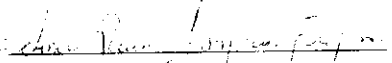


SERVIÇO DE POS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 25.02.2002

Assinatura: 

Bifurcação de Hopf para uma classe de equações diferenciais parciais com retardamento

Katia Andreia Gonçalves de Azevedo

Orientador: Prof. Dr. Luiz Augusto da Costa Ladeira

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências - Matemática.

**USP – São Carlos
Fevereiro de 2002**

A Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Luiz Augusto da Costa Ladeira

Prof. Dr. Plácido Zoega Táboas

Prof. Dr. Jair Silvério dos Santos

Prof. Dr. Sérgio Muniz Oliva Filho

Prof. Dr. Gerson Petromilho

[Handwritten signatures and marks on a ruled line]

A Deus, a glória.

Agradecimentos

Ao Prof. Ladcira pela sua orientação, a qual foi feita com empenho e dedicação, mesmo em momentos difíceis.

Aos professores e colegas do Departamento de Matemática do ICMC-USP pela amizade e apoio, em especial à Sandra, Maria do Carmo e ao Plácido.

Ao Jair por sua atenção e ajuda no desenvolvimento deste trabalho.

Às funcionárias da Secretaria de Pós-Graduação e da Biblioteca pela atenção.

À Marta, Marcia e Selma que compartilharam o meu dia-a-dia.

Ao Mauro pelo seu amor e companherismo.

À minha família: minha mãe Helena, David, Elaine, Marcio, Telma, Neto, Fran e meu querido Lucas.

Aos que oraram por mim.

Enfim, a todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

Este trabalho teve suporte financeiro da Fapesp.

Abstract

In this work we study the retarded reaction-diffusion equation

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(t, x) + kU(t, x) + \frac{k}{\delta} \int_{-\tau}^{-\tau+\delta} g(U(t, x), U(t+s, x)) ds, \\ U(t, 0) = U(t, \pi) = 0, \quad t \geq 0 \\ U(t, x) = \psi(t, x), \quad (t, x) \in [-\tau, 0] \times [0, \pi]. \end{cases}$$

We show the existence of a sequence of values $\{\tau_{k_n}\}_{n=0,1,2,\dots}$ of the parameter τ such that a Hopf bifurcation occurs when the delay passes through each value $\{\tau_{k_n}\}$.

The main techniques used here are some results on nonlinear eigenvalue problems, the analysis of the characteristic equation of the linearized problem, the Liapunov-Schmidt method and the Implicit Function Theorem.

Resumo

Neste trabalho nós estudamos a equação de reação difusão com retardamento

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(t, x) + kU(t, x) + \frac{k}{\delta} \int_{-\tau}^{-\tau+\delta} g(U(t, x), U(t+s, x)) ds, \\ U(t, 0) = U(t, \pi) = 0, \quad t \geq 0 \\ U(t, x) = \psi(t, x), \quad (t, x) \in [-r, 0] \times [0, \pi]. \end{cases}$$

Nós mostramos a existência de uma sequência de valores $\{\tau_{k_n}\}_{n=0,1,2,\dots}$ do parâmetro τ tal que uma bifurcação de Hopf ocorre quando o retardo passa através de cada valor $\{\tau_{k_n}\}$.

As técnicas principais usadas aqui são alguns resultados sobre problemas de autovalor não lineares, a análise da equação característica do problema linearizado, o método de Liapunov-Schmidt e o Teorema da Função Implícita.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	4
1 Existência e Unicidade de Equilíbrio Positivo	4
2 O Método de Liapunov-Schmidt	9
3 Decomposição de $L^2[0, \pi]$ em soma direta	10
2 O Problema do Autovalor	12
3 Estabilidade do Equilíbrio Positivo	24
4 Bifurcação de Hopf	37
Bibliografia	59

Introdução

Equações de reação-difusão com retardo servem como modelos para alguns problemas em ecologia e em dinâmica populacional, como também para sistemas físicos e químicos. Estamos particularmente interessados na seguinte equação de reação-difusão não local com o retardamento incorporado ao controle e condição de fronteira de Dirichlet:

$$\begin{cases} \frac{\partial U(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial x^2} + kU(t, x) + \frac{k}{\delta} \int_{-\tau}^{-\tau+\delta} g(U(t, x), U(t+s, x)) ds \\ U(t, 0) = U(t, \pi) = 0, t \geq 0 \\ U(t, x) = \psi(t, x), (t, x) \in [-\tau, 0] \times [0, \pi] \\ \psi \in C([-\tau, 0], H_0^1) \end{cases} \quad (1)$$

com k , τ e δ constantes positivas, $0 < \delta \leq \tau$.

Esta equação descreve a dinâmica de uma população de espécie única no intervalo $[0, \pi]$, onde $u(t, x)$ representa o tamanho da população em (t, x) . Esta condição de fronteira descreve a situação onde o ambiente é cercado por uma região totalmente desfavorável na qual a densidade populacional não pode atingir valores positivos.

Este trabalho é motivado por [1] e [2]. Em [2], Busenberg e Huang estudaram a seguinte equação

$$\frac{\partial U(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial x^2} + kU(t, x)[1 - U(t - \tau, x)] \quad (2)$$

com as mesmas condições iniciais e de fronteira.

Eles provaram a existência de soluções periódicas através de bifurcação de Hopf, fizeram uma breve discussão sobre a estabilidade destas soluções e interpre-

taram o modelo biológico que gera esta equação através dos resultados obtidos.

Em [1], Santos e Bená estenderam estes resultados para equações da forma

$$\frac{\partial U(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial x^2} + kU(t, x) + kg(U(t, x), U(t - \tau, x)) \quad (3)$$

onde $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $g(a, b) = -ab - a^3b^3$ e, novamente, as mesmas condições iniciais e de fronteira.

Em nosso caso, estamos considerando o retardo distribuído e observamos que fazendo $\delta \rightarrow 0$, a equação limite é a estuda por Santos e Bená em [1]. A idéia de tomarmos tais equações vem de um trabalho feito por Nussbaum [3], onde controles desta forma são considerados. Também em sua tese de doutoramento, Nicola [15] e [16], considera tal controle.

Para nós, $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de (a, b) e definimos $g(\xi, \xi) := h(\xi)$, $g_a(\xi, \xi) := \gamma(\xi)$ e $g_b(\xi, \xi) := \eta(\xi)$

As hipóteses que colocamos sobre a função g são as seguintes:

- $g(a, b)$ é uma função continuamente diferenciável, com $g(0, 0) = 0$,
- $h(\xi) < 0$ se $\xi > 0$,
- $\frac{h(\xi)}{\xi}$ é decrescente para $\xi > 0$,
- $\exists \xi^* > 0$ tal que $\frac{h(\xi^*)}{\xi^*} = -1$,
- $\eta(\xi) < 0$ se $\xi > 0$,
- $\frac{h(\xi)}{\xi} \geq \gamma(\xi)$ para $\xi > 0$,
- $\gamma'(0) = -1$ e existe $\eta'(0)$,

- $\lim_{(a,b) \rightarrow (0,0)} \frac{g(a,b)}{ab} = -1,$
- $\frac{g(a,a) - g(b,b)}{a-b} < \frac{g(a,a)}{a}, a, b > 0,$

e, como consequência, temos que $\frac{\partial^2 g(\xi, \xi)}{\partial a \partial b} \rightarrow -1$ quando $\xi \rightarrow 0$.

Observamos que a função $g(a, b) = -ab - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (ab)^{2n+1}$, com $\alpha_n \geq 0$ satisfaz todas as hipóteses consideradas acima.

Esta tese está desenvolvida da seguinte forma:

No capítulo 1, nós garantiremos a existência e a unicidade de um equilíbrio positivo para a equação (1), bifurcando a partir do equilíbrio nulo, para $k > 1$, e acrescentamos alguns pré-requisitos. Observamos que considerando condições de fronteira de Dirichlet, o único equilíbrio espacialmente constante seria a solução nula. Portanto, tais equilíbrios são espacialmente não constantes, dificultando sua análise.

No capítulo 2, nós analisaremos a equação característica associada a equação (1), obtendo a existência de autovalores com parte real nula para k suficientemente próximo de 1.

No capítulo 3 faremos uma descrição do comportamento dos autovalores quando variamos o retardo, obtendo uma descrição completa da estabilidade do equilíbrio positivo, e uma condição para estabilidade assintótica.

Finalmente, no capítulo 4, conseguimos a existência de soluções periódicas através de bifurcação de Hopf tendo como parâmetros k e o retardo τ .

Capítulo 1

Preliminares

1 Existência e Unicidade de Equilíbrio Positivo

As soluções equilíbrio de (1) são soluções independentes do tempo mas não espacialmente constantes. Devido à condição de fronteira de Dirichlet, a única solução constante espacialmente é a solução nula. Dentre estas soluções espacialmente não constantes, estamos interessados nas soluções positivas em $(0, \pi)$.

Uma solução equilíbrio será uma solução do problema com valor de fronteira não linear

$$\begin{cases} \frac{d^2U(x)}{dx^2} + kU(x) + \frac{k}{\delta} \int_{-\tau}^{-\tau+\delta} g(U(x), U(x)) ds = 0 \\ U(0) = U(\pi) = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

que é equivalente a:

$$\begin{cases} \frac{d^2U(x)}{dx^2} + kU(x) + kg(U(x), U(x)) = 0 \\ U(0) = U(\pi) = 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

Os resultados de existência e unicidade para estas soluções de equilíbrio são colocados no seguinte lema, e sua demonstração segue a encontrada em [5], com as devidas adaptações:

Lema 1.1. (i) Para $k \leq 1$, não existe solução positiva em $(0, \pi)$ para (1.2).

(ii) Para $k > 1$, existe uma única solução $U_k(x) = U(x, k)$ positiva em $(0, \pi)$, de (1.2).

Prova do item (i): Suponha $k \leq 1$ e que exista uma solução positiva de (1.2), $\tilde{U}(x)$. Então $\tilde{U}(x)$ também é solução do problema

$$\ddot{y}(x) + ky(x)\left[1 + \frac{g(\tilde{U}(x), \tilde{U}(x))}{\tilde{U}(x)}\right] = 0$$

com $y(0) = y(\pi) = 0$.

Como, por hipótese, $g(a, a) < 0$ se $a > 0$, então

$$k\left[1 + \frac{g(\tilde{U}(x), \tilde{U}(x))}{\tilde{U}(x)}\right] \leq 1$$

Pelo teorema da comparação de Sturm [6, pg. 223], cada solução da equação $\ddot{y}(x) + y(x) = 0$ tem pelo menos um zero em $0 < x < \pi$. Porém, a função $y = \sin x$ nos fornece uma contradição.

Para provar o item (ii), precisamos de alguns resultados encontrados em [7], que descreveremos a seguir:

Seja $F : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_1$, onde \mathcal{E} e \mathcal{E}_1 são espaços de Banach reais e F é contínua. Suponha que a equação $F(U) = 0$ possui uma curva simples de soluções \mathcal{C} dada por $\{U(t) / t \in [a, b]\}$. Se existir $\tau \in (a, b)$ tal que toda vizinhança de $U(\tau)$ contém pelos menos um zero de F que não está sobre \mathcal{C} , dizemos que $U(\tau)$ é um ponto de bifurcação para F com respeito à \mathcal{C} .

Uma família especial de tais equações tem a forma

$$u = G(\lambda, u) \tag{1.3}$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$, $u \in E$, E é um espaço de Banach real com norma $\|\cdot\|$ e $G : \mathbb{R} \times E \rightarrow E$ é uma transformação compacta e contínua. Em adição,

$$G(\lambda, u) = \lambda Lu + H(\lambda, u),$$

onde $H(\lambda, u)$ é $O(\|u\|)$ para u próximo da origem, uniformemente para λ em intervalos limitados e L é uma transformação linear compacta em E .

Uma *solução* de (1.3) é um par $(\lambda, u) \in \mathcal{E}$ tal que $u = G(\lambda, u)$. Soluções do tipo $(\lambda, 0)$ são chamadas *soluções triviais*, $\lambda \in \mathbb{R}$. O fecho do conjunto de soluções não triviais de (1.3) é denotado por \mathfrak{J} .

Seja $r(L)$ o conjunto dos $\mu \in \mathbb{R}$ tal que existe $v \in E$, $v \neq 0$, com $v = \mu Lv$, isto é, $r(L)$ consiste dos inversos dos autovalores reais não nulos de L .

Sabe-se que os possíveis pontos de bifurcação para (1.3) com respeito a curva de soluções triviais $\{(\lambda, 0) / \lambda \in \mathbb{R}\}$ estão em $\{(\mu, 0) / \mu \in r(L)\}$. De fato, se $\mu \in r(L)$ é de multiplicidade ímpar, $(\mu, 0)$ é um ponto de bifurcação, (veja por ex. [12]).

Seja $\mathcal{O} \subset \mathcal{E}$. Por um *contínuo* \mathcal{C} de \mathcal{O} , entendemos um subconjunto de \mathcal{O} fechado e conexo em \mathcal{E} . Dizemos que um contínuo \mathcal{C} em \mathcal{E} *encontra o infinito* se \mathcal{C} não é limitado.

Temos então o seguinte resultado [7, pag. 490]:

Teorema 1.2. Rabinowitz *Se $\mu \in r(L)$ é de multiplicidade ímpar, então \mathfrak{J} possui um contínuo maximal \mathcal{C}_μ tal que $(\mu, 0) \in \mathcal{C}_\mu$ e \mathcal{C}_μ ou*

- (i) *encontra o infinito em \mathcal{E} , ou*
- (ii) *encontra $(\hat{\mu}, 0)$, onde $\mu \neq \hat{\mu} \in r(L)$*

Por \mathcal{C}_μ maximal entendemos que \mathcal{C}_μ não é um subcontínuo próprio de qualquer $\mathcal{C} \subset \mathfrak{J}$ com tais propriedades.

Estamos interessados numa aplicação deste resultado a problemas de Sturm-Liouville não lineares para equações diferenciais ordinárias de segunda ordem. Consideremos

$$\begin{cases} \mathcal{L}u \equiv -(pu')' + qu = F(x, u, u', \lambda), & 0 < x < \pi \\ CF : a_0u(0) + b_0u'(0) = 0, & a_1u(\pi) + b_1u'(\pi) = 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

onde CF são as condições de fronteira e $(a_0^2 + b_0^2)(a_1^2 + b_1^2) \neq 0$.

A função $F(x, \xi, \eta, \lambda) = \lambda a(x)\xi + H(x, \xi, \eta, \lambda)$ e H é $O((\xi^2 + \eta^2)^{\frac{1}{2}})$, próximo a $(\xi, \eta) = (0, 0)$ uniformemente para λ em intervalos limitados.

As funções p , q , e a são, respectivamente, C^1 e positiva, contínua, contínua e positiva em $[0, \pi]$, e F é contínua em seus argumentos em $[0, \pi] \times \mathbb{R}^3$.

Seja E o espaço de Banach

$$C^1[0, \pi] \cap C.F. = \{u \in C^1[0, \pi] / a_0 u(0) + b_0 u'(0) = 0, a_1 u(\pi) + b_1 u'(\pi) = 0\}$$

com a norma usual

$$\|u\|_1 = \max_{x \in [0, \pi]} |u(x)| + \max_{x \in [0, \pi]} |u'(x)|$$

e consideremos os seguintes conjuntos:

$S_n^+ = \{u \in E / u \text{ tem exatamente } n - 1 \text{ zeros nodais em } (0, \pi) \text{ e } u(x) > 0 \text{ para } x \text{ próximo a } 0\}$. Por um *zero nodal* entendemos que a função troca de sinal neste zero e por um *zero nodal simples*, quando a derivada da função é não nula neste zero ;

$$S_n^- = -S_n^+ \text{ e } S_n = S_n^+ \cup S_n^-;$$

$$\mathcal{E} = \mathbb{R} \times E, \mathfrak{J}_n^+ = \mathbb{R} \times S_n^+, \mathfrak{J}_n^- = \mathbb{R} \times S_n^- \text{ e } \mathfrak{J}_n = \mathbb{R} \times S_n.$$

O seguinte resultado acontece para a equação (1.4), como uma aplicação do teorema (1.2), também encontrado em [7, pag. 501].

Teorema 1.3. *Para cada inteiro $n > 0$ e cada $\nu = +$ ou $-$, existe um contínuo de soluções da equação (1.4) em $\mathfrak{J}_n^\nu \cup \{(\lambda_n, 0)\}$ que encontra $(\lambda_n, 0)$ e o ∞ em \mathcal{E} .*

Observação 1.4. *Aqui λ_n , $n > 0$ são os autovalores de $\mathcal{L}u$.*

Prova do item (ii) *Para aplicar a teoria descrita, observamos primeiramente, que a equação (1.2) pode ser vista como o problema considerado acima:*

$$\begin{cases} -\ddot{U}(x) = kU(x) + kg(U(x), U(x)) \\ U(0) = U(\pi) = 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

com $p \equiv 1$, $q \equiv 0$, $a \equiv 1$ e $F(x, \xi, k) = k\xi + kg(\xi, \xi)$, contínua em todos os seus argumentos. Então $H(\xi, k) = kg(\xi, \xi)$ e H é obviamente $O(\|\xi\|)$ quando $\|\xi\| \rightarrow 0$, uniformemente para k em intervalos limitados .

Os autovalores de $-\ddot{U}$ são inteiros positivos, da forma $\lambda = \alpha^2$, $\alpha \in \mathbb{Z}$.

Então, pelo teorema (1.3), existe um contínuo de soluções da equação (1.2) em $\mathfrak{J}_1^+ \cup \{(k_1, 0)\}$ que encontra $(k_1, 0)$ e ∞ em \mathcal{E} , com $k_1 = 1$.

Agora, seja $U(x) > 0$ para $0 < x < \pi$ uma tal solução. Se x_0 é ponto de máximo, então $\ddot{U}(x_0) < 0$ e assim, $\frac{g(U(x_0), U(x_0))}{U(x_0)}$ deve satisfazer

$$-1 < \frac{g(U(x_0), U(x_0))}{U(x_0)} < 0$$

Como por hipótese, $\frac{g(a, a)}{a}$ é decrescente se $a > 0$ e existe $a^* \in \mathbb{R}$, $a^* > 0$ tal que $\frac{g(a^*, a^*)}{a^*} = -1$, então, $U(x_0) < a^*$. Portanto, $U(x) < a^*$ para todo $x \in [0, \pi]$, sendo desta forma limitada por a^* . Como este raciocínio vale para toda $U \in \mathfrak{J}_1^+$, esta limitação é uniforme e sendo este contínuo ilimitado, se prolonga para todo $k > 1$.

Para concluirmos a prova do item (ii), resta provarmos a unicidade da solução positiva.

Suponha que U_1 e U_2 são duas soluções positivas distintas da equação (1.2), então $U_1 - U_2$ é solução do problema

$$\ddot{y} + k\left[1 + \frac{g(U_1, U_1) - g(U_2, U_2)}{U_1 - U_2}\right]y = 0$$

com condição de fronteira $y(0) = y(\pi) = 0$.

Por hipótese

$$\frac{g(U_1, U_1) - g(U_2, U_2)}{U_1 - U_2} < \frac{g(U_1, U_1)}{U_1}$$

Logo, toda solução do problema

$$\ddot{y} + k\left[1 + \frac{g(U_1, U_1)}{U_1}\right]y = 0$$

tem um zero entre 0 e π , inclusive U_1 , o que é uma contradição.

2 O Método de Liapunov-Schmidt

Uma ferramenta básica para o estudo de bifurcação de Hopf é o método de Liapunov-Schmidt, ou método alternativo, que expomos a seguir. Exposições detalhadas podem ser encontradas em Golubitsky e Schaeffer [17] e Knops [18].

Sejam X, Y espaços de Banach, $L : \text{Dom}(L) \subset X \rightarrow Y$ um operador linear e $N : X \rightarrow Y$ um operador (não necessariamente linear). Estamos interessados em estudar a equação

$$Lx = Nx, \quad x \in \text{Dom}(L). \quad (1.6)$$

Vamos supor satisfeita a seguinte hipótese:

(H₀) existem projeções $P : X \rightarrow X$ e $Q : Y \rightarrow Y$ tais que $R(P) = N(L)$ e $R(I - Q) = R(L)$.

É imediato que a equação (1.6) é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} (I - Q)(Lx - Nx) = 0 \\ Q(Lx - Nx) = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

A hipótese (H₀) implica que $(I - Q)Lx = Lx$ e $QLx = 0$ para todo $x \in \text{Dom}(L)$ e, portanto, o sistema (1.7) é equivalente a

$$\begin{cases} Lx = (I - Q)Nx \\ QNx = 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

Da hipótese (H₀) temos ainda que $\tilde{L} = L | \text{Dom}(L) \cap R(I - P)$ é um isomorfismo algébrico entre $\text{Dom}(L) \cap R(I - P)$ e $R(L)$, e tem um inverso $K = \tilde{L}^{-1}$ definido em $R(L)$, ou seja, $LK = I$ em $R(L)$ e $KL = I - P$ em $\text{Dom}(L)$.

Substituindo estas relações em (1.8), temos provado o seguinte teorema:

Teorema 1.5. *Suponhamos satisfeita a hipótese (H₀). Então existe um operador linear $K : R(L) \rightarrow X$ tal que $LK = I$ em $R(L)$, $KL = I - P$ em $\text{Dom}(L)$ e a equação (1.6) é equivalente ao sistema*

$$\begin{cases} \text{(a)} & x = Px + K(I - Q)Nx \\ \text{(b)} & QNx = 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

A equação (1.9 (a)) e (1.9 (b)) são chamadas *equação auxiliar* e *equação de bifurcação*, respectivamente.

Se $\text{Dom}(L)$ for um subespaço fechado de X e se L for um operador contínuo, então $\text{Dom}(\tilde{L}) = \text{Dom}(L) \cap R(I - P)$ é fechado e \tilde{L} é contínuo. Assim, do teorema do gráfico fechado, segue-se que K é contínuo. Se, além disso, N for de classe C^1 em alguma vizinhança da origem com $N(0) = 0$ e $DN(0) = 0$, então a função $f : \text{Dom}(\tilde{L}) \times N(L) \rightarrow Y$

$$f(x, w) = x - w + K(I - Q)Nx$$

tem as seguintes propriedades: $f(0, 0) = 0$ e $D_1 f(0, 0) = I$, a identidade de $\text{Dom}(\tilde{L})$. Pelo Teorema da Função Implícita segue que a equação $f(x, w) = 0$ pode ser resolvida numa vizinhança de $(x, w) = (0, 0)$ fornecendo uma única solução $x = x^*(w)$. É imediato que $x^*(w)$ satisfaz $x^*(w) = w + K(I - Q)Nx^*(w)$.

Então, o problema de encontrar soluções x para a equação (1.6) fica reduzido ao de encontrar soluções w para a equação (1.9 (b)) com x substituído por $x^*(w)$, isto é, o problema é o de encontrar as soluções da equação

$$QNx^*(w) = 0 \quad (1.10)$$

A existência de uma solução w em $R(P)$ para a equação (1.10) é equivalente à existência de uma solução de (1.6). Em vista disso, costuma-se dizer que a equação (1.10) constitui um problema alternativo para a equação (1.6).

3 Decomposição de $L^2[0, \pi]$ em soma direta

Consideremos a equação $\ddot{y} + y = f$, com $f \in L^2[0, \pi]$. A solução geral desta equação é dada por:

$$y(t) = \left(a - \int_0^t f(s) \sin(s) ds \right) \cos t + \left(b + \int_0^t f(s) \cos s ds \right) \sin t$$

Se considerarmos as condições iniciais $y(0) = y(\pi) = 0$, temos, fazendo $t = 0$ que $a = 0$ e, fazendo $t = \pi$, que $\int_0^\pi f(s) \operatorname{sen} s \, ds = 0$. Assim,

Teorema 1.6. *O problema de contorno*

$$\begin{cases} \ddot{y} + y = f, & f \in L^2[0, \pi] \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases} \quad (1.11)$$

tem solução se, e somente se, $\int_0^\pi f(s) \operatorname{sen} s \, ds = 0$.

Dito de outro modo, $f \in R(D^2 + 1)$ com a condição de fronteira $y(0) = y(\pi) = 0$ se, e somente se, $\int_0^\pi f(s) \operatorname{sen} s \, ds = 0$, isto é, $\langle f, \operatorname{sen}(\cdot) \rangle = 0$.

É claro que, $\ddot{y} + y = 0$ tem como solução $y(t) = a \cos t + b \operatorname{sen} t$, e, portanto, considerando as mesmas condições de fronteira, $y \in N(D^2 + 1)$ se, e somente se, $y(t) = b \operatorname{sen} t$, ou seja, $N(D^2 + 1) = \operatorname{span}[\operatorname{sen}(\cdot)]$.

Pelo Teorema da Projeção, temos que

$$L^2[0, \pi] = N(D^2 + 1) \oplus R(D^2 + 1)$$

considerando as condições de fronteira $y(0) = y(\pi) = 0$.

Capítulo 2

O Problema do Autovalor

Sejam $k > 1$ e U_k o equilíbrio positivo de (1). Para estudarmos tanto a estabilidade do equilíbrio positivo quanto a bifurcação de Hopf, precisamos de uma análise da equação característica.

Para simplificar a notação nós indicaremos $g(U_k, U_k) = g(U_k)$. Então, a linearização de (1) em torno de U_k é:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} V(t, x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} V(t, x) + k(1 + g_a(U_k))V(t, x) + \frac{k}{\delta} \int_{-\tau}^{-\tau+\delta} g_b(U_k)V(t+s, x) ds, & t > 0, \\ V(t, 0) = V(t, \pi) = 0, & t \geq 0, \\ V(t, x) = \phi(t, x), & (t, x) \in [-\tau, 0] \times [0, \pi], \end{cases} \quad (2.1)$$

onde $\phi \in C([- \tau, 0], X) = C$, com $X = L^2[0, \pi]$.

Se nós introduzirmos o operador $A(k) : \text{Dom}(A(k)) \subset X \rightarrow X$ dado por:

$$A(k) = D^2 + k(1 + g_a(U_k)),$$

onde $D^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $\text{Dom}(A(k)) = H^2 \cap H_0^1$, então $A(k)$ é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo compacto (veja [8]) e podemos escrever (2.1) como uma equação diferencial funcional semilinear abstrata:

$$\begin{cases} \dot{V}(t) = A(k)V(t) + \frac{k}{\delta} \int_{-\tau}^{-\tau+\delta} g_b(U_k)V(t+s) ds, & t > 0, \\ V(t) = \phi(t), & t \in [-\tau, 0]; \phi \in C \end{cases} \quad (2.2)$$

com $V(t) = V(t, \cdot)$ e $\phi(t) = \phi(t, \cdot)$.

À equação (2.2) associamos um semigrupo chamado semigrupo solução, definido por $U(t) : C \rightarrow C$,

$$U(t)\phi = u_t(\phi), \quad t \geq 0$$

onde $u_t(\phi)$ denota a solução de (2.2) sujeita a condição inicial $u_0 = \phi$.

$\{U(t)\}_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo em C e definimos por $A_\tau(k) : \text{Dom}(A_\tau(k)) \subset C \rightarrow C$, o gerador infinitesimal do semigrupo induzido pelas soluções da equação (2.2) com

$$A_\tau(\phi) = \dot{\phi}$$

$$\text{Dom}(A_\tau(k)) = \left\{ \phi \in C \cap C^1, \phi(0) \in H_0^1 \cap H^2, \dot{\phi}(0) = A(k)\phi(0) + \frac{k}{\delta} \int_{-\tau}^{-\tau+\delta} g_b(U_k)\phi(s) ds \right\}$$

É através da caracterização do espectro pontual de $A_\tau(k)$, $\sigma(A_\tau(k))$, que obtemos informações sobre a estabilidade de U_k . Os pontos de \mathbb{C} que pertencem ao espectro pontual de $A_\tau(k)$ são raízes da equação característica associada à (2.2):

$$\Delta(k, \lambda, \tau)y = 0, \quad y \in H_0^1 \cap H^2, \quad y \neq 0 \quad (2.3)$$

onde

$$\Delta(k, \lambda, \tau) = D^2 + k(1 + g_a(U_k)) + \frac{k}{\delta} \int_{-\tau}^{-\tau+\delta} g_b(U_k)e^{\lambda s} ds - \lambda$$

ou equivalentemente,

$$\Delta(k, \lambda, \tau) = D^2 + k(1 + g_a(U_k)) + K g_b(U_k) e^{-\lambda\tau} \left[\frac{e^{\lambda\delta} - 1}{\lambda\delta} \right] - \lambda$$

Como os autovalores de $A_\tau(k)$ são funções contínuas de τ (veja [4]), aqueles valores de τ para os quais $\sigma(A_\tau(k))$ contém um autovalor imaginário puro são importantes na análise da estabilidade e bifurcação de soluções periódicas.

O operador $A_\tau(k)$ tem um autovalor imaginário puro $\lambda = i\omega$, $\omega \neq 0$, para algum $\tau > 0$ se, e somente se, a equação

$$[A(k) + kg_b(U_k)e^{-i\omega\tau}\left(\frac{e^{i\omega\delta} - 1}{i\omega\delta}\right) - i\omega]y = 0, \quad 0 \neq y \in H^2 \cap H_0^1, \quad (2.4)$$

tem solução para algum valor de $\omega > 0$, $\tau \in [0, 2\pi)$. Se nós encontrarmos um par (ω, τ) tal que a equação (2.4) tem uma solução não nula em $H^2 \cap H_0^1$, então, temos que $\Delta(k, i\omega, \tau_n) = 0$, $\tau_n = (\theta + 2n\pi)/\omega$, $n = 0, 1, 2, \dots$, e assim, a sequência τ_n é uma possível candidata para que ocorra bifurcação de Hopf.

Através de alguns lemas, provaremos que se $0 < k - 1 \ll 1$, existe um único par (ω, θ) que resolve:

$$[A(k) + kg_b(U_k)e^{-i\omega\theta}\left(\frac{e^{i\omega\delta} - 1}{i\omega\delta}\right) - i\omega]y = 0, \quad 0 \neq y \in H^2 \cap H_0^1, \quad (2.5)$$

Primeiramente, vamos decompor o espaço X em soma direta do núcleo de $D^2 + 1$ pela imagem desta aplicação, [ver teorema (1.6)], isto é,

$$L^2[0, \pi] = N(D^2 + 1) \oplus R(D^2 + 1)$$

onde $N(D^2 + 1) = \text{span}[\text{sen}(\cdot)]$ e

$$R(D^2 + 1) = \{y \in L^2[0, \pi]; \langle \text{sen}(\cdot), y \rangle = \int_0^\pi \text{sen}(x)y(x) dx = 0\}$$

Agora, projetando o equilíbrio positivo nestes subespaços, podemos encontrar e estimar U_k .

Lema 2.1. (i) *Existe $k^* > 1$ e uma transformação continuamente diferenciável $k \rightarrow (\xi_k, \alpha_k)$ de $[1, k^*]$ em $(H^2 \cap H_0^1) \cap R(D^2 + 1) \times \mathbb{R}^+$ tal que*

$$U_k = \alpha_k(k - 1)[\text{sen}(\cdot) + (k - 1)\xi_k], \quad k \in [1, k^*],$$

$$\alpha_1 = \frac{\int_0^\pi \text{sen}^2(x) dx}{\int_0^\pi \text{sen}^3(x) dx} e$$

$$\xi_1 = -(D^2 + 1)^{-1}[\text{sen}(\cdot)(1 - \alpha_1 \text{sen}(\cdot))], \quad \langle \text{sen}(\cdot), \xi_1 \rangle = 0$$

com $\xi_1 \in H^2 \cap H_0^1$.

(ii) Se (ω, θ, y) resolve (2.5) com $0 \neq y \in H^2 \cap H_0^1$, então $\frac{\omega}{k-1}$ é uniformemente limitada para $k \in [1, k^*]$, e

$$\omega \langle y, y \rangle = -k \frac{(\cos(\theta - \omega s) - \cos(\theta))}{\omega s} \langle g_b(U_k)y, y \rangle.$$

(iii) Se $z \in H^2 \cap H_0^1$ e $\langle \text{sen}(\cdot), z \rangle = 0$ então $|\langle (D^2 + 1)z, z \rangle| \geq 3\|z\|_{L^2}^2$.

Prova: (i) Seja $h : (H^2 \cap H_0^1) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow L^2 \times \mathbb{R}$ definida por:

$$h(\xi, \alpha, k) = ((D^2 + 1)\xi + (1 + \alpha k \Upsilon(\xi, \alpha, k)(\text{sen}(\cdot) + (k-1)\xi))(\text{sen}(\cdot) + (k-1)\xi), \langle \text{sen}(\cdot), \xi \rangle)$$

onde

$$\Upsilon(\xi, \alpha, k) = \frac{g(\alpha_k(k-1)(\text{sen}(\cdot) + (k-1)\xi), \alpha_k(k-1)(\text{sen}(\cdot) + (k-1)\xi))}{\alpha_k^2(k-1)^2(\text{sen}(\cdot) + (k-1)\xi)^2}.$$

Observemos que $\Upsilon(\xi_1, \alpha_1, 1) = -1$, usando a hipótese que

$$\lim_{(a,b) \rightarrow (0,0)} \frac{g(a,b)}{ab} = -1.$$

Com a definição de ξ_1 , verificamos que

$$h(\xi_1, \alpha_1, 1) = ((D^2 + 1)\xi_1 + (1 - \alpha_1 \text{sen}(\cdot))\text{sen}(\cdot), \langle \text{sen}(\cdot), \xi_1 \rangle) = (0, 0)$$

Calculamos

$$D_{(\xi, \alpha)} h(\xi_1, \alpha_1, 1)(\xi, \alpha) = ((D^2 + 1)\xi - \alpha \text{sen}^2(\cdot), \langle \text{sen}(\cdot), \xi \rangle)$$

e vemos que $D_{(\xi, \alpha)}h(\xi_1, \alpha_1, 1)$ é bijetora de $(H^2 \cap H_0^1) \times \mathbb{R} \rightarrow L^2 \times \mathbb{R}$. De fato, $D_{(\xi, \alpha)}h(\xi_1, \alpha_1, 1)(\xi, \alpha) = (0, 0)$ se, e somente se, $\langle \text{sen}(\cdot), \xi \rangle = 0$ e $(D^2 + 1)\xi = \alpha \text{sen}^2(\cdot)$. Como $\text{sen}^2(\cdot) \notin R(D^2 + 1)$, então $\alpha = 0$. Daí, $\xi \in N(D^2 + 1) \cap R(D^2 + 1)$, o que nos diz que $\xi = 0$. Portanto $D_{(\xi, \alpha)}h(\xi_1, \alpha_1, 1)$ é injetora. A sobrejetividade segue do fato que dado $\eta \in R(D^2 + 1)$ e $\beta \in \mathbb{R}$, existe uma solução (ξ, α) do problema

$$(D^2 + 1)\xi - \alpha \text{sen}^2(\cdot) = \eta$$

$$\langle \text{sen}(\cdot), \xi \rangle = \beta$$

Segue do teorema da função implícita que existe $k^* > 1$ e uma transformação continuamente diferenciável $k \rightarrow (\xi_k, \alpha_k) \in (H^2 \cap H_0^1) \cap R(D^2 + 1) \times \mathbb{R}^+$ para $k \in [1, k^*]$ tal que

$$h(\xi_k, \alpha_k, k) = 0, \quad k \in [1, k^*].$$

e usando este fato, provamos que $W_k = \alpha_k(k - 1)[\text{sen}(\cdot) + (k - 1)\xi_k]$ é solução de (1.2). Pela unicidade de solução temos que $U_k = W_k$, para $k \in [1, k^*]$

(ii) Pela equação característica temos:

$$\langle [A(k) + kg_b(U_k)e^{-i\omega\theta}(\frac{e^{i\omega\delta} - 1}{i\omega\delta}) - i\omega]y, y \rangle = 0$$

Pelo fato de $A(k)$ ser auto-adjunta, a igualdade acima torna-se:

$$\omega \langle y, y \rangle = -k \left(\frac{\cos(\theta - \omega\delta) - \cos(\theta)}{\omega\delta} \right) \langle g_b(U_k)y, y \rangle$$

Em norma:

$$\frac{|\omega|}{(k - 1)} |\langle y, y \rangle| = \left| -k \left(\frac{\cos(\theta - \omega\delta) - \cos(\theta)}{\omega\delta} \right) \right| \left| \left\langle \frac{g_b(U_k)}{(k - 1)} y, y \right\rangle \right|$$

$$\begin{aligned}
\frac{|\omega|}{(k-1)} &= \frac{|k| \left| \left(\frac{\cos(\theta - \omega\delta) - \cos(\theta)}{\omega\delta} \right) \right| \left| \left\langle \frac{g_b(U_k)}{(k-1)} y, y \right\rangle \right|}{\|y\|_{L^2}^2} \\
&\leq k^* M \left| \left(\frac{\cos(\theta - \omega\delta) - \cos(\theta)}{\omega\delta} \right) \right| \frac{\|y\|_{L^2}^2}{\|y\|_{L^2}^2} \\
&\leq k^* M
\end{aligned}$$

onde M vem do fato que $\lim_{k \rightarrow 1} \frac{g_b(U_k)}{(k-1)}$ existe, garantido pela hipótese sobre $\eta'(0)$.

(iii) *Demonstração feita em [2].*

Agora, queremos escrever a equação (2.5), como um sistema de equações.

Para cada $k \in [1, k^*]$, suponha que (ω, θ, y) é uma solução de (2.5) com $0 \neq y \in H^2 \cap H_0^1$.

Ignorando um fator escalar, y pode ser representado por

$$y = \beta \text{sen}(\cdot) + (k-1)z \quad \langle \text{sen}(\cdot), z \rangle = 0, \quad \beta \geq 0$$

E queremos que para k próximo de 1 a igualdade abaixo esteja satisfeita

$$\|y\|_{L^2}^2 = \beta^2 \|\text{sen}(\cdot)\|_{L^2}^2 + (k-1)^2 \|z\|_{L^2}^2 = \|\text{sen}(\cdot)\|_{L^2}^2$$

Chamando $\omega = (k-1)\rho$ e substituindo junto com a expressão para y em (2.5), temos:

$$\begin{aligned}
&[A(k) + k g_b(U_k) e^{-i\theta} \left(\frac{e^{i\omega\delta} - 1}{i\omega\delta} \right) - i\omega]y = \\
&= [D^2 + k(1 + g_a(U_k)) + k g_b(U_k) e^{-i\theta} \left(\frac{e^{i\omega\delta} - 1}{i\omega\delta} \right) - i\omega](\beta \text{sen}(\cdot) + (k-1)z) = \\
&= -\beta \text{sen}(\cdot) + (k-1)D^2 z + k\beta \text{sen}(\cdot) + k(k-1)z + (\beta \text{sen}(\cdot) + (k-1)z)[k(g_a(U_k) + \\
&g_b(U_k) e^{-i\theta} \left(\frac{e^{i\omega\delta} - 1}{i\omega\delta} \right)) - i\omega] =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (k-1) \left\{ \frac{-\beta \operatorname{sen}(\cdot)}{(k-1)} + D^2 z + z - z + \frac{k\beta \operatorname{sen}(\cdot)}{(k-1)} + kz + (\beta \operatorname{sen}(\cdot) + (k-1)z) \left[\frac{k}{(k-1)} (g_a(U_k) + \right. \right. \\
&g_b(U_k) \left. \left(\frac{e^{i\omega\delta} - 1}{i\omega\delta} \right) e^{-i\theta} \right] - i\rho \right\} = \\
&= (k-1) \left\{ (D^2 + 1)z + (\beta \operatorname{sen}(\cdot) + (k-1)z) \left[\frac{k}{(k-1)} [g_a(U_k) + g_b(U_k) e^{-i\theta} \left(\frac{e^{i\omega\delta} - 1}{i\omega\delta} \right)] - \right. \right. \\
&i\rho + 1 \left. \left. \right] \right\} = \\
&= (k-1) h_1(z, \beta, \rho, \theta, k)
\end{aligned}$$

Portanto, (2.5) é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} h_1(z, \beta, \rho, \theta, k) = 0 \\ h_2(z) = \operatorname{Re}(\langle \operatorname{sen}(\cdot), z \rangle) = 0 \\ h_3(z) = \operatorname{Im}(\langle \operatorname{sen}(\cdot), z \rangle) = 0 \\ h_4(z, \beta, k) = (\beta^2 - 1) \|\operatorname{sen}(\cdot)\|_{L^2}^2 + (k-1)^2 \|z\|_{L^2}^2 = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Vamos calcular $\lim_{k \rightarrow 1} \frac{\omega}{(k-1)}$, isto é, ρ_1 :

$$\frac{\omega}{(k-1)} \langle y, y \rangle = -\frac{k}{(k-1)} \left(\frac{\cos(\theta - \omega\delta) - \cos(\theta)}{\omega\delta} \right) \langle g_b(U_k) y, y \rangle$$

$$\frac{\omega}{(k-1)} \langle y, y \rangle = -k \left(\frac{\cos(\theta - \omega\delta) - \cos(\theta)}{\omega\delta} \right) \left\langle \frac{g_b(U_k)}{U_k} \frac{U_k}{k-1} y, y \right\rangle$$

Fazendo $y = \beta \operatorname{sen}(\cdot) + (k-1)z$

$$\begin{aligned}
&\frac{\omega}{(k-1)} \langle \beta \operatorname{sen}(\cdot) + (k-1)z, \beta \operatorname{sen}(\cdot) + (k-1)z \rangle = \\
&= -k \left(\frac{\cos(\theta - \omega\delta) - \cos(\theta)}{\omega\delta} \right) \left\langle \frac{g_b(U_k)}{U_k} \alpha_k(\operatorname{sen}(\cdot) + (k-1)\xi_k) (\beta \operatorname{sen}(\cdot) + (k-1)z), \beta \operatorname{sen}(\cdot) + \right. \\
&(k-1)z \left. \right\rangle
\end{aligned}$$

Quando $k \rightarrow 1$,

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 1} \frac{\omega}{(k-1)} \langle \beta \text{sen}(\cdot), \beta \text{sen}(\cdot) \rangle &= -\text{sen}(\theta) \lim_{k \rightarrow 1} \frac{g_b(u_k)}{U_k} \langle \alpha_1 \beta \text{sen}^2(\cdot), \beta \text{sen}(\cdot) \rangle = \\ &= -\text{sen}(\theta) \lim_{k \rightarrow 1} \frac{g_b(u_k)}{U_k} \langle \beta \text{sen}(\cdot), \beta \text{sen}(\cdot) \rangle \end{aligned}$$

$$\text{Portanto, } \lim_{k \rightarrow 1} \frac{\omega}{(k-1)} = -\text{sen}(\theta) \lim_{k \rightarrow 1} \frac{g_b(u_k)}{U_k}.$$

Também podemos verificar que

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 1} \frac{1}{(k-1)} [g_a(U_k) + g_b(U_k) e^{-i\theta} \left(\frac{e^{i\omega\delta} - 1}{i\omega\delta} \right)] &= -\alpha_1 \text{sen}(\cdot) + \lim_{k \rightarrow 1} \frac{g_b(u_k)}{U_k} \alpha_1 \text{sen}(\cdot) e^{-i\theta} \\ &= -\alpha_1 (1 - \lim_{k \rightarrow 1} \frac{g_b(u_k)}{U_k} e^{-i\theta}) \text{sen}(\cdot) \end{aligned}$$

observando que $\lim_{k \rightarrow 1} \frac{e^{i\omega\delta} - 1}{i\omega\delta} = 1$.

Teorema 2.2. *Se $0 < k^* - 1 \ll 1$, então existe uma transformação continuamente diferenciável de $[1, k^*]$ em $H^2 \cap H_0^1 \times \mathbb{R}^3$, $k \rightarrow (z_k, \beta_k, \rho_k, \theta_k)$ tal que*

$$z_1 = (1 + i \lim_{k \rightarrow 1} \frac{g_b(u_k)}{U_k}) \xi_1$$

$$\beta_1 = 1, \quad \theta_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\rho_1 = - \lim_{k \rightarrow 1} \frac{g_b(u_k)}{U_k}$$

e $(z_k, \beta_k, \rho_k, \theta_k)$ resolve (2.6) para $k \in [1, k^*]$, com ξ_1 dado no lema (2.1).

Além disso, se $k \in [1, k^*]$ e $(z^k, \beta^k, \rho^k, \theta^k)$ resolve (2.6) para $k \in [1, k^*]$, com $\rho^k > 0$ e $\theta \in [0, 2\pi)$, então $(z^k, \beta^k, \rho^k, \theta^k) = (z_k, \beta_k, \rho_k, \theta_k)$.

Prova: Definamos $H : (H^2 \cap H_0^1) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow L^2 \times \mathbb{R}^3$ por:

$$H = (h_1, h_2, h_3, h_4)$$

Mostremos que $H(z_1, \beta_1, \rho_1, \theta_1, 1) = 0$

$$\begin{aligned}
h_1(z_1, \beta_1, \rho_1, \theta_1, 1) &= (D^2 + 1)z_1 + \beta_1 \text{sen}(\cdot) \left[-\alpha_1 \left(1 - \lim_{k \rightarrow 1} \frac{g_b(u_k)}{U_k} e^{-i\theta_1} \right) \text{sen}(\cdot) - \right. \\
& \left. i \left(-\text{sen}(\theta_1) \lim_{k \rightarrow 1} \frac{g_b(u_k)}{U_k} \right) + 1 \right] = \\
&= -(1 + i \lim_{k \rightarrow 1} \frac{g_b(u_k)}{U_k}) \text{sen}(\cdot) [1 - \alpha_1 \text{sen}(\cdot)] - \alpha_1 (1 + i \lim_{k \rightarrow 1} \frac{g_b(u_k)}{U_k}) \text{sen}^2(\cdot) + \text{sen}(\cdot) + \\
& i \lim_{k \rightarrow 1} \frac{g_b(u_k)}{U_k} \text{sen}(\cdot) = \\
&= -(1 + i \lim_{k \rightarrow 1} \frac{g_b(u_k)}{U_k}) \text{sen}(\cdot) [1 - \alpha_1 \text{sen}(\cdot)] + (1 + i \lim_{k \rightarrow 1} \frac{g_b(u_k)}{U_k}) \text{sen}(\cdot) [1 - \alpha_1 \text{sen}(\cdot)] = \\
& 0
\end{aligned}$$

Observemos que:

$$\langle \text{sen}(\cdot), z_1 \rangle = \langle \text{sen}(\cdot), (1 + i \lim_{k \rightarrow 1} \frac{g_b(u_k)}{U_k}) \xi_1 \rangle = \langle \text{sen}(\cdot), \xi_1 \rangle + i \lim_{k \rightarrow 1} \frac{g_b(u_k)}{U_k} \langle \text{sen}(\cdot), \xi_1 \rangle$$

Assim,

$$h_2(z_1) = \text{Re}(\langle \text{sen}(\cdot), z_1 \rangle) = \langle \text{sen}(\cdot), \xi_1 \rangle = 0$$

$$h_3(z_1) = \text{Im}(\langle \text{sen}(\cdot), z_1 \rangle) = \lim_{k \rightarrow 1} \frac{g_b(u_k)}{U_k} \langle \text{sen}(\cdot), \xi_1 \rangle = 0$$

É óbvio que se $k = 1$ e $\beta = 1$, $h_4(z_1, \beta_1, 1) = 0$.

Portanto, $H(z_1, \beta_1, \rho_1, \theta_1, 1) = 0$.

Agora, seja $T = (T_1, T_2, T_3, T_4) : (H^2 \cap H_0^1) \times \mathbb{R}^3 \rightarrow L^2 \times \mathbb{R}^3$, definida por $T = D_{(z, \beta, \rho, \theta)} H(z_1, \beta_1, \rho_1, \theta_1, 1)$. Então,

$$\begin{aligned}
T_1(z, \beta, \rho, \theta) &= (D^2 + 1)z + \beta \text{sen}(\cdot) \left(1 + i \lim_{k \rightarrow 1} \frac{g_b(u_k)}{U_k} \right) (1 - \alpha_1 \text{sen}(\cdot)) - i \text{sen}(\cdot) \rho - \\
& \theta \alpha_1 \lim_{k \rightarrow 1} \frac{g_b(u_k)}{U_k} \text{sen}^2(\cdot)
\end{aligned}$$

$$T_2(z) = \text{Re}(\langle \text{sen}(\cdot), z \rangle)$$

$$T_3(z) = \text{Im}\langle \text{sen}(\cdot), z \rangle$$

$$T_4(\beta) = 2\beta \|\text{sen}(\cdot)\|_{L^2}^2$$

Usando o fato de $\text{sen}(\cdot)$ e $\text{sen}^2(\cdot)$ não pertencerem a $R(D^2 + 1)$ somos capazes de provar que T é bijetora. Assim, a primeira conclusão do teorema segue do teorema da função implícita.

A segunda conclusão segue da unicidade dada pelo teorema da função implícita; para isso, é suficiente mostrar que

$$(z^k, \beta^k, \rho^k, \theta^k) \rightarrow (z_1, \beta_1, \rho_1, \theta_1) = \left((1 + i \lim_{k \rightarrow 1} \frac{g_b(u_k)}{U_k}) \xi_1, 1, - \lim_{k \rightarrow 1} \frac{g_b(u_k)}{U_k}, \frac{\pi}{2} \right)$$

Segue da parte (ii) do teorema (2.1) que $\{\rho^k\}$ e $\{\theta^k\}$ são limitadas e $\{\beta^k \text{sen}(\cdot) + (k-1)z^k\}$ é limitada em L^2

Note que $z^k \in H^2 \cap H_0^1$ e $\langle \text{sen}(\cdot), z_k \rangle = 0$, então pela parte (iii) do lema (2.1)

$$3\|z\|_{L^2}^2 \leq |\langle (D^2 + 1)z, z \rangle|$$

Agora, $h_1(z^k, \beta^k, \rho^k, \theta^k, k) = 0$, e então:

$$\frac{1}{3}(D^2 + 1)z^k = (\beta^k \text{sen}(\cdot) + (k-1)z^k) \frac{1}{3} \left[1 - i\rho^k + \frac{k}{(k-1)} [g_a(U_k) + g_b(U_k) e^{-i\theta^k} \left(\frac{e^{i\omega\delta} - 1}{i\omega\delta} \right)] \right]$$

Daí,

$$\|z^k\|_{L^2}^2 \leq |\langle (\beta^k \text{sen}(\cdot) + (k-1)z^k) \omega(\rho^k, \theta^k, k), z^k \rangle|$$

$$\text{onde } \omega(\rho^k, \theta^k, k) = \frac{1}{3} \left[1 - i\rho^k + \frac{k}{(k-1)} (g_a(U_k) + g_b(U_k) e^{-i\theta^k} \left(\frac{e^{i\omega\delta} - 1}{i\omega\delta} \right)) \right]$$

Da existência de $\lim_{k \rightarrow 1} \frac{k}{(k-1)} (g_a(U_k) + g_b(U_k) e^{-i\theta^k} \left(\frac{e^{i\omega\delta} - 1}{i\omega\delta} \right))$, e do fato que $\{\rho^k\}$ é limitada para $k \in [1, k^*]$, implica que existe $M \geq 0$ tal que

$$|\omega(\rho^k, \theta^k, k)|_{\text{sup}} < M, \quad k \in [1, k^*]$$

Assim, $\{z^k\}$ é limitada em L^2 .

Como $(D^2 + 1) : (H^2 \cap H_0^1) \cap R(D^2 + 1) \rightarrow R(D^2 + 1)$ tem uma inversa limitada, aplicando $(D^2 + 1)^{-1}$ em $h_1(z^k, \beta^k, \rho^k, \theta^k, k) = 0$, vemos que $\{z^k\}$ é também limitada em $H^2 \cap H_0^1$, e assim, $\{(z^k, \beta^k, \rho^k, \theta^k), k \in (1, k^*)\}$ é precompacta em $L^2 \times \mathbb{R}^3$.

Seja $\{z_{k_n}, \beta_{k_n}, \rho_{k_n}, \theta_{k_n}\}$ qualquer subsequência tal que:

$$\{z_{k_n}, \beta_{k_n}, \rho_{k_n}, \theta_{k_n}\} \rightarrow (z^1, \beta^1, \rho^1, \theta^1), \quad k_n \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

Afirmamos que $(z^1, \beta^1, \rho^1, \theta^1) = (z_1, \beta_1, \rho_1, \theta_1)$.

De fato, de $\lim_{n \rightarrow \infty} H(z^{k_n}, \beta^{k_n}, \rho^{k_n}, \theta^{k_n}, k_n) = 0$, obtemos:

$$(D^2 + 1)z^1 + \beta^1 \text{sen}(\cdot) [-\alpha_1 (1 - \lim_{k \rightarrow 1} \frac{g_b(u_k)}{U_k} e^{-i\theta^1}) \text{sen}(\cdot) - i\rho^1 + 1] = 0$$

$$\langle \text{sen}(\cdot), z^1 \rangle = 0 = ((\beta^1)^2 - 1) \|\text{sen}(\cdot)\|_{L^2}^2$$

Então, $\beta^1 = 1 = \beta_1$.

Multiplicando por $\text{sen}(\cdot)$,

$$(D^2 + 1)z^1 \text{sen}(\cdot) + (1 - i\rho^1) \text{sen}^2(\cdot) - \alpha_1 (1 - \lim_{k \rightarrow 1} \frac{g_b(u_k)}{U_k} e^{-i\theta^1}) \text{sen}^3(\cdot) = 0$$

Integrando de 0 a π ,

$$(1 - i\rho^1) \int_0^\pi \text{sen}^2(x) dx = \alpha_1 (1 - \lim_{k \rightarrow 1} \frac{g_b(u_k)}{U_k} e^{-i\theta^1}) \int_0^\pi \text{sen}^3(x) dx$$

Logo, $1 - i\rho^1 = 1 - \lim_{k \rightarrow 1} \frac{g_b(u_k)}{U_k} e^{-i\theta^1}$, o que implica que $\theta^1 = \frac{\pi}{2}$ e também,

$$\rho^1 = - \lim_{k \rightarrow 1} \frac{g_b(u_k)}{U_k}.$$

Assim ,

$$(D^2 + 1)z^1 + [1 + i \lim_{k \rightarrow 1} \frac{g_b(u_k)}{U_k} - \alpha_1(1 + i \lim_{k \rightarrow 1} \frac{g_b(u_k)}{U_k})\text{sen}(\cdot)]\text{sen}(\cdot) = 0$$

$$\langle \text{sen}(\cdot), z^1 \rangle = 0$$

Como a solução desta equação em $H^2 \cap H_0^1$ é única, segue que $z^1 = z_1$.

Como consequência imediata temos:

Corolário 2.3. *Se $0 < k^* - 1 \ll 1$, então para cada $k \in (1, k^*)$, o problema do autovalor*

$$\Delta(k, i\omega, \tau)y = 0, \quad 0 \neq y \in H^2 \cap H_0^1,$$

tem uma solução (ω, τ, y) , ou equivalentemente, $i\omega \in \sigma(A_\tau(k))$ se, e somente se,

$$\omega = \omega_k = (k - 1)\rho_k$$

$$\tau = \tau_{k_n} = \frac{\theta_k + 2n\pi}{\omega_k}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$y = cy_k, \quad y_k = \beta_k \text{sen}(\cdot) + (k - 1)z_k$$

Aqui, c é qualquer constante não nula, e $z_k, \beta_k, \rho_k, \theta_k$ são definidos como no teorema (2.2).

Capítulo 3

Estabilidade do Equilíbrio Positivo

Segundo a teoria desenvolvida por Huang em [13], daremos condições que garantem a estabilidade assintótica do equilíbrio positivo U_k .

Teorema 3.1. *Sejam $k > 1$ e $M(k) = \max_{x \in [0, \pi]} \{-g_b(U_k(x))\}$.*

Se $\frac{kM(k)}{\delta} \int_{-\tau}^{-\tau+\delta} s \, ds > \frac{-\pi}{2}$, então o equilíbrio positivo é localmente assintoticamente estável.

Em [13], Huang descreve a localização das raízes da equação

$$\Delta(\lambda) = \lambda + a + \int_0^r e^{-\lambda s} d\eta(s)$$

através dos seguintes lemas:

Lema 3.2. Huang *Para qualquer $\theta \in (0, \pi)$, introduzimos*

$$D_\theta = \left\{ x + iy : x \in \mathbb{R}, y \geq -\frac{\text{sen } \theta - \theta \cos \theta}{\theta \text{sen } \theta} x \right\},$$

um semi-plano do plano complexo \mathbb{C} . Então para qualquer $z_i \in D_\theta$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, 2$, nós temos que $\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 \in D_\theta$. Além disso,

$$z_1 + z_2 = 0 \text{ se, e somente se, } z_1, z_2 \in \partial D_\theta \text{ e } z_1 = -z_2.$$

Lema 3.3. Huang Para cada $\theta \in (0, \pi)$, seja $W_\theta : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ dado por

$$\begin{aligned} W_\theta(v) &= -\theta \cos \theta / \sin \theta + iv + \theta e^{-iv} / \sin \theta \\ &\quad - \theta (\cos \theta - \cos v) / \sin \theta + i(v - \theta \sin v / \sin \theta), \end{aligned}$$

então $W_\theta([0, \infty)) \in D_\theta$.

Antes de provarmos o teorema (3.1), estabelecemos o seguinte resultado:

Lema 3.4. Todos os autovalores de $A(k)$ são reais e não-positivos.

Prova: Como $A(k)$ é um operador auto-adjunto, todos os seus autovalores são reais.

Suponha que $A(k)$ tem algum autovalor $\lambda > 0$ e seja y a correspondente auto-função. Temos,

$$D^2 y + [k(1 + g_a(U_k)) - \lambda]y = 0$$

Porém, $D^2 U_k + k(1 + \frac{g(U_k)}{U_k})U_k = 0$ e, como por hipótese, numa vizinhança da origem $\frac{g(\xi, \xi)}{\xi} > g_a(\xi)$, para k suficientemente próximo de 1, temos

$$k(1 + \frac{g(U_k)}{U_k}) > k(1 + g_a(U_k)) - \lambda$$

Pelo teorema da comparação de Sturm, U_k tem pelo menos um zero entre 0 e π , o que contradiz o fato de U_k ser positivo neste intervalo. Portanto $A(k)$ tem apenas autovalores não-positivos.

Como corolário temos:

Corolário 3.5. Para toda $\psi \in H^2 \cap H_0^1$,

$$\int_0^\pi (A(k)\psi)\bar{\psi} \, dx \leq 0 \tag{3.1}$$

Prova: Como $C_0^2 = \{y \in C^2((0, \pi)) \cap C([0, \pi]), y(0) = y(\pi) = 0\}$ é denso em $L^2[0, \pi]$, basta considerarmos $\psi \in C_0^2$.

Como $A(k)$ é auto-adjunto, a coleção $\{\psi\}$ de todas as autofunções com $\int_0^\pi \psi^2 dx = 1$ formam uma base de C_0^2 ([19], pag. 374). A desigualdade (3.1) segue do lema (3.4) e da equação de Parseval.

Prova do teorema (3.1): Lembremos que o problema do autovalor consiste em encontrar $\psi \in H^2 \cap H_0^1$, $\psi \neq 0$, e $\lambda \in \mathbb{C}$, tal que

$$\Delta(k, \lambda, \tau)\psi := [D^2 + k(1 + g_a(U_k)) + \frac{k}{\delta} \int_{-\tau}^{-\tau+\delta} g_b(U_k)e^{\lambda s} ds - \lambda]\psi = 0$$

Nós afirmamos que a equação característica não tem autovalor λ com $\text{Re}\lambda \geq 0$.

Para ver isto, colocamos $\lambda = u + iv$, multiplicamos por $\Delta(k, \lambda, \tau)\psi$ por $\bar{\psi}$ e integramos de 0 a π , obtendo:

$$\int_0^\pi \Delta(k, \lambda, \tau)\psi\bar{\psi} dx = \int_0^\pi [u + iv - \frac{k}{\delta} \int_{-\tau}^{-\tau+\delta} g_b(U_k)e^{\lambda s} ds]|\psi|^2 dx - \int_0^\pi (A(k)\psi)\bar{\psi}$$

Para $u = v = 0$, observando que numa vizinhança da origem, $g_b(\xi) < 0$,

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \Delta(k, 0, \tau)\psi\bar{\psi} dx &= -\frac{k}{\delta} \int_{-\tau}^{-\tau+\delta} ds \int_0^\pi g_b(U_k)|\psi|^2 dx - \int_0^\pi (A(k)\psi)\bar{\psi} dx \\ &> -\frac{k}{\delta} \int_{-\tau}^{-\tau+\delta} ds \int_0^\pi g_b(U_k)|\psi|^2 dx > 0 \end{aligned}$$

Assim, $\Delta(k, 0, \tau)\psi \neq 0$, para toda $\psi \in H^2 \cap H_0^1$, $\psi \neq 0$.

Se $u \geq 0$, $v \geq 0$ e $u + v > 0$, então

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \Delta(k, 0, \tau) \psi \bar{\psi} \, dx &= u \int_0^\pi |\psi|^2 \, dx - \int_0^\pi (A(k)\psi) \bar{\psi} \, dx + \\ &\quad iv \int_0^\pi \left[1 - \frac{2k}{\delta\pi} g_b(U_k) \int_{-\tau}^{-\tau+\delta} e^{us} s \, ds \right] |\psi|^2 \, dx \\ &\quad - \frac{2k}{\delta\pi} \int_{-\tau}^{-\tau+\delta} e^{us} (-ivs + \frac{\pi}{2} e^{ivs}) \, ds \int_0^\pi g_b(U_k) |\psi|^2 \, dx \end{aligned}$$

Se definirmos

$$\begin{aligned} z_2 &= -\frac{2k}{\delta\pi} \int_{-\tau}^{-\tau+\delta} e^{us} (-ivs + \frac{\pi}{2} e^{ivs}) \, ds \int_0^\pi g_b(U_k) |\psi|^2 \, dx \\ &= -\frac{2k}{\delta\pi} \int_{-\tau}^{-\tau+\delta} e^{us} W_{\frac{\pi}{2}}(-vs) \, ds \int_0^\pi g_b(U_k) |\psi|^2 \, dx \end{aligned}$$

como $W_{\frac{\pi}{2}}(-vs) \in D_{\frac{\pi}{2}}$ e z_2 é uma combinação infinita de termos positivos multiplicados por $W_{\frac{\pi}{2}}(-vs)$ e $D_{\frac{\pi}{2}}$ é fechado, então $z_2 \in D_{\frac{\pi}{2}}$.

Temos

$$u \int_0^\pi |\psi|^2 \, dx - \int_0^\pi (A(k)\psi) \bar{\psi} \, dx > u \int_0^\pi |\psi|^2 \, dx$$

Por hipótese, $\frac{kM(k)}{\delta} \int_{-\tau}^{-\tau+\delta} s \, ds > \frac{-\pi}{2}$, daí

$$1 - \frac{2k}{\delta\pi} g_b(U_k) \int_{-\tau}^{-\tau+\delta} e^{us} s \, ds \geq 1 + \frac{2kM(k)}{\delta\pi} \int_{-\tau}^{-\tau+\delta} s \, ds = \sigma > 0$$

Portanto,

$$v \int_0^\pi \left[1 - \frac{2k}{\delta\pi} g_b(U_k) \int_{-\tau}^{-\tau+\delta} e^{us} s \, ds \right] |\psi|^2 \, dx \geq v\sigma \int_0^\pi |\psi|^2 \, dx > 0, \text{ se } v > 0$$

Fazendo

$$z_1 = u \int_0^\pi |\psi|^2 \, dx - \int_0^\pi (A(k)\psi) \bar{\psi} \, dx + iv \int_0^\pi \left[1 - \frac{2k}{\delta\pi} g_b(U_k) \int_{-\tau}^{-\tau+\delta} e^{us} s \, ds \right] |\psi|^2 \, dx,$$

$z_1 \in D_\theta$, para todo $\theta \in (0, \pi)$, em particular para $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Porém, $z_1 \notin \partial D_{\frac{\pi}{2}}$, pois $\operatorname{Re} z_1 \geq 0$ e $\operatorname{Im} z_1 \geq 0$, mas $\operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Im} z_1 > 0$.

Logo, $z_1 + z_2 \neq 0$. Assim,

$$\int_0^\pi \Delta(k, \lambda, \tau) \psi \bar{\psi} \neq 0 \text{ e } \Delta(k, \lambda, \tau) \psi \neq 0,$$

para todo $u \geq 0$, $v \geq 0$ e $\psi \in H^2 \cap H_0^1$, $\psi \neq 0$.

Para concluir, notamos que se $u \geq 0$ e $v \leq 0$, para $\psi \in H^2 \cap H_0^1$, $\psi \neq 0$,

$$\Delta(k, u + iv, \tau) \psi = \bar{\Delta}(k, u - iv, \tau) \bar{\psi} \neq 0$$

Agora, vamos analisar a estabilidade de U_k com $k \in (1, k^*)$ fixo, e o retardo τ agora sendo tratado como parâmetro. Para descrever a estabilidade de U_k , é suficiente investigar como o autovalor $\lambda = i\omega$ varia quando o retardo τ passa através de cada τ_{k_n} , $n = 0, 1, 2, \dots$.

Lema 3.6. (i) Se $0 < k^* - 1 \ll 1$, então para $k \in (1, k^*]$

$$\begin{aligned} S_{k_n} \stackrel{\text{def}}{=} & \int_0^\pi [1 + \tau_{k_n} k e^{-i\theta_k} g_b(U_k) \left[\frac{e^{i\omega_k \delta} - 1}{i\omega_k \delta} \right] - k g_b(U_k) e^{-i\theta_k} \frac{e^{i\omega_k \delta}}{i\omega_k} \\ & - ik g_b(U_k) \frac{e^{-i\theta_k}}{\omega_k} \left[\frac{e^{i\omega_k \delta} - 1}{i\omega_k \delta} \right]] y_k^2(x) \, dx \neq 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

(ii) Para cada $k \in (1, k^*)$, $0 < k^* - 1 \ll 1$, e $n = 0, 1, 2, \dots$, $\lambda = i\omega_k$ é um autovalor simples de $A_{\tau_{k_n}}(k)$.

$$(iii) \lim_{k \rightarrow 1} \bar{S}_{k_n} = [1 - i(2n\pi + \frac{\pi}{2})] \int_0^\pi \operatorname{sen}^2(x) \, dx.$$

Prova:(i) Dos resultados da seção anterior temos

$$y_k = \beta_k \operatorname{sen}(\cdot) + (k - 1) z_k$$

$$U_k = \alpha_k (k - 1) \operatorname{sen}(\cdot) + \alpha_k (k - 1)^2 z_k$$

$$\tau_{k_n} = \frac{\theta_k + 2n\pi}{(k-1)\rho_k}$$

onde $\theta_k \rightarrow \frac{\pi}{2}$, $\rho_k \rightarrow -\lim_{k \rightarrow 1} \frac{g_b(u_k)}{U_k}$, $\beta_k \rightarrow 1$, $\alpha_k \rightarrow \frac{\int_0^\pi \operatorname{sen}^2(x) dx}{\int_0^\pi \operatorname{sen}^3(x) dx}$, quando $k \rightarrow 1$.

Seja $t_k = \arg \left(\int_0^\pi y_k^2(x) dx \right)$, $-\pi < t_k \leq \pi$; então

$$\left| \int_0^\pi y_k^2(x) dx \right| e^{it_k} = \int_0^\pi y_k^2(x) dx \xrightarrow{k \rightarrow 1} \int_0^\pi \operatorname{sen}^2(x) dx$$

Logo, $t_k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow 1$. Além disso,

$$\int_0^\pi [e^{-it_k} + \tau_{k_n} k e^{-i(\theta_k + t_k)} g_b(U_k) \left[\frac{e^{i\omega_k \delta} - 1}{i\omega_k \delta} \right] - k g_b(U_k) e^{-i(\theta_k + t_k)} \frac{e^{i\omega_k \delta}}{i\omega_k} + \\ - i k g_b(U_k) \frac{e^{-i(\theta_k + t_k)}}{\omega_k} \left[\frac{e^{i\omega_k \delta} - 1}{i\omega_k \delta} \right]] y_k^2(x) dx =$$

$$\int_0^\pi e^{-it_k} y_k^2(x) dx + \frac{\theta_k + 2n\pi}{\rho_k} k \int_0^\pi e^{-i(\theta_k + t_k)} \frac{g_b(U_k)}{k-1} \left[\frac{e^{i\omega_k \delta} - 1}{i\omega_k \delta} \right] y_k^2(x) dx + \\ - k \int_0^\pi g_b(U_k) e^{-i(\theta_k + t_k)} \frac{e^{i\omega_k \delta}}{i\omega_k} y_k^2(x) dx - i k \int_0^\pi g_b(U_k) \frac{e^{-i(\theta_k + t_k)}}{\omega_k} \left[\frac{e^{i\omega_k \delta} - 1}{i\omega_k \delta} \right] y_k^2(x) dx =$$

$$\left| \int_0^\pi y_k^2(x) dx \right| + \frac{\theta_k + 2n\pi}{\rho_k} k \int_0^\pi e^{-i(\theta_k + t_k)} \frac{g_b(U_k)}{U_k} \frac{U_k}{k-1} \left[\frac{e^{i\omega_k \delta} - 1}{i\omega_k \delta} \right] y_k^2(x) dx + \\ - k \int_0^\pi \frac{g_b(U_k)}{U_k} \frac{U_k}{k-1} e^{-i(\theta_k + t_k)} e^{i\omega_k \delta} \frac{(k-1)}{i\omega_k} y_k^2(x) dx + \\ - i k \int_0^\pi \frac{g_b(U_k)}{U-k} \frac{U_k}{k-1} e^{-i(\theta_k + t_k)} \frac{(k-1)}{\omega_k} \left[\frac{e^{i\omega_k \delta} - 1}{i\omega_k \delta} \right] y_k^2(x) dx =$$

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^\pi y_k^2(x) dx \right| + \frac{\theta_k + 2n\pi}{\rho_k} k \int_0^\pi e^{-i(\theta_k+t_k)} \frac{g_b(U_k)}{U_k} \alpha_k (\text{sen}(x) + (k-1)\xi_k) (\beta_k \text{sen}(x) + \\
& (k-1)z_k)^2 \left[\frac{e^{i\omega_k \delta} - 1}{i\omega_k \delta} \right] dx - k \int_0^\pi \frac{g_b(U_k)}{U_k} e^{-i(\theta_k+t_k)} e^{i\omega_k \delta} \frac{1}{i\rho_k} \alpha_k (\text{sen}(x) + (k-1)\xi_k) \cdot \\
& (\beta_k \text{sen}(x) + (k-1)z_k)^2 dx - ik \int_0^\pi \frac{g_b(U_k)}{U_k} e^{-i(\theta_k+t_k)} \frac{1}{\rho_k} \left[\frac{e^{i\omega_k \delta} - 1}{i\omega_k \delta} \right] \alpha_k (\text{sen}(x) + \\
& + (k-1)\xi_k) (\beta_k \text{sen}(x) + (k-1)z_k)^2 dx =
\end{aligned}$$

Fazendo $k \rightarrow 1$

$$\begin{aligned}
& \int_0^\pi \text{sen}(x)^2(x) dx + \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) i \int_0^\pi \alpha_1 \text{sen}^3(x) dx - \\
& \int_0^\pi \alpha_1 \text{sen}^3(x) - i^2 \int_0^\pi \alpha_1 \text{sen}^3(x) dx = \\
& = \int_0^\pi \text{sen}(x)^2(x) dx + i \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) \int_0^\pi \text{sen}^2(x) dx
\end{aligned}$$

lembrando que $t_k \rightarrow 0$, $\rho_k \rightarrow -\lim_{k \rightarrow 1} \frac{g_b(u_k)}{U_k} e \lim_{k \rightarrow 1} \frac{e^{i\omega \delta} - 1}{i\omega \delta} = 1$, quando $k \rightarrow 1$. Aqui, estamos fazendo uso do teorema da convergência dominada para calcular tais limites.

Como

$$\begin{aligned}
& \lim_{k \rightarrow 1} \int_0^\pi \left[e^{-it_k} + \tau_{k_n} k e^{-i(\theta_k+t_k)} g_b(U_k) \left[\frac{e^{i\omega_k \delta} - 1}{i\omega_k \delta} \right] - k g_b(U_k) e^{-i(\theta_k+t_k)} \frac{e^{i\omega_k \delta}}{i\omega_k} \right. \\
& \left. - ik g_b(U_k) \frac{e^{-i(\theta_k+t_k)}}{\omega_k} \left[\frac{e^{i\omega_k \delta} - 1}{i\omega_k \delta} \right] \right] y_k^2(x) dx = \lim_{k \rightarrow 1} S_{k_n},
\end{aligned}$$

para $k \in (1, k^*] S_{k_n} \neq 0$

(ii) Pelo corolário (2.3), $\dim N[A_{\tau_{k_n}}(k) - i\omega_k] = 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$, com $N[A_{\tau_{k_n}}(k) - i\omega_k] = \text{span}[e^{i\omega_k \cdot} y_k]$.

Agora, suponha que $\phi \in \text{Dom}(A_{\tau_{k_n}}) \cap \text{Dom}([A_{\tau_{k_n}}]^2)$ e $[A_{\tau_{k_n}}(k) - i\omega_k]^2 \phi = 0$.
Segue que

$$[A_{\tau_{k_n}}(k) - i\omega_k]\phi \in N(A_{\tau_{k_n}}(k) - i\omega_k) = \text{span}[e^{i\omega_k(\cdot)}y_k]$$

Assim, existe uma constante c tal que

$$[A_{\tau_{k_n}}(k) - i\omega_k]\phi = c e^{i\omega_k(\cdot)}y_k$$

ou

$$\begin{cases} \dot{\phi}(\theta) = i\omega_k\phi(\theta) + ce^{i\omega_k\theta}y_k, & \theta \in [-\tau_{k_n}, 0] \\ \dot{\phi}(0) = A(k)\phi(0) + \frac{k}{\delta} \int_{-\tau}^{-\tau+\delta} g_b(U_k)\phi(s) ds \end{cases} \quad (3.3)$$

A primeira equação fornece:

$$\begin{cases} \phi(\theta) = \phi(0)e^{i\omega_k\theta} + ce^{i\omega_k\theta}\theta y_k \\ \dot{\phi}(0) = i\omega_k\phi(0) + cy_k \end{cases} \quad (3.4)$$

Substituindo um sistema de equações no outro, vem:

$$\Delta(k, i\omega_k, \tau_{k_n})\phi(0) = (A(k) + kg_b(U_k)e^{-i\omega_k\tau_{k_n}}[\frac{e^{i\omega_k\delta} - 1}{i\omega_k\delta}] - i\omega_k)\phi(0) =$$

$$A(k)\phi(0) + kg_b(U_k)e^{-i\theta_k}[\frac{e^{i\omega_k\delta} - 1}{i\omega_k\delta}]\phi(0) - i\omega_k\phi(0) =$$

$$\dot{\phi}(0) - \frac{k}{\delta} \int_{-\tau}^{-\tau+\delta} g_b(U_k)\phi(s) ds + kg_b(U_k)e^{-i\theta_k}[\frac{e^{i\omega_k\delta} - 1}{i\omega_k\delta}]\phi(0) - \dot{\phi}(0) + cy_k =$$

$$-\frac{k}{\delta} \int_{-\tau}^{-\tau+\delta} g_b(U_k)[\phi(0)e^{i\omega_k s} + ce^{i\omega_k s}sy_k] ds + kg_b(U_k)e^{-i\theta_k}[\frac{e^{i\omega_k\delta} - 1}{i\omega_k\delta}]\phi(0) + cy_k =$$

$$\begin{aligned}
& -kg_b(U_k)e^{-i\theta_k}\left[\frac{e^{i\omega_k\delta}-1}{i\omega_k\delta}\right]\phi(0) - \frac{k}{\delta}c \int_{-\tau}^{-\tau+\delta} g_b(U_k)e^{i\omega_k s} s y_k ds + \\
& \qquad \qquad \qquad + kg_b(U_k)e^{-i\theta_k}\left[\frac{e^{i\omega_k\delta}-1}{i\omega_k\delta}\right]\phi(0) + cy_k = \\
& = c\left[1 - \frac{k}{\delta} \int_{-\tau}^{-\tau+\delta} g_b(U_k)e^{i\omega_k s} s ds\right]y_k
\end{aligned}$$

e portanto, observando que $A(k)$ é autoadjunta, temos:

$$\begin{aligned}
0 & = \int_0^\pi \phi(0)[\Delta(k, i\omega_k, \tau_{k_n})y_k](x) dx = \int_0^\pi y_k(x)[\Delta(k, i\omega_k, \tau_{k_n})\phi(0)](x) dx = \\
& = c \int_0^\pi \left(1 - \frac{k}{\delta} \int_{-\tau}^{-\tau+\delta} g_b(U_k)e^{i\omega_k s} s ds\right) y_k^2(x) dx = \\
& = c \int_0^\pi \left[1 + \tau_{k_n} k e^{-i\theta_k} g_b(U_k) \left[\frac{e^{i\omega_k\delta}-1}{i\omega_k\delta}\right] - kg_b(U_k)e^{-i\theta_k} \frac{e^{i\omega_k\delta}}{i\omega_k} + \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. - ik g_b(U_k) \frac{e^{-i\theta_k}}{\omega_k} \left[\frac{e^{i\omega_k\delta}-1}{i\omega_k\delta}\right]\right] y_k^2(x) dx
\end{aligned}$$

e por (i), $c = 0$.

Portanto, $(A_{\tau_{k_n}} - i\omega_k)\phi = 0$ e $\phi \in N(A_{\tau_{k_n}} - i\omega_k)$. Por indução temos,

$$N([A_{\tau_{k_n}} - i\omega_k]^j) = N(A_{\tau_{k_n}} - i\omega_k), \quad j = 1, 2, \dots \text{ e } n = 0, 1, 2, \dots$$

Portanto, $\lambda = i\omega_k$ é um autovalor simples de $A_{\tau_{k_n}}$ para $n = 0, 1, 2, \dots$

(iii) Pela demonstração do item (i)

$$\lim_{k \rightarrow 1} S_{k_n} = \int_0^\pi \text{sen}^2(x) dx + i(2n\pi + \frac{\pi}{2}) \int_0^\pi \text{sen}^2(x) dx.$$

Logo,

$$\lim_{k \rightarrow 1} \bar{S}_{k_n} = [1 - i(2n\pi + \frac{\pi}{2})] \int_0^\pi \text{sen}^2(x) dx.$$

Como $\lambda = i\omega_k$ é um autovalor simples de $A_{\tau_{k_n}}$, usando o teorema da função implícita nós mostramos que existe uma vizinhança $O_{k_n} \times C_{k_n} \times H_{k_n} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C} \times H_0^1 \cap H^2$ de $(\tau_{k_n}, i\omega_k, y_k)$ e uma transformação continuamente diferenciável $(\lambda, y) : O_{k_n} \rightarrow C_{k_n} \times H_{k_n}$ tal que, para cada $\tau \in O_{k_n}$, o único autovalor de $A_{\tau_{k_n}}$ em C_{k_n} é $\lambda(\tau)$ e $\lambda(\tau_{k_n}) = i\omega_k$, $y(\tau_{k_n}) = y_k$ e para cada $\tau \in O_{k_n}$,

$$\Delta(k, \lambda(\tau), \tau)y(\tau) = [A(k) + ke^{-\lambda(\tau)\tau} g_b(U_k) \left[\frac{e^{\lambda(\tau)\delta} - 1}{\lambda(\tau)\delta} \right] - \lambda(\tau)]y(\tau) = 0$$

Derivando implicitamente em relação a τ e calculando em $\tau = \tau_{k_n}$, temos:

$$\left\{ -\frac{d\lambda(\tau_{k_n})}{d\tau} \tau_{k_n} k g_b(U_k) e^{-\lambda(\tau_{k_n})\tau_{k_n}} \left[\frac{e^{\lambda(\tau_{k_n})\delta} - 1}{\lambda(\tau_{k_n})\delta} \right] - \lambda(\tau_{k_n}) k g_b(U_k) e^{-\lambda(\tau_{k_n})\tau_{k_n}} \left[\frac{e^{\lambda(\tau_{k_n})\delta} - 1}{\lambda(\tau_{k_n})\delta} \right] + \right.$$

$$\left. + k g_b(U_k) e^{-\lambda(\tau_{k_n})\tau_{k_n}} \left[\frac{\frac{d\lambda(\tau_{k_n})}{d\tau} \delta e^{\lambda(\tau_{k_n})\delta} \lambda(\tau_{k_n})\delta - \frac{d\lambda(\tau_{k_n})}{d\tau} \delta (e^{\lambda(\tau_{k_n})\delta} - 1)}{\lambda(\tau_{k_n})^2 \delta^2} \right] - \frac{d\lambda(\tau_{k_n})}{d\tau} \right\} y(\tau_{k_n}) +$$

$$+ \Delta(k, \lambda(\tau_{k_n}), \tau_{k_n}) \frac{dy(\tau_{k_n})}{d\tau} = 0$$

$$\left\{ -\frac{d\lambda(\tau_{k_n})}{d\tau} \tau_{k_n} k g_b(U_k) e^{-i\theta_k} \left[\frac{e^{i\omega_k \delta} - 1}{i\omega_k \delta} \right] - i\omega_k k g_b(U_k) e^{-i\theta_k} \left[\frac{e^{i\omega_k \delta} - 1}{i\omega_k \delta} \right] + \right.$$

$$\left. + k g_b(U_k) e^{-i\theta_k} \frac{d\lambda(\tau_{k_n})}{d\tau} \left[\frac{\delta^2 e^{i\omega_k \delta} i\omega_k - \delta (e^{i\omega_k \delta} - 1)}{(i\omega_k)^2 \delta^2} \right] - \frac{d\lambda(\tau_{k_n})}{d\tau} \right\} y_k +$$

$$+ \Delta(k, \lambda(\tau_{k_n}), \tau_{k_n}) \frac{dy(\tau_{k_n})}{d\tau} = 0$$

$$\begin{aligned} & \frac{d\lambda(\tau_{k_n})}{d\tau} \left\{ -1 - \tau_{k_n} k g_b(U_k) e^{-i\theta_k} \left[\frac{e^{i\omega_k \delta} - 1}{i\omega_k \delta} \right] + k g_b(U_k) e^{-i\theta_k} \frac{e^{i\omega_k \delta}}{i\omega_k} \right. \\ & \left. - k g_b(U_k) \frac{e^{-i\theta_k} (e^{i\omega_k \delta} - 1)}{i\omega_k} \right\} y_k - i\omega_k k g_b(U_k) e^{-i\theta_k} \left[\frac{e^{i\omega_k \delta} - 1}{i\omega_k \delta} \right] y_k + \\ & \Delta(k, \lambda(\tau_{k_n}), \tau_{k_n}) \frac{dy(\tau_{k_n})}{d\tau} = 0 \end{aligned}$$

Tomando produto interno com y_k , observando que $A(k)$ é auto-adjunta e $\Delta(k, i\omega_k, \tau_{k_n}) y_k = 0$ e lembrando a definição de S_{k_n} , temos:

$$\frac{d\lambda(\tau_{k_n})}{d\tau} = \frac{-\int_0^\pi i\omega_k k g_b(U_k(x)) e^{-i\theta_k} \left[\frac{e^{i\omega_k \delta} - 1}{i\omega_k \delta} \right] y_k^2(x) dx}{S_{k_n}}$$

$$\frac{d\lambda(\tau_{k_n})}{d\tau} = \frac{-1}{|S_{k_n}|^2} \left\{ \int_0^\pi i\omega_k k g_b(U_k(x)) e^{-i\theta_k} \left[\frac{e^{i\omega_k \delta} - 1}{i\omega_k \delta} \right] y_k^2(x) dx \overline{S_{k_n}} \right\}$$

$$\frac{d\lambda(\tau_{k_n})}{d\tau} = \frac{-1}{|S_{k_n}|^2} \left\{ \int_0^\pi i\omega_k k g_b(U_k(x)) e^{-i\theta_k} \left[\frac{e^{i\omega_k \delta} - 1}{i\omega_k \delta} \right] y_k^2(x) dx \int_0^\pi y_k^2(x) dx + \right.$$

$$\left. + \int_0^\pi i\omega_k k g_b(U_k(x)) e^{-i\theta_k} \left[\frac{e^{i\omega_k \delta} - 1}{i\omega_k \delta} \right] y_k^2(x) dx \int_0^\pi \tau_{k_n} k g_b(U_k(x)) e^{-i\theta_k} \left[\frac{e^{i\omega_k \delta} - 1}{i\omega_k \delta} \right] y_k^2(x) dx \right.$$

$$\left. - \int_0^\pi i\omega_k k g_b(U_k(x)) e^{-i\theta_k} \left[\frac{e^{i\omega_k \delta} - 1}{i\omega_k \delta} \right] y_k^2(x) dx \int_0^\pi k g_b(U_k(x)) e^{-i\theta_k} \frac{e^{i\omega_k \delta}}{i\omega_k} y_k^2(x) dx \right.$$

$$\left. - \int_0^\pi i\omega_k k g_b(U_k(x)) e^{-i\theta_k} \left[\frac{e^{i\omega_k \delta} - 1}{i\omega_k \delta} \right] y_k^2(x) dx \int_0^\pi i k g_b(U_k(x)) \frac{e^{-i\theta_k}}{\omega_k} \left[\frac{e^{i\omega_k \delta} - 1}{i\omega_k \delta} \right] y_k^2(x) dx \right\}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda(\tau_{k_n})}{d\tau} &= \frac{-1}{|S_{k_n}|^2} \left\{ \int_0^\pi i\omega_k k g_b(U_k(x)) e^{-i\theta_k} \left[\frac{e^{i\omega_k \delta} - 1}{i\omega_k \delta} \right] y_k^2(x) dx \int_0^\pi y_k^2(x) dx |e^{-it_k} + \right. \\ &+ i\omega_k k^2 \tau_{k_n} \left| \int_0^\pi g_b(U_k(x)) \left[\frac{e^{i\omega_k \delta} - 1}{i\omega_k \delta} \right] y_k^2(x) dx \right|^2 \\ &\left. - i\omega_k k^2 \left[\frac{e^{i\omega_k \delta} - 1}{i\omega_k \delta} \right] \frac{e^{-i\omega_k \delta}}{(-i\omega_k)} \left| \int_0^\pi g_b(U_k(x)) y_k^2(x) dx \right|^2 + k^2 \left| \int_0^\pi g_b(U_k(x)) \left[\frac{e^{i\omega_k \delta} - 1}{i\omega_k \delta} \right] y_k^2(x) dx \right|^2 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda(\tau_{k_n})}{d\tau} &= \frac{-1}{|S_{k_n}|^2} \left\{ i\omega_k k \int_0^\pi g_b(U_k(x)) e^{-i(\theta_k + t_k)} \left[\frac{e^{i\omega_k \delta} - 1}{i\omega_k \delta} \right] y_k^2(x) dx \int_0^\pi y_k^2(x) dx + \right. \\ &+ i\omega_k k^2 \tau_{k_n} \left| \int_0^\pi g_b(U_k(x)) \left[\frac{e^{i\omega_k \delta} - 1}{i\omega_k \delta} \right] y_k^2(x) dx \right|^2 \\ &\left. + k^2 \left[\frac{1 - e^{i\omega_k \delta}}{i\omega_k \delta} \right] \left| \int_0^\pi g_b(U_k(x)) y_k^2(x) dx \right|^2 + k^2 \left[\frac{e^{i\omega_k \delta} - 1}{i\omega_k \delta} \right]^2 \left| \int_0^\pi g_b(U_k(x)) y_k^2(x) dx \right|^2 \right\} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda(\tau_{k_n})}{d\tau} &= \frac{-1}{|S_{k_n}|^2} \left\{ i\omega_k k \int_0^\pi g_b(U_k(x)) e^{-i(\theta_k + t_k)} \left[\frac{e^{i\omega_k \delta} - 1}{i\omega_k \delta} \right] y_k^2(x) dx \int_0^\pi y_k^2(x) dx + \right. \\ &\left. + k^2 \left[\frac{1 - e^{i\omega_k \delta}}{i\omega_k \delta} \right] \left| \int_0^\pi g_b(U_k(x)) y_k^2(x) dx \right|^2 + k^2 \left[\frac{e^{i\omega_k \delta} - 1}{i\omega_k \delta} \right]^2 \left| \int_0^\pi g_b(U_k(x)) y_k^2(x) dx \right|^2 \right\} \end{aligned}$$

Assim, para cada $k \in (1, k^*]$:

$$\frac{d\lambda(\tau_{k_n})}{d\tau} \equiv \frac{1}{|S_{k_n}|^2} \omega_k k \rho_1 \left| \int_0^\pi \text{sen}^2(x) dx \right|^2 > 0$$

Portanto $\text{Re} \frac{d\lambda(\tau_{k_n})}{d\tau} > 0$.

Com o resultado acima e o teorema (3.1) podemos, então, descrever o equilíbrio positivo do sistema (1) da seguinte forma:

Teorema 3.7. *Para cada $0 < k - 1 \ll 1$, o gerador infinitesimal $A_\tau(k)$ tem exatamente $2(n+1)$ autovalores com parte real positiva se $\tau \in (\tau_{k_n}, \tau_{k_{n+1}}]$, $n = 0, 1, 2, \dots$, e todos os autovalores de $A_\tau(k)$ têm parte real negativa se $0 \leq \tau < \tau_{k_0}$.*

Mais ainda, o equilíbrio positivo U_k é localmente assintoticamente estável se $0 \leq \tau < \tau_{k_0}$; e instável se $\tau > \tau_{k_0}$ e $\frac{kM(k)}{\delta} \int_{-\tau_{k_0}}^{-\tau_{k_0}+\delta} s \, ds \leq \frac{-\pi}{2}$.

Capítulo 4

Bifurcação de Hopf

Fixamos $k \in (1, k^*)$ e τ_{k_n} . Sejam $u(t) = U(t, \cdot) - U_k(\cdot)$ e $\alpha = \tau - \tau_{k_n}$. Nesta seção, vamos considerar $g(a, b) = -ab - a^3b^3$, para conseguirmos informações mais precisas.

Nós obtemos, assim, uma equação equivalente a equação (1):

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) = & A(k)u(t) - \frac{k}{\delta}(U_k + 3U_k^5) \int_{-\alpha - \tau_{k_n}}^{-\alpha - \tau_{k_n} + \delta} u(t+s) ds \\ & - \frac{k}{\delta}(U_k + 3U_k^5) \int_{-\alpha - \tau_{k_n}}^{-\alpha - \tau_{k_n} + \delta} [u(t)u(t+s) + \sum_{p,p'}^2 \binom{3}{p} \binom{3}{p'} U_k^{p+p'} u^{3-p}(t) u^{3-p'}(t+s) \\ & + u^3(t+s)U_k^3 + 3u^2(t+s)U_k^4] ds - k[u^3(t)U_k^3 + 3u^2(t)U_k^4] \end{aligned} \quad (4.1)$$

Sejam $\beta \in [-1, 1]$ e $v_k = 2\pi/\omega_k$ e façamos a seguinte mudança de escala no tempo: $w(t) = u(t(1+\beta))$. Temos, então, que $u(t)$ é uma solução $v_k(1+\beta)$ -periódica de (4.1) se, e somente se, $w(t)$ é uma solução v_k -periódica da equação

$$\dot{w}(t) = A(k)w(t) - \frac{k}{\delta}(U_k + 3U_k^5) \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n} + \delta} w(t+s) ds + G(\alpha, \beta, w_t) \quad (4.2)$$

onde

$$\begin{aligned}
G(\alpha, \beta, w_t) &= \beta A(k)w(t) + \frac{k}{\delta}(U_k + 3U_k^5) \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n} + \delta} w(t+s) ds \\
&\quad - (1+\beta) \frac{k}{\delta} \int_{-\alpha - \tau_{k_n}}^{-\alpha - \tau_{k_n} + \delta} [(U_k + 3U_k^5)w(t + \frac{s}{1+\beta}) + w(t)w(t + \frac{s}{1+\beta}) + \\
&\quad \sum_{p,p'}^2 \binom{3}{p} \binom{3}{p'} U_k^{p+p'} w^{3-p}(t)w^{3-p'}(t + \frac{s}{1+\beta}) + w^3(t + \frac{s}{1+\beta})U_k^3 + \\
&\quad 3w^2(t + \frac{s}{1+\beta})U_k^4] ds - (1+\beta)k[w^3(t)U_k^3 + 3w^2(t)U_k^4]
\end{aligned}$$

Nós estamos olhando para a equação (4.2) como uma perturbação da equação linear

$$\dot{w}(t) = A(k)w(t) - \frac{k}{\delta}(U_k + 3U_k^5) \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n} + \delta} w(t+s) ds$$

Descreveremos uma notação que será usada durante o restante do trabalho.

(i) $\langle y, z \rangle^* = \int_0^\pi y(x)z(x) dx$, para $y, z \in X = L^2[0, \pi]$

(ii) Para $\phi \in C = C([-\tau_{k_n}, 0]; X)$; $\psi \in C^*([0, \tau_{k_n}]; X)$, definimos a seguinte forma bilinear:

$$\begin{aligned}
(\psi, \phi) &= \langle \psi(0), \phi(0) \rangle^* - \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n} + \delta} \langle \int_{-\tau_{k_n}}^\theta \frac{k}{\delta} g_b(U_k) \psi(\theta - \tau) d\tau, \phi(\theta) \rangle^* d\theta + \\
&\quad + \int_{-\tau_{k_n} + \delta}^0 \langle \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n} + \delta} \frac{k}{\delta} g_b(U_k) \psi(-\tau_{k_n} + \delta - \tau) d\tau, \phi(-\tau_{k_n} + \delta) \rangle^* d\theta
\end{aligned}$$

Com relação a esta forma bilinear, o operador A^* satisfaz $(\psi, A\phi) = (A^*\psi, \phi)$.

(iii) Sejam y_k e S_{k_n} definidos como no corolário (2.3) e no lema (3.6), respectivamente, e sejam

$$\tilde{\Phi}(\theta) = [y_k e^{i\omega_k \theta} \quad \bar{y}_k e^{-i\omega_k \theta}], \quad \theta \in [-\tau_{k_n}, 0]$$

$$\bar{\Psi}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{S_{k_n}} y_k e^{-i\omega_k s} \\ \frac{1}{\bar{S}_{k_n}} \bar{y}_k e^{i\omega_k s} \end{bmatrix}, \quad s \in [0, \tau_{k_n}]$$

$$\Phi(\theta) = [\Phi_1(\theta) \quad \Phi_2(\theta)] = \bar{\Phi}(\theta)H$$

$$\Psi(s) = \begin{bmatrix} \Psi_1(s) \\ \Psi_2(s) \end{bmatrix} = H^{-1}\bar{\Psi}(s)$$

onde $H = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix}$

(iv) Seja Λ o espaço de autofunções de $A_{\tau_{k_n}}(k)$ correspondente ao autovalor $\lambda = \pm i\omega_k$

Com as notações acima, Φ é uma base real de Λ , e Ψ é uma base real do espaço das autofunções da adjunta formal $A_{\tau_{k_n}}^*(k)$ de $A_{\tau_{k_n}}(k)$, correspondente a $\lambda = \pm i\omega_k$.

Além disso, usando o fato que $(\psi, A\phi) = (A^*\psi, \phi)$, temos que

$$\begin{aligned} i\omega_k (y_k e^{-i\omega_k \cdot}, \bar{y}_k e^{-i\omega_k \cdot}) &= (A_{\tau_{k_n}}^* y_k e^{-i\omega_k \cdot}, \bar{y}_k e^{-i\omega_k \cdot}) = (y_k e^{-i\omega_k \cdot}, A_{\tau_{k_n}} \bar{y}_k e^{-i\omega_k \cdot}) = \\ &= (y_k e^{-i\omega_k \cdot}, -i\omega_k \bar{y}_k e^{-i\omega_k \cdot}) = -i\omega_k (y_k e^{-i\omega_k \cdot}, \bar{y}_k e^{-i\omega_k \cdot}) \end{aligned}$$

e, conseqüentemente, $(y_k e^{-i\omega_k \cdot}, \bar{y}_k e^{-i\omega_k \cdot}) = 0$

Esta observação nos diz que

$$\begin{aligned} \langle y_k, \bar{y}_k \rangle^* + \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n} + \delta} \left\langle \int_{-\tau_{k_n}}^{\theta} \frac{k}{\delta} g_b(U_k) y_k e^{-i\omega_k(\theta - \tau)} d\tau, \bar{y}_k e^{-i\omega_k \theta} \right\rangle^* d\theta + \\ \int_{-\tau_{k_n} + \delta}^0 \left\langle \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n} + \delta} \frac{k}{\delta} g_b(U_k) y_k e^{-i\omega_k(-\tau_{k_n} + \delta - \tau)} d\tau, \bar{y}_k e^{-i\omega_k(-\tau_{k_n} + \delta)} \right\rangle^* d\theta = 0 \end{aligned}$$

isto é,

$$\int_0^\pi y_k \bar{y}_k dx + \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} \int_0^\pi \int_{-\tau_{k_n}}^\theta \frac{k}{\delta} g_b(U_k) y_k e^{(-2i\omega_k \theta + i\omega_k \tau)} d\tau \bar{y}_k dx d\theta +$$

$$(\tau_{k_n} - \delta) \int_0^\pi \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} \frac{k}{\delta} g_b(U_k) y_k e^{-2i\omega_k(-\tau_{k_n}+\delta)} e^{i\omega_k \tau} d\tau \bar{y}_k dx = 0$$

Assim,

$$\int_0^\pi y_k \bar{y}_k dx + \int_0^\pi \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} \frac{k}{\delta} g_b(U_k) \frac{e^{i\omega_k \theta}}{i\omega_k} e^{-2i\omega_k \theta} d\theta y_k \bar{y}_k dx +$$

$$+ \int_0^\pi \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} k g_b(U_k) \frac{e^{-i\omega_k}}{i\omega_k} e^{-2i\omega_k \theta} d\theta y_k \bar{y}_k dx +$$

$$+ \tau_{k_n} \int_0^\pi \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} \frac{k}{\delta} g_b(U_k) e^{i\omega_k \tau} e^{2i\theta_k} e^{-2i\omega_k \delta} d\tau y_k \bar{y}_k dx +$$

$$- \int_0^\pi \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} k g_b(U_k) e^{i\omega_k \tau} e^{2i\theta_k} e^{-2i\omega_k \delta} d\tau y_k \bar{y}_k dx = 0$$

Com isto, podemos verificar que $(\Psi, \Phi) = I$, onde $I \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ é a identidade.

De fato,

$$(\Psi, \Phi) = \langle \Psi(0), \Phi(0) \rangle^* + \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} \left\langle \int_{-\tau_{k_n}}^\theta \frac{k}{\delta} g_b(U_k) \Psi(\theta - \tau) d\tau, \Phi(\theta) \right\rangle^* d\theta +$$

$$+ \int_{-\tau_{k_n}+\delta}^0 \left\langle \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} \frac{k}{\delta} g_b(U_k) \Psi(-\tau_{k_n} + \delta - \tau) d\tau, \Phi(-\tau_{k_n} + \delta) \right\rangle^* d\theta =$$

$$= H^{-1} \left\{ \int_0^\pi \begin{bmatrix} \frac{y_k^2}{S_{k_n}} & \frac{y_k \bar{y}_k}{S_{k_n}} \\ \frac{\bar{y}_k y_k}{S_{k_n}} & \frac{\bar{y}_k^2}{S_{k_n}} \end{bmatrix} dx + \right.$$

$$\int_0^\pi \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^\theta \frac{k}{\delta} g_b(U_k) \begin{bmatrix} \frac{y_k^2 e^{i\omega_k \tau}}{S_{k_n}} & \frac{y_k \bar{y}_k e^{-2i\omega_k \theta} e^{i\omega_k \tau}}{S_{k_n}} \\ \frac{\bar{y}_k y_k e^{2i\omega_k \theta} e^{-i\omega_k \tau}}{S_{k_n}} & \frac{\bar{y}_k^2 e^{-i\omega_k \tau}}{S_{k_n}} \end{bmatrix} d\tau d\theta dx +$$

$$\left. \int_0^\pi \int_{-\tau_{k_n}+\delta}^0 \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} \frac{k}{\delta} g_b(U_k) \begin{bmatrix} \frac{y_k^2 e^{i\omega_k \tau}}{S_{k_n}} & \frac{y_k \bar{y}_k e^{-2i\omega_k(-\tau_{k_n}+\delta)} e^{i\omega_k \tau}}{S_{k_n}} \\ \frac{\bar{y}_k y_k e^{2i\omega_k(-\tau_{k_n}+\delta)} e^{-i\omega_k \tau}}{S_{k_n}} & \frac{\bar{y}_k^2 e^{-i\omega_k \tau}}{S_{k_n}} \end{bmatrix} d\tau d\theta dx \right\} H$$

Resolvendo todas estas integrais, temos que a segunda entrada é exatamente o termo obtido na observação acima, que é nulo, e a terceira entrada é o conjugado

deste termo, portanto, também nulo. Agora, o numerador da primeira entrada é exatamente S_{k_n} e o numerador da quarta entrada é exatamente \bar{S}_{k_n} . Obtemos, então, a seguinte conclusão:

$$(\Psi, \Phi) = H^{-1} \left\{ \begin{array}{cc} \frac{S_{k_n}}{\bar{S}_{k_n}} & 0 \\ 0 & \frac{\bar{S}_{k_n}}{S_{k_n}} \end{array} \right\} H = I_{2 \times 2}$$

Para $\phi \in \mathcal{C}$ a projeção π_Λ de ϕ sobre Λ é dado por $\pi_\Lambda(\phi) = \Phi(\Psi, \phi)$, isto é, $\pi_\Lambda(\phi) = (\Psi_1, \phi)\Phi_1 + (\Psi_2, \phi)\Phi_2$.

(v) Seja $\mathcal{P}_{v_k} = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, X); f(t + v_k) = f(t), t \in \mathbb{R}\}$ com a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{P}_{v_k}}$ definida por

$$\|f\|_{\mathcal{P}_{v_k}} = \sup_{t \in [0, v_k]} \|f(t)\|_X$$

para $f \in \mathcal{P}_{v_k}$.

(vi) Seja $\mathbf{I} : \mathcal{P}_{v_k} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por

$$\mathbf{I}f = \int_0^{v_k} \langle \Psi(s), f(s) \rangle^* ds \quad (4.3)$$

onde $\langle \Psi, f \rangle^* = \begin{bmatrix} \langle \Psi_1, f \rangle^* \\ \langle \Psi_2, f \rangle^* \end{bmatrix}$

Sabemos por [4] que, para cada $f \in \mathcal{P}_{v_k}$, a equação

$$\dot{w}(t) = A(k)w(t) - \frac{k}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n} + \delta} (U_k + 3U_k^5)w(t+s) ds + f(t) \quad (4.4)$$

tem uma solução v_k -periódica se, e somente se, $f \in N(\mathbf{I})$

Além disso, existe uma projeção contínua $\mathcal{J} : \mathcal{P}_{v_k} \rightarrow \mathcal{P}_{v_k}$ tal que o conjunto das f em \mathcal{P}_{v_k} , satisfazendo (4.3) é $(I - \mathcal{J})\mathcal{P}_{v_k}$ e existe um operador linear contínuo $\mathcal{K} : (I - \mathcal{J})\mathcal{P}_{v_k} \rightarrow (I - \pi_\Lambda)\mathcal{P}_{v_k}$ tal que $\mathcal{K}f$ é uma solução de (4.4) para cada $f \in (I - \mathcal{J})\mathcal{P}_{v_k}$. Isto é equivalente dizer que $\mathbf{I}f = 0$ se, e somente se, $\mathcal{J}f = 0$; $\mathcal{K} : N(\mathbf{I}) \rightarrow \mathcal{P}_{v_k}$ e $\mathcal{K}f$ é solução de (4.4) se $\pi_\Lambda(\mathcal{K}f) = 0$ ou $(\Psi, \mathcal{K}(f)) = 0$.

Assim, a menos de uma translação, a equação (4.2) tem uma solução v_k -periódica $w(t)$ se, e somente se, existe uma constante c tal que

$$\begin{cases} (a) \mathbf{I}G(\alpha, \beta, w) = 0 \\ (b) w(t) = c\phi_1(t) + \mathcal{K}G(\alpha, \beta, w)(t); t \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (4.5)$$

onde $\Phi_1(t) = \frac{1}{2}[y_k e^{i\omega_k t} + \bar{y}_k e^{-i\omega_k t}] = \text{Re}(y_k e^{i\omega_k t})$, $t \in \mathbb{R}$

Nós podemos aplicar o teorema da função implícita para resolver

$$w(t) = c\phi_1(t) + \mathcal{K}(I - \mathcal{J})G(\alpha, \beta, w)(t); t \in \mathbb{R}$$

para $w^* = w^*(c, \alpha, \beta)$ e c, α, β numa vizinhança do zero suficientemente pequena, $w^*(c, 0, 0) - c\Phi_1 = o(|c|)$ quando $|c| \rightarrow 0$. Também podemos verificar que a função $w^*(c, \alpha, \beta)(t)$ é continuamente diferenciável em c, α, β e t [veja 14]. Como $G(0, 0, 0) = 0$ e $\frac{\partial G(0, 0, 0)}{\partial \omega} = 0$, temos que $G(0, 0, w) = O(\|w\|^2)$, e assim,

$$w^*(c, 0, 0) - c\Phi_1 = \mathcal{K}(I - \mathcal{J})G(0, 0, w^*(c, 0, 0)) = O(\|w\|^2), \text{ quando } \|w\| \rightarrow 0.$$

Juntando as informações, vemos que $w^*(c, 0, 0) - c\Phi_1 = o(|c|^2)$, quando $|c| \rightarrow 0$.

Para cada c sejam μ e γ tais que $\alpha = c\mu$ e $\beta = c\gamma$. Se nós fizermos $w^*(c, c\mu, c\gamma)(t) - c\Phi_1(t) = c^2 W(c, t)$, nós temos que $W(c, \cdot) \in \mathcal{P}_{v_k}$. Assim, as duas equações em (4.5) são equivalentes a

$$\begin{cases} \mathfrak{F}(c, \mu, \gamma, W) = \int_0^{v_k} \langle \Psi, N(c, \mu, \gamma, W_s) \rangle^* ds = 0 \\ W = \mathcal{K}N(c, \mu, \gamma, W) \end{cases} \quad (4.6)$$

onde

$$\begin{aligned}
G(c\mu, c\gamma, w_t) &= c^2\{\gamma A(k)[\Phi_1(t) + cW(c, t)] + \frac{k}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} (U_k + 3U_k^5)W(c, t + s) ds \\
&\quad - (1 + c\gamma) \frac{k}{\delta} \int_{-c\mu-\tau_{k_n}}^{-c\mu-\tau_{k_n}+\delta} (U_k + 3U_k^5)W(c, t + \frac{s}{1+c\gamma}) ds \\
&\quad - \gamma \frac{k}{\delta} \int_{-c\mu-\tau_{k_n}}^{-c\mu-\tau_{k_n}+\delta} (U_k + 3U_k^5)\Phi_1(t + \frac{s}{1+c\gamma}) ds \\
&\quad + \frac{k}{\delta} \int_0^1 \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} (U_k + 3U_k^5)\dot{\Phi}_1(t + s - \theta \frac{c\mu + s\gamma}{1+c\gamma}) (\frac{\mu + s\gamma}{1+c\gamma}) ds d\theta \\
&\quad - (1 + c\gamma) \frac{k}{\delta} \int_{-c\mu-\tau_{k_n}}^{-c\mu-\tau_{k_n}+\delta} [\Phi_1(t) + cW(c, t)][\Phi_1(t + \frac{s}{1+c\gamma}) \\
&\quad + cW(c, t + \frac{s}{1+c\gamma})] ds \\
&\quad - (1 + c\gamma) \frac{k}{\delta} \int_{-c\mu-\tau_{k_n}}^{-c\mu-\tau_{k_n}+\delta} \sum_{p,p'}^2 \binom{3}{p} \binom{3}{p'} U_k^{p+p'} c^{4-p-p'} [\Phi_1(t) \\
&\quad + cW(c, t)]^{3-p} [\Phi_1(t + \frac{s}{1+c\gamma}) + cW(c, t + \frac{s}{1+c\gamma})]^{3-p'} ds \\
&\quad - (1 + c\gamma) \frac{k}{\delta} \int_{-c\mu-\tau_{k_n}}^{-c\mu-\tau_{k_n}+\delta} U_k^3 c [\Phi_1(t + \frac{s}{1+c\gamma}) + cW(c, t + \frac{s}{1+c\gamma})]^3 ds \\
&\quad - (1 + c\gamma) \frac{k}{\delta} \int_{-c\mu-\tau_{k_n}}^{-c\mu-\tau_{k_n}+\delta} 3U_k^4 [\Phi_1(t + \frac{s}{1+c\gamma}) + cW(c, t + \frac{s}{1+c\gamma})]^2 ds \\
&\quad - (1 + c\gamma) k U_k^3 c [\Phi_1(t) + cW(c, t)]^3 \\
&\quad - (1 + c\gamma) 3k U_k^4 [\Phi_1(t) + cW(c, t)]^2 = c^2 N(c, \mu, \gamma, W_t)
\end{aligned}$$

Como uma solução periódica da equação (4.2) é uma função C^1 , em (4.6), podemos nos restringir a $W \in \mathcal{P}_{v_k}^1$, onde

$$\mathcal{P}_{v_k}^1 = \{f \in \mathcal{P}_{v_k}; \dot{f} \in \mathcal{P}_{v_k}\}; \text{ com a norma } \|f\|_{\mathcal{P}_{v_k}^1} = \|f\|_{\mathcal{P}_{v_k}} + \|\dot{f}\|_{\mathcal{P}_{v_k}}$$

Assim, não é difícil ver que $\mathfrak{F} : I_{\bar{\rho}} \times \mathbb{R} \times I_{\bar{\rho}} \times \mathcal{P}_{v_k}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é continuamente diferenciável, onde $I_{\bar{\rho}} = [-\bar{\rho}, \bar{\rho}]$, com $0 < \bar{\rho} < 1$.

Como $c^2W(c, \cdot) = o(|c|)$, vemos que

$$N(0, 0, 0, W) = -\frac{k}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} [1+9U_k^4]\Phi_1(t)\Phi_1(t+s) ds - \frac{k}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} 3U_k^4[\Phi_1^2(t+s)+\Phi_1^2(t)] ds$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(0, 0, 0, W) = & - \int_0^{v_k} \langle \Psi(s), \frac{k}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n} + \delta} \{ [1 + 9U_k^4] \Phi_1(s) \Phi_1(s + \theta) \\ & + 3U_k^4 [\Phi_1^2(s + \theta) + \Phi_1^2(s)] \} d\theta \rangle^* ds \end{aligned} \quad (4.7)$$

Usando as definições de Ψ , Φ_1 , temos:

$$\mathfrak{F}(0, 0, 0, W) = \frac{-k}{\delta} H^{-1} \int_0^{v_k} \int_0^\pi \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} dx ds H$$

com,

$$\begin{aligned} a_{11} = & \frac{(1 + 9U_k^4)}{4S_{k_n}} [y_k^3 e^{i\omega_k s} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n} + \delta} e^{i\omega_k \theta} d\theta + y_k^2 \bar{y}_k e^{-i\omega_k s} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n} + \delta} e^{-i\omega_k \theta} d\theta \\ & + \bar{y}_k y_k^2 e^{-i\omega_k s} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n} + \delta} e^{i\omega_k \theta} d\theta + y_k \bar{y}_k^2 e^{-3i\omega_k s} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n} + \delta} e^{-i\omega_k \theta} d\theta] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{12} = & \frac{(3U_k^4)}{4S_{k_n}} [y_k^3 e^{i\omega_k s} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n} + \delta} e^{2i\omega_k \theta} d\theta + \bar{y}_k^2 y_k e^{-3i\omega_k s} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n} + \delta} e^{-2i\omega_k \theta} d\theta + \\ & + 2y_k^2 \bar{y}_k e^{-i\omega_k s} + y_k^3 e^{i\omega_k s} + 2y_k^2 \bar{y}_k e^{-i\omega_k s} + y_k \bar{y}_k^2 e^{-3i\omega_k s}] \end{aligned}$$

$$a_{21} = \overline{a_{11}}$$

$$a_{22} = \overline{a_{12}}$$

Observando que $\int_0^{v_k} e^{ni\omega_k s} ds = 0$ para todo $n \neq 0$, concluímos que

$$\mathfrak{F}(0, 0, 0, W) \equiv 0 \quad (4.8)$$

Isto implica que

$$\tilde{f}(s) = -\frac{k}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n} + \delta} \{ [1 + 9U_k^4] \Phi_1(s) \Phi_1(s + \theta) + 3U_k^4 [\Phi_1^2(s + \theta) + \Phi_1^2(s)] \} d\theta \in N(\mathbf{I})$$

Para resolvermos a equação de bifurcação (4.6) numa vizinhança conveniente da origem, usaremos alguns lemas.

Lema 4.1.

$$\frac{\partial \mathfrak{F}(0, 0, 0, W)}{\partial(\mu, \gamma)} = v_k \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(\dot{\lambda}(\tau_{k_n})) & 0 \\ -\operatorname{Im}(\dot{\lambda}(\tau_{k_n})) & -\omega_k \end{bmatrix}$$

com $\dot{\lambda}(\tau_{k_n})$ definido anteriormente.

Prova: Primeiramente vamos calcular $\frac{\partial \mathfrak{F}(0, 0, 0, W)}{\partial \mu}$.

Vemos que

$$\begin{aligned} N(0, \mu, 0, W_t) &= \frac{k}{\delta} \left\{ (U_k + 3U_k^5) \int_0^1 \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n} + \delta} \dot{\Phi}_1(t+s) \mu \, ds \, d\theta \right. \\ &\quad \left. - (1 + 9U_k^4) \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n} + \delta} \Phi_1(t) \Phi_1(t+s) \, ds - 3U_k^4 \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n} + \delta} [\Phi_1^2(t+s) + \Phi_1^2(t)] \, ds \right\} \end{aligned}$$

e portanto,

$$\frac{\partial N(0, \mu, 0, W_t)}{\partial \mu} = \frac{k}{\delta} (U_k + 3U_k^5) \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n} + \delta} \dot{\Phi}_1(t+s) \, ds$$

Observamos que $\dot{\Phi}_1(t+\theta) = \frac{i\omega_k}{2} (\tilde{\Phi}_1(t+s) - \tilde{\Phi}_2(t+s))$

Então,

$$\frac{\partial \mathfrak{F}(0, 0, 0, W_s)}{\partial \mu} = \frac{ki\omega_k}{2\delta} \int_0^{v_k} \int_0^\pi H^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{\Psi}_1(s) \\ \tilde{\Psi}_2(s) \end{bmatrix} (U_k + 3U_k^5) \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n} + \delta} (\tilde{\Phi}_1(s+\theta) - \tilde{\Phi}_2(s+\theta)) \, d\theta \, dx \, ds$$

Se chamarmos

$$M = \begin{bmatrix} \tilde{\Psi}_1(s) \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n} + \delta} \tilde{\Phi}_1(s+\theta) \, d\theta & -\tilde{\Psi}_1(s) \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n} + \delta} \tilde{\Phi}_2(s+\theta) \, d\theta \\ \tilde{\Psi}_2(s) \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n} + \delta} \tilde{\Phi}_1(s+\theta) \, d\theta & -\tilde{\Psi}_2(s) \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n} + \delta} \tilde{\Phi}_2(s+\theta) \, d\theta \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

então

$$\frac{\partial \mathfrak{F}(0, 0, 0, W_s)}{\partial \mu} = \frac{k i \omega_k}{\delta} \int_0^{v_k} \int_0^\pi (U_k + 3U_k^5) H^{-1} M H \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dx ds$$

É fácil ver que

$$\frac{\partial \mathfrak{F}(0, 0, 0, W_s)}{\partial \mu} = H^{-1} \begin{bmatrix} v_k \dot{\lambda}(\tau_{k_n}) & 0 \\ 0 & v_k \dot{\lambda}(\tau_{k_n}) \end{bmatrix} H \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e assim,

$$\frac{\partial \mathfrak{F}(0, 0, 0, W_s)}{\partial \mu} = v_k \begin{bmatrix} \operatorname{Re} \dot{\lambda}(\tau_{k_n}) \\ -\operatorname{Im} \dot{\lambda}(\tau_{k_n}) \end{bmatrix}$$

Resta, agora, calcularmos $\frac{\partial \mathfrak{F}(0, 0, 0, W_s)}{\partial \gamma}$.

$$\begin{aligned} N(0, 0, \gamma, W_t) &= \gamma A(k) \Phi_1(t) - \frac{\gamma k}{\delta} (U_k + 3U_k^5) \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n} + \delta} (U_k + 3U_k^5) [\Phi_1(t+s) - \dot{\Phi}_1(t+s)] ds \\ &\quad - \frac{k}{\delta} (1 + 9U_k^4) \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n} + \delta} \Phi_1(t) \Phi_1(t+s) ds - \frac{k}{\delta} 3U_k^4 \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n} + \delta} [\Phi_1^2(t+s) + \Phi_1^2(t)] ds \end{aligned}$$

e portanto,

$$\frac{\partial N(0, 0, \gamma, W_t)}{\partial \gamma} = A(k) \Phi_1(t) - \frac{k}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n} + \delta} (U_k + 3U_k^5) [\Phi_1(t+s) - \dot{\Phi}_1(t+s)] ds$$

Daí,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{F}(0, 0, 0, W_s)}{\partial \gamma} &= \int_0^{v_k} \int_0^\pi H^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{\Psi}_1(s) \\ \tilde{\Psi}_2(s) \end{bmatrix} A(k) \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_1(s) & \tilde{\Phi}_2(s) \end{bmatrix} H \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dx ds \\ &\quad - \frac{k}{\delta} \int_0^{v_k} \int_0^\pi H^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{\Psi}_1(s) \\ \tilde{\Psi}_2(s) \end{bmatrix} (U_k + 3U_k^5) \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n} + \delta} \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_1(s+\theta) & \tilde{\Phi}_2(s+\theta) \end{bmatrix} H \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} d\theta dx ds \\ &\quad - \frac{k}{\delta} \int_0^{v_k} \int_0^\pi H^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{\Psi}_1(s) \\ \tilde{\Psi}_2(s) \end{bmatrix} (U_k + 3U_k^5) \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n} + \delta} \frac{i\omega_k \theta}{2} (\tilde{\Phi}_1(s+\theta) - \tilde{\Phi}_2(s+\theta)) d\theta dx ds \end{aligned}$$

Desenvolvendo as expressões e chamando

$$M_\theta = \begin{bmatrix} \tilde{\Psi}_1(s) \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} \tilde{\Phi}_1(s+\theta)\theta d\theta & -\tilde{\Psi}_1(s) \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} \tilde{\Phi}_2(s+\theta)\theta d\theta \\ \tilde{\Psi}_2(s) \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} \tilde{\Phi}_1(s+\theta)\theta d\theta & -\tilde{\Psi}_2(s) \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} \tilde{\Phi}_2(s+\theta)\theta d\theta \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{F}(0, 0, 0, W_s)}{\partial \gamma} = H^{-1} & \left\{ \int_0^{v_k} \int_0^\pi \begin{bmatrix} \tilde{\Psi}_1(s) A_{\tau_{k_n}} \tilde{\Phi}_1(s) & -\tilde{\Psi}_1(s) A_{\tau_{k_n}}^* \tilde{\Phi}_2(s) \\ \tilde{\Psi}_2(s) A_{\tau_{k_n}} \tilde{\Phi}_1(s) & -\tilde{\Psi}_2(s) A_{\tau_{k_n}}^* \tilde{\Phi}_2(s) \end{bmatrix} dx ds \right. \\ & \left. - \frac{k i \omega_k}{\delta} \int_0^{v_k} \int_0^\pi (U_k + 3U_k^5) M_\theta dx ds \right\} H \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

que nos fornece

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{F}(0, 0, 0, W_s)}{\partial \gamma} &= H^{-1} \begin{bmatrix} \frac{i \omega_k v_k}{S_{k_n}} S_{k_n} & 0 \\ 0 & -\frac{i \omega_k v_k}{\bar{S}_{k_n}} \bar{S}_{k_n} \end{bmatrix} H \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= -v_k \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

o que conclui a prova do lema.

Lema 4.2. *Seja*

$$f(\cdot) = -\frac{k}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} \{ [1 + 9U_k^4] \Phi_1(\cdot) \Phi_1(\cdot + \theta) + 3U_k^4 [\Phi_1^2(\cdot + \theta) + \Phi_1^2(\cdot)] \} d\theta$$

Então, se $W_k = \mathcal{K}(f)$,

$$\begin{aligned}
W_k(t) = & (1 + 9U_k^4) \left[\frac{1}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n} + \delta} e^{i\omega_k \theta} d\theta Y_k e^{2i\omega_k t} + \right. \\
& \left. \frac{1}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n} + \delta} e^{-i\omega_k \theta} d\theta \bar{Y}_k e^{-2i\omega_k t} + \frac{1}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n} + \delta} \cos \omega_k \theta d\theta Z_k \right] + \\
& 3U_k^4 \left[\left(1 + \frac{1}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n} + \delta} e^{2i\omega_k \theta} d\theta \right) Y_k e^{2i\omega_k t} + \right. \\
& \left. \left(1 + \frac{1}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n} + \delta} e^{-2i\omega_k \theta} d\theta \right) \bar{Y}_k e^{-2i\omega_k t} + 2Z_k \right] + \Phi(t)b
\end{aligned} \tag{4.9}$$

onde

$$Y_k = \frac{k}{4} \left[A(k) - \frac{k}{\delta} (U_k + 3U_k^5) \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n} + \delta} e^{2i\omega_k \theta} d\theta - 2i\omega_k \right]^{-1} y_k^2,$$

$$Z_k = \frac{k}{2} \left[A(k) - k(U_k + 3U_k^5) \right]^{-1} y_k \bar{y}_k e$$

$$\begin{aligned}
b = & - \left(\Psi, (1 + 9U_k^4) \left[\frac{1}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n} + \delta} e^{i\omega_k \theta} d\theta Y_k e^{2i\omega_k \cdot} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n} + \delta} e^{-i\omega_k \theta} d\theta \bar{Y}_k e^{-2i\omega_k \cdot} + \frac{1}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n} + \delta} \cos \omega_k \theta d\theta Z_k \right] + \right. \\
& \left. + 3U_k^4 \left[\left(1 + \frac{1}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n} + \delta} e^{2i\omega_k \theta} d\theta \right) Y_k e^{2i\omega_k \cdot} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(1 + \frac{1}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n} + \delta} e^{-2i\omega_k \theta} d\theta \right) \bar{Y}_k e^{-2i\omega_k \cdot} + 2Z_k \right] \right)
\end{aligned}$$

Prova: Obviamente $W_k(t)$ é ω_k -periódica. Vamos verificar que $W_k(t)$ é solução de

$$\dot{w}(t) = A(k)w(t) - \frac{k}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n} + \delta} (U_k + 3U_k^5)w(t+s) ds + f(t)$$

com $f(t)$ dada no enunciado do lema. De fato,

$$\begin{aligned}
& A(k)w(t) - \frac{k}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n} + \delta} (U_k + 3U_k^5)w(t+s) ds - \dot{w}(t) = \\
& = (1 + 9U_k^4) \left[A(k) - \frac{k}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n} + \delta} (U_k + 3U_k^5) e^{2i\omega_k s} ds - 2i\omega_k \right] \frac{1}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n} + \delta} e^{i\omega_k \theta} d\theta Y_k e^{2i\omega_k t}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(1+9U_k^4)[A(k) - \frac{k}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} (U_k+3U_k^5)e^{-2i\omega_k s} ds + 2i\omega_k] \frac{1}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} e^{-i\omega_k \theta} d\theta \bar{Y}_k e^{-2i\omega_k t} \\
& +(1+9U_k^4)[A(k) - k(U_k+3U_k^5)] \frac{1}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} \cos \omega_k \theta d\theta Z_k \\
& +3U_k^4[A(k) - \frac{k}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} (U_k+3U_k^5)e^{2i\omega_k s} ds - 2i\omega_k] \left(1 + \frac{1}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} e^{2i\omega_k \theta} d\theta\right) Y_k e^{2i\omega_k t} \\
& +3U_k^4[A(k) - \frac{k}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} (U_k+3U_k^5)e^{-2i\omega_k s} ds + 2i\omega_k] \left(1 + \frac{1}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} e^{-2i\omega_k \theta} d\theta\right) \bar{Y}_k e^{-2i\omega_k t} \\
& +3U_k^4[A(k) - k(U_k+3U_k^5)] 2Z_k \\
& +A(k)\Phi(t)b - \frac{k}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} (U_k+3U_k^5)\Phi(t+s)b ds - \dot{\Phi}(t)b = \\
& = (1+9U_k^4)\frac{k}{4}y_k^2\frac{1}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} e^{i\omega_k \theta} d\theta e^{2i\omega_k t} + (1+9U_k^4)\frac{k}{4}\bar{y}_k^2\frac{1}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} e^{-i\omega_k \theta} d\theta e^{-2i\omega_k t} \\
& +(1+9U_k^4)\frac{k}{2}y_k\bar{y}_k\frac{1}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} \cos \omega_k \theta d\theta + 3U_k^4\frac{k}{4}y_k^2\left(1 + \frac{1}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} e^{2i\omega_k \theta} d\theta\right) e^{2i\omega_k t} \\
& +3U_k^4\frac{k}{4}\bar{y}_k^2\left(1 + \frac{1}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} e^{-2i\omega_k \theta} d\theta\right) e^{-2i\omega_k t} + 3U_k^4ky_k\bar{y}_k = -f(t)
\end{aligned}$$

observando que $\Phi(t)b$ é solução da equação homogênea.

Também, lembrando que $(\Psi, \Phi) = I$, e a definição de b , temos que $(\Psi, W_k) = 0$. Portanto, $W_k = \mathcal{K}(f)$.

Gostaríamos, também, de provar que a bifurcação de Hopf saindo de U_k ocorre quando o retardo τ passa monotonicamente crescente através de cada τ_{k_n} . Para isso necessitamos dos seguintes lemas.

Lema 4.3. *Sejam Y_k e Z_k como definidos no lema (4.2). Então,*

$$\frac{\partial \mathfrak{F}(c, 0, 0, W)}{\partial c} \Big|_{c=0} = \begin{bmatrix} T(k) \\ T^*(k) \end{bmatrix}$$

onde $T(k) = T_1(k) + T_2(k) + T_3(k) + T_4(k) + T_5(k) + T_6(k)$, e

$$T_1(k) = -\frac{9}{4}kv_k \int_0^\pi U_k^3 \operatorname{Re} \left[\frac{1}{S_{k_n}} y_k^3 \bar{y}_k \frac{1}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} (e^{-i\omega_k \theta} + 2e^{i\omega_k \theta} + e^{2i\omega_k \theta} + 2) d\theta \right] dx$$

$$T_2(k) = -\frac{3}{4}kv_k \int_0^\pi U_k^3 \operatorname{Re} \left[\frac{1}{S_{k_n}} y_k^3 \bar{y}_k \frac{1}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} (e^{i\omega_k \theta} + 1) d\theta \right] dx$$

$$T_3(k) = -kv_k \int_0^\pi (1+9U_k^4)^2 \operatorname{Re} \left[\frac{1}{S_{k_n}} \left\{ Z_k y_k^2 \frac{1}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} (e^{i\omega_k \theta} + 1) d\theta \frac{1}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} \cos \omega_k \theta d\theta \right. \right. \\ \left. \left. + Y_k y_k \bar{y}_k \frac{1}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} (e^{-i\omega_k \theta} + e^{2i\omega_k \theta}) d\theta \frac{1}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} e^{i\omega_k \theta} d\theta \right\} \right] dx$$

$$T_4(k) = -3kv_k \int_0^\pi (1+9U_k^4)U_k^4 \operatorname{Re} \left[\frac{1}{S_{k_n}} \left\{ 2Z_k y_k^2 \frac{1}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} (e^{i\omega_k \theta} + 1) d\theta \right. \right. \\ \left. \left. + Y_k y_k \bar{y}_k \left(1 + \frac{1}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} e^{2i\omega_k \theta} d\theta \right) \left(\frac{1}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} (e^{-i\omega_k \theta} + e^{2i\omega_k \theta}) d\theta \right) \right\} \right] dx$$

$$T_5(k) = -6v_k \int_0^\pi (1+9U_k^4)U_k^4 \operatorname{Re} \left[\frac{1}{S_{k_n}} \left\{ Z_k y_k^2 \frac{1}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} (e^{i\omega_k \theta} + 1) d\theta \right. \right. \\ \left. \left. \frac{1}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} \cos \omega_k \theta d\theta + Y_k y_k \bar{y}_k \left(1 + \frac{1}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} (e^{i\omega_k \theta} + 1) d\theta \right) \right. \right. \\ \left. \left. \left(\frac{1}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} e^{i\omega_k \theta} d\theta \right) \right\} \right] dx$$

$$T_6(k) = -18kv_k \int_0^\pi U_k^8 \operatorname{Re} \left[\frac{1}{S_{k_n}} \left\{ 2Z_k y_k^2 \frac{1}{\delta} \int_{\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} (e^{i\omega_k \theta} + 1) d\theta \right. \right. \\ \left. \left. + Y_k y_k \bar{y}_k \left(1 + \frac{1}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} (e^{i\omega_k \theta} + 1) d\theta \right) \left(1 + \frac{1}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} e^{2i\omega_k \theta} d\theta \right) \right\} \right] dx$$

e $T^*(k) = T(k)$, trocando Re por $-\operatorname{Im}$ em todas as expressões.

Prova: *Vemos que*

$$\begin{aligned}
N(c, 0, 0, W_k) &= -\frac{k}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n} + \delta} [\Phi_1(t) + cW_k(t)][\Phi_1(t+s) + cW_k(t+s)] ds \\
&- \frac{k}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n} + \delta} \sum_{p, p'}^2 \binom{3}{p} \binom{3}{p'} U_k^{p+p'} c^{4-p-p'} [\Phi_1(t) + cW_k(t)]^{3-p} [\Phi_1(t+s) + cW_k(t+s)]^{3-p'} ds \\
&- \frac{k}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n} + \delta} U_k^3 c \{ [\Phi_1(t+s) + cW_k(t+s)]^3 + [\Phi_1(t) + cW_k(t)]^3 \} ds \\
&- \frac{k}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n} + \delta} 3U_k^4 \{ [\Phi_1(t+s) + cW_k(t+s)]^2 + [\Phi_1(t) + cW_k(t)]^2 \} ds
\end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N(c, 0, 0, W_k)}{\partial c} \Big|_{c=0} &= -\frac{k}{\delta} (1 + 9U_k^4) \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n} + \delta} [\Phi_1(t+s)W_k(t) + \Phi_1(t)W_k(t+s)] ds \\
&- \frac{k}{\delta} 9U_k^3 \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n} + \delta} [\Phi_1^2(t)\Phi(t+s) + \Phi_1(t)\Phi_1^2(t+s)] ds - \frac{k}{\delta} U_k^3 \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n} + \delta} [\Phi_1^3(t+s) \\
&+ \Phi_1^3(t)] ds - \frac{k}{\delta} 6U_k^4 \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n} + \delta} [\Phi_1(t+s)W_k(t+s) + \Phi_1(t)W_k(t)] ds
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathfrak{F}(c, 0, 0, W)}{\partial c} \Big|_{c=0} &= \int_0^{v_k} \langle \Psi(s), -\frac{k}{\delta} (1 + 9U_k^4) \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n} + \delta} [\Phi_1(s+\theta)W_k(s) \\
&+ \Phi_1(s)W_k(s+\theta)] d\theta \rangle^* ds \\
&+ \int_0^{v_k} \langle \Psi(s), -\frac{k}{\delta} 9U_k^3 \int_{\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n} + \delta} [\Phi_1^2(s)\Phi(s+\theta) + \Phi_1(s)\Phi_1^2(s+\theta)] d\theta \rangle^* ds \\
&+ \int_0^{v_k} \langle \Psi(s), -\frac{k}{\delta} U_k^3 \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n} + \delta} [\Phi_1^3(s+\theta) + \Phi_1^3(s)] d\theta \rangle^* ds \\
&+ \int_0^{v_k} \langle \Psi(s), -\frac{k}{\delta} 6U_k^4 \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n} + \delta} [\Phi_1(s+\theta)W_k(s+\theta) + \Phi_1(s)W_k(s)] d\theta \rangle^* ds
\end{aligned}$$

Vamos colocar

$$W_k(s) = (1 + 9U_k^4)W_k^1(s) + 3U_k^4W_k^2(s) + \Phi(s)b$$

onde

$$W_k^1(s) = \frac{1}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} e^{i\omega_k \theta} d\theta Y_k e^{2i\omega_k t} + \frac{1}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} e^{-i\omega_k \theta} d\theta \bar{Y}_k e^{-2i\omega_k t} + \frac{1}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} \cos \omega_k \theta d\theta Z_k$$

$$W_k^2 = \left(1 + \frac{1}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} e^{2i\omega_k \theta} d\theta\right) Y_k e^{2i\omega_k t} + \left(1 + \frac{1}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} e^{-2i\omega_k \theta} d\theta\right) \bar{Y}_k e^{-2i\omega_k t} + 2Z_k$$

Abrindo cada uma das parcelas, temos que:

$$\frac{\partial \mathfrak{F}(c, 0, 0, W)}{\partial c} \Big|_{c=0} = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6 + T_7 + T_8$$

onde

$$T_1 = \int_0^{v_k} \langle \Psi(s), -\frac{k}{\delta} 9U_k^3 \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} [\Phi_1^2(s)\Phi(s+\theta) + \Phi_1(s)\Phi_1^2(s+\theta)] d\theta \rangle^* ds$$

$$T_2 = \int_0^{v_k} \langle \Psi(s), -\frac{k}{\delta} U_k^3 \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} [\Phi_1^3(s+\theta) + \Phi_1^3(s)] d\theta \rangle^* ds$$

$$T_3 = \int_0^{v_k} \langle \Psi(s), -\frac{k}{\delta} (1 + 9U_k^4)^2 \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} [\Phi_1(s+\theta)W_k^1(s) + \Phi_1(s)W_k^1(s+\theta)] d\theta \rangle^* ds$$

$$T_4 = \int_0^{v_k} \langle \Psi(s), -\frac{k}{\delta}(1 + 9U_k^4)3U_k^4 \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n} + \delta} [\Phi_1(s + \theta)W_k^2(s) + \Phi_1(s)W_k^2(s + \theta)] d\theta \rangle^* ds$$

$$T_5 = \int_0^{v_k} \langle \Psi(s), -\frac{k}{\delta}6U_k^4(1 + 9U_k^4) \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n} + \delta} [\Phi_1(s + \theta)W_k^1(s + \theta) + \Phi_1(s)W_k^1(s)] d\theta \rangle^* ds$$

$$T_6 = \int_0^{v_k} \langle \Psi(s), -\frac{k}{\delta}18U_k^4 \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n} + \delta} [\Phi_1(s + \theta)W_k^2(s + \theta) + \Phi_1(s)W_k^2(s)] d\theta \rangle^* ds$$

$$T_7 = \int_0^{v_k} \langle \Psi(s), -\frac{k}{\delta}(1 + 9U_k^4) \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n} + \delta} [\Phi_1(s + \theta)\Phi(s)b + \Phi_1(s)\Phi(s + \theta)b] d\theta \rangle^* ds$$

$$T_8 = \int_0^{v_k} \langle \Psi(s), -\frac{k}{\delta}6U_k^4 \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n} + \delta} [\Phi_1(s + \theta)\Phi(s + \theta)b + \Phi_1(s)\Phi(s)b] d\theta \rangle^* ds$$

Desenvolvendo estas expressões vemos que T_1, \dots, T_6 são as expressões que desejamos e $T_7 = T_8 = 0$.

Lema 4.4. Para $0 < k - 1 \ll 1$, $T(k) < 0$.

Prova: Para estimarmos $T(k)$, primeiramente precisamos calcular $\lim_{k \rightarrow 1^+} Y_k(k - 1)$ e $\lim_{k \rightarrow 1^+} Z_k(k - 1)$.

Vamos calcular, então, $\lim_{k \rightarrow 1^+} Y_k(k - 1)$

Decompomos Y_k da seguinte forma:

$$Y_k = \frac{1}{k - 1} [m_k \text{sen}(\cdot) + (k - 1)Y_k^*]$$

com $m_k \in \mathbb{C}$ e $\int_0^\pi Y_k^*(x) \text{sen}(x) dx = 0$

Observamos que $A(k)$ pode ser escrita da seguinte forma $A(k) = D^2 + 1 + (k - 1) - k(U_k + 3U_k^5)$ e temos:

$$(D^2 + 1)\text{sen}(\cdot) = 0, \omega_k = (k - 1)\rho_k \text{ e } U_k = \alpha_k(k - 1)[\text{sen}(\cdot) + O(k - 1)]$$

Queremos estimar m_k e Y_k^* quando $k \rightarrow 1+$.

$$\frac{1}{(k - 1)}[m_k \text{sen}(\cdot) + (k - 1)Y_k^*] = \frac{k}{4}[A(k) - \frac{k}{\delta}(U_k + 3U_k^5) \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n} + \delta} e^{2i\omega_k \theta} d\theta - 2i\omega_k]^{-1} y_k^2$$

$$\frac{1}{(k - 1)}[A(k) - \frac{k}{\delta}(U_k + 3U_k^5) \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n} + \delta} e^{2i\omega_k \theta} d\theta - 2i\omega_k][m_k \text{sen}(\cdot) + (k - 1)Y_k^*] = \frac{k}{4} y_k^2$$

Substituindo $A(k)$, ω_k , U_k e colocando $(k - 1)$ em evidência, vem:

$$(D^2 + 1)Y_k^* + m_k J_k \text{sen}(\cdot) + (k - 1)J_k Y_k^* = \frac{k}{4} y_k^2$$

onde $J_k(x) = 1 - 2i\rho_k - k \left(1 + \frac{1}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n} + \delta} e^{2i\omega_k \theta} d\theta \right) \alpha_k(\text{sen}(\cdot) + O(k - 1))$

Multiplicando por $\text{sen}(\cdot)$ e integrando de 0 a π , vem:

$$m_k = \frac{\frac{k}{4} \int_0^\pi y_k^2(x) \text{sen}(x) dx - (k - 1) \int_0^\pi J_k(x) Y_k^*(x) \text{sen}(x) dx}{\int_0^\pi J_k(x) \text{sen}^2(x) dx}$$

É fácil ver que $\lim_{k \rightarrow 1^+} \int_0^\pi J_k(x) \text{sen}^2(x) dx = (1 - 2i) \int_0^\pi \text{sen}^2(x) dx$ e que Y_k^* é limitado quando $k \rightarrow 1^+$. Então:

$$m_k = \frac{k \int_0^\pi \text{sen}^3(x) dx}{(1-2i) \int_0^\pi \text{sen}^2(x) dx} = \frac{(1+2i)k \int_0^\pi \text{sen}^3(x) dx}{20 \int_0^\pi \text{sen}^2(x) dx}$$

E portanto,

$$\lim_{k \rightarrow 1^+} Y_k(k-1) = \frac{(1+2i)k \int_0^\pi \text{sen}^3(x) dx}{20 \int_0^\pi \text{sen}^2(x) dx} \text{sen}(\cdot)$$

Com o mesmo raciocínio, mostramos que

$$\lim_{k \rightarrow 1^+} Z_k(k-1) = \frac{- \int_0^\pi \text{sen}^3(x) dx}{2 \int_0^\pi \text{sen}^2(x) dx} \text{sen}(\cdot)$$

Não é difícil ver que T_1, T_2, T_4, T_5 e T_6 convergem para 0 quando $k \rightarrow 1^+$. Para T_3 temos:

$$\begin{aligned} T_3(k) &= -kv_k \int_0^\pi (1+9U_k^4)^2 \text{Re} \left[\frac{1}{S_{k_n}} \left\{ Z_k y_k^2 \frac{1}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} (e^{i\omega_k \theta} + 1) d\theta \frac{1}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} \cos \omega_k \theta d\theta \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + Y_k y_k \bar{y}_k \frac{1}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} (e^{-i\omega_k \theta} + e^{2i\omega_k \theta}) d\theta \frac{1}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} e^{i\omega_k \theta} d\theta \right\} \right] dx \\ &= \frac{-kv_k}{(k-1)} \int_0^\pi (1+9U_k^4)^2 \text{Re} \left[\frac{1}{S_{k_n}} \left\{ Z_k(k-1) y_k^2 \frac{1}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} (e^{i\omega_k \theta} + 1) d\theta \frac{1}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} \cos \omega_k \theta d\theta \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + Y_k(k-1) y_k \bar{y}_k \frac{1}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} (e^{-i\omega_k \theta} + e^{2i\omega_k \theta}) d\theta \frac{1}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} e^{i\omega_k \theta} d\theta \right\} \right] dx \end{aligned}$$

Pelas estimativas acima e observando que $\lim_{k \rightarrow 1^+} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} \cos \omega_k \theta d\theta = 0$, temos que

$$\lim_{k \rightarrow 1^+} Z_k(k-1) y_k^2 \frac{1}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} (e^{i\omega_k \theta} + 1) d\theta \frac{1}{\delta} \int_{-\tau_{k_n}}^{-\tau_{k_n}+\delta} \cos \omega_k \theta d\theta = 0$$

e assim, para $k \approx 1$, temos:

$$\begin{aligned}
T_3 &\approx \frac{-v_k}{k-1} \int_0^\pi \operatorname{Re} \left[\frac{\bar{S}_{k_n}}{|S_{k_n}|^2} \frac{(1+2i) \int_0^\pi \operatorname{sen}^3(x) dx}{20 \int_0^\pi \operatorname{sen}^2(x) dx} \operatorname{sen}^3(x)(1+i) \right] dx \\
&= \frac{-v_k}{(k-1)|S_{k_n}|^2} \left(\frac{3(2n\pi + \frac{\pi}{2})}{20} - 1 \right) \left(\int_0^\pi \operatorname{sen}^3(x) dx \right)^2 < 0
\end{aligned}$$

Enunciamos, agora, o teorema principal:

Teorema 4.5. *Para cada k fixo, $k \in (1, k^*)$ uma bifurcação de Hopf ocorre quando o retardo τ passa crescentemente por cada ponto τ_{k_n} , $n = 0, 1, 2, \dots$. Especificamente, para cada τ_{k_n} , existe um $\delta_{k_n} > 0$ tal que para cada $\tau \in (\tau_{k_n}, \tau_{k_n} + \delta_{k_n})$ a equação (1) tem uma solução periódica $U_{k_n, \tau}$ próxima de U_k com período $T(\tau_{k_n}) \approx \frac{2\pi}{\omega_k}$.*

Prova: Sabemos por (4.8) que $\mathfrak{F}(0, 0, 0, W) \equiv 0$, e por (4.1)

$$\frac{\partial \mathfrak{F}(0, 0, 0, W)}{\partial (\mu, \gamma)} = v_k \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(\dot{\lambda}(\tau_{k_n})) & 0 \\ -\operatorname{Im}(\dot{\lambda}(\tau_{k_n})) & -\omega_k \end{bmatrix}$$

Como $\operatorname{Re} \dot{\lambda}(\tau_{k_n}) > 0$, existe uma vizinhança $B \subset \mathbb{R}$ da origem, uma vizinhança $V_0 \subseteq \mathcal{P}_{v_k}^1$ de W_k , $c_0 > 0$, funções continuamente diferenciáveis $\mu : [-c_0, c_0] \times V_0 \rightarrow B$, $\gamma : [-c_0, c_0] \times V_0 \rightarrow B$ tais que $\mu(0, W_k) = \gamma(0, W_k) = 0$ e para cada $(c, W) \in [-c_0, c_0] \times V_0$, $(\mu, \gamma) \in B \times B$

$$\mathfrak{F}(c, \mu, \gamma, W) = 0$$

se e somente se

$$\mu = \mu(c, W) \quad \gamma = \gamma(c, W)$$

Definimos,

$$\Omega(c, W) = W - \mathcal{K}(N(c, \mu(c, W), \gamma(c, W), W)) \tag{4.10}$$

Então $\Omega(0, W_k) = 0$. Por (4.8),

$$\frac{\partial \mathfrak{F}(0, 0, 0, W_k)}{\partial W} = 0$$

Derivamos a equação (4.10) em relação a W e calculamos em $c = 0$, obtendo

$$\frac{\partial \Omega}{\partial W}(c, W) |_{c=0} = I$$

Assim, $\frac{\partial \Omega}{\partial W}(0, W_k) : \mathcal{P}_{v_k}^1 \rightarrow \mathcal{P}_{v_k}^1$ é bijetora. Logo, existe $c_1 \in (0, c_0]$, $V_1 \subseteq V_0$ vizinhança de W_k e $W^* : [-c_1, c_1] \rightarrow V_1$ tal que $W^*(0) = W_k$ e para $(c, W) \in [-c_1, c_1] \times V_1$, $\Omega(c, W) = 0$ se, e somente se, $W = W^*(c)$.

Portanto, existe solução v_k -periódica para a equação (4.2), com $W(t)$ próxima ao zero para α, β suficientemente pequenos se, e somente se,

$$W(t) = c\Phi_1(t) + [\mathcal{K}G(\alpha, \beta, w)](t)$$

com $\alpha = c\mu(c, W^*(c))$, $\beta = c\gamma(c, W^*(c))$, para algum $c \in [-c_1, c_1]$, com $W^*(c, t) = W^*(c)(t)$

Sejam $\mu^*(c) = \mu(c, W^*(c))$, $\gamma^*(c) = \gamma(c, W^*(c))$.

Como $\mathfrak{F}(c, \mu^*(c), \gamma^*(c), W^*(c)) \equiv 0$, para $c \in [-c_1, c_1]$, diferenciando ambos os lados da equação acima em c e calculando em $c = 0$, temos:

$$\frac{\partial \mathfrak{F}(0, 0, 0, W_k)}{\partial c} + \frac{\partial \mathfrak{F}(0, 0, 0, W_k)}{\partial(\mu, \gamma)} \begin{bmatrix} \frac{d}{dc} \mu^*(0) \\ \frac{d}{dc} \gamma^*(0) \end{bmatrix} = 0$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{d\mu^*}{dc}(0) \\ \frac{d\gamma^*}{dc}(0) \end{bmatrix} &= -\frac{\partial \mathfrak{F}(0, 0, 0, W_k)^{-1} \partial \mathfrak{F}(0, 0, 0, W_k)}{\partial(\mu, \gamma)} \frac{\partial \mathfrak{F}(0, 0, 0, W_k)}{\partial c} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{-T(k)}{Re\dot{\lambda}(\tau_{k_n})} \\ Im\dot{\lambda}(\tau_{k_n})T(k) + Re\dot{\lambda}(\tau_{k_n})T^*(k) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } \frac{d\mu^*}{dc}(0) = \frac{-T(k)}{Re\dot{\lambda}(\tau_{k_n})} > 0$$

$$\text{Desta forma, } \alpha = c\mu^* = \frac{-T(k)}{Re\dot{\lambda}(\tau_{k_n})}c^2 + O(c^3) > 0$$

Assim, $\tau - \tau_{k_n} = \alpha > 0$, e provamos que a bifurcação de Hopf ocorre quando o retardo τ passa crescentemente através de cada τ_{k_n} .

Bibliografia

[1] Santos, J.S. & Bená, M.A. , *Hopf Bifurcation For a Delay Reaction- Diffusion Equation With Negative Feedback*, to appear.

[2] Busenberg, S. & Huang, W., *Stability and Hopf Bifurcation for a Population Delay Model with Diffusion Effects*, Journal of Differential Equations, 124, 80-107, [1996].

[3] Nussbaum, R.D., *Periodic Solutions of Nonlinear Autonomous Functional Differential Equations*, Lecture Notes in Math., 730, Springer, Berlin, [1979].

[4] Hale, J.K. & Lunel, S.M.V, *Introduction to Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, [1993].

[5] Green, D & Stech, H.W., *Diffusion and hereditary effects in a class of population models*, Differential Equations and Applications in Ecology Epidemics and Populations Problems, 19-28, Academic Press, [1981].

[6] Cole, R.H., *Theory of Ordinary Differential Equations*, Appleton-Century-Crofts, [1968].

[7] Rabinowitz, P., *Some Global Results for Nonlinear Eigenvalue Problems*, Journal of Functional Analysis, 7, 487-513, [1971].

[8] Pazy, A., *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Appl. Math. Sci., Springer-Verlag, [1983].

[9] Wu, J., *Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations*, Appl. Math. Sci., 119, Springer, [1996].

[10] Kaplan, W., *Elements of Differential Equations*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., [1964].

[11] Hönig, C.S., *Análise Funcional e o Problema de Sturm- Liouville*, São Paulo, Editora Edgard Blücher: editora da Universidade de São Paulo, [1978].

[12] Krasnoselskii, M.A., *Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations*, Pergamon Press, [1963].

[13] Huang, W., *On Asymptotic Stability for Linear Delay Equations*, Differential and Integral Equations, 4, 1303-1310,[1991].

[14] Oliveira, J. C. F., *Hopf Bifurcation for Functional Differential Equations*, Nonlinear Analysis Theory, Methods & Applications, 4, 217-229, Pergamon Press, [1980].

[15] Nicola, S.H.J., *Sistemas Impulsivos com Retardamento: Soluções Periódicas*, tese de doutorado, ICMC - USP, [2000].

[16] Nicola, S.H.J., Ladeira, L.A.C. & Táboas, P.Z., *Periodic solutions of an impulsive differential system with delay: an L^p approach*, Fields Institute Communications, to appear.

[17] Golubitsky, M. & Schaeffer, D. G., *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, vol. I, Appl. Math. Sciences, 51, Springer-Verlag, [1985].

[18] Knops, R. J., *Nonlinear analysis and mechanics: Heriot-Watt Symposium*, vol. I, Research notes in mathematics, 17, Pitman Publishing Limited, [1977].

[19] Stakgold, I., *Greens's Functions and Boundary Value Problems*, John Wiley & Sons, New York, [1979].