(z,M_r) > r$ para algum $z \in X$. Então $z \notin M_r$ e $d(z,y) > r$ para todo $y \in M_r$. Assim, $M_r \subsetneq M_r \cup \{z\}$ e $M_r \cup \{z\}$ satisfaz que, para todo $x,y \in M_r \cup \{z\}$, $x \neq y \Rightarrow d(x,y) > r$. Daí, $M_r \cup \{z\} \in \mathscr{A}_r$ o que contradiz a maximalidade de M_r.

□

Denotamos por $M = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}_{>0}} M_r$. Cada coleção $\mathscr{A}_r$ tem somente conjuntos enumeráveis. Logo cada M_r é enumerável. Daí, M é união enumerável de conjuntos enumeráveis. Portanto, M é enumerável.

Afirmação 3. M é denso em X.

Demonstração. [da Afirmação 3] Considere $W \subseteq X$ um conjunto aberto não vazio arbitrário. Sejam $z \in W$ e $\varepsilon > 0$ com $B(z,\varepsilon) \subseteq W$. Escolhemos $r \in \mathbb{Q}_{>0}$ tal que $0 < r < \varepsilon$. Pela Afirmação 2 acima, $d(z,M_r) \leqslant r < \varepsilon$. Logo $d(z,M_r) = \inf\{d(z,y) : y \in M_r\} < \varepsilon$. Então existe um $y \in M_r$ tal que $d(z,y) < \varepsilon$. Daí, $y \in B(z,\varepsilon) \subseteq W$. Assim, $y \in M_r \cap W$. Portanto, $M \cap W \neq \varnothing$.

□

Assim, M é um conjunto denso enumerável em X. Isto é, $\langle X,d \rangle$ é separável.

□

Vamos usar o Lema 2.3.10 para provar o apontado por Carlson:

Proposição 2.3.11. (CARLSON, 1993) Todo espaço métrico de medida nula forte é separável.

Demonstração. Vamos assumir por contradição que existe um espaço métrico $\langle X,d \rangle$ de medida nula forte não separável. Pelo Lema 2.3.10, para algum $r > 0$ deve existir pelo menos um conjunto não enumerável A da coleção $\mathscr{A}_r$. Basta provar que A não tem medida nula forte o que contradiz a Observação 2.2.8 pois $A \subseteq X$. Para cada $n \in \omega$, definimos $\varepsilon_n = r$. Considere $\langle A_n \rangle_{n \in \omega}$ uma sequência arbitrária de conjuntos satisfazendo que $A = \bigcup_{n \in \omega} A_n$. Como A não é enumerável, para algum $m \in \omega$ temos que A_m não é enumerável. Daí, existem pontos $x,y \in A_m \subseteq A$ com $x \neq y$. Como $A \in \mathscr{A}_r$, $d(x,y) > r$. Assim, $\operatorname{diam}(A_m) = \sup\{d(x,y) : x,y \in A_m\} \geqslant d(x,y) > r = \varepsilon_m$. Portanto, A não tem medida nula forte.

□

Devemos ver algumas propriedades das imersões de Lipschitz que Carlson usou para demonstrar a Conjectura de Galvin.

Definição 2.3.12. Sejam $\langle X,d\rangle$ e $\langle \hat{X},\hat{d}\rangle$ espaços métricos. Uma função injetora $h : X \longrightarrow \hat{X}$ é dita, uma **imersão de Lipschitz** se existe $c \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que, para quaisquer $x,x' \in X$, temos que

$$\hat{d}(h(x),h(x')) \leqslant c \cdot d(x,x').$$

O número c é chamado de constante de Lipschitz.

Proposição 2.3.13. Sejam $\langle X,d\rangle$ e $\langle \hat{X},\hat{d}\rangle$ espaços métricos e $h : X \longrightarrow \hat{X}$ uma imersão de Lipschitz com constante de Lipschitz c. Dado qualquer subconjunto $A \subseteq X$ temos que

$$\operatorname{diam}(h[A]) \leqslant c \cdot \operatorname{diam}(A).$$

Demonstração. Considere o subconjunto arbitrário $A \subseteq X$. Considere y,y' pontos arbitrários de $h[A]$. Então existem pontos x,x' de A tais que $y = h(x)$ e $y' = h(x')$. Como h é uma imersão de Lipschitz com constante de Lipschitz c, temos que $\hat{d}(y,y') = \hat{d}(h(x),h(x')) \leqslant c \cdot d(x,x')$. Mas $d(x,x') \leqslant \sup\{d(x,x') : x,x' \in A\} = \operatorname{diam}(A)$. Daí, para todo $y,y' \in h[A]$, $\hat{d}(y,y') \leqslant c \cdot \operatorname{diam}(A)$. Logo o número $c \cdot \operatorname{diam}(A)$ é limitante superior do conjunto $\{\hat{d}(y,y') : y,y' \in h[A]\}$. Portanto, $\operatorname{diam}(h[A]) = \sup\{\hat{d}(y,y') : y,y' \in h[A]\} \leqslant c \cdot \operatorname{diam}(A)$.

□

Vamos usar a Proposição 2.3.13 para provar que as imersões de Lipschiz preservam a propriedade de medida nula forte.

Proposição 2.3.14. Sejam $\langle X,d\rangle$ e $\langle \hat{X},\hat{d}\rangle$ espaços métricos e $h : X \longrightarrow \hat{X}$ uma imersão de Lipschitz. Se X é de medida nula forte, então $h[X]$ também é de medida nula forte.

Demonstração. Seja c uma constante de Lipschitz para h. Considere $\langle \varepsilon_n\rangle_{n\in\omega}$ uma sequência arbitrária de números reais positivos. Como $\langle X,d\rangle$ é um espaço métrico de medida nula forte, existe uma sequência de conjuntos $\langle A_n\rangle_{n\in\omega}$ satisfazendo $\operatorname{diam}(A_n) \leqslant \dfrac{\varepsilon_n}{c}$ para cada $n \in \omega$ e $X = \bigcup_{n\in\omega} A_n$. Pela Proposição 2.3.13, para cada $n \in \omega$, temos que $\operatorname{diam}(h[A_n]) \leqslant c \cdot \operatorname{diam}(A_n) \leqslant \varepsilon_n$. Então a sequência de conjuntos $\langle h[A_n]\rangle_{n\in\omega}$ satisfaz que $\operatorname{diam}(h[A_n]) \leqslant \varepsilon_n$ para cada $n \in \omega$ e $h[X] = \bigcup_{n\in\omega} h[A_n]$. Portanto, $h[X]$ é de medida nula forte.

□

Estamos nos aproximando da prova da Conjectura de Galvin. Resta apenas demonstrar um lema usando o Teorema da Identidade:

Teorema da Identidade. Considere as funções holomorfas f e g definidas em um domínio D (subconjunto de $\mathbb{C}$ aberto e conexo). Se $f = g$ em algum subconjunto $S \subseteq D$, onde S tem um ponto de acumulação em D, então $f = g$ em D.

Lema 2.3.15. (CARLSON, 1993) Se $\langle X,d\rangle$ é um espaço métrico separável de cardinalidade estritamente menor que $2^{\aleph_0}$, então existe uma imersão de Lipschitz de $\langle X,d\rangle$ na reta real.

Demonstração. Como $\langle X,d\rangle$ é um espaço métrico separável, existe um subconjunto de X denso enumerável $\{x_n\}_{n\in\omega}$. Defina a métrica $d'(x,x') = \min\{1, d(x,x')\}$ para $x,x' \in X$. Para cada $x \in X$ defina a função h_x de variável complexa da seguinte maneira $h_x(z) = \sum_{n\in\omega} \frac{d'(x,x_n)}{n!} z^n$.

Note que cada h_x é uma função analítica de domínio $\mathbb{C}$. Como toda função analítica num domínio é holomorfa em tal domínio, cada h_x é uma função holomorfa de domínio $\mathbb{C}$ (as funções holomorfas de domínio $\mathbb{C}$ são chamadas de funções inteiras).

Afirmação 1. Para cada $x,x' \in X$ com $x \neq x'$, o conjunto $S_{x,x'} = \{r > 0 : h_x(r) = h_{x'}(r)\}$ é enumerável.

Demonstração. [da Afirmação 1] Suponha o contrário. Então existem $x,x' \in X$ com $x \neq x'$ tais que o conjunto $S_{x,x'}$ é não enumerável. Note que $S_{x,x'} = \bigcup_{n\in\omega} \{r \in (n,n+1] : h_x(r) = h_{x'}(r)\}$. Logo para algum $n \in \omega$ o conjunto limitado $S = \{r \in (n,n+1] : h_x(r) = h_{x'}(r)\}$ é não enumerável. Então S tem um ponto de acumulação em $\mathbb{R}$. Como os pontos de acumulação em $\mathbb{R}$ são pontos de acumulação em $\mathbb{C}$, temos que S tem um ponto de acumulação em $\mathbb{C}$. Pelo Teorema da Identidade, $h_x = h_{x'}$ em $\mathbb{C}$. Então, $h_x^{(n)} = h_{x'}^{(n)}$ para todo $n \in \omega$, isto é, $d'(x,x_n) = d'(x',x_n)$ para todo $n \in \omega$. Como $\{x_n\}_{n\in\omega}$ é denso em X, existe uma sequência $\langle x_{n_k}\rangle_{k\in\omega}$ de pontos de $\{x_n\}_{n\in\omega}$ que converge para x. Então,

$$d'(x',x) = d'\left(x', \lim_{k\to\infty} x_{n_k}\right) = \lim_{k\to\infty} d'(x',x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} d'(x,x_{n_k}) = d'\left(x, \lim_{k\to\infty} x_{n_k}\right) = d'(x,x) = 0.$$

Portanto, $x' = x$. Isto é uma contradição.

□

Afirmação 2. Existe um $r \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $h_x(r) \neq h_{x'}(r)$ para todos os pares de pontos distintos x e x' em X.

Demonstração. [da Afirmação 2] Pela Afirmação 1 acima, para todo $\langle x,x'\rangle \in X \times X$ com $x \neq x'$, $|S_{x,x'}| \leqslant \aleph_0$. Como X tem cardinalidade estritamente menor que $2^{\aleph_0}$,

$$\left|\bigcup_{x\neq x'} S_{x,x'}\right| \leqslant |X|^2 \cdot \aleph_0 < 2^{\aleph_0}.$$

Logo $\bigcup_{x\neq x'} S_{x,x'} \subsetneq \mathbb{R}_{>0}$. Então existe um $r \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $r \notin S_{x,x'}$ para todo $\langle x,x'\rangle \in X \times X$ com $x \neq x'$. Portanto, $h_x(r) \neq h_{x'}(r)$ para todos os pares de pontos distintos x e x' em X.

□

Pela Afirmação 2 acima, podemos definir a função $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$ por $h(x) = h_x(r)$. Considere $x,x' \in X$ arbitrários, $|h(x) - h(x')| \leqslant \sum_{n\in\omega} \frac{|d'(x,x_n) - d'(x',x_n)|}{n!} r^n$. Como d' é uma métrica,

para cada $n \in \omega$, temos que $|d'(x,x_n) - d'(x_n,x')| \leqslant d'(x,x') = \min\{1, d(x,x')\} \leqslant d(x,x')$. Daí, obtemos

$$\sum_{n\in\omega} \frac{|d'(x,x_n) - d'(x',x_n)|}{n!} r^n \leqslant \sum_{n\in\omega} \frac{d(x,x')}{n!} r^n = d(x,x') \sum_{n\in\omega} \frac{1}{n!} r^n = d(x,x')e^r.$$

Portanto, resulta que $|h(x) - h(x')| \leqslant e^r \cdot d(x,x')$. Assim, h é uma imersão de Lipschitz de $\langle X,d\rangle$ em $\mathbb{R}$ com constante de Lipschitz e^r.

□

A partir de tais resultados Carlson demonstrou a Conjectura de Galvin:

Teorema 2.3.16. (CARLSON, 1993) A Conjectura de Borel implica a Conjectura de Borel para espaços métricos.

Demonstração. Vamos assumir por contradição que a Conjectura de Borel é verdadeira e que existe um espaço métrico de medida nula forte não enumerável.

Já mencionamos no Corolário 2.3.7 que a Hipótese do Contínuo implica que a Conjectura de Borel falha. Portanto, usando a contrapositiva, a Conjectura de Borel implica que a Hipótese do Contínuo falha. Então, $\aleph_1 < 2^{\aleph_0}$. Como existe um espaço métrico de medida nula forte não enumerável, podemos escolher um subespaço dele com cardinalidade $\aleph_1$ e, pela Observação 2.2.8, este subespaço também é de medida nula forte.

Suponha que $\langle X,d\rangle$ é um espaço métrico de medida nula forte com cardinalidade $\aleph_1$. Pela Proposição 2.3.11, $\langle X,d\rangle$ é separável. Pelo Lema 2.3.15, existe uma imersão h de Lipschitz de $\langle X,d\rangle$ na reta real. Pela Proposição 2.3.14, $h[X]$ é um espaço métrico de medida nula forte na reta real. Pela injetividade de h e pela Observação 2.2.7, $h[X]$ é um conjunto de números reais de cardinalidade $\aleph_1$ que tem medida nula forte, o que contradiz a Conjectura de Borel.

□

Aurichi e Dias (AURICHI; DIAS, 2020) usaram a propriedade de Rothberger em vez da propriedade de medida nula forte para definir a conjectura seguente:

Definição 2.3.17. Vamos chamar de **Conjectura R-Borel** a afirmação "Todo subespaço de Rothberger de $\mathbb{R}$ é enumerável".

Vamos mostrar as provas que Aurichi e Dias fizeram de alguns resultados de Rothberger relacionados com a propriedade de Rothberger e a Conjectura R-Borel.

Definição 2.3.18. Dizemos que o espaço Y está **concentrado** em $A \subseteq Y$ se $|Y \setminus U| \leqslant \aleph_0$ para cada subconjunto aberto $U \subseteq Y$ satisfazendo $A \subseteq U$.

Aurichi e Dias (AURICHI; DIAS, 2020) apontaram:

Proposição 2.3.19. (ROTHBERGER, 1938) Todo espaço que está concentrado em um subconjunto enumerável é Rothberger.

Demonstração. Considere um espaço Y que está concentrado em um subconjunto enumerável $A \subseteq Y$. Considere $\langle \mathscr{C}_n \rangle_{n\in\omega}$ uma sequência arbitrária de coberturas abertas de Y. Fixe uma enumeração $\{a_n\}_{n\in\omega} = A$. Podemos escolher $C_{2n} \in \mathscr{C}_{2n}$ com $a_n \in C_{2n}$ para cada $n \in \omega$. Note que $A \subseteq \bigcup_{n\in\omega} C_{2n} \subseteq Y$. Daí, $\left| Y \setminus \bigcup_{n\in\omega} C_{2n} \right| \leqslant \aleph_0$. Fixe uma enumeração $\{b_n\}_{n\in\omega} = Y \setminus \bigcup_{n\in\omega} C_{2n}$ e escolha $C_{2n+1} \in \mathscr{C}_{2n+1}$ com $b_n \in C_{2n+1}$ para cada $n \in \omega$. Assim, $Y = \bigcup_{n\in\omega} C_n$. Portanto, Y é um espaço de Rothberger.

□

Aurichi e Dias (AURICHI; DIAS, 2020) mostraram:

Lema 2.3.20. (ROTHBERGER, 1941) Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ que tem medida nula forte com cardinalidade menor que $\mathfrak{b}$ é Rothberger.

Demonstração. Considere X um subconjunto arbitrário de $\mathbb{R}$ que tem medida nula forte com $|X| < \mathfrak{b}$. Considere $\langle \mathscr{C}_n \rangle_{n\in\omega}$ uma sequência arbitrária de coberturas de X por subconjuntos abertos de $\mathbb{R}$. Para cada $x \in X$ e $n \in \omega$, existe um aberto $U_n^x \in \mathscr{C}_n$ com $x \in U_n^x$. Vamos escolher $f_x(n) \in \omega \setminus \{0\}$ de modo que $\left(x - \frac{1}{f_x(n)}, x + \frac{1}{f_x(n)}\right) \subseteq U_n^x$. Como $|\{f_x : x \in X\}| \leqslant |X| < \mathfrak{b}$, a família $\{f_x : x \in X\}$ em ω^ω não é ilimitada. Logo existe um $g \in \omega^\omega$ tal que, para qualquer $x \in X$, $f_x \leqslant^* g$. Assim, para todo $x \in X$, o conjunto $\{n \in \omega : f_x(n) > g(n)\}$ é finito. Daí, para cada $x \in X$, existe um $m_x \in \omega$ tal que $\{n \in \omega : f_x(n) > g(n)\} \subseteq m_x$. Considere uma partição de ω em uma quantidade infinita de conjuntos infinitos e disjuntos como $\omega = \dot{\bigcup}_{k\in\omega} A_k$ de forma que, para cada $k \in \omega$, $\min A_k \geqslant k$. Para cada $k \in \omega$, o conjunto $X_k = \{x \in X : m_x = k\}$ tem medida nula forte. Em particular, para a sequência $\left\langle \frac{1}{g(n)+1} \right\rangle_{n\in A_k}$, existe uma sequência $\langle I_n \rangle_{n\in A_k}$ de intervalos abertos satisfazendo $\operatorname{diam}(I_n) \leqslant \frac{1}{g(n)+1}$ para cada $n \in A_k$ e $X_k \subseteq \bigcup_{n\in A_k} I_n$. Seja $M_k = \{n \in A_k : X_k \cap I_n \neq \varnothing\}$. Logo $X_k = \bigcup_{n\in M_k} (X_k \cap I_n)$. Então vamos escolher $x_n \in X_k \cap I_n$ para cada $n \in M_k$ e vamos escolher $x_n \in X_k$ para cada $n \in A_k \setminus M_k$. Como $\operatorname{diam}(X_k \cap I_n) \leqslant \frac{1}{g(n)+1}$ para cada $n \in M_k$,

$$X_k = \bigcup_{n\in M_k} (X_k \cap I_n) \subseteq \bigcup_{n\in M_k} \left[x_n - \frac{1}{g(n)+1}, x_n + \frac{1}{g(n)+1}\right] \subseteq \bigcup_{n\in M_k} \left(x_n - \frac{1}{g(n)}, x_n + \frac{1}{g(n)}\right).$$

Portanto, existe uma sequência $\langle x_n \rangle_{n\in A_k}$ de pontos de X_k satisfazendo que

$$X_k \subseteq \bigcup_{n\in M_k} \left(x_n - \frac{1}{g(n)}, x_n + \frac{1}{g(n)}\right) \subseteq \bigcup_{n\in A_k} \left(x_n - \frac{1}{g(n)}, x_n + \frac{1}{g(n)}\right).$$

Se $x \in X_k$ e $n \in A_k$, então $n \geqslant k = m_x$, de onde, segue que $f_x(n) \leqslant g(n)$. Logo

$$X_k \subseteq \bigcup_{n \in A_k} \left(x_n - \frac{1}{g(n)}, x_n + \frac{1}{g(n)} \right) \subseteq \bigcup_{n \in A_k} \left(x_n - \frac{1}{f_{x_n}(n)}, x_n + \frac{1}{f_{x_n}(n)} \right) \subseteq \bigcup_{n \in A_k} U_n^{x_n}.$$

Então

$$X = \bigcup_{k \in \omega} X_k \subseteq \bigcup_{k \in \omega} \bigcup_{n \in A_k} U_n^{x_n} = \bigcup_{n \in \omega} U_n^{x_n}.$$

Portanto, X é Rothberger.

□

Aurichi e Dias (AURICHI; DIAS, 2020) provaram:

Teorema 2.3.21. (ROTHBERGER, 1941) Se $\mathfrak{b} = \aleph_1$, então a Conjectura R-Borel falha.

Demonstração. Vamos assumir que $\mathfrak{b} = \aleph_1$. Pelo Lema 2.1.11, podemos escolher uma família ilimitada $\{f_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ em ω^ω tal que $\alpha < \beta < \omega_1 \Longrightarrow f_\alpha \leqslant^* f_\beta$.

Escreva $X = \{f_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subseteq \omega^\omega$ e fixe um homeomorfismo $\varphi : \omega^\omega \longrightarrow [0,1] \setminus \mathbb{Q}$. Denotamos por $Y = \varphi[X] \cup ([0,1] \cap \mathbb{Q})$.

Afirmo que Y está concentrado em $[0,1] \cap \mathbb{Q}$.

Com efeito, seja $U \subseteq \mathbb{R}$ um subconjunto aberto incluindo $[0,1] \cap \mathbb{Q}$. Denotamos por $F = [0,1] \setminus U \subseteq [0,1] \setminus \mathbb{Q}$. Note que F é compacto. Logo $\varphi^{-1}[F]$ também é compacto. A Observação 2.3.5 implica que existe $g \in \omega^\omega$ tal que $\varphi^{-1}[F] \subseteq \prod_{n \in \omega} g(n) \subseteq \omega^\omega$. Como X é um subconjunto ilimitado de ω^ω, existe $\alpha \in \omega_1$ tal que $f_\alpha \not\leqslant^* g$. Note que o conjunto

$$X \cap \varphi^{-1}[F] \subseteq X \cap \prod_{n \in \omega} g(n) \subseteq \{f_\zeta : \zeta < \alpha\}$$

é enumerável. Logo $\varphi[X] \cap F = \varphi[X] \setminus U = Y \setminus U$ também é enumerável. Portanto, Y está concentrado em $[0,1] \cap \mathbb{Q}$.

A Proposição 2.3.19 implica que Y é Rothbeger e observe que a cardinalidade de Y é $\mathfrak{b} = \aleph_1$. Isto é, Y não é enumerável. Então a Conjectura R-Borel falha.

□

Por um lado, na demonstração do Teorema 2.3.21 afirmamos que o conjunto $Y \subseteq [0,1]$ está concentrado em um subconjunto enumerável de Y, isto é, para todo conjunto aberto $U \subseteq Y$ que contém tal subconjunto enumerável, $Y \setminus U$ é enumerável. Por outro lado, na Afirmação 2 da demonstração do Teorema 2.3.6 temos um conjunto $X \subseteq [0,1]$ e um subconjunto enumerável de $[0,1]$ tais que para qualquer conjunto aberto $U \subseteq [0,1]$ que contém tal subconjunto enumerável, $X \setminus U$ é enumerável mas nesse caso X não contém tal subconjunto enumerável de $[0,1]$. De fato, X e tal subconjunto enumerável de $[0,1]$ são conjuntos disjuntos. Portanto, as construções de tais

conjuntos Y e X foram parecidas mas diferentes pois Y é espaço de Rothberger e X não é espaço de Rothberger.

Lembremos que decorre do Teorema 2.3.6 que a Hipóteses do Contínuo implica que a Conjetura de Borel falha (Corolário 2.3.7). Decorre do Teorema 2.3.21 um corolário parecido:

Corolário 2.3.22. A Hipótese do Contínuo implica que a Conjectura R-Borel falha.

Demonstração. Vamos assumir que vale a Hipótese do Contínuo. Pela Observação 2.1.9, $\mathfrak{b} = \aleph_1$. Pelo Teorema 2.3.21, a Conjectura R-Borel falha.

□

Decorre do Corolário 2.3.22 que a negação da Conjetura R-Borel é consistente com ZFC. No final desta seção, estabeleceremos a independência da Conjectura R-Borel com ZFC.

Aurichi e Dias (AURICHI; DIAS, 2020) demonstraram:

Teorema 2.3.23. (ROTHBERGER, 1941) A Conjectura R-Borel implica a Conjectura de Borel.

Demonstração. Vamos usar a contrapositiva. Suponha que a Conjectura de Borel falha. Então existe algum subconjunto de $\mathbb{R}$ não enumerável que tem medida nula forte. Logo podemos escolher um subconjunto de $\mathbb{R}$ que tem medida nula forte com cardinalidade $\aleph_1$, o qual, se $\aleph_1 < \mathfrak{b}$, é Rothberger sob o Lema 2.3.20, e a Conjectura R-Borel falha. Também no caso $\aleph_1 = \mathfrak{b}$ a Conjectura R-Borel falha sob o Teorema 2.3.21. Portanto, a Conjectura R-Borel implica a Conjectura de Borel.

□

Não obstante eu não saiba se está em outro lugar, acho natural generalizar a Conjectura R-Borel para espaços métricos:

Definição 2.3.24. Vamos chamar de **Conjectura R-Borel para espaços métricos** a afirmação "Todo espaço métrico de Rothberger é enumerável".

Apareceu na Introdrução do paper de Aurichi e Dias (AURICHI; DIAS, 2020):

Proposição 2.3.25. Todo espaço métrico de Rothberger é um espaço de medida nula forte.

Demonstração. Suponha que $\langle X, d\rangle$ é um espaço métrico de Rothberger. Considere $\langle \varepsilon_n\rangle_{n\in\omega}$ uma sequência arbitrária de números reais positivos, para cada $n \in \omega$, defina $\mathscr{C}_n$ como a coleção de conjuntos abertos com diâmetro menor que ε_n. Como $\langle \mathscr{C}_n\rangle_{n\in\omega}$ é uma sequência de coberturas abertas de X, existe uma sequência $\langle U_n\rangle_{n\in\omega}$ tal que cada $U_n \in \mathscr{C}_n$ e $X = \bigcup_{n\in\omega} U_n$. Note que $\operatorname{diam}(U_n) \leqslant \varepsilon_n$ para cada $n \in \omega$. Portanto, $\langle X, d\rangle$ é de medida nula forte.

□

Teorema 2.3.26. A Conjectura de Borel para espaços métricos implica a Conjectura R-Borel para espaços métricos.

Demonstração. Vamos assumir que vale a Conjectura de Borel para espaços métricos. Todo espaço métrico de Rothberger, pela Proposição 2.3.25, é um espaço de medida nula forte, e pela Conjectura de Borel para espaços métricos, é enumerável. Portanto, vale a Conjectura R-Borel para espaços métricos.

□

O corolário a seguir é o primeiro resultado para estabelecer algumas equivalências da Conjectura de Borel.

Corolário 2.3.27. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. A Conjectura de Borel;
2. A Conjectura de Borel para espaços métricos;
3. A Conjectura R-Borel para espaços métricos;
4. A Conjectura R-Borel.

Demonstração. A implicação $1. \Rightarrow 2.$ segue do Teorema 2.3.16, a implicação $2. \Rightarrow 3.$ segue da Proposição 2.3.25, a implicação $3. \Rightarrow 4.$ é trivial e a implicação $4. \Rightarrow 1.$ segue do Teorema 2.3.23.

□

Como já foi estabelecida a independência com ZFC da Conjectura de Borel, decorre do Corolário 2.3.27 a independência com ZFC da Conjectura de Borel para espaços métricos, da Conjectura R-Borel para espaços métricos e da Conjectura R-Borel.

CAPÍTULO

3

JOGOS INFINITOS ASSOCIADOS À PROPRIEDADE DE MEDIDA NULA FORTE

Galvin, Mycielki e Solovay (GALVIN; MYCIELSKI; SOLOVAY, 2017) introduziram o Jogo $MS(X)$ onde X é um espaço métrico e o Jogo $MS_\sigma(X,\mathscr{F})$ onde X é um espaço métrico $\sigma-$totalmente limitado. Eles provaram que um espaço métrico $\sigma-$totalmente limitado pode ser caracterizado pela inexistência de estratégia vencedora para o Jogador I em tais jogos. Eles usaram tal caracterização para demonstrar o Teorema de Galvin-Mycielski-Solovay sobre Produtos Cartesianos. Eles usaram tal teorema para mostrar que a Conjectura de Pribry é verdadeira e responder perguntas de Sierpiński e de Ficket.

Aurichi e Dias (AURICHI; DIAS, 2020) mostraram que a Conjectura de Borel pode ser caracterizada pela existência de estratégia vencedora para algum dos jogadores do Jogo $MS(X)$ onde X é qualquer espaço métrico $\sigma-$totalemnte limitado ou um conjunto arbitrário de números reais.

3.1 Jogo de Mycielski-Solovay

Apareceu no paper de Aurichi e Dias (AURICHI; DIAS, 2020) a definição do jogo que Jan Mycielski e Robert M. Solovay introduziram para caracterizar a propriedade de medida nula forte:

Definição 3.1.1. (GALVIN; MYCIELSKI; SOLOVAY, 2017) Dado um espaço métrico X, o **Jogo de Mycielski-Solovay** ($MS(X)$) entre os jogadores I e II é assim:

Em cada turno $n \in \omega$, o Jogador I escolhe $\varepsilon_n \in \mathbb{R}_{>0}$ e o Jogador II responde $A_n \subseteq X$ com $\operatorname{diam}(A_n) \leqslant \varepsilon_n$.

Uma partida deste jogo é ganha pelo Jogador II se $\bigcup_{n\in\omega} A_n = X$. Caso contrário, a partida

é ganha pelo Jogador I.

Definição 3.1.2. Considere o Jogo $MS(X)$. Seja $\mathscr{L}$ a coleção de todos os subconjuntos limitados de X.

Uma **estratégia do Jogador** I é uma função θ com $\mathrm{dom}\theta \subset \mathscr{L}^{<\omega}$ tal que [1]

$$\theta(\langle A_0, \ldots, A_{n-1}\rangle) \in \mathbb{R}_{>0}$$

para cada sequência finita $\langle A_0, \ldots, A_{n-1}\rangle \in \mathrm{dom}\theta$.

Uma **estratégia do Jogador** II é uma função ρ com $\mathrm{dom}\rho \subset \mathbb{R}_{>0}^{<\omega}$ tal que

$$\rho(\langle \varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n\rangle) \in \mathscr{L} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{diam}(\rho(\langle \varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n\rangle)) \leqslant \varepsilon_n$$

para cada sequência finita $\langle \varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n\rangle \in \mathrm{dom}\rho$.

Definição 3.1.3. Uma **estratégia vencedora** num jogo é uma estratégia tal que, dada qualquer sequência de jogadas de um dos jogadores numa partida, a partida do jogo for ganha pelo outro jogador jogando segundo tal estratégia.

Apareceu no paper de Aurichi e Dias (AURICHI; DIAS, 2020) o primeiro teorema do paper de Fred Galvin, Jan Mycielski e Robert M. Solovay:

Teorema 3.1.4. (GALVIN; MYCIELSKI; SOLOVAY, 2017) Considere X um espaço métrico. Então, X é enumerável se, e somente se, o Jogador II tem estratégia vencedora no Jogo $MS(X)$.

Demonstração. Suponha que X é enumerável e escreva $X = \{x_n\}_{n\in\omega}$. Se o Jogador II responde $B_n = \{x_n\}$ em cada turno $n \in \omega$, então tal estratégia é uma estratégia vencedora para o Jogador II no Jogo $MS(X)$.

Reciprocamente, suponha que o Jogador II tem estratégia vencedora no Jogo $MS(X)$. Considere ρ uma estratégia vencedora do Jogador II no Jogo $MS(X)$.

<u>Afirmação 1.</u> Para cada ponto $x \in X$, existe $s_x \in \mathbb{Q}_{>0}^{<\omega}$ tal que [2] $x \in \rho(s_x{}^\frown q)$ para qualquer $q \in \mathbb{Q}_{>0}$.

Demonstração. [da Afirmação 1] Suponha que não. Então, existe $x \in X$ tal que, para toda $s \in \mathbb{Q}_{>0}^{<\omega}$, existe $q_s \in \mathbb{Q}_{>0}$ com $x \notin \rho(s^\frown q_s)$. Defina por indução uma estratégia do Jogador I como segue. Sejam $\varepsilon_0 = q_{\langle\rangle}$ e $\varepsilon_{n+1} = q_{\langle\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_n\rangle}$. Em cada turno $n \in \omega$, o Jogador I escolhe $\varepsilon_n \in \mathbb{Q}_{>0}$ tal que $x \notin \rho(\langle \varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n\rangle)$. Assim, $x \notin \bigcup_{n\in\omega} \rho(\langle \varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n\rangle)$. Daí, $\bigcup_{n\in\omega} \rho(\langle \varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n\rangle) \neq X$ mas isso é uma contradição pois ρ é uma estratégia vencedora do Jogador II.

□

[1] Se $n = 0$ então $\langle A_0, \ldots, A_{n-1}\rangle = \langle\rangle$.
[2] $\langle\rangle^\frown\delta = \langle\delta\rangle$ e $\langle \varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n\rangle^\frown\delta = \langle \varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n, \delta\rangle$.

Afirmação 2. A função $x \mapsto s_x$ é injetora.

Demonstração. [da Afirmação 2] Considere $x, y \in X$ com $s_x = s_y$. Seja $s_x = s_y = s \in \mathbb{Q}_{>0}^{<\omega}$. Então $x, y \in \rho(s^\frown q)$ para qualquer $q \in \mathbb{Q}_{>0}$. Daí, para qualquer $q \in \mathbb{Q}_{>0}$, $d(x,y) \leqslant \operatorname{diam}(\rho(s^\frown q)) \leqslant q$ pois ρ é estratégia do Jogador II. Logo $d(x,y) = 0$. Assim, $x = y$.

□

Portanto, X é enumerável.

□

Apareceram no paper de Aurichi e Dias (AURICHI; DIAS, 2020) as definições seguintes:

Definição 3.1.5. Um espaço métrico é **totalmente limitado** se, para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, o espaço pode ser coberto por uma quantidade finita de conjuntos de diâmetro no máximo ε.

Definição 3.1.6. Um espaço métrico é $\sigma-$**totalmente limitado** se é união enumerável de subespaços totalmente limitados.

Embora as definições acima não apareceram no paper de Galvin, Mycielski e Solovay, eles usaram essas definições em seus teoremas pois possivelmente eles presumiram que eram bastante conhecidas.

Observação 3.1.7. Em um espaço métrico temos que a união finita de subespaços totalmente limitados acaba sendo um subespaço totalmente limitado. Portanto, se X é um espaço métrico $\sigma-$totalmente limitado, então podemos escolher uma sequência crescente $\langle X_n \rangle_{n\in\omega}$ de subespaços totalmente limitados de X com $X = \bigcup_{n\in\omega} X_n$.

Apareceu no paper de Auruchi e Dias (AURICHI; DIAS, 2020) o teorema seguinte:

Teorema 3.1.8. (GALVIN; MYCIELSKI; SOLOVAY, 2017) Considere X um espaço métrico $\sigma-$totalmente limitado. Então X é de medida nula forte se, e somente se, o Jogador I não tem estratégia vencedora no Jogo $MS(X)$.

Demonstração. Vamos provar primeiro a parte recíproca do teorema.

Suponha que o Jogador I não tem estratégia vencedora no Jogo $MS(X)$. Considere uma sequência $\langle \varepsilon_n \rangle_{n\in\omega} \in \mathbb{R}_{>0}^{\omega}$. Definimos a seguinte estratégia para o Jogador I: Em cada turno $n \in \omega$, o Jogador I escolhe ε_n. Como tal estratégia não pode ser uma estratégia vencedora, em cada turno $n \in \omega$ o Jogador II pode responder $A_n \subseteq X$ com $\operatorname{diam}(A_n) \leqslant \varepsilon_n$ de modo que a partida $\langle \varepsilon_0, A_0, \varepsilon_1, A_1, \varepsilon_2, A_2, \ldots \rangle$ do Jogo $MS(X)$ é ganha pelo Jogador II. Isto é, $\bigcup_{n\in\omega} A_n = X$. Portanto, X é de medida nula forte.

Agora, vamos provar a implicação direta.

Suponha que X é de medida nula forte. Considere θ uma estratégia arbitrária do Jogador I no Jogo $MS(X)$. Vamos provar que θ não pode ser uma estratégia vencedora. Como X é um espaço métrico $\sigma-$totalmente limitado, pela Observação 3.1.7, podemos escolher uma sequência crescente $\langle X_n\rangle_{n\in\omega}$ de subespaços totalmente limitados de X com $X=\bigcup\limits_{n\in\omega} X_n$. Para cada $n\in\omega$, vamos definir [3] $\varepsilon_n\in\mathbb{R}_{>0}$ e $\mathscr{C}_n\in[\mathscr{L}]^{<\omega}$ recursivamente como segue. Defina $\varepsilon_0=\theta(\langle\rangle)$. Agora, suponha já definidos [4] $\langle\varepsilon_k\rangle_{k\leqslant n}$ e $\langle\mathscr{C}_k\rangle_{k<n}$ para $n\in\omega$. Como X_n é totalmente limitado, existe um conjunto finito $\mathscr{F}_n\subseteq\mathscr{P}(X)$ tal que $\operatorname{diam}(Y)\leqslant\dfrac{\varepsilon_n}{3}$ para todo $Y\in\mathscr{F}_n$ e [5] $\bigcup\mathscr{F}_n=X_n$. Sejam $\mathscr{C}_n=\left\{\bigcup\limits_{y\in Y}B\left[y,\dfrac{\varepsilon_n}{3}\right]:Y\in\mathscr{F}_n\right\}$ e $\varepsilon_{n+1}=\min\left\{\theta(\langle C_k\rangle_{k\leqslant n}):\langle C_k\rangle_{k\leqslant n}\in\prod\limits_{k\leqslant n}\mathscr{C}_k\right\}$. Isso define ε_n e $\mathscr{C}_n$ para todo $n\in\omega$.

Afirmamos que dado $n\in\omega$, todo subconjunto não vazio $A\subseteq X_n$ com $\operatorname{diam}(A)\leqslant\dfrac{\varepsilon_n}{3}$ está incluído em algum elemento de $\mathscr{C}_n$.

Com efeito, considere $n\in\omega$ e $A\neq\varnothing$ de modo que $\operatorname{diam}(A)\leqslant\dfrac{\varepsilon_n}{3}$ e $A\subseteq X_n=\bigcup\mathscr{F}_n$. Escolha $x\in A$. Logo existe algum $Y\in\mathscr{F}_n$ tal que $x\in Y$. Considere $z\in A$ arbitrário. Então $d(x,z)\leqslant\operatorname{diam}(A)\leqslant\dfrac{\varepsilon_n}{3}$. Daí, $z\in B\left[x,\dfrac{\varepsilon_n}{3}\right]$. Assim, $A\subseteq\bigcup\limits_{y\in Y}B\left[y,\dfrac{\varepsilon_n}{3}\right]\in\mathscr{C}_n$.

Considere uma partição de ω em uma quantidade infinita de conjuntos infinitos e disjuntos como $\omega=\dot{\bigcup\limits_{n\in\omega}}M_n$ de forma que $\min M_n\geqslant n$ para cada $n\in\omega$. Para cada $n\in\omega$ considere a sequência $\left\langle\dfrac{\varepsilon_m}{3}\right\rangle_{m\in M_n}$. Como cada X_n tem medida nula forte, podemos escolher uma sequência $\langle A_m\rangle_{m\in M_n}$ de subconjuntos de X_n satisfazendo $\operatorname{diam}(A_m)\leqslant\dfrac{\varepsilon_m}{3}$ para cada $m\in M_n$ e $X_n=\bigcup\limits_{m\in M_n}A_m$. Se $m\in\omega$, então $m\in M_n$ para algum $n\in\omega$. Daí, $A_m\subseteq X_n$. Note que $n\leqslant\min M_n$ e $\min M_n\leqslant m$. Assim, $n\leqslant m$. Logo $X_n\subseteq X_m$. Portanto, $A_m\subseteq X_m$ para cada $m\in\omega$. Então, pelo que é afirmado acima, para cada $m\in\omega$, temos que $A_m\subseteq C_m$ para algum $C_m\in\mathscr{C}_m$. Isto implica que $\operatorname{diam}(C_m)\leqslant\varepsilon_m\leqslant\theta(\langle C_k\rangle_{k<m})$ por construção. O Jogador II pode responder à estratégia θ do Jogador I de acordo com a partida

$$\langle\theta(\langle\rangle),C_0,\theta(\langle C_0\rangle),C_1,\theta(\langle C_0,C_1\rangle),C_2,\ldots,\theta(\langle C_k\rangle_{k<m}),C_m,\ldots\rangle.$$

Finalmente, $X=\bigcup\limits_{n\in\omega}X_n=\bigcup\limits_{n\in\omega}\bigcup\limits_{m\in M_n}A_m\subseteq\bigcup\limits_{n\in\omega}\bigcup\limits_{m\in M_n}C_m=\bigcup\limits_{m\in\omega}C_m\subseteq X$. Logo $X=\bigcup\limits_{m\in\omega}C_m$. Então a partida é ganha pelo Jogador II. Portanto, o Jogador I não tem estratégia vencedora.

□

A demonstração do teorema acima é uma adaptação da prova do segundo teorema do paper de Galvin, Mycielski e Solovay.

[3] $[\mathscr{L}]^{<\omega}=\bigcup\limits_{n\in\omega}\{\mathscr{C}\subseteq\mathscr{L}:|\mathscr{C}|=n\}$

[4] $\langle\varepsilon_k\rangle_{k\leqslant n}=\langle\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_n\rangle$ e $\langle\mathscr{C}_k\rangle_{k<n}=\langle\mathscr{C}_0,\ldots,\mathscr{C}_{n-1}\rangle$

[5] $\bigcup\mathscr{F}_n=\bigcup\limits_{Y\in\mathscr{F}_n}Y$

Apareceu no paper de Aurichi e Dias (AURICHI; DIAS, 2020) a definição seguinte:

Definição 3.1.9. Dizemos que um jogo é **determinado** se um dos jogadores tiver uma estratégia vencedora.

Apareceu no pape de Aurichi e Dias (AURICHI; DIAS, 2020) o corolário seguinte:

Corolário 3.1.10. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. A Conjectura de Borel;
2. O Jogo $MS(X)$ é determinado em cada $X \subseteq \mathbb{R}$;
3. O Jogo $MS(X)$ é determinado em cada espaço métrico $\sigma-$totalmente limitado X.

Demonstração. A implicação $\underline{3. \Rightarrow 2.}$ é trivial.

$\underline{2. \Rightarrow 1.}$: Vamos assumir que o Jogo $MS(X)$ é determinado em cada $X \subseteq \mathbb{R}$.

Considere X um subconjunto arbitrário de $\mathbb{R}$ que tem medida nula forte. Pelo Teorema 3.1.8, o Jogador I não tem estratégia vencedora no Jogo $MS(X)$. Pelo Item 2, o Jogo $MS(X)$ é determinado em X. Logo o Jogador II tem estratégia vencedora no Jogo $MS(X)$. Então, pelo Teorema 3.1.4, X é enumerável. Portanto, a Conjectura de Borel é verdadeira.

$\underline{1. \Rightarrow 3.}$: Vamos assumir que a Conjectura de Borel é verdadeira.

Considere X um espaço métrico $\sigma-$totalmente limitado arbitrário. Suponha que o Jogador I não tem estratégia vendedora no Jogo $MS(X)$. Pelo Teorema 3.1.8, X é um espaço de medida nula forte. Como a Conjectura de Borel é verdadeira, pelo Teorema 2.3.16, a Conjectura de Borel para espaços métricos também é verdadeira. Logo X é enumerável. Então, pelo Teorema 3.1.4, o Jogador II tem estratégia vencedora no Jogo $MS(X)$. Portanto, o Jogo $MS(X)$ é determinado em X.

□

O corolário acima é o primeiro resultado para estabelecer as equivalências da Conjectura de Borel em termos do Jogo de Mycielski-Solovay. Decorre a independência de cada afirmação do Corolário 3.1.10 com ZFC.

3.2 Jogo Sigma de Mycielski-Solovay

Galvin, Mycielski e Solovay definiram uma variante técnica do Jogo de Mycielski-Solovay e estudaram as condições sob as quais um jogador ou outro tem uma estratégia vencedora.

Definição 3.2.1. (GALVIN; MYCIELSKI; SOLOVAY, 2017) Considere X espaço métrico $\sigma-$totalmente limitado e $\mathscr{F} = \langle F_n \rangle_{n\in\omega}$ uma sequência de subconjuntos de X totalmente limitados tais que $\bigcup_{n\in\omega} F_n = X$ e $F_n \subseteq F_{n+1}$ para cada $n \in \omega$. Definimos o **Jogo Sigma de Mycielski-Solovay** ($MS_\sigma(X,\mathscr{F})$) entre os jogadores I e II como segue:

Em cada turno $n \in \omega$, o Jogador I escolhe $\varepsilon_n \in \mathbb{R}_{>0}$ e o Jogador II responde $B_n \subseteq F_n$ com $\operatorname{diam}(B_n) \leqslant \varepsilon_n$.

Uma partida deste jogo é ganha pelo Jogador II se [6] $\limsup_{n\in\omega} B_n = X$. Caso contrário, a partida é ganha pelo Jogador I.

Definição 3.2.2. Considere o Jogo $MS_\sigma(X,\mathscr{F})$. Para cada $n \in \omega$, seja $\mathscr{L}_n$ a coleção de todos os subconjuntos limitados de F_n.

Uma **estratégia do Jogador** I é uma função θ com $\operatorname{dom}\theta \subset \bigcup_{n\in\omega}\prod_{m\in n}\mathscr{L}_m$ tal que

$$\theta(\langle B_0,\ldots,B_{n-1}\rangle) \in \mathbb{R}_{>0}$$

para cada sequência finita $\langle B_0,\ldots,B_{n-1}\rangle \in \operatorname{dom}\theta$.

Uma **estratégia do Jogador** II é uma função ρ com $\operatorname{dom}\rho \subset \mathbb{R}_{>0}^{<\omega}$ tal que

$$\rho(\langle \varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_n\rangle) \in \mathscr{L}_n \qquad \text{e} \qquad \operatorname{diam}(\rho(\langle \varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_n\rangle)) \leqslant \varepsilon_n$$

para cada sequência finita $\langle \varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_n\rangle \in \operatorname{dom}\rho$.

Para demonstrar o segundo teorema do paper de Galvin, Mycielski e Solovay, eles fizeram um lema técnico:

Lema 3.2.3. (GALVIN; MYCIELSKI; SOLOVAY, 2017) Considere F um espaço métrico totalmente limitado e um número $\delta > 0$. Então podemos encontrar uma coleção finita não vazia $\mathscr{B}$ de subconjuntos de F, cada um de diâmetro no máximo δ, de modo que todo subconjunto de F de diâmetro no máximo $\frac{1}{3}\delta$ esteja contido em algum membro de $\mathscr{B}$.

Demonstração. Como F é totalmente limitado, F pode ser coberto por uma quantidade finita de conjuntos de diâmetro no máximo $\frac{1}{3}\delta$. Isto é, existe algum $m \in \omega$ tal que $F = \bigcup_{n=0}^{m} F_n$ com $\operatorname{diam}(F_n) \leq \frac{1}{3}\delta$ para cada $n \leqslant m$. Seja $\mathscr{B} = \{B_0,\cdots,B_m\}$, onde, para cada $n \leqslant m$, temos

$$B_n = \{x \in F : d(x,y) \leqslant \frac{1}{3}\delta \text{ para algum } y \in F_n\}.$$

<u>Afirmação 1.</u> $\operatorname{diam}(B_n) \leqslant \delta$ para cada $n \leqslant m$.

[6] $\limsup_{n\in\omega} B_n = \bigcap_{n\in\omega}\bigcup_{k\geqslant n} B_k$.

Demonstração. [da Afirmação 1] Considere $x, w \in B_n$ arbitrários. Existem $y, z \in F_n$ tais que $d(x,y) \leqslant \frac{1}{3}\delta$ e $d(w,z) \leqslant \frac{1}{3}\delta$. Além disso, $d(y,z) \leqslant \operatorname{diam}(F_n) \leqslant \frac{1}{3}\delta$. Então

$$d(x,w) \leqslant d(x,y) + d(y,z) + d(z,w) \leqslant \frac{1}{3}\delta + \frac{1}{3}\delta + \frac{1}{3}\delta = \delta.$$

Portanto, $\operatorname{diam}(B_n) \leqslant \delta$.

□

Afirmação 2. Se $A \subseteq F$ e $\operatorname{diam}(A) \leqslant \frac{1}{3}\delta$, então $A \subseteq B_n$ para algum $n \leqslant m$.

Demonstração. [da Afirmação 2] Considere o conjunto não vazio $A \subseteq F = \bigcup_{n=0}^{m} F_n$ tal que $\operatorname{diam}(A) \leqslant \frac{1}{3}\delta$. Escolha $y \in A$. Logo $y \in F_n$ para algum $n \leqslant m$. Agora, considere $x \in A$ arbitrário. Então, $d(x,y) \leqslant \operatorname{diam}(A) \leqslant \frac{1}{3}\delta$. Daí, $x \in B_n$. Assim, $A \subseteq B_n$.

□

Portanto, a coleção $\mathscr{B}$ tem as propriedades desejadas.

□

Agora, o segundo teorema do paper de Galvin, Mycielski e Solovay:

Teorema 3.2.4. (GALVIN; MYCIELSKI; SOLOVAY, 2017) Considere X um espaço métrico $\sigma-$totalmente limitado e $\mathscr{F} = \langle F_n \rangle_{n\in\omega}$ uma sequência de subconjuntos de X totalmente limitados tais que $\bigcup_{n\in\omega} F_n = X$ e $F_n \subseteq F_{n+1}$ para cada $n \in \omega$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

1. O Jogador I não tem estratégia vencedora no Jogo $MS_\sigma(X, \mathscr{F})$.
2. O Jogador I não tem estratégia vencedora no Jogo $MS(X)$.
3. X é de medida nula forte.

Demonstração. Já temos 2. $\Leftrightarrow$ 3. pelo Teorema 3.1.8.

1. $\Rightarrow$ 2. : Suponha que o Jogador I não tem estratégia vencedora no Jogo $MS_\sigma(X, \mathscr{F})$.

Considere θ uma estratégia arbitrária do Jogador I no Jogo $MS(X)$. Em cada turno $n \in \omega$, quando o Jogador I escolhe $\varepsilon_n = \theta(\langle B_0, \ldots, B_{n-1} \rangle) \in \mathbb{R}_{>0}$, o Jogador II pode responder $B_n \subseteq F_n$ com $\operatorname{diam}(B_n) \leqslant \varepsilon_n$ de modo que a partida $\langle \theta(\langle\rangle), B_0, \theta(\langle B_0 \rangle), B_1, \theta(\langle B_0, B_1 \rangle), B_2, \ldots \rangle$ do Jogo $MS_\sigma(X, \mathscr{F})$ é ganha pelo Jogador II. Isto é, $\limsup_{n\in\omega} B_n = X$. Temos que

$$X = \limsup_{n\in\omega} B_n \subseteq \bigcup_{n\in\omega} B_n \subseteq X.$$

Daí, a partida $\langle\theta(\langle\rangle), B_0, \theta(\langle B_0\rangle), B_1, \theta(\langle B_0, B_1\rangle), B_2, \ldots\rangle$ vista como uma partida do Jogo $MS(X)$ é ganha pelo Jogador II. Portanto, o Jogador I não tem estratégia vencedora no Jogo $MS(X)$.

3. $\Rightarrow$ 1. : Suponha que X é de medida nula forte. Vamos provar que o Jogador I não tem estratégia vencedora no Jogo $MS_\sigma(X, \mathscr{F})$.

Considere θ uma estratégia arbitrária do Jogador I no Jogo $MS_\sigma(X)$. Note que F_0 é um espaço métrico totalmente limitado. Defina $\delta_0 = \theta(\langle\rangle)$. De acordo com o Lema 3.2.3, podemos encontrar uma coleção finita não vazia $\mathscr{B}_0$ de subconjuntos de F_0, cada um de diâmetro no máximo δ_0, de modo que todo subconjunto de F_0 de diâmetro no máximo $\frac{1}{3}\delta_0$ esteja contido em algum membro de $\mathscr{B}_0$. Usando recursivamente o Lema 3.2.3, é possível definir $\delta_n, \mathscr{B}_n (n > 0)$ como segue:

(i) $\delta_n = \min\{\theta(\langle B_0, \ldots, B_{n-1}\rangle) : B_0 \in \mathscr{B}_0, \ldots, B_{n-1} \in \mathscr{B}_{n-1}\}$;

(ii) $\mathscr{B}_n$ é uma coleção finita não vazia de subconjuntos de F_n, cada um de diâmetro no máximo δ_n;

(iii) todo subconjunto de F_n de diâmetro no máximo $\frac{1}{3}\delta_n$ está contido em algum membro de $\mathscr{B}_n$.

Considere uma partição de ω em uma quantidade infinita de conjuntos infinitos e disjuntos como $\omega = \dot{\bigcup_{n\in\omega}} M_n$ de forma que $\min M_n \geqslant n$ para cada $n \in \omega$. Seja $\alpha_k = \frac{1}{3}\delta_k$ para cada $k \in \omega$. Para cada $n \in \omega$, considere a sequência $\langle\alpha_k\rangle_{k\in M_n}$. Como cada F_n é de medida nula forte, podemos escolher uma sequência $\langle A_k\rangle_{k\in M_n}$ de conjuntos satisfazendo $\operatorname{diam}(A_k) \leqslant \alpha_k$ para cada $k \in M_n$ e $F_n = \bigcup_{k\in M_n} A_k$. Se $k \in \omega$, então $k \in M_n$ para algum $n \in \omega$. Daí, $A_k \subseteq F_n$. Note que $n \leqslant \min M_n$ e $\min M_n \leqslant k$. Assim, $n \leqslant k$. Logo $F_n \subseteq F_k$. Portanto, $A_k \subseteq F_k$ para cada $k \in \omega$. Como para cada $k \in \omega$ temos que $\operatorname{diam}(A_k) \leqslant \alpha_k = \frac{1}{3}\delta_k$, pelo item (iii), podemos escolher $\hat{B}_k \in \mathscr{B}_k$ com $A_k \subseteq \hat{B}_k$. Agora, seja $\varepsilon_0 = \theta(\langle\rangle)$ e, para $n > 0$, seja $\varepsilon_n = \theta(\langle\hat{B}_0, \ldots, \hat{B}_{n-1}\rangle)$. Assim, para cada $n \in \omega$, temos que $\hat{B}_n \subseteq F_n$ e $\operatorname{diam}(\hat{B}_n) \leqslant \delta_n \leqslant \varepsilon_n$. Daí, a sequência $\langle\varepsilon_0, \hat{B}_0, \varepsilon_1, \hat{B}_1, \ldots, \varepsilon_n, \hat{B}_n, \ldots\rangle$ é uma partida do Jogo $MS_\sigma(X, \mathscr{F})$.

Afirmação 1. Para todo $x \in X$, o conjunto $\{k \in \omega : x \in \hat{B}_k\}$ é infinito.

Demonstração. [da Afirmação 1] Considere x um ponto arbitrário de $X = \bigcup_{n\in\omega} F_n$. Como, para cada $n \in \omega$, temos que $F_n \subseteq F_{n+1}$, existe $m \in \omega$ tal que, para todo $n \geqslant m$, temos que $x \in F_n$. Logo $x \in \bigcup_{k\in M_n} A_k$ para todo $n \geqslant m$. Assim, para cada $n \geqslant m$, existe $k_n \in M_n$ tal que $x \in A_{k_n} \subseteq \hat{B}_{k_n}$. Como os conjuntos $M_n (n \geqslant m)$ são disjuntos, o conjunto $\{k_n : n \geqslant m\}$ é infinito. Daí, o conjunto $\{k \in \omega : x \in \hat{B}_k\}$ é infinito.

$\square$

Afirmação 2. $\limsup_{n\in\omega} \hat{B}_n = X$.

Demonstração. [da Afirmação 2] Considere $x \in X$ arbitrário e qualquer $n \in \omega$. Como o conjunto $\{k \in \omega : x \in \hat{B}_k\}$ é infinito, existe $k > n$ tal que $x \in \hat{B}_k$. Assim, $x \in \bigcup_{k\geqslant n} \hat{B}_k$ para todo $n \in \omega$. Logo $x \in \bigcap_{n\in\omega} \bigcup_{k\geqslant n} \hat{B}_k$. Isto é, $x \in \limsup_{n\in\omega} \hat{B}_n$. Daí, segue que $\limsup_{n\in\omega} \hat{B}_n = X$.

□

Daí, a partida $\langle \varepsilon_0, \hat{B}_0, \varepsilon_1, \hat{B}_1, \ldots, \varepsilon_n, \hat{B}_n, \ldots \rangle$ do Jogo $MS_\sigma(X, \mathscr{F})$ é ganha pelo Jogador II. Note que tal partida é jogada com uma estratégia θ arbitrária do Jogador I no Jogo $MS_\sigma(X, \mathscr{F})$. Portanto, o Jogador I não tem estratégia vencedora no Jogo $MS_\sigma(X, \mathscr{F})$.

□

3.3 Teorema de Galvin-Mycielski-Solovay sobre Produtos Cartesianos

A caracterização do Teorema 3.2.4 tem como o principal consequência um teorema sobre produtos cartesianos que é o terceiro teorema que apareceu no paper de Galvin, Mycielski e Solovay. Tal teorema pode ser usado para provar a Conjectura de Prikry e responder perguntas de Sierpiński e de Fickett.

Apareceu no paper de Galvin, Mycielski e Solovay a definição seguente:

Definição 3.3.1. (GALVIN; MYCIELSKI; SOLOVAY, 2017) Considere os espaços métricos X e Y. Um conjunto $A \subseteq X \times Y$ é **verticalmente denso** se, para cada $x \in X$, o conjunto

$$\{y \in Y : \langle x, y \rangle \in A\}$$

é denso em Y.

Observação 3.3.2. Considere $A \subseteq B \subseteq X \times Y$. Se A é verticalmente denso, então B também é verticalmente denso.

Antes de demonstrar o Teorema sobre Produtos Cartesianos, Galvin, Mycielski e Solovay provaram um lema técnico usando o clássico Lema da cobertura de Lebesgue:

Lema da cobertura de Lebesgue. Considere X um espaço métrico compacto e $\mathscr{C}$ uma cobertura aberta de X. Então existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que qualquer $A \subseteq X$ com $\operatorname{diam}(A) \leqslant \varepsilon$ é um subconjunto de algum elemento de $\mathscr{C}$ (diz-se que ε é um número de Lebesgue para a cobertura $\mathscr{C}$).

Lema 3.3.3. (GALVIN; MYCIELSKI; SOLOVAY, 2017) Considere os espaços métricos X e Y. Dados

a) um conjunto compacto $K \subseteq X$,

b) um conjunto aberto não vazio $W \subseteq Y$, e

c) um conjunto aberto verticalmente denso $A \subseteq X \times Y$,

podemos encontrar um número $\varepsilon > 0$ tal que, para qualquer conjunto $B \subseteq K$ com $\operatorname{diam}(B) \leqslant \varepsilon$, existe um conjunto aberto não vazio $V \subseteq W$ com $B \times V \subseteq A$.

Demonstração. Vamos provar que a seguinte coleção é uma cobertura aberta de X:

$$\mathscr{S} = \{S \subseteq X : S \text{ é aberto e } S \times V \subseteq A \text{ para algum conjunto aberto não vazio } V \subseteq W\}.$$

Considere x qualquer ponto de X. Por hipótese o conjunto A é verticalmente denso. Logo o conjunto $\{y \in Y : \langle x, y\rangle \in A\}$ é denso em Y. Então $W \cap \{y \in Y : \langle x, y\rangle \in A\} \neq \varnothing$. Escolha $y \in W$ com $\langle x, y\rangle \in A$. Por hipótese temos também que A é um conjunto aberto em $X \times Y$. Então podemos encontrar dois conjuntos abertos S e U de forma que $x \in S$, $y \in U$ e $S \times U \subseteq A$. Seja $V = W \cap U$. Logo $y \in V$. Então $V \neq \varnothing$ e $S \times V \subseteq S \times U \subseteq A$. Portanto, S é um conjunto aberto com $S \times V \subseteq A$ onde V é um conjunto aberto não vazio de maneira que $V \subseteq W$. Logo $S \in \mathscr{S}$. Então, $x \in \bigcup_{S \in \mathscr{S}} S$. Portanto, $X = \bigcup_{S \in \mathscr{S}} S$. Isto é, $\mathscr{S}$ é uma cobertura aberta de X.

Em particular, $\mathscr{S}$ é uma cobertura aberta para o subespaço métrico compacto $K \subseteq X$. Pelo Lema da cobertura de Lebesgue, podemos encontrar um número $\varepsilon > 0$ tal que, para qualquer conjunto $B \subseteq K$ com $\operatorname{diam}(B) \leqslant \varepsilon$, temos que $B \subseteq S$ para algum $S \in \mathscr{S}$. Então, existe um conjunto aberto não vazio $V \subseteq W$ com $B \times V \subseteq S \times V \subseteq A$.

□

Possivelmente é bastante conhecida a definição de conjuntos perfeitos:

Definição 3.3.4. Dizemos que um conjunto é **perfeito** se é um conjunto fechado sem pontos isolados.

Galvin, Mycielski e Solovay demonstraram o Teorema sobre Produtos Cartesianos:

Teorema 3.3.5. (GALVIN; MYCIELSKI; SOLOVAY, 2017) Se

a) X é um espaço métrico $\sigma-$compacto,

b) Y é um espaço métrico completo sem pontos isolados,

c) $Z \subseteq X$ é um subespaço de medida nula forte,

d) $A \subseteq X \times Y$ é um conjunto G_δ verticalmente denso,

e) $U \subseteq Y$ é um conjunto aberto não vazio, e

f) $D \subseteq Y$ é um conjunto G_δ denso,

então existe um conjunto perfeito não vazio $P \subseteq U \cap D$ de modo que $Z \times P \subseteq A$.

Demonstração. Pelas hipóteses vamos mostrar que Z é um espaço $\sigma-$totalmente limitado e vamos usar o Teorema 3.2.4 para caracterizar a propriedade de medida nula forte de Z pela inexistência de uma estratégia vencedora para o Jogador I no Jogo Sigma de Mycielski-Solovay. Em tal jogo vamos definir uma estratégia do Jogador I e um conjunto perfeito não vazio $P \subseteq U \cap D$ de modo que $\left(\limsup_{n\in\omega} B_n\right) \times P \subseteq A$ para qualquer sequência $\langle B_n \rangle_{n\in\omega}$ de jogadas do Jogador II. Como tal estratégia do Jogador I não pode ser uma estratégia vencedora, $Z = \limsup_{n\in\omega} B_n$ para alguma sequência $\langle B_n \rangle_{n\in\omega}$ de jogadas do Jogador II. Logo obtemos o resultado.

Vamos começar a prova. Pelas hipóteses A e D são conjuntos G_δ e X é um espaço métrico $\sigma-$compacto. Então

- $A = \bigcap_{n\in\omega} A_n$, onde A_n é aberto em $X \times Y$ e $A_n \supseteq A_{n+1}$ para cada $n \in \omega$;
- $D = \bigcap_{n\in\omega} D_n$, onde D_n é aberto em Y e $D_n \supseteq D_{n+1}$ para cada $n \in \omega$; e
- $X = \bigcup_{n\in\omega} K_n$, onde K_n é compacto e $K_n \subseteq K_{n+1}$ para cada $n \in \omega$.

Seja $\mathscr{F} = \langle F_n \rangle_{n\in\omega}$, onde $F_n = Z \cap K_n$ para cada $n \in \omega$. Considere $n \in \omega$ e $\varepsilon > 0$. Logo a coleção de bolas abertas de diâmetro ε cobre K_n. Então, um número finito delas cobre $K_n \supseteq F_n$. Portanto, F_n é totalmente limitado. Daí, $Z = \bigcup_{n\in\omega} F_n$ é $\sigma-$totalmente limitado com $F_n \subseteq F_{n+1}$ para cada $n \in \omega$. Por hipótese Z é de medida nula forte. Pelo Teorema 3.2.4 e pelo que foi dito acima, o Jogador I não tem estratégia vencedora no Jogo $MS_\sigma(Z, \mathscr{F})$. Considere θ uma estratégia arbitrária para o Jogador I no Jogo $MS_\sigma(Z, \mathscr{F})$. Então existe uma partida

$$\langle \theta(\langle\rangle), B_0, \theta(\langle B_0 \rangle), B_1, \theta(\langle B_0, B_1 \rangle), B_2, \ldots \rangle$$

do Jogo $MS_\sigma(X, \mathscr{F})$ que é ganha pelo Jogador II. Isto é, $\limsup_{n\in\omega} B_n = Z$.

Portanto, para demonstrar o resultado, basta encontrar uma estratégia para o Jogador I no Jogo $MS_\sigma(Z, \mathscr{F})$ que garanta que $\left(\limsup_{n\in\omega} B_n\right) \times P \subseteq A$ para algum conjunto perfeito não vazio $P \subseteq U \cap D$.

Para começar, sejam $U_{\langle\rangle} = U$ e $W_{\langle\rangle} = U_{\langle\rangle} \cap D_0$. Por hipótese A é um conjunto verticalmente denso e note que $A \subseteq A_n$ para todo $n \in \omega$. Pela Observação 3.3.2, cada A_n é um conjunto verticalmente denso. Observe que K_0 é um conjunto compacto em X, $W_{\langle\rangle}$ é um conjunto aberto não vazio em Y e A_0 é um conjunto aberto verticalmente denso em $X \times Y$. Pelo Lema 3.3.3, podemos encontrar um número $\varepsilon_{\langle\rangle} > 0$ de maneira que, para qualquer conjunto $B \subseteq K_0$ com $\operatorname{diam}(B) \leqslant \varepsilon_{\langle\rangle}$, existe um conjunto aberto não vazio $V \subseteq W_{\langle\rangle}$ com $B \times V \subseteq A_0$.

Defina $\theta(\langle\rangle) = \varepsilon_{\langle\rangle}$. Seja B_0 a resposta do Jogador II no turno 0. Temos $B_0 \subseteq F_0 \subseteq K_0$ de modo que $\operatorname{diam}(B_0) \leqslant \varepsilon_{\langle\rangle}$. Escolha um conjunto aberto não vazio $V_{\langle\rangle} \subseteq W_{\langle\rangle}$ de forma que $B_0 \times V_{\langle\rangle} \subseteq A_0$. Como Y não tem pontos isolados, podemos escolher dois conjuntos abertos não vazios $U_{\langle 0\rangle}$ e $U_{\langle 1\rangle}$ de diâmetro no máximo $\dfrac{1}{2}$ de maneira que $\overline{U}_{\langle 0\rangle} \cup \overline{U}_{\langle 1\rangle} \subseteq V_{\langle\rangle}$ e $\overline{U}_{\langle 0\rangle} \cap \overline{U}_{\langle 1\rangle} = \varnothing$.

Para continuar, assuma que no turno $n > 0$ já estão definidos os conjuntos abertos não vazios $U_s \subseteq Y$ e $W_s = U_s \cap D_n$ para cada $s \in \{0,1\}^n$. Observe que K_n é um conjunto compacto em X, cada W_s é um conjunto aberto não vazio em Y e A_n é um conjunto aberto verticalmente denso em $X \times Y$. Pelo Lema 3.3.3, para cada $s \in \{0,1\}^n$, podemos encontrar um número $\varepsilon_s > 0$ de forma que, para qualquer conjunto $B \subseteq K_n$ com $\operatorname{diam}(B) \leqslant \varepsilon_s$, existe um conjunto aberto não vazio $V \subseteq W_s$ com $B \times V \subseteq A_n$.

Defina $\theta(\langle B_0, \ldots, B_{n-1}\rangle) = \min\{\varepsilon_s : s \in \{0,1\}^n\}$. Seja B_n a resposta do Jogador II no turno $n > 0$. Temos $B_n \subseteq F_n \subseteq K_n$ de modo que $\operatorname{diam}(B_n) \leqslant \theta(\langle B_0, \ldots, B_{n-1}\rangle) \leqslant \varepsilon_s$ para cada $s \in \{0,1\}^n$. Escolha, para cada $s \in \{0,1\}^n$, um conjunto aberto] não vazio $V_s \subseteq W_s$ de forma que $B_n \times V_s \subseteq A_n$. Como Y não tem pontos isolados, para cada $s \in \{0,1\}^n$, podemos escolher dois conjuntos abertos não vazios $U_{s^\frown 0}$ e $U_{s^\frown 1}$ de diâmetro no máximo $\dfrac{1}{2^{n+1}}$ de maneira que $\overline{U}_{s^\frown 0} \cup \overline{U}_{s^\frown 1} \subseteq V_s$ e $\overline{U}_{s^\frown 0} \cap \overline{U}_{s^\frown 1} = \varnothing$. Isso define a estratégia θ recursivamente.

Como Y é um espaço métrico completo, para cada $s \in \{0,1\}^\omega$, temos que o conjunto $\bigcap_{n\in\omega} U_{\langle s(0),\ldots,s(n)\rangle}$ é um conjunto unitário. Definimos $f : \{0,1\}^\omega \longrightarrow Y$ tal que $f(s)$ é o ponto único de $\bigcap_{n\in\omega} U_{\langle s(0),\ldots,s(n)\rangle}$.

Afirmo que a função $f : \{0,1\}^\omega \longrightarrow Y$ é contínua e injetora.

Com efeito, considere um conjunto aberto não vazio $W \subseteq Y$ arbitrário. Se $s \in f^{-1}[W]$, então $f(s) \in W$. Daí, para cada $s \in f^{-1}[W]$, existe um $r_s > 0$ tal que $B(f(s), r_s) \subset W$ e $\dfrac{1}{2^{n_s}} < r_s$ para algum $n_s \in \omega$. Para cada $s \in f^{-1}[W]$, defina um conjunto aberto em $\{0,1\}^\omega$ da seguinte maneira: $T_s = \{t \in \{0,1\}^\omega : t(k) = s(k) \text{ para todo } k \leqslant n_s\}$. Se $s \in f^{-1}[W]$, então $s \in T_s$. Assim,

$$f^{-1}[W] \subseteq \bigcup_{s\in f^{-1}[W]} T_s.$$

Para provar a continuidade de f basta demonstrar que

$$\bigcup_{s\in f^{-1}[W]} T_s \subseteq f^{-1}[W].$$

Considere $t \in \bigcup_{s\in f^{-1}[W]} T_s$ arbitrário. Existe um $s_t \in f^{-1}[W]$ tal que $t \in T_{s_t}$. Logo $f(s_t) \in W$, $B(f(s_t), r_{s_t}) \subset W$, $\dfrac{1}{2^{n_{s_t}}} < r_{s_t}$ e $t(k) = s_t(k)$ para todo $k \leqslant n_{s_t}$. Pela definição de f

$$f(t) \in U_{\langle t(0),\ldots,t(n_{s_t})\rangle} = U_{\langle s_t(0),\ldots,s_t(n_{s_t})\rangle}.$$

Por construção $\operatorname{diam}\left(U_{\langle s_t(0),\ldots,s_t(n_{s_t})\rangle}\right) \leqslant \dfrac{1}{2^{n_{s_t}+1}} < \dfrac{1}{2^{n_{s_t}}} < r_{s_t}$. Então

$$f(t) \in U_{\langle s_t(0),\ldots,s_t(n_{s_t})\rangle} \subset B(f(s_t), r_{s_t}) \subset W$$

Portanto, $t \in f^{-1}[W]$.

Agora, somente resta verificar a injetividade de f. Considere $s, t \in \{0,1\}^{\omega}$ com $s \neq t$. Temos que $s(n) \neq t(n)$ para algum $n \in \omega$. Seja $m = \min\{n \in \omega : s(n) \neq t(n)\}$. Daí, $s(n) = t(n)$ para $n < m$ e os valores de $s(m)$ e $t(m)$ são diferentes, sendo um deles 0 e o outro 1. Por construção $\overline{U}_{\langle s(0),\ldots,s(m)\rangle} \cap \overline{U}_{\langle t(0),\ldots,t(m)\rangle} = \varnothing$. Pela definição de f temos que $f(s) \in \overline{U}_{\langle s(0),\ldots,s(m)\rangle}$ e $f(t) \in \overline{U}_{\langle t(0),\ldots,t(m)\rangle}$. Então $f(s) \neq f(t)$. Portanto, f é injetora.

Uma vez que já definimos recursivamente a estratégia θ, podemos assumir que

$$\langle \theta(\langle\rangle), B_0, \theta(\langle B_0\rangle), B_1, \theta(\langle B_0, B_1\rangle), B_2, \ldots\rangle$$

é uma partida tal que $\limsup\limits_{n\in\omega} B_n = Z$.

Vamos verificar que $P = \{f(s) : s \in \{0,1\}^{\omega}\}$ tem as condições exigidas.

- P é um conjunto perfeito.

  Observe que f é contínua, $\{0,1\}^{\omega}$ é compacto e $P = f[\{0,1\}^{\omega}]$. Logo P é compacto. Então P é um conjunto fechado.

  Agora, resta verificar que P não tem pontos isolados. Considere $f(s)$ um ponto arbitrário de P e $\varepsilon > 0$ arbitrário. Temos que $\dfrac{1}{2^n} < \varepsilon$ para algum $n \in \omega$. Escolha $t \in \{0,1\}^{\omega}$ de maneira que $t(k) = s(k)$ para todo $k \leqslant n$ e $t(n+1) \neq s(n+1)$. Note que f é injetora e $s \neq t$. Logo $f(s) \neq f(t)$. Observe que $f(s), f(t) \in U_{\langle t(0),\ldots,t(n)\rangle} = U_{\langle s(0),\ldots,s(n)\rangle}$. Daí,

  $$d(f(s), f(t)) \leqslant \operatorname{diam}\left(U_{\langle s(0),\ldots,s(n)\rangle}\right) \leqslant \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

  Então P não tem pontos isolados.

  Portanto, P é um conjunto perfeito.

- $P \subseteq U \cap D$.

  Considere $f(s)$ um ponto arbitrário de P e $n \in \omega$. Pela definição de f

  $$f(s) \in U_{\langle s(0),\ldots,s(n),s(n+1)\rangle}.$$

  Por construção temos que

  $$U_{\langle s(0),\ldots,s(n),s(n+1)\rangle} \subseteq V_{\langle s(0),\ldots,s(n)\rangle} \subseteq W_{\langle s(0),\ldots,s(n)\rangle} = U_{\langle s(0),\ldots,s(n)\rangle} \cap D_{n+1} \subseteq U \cap D$$

  Então $f(s) \in U \cap D$.

  Portanto, $P \subseteq U \cap D$.

- $\left(\limsup\limits_{n\in\omega} B_n\right) \times P \subseteq A$.

Vamos assumir por contradição que existe algum ponto $\langle x, f(s)\rangle$ de $\left(\limsup_{n\in\omega} B_n\right) \times P$ que não pertence a $A = \bigcap_{n\in\omega} A_n$. Logo $\langle x, f(s)\rangle \notin A_k$ para algum $k \in \omega$. Como $A_n \supseteq A_{n+1}$ para todo $n \in \omega$, $\langle x, f(s)\rangle \notin A_n$ para todo $n \geqslant k$. Note que $x \in \limsup_{n\in\omega} B_n = \bigcap_{n\in\omega} \bigcup_{m\geqslant n} B_m$. Em particular, $x \in B_m$ para algum $m \geqslant k+1$. Observe que $f(s) \in U_{\langle s(0),\ldots,s(m)\rangle} \subseteq V_{\langle s(0),\ldots,s(m-1)\rangle}$ e $B_m \times V_{\langle s(0),\ldots,s(m-1)\rangle} \subseteq A_m$. Então $\langle x, f(s)\rangle \in A_m$ para algum $m > k$, o que é uma contradição.

Portanto, $\left(\limsup_{n\in\omega} B_n\right) \times P \subseteq A$.

□

3.4 Conjectura de Prikry e a pergunta de Sierpiński

Possivelmente é bastante conhecida a definição de translado de um conjunto de números reais:

Definição 3.4.1. Um translado de um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ é um conjunto $X + t = \{x + t : x \in X\}$ onde $t \in \mathbb{R}$.

O próximo teorema é uma adaptação de parte do quarto teorema e o primeiro corolário do paper de Galvin, Mycielski e Solovay:

Teorema 3.4.2. (GALVIN; MYCIELSKI; SOLOVAY, 2017) Para qualquer conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ as seguintes afirmações são equivalentes:

1. Para qualquer conjunto G_δ denso $D \subseteq \mathbb{R}$ e qualquer conjunto aberto não vazio $U \subseteq \mathbb{R}$, existe um conjunto perfeito não vazio $P \subseteq U \cap D$ tal que $X + P \subseteq D$;
2. Todo conjunto G_δ denso contém um translado de X;
3. Todo conjunto aberto denso contém um translado de X;
4. Existe algum número $k \in \omega \setminus \{0\}$ tal que X pode ser coberto por k translados de cada subconjunto aberto denso de $\mathbb{R}$;
5. X tem medida nula forte.

Demonstração. Claramente 1. implica que todo conjunto G_δ denso D contém um conjunto $X + P$ para algum conjunto $P \neq \varnothing$. Escolha $t \in P$. Daí, $X + t \subseteq D$, isto é, D contém um translado de X. Assim, 1. $\Rightarrow$ 2.. Obviamente 2. $\Rightarrow$ 3. pois todo conjunto aberto é um conjunto G_δ. Trivialmente 3. $\Rightarrow$ 4. sendo $k = 1$. Resta verificar 4. $\Rightarrow$ 5. e 5. $\Rightarrow$ 1..

4. $\Rightarrow$ 5. : Suponha que $k \in \omega \setminus \{0\}$ é um número tal que $X \subseteq \mathbb{R}$ pode ser coberto por k translados de cada subconjunto aberto denso de $\mathbb{R}$; devemos mostrar que X tem medida nula forte.

Considere a sequência $\langle \varepsilon_n \rangle_{n\in\omega} \in \mathbb{R}^{\omega}_{>0}$ arbitrária. Considere a seguinte partição de ω em uma quantidade finita de conjuntos infinitos e disjuntos como $\omega = \dot{\bigcup_{j\in k}} M_j$. Defina a função $f : \omega \longrightarrow k$ de forma que $n \in M_{f(n)}$. Para cada $j \in k$, escolha alguma sequência de intervalos abertos $\langle I_n \rangle_{n\in M_j}$ com $\operatorname{diam}(I_n) = \varepsilon_n$ para cada $n \in M_j$ de forma que o conjunto $D_j = \bigcup_{n\in M_j} I_n$ seja denso em $\mathbb{R}$.

Claramente, a interseção finita de conjuntos abertos densos também é um conjunto aberto denso. Como cada D_j é um conjunto aberto denso, $D = \bigcap_{j\in k} D_j$ também é um conjunto aberto denso. Daí, existem números $t_0, \ldots, t_{k-1} \in \mathbb{R}$ de maneira que $X \subseteq \bigcup_{j\in k}(t_j + D) \subseteq \bigcup_{j\in k}(t_j + D_j)$. Para cada $j \in k$ temos que $t_j + D_j = t_j + \bigcup_{n\in M_j} I_n = \bigcup_{n\in M_j}(t_j + I_n)$ e $\operatorname{diam}(t_j + I_n) = \varepsilon_n$ para cada $n \in M_j$. Logo $X \subseteq \bigcup_{j\in k}\bigcup_{n\in M_j}(t_j + I_n) = \bigcup_{n\in\omega}(t_{f(n)} + I_n)$ com $\operatorname{diam}(t_{f(n)} + I_n) = \varepsilon_n$ para cada $n \in \omega$. Seja $J_n = t_{f(n)} + I_n$ para cada $n \in \omega$. Então $\langle J_n \rangle_{n\in\omega}$ é uma sequência de intervalos abertos satisfazendo $\operatorname{diam}(J_n) \leqslant \varepsilon_n$ para cada $n \in \omega$ e $X \subseteq \bigcup_{n\in\omega} J_n$.

Portanto, X tem medida nula forte.

5. $\Rightarrow$ 1. : Vamos assumir que $X \subseteq \mathbb{R}$ tem medida nula forte.

Note que $\mathbb{R}$ é um espaço métrico completo sem pontos isolados e $\sigma-$compacto. Consideremos um conjunto G_δ denso $D \subseteq \mathbb{R}$ e um conjunto aberto não vazio $U \subseteq \mathbb{R}$ arbitrários. Sejam $D = \bigcap_{n\in\omega} U_n$ onde cada U_n é aberto e $A = \{\langle x,y \rangle \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : x + y \in D\}$. Logo $A = \bigcap_{n\in\omega}\{\langle x,y \rangle \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : x + y \in U_n\}$. Como a função $f(x,y) = x + y$ é contínua,

$$\{\langle x,y \rangle \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : x + y \in U_n\} = f^{-1}[U_n]$$

é aberto para cada $n \in \omega$. Então $A = \bigcap_{n\in\omega} f^{-1}[U_n]$ é um conjunto G_δ. Além disso, o conjunto $\{y \in \mathbb{R} : \langle x,y \rangle \in A\} = -x + D$ é denso em $\mathbb{R}$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Portanto, $A \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ é um conjunto G_δ verticalmente denso.

Como as hipóteses do Teorema 3.3.5 são satisfeitas, existe um conjunto perfeito não vazio $P \subseteq U \cap D$ de modo que $X \times P \subseteq A$. Isto é, $X + P \subseteq D$.

□

Karel Prikry observou que um subconjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ tem medida nula forte se todo conjunto aberto denso de $\mathbb{R}$ contiver um translado de X; e ele também conjecturou que, reciprocamente,

cada conjunto aberto denso e até mesmo cada conjunto G_δ denso de $\mathbb{R}$ contém um translado de cada subconjunto de $\mathbb{R}$ com medida nula forte. Isto é, Prikry perguntou se são equivalentes as afirmações 2.,3. e 5. do teorema acima. Decorre do Teorema 3.4.2 que a Conjectura de Prikry é verdadeira.

Possivelmente são bastante conhecidas a definições de conjuntos raros e conjuntos magros:

Definição 3.4.3. Dizemos que um conjunto é **raro** se o interior do fecho dele é vazio.

Definição 3.4.4. Dizemos que um conjunto é **magro** se é união enumerável de conjuntos raros.

Wacłac Sierpiński perguntou se existe um conjunto magro não enumerável $X \subseteq \mathbb{R}$ de medida nula forte tal que todo translado de X está contido em X, exceto por um conjunto enumerável de pontos.

O próximo teorema que é o segundo corolário que apareceu no paper de Galvin, Mycielski e Solovay responde à pergunta de Sierpiński de forma negativa.

Teorema 3.4.5. (GALVIN; MYCIELSKI; SOLOVAY, 2017) Se $X \subseteq \mathbb{R}$ é um conjunto magro tal que o conjunto $(X+t)\setminus X$ é enumerável para cada $t \in \mathbb{R}$, então todos os subconjuntos de X que têm medida nula forte são enumeráveis.

Demonstração. Considere um subconjunto de medida nula forte $Z \subseteq X$ arbitrário. Por hipótese $X \subseteq \mathbb{R}$ é um conjunto magro. Pela definição 3.4.4, $X = \bigcup_{n\in\omega} E_n$ onde cada conjunto E_n é um conjunto raro. Pela definição 3.4.3, $\mathring{\overline{E}}_n = \varnothing$ para todo $n \in \omega$. Como os conjuntos de interior vazio têm complemento denso, $\mathbb{R}\setminus\overline{E}_n$ é denso para cada $n \in \omega$. Assim, cada conjunto $\mathbb{R}\setminus\overline{E}_n$ é um conjunto aberto denso. Como $\mathbb{R}$ é espaço de Baire, a interseção enumerável de conjuntos abertos densos é um conjunto denso. Daí, $D = \bigcap_{n\in\omega}(\mathbb{R}\setminus\overline{E}_n)$ é um conjunto G_δ denso. Pelo Item 2 do Teorema 3.4.2, D contém um translado de Z. Isto é, $Z+t \subseteq D$ para algum $t \in \mathbb{R}$. Note que $X \subseteq \bigcup_{n\in\omega}\overline{E}_n$. Logo

$$Z+t \subseteq D = \bigcap_{n\in\omega}(\mathbb{R}\setminus\overline{E}_n) = \mathbb{R}\setminus\bigcup_{n\in\omega}\overline{E}_n \subseteq \mathbb{R}\setminus X.$$

Então $Z+t = (Z+t)\setminus X \subseteq (X+t)\setminus X$. Por hipótese temos que $|Z| = |Z+t| \leqslant |(X+t)\setminus X| \leqslant \aleph_0$. Portanto, Z é enumerável.

□

3.5 A pergunta de Fickett

Possivelmente é bastante conhecida a definição de cópia homotética de um conjunto de números reais:

Definição 3.5.1. Uma **cópia homotética** de um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ é um conjunto

$$aX + b = \{ax + b : x \in X\}$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $a > 0$.

James Fickett perguntou se existe uma caracterização dos conjuntos X de números reais tais que todo conjunto aberto denso ou todo conjunto G_δ denso contenha uma cópia homotética de X.

O próximo teorema que é uma adaptação de parte do quarto teorema que apareceu no paper de Galvin, Mycielski e Solovay mostra que a resposta à pergunta de Fickett apenas no caso de conjuntos G_δ densos é que tais conjuntos X são os conjuntos que têm medida nula forte.

Teorema 3.5.2. (GALVIN; MYCIELSKI; SOLOVAY, 2017) Para qualquer conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ as seguintes afirmações são equivalentes:

1. Para qualquer conjunto G_δ denso $D \subseteq \mathbb{R}$, existem $a, b \in \mathbb{R}, a > 0$ com $aX + b \subseteq D$;
2. Para qualquer conjunto G_δ denso $D \subseteq \mathbb{R}$, existem conjuntos enumeráveis $A, B \subseteq \mathbb{R}$ tais que $X \subseteq AD + B$;
3. X tem medida nula forte.

Demonstração. A implicação $\underline{1. \Rightarrow 2.}$ é clara pois basta considerar conjuntos enumeráveis $A, B \subseteq \mathbb{R}$ tais que $\frac{1}{a} \in A$ e $-\frac{b}{a} \in B$.

$\underline{3. \Rightarrow 1.}$: Vamos assumir que X tem medida nula forte. Pelo Item 2 do Teorema 3.4.2, todo conjunto G_δ denso $D \subseteq \mathbb{R}$ contém um translado de X. Isto é, existe um $b \in \mathbb{R}$ tal que $X + b \subseteq D$. Assim, vale 1. sendo $a = 1$.

$\underline{2. \Rightarrow 3.}$: Vamos assumir que $X \subseteq \mathbb{R}$ é tal que, para qualquer conjunto G_δ denso $D \subseteq \mathbb{R}$, existem conjuntos enumeráveis $A, B \subseteq \mathbb{R}$ tais que $X \subseteq AD + B$; devemos mostrar que X tem medida nula forte.

Considere uma sequência $\langle \varepsilon_n \rangle_{n \in \omega} \in \mathbb{R}^\omega_{>0}$ arbitrária. Considere uma partição de ω em uma quantidade infinita de conjuntos infinitos e disjuntos como $\omega = \dot{\bigcup}_{j \in \omega} M_j$. Para cada $j \in \omega$, escolha alguma sequência de intervalos abertos $\langle I_n \rangle_{n \in M_j}$ com $\operatorname{diam}(I_n) \leqslant \frac{1}{j+1} \varepsilon_n$ para cada $n \in M_j$ de maneira que o conjunto $D_j = \bigcup_{n \in M_j} I_n$ seja denso em $\mathbb{R}$. Como cada D_j é um conjunto aberto denso e $\mathbb{R}$ é um espaço de Baire, $D = \bigcap_{j \in \omega} D_j$ é um conjunto G_δ denso. Sejam $A, B \subseteq \mathbb{R}$ conjuntos enumeráveis tais que $X \subseteq AD + B$ e escolha uma injeção $j : A \times B \longrightarrow \omega$ com $j(\langle a, b \rangle) \geqslant |a|$.

Seja $M = \dot{\bigcup}_{\langle a,b\rangle \in A\times B} M_{j(\langle a,b\rangle)}$. Note que, para cada $m \in M$, existe um par único $\langle a_m, b_m\rangle \in A\times B$ tal que $m \in M_{j(\langle a_m,b_m\rangle)}$. Observe que

$$\begin{aligned} X \subseteq AD+B &= \bigcup_{\langle a,b\rangle\in A\times B} (aD+b) \\ &\subseteq \bigcup_{\langle a,b\rangle\in A\times B} (aD_{j(\langle a,b\rangle)}+b) \\ &= \bigcup_{\langle a,b\rangle\in A\times B} \bigcup_{m\in M_{j(\langle a,b\rangle)}} (aI_m+b) \\ &= \bigcup_{m\in M} (a_mI_m+b_m). \end{aligned}$$

Note que, para $m \in M$, $j(\langle a_m,b_m\rangle) \geqslant |a_m|$ e $\operatorname{diam}(I_m) \leqslant \dfrac{1}{j(\langle a_m,b_m\rangle)+1}\varepsilon_m$. Logo

$$\operatorname{diam}(a_mI_m+b_m) = |a_m|\operatorname{diam}(I_m) \leqslant \frac{|a_m|}{j(\langle a_m,b_m\rangle)+1}\varepsilon_m \leqslant \varepsilon_m.$$

Agora, escolha uma sequência $\langle J_n\rangle_{n\in\omega}$ de intervalos abertos com $a_nI_n+b_n \subseteq J_n$ se $n \in M$ satisfazendo $\operatorname{diam}(J_n) \leqslant \varepsilon_n$ para cada $n \in \omega$. Então $X \subseteq \bigcup_{n\in\omega} J_n$. Portanto, X tem medida nula forte.

□

Finalmente, a resposta à pergunta de Fickett no caso de conjuntos abertos densos é dada no próximo teorema que é o quinto teorema que apareceu no paper de Galvin, Mycielski e Solovay.

Teorema 3.5.3. (GALVIN; MYCIELSKI; SOLOVAY, 2017) Para qualquer conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ as seguintes afirmações são equivalentes:

1. Para qualquer conjunto aberto denso $D \subseteq \mathbb{R}$, existem $a,b \in \mathbb{R}, a > 0$ com $aX+b \subseteq D$;
2. X é a união de um conjunto limitado e um conjunto de medida nula forte.

Demonstração. 2. $\Rightarrow$ 1. : Seja $X = K\cup Z$, onde K é limitado e Z tem medida nula forte. Considere $D \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto aberto denso arbitrário. Escolha $a > 0$ e um intervalo B tal que $aK+B \subseteq D$. Escolha um conjunto enumerável M tal que $B+M = \mathbb{R}$. Como o translado de um conjunto aberto denso também é um conjunto aberto denso e $\mathbb{R}$ é um espaço de Baire, $G = \bigcap_{m\in M}(D+m)$ é um conjunto G_δ denso. Como Z tem medida nula forte, pelo Exemplo 2.2.4, aZ também tem medida nula forte. Pelo Item 2 do Teorema 3.4.2, G contém um translado de aZ. Isto é, $aZ+t \subseteq G$ para algum $t \in \mathbb{R}$. Escreva $t = b+m$ onde $b \in B$ e $m \in M$. Daí, $aZ+b+m \subseteq G \subseteq D+m$, de onde $aZ+b \subseteq D$. Além disso, $aK+b \subseteq aK+B \subseteq D$. Assim, $aX+b \subseteq D$.

1. $\Rightarrow$ 2. : Vamos assumir por contradição que, para qualquer conjunto aberto denso $D \subseteq \mathbb{R}$, existem $a, b \in \mathbb{R}, a > 0$ com $aX + b \subseteq D$; e que X não é a união de um conjunto limitado e um conjunto de medida nula forte.

Afirmação 1. Dado $\delta > 0$, podemos encontrar $Y \subseteq X$ e $Z \subseteq X$ com $d(Y,Z) > \delta$ tais que nem Y nem Z tem medida nula forte.

Demonstração. [da Afirmação 1] Dado $\delta > 0$. Escreva $\mathbb{R} = \dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{Z}} (\delta(n, n+1])$. Seja

$$M = \{n \in \mathbb{Z} : X \cap \delta(n, n+1] \text{ tem medida nula forte}\}.$$

Pelo exemplo 2.2.5, a união enumerável de conjuntos de medida nula forte também é um conjunto de medida nula forte. Então $\dot{\bigcup}_{n\in M} (X \cap \delta(n, n+1])$ tem medida nula forte. Observe que

$$X = \dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{Z}\setminus M} (X \cap \delta(n, n+1]) \quad \dot{\cup} \quad \dot{\bigcup}_{n\in M} (X \cap \delta(n, n+1]).$$

Temos que X é união de $\dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{Z}\setminus M} (X \cap \delta(n, n+1])$ e um conjunto de medida nula forte. Portanto, é claro que $\dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{Z}\setminus M} (X \cap \delta(n, n+1])$ não pode ser limitado. Então $\mathbb{Z} \setminus M$ deve ser infinito. Escolha $m, n \in \mathbb{Z} \setminus M$ com $|m - n| > 1$. Sejam $Y = X \cap \delta(m, m+1]$ e $Z = X \cap \delta(n, n+1]$. Então $d(Y,Z) > \delta$ e nem Y nem Z tem medida nula forte.

□

Afirmação 2. Dado $\delta > 0$, podemos encontrar uma sequência de números positivos $\langle \varepsilon_n \rangle_{n\in\omega\setminus\{0\}}$ de modo que X não seja coberto por nenhuma sequência de intervalos cujos diâmetros sejam $\delta, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$

Demonstração. [da Afirmação 2] Vamos assumir por contradição que existe um $\delta > 0$ tal que, para toda sequência $\langle \varepsilon_n \rangle_{n\in\omega\setminus\{0\}} \in \mathbb{R}_{>0}^{\omega\setminus\{0\}}$, X pode ser coberto por alguma sequência de intervalos cujos diâmetros são $\delta, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$

Usando a Afirmação 1, escolha Y, Z subconjuntos de X com $d(Y,Z) > \delta$ tais que nem Y nem Z tem medida nula forte. Considere a sequência $\langle \varepsilon_n \rangle_{n\in\omega} \in \mathbb{R}_{>0}^{\omega}$ arbitrária. Seja $\langle I_n \rangle_{n\in\omega}$ uma sequência de intervalos tal que $X \subseteq \bigcup_{n\in\omega} I_n$ com $\operatorname{diam}(I_0) = \delta$ e $\operatorname{diam}(I_n) = \frac{1}{2}\varepsilon_n$ para cada $n \in \omega \setminus \{0\}$.

Suponha que $Y \cap I_0 = \varnothing$. Logo $Y \subseteq \bigcup_{n\in\omega\setminus\{0\}} I_n$. Então escolha uma sequência $\langle J_n \rangle_{n\in\omega}$ de intervalos abertos com $\operatorname{diam}(J_n) \leqslant \varepsilon_n$ para cada $n \in \omega$ tais que $I_n \subseteq J_n$ para cada $n \in \omega \setminus \{0\}$. Daí, $Y \subseteq \bigcup_{n\in\omega} J_n$ mas isso é impossível porque Y não tem medida nula forte. Portanto, $Y \cap I_0 \neq \varnothing$.

O mesmo raciocínio se aplica a Z. Assim, $Z \cap I_0 \neq \varnothing$. Temos que Y e Z têm pontos de I_0, o que implica que $d(Y,Z) \leqslant \delta$ mas isso é uma contradição.

□

Seja $\{r_m\}_{m\in\omega\setminus\{0\}}$ um conjunto denso em $\mathbb{R}$.

Para cada $m \in \omega \setminus \{0\}$ definimos I_m, J_m, δ_m e $\langle \varepsilon_{m,n} \rangle_{n\in\omega\setminus\{0\}}$ satisfazendo as seguintes condições:

(i) I_m é um intervalo aberto limitado com $r_m \in I_m$ e se $m > 1$ então $\operatorname{diam}(I_m) \leqslant \frac{1}{k}\varepsilon_{k,m-k}$ para cada $k \in \{1,\dots,m-1\}$;

(ii) J_m é um intervalo limitado com $I_1 \cup \cdots \cup I_m \subseteq J_m$;

(iii) $\delta_m = m \cdot \operatorname{diam}(J_m)$;

(iv) $\langle \varepsilon_{m,n} \rangle_{n\in\omega\setminus\{0\}}$ é uma sequência de números positivos de maneira que X não é coberto por nenhuma sequência de intervalos cujos diâmetros sejam $\delta_m, \varepsilon_{m,1}, \varepsilon_{m,2}, \dots$ (a referida sequência de números positivos existe devido à Afirmação 2 acima).

Temos que $D = \bigcup_{m\in\omega\setminus\{0\}} I_m$ é um conjunto aberto denso em $\mathbb{R}$. Escolha $a, b \in \mathbb{R}, a > 0$ com $aX + b \subseteq D$. Defina $\hat{S} = \frac{1}{a}(S-b)$ para cada $S \subseteq \mathbb{R}$. Escolha $m \in \omega \setminus \{0\}$ com $\frac{1}{a} \leqslant m$. Então

$$X \subseteq \hat{D} \subseteq \hat{I}_1 \cup \cdots \cup \hat{I}_m \cup \hat{I}_{m+1} \cup \hat{I}_{m+2} \cup \cdots \subseteq \hat{J}_m \cup \hat{I}_{m+1} \cup \hat{I}_{m+2} \cup \cdots .$$

Observe que $\operatorname{diam}(\hat{J}_m) = \frac{1}{a} \cdot \operatorname{diam}(J_m) \leq m \cdot \operatorname{diam}(J_m) = \delta_m$. Além disso, note que, para cada $n \in \omega \setminus \{0\}$,

$$\operatorname{diam}(\hat{I}_{m+n}) = \frac{1}{a} \cdot \operatorname{diam}(I_{m+n}) \leq m \cdot \operatorname{diam}(I_{m+n}) \leq m \cdot \frac{1}{m}\varepsilon_{m,n} = \varepsilon_{m,n}.$$

Portanto, temos que X pode ser coberto por uma sequência de intervalos cujos diâmetros são $\delta_m; \varepsilon_{m,1}; \varepsilon_{m,2}; \dots$ mas isso contradiz a condição (iv).

□

CAPÍTULO

4

JOGOS INFINITOS ASSOCIADOS À PROPRIEDADE DE ROTHBERGER

Scheepers (SCHEEPERS, 1996) introduziu o princípio de seleção $S_1(\mathscr{A},\mathscr{B})$. Em particular, a propriedade de Rothberger é definida por $S_1(\mathscr{O},\mathscr{O})$ onde $\mathscr{O}$ é o conjunto de todas as coberturas abertas de um espaço topológico.

Scheepers (SCHEEPERS, 1997) definiu o Jogo $G_1(\mathscr{A},\mathscr{B})$ associado a cada propriedade definida por algum princípio de seleção $S_1(\mathscr{A},\mathscr{B})$. Em particular, o Jogo de Rothberger é o Jogo $G_1(\mathscr{O},\mathscr{O})$ associado à $S_1(\mathscr{O},\mathscr{O})$ (propriedade de Rothberger). Telgarsky (TELGÁRSKY, 1975) e Galvin (GALVIN, 1978) definiram separadamente o Jogo ponto-aberto. Galvin (GALVIN, 1978) definiu o Jogo finito-aberto.

Galvin (GALVIN, 1978) introduziu o conceito de jogos duais. Dois jogos são duais se satisfizerem que o Jogador I tem uma estratégia vencedora no primeiro jogo se, e somente se, o Jogador II tiver uma estratégia vencedora no segundo jogo e o Jogador I tem uma estratégia vencedora no segundo jogo se, e somente se, o Jogador II tiver uma estratégia vencedora no primeiro jogo.

Galvin (GALVIN, 1978) introduziu o conceito de jogos equivalentes. Dois jogos são equivalentes se satisfizerem que o Jogador I tem uma estratégia vencedora no primeiro jogo se, e somente se, o Jogador I tiver uma estratégia vencedora no segundo jogo e o Jogador II tem uma estratégia vencedora no primeiro jogo se, e somente se, o Jogador II tiver uma estratégia vencedora no segundo jogo.

Galvin (GALVIN, 1978) mostrou que o Jogo de Rothberger e o Jogo ponto-aberto são jogos duais. Galvin (GALVIN, 1978) também mostrou que o Jogo ponto-aberto e o Jogo finito-aberto são jogos equivalentes. A partir daí, podemos deduzir que o Jogo de Rothberger e o Jogo finito-aberto são jogos duais. Portanto, para que o Jogo de Rothberger, o Jogo ponto-aberto e o Jogo finito-aberto sejam jogos determinados, é suficiente que um dos três jogos seja determinado.

Aurichi e Dias (AURICHI; DIAS, 2020) mostraram que o Jogo de Rothberger e o Jogo de Mycielski-Solovay são jogos equivalentes no caso de espaços métricos compactos. A partir daí, Aurichi e Dias (AURICHI; DIAS, 2020) mostraram que, para todo espaço métrico compacto, a prorpriedade de Rothberger e de medida nula forte são equivalentes. Em particular, espaço de Cantor 2^{ω} não é de medida nula forte pois é compacto e não é de Rothberger.

Pawlikowski (PAWLIKOWSKI, 1994) definiu o Jogo Sigma de Rothberger e o Jogo Sigma ponto-aberto. De maneira semelhante, podemos definir o Jogo Sigma finito-aberto. Pawlikowski (PAWLIKOWSKI, 1994) demonstrou que se um espaço topológico tem a propriedade de Rothberger, então o Jogador I não tem uma estratégia vencedora no Jogo Sigma de Rothberger nesse espaço. Não é difícil deduzir que se Jogador I não tem uma estratégia vencedora no Jogo Sigma de Rothberger, então Jogador I não tem uma estratégia vencedora no Jogo de Rothberger. Portanto, se um espaço topológico tem a propriedade de Rothberger, então o Jogador I não tem uma estratégia vencedora no Jogo de Rothberger nesse espaço. Usamos tal resultado para estabelecer doze equivalências da Conjectura de Borel.

4.1 Princípios de seleção e o Jogo de Rothberger

Aurichi e Dias (AURICHI; DIAS, 2020) apontaram que a propriedade de Rothberger pode ser definida pelo princípio de seleção seguente:

Definição 4.1.1. (SCHEEPERS, 1996) Considere $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ famílias não vazias de conjuntos não vazios. Denotamos por $S_1(\mathscr{A},\mathscr{B})$ a afirmação "Para cada sequência $\langle A_n\rangle_{n\in\omega}$ de elementos de $\mathscr{A}$, existe uma sequência $\langle x_n\rangle_{n\in\omega}$ tal que $x_n \in A_n$ para todo $n \in \omega$ e $\{x_n\}_{n\in\omega} \in \mathscr{B}$."

Observação 4.1.2. A afirmação de que um espaço topológico X é um espaço de Rothberger pode ser expressa por $S_1(\mathscr{O}(X),\mathscr{O}(X))$, onde $\mathscr{O}(X)$ é o conjunto de todas as coberturas abertas de X. Isso segue da Definição 2.2.10 e da Definição 4.1.1. Quando não existe nenhuma possibilidade de má interpretação, vamos apenas escrever $\mathscr{O}$ em vez de $\mathscr{O}(X)$.

Auruchi e Dias (AURICHI; DIAS, 2020) apontaram que toda propriedade definida por $S_1(\mathscr{A},\mathscr{B})$ tem um jogo associado:

Definição 4.1.3. (SCHEEPERS, 1997) Considere $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ famílias não vazias de conjuntos não vazios. O **Jogo** $G_1(\mathscr{A},\mathscr{B})$ é definido da seguinte forma:

Em cada turno $n \in \omega$, o Jogador I escolhe $A_n \in \mathscr{A}$ e o Jogador II responde $x_n \in A_n$.

A partida é ganha pelo Jogador II se $\{x_n\}_{n\in\omega} \in \mathscr{B}$. Caso contrário, a partida é ganha pelo Jogador I.

Vamos colocar ênfase na diferença entre o princípio de seleção $S_1(\mathscr{A},\mathscr{B})$ e o Jogo $G_1(\mathscr{A},\mathscr{B})$ pois o princípio de seleção $S_1(\mathscr{A},\mathscr{B})$ é uma afirmação que pode ser verdadeira ou

falsa, enquanto o Jogo $G_1(\mathscr{A},\mathscr{B})$ é um conjunto de regras que define as condições das jogadas alternadas entre dois jogadores e se uma partida de tal jogo é ganha por um jogador ou outro.

Definição 4.1.4. Considere o Jogo $G_1(\mathscr{A},\mathscr{B})$.

Uma **estratégia do Jogador** I é uma função θ com $\mathrm{dom}\theta \subset \left(\bigcup \mathscr{A}\right)^{<\omega}$ tal que

$$\theta(\langle x_0,\ldots,x_{n-1}\rangle) \in \mathscr{A}$$

para cada sequência finita $\langle x_0,\ldots,x_{n-1}\rangle \in \mathrm{dom}\theta$.

Uma **estratégia do Jogador** II é uma função ρ com $\mathrm{dom}\rho \subset \mathscr{A}^{<\omega}$ tal que

$$\rho(\langle A_0,\ldots,A_n\rangle) \in A_n$$

para cada sequência finita $\langle A_0,\ldots,A_n\rangle \in \mathrm{dom}\rho$.

Aurichi e Dias (AURICHI; DIAS, 2020) apontaram:

Proposição 4.1.5. Considere $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ famílias não vazias de conjuntos não vazios tais que o Jogador I não tem estratégia vencedora no Jogo $G_1(\mathscr{A},\mathscr{B})$. Então, $S_1(\mathscr{A},\mathscr{B})$ é verdadeira.

Demonstração. Considere $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ famílias não vazias de conjuntos não vazios. Vamos usar a contrapositiva. Suponha que $S_1(\mathscr{A},\mathscr{B})$ não é verdadeira. Existe uma sequência $\langle A_n\rangle_{n\in\omega}$ de elementos de $\mathscr{A}$ tal que, para toda sequência $\langle x_n\rangle_{n\in\omega}$, temos que $x_m \notin A_m$ para algum $m \in \omega$ ou $\{x_n\}_{n\in\omega} \notin \mathscr{B}$.

Defina a seguinte estratégia para o Jogador I: Em cada turno $n \in \omega$, o Jogador I joga A_n. Seja $x_n \in A_n$ a resposta arbitrária do Jogador II no turno $n \in \omega$. Como a sequência $\langle x_n\rangle_{n\in\omega}$ satisfaz que $x_n \in A_n$ para todo $n \in \omega$, $\{x_n\}_{n\in\omega} \notin \mathscr{B}$. Então tal estratégia é uma estratégia vencedora para o Jogador I no Jogo $G_1(\mathscr{A},\mathscr{B})$.

□

Em particular, Auruchi e Dias (AURICHI; DIAS, 2020) definiram o Jogo de Rothberger:

Definição 4.1.6. O **Jogo de Rothberger** em um espaço topológico X é $G_1(\mathscr{O},\mathscr{O})$. Isto é, o jogo naturalmente associado a $S_1(\mathscr{O},\mathscr{O})$ (propriedade de Rothberger em X), que é definido por:

Em cada turno $n \in \omega$, o Jogador I escolhe uma cobertura aberta $\mathscr{C}_n$ de X e o Jogador II responde com $U_n \in \mathscr{C}_n$.

A partida é ganha pelo Jogador II se $\bigcup_{n\in\omega} U_n = X$. Caso contrário, a partida é ganha pelo Jogador I.

Definição 4.1.7. Considere o Jogo $G_1(\mathscr{O},\mathscr{O})$. Seja τ a topologia de X.

Uma **estratégia do Jogador** I é uma função θ com $\mathrm{dom}\theta \subset \tau^{<\omega}$ de modo que

$$\theta(\langle U_0, \ldots, U_{n-1}\rangle) \in \mathscr{O}$$

para cada sequência finita $\langle U_0, \ldots, U_{n-1}\rangle \in \mathrm{dom}\theta$.

Uma **estratégia do Jogador** II é uma função ρ com $\mathrm{dom}\rho \subset \mathscr{O}^{<\omega}$ de modo que

$$\rho(\langle \mathscr{C}_0, \ldots, \mathscr{C}_n\rangle) \in \mathscr{C}_n$$

para cada sequência finita $\langle \mathscr{C}_0, \ldots, \mathscr{C}_n\rangle \in \mathrm{dom}\rho$.

Observação 4.1.8. A Definição 4.1.6 concorda com a Definição 4.1.3 uma vez que $\bigcup_{n\in\omega} U_n = X$ é o mesmo que dizer que $\{U_n\}_{n\in\omega}$ é cobertura aberta de X. Também a Definição 4.1.7 concorda com a Definição 4.1.4 dado que $\tau = \bigcup \mathscr{O}$.

Observação 4.1.9. Se o Jogador I não tem uma estratégia vencedora no Jogo de Rothberger no espaço topológico X, então X é um espaço de Rothberger, isso segue da Proposição 4.1.5 e da Observação 4.1.2.

Aurichi e Dias (AURICHI; DIAS, 2020) observaram algumas relações entre o Jogo de Mycielski-Solovay e o Jogo de Rothberger:

Proposição 4.1.10. Se $\langle X, d\rangle$ é um espaço métrico, então temos que são verdadeiras as seguintes afirmações:

1. Se o Jogador I tem estratégia vencedora no Jogo de Mycielski-Solovay em X, então o Jogador I tem estratégia vencedora no Jogo de Rothberger em X.
2. Se o Jogador II tem estratégia vencedora no Jogo de Rothberger em X, então o Jogador II tem estratégia vencedora no Jogo de Mycielski-Solovay em X.

Além disso, se X também é compacto, então também são verdadeiras as recíprocas das duas afirmações acima.

Demonstração. Para provar as implicações diretas, observe que a coleção de todos os subconjuntos abertos de X com diâmetro menor que um $\varepsilon > 0$ fixo forma uma cobertura aberta de X. Seja τ_d a topologia de X induzida pela métrica d.

1. Considere θ uma estratégia vencedora do Jogador I no Jogo $MS(X)$. Usaremos tal estratégia para definir uma estratégia vencedora ρ do Jogador I no Jogo $G_1(\mathscr{O}, \mathscr{O})$.

   Para iniciar defina $\rho(\langle\rangle) = \{A \in \tau_d : \mathrm{diam}(A) < \theta(\langle\rangle)\}$. Considere A_n a resposta arbitrária do Jogador II no turno $n \in \omega$ do Jogo $G_1(\mathscr{O}, \mathscr{O})$ e defina

$$\rho(\langle A_0, \ldots, A_n\rangle) = \{A \in \tau_d : \mathrm{diam}(A) < \theta(\langle A_0, \ldots, A_n\rangle)\}.$$

Como θ é uma estratégia vencedora do Jogador I no Jogo $MS(X)$, a partida

$$\langle \theta(\langle\rangle), A_0, \theta(\langle A_0\rangle), A_1, \theta(\langle A_0, A_1\rangle), A_2, \ldots, \theta(\langle A_0, \ldots, A_n\rangle), A_{n+1}, \ldots\rangle$$

do Jogo $MS(X)$ é ganha pelo Jogador I. Isto é, $\bigcup_{n\in\omega} A_n \neq X$. Daí, a partida

$$\langle \rho(\langle\rangle), A_0, \rho(\langle A_0\rangle), A_1, \rho(\langle A_0, A_1\rangle), A_2, \ldots, \rho(\langle A_0, \ldots, A_n\rangle), A_{n+1}, \ldots\rangle$$

do Jogo $G_1(\mathscr{O}, \mathscr{O})$ é ganha pelo Jogador I. Assim, ρ é uma estratégia vencedora do Jogador I no Jogo $G_1(\mathscr{O}, \mathscr{O})$.

2. Considere θ uma estratégia vencedora do Jogador II no Jogo $G_1(\mathscr{O}, \mathscr{O})$. Usaremos tal estratégia para definir uma estratégia vencedora ρ do Jogador II no Jogo $MS(X)$.

   Para cada $\varepsilon > 0$ seja $\mathscr{C}_\varepsilon = \{A \in \tau_d : \operatorname{diam}(A) < \varepsilon\}$. Para cada $n \in \omega$ defina

$$\rho(\langle \varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n\rangle) = \theta(\langle \mathscr{C}_{\varepsilon_0}, \ldots, \mathscr{C}_{\varepsilon_n}\rangle).$$

   Como θ é estratégia vencedora do Jogador II em $G_1(\mathscr{O}, \mathscr{O})$,

$$\bigcup_{n\in\omega} \rho(\langle \varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n\rangle) = \bigcup_{n\in\omega} \theta(\langle \mathscr{C}_{\varepsilon_0}, \ldots, \mathscr{C}_{\varepsilon_n}\rangle) = X.$$

   Portanto, ρ é uma estratégia vencedora do Jogador II no Jogo $MS(X)$.

Agora, suponha que X seja compacto. Vamos provar as recíprocas das afirmações acima.

1. Considere θ uma estratégia vencedora do Jogador I no Jogo $G_1(\mathscr{O}, \mathscr{O})$. Usaremos tal estratégia para definir uma estratégia vencedora ρ do Jogador I no Jogo $MS(X)$.

   Para começar, X é um espaço métrico compacto e $\theta(\langle\rangle)$ é uma cobertura aberta de X. Pelo Lema da cobertura de Lebesgue, existe um número de Lebesgue para a cobertura aberta $\theta(\langle\rangle)$. Definimos $\rho(\langle\rangle)$ como um número de Lebesgue para a cobertura aberta $\theta(\langle\rangle)$.

   Considere A_0 a resposta arbitrária do Jogador II no turno 0 do Jogo $MS(X)$. Então $\operatorname{diam}(A_0) \leqslant \rho(\langle\rangle)$. Como $\rho(\langle\rangle)$ é um número de Lebesgue para a cobertura aberta $\theta(\langle\rangle)$, existe um $V_0 \in \theta(\langle\rangle)$ tal que $A_0 \subseteq V_0$.

   Para continuar, X é um espaço métrico compacto e $\theta(\langle V_0\rangle)$ é uma cobertura aberta de X. Logo existe um número de Lebesgue para a cobertura aberta $\theta(\langle V_0\rangle)$. Vamos definir $\rho(\langle A_0\rangle)$ como um número de Lebesgue para a cobertura aberta $\theta(\langle V_0\rangle)$.

   Considere A_1 a resposta arbitrária do Jogador II no turno 1 do Jogo $MS(X)$. Então $\operatorname{diam}(A_1) \leqslant \rho(\langle A_0\rangle)$. Como $\rho(\langle A_0\rangle)$ é um número de Lebesgue para a cobertura aberta $\theta(\langle V_0\rangle)$, existe um $V_1 \in \theta(\langle V_0\rangle)$ tal que $A_1 \subseteq V_1$.

   Para avançar ainda mais, X é um espaço métrico compacto e $\theta(\langle V_0, V_1\rangle)$ é uma cobertura aberta de X. Logo existe um número de Lebesgue para a cobertura aberta $\theta(\langle V_0, V_1\rangle)$.

Podemos definir $\rho(\langle A_0, A_1\rangle)$ como um número de Lebesgue para a cobertura aberta $\theta(\langle V_0, V_1\rangle)$.

Em geral, suponha que, para cada $n \in \omega$, $\langle A_0, \ldots, A_n\rangle \in \mathrm{dom}\rho$ é tal que $\rho(\langle A_0, \ldots, A_n\rangle)$ foi definido como um número de Lebesgue para a cobertura aberta $\theta(\langle V_0, \ldots, V_n\rangle)$, onde $\langle V_0, \ldots, V_n\rangle$ é tal que, para cada $k \leqslant n$, $A_k \subseteq V_k \in \theta(\langle V_0, \ldots, V_{k-1}\rangle)$. Então, para cada $A_{n+1} \subseteq X$ com $\mathrm{diam}(A_{n+1}) \leqslant \rho(\langle A_0, \ldots, A_n\rangle)$, podemos escolher $V_{n+1} \in \theta(\langle V_0, \ldots, V_n\rangle)$ tal que $A_{n+1} \subseteq V_{n+1}$. Como X é um espaço métrico compacto e $\theta(\langle V_0, \ldots, V_n, V_{n+1}\rangle)$ é uma cobertura aberta de X, usando o Lema da cobertura de Lebesgue, podemos definir $\rho(\langle A_0, \ldots, A_n, A_{n+1}\rangle)$ como um número de Lebesgue para a cobertura aberta $\theta(\langle V_0, \ldots, V_n, V_{n+1}\rangle)$. Uma vez finalizada a partida do Jogo $MS(X)$

$$\langle \rho(\langle\rangle), A_0, \rho(\langle A_0\rangle), A_1, \rho(\langle A_0, A_1\rangle), A_2, \ldots, \rho(\langle A_0, \ldots, A_n\rangle), A_{n+1}, \ldots\rangle,$$

temos $\bigcup_{n\in\omega} V_n \neq X$ pois θ é estratégia vencedora do Jogador I no Jogo $G_1(\mathscr{O}, \mathscr{O})$.

Daí, $\bigcup_{n\in\omega} A_n \subseteq \bigcup_{n\in\omega} V_n \subsetneq X$. Logo $\bigcup_{n\in\omega} A_n \neq X$. Isto é, tal partida do Jogo $MS(X)$ é ganha pelo Jogador I jogando de acordo com ρ. Assim, ρ é estratégia vencedora do Jogador I no Jogo $MS(X)$.

2. Considere θ uma estratégia vencedora do Jogador II no Jogo $MS(X)$. Usaremos tal estratégia para definir uma estratégia vencedora ρ do Jogador II no Jogo $G_1(\mathscr{O}, \mathscr{O})$.

   Como X é compacto, o Lema da cobertura de Lebesgue permite definir o seguinte: Para cada $\mathscr{C} \in \mathscr{O}$ seja $\varepsilon_{\mathscr{C}}$ um número de Lebesgue para a cobertura aberta $\mathscr{C}$. Assim, se o Jogador I escolhe uma cobertura aberta $\mathscr{C}_0$ no turno 0 do Jogo $G_1(\mathscr{O}, \mathscr{O})$, então $\varepsilon_{\mathscr{C}_0}$ é um número de Lebesgue para a cobertura aberta $\mathscr{C}_0$ e o conjunto $\theta(\langle \varepsilon_{\mathscr{C}_0}\rangle)$ é tal que $\mathrm{diam}(\theta(\langle \varepsilon_{\mathscr{C}_0}\rangle)) \leqslant \varepsilon_{\mathscr{C}_0}$. Logo $\theta(\langle \varepsilon_{\mathscr{C}_0}\rangle)$ é um subconjunto de algum elemento da cobertura aberta $\mathscr{C}_0$. Definimos a resposta do Jogador II como o conjunto aberto $\rho(\langle \mathscr{C}_0\rangle) \in \mathscr{C}_0$ tal que $\theta(\langle \varepsilon_{\mathscr{C}_0}\rangle) \subseteq \rho(\langle \mathscr{C}_0\rangle)$.

   Em geral, se $\langle \mathscr{C}_0, \ldots, \mathscr{C}_n\rangle \in \mathrm{dom}\rho$ é a sequência das escolhas do Jogador I até o turno $n \in \omega$ do Jogo $G_1(\mathscr{O}, \mathscr{O})$, então $\varepsilon_{\mathscr{C}_k}$ é um número de Lebesgue para a cobertura aberta $\mathscr{C}_k$ para cada $k \leqslant n$, e o conjunto $\theta(\langle \varepsilon_{\mathscr{C}_0}, \ldots, \varepsilon_{\mathscr{C}_n}\rangle)$ é tal que $\mathrm{diam}(\theta(\langle \varepsilon_{\mathscr{C}_0}, \ldots, \varepsilon_{\mathscr{C}_n}\rangle)) \leqslant \varepsilon_{\mathscr{C}_n}$. Logo $\theta(\langle \varepsilon_{\mathscr{C}_0}, \ldots, \varepsilon_{\mathscr{C}_n}\rangle)$ é um subconjunto de algum elemento da cobertura aberta $\mathscr{C}_n$. Definimos a resposta do Jogador II como o conjunto aberto $\rho(\langle \mathscr{C}_0, \ldots, \mathscr{C}_n\rangle) \in \mathscr{C}_n$ tal que $\theta(\langle \varepsilon_{\mathscr{C}_0}, \ldots, \varepsilon_{\mathscr{C}_n}\rangle) \subseteq \rho(\langle \mathscr{C}_0, \ldots, \mathscr{C}_n\rangle)$. Após a conclusão da partida do Jogo $G_1(\mathscr{O}, \mathscr{O})$

$$\langle \mathscr{C}_0, \rho(\langle \mathscr{C}_0\rangle), \mathscr{C}_1, \rho(\langle \mathscr{C}_0, \mathscr{C}_1\rangle), \ldots, \mathscr{C}_n, \rho(\langle \mathscr{C}_0, \ldots, \mathscr{C}_n\rangle), \mathscr{C}_{n+1}, \rho(\langle \mathscr{C}_0, \ldots, \mathscr{C}_n, \mathscr{C}_{n+1}\rangle), \ldots\rangle,$$

   temos $X = \bigcup_{n\in\omega} \theta(\langle \varepsilon_{\mathscr{C}_0}, \ldots, \varepsilon_{\mathscr{C}_n}\rangle) \subseteq \bigcup_{n\in\omega} \rho(\langle \mathscr{C}_0, \ldots, \mathscr{C}_n\rangle) \subseteq X$ pois θ é uma estratégia vencedora do Jogador II no Jogo $MS(X)$. Logo $\bigcup_{n\in\omega} \rho(\langle \mathscr{C}_0, \ldots, \mathscr{C}_n\rangle) = X$. Isto é, tal partida do Jogo $G_1(\mathscr{O}, \mathscr{O})$ é ganha pelo Jogador II jogando de acordo com ρ. Assim, ρ é estratégia vencedora do Jogador II no Jogo $G_1(\mathscr{O}, \mathscr{O})$.

□

Aurichi e Dias (AURICHI; DIAS, 2020) concluíram:

Corolário 4.1.11. Se X é um espaço métrico compacto, então são equivalentes:

1. X é espaço de medida nula forte;
2. O Jogador I não tem uma estratégia vencedora no Jogo de Mycielski-Solovay em X;
3. O Jogador I não tem uma estratégia vencedora no Jogo de Rothberger em X;
4. X é espaço de Rothberger.

Demonstração. A equivalência $1. \Leftrightarrow 2.$ segue do Teorema 3.1.8, a equivalência $2. \Leftrightarrow 3.$ segue da Proposição 4.1.10, a implicação $3. \Rightarrow 4.$ segue da Observação 4.1.9, e a implicação $4. \Rightarrow 1.$ segue da Proposição 2.3.25.

□

Observação 4.1.12. O espaço de Cantor 2^{ω} não é de medida nula forte pois lembremos que no Exemplo 2.3.3 mostramos que não é de Rothberger e, dado que é compacto, temos que pelo Corolário 4.1.11 as propriedades de medida nula forte e de Rothberger são equivalentes.

4.2 Jogos duais e o Jogo ponto-aberto

A definição de jogos duais que apareceu no paper de Aurichi e Dias (AURICHI; DIAS, 2020) pode ser escrita assim:

Definição 4.2.1. (GALVIN, 1978) Dizemos que os jogos A e B jogados pelos jogadores I e II são **jogos duais** se satisfizerem as seguintes condições:

A) O Jogador I tem estratégia vencedora no Jogo A se, e somente se, o Jogador II tem estratégia vencedora no Jogo B.

B) O Jogador I tem estratégia vencedora no Jogo B se, e somente se, o Jogador II tem estratégia vencedora no Jogo de A.

Auruchi e Dias (AURICHI; DIAS, 2020) definiram o Jogo ponto-aberto:

Definição 4.2.2. (TELGÁRSKY, 1975) (GALVIN, 1978) O **Jogo ponto-aberto** em um espaço topológico X é definido da seguinte maneira:

Em cada turno $n \in \omega$, o Jogador I escolhe $x_n \in X$ e o Jogador II responde com um conjunto aberto $V_n \subseteq X$ de modo que $x_n \in V_n$.

Uma partida deste jogo é ganha pelo Jogador I se $\bigcup_{n\in\omega} V_n = X$. Caso contrário, a partida é ganha pelo Jogador II.

Definição 4.2.3. Considere o Jogo ponto-aberto. Seja τ a topologia de X.

Uma **estratégia do Jogador** I é uma função θ com $\mathrm{dom}\theta \subset (\tau \setminus \{\varnothing\})^{<\omega}$ de forma que

$$\theta(\langle V_0, \ldots, V_{n-1}\rangle) \in X$$

para cada sequência finita $\langle V_0, \ldots, V_{n-1}\rangle \in \mathrm{dom}\theta$.

Uma **estratégia do Jogador** II é uma função ρ com $\mathrm{dom}\rho \subset X^{<\omega}$ de forma que

$$\rho(\langle x_0, \ldots, x_n\rangle) \in \tau \qquad \text{e} \qquad x_n \in \rho(\langle x_0, \ldots, x_n\rangle)$$

para cada sequência finita $\langle x_0, \ldots, x_n\rangle \in \mathrm{dom}\rho$.

Lema 4.2.4. Se X é um espaço topológico, então são verdadeiras as seguintes afirmações:

1. Se ρ é uma estratégia do Jogador II no Jogo ponto-aberto em X, então, para cada $s \in \mathrm{dom}\rho$, temos que $\{\rho(s^\frown x) : x \in X\} \in \mathscr{O}$.

2. Se ρ é uma estratégia do Jogador II no Jogo de Rothberger em X, então, para cada $s \in \mathrm{dom}\rho$, existe um ponto $x \in X$ tal que, para qualquer conjunto aberto $V \in \tau$ com $x \in V$, temos que $\rho(s^\frown \mathscr{C}) = V$ para alguma cobertura aberta $\mathscr{C} \in \mathscr{O}$.

Demonstração. Sejam τ a topologia de X e $\mathscr{O}$ o conjunto de todas as coberturas abertas de X.

1. Considere ρ uma estratégia arbitrária do Jogador II no Jogo ponto-aberto em X.

   Considere $s \in \mathrm{dom}\rho$ arbitrário. Então $\rho(s^\frown x) \in \tau$ e $x \in \rho(s^\frown x)$ para todo $x \in X$. Isto é, $\rho(s^\frown x) \in \tau$ e $\{x\} \subseteq \rho(s^\frown x)$ para todo $x \in X$. Portanto, $\rho(s^\frown x) \in \tau$ para todo $x \in X$ e $X = \bigcup_{x\in X}\{x\} \subseteq \bigcup_{x\in X}\rho(s^\frown x)$. Assim, $\{\rho(s^\frown x) : x \in X\} \in \mathscr{O}$.

2. Considere ρ uma estratégia arbitrária do Jogador II no Jogo de Rothberger em X.

   Vamos assumir por contradição que existe um $s \in \mathrm{dom}\rho$ de modo que, para cada ponto $x \in X$, existe algum conjunto aberto V com $x \in V$ tal que $\rho(s^\frown \mathscr{C}) \neq V$ para toda cobertura aberta $\mathscr{C} \in \mathscr{O}$. Podemos fazer o seguinte: Para cada ponto $x \in X$, escolhemos um conjunto aberto V^x com $x \in V^x$ tal que $\rho(s^\frown \mathscr{C}) \neq V^x$ para toda cobertura aberta $\mathscr{C} \in \mathscr{O}$. Daí, definimos a coleção $\mathscr{C}' = \{V^x : x \in X\}$. Como $x \in V^x$ para todo $x \in X$, $\{x\} \subseteq V^x$ para todo $x \in X$. Portanto, $X = \bigcup_{x\in X}\{x\} \subseteq \bigcup_{x\in X} V^x = \bigcup \mathscr{C}'$. Assim, $\mathscr{C}'$ é uma cobertura aberta de X. Isto é, $\mathscr{C}' \in \mathscr{O}$. Então $\rho(s^\frown \mathscr{C}') \in \mathscr{C}' = \{V^x : x \in X\}$. Logo $\rho(s^\frown \mathscr{C}') = V^{x'}$ para algum ponto $x' \in X$, o que é uma contradição.

□

Teorema 4.2.5. (GALVIN, 1978) O Jogo de Rothberger e o Jogo ponto-aberto são jogos duais.

Demonstração. Vamos mostrar que a condição A da Definição 4.2.1 é satisfeita verificando que as condições que chamaremos de A1 e A2 são satisfeitas.

A1) Se o Jogador I tem estratégia vencedora no Jogo de Rothberger, então o Jogador II tem estratégia vencedora no Jogo ponto-aberto.

Considere θ uma estratégia vencedora do Jogador I no Jogo de Rothberger. Usaremos tal estratégia para definir uma estratégia vencedora ρ do Jogador II no Jogo ponto-aberto.

Se o Jogador I joga no turno 0 qualquer ponto $x_0 \in X$, então o Jogador II escolhe o conjunto aberto $\rho(\langle x_0 \rangle)$ tal que $\rho(\langle x_0 \rangle) \in \theta(\langle\rangle)$ e $x_0 \in \rho(\langle x_0 \rangle)$. Suponha já definida uma sequência $\langle x_0, \ldots, x_n \rangle \in \mathrm{dom}\rho$ de pontos arbitrários de X jogados pelo Jogador I até o turno $n \in \omega$. Se o Jogador I joga no turno $n+1$ qualquer ponto $x_{n+1} \in X$, então o Jogador II escolhe o conjunto aberto $\rho(\langle x_0, \ldots, x_n, x_{n+1} \rangle)$ tal que

$$\rho(\langle x_0, \ldots, x_n, x_{n+1} \rangle) \in \theta(\langle \rho(\langle x_0 \rangle), \ldots, \rho(\langle x_0, \ldots, x_n \rangle) \rangle)$$

e

$$x_{n+1} \in \rho(\langle x_0, \ldots, x_n, x_{n+1} \rangle).$$

Como θ é estratégia vencedora do Jogador I no Jogo de Rothberger,

$$\bigcup_{n \in \omega} \rho(\langle x_0, \ldots, x_n \rangle) \neq X.$$

Portanto, ρ é estratégia vencedora do Jogador II no Jogo ponto-aberto.

A2) Se o Jogador II tem estratégia vencedora no Jogo ponto-aberto, então o Jogador I tem estratégia vencedora no Jogo de Rothberger.

Considere ρ uma estratégia vencedora do Jogador II no Jogo ponto-aberto. Usaremos tal estratégia para definir uma estratégia vencedora θ do Jogador I no Jogo de Rothberger.

Pelo Item 1 do Lema 4.2.4, temos que $\{\rho(\langle x \rangle) : x \in X\} \in \mathscr{O}$. Para iniciar o turno 0 defina $\theta(\langle\rangle) = \{\rho(\langle x \rangle) : x \in X\}$. Considere $U_0 \in \theta(\langle\rangle)$ qualquer resposta do Jogador II. Então $U_0 = \rho(\langle x_0 \rangle)$ para algum ponto $x_0 \in X$.

Pelo Item 1 do Lema 4.2.4, temos que $\{\rho(\langle x_0, x \rangle) : x \in X\} \in \mathscr{O}$. Para continuar com o turno 1 defina $\theta(\langle U_0 \rangle) = \{\rho(\langle x_0, x \rangle) : x \in X\}$. Considere $U_1 \in \theta(\langle U_0 \rangle)$ qualquer resposta do Jogador II. Então $U_1 = \rho(\langle x_0, x_1 \rangle)$ para algum ponto $x_1 \in X$.

Pelo Item 1 do Lema 4.2.4, temos que $\{\rho(\langle x_0, x_1, x \rangle) : x \in X\} \in \mathscr{O}$. Em geral, suponha já definidos os pontos $x_0, \ldots, x_n$ tais que, para cada $k \leqslant n$, $U_k = \rho(\langle x_0, \ldots, x_k \rangle)$.

Pelo Item 1 do Lema 4.2.4, podemos definir no turno $n+1$ a seguinte jogada

$$\theta(\langle U_0, \ldots, U_n \rangle) = \{\rho(\langle x_0, \ldots, x_n, x \rangle) : x \in X\}.$$

Como ρ é estratégia vencedora do Jogador II no Jogo ponto-aberto,

$$\bigcup_{n\in\omega} \rho(\langle x_0,\ldots,x_n\rangle) \neq X.$$

Portanto, $\bigcup_{n\in\omega} U_n \neq X$. Isto é, θ é estratégia vencedora do Jogador I no Jogo de Rothberger.

A seguir, vamos mostrar que a condição B da Definição 4.2.1 é satisfeita verificando que as condições que chamaremos de B1 e B2 são satisfeitas.

B1) Se o Jogador I tem estratégia vencedora no Jogo ponto-aberto, então o Jogador II tem estratégia vencedora no Jogo de Rothberger.

Considere θ uma estratégia vencedora do Jogador I no Jogo ponto-aberto. Usaremos tal estratégia para definir uma estratégia vencedora ρ do Jogador II no Jogo de Rothberger.

Se o Jogador I joga no turno 0 a cobertura aberta $\mathscr{C}_0 \in \mathscr{O}$, então o Jogador II escolhe o conjunto aberto $\rho(\langle\mathscr{C}_0\rangle)$ tal que $\rho(\langle\mathscr{C}_0\rangle) \in \mathscr{C}_0$ e $\theta(\langle\rangle) \in \rho(\langle\mathscr{C}_0\rangle)$. Suponha já definida a sequência $\langle\mathscr{C}_0,\ldots,\mathscr{C}_n\rangle \in \mathrm{dom}\rho$ de coberturas abertas de X jogadas pelo Jogador I até o turno $n \in \omega$.

Se o Jogador I joga no turno $n+1$ a cobertura aberta $\mathscr{C}_{n+1} \in \mathscr{O}$, então o Jogador II escolhe o conjunto aberto $\rho(\langle\mathscr{C}_0,\ldots,\mathscr{C}_n,\mathscr{C}_{n+1}\rangle)$ tal que $\rho(\langle\mathscr{C}_0,\ldots,\mathscr{C}_n,\mathscr{C}_{n+1}\rangle) \in \mathscr{C}_{n+1}$ e $\theta(\langle\rho(\langle\mathscr{C}_0\rangle),\ldots,\rho(\langle\mathscr{C}_0,\ldots,\mathscr{C}_n\rangle)\rangle) \in \rho(\langle\mathscr{C}_0,\ldots,\mathscr{C}_n,\mathscr{C}_{n+1}\rangle)$. Como θ é estratégia vencedora do Jogador I no Jogo ponto-aberto, $\bigcup_{n\in\omega} \rho(\langle\mathscr{C}_0,\ldots,\mathscr{C}_n\rangle) = X$. Portanto, ρ é estratégia vencedora do Jogador II no Jogo de Rothberger.

B2) Se o Jogador II tem estratégia vencedora no Jogo de Rothberger, então o Jogador I tem estratégia vencedora no Jogo ponto-aberto.

Considere ρ uma estratégia vencedora do Jogador II no Jogo de Rothberger. Usaremos tal estratégia para definir uma estratégia vencedora θ do Jogador I no Jogo ponto-aberto.

Pelo Item 2 do Lema 4.2.4, existe um ponto $x_0 \in X$ tal que, para qualquer conjunto aberto $V \in \tau$ com $x_0 \in V$, temos que $\rho(\langle\mathscr{C}\rangle) = V$ para alguma cobertura aberta $\mathscr{C} \in \mathscr{O}$.

Para começar o turno 0 defina $\theta(\langle\rangle) = x_0$. Considere $V_0 \in \tau$ com $x_0 \in V_0$ a resposta do Jogador II. Então existe alguma cobertura aberta $\mathscr{C}_0 \in \mathscr{O}$ tal que $\rho(\langle\mathscr{C}_0\rangle) = V_0$.

Pelo Item 2 do Lema 4.2.4, existe um ponto $x_1 \in X$ tal que, para qualquer conjunto aberto $V \in \tau$ com $x_1 \in V$, temos que $\rho(\langle\mathscr{C}_0,\mathscr{C}\rangle) = V$ para alguma cobertura aberta $\mathscr{C} \in \mathscr{O}$.

Para continuar com o turno 1 defina $\theta(\langle V_0\rangle) = x_1$. Considere $V_1 \in \tau$ com $x_1 \in V_1$ a resposta do Jogador II. Então existe alguma cobertura aberta $\mathscr{C}_1 \in \mathscr{O}$ tal que $\rho(\langle\mathscr{C}_0,\mathscr{C}_1\rangle) = V_1$.

Pelo Item 2 do Lema 4.2.4, existe um ponto $x_2 \in X$ tal que, para qualquer conjunto aberto $V \in \tau$ com $x_2 \in V$, temos que $\rho(\langle\mathscr{C}_0,\mathscr{C}_1,\mathscr{C}\rangle) = V$ para alguma cobertura aberta $\mathscr{C} \in \mathscr{O}$.

Em geral, suponha já definidas as coberturas abertas $\mathscr{C}_0, \ldots, \mathscr{C}_n$ tais que, para cada $k \leqslant n$,

$$\rho(\langle \mathscr{C}_0, \ldots, \mathscr{C}_k \rangle) = V_k.$$

Pelo Item 2 do Lema 4.2.4, podemos definir no turno $n+1$ a seguinte jogada

$$\theta(\langle V_0, \ldots, V_n \rangle) = x_{n+1}$$

onde x_{n+1} é um ponto de X tal que, para qualquer conjunto aberto $V \in \tau$ com $x_{n+1} \in V$, temos que $\rho(\langle \mathscr{C}_0, \ldots, \mathscr{C}_n, \mathscr{C} \rangle) = V$ para alguma cobertura aberta $\mathscr{C} \in \mathscr{O}$.

Como ρ é estratégia vencedora do Jogador II no Jogo de Rothberger,

$$\bigcup_{n \in \omega} \rho(\langle \mathscr{C}_0, \ldots, \mathscr{C}_n \rangle) = X.$$

Portanto, $\bigcup_{n \in \omega} V_n = X$. Isto é, θ é estratégia vencedora do Jogador I no Jogo ponto-aberto.

□

Aurichi e Dias (AURICHI; DIAS, 2020) demonstraram:

Teorema 4.2.6. (TELGÁRSKY, 1975) (GALVIN, 1978) Considere X um espaço topológico em que todo ponto é um conjunto G_δ. Então o Jogador II tem uma estratégia vencedora no Jogo de Rothberger em X se, e somente se, X é enumerável.

Demonstração. Pelo Teorema 4.2.5, para demonstrar o resultado basta demonstrar que:

"O Jogador I tem uma estratégia vencedora no Jogo ponto-aberto em X se, e somente se, X é enumerável".

Primeiro, vamos demonstrar a parte recíproca.

Suponha que X é enumerável e fixe uma enumeração $\{x_n\}_{n \in \omega} = X$. Se o Jogador I escolhe x_n em cada turno $n \in \omega$, então isso é uma estratégia vencedora do Jogador I no Jogo ponto-aberto em X pois se o Jogador II no turno $n \in \omega$ responde o conjunto aberto V_n com $x_n \in V_n$ então $X = \bigcup_{n \in \omega} \{x_n\} \subseteq \bigcup_{n \in \omega} V_n \subseteq X$.

Agora, para demonstrar a implicação direta vamos usar a contrapositiva.

Suponha que X não é enumerável. Considere θ uma estratégia arbitrária do Jogador I no Jogo ponto-aberto em X. Vamos mostrar que θ não pode ser estratégia vencedora.

Para cada $x \in X$, seja $\{V_k^x\}_{k \in \omega}$ um conjunto de vizinhanças abertas de x (que é G_δ) satisfazendo $\{x\} = \bigcap_{k \in \omega} V_k^x$.

Definir recursivamente:

- $x_{\langle\rangle} = \theta(\langle\rangle)$;
- $W_{\langle k\rangle} = V_k^{x_{\langle\rangle}}$ para cada $k \in \omega$;
- $x_s = \theta(\langle W_{s\restriction 1}, \ldots, W_{s\restriction n}\rangle)$ para $s \in \omega^n, \quad n \neq 0$;
- $W_{s^\frown k} = V_k^{x_s}$ para cada $k \in \omega$.

Como $\{x_s : s \in \omega^{<\omega}\}$ é enumerável e X não é enumerável, podemos escolher um ponto $y \in X \setminus \{x_s : s \in \omega^{<\omega}\}$. Considere a seguinte partida do Jogo ponto-aberto em X. O Jogador I começa com $x_{\langle\rangle} = \theta(\langle\rangle)$. Como $y \neq x_{\langle\rangle}$, existe $k_0 \in \omega$ tal que $y \notin V_{k_0}^{x_{\langle\rangle}} = W_{\langle k_0\rangle}$. Seja $W_{\langle k_0\rangle}$ a resposta do Jogador II. No seguinte turno o Jogador I joga $x_{\langle k_0\rangle} = \theta(\langle W_{\langle k_0\rangle}\rangle)$. Como $y \neq x_{\langle k_0\rangle}$, existe $k_1 \in \omega$ tal que $y \notin V_{k_1}^{x_{\langle k_0\rangle}} = W_{\langle k_0,k_1\rangle}$. Seja $W_{\langle k_0,k_1\rangle}$ a resposta o Jogador II. No próximo turno o Jogador I joga $x_{\langle k_0,k_1\rangle} = \theta(\langle W_{\langle k_0\rangle}, W_{\langle k_0,k_1\rangle}\rangle)$. Em geral, considere $n \in \omega$, se $s \in \omega^n$ é tal que o Jogador I joga x_s no turno n, então existe $k_n \in \omega$ tal que $y \notin V_{k_n}^{x_s} = W_{s^\frown k_n}$ e em resposta o Jogador II escolhe $W_{s^\frown k_n}$. Observe que isso descreve uma partida em que o Jogador I segue θ e perde (já que o ponto y nunca é coberto), o que mostra que θ não é uma estratégia vencedora. Portanto, o Jogador I não tem estratégia vencedora no Jogo ponto-aberto em X.

□

Aurichi e Dias (AURICHI; DIAS, 2020) concluíram:

Corolário 4.2.7. A Conjectura de Borel implica que o Jogo de Rothberger é determinado em cada espaço métrico.

Demonstração. Vamos assumir que a Conjectura de Borel é verdadeira. Pelo Teorema 2.3.16, a Conjectura de Borel para espaços métricos também é verdadeira. Considere X um espaço métrico. Suponha que o Jogador I não tem estratégia vencedora no Jogo de Rothberger em X. Pela Observação 4.1.9, X é um espaço de Rothberger. Pela Proposição 2.3.25, X é um espaço de medida nula forte. Logo X é enumerável. Pelo Teorema 4.2.6 e pelo fato que todo ponto é G_δ em um espaço métrico, temos que o Jogador II tem estratégia vencedora no Jogo de Rothberger em X. Portanto, o Jogo de Rothberger é determinado em X.

□

Observação 4.2.8. A Conjectura de Borel implica que o Jogo ponto-aberto é determinado em cada espaço métrico. Isso segue do Teorema 4.2.5 e do Corolário 4.2.7.

4.3 Jogos equivalentes e o Jogo finito-aberto

Definição 4.3.1. (GALVIN, 1978) Dizemos que os jogos A e B jogados pelos jogadores I e II são **jogos equivalentes** se satisfizerem as seguintes condições:

A) O Jogador I tem estratégia vencedora no Jogo A se, e somente se, o Jogador I tem estratégia vencedora no Jogo B.

B) O Jogador II tem estratégia vencedora no Jogo A se, e somente se, o Jogador II tem estratégia vencedora no Jogo de B.

Observação 4.3.2. Em um espaço métrico compacto o Jogo de Mycielski-Solovay e o Jogo de Rothberger são jogos equivalentes. Isso segue da Proposição 4.1.10 e da Definição 4.3.1.

Definição 4.3.3. (GALVIN, 1978) O **Jogo finito-aberto** em um espaço topológico X é definido da seguinte maneira:

Em cada turno $n \in \omega$, o Jogador I escolhe um conjunto finito não vazio $F_n \subseteq X$ e o Jogador II responde com um conjunto aberto $V_n \subseteq X$ de modo que $F_n \subseteq V_n$.

Uma partida deste jogo é ganha pelo Jogador I se $\bigcup_{n\in\omega} V_n = X$. Caso contrário, a partida é ganha pelo Jogador II.

Definição 4.3.4. Considere o Jogo finito-aberto. Seja τ a topologia de X.

Uma **estratégia do Jogador** I é uma função θ com $\mathrm{dom}\theta \subset (\tau \setminus \{\varnothing\})^{<\omega}$ de maneira que

$$\theta(\langle V_0, \ldots, V_{n-1}\rangle) \in [X]^{<\omega} \setminus \{\varnothing\}$$

para cada sequência finita $\langle V_0, \ldots, V_{n-1}\rangle \in \mathrm{dom}\theta$.

Uma **estratégia do Jogador** II é uma função ρ com $\mathrm{dom}\rho \subset ([X]^{<\omega} \setminus \{\varnothing\})^{<\omega}$ de maneira que

$$\rho(\langle F_0, \ldots, F_n\rangle) \in \tau \qquad \text{e} \qquad F_n \subseteq \rho(\langle F_0, \ldots, F_n\rangle)$$

para cada sequência finita $\langle F_0, \ldots, F_n\rangle \in \mathrm{dom}\rho$.

Teorema 4.3.5. (GALVIN, 1978) O Jogo finito-aberto e o Jogo ponto-aberto são jogos equivalentes.

Demonstração. Vamos mostrar que a condição A da Definição 4.3.1 é satisfeita verificando que as condições que chamaremos de A1 e A2 são satisfeitas.

A1) Se o Jogador I tem estratégia vencedora no Jogo finito-aberto, então o Jogador I tem estratégia vencedora no Jogo ponto-aberto.

Considere θ uma estratégia vencedora do Jogador I no Jogo finito-aberto. Usaremos tal estratégia para definir uma estratégia vencedora ρ do Jogador I no Jogo ponto-aberto.

O Jogador I escolhe o ponto $x_{0,0}$ no turno 0, o ponto $x_{0,1}$ no turno 1, e assim por diante até escolher o ponto x_{0,k_0} no turno k_0 de forma que $\theta(\langle\rangle) = \{x_{0,0}; x_{0,1}; \ldots; x_{0,k_0}\}$. Sejam os conjuntos abertos $V_{0,0}; V_{0,1}; \ldots; V_{0,k_0}$ as respostas arbitrárias do Jogador II na devida

ordem. Logo $x_{0,i} \in V_{0,i}$ para cada $i \leqslant k_0$. Defina $V_0 = \bigcup_{i=0}^{k_0} V_{0,i}$. Então V_0 é um conjunto aberto tal que $\theta(\langle\rangle) \subseteq V_0$.

Nos seguintes turnos, o Jogador I escolhe os pontos $x_{1,0}; x_{1,1}; \ldots; x_{1,k_1}$ de maneira que $\theta(\langle V_0\rangle) = \{x_{1,0}; x_{1,1}; \ldots; x_{1,k_1}\}$. Sejam os conjuntos abertos $V_{1,0}; V_{1,1}; \ldots; V_{1,k_1}$ as respostas arbitrárias do Jogador II na devida ordem. Logo $x_{1,i} \in V_{1,i}$ para cada $i \leqslant k_1$. Defina $V_1 = \bigcup_{i=0}^{k_1} V_{1,i}$. Então V_1 é um conjunto aberto tal que $\theta(\langle V_0\rangle) \subseteq V_1$.

Considere $n > 1$, nos próximos turnos na devida ordem o Jogador I escolhe os pontos $x_{n,0}; x_{n,1}; \ldots; x_{n,k_n}$ de modo que $\theta(\langle V_0, \ldots, V_{n-1}\rangle) = \{x_{n,0}; x_{n,1}; \ldots; x_{n,k_n}\}$. Sejam os conjuntos abertos $V_{n,0}; V_{n,1}; \ldots; V_{n,k_n}$ as respostas arbitrárias do Jogador II na devida ordem. Logo $x_{n,i} \in V_{n,i}$ para cada $i \leqslant k_n$. Defina $V_n = \bigcup_{i=0}^{k_n} V_{n,i}$. Então V_n é um conjunto aberto tal que $\theta(\langle V_0, \ldots, V_{n-1}\rangle) \subseteq V_n$.

Como θ é estratégia vencedora do Jogador I no jogo finito-aberto, $\bigcup_{n\in\omega} V_n = X$. Mas $\bigcup_{n\in\omega} V_n = \bigcup_{n\in\omega} \bigcup_{i=0}^{k_n} V_{n,i}$. Logo $\bigcup_{n\in\omega} \bigcup_{i=0}^{k_n} V_{n,i} = X$ onde $V_{n,i}$ foi o conjunto aberto arbitrário que respondeu do Jogador II para cobrir o ponto $x_{n,i}$ escolhido pelo Jogador I na devida ordem.

Assim, a partida do Jogo ponto-aberto em X

$$\langle x_{0,0}; V_{0,0}; \ldots; x_{0,k_0}; V_{0,k_0}; x_{1,0}; V_{1,0}; \ldots; x_{1,k_1}; V_{1,k_1}; \ldots; x_{n,0}; V_{n,0}; \ldots; x_{n,k_n}; V_{n,k_n}; \ldots\rangle$$

é ganha pelo Jogador I. Portanto, o Jogador I tem estratégia vencedora no Jogo ponto-aberto.

A2) Se o Jogador I tem estratégia vencedora no Jogo ponto-aberto, então o Jogador I tem estratégia vencedora no Jogo finito-aberto.

Considere θ uma estratégia vencedora do Jogador I no Jogo ponto-aberto. Usaremos tal estratégia para definir uma estratégia vencedora ρ do Jogador I no Jogo finito-aberto.

Definir a jogada no turno 0: $\rho(\langle\rangle) = \{\theta(\langle\rangle)\}$. Seja $V_0 \in \tau$ a resposta do Jogador II no turno 0. Então $\rho(\langle\rangle) = \{\theta(\langle\rangle)\} \subseteq V_0$. Isto é, $\theta(\langle\rangle) \in V_0$. Suponha que no turno $n \in \omega$ o Jogador II já tem as respostas $V_k \in \tau$ tais que $\theta(\langle V_0, \ldots, V_{k-1}\rangle) \in V_k$ para cada $k \leqslant n$.

Definir a jogada no turno $n+1$: $\rho(\langle V_0, \ldots, V_n\rangle) = \{\theta(\langle V_0, \ldots, V_n\rangle)\}$. Seja $V_{n+1} \in \tau$ a resposta do Jogador II no turno $n+1$. Então $\rho(\langle V_0, \ldots, V_n\rangle) = \{\theta(\langle V_0, \ldots, V_n\rangle)\} \subseteq V_{n+1}$. Isto é, $\theta(\langle V_0, \ldots, V_n\rangle) \in V_{n+1}$.

Como θ é estratégia vencedora do Jogador I no Jogo ponto-aberto, $\bigcup_{n\in\omega} V_n = X$. Isto é, ρ é estratégia vencedora do Jogador I no Jogo finito-aberto.

Em seguida, vamos mostrar que a condição B da Definição 4.3.1 é satisfeita verificando que as condições que chamaremos de B1 e B2 são satisfeitas.

B1) Se o Jogador II tem estratégia vencedora no Jogo finito-aberto, então o Jogador II tem estratégia vencedora no Jogo ponto-aberto.

Considere ρ uma estratégia vencedora do Jogador II no Jogo finito-aberto. Usaremos tal estratégia para definir uma estratégia vencedora θ do Jogador II no Jogo ponto-aberto.

Seja x_0 o ponto arbitrário que o Jogador I escolheu no turno 0. Definir a jogada no turno 0: $\theta(\langle x_0\rangle) = \rho(\langle\{x_0\}\rangle)$. Então

$$x_0 \in \theta(\langle x_0\rangle) = \rho(\langle\{x_0\}\rangle).$$

Isto é, $\{x_0\} \subseteq \rho(\langle\{x_0\}\rangle)$. Suponha que no turno $n \in \omega$ o Jogador I já escolheu os pontos arbitrários $x_k \in X$ tais que $\{x_k\} \subseteq \rho(\langle\{x_0\},\ldots,\{x_k\}\rangle)$ para cada $k \leqslant n$.

Seja x_{n+1} o ponto arbitrário que o Jogador I escolheu no turno $n+1$. Definir a jogada no turno $n+1$: $\theta(\langle x_0,\ldots,x_n,x_{n+1}\rangle) = \rho(\langle\{x_0\},\ldots,\{x_n\},\{x_{n+1}\}\rangle)$. Então

$$x_{n+1} \in \theta(\langle x_0,\ldots,x_n,x_{n+1}\rangle) = \rho(\langle\{x_0\},\ldots,\{x_n\},\{x_{n+1}\}\rangle).$$

Isto é, $\{x_{n+1}\} \subseteq \rho(\langle\{x_0\},\ldots,\{x_n\},\{x_{n+1}\}\rangle)$.

Como ρ é estratégia vencedora do Jogador II no Jogo finito-aberto,

$$\bigcup_{n\in\omega} \rho(\langle\{x_0\},\ldots,\{x_n\}\rangle) \neq X.$$

Portanto, $\bigcup_{n\in\omega} \theta(\langle x_0,\ldots,x_n\rangle) \neq X$. Isto é, θ é estratégia vencedora do Jogador II no Jogo ponto-aberto.

B2) Se o Jogador II tem estratégia vencedora no Jogo ponto-aberto, então o Jogador II tem estratégia vencedora no Jogo finito-aberto.

Considere ρ uma estratégia vencedora do Jogador II no Jogo ponto-aberto. Usaremos tal estratégia para definir uma estratégia vencedora θ do Jogador II no Jogo finito-aberto.

Se o Jogador I no turno 0 joga o conjunto finito não vazio arbitrário $F_0 \subseteq X$, então podemos escolher os k_0+1 pontos $x_{0,0};\ldots;x_{0,k_0}$ tais que

$$F_0 = \{x_{0,0};\ldots;x_{0,k_0}\}$$

e o Jogador II responde com o conjunto aberto

$$\theta(\langle F_0\rangle) = \bigcup_{i=0}^{k_0} \rho(\langle x_{0,0};\ldots;x_{0,i}\rangle).$$

Note que $F_0 \subseteq \theta(\langle F_0 \rangle)$ pois, para cada $i \leqslant k_0$,

$$x_{0,i} \in \rho(\langle x_{0,0}; \ldots ; x_{0,i} \rangle).$$

Suponha que no turno $n \in \omega$ o Jogador I já jogou os conjuntos finitos não vazios arbitrários $F_j \subseteq X$ para cada $j \leqslant n$ onde, para cada $j \leqslant n$, temos os $k_j + 1$ pontos $x_{j,0}; \ldots ; x_{j,k_j}$ tais que

$$F_j = \{x_{j,0}; \ldots ; x_{j,k_j}\}$$

e o Jogador II já respondeu

$$\theta(\langle F_0, \ldots, F_j \rangle) = \bigcup_{i=0}^{k_j} \rho(\langle x_{0,0}; \ldots ; x_{0,k_0}; \ldots ; x_{j,0}; \ldots ; x_{j,i} \rangle)$$

de onde $F_j \subseteq \theta(\langle F_0, \ldots, F_j \rangle)$ pois, para cada $i \leqslant k_j$,

$$x_{j,i} \in \rho(\langle x_{0,0}; \ldots ; x_{0,k_0}; \ldots ; x_{j,0}; \ldots ; x_{j,i} \rangle).$$

Se o Jogador I no turno $n+1$ joga o conjunto finito não vazio arbitrário $F_{n+1} \subseteq X$, então podemos escolher os $k_{n+1} + 1$ pontos $x_{n+1,0}; \ldots ; x_{n+1,k_{n+1}}$ tais que

$$F_{n+1} = \{x_{n+1,0}; \ldots ; x_{n+1,k_{n+1}}\}$$

e o Jogador II responde com o conjunto aberto

$$\theta(\langle F_0, \ldots, F_n, F_{n+1} \rangle) = \bigcup_{i=0}^{k_{n+1}} \rho(\langle x_{0,0}; \ldots ; x_{0,k_0}; \ldots ; x_{n+1,0}; \ldots ; x_{n+1,i} \rangle).$$

Note que $F_{n+1} \subseteq \theta(\langle F_0, \ldots, F_n, F_{n+1} \rangle)$ pois, para cada $i \leqslant k_{n+1}$,

$$x_{n+1,i} \in \rho(\langle x_{0,0}; \ldots ; x_{0,k_0}; \ldots ; x_{n+1,0}; \ldots ; x_{n+1,i} \rangle).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \bigcup_{n \in \omega} \theta(\langle F_0, \ldots, F_n \rangle) \quad = \quad & \bigcup_{i=0}^{k_0} \rho(\langle x_{0,0}; \ldots ; x_{0,i} \rangle) \cup \bigcup_{i=0}^{k_1} \rho(\langle x_{0,0}; \ldots ; x_{0,k_0}; x_{1,0}; \ldots ; x_{1,i} \rangle) \cdots \\ & \cdots \cup \bigcup_{i=0}^{k_j} \rho(\langle x_{0,0}; \ldots ; x_{0,k_0}; \ldots ; x_{j,0}; \ldots ; x_{j,i} \rangle) \cdots \\ & \vdots \end{aligned}$$

Como ρ é estratégia vencedora do Jogador II no Jogo ponto-aberto em X,

$$\bigcup_{n \in \omega} \theta(\langle F_0, \ldots, F_n \rangle) \neq X.$$

Portanto, θ é estratégia vencedora do Jogador II no Jogo finito-aberto em X.

□

Observação 4.3.6. O Jogo de Rothberger e o Jogo finito-aberto são jogos duais. Isso segue da Definição 4.2.1, da Definição 4.3.1, do Teorema 4.2.5 e do Teorema 4.3.5.

Observação 4.3.7. A Conjectura de Borel implica que o Jogo finito-aberto é determinado em cada espaço métrico. Isso segue da Observação 4.2.8 e do Teorema 4.3.5.

Corolário 4.3.8. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. O Jogo de Rothberger é determinado em cada espaço topológico;
2. O Jogo ponto-aberto é determinado em cada espaço topológico;
3. O Jogo finito-aberto é determinado em cada espaço topológico.

Demonstração. A equivalência $1. \Leftrightarrow 2.$ segue do Teorema 4.2.5, e a equivalência $2. \Leftrightarrow 3.$ segue do Teorema 4.3.5.

□

4.4 Jogo Sigma de Rothberger, Jogo Sigma ponto-aberto e Jogo Sigma finito-aberto

Vamos definir as variantes técnicas dos jogos apresentados neste capítulo.

Definição 4.4.1. (PAWLIKOWSKI, 1994) O **Jogo Sigma de Rothberger** em um espaço topológico X é definido por:

Em cada turno $n \in \omega$, o Jogador I escolhe uma cobertura aberta $\mathscr{C}_n$ de X e o Jogador II responde com $U_n \in \mathscr{C}_n$.

A partida é ganha pelo Jogador II se $\limsup_{n\in\omega} U_n = X$. Caso contrário, a partida é ganha pelo Jogador I.

Definição 4.4.2. (PAWLIKOWSKI, 1994) O **Jogo Sigma ponto-aberto** em um espaço topológico X é definido por

Em cada turno $n \in \omega$, o Jogador I escolhe $x_n \in X$ e o Jogador II responde com um conjunto aberto $V_n \subseteq X$ de modo que $x_n \in V_n$.

Uma partida deste jogo é ganha pelo Jogador I se $\limsup_{n\in\omega} V_n = X$. Caso contrário, a partida é ganha pelo Jogador II.

Definição 4.4.3. O **Jogo Sigma finito-aberto** em um espaço topológico X é definido por

Em cada turno $n \in \omega$, o Jogador I escolhe um conjunto finito não vazio $F_n \subseteq X$ e o Jogador II responde com um conjunto aberto $V_n \subseteq X$ de modo que $F_n \subseteq V_n$.

Uma partida deste jogo é ganha pelo Jogador I se $\limsup_{n\in\omega} V_n = X$. Caso contrário, a partida é ganha pelo Jogador II.

Note que nos três jogos Sigma acima somente muda a condição para que uma partida seja ganha por um jogador mas as condições das jogadas alternadas entre os dois jogadores não mudam respeito à versão não Sigma dos jogos. Portanto, as respectivas estratégias terão as mesmas condições em cada caso. Isso não acontece com o Jogo Sigma de Mycielski-Solovay (Definição 3.2.1) pois nesse caso mudou a condição para que uma partida seja ganha por um jogador mas também Jogador II tem a condição adicional de que o conjunto que escolhe deve estar contido no conjunto totalmente limitado com o respectivo índice de acordo com o turno.

Proposição 4.4.4. Se X é um espaço topológico, então

1. Se o Jogador I tem estratégia vencedora no Jogo de Rothberger em X, então Jogador I tem estratégia vencedora no Jogo Sigma de Rothberger em X.

2. Se o Jogador II tem estratégia vencedora no Jogo ponto-aberto em X, então Jogador II tem estratégia vencedora no Jogo Sigma ponto-aberto em X.

3. Se o Jogador II tem estratégia vencedora no Jogo finito-aberto em X, então Jogador II tem estratégia vencedora no Jogo Sigma finito-aberto em X.

Demonstração. Vamos usar a contrapositiva para demonstrar as três implicações.

1. Suponha que o Jogador I não tem estratégia vencedora no Jogo Sigma de Rothberger em X. Considere θ uma estratégia arbitrária do Jogador I no Jogo de Rothberger em X. Então θ não pode ser estratégia vencedora no Jogo Sigma de Rothberger em X. Logo existe uma partida $\langle \theta(\langle\rangle), U_0, \theta(\langle U_0\rangle), U_1, \theta(\langle U_0, U_1\rangle), U_2, \ldots, \theta(\langle U_0, \ldots, U_n\rangle), U_{n+1}, \ldots\rangle$ ganha pelo Jogador II no Jogo Sigma de Rothberger em X. Isto é, $X = \limsup_{n\in\omega} U_n$. Daí, $X = \limsup_{n\in\omega} U_n \subseteq \bigcup_{n\in\omega} U_n \subseteq X$. Assim, $X = \bigcup_{n\in\omega} U_n$. Portanto, a partida acima é ganha pelo Jogador II no Jogo de Rothberger em X. Isso mostra que θ não é estratégia vencedora do Jogador I no Jogo de Rothberger em X.

2. Suponha que o Jogador II não tem estratégia vencedora no Jogo Sigma ponto-aberto em X. Considere ρ uma estratégia arbitrária do Jogador II no Jogo ponto-aberto em X. Então ρ não pode ser estratégia vencedora no Jogo Sigma ponto-aberto em X. Logo existe uma partida $\langle x_0, \rho(\langle x_0\rangle), x_1, \rho(\langle x_0, x_1\rangle), \ldots, x_n, \rho(\langle x_0, \ldots, x_n\rangle), \ldots\rangle$ ganha pelo Jogador I no Jogo Sigma ponto-aberto em X. Isto é, $X = \limsup_{n\in\omega} \rho(\langle x_0, \ldots, x_n\rangle)$. Daí,

$X = \limsup_{n\in\omega} \rho(\langle x_0,\ldots,x_n\rangle) \subseteq \bigcup_{n\in\omega} \rho(\langle x_0,\ldots,x_n\rangle) \subseteq X$. Assim, $X = \bigcup_{n\in\omega} \rho(\langle x_0,\ldots,x_n\rangle)$. Portanto, a partida acima é ganha pelo Jogador I no Jogo ponto-aberto em X. Isso mostra que θ não é estratégia vencedora do Jogador II no Jogo ponto-aberto em X.

3. Suponha que o Jogador II não tem estratégia vencedora no Jogo Sigma finito-aberto em X. Considere ρ uma estratégia arbitrária do Jogador II no Jogo finito-aberto em X. Então ρ não pode ser estratégia vencedora no Jogo Sigma finito-aberto em X. Logo existe uma partida $\langle F_0, \rho(\langle F_0\rangle), F_1, \rho(\langle F_0, F_1\rangle), \ldots, F_n, \rho(\langle F_0,\ldots,F_n\rangle), \ldots\rangle$ ganha pelo Jogador I no Jogo Sigma finito-aberto em X. Isto é, $X = \limsup_{n\in\omega} \rho(\langle F_0,\ldots,F_n\rangle)$. Daí, $X = \limsup_{n\in\omega} \rho(\langle F_0,\ldots,F_n\rangle) \subseteq \bigcup_{n\in\omega} \rho(\langle F_0,\ldots,F_n\rangle) \subseteq X$. Assim, $X = \bigcup_{n\in\omega} \rho(\langle F_0,\ldots,F_n\rangle)$. Portanto, a partida acima é ganha pelo Jogador I no Jogo finito-aberto em X. Isso mostra que θ não é estratégia vencedora do Jogador II no Jogo finito-aberto em X.

□

Em 1994, Janusz Pawlikowski estudou a propriedade de Rothberger e a propriedade M de Menger. Também pesquisou o Jogo ponto-aberto, o Jogo de Rothberger, o Jogo de Menger e as variantes técnicas de tais jogos. Ele demonstrou no segundo lema de seu paper:

Lema 4.4.5. (PAWLIKOWSKI, 1994) Se X é um espaço topológico de Rothberger, então o Jogador I não tem uma estratégia vencedora no Jogo Sigma de Rothberger em X.

Teorema 4.4.6. Se X é um espaço topológico de Rothberger, então o Jogador I não tem uma estratégia vencedora no Jogo de Rothberger em X.

Demonstração. Se X é um espaço topológico de Rothberger, então, pelo Lema 4.4.5, o Jogador I não tem uma estratégia vencedora no Jogo Sigma de Rothberger em X, e pelo Item 1 da Proposição 4.4.4, o Jogador I não tem uma estratégia vencedora no Jogo de Rothberger em X.

□

Finalmente, juntamos todas as equivalências:

Corolário 4.4.7. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. A Conjectura de Borel;
2. A Conjectura de Borel para espaços métricos;
3. A Conjectura R-Borel;
4. A Conjectura R-Borel para espaços métricos;
5. O Jogo de Mycielski-Solovay é determinado em cada subespaço da reta real;

6. O Jogo de Mycielski-Solovay é determinado em cada espaço métrico $\sigma-$totalmente limitado;
7. O Jogo de Rothberger é determinado em cada subespaço da reta real;
8. O Jogo ponto-aberto é determinado em cada subespaço da reta real;
9. O Jogo finito-aberto é determinado em cada subespaço da reta real;
10. O Jogo de Rothberger é determinado em cada espaço métrico;
11. O Jogo ponto-aberto é determinado em cada espaço métrico;
12. O Jogo finito-aberto é determinado em cada espaço métrico.

Demonstração. Já temos:

- $1. \Leftrightarrow 2. \Leftrightarrow 3. \Leftrightarrow 4.$ pelo Corolário 2.3.27.
- $1. \Leftrightarrow 5. \Leftrightarrow 6.$ pelo Corolário 3.1.10.
- $7. \Leftrightarrow 8. \Leftrightarrow 9.$ pelo Corolário 4.3.8.
- $10. \Leftrightarrow 11. \Leftrightarrow 12.$ pelo Corolário 4.3.8.
- $1. \Rightarrow 10.$ pelo Corolário 4.2.7.
- $10. \Rightarrow 7.$ é obvio.

Basta provar que $7. \Rightarrow 3.$ e estabelecemos todas as equivalências.

Considere X um subespaço de Rothberger de $\mathbb{R}$. Pelo Teorema 4.4.6, o Jogador I não tem uma estratégia vencedora no Jogo de Rothberger em X. Como o Jogo de Rothberger é determinado em X, o Jogador II tem uma estratégia vencedora no Jogo de Rothberger em X. Note que todo ponto de X é um conjunto G_δ pois $X \subset \mathbb{R}$. Pelo Teorema 4.2.6, X é enumerável. Portanto, a Conjectura R-Borel é verdadeira.

□

Como já foi estabelecida a independência da Conjectura de Borel com ZFC, decorre a independência de cada afirmação do Corolário 4.4.7 com ZFC.

REFERÊNCIAS

AURICHI, L. F.; DIAS, R. R. Game-theoretical aspects of the Borel conjecture. **Contemporary Mathematics**, American Mathematical Society (AMS), v. 755, p. 1–35, 2020. Citado nas páginas 21, 22, 23, 30, 31, 33, 34, 35, 42, 43, 44, 45, 47, 48, 49, 51, 68, 69, 70, 73, 77 e 78.

BOREL, E. Sur la classification des ensembles de mesure nulle. **Bulletin de la Société Mathématique de France**, Société Mathématique de France, v. 47, p. 97–125, 1919. Citado nas páginas 21, 25, 27, 28 e 34.

CARLSON, T. J. Strong measure zero and strongly meager sets. **Proceedings of the American Mathematical Society**, American Mathematical Society (AMS), v. 118, n. 2, p. 577–586, feb 1993. Citado nas páginas 21, 22, 29, 38, 39, 40 e 42.

GALVIN, F. Indeterminacy of point-open games. **Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences**, Polska Akademia Nauk, v. 26, p. 445–449, 1978. Citado nas páginas 23, 67, 73, 75, 77, 78 e 79.

GALVIN, F.; MYCIELSKI, J.; SOLOVAY, R. M. Strong measure zero and infinite games. **Archive for Mathematical Logic**, Springer Science and Business Media LLC, v. 56, n. 7-8, p. 725–732, may 2017. Citado nas páginas 22, 47, 48, 49, 52, 53, 55, 56, 60, 62, 63 e 64.

LAVER, R. On the consistency of Borel's conjecture. **Acta Mathematica**, International Press of Boston, v. 137, p. 151–169, 1976. Citado na página 37.

PAWLIKOWSKI, J. Undetermined sets of point-open games. **Fundamenta Mathematicae**, Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, v. 144, p. 279–285, 1994. Citado nas páginas 23, 68, 83 e 85.

ROTHBERGER, F. Eine Verschärfung der Eigenschaft C. **Fundamenta Mathematicae**, Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, v. 30, p. 50–55, 1938. Citado nas páginas 21, 25, 30, 31 e 43.

____. Sur les familles indénombrables de suites de nombres naturels et les problèmes concernant la propriété C. **Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**, Cambridge Philosophical Society, v. 37, p. 109–126, 1941. Citado nas páginas 22, 35, 43, 44 e 45.

SCHEEPERS, M. Combinatorics of open covers I: Ramsey theory. **Topology and its Applications**, Elsevier BV, v. 69, n. 1, p. 31–62, mar 1996. Citado nas páginas 67 e 68.

____. Combinatorics of open covers (III): games, $C_p(X)$. **Fundamenta Mathematicae**, Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, v. 152, p. 231–254, 1997. Citado nas páginas 67 e 68.

____. Finite powers of strong measure zero sets. **Journal of Symbolic Logic**, Cambridge University Press (CUP), v. 64, n. 3, p. 1295–1306, sep 1999. Citado nas páginas 21 e 30.

____. Rothberger bounded groups and Ramsey theory. **Topology and its Applica-tions**, Elsevier BV, v. 158, n. 13, p. 1575–1583, aug 2011. Citado na página 32.

TELGÁRSKY, R. Spaces defined by topological games. **Fundamenta Mathematicae**, Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, v. 88, n. 3, p. 193–223, 1975. Citado nas páginas 23, 67, 73 e 77.

ICMC USP
SÃO CARLOS