INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

I.C.M.S.C.

OPERADORES DIFERENCIAIS PARCIAIS LINEARES ANALÍTICO-HIPOELÍTICO DE TIPO PRINCIPAL

Gerson Petronilho

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

SÃO CARLOS - SÃO PAULO
BRASIL

OPERADORES DIFERENCIAIS PARCIAIS LINEARES ANALÍTICO-HIPOELÍTICO DE TIPO PRINCIPAL

Gerson Petronilho

Orientador: Prof. Dr. Adalberto P. Bergamasco

Dissertação aparesentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, da Universidade de São Paulo, para obtenção do Título de Mestre em Ciências (Matemática)

SÃO CARLOS

1978

Agradecemos:

Ao Prof. Dr. Adalberto P. Bergamasco pela orientação segura e assistência constante na realização deste trabalho.

Ao Prof. Dr. José Barros Neto pelas valiosas sugestões, em particular, pela demonstração do Teorema 1.2.

Ao Prof. Dr. Antonio Gilioli, pelas sugestões e incentivo.

Aos colegas da Universidade Federal de São Carlos e do Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos - USP, pelo incentivo

A Sra. Neube Elisabeth Stabili, pelo ótimo trabalho de datilografia.

Aos meus pais Paschoal e Thereza e ao meu irmão Edson, pelo estímulo.

Este trabalho foi patrocinado parcialmente pelas instituições: CAPES, CNPq, FAPESP e FINEP.

Para a Wilma

ABSTRACT

F.Treves proves, in [14], the following:

Theorem.

Let Ω be a non-empty open set of R^n and let $P = P(x,D)$ be a linear partial differential operator of order m, with analytic coefficients, of principal type in Ω. If P satisfies hypothesis (I) then P is analytic-hypoelliptic in Ω.

Hypothesis (I)

For any given $x_0 \in \Omega$, there exists an integer $k_0 \geq 0$ such that the following holds:

(*) for every $\xi_0 \in R^n \mid \{0\}$ and every complex number z such that

$$p(x_0,\xi_0) = 0, \quad d_\xi \operatorname{Re}(zp)(x_0,\xi_0) \neq 0$$

the function $\operatorname{Im}(zp)$, restricted to the bicharacteristic strip of $\operatorname{Re}(zp)$ through (x_0,ξ_0), has a zero of even order less than or equal to $2k_0$ at the point (x_0,ξ_0).

Our purpose is to study the work mentioned above in a detailed fashion, including complete proofs of the main results in such a way as to make it accessible to non-specialists and more easily readable to students of Partial Differential Equations.

An original contribution is the proof of some inequalities which are essential for the obtainment of the semi-regularity of the parametrix constructed for the operator P.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Neste trabalho fazemos um estudo detalhado do artigo: "Analytic-Hypoelliptic Partial Differential Equations of Principal Type", publicado em Communications on Pure and Applied Mathematics, vol 24, págs. 537-570, em 1971, de Francois Treves.

Apresentamos demonstrações completas das afirmações mais importantes contidas no referido trabalho; um dos nossos objetivos é torná-lo acessível a não especialistas.

Trabalhamos com operadores diferenciais parciais lineares de ordem m,

$$P(x,D) = \sum_{|p|\leq m} a_p(x)\, D^p,$$

onde $a_p(x)$ são funções a valores complexos, definidas em um subconjunto aberto $\Omega \subset R^N$, analíticas em Ω.

Supomos que $P(x,D)$ é de tipo principal em Ω (capítulo 1) e que satisfaz a condição (1.1):

"para cada ponto $x_0 \in \Omega$, existe um inteiro $k_0 \geq 0$ tal que o seguinte é verdade:

(*) para todo $\xi^0 \in R_N$, $\xi^0 \neq 0$ e todo número complexo z tal que

$$p(x_0,\xi^0) = 0,\ d_\xi \mathrm{Re}(zp)(x_0,\xi^0) \neq 0$$

a função $\mathrm{Im}(zp)$, restrita à bicaracterística de $\mathrm{Re}(zp)$ passando por (x_0,ξ^0), tem um zero de ordem par menor ou igual a $2k_0$ em (x_0,ξ^0)".

Sob essas hipóteses construímos módulo operadores analítico-regularizante, um inverso à direita, K, de $P(x,D)$. Mais precisamente, construimos um operador linear contínuo $K: C_c^\infty(U) \to D'(u)$, onde U é uma vizinhança de x_0 tal que o núcleo-distribuição $K(x,y)$ associado a esse operador satisfaz as seguintes condições:

a) $P(x,D)\ K(x,y) = \delta(x-y) + R(x,y)$;

b) $K(x,y)$ é semiregular em x e em y;

c) $K(x,y)$ é uma função analítica quando $x \neq y$;

d) $R(x,y)$ é uma função analítica em $U \times U$.

A existência de um tal inverso à direita implica que o transposto do operador $P(x,D)$ é analítico-hipoelítico (teorema 1.2).

A função fase, que comparece na representação de K, é obtida como solução de uma equação eikonal, enquanto a função amplitude é dada por uma série formal $k = \sum_{j=m-1}^{\infty} k_j$, onde cada k_j é obtido como solução de uma equação de transporte (capítulo 2).

No capítulo 0, reunimos alguns resultados necessários para a compreensão do trabalho.

No capítulo 1, procuramos situar o problema a ser resolvido e damos uma aplicação do mesmo.

No capítulo 2, apresentamos a construção formal do inverso à direita de $P(x,D)$, ou melhor, de uma parametriz local de $P(x,D)$.

No capítulo 3, estimamos as soluções da equação de transporte.

No capítulo 4, estimamos a solução da equação eikonal.

No capítulo 5, representamos a parametriz em série e provamos que o resto, R, é um operador analítico-regularizante.

No capítulo 6, desenvolvemos a prova de que $K(x,y)$ é uma função analítica quando $x \neq y$.

No capítulo 7, provamos que $K(x,y)$ é semi-regular em x e em y.

No apêndice A, desenvolvemos algumas provas de resultados utilizados nos capítulos anteriores.

Finalmente, no apêndice B, reunimos alguns resultados sobre funções definidas por integrais

CAPÍTULO 0 - PRÉ-REQUISITOS

Indicaremos por $x = (x^1, \ldots, x^n)$ um elemento genérico do espaço euclidiano R^n, por $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ um elemento genérico do R_n onde R_n é o dual de R^n e por Ω um aberto do R^n.

Seja N^n o conjunto de todas as n-uplas $p = (p_1, \ldots, p_n)$, com $p_j \in N$, $j = 1, \ldots, n$, sendo N o conjunto dos inteiros não negativos. Para $p \in N^n$, colocamos $|p| = p_1 + \ldots + p_n$ e, para p e $q \in N^n$, definimos $p + q = (p_1+q_1, \ldots, p_n+q_n)$. Além disso, $p! = p_1! \cdot \ldots \cdot p_n!$

Para $x \in R^n$ e $p \in N^n$, colocamos $x^p = x_1^{p_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{p_n}$

Para cada $j = 1, \ldots, n$, $D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x^j}$, onde $i = \sqrt{-1}$ e $\frac{\partial}{\partial x^j}$ indica a derivada parcial em relação a x^j; escrevemos também $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x^j}$

Para $p \in N^n$, $D^p = D_1^{p_1} \ldots D_n^{p_n}$ e $\partial^p = \partial_1^{p_1} \ldots \partial_n^{p_n}$

De acordo com estas notações, um operador diferencial parcial linear de ordem m pode ser escrito como segue,

$$P(x,D) = \sum_{|p| \leq m} a_p(x) D^p$$

onde as $a_p(x)$ são funções a valores complexos definidas num aberto Ω de R^n. A parte principal de $P(x,D)$ é

$$P_m(x,D) = \sum_{|p|=m} a_p(x) D^p$$

O <u>polinômio característico</u> de um operador é obtido substituindo-se D por ξ:

$$P(x,\xi) = \sum_{|p| \leq m} a_p(x) \xi^p$$

e o polinômio,

$$p(x,\xi) = \sum_{|p|=m} a_p(x) \xi^p \text{ é chamado}$$

<u>símbolo principal</u> de $P(x,D)$.

Indicaremos por $D'(\Omega)$, o espaço vetorial de todas as distribuições sobre Ω e por $E'(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as distribuições em Ω com suporte compacto. (ver definição de distribuição, por exemplo, em Barros-Neto [2]).

Transformadas de Fourier

Definição

Uma função $\phi \in C^{\infty}(R^n)$ é rapidamente decrescente no infinito se

$$\lim_{|x|\to\infty} |x^{\alpha} D^{\beta}\phi(x)| = 0, \forall \alpha,\beta \in N^n$$

O conjunto de todas as funções deste tipo é indicado por $S(R^n)$. Observemos que $C_c^{\infty}(R^n)$ é um subespaço vetorial de $S(R^n)$.

Definição

A Transformada de Fourier de uma função $f \in S(R^n)$ é definida pela integral

$$F f(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{R^n} e^{-i<x,\xi>} f(x)dx$$

onde $<x,\xi> = x^1\xi_1 + \ldots + x^n\xi_n$

Definição

A Transformada Inversa de Fourier de uma função $g \in S(R^n)$ é definida pela integral

$$(F^{-1}g)(\xi) = (2\pi)^{-n}\int_{R^n} e^{i<x,\xi>} g(x)dx$$

Fórmula de Inversão de Fourier

Fórmula de Inversão de Fourier

$$f(x) = (2\pi)^{-n}\int_{R^n} e^{i<x,\xi>}\hat{f}(\xi)d\xi$$

A família de semi-normas

$$P_{\alpha,\beta}(\phi) = \sup_{x\varepsilon R^n} |x^\alpha\partial^\beta\phi(x)|, \quad \alpha,\beta \varepsilon N^n$$

define uma topologia em $S(R^n)$, que se torna um espaço de Fréchet; seu dual $S'(R^n)$ é um sub-espaço de $D'(R^n)$ e os elementos de $S'(R^n)$ são chamados distribuições temperadas. A transformada de Fourier de uma distribuição temperada T é definida por meio de

$$<FT,\phi> = <T,F\phi>$$

para toda $\phi \varepsilon S(R^n)$. FT também é uma distribuição temperada.

OBSERVAÇÃO:

$E'(R^n)$ é um sub-espaço de $S'(R^n)$.

Definição

A Transformada de Fourier-Laplace de uma distribuição $T \varepsilon E'(R^n)$ é a função inteira

$$\hat{T}(\zeta) = <T_x, e^{-i<x,\zeta>}$$

onde $\zeta \varepsilon C^n$. (Ver Barros-N [2]-pg. 126)

TEOREMA (Paley-Wiener-Schwartz)

1. A transformada de Fourier-Laplace de uma distribuição T com suporte compacto em R^n é uma função inteira $F(\zeta)$ em C^n satisfazendo a seguinte propriedade:

(P_1) Existem constantes C e A e um inteiro $N \geq 0$ tal que

$$|F(\zeta)| \leq C(1+|\zeta|)^N e^{A|\mathrm{Im}\,\zeta|}, \quad \forall\, \zeta \in C^n$$

Inversamente, toda função inteira em C^n satisfazendo a propriedade (P_1) é a transformada de Fourier-Laplace de uma distribuição pertencente a $E'(R^n)$.

2. A transformada de Fourier-Laplace de uma função infinitamente diferenciável com suporte compacto em R^n é uma função inteira $F(\zeta)$ em C^n satisfazendo a seguinte propriedade:

(P_2) Existe uma constante $A > 0$ tal que para todo inteiro $N \geq 0$ podemos encontrar uma constante C tal que

$$|F(\zeta)| \leq C\ (1+|\zeta|)^{-N} e^{A|\mathrm{Im}\zeta|}, \quad \forall\, \zeta \in C^n$$

Inversamente, toda função inteira em C^n satisfazendo a propriedade (P_2) é a transformada de Fourier-Laplace de uma função C^∞ com suporte compacto em R^n. (Ver Barros-N. [2]-pg139).

<u>Condição P</u>

"Sobre cada bicaracterística nula de Re(p) a função Im(p) não muda de sinal", onde p é o símbolo principal de P(x,D). (ver definição de bicaracterística nula no capítulo 1)

<u>Proposição 0.1</u> -

Se a condição P for verdadeira em uma vizinhança de (x_0,ξ^0) então, a ordem do zero é par, ou infinita, e é invariante sob multiplicação de p por uma função $q \neq 0$.
(Ver L.Nirenberg e F. Treves [13]).

A PARTIÇÃO DA UNIDADE DE ANDERSSON-HÖRMANDER

Suponhamos que os cones abertos, $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r$ formam uma cobertura finita do $R^N|\{0\}$.

Proposição 0.2 -

Para todo $j = 1, \ldots, r$, existe uma função $g_j \in C^\infty(R^N|\{0\})$ tal que o seguinte é verdade:

(i) supp $g_j \subset \Gamma_j$, (supp g_j = suporte de g_j)

(ii) $g_1 + \ldots + g_r = 1$ em $R^N|\{0\}$,

(iii) para todo $\nu = 1,2, \ldots,$ e toda N-upla α,

$$|D^\alpha g_j(\xi)| \leq M_0(C_0 2^{-\nu})^{|\alpha|}|\xi| \quad \text{se} \quad 4^\nu|\alpha| \leq |\xi|,$$

onde C_0, M_0 são constantes positivas independentes de j,ν,α e ξ.

Introduzimos uma função $h(t) \in C^\infty(R)$, $h(t) = 0$ se $t < \frac{1}{2}$, $h(t) = 1$ se $t > 1$.

Definamos, para $\nu = 1,2, \ldots,$

$$g_j^\nu(\xi+i\eta) = \sum_\alpha \frac{(i\eta)^\alpha}{\alpha!} g_j^{(\alpha)}(\xi)h(|\xi|-4^\nu|\dot{\alpha}|),$$

onde $|\dot{\alpha}| = 1$ se $\alpha = 0$, $|\dot{\alpha}| = |\alpha|$ se $\alpha \neq 0$.

Proposição 0.3 -

Sejam g_j as funções da proposição 0.2. Existem duas constantes, $C, M > 0$ tais que

(i) $\xi \notin \Gamma_j \Rightarrow g_j^\nu(\xi+i\eta) = 0$,

(ii) $M2^\nu(|\eta|+2^\nu) \leq |\xi| \Rightarrow |\bar\partial g_j^\nu(\xi+i\eta)| \leq M|\xi|e^{-|\xi|/4^{\nu+1}}$,

(iii) para todo ξ,η, $|g_j^\nu(\xi+i\eta)| \leq M|\xi|e^{C|\eta|/2^\nu}$,

(iv) Se $\mu < \nu$ e se $M2^{\nu}(|\eta|+2^{\nu}) \leq |\xi|$, então

$$|g_j^{\mu}(\xi+i\eta) - g_j^{\nu}(\xi+i\eta)| \leq M|\xi|^2 e^{-|\xi|/4^{\nu+1}}$$

(Ver demonstração das proposições - 0.2 e 0.3 em Andersson, K.G. [1])

Definição

Seja $f: R^m \to R^n$. Dizemos que f é homogênea de grau d se $f(\rho x) = \rho^d f(x)$ quaisquer que sejam $\rho \in R$, $x \in R^m$.

Dizemos que f é positiva-homogênea de grau d com relação a x se $f(\rho x) = \rho^d f(x)$ para todo $\rho > 0$ e todo $x \in R^m$.

Relação de Euler

Seja $f(x,\xi)$ homogênea de grau m com relação a ξ. Então

$$m.f(x,\xi) = \langle \xi, \operatorname{grad}_{\xi} f(x,\xi)\rangle$$

Definição

Diremos que uma função $f(x) \in C^{\infty}(\Omega)$ é analítica em Ω se, para todo $x_0 \in \Omega$ existir um polidisco aberto

$$D = \{x: |x-x_0^j| < r_j, \quad 1 \leq j \leq n\}$$

de centro x_0 e contido em Ω tal que, em D, a função $f(x)$ se representa como série de potências

$$f(x) = \sum_p a_p (x-x_0)^p,$$

a série sendo absolutamente convergente em D.

Indicaremos por $A(\Omega)$ o espaço das funções analíticas em Ω. A definição acima é equivalente à

Definição

Uma função $f(x) \in C^{\infty}(\Omega)$ é analítica em Ω se, para todo compacto $K \subset \Omega$, existir uma constante $C = C(K)$, tal que

$$|D^p f(x)| \leq C^{|p|+1} |p|!$$

(Ver Barros-N. [3] - pg. 4)

Seja u uma função a valores complexo em $C^1(\Omega)$, onde Ω é um conjunto aberto em C^n, que identificamos com R^{2n} e $C^1(\Omega)$ é o espaço das funções a valores complexos continuamente diferenciáveis em Ω.

Denotamos as coordenadas reais por x_j, $1 \leq j \leq 2n$, e as coordenadas complexas por $z_j = x_{2j-1} + ix_{2j}$, $j = 1, \ldots, n$. e
$\bar{\partial} u = \sum_{j=1}^{n} \partial u/\partial \bar{z}_j \, d\bar{z}_j$ onde $\partial u/\partial \bar{z}_j = \frac{1}{2}(\partial u/\partial x_{2j-1} + i\partial u/\partial x_{2j})$

Definição

Uma função $u \in C^1(\Omega)$ é dita holomorfa em Ω se $\bar{\partial} u = 0$(as equações de Cauchy-Riemann). O conjunto de todas as funções holomorfas em Ω será denotado por $H(\Omega)$.

TEOREMA 0.1

Se u é uma função a valores complexos definida no conjunto aberto $\Omega \subset C^n$ e u é holomorfa em cada variável z_j quando as outras variáveis estão arbitrariamente fixas, então u é holomorfa em Ω. (Ver Hormander [7] - pg. 28)

Desigualdade de Cauchy

Se u é holomorfa e $|u| \leq M$ no polidisco

$D = \{z: |z_j| < r_j,\ j=1,\dots, n\}$ segue que

$$|\partial^\alpha u(0)| \leq M\, \alpha!\, r^{-\alpha},$$

onde $r = (r_1, \dots, r_n)$.

(Ver Hörmander [7] - pg. 27)

Corolário

Se u satisfaz as condições da desigualdade de Cauchy então

$$|\partial^\alpha u(z)| \leq M\alpha! \left(\frac{r}{2}\right)^{-\alpha},$$

para todo $z \in D_1 = \{z: |z_j| < \frac{1}{2} r_j,\ j = 1,\dots,n\}$

Prova

Seja $z \in D_1$ arbitrariamente fixo. Definamos, $g: D_1 \to C$ por

$$g(w) = u(w+z)$$

Como $|z_j+w_j| \leq |z_j| + |w_j| < \frac{1}{2} r_j + \frac{1}{2} r_j = r_j$ temos $|g(w)| = |u(w+z)| \leq M$ pois $z + w \in D$.

Portanto, g é holomorfa em D_1 e $|g| \leq M$ em D_1 Assim podemos aplicar a desigualdade de Cauchy para a função g, isto é,

$$|\partial^\alpha g(0)| \leq M\alpha! \left(\frac{r}{2}\right)^{-\alpha}$$

Como $g(0) = u(z)$ e $\partial^\alpha g(0) = \partial^\alpha u(z)$ temos que

$$|\partial^\alpha u(z)| \leq M\alpha! \left(\frac{r}{2}\right)^{-\alpha}$$

Como z está arbitrariamente fixo em D_1, a última desigualdade vale para todo $z \in D_1$.

TEOREMA

Seja f uma função holomorfa em uma vizinhança W de 0 em C^n e assumimos que $f(0,\dots,0) = 0$, $\frac{\partial^i f}{\partial z_n^i}(0,\dots,0) = 0$ para $i=1,\dots,p-1$ e $\frac{\partial^p f}{\partial z_n^p}(0,\dots,0) \neq 0$. Então podemos escrever f de uma única forma; $f = h.w$, onde h e w são holomorfas em uma vizinhança de 0, $h(0) \neq 0$ e w é um polinomio de Weierstrass, isto é,

$$w(z) = z_n^p + \sum_{j=0}^{p-1} a_j(z')z_n^j$$

onde a_j são funções analíticas (holomorfas) em uma vizinhança de 0, zerando quando $z' = (z_1,\dots,z_{n-1}) = 0$.
(Ver Teorema de Preparação de Weierstrass e seu corolário em Hörmander [7] - pg 148-150)

Corolário

Seja f uma função holomorfa em uma vizinhança W de $(z_1^0,\dots,z_{n-1}^0,0)$ tal que $f(z_1^0,\dots,z_{n-1}^0,0) = 0$, $\frac{\partial^i f}{\partial z_n^i}(z_1^0,\dots,z_{n-1}^0,0)=0$ para $i=1,\dots,p-1$ e $\frac{\partial^p f}{\partial z^p}(z_1^0,\dots,z_{n-1}^0,0) \neq 0$. Então podemos escrever f de uma única forma; $f^n = h.w$, onde h e w são holomorfas em uma vizinhança de $(z_1^0,\dots,z_{n-1}^0,0)$, $h(z_1^0,\dots,z_{n-1}^0,0) \neq 0$ e

$$w(z) = z_n^p + \sum_{j=0}^{p-1} a_j(z')z_n^j,$$

onde a_j são funções holomorfas em uma vizinhança de $(z_1^0,\dots,z_{n-1}^0)$, satisfazendo $a_j(z_1^0,\dots,z_{n-1}^0) = 0$.

Prova

Seja $g(w_1,\dots,w_n) = f(w_1+z_1^0,\dots,w_{n-1}+z_{n-1}^0,w_n)$. Então g é holomorfa em uma vizinhança de 0 em C^n e além disso,

$$g(0,\dots,0) = f(z_1^0,\dots,z_{n-1}^0,0) = 0$$

$$\frac{\partial^i g}{\partial w_n^i}(0,\dots,0) = \frac{\partial^i f}{\partial z_n^i}(z_1^0,\dots,z_{n-1}^0,0) = 0$$

para $i = 1, \dots, p-1$ e

$$\frac{\partial^p g}{\partial w_n^p}(0,\dots,0) = \frac{\partial^p f}{\partial z_n^p}(z_1^0,\dots,z_{n-1}^0,0) \neq 0$$

Usando o Teorema anterior para a função g temos que para $(w_1,\dots,w_n)$ próximos de 0 em C^n

$$g(w_1,\dots,w_n) = \tilde{h}(w_1,\dots,w_n).(w_n^p + \sum_{j=0}^{p-1} \tilde{a}_j(w')w_n^j),$$

onde $\tilde{h}$ e $(w_n^p + \sum_{j=0}^{p-1} \tilde{a}_j(w')w_n^j)$ são funções holomorfas em uma vizinhança de 0, em C^n, $\tilde{h}(0) \neq 0$ e $\tilde{a}_j$ são funções holomorfas em uma vizinhança de 0, anulando-se quando $w' = (w_1,\dots,w_{n-1}) = 0$.

Logo, para $(z_1,\dots,z_n)$ próximo de $(z_1^0,\dots,z_{n-1}^0,0)$ temos,

$$f(z_1,\dots,z_n) = g(z_1-z_1^0,\dots,z_{n-1}-z_{n-1}^0,z_n) = \tilde{h}(z_1-z_1^0,\dots,z_{n-1}-z_{n-1}^0,z_n) \times$$
$$\times (z_n^p + \sum_{j=0}^{p-1} \tilde{a}_j(z_1-z_1^0,\dots,z_{n-1}-z_{n-1}^0)z_n^j) = h(z\ ,\dots,z_n)(z_n+\sum_{j=0}^{p-1} a_j(z')z_n^j)$$

onde h e $(z_n^p + \sum_{j=0}^{p-1} a_j(z')z_n^j)$ são holomorfas numa vizinhança de $(z_1^0,\dots,z_{n-1}^0,0)$. Além disso, $h(z_1^0,\dots,z_{n-1}^0,0) = \tilde{h}(0,\dots,0) \neq 0$ e a_j são funções holomorfas numa vizinhança de $(z_1^0,\dots,z_{n-1}^0)$ satisfazendo $a_j(z_1^0,\dots,z_{n-i}^0) = \tilde{a}_j(0,\dots,0) = 0$. (c.q.d)

FÓRMULA GERAL DE LEIBNIZ

Para u e $v \in C^\infty(\Omega)$ vale

$$P(\partial)(uv) = \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha u.P^{(\alpha)}(\partial)v$$

onde $P(\partial) = \sum_{|p|\leq m} a_p\,\partial^p$ e $P^{(\alpha)}(\partial)$ é o operador diferencial parcial obtido do polinômio

$$P^{(\alpha)}(\eta) = \left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^{\alpha} P(\eta),$$

trocando a variável η por ∂. (Ver Barros-N. [2] - pg. 4)

TEOREMA - (Funções Implícitas - versão holomorfa)

Seja $f: C^N \times C \to C$ uma função holomorfa de $(z,w) = (z_1,\dots,z_N,w)$ em uma vizinhança de um ponto (z_0,w_0) em $C^N \times C$, e suponhamos que $f(z_0,w_0) = 0$ e que

$$\frac{\partial f}{\partial w}(z_0,w_0) \neq 0$$

Então existem vizinhanças abertas U e V com $z_0 \in U \subset C^N$, $w_0 \in V \subset C$ e existe $g: U \to V$ holomorfa tal que

$$f(z,g(z)) = 0,\ \forall\, z \in U. \quad (g \text{ é única})$$

(Ver Hormander [7] - pg 24)

Alguns Resultados sobre Equações Diferenciais Ordinárias

TEOREMA - (Picard) 02 -

Seja $f: E \subset R^{d+1} \to R^d$ uma função contínua satisfazendo a condição de Lipschitz com relação a y no retângulo,

$R = \{(t,y) \in E: |t-t_0| \leq a,\ |y-y_0| \leq b\}$ (isto é, $|f(t,y_1)-f(t,y_2)| \leq L\,|y_1-y_2|$ se (t,y_1) e $(t,y_2) \in R$).

Seja $\alpha = \min\{a,\frac{b}{M}\}$ onde M é tal que

$$|f(t,y)| \leq M \text{ em } R.$$

Então existe uma única solução $y = y(t)$ da equação:

$\frac{dy}{dt} = f(t,y)$, definida em $[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$ e satisfazendo, $y(t_0) = y_0$.
(Ver Hartman - [6])

TEOREMA 0.3 -

Nas condições do Teorema de Picard, se $f(t,y)$ é analítica então a solução $y(t)$ é analítica em $[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$
(Ver Hartman - [6])

TEOREMA 0.4 -

Seja $f(t,y,\lambda)$ contínua em t e analítica de (y,λ) para $(t,y) \in E \subset R^{d+1}$, E aberto e λ numa vizinhança de $\lambda_0 \in R^p$. Então a solução $y(t,\lambda)$ do problema:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t,y,\lambda) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

depende analiticamente de λ em U onde, U é uma vizinhança de λ_0.
(Ver Elsgoltz [4]).

TEOREMA 0.5 -

Seja $f(t,y,\lambda)$ analítica em (t,y,λ) para $(t,y) \in E \subset R^{d+1}$ aberto, e λ numa vizinhança aberta de $\lambda_0 \in R^p$.

Então a solução $y(t,\lambda)$ do problema:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} y = f(t,y,\lambda) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

é analítica de (t,λ) em $V \times U$, onde V é uma vizinhança de t_0 e

U uma vizinhança de λ_0.

TEOREMA 0.6 -

Seja $f(t,y)$ analítica em (t,y) para $(t,y) \in E \subset R^{d+1}$, aberto. Para cada $(\bar{t},\bar{y}) \in E$ denotamos por $y(t,\bar{t},\bar{y})$ a solução de

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} y = f(t,y) \\ y(\bar{t}) = \bar{y} \end{cases}$$

Suponhamos que $y(t,t_0,y_0)$ esteja definida em $[a,b]$. Então existe uma vizinhança V de (t_0,y_0) tal que se $(\bar{t},\bar{y}) \in V$ implica que $y(t,\bar{t},\bar{y})$ está definida em $[a,b]$ e é analítica nas três variáveis.

Prova

Definindo,

$$x = y - y_0 \quad e \quad s = t - t_0, \quad \text{temos}$$

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = f(t,y).1 = f(s+t_0,\ x+y_0), \quad x(0) = 0.$$

Portanto o problema:

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y), \quad y(t_0) = y_0 \quad \text{se transforma em:}$$

$$\frac{dx}{ds} = g(s,x,t_0,y_0), \quad x(0) = 0$$

onde $g(s,x,t_0,y_0) = f(s+t_0,x+y_0)$ é analítica.

Assim pelo Teorema 0.5 $x(s,t_0,y_0)$ é analítica e portanto $y(s,t_0,y_0) = x(s,t_0,y_0) + y_0$ é analítica.

Lema 0.1 -

Seja f contínua num aberto $E \subset R^{n+1}$ e $U \subset E$ um conjunto compacto. Então existe $\alpha = \alpha(U) > 0$ tal que toda solução $y(t)$ de $\dot{y} = f(t,y)$ passando por qualquer ponto $(t_0,y_0) \in U$, está definida em $[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$

TEOREMA 0.7 -

Consideremos as seguintes equações diferenciais ordinárias:

$$(In): \frac{dy}{dt} = f_n(t,y); \qquad (I): \frac{dy}{dt} = f(t,y)$$

Seja $E \subset R^{n+1}$ aberto e suponhamos que $\{f_n\}$ converge uniformemente para f em cada compacto $U \subset E$ e $(t_n,y_n) \to (t_0,y_0) \in E$.

Sejam $y_n(t)$ soluções de (In) definidas em um intervalo maximal com $y_n(t_n) = y_n$. Suponhamos também que existe uma única solução $y(t)$ de (I) em $[a,b]$ com $y(t_0) = y_0$. Então existe η_0 tal que se $n \geq \eta_0$ $y_n(t)$ está definida em $[a,b]$ e $y_n(t) \to y(t)$ uniformemente em $[a,b]$.

TEOREMA 0.8 -

Seja $F: \Omega \times (-T,T) \times \mathcal{O} \times V \to R^m$ uma função analítica em todas as variáveis, onde $\Omega \subset R^n$ é aberto, T é um número maior do que zero, $\mathcal{O} \subset R^N$ é aberto e $V \subset R^{m(n+1)}$ é aberto.

Então o problema de Cauchy (não linear):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} = F(x,t,\lambda,y,J(y/x)) \\ y|_{t=0} = y_0(x) \end{cases}$$

admite uma única solução analítica, $y(x,t,\lambda)$

Observação:

A demonstração é feita através de algumas modificações na demonstração do Teorema de Cauchy-Kovalevskaya, por exemplo, em John [10].

Definição

Sejam E e F espaços vetoriais topológicos, $u: E \to F$ uma aplicação linear contínua e y' uma forma linear contínua sobre F, isto é, $y': F \to \mathbb{C}$. Então definimos

$$^tu: F' \to E' \quad \text{por} \quad ^tu(y') = y' \circ u.$$

A aplicação ^tu é chamada transposto de u.
E' e F' são os duais de E e F respectivamente.

Proposição 0.4 -

Sejam E e F espaços vetoriais topológicos e $u: E \to F$ linear e contínua. Então $^tu: F' \to E'$ é contínua (quando os duais E' e F' estão munidos da topologia fraca ou a topologia forte)
(Ver Treves [15] - pg. 199)

TEOREMA 0.9 -

Sejam E, F e G espaços vetoriais topológicos de Hausdorff e j uma aplicação linear contínua injetora, de F em G. Seja $f: E \to F$ uma aplicação linear tal que a composta $j \circ f: E \to G$ é contínua. Então o gráfico de f é fechado.
(Ver Treves [15] - pg.168).

Usaremos o seguinte Teorema que é uma versão do Teorema do gráfico fechado:

TEOREMA 0.10 -

Seja $f: C_c^\infty(\Omega) \to D'(\Omega)$ uma aplicação linear contínua tal $f(C_c^\infty(\Omega)) \subset C^\infty(\Omega)$. Então $f: C_c^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$ é contínua.

Definição

Sejam m,ρ,δ números reais com $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \delta \leq 1$. Denotamos por $S^m_{\rho,\delta}(X \times R^N)$ o conjunto de todas $a \in C^\infty(X \times R^N)$ tal que para todo compacto $K \subset X$ $(X \subset R^N$ é aberto) e todos $\alpha, \beta \in N^N$ a estimativa

$$|D_x^\beta D_\theta^\alpha a(x,\theta)| \leq C_{\alpha,\beta,K}(1+|\theta|)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}, \quad x \in K, \ \theta \in R^N,$$ é

válida para alguma constante $C_{\alpha,\beta,K}$. Os elementos de $S^m_{\rho,\delta}$ são chamados símbolos de ordem m e tipo ρ,δ.

Definição

Se $u \in C_c^\infty(X)$ e $a(x,\theta) \in S^m_{\rho,\delta}(X \times R^N)$ então,

$$\iint e^{i<x,\theta>} a(x,\theta)u(x)dxd\theta = \lim_{\varepsilon \to 0} \iint e^{i<x,\theta>} a(x,\theta)\chi(\varepsilon\theta)u(x)dxd\theta$$

se $\chi \in S(R^N)$ e $\chi(0) = 1$ e é denominada <u>integral oscilatória</u>. Aqui estamos supondo $\rho > 0$ e $\delta < 1$.

Sejam $a(x,\theta) \in S^m_{\rho,\delta}(X \times R^N)$ com $\rho > 0$ e $\delta < 1$ e $Au(x) = \iint e^{i<x-y,\theta>} a(x,\theta)\, u(y)dyd\theta$ uma aplicação linear contínua de $C_c^\infty(Y)$ em $D'(X)$, onde A é definida pela integral oscilatória.

A essa aplicação associamos um núcleo-distribuição $K_A \in D'(X \times Y)$ dado pela integral oscilatória:

$$K_A(u) = \iiint e^{i<x-y,\theta>} a(x,\theta) u(x,y)\, dx dy d\theta, \quad u \in C_c^\infty(X \times Y)$$

Podemos escrever:

$$K_A(u) = \iint K_A(x,y) u(x,y)\, dx dy,$$

onde $K_A(x,y)$ é dado pela integral oscilatória

$$K_A(x,y) = \int e^{i<x-y,\theta>} a(x,\theta)\, d\theta$$

(Ver Hörmander [8])

Observação

Valem os mesmos resultados anteriores se trocarmos $a(x,\theta) \in S^m_{\rho,\delta}(X \times R^N)$ por $\tilde{a}(x,\theta)$ com $\tilde{a}$ não necessariamente C^∞ com relação a θ tal que para todo compacto $K \subset X$ e todo $\beta \in N^N$ a estimativa

$$|D_x^\beta \tilde{a}(x,\theta)| \leq C_{\beta,K}(1+|\theta|)^{m+\delta|\beta|}, \quad x \in K,\ \theta \in R^N$$

é válida para alguma constante $C_{\beta,K}$ $(\delta < 1)$.

Definição 1.1

Seja P um operador diferencial de ordem m em Ω e $p(x,\xi)$ seu símbolo principal. Dizemos que P é elítico em um ponto $x_0 \in \Omega$ se $p(x_0,\xi) \neq 0$ para todo $\xi \in R_n \setminus \{0\}$. P é elítico em um subconjunto 0 de Ω se for elítico em todos os pontos de 0.

Definição 1.2

Sejam P e $p(x,\xi)$ como na definição 1.1. Dizemos que P é de tipo principal em Ω se

$$d_{\xi} p(x,\xi) = \text{grad}_{\xi} p(x,\xi) \neq 0,$$

$\forall\ x \in \Omega$ e todo $\xi \in R^N \setminus \{0\}$.

Exemplo:

Seja, $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ o operador de Laplace no R^n. Então,

$$P(D) = -D^2_{x_1} - \ldots - D^2_{x_n} \quad \text{e}$$

$$p(\xi) = -(\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2) = -|\xi|^2$$

Como $|\xi|^2 = 0 \Longleftrightarrow \xi = 0 \Rightarrow \Delta$ é elítico no R^n.

$d_{\xi} p(\xi) = -(2\xi_1, \ldots, 2\xi_n) \neq 0$ para $\xi \neq 0 \Rightarrow \Delta$ é de tipo principal em R^n.

Definição 1.3

Um operador diferencial P é dito hipoelítico em Ω se, dado qualquer subconjunto aberto U de Ω e qualquer distribuição u em

U, $Pu \in C^\infty(U) \Rightarrow u \in C^\infty(U)$.

Dizemos que P é <u>analítico-hipoelítico</u> em Ω se P é hipoelítico em Ω e, além disso, se dado qualquer subconjunto aberto U de Ω e qualquer distribuição u em U, $Pu \in A(U) \Rightarrow u \in A(U)$ ($A(U)$ indica o espaço das funções analíticas reais definidas em U).

<u>Bicaracterísticas</u>

Sejam $P(x,D)$ um operador de ordem m e $p(x,\xi)$ seu símbolo principal. Escrevemos

$$p(x,\xi) = A(x,\xi) + i\, B(x,\xi)$$

com A e B reais e supomos que $d_\xi A(x_0,\xi^0) \neq 0$.

<u>Definição 1.4</u>

Uma <u>curva bicaracterística</u> de $A(x,\xi)$ passando pelo ponto (x_0,ξ^0) é a curva descrita pela solução (x,ξ) das equações de Hamilton-Jacobi

$$\dot{x} = \mathrm{grad}_\xi A(x,\xi), \quad \dot{\xi} = -\mathrm{grad}_x A\,(x,\xi)$$

com condições iniciais (x_0,ξ^0).

Observamos que A é constante ao longo de uma bicaracterística, pois

$$\frac{dA}{ds} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial A}{\partial x^j}\frac{dx^j}{ds} + \frac{\partial A}{\partial \xi_j}\frac{d\xi_j}{ds}\right) = 0$$

<u>Definição 1.5</u>

Se A é nula ao longo de uma bicaracterística, esta é dita <u>bicaracterística nula</u>

Teorema dos Núcleos de Schwartz

A todo operador $L: C_c^\infty(\Omega_y) \to D'(\Omega_x)$, linear e contínuo, está associada uma única distribuição $K(x,y) \in D'(\Omega_x \times \Omega_y)$ (que chamamos um núcleo distribuição) tal que, para todas $\phi \in C_c^\infty(\Omega_y), \Psi \in C_c^\infty(\Omega_x)$, tenhamos,

$$<K(x,y), \Psi(x) \otimes \phi(y)> = <L\phi,\Psi>;$$

reciprocamente, a cada $K(x,y)$ deste tipo está associado um único L. (Ver Treves [15])

O núcleo-distribuição $\delta(x-y)$

Seja δ a medida de Dirac (isto é, $<\delta,\phi> = \phi(0)$, para $\phi \in C_c^\infty(\Omega_y)$) e seja

$$\delta_*: C_c^\infty(\Omega_y) \to D'(\Omega_x)$$

$$\phi \longrightarrow \delta_* \phi = \phi \quad \text{(produto de convolução)}$$

Indicamos por $\delta(x-y)$ o núcleo-distribuição que está associado a δ_* por meio do Teorema dos Núcleos de Schwartz; temos

$$<\delta(x-y),\Psi(x) \otimes \phi(y)> = <\delta_*\phi(y),\Psi(x)> = <\phi(x),\Psi(x)> = \int_{R^n} \phi(x)\Psi(x)dx$$

Definição 1.6

Uma solução fundamental de $P = P(x,D_x)$ é um núcleo-distribuição $E(x,y) \in D'(\Omega_x \times \Omega_y)$ tal que

$$P(x,D_x)E(x,y) = \delta(x-y)$$

Definição 1.7

Um núcleo $K(x,y)$ (ou a aplicação associada L) é dito semi regular em x se L aplica $C_c^\infty(\Omega)$ em $C^\infty(\Omega)$ e L é contínua.

Dizemos que um núcleo $K(x,y)$ é semiregular em y se a aplicação associada L, $L: C_c^\infty(\Omega) \to D'(\Omega)$ pode ser estendida a uma aplicação linear contínua de $E'(\Omega)$ em $D'(\Omega)$.

Nossa hipótese básica é a seguinte:

(1.1) para cada ponto $x_0 \in \Omega$, existe um inteiro $k_0 \geq 0$ tal que o seguinte é verdade:

(*) para todo $\xi^0 \in R_N$, $\xi^0 \neq 0$ e todo número complexo $\bar{z}$ tal que

$$p(x_0,\xi^0) = 0, \quad d_\xi \mathrm{Re}(zp)\ (x_0,\xi^0) \neq 0$$

a função $\mathrm{Im}(zp)$, restrita à bicaracterística de $\mathrm{Re}(zp)$ passando por (x_0,ξ^0), tem um zero de ordem par menor ou igual a $2k_0$ em (x_0,ξ^0).

Nosso objetivo é provar o seguinte

TEOREMA 1.1

Supomos que $P = P(x,D)$ é um operador diferencial com coeficientes analíticos, de tipo principal, em Ω e satisfazendo a hipótese (1.1). Então, P é analítico-hipoelítico em Ω.

A prova consiste em construir uma parametriz local de P com certas propriedades de regularidade. Mais precisamente, construiremos um operador linear contínuo $K: C_c^\infty(U) \to D'(U)$, onde U é uma vizinhança de x_0, cujo núcleo-distribuição $K(x,y)$, definido em $U \times U$, satisfaz

(1.2) $$P(x,D_x)K(x,y) = \delta(x-y) + R(x,y)$$

com as seguintes propriedades adicionais:

a) $K(x,y)$ é um núcleo regular com relação a ambas variáveis x e y.

b) $K(x,y)$ é uma função analítica de (x,y) quando $x \neq y$.

c) $R(x,y)$ é uma função analítica em $U \times U$.

TEOREMA 1.2

Seja $P = P(x,D_x)$ um operador diferencial parcial com coeficientes analíticos em Ω e supomos que seu transposto ${}^tP$ tem uma parametriz $K(x,y)$ satisfazendo as seguintes condições:

i) $K(x,y)$ é semiregular em x e y;

ii) $K(x,y)$ é uma função analítica fora da diagonal em $\Omega \times \Omega$;

iii) ${}^tP(y,D_y)\, K(x,y) - \delta(x-y) = R(x,y) \in A(\Omega\times\Omega)$

Então, P é analítico-hipoelítico.

(Ver Apêndice-A)

Observação:

1) Usando esse teorema junto com o fato de que nossa hipótese básica permanece invariante se trocarmos P por ${}^tP$, concluimos que o Teorema 1.1 é verdadeiro.

Aplicação do Teorema 1.1

Inicialmente provaremos a seguinte:

Proposição 1.1

Seja $P(x,D)$ um operador diferencial parcial com coeficientes analíticos, de tipo principal em Ω tal que: $d_\xi \mathrm{Re}\, p(x,\xi) \neq 0$, $\forall\, x \in \Omega$ e $\xi \in R_N \setminus \{0\}$. Então nossa hipótese básica (1.1) é equivalente à condição:

(1.3) Para cada $x_0 \in \Omega$, existe um inteiro $k_0 \geq 0$ tal que o seguinte é verdade:

para cada $\xi^0 \in R_N$, $\xi^0 \neq 0$ tal que $p(x_0,\xi^0) = 0$, $d_\xi Rep(x_0,\xi^0) \neq 0$, a função $Im\, p$, restrita à bicaracterística nula de Rep passando por (x_0,ξ^0), tem um zero de ordem par menor ou igual a $2k_0$ em (x_0,ξ^0).

<u>Observação</u>:

2) Como $p(x_0,\xi^0) = 0 \Rightarrow Rep(x_0,\xi^0) = 0$ e $Imp\,(x_0,\xi^0) = 0$, então $Re(\bar{z}p)(x_0,\xi^0) = 0$ e $Im(\bar{z}p)(x_0,\xi^0) = 0$, qualquer $\bar{z}$ número complexo. Logo $Im(\bar{z}p)$ tem um zero em (x_0,ξ^0). Sabemos que, $Re(\bar{z}p)$ é constante ao longo de sua bicaracterística portanto, $Re(\bar{z}p)(x(s),\xi(s)) = Re(zp(x_0,\xi^0) = 0$. Assim estamos trabalhando com a bicaracterística nula de $Re(\bar{z}p)$ passando por (x_0,ξ^0).

Logo podemos escrever a condição (1.1) como segue:

"para cada $x_0 \in \Omega$, existe um inteiro $k_0 \geq 0$ tal que o seguinte é verdade:

para todo $\xi^0 \in R_N$, $\xi^0 \neq 0$, e todo número complexo z tal que

$$p(x_0,\xi^0) = 0, \quad d_\xi Re(\bar{z}p)(x_0,\xi^0) \neq 0,$$

a função $Im(zp)$, restrita à <u>bicaracterística nula</u> de $Re(\bar{z}p)$ passando por (x_0,ξ^0), tem um zero de ordem par menor ou igual a $2k_0$ em (x_0,ξ^0)",

Lema 1.1

Seja f uma função analítica real, $f \neq 0$, e supomos que f tem um zero de ordem par em $t = t_0$. Então f não muda de sinal em alguma vizinhaça de t_0.

Prova

Como f é analítica e tem um zero de ordem par em t_0 podemos escrever:

$$f(t) = (t-t_0)^{2m} g(t)$$

onde g é analítica e $g(t_0) \neq 0$

Devido a continuidade de g, existe uma vizinhança V de t_0 onde g tem sinal constante e como $(t-t_0)^{2m} \geq 0$, em V f não muda de sinal.

Lema 1.2

Seja $f(t) = g(t) + i\ h(t)$ analítica real.

Então g e h também o são.

Prova

Como f é analítica, em alguma vizinhança do ponto t_0 podemos escrever

$$f(t) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!} (t-t_0)^n = \sum_{n\geq 0} \frac{g^{(n)}(t_0)+i\ h^{(n)}(t_0)}{n!}(t-t_0)^n =$$

$$= \sum_{n\geq 0} \frac{g^{(n)}(t_0)}{n!}(t-t_0)^n + i \sum_{n\geq 0} \frac{h^{(n)}(t_0)}{n!} (t-t_0)^n =$$

$$= g(t) + i\ h(t)$$

Como $|g^{(n)}(t_0)| \leq |g^{(n)}(t_0) + i\ h^{(n)}(t_0)|$ e

$$|h^{(n)}(t_0)| \leq |g^{(n)}(t_0) + i\ h^{(n)}(t_0)|\ ,$$

as séries $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{g^{(n)}(t_0)}{n!}(t-t_0)^n$ e $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{h^{(n)}(t_0)}{n!}(t-t_0)^n$ convergem e portanto a terceira igualdade acima é válida. Logo g e h são analíticas.

Prova da proposição 1.1

(1.1) $\Rightarrow$ (1.3) : basta tomar $z = 1$

(1.3) $\Rightarrow$ (1.1) : Seja $p(x,\xi) = A(x,\xi) + i\ B(x,\xi)$ onde $p\colon R^N \times R_N \to C$ é analítica. Então $A(x,\xi)$ é analítica. (A prova desse fato é análoga a do lema 1.2).

Consideremos agora as bicaracterísticas de A que são dadas pelas soluções de

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\partial A}{\partial \xi} = \text{grad}_\xi A(x,\xi)\,; \quad \frac{d\xi}{ds} = -\frac{\partial A}{\partial x} = -\text{grad}_x A(x,\xi)$$

Como A é analítica, $\frac{\partial A}{\partial \xi}$ e $\frac{\partial A}{\partial x}$ são analíticas e portanto $x(s)$ e $\xi(s)$ são analíticas em seu intervalo maximal de existência, J. Assim, $p(x(s),\xi(s))$ é analítica e pelo lema 1.2 $\text{Im}\,p\,(x(s),\xi(s))$ é analítica em J.

Seja $f(s) = \text{Im}\,p(x(s),\xi(s))$ e supomos que $x(s_0) = x_0$ e $\xi(s_0) = \xi^0$.

Afirmamos que f não muda de sinal em J. De fato, suponhamos que existam $s_1,\ s_2 \in J$ tais que $f(s_1) > 0$ e $f(s_2) < 0$. Pela analiticidade da f e do fato que $f \not\equiv 0$ existe $\bar{s} \in J$, $s_1 < \bar{s} < s_2$, tal que $f(\bar{s}) = 0$ e em qualquer vizinhança de $\bar{s}$ existem pontos onde $f > 0$ e pontos onde $f < 0$. Da hipótese (1.3), segue que $\bar{s}$ é um ze ro de ordem par de f e pelo lema 1.1 existe uma vizinhança de $\bar{s}$ onde f não muda de sinal, o que nos dá uma contradição.

Logo a condição (P) introduzida no capítulo 0 está satisfeita numa vizinhança de (x_0,ξ^0), pois foram tomados arbitrários. Usando a proposição-0.1, concluimos que a ordem do zero não muda se multiplicarmos p por uma função $q \neq 0$. Tomando q igual a função constante z, $(|z| \neq 0)$ fica verificada a condição (1.1) (c.q.d.).

Consideremos o operador diferencial parcial, de ordem dois, no R^3, cujo símbolo principal é dado por:

$$p(x,\xi) = \xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3^2 + i(\xi_2 - \phi(x^3)\xi_3)^2,$$

onde $\phi(t)$ é uma função analítica sobre a reta real, a valores reais, <u>não constante</u>, tal que $|\phi(t)| \leq 1$ para todo t e

$$x = (x^1,x^2,x^3) \in R^3, \quad \xi = (\xi_1,\xi_2,\xi_3) \in R_3$$

Este operador satisfaz:

i) <u>É de tipo principal</u>

Para mostrar que $P(x,D)$ é de tipo principal basta mostrar que $\operatorname{Re} P(x,D)$ o é.

De fato, sejam $P(x,D) = A(x,D) + i\, B(x,D)$ e

$$p(x,\xi) = A(x,\xi) + i\, B(x,\xi).$$

Logo, $d_\xi p(x,\xi) = d_\xi A(x,\xi) + i\, d_\xi B(x,\xi)$. Como $\operatorname{Re} P(x,D)$ é de tipo principal, temos que $d_\xi A(x,\xi) \neq 0$ para todo $x \in R^N$ e $\forall\, \xi \in R_N \mid \{0\}$. Portanto $d_\xi p(x,\xi) \neq 0$ $\forall\, x \in R^N$ e $\forall\, \xi \in R_N \mid \{0\}$ e assim $P(x,D)$ é de tipo principal.

No nosso caso,

$$\operatorname{Re} p(x,\xi) = \xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3^2 \text{ e}$$

$$d_\xi \operatorname{Re} p(x,\xi) = (2\xi_1, 2\xi_2, -2\xi_3) \neq 0, \ \forall\, x \in R^3 \text{ e } \forall\, \xi \in R_3 \mid \{0\}$$

Portanto nosso operador é de tipo principal em R^3.

(ii) Não é elítico em nenhum ponto

$$p(x,\xi) = 0 \iff \xi_1^2 + \xi_2^2 = \xi_3^2 \quad e \quad \xi_2 = \phi(x^3)\xi_3$$

Tomando $\xi_3 = 1$ temos que $\xi_2 = \phi(x^3)$ e como $|\xi_2| = |\phi(x^3)| \leq 1$, concluimos que $\xi_1^2 + \phi^2(x^3) = 1$ tem solução $\xi_1 = \sqrt{1-\phi^2(x^3)}$.

Podemos concluir então que existe $(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \neq (0,0,0)$ que satisfaz $p(x,\xi) = 0$ e portanto nosso operador não é elítico em nenhum ponto.

(iii) a condição (1.1)

Pela proposição 1.1 basta verificar a condição (1.3).

Lema 1.3

Suponhamos que f seja uma função analítica real satisfazendo: $f(t) \geq 0$, $\forall\, t \in R$, $f(t_0) = 0$ e $f(t) \not\equiv 0$. Então f tem um zero de ordem par em $t = t_0$.

Prova

Como t_0 é um zero de uma função analítica f, podemos escrever

$$f(t) = (t-t_0)^m g(t)$$

onde g é analítica e $g(t_0) \neq 0$. Como $f(t) \not\equiv 0$, m é finito e g sendo analítica é contínua, portanto sinal de g é constante em uma vizinhança de t_0, $V(t_0)$.

Sabemos que $f(t) \geq 0$, logo sinal de $(t-t_0)^m$ é igual ao si nal de $g(t)$ em $V|\{t_0\}$. Portanto m deve ser par pois, se m for ímpar, como $(t-t_0)^m$ é um polinômio, mudaria de sinal em $V(t_0)$, o que nos dá uma contradição pois, sinal de $(t-t_0)^m$ é igual ao sinal de $g(t)$ em $V|\{t_0\}$ e este é constante. (c.q.d.)

Mostremos que $\mathrm{Im}\,p(x,\xi) = (\xi_2-\phi(x^3)\xi_3)^2$ não se anula identicamente ao longo de qualquer bicaracterística nula de $\mathrm{Re}\,p(x,\xi)$. De fato, a solução do sistema

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = 2\xi_1 \\ \dot{x}^2 = 2\xi_2 \\ \dot{x}^3 = -2\xi_3 \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{\xi}_1 = 0 \\ \dot{\xi}_2 = 0 \\ \dot{\xi}_3 = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x(0) = (x_0^1,x_0^2,x_0^3) \\ \xi(0) = (\xi_1^0,\xi_2^0,\xi_3^0) = \xi^0 \neq 0 \end{cases}$$

é dado por

$$\begin{cases} \xi_1(t) = \xi_1^0 \\ \xi_2(t) = \xi_2^0 \\ \xi_3(t) = \xi_3^0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} x^1(t) = 2\xi_1^0 t + x_0^1 \\ x^2(t) = 2\xi_2^0 t + x_0^2 \\ x^3(t) = -2\xi_3^0 t + x_0^3 \end{cases}$$

Então, $\mathrm{Re}\,p(x(t),\xi(t)) = \xi_1^2(t) + \xi_2^2(t) - \xi_3^2(t) = (\xi_1^0)^2 + (\xi_2^0)^2 - (\xi_3^0)^2$ e $\mathrm{Re}\,p(x(t),(t)) = 0 \iff (\xi_1^0)^2 + (\xi_2^0)^2 = (\xi_3^0)^2$. Logo a bicaracterística nula de $\mathrm{Re}\,p(x,\xi)$ é dada por

$$\begin{cases} x^1(t) = x_0^1 + 2\xi_1^0 t \\ x^2(t) = x_0^2 + 2\xi_2^0 t \\ x^3(t) = x_0^3 - 2\xi_3^0 t \\ \xi(t) = \xi^0 \neq 0 \quad \text{com} \quad (\xi_1^0)^2 + (\xi_2^0)^2 = (\xi_3^0)^2 \end{cases}$$

Assim, $\mathrm{Im}\,p(x(t),\xi(t)) = (\xi_2(t) - \phi(x^3(t))\xi_3(t))^2 = (\xi_2^0 - \phi(x_0^3-2\xi_3^0 t)\xi_3^0)^2$. Portanto, $\mathrm{Im}\,p\,(x(t),\xi(t)) \equiv 0 \iff \xi_2^0 = \phi(x^3(t))\xi_3^0 \iff \phi(x^3(t)) = \xi_2^0/\xi_3^0$ ($\xi_3^0 \neq 0$, pois se $\xi_3^0 = 0 \Rightarrow \xi^0 = 0$ contradição) ou seja, ϕ seria constante no intervalo de existência da solução do sistema (1), o que nos dá uma contradição, pois como ϕ é analítica (real) e não constante temos que ϕ não é constante em qualquer intervalo.

Usando o lema 1.3 concluimos que a função $\text{Im}\, p(x,\xi)$ restrita à bicaracterística nula de $\text{Re}\, p(x,\xi)$ tem um zero de ordem par e portanto a condição (1.3) está verificada.

Usando o Teorema 1.1 podemos concluir que o operador $P(x,D)$ é analítico-hipoelítico no R^3.

Concluimos esse capítulo fazendo as seguintes observações: Em J.Barros Neto [3] encontramos o seguinte

TEOREMA 1.3

Todo operador diferencial $P(D)$ com coeficientes constantes é analítico-hipoelítico se, e somente se, $P(D)$ é elítico.

Para operadores com coeficientes variáveis, em Avner Friedman [5], encontramos o

TEOREMA 1.4

Seja $P(x,D)$ um operador diferencial elítico em Ω com coeficientes analíticos em Ω. Então P é analítico-hipoelítico em Ω.

A recíproca deste Teorema não vale como mostra o exemplo visto acima. Observamos ainda que, no exemplo, além do operador ser analítico-hipoelítico, ele é de tipo principal e mesmo assim não é elítico em nenhum ponto.

CAPÍTULO 2

LOCALIZAÇÃO E CONSTRUÇÃO FORMAL DE UMA PARAMETRIZ

§ 1 - Localização:

Como a propriedade a ser provada é puramente local, podemos trabalhar na vizinhança de um ponto arbitrário de Ω, o qual podemos tomar como sendo a origem em R^N. Por razões de conveniência, as quais logo se tornaram claras, chamamos $y = (y^1,\ldots,y^{N})$ o ponto variável em R^N, $\eta = (\eta_1,\ldots\eta_N)$ o ponto variável no dual, R_N.

Suponhamos que $N > 1$ e escrevemos $n = N-1$. Denotamos por $p(y,\eta)$ o símbolo principal do operador diferencial P em estudo; ele é um polinômio homogêneo de grau m (m é a ordem do operador P) com relação a η, com coeficientes que são funções analíticas de y na vizinhança aberta Ω da origem.

Denotamos por S_n a esfera unitária $|\eta| = 1$ de R_N e por V^0 a subvariedade algébrica de S_n definida pela equação $p(0,\eta) = 0$, isto é,

$$V^0 = \{\eta \in S_n \ : p(0,\eta) = 0\}$$

Lema 2.1.0

Seja $f:C^M \times C \to C$ uma função holomorfa de $(z,w) = (z_1,\ldots,z_M,w)$ em uma vizinhança de um ponto (z_0,w_0) em $C^M\times C$ tal que $f(z_0,w_0) = 0$, e $\frac{\partial f}{\partial w}(z_0,w_0) \neq 0$.

Então podemos escrever f de uma única forma

$$f(z,w) = q(z,w).(w-\lambda(z)) \quad \text{em } U \times V$$

onde q e λ são funções holomorfas de seus argumentos com a propriedade adicional que q não se anula em $U \times V$ e onde U é uma vizinhança de z_0 em C^M e V é uma vizinhança de w_0 em C.

Prova

Como f é holomorfa em uma vizinhança de (z_0,w_0), $f(z_0,w_0)=0$ e $\frac{\partial f}{\partial w}(z_0,w_0) \neq 0$ pelo Teorema das Funções Implícitas - versão holomorfa (ver capítulo 0) existem vizinhanças U_1 e V_1 com $z_0 \in U_1 \subset C^M$ e $w_0 \in V_1 \subset C$ e existe $\lambda: U_1 \to V_1$ holomorfa tal que

$$f(z,\lambda(z)) = 0, \quad \forall \ z \in U_1$$

Definamos,

$\alpha: [0,1] \to C$ por:

$\alpha(t) = f(z, tw+(1-t)\lambda(z))$.

Assim, α é analítica real e satisfaz:

$\alpha(0) = 0, \quad \alpha(1) = f(z,w)$

e $$\alpha(1) - \alpha(0) = \int_0^1 \alpha'(t)dt.$$

Logo,

$$f(z,w) = \int_0^1 \alpha'(t)dt = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial w}(z,tw+(1-t)\lambda(z)) \cdot (w-\lambda(z))dt =$$

$$= (w-\lambda(z)) \cdot \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial w}(z,tw+(1-t)\lambda(z))dt$$

Definindo $q(z,w) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial w}(z,tw+(1-t)\lambda(z))dt$

temos que $f(z,w) = q(z,w).(w-\lambda(z))$ em $U_1 \times V_1$.

Pela proposição B.7 temos que q é uma função holomorfa em $U_1 \times V_1$. (Ver apêndice-B).

Observemos que,

$$\frac{\partial f}{\partial w}(\bar{z},w) = \frac{\partial q}{\partial w}(z,w).(w-\lambda(z)) + q(z,w) \quad \text{e portanto,}$$

$$\frac{\partial f}{\partial w}(\bar{z}_0,w_0) = q(\bar{z}_0,w_0) \neq 0.$$

Como q é contínua existem U e V vizinhanças abertas de z_0 e w_0 respectivamente tal que $q \neq 0$ em $U \times V$. (c.q.d.)

Seja η^0 um ponto arbitrário de V^0. Como P é de tipo principal existe um índice j, $1 \leq j \leq N$, tal que $\frac{\partial p}{\partial \eta_j}(0,\eta_0) \neq 0$. Além disso p é holomorfa em uma vizinhança de $(0,\eta_0)$.

Definindo, $\eta^{(j)} = (\eta_1,\ldots,\eta_{j-1},\eta_{j+1},\ldots,\eta_N)$ temos que, $p(0,\eta_0^{(j)},\eta_j^0) = 0$, $\frac{\partial p}{\partial \eta_j}(0,\eta_0^{(j)},\eta_j^0) \neq 0$ e usando o lema 2.1.0 podemos escrever p de uma única forma:

(2.1.0) $\quad p(y,\eta) = q(y,\eta).(\eta_j-\lambda(y,\eta^{(j)}))$ em $N \times M^0$

onde q e λ são funções holomorfas de seus argumentos com a propriedade adicional que q não se anula em $N \times M^0$ e onde N é uma vizinhança da origem em C^N e M^0 é uma vizinhança de η^0 em C_N.

Pela parte da unicidade do lema 2.1.0 podemos tomar $q(y,\eta)$ e $\lambda(y,\eta^{(j)})$ como sendo funções homogeneas com relação a η, de grau $m-1$ e 1 respectivamente, em seu domínio de definição.

Podemos supor (diminuindo M^0 se necessário) que o cone gerado por M^0 é o mesmo que o cone gerado por $M^0 \cap S_n^C$ e que a origem não pertence a M^0, onde S_n^C é a esfera unitária de C_N.

Um cone em C_N é um subconjunto A tal que $\rho\dot{z} \in A$ para todo $\dot{z} \in A$ e todo $\rho > 0$.

Podemos portanto estender as definições de q e λ por homogeneidade (dos graus acima) com relação a η no cone aberto $\Gamma^C \subset C_N$

gerado por M^0. Denotaremos por Γ a parte real de Γ^C, $\Gamma = R_N \cap \Gamma^C$, e por $\Gamma'(\Gamma'^C)$ a $\eta^{(j)}$ - projeção de $\Gamma(\Gamma^C)$. Notemos que, para alguma constante $c > 0$, depois de diminuida a vizinhança N, temos:

(2.1.1) $\quad |q(y,\eta)| \geq c|\eta|^{m-1}$ para todo $y \in N$, $\eta \in \Gamma^C$

É possível cobrir V^0 com um número finito de vizinhanças como M^0. Observamos, entretanto, que o índice j em (2.1.0) depende do ponto η^0, e pode portanto variar de uma dessas vizinhanças para outra. Denotamos por Γ_i^C, $i = 1,\ldots,l$ os cones que essas vizinhanças geram em C_N.

Introduzimos um outro cone aberto $\Gamma_0^C \subset C_N$ tal que o seguinte é verdade:

(2.1.2) $\quad |p(y,\eta)| \geq c\ |\eta|^m$ para todo $y \in N$, $\eta \in \Gamma_0^C$ (possivelmente depois de diminuido N) e

(2.1.3) $\quad \Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_l$ cobrem $R_N\ |\{0\}$.

Introduzimos uma partição da unidade, $g_0, g_1, \ldots, g_l$, subordinada a essa cobertura:

$$g_i \in C^\infty(R_N|\{0\}|, \quad 0 \leq g_i \leq 1, \quad \text{supp } g_i \subset \Gamma_i, \quad i=0,1,\ldots,l$$

e $g_0 + g_1 + \ldots + g_l = 1$ em $R_N|\{0\}$ (Ver proposição 0.2-Capítulo 0).

Definimos um operador $g_j(D)\colon C_c^\infty(R^N) \to C^\infty(R^n)$ por:

$$g_j(D)u(y) = (2\pi)^{-N} \int e^{i<y,\eta>} g_j(\eta)\hat{u}(\eta)d\eta, \quad u \in C_c^\infty(R^N)$$

onde $<y,\eta> = y^1\eta_1 + \ldots + y^N\eta_N$ e $\hat{u}$ denota a transformada de Fourier de u.

Observamos que $\left(\sum_{j=1}^{l} g_j(D)\right)u(y) = u(y)$

De fato,

$$\left(\sum_{j=1}^{l} g_j(D)\right)u(y) = \sum_{j=1}^{l}\left(g_j(D)u(y)\right) = \sum_{j=1}^{l}(2\pi)^{-N}\int e^{i<y,\eta>}g_j(\eta)\hat{u}(\eta)d\eta$$

$$= (2\pi)^{-N}\int e^{i<y,\eta>}\left(\sum_{j=1}^{l} g_j(\eta)\right)\hat{u}(\eta)d\eta = (2\pi)^{-N}\int e^{i<y,\eta>}\hat{u}(\eta)d\eta = u(y)$$

Proposição 2.1.0

Seja $g_j(D)$ o operador definido por

$$g_j(D)u(y) = (2\pi)^{-N}\int e^{i<y,\eta>}g_j(\eta)\hat{u}(\eta)d\eta.$$

Então $g_j(D)$ aplica $C_c^\infty(\Omega)$ em $C^\infty(\Omega)$ e além disso, aplica $E'(\Omega)$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Prova

Em primeiro lugar, mostremos que $g_j(D)u(y)$ está bem definido se $u \in C_c^\infty(\Omega)$. De fato, como $u \in C_c^\infty(\Omega)$ para todo inteiro $M \geq 0$ podemos encontrar uma constante C tal que

$$|\hat{u}(\eta)| \leq C\ (1+|\eta|)^{-M}, \quad \forall\ \eta \in R_N$$

(Ver capítulo 0, Teorema de Paley-Wiener-Schwartz)

Assim,

$$|g_j(D)u(y)| \leq (2\pi)^{-N}\int|\hat{u}(\eta)|d\eta \leq (2\pi)^{-N}C\int(1+|\eta|)^{-(n+1)}d\eta < +\infty$$

e portanto $g_j(D)u(y)$ está bem definida.

Mostremos agora que $g_j(D)$ aplica $C_c^\infty(\Omega)$ em $C^\infty(\Omega)$.

$$|\partial_y^\alpha g_j(D)u(y)| \leq (2\pi)^{-N}\int|\partial_y^\alpha e^{i<y,\eta>}g_j(\eta)\hat{u}(\eta)|d\eta \leq$$

$$\leq (2\pi)^{-N}\int|\eta^\alpha||\hat{u}(\eta)|d\eta \leq (2\pi)^{-N}\int(1+|\eta|)^{|\alpha|}|\hat{u}(\eta)|d\eta$$

Tomando $M \geq |\alpha| + n + 1$, a última integral é convergente e portanto $g_j(D)$ aplica $C_c^\infty(\Omega)$ em $C^\infty(\Omega)$.

Para mostrar que $g_j(D)$ aplica $E'(\Omega)$ em $D'(\Omega)$ basta mostrar que ${}^t g_j(D)$, transposto de $g_j(D)$, aplica $C_c^\infty(\Omega)$ em $C^\infty(\Omega)$.

Calculemos ${}^t g_j(D)$:

$$\int ({}^t g_j(D)\phi)(y)\ \Psi(y)dy = \langle {}^t g_j(D)\phi,\Psi\rangle = \langle \phi, g_j(D)\Psi\rangle =$$

$$= \int \phi(y)(g_j(D)\Psi)(y)dy = (2\pi)^{-N}\iint \phi(y)\ e^{i\langle y,\eta\rangle} g_j(\eta)\hat{\Psi}(\eta)d\eta\ dy =$$

$$= (2\pi)^{-N}\iiint e^{i\langle y-z,\eta\rangle} g_j(\eta)\phi(y)\Psi(z)dz\ d\eta\ dy =$$

$$= (2\pi)^{-N}\iiint e^{i\langle y-z,\eta\rangle} g_j(\eta)\phi(y)\Psi(z)\ dy\ dz\ d\eta =$$

$$= (2\pi)^{-N}\iiint e^{i\langle y-z,\eta\rangle} g_j(-\eta)\phi(z)\Psi(y)dz\ dy\ d\eta =$$

$$= (2\pi)^{-N}\iiint e^{i\langle y-z,\eta\rangle} g_j(-\eta)\phi(z)\Psi(y)\ dz\ d\eta\ dy, \quad \forall\ \phi,\ \Psi \in C_c^\infty(\Omega)$$

Logo, $${}^t g_j(D)\phi(y) = (2\pi)^{-N}\iint e^{i\langle y-z,\eta\rangle} g_j(-\eta)\phi(z)\ dz\ d\eta =$$

$$= (2\pi)^{-N}\int e^{i\langle y,\eta\rangle} g_j(-\eta)\hat{\phi}(\eta)\ d\eta$$

A demonstração de que ${}^t g_j(D)$ aplica $C_c^\infty(\Omega)$ em $C^\infty(\Omega)$ é análoga à anterior. (c.q.d.)

Observamos ainda que vale a seguinte

<u>Proposição 2.1.1</u>

O operador,

$$g_i(D)u(y) = (2\pi)^{-N}\iint e^{i\langle y-y_1,\eta\rangle} g_i(\eta)\, u(y_1)dy_1 d\eta,$$

aplica continuamente $C_c^\infty(R^N_{y_1})$ em $C^\infty(R^N_y)$

Prova

É suficiente mostrar que para todo compacto $L \subset R^N_{y_1}$ a aplicação $g_i:(D): C^\infty_c(R^N_{y_1}, L) \to C^\infty(R^N_y)$ é contínua. Seja $\alpha \in N^N$ tal que $|\alpha| \leq m$.

$$|\partial^\alpha_y \, g_i(D)u(y)| = (2\pi)^{-N}\left|\iint (\partial^\alpha_{y_1} \, e^{i<y-y_1,\eta>}) g_i(\eta)u(y_1)dy_1 d\eta\right|$$

$$= (2\pi)^{-N}\left|\iint (\partial^\alpha_{y_1} \, e^{<y-y_1,\eta>})(1+|\eta|^2)^{n+1} g_i(\eta)u(y_1)(1+|\eta|^2)^{-n-1} dy_1 d\eta\right|$$

$$= (2\pi)^{-N}\left|\iint [(1-\Delta_{y_1})^{n+1}\partial^\alpha_{y_1} \, e^{i<y-y_1,\eta>}] g_i(\eta)u(y_1)(1+|\eta|^2)^{-n-1} dy_1 \, d\eta\right|$$

$$= (2\pi)^{-N}\left|\iint e^{i<y-y_1,\eta>} \, g_i(\eta)\,[(1-\Delta_{y_1})^{n+1}\partial^\alpha_{y_1} \, u(y_1)](1+|\eta|^2)^{-n-1} dy_1 d\eta\right|$$

$$\leq (2\pi)^{-N}\iint |[(1-\Delta_{y_1})^{n+1} \, \partial^\alpha_{y_1} u(y_1)]|(1+|\eta|^2)^{-n-1} dy_1 \, d\eta \leq$$

$$\leq C. \sup_{\substack{y_1 \in L \\ |\beta| \leq m'}} |\partial^\beta_{y_1} \, u(y_1)|, \quad \text{onde} \quad m' = m + 2(n+1)$$

Seja K um subconjunto compacto de R^N_y, então

$$\sup_{\substack{y \in K \\ |\alpha| \leq m}} |\partial^\alpha_y \, g_i(D)u(y)| \leq C \sup_{\substack{y_1 \in L \\ |\beta| \leq m'}} |\partial^\beta_{y_1} \, u(y_1)| \qquad \text{(c.q.d.)}$$

Observação

O mergulho $C^\infty(R^N_y) \to D'(R^N_y)$ é contínuo e portanto a aplicação

$$g_i(D): C^\infty_c(R^N_{y_1}) \to D'(R^N_y) \text{ é contínua.}$$

Pelo Teorema dos Núcleos de Schwartz, a esse operador corres ponde um núcleo-distribuição, que denotaremos por $(g_i(D)\delta)(y-y_1)$, dado por:

$$(g_i(D)\delta)(y-y_1) = (2\pi)^{-N}\int e^{i<y-y_1,\eta>} g_i(\eta)\, d\eta$$

Como já vimos, $\sum_{i=1}^{I} g_i(D) = I$ onde I é o operador identidade, então

$$\sum_{i=1}^{I} (g_i(D)\delta)(y-y_1) = \delta(y-y_1)$$

Nosso objetivo é construir, para cada i, um núcleo-distribuição $K_i(y,y_1)$ tal que

(2.1.4) $\quad P(y,D_y)K_i(y,y_1) = (g_i(D)\delta)(y-y_1) + R_i(y,y_1)$

onde K_i e R_i têm as propriedade a), b) e c) afirmadas para K e R no capítulo 1. Então tomando

$$K = \sum_{i=1}^{I} K_i, \qquad R = \sum_{i=1}^{I} R_i$$

obtemos que

$$P(y,D_y)K(y,y_1) = \delta(y-y_1) + R(y,y_1) \quad \text{onde}$$

K e R possuem as propriedades a), b) e c).

Nas próximas discussões fixaremos o índice i. Quando $i = 0$ o operador P é elítico, que é justificado pela propriedade (2.1.2), e tem uma parametriz satisfazendo as condições a),b) e c) (Ver [14]).

Assim, trabalharemos com o caso $i > 0$, que será referido como situação não elítica.

Abandonaremos o índice i e escreveremos Γ^c, Γ, Γ', g, K, R ao invés de Γ_i^c, Γ_i, Γ_i', g_i, K_i, R_i, respectivamente.

Caso não elítico: (i > 0)

Neste caso assumimos que uma fatoração do tipo (2.1.0) é ver dadeira. Valendo-nos do fato que agora o índice i está fixo, renumeramos as coordenadas a fim de que o índice j em (2.1.0) seja N e colocamos $\eta' = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ lembrando que $n = N-1$. Assim,

(2.1.5) $\quad p(y,\eta) = q(y,\eta)\ (\eta_N - \lambda(y,\eta')), \quad y \in \mathcal{N}, \quad \eta \in \Gamma^c$

Definamos,

$$a(y,\eta') = \mathrm{Re}\lambda(y,\eta'), \quad b(y,\eta') = \mathrm{Im}\ \lambda(y,\eta'),$$

W uma vizinhança aberta da origem em R^N com fecho compacto, contida em $R^N \cap \mathcal{N}$. Assim,

$$\frac{1}{q(y,\eta)} \cdot p(y,\eta) = (\eta_N - a(y,\eta')) - i\ b(y,\eta'), \quad y \in W, \ \eta \in \Gamma$$

e além disso, $d_\eta(\eta_N - a(y,\eta')) \neq 0$ em qualquer ponto.

Como já sabemos que a ordem do zero é invariante se multiplicarmos p por uma função $f \neq 0$, então definindo $k = \sup k_0$, onde k_0 é o inteiro da condição (1.1) e onde o supremo é tomado sobre todos os pontos de W, podemos afirmar

(2.1.6) A função $b(y,\eta')$ tem somente zeros de ordem par finita menor ou igual a $2k$ ao longo de cada bicaracterística nula de $\eta_N - a(y,\eta')$ (contida em $W \times \Gamma$). Observação: $k < +\infty$.

Como b é independente de η_N podemos afirmar

(2.1.7) $b(y,\eta')$ tem somente zeros de ordem par menor ou igual a $2k$ ao longo das curvas integrais (contidas em $W \times \Gamma'$) do sistema diferencial

$$\frac{dy'}{dt} = \mathrm{grad}_{\eta'} a(y',t,\eta'), \quad \frac{d\eta'}{dt} = \mathrm{grad}_{y'} a(y',t,\eta') \qquad y^N(t) = t$$

onde $y' = (y^1, \ldots, y^n)$

De fato, as bicaracterísticas de $\eta_N - a(y,\eta')$ são dadas por soluções das equações a seguir,

$$\begin{cases} \dfrac{dy'(s)}{ds} = -\dfrac{\partial a}{\partial \eta'}\ (y^1(s),\ldots,y^n(s),y^N(s),\ \eta'(s)) \\[2ex] \dfrac{dy^N(s)}{ds} = 1 \\[2ex] \dfrac{d\eta'(s)}{ds} = \dfrac{\partial a}{\partial y'}\ (y^1(s),\ \ldots,\ y^n(s),\ y^N(s),\eta'(s)) \\[2ex] \dfrac{d\eta_N(s)}{ds} = \dfrac{\partial a}{\partial yN}\ (y^1(s),\ldots,y^N(s),\eta'(s)) \end{cases}$$

Como b independe de η_N podemos desprezar a última equação a fim de calcular b ao longo das curvas integrais do sistema.

Impondo a condição que em $s = 0$, $y(0) = y_0$, $\eta'(0) = \eta^{0'}$, obtemos

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{cases} \dfrac{dy'(s)}{ds} = -\ \mathrm{grad}_{\eta'} a(y'(s),y^N(s),\eta'(s)) \\[2ex] y^N(s) = s + c \quad \text{onde} \quad c = y_0^N \\[2ex] \dfrac{d\eta'(s)}{ds} = \mathrm{grad}_{y'} a(y'(s),y^N(s),\eta'(s)) \end{cases}$$

Definindo,

$x_j(t) = y_j(t-c)$, $1 \leq j \leq n$

$\xi_j(t) = \eta_j(t-c)$, $1 \leq j \leq n$

$X_N(t) = t$, onde $t = s + c$,

obtemos

$$\frac{dx_j(t)}{dt} = \frac{dy_j}{ds}\ (t-c).\frac{ds}{dt} = \frac{dy_j(s)}{ds} = -\ \frac{\partial a}{\partial \eta_j}\ (y'(s),s+c,\eta'(s)) =$$

$$= -\frac{\partial a}{\partial \xi_j}\ (x'(t),t,\xi'(t))$$

Analogamente,

$$\frac{d\xi_j(t)}{dt} = \frac{\partial a}{\partial x_j}(x'(t),t,\xi'(t))$$

Observamos que para $t = c = y_0^N$ temos,

$$x_j(c) = y_j(0) = y_0^j, \quad 1 \le j \le n$$

$$\xi_j(c) = \eta_j(0) = \eta_j^0, \quad 1 \le j \le n$$

$$x_N(c) = c = y_0^N$$

Assim, calcular b ao longo do sistema (I) é o mesmo que calcular b ao longo do sistema

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} \dfrac{dx'(t)}{dt} = -\operatorname{grad}_{\xi'} a(x'(t),t,\xi'(t)) \\ \dfrac{d\xi'(t)}{dt} = \operatorname{grad}_{x'} a(x'(t),t,\xi'(t)) \\ x^N(t) = t \end{cases}$$

(c.q.d.)

Observemos que dado uma condição inicial, a função b não muda de sinal ao longo da curva integral, do sistema dado em (2.1.7), que passa por essa condição inicial.

Lema 2.1.1

A função $b(y,\eta')$ não muda de sinal em qualquer componente conexa de $W \times \Gamma'$.

Prova

Sejam, B_1 uma bola fechada contendo a origem tal que $B_1 \subset W$ e B_2 uma bola fechada de centro η_0' tal que $B_2 \subset \Gamma'$.

Assim, $K = B_1 \times B_2$ é uma vizinhança compacta de $(0,\eta^{0\,\prime})$, conexa e conexa por caminho. Mostremos que b não muda de sinal em K.

Suponhamos que existam $(y_1,\eta^{1\,\prime})$ e $(y_2,\eta^{2\,\prime}) \in K$ tais que

$b(y_1,\eta^{1\prime}) < 0$ e $b(y_2,\eta^{2\prime}) > 0$. Como K é conexo por caminho, existe um caminho ligando esses dois pontos. Seja $f:[0,1] \to K$ contínua tal que $f(0) = (y_1,\eta^{1\prime})$ e $f(1) = (y_2,\eta^{2\prime})$ e portanto $b(f(0)) < 0$ e $b(f(1)) > 0$.

Para cada $t_0 \in [0,1]$, denotamos por $\gamma(t_0)(t)$ a curva integral do sistema diferencial dado em (2.1.7) que passa por $f(t_0)$, por r_i os pontos do intervalo $[0,1]$ tais que $b|_{\gamma(r_i)(t)} \leq 0$ e por s_i os pontos do intervalo $[0,1]$ tais que $b|_{\gamma(s_i)(t)} \geq 0$. Então $r_1 = 0$ e $s_1 = 1$.

Tomaremos o ponto médio entre o maior r e o menor s. Seja $\gamma(\frac{1}{2})(t)$ a curva integral que passa por $f(\frac{1}{2})$. Então. $b|_{\gamma(\frac{1}{2})(t)} \geq 0$ ou ≤ 0 e não se anula identicamente. Suponhamos que exista um ponto sobre $\gamma(\frac{1}{2})(t)$ tal que b nesse ponto seja maior do que zero, então tomamos $s_2 = \frac{1}{2}$ (Se $b|_{\gamma(\frac{1}{2})(t)} \leq 0$ teríamos $r_2 = \frac{1}{2}$ e trabalharíamos com o intervalo $[\frac{1}{2},1]$).

Agora, tomamos o ponto médio entre r_1 e s_2, isto é, o ponto $\frac{1}{4}$. Suponhamos que $b|_{\gamma(\frac{1}{4})(t)} \leq 0$ ou seja, tomamos $r_2 = \frac{1}{4}$.

Prosseguindo com esse raciocínio encontraremos duas sequência: (r_n) e (s_n) tais que

$$r_1 < r_2 < \dots < r_n < \dots < s_n < \dots < s_2 < s_1$$

e além disso, $|s_n - r_n| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$

Assim,

$$s_0 - r_0 = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - r_n) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$$

e portanto, $s_0 = r_0$ onde $\lim_{n\to\infty} s_n = s_0$ e $\lim_{n\to\infty} r_n = r_0$.

Sejam, $(w_-(n), w_+(n))$ o intervalo maximal de existência de

$\gamma(r_n)(t)$, $\gamma(r_0)(t)$ a curva integral que passa por $f(r_0)$ e $[a,b]$ contido no intervalo maximal de existência de $\gamma(r_0)$ (t).

Sabemos que $f(r_n)$ converge para $f(r_0)$ pois, r_n converge para r_0 e f é contínua. Então para n suficientemente grande, $\gamma(r_n)(t)$ está definida em $[a,b]$ e $\gamma(r_n)(t)$ converge uniformemente para $\gamma(r_0)(t)$ em $[a,b]$. Como $b|_{\gamma(r_n)(t)} \leq 0$ temos que $b|_{\gamma(r_0)(t)} \leq 0$ para $t \in [a,b]$.

Analogamente, $b|_{\gamma(r_0)(t)} \geq 0$ para $t \in [a,b]$. Logo, concluimos que $b|_{\gamma(r_0)(t)} = 0$ em $[a,b]$, o que nos dá uma contradição pois, se $b(f(r_0)) = 0$, existe um arco aberto de $\gamma(r_0)(t)$ centrado em $f(r_0)$ tal que b restrita a esse arco menos o ponto $f(r_0)$ é diferente de zero pois b é analítica.

Se $b(f(r_0)) \neq 0$ e como $b \circ f$ é contínua, existe uma vizinhança de r_0 tal que $b \circ f$ é diferente de zero.

<u>Observação</u>:

Existem mais duas possibilidades na determinação dos pontos r e s:

1ª) Ocorrer que todos os pontos médios sejam do tipo s_n ou seja que $b|_{\gamma(s_n)(t)} \geq 0$. Neste caso, da construção acima, obtemos

$$s_1 = 1, \quad s_2 = \frac{1}{2}, \quad s_3 = \frac{1}{4}, \quad \ldots, \quad s_n = \frac{1}{2^{n-1}}, \quad \ldots$$

e portanto s_n converge para zero, enquanto que $r_n = r_1 = 0$ para $n = 1, 2, \ldots$, o que nos dá uma contradição pois, $b|_{\gamma(0)(t)} \leq 0$ e $b|_{\gamma(s_n)(t)} \geq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, e além disso $\gamma(s_n)(t)$ converge uniformemente para $\gamma(0)(t)$.

$2^{\underline{a}}$) Existe apenas um número finito de pontos r e infinitos pontos s (o caso, existem finitos pontos s e infinitos pontos r e tratado de modo análogo).

Seja r_{n_0} o último ponto r que aparece, então fazemos $r_n = r_{n_0}$ para $n > n_0$. Assim, (r_n) converge para r_{n_0} e (s_n) converge para r_{n_0} o que também nos dá uma contradição pois, como $b|_{\gamma(s_n)(t)} \geq 0$ $b|_{\gamma(r_{n_0})(t)} \leq 0$ e $\gamma(s_n)(t)$ converge uniformemente para $\gamma(r_{n_0})(t)$ temos que $b|_{\gamma(r_{n_0})(t)} \equiv 0$.

Concluimos assim que b não muda de sinal em K. Chamando de W o interior de B_1 e de Γ' o cone gerado pelo interior de B_2 temos que b não muda de sinal em $W \times B_2^0$ e então por homogeneidade garantimos que b não muda de sinal em $W \times \Gamma'$. (c.q.d.)

§ 2 - Construção Formal de uma Parametriz

Assumimos que temos uma fatoração do tipo (2.1.5) no conjunto $W \times \Gamma \subset R^{n+1} \times R_{n-1}$ onde $n = N - 1$, W é vizinhança da origem em R^{n+1} e Γ é um cone aberto em R_{n+1}. É conveniente mudar o nome das coordenadas $(y^1,\dots,y^{N-1},y^N)$ para $(x^1,\dots,x^n,t)$ em R^{n+1} e $(\eta_1,\dots,\eta_{N-1},\eta_N)$ para $(\xi_1, \dots,\xi_n,\tau)$ em R_{n+1} onde denotaremos por

$$x = (x^1,\dots,x^n) \quad e \quad \xi = (\xi_1,\dots,\xi_n)$$

Assim,

$$p(x,t,\xi,\tau) = q(x,t,\xi,\tau)\ (\tau-\lambda(x,t,\xi)) \tag{2.2.1}$$

quando $(x,t) \in W$ e $(\xi,\tau) \in \Gamma$. No parágrafo 1 assumimos que Γ era uma vizinhança de um ponto η^0 tal que $p(0,\eta^0) = 0$, em analogia suponhamos que Γ é uma vizinhança de um ponto (ξ^0,τ^0) tal que

$p(0,0,\xi^0,\tau^0) = 0$ ou seja que $\tau^0 = \lambda(0,0,\xi^0)$.

Lembramos que q e λ são funções analíticas de todos os seus argumentos, que q não se anula em nenhum ponto de $W \times \Gamma$, que q e λ são funções positivamente homogenea com relação a (ξ,τ) (λ depende somente de ξ!) de grau $(m-1)$ e 1, respectivamente.

Seja g qualquer uma das funções g_j para $j > 0$, na partição da unidade sobre $R_{n+1}|\{0\}$ introduzida no parágrafo 1.

Gostaríamos de construir uma "boa" aproximação K para uma solução E do problema "operacional",

$$P(x,t,D_x,D_t)\ E = g(D_x,D_t),$$

onde $g(D_x,D_t)$ é um operador definido por

$$g(D_x,D_t)u(x,t) = (2\pi)^{-n-1}\iint e^{i(<x,\xi>+t\tau)}g(\xi,\tau)\hat{u}(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

Nossa aproximação para E será o operador

$$K\ u(x,t) = (2\pi)^{-n-1}\iint e^{i(<x,\xi>+t\tau)}K(x,t,\xi,\tau)g(\xi,\tau)\hat{u}(\xi,\tau)\ d\xi d\tau$$

O termo "boa" aproximação se tornará claro no final desse trabalho.

Para descrever em mais detalhes o "símbolo" $K(x,t,\xi,\tau)$, usaremos a consequência de nossa hipótese básica (2.1.7), ou seja, que $b(x,t,\xi)$ não muda de sinal em $W \times \Gamma'$. Suponhamos que,

(2.2.2) $$b(x,t,\xi) \geq 0 \quad \text{para} \quad (x,t) \in W, \quad \xi \in \Gamma'$$

O caso onde $b(x,t,\xi) \leq 0$ pode ser tratado de maneira análoga.

Seja T um número maior do que zero (0) (pequeno) escolhido arbitrariamente e tomamos

$$K(x,t,\xi,\tau) = \int_{-T}^{t} e^{i\phi(x,t,t',\xi)-i\tau(t-t')}k(x,t,t',\xi,\tau)\, dt'$$

onde $(x,t) \in W$ e $(\xi,\tau) \in \Gamma$

Note que,

$$P(x,t,D_x,D_t)Ku(x,t) = P(x,t,D_x,D_t)\Big[(2\pi)^{-n-1}\iint e^{i(<x,\xi>+t\tau)}$$

$$K(x,t,\xi,\tau)g(\xi,\tau)\hat{u}(\xi,\tau)d\xi d\tau\Big] =$$

$$= (2\pi)^{-n-1}\iint P(x,t,D_x,D_t)\left[e^{i(<x,\xi>+t\tau)}K(x,t,\xi,\tau)\right]g(\xi,\tau)\hat{u}(\xi,\tau)\, d\xi d\tau$$

e para ser igual a

$$g(D_x,D_t)u(x,t) = (2\pi)^{-n-1}\iint e^{i(<x,\xi>+t\tau)}g(\xi,\tau)\hat{u}(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

devemos ter

$$P(x,t,D_x,D_t)\left[e^{i(<x,\xi>+t\tau)}K(x,t,\xi,\tau)\right] = e^{i(<x,\xi>+t\tau)}$$

mas

$$P(x,t,D_x,D_t)\left[e^{i(<x,\xi>+t\tau)}K(x,t,\xi,\tau)\right] =$$

$$= e^{i(<x,\xi>+t\tau)}P(x,t,D_x+\xi,D_t+\tau)K(x,t,\xi,\tau)$$

então devemos ter

(2.2.3) $$P(x,t,D_x+\xi,D_t+\tau)K(x,t,\xi,\tau) \sim 1,$$

tendo em mente que $(\xi,\tau) \in$ supp g e onde $\sim$ significa que $P(x,t,D_x+\xi,D_t+\tau)K(x,t,\xi,\tau) = 1$ módulo símbolo de um operador analítico regularizante.

Definamos,

$$K_0(x,t,\xi,\tau) = \int_{-T}^{t} e^{i\phi(x,t,t',\xi)+i\tau t'}k(x,t,t',\xi,\tau)dt'$$

isto é, $K_0(x,t,\xi,\tau) = e^{i\tau t}K(x,t,\xi,\tau)$.

É fácil ver que a condição (2.2.3) é equivalente a

(2.2.4) $$P(x,t,D_x+\xi,D_t)K_0(x,t,\xi,\tau) \sim e^{i\tau t}$$

Um cálculo direto mostra que

$$P(x,t,D_x+\xi,D_t)\ K_0 = \int_{-T}^{t} P(x,t,D_x+\xi,D_t)(e^{i\phi}k)e^{i\tau t'}dt'$$

(2.2.5)

$$+ \frac{1}{\sqrt{-1}} \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j!} \{P^{(0,j)}(x,t,D_x+\xi,D_t)D_{t'}^{j-1}(e^{i\phi+i\tau t'}k)\}_{t'=t}$$

onde $P^{(0,j)}(x,t,D_x,D_t)$ é um operador diferencial cujo símbolo é dado por

$$P^{(0,j)}(x,t,\xi,\tau) = (\frac{\partial}{\partial\tau})^j\ P(x,t,\xi,\tau), \quad \text{onde}\quad P(x,t,\xi,\tau)$$

é o símbolo do operador diferencial $P(x,t,D_x,D_t)$.

<u>Observação</u>

Ver prova de (2.2.5) no apêndice-A

Como $D_{t'}^{j-1}(e^{i\phi+i\tau t'}k) = e^{i\tau t'}(D_{t'}+\tau)^{j-1}(e^{i\phi}k)$; em vista de (2.2.5) tentaremos resolver (2.2.4), resolvendo

(2.2.6) $$P(x,t,D_x+\xi,D_t)\ (e^{i\phi}k) \sim 0,$$

(2.2.7) $$\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{j!} P^{(0,j)}(x,t,D_x+\xi,D_t)\ (D_{t'}+\tau)^{j-1}(e^{i\phi}k) \sim \sqrt{-1}$$

quando $t' = t$.

Construiremos as funções ϕ e k da seguinte maneira: elas serão funções analíticas de (x,t,ξ,τ) em $W \times \Gamma$ (talvez depois de diminuir esse conjunto). Além disso, ϕ será positiva homogênea de grau 1 com relação a ξ, enquanto

$$k(x,t,t',\xi,\tau) = \sum_{j=m-1}^{+\infty} k_j(x,t,t',\xi,\tau),$$

com k_j positiva homogênea de grau $-j$ com relação a (ξ,τ). Podemos reescrever (2.2.6) na forma

(2.2.8) $$P(x,t,D_x+\xi+\phi_x,D_t+\phi_t)k \sim 0$$

O termo de mais alto grau de homogeneidade em relação a (ξ,τ) presente no lado esquerdo de (2.2.8) é dado por

$$p(x,t,\xi+\phi_x,\phi_t)k_{m-1}$$

e será nulo se exigirmos que $p(x,t,\xi+\phi_x,\phi_t) = 0$ pois, se exigirmos que $k_{m-1} = 0$ obteríamos $k = 0$ visto que os k_j serão determinados por recorrência. Como

$$p(x,t,\xi+\phi_x,\phi_t) = q(x,t,\xi+\phi_x,\phi_t)(\phi-\lambda(x,t,\xi+\phi_x)),$$

temos que $p(x,t,\xi+\phi_x,\phi_t) = 0$ é satisfeito se

(2.2.9) $$\phi_t = \lambda(x,t,\xi+\phi_x),$$

à qual adicionamos a condição inicial

(2.2.10) $$\phi = 0 \quad \text{quando} \quad t = t'$$

Como λ é uma função analítica de todas as variáveis, existe uma única solução $\phi(x,t,t',\xi)$ de (2.2.9)-(2.2.10), analítica com relação a todas suas variáveis e positiva homogênea de grau 1 com relação a ξ. (Ver problema de Cauchy-Apêndice A).

Aqui, t e t' permanecem próximos do zero; (x,t) e (x,t') estão próximos da origem e ξ está em uma vizinhança cônica de ξ^0.

De (2.2.10) segue que ϕ_x é pequeno para $t \sim t'$ e então o lado direito de (2.2.9) faz sentido.

De fato,

$$\lim_{t\to t'} |\phi_x(x,t,t',\xi)| = |\phi_x(x,t',t',\xi)| = 0, \quad \text{pois}$$

$$\phi_x(x,t,t',\xi)\big|_{t=t'} = \frac{\partial}{\partial x}\phi(x,t',t',\xi) = \frac{\partial}{\partial x}0 = 0$$ (as variáveis são independentes). Assim ϕ_x é pequeno quando $t \sim t'$.

Observamos também que o fato de $\xi + \phi_x$ estar próximo de $\rho\xi^0$ (no domínio complexo) implica que ϕ_t deve estar próximo de $\rho\tau^0$ e, consequentemente, $q(x,t,\xi+\phi_x,\phi_t)$ está bem definida.

De fato, como $(x,t) \sim (0,0)$ e $\xi + \phi_x \sim \rho\xi^0$ implica que $\lambda(x,t,\xi+\phi_x) \sim \lambda(0,0,\rho\xi^0) = \rho\,\lambda(0,0,\xi^0) = \rho\tau^0$. Mas $\phi_t = \lambda(x,t,\xi+\phi_x)$ e portanto $\phi_t \sim \rho\tau^0$

Observação:

ρ é um número positivo. Note que $\xi^0 \neq 0$ pois, como $\tau^0 = \lambda(0,0,\xi^0)$ temos $p(0,0,\xi^0,\tau^0) = 0$, mas

$$p(0,0,\xi^0,\tau^0) = \sum_{\substack{|\alpha|=|\alpha'|+j \\ |\alpha|=m}} a_\alpha(0,0)\, \xi^{0\alpha'}\, \tau^{0j}$$

e se $\xi^0 = 0$ temos $p(0,0,0,\tau^0) = \tau^{0m} a_{(0,\dots,0,m)}(0,0)=0 \Rightarrow \tau^0 = 0$, o que nos dá uma contradição pois $(\xi^0,\tau^0) \neq (0,0)$.

Afirmamos que o termo de grau $-\nu \leq 0$ no lado esquedo de (2.2.8) tem a forma

$$\sum_{j=1}^{n} P_{\xi_j}(x,t,\xi+\phi_x,\phi_t) D_x^j\, k_{m-1+\nu} + P_\tau(x,t,\xi+\phi_x,\phi_t) D_t k_{m-1+\nu}$$

(2.2.11)

$$+C(x,t,t',\xi) k_{m-1+\nu} + \sum_{\nu'=0}^{\nu-1} \tilde{Q}_\nu^{\nu'}(x,t,t',\xi,D_x,D_t) k_{m-1+\nu'}$$

onde C e os coeficientes dos operadores diferenciais $\tilde{Q}_\nu^{\nu'}$ são funções analíticas de x,t,t' (próximos da origem) e de ξ (no cone aberto Γ'). Todos esses coeficientes são homogêneos com relação a ξ; o grau de homogeneidade de C é $m-1$, e dos coeficientes de $\tilde{Q}_\nu^{\nu'}$ é $m-1-\nu+\nu'$.

Observação:

Ver prova dessa afirmação no apêndice-A.

Como $p(x,t,\xi,\tau) = q(x,t,\xi,\tau)(\tau-\lambda(x,t,\xi))$, afirmamos que

$p_{\xi_j}(x,t,\xi+\phi_x,\phi_t) = -q(x,t,\xi+\phi_x,\phi_t)\lambda_{\xi_j}(x,t,\xi+\phi_x)$ e

$p_\tau(x,t,\xi+\phi_x,\phi_t) = q(x,t,\xi+\phi_x,\phi_t)$.

De fato,

$$\frac{\partial}{\partial\xi_j} p(x,t,\xi,\tau) = \frac{\partial}{\partial\xi_j} q(x,t,\xi,\tau)(\tau-\lambda(x,t,\xi)) + q(x,t,\xi,\tau)\left(-\frac{\partial}{\partial\xi_j}\lambda(x,t,\xi)\right)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} p_{\xi_j}(x,t,\xi+\phi_x,\phi_t) &= q_{\xi_j}(x,t,\xi+\phi_x,\phi_t)(\phi_t-\lambda(x,t,\xi+\phi_x)+ \\ &+ q(x,t,\xi+\phi_x,\phi_t)(-\lambda_{\xi_j}(x,t,\xi+\phi_x)) = \\ &= -q(x,t,\xi+\phi_x,\phi_t)\lambda_{\xi_j}(x,t,\xi+\phi_x) \end{aligned}$$

Analogamente prova-se que $p_\tau(x,t,\xi+\phi_x,\phi_t) = q(x,t,\xi+\phi_x,\phi_t)$.

Definamos,

$$A_j = A_j(x,t,t',\xi) = \lambda_{\xi_j}(x,t,\xi+\phi_x), \quad (j=1,2,\dots,n)$$

$$A_0 = A_0(x,t,t',\xi) = C(x,t,t',\xi)/q(x,t,\xi+\phi_x,\phi_t),$$

$$\mathcal{Q}_\nu^{\nu'} = \mathcal{Q}_\nu^{\nu'}(x,t,t',\xi,D_x,D_t) = q(x,t,\xi+\phi_x,\phi_t)^{-1}\tilde{\mathcal{Q}}_\nu^{\nu'}(x,t,t',\xi,D_x,D_t)$$

Observamos que, como C tem grau $m-1$ e q tem grau $m-1$ então A_0 tem grau zero, como λ tem grau 1, λ_{ξ_j} tem grau zero e portanto A_j tem grau zero e como os coeficientes de $\tilde{\mathcal{Q}}_\nu^{\nu'}$ tem grau $m-1-\nu+\nu'$ então os coeficientes de $\mathcal{Q}_\nu^{\nu'}$ têm grau $N'-N$.

Usando (2.2.11) e considerando (2.2.6) obtemos

$$(2.2.12) \quad D_t k_{m-1+\nu} - \sum_{j=1}^{n} A_j D_{x_j} k_{m-1+\nu} + A_0 k_{m-1+\nu} + \sum_{\nu'=0}^{\nu-1} \mathcal{Q}_\nu^{\nu'} k_{m-1+\nu'} = 0$$

e quando, $\nu = 0$, não existe soma em ν'.

As equações (2.2.12) não são suficientes para determinar os k_j completamente. Para fazer isso devemos adicionar condições quando

$t = t'$. Essas serão derivadas de (2.2.7). Em (2.2.7) também identificamos os termos com o mesmo grau de homogeneidade com relação a (ξ,τ) nos dois lados. Obteremos equações do tipo:

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j!} p^{(0,j)}(x,t,\xi+\phi_x,\phi_t)(\phi_{t'}+\tau)^{j-1}/_{t=t'}\ k_{m-1+\nu}(x,t',t',\xi,\tau)+$$

(2.2.13)

$$+\sum_{N'=0}^{\nu-1} \tilde{R}_{\nu}^{\nu'}(x,t',\xi,\tau,D_x,D_t,D_{t'})\ k_{m-1+\nu'}(x,t,t',\xi,\tau)/_{t=t'} = \varepsilon_{\nu},$$

onde $\varepsilon_{\nu} = i$ se $\nu = 0$, $\varepsilon_{\nu} = 0$ se $\nu > 0$.

Notemos que, quando $t = t'$, $\phi_x = 0$ e $\phi_{t'} = -\phi_t =$ $= -\lambda(x,t',\xi)$. Também, por (2.2.1) $p(x,t,\xi,\lambda(x,t,\xi)) = 0$

Proposição 2.2.1

Os coeficientes de $k_{m-1+\nu}$ em (2.2.13), ou seja,

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j!} p^{(0,j)}(x,t,\xi+\phi_x,\phi_t)(\phi_{t'}+\tau)^{j-1}/_{t=t'}$$ é igual a

$$\frac{p(x,t',\xi,\tau)}{\tau-\lambda(x,t',\xi)} = q(x,t',\xi,\tau).$$

Prova

$$\frac{\partial^j p}{\partial\tau^j} = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} \left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^{j-k} q \left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^{k}(\tau-\lambda)$$

Quando, $k = 0$, $\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^{k}(\tau-\lambda) = \tau-\lambda$

$k = 1$, $\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^{k}(\tau-\lambda) = 1$

$k = 2,\dots,j$, $\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^{k}(\tau-\lambda) = 0$,

então,

$$\frac{\partial^j p}{\partial\tau^j} = \binom{j}{0}\left(\frac{\partial q}{\partial\tau}\right)^{j}(\tau-\lambda) + \binom{j}{1}\left(\frac{\partial q}{\partial\tau}\right)^{j-1}.\ 1.$$

Portanto,

$$p^{(0,j)}(x,t,\xi+\phi_x,\phi_t)/_{t=t'} = \frac{\partial^j}{\partial\tau^j} q(x,t,\xi+\phi_x,\phi_t)(\phi_t-\lambda(x,t,\xi+\phi_x))/_{t=t'} +$$

$$+ j\frac{\partial^{j-1}}{\partial\tau^{j-1}} q(x,t,\xi+\phi_x,\phi_t)/_{t=t'} = j\frac{\partial^{j-1}}{\partial\tau^{j-1}} q(x,t',\xi,\lambda(x,t',\xi))$$

$$\text{e} \quad \frac{1}{j!} p^{(0,j)}(x,t,\xi+\phi_x,\phi_t)/_{t=t'} = \frac{1}{(j-1)!}\frac{\partial^{j-1}}{\partial\tau^{j-1}} q(x,t',\xi,\lambda(x,t',\xi))$$

Logo,

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j!} p^{(0,j)}(x,t,\xi+\phi_x,\phi_t)(\phi_{t'}+\tau)^{j-1}/_{t=t'} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{(j-1)!} \left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^{j-1} q(x,t',\xi,\lambda(x,t',\xi)) \ (\tau-\lambda(x,t',\xi))^{j-1} =$$

$$= \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{j!} \left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^{j} q(x,t',\xi,\lambda(x,t',\xi)) \ (\tau-\lambda(x,t',\xi))^{j} = q(x,t',\xi,\tau)$$

(desenvolvimento de Taylor, de q em τ, em torno do ponto $\lambda(x,t',\xi)$). (c.q.d)

Dividindo ambos os membros de (2.2.13) por $q(x,t',\xi,\tau)$ e definindo

$R_{\nu}^{\nu'} = -q(x,t',\xi,\tau)^{-1}\tilde{R}_{\nu}^{\nu'}$, obtemos para $\nu = 0$,

(2.2.14)$_0$ $\quad k_{m-1} = \sqrt{-1}\, q(x,t',\xi,\tau)^{-1}$ quando $t = t'$

para $\nu > 0$,

(2.2.14)$_\nu$ $\quad k_{m-1+\nu}(x,t',t',\xi,\tau) =$

$$= \sum_{N'=0}^{N-1} R_N^{N'}(x,t',\xi,\tau,D_x,D_t,D_{t'})k_{m-1+N'}(x,t,t',\xi,\tau)/_{t=t'}$$

$$(2.2.14)_\nu \qquad k_{m-1+\nu}(x,t',t',\xi,\tau) =$$

$$= \sum_{\nu'=0}^{\nu-1} R_\nu^{\nu'}(x,t', \ , \ ,D_x,D_t,D_{t'})k_{m-1+\nu'}(x,t,t',\xi,\tau)/_{t=t'}$$

A fatoração (2.2.1) foi obtida aplicando o Teorema das Funções Implícitas no ponto $(0,0,\xi^0,\tau^0)$ pertencente a $R^{n+1}\times(R_{n+1}|\{0\})$ - No sentido de funções analíticas no domínio complexo. Podemos portanto supor que $W = R^{n+1} \cap W^C$, onde W^C é uma vizinhança aberta da origem em C^{n+1} e Γ é a parte real de um cone Γ^C em C_{n+1}.

No que segue vamos supor que (ξ,τ) permanece fora de uma esfera de raio maior do que zero, por exemplo de raio 1/2. É conveniente tomar o "ponto de referência" (ξ^0,τ^0) pertencente à esfera unitária, e já observamos que $|\xi^0| \neq 0$. Colocando $\rho = (|\xi|^2+|\tau|^2)^{1/2}$, podemos supor que o cone Γ^C é da forma:

$$(\xi,\tau) \in \Gamma^C \quad \text{se} \quad |\xi-\rho\xi^0|^2 + |\tau-\rho\tau^0|^2 < \varepsilon^2\rho^2,$$

onde $\varepsilon > 0$ é pequeno. Na verdade, escolhendo $\varepsilon < |\xi^0|$; tomando $\gamma = |\xi^0| - \varepsilon$ (>0) temos, no cone Γ^C,

$$(3.0) \qquad |\xi| \geq \rho(|\xi^0|-|\rho^{-1}\xi-\xi^0|) > \gamma\rho$$

Em particular, $|\xi| > \frac{1}{2}\gamma$ se $\rho > \frac{1}{2}$.

Consideremos agora as equações (2.2.9) e (2.2.10) ou seja,

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{cases} \phi_t = \lambda(x,t,\xi+\phi_x) \\ \phi = 0 \quad \text{quando} \quad t = t' \end{cases}$$

Já sabemos que existe $\phi(x,t,t',\xi)$ analítica em uma vizinhança V de $(0,0,0,\xi^0)$ satisfazendo (I). Seja

$$V = W_1 \times (-t_0,t_0) \times M_1$$

Então ϕ pode ser estendida como uma função holomorfa em

$W_1^C \times \{t' : |t'| \leq t_0\} \times M_1^C$, onde W_1^C é uma vizinhança aberta de W_1 em C^{n+1}, M_1^C é uma vizinhança aberta de M_1 em C_n e t_0 podemos supor diminuido se for necessário.

Continuaremos a denotar por ϕ a nova função. Usando a homogeneidade de ϕ com relação a ξ podemos estende-la ao cone θ^C, gerado por M_1^C. Diminuindo W^C e ε tais que, $\overline{W^C} \subset W_1^C$ e $\overline{\Gamma'^C} \subset \theta^C$ podemos afirmar que ϕ é contínua de (x,t,t',ξ) no conjunto,

(3.1) $\qquad (x,t) \in \overline{W^C}, \quad |t'| \leq t_0, \quad \xi \in \overline{\Gamma'^C}, \quad |\xi| > 0$

e holomorfa no interior desse conjunto.

Lembrando que ϕ é homogênea de grau 1 com relação a ξ, é fácil ver que o conjunto dos pontos (x,t,t') onde ϕ é holomorga e limitada é independente de ξ.

A propriedade acima de ϕ é refletida em propriedades análogas de todos os coeficientes da equação (2.2.12), isto é, todos os coeficientes são funções contínuas em (3.1) e holomorfas no interior desse conjunto, depois de diminuido W^C, t_0 e Γ^C.

Uma propriedade análoga pode ser obtida para os coeficientes da condição inicial $(2.2.14)_\nu$, $\nu = 0, 1, \ldots$, exceto que a variável τ intervem também. Aqui, temos que $q(x,t',\xi,\tau)^{-1}$ e os outros coeficientes em $(2.2.14)_\nu$ são holomorfos e limitados em

(3.2) $\qquad (x,t) \in W^C, \quad |t'| < t_0, \; (\xi,\tau) \in \Gamma^C, \quad |\xi|^2 + |\tau|^2 > \frac{1}{4},$

depois de diminuido W^C, t_0 e Γ^C.

Realizaremos agora uma mudança das variáveis (x,t), cujo único objetivo é simplificar.

Introduzimos n funções holomorfas F^j, $j = 1,\ldots,n$, definidas pelo problema do valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{dF^j}{dt} + A_j(F^1,\ldots,F^n,t,t',\xi) = 0, \\ F^j/_{t=t'} = z^j, \quad j = 1, \ldots, n \end{cases}$$

onde $z = (z^1,\ldots,z^n)$ percorre uma vizinhança da origem em C^n.

Fazemos a seguinte mudança de variáveis:

(3.3) $x^j = F^j(z,t,t',\xi)$, $j = 1,\ldots,n$,

deixando t, t' e ξ fixos.

Observamos que é uma boa mudança de variáveis pois em $t = t'$ o jacobiano é igual a identidade e por continuidade existe uma vizinhança onde ele é diferente de zero.

Lema 3.1

Nas novas variáveis (z,t) o operador

$$D_t - \sum_{j=1}^{n} A_j D_{x^j}$$

torna-se simplesmente D_t.

Prova

Seja,

$$G(z,t,t',\xi) = G(z^1,\ldots,z^n,t,t',\xi) = (F^1(z,t,t',\xi),\ldots,F^n(z,t,t',\xi),t,t'\xi) =$$

$$= (G^1,\ldots,G^n,G^{n+1},G^{n+2},G^{n+3}) = (x^1,\ldots,x^n,t,t',\xi) =$$

$$= (x,t,t',\xi)$$

Então, $u(x,t,t',\xi) = (u\circ G\circ G^{-1})(x,t,t',\xi) =$

$$= (u\circ G)(z,t,t',\xi)$$

e portanto,

$$Pu(x,t,t',\xi) = P(u\circ G)(z,t,t',\xi) =$$

$$= D_t[(u\circ G)(z,t,t',\xi)] = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}[(u\circ G)(z,t,t',\xi)] =$$

$$= \frac{1}{i}\Big[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x^j}(G(z,t,t',\xi))\frac{\partial G^j}{\partial t}(z,t,t',\xi) + \frac{\partial u}{\partial t}(G(z,t,t',\xi))\frac{\partial G^{n+1}}{\partial t}(z,t,t',\xi)+$$

$$+ \frac{\partial u}{\partial t'}(G(z,t,t',\xi))\frac{\partial G^{n+2}}{\partial t}(z,t,t',\xi)+\frac{\partial u}{\partial \xi}(G(z,t,t',\xi))\frac{\partial G^{n+3}}{\partial t}(z,t,t',\xi)\Big] =$$

$$= \frac{1}{i}\Big[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x^j}(x,t,t',\xi)\frac{\partial F^j}{\partial t}(z,t,t',\xi) + \frac{\partial u}{\partial t}(x,t,t',\xi)\Big] =$$

$$= \frac{1}{i}\Big[\frac{\partial u}{\partial t}(x,t,t',\xi) - \sum_{j=1}^{n} A_j(F^1,\dots,F^n,t,t',\xi)\frac{\partial u}{\partial x^j}(x,t,t',\xi)\Big] =$$

$$= \frac{1}{i}\Big[\frac{\partial u}{\partial t}(x,t,t',\xi) - \sum_{j=1}^{n} A_j(x^1,\dots,x^n,t,t',\xi)\frac{\partial u}{\partial x^j}(x,t,t',\xi)\Big] =$$

$$= \Big(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n} A_j(x,t,t',\xi)\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x^j}\Big)u(x,t,t',\xi) =$$

$$= (D_t - \sum_{j=1}^{n} A_j D_{x^j})u(x,t,t',\xi) \qquad \text{(c.q.d.)}$$

Usando o lema (3.1) as equações (2.2.12) podem ser reescritas como

$$(3.4) \qquad (D_t+\hat{A}_0)k_{m-1+\nu} = \sum_{\nu'=0}^{\nu-1} \hat{Q}_\nu^{\nu'} k_{m-1+\nu'}$$

Os coeficientes dos operadores diferenciais $\hat{Q}_\nu^{\nu'}$, bem como $\hat{A}_0$, são funções de z,t,t',ξ, que podemos supor serem limitadas e holomorfas no conjunto aberto:

$$(3.5) \qquad (z,t) \in \hat{W}^C, \quad |t'| < t_0, \quad \xi \in \Gamma'^C, \quad |\xi| > \rho_0 \quad (\rho_0>0)$$

onde $\hat{W}^C$ é uma vizinhança aberta (suficientemente pequena) da origem em C^{n+1}. Note também que $\hat{Q}_\nu^{\nu'}$ são operadores diferenciais com relação a z e t, e que, para ν,ν' dados, seus coeficientes são homogêneos de grau $\nu'-\nu$ com relação a ξ.

Uma transformação análoga é realizada sobre as condições iniciais $(2.2.14)_N$, da qual obtemos:

$$(3.6)_0 \qquad k_{m-1} = \sqrt{-1}\ q(z,t',\xi,\tau)^{-1} \quad \text{quando} \quad t = t',$$

$$(3.6)_\nu \qquad k_{m-1+\nu} = \sum_{\nu'=0}^{\nu-1} \hat{R}_\nu^{\nu'} k_{m-1+\nu'} \quad \text{quando} \quad t = t', \quad \nu > 0.$$

Aqui $\hat{R}_\nu^{\nu'}$ é um operador diferencial em z,t,t' com coeficientes homogêneos de grau $\nu'-\nu$ com relação a (ξ,τ), holomorfos e limitados com relação a todos os argumentos no conjunto:

$$(3.7) \qquad (z,t) \in \hat{W}^C, \quad |t'| < t_0, \quad (\xi,\tau) \in \Gamma^C, \quad |\xi|^2+|\tau|^2 > \frac{1}{4}$$

<u>Observação</u>

Para não haver acúmulo de notação, continuamos denotando as novas funções com as mesmas letras k, q.

Definindo,

$$\hat{A}_{00} = \hat{A}_{c0}(z,t,t',\xi) = \int_{t'}^{t} \hat{A}_0(z,s,t',\xi)ds,$$

$$w_j = k_j \exp.\{\sqrt{-1}\ \hat{A}_{00}\}, \quad j = m-1, m, \ldots,$$

$$M^{\nu-\nu'} = e^{i\hat{A}_{00}}\ \hat{Q}_\nu^{\nu'}\ e^{-i\hat{A}_{00}} \quad \text{e}$$

$$N^{\nu-\nu'} = e^{i\hat{A}_{00}} \hat{R}_\nu^{\nu'}\ e^{-i\hat{A}_{00}},$$

podemos reescrever (3.4) como,

$$(3.8) \qquad D_t W_{m-1+\nu} = \sum_{\ell=1}^{\nu} M^{\ell} W_{m-1+\nu-\ell}, \quad \nu = 0,1,\ldots$$

e $(3.6)_\nu$, para $\nu > 0$, como

$$(3.9) \qquad W_{m-1+\nu} = \sum_{\ell=1}^{\nu} N^{\ell} W_{m-1+\nu-\ell},$$ quando $t = t'$ e a equação $(3.6)_0$

torna-se

$$(3.10) \qquad W_{m-1} = \sqrt{-1}\, q(z,t',\xi,\tau)^{-1}, \text{ quando } t = t'$$

<u>Prova de (3.8), $(3.9)_\nu$ $(\nu>0)$ e (3.10)</u>

<u>(3.8)</u>:

$$(D_t+\hat{A}_0)k_{m-1+\nu} = D_t k_{m-1+\nu} + \hat{A}_0\, k_{m-1+\nu} =$$

$$= D_t(W_{m-1+\nu}e^{-i\hat{A}_{00}}) + \hat{A}_0(W_{m-1+\nu}e^{-i\hat{A}_{00}}) =$$

$$= (D_t\, W_{m-1+\nu})e^{-i\hat{A}_{00}} + W_{m-1+\nu}(\tfrac{1}{i}(-i\ \hat{A}_0)e^{-i\hat{A}_{00}}) + \hat{A}_0 W_{m-1+\nu}\, e^{-i\hat{A}_{00}}$$

$$= e^{-i\hat{A}_{00}}\, D_t\, W_{m-1+\nu}$$

$$\sum_{\nu'=0}^{\nu-1} \hat{Q}_{\nu}^{\nu'}\, k_{m-1+\nu'} = \sum_{\nu'=0}^{\nu-1} (e^{-i\hat{A}_{00}} M^{-\nu'} e^{i\hat{A}_{00}})\ (W_{m-1+\nu'}e^{-i\hat{A}_{00}}) =$$

$$= \sum_{\nu'=0}^{\nu-1} e^{-i\hat{A}_{00}} [M^{\nu-\nu'}(e^{i\hat{A}_{00}} W_{m-1+\nu'}e^{-i\hat{A}_{00}})] = e^{-i\hat{A}_{00}} \sum_{\nu'=0}^{\nu-1} M^{\nu-\nu'} W_{m-1+\nu'}$$

Fazendo $\nu-\nu' = \ell$ temos,

$$\sum_{\nu'=0}^{\nu-1} M^{\nu-\nu'} W_{m-1+\nu'} = \sum_{\ell=1}^{\nu} M^{\ell} W_{m-1+\nu-\ell} \quad \text{e}$$

portanto (3.4) pode ser escrito como

$$D_t W_{m-1+\nu} = \sum_{\ell=1}^{\nu} M^{\ell} W_{m-1+\nu-\ell}, \quad \nu = 0,1,\ldots$$

o que prova (3.8).

De maneira análoga mostra-se que $(3.9)_\nu$, para $\nu > 0$ e (3.10) são verdadeiras (c.q.d)

Quando $\nu = 0$, obtemos:

$$\begin{cases} D_t\, W_{m-1} = 0 \\ W_{m-1}/_{t=t'} = \sqrt{-1}\; q(z,t',\xi,\tau)^{-1} \end{cases}$$

cuja solução é dada por:

$$W_{m-1}(z,t,t',\xi,\tau) = \sqrt{-1}\; q(z,t',\xi,\tau)^{-1}$$

Por iteração e integrando, obtemos as soluções $W_{m-1+\nu}$ para $\nu > 0$.

É importante notar que $\hat{A}_0$ e $\hat{A}_{00}$ são ambas homogêneas de grau zero com relação a ξ, e são holomorfas (e limitadas) com relação a z,t,t',ξ no conjunto aberto (3.5). Que $\hat{A}_{00}$ é holomorfa (Ver Apêndice B).

Necessitamos algumas observações sobre os operadores diferenciais M^{ℓ} e N^{ℓ}. Sabemos de (2.2.11) que $\tilde{Q}_{\nu}^{\nu'}$ é o termo homogêneo de grau $m-1-\nu+\nu'$, em $P(x,t,D_x+\xi+\phi_x,D_t+\phi_t)$, com relação a ξ. Assim, só depende do número $\nu-\nu'$, isto é, $\tilde{Q}_{1000}^{999} \equiv \tilde{Q}_1^0$, o que justifica a notação $M^{\nu-\nu'}$. Além disso, sabemos que $\nu-\nu'$ deve ser menor ou igual a m-1 pois se $\nu-\nu' > m-1$, $\tilde{Q}_{\nu}^{\nu'} \equiv 0$ e portanto $M^{\nu-\nu'} \equiv 0$ e a ordem desses operadores deve ser menor ou igual a $\nu-\nu'+1$ (essas observações seguem do apêndice-A).

Resumindo, podemos afirmar (depois de diminuir $\tilde{W}^C$ e t_0 se preciso):

(3.11) Os coeficientes de M^ℓ são funções holomorfas e limitadas de z,t,t',ξ no conjunto (3.5); a ordem de M^ℓ é no máximo $\ell + 1 \leq m$ e $M^\ell \equiv 0$ se $\ell > m - 1$.

Em particular, a soma em (3.8) é realizada de $\ell = 1$ até $\ell = \inf(\nu, m-1)$

Com relação a N^ℓ retornamos para os operadores $\tilde{R}_\nu^{\nu'}$ e para as equações (2.2.7) e (2.2.13). O operador $\tilde{R}_\nu^{\nu'}$ é construído do termo em

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j!} P^{(0,j)}(x,t,D_x+\xi+\phi_x, D_t+\phi_t)(D_{t'}+\tau+\phi_{t'})^{j-1}$$

que é homogêneo de grau $m-1-\nu+\nu'$ com relação a (ξ,τ). Em particular ele depende somente do valor $\nu-\nu'$, o que justifica a notação $N^{\nu-\nu'}$.

Podemos afirmar:

(3.12) Os coeficientes de N^ℓ são funções holomorfas e limitadas de z,t,t',ξ,τ na intersecção dos conjuntos (3.5) e (3.7); a ordem de N^ℓ é no máximo $\ell \leq m - 1$ e $N^\ell \equiv 0$ se $\ell > m - 1$.

A soma em $(3.9)_\nu$ é realizada para

$\ell = 1$ até $\ell = \inf(\nu, m-1)$.

<u>Observação</u>

A intersecção dos conjuntos (3.5) e (3.7) é não vazia pois, para $\rho > \frac{1}{2}$ de (3.0) sabemos que $|\xi| > \frac{1}{2}\gamma$ e fazendo $\rho_0 = \frac{1}{2}\gamma > 0$ no conjunto (3.5) vemos que a intersecção é não vazia.

Nosso objetivo agora é estimar as soluções w_j, $j=m-1,m,\ldots$.

Usaremos a notação,

$d(z,t-t',t') = (r-|z_1|) \ldots (r-|z_n|)(r-|t-t'|)(r-|t'|)$

Se $r > 0$ é suficientemente pequeno, temos:

<u>Lema 3.2</u>.

Para $C > 0$ suficientemente grande, para todo $j=m-1,m,\ldots,$ para todo z,t,t', tais que

(3.13) $\quad |z_i| < r \quad (1 \leq i \leq n), \quad |t-t'| < r, \quad |t'| < r,$

e todo $(\xi,\tau) \in \Gamma^C$, $|\xi|^2 + |\tau|^2 > \frac{1}{4}$, temos

(3.14) $\quad |w_j| \leq C^{j+1} j! d(z,t-t',t')^{-mj} (|\xi|^2+|\tau|^2)^{-j/2}$

Antes de iniciarmos a prova faremos as seguintes observações:

1 - Impomos $r > 0$ suficientemente pequeno para que o fêcho do polidisco definido por (3.13) em C^{n+2} esteja contido no conjunto $(z,t) \in \hat{W}^C$, $|t'| < t_0$.

2 - w_j é positiva homogênea de grau $-j$ com relação a (ξ,τ) e portanto, basta mostrar que (3.14) é válida para $|\xi|^2+|\tau|^2=1$, isto é, que

$$|w_j| \leq C^{j+1} j!\ d(z,t-t',t')^{-mj}$$

3 - Podemos tomar $m > 1$ pois, se $m = 1$, o lado direito de (3.8) e $(3.9)_\nu$ são identicamente nulos (desde que a soma é realizada para $\ell=1$ até $\ell = \inf(\nu,m-1)$). Neste caso as soluções são dadas por

$w_{m-1} = \sqrt{-1}\ q(z,t',\xi,\tau)^{-1}$; $w_{m-1+\nu} \equiv 0$ para $\nu > 0$

Para $m = 1$ temos,

$$w_{m-1} = w_0 = \frac{\sqrt{-1}}{q(z,t',\xi,\tau)}$$. Sabemos que $q(z,t',\xi,\tau)^{-1}$ é holomorfa em

$$(z,t) \in \hat{W}^C, \quad |t'| < t_0, \quad (\xi,\tau) \in \Gamma^C, \quad |\xi|^2 + |\tau|^2 > \frac{1}{4}$$

e que o fêcho do polidisco (3.13) está contido no conjunto $(z,t) \in \hat{W}^C$, $|t'| < t_0$; logo $|w_0| \leq C$, isto é, vale o lema 3.2.

Lema 3.3

A estimativa (3.14) é verdadeira para todo $j \leq J < +\infty$ desde que escolhemos C suficientemente grande e r suficientemente pequeno.

Prova

Consideremos o compacto

$$K = \{(z,t,t',\xi,\tau): |z_i| \leq r \quad (1 \leq i \leq n), \quad |t-t'| \leq r, \quad |t'| \leq r, \quad |\xi|^2 + |\tau|^2 = 1,$$
$$(\xi,\tau) \in \Gamma^C\}$$

Como w_j é holomorfa no conjunto,

$$(z,t) \in \hat{W}^C, \quad |t'| < t_0, \quad (\xi,\tau) \in \Gamma^C, \quad |\xi|^2 + |\tau|^2 > \frac{1}{4},$$

que contem K então

$$|w_j| \leq L_j, \quad j = 1, \ldots, J$$

no polidisco (3.13) e $|\xi|^2 + |\tau|^2 = 1$. Seja $L = \max\limits_{1 \leq j \leq J} \{L_j\}$.

Assim,

$$|w_j| \leq L, \quad j = 1, \ldots, J$$

para (z,t,t') no polidisco (3.13) e $|\xi|^2 + |\tau|^2 = 1$.

Como $d(z,t-t',t') \leq r^{n+2}$ temos $d(z,t-t',t')^{-mj} \geq j!(r^{n+2})^{-mj}$.

e portanto $j!\, d(z,t-t',t')^{-mj} \geq j!\,(r^{n+2})^{-mj}$. Seja $C > 0$ uma constante tal que $C^{j+1} j!(r^{n+2})^{-mj} \geq L$ para $1 \leq j \leq J$, logo

$$C^{j+1} j!\, d(z,t-t',t')^{-mj} \geq C^{j+1} j!(r^{n+2})^{-mj} \geq L \geq |w_j|$$

ou seja,

$$|w_j| \leq C^{j+1}\, j!\; d(z,t-t',t')^{-mj}, 1 \leq j \leq J < +\infty \qquad \text{(c.q.d.)}$$

Em Lars Hörmander [9] (pg.117) encontramos os seguintes resultados

Lema 3.4

Se v é uma função analítica de uma variável complexa θ quando $|\theta| < 1$, se

$$|v'(\theta)| \leq C(1-|\theta|)^{-a-1}, \quad |\theta| < 1, \text{ e } \quad v(0) = 0,$$

onde $a > 0$, segue que

$$|v(\theta)| \leq C\, a^{-1}(1-|\theta|)^{-a-1}, \quad |\theta| < 1$$

Lema 3.5

Se v é analítica quando $|\theta| < 1$ e

$$|v(\theta)| \leq C(1-|\theta|)^{-a}, \quad |\theta| < 1,$$

onde $a > 0$, segue que

$$|v'(\theta)| \leq C.e.(1+a)\;(1-|\theta|)^{-a-1}, \quad |\theta| < 1.$$

Prova do Lema 3.2

Pelo lema 3.3 já sabemos que (3.14) é verdadeira para todo $j \leq J < +\infty$, desde que escolhemos C suficientemente grande e r suficientemente pequeno. Suponhamos que $J > 2m-1$ e provemos que (3.14) vale para todo j (aumentando C se for necessário).

Seja,

$$v_j = w_j - \sum_{\ell=1}^{m-1} N^{\ell} w_{j-\ell}$$

De (3.8) derivamos que,

$$(3.15)\qquad D_t v_j = \sum_{\ell=1}^{m-1} \tilde{M}^{\ell} w_{j-\ell}, \text{ onde } \tilde{M}^{\ell} = M^{\ell} - (D_t \circ N^{\ell})$$

e portanto $\tilde{M}^{\ell}$ são operadores diferenciais de ordem no máximo $\ell + 1 \leq m$ (em z,t e t') cujos coeficientes são funções holomorfas e limitadas de z,t,t',ξ,τ na intersecção dos conjuntos (3.5) e (3.7) (depois de diminuí-los se for necessário).

A prova será feita por indução sobre j e assumimos que (3.14) vale para $j-\ell$, $1 \leq \ell \leq m-1$.

Pela hipótese de indução sabemos que,

$$|w_{j-\ell}| \leq C^{(j-\ell)+1}(j-\ell)!\; d(z,t-t',t')^{-m(j-\ell)} =$$

$$= C^{(j-\ell)+1}(j-\ell)!\; (r^{n+2})^{-m(j-\ell)} \left(1 - \frac{|z_1|}{r}\right)^{-m(j-\ell)} \cdots \left(1 - \frac{|z_n|}{r}\right)^{-m(j-\ell)} \times$$

$$\times \left(1 - \frac{|t-t'|}{r}\right)^{-m(j-\ell)} . \left(1 - \frac{|t'|}{r}\right)^{-m(j-\ell)}$$

Aplicando o lema (3.5) várias vezes concluimos que existe uma constante $C_1 > 0$, independente de ℓ,z,t,t',ξ,τ e j tal que

$$|\tilde{M}^{\ell} w_{j-\ell}| \leq C_1\, C^{j-\ell+1}(j-\ell)!\, e^{\ell+1}\, \frac{(mj-m\ell+1)\ldots(mj-m\ell+\ell+1)}{d(z,t-t',t')^{m(j-\ell)+\ell+1}} .$$

Assim,

$$|D_t v_j| \leq \sum_{\ell=1}^{m-1} \left[C_1 C^{j+1} C^{-\ell} j!\, \frac{(j-\ell)!}{j!}\, e^{\ell} e\, d(z,t-t',t')^{-mj}\, \frac{m(j-\ell+\frac{1}{m})\ldots m(j-\ell+\frac{\ell+1}{m})}{d(z,t-t',t')^{-m\ell+\ell+1}}\right] =$$

$$= C^{j+1} j!\, d(z,t-t',t')^{-mj} C_1 e \left[\sum_{\ell=1}^{m} \left(\frac{e}{C}\right)^{\ell} \frac{(j-\ell)!}{j!}\, m^{\ell+1}\, \frac{(j-\ell+\frac{1}{m})\ldots(j-\ell+\frac{\ell+1}{m})}{d(z,t-t',t')^{-m\ell+\ell+1}}\right]$$

Como $m > 1$ e $\ell \geq 1$ temos $\ell + 1 \leq m\ell$ o que implica $d(z,t-t',t')^{m\ell-\ell-1} \leq 1$, desde que $d(z,t-t',t') < 1$.

Logo,

$$(3.16)\qquad |D_t v_j| \le C^{j+1} j!\, d(z,t-t',t')^{-mj} C_1 \,.\, e \,.\, B,$$

onde $B = \sum_{\ell=1}^{m} (\frac{e}{C})^{\ell} \frac{(j-\ell)!}{j!} m^{\ell+1} (j-\ell+\frac{1}{m}) \ldots (j-\ell+\frac{\ell+1}{m})$

Observando que,

$\frac{(j-\ell)!}{j!} (j-\ell+\frac{1}{m}) \ldots (j-\ell+\frac{\ell+1}{m}) \le j$ e $m^{\ell+1} \le m^m$ (pois, $m > 1$ e ℓ percorre de 1 até $m-1$), então

$$B \le \sum_{\ell=1}^{m} (\frac{e}{C})^{\ell} j\, m^m = m^m\, j \sum_{\ell=1}^{m} (\frac{e}{C})^{\ell} \le m^m\, j \sum_{\ell=1}^{\infty} (\frac{e}{C}) . (\frac{e}{C})^{\ell-1} =$$

$$= m^m j \frac{\frac{e}{C}}{1-\frac{e}{C}} = m^m j . e (C-e)^{-1} \quad \text{(Podemos supor } C > e\text{)}$$

Assim,

$$|D_t v_j| \le C^{j+1} j!\, d(z,t-t',t')^{-mj} j C_1\, m^m e^2 (C-e)^{-1}$$

e se exigirmos que $C_1\, m^m e^2 (C-e)^{-1} \le \frac{1}{2}$ temos,

$$|D_t v_j| \le \frac{1}{2} j\, C^{j+1} j!\, d(z,t-t',t')^{-mj} \qquad (II)$$

Aplicando o lema (3.4) em (II); notando que $v_j/_{t=t'} = 0$ de acordo com $(3.9)_{\nu}$, obtemos

$$(3.17)\qquad |v_j| \le \frac{1}{2} C^{j+1}\, j!\, \frac{1}{mj-1}\, d(z,t-t',t')^{-mj},$$

e como $j \le mj - 1$ temos,

$$(3.18)\qquad |v_j| \le \frac{1}{2} C^{j+1} j!\, d(z,t-t',t')^{-mj}$$

Aplicando mais uma vez a indução sobre j e o lema (3.5) várias vezes concluimos que existe uma constante $C_2 > 0$, independente de $\ell, z, t, t', \xi, \tau$ e j tal que

$$|N^{\ell}w_{j-\ell}| \leq C_2\, C^{(j-\ell)+1}(j-\ell)!\, e^{\ell}\, \frac{(mj-m\ell+1)\ldots(mj-m\ell+\ell)}{d(z,t-t',t')^{m(j-\ell)+\ell}}$$

Notemos que $\ell \leq m\ell$ e que

$$(mj-m\ell+1)\ldots(mj-m\ell+\ell) \leq m^{\ell}(j-\ell+1)\ldots(j-1)j,$$

e consequentemente,

$$\left|\sum_{\ell=1}^{m-1} N^{\ell}w_{j-\ell}\right| \leq \sum_{\ell=1}^{m-1} |N^{\ell}w_{j-\ell}| \leq$$

$$\leq \sum_{\ell=1}^{m-1} C_2\, C^{j+1}C^{-\ell}\, j!\, \frac{(j-\ell)!}{j!}\, e^{\ell} d(z,t-t',t')^{-mj}\, \frac{(mj-m\ell+1)\ldots(mj-m\ell+\ell)}{d(z,t-t',t')^{-m\ell+\ell}}$$

$$\leq C_2\, C^{j+1}j!\, d(z,t-t',t')^{-mj} \sum_{\ell=1}^{m-1} \left(\frac{e}{C}\right)^{\ell} \frac{(j-\ell)!}{j!}\, m^{\ell}(j-\ell+1)\ldots(j-1)j \leq$$

$$\leq C_2\, C^{j+1}j!\, d(z,t-t',t')^{-mj}\, m^{m-1} \sum_{\ell=1}^{m-1} \left(\frac{e}{C}\right)^{\ell}.$$

Como $\sum_{\ell=1}^{m-1} \left(\frac{e}{C}\right)^{\ell} \leq e\,(C-e)^{-1}$ temos que

$$\left|\sum_{\ell=1}^{m-1} N^{\ell}w_{j-\ell}\right| \leq C^{j+1}j!\, C_2 m^{m-1} e(C-e)^{-1} d(z,t-t',t')^{-mj}$$

e se exigirmos que $C_2\, m^{m-1}\, e(C-e)^{-1} \leq \frac{1}{2}$ obtemos

$$\left|\sum_{\ell=1}^{m-1} N^{\ell}w_{j-\ell}\right| \leq \frac{1}{2}\, C^{j+1}j!\, d(z,t-t',t')^{-mj} \tag{3.19}$$

Como $v_j = w_j - \sum_{\ell=1}^{m-1} N^{\ell}w_{j-\ell}$ temos $w_j = v_j + \sum_{\ell=1}^{m-1} N^{\ell}w_{j-\ell}$

e combinando (3.18) com (3.19) obtemos

$$|w_j| \leq C^{j+1}j!\, d(z,t-t',t')^{-mj} \qquad \text{(c.q.d.)}$$

CAPÍTULO 4 - UMA ESTIMATIVA PARA A FUNÇÃO FASE

No que segue supomos que (x,t,t') pertencem a uma vizinhança aberta da origem no espaço real R^{n+2} e ξ será um ponto arbitrário no cone $\Gamma' \subset R_n$.

Consideremos o seguinte problema de Cauchy, relativo à equação diferencial parcial de primeira ordem não linear

$$(4.1) \qquad \frac{\partial}{\partial t} y = J(y/x)\,\mathrm{grad}_\xi a(x,t,{}^tJ(y/x)\xi),$$

$$(4.2) \qquad y\big|_{t=t'} = x,$$

onde $J(y/x)$ denota a matriz Jacobiana dos y's com relação aos x's e ${}^tJ(y/x)$ sua transposta. Lembramos que $a(x,t,\xi) = \mathrm{Re}\ \lambda(x,t,\xi)$, $b(x,t,\xi) = \mathrm{Im}\ \lambda(x,t,\xi)$. Fazendo $r = t - t'$ transformamos o problema (4.1)-(4.2) em

$$(4.1') \qquad \frac{\partial y}{\partial r} = J(y/x)\ \mathrm{grad}_\xi a(x,r+t',{}^tJ(y/x)\xi),$$

$$(4.2') \qquad y\big|_{r=0} = x$$

que pelo Teorema 0.8 tem uma única solução analítica $y(x,r,t',\xi)$. Assim, o problema (4.1)-(4.2) tem uma única solução analítica $y = u(x,t,t',\xi)$ - na verdade, analítica com relação a todos os argumentos. Além disso, $x \to y$ é um difeomorfismo (próximo da origem), dependendo analiticamente de t, t', ξ (observemos que y é uma função homogênea de grau zero com relação a $\xi \in \Gamma'$).

Se definirmos,

$$\Phi = \langle x,\xi\rangle + \phi$$

temos, $\Phi_x = \xi + \phi_x$, $\Phi_t = \phi_t$ e $\Phi/_{t=t'} = \langle x,\xi\rangle$ (pois $\phi/_{t=t'} = 0$) lo go podemos reescrever (2.2.9) e (2.2.10) da seguinte forma:

$$\Phi_t = \lambda(x,t,\Phi_x), \qquad \Phi/_{t=t'} = \langle x,\xi\rangle$$

Em virtude de (4.2) a matriz Jacobiana $J(y/x)$ é igual a matriz identidade em $t = t'$. Como uma consequência,

$$(4.3) \qquad y = y(x,t,t',\xi), \quad s = t, \quad s' = t',$$

define uma boa mudança de variáveis sobre a origem de R^{n+2}.

Definamos,

$$\tilde{\lambda}(y,s,s',\xi,\eta) = \lambda(x(y,s,s',\xi),\ s,\ {}^tJ(y/x)\eta) -$$
$$- \langle \mathrm{grad}_\xi a(x(y,s,s',\xi),\ s,\ {}^tJ(y/x)\xi),\ {}^tJ(y/x)\eta \rangle,$$

onde $x = x(y,s,s',\xi)$ é a inversa de $y = y(x,t,t',\xi)$. Seja $\tilde{\Phi}$ a expressão de Φ nas novas coordenadas y,s,s', isto é,

$$\tilde{\Phi} = \Phi(y,s,s',\xi) = \Phi(x(y,s,s',\xi),\ s,s',\xi).$$

Lema 4.1

Afirmamos que,

$$\tilde{\Phi}_s = \tilde{\lambda}(y,s,s',\xi,\tilde{\Phi}_y), \quad \tilde{\Phi}/_{s=s'} = \langle y,\xi\rangle$$

Prova

$$\tilde{\Phi} = \Phi(y,s,s',\xi) = \Phi(x(y,s,s',\xi),s,s',\xi) =$$
$$= \Phi(x^1(y,s,s',\xi),\dots,x^n(y,s,s',\xi),s,s',\xi). \text{ Assim,}$$

$$\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial s} = \frac{\partial\Phi}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial s} + \dots \frac{\partial\Phi}{\partial x^n}\frac{\partial x^n}{\partial s} + \frac{\partial\Phi}{\partial s} = \langle \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial x}{\partial s} \rangle + \frac{\partial\Phi}{\partial s}$$

e sabemos que, $\frac{\partial\Phi}{\partial s} = \lambda(x,s,\Phi_x)$.

Derivando a identidade,

$$(y^1,\dots,y^n)=(y^1(x^1(y^1,\dots,y^n,s,s',\xi),\dots,x^n(\dots),s,s',\xi),\dots,y^n(\dots)),$$

em relação a s obtemos,

$$(0,\dots,0)=\Big[\Big(\frac{\partial y^1}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial s}+\dots+\frac{\partial y^1}{\partial x^n}\frac{\partial x^n}{\partial s}+\frac{\partial y^1}{\partial s}\Big),\dots,$$

$$\dots,\Big(\frac{\partial y^n}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial s}+\dots+\frac{\partial y^n}{\partial x^n}\frac{\partial x^n}{\partial s}+\frac{\partial y^n}{\partial s}\Big]$$

Em notação matricial temos,

$$\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial y^1}{\partial x^n}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial y^n}{\partial x^1} & & \frac{\partial y^n}{\partial x^n}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{\partial x^1}{\partial s}\\ \vdots\\ \frac{\partial x^n}{\partial s}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{\partial y^1}{\partial s}\\ \vdots\\ \frac{\partial y^n}{\partial s}\end{pmatrix}$$

ou ainda,

$$0=J(y/x)\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial y}{\partial s}$$

Logo,

$$\frac{\partial x}{\partial s}=-J(y/x)^{-1}\frac{\partial y}{\partial s}=-J(y/x)^{-1}.J(y/x)\,\mathrm{grad}_\xi a(x,s,{}^tJ(y/x)\xi)=$$

$$=-\mathrm{grad}_\xi a(x,s,{}^tJ(y/x)\xi).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\tilde\Phi_s &= \Phi_s+\langle\phi_x,-\mathrm{grad}_\xi a(x,s,{}^tJ(y/x)\xi)\rangle=\\ &=\Phi_s-\langle\mathrm{grad}_\xi a(x,s,{}^tJ(y/x)\xi),\Phi_x\rangle=\\ &=\lambda(x,s,\phi_x)-\langle\mathrm{grad}_\xi a(x,s,{}^tJ(y/x)\xi),\Phi_x\rangle\end{aligned}$$

e assim só falta provar que ${}^tJ(y/x)\tilde\Phi_y=\Phi_x$ e para tanto calculemos $\tilde\Phi_y$.

$$\Big(\frac{\partial\tilde\Phi}{\partial y^1},\dots,\frac{\partial\tilde\Phi}{\partial y^n}\Big)=\Big[\Big(\frac{\partial\Phi}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial y^1}+\dots+\frac{\partial\Phi}{\partial x^n}\frac{\partial x^n}{\partial y^1}\Big),\dots,\Big(\frac{\partial\Phi}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial y^n}+\dots+\frac{\partial\Phi}{\partial x^n}\frac{\partial x^n}{\partial y^n}\Big)\Big]$$

Em notação matricial,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial y^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial y^n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial y^1} & \frac{\partial x^n}{\partial y^1} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial x^1}{\partial y^n} & \frac{\partial x^n}{\partial y^n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial x^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial\Phi}{\partial x^n} \end{bmatrix}$$

ou ainda, $\tilde{\Phi}_y = {}^tJ(x/y).\Phi_x$. Sabemos que,

$$J(x/y).J(y/x) = I \quad \text{e então} \quad {}^tJ(y/x)\ {}^tJ(x/y) = I$$

Logo,

$$ {}^tJ(y/x)\tilde{\Phi}_y = {}^tJ(y/x)\ {}^tJ(x/y)\Phi_x = I.\Phi_x = \Phi_x \qquad \text{(c.q.d.)}$$

Definamos,

$$\tilde{a}(y,s,s',\xi,\eta) = \mathrm{Re}\ \tilde{\lambda}(y,s,s',\xi,\eta) \quad \text{e} \quad \tilde{b}(y,s,s',\xi,\eta) =$$
$$= \mathrm{Im}\ \tilde{\lambda}(y,s,s',\xi,\eta)$$

ou seja,

$$\tilde{a}(y,s,s',\xi,\eta)=a(x(y,s,s',\xi),s,\ {}^tJ(y/x)\eta) -$$
$$- \mathrm{grad}_\xi a(x(y,s,s',\xi),s,\ {}^tJ(y/x)\xi),\ {}^tJ(y/x)\eta>$$

e

$$\tilde{b}(y,s,s',\xi,\eta) = b(x(y,s,s',\xi),s,\ {}^tJ(y/x)\eta)$$

A identidade de Enler aplicada à $a(x,t,\xi)$ nos dá

$$a(x,t,\xi) = <\mathrm{grad}_\xi a(x,t,\xi),\xi>$$

portanto,

$$a(x(y,s,s',\xi),s,\ {}^tJ(y/x)\xi) = \mathrm{grad}_\xi a(x(y,s,s',\xi),s,\ {}^tJ(y/x)\xi),{}^tJ(y/x)\xi>$$

Assim,

(4.4) $\quad \tilde{a}(y,s,s',\xi,\xi) \equiv 0$

Observemos que,

$$\operatorname{grad}_\eta \tilde{a}(y,s,s',\xi,\eta) = \operatorname{grad}_\xi a(x(y,s,s',\xi),s,\ {}^tJ(y/x)\eta).\ {}^tJ(y/x) -$$
$$- \operatorname{grad}_\xi a(x(y,s,s',\xi),s,\ {}^tJ(y/x)\xi).{}^tJ(y/x)$$

e portanto,

(4.5) $\qquad (\operatorname{grad}_\eta \tilde{a})\ (y,s,s',\xi,\xi) \equiv 0$

Da identidade (4.4) concluimos que

(4.6) $\qquad (\operatorname{grad}_{(y,s,s')} \tilde{a})\ (y,s,s',\xi,\xi) \equiv 0,$

pois as variáveis são independentes.

Em Treves [18] (pg. 111) encontramos o seguinte resultado:

Lema 4.2

Seja $f(y,t)$ uma função a valores reais, C^2 em um conjunto aberto Ω de $R^{m+1}(y=(y^1,\ldots,y^m))$. Fazemos as seguintes hipóteses:

1^a) $\quad f_t$ se anula em todo ponto onde f se anula;

2^a) $\quad$ Não existe nenhum $y_0 \in R^m$ tal que

$$t \to f(y_0,t)$$

se anula identicamente sobre um intervalo não vazio J da reta real $(\{y_0\} \times J \subset \Omega)$.

Então,para todo subconjunto compacto K de Ω existe uma constante $C_K > 0$ tal que, para todo $(y,t) \in K$,

$$|\operatorname{grad}_y f(y,t)|^2 \leq C_K|f(y,t)|.$$

Observação: (Ver pg. 112 - Treves [18]).

As condições 1^a) e 2^a) do lema 4.2 são trivialmente satisfeitas quando assumimos que, para cada y, a função $t \to f(y,t)$ tem somente zeros de ordem par finita.

Lema 4.3

Diminuindo a vizinhança da origem onde (x,t) varia, e o cone Γ', vemos que, para esses (x,t) e para todo $\xi \in \Gamma'$, $|\xi| = 1$,

$$|grad_{(x,\xi)} b(x,t,\xi)|^2 \leq C_0\, b(x,t,\xi)$$

Prova

Seja $f(y,t) = b(x,t,\xi)$ com $y = (x^1,\ldots,x^n,\xi_1,\ldots,\xi_n) \in R^{2n}$ e $\Omega = W \times \Gamma'$. Como para cada y, a função $t \to f(y,t)=b(x,t,\xi)$ tem somente zeros de ordem par finita então pela observação feita após o lema 4.2 as condições $1^{\underline{a}}$ e $2^{\underline{a}}$ estão satisfeitas.

Tomando uma vizinhança relativamente compacta contida em W (a qual continuamos denotando por W) e $|\xi| = 1$ com $\xi \in \Gamma'$ e Γ' diminuido, pelo lema (4.2) temos que

$$|grad_{(x,\xi)} b(x,t,\xi)|^2 \leq C_0\, |b(x,t,\xi)| = C_0\, b(x,t,\xi) \quad \text{pois}$$

$b \geq 0$ em $W \times \Gamma'$. (c.q.d.)

Lema 4.4

Existe uma constante $C_1 > 0$ tal que, se (y,s,s') estão suficientemente próximos da origem, e se $\xi \in \Gamma'$, $|\xi|=1$,

$$|grad_{(y,\eta)} \tilde{b}(y,s,s',\xi,\xi)|^2 \leq C_1\, \tilde{b}(y,s,s',\xi,\xi)$$

(Lembramos que b, então também $\tilde{b}$, é maior ou igual a zero no seu domínio de definição)

Prova

Prova

$$\mathrm{grad}_{(y,\eta)}\tilde{b}(y,s,s',\xi,\xi) =$$

$$= (\frac{\partial\tilde{b}}{\partial y^1}(y,s,s',\xi,\xi),\ \frac{\partial\tilde{b}}{\partial y^2},\dots,\frac{\partial\tilde{b}}{\partial y^n},\ \frac{\partial\tilde{b}}{\partial\eta_1},\dots,\frac{\partial\tilde{b}}{\partial\eta_n}) =$$

$$= [(\frac{\partial b}{\partial x^1}(x,s,{}^tJ(y/x)\xi).\frac{\partial x^1}{\partial y^1} + \dots + \frac{\partial b}{\partial x^n}\frac{\partial x^n}{\partial y^1}),\ \dots,$$

$$\dots,\ (\frac{\partial b}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial y^n} + \dots + \frac{\partial b}{\partial x^n}\frac{\partial x^n}{\partial y^n}),$$

$$(\frac{\partial b}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial \eta_1} + \dots + \frac{\partial b}{\partial \xi_n}\frac{\partial \xi_n}{\partial \eta_1}),\ \dots,\ (\frac{\partial b}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial \eta_n} + \dots + \frac{\partial b}{\partial \xi_n}\frac{\partial \xi_n}{\partial \eta_n})]=$$

$$= (\frac{\partial b}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial b}{\partial x^n},\ \frac{\partial b}{\partial \xi_1},\dots,\frac{\partial b}{\partial \xi_n}) \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial x^1}{\partial y^n} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial x^n}{\partial y^n} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\partial \xi_1}{\partial \eta_1} & \dots & \frac{\partial \xi_1}{\partial \eta_n} \\ \vdots & & \vdots & & & \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\partial \xi_n}{\partial \eta_1} & & \frac{\partial \xi_n}{\partial \eta_n} \end{bmatrix}$$

onde

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial \eta_1} & \dots & \frac{\partial \xi_1}{\partial \eta_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \xi_n}{\partial \eta_1} & \dots & \frac{\partial \xi_n}{\partial \eta_n} \end{bmatrix} = {}^tJ(y/x)$$

Logo,

$$\mathrm{grad}_{(y,\eta)}\hat{b}(y,s,s',\xi,\xi) = \mathrm{grad}_{(x,\xi)}b(x,s,{}^tJ(y/x)\xi).\ A,$$ o que

implica

$$|\mathrm{grad}_{(y,\eta)}\tilde{b}(y,s,s',\xi,\xi)|^2 \leq |\mathrm{grad}_{(x,\xi)}b(x,s,{}^tJ(y/x)\xi)|^2.\|A\|^2 \leq$$
$$\leq \|A\|^2.C_0\ b(x,s,{}^tJ(y/x).\xi) = C_1\ \tilde{b}(y,s,s',\xi,\xi)$$

A última desigualdade segue do lema (4.3). (c.q.d.)

Definamos,

$$y_0 = y(x_0,t,t',\xi),$$

$$u_0 = \tilde{\Phi}(y_0,s,s',\xi) - \langle y_0,\xi\rangle \quad \text{e}$$

$$u_1 = \operatorname{grad}_y \tilde{\Phi}(y_0,s,s',\xi) - \xi,$$

onde x_0 está fixado arbitrariamente (próximo da origem).

Fazendo $y = y_0$ no lema (4.1) obtemos:

$$(4.7) \qquad u_{0_s} = \tilde{\lambda}(y_0,s,s',\xi,\xi+u_1), \quad u_0/s{=}s' = 0.$$

Lema 4.5

Seja $M = \left(\dfrac{\partial^2\tilde{\Phi}}{\partial y^j \partial y^k}(y_0,s,s',\xi)\right)$. Então,

$$(4.8) \quad u_{1_s} = \tilde{\lambda}_y(y_0,s,s',\xi,\xi+u_1) + M\,\tilde{\lambda}_\eta(y_0,s,s',\xi,\xi+u_1)$$

$$(4.9) \quad u_1/s{=}s' = 0$$

Prova

Do lema (4.1) sabemos que $\tilde{\Phi}_s = \tilde{\lambda}(y,s,s',\xi,\eta)|_{\eta=\tilde{\Phi}_y}$ e $\eta = \tilde{\Phi}_y$ implica $(\eta_1,\dots,\eta_n) = \left(\dfrac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial y^1},\dots,\dfrac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial y^n}\right)$; $\tilde{\Phi}_y|_{y=y_0} = \xi + u_1$

$$\left(\frac{\partial\tilde{\Phi}_s}{\partial y^1},\dots,\frac{\partial\tilde{\Phi}_s}{\partial y^n}\right) = \left[\left(\frac{\partial\tilde{\lambda}}{\partial y^1}+\frac{\partial\tilde{\lambda}}{\partial\eta_1}\frac{\partial\eta_1}{\partial y^1}+\dots+\frac{\partial\tilde{\lambda}}{\partial\eta_n}\frac{\partial\eta_n}{\partial y^1}\right),\dots,\left(\frac{\partial\tilde{\lambda}}{\partial y^n}+\frac{\partial\tilde{\lambda}}{\partial\eta_1}\frac{\partial\eta_1}{\partial y^n}+\dots+\frac{\partial\tilde{\lambda}}{\partial\eta_n}\frac{\partial\eta_n}{\partial y^n}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{\partial\tilde{\lambda}}{\partial y^1},\dots,\frac{\partial\tilde{\lambda}}{\partial y^n}\right) + \left[\left(\frac{\partial\tilde{\lambda}}{\partial\eta_1}\frac{\partial\eta_1}{\partial y^1}+\dots+\frac{\partial\tilde{\lambda}}{\partial\eta_n}\frac{\partial\eta_n}{\partial y^1}\right),\dots,\left(\frac{\partial\tilde{\lambda}}{\partial\eta_1}\frac{\partial\eta_1}{\partial y^n}+\dots+\frac{\partial\tilde{\lambda}}{\partial\eta_n}\frac{\partial\eta_n}{\partial y^n}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{\partial\tilde{\lambda}}{\partial y^1},\dots,\frac{\partial\tilde{\lambda}}{\partial y^n}\right) + \left[\left(\frac{\partial\tilde{\lambda}}{\partial\eta_1}\frac{\partial^2\tilde{\Phi}}{\partial y^1\partial y^1}+\dots+\frac{\partial\tilde{\lambda}}{\partial\eta_n}\frac{\partial^2\tilde{\Phi}}{\partial y^1\partial y^n}\right),\dots,\right.$$

$$\left.\dots,\left(\frac{\partial\tilde{\lambda}}{\partial\eta_1}\frac{\partial^2\tilde{\Phi}}{\partial y^n\partial y^1}+\dots+\frac{\partial\tilde{\lambda}}{\partial\eta_n}\frac{\partial^2\tilde{\Phi}}{\partial y^n\partial y^n}\right)\right],$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial\tilde{\Phi}_s}{\partial y^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial\tilde{\phi}_s}{\partial y^n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\tilde{\lambda}}{\partial y^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial\tilde{\lambda}}{\partial y^n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial^2\tilde{\Phi}}{\partial y^1\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial^2\tilde{\Phi}}{\partial y^1\partial y^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2\tilde{\Phi}}{\partial y^n\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial^2\tilde{\Phi}}{\partial y^n\partial y^n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial\tilde{\lambda}}{\partial \eta_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial\tilde{\lambda}}{\partial \eta_n} \end{bmatrix}$$

Fazendo $y = y_0$ temos,

$$\frac{\partial\tilde{\Phi}_s}{\partial y}(y_0,s,s',\xi) = \tilde{\lambda}_y(y_0,s,s',\xi,\xi+u_1) + M\,\tilde{\lambda}_\eta(y_0,s,s',\xi,\xi+u_1)$$

Mas, $u_1 = \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial y}(y,s,s',\xi)\,|_{y=y_0} - \xi$ implica que

$$\frac{\partial u_1}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial y}\right)(y,s,s',\xi)/y{=}y_0 = \frac{\partial\tilde{\Phi}_s}{\partial y}(y_0,s,s',\xi)$$

e portanto,

$$u_{1s} = \tilde{\lambda}_y(y_0,s,s',\xi,\xi+u_1) + M\,\tilde{\lambda}_\eta(y_0,s,s',\xi,\xi+u_1)$$

Sabemos também que, $\tilde{\Phi}(y,s',s',\xi) = \langle y,\xi\rangle$ o que implica $\tilde{\Phi}_y(y,s',s',\xi) = \xi$ e portanto,

$$u_1\Big|_{s=s'} = \tilde{\Phi}_y(y_0,s',s',\xi) - \xi = \xi - \xi = 0. \qquad \text{(c.q.d.)}$$

Denotando por $F(s,u_1)$ o lado direito de (4.8) obtemos o seguinte problema com valor inicial

$$\begin{cases} u_{1_s} = F(s,u_1) \\ u_1\Big|_{s=s'} = 0 \end{cases}$$

Aplicando o método de Picard para solução de equações diferenciais ordinárias obtemos

$$|u_1| \leq C_2 \sup_{s''\in[s',s]} \left| \int_{s'}^{s''} |F(s''',0)|\,ds''' \right| \leq C_2 \left| \int_{s'}^{s} |F(s'',0)|\,ds'' \right|$$

(a prova é feita reproduzindo-se a demonstração do método de Picard).

Lema 4.6

Vale a seguinte estimativa para $|u_1|$,

$$|u_1| \leq C_3 \left| \int_{s'}^{s} \tilde{b}(y_0,s'',s',\xi,\xi)^{1/2} ds'' \right|$$

$$\leq C_3 \; |s-s'|^{1/2} \left| \int_{s'}^{s} \tilde{b}(y_0,s'',s',\xi,\xi) ds'' \right|^{1/2}$$

Prova

$$F(s'',0) = \tilde{\lambda}_y(y_0,s'',s',\xi,\xi) + M\,\tilde{\lambda}_\eta(y_0,s'',s',\xi,\xi) =$$

$$= \tilde{a}_y(y_0,s'',s',\xi,\xi) + i\,\tilde{b}_y(y_0,s'',s',\xi,\xi) +$$

$$+ M\,\tilde{a}_\eta(y_0,s'',s',\xi,\xi) + i\,M\,\tilde{b}_\eta(y_0,s'',s',\xi,\xi).$$

De (4.5) e (4.6) segue que

$F(s'',0) = i\,\tilde{b}_y(y_0,s'',s',\xi,\xi) + i\,M\,\tilde{b}_\eta(y_0,s'',s',\xi,\xi)$.

Como, $|\tilde{b}_y(y_0,s'',s',\xi,\xi)|^2 \leq |\mathrm{grad}_{(y,\eta)}\tilde{b}(y_0,s'',s',\xi,\xi)|^2$ do lema (4.4) segue que

$$|\tilde{b}_y(y_0,s'',s',\xi,\xi)|^2 \leq C_1\,\tilde{b}(y_0,s'',s',\xi,\xi)$$

Analogamente, $|\tilde{b}_\eta(y_0,s'',s',\xi,\xi)|^2 \leq C_1\,\tilde{b}(y_0,s'',s',\xi,\xi)$

Assim,

$$|F(s'',0)| \leq \sqrt{C_1}\,\tilde{b}(y_0,s'',s',\xi,\xi)^{1/2} +$$

$$+ \|M\|\sqrt{C_1}\,\tilde{b}(y_0,s'',s',\xi,\xi)^{1/2} = C\,\tilde{b}(y_0,s'',s',\xi,\xi)^{1/2}$$

Logo,

$$|u_1| \leq C_2 \left| \int_{s'}^{s} |F(s'',0)|\,ds'' \right| \leq C_2 \left| \int_{s'}^{s} C.\tilde{b}(y_0,s'',s',\xi,\xi)^{1/2} ds'' \right| =$$

$$= C_3 \left| \int_{s'}^{s} \tilde{b}(y_0,s'',s',\xi,\xi)^{1/2} ds'' \right|.$$

Aplicando a desigualdade de Hölder obtemos,

$$\int_{s'}^{s} \tilde{b}(y_0,s'',s',\xi,\xi)^{1/2}ds'' \leq \left(\int_{s'}^{s} 1^2 ds''\right)^{1/2} \cdot \left(\int_{s'}^{s} (\tilde{b}(y_0,s'',s',\xi,\xi)^{1/2})^2 ds''\right)^{1/2}$$

$$= |s-s'|^{1/2} \cdot \left(\int_{s'}^{s} \tilde{b}(y\ ,s'',s',\xi,\xi)ds''\right)^{1/2}$$

e então,

$$\left|\int_{s'}^{s} \tilde{b}(y_0,s'',s',\xi,\xi)^{1/2}ds''\right| \leq |s-s'|^{1/2} \left|\int_{s'}^{s} \tilde{b}(y_0,s'',s',\xi,\xi)ds''\right|^{1/2},$$

$$(\tilde{b} \geq 0,\ s \geq s')$$

Portanto,

$$|u_1| \leq C_3 \left|\int_{s'}^{s} \tilde{b}(y_0,s'',s',\xi,\xi)^{1/2}ds''\right| \leq$$

$$\leq C_3 |s-s'|^{1/2} \left|\int_{s'}^{s} \tilde{b}(y_0,s'',s',\xi,\xi)ds''\right|^{1/2} \qquad \text{(c.q.d.)}$$

<u>Lema 4.7</u>

Vale a seguinte desigualdade

$$\left|u_0 - i \int_{s'}^{s} \tilde{b}(y_0,s'',s',\xi,\xi)ds''\right| \leq$$

$$\leq C_6\ |s-s'| \left|\int_{s'}^{s} \tilde{b}(y_0,s'',s',\xi,\xi)ds''\right|$$

<u>Prova</u>

De (4.7) sabemos que

$$u_{0s} = \tilde{\lambda}(y_0,s,s',\xi,\xi+u_1)$$

Realizando sobre $\tilde{\lambda}$ uma expansão de Taylor de ordem dois com relação a η sobre ξ e, aplicando (4.4) e (4.5) obtemos,

$$u_{0s} = i\ \tilde{b}(y_0,s,s',\xi,\xi) + i < \tilde{b}_\eta(y_0,s,s',\xi,\xi),u_1> + O(|u_1|^2)$$

Afirmamos que

$$|u_{0s}-i\,\tilde{b}(y_0,s,s',\xi,\xi)| \leq |s-s'|\ |\tilde{b}_\eta(y_0,s,s',\xi,\xi)|^2 +$$

$$+ C_4(1+|s-s'|^{-1})|u_1|^2 \leq C_1|s-s'|\ \tilde{b}(y_0,s,s',\xi,\xi) +$$

$$+ C_5\left|\int_{s'}^{s} \tilde{b}(y_0,s'',s',\xi,\xi)ds''\right|.$$

De fato,

$$|u_{0s}-i\,\tilde{b}(y_0,s,s',\xi,\xi)| = |i<\tilde{b}_\eta(y_0,s,s',\xi,\xi),u_1> + O(|u_1|^2)| \leq$$

$$\leq |\tilde{b}_\eta(y_0,s,s',\xi,\xi)|\,|u_1| + D|u_1|^2 \qquad (D = \text{constante} > 0)$$

$$=(\sqrt{2}\ |\tilde{b}_\eta(y_0,s,s',\xi,\xi)|\ |s-s'|^{1/2})\ \left(\frac{|u_1|\ \ |s-s'|^{-1/2}}{\sqrt{2}}\right) + D|u_1|^2 \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\ \left(2|\tilde{b}_\eta(y_0,s,s',\xi,\xi)|^2|s-s'| + \frac{|u_1|^2|s-s'|^{-1}}{2}\right) + D|u_1|^2 =$$

$$= |s-s'|\ |\tilde{b}_\eta(y_0,s,s',\xi,\xi)|^2 + \frac{1}{4}\ |s-s'|^{-1}|u_1|^2 + D|u_1|^2 \leq$$

$$\leq |s-s'|\ |\tilde{b}_\eta(y_0,s,s',\xi,\xi)|^2 + |s-s'|^{-1}|u_1|^2 + D(1+|s-s'|^{-1})|u_1|^2 \leq$$

$$\leq |s-s'|\ |\tilde{b}_\eta(y_0,s,s',\xi,\xi)|^2 + (1+|s-s'|^{-1})|u_1|^2 + D(1+|s-s'|^{-1})|u_1|^2 =$$

$$= |s-s'|\ |\tilde{b}_\eta(y_0,s,s',\xi,\xi)|^2 + C_4(1+|s-s'|^{-1})|u_1|^2 \leq \text{(lema 4.4 e 4.6)}$$

$$\leq C_1|s-s'|\tilde{b}(y_0,s,s',\xi,\xi) +$$

$$+ C_4(1+|s-s'|^{-1})\ C_3^2|s-s'|\ \left|\int_{s'}^{s} \tilde{b}(y_0,s'',s',\xi,\xi)ds''\right| =$$

$$= C_1|s-s'|\tilde{b}(y_0,s,s',\xi,\xi) + C_4C_3^2(|s-s'|+1)\ \left|\int_{s'}^{s} \tilde{b}(y_0,s'',s',\xi,\xi)ds''\right| \leq$$

$$\leq C_1|s-s'|\tilde{b}(y_0,s,s',\xi,\xi) + C_5\left|\int_{s'}^{s}\tilde{b}(y_0,s'',s',\xi,\xi)ds''\right|,$$

o que prova a afirmação feita.

Integrando com relação a s e como $u_0(s') = 0$ obtemos,

$$|u_0 - i\int_{s'}^{s}\tilde b(y_0,s'',s',\xi,\xi)ds''| = |\int_{s'}^{s}(u_{0s}(s'') - i\,\tilde b(y_0,s'',s',\xi,\xi)ds''| \leq$$

$$\leq \int_{s'}^{s}|u_{0s} - i\,\tilde b(y_0,s'',s',\xi,\xi)|ds'' \leq \int_{s'}^{s}C_1|s''-s'|\tilde b(y_0,s'',s',\xi,\xi)ds'' +$$

$$+ \int_{s'}^{s}C_5|\int_{s'}^{s''}\tilde b(y_0,s''',s',\xi,\xi)ds'''|ds'' \leq$$

$$\leq C_1|s-s'|\int_{s'}^{s}\tilde b(y_0,s'',s',\xi,\xi)ds'' +$$

$$+ C_5 \sup_{s''\varepsilon[s',s]} |\int_{s'}^{s''}\tilde b(y_0,s''',s',\xi,\xi)ds'''|.\int_{s'}^{s}ds'' =$$

$$= C_1|s-s'||\int_{s'}^{s}\tilde b(y_0,s'',s',\xi,\xi)ds'' + C_5|s-s'||\int_{s'}^{s}\tilde b(y_0,s''',s',\xi,\xi)ds'''| =$$

$$= C_6|s-s'||\int_{s'}^{s}\tilde b(y_0,s'',s',\xi,\xi)ds''| \qquad \text{(c.q.d).}$$

Lema 4.8

A expressão de $\tau - a(x,t,\xi)$ nas novas coordenadas ē dado por

$$\sigma - \tilde a(y,s,s',\xi,\eta),$$

onde $\tilde a(y,s,s',\xi,\eta) = a(x(y,s,s'\xi),\ s,\ {}^tJ(y/x)\eta)\ -$

$$- \langle grad_\xi a(x(y,s,s',\xi),s,\ {}^tJ(y/x)\xi),\ {}^tJ(y/x)\eta\rangle$$

Prova

Em primeiro lugar calculemos a expressão dos operadores D_t e D_x nas coordenadas y,s,s'.

Seja,

$G(x,t,t',\xi) = (y^1(x,t,t',\xi),\ldots,y^n(x,t,t',\xi),s,s',\xi) = (y,s,s',\xi)$

$u(y,s,s',\xi) = (u\circ G\circ G^{-1})(y,s,s',\xi) = (u\circ G)(x,t,t',\xi)$

Então,

$$D_t\left[(u\circ G)(x,t,t',\xi)\right] = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}\left[(u\circ G)(x,t,t',\xi)\right] =$$

$$= \frac{1}{i}\left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y^j}(G(x,t,t',\xi))\,\frac{\partial G^j}{\partial t}(x,t,t',\xi) + \frac{\partial u}{\partial s}(G(x,t,t',\xi))\frac{\partial G^{n+1}}{\partial t}(x,t,t',\xi)\right]$$

$$= \frac{1}{i}\left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial y^j}\,(y,s,s',\xi)\,\frac{\partial y^j}{\partial t}(x,t,t',\xi) + \frac{\partial u}{\partial s}(y,s,s',\xi)\right] =$$

$$= \left(< \frac{\partial y}{\partial t}, D_y > + D_s\right)u(y,s,s',\xi)$$

Portanto,

$$D_t = D_s + < \frac{\partial y}{\partial s}, D_y >$$

Analogamente mostra-se que

$$D_x = {}^tJ(y/x)\ (x,t,t',\xi)D_y$$

Assim, a expressão do operador $D_t - a(x,t,D_x)$ nas coordenadas (y,s,s') é dada por:

I) $$D_s + <\frac{\partial y}{\partial s}, D_y > - a(x(y,s,s',\xi),s,{}^tJ(y/x)D_y)$$

O símbolo do operador (I) é dado por

II) $$\sigma + < \frac{\partial y}{\partial s}, \eta > - a(x(y,s,s',\xi),s,{}^tJ(y/x)\eta),$$

onde σ é avariável associada a D_s e η associada a D_y. Quando realizamos a mudança das variáveis (x,t) para (y,s) provocamos uma mudança das variáveis (ξ,τ) para (η,σ). A relação que existe entre ξ, τ, η e σ é dado pelas expressões:

$$\tau = \sigma + < \frac{\partial y}{\partial s}, \eta >$$
$$\xi = {}^tJ(y/x)\eta$$

Substituindo o valor de $\frac{\partial y}{\partial s}$ na expressão (II) obtemos,

$$\sigma + \langle J(y/x)\mathrm{grad}_\xi a(x(y,s,s',\xi),s,{}^tJ(y/x)\xi),\eta\rangle -$$
$$- a(x(y,s,s',\xi),s,{}^tJ(y/x)\eta) =$$
$$= \sigma + \langle \mathrm{grad}_\xi a(x(y,s,s',\xi),s,{}^tJ(y/x)\xi),{}^tJ(y/x)\eta\rangle -$$
$$- a(x(y,s,s',\xi),s,{}^tJ(y/x)\eta) =$$
$$= \sigma - \tilde{a}(y,s,s',\xi,\eta) \qquad \text{(c.q.d.)}$$

Lembrando que

$$u_0 = \tilde{\Phi}(y_0,s,s',\xi) - \langle y_0,\xi\rangle \quad \text{e que}$$
$$\Phi(x,t,t',\xi) = \langle x,\xi\rangle + \phi(x,t,t',\xi)$$

e

$$\tilde{\Phi}(y,s,s',\xi) = \phi(x(y,s,s',\xi),s,s',\xi), \quad \text{temos}$$
$$\tilde{\Phi}(y_0,s,s',\xi) = \Phi(x(y_0,s,s',\xi),s,s',\xi) = \Phi(x(y(x_0,t,t',\xi),s,s',\xi),s,s',\xi) =$$
$$= \Phi(x_0,s,s',\xi) = \langle x_0,\xi\rangle + \phi(x_0,s,s',\xi)$$

Portanto a expressão de u_0 em termos da função fase ϕ é dada por

$$u_0 = \phi(x_0,s,s',\xi) + \langle x_0 - y_0,\xi\rangle$$

Sejam,

$$x = x(y_0,t'',t',\xi)$$
$$\theta = {}^tJ(y/x)(x,t'',t',\xi)\xi$$
$$B(x,t,t',\xi) = \int_{t'}^{t} b(x,t'',\theta)dt'' \quad \text{(integração ao longo de } \gamma)$$

onde, γ é o arco (orientado) da curva descrita por (x,t'',θ) quando t'' percorre de $t' < t$ a t.

Observamos também que

$$\int_{s'}^{s} \tilde{b}(y_0,s'',s',\xi,\xi)ds'' = \int_{t'}^{t} \tilde{b}(y_0,t'',t',\xi,\xi)dt'' =$$

$$= \int_{t'}^{t} b(x,t'',\theta)dt'', \quad \text{pois}$$

$$\tilde{b}(y_0,t'',t',\xi,\xi) = b(x(y_0,t'',t',\xi),t'',{}^tJ(y/x)(x,t'',t',\xi)\xi) =$$
$$= b(x,t'',\theta).$$

Levando isso em conta no lema (4.7) obtemos,

$$(4.10) \qquad |\phi(x_0,t,t',\xi) - \langle y_0-x_0,\xi\rangle - i\, B(x,t,t',\xi)| \leq$$
$$\leq C_6|t-t'|\ |B(x,t,t',\xi)|$$

Observação:

Na verdade, a curva γ é a projeção no espaço (x,t,ξ) de uma bicaracterística nula de $\tau - a(x,t,\xi)$.

De fato, consideremos o símbolo $\sigma - \tilde{a}(y,s,s',\xi,\eta)$, que pelo lema (4.8) é a expressão do símbolo $\tau - a(x,t,\xi)$ nas coordenadas (y,s,s').

As equações de Hamilton-Jacobi para o símbolo $\sigma - \tilde{a}(y,s,s',\xi,\eta)$ são:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt''} = -\,\mathrm{grad}_\eta \tilde{a}(y,s,s',\xi,\eta) \\[2ex] \dfrac{ds}{dt''} = 1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} \dfrac{d\eta}{dt''} = \mathrm{grad}_y \tilde{a}(y,s,s',\xi,\eta) \\[2ex] \dfrac{d\sigma}{dt''} = \dfrac{\partial}{\partial s} \tilde{a}(y,s,s',\xi,\eta) \end{cases}$$

Seja ξ arbitrariamente fixo. Tomemos $\eta(t'') = \xi$. Como $\dfrac{d\eta(t'')}{dt''} = 0$ e $\mathrm{grad}_y \tilde{a}(y,s,s',\xi,\eta(t'')) = \mathrm{grad}_y \tilde{a}(y,s,s',\xi,\xi) = 0$ (por

(4.6)) a equação $\frac{d\eta}{dt''} = \text{grad}_y \tilde{a}(y,s,s',\xi,\eta)$ está satisfeita para $\eta(t'') = \xi$.

Logo, as equações acima para $\eta(t'') = \xi$ tornam-se,

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt''} = 0 \\ \\ \frac{ds}{dt''} = 1 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \frac{d\eta}{dt''} = 0 \\ \\ \frac{d\sigma}{dt''} = 0 \end{cases}$$

devido à (4.5), (4.6).

Dando as condições iniciais:

$$\begin{cases} y(0) = y_0 \\ s(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \eta(0) = \xi \\ \sigma(0) = 0, \end{cases}$$

obtemos como solução:

$$\begin{cases} y(t'') = y_0 \\ s(t'') = t'' \end{cases} \qquad \begin{cases} \eta(t'') = \xi \\ \sigma(t'') = 0 \end{cases}$$

e além disso,

$$\sigma(t'') - \tilde{a}(y(t''),s(t''),s',\xi,\eta(t'')) = 0 \quad (\text{ Pois } \eta(t'') = \xi)$$

Assim, a bicaracterística nula de $\sigma - \tilde{a}(y,s,s',\xi,\eta)$ que passa por $(y_0,0,\xi,0)$ é dada por:

$$\begin{cases} y(t'') = y_0 \\ s(t'') = t'' \\ \eta(t'') = \xi \\ \sigma(t'') = 0 \end{cases}$$

Portanto, a projeção no espaço (y,s,η) é dado por (y_0,t'',ξ) e assim a expressão dessa curva no espaço (x,t,ξ) é dada por

$$(x(y_0,t'',t',\xi),t'',{}^tJ(y/x)(x,t'',t',\xi)\xi) = (x,t'',\theta)$$

a qual é obtida usando-se as mudanças de coordenadas.

Notemos que,

$$(x,t'',\theta)\big|_{t''=t'} = (x(y_0,t',t',\xi),t',{}^tJ(y/x)(x(y_0,t',t',\xi),t',t',\xi)\xi) =$$

$$= (y_0,t',{}^tJ(y/x)(y_0,t',t',\xi)\xi) = (y_0,t',\xi)$$

pois, como $y(x_0,t',t',\xi) = x_0$ então $x(y_0,s',s',\xi) = x(y_0,t',t',\xi)=y_0$ e como $y(x,t',t',\xi) = x$ então ${}^tJ(y/x)(y_0,t',t',\xi) = I$.

$$(x,t'',\theta)\big|_{t''=t} = (x(y_0,t,t',\xi),t,{}^tJ(y/x)(x(y_0,t,t',\xi),t,t',\xi)\xi) =$$

$$= (x_0,t,{}^tJ(y/x)(x_0,t,t',\xi)\xi),$$

pois, sendo $y_0 = y(x_0,t,t',\xi)$ temos que $x(y_0,t,t',\xi) = x_0$

Portanto, a curva γ é um arco (orientado) da curva (x,t'',θ) onde essa curva é a projeção no espaço (x,t,ξ) de uma bicaracterística nula de $\tau - a(x,t,\xi)$, o que justifica a observação feita na pag. 82.

De (4.10) derivamos facilmente que:

$$(4.11)\qquad |\mathrm{Im}\phi(x_0,t,t',\xi)-B(x,t,t',\xi)| \le C_6|t-t'|\;|B(x,t,t',\xi)|$$

Assim, se $T \le \frac{1}{4C_6}$, obtemos, notando que $-T \le t' \le t \le T$,

$$(4.12)\qquad \frac{1}{2}\,B(x,t,t',\xi) \le \mathrm{Im}\phi(x_0,t,t',\xi)$$

Em particular, $\mathrm{Im}\phi(x_0,t,t',\xi) \ge \frac{1}{2}\,B(x,t,t',\xi) \ge 0$, em seu domínio de definição (pois x_0 foi tomado arbitrariamente próximo da origem).

Em Treves [18] (pg. 112) encontramos o seguinte resultado:

<u>Lema 4.9</u>

Se f é um polinômio monico de grau d, então,

$$|t-t'|^{d+1} \le \frac{C_d}{d!}\int_t^{t'}|f(s)|ds$$

onde C_d só depende de d.

Lema 4.10

Existe uma constante $B > 0$, independente de x_0, ξ, t e t', $-T \leq t' \leq t \leq T$, tal que

$$|\xi|(t-t')^{2k+1} \leq B.B(x,t,t',\xi),$$

onde $2k$ é o número que aparece na condição (2.1.6).

Prova

É conveniente retornar para as coordenadas y,s,s' e para a função $\tilde{b}(y,s,s',\xi,\xi)$. Consideremos a função

(4.13) $\quad s \longrightarrow \tilde{b}(0,s,0,\xi^0,\xi^0) = b(x(0,s,0,\xi^0),s,{}^tJ(y/x)\xi^0)$

Observemos que para $s = 0$ temos $x(0,0,0,\xi^0) = 0$ e como ${}^tJ(y/x)(x,t',t',\xi) = I$ então ${}^tJ(y/x)(0,0,0,\xi^0) = I$. Assim,

$$\tilde{b}(0,0,0,\xi^0,\xi^0) = b(0,0,\xi^0).$$

Sabemos que $\tau^0 = \lambda(0,0,\xi^0) = a(0,0,\xi^0) + i\ b(0,0,\xi^0)$ o que implica $b(0,0,\xi^0) = 0$, logo a função (4.13) tem um zero em $s = 0$.

Além disso, sabemos que $(x(0,s,0,\xi^0),s,{}^tJ(y/x)\xi^0)$ percorre sobre a projeção no espaço (x,t,ξ) de uma bicaracterística nula de $\tau - a(x,t,\xi)$. Verifiquemos que ela passa por $(0,0,\xi^0,\tau^0)$ com $\tau^0 = a(0,0,\xi^0)$.

Para $s = 0$ temos,

$$(x(0,0,0,\xi^0),0,\xi^0) = (0,0,\xi^0).$$

Como $\tau - a(x,t,\xi)$ é constante ao longo de sua bicaracterística e estamos trabalhando com bicaracterística nula temos que $\tau^0 = a(0,0,\xi^0)$.

Aplicando nossa hipótese (2.1.6) concluimos que a função

(4.13) tem um zero de ordem par finita $2\ell \leq 2k$ em $s = 0$.

Aplicando o corolário do Teorema de Preparação de Weierstrass (ver capítulo 0) podemos escrever

$$\tilde{b}(y,s,s',\xi,\xi) = E(y,s,s',\xi)f(y,s,s',\xi)$$

onde $E(y,s,s',\xi) > 0$ para todo (y,s,s') próximos de $(0,0,0)$ (em R^{n+2}) e todo $\xi \in \Gamma'$, enquanto

$$f(y,s,s',\xi) = s^{2\ell} + a_1(y,s',\xi)s^{2\ell-1} + \ldots + a_{2\ell}(y,s',\xi)$$

com coeficientes a_j se anulando quando $y = 0$, $s' = 0$, $\xi = \xi^0$. Além disso, esses coeficientes e também E são funções holomorfas de (y,s,s') próximos da origem em C^{n+2} e de $\xi \in \Gamma'^C$.

Pela unicidade do Teorema de Preparação de Weierstrass podemos tomar E positiva homogênea de grau 1 com relação a ξ, e a_j positiva homogênea de grau 0.

Devido a homogeneidade de grau 1 com relação a ξ e diminuindo (se for necessário) a vizinhança da origem, garantimos que

$$E(y,s,s',\xi) \geq C|\xi|$$

onde C é uma constante maior que zero.

Assim,

$$\int_{s'}^{s} \tilde{b}(y,s'',s',\xi,\xi)ds'' \geq C|\xi| \int_{s'}^{s} f(y,s'',s',\xi)ds''.$$

e aplicando o lema (4.9) em nosso caso obtemos,

$$\int_{s'}^{s} f(y,s'',s',\xi)ds'' \geq C_{2\ell}(s-s')^{2\ell+1}$$

onde $C_{2\ell}$ só depende de ℓ.

Portanto,

$$\int_{s'}^{s} \tilde{b}(y,s'',s',\xi,\xi)ds'' \geq C.C_{2\ell}|\xi|(s-s')^{2\ell+1} \geq \frac{1}{B}|\xi|(s-s')^{2k+1}$$

e como y está arbitrariamente fixo em uma vizinhança da origem, o mesmo resultado vale para $y=y_0$, ou seja,

$$\int_{s'}^{s} \tilde{b}(y_0,s'',s',\xi,\xi)ds'' \geq \frac{1}{B}\,|\xi|(s-s')^{2k+1}.$$

Voltando às coordenadas (x,t,t') temos

$$B.B(x,t,t',\xi) \geq |\xi|(t-t')^{2k+1} \qquad \text{(c.q.d.)}$$

Proposição 4.1

Existe uma constante $B' > 0$ tal que, para todo (x,t,t') em uma vizinhança aberta da origem em R^{n+2}, tal que $t' \leq t$, e para $\xi \in \Gamma'$ temos,

$$|\xi|(t-t')^{2k+1} \leq B'\,\mathrm{Im}\phi(x,t,t',\xi).$$

Prova

É só combinar a desigualdade (4.12) com o lema (4.10).

CAPÍTULO 5 - REPRESENTAÇÃO EM SÉRIE DA PARAMETRIZ - O RESTO

Selecionamos uma vizinhança aberta $\mathcal{N}$ da origem em $\mathbb{C}^{n+1}$ e um número $t_1 > 0$ tal que, se

(5.1) $(x,t) \in \mathcal{N}$, $|t'| < t_1$,

e se z está relacionado com x via (3.3), então

$$d(z,t-t',t') > \kappa > 0,$$

onde $d(z,t-t',t')$ está definido no capítulo 3. De (3.14) sabemos que,

$$|w_j| \leq C^{j+1} j! d(z,t-t',t')^{-mj} (|\xi|^2+|\tau|^2)^{-j/2}$$

e assim para (z,t,t') nas condições acima e para $(\xi,\tau) \in \Gamma^C$, $|\xi|^2 + |\tau|^2 > \frac{1}{4}$ vale

(5.2) $|w_j| \leq C(C/\kappa^m)^j j! \quad (|\xi|^2 + |\tau|^2)^{-j/2}.$

Seja $\varepsilon > 0$ pequeno (o quanto pequeno se tornará claro depois). Retornando para as funções k_j, obtemos o seguinte

Lema 5.1

Se (x,t,t') satisfazem (5.1) e se $(\xi,\tau) \in \Gamma^C$ satisfaz

(5.3) $(|\xi|^2+|\tau|^2)^{1/2} > \varepsilon^{-1} C \kappa^{-m}(j!)^{1/j}$,

então,

(5.4) $|k_j| \leq C_0 \varepsilon^j$

Prova

Sabemos que $k_j = w_j e^{-i\hat{A}_{00}}$, portanto

$$|k_j| = |w_j|\ |e^{-i\hat{A}_{00}}| \le C(C/\kappa^m)^j\ j!(|\xi|^2+|\tau|^2)^{-j/2} e^{|\hat{A}_{00}|} \le$$

$$\le C(C/\kappa^m)^j j!\ \varepsilon^j C^{-j} \kappa^{mj} \frac{1}{j!} e^{|\hat{A}_{00}|} = C\ \varepsilon^j\ e^{|\hat{A}_{00}|} \le$$

$$\le C_0 \varepsilon^j \quad (\text{pois } \hat{A}_{00} \text{ é limitada}) \quad (\text{c.q.d.})$$

Denotamos por χ_j a função característica do subconjunto do R_{n+1} definido por (5.3) e definamos

$$k^0 = \sum_{j=m-1}^{\infty} \chi_j(\xi,\tau) k_j,$$

$$K^0(x,t,\xi,\tau) = \int_{-T}^{t} e^{i\phi(x,t,t',\xi)-i\tau(t-t')} k^0(x,t,t',\xi,\tau)dt'$$

Observemos que para cada (x,t,t',ξ,τ) fixo, a soma que define k^0 é finita e portanto está bem definido. Além disso, devido a (5.4), a convergência é uniforme para $(x,t) \in \mathcal{N}$, $|t'| < t_1$ e $(\xi,\tau) \in \Gamma$.

Lema 5.2

A função $K^0(x,t,\xi,\tau)$ é mensurável e limitada para $(x,t) \in \mathcal{N} \cap R^{n+1}$ e $(\xi,\tau) \in \Gamma$.

Prova

Como k^0 é contínua em quase toda parte, implica que K^0 é contínua em quase toda parte e portanto mensurável.

Podemos assumir que a Proposição 4.1 é válida para $(x,t) \in \mathcal{N} \cap R^{n+1}$, $|t'| < t_1$ (t' real) e $\xi \in \Gamma'$.

Como,

$$|k^0| \le \sum_{j=m-1}^{\infty} |\chi_j\ k_j| \le \sum_{j=m-1}^{\infty} C_0\ \varepsilon^j \le \sum_{j=0}^{\infty} C_0\ \varepsilon^j = \frac{C_0}{1-\varepsilon} \quad (\text{se } \varepsilon < 1)$$

temos,

$$|K^0| \leq \int_{-T}^{t} e^{-Im\phi}|k^0|dt' \leq \frac{C_0}{1-\varepsilon}(t+T) \leq \frac{C_0}{1-\varepsilon}\cdot 2T = L$$

Aqui usamos o fato que $Im\phi \geq 0$.

Logo K^0 é limitada para $(x,t) \in \mathcal{N} \cap R^{n+1}$ e $(\xi,\tau) \in \Gamma$.

Nosso objetivo agora é mostrar que,

$$P(x,t,D_x+\xi,D_t+\tau)K^0 = 1 + \tilde{K}^1 , \tag{5.5}$$

onde $\tilde{K}^1(x,t,\xi,\tau)g(\xi,\tau)$ é o "símbolo" de um operador que é <u>analítico-</u><u>-regularizante</u>, isto é, transforma distribuição com suporte compacto em função analítica.

<u>Lema 5.3</u>

Afirmamos que

$$P(x,t,D_x+\xi,D_t+\tau)K^0 = 1 + \tilde{K}^1$$

onde $\tilde{K}^1 = K^1 + H^1$ e

$$K^1(x,t,\xi,\tau) = \int_{-T}^{t} e^{i\phi(x,t,t',\xi)-i\tau(t-t')}k^1(x,t,t',\xi,\tau)dt'$$

com $k^1(x,t,t',\xi,\tau) = P(x,t,D_x+\xi+\phi_x,D_t+\phi_t)k^0(x,t,t',\xi,\tau)$

e $H^1(x,t,\xi,\tau) = \sum_{\nu=0}^{\infty}(H_\nu^1(x,t,t',\xi,\tau)|_{t=t'}$

com,

$$H_0^1 = (\chi_{m-1}-1) \quad \text{e} \quad \text{para} \quad \nu \geq 1,$$

$$H_\nu^1(x,t,t',\xi,\tau)|_{t=t'} = \frac{1}{i}\sum_{\nu'=0}^{\nu-1}(\chi_{m-1+\nu'}-\chi_{m-1+\nu})\tilde{R}_\nu^{\nu'}\, k_{m-1+\nu'}|_{t=t'}$$

<u>Prova</u>

Seja, $\tilde{R}^0(x,t,\xi,\tau) = \int_{-T}^{t} e^{i\phi(x,t,t',\xi)+i\tau t'}k^0(x,t,t',\xi,\tau)dt'$

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j!} p^{(0,j)}(x,t,\phi_x+\xi,\phi_t)(\phi_{t'}+\tau)^{j-1}\Big|_{t=t'} k_{m-1}(x,t',t',\xi,\tau) = i,$$

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j!} p^{(0,j)}(\ldots)(\phi_{t'}+\tau)^{j-1}\Big|_{t=t'} k_m + \tilde{R}_1^0(\ldots)\, k_{m-1}\Big|_{t=t'} = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j!} p^{(0,j)}(\ldots)(\phi_{t'}+\tau)^{j-1}\Big|_{t=t'} k_{m+1}(\ldots)+\tilde{R}_2^0(\ldots)k_{m-1}\Big|_{t=t'} +$$

$$+ \tilde{R}_2^1(\ldots)k_m\Big|_{t=t'} = 0,$$

....

Introduzindo as funções características χ_j obtemos que

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j!} \{p^{(0,j)}(x,t,D_x+\xi,D_t)\ (D_{t'}+\tau)^{j-1}(e^{i\phi}k^0)\}_{t=t'} =$$

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j!} p^{(0,j)}(x,t,\phi_x+\xi,\phi_t)(\phi_{t'}+\tau)^{j-1}\Big|_{t=t'}\times$$

$$\times\ \chi_{m-1}(\xi,\tau)k_{m-1}(x,t',t',\xi,\tau) +$$

$$+\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j!} p^{(0,j)}(\ldots)(\phi_{t'}+\tau)^{j-1}\Big|_{t=t'} \chi_m k_m + \tilde{R}_1^0(\ldots)\chi_{m-1}\ k_{m-1}\Big|_{t=t'}+$$

$$+\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j!} p^{(0,j)}(\ldots)(\phi_{t'}+\tau)^{j-1}\Big|_{t=t'}\chi_{m+1}\ k_{m+1} +$$

$$+ \tilde{R}_2^0(\ldots)\chi_{m-1}\ k_{m-1}\Big|_{t=t'} + \tilde{R}_2^1(\ldots)\chi_m\ k_m\Big|_{t=t'} +$$

+ ....

$$=\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j!} p^{(0,j)}(\ldots)(\phi_{t'}+\tau)^{j-1}\Big|_{t=t'}[1-(1-\chi_{m-1})]k_{m-1}(\ldots) +$$

$$+\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j!} p^{(0,j)}(\ldots)(\phi_{t'}+\tau)^{j-1}\Big|_{t=t'}[1-(1-\chi_m)]\ k_m(\ldots) +$$

$$+ \tilde{R}_1^0(\ldots)[1-(1-\chi_{m-1})]k_{m-1}\Big|_{t=t'} +$$

$$+\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j!} p^{(0,j)}(\ldots)(\phi_{t'}+\tau)^{j-1}\Big|_{t=t'} [1-(1-\chi_{m+1})] k_{m+1}(\ldots) +$$

$$+ \tilde{R}_2^0(\ldots)[1-(1-\chi_{m-1})]k_{m-1}\Big|_{t=t'} + \tilde{R}_2^1(\ldots)[1-(1-\chi_m)]k_m\Big|_{t=t'} +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j!} p^{(0,j)}(\ldots)(\phi_{t'}+\tau)^{j-1}\Big|_{t=t'} k_{m-1}(\ldots) +$$

$$+ (\chi_{m-1}-1)\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j!} p^{(0,j)}(\ldots)(\phi_{t'}+\tau)^{j-1}\Big|_{t=t'} k_{m-1}(\ldots) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j!} p^{(0,j)}(\ldots)(\phi_{t'}+\tau)^{j-1}\Big|_{t=t'} k_m(\ldots) + \tilde{R}_1^0(\ldots)k_{m-1}\Big|_{t=t'} +$$

$$+ (\chi_m - 1)\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j!} p^{(0,j)}(\ldots)(\phi_{t'}+\tau)^{j-1}\Big|_{t=t'} k_m(\ldots) +$$

$$+ (\chi_{m-1}-1)\ \tilde{R}_1^0(\ldots)k_{m-1}\Big|_{t=t'}$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j!} p^{(0,j)}(\ldots)(\phi_{t'}+\tau)^{j-1}\Big|_{t=t'} k_{m+1}(\ldots) +$$

$$+ \tilde{R}_2^0(\ldots)k_{m-1}\Big|_{t=t'} + \tilde{R}_2^1(\ldots)k_m\Big|_{t=t'} +$$

$$+ (\chi_{m+1}-1)\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j!} p^{(0,j)}(\ldots)(\phi_{t'}+\tau)^{j-1}\Big|_{t=t'} k_{m+1}(\ldots) +$$

$$+ (\chi_{m-1}-1)\ \tilde{R}_2^0(\ldots)k_{m-1}\Big|_{t=t'} + (\chi_m-1)\tilde{R}_2^1(\ldots)k_m\Big|_{t=t'} +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= i + \Big[(\chi_{m-1}-1)\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j!}\ p^{(0,j)}(\ldots)\ (\phi_{t'}+\tau)^{j-1}\Big|_{t=t'} k_{m-1}(\ldots)\Big] +$$

$$+ \Big[(\chi_m-1)\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j!} p^{(0,j)}(\ldots)(\phi_{t'}+\tau)^{j-1}\Big|_{t=t'} k_m(\ldots) +$$

$$+ (\chi_{m-1}-1)\tilde{R}_1^0(\ldots)k_{m-1}\Big|_{t=t'}\Big] +$$

$$+ \Big[(\chi_{m+1}-1) \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j!} p^{(0,j)}(\ldots)(\phi_{t'}+\tau)^{j-1}\Big|_{t=t'} k_{m+1}(\ldots) +$$

$$+ (\chi_{m-1}-1)\ \tilde{R}_2^0(\ldots)\ k_{m-1}\Big|_{t=t'} +$$

$$+ (\chi_m-1)\ \tilde{R}_2^1(\ldots)\ k_m\Big|_{t=t'}\Big] + \ldots +$$

$$+ \Big[(\chi_{m-1+r}-1) \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j!} p^{(0,j)}(\ldots)\ (\phi_{t'}+\tau)^{j-1}\Big|_{t=t'} k_{m-1+r} +$$

$$+ (\chi_{m-1}-1)\tilde{R}_r^0(\ldots)k_{m-1}\Big|_{t=t'} +$$

$$+ (\chi_m-1)\ \tilde{R}_r^1(\ldots)k_m\Big|_{t=t'} + \ldots +$$

$$+ (\chi_{m-1+(r-1)}-1)\ \tilde{R}_r^{r-1}(\ldots)k_{m-1+(r-1)}\Big|_{t=t'}\Big] +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= i + \Big[(\chi_{m-1}-1) \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j!} p^{(0,j)}(\ldots)(\phi_{t'}+\tau)^{j-1}\Big|_{t=t'} k_{m-1}\Big] +$$

$$+ \Big[(\chi_m-1) \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j!} p^{(0,j)}(\ldots)(\phi_{t'}+\tau)^{j-1}\Big|_{t=t'} k_m +$$

$$+ \sum_{\nu'=0}^{\ell} (\chi_{m-1+\nu'}-1)\tilde{R}_1^{\nu'}(\ldots)k_{m-1+\nu'}\Big|_{t=t'}\Big] +$$

$$+ \Big[(\chi_{m+1}-1) \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j!} p^{(0,j)}(\ldots)(\phi_{t'}+\tau)^{j-1}\Big|_{t=t'} k_{m+1} +$$

$$+ \sum_{\nu'=0}^{1} (\chi_{m-1+\nu'}-1)\ \tilde{R}_2^{\nu'}(\ldots)k_{m-1+\nu'}\Big|_{t=t'}\Big] +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$+ \Big[(\chi_{m-1+r}-1) \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j!} p^{(0,j)}(\ldots)(\phi_{t'}+\tau)^{j-1}\Big|_{t=t'} k_{m-1+r} +$$

$$+ \sum_{\nu'=0}^{r-1} (\chi_{m-1+\nu'}-1) \tilde{R}_r^{\nu'} k_{m-1+\nu'}\Big]_{t=t'}\Big] + \ldots .$$

Assim,

$$\frac{1}{i} \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j!} \{P^{(0,j)}(x,t,D_x+\xi,D_t)\ (D_{t'}+\tau)^{j-1}(e^{i\phi}k^0)\}_{t=t'} =$$

$$= 1 + H^1(x,t,\xi,\tau) \quad \text{onde} \quad H^1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} H^1_\nu$$

e $H^1_0 = (\chi_{m-1}-1)$,

para $\nu \geq 1$,

$$H^1_\nu = \frac{1}{i} \Big[(\chi_{m-1+\nu}-1) \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j!} p^{(0,j)}(\ldots)(\phi_{t'}+\tau)^{j-1}\Big|_{t=t'} k_{m-1+\nu}(\ldots) +$$

$$+ \sum_{\nu'=0}^{\nu-1} (\chi_{m-1+\nu'}-1) \tilde{R}_\nu^{\nu'}(\ldots) k_{m-1+\nu'}\Big|_{t=t'}\Big] =$$

$$= \frac{1}{i} \Big[-(\chi_{m-1+\nu}-1) \sum_{\nu'=0}^{\nu-1} \tilde{R}_\nu^{\nu'} k_{m-1+\nu'}\Big|_{t=t'} +$$

$$+ \sum_{\nu'=0}^{\nu-1} (\chi_{m-1+\nu'}-1) \tilde{R}_\nu^{\nu'} k_{m-1+\nu'}\Big|_{t=t'}\Big] =$$

$$= \frac{1}{i} \Big[\sum_{\nu'=0}^{\nu-1} (\chi_{m-1+\nu'}-\chi_{m-1+\nu}) \tilde{R}_\nu^{\nu'} k_{m-1+\nu'}\Big|_{t=t'}\Big] \qquad \text{(c.q.d.)}$$

<u>Lema 5.4</u>

Afirmamos que,

$$k^1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} k^1_\nu,$$

onde $k^1_\nu = \sum_{\nu'=0}^{\nu-1} (\chi_{m-1+\nu'}-\chi_{m-1+\nu}) \tilde{Q}_\nu^{\nu'} \quad k_{m-1+\nu'}$

Prova

Lembramos que o têrmo homogêneo de grau $-\nu$ em $P(x,t,D_x+\xi+\phi_x,D_t+\phi_t)k$ é dado por:

(2.2.11) $$\sum_{j=1}^{n} p_{\xi_j}(x,t,\xi+\phi_x,\phi_t)D_x{}^j\, k_{m-1+\nu} + \tilde{p}_\tau(x,t,\xi+\phi_x,\phi_t)D_t\, k_{m-1+\nu} +$$

$$+ C(x,t,t',\xi)k_{m-1+\nu} + \sum_{\nu'=0}^{\nu-1} \tilde{Q}_\nu^{\nu'}(x,t,t',\xi,D_x,D_t)k_{m-1+\nu'}$$

Em analogia obtemos que o têrmo homogêneo de grau $-\nu$ com relação a ξ, quando $|\xi|\to\infty$, em $P(x,t,D_x+\xi+\phi_x,D_t+\phi_t)k^0$ é dado por:

$$\sum_{j=1}^{n} p_{\xi_j}(x,t,\xi+\phi_x,\phi_t)D_x{}^j\, \chi_{m-1+\nu}\, k_{m-1+\nu} + p_\tau(x,t,\xi+\phi_x,\phi_t)D_t\chi_{m-1+\nu}k_{m-1+\nu}$$

$$+ C(x,t,t',\xi)\, \chi_{m-1+\nu}\, k_{m-1+\nu} + \sum_{\nu'=0}^{\nu-1} \tilde{Q}_\nu^{\nu'}(x,t,t',\xi,D_x,D_t)\, \chi_{m-1+\nu'}\, k_{m-1+\nu'} =$$

$$= -q \sum_{j=1}^{n} \lambda_{\xi_j}\, D_x{}^j\, \chi_{m-1+\nu}\, k_{m-1+\nu} + q\, D_t\, \chi_{m-1+\nu}\, k_{m-1+\nu} +$$

$$+ \frac{q}{q}\, C.\, \chi_{m-1+\nu}\, k_{m-1+\nu} + \sum_{\nu'=0}^{\nu-1} \tilde{Q}_\nu^{\nu'}\, \chi_{m-1+\nu'}\, k_{m-1+\nu'} =$$

$$= q(D_t - \sum_{j=1}^{n} A_j\, D_x{}^j + A_0)\, \chi_{m-1+\nu}\, k_{m-1+\nu} + \sum_{\nu'=0}^{\nu-1} \tilde{Q}_\nu^{\nu'}\, \chi_{m-1+\nu'}\, k_{m-1+\nu'}$$

$$= q\, \chi_{m-1+\nu}(D_t - \sum_{j=1}^{n} A_j\, D_x{}^j + A_0)k_{m-1+\nu} + \sum_{\nu'=0}^{\nu-1} \tilde{Q}_\nu^{\nu'}\chi_{m-1+\nu'}\, k_{m-1+\nu'} =$$

$$= q\, \chi_{m-1+\nu}(-\sum_{\nu'=0}^{\nu-1} Q_\nu^{\nu'}\, k_{m-1+\nu'}) + \sum_{\nu'=0}^{\nu-1} \tilde{Q}_\nu^{\nu'}\, \chi_{m-1+\nu'}\, k_{m-1+\nu'} =$$

$$= \sum_{\nu'=0}^{\nu-1} -\chi_{m-1+\nu}\, \tilde{Q}_\nu^{\nu'}\, k_{m-1+\nu'} + \sum_{\nu'=0}^{\nu-1} \chi_{m-1+\nu'}\, \tilde{Q}_\nu^{\nu'}\, k_{m-1+\nu'} \quad \text{(pois,}$$

$$\mathcal{Q}_\nu^{\nu'} = \tilde{\mathcal{Q}}_\nu^{\nu'}/q) = \sum_{\nu'=0}^{\nu-1} (\chi_{m-1+\nu'} - \chi_{m-1+\nu'}) \tilde{\mathcal{Q}}_\nu^{\nu'} \; k_{m-1+\nu'}$$

Portanto, $k^1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} k_\nu^1$ onde

$$k_\nu^1 = \sum_{\nu'=0}^{\nu-1} (\chi_{m-1+\nu'} - \chi_{m-1+\nu}) \tilde{\mathcal{Q}}_\nu^{\nu'} \; k_{m-1+\nu'} \qquad \text{(c.q.d.)}$$

Lembramos que $\tilde{\mathcal{Q}}_\nu^{\nu'} \equiv 0$ a menos que $\nu - \nu' \leq m - 1$ e que $\tilde{\mathcal{Q}}_\nu^{\nu'}$ depende somente de $\nu - \nu'$ (conforme apêndice A)

Lema 5.5

Para alguma constante $C_1 > 0$ e todos (x,t,t') satisfazendo (5.1), todos $(\xi,\tau) \in \Gamma$, $|\xi|^2 + \tau^2 > \frac{1}{4}$, todos ν,ν',

$$|\tilde{\mathcal{Q}}_\nu^{\nu'} k_{m-1+\nu'}| \leq C_1^{\nu+1} \; \nu! \; (|\xi|^2+\tau^2)^{-\nu/2}$$

Prova

Como o grau de homogeneidade dos coeficientes de $\tilde{\mathcal{Q}}_\nu^{\nu'}$ é $m-1-\nu+\nu'$ e o grau de $k_{m-1+\nu'}$ é $-m+1-\nu'$, então o grau de $\tilde{\mathcal{Q}}_\nu^{\nu'} k_{m-1+\nu'}$ é $-\nu$, logo basta mostrar que o lema vale para $|\xi|^2 + \tau^2 = 1$.

Em (5.2) fazendo $j = m-1+\nu'$ e $|\xi|^2 + \tau^2 = 1$ temos

$$|k_{m-1+\nu'}| = |e^{-i\hat{A}_{00}}| \, |W_{m-1+\nu'}| \leq e^{|\hat{A}_{00}|} C.(C/\kappa^m)^{m-1+\nu'} (m-1+\nu')! \leq$$

$$\leq e^{\tilde{M}}.C.(C/\kappa^m)^{m-1+\nu'} (m-1+\nu')! = M$$

Seja $\tilde{\mathcal{Q}}_\nu^{\nu'} = \sum_{|\alpha|\leq\nu-\nu'\leq m-1} a_\alpha(x,t,t',\xi) D^\alpha$. Então,

$$|\tilde{\mathcal{Q}}_\nu^{\nu'} k_{m-1+\nu'}| \leq \sum_{|\alpha|\leq m-1} |a_\alpha| \; |D^\alpha k_{m-1+\nu'}|.$$

Como $|k_{m-1+\nu'}| \leq M$, pela desigualdade de Cauchy temos,

$$|D^{\alpha}k_{m-1+\nu'}| \leq M\alpha!\ r^{-\alpha} \leq M(\nu-\nu')!\,(\tfrac{1}{r})^{\nu-\nu'}$$

Assim,

$$|\tilde{\mathcal{Q}}_{\nu}^{\nu'}\ k_{m-1+\nu'}| \leq e^{\tilde{M}} \max_{|\alpha|\leq m-1} \{\sup|a_{\alpha}|\} \sum_{|\alpha|\leq m-1} C.(C/\kappa^{m})^{(m-1+\nu')}(m-1+\nu')!$$
$$\times\ (\nu-\nu')!\ (\tfrac{1}{r})^{\nu-\nu'}$$

$$= e^{\tilde{M}}\ \tilde{\tilde{M}}\ C(m).C.(C/\kappa^{m})^{(m-1+\nu')}(\tfrac{1}{r})^{\nu-\nu'}\ (m-1+\nu')!\,(\nu-\nu')! =$$

$$= \tilde{C}\ (C/\kappa^{m})^{m-1+\nu'}(\tfrac{1}{r})^{\nu-\nu'}(m-1+\nu')!\ (\nu-\nu')!$$

onde $\tilde{\tilde{M}} = \max\limits_{|\alpha|\leq m-1} \{\sup|a_{\alpha}|\}$, $\mathcal{C}(m)$ = número de n-uplas α e $\tilde{C} = e^{\tilde{M}}.\tilde{\tilde{M}}\ C(m)C$

Colocando $D = \max\{1,\ \frac{C}{\kappa^{m}},\ (C/\kappa^{m})(\frac{1}{r})^{\nu-\nu'}\}$ temos que

$$(C/\kappa^{m})^{m-1+\nu'}(\tfrac{1}{r})^{\nu-\nu'} = (\tfrac{1}{r})^{\nu-\nu'}(C/\kappa^{m})(C/\kappa^{m})^{m-2+\nu'} \leq D.D^{m-2+\nu'}=D^{m-1+\nu'}$$

e portanto,

$$|\tilde{\mathcal{Q}}_{\nu}^{\nu'}\ k_{m-1+\nu'}| \leq \tilde{C}\ D^{m-1+\nu'}(m-1-\nu')!\,(\nu-\nu')!$$

Notemos que, como $a!\ b! \leq (a+b)!$, $(m-1+\nu')!(\nu-\nu')! \leq (m-1+\nu)!$ e além disso, como $2^{n} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ pois, $2^{n} = (1+1)^{n} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ temos $\binom{n}{k} \leq 2^{n}$ e portanto,

$$\frac{(m-1+\nu)!}{\nu!\,(m-1)!} = \binom{m-1+\nu}{\nu} \leq 2^{m-1+\nu}, \text{ ou seja,}$$

$$(m-1+\nu)! \leq (m-1)!\ 2^{m-2}2^{\nu+1}\nu!$$

Assim,

$$|\tilde{\mathcal{Q}}_{\nu}^{\nu'}k_{m-1+\nu'}| \leq \tilde{C}\ D^{m-1+\nu'}\ (m-1)!\ 2^{m-2}\ 2^{\nu+1}\ \nu!$$

Seja $R = \tilde{C}\ D^{m-1+\nu'}(m-1)!\ 2^{m-2}$. Como $(m-1)! \geq 1$, $2^{m-2} \geq 1$,

$D^{m-1+\nu'} \geq 1$ e podemos supor $\tilde{C} \geq 1$ temos $R \geq 1$.

Logo,

$$|\tilde{Q}_{\nu}^{\nu'} \; k_{m-1+\nu'}| \leq R\, 2^{\nu+1}\, \nu! \leq R^{\nu+1} 2^{\nu+1} \nu! = (2R)^{\nu+1} \nu! =$$

$$= C_1^{\nu+1} \nu! \qquad \text{(c.q.d.)}$$

É fácil ver que podemos escrever:

$$k_{\nu}^{1} = \sum_{j=\nu}^{\nu+m-2} (\chi_j - \chi_{j+1})\, S_{\nu,j}$$

onde $S_{\nu,j} = 0$ se $j \leq m-2$ e

$$S_{\nu,j} = \sum_{\nu'=0}^{j-m+1} \tilde{Q}_{\nu}^{\nu'} \; k_{m-1+\nu'} \quad \text{se} \quad j \geq m-1$$

Afirmamos que $|S_{\nu,j}| \leq C_2^{\nu+1}\, \nu!\, (|\xi|^2+\tau^2)^{-\nu/2}$.

De fato,

$$|S_{\nu,j}| \leq \sum_{\nu'=0}^{j-m+1} |\tilde{Q}_{\nu}^{\nu'} \; k_{m-1+\nu'}| \leq \sum_{\nu'=0}^{j-m+1} C_1^{\nu+1}\, \nu! (|\xi|^2+\tau^2)^{-\nu/2} =$$

$$= (j-m+2)\, C_1^{\nu+1} \nu! (|\xi|^2+\tau^2)^{-\nu/2} \leq$$

$$\leq [(m+\nu-2)-m+2]\, C_1^{\nu+1}\, \nu!\, (|\xi|^2+\tau^2)^{-\nu/2} =$$

$$= \nu\, C_1^{\nu+1}\, \nu! (|\xi|^2+\tau^2)^{-\nu/2} \leq C_2^{\nu+1}\, \nu! (|\xi|^2+\tau^2)^{-\nu/2} \qquad \text{(c.q.d.)}$$

<u>Observação</u>

$$\nu C_1^{\nu+1} \leq 2^{\nu+1}\, C_1^{\nu+1} = (2C_1)^{\nu+1} = C_2^{\nu+1}.$$

É fácil ver que podemos escrever:

$$k^1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} k_\nu^1 = \sum_{j=0}^{\infty} (\chi_j - \chi_{j+1}) S_j$$

onde

$$S_j = \sum_{\nu=j-m+2}^{j} S_{\nu,j} \ , \qquad S_{\nu,j} = 0 \quad \text{se} \quad \nu < 0$$

Lema 5.6

Para todos (x,t,t') satisfazendo (5.1) e todos $(\xi,\tau) \in \Gamma$

$$|S_j| \leq C_3^{j+1} j! (|\xi|^2+\tau^2)^{(\mu-j)/2},$$

onde $\mu = \inf(j,m-2)$.

Prova

$$S_j = \sum_{\nu=j-m+2}^{j} S_{\nu,j} \quad \text{para} \quad \nu \geq 0 \quad \text{pois se} \quad \nu < 0, \ S_{\nu,j} = 0,$$

logo

$S_j = \sum_{\nu=\max\{0,j-m+2\}}^{j} S_{\nu,j}$. Seja $\nu_0 = \nu_0(j) = \max\{0, j-m+2\}$.

Assim, $S_j = \sum_{\nu=\nu_0(j)}^{j} S_{\nu,j}$. Como $\nu \leq j$ e podemos supor $C_2 \geq 1$,

$$|S_j| \leq \sum_{\nu=\nu_0(j)}^{j} |S_{\nu,j}| \leq \sum_{\nu=\nu_0(j)}^{j} C_2^{\nu+1} \nu! (|\xi|^2+\tau^2)^{-\nu/2} \leq$$

$$\leq \sum_{\nu=\nu_0(j)}^{j} C_2^{j+1} j! (|\xi|^2+\tau^2)^{-\nu/2}.$$

Seja $\mu = \inf\{j,m-2\}$, então

$$|S_j| \leq C_2^{j+1} j! (|\xi|^2+\tau^2)^{\frac{\mu-j}{2}} \left[\sum_{\nu=\nu_0(j)}^{j} (|\xi|^2+\tau^2)^{-\nu/2-\frac{\mu-j}{2}} \right]$$

Como $|\xi|^2+\tau^2 > \frac{1}{4}$ temos que $(|\xi|^2+\tau^2)^{-1/2} < 2$ e portanto,

$$|S_j| \leq C_2^{j+1} j! (|\xi|^2+\tau^2)^{\frac{\mu-j}{2}} \left[\sum_{\nu=\nu_0(j)}^{j} ((|\xi|^2+\tau^2)^{-1/2})^{\nu+\mu-j} \right] \leq$$

$$< C_2^{j+1} j! (|\xi|^2+\tau^2)^{\frac{\mu-j}{2}} \sum_{\nu=\nu_0(j)}^{j} 2^{\nu+\mu-j} =$$

$$C_2^{j+1}\ j!\ (|\xi|^2+\tau^2)^{\frac{\mu-j}{2}}\ (2^{\nu_0(j)+\mu-j} + 2^{\nu_0(j)+\mu-j+1}+\ldots+2^{j+\mu-j})$$

Observemos que como $\nu_0(j) = \max\{0,j-m+2\}$ e $\mu = \inf\{j,m-2\}$ então $\nu_0(j) + \mu = j$ e assim,

$$|S_j| \leq C_2^{j+1}\ j!(|\xi|^2+\tau^2)^{\frac{\mu-j}{2}}\ (2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{\mu}) =$$

$$= C_2^{j+1}\ j!\ (|\xi|^2+\tau^2)^{\frac{\mu-j}{2}}\ (2^{\mu+1}-1) \leq C_2^{j+1}\ j!\ (|\xi|^2+\tau^2)^{\frac{\mu-j}{2}}\cdot 2^{m-1}$$

$\leq C_3^{j+1}\ j!(|\xi|^2+\tau^2)^{\frac{\mu-j}{2}}$ pois, como $\mu = \inf(j,m-2)$ temos $\mu \leq m - 2$ e portanto $\mu+1 \leq m-1$ e seja $C_3 = \max\{C_2, 2^{m-1}C_2\}$ então,

$$2^{m-1}C_2^{j+1} = 2^{m-1}C_2\ C_2^j \leq C_3\ C_3^j = C_3^{j+1}$$

Logo,

$$|S_j| \leq C_3^{j+1}\ j!(|\xi|^2+\tau^2)^{\frac{\mu-j}{2}}\ . \qquad \text{(c.q.d.)}$$

<u>Lema 5.7</u>

Sejam $M, \varepsilon > 0$ tais que $M\,\varepsilon \leq e^{-1/2}$

Então, se

(5.6) $\qquad (j!)^{\frac{1}{j}} < \varepsilon\,\rho \leq ((j+1)!)^{1/j+1}$, temos,

$j!\ M^j\ \rho^{-j} \leq \exp\{-\frac{1}{2}\ \varepsilon\,\rho\}$.

<u>Prova</u>

Seja $f(t) = e^{-t/2}\ t^j$ $(t \geq 0)$. O ponto $t = 2j$ é ponto de máximo de $f(t)$ e para $t < 2j$, f é estritamente crescente. Para $j > 1$, temos $(j+1)! < (2j)^{j+1}$ o que implica $((j+1)!)^{1/j+1} < 2j$

Então, no intervalo (5.6),

$$(j!)^{\frac{1}{j}} < \varepsilon\,\rho \leq ((j+1)!)^{1/j+1} < 2j$$

e como f é estritamente crescente para $t < 2j$ temos,

$$(\varepsilon\rho)^j e^{-\frac{1}{2}\varepsilon\rho} > ((j!)^{\frac{1}{j}})^j (e^{-\frac{1}{2}})^{(j!)^{\frac{1}{j}}} = j!(e^{-\frac{1}{2}})^{(j!)^{\frac{1}{j}}} \geq$$

$$\geq j!(e^{-\frac{1}{2}})^j$$

(pois $j! \leq j^j$ e portanto $(j!)^{\frac{1}{j}} \leq j$).

Assim,

$$(\varepsilon\rho)^j e^{-\frac{1}{2}\varepsilon\rho} > j!(e^{-\frac{1}{2}})^j \quad \text{o que implica,}$$

$$\frac{1}{j!}(\varepsilon\rho)^j e^{-\frac{1}{2}\varepsilon\rho} > (e^{-\frac{1}{2}})^j = \frac{1}{e^{j/2}} \quad \text{e portanto,}$$

$$\frac{1}{j!}\frac{(\varepsilon\rho)^j e^{-\frac{1}{2}\varepsilon\rho}}{\varepsilon^j M^j} > \frac{1}{\varepsilon^j M^j e^{j/2}} \quad \text{ou seja,}$$

$$\frac{1}{j!}(\rho/M)^j e^{-\frac{1}{2}\varepsilon\rho} > \frac{1}{(\varepsilon M e^{1/2})^j} = (\varepsilon M \sqrt{e})^{-j}$$

Mas sabemos que $M\varepsilon \leq e^{-1/2}$, ou seja, $M\varepsilon\sqrt{e} \leq 1$ e portanto $(M\varepsilon\sqrt{e})^{-j} \geq 1$.

Assim,

$$\frac{1}{j!}(\rho/M)^j e^{-\frac{1}{2}\varepsilon\rho} > (\varepsilon M\sqrt{e})^{-j} \geq 1 \quad \text{e então,} \quad j!M^j\rho^{-j} < e^{-\frac{1}{2}\varepsilon\rho}$$

(c.q.d.)

<u>Lema 5.8</u>

Afirmamos que

$|k^1| = |S_j| \leq C_3(|\xi|^2+\tau^2)^{(m-1)/2}\exp\{-C_0(|\xi|^2+\tau^2)^{1/2}\}$, no conjunto: $(j!)^{1/j} < \varepsilon(\kappa^m/C)\ (|\xi|^2+\tau^2)^{1/2} \leq ((j+1)!)^{1/j+1}$.

Prova

Em primeiro lugar notemos que $(\chi_j - \chi_{j+1})$ é a função característica do conjunto

(5.7) $\quad (j!)^{\frac{1}{j}} < \varepsilon(\kappa^m/C)(|\xi|^2+\tau^2)^{1/2} \leq ((j+1)!)^{\frac{1}{j+1}}$

e que esses conjuntos são dois a dois disjuntos.

Como $0 < \kappa < d(z,t-t',t') < 1$ temos $\frac{1}{\kappa} > 1$ e além disso, como podemos supor $C \geq 1$ temos que $\frac{C}{\kappa^m} > 1$. De (5.7) temos que,

$$(|\xi|^2+\tau^2)^{1/2} > \varepsilon^{-1} \frac{C}{\kappa^m}(j!)^{\frac{1}{j}} > 1.$$

Como $(\chi_j - \chi_{j+1})$ é a função característica do conjunto (5.7) temos que

$$|k^1| = |S_j| \leq C_3^{j+1}\, j!\, (|\xi|^2+\tau^2)^{\frac{\mu-j}{2}} \quad \text{no conjunto (5.7)}$$

Agora, aplicando o lema (5.7) com $M = C_3$ e $\rho = (\frac{\kappa^m}{C})\, (|\xi|^2+\tau^2)^{1/2}$ obtemos que

$$j!\, C_3^j (\frac{\kappa^m}{C})^{-j} \left[(|\xi|^2+\tau^2)^{1/2}\right]^{-j} \leq \exp\{-\frac{1}{2}\, \varepsilon (\frac{\kappa^m}{C})(|\xi|^2+\tau^2)^{1/2}\}$$

Portanto,

$$|k^1| = |S_j| \leq C_3^{j+1}\, j! (|\xi|^2+\tau^2)^{\frac{\mu-j}{2}} =$$

$$= C_3\, C_3^j\, j!\, (|\xi|^2+\tau^2)^{-j/2}\, (|\xi|^2+\tau^2)^{\mu/2} \leq$$

$$\leq C_3\, (\frac{\kappa^m}{C})^j \exp\{-\frac{1}{2}\, \varepsilon\, (\frac{\kappa^m}{C})\, (|\xi|^2+\tau^2)^{1/2}\}\, (|\xi|^2+\tau^2)^{\mu/2} \leq$$

$$\leq C_3\, (|\xi|^2+\tau^2)^{\frac{m-1}{2}} \exp\{-C_0(|\xi|^2+\tau^2)^{1/2}\},$$

onde $C_0 = \frac{1}{2}\, \varepsilon\, (\frac{\kappa^m}{C}) > 0.$ (c.q.d.)

Proposição 5.1

Depois de diminuir $C_0 > 0$, obtemos

$$|k^1| \leq C_4 \exp\{-C_0(|\xi|^2+\tau^2)^{1/2}\}, \quad (\xi,\tau) \in \Gamma.$$

Prova

Mostremos inicialmente que,

$$t^n e^{-ct} \leq L e^{-bt} \quad \text{com} \quad c, L, b > 0, \quad \forall t \geq 0.$$

De fato,

$$t^n e^{-ct} = t^n e^{-\frac{c}{2}t} . e^{-\frac{c}{2}t} \quad \text{e como} \quad \lim_{t\to+\infty} \frac{t^n}{e^{\frac{c}{2}t}} = 0,$$

dado $\varepsilon > 0$, $\exists K_1 > 0$ tal que se $t > K_1$ implica $|t^n e^{-\frac{c}{2}t}| < \varepsilon$. Para $0 \leq t \leq K_1$ estamos num compacto, portanto

$$|t^n e^{-\frac{c}{2}t}| \leq M.$$

Seja $L = \max\{\varepsilon,M\}$. Assim, para $t \geq 0$ temos que $|t^n e^{-\frac{c}{2}t}| \leq L$ e então

$$|t^n e^{-ct}| = t^n e^{-ct} = t^n e^{-\frac{c}{2}t} e^{-\frac{c}{2}t} \leq L e^{-\frac{c}{2}t} = L e^{-bt}, \quad \text{com} \quad b = \frac{c}{2}$$

Agora, aplicando esse resultado com $t = (|\xi|^2+\tau^2)^{1/2}$ temos,

$$|k^1| \leq C_3 t^{m-1} e^{-C_0t} \leq C_3 L e^{-C_0t} = C_4 e^{-C_0t} =$$

$$= C_4 \exp \{-C_0(|\xi|^2+\tau^2)^{1/2} \quad \text{com } C_0 \text{ diminuido.} \quad \text{(c.q.d.)}$$

Lema 5.9

Se $(x,t) \in \mathcal{N}$ e $|t'| < t_1$ e $\mathcal{N}$ e t_1 são suficientemente pequenos, então

$$|\phi(x,t,t',\xi)-\tau(t-t')| \leq C_5|t-t'| \, (|\xi|^2+\tau^2)^{1/2}$$

Prova

$$|\phi(x,t,t',\xi)-\tau(t-t')| \leq |\phi(x,t,t',\xi)| + |\tau||t-t'|$$

Como $|\tau| \leq (|\xi|^2+\tau^2)^{1/2}$ temos que $|\tau||t-t'| \leq$ $\leq |t-t'|(|\xi|^2+\tau^2)^{1/2}$. Além disso, como ϕ é homogênea de grau 1 com relação a ξ, basta mostrar que para $|\xi| = 1$ temos

$$|\phi(x,t,t',\xi)| \leq C|t-t'|$$

pois, para $\xi \neq 0$,

$$|\phi(x,t,t',\xi)| = |\xi||\phi(x,t,t',\tfrac{\xi}{|\xi|})| \leq |\xi|C.|t-t'| \leq C|t-t'|(|\xi|^2+\tau^2)^{1/2}.$$

Mostremos então que $|\phi(x,t,t',\xi)| \leq C|t-t'|$ para $|\xi| = 1$.

Como $\phi(x,t',t',\xi) = 0$ podemos escrever $\phi(x,t,t',\xi) = (t-t')\ \Psi(x,t,t',\xi)$ com Ψ holomorfa.

Tomando uma vizinhança relativamente compacta contida em $\mathcal{N}$, diminuindo t_1 e como $|\xi| = 1$ temos que $|\phi(x,t,t',\xi)| \leq C|t-t'|$.

(c.q.d.)

Tomando $T > 0$ suficientemente pequeno tal que $C_5|t-t'| < \frac{1}{2} C_0$ temos

$$|\phi(x,t,t',\xi) - \tau(t-t')| \leq \frac{1}{2} C_0(|\xi|^2+\tau^2)^{1/2}.$$

Proposição 5.2

Para cada $(\xi,\tau) \in \Gamma$ (fixos), $K^1(x,t,\xi,\tau)$ é uma função holomorfa de (x,t) em $\mathcal{N}$ (e anulando-se identicamente em uma vizinhança de $(\xi,\tau) = (0,0)$), tal que

(5.8) $$|K^1(x,t,\xi,\tau)| \leq C_6\ e^{-\frac{1}{2} C_0(|\xi|^2+\tau^2)^{1/2}}$$

Prova

Lembrando que

$S_j = \sum_{\nu=j-m+2}^{j} S_{\nu,j}$, $S_{\nu,j} = 0$ se $j \leq m-2$ e que

$S_{\nu,j} = \sum_{\nu'=0}^{j-m+1} \tilde{\lambda}_{\nu}^{\nu'} k_{m-1+\nu'}$ se $j \geq m-1$, temos que S_j é holomorfa.

Como $k^1 = \sum_{j=0}^{\infty} (\chi_j - \chi_{j+1}) S_j$, para $(\xi,\tau) \in \Gamma$ fixos temos que $k^1 = S_j$ e portanto k^1 é uma função holomorfa de (x,t,t').

Assim,

$$K^1(x,t,\xi,\tau) = \int_{-T}^{t} e^{i\phi(x,t,t',\xi)-i\tau(t-t')} k^1(x,t,t',\xi,\tau)dt'$$

é uma função holomorfa de (x,t) em $\mathcal{N}$ para cada $(\xi,\tau) \in \Gamma$(fixos) (ver proposição - B. 10 - apêndice B).

$$|K^1(x,t,\xi,\tau)| \leq \int_{-T}^{t} e^{|\phi(x,t,t',\xi)-\tau(t-t')|} |k^1(x,t,t',\xi,\tau)|dt'$$

$$\leq \int_{-T}^{t} e^{\frac{1}{2} C_0(|\xi|^2+\tau^2)^{1/2}} C_4 \, e^{-C_0(|\xi|^2+\tau^2)^{1/2}} dt' \leq$$

$$\leq L. \, C_4 \, e^{-\frac{1}{2} C_0(|\xi|^2+\tau^2)^{1/2}} = C_6 \, e^{-\frac{1}{2} C_0(|\xi|^2+\tau^2)^{1/2}} \quad \text{(c.q.d.)}$$

Proposição 5.3

Para cada $(\xi,\tau) \in \Gamma$ (fixos), $H^1(x,t,\xi,\tau)$ é uma função holomorfa de (x,t) em $\mathcal{N}$, tal que

$$(5.9) \qquad |H^1(x,t,\xi,\tau)| \leq C_7 \, e^{-\frac{1}{2} C_0(|\xi|^2+\tau^2)^{1/2}}$$

Prova

É análoga à demonstração feita para k^1.

Assim, $\tilde{K}^1(x,t,\xi,\tau) = K^1(x,t,\xi,\tau) + H^1(x,t,\xi,\tau)$ satisfaz

Proposição 5.4

Para cada $(\xi,\tau) \in \Gamma$ (fixos), $\tilde{K}^1(x,t,\xi,\tau)$ é uma função holomorfa de $(x,t) \in \mathcal{N}$, tal que

$$(5.10) \qquad |\tilde{K}^1(x,t,\xi,\tau)| \leq C_8\, e^{-\frac{1}{2} C_0(|\xi|^2+\tau^2)^{1/2}}$$

Definamos o seguinte operador:

$$R\, u(x,t) = (2\pi)^{-n-1} \iint e^{i<x,\xi>+i\tau t}\, \tilde{K}^1(x,t,\xi,\tau) g(\xi,\tau)\hat{u}(\xi,\tau) d\xi d\tau$$

Mostremos que se $u \in E'(R^{n+1})$, $R\, u$ é uma função holomorfa de (x,t) no conjunto

$$(x,t) \in \mathcal{N}, \quad (|x|^2+|t|^2)^{1/2} < \frac{1}{4} C_0$$

Seja,

$$f(x,t,\xi,\tau) = e^{i<x,\xi>+i\tau t}\, \tilde{K}^1(x,t,\xi,\tau) g(\xi,\tau)\hat{u}(\xi,\tau).$$

Mostremos que f satisfaz as condições da proposição B.12.

Provemos os seguintes fatos:

a) $$|e^{i<x,\xi>+i\tau t}| < e^{\frac{1}{4} C_0(|\xi|^2+\tau^2)^{1/2}}$$

De fato,

$$|e^{i<x,\xi>+i\tau t}| = e^{-(<\mathrm{Im}x,\xi>+\tau(\mathrm{Im}t))} \leq e^{|x|.|\xi|+\tau|t|} \leq$$

$$\leq e^{(|x|^2+|t|^2)^{1/2}.(|\xi|^2+\tau^2)^{1/2}} < e^{\frac{1}{4} C_0(|\xi|^2+\tau^2)^{1/2}}$$

A última desigualdade acima é válida pois

$$|x|.|\xi| + \tau|t| \leq (|x|^2+|t|^2)^{1/2}\ (|\xi|^2+\tau^2)^{1/2} \iff$$

$$\iff \quad (|x|\ |\xi| + \tau|t|)^2 \leq (|x|^2+|t|^2)\ (|\xi|^2+\tau^2) \iff$$

$$\iff \quad 2(|x|.\tau.|t||\xi|) \leq |x|^2\tau^2 + |t|^2|\xi|^2,$$ o que é verdade pois $2ab \leq a^2 + b^2$.

b) $$(1+s)^N e^{-\frac{1}{4} C_0 s} \leq C\, e^{-\frac{1}{8} C_0 s}$$

De fato,

$$(1+s)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} 1^{N-k} s^k = \sum_{k=0}^{N} d_k\, s^k = (d_0+d_1 s+d_2 s^2+\ldots+d_N s^N)$$

Assim,

$$(1+s)^N e^{-\frac{1}{4} C_0 s} = (d_0+d_1 s+d_2 s^2+\ldots+d_N s^N) e^{-\frac{1}{4} C_0 s} =$$

$$= d_0 e^{-\frac{1}{4} C_0 s} + d_1 S e^{-\frac{1}{4} C_0 s} + \ldots + d_N s^N e^{-\frac{1}{4} C_0 s} \leq$$

$$\leq d_0\, e^{-\frac{1}{8} C_0 s} + L_1\, e^{-\frac{1}{8} C_0 s} + \ldots + L_N e^{-\frac{1}{8} C_0 s} = C\, e^{-\frac{1}{8} C_0 s}$$

Lembramos que se $u \in E'(R^{n+1})$ então existe uma constante L e um inteiro $N \geq 0$ tal que

$$|\hat{u}(\xi,\tau)| \leq L[1+(|\xi|^2+\tau^2)^{1/2}]^N, \ \forall (\xi,\tau) \in R_{n+1}$$

(Segue do Teorema Paley-Wiener-Schwartz).

Então,

$$|f(x,t,\xi,\tau)| = |e^{i<x,\xi>+i\tau t}|\ |\tilde{K}^1(x,t,\xi,\tau)|\ |g(\xi,\tau)|.|\hat{u}(\xi,\tau)| \leq$$

$$\leq e^{\frac{1}{4} C_0 (|\xi|^2+\tau^2)^{1/2}} . C_8 . e^{-\frac{1}{2} C_0 (|\xi|^2+\tau^2)^{1/2}} .1.L. [1+(|\xi|^2+\tau^2)^{1/2}]^N$$

$$= D\ e^{-\frac{1}{4} C_0\ (|\xi|^2+\tau^2)^{1/2}} . [1+(|\xi|^2+\tau^2)^{1/2}]^N \leq$$

$$\leq D_1\ e^{-\frac{1}{8} C_0 (|\xi|^2+\tau^2)^{1/2}} .$$

Portanto a primeira condição da proposição B.12 está verificada.

Como para cada (ξ,τ) $\tilde{K}^1$ é uma função holomorfa de (x,t) em $\mathcal{N}$ temos que f é uma função holomorfa de (x,t) para cada (ξ,τ)

fixo e assim a segunda condição da proposição B.12 também está verificada.

Para simplificar a verificação da terceira condição da proposição B.12 denotamos por $y = (x,t)$ e $\eta = (\xi,\tau)$. Assim,

$$f(y,\eta) = e^{i<y,\eta>} \tilde{K}^1(y,\eta)g(\eta)\hat{u}(\eta) \quad \text{e}$$

$$\frac{\partial}{\partial y^j} f(y,\eta) = i\eta_j \; e^{i<y,\eta>} \tilde{K}^1(y,\eta)g(\eta)\hat{u}(\eta) +$$

$$+ e^{i<y,\eta>}(\frac{\partial}{\partial y^j} \tilde{K}^1(y,\eta))g(\eta)\hat{u}(\eta).$$

Como $|i\eta_j| \leq |\eta|$ e $|\frac{\partial}{\partial y^j} \tilde{K}^1(y,\eta)| \leq D_2 \, e^{-\frac{1}{2} C_0|\eta|}$ (pela desigualdade de Cauchy), temos

$|\frac{\partial}{\partial y^j} f(y,\eta)| \leq h(\eta)$ onde h é uma função integrável.

Assim a terceira condição fica verificada.

Logo, $R\,u(x,t)$ está bem definida e é uma função holomorfa de (x,t) em $\mathcal{N}$, $(|x|^2+|t|^2)^{1/2} < \frac{1}{4} C_0$, e portanto R é um operador analítico-regularizante.

De modo análogo demonstra-se que é verdadeira a

<u>Proposição 5.5</u>

O núcleo-distribuição, R, associado ao operador R, dado por

$$R(x,t;y,s) = (2\pi)^{-n-1}\iint e^{i<x-y,\xi>+i\tau(t-s)} \tilde{K}^1(x,t,\xi,\tau)g(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

é uma função holomorfa de $(x,t;y,s)$ em $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$, $(|x|^2+|t|^2)^{1/2} < \frac{1}{8} C_0$, $(|y|^2+|s|^2)^{1/2} < \frac{1}{8} C_0$.

Corolário

$R(x,t;y,s)$ é uma função analítica em uma vizinhança de $(0,0;0,0) \in R^{n+1} \times R^{n+1}$.

CAPÍTULO 6

ANALITICIDADE DO NÚCLEO FORA DA DIAGONAL

Conservamos todas as notações anteriores. Além disso, definimos

$$K_j^0(x,t,\xi,\tau) = \int_{-T}^{t} e^{i\phi(x,t,t',\xi)-i\tau(t-t')} k_j(x,t,t',\xi,\tau)dt',$$

$$\kappa_j^0(x,t;y,s)=(2\pi)^{-n-1}\iint e^{i(<x-y,\xi>+\tau(t-s))} K_j^0(x,t,\xi,\tau)\chi_j(\xi,\tau) g(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

onde a integral com relação a (ξ,τ) deve ser entendida no sentido oscilatório (ver capítulo 0)

Seja K_j o seguinte operador:

$$K_j u(x,t) = (2\pi)^{-n-1}\iint e^{i(<x,\xi>+\tau t)}\chi_j(\xi,\tau)K_j^0(x,t,\xi,\tau)g(\xi,\tau)\hat{u}(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

$$=(2\pi)^{-n-1}\iiiint e^{i(<x-y,\xi>+\tau(t-s))}\chi_j(\xi,\tau)K_j^0(x,t,\xi,\tau)g(\xi,\tau)u(y,s)dyds\, d\xi d\tau$$

Observemos que esse operador, K_j, aplica continuamente $C_c^\infty(\Omega_{y,s})$ em $D'(\Omega_{x,t})$ (a demonstração é análoga à do operador K feita no capítulo 7) e que $\kappa_j^0(x,t;y,s)$ é o núcleo distribuição associado a K_j através do Teorema dos Núcleos de Schwartz.

Lembramos que $\phi(x,t,t',\xi)$ e $k_j(x,t,t',\xi,\tau)$ podem ser estendidas como funções holomorfas no produto de uma vizinhança aberta da origem em C^{n+2} e o cone aberto $\Gamma^C \subset C_{n+1}|\{0\}$, onde (x,t,t') pertencem à vizinhança da origem em C^{n+2} e (ξ,τ) pertencem ao cone Γ^C.

Escolhemos um cone aberto $\Gamma_0 \subset \Gamma = \Gamma^C \cap R_{n+1}$, contendo (ξ^0,τ^0) e supp g, tal que, para algum número $\delta_0 > 0$,

$$(6.1) \qquad (\xi,\tau) + i\,\rho\,v \,\varepsilon\, \Gamma^C,$$

para todos $(\xi,\tau)\,\varepsilon\,\Gamma_0$, todos vetores v tal que $|v| \leq \delta_0$ e $\rho = (|\xi|^2+\tau^2)^{1/2}$. Assim, por (6.1) temos o direito de substituir (ξ,τ) por $(\xi,\tau) + i\,\rho\,v$ em ϕ e em k_j.

Escolhemos o vetor v como segue:

Caso I: se $x \neq y$, seja $v = (v_1,\ldots,v_n,v_{n+1})$ onde

$$v' = (v_1,\ldots,v_n) = \delta(x-y)\,|x-y|^{2k-1}, \quad v_{n+1} = 0$$

Caso II: se $t \neq s$, tomamos

$$v' = 0, \quad v_{n+1} = \delta(t-s)\,|t-s|^{2k-1},$$

onde $2k$ é o inteiro que aparece na condiçãp (2.1.6) e δ é um número maior que zero, que será escolhido depois.

Lema 6.1

Existem constantes c, $\delta_1 > 0$ tais que, para todo δ, $0 \leq \delta < \delta_1$, para todo t', $-T \leq t' \leq t$, todo $(\xi,\tau)\,\varepsilon\,\Gamma$, temos

$$\langle x-y,v'\rangle+(t'-s)v_{n+1}+\mathrm{Im}\phi(x,t,t',\rho^{-1}\xi+iv') > c\delta,$$

onde c e δ_1 dependem de (x,t,y,s).

Prova

Realizando uma expansão de Taylor finita de ordem 2 com re lação a ξ sobre $\rho^{-1}\xi$, temos

$$\phi(x,t,t',\rho^{-1}\xi+iv')=\phi(x,t,t',\rho^{-1}\xi)+<\phi_\xi(x,t,t',\rho^{-1}\xi),iv'> \pm$$
$$+ 0(|v'|^2)=$$
$$= \frac{1}{\rho}\phi(x,t,t',\xi) + < \phi_\xi(x,t,t',\xi),iv'>+0(|v'|^2)$$ pois, ϕ é

homogênea de grau 1 com relação a ξ e ϕ_ξ é homogênea de grau 0 com relação a ξ. Então,

$$\mathrm{Im}\phi(x,t,t',\rho^{-1}\xi+iv') = \mathrm{Im}\Big[\frac{1}{\rho}\mathrm{Re}\phi(x,t,t',\xi) + \frac{1}{\rho}\, i\, \mathrm{Im}\phi(x,t,t',\xi) +$$
$$+ < \mathrm{Re}\phi_\xi(x,t,t',\xi) + i\ \mathrm{Im}\phi_\xi(x,t,t',\xi),iv'>\Big] + 0(|v'|^2) =$$
$$= \frac{1}{\rho}\mathrm{Im}\phi(x,t,t',\xi) + <\mathrm{Re}\phi_\xi(x,t,t',\xi),v'> + 0(|v'|^2),$$ ou seja,

$$\mathrm{Im}\phi(x,t,t',\rho^{-1}\xi+iv') = \frac{1}{\rho}\mathrm{Im}\phi(x,t,t',\xi)+\mathrm{Re}<v',\phi_\xi(x,t,t',\xi)> + 0(|v'|^2)$$

Usando a Proposição 4.1 e a condição (3.0) obtemos,

$$\rho^{-1}\mathrm{Im}\phi(x,t,t',\xi) \geq \rho^{-1}\frac{1}{B'}|\xi|(t-t')^{2k+1} > \rho^{-1}\frac{1}{B'}\gamma\rho(t-t')^{2k+1}$$
$$= \frac{\gamma}{B'}(t-t')^{2k+1} = C_1(t-t')^{2k+1},$$ isto é,

(6.2) $$\rho^{-1}\mathrm{Im}\phi(x,t,t',\xi) \geq C_1(t-t')^{2k+1}$$

Separamos a prova em dois casos:

Caso I - Como $\phi(x,t,t',\xi)|_{t=t'} = 0$ temos $\phi_\xi(x,t,t',\xi)|_{t=t'} = 0$ assim obtemos que,

$$|\phi_\xi(x,t,t',\xi)| \leq C_7|t-t'|.$$

Logo,

$$|<v',\phi_\xi(x,t,t',\xi)>| \leq |v'|\ |\phi_\xi(x,t,t',\xi)| \leq C_7|v'|\ |t-t'| \leq$$
$$\leq \delta\, C_7|x-y|^{2k}|t-t'|.$$

Afirmamos que neste caso, basta mostrar que,

(1) $$|x-y|^{2k+1}-C_7|x-y|^{2k}(t-t')+C_1\delta^{-1}(t-t')^{2k+1}-C_8\delta|x-y|^{4k} > C$$

De fato, como neste caso $v' = \delta(x-y)\ |x-y|^{2k-1}$, $v_{n+1} = 0$

temos de mostrar que,

$$<x-y,v'> + \operatorname{Im}\phi(x,t,t',\rho^{-1}\xi+iv') > c\delta.$$

Como,

$<x-y,v'>=<x-y,\delta|x-y|^{2k-1}(x-y)>=\delta|x-y|^{2k-1}|x-y|^2=\delta|x-y|^{2k+1}$,

$|\operatorname{Re}<v',\phi_\xi>|\leq |<v',\phi_\xi>| \leq \delta\ C_7|x-y|^{2k}|t-t'|$ o que implica

$$\operatorname{Re}<v',\phi_\xi> \geq -\delta C_7|x-y|^{2k}|t-t'|,$$

$|O(|v'|^2)| \leq C_8|v'|^2 = C_8\ \delta^2|x-y|^{4k}$ e portanto,

$$O(|v'|^2) \geq -C_8\delta^2|x-y|^{4k}.$$

Usando esses resultados temos

$$<x-y,v'>+\operatorname{Im}\phi(x,t,t',\rho^{-1}\xi+iv')=<x-y,v'> + \frac{1}{\rho}\operatorname{Im}\phi(x,t,t',\xi)$$

$$+ \operatorname{Re}<v',\phi_\xi(x,t,t',\xi)> + O(|v'|^2) \geq$$

$$\geq \delta|x-y|^{2k+1}+C_1(t-t')^{2k+1}-\delta C_7|x-y|^{2k}|t-t'|-C_8\delta^2|x-y|^{4k} =$$

$$=\delta\left[|x-y|^{2k+1}+C_1\delta^{-1}(t-t')^{2k+1}-C_7|x-y|^{2k}|t-t'|-C_8\delta|x-y|^{4k}\right] >$$

$$> c.\delta.$$

Mostremos agora que (1) é verdadeiro.

De fato,

(I) Para $t - \frac{|x-y|}{4C_7} \leq t' \leq t$ vale:

$$\frac{1}{2}|x-y|^{2k+1}-C_7|x-y|^{2k}(t-t') = |x-y|^{2k}\{\tfrac{1}{2}|x-y|-C_7(t-t')\} \geq$$

$$\geq |x-y|^{2k}\{\tfrac{1}{2}|x-y| - \tfrac{1}{4}|x-y|\} \geq \frac{|x-y|^{2k+1}}{8}$$

(II) Analisemos $\frac{1}{2}|x-y|^{2k+1} - C_8\delta|x-y|^{4k}$

Tomando $\delta_1 \leq \frac{1}{4} \frac{1}{C_8 |x-y|^{2k-1}}$, $\delta < \delta_1$, temos

$$\frac{1}{2} |x-y|^{2k+1} - C_8 \delta |x-y|^{4k} \geq \frac{1}{2} |x-y|^{2k+1} - C_8 \frac{1}{4} \frac{1}{C_8 |x-y|^{2k-1}} . |x-y|^{4k}$$

$$= \frac{1}{4} |x-y|^{2k+1} > \frac{|x-y|^{2k+1}}{8}$$

(III) Para $-T \leq t' \leq t - \frac{|x-y|}{4C_7}$, tomemos

$$\delta < \delta_1 \leq C_1 \frac{1}{4^{2k} C_7^{k+1}}$$

Então,

$$C_1 \delta^{-1} (t-t')^{2k+1} - C_7 |x-y|^{2k} (t-t') =$$

$$= (t-t') \{C_1 \delta^{-1} (t-t')^{2k} - C_7 |x-y|^{2k}\} \geq$$

$$\geq \frac{|x-y|}{4C_7} \{ C_1 \frac{4^{2k} C_7^{2k+1} (t-t')^{2k}}{C_1} - C_7 |x-y|^{2k}\} \geq$$

$$\geq \frac{|x-y|}{4C_7} \{4^{2k} C_7^{2k+1} \frac{|x-y|^{2k}}{4^{2k} C_7^{2k}} - C_7 |x-y|^{2k}\} = 0$$

Assim,

$$C_1 \delta^{-1} (t-t')^{2k+1} - C_7 |x-y|^{2k} (t-t') \geq 0$$

Seja $\delta_1 = \min \{\delta_0, \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{C_8 |x-y|^{2k-1}}, \frac{C_1}{4^{2k} C_7^{2k+1}}\}$ e seja $C = \frac{|x-y|^{2k+1}}{8}$, então

$$|x-y|^{2k+1} - C_7 |x-y|^{2k} (t-t') + C_1 \delta^{-1} (t-t')^{2k+1} - C_8 \delta |x-y|^{4k} > C$$

Assim fica provado o lema no caso I.

Caso II $\quad v' = 0$ e $v_{n+1} = \delta(t-s)\ |t-s|^{2k-1}$

Afirmamos que neste caso basta mostrar que

(2) $\quad |t-s|^{2k+1} - (t-t')(t-s)\ |t-s|^{2k-1} + C_1\ \delta^{-1}(t-t')^{2k+1} > C,$

para C e δ suficientemente pequenos.

De fato, neste caso temos de mostrar que,

$$\delta(t'-s)(t-s)|t-s|^{2k-1} + \operatorname{Im}\phi(x,t,t',\rho^{-1}\xi) > C\ \delta.$$

Então,

$$\delta(t'-s)(t-s)\ |t-s|^{2k-1} + \operatorname{Im}\phi(x,t,t',\rho^{-1}\xi) \geq$$

$$\geq \delta(t'-s)(t-s)\ |t-s|^{2k-1} + C_1(t-t')^{2k+1} =$$

$$= \delta\left[(t'-s)(t-s)\ |t-s|^{2k-1} + C_1\ \delta^{-1}(t-t')^{2k+1}\right] =$$

$$= \delta\left[((t-s)-(t-t'))(t-s)\ |t-s|^{2k-1} + C_1\ \delta^{-1}(t-t')^{2k+1}\right] =$$

$$= \delta\left[(t-s)(t-s)|t-s|^{2k-1} - (t-t')(t-s)|t-s|^{2k-1} +\right.$$

$$\left.+ C_1\ \delta^{-1}(t-t')^{2k+1}\right] =$$

$$= \delta\left[\ |t-s|^{2k+1} - (t-t')(t-s)|t-s|^{2k-1} + C_1\delta^{-1}(t-t')^{2k+1}\right] >$$

$$> C\ \delta.$$

Mostremos que (2) é verdadeiro. De fato,

(I) Se $\ t < s,\quad (2) \geq |t-s|^{2k+1} > \frac{1}{4}\ |t-s|^{2k+1}$ e

se $\ t > s,\ (2) = |t-s|^{2k+1} - (t-t')|t-s|^{2k} +$

$+ C_1\ \delta^{-1}(t-t')^{2k+1}$

(II) Para $\ t - \frac{1}{2}\ |t-s| \leq t' \leq t\ $ temos,

$$|t-s|^{2k+1} - (t-t')|t-s|^{2k} = |t-s|^{2k+1}\left(1-(t-t')\frac{1}{|t-s|}\right) \geq$$

$$\geq |t-s|^{2k+1}\left(1-\frac{1}{2}|t-s|\ \frac{1}{|t-s|}\right) = \frac{1}{2}|t-s|^{2k+1} > \frac{1}{4}\ |t-s|^{2k+1}$$

(III) Para $-T \leq t' \leq t - \frac{1}{2}|t-s|$, tomando $\delta < \delta_1 \leq \frac{C_1}{4^k}$,

temos,

$$C_1\ \delta^{-1}(t-t')^{2k+1}-(t-t')|t-s|^{2k} =$$

$$= (C_1\ \delta^{-1}(t-t')^{2k} - |t-s|^{2k})(t-t') \geq$$

$$\geq (C_1\ \delta^{-1}(\tfrac{1}{2}\ |t-s|)^{2k} - |t-s|^{2k})\ \tfrac{1}{2}\ |t-s| \geq$$

$$\geq \tfrac{1}{2}\ |t-s|^{2k+1}\{C_1\ \delta^{-1}\ \tfrac{1}{4^k} - 1\} \geq \tfrac{1}{2}\ |t-s|^{2k+1}\{C_1\ \delta_1^{-1}\ \tfrac{1}{4^k} -1\} \geq$$

$$\geq \tfrac{1}{2}\ |t-s|^{2k+1}\ \{C_1\ \frac{4^k}{C_1}\cdot\frac{1}{4^k} - 1\} = 0$$

Seja $\delta_1 = \frac{C_1}{4^k}$ e $C = \frac{1}{4}\ |t-s|^{2k+1}$ então vale que

$$|t-s|^{2k+1}-(t-t')(t-s)\quad |t-s|^{2k-1}+C_1\ \delta^{-1}(t-t')^{2k+1} > C.$$

Logo fica provado o lema no caso II, o que completa a prova.

Neste ponto selecionamos para g um membro da partição da unidade de Andersson-Hörmander descrita no capítulo 0, notando, entretanto, que a variável no capítulo 0 deve ser trocada por (ξ,τ) (assim, $N = n + 1$, como antes).

Para estudar k_j^0 deformamos a cadeia de integração para o espaço complexo e estudaremos a seguinte integral:

$$\mathcal{J}_j^\nu(x,t,y,s) = (2\pi)^{-n-1}\iint e^{i<x-y,\xi+i\rho v'>+i(t-s)(\tau+i\rho v_{n+1})}\chi_j(\xi,\tau)$$

$$\times\ K_j^0(x,t,\xi+i\rho v',\tau+i\rho v_{n+1})g^\nu((\xi,\tau)+i\rho v)d[(\xi,\tau)+i\rho v].$$

Estamos usando a notação tradicional $d\theta = d\theta_1\wedge\ldots\wedge d\theta_N$; aqui $\theta = (\xi,\tau) + i\rho v$. Além disso, g^ν é a extensão de g no espaço complexo que está definida no capítulo 0:

$$g^{\nu}(w'+i\,w'') = \sum_{\alpha} \frac{(iw'')^{\alpha}}{\alpha!}\, g^{(\alpha)}(w')h(|w'|-4^{\nu}|\dot{\alpha}|).$$

O inteiro ν ainda está para ser escolhido. Se aplicarmos a Proposição 0.3 (iii), vemos que

$$|g^{\nu}((\xi,\tau)+i\rho v)| \leq M\,\rho\, e^{C\rho|v|/2^{\nu}}$$

Observamos que $|v| < r\delta$, onde $r > 0$ depende somente de (x,t,y,s); então,

$$|g^{\nu}((\xi,\tau)+i\rho v)| \leq M\,\rho\, e^{Cr\rho\delta/2^{\nu}} \tag{6.3}$$

Agora, impomos a condição que ν é suficientemente grande a fim de garantir que

$$r.C \leq c.2^{\nu-1} \tag{6.4}$$

Lembramos que C é independente de ν (C é a constante que aparece na Proposição 0.3) e que c depende somente de (x,t,y,s).

Aplicando o lema 5.1 concluimos que

$$|k_j(x,t,t',\xi+i\rho v',\tau+i\rho v_{n+1})| \leq C_0\, \varepsilon^j \tag{6.5}$$

Aplicando o Lema 6.1, as condições (6.3), (6.4) e (6.5) concluimos que o valor absoluto do integrando em $\mathfrak{J}_j^{\nu}(x,t,y,s)$ é no máximo igual a

$$C_1\, \varepsilon^j\, \rho\, e^{-\delta(c-rC/2^{\nu})\rho} \leq C_1\, \varepsilon^j\, \rho\, e^{-\delta c\rho/2} \tag{6.6}$$

De fato, como

$$K_j^0(x,t,\xi+i\rho v',\tau+i\rho v_{n+1}) = \int_{-T}^{t} e^{i\phi(x,t,t',\xi+i\rho v')-i(t-t')(\tau+i\rho v_{n+1})} \times$$

$$\times\, k_j(x,t,t',\xi+i\rho v',\tau+i\rho v_{n+1})dt',$$

$$|K_j^0(\ldots)| \leq \int_{-T}^{t} |e^{i\phi - i(t-t')(\tau + i\rho v_{n+1})}| \; |k_j(\ldots)| \; dt' \leq$$

$$\leq \int_{-T}^{t} e^{-\mathrm{Im}\phi + \rho(t-t')v_{n+1}} \; . \; C_0 \; \varepsilon^j \; dt' =$$

$$= C_0 \; \varepsilon^j \int_{-T}^{t} e^{-\rho \mathrm{Im}\phi(x,t,t',\rho^{-1}\xi + iv') + \rho(t-t')v_{n+1}} \; dt'$$

Assim,

$$|e^{i<x-y,\xi+i\rho v'>+i\;(t-s)(\tau+i\rho v_{n+1})} \chi_j(\xi,\tau) K_j^0(x,t,\xi+i\rho v',\tau+i\rho v_{n+1})$$

$$g^{\nu}((\xi,\tau)+i\rho v)| \leq$$

$$\leq e^{-\rho<x-y,v'>-\rho(t-s)v_{n+1}} . 1 . \left(\int_{-T}^{t} e^{-\rho \mathrm{Im}\phi(x,t,t',\rho^{-1}\xi+iv')+\rho(t-t')v_{n+1}} dt'\right)$$

$$\times \; C_0 \varepsilon^j \; M \; \rho \; e^{Cr\rho\delta/2^{\nu}} =$$

$$= C_0 \; \varepsilon^j \; M \; \rho \; e^{Cr\rho\delta/2^{\nu}} \int_{-T}^{t} e^{-\rho \mathrm{Im}\phi + \rho(t-t')v_{n+1} - \rho<x-y,v'>-\rho(t-s)v_{n+1}} \; dt' =$$

$$= C_0 \; \varepsilon^j \; M \; \rho \; e^{Cr\rho\delta/2^{\nu}} \int_{-T}^{t} e^{-\rho(\mathrm{Im}\phi - (t-t')v_{n+1} + <x-y,v'> + (t-s)v_{n+1})} dt' <$$

$$< C_0 \; \varepsilon^j \; M \; \rho \; e^{Cr\rho\delta/2^{\nu}} \int_{-T}^{t} e^{-\rho c\delta} \; dt' \leq 2T \; C_0 \; M \; \rho \; \varepsilon^j \; e^{Cr\rho\delta/2^{\nu}} e^{-\rho c\delta} =$$

$$= C_1 \; \varepsilon^j \; \rho \; e^{-\delta(c - rC/2^{\nu})\rho} \leq C_1 \; \varepsilon^j \; \rho \; e^{-\delta c\rho/2} \qquad \text{(c.q.d.)}$$

Isso implica, primeiro de tudo, que a integral $\mathcal{I}_j^{\nu}$ é absolutamente convergente para todo δ, $0 < \delta < \delta_1$. Quando $\delta = 0$ ela é uma integral oscilatória.

Notemos que as afirmações anteriores são verdadeiras, não simplemente no ponto (x,t,y,s), mas também em uma vizinhança complexa desse ponto, no espaço $C^{n+1} \times C^{n+1}$, $\mathcal{V}$. Podemos escolher $\mathcal{V}$ independente de j. Assim $\mathcal{J}_j^{\nu}$ pode ser estendida como uma função holomorfa em $\mathcal{V}$ e a presença do fator ε^j assegura que a série $\sum_j \mathcal{J}_j^{\nu}$ converge normalmente em $\mathcal{V}$. (O vetor v permanece constante através da vizinhança $\mathcal{V}$).

Estudaremos agora a diferença $K_j^0 - \mathcal{J}_j^{\nu}$. Para fazer isso, aplicaremos o Teorema de Stoke na seguinte versão:

$$\int_{|x|>R} f(x+i|x|\delta w)\,d(x+i|x|\delta w) - \int_{|x|>R} f(x)\,dx = J_1 + J_2,$$

onde

$$J_1 = R^N \int_{|\sigma|=1} \int_0^{\delta} f(R(\sigma+i\delta' w))A(w,\sigma,\delta')\,d\sigma\, d\delta',$$

$$J_2 = \sum_{j=1}^{N} \int_{|x|>R} \int_0^{\delta} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}(x+i|x|\delta' w)\,|x|\, A_j(w,x,\delta')\,dx\, d\delta'.$$

Denotamos por x (respectivamente z) a variável em R^N (respectivamente C^N); w é um vetor fixo em R^N. Verifica-se que $|A(w,\sigma,\delta')|$, $|A_j(w,x,\delta')|$, $1 \leq j \leq N$, são limitadas independentemente de x desde que w e δ' permaneçam em um conjunto limitado.

No nosso caso, $x = (\xi,\tau)$, $w = v/\delta$, $R = \varepsilon^{-1} C\, \kappa^{-m} (j!)^{\frac{1}{j}}$ e

$$f(\xi,\tau) = \exp\{i\langle x-y,\xi\rangle + i\tau(t-s)\}\; K_j^0(x,t,\xi,\tau)g(\xi,\tau),$$

$$f((\xi,\tau)+i\rho v) = \exp\{i\langle x-y,\xi+i\rho v'\rangle + i(t-s)(\tau+i\rho v_{n+1})\} \times$$

$$\times\, K_j^0(x,t,\xi+i\rho v',\tau+i\rho v_{n+1})g^{\nu}((\xi,\tau)+i\rho v)$$

A função característica $\chi_j(\xi,\tau)$ não comparece na expressão da f pois estamos integrando para $\rho > \varepsilon^{-1} C\, \kappa^{-m}(j!)^{\frac{1}{j}}$ onde

$\rho = (|\xi|^2+\tau^2)^{\frac{1}{2}}$. (Ver no apêndice A a demonstração da versão do Teorema de Stoke no caso $N = 1$).

Em virtude de (6.3), (6.5) e do Lema 6.1 concluimos que

$$|\hat{f}(R(\sigma+i\delta'w))| \leq c_1\ \varepsilon^j\ R\ \exp\{-c\ R\ \delta'/2\}$$

Escrevendo $J_{1,j}$ ao invés de J_1, concluimos que

(6.7) $$|J_{1,j}| \leq C_2\ R^N\ \varepsilon^j \leq C_3\ j^N\ \varepsilon^{j-N}.$$

De fato, sabemos que $A(w,\sigma,\delta')$ é limitada, seja então $|A(w,\sigma,\delta')| \leq L$, assim

$$|J_{1,j}| \leq R^N \int_{|\sigma|=1} \int_0^\delta |f(R(\sigma+i\delta'w))|\ |A(w,\sigma,\delta')|d\sigma\ d\delta' \leq$$

$$\leq R^N \int_{|\sigma|=1} \int_0^\delta C_1\ \varepsilon^j\ R\ e^{-cR\delta'/2}.L\ d\sigma\ d\delta' =$$

$$= L\ C_1\ R\ \varepsilon^j\ R^N \int_{|\sigma|=1} \int_0^\delta e^{-cR\delta'/2}\ d\delta'\ d\sigma =$$

$$= L\ C_1\ R\ \varepsilon^j\ R^N \int_{|\sigma|=1} \frac{2}{CR}\ (-e^{-cR\delta/2} + 1)d\sigma \leq$$

$$\leq L\ C_1\ R\ \frac{2}{CR}\ \varepsilon^j\ R^N \int_{|\sigma|=1} d\sigma =$$

$= 2\ L\ \frac{C_1}{C}\ A(S_N)\varepsilon^j\ R^N = C_2\ \varepsilon^j\ R^N$ ($A(S_N)$) = área da esfera unitária)

Como $R = \varepsilon^{-1}\ C\ \kappa^{-m}(j!)^{\frac{1}{j}}$ temos $R^N = \varepsilon^{-N}\ C^N\ \kappa^{-mN}((j!)^{\frac{1}{j}})^N \leq$ $< \varepsilon^{-N}\ C^N\ \kappa^{-mN}\ j^N$.

Assim,

$$C_2\varepsilon^j R^N \leq C_2\ \varepsilon^{j-N}\varepsilon^N\ \varepsilon^{-N}\ C^N\ \kappa^{-mN}\ j^N = C_3 j^N\ \varepsilon^{j-N}$$

Logo,

$$|J_{1,j}| \leq C_2 R^N \varepsilon^j \leq C_3 j^N \varepsilon^{j-N} \qquad \text{(c.q.d.)}$$

Se aumentarmos a constante C_3, temos que $|J_{1,j}| \leq C_3 j^N \varepsilon^{j-N}$ em todo ponto de $\mathcal{O}$. É claro que $J_{1,j}$ define uma função holomorfa em $\mathcal{O}$ e que (6.7) implica que a série $\sum_j J_{1,j}$ converge normalmente em $\mathcal{O}$.

Trabalhemos agora com J_2 ou melhor, no nosso caso, com $J_{2,j}$. O valor absoluto do integrando é menor ou igual a $C_4 |\bar\partial f(x+i|x|\delta' w)|\ |x|$ que, por (6.5) e pelo Lema 6.1, é menor ou igual a

$$C_5\, \varepsilon^j\, e^{-c\delta'\rho}\, \rho |\bar\partial g^\nu((\xi,\tau)+i\rho\delta' w)|.$$

Neste ponto, impomos a condição

(6.8) $\quad |v| = \delta|w| \leq M^{-1} 2^{-\nu-1}$ onde M é a constante da proposição 0.3. Note que no conjunto

(6.9) $$\{(\xi,\tau):\ \rho > M\, 2^{2\nu+1}\}$$

temos, $M\, 2^\nu(\rho|v|+2^\nu) \leq \rho$ pois,

$$M\, 2^\nu(\rho|v|+2^\nu) = M\, 2^\nu\rho|v| + M\, 2^{2\nu} < M\, 2^\nu\rho|v| + 2^{-1}\rho \leq$$

$$\leq M\, 2^\nu \rho\, M^{-1}\, 2^{-\nu-1} + 2^{-1}\rho = 2^{-1}\rho + 2^{-1}\rho = \rho.$$

Como $\delta'|w| \leq \delta|w|$ para $0 \leq \delta' \leq \delta$ o que foi feito acima é válido se trocarmos v por $\delta' w$ e isso permite-nos aplicar a proposição 0.3, assim obtendo

$$|\bar\partial g^\nu((\xi,\tau)+i\rho\delta' w)| \leq M\, \rho\, e^{-\rho/4^{\nu+1}},$$

e isso continua válido para todo (ξ,τ) desde que trocamos M por uma constante $M(\nu)$ dependendo de ν. (Vale a pena lembrar que ν é escolhido de acordo com (6.4) - que não envolve δ - e que uma vez fei ta a escolha de ν, impomos sobre δ a condição (6.8)). De qualquer forma, encontramos que o valor absoluto do integrando em $J_{2,j}$ é no máximo igual a

$$C_6(\nu)\varepsilon^j \rho^2 e^{-\rho/4^{\nu+1}},$$

e isso permanece válido na vizinhança $\mathcal{O}$ se esta for suficientemente pequena. Analogamente, aplicando-se o operador de Cauchy-Riemann com relação a (x,t,y,s) sob o sinal de integração, $J_{2,j}$ define uma função holomorfa dessas variáveis em $\mathcal{O}$, e a série $\sum_j J_{2,j}$ converge normalmente em $\mathcal{O}$.

Assim, provamos que $\sum_j(\kappa_j^0-\mathfrak{J}_j^\nu)$ pode ser estendida como uma função holomorfa de (x,t,y,s) em $\mathcal{O}$. Como já provamos que isso também é verdade para $\sum_j \mathfrak{J}_j^\nu$, então também é verdade para

$$\kappa^0(x,t;y,s) = \sum_j \kappa_j^0(x,t;y,s)$$

Finalmente, podemos concluir que κ^0 é analítica em uma vizinhança de qualquer ponto $(x,t;y,s)$ que não pertence a diagonal de $\Omega \times \Omega$.

CAPÍTULO 7

REGULARIDADE DO OPERADOR K.

Seja,

$$K^0(x,t,\xi,\tau) = \int_{-T}^{t} e^{i\phi(x,t,t',\xi)-i\tau(t-t')} k^0(x,t,t',\xi,\tau)dt',$$

como definido no capítulo 5.

Definindo,

$$K_0(x,t,\xi,\tau) = \int_{-T}^{t} e^{i\phi(x,t,t',\xi)+i\tau t'} k^0(x,t,t',\xi,\tau)dt',$$

temos que

$$K^0(x,t,\xi,\tau) = e^{-i\tau t} K_0(x,t,\xi,\tau)$$

Inicialmente vamos obter estimativas sobre derivadas de $K^0(x,t,\xi,\tau)$ afim de mostrar que o operador K aplica C_c^∞ em C^∞.

<u>Lema 7.1</u>

Seja $S = S(D_x,D_t) = D_x^\alpha D_t^r$ com $|\alpha| + r = m$.

Então,

$$|S\ K^0(x,t,\xi,\tau)| \leq L(1+\rho)^{|\alpha|+r},$$

se $(x,t) \in K$ onde K é um compacto.

<u>Prova</u>

Usando a fórmula (2.2.5) pode-se mostrar que $S(K_0(x,t,\xi,\tau))$ é soma finita de termos dos tipos

$$\int_{-T}^{t} e^{i\phi+i\tau t'} S_1(x,t,t',\xi,D_x,D_t)k^0\ dt' \quad \text{e}$$

$$e^{i\phi+i\tau t'} S_2(x,t,t',\xi,\tau,D_x,D_t,D_{t'})k^0\Big|_{t=t'},$$

onde, $S_1(x,t,t',\xi,D_x,D_t)k^0 = \sum_{|\gamma|\leq|\alpha|+r} s_\gamma(x,t,t',\xi)D^\gamma k^0,$

$$S_2(x,t,t',\xi,\tau,D_x,D_t,D_{t'})k^0 = \sum_{|\gamma|\leq|\alpha|+r-1} \tilde{s}_\gamma(x,t,t',\xi,\tau)D^\gamma k^0,$$

com coeficientes s_γ e $\tilde{s}_\gamma$ analíticos e satisfazendo

$$|s_\gamma(x,t,t',\xi)| \leq C(1+\rho)^{|\alpha|+r}$$

e

$$|\tilde{s}_\gamma(x,t,t',\xi,\tau)| \leq C_1(1+\rho)^{|\alpha|+r}$$

Logo,

$$|S(K_0(x,t,\xi,\tau))| \leq L_1(1+\rho)^{|\alpha|+r} \quad \text{e}$$

usando a regra de Leibniz, obtemos que

$$|S(K^0(x,t,\xi,\tau))| \leq L(1+\rho)^{|\alpha|+r} \qquad \text{(c.q.d.)}$$

Consideremos o operador K, definido no capítulo 2, isto é,

$$Ku(x,t) = (2\pi)^{-n-1}\iint e^{i<x,\xi>+i\tau t}K^0(x,t,\xi,\tau)g(\xi,\tau)\hat{u}(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

Lema 7.2

Se $u \in C_c^\infty$ então K está bem definido e além disso $K(C_c^\infty) \subset C^\infty$.

Prova

Como $u \in C_c^\infty$, para todo inteiro $N \geq 0$ podemos encontrar uma constante $C > 0$ tal que

$$|\hat{u}(\xi,\tau)| \leq C(1+\rho)^{-N}$$

Assim,

$$|Ku(x,t)| \leq (2\pi)^{-n-1} \iint |e^{i<x,\xi>+i\tau t}| . |K^0(x,t,\xi,\tau)| . |g(\xi,\tau)| . |\hat{u}(\xi,\tau)| d\xi d\tau$$

$$\leq (2\pi)^{-n-1} . L . C \iint (1+\rho)^{-n-1} d\xi d\tau < +\infty.$$

Logo, o operador K está bem definido.

Mostremos agora que $K(C_c^{\infty}) \subset C^{\infty}$.

$$D_x^{\alpha} D_t^{r} Ku(x,t) = (2\pi)^{-n-1} \iint D_x^{\alpha} D_t^{r} [e^{i<x,\xi>+i\tau t} . K^0(x,t,\xi,\tau)]$$

$$g(\xi,\tau)\hat{u}(\xi,\tau) d\xi d\tau$$

$$= (2\pi)^{-n-1} \iint \Big(\sum_{\substack{|\alpha'| \leq |\alpha| \\ r' \leq r}} C_{\alpha,r} D_x^{\alpha-\alpha'} D_t^{r-r'} e^{i<x,\xi>+i\tau t} D_x^{\alpha'} D_t^{r'} K^0(x,t,\xi,\tau) \Big)$$

$$g(\xi,\tau)\hat{u}(\xi,\tau) d\xi d\tau$$

Assim,

$$|D_x^{\alpha} D_t^{r} Ku(x,t)| \leq L_2 \iint (1+\rho)^{|\alpha|+r} (1+\rho)^{-N} d\xi \, d\tau < +\infty$$

se tomarmos $N = |\alpha|+r+n+1$. (Aqui usamos o Lema 7.1). (c.q.d.).

<u>Lema 7.3</u>

$|D_x^{\alpha} K^0(x,t,\xi,\tau)| \leq C_{\alpha}(1+\rho)^{\frac{2k}{2k+1} \cdot |\alpha|}$, onde k é o inteiro que aparece na condição (2.1.6).

<u>Prova</u>

Seja $p(D_x) = D_x^{\alpha}$ com $|\alpha| = m$ e $p(\xi) = \xi^{\alpha}$.

Então,

$$(D_x + \phi_x)^{\alpha} = \phi_x^{\alpha} + \Big[\frac{\partial p}{\partial \xi}(\phi_x) D_x + C\Big] + \sum_{j=2}^{m} Q_j,$$

onde, $C = C(x,t,t',\xi)$ analítica, homogênea de grau $m-1$ com relação a ξ e $Q_j = Q_j(x,t,t',\xi,D_x)$ são operadores diferenciais parciais de ordem menor ou igual a j, com coeficientes analíticos e homogêneos de grau m-j com relação a ξ. (Ver apêndice A)

$$D_x^{\alpha}K^0(x,t,\xi,\tau) = \int_{-T}^{t} D_x^{\alpha}\left[e^{i\phi(x,t,t',\xi)-i\tau(t-t')}k^0(x,t,t',\xi,\tau)\right] dt' =$$

$$= \int_{-T}^{t} e^{i\phi-i\tau(t-t')}(D_x+\phi_x)^{\alpha}k^0\ dt'.$$

Assim,

$|D_x^{\alpha}K^0(x,t,\xi,\tau)|$ é menor ou igual a uma soma de termos onde o de maior grau de homogeneidade com relação a ξ é dado por:

$$\int_{-T}^{t}|\phi_x^{\alpha}\ e^{i\phi-i\tau(t-t')}k^0|dt'.$$

Sabemos que $\operatorname{Im}\phi(x,t,t',\xi) \geq B|\xi|(t-t')^{2k+1}$ (Ver proposição 4.1) e como $\phi_x(x,t,t,\xi) = 0$ temos que $|\phi_x(x,t,t',\xi)| \leq B_1|t-t'||\xi|$ (ϕ_x é homogenea de grau 1 com relação a ξ).

Então,

$$\int_{-T}^{t} |\phi_x^{\alpha}\ e^{i\phi-i\tau(t-t')}k^0 \ |\ dt' \leq \int_{-T}^{t} |\phi_x|^{|\alpha|}e^{-\operatorname{Im}\phi}|k^0|\ dt'$$

$$\leq \int_{-T}^{t} B_2(|t-t'||\xi|)^{|\alpha|}e^{-B|\xi||t-t'|^{2k+1}}\ |k^0|\ dt'.$$

Seja $\beta = |t-t'|^{2k+1}.|\xi|$ então,

$$B_2(|t-t'|.|\xi|)^{|\alpha|}e^{-B|\xi||t-t'|^{2k+1}} =$$

$$= B_2(|t-t'|.|\xi|^{\frac{2k}{2k+1}}|\xi|^{\frac{1}{2k+1}})^{|\alpha|}e^{-B|\xi||t-t'|^{2k+1}} =$$

$$= B_2|\xi|^{\frac{2k}{2k+1}\cdot|\alpha|}\beta^{\frac{1}{2k+1}\cdot|\alpha|}e^{-B\beta}.$$

Seja $f(\beta) = B_2\ \beta^{\frac{1}{2k+1}\cdot|\alpha|}e^{-B\beta} \quad \beta \geq 0$

Para $\beta \geq 1$ temos $\beta \leq \beta^{2k+1}$ e portanto, $\beta^{\frac{1}{2k+1}\cdot|\alpha|} \leq \beta^{|\alpha|}$.

Logo, $f(\beta) \leq B_2\beta^{|\alpha|}.e^{-B\beta}$ que é limitada.

Para $0 \leq \beta \leq 1$ estamos num compacto e como f é contínua temos que f é limitada.

Assim, $f(\beta) \leq B_3$ e

$$\int_{-T}^{t} B_2(|t-t'||\xi|)^{|\alpha|} e^{-B|t-t'|^{2k+1}.|\xi|}|k^0|\, dt' \leq$$

$$\leq \int_{-T}^{t} B_3|\xi|^{\frac{2k}{2k+1}\cdot|\alpha|}|k^0|dt' \leq B_4|\xi|^{\frac{2k}{2k+1}\cdot|\alpha|} \leq$$

$$\leq B_4(1+\rho)^{\frac{2k}{2k+1}\cdot|\alpha|}$$

Portanto o termo de mais alto grau de homogeneidade satisfaz

$$\int_{-T}^{t} |\phi_x^\alpha\, e^{i\phi-i\tau(t-t')}k^0|\, dt' \leq B_4(1+\rho)^{\frac{2k}{2k+1}\cdot|\alpha|}$$

e os demais termos satisfazem uma estimativa do mesmo tipo e assim podemos concluir que

$$|D_x^\alpha K^0(x,t,\xi,\tau)| \leq C_\alpha (1+\rho)^{\frac{2k}{2k+1}|\alpha|} \qquad \text{(c.q.d.)}$$

Lema 7.4

O transposto do operador K é dado por:

$${}^tK\, u(y,s) = (2\pi)^{-n-1}\iiiint e^{i<x-y,\xi>+i(t-s)\tau}K^0(x,t,\xi,\tau)g(\xi,\tau)u(x,t)\, dxdtd\xi d\tau$$

Prova

Se $u, \Psi \in C_c^\infty$ temos,

$$\iint({}^tKu)(x,t)\Psi(x,t)dxdt = <{}^tKu,\Psi> = <u,K\Psi> =$$

$$= \iint u(x,t)\ (K\Psi)(x,t)dxdt =$$

$$= \iint u(x,t)\left[(2\pi)^{-n-1}\iint e^{i<x,\xi>+i\tau t}K^0(x,t,\xi,\tau)g(\xi,\tau)\hat{\Psi}(\xi,\tau)d\xi d\tau\right]dx\ dt =$$

$$= (2\pi)^{-n-1}\iiiint\!\!\iint e^{i<x-y,\xi>+i(t-s)\tau}K^0(x,t,\xi,\tau)g(\xi,\tau)\Psi(y,s)u(x,t)\ dydsd\xi d\tau dxdt =$$

$$= (2\pi)^{-n-1}\iiiint\!\!\iint e^{i<x-y,\xi>+i(t-s)\tau}K^0(x,t,\xi,\tau)g(\xi,\tau)\Psi(y,s)u(x,t)\ dydsdxdtd\xi d\tau =$$

$$= (2\pi)^{-n-1}\iiiint\!\!\iint e^{i<x-y,\xi>+i(t-s)\tau}\ K^0(x,t,\xi,\tau)g(\xi,\tau)\Psi(y,s)u(x,t)\ dxdtdydsd\xi d\tau$$

$$= (2\pi)^{-n-1}\iiiint\!\!\iint e^{i<x-y,(-\xi)>+i(t-s)(-\tau)}K^0(y,s,\xi,\tau)g(\xi,\tau)\Psi(x,t)u(y,s)\ dydsdxdt\ d\xi d\tau =$$

$$= (2\pi)^{-n-1}\iiiint\!\!\iint e^{i<x-y,(-\xi)>+i(t-s)(-\tau)}K^0(y,s,\xi,\tau)g(\xi,\tau)u(y,s)\Psi(x,t)\ dydsd\xi d\tau dxdt$$

Portanto,

$${}^tku(x,t)=(2\pi)^{-n-1}\iiiint e^{i<x-y,(-\xi)>+i(t-s)(-\tau)}K^0(y,s,\xi,\tau)g(\xi,\tau)u(y,s)\ \times$$
$$\times\ dy\ ds\ d\xi\ d\tau$$

e,

$${}^tKu(y,s)=(2\pi)^{-n-1}\iiiint e^{i<x-y,\xi>+i(t-s)\tau}K^0(x,t,\xi,\tau)g(\xi,\tau)u(x,t)\ dxdtd\xi d\tau$$

(c.q.d).

<u>Proposição 7.1</u>

${}^tK$ está bem definido e aplica C_c^∞ em C^∞.

Prova

$$|\partial_y^\alpha \partial_s^r\ {}^tKu(y,s)| = (2\pi)^{-n-1} \left| \iiiint (\partial_y^\alpha \partial_s^r e^{i<x-y,\xi>+i(t-s)\tau}) K^0(x,t,\xi,\tau) g(\xi,\tau) \times u(x,t) dx\ dt\ d\xi\ d\tau \right| =$$

$$= (2\pi)^{-n-1} \left| \iiiint C_2 \xi^\alpha \tau^r e^{i<x-y,\xi>+i(t-s)\tau} K^0(x,t,\xi,\tau) g(\xi,\tau) u(x,t) dx dt d\xi d\tau \right|$$

$$= (2\pi)^{-n-1} \left| \iiiint C_2 \left[(1+|\xi|^2)^{\ell+|\alpha|+r} (\xi^\alpha \tau^r (1+|\xi|^2)^{\frac{-|\alpha|-r}{2}}) (1+|\xi|^2)^{-\ell - \frac{|\alpha|+r}{2}} \right] \right.$$

$$\left. e^{i<x-y,\xi>+i(t-s)\tau} \times K^0(x,t,\xi,\tau) g(\xi,\tau) u(x,t) dx\ dt\ d\xi\ d\tau \right| =$$

$$= (2\pi)^{-n-1} \left| \iiiint C_2 (1+|\xi|^2)^{\ell+|\alpha|+r} e^{i<x-y,\xi>+i(t-s)\tau} K^0(x,t,\xi,\tau) g(\xi,\tau) \times \right.$$

$$\left. h(\xi,\tau) \times (1+|\xi|^2)^{-\ell - \frac{|\alpha|+r}{2}} u(x,t) dx\ dt\ d\xi\ d\tau \right| =$$

(onde $h(\xi,\tau) = \xi^\alpha \tau^r (1+|\xi|^2)^{-\frac{|\alpha|+r}{2}}$ e $|h(\xi,\tau)| \leq L$)

$$= (2\pi)^{-n-1} \left| \iiiint C_2 \left[(1-\Delta_x)^{\ell+|\alpha|+r} e^{i<x-y,\xi>+i(t-s)\tau} \right] K^0(x,t,\xi,\tau) \times \right.$$

$$\left. g(\xi,\tau) h(\xi,\tau) (1+|\xi|^2)^{-\ell - \frac{|\alpha|+r}{2}} u(x,t) dx\ dt\ d\xi\ d\tau \right| =$$

$$= \left| \iiiint C_2\, e^{i<x-y,\xi>+i(t-s)\tau} \left[(1-\Delta_x)^{\ell+|\alpha|+r} K^0(x,t,\xi,\tau) u(x,t) \right] \times \right.$$

$$\left. \times\ g(\xi,\tau) h(\xi,\tau) (1+|\xi|^2)^{-\ell - \frac{|\alpha|+r}{2}} dx\ dt\ d\xi\ d\tau \right| \leq$$

$$\leq (2\pi)^{-n-1} \iiiint C_2 \left| (1-\Delta_x)^{\ell+|\alpha|+r} K^0(x,t,\xi,\tau) u(x,t) \right| |g(\xi,\tau)|\ |h(\xi,\tau)| \times$$

$$\times\ (1+|\xi|^2)^{-\ell - \frac{|\alpha|+r}{2}} dx\ dt\ d\xi\ d\tau$$

$$\leq C_2\, L (2\pi)^{-n-1} \iiiint \left| (1-\Delta_x)^{\ell+|\alpha|+r} K^0(x,t,\xi,\tau) u(x,t) \right|$$

$$(1+|\xi|^2)^{-\ell - \frac{|\alpha|+r}{2}} dx\ dt\ d\xi\ d\tau$$

que é menor ou igual a uma combinação linear de termos da forma:

$$\iiiint |\partial_x^q K^0(x,t,\xi,\tau)| \; |\partial_x^p u(x,t)| \; |(1+ |\xi|^2)^{-\ell - \frac{|\alpha|+r}{2}} dx\, dt\, d\xi\, d\tau$$

(com $|q| \leq 2\ (\ell+|\alpha|+r)$)

Como $|\xi| \geq d\rho$ $(d < 1)$ temos $|\xi|^2 \geq d^2\rho^2$.

Então $1 + |\xi|^2 \geq 1 + d^2\rho^2 = d^2(\frac{1}{d^2}+\rho^2) \geq d^2(1+\rho^2)$

$$\therefore\ (1+|\xi|^2)^{-\ell - \frac{|\alpha|+r}{2}} \leq d_1(1+\rho^2)^{-\ell-\frac{|\alpha|+r}{2}}$$

Assim,

$$\iiiint |\partial_x^q K^0(x,t,\xi,\tau)| \; |\partial_x^p u(x,t)|\,(1+|\xi|^2)^{-\ell - \frac{|\alpha|+r}{2}} dx\, dt\, d\xi\, d\tau$$

$$\leq \tilde{c} \iint (1+\rho)^{\delta|q|}(1+\rho^2)^{-\ell - \frac{|\alpha|+r}{2}} d\xi\, d\tau \qquad (\delta = \frac{2k}{2k+1})$$

$$\leq \tilde{\tilde{c}} \iint (1+\rho^2)^{\delta(\ell+|\alpha|+r)-\ell - \frac{|\alpha|+r}{2}} d\xi\, d\tau =$$

$$= \tilde{\tilde{c}} \iint (1+\rho^2)^{\ell(\delta-1)+|\alpha|(\delta-\frac{1}{2})+r(\delta-\frac{1}{2})} d\xi\, d\tau$$

$$\leq \tilde{\tilde{c}} \iint (1+\rho^2)^{\ell(\delta-1)+\frac{|\alpha|}{2}+\frac{r}{2}} d\xi\, d\tau < +\infty,$$

se $\ell(\delta-1) + \frac{|\alpha|}{2} + \frac{r}{2} < -\frac{n+1}{2}$

e isso ocorre se,

$$\ell > \frac{n+1+|\alpha|+r}{2(1-\delta)}$$

<u>Observação</u>:

Quando fazemos $|\alpha| = 0$ e $r = 0$ na demonstração anterior, concluimos que o operador ${}^tK$ está bem definido se $\ell > \frac{n+1}{2(1-\delta)}$

(c.q.d.)

Lema 7.5

^tK aplica $C_c^\infty(\Omega)$ continuamente em $C^\infty(\Omega)$

Prova

Como $C_c^\infty(\Omega)$ está munido da topologia do limite indutivo, basta mostrar que a aplicação $^tK: C_c^\infty(\Omega, L) \to C^\infty(\Omega)$ é contínua para todo compacto $L \subset \Omega$.

Seja (K_j) $j = 1,2, \ldots$ uma sequência crescente de subconjuntos compactos de Ω, cuja união é Ω.

Lembrando que uma semi-norma sobre $C^\infty(\Omega)$ é dada por:

$$p_{m,j}(\phi) = \sup_{\substack{z \in K_j \\ |\beta| \leq m}} |\partial^\beta \phi(z)|, \ \forall\ \phi \in C^\infty(\Omega)$$

e que uma norma sobre $C_c^\infty(\Omega,L)$ é dada por:

$$p_m(\phi) = \sup_{\substack{z \in L \\ |\beta| \leq m}} |\partial^\beta \phi(z)|, \ \forall\ \phi \in C_c^\infty(\Omega,L)$$

a demonstração que a aplicação $^tK: C_c^\infty(\Omega,L) \to C^\infty(\Omega)$ é contínua segue facilmente da demonstração da proposição 7.1 (c.q.d.)

Proposição 7.2

O operador K é regular em x e em y.

Prova

Sabemos que o mergulho $C^\infty(\Omega_{y,s}) \to D'(\Omega_{y,s})$ é contínuo e portanto a aplicação,

$$^tK: C_c^\infty(\Omega_{x,t}) \to D'(\Omega_{y,s}) \text{ é contínua.}$$

Logo, a aplicação

$$K: C_c^{\infty}(\Omega_{y,s}) \to D'(\Omega_{x,t})$$ é contínua e como $K(C_c^{\infty}(\Omega_{y,s})) \subset C^{\infty}(\Omega_{x,t})$ pelo Teorema do gráfico fechado temos que

$$K: C_c^{\infty}(\Omega_{y,s}) \to C^{\infty}(\Omega_{x,t})$$ é contínua, isto é, K é regular em x.

Como ${}^tK: C_c^{\infty}(\Omega_{x,t}) \to C^{\infty}(\Omega_{y,s})$ é contínua temos,

$$K: E'(\Omega_{y,s}) \to D'(\Omega_{x,t})$$ é contínua, isto é, K é regular em y.

APÊNDICE-A

Prova de (2.2.5)

Temos de mostrar que

$$P(x,t,D_x+\xi,D_t)K_0 = \int_{-T}^{t} P(x,t,D_x+\xi,D_t)(e^{i\phi}k)e^{i\tau t'}dt'$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{-1}} \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j!} \{P^{(0,j)}(x,t,D_x+\xi,D_t)D_{t'}^{j-1}(e^{i\phi+i\tau t'}k)\}_{t'=t}$$

Seja $f(x,t,t',\xi,\tau) = e^{i\phi(x,t,t',\xi)+i\tau t'}k(x,t,t',\xi,\tau)$.

Em primeiro lugar mostremos que,

$$D_t^m \int_{-t}^{t} f(x,t,t',\xi,\tau)dt' = \int_{-T}^{t} D_t^m f(x,t,t',\xi,\tau)dt' +$$

$$+ \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j!} \{P^{(j)}(D_t)D_{t'}^{j-1} f(x,t,t',\xi,\tau)\}_{t'=t}$$

onde $P(D_t) = D_t^m$, ou seja, que

(I) $$D_t^m \int_{-T}^{t} f\,dt' = \int_{-T}^{t} D_t^m f dt' + \frac{1}{i} \{m\, D_t^{m-1} f + \frac{1}{2} m(m-1)D_t^{m-2}D_{t'}f +$$

$$+ \frac{1}{3!} m(m-1)(m-2)D_t^{m-3}D_{t'}^2 f + \ldots + D_{t'}^{m-1} f\}_{t'=t}$$

De fato, para $m = 1$ temos,

$$D_t\int_{-T}^{t} fdt' = \int_{-T}^{t} D_t fdt' + \frac{1}{i} f(x,t,t',\xi,\tau),$$ ou seja, para $m = 1$ é verdade.

Supomos que $m = 2$. Então,

$$D_t^2\int f\,dt' = D_t(D_t\int_{-T}^{t} f\,dt') = D_t(\int_{-T}^{t} D_t fdt' + \frac{1}{i} f(x,t,t,\xi,\tau))=$$

$$= \int_{-T}^{t} D_t^2 f dt' + \frac{1}{i}(D_t f)_{t'=t} + \frac{1}{i} D_t \; f(x,t,t,\xi,\tau) =$$

$$= \int_{-T}^{t} D_t^2 f dt' + \frac{1}{i}(D_t f)_{t'=t} + \frac{1}{i} \left[(D_t f(x,t,t',\xi,\tau))_{t'=t} + \right.$$

$$\left. + (D_{t'} f(x,t,t',\xi,\tau))_{t'=t}\right]$$

$$= \int_{-T}^{t} D_t^2 f dt' + \frac{1}{i}\{2D_t f + D_{t'} f\}_{t'=t},$$ ou seja, para $m = 2$ é verdade.

Supomos que (I) é verdade para $m-1$, ou seja,

$$D_t^{m-1} \int_{-T}^{t} f dt' = \int_{-T}^{t} D_t^{m-1} f dt' + \frac{1}{i}\{(m-1)D_t^{m-2} f + \frac{1}{2}(m-1)(m-2) D_t^{m-3} D_{t'} f$$

$$+ \frac{1}{3!}(m-1)(m-2)(m-3) D_t^{m-4} D_{t'}^2 f + \ldots + D_{t'}^{m-2} f\}_{t'=t}.$$

Provemos que vale para m.

$$D_t^m \int_{-T}^{t} f dt' = D_t (D_t^{m-1} \int_{-T}^{t} f dt') =$$

$$= D_t \{\int_{-T}^{t} D_t^{m-1} f dt' + \frac{1}{i}\left[(m-1)(D_t^{m-2} f)_{t'=t} + \right.$$

$$+ \frac{1}{2}(m-1)(m-2)(D_t^{m-3} D_{t'} f)_{t'=t} +$$

$$\left. + \frac{1}{3!}(m-1)(m-2)(m-3)(D_t^{m-4} D_{t'}^2 f)_{t'=t} + \ldots + (D_{t'}^{m-2} f)_{t'=t}\right]\} =$$

$$= \int_{-T}^{t} D_t^m f dt' + \frac{1}{i}(D_t^{m-1} f)_{t'=t} + \frac{1}{i}\{(m-1) D_t \left[(D_t^{m-2} f)_{t'=t}\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}(m-1)(m-2)\; D_t\left[(D_t^{m-3} D_{t'} f)_{t'=t}\right] + \frac{1}{3!}(m-1)(m-2)(m-3) D_t \left[(D_t^{m-4} D_{t'}^2 f)_{t'=t}\right] +$$

$$+ \ldots + D_t\left[(D_{t'}^{m-2} f)_{t'=t}\right]\} =$$

$$= \int_{-T}^{t} D_t^m f dt' + \frac{1}{i}(D_t^{m-1} f)_{t'=t} + \frac{1}{i}\{(m-1)\left[D_t (D_t^{m-2} f)\right]_{t'=t} +$$

$$+ (m-1)\left[D_{t'} (D_t^{m-2} f)\right]_{t'=t} + \frac{1}{2}(m-1)(m-2)\left[D_t (D_t^{m-3} D_{t'} f)\right]_{t'=t} +$$

$$+ \frac{1}{2}(m-1)(m-2)\left[D_{t'} (D_t^{m-3} D_{t'} f)\right]_{t'=t} + \frac{1}{3!}(m-1)(m-2)(m-3) \left[D_t (D_t^{m-4} D_{t'}^2 f)\right]_{t'=t}$$

$$+ \frac{1}{3!}(m-1)(m-2)(m-3)\left[D_{t'} (D_t^{m-4} D_{t'}^2 f)\right]_{t'=t} + \ldots + \left[D_t (D_{t'}^{m-2} f)\right]_{t'=t} +$$

$$+ \left[D_{t'} (D_{t'}^{m-2} f)\right]_{t'=t}\} =$$

$$= \int_{-T}^{t} D_t^m f dt' + \frac{1}{i}(D_t^{m-1} f)_{t'=t} + \frac{1}{i}\{(m-1)(D_t^{m-1} f)_{t'=t} +$$

$$+ (m-1)(D_t^{m-2} D_{t'} f)_{t'=t} + \frac{1}{2}(m-1)(m-2)(D_t^{m-2} D_{t'} f)_{t'=t} +$$

$$+ \frac{1}{2}(m-1)(m-2)(D_t^{m-3} D_{t'}^2 f)_{t'=t} + \frac{1}{3!}(m-1)(m-2)(m-3)(D_t^{m-3} D_{t'}^2 f)_{t'=t}$$

$$+ \frac{1}{3!}(m-1)(m-2)(m-3)(D_t^{m-4} D_{t'}^3 f)_{t'=t} + \ldots + (D_t\; D_{t'}^{m-2} f)_{t'=t} +$$

$$+ (D_{t'}^{m-1} f)_{t'=t}\} =$$

$$= \int_{-T}^{t} D_t^m f dt' + \frac{1}{i}\{m\, D_t^{m-1} f + \frac{1}{2} m(m-1) D_t^{m-2} D_{t'} f +$$

$$+ \frac{1}{3!} m(m-1)(m-2) D_t^{m-3}\; D_{t'}^2 f + \ldots + D_{t'}^{m-1} f\}_{t'=t} \qquad \text{(c.q.d)}$$

Mostremos agora a igualdade (2.2.5). Não há perda de generalidade em supor que,

$$P(x,t,D_x+\xi,D_t) = \sum_{j=0}^{m} P_{m-j}(x,t,D_x+\xi)D_t^j$$

Então,

$$P(x,t,D_x+\xi,D_t)\int_{-T}^{t} f(x,t,t',\xi,\tau)dt' =$$

$$= (P_m+P_{m-1}D_t + P_{m-2}D_t^2 + \ldots + P_0D_t^m)\int_{-T}^{t} f(x,t,t',\xi,\tau)dt' =$$

$$= \int_{-T}^{t} P_m f dt' + P_{m-1}\left[\int_{-T}^{t} D_t f dt' + \frac{1}{i}(f)_{t'=t}\right] +$$

$$+ P_{m-2}\left[\int_{-T}^{t} D_t^2 f dt' + \frac{1}{i}(2D_t f + D_{t'}f)_{t'=t}\right] +$$

$$+ \ldots + P_0\left[\int_{-T}^{t} D_t^m f dt' + \frac{1}{i}(m D_t^{m-1}f + \frac{1}{2}m(m-1)D_t^{m-2}D_{t'}f +\right.$$

$$\left.+ \frac{1}{3!}m(m-1)(m-2)D_t^{m-3}D_{t'}^2 f + \ldots + D_{t'}^{m-1}f)_{t'=t}\right] =$$

$$= \int_{-T}^{t}(P_m+P_{m-1}D_t + P_{m-2}D_t^2 + \ldots + P_0D_t^m)f\,dt' +$$

$$+ \frac{1}{i}\{(P_{m-1}+2P_{m-2}D_t + \ldots + mP_0D_t^{m-1})f +$$

$$+ (P_{m-2} + \ldots + \frac{1}{2}m(m-1)P_0D_t^{m-2})D_{t'}f +$$

$$+ \ldots + P_0D_{t'}^{m-1}f\}_{t'=t} =$$

$$= \int_{-T}^{t} P(x,t,D_x+\xi,D_t)f\,dt' + \frac{1}{i}\{(P_{m-1} + 2P_{m-2}D_t + \ldots +$$

$$+ mP_0D_t^{m-1})f +$$

$$+ \frac{1}{2}(2\,P_{m-2} + \ldots + m(m-1)P_0 D_t^{m-2})D_{t'}f + \ldots + \frac{1}{m!}\, m!\; P_0\; D_{t'}^{m-1} f\}_{t'=t}$$

Mas,

$$P^{(0,1)}(x,t,D_x+\xi,D_t) = P_{m-1} + 2\,P_{m-2}D_t + \ldots + (m-1)\;P_1 D_t^{m-2} +$$

$$m\,P_0\;D_t^{m-1},$$

$$P^{(0,2)}(x,t,D_x+\xi,D_t) = 2\,P_{m-2} + \ldots + (m-1)(m-2)P_1 D_t^{m-3} +$$

$$m(m-1)P_0 D_t^{m-2}\quad,$$

....

$$P^{(0,m)}(x,t,D_x+\xi,D_t) = m!\;P_0$$

Logo

$$P(x,t,D_x+\xi,D_t)\int_{-T}^{t} f(x,t,t',\xi,\tau)dt' =$$

$$= \int_{-T}^{t} P(x,t,D_x+\xi,D_t)f(x,t,t',\xi,\tau)dt' +$$

$$+ \frac{1}{i}\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{j!}\{P^{(0,j)}(x,t,D_x+\xi,D_t)D_{t'}^{j-1}\; f(x,t,t',\xi,\tau)\}_{t'=t}$$

(c.q.d.)

Prova de (2.2.11):

Mostremos inicialmente que se

$$P = (D_t+\phi_t)^{k+1} \quad \text{e} \quad p = \tau^{k+1} \quad \text{então,}$$

$$(D_t+\phi_t)^{k+1} = \phi_t^{k+1} + \left[\frac{\partial p}{\partial \tau}(\phi_t)D_t + C\right] + \begin{matrix}\text{termos de grau de}\\ \text{homog. menor}\end{matrix}$$

onde $C = C(x,t,t',\xi,\phi_t,\phi_{tt})$ é uma função analítica envolvendo derivadas de ϕ até ordem dois e homogênea de grau k com relação a ξ.

De fato, sejam $T_k = (D_t+\phi_t)^k$ e $p_k = \tau^k$. Se,

$k = 0$, $T_0 = 1$

$k = 1$, $T_1 = D_t + \phi_t$

$k = 2$, $T_2 = (D_t+\phi_t)(D_t+\phi_t) =$

$$= \phi_t^2 + [2\phi_t D_t + \phi_{tt}] + D_t^2 =$$

$$= \phi_t^2 + \left[\frac{\partial p_2}{\partial \tau}(\phi_t)D_t + \phi_{tt}\right] + D_t^2 ,$$

onde ϕ_t^2 é homogênea de grau 2, $\frac{\partial p_2}{\partial \tau}(\phi_t)$ e ϕ_{tt} são homogêneas de grau 1.

Suponhamos que,

$$T_k = (D_t+\phi_t)^k = \phi_t^k + \left[\frac{\partial p_k}{\partial \tau}(\phi_t)D_t + C_k\right] +$$

$$+ [(\text{termo de grau } k-2)D_t^2 + \ldots] + \ldots + D_t^k$$

onde ϕ_t^k é homogênea de grau k, $\frac{\partial p_k}{\partial \tau}(\phi_t)$ é homogenea de grau $k-1$ e C_k é uma soma de funções homogeneas de grau $k-1$, envolvendo derivadas de ϕ até ordem 2.

Então,

$$P = T_{k+1} = (D_t+\phi_t)^{k+1} = (D_t+\phi_t)\left[\phi_t^k + \left(\frac{\partial p_k}{\partial \tau}(\phi_t) + C_k\right) + \ldots\right] =$$

$$= \phi_k^{k+1} + \phi_t \frac{\partial p_k}{\partial \tau}(\phi_t)D_t + \phi_t C_k + (\text{termos de grau menor})$$

$$+ k\,\phi_t^{k-1}\phi_{tt} + \phi_t^k D_t + (\text{termos de grau menor}) =$$

$$= \phi_t^{k+1} + \left[\phi_t \frac{\partial p_k}{\partial \tau}(\phi_t)D_t + \phi_t^k D_t + (\phi_t C_k + k\phi_t^{k-1}\phi_{tt})\right] +$$

$$+ \text{ termos de grau menor } =$$

$$= \phi_t^{k+1} + \left[\frac{\partial p_{k+1}}{\partial \tau}(\phi_t)D_t + C_{k+1}\right] + \text{ termos de grau menor}$$

pois,
$$\frac{\partial p_{k+1}}{\partial \tau}(\phi_t) = \frac{\partial \tau^{k+1}}{\partial \tau}\Big|_{\tau=\phi_t} = (k+1)\phi_t^k \quad \text{e}$$

$$\phi_t \frac{\partial p_k}{\partial \tau}(\phi_t) + \phi_t^k = \phi_t\, k\, \phi_t^{k-1} + \phi_t^k = (k+1)\phi_t^k$$

e onde $C_{k+1} = \phi_t C_k + \frac{\partial p_k}{\partial \tau}(\phi_t)\,\phi_{tt}$ é homogênea de grau k envolvendo derivadas até ordem dois de ϕ.

Com isso terminamos a prova pois, $p = p_{k+1}$ e como ϕ é analítica temos que C_{k+1} é analítica.

Mostremos agora que vale a seguinte

Proposição:

Seja $P(y,D_y) = P_m(y,D_y) + \sum_{j=0}^{m-1} P_j(y,D_y)$ um operador diferencial parcial linear de ordem m com coeficientes analíticos em um subconjunto aberto Ω do R^{n+1}. Então,

$$P(y,D_y+\Psi) = p(y,\Psi) + [p_\eta(y,\Psi)\cdot D_y + C] + \sum_{j=2}^{m} S_j,$$

onde, $\eta = (\eta_1,\ldots,\eta_{n+1})$, $\Psi = \Psi(y,t',\eta)$ é uma função analítica de todos os seus argumentos e homogenea de grau um com relação a η, $S_j = S_j(y,t',\eta,D_y)$ são operadores diferenciais parciais de ordem menor ou igual a j com coeficientes analíticos e homogeneos de grau $m-j$ com relação a η e $C = C(y,t',\eta)$ é uma função analítica de todos os seus argumentos e homogenea de grau $m-1$ com relação a η e além disso, $C = C_1 + C_2$ onde,

C_1 é uma função analítica envolvendo derivadas até ordem dois de Ψ e homogenea de grau m-1,

C_2 é igual a $p_{m-1}(y,\Psi)$.

<u>Prova</u>

Se $m = 1$ temos que,

$$P(y,D_y) = P_1(y,D_y) + P_0(y,D_y) \quad \text{onde}$$

$P_1(y,D_y) = a_{(1,0,\dots,0)}(y)\, D_y{}^1 + \dots + a_{(0,\dots,0,1)}(y) D_y{}^{n+1}$ e

$P_0(y,D_y) = a_{(0,\dots,0)}(y)$.

Assim, $p(y,\eta) = a_{(1,0,\dots,0)}(y)\eta_1 + \dots + a_{(0,\dots,0,1)}(y)\eta_{n+1}$

e $\quad p(y,\Psi) = a_{(1,0,\dots,0)}(y)\,\Psi_1 + \dots + a_{(0,\dots,0,1)}(y)\,\Psi_{n+1}$,

$p_\eta(y,\Psi) = (a_{(1,0,\dots,0)}(y),\dots,a_{(0,\dots,0,1)}(y))$.

Portanto,

$$p_\eta(y,\Psi).D_y = a_{(1,0,\dots,0)}(y)D_y{}^1 + \dots + a_{(0,\dots,0,1)}(y)D_y{}^{n+1}$$

Como,

$$\begin{aligned} P(y,D_y+\Psi) &= a_{(1,0,\dots,0)}(y)(D_y{}^1+\Psi_1) + \dots + a_{(0,\dots,0,1)}(y) \\ &\qquad (D_y{}^{n+1}+\Psi_{n+1}) + \\ &\quad + a_{(0,\dots,0)}(y) = \\ &= a_{(1,0,\dots,0)}(y)D_y{}^1 + \dots + a_{(0,\dots,0,1)}(y)D_y{}^{n+1} + \\ &\quad + a_{(1,0,\dots,0)}(y)\,\Psi_1 + \dots + a_{(0,\dots,0,1)}(y)\,\Psi_{n+1} + \\ &\qquad + a_{(0,\dots,0)}(y) = \end{aligned}$$

temos,

$$P(y,D_y+\Psi) = p(y,\Psi) + p_\eta(y,\Psi).D_y + C,$$

onde $C = a_{(0,\dots,0)}(y)$. Logo, para $m = 1$ a proposição é verdadeira.

Suponhamos que a Proposição é verdadeira para operadores de ordem menor ou igual a m e provemos que vale para operadores de ordem menor ou igual a m + 1.

Seja $P(y,D_y)$ um operador de ordem menor ou igual a m+1, isto é,

$$P(y,D_y) = P_{m+1}(y,D_y) + \sum_{j=0}^{m} P_j(y,D_y).$$

Logo,

$$P(y,D_y+\Psi) = P_{m+1}(y,D_y+\Psi) + \sum_{j=0}^{m} P_j(y,D_y+\Psi)$$

Para cada operador $P_j(y,D_y+\Psi)$; $j = 0,\dots,m$, vale a hipótese de indução. Basta mostrar que vale para $P_{m+1}(y,D_y+\Psi)$.

Temos,

$$P_{m+1}(y,D_y) = \sum_{|\alpha|=m+1} a_\alpha(y)D_y^\alpha, \quad \text{onde} \quad D_y^\alpha = D_{y_1}^{\alpha_1}\cdots\cdots D_{y_{n+1}}^{\alpha_{n+1}}$$

e $P_{m+1}(y,D_y+\Psi) = \sum_{|\alpha|=m+1} a_\alpha(y)(D_y+\Psi)^\alpha$

Seja i o primeiro índice tal que $D_{y_i}^{\alpha_i} \neq 0$, então podemos escrever

$D_y^\alpha = D_{y_i} \cdot D_y^{\alpha'}$ onde,

$$\alpha' = (0,\dots,0,\alpha_i-1,\alpha_{i+1},\dots,\alpha_{n+1})$$

$$y = (0,\dots,0,y_i,y_{i+1},\dots,y_{n+1})$$

e $|\alpha'| = m$.

Estudemos $(D_y+\Psi)^\alpha$ com $|\alpha| = m + 1$.

Sejam, $T(D_y) = D_y^\alpha$ e $t(\eta) = \eta^\alpha$. Portanto, $T(D_y+\Psi)=(D_y+\Psi)^\alpha$.

Escrevendo,

$(D_y+\Psi)^{\alpha} = (D_{y^i}+\Psi_i)(D_y+\Psi)^{\alpha'}$ e definindo,

$Q(D_y) = D_y^{\alpha'}$ com $|\alpha'| = m$ e $q(\eta) = \eta^{\alpha'} = \eta_i^{\alpha_i-1}\eta_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \ldots$

$\ldots \eta_{N+1}^{\alpha_{n+1}}$ temos que $Q(D_y+\Psi) = (D_y+\Psi)^{\alpha'}$ e $t(\eta) = \eta_i q(\eta)$ e portanto, $t(\Psi) = \Psi_i\ q(\Psi)$.

Como o operador $Q(D_y)$ tem ordem m vale a hipótese de indução e portanto,

$$(D_y+\Psi)^{\alpha} = (D_{y^i}+\Psi_i)(D_y+\Psi)^{\alpha'} =$$

$$= (D_{y^i}+\Psi_i)\left[q(\Psi) + (q_\eta(\Psi).D_y + C) + \sum_{j=2}^{m} Q_j\right] =$$

$$= \Psi_i\ q(\Psi) + \Psi_i(q_\eta(\Psi).D_y) + \Psi_i C + \Psi_i\ (\sum_{j=2}^{m} Q_j) +$$

$$+ D_{y^i}\ q(\Psi) + q(\Psi)D_{y^i} + (D_{y^i}\ q_\eta(\Psi)).D_y + q_\eta(\Psi).D_{y^i}\ D_y +$$

$$+ D_{y^i}C + D_{y^i}(\sum_{j=2}^{m} Q_j) =$$

$$= t(\Psi) + \Psi_i(q_\eta(\Psi).D_y) + q(\Psi)D_{y^i} + \Psi_i C + D_{y^i}\ q(\Psi) + \sum_{j=2}^{m+1} T_j =$$

$$= t(\Psi) + \left[t_\eta(\Psi).D_y + C'\right] + \sum_{j=2}^{m} T_j,$$

pois, $t(\eta) = \eta_i\ q(\eta)$ implica que

$$t_\eta(\eta) = (0,\ldots,0,q(\eta)+\eta_i\ q_{\eta_i}(\eta),\ \eta_i\ q_{\eta_{i+1}}(\eta),\ldots,\eta_i\ q_{\eta_{n+1}}(\eta))$$

e $t_\eta(\Psi) = (0,\ldots,0,q(\Psi) + \Psi_i\ q_{\eta_i}(\Psi),\Psi_i\ q_{\eta_{i+1}}(\Psi),\ldots,\Psi_i q_{\eta_{n+1}}(\Psi))$

e portanto,

$$t_\eta(\Psi).D_y = q(\Psi).D_{y^i} + \Psi_i(q_\eta(\Psi).D_y).$$

Além disso, $C' = \Psi_i C + D_{y^i}\ q(\Psi)$ e como

$C = C_1 + C_2$ com $C_2 = 0$ temos que

$$C' = \Psi_i C_1 + D_{y^i}\ q(\Psi)$$

Usando a propriedade de linearidade de $P_{m+1}(y,D_y+\Psi)$ concluimos que a proposição é verdadeira para $P_{m+1}(y,D_y+\Psi)$.

Então,

$$P(y,D_y+\Psi) = P_{m+1}(y,D_y+\Psi) + P_m(y,D_y+\Psi) + \sum_{j=0}^{m-2} P_j(y,D_y+\Psi) =$$

$$= p(y,\Psi) + [p_\eta(y,\Psi).D_y + \tilde{c}] + \sum_{j=2}^{m+1} R_j +$$

$$+ p_m(y,\Psi) + \sum_{j=1}^{m} \tilde{R}_j +$$

$$+ \ldots = p(y,\Psi) + [p_\eta(y,\Psi).D_y + \tilde{\tilde{c}}] + \sum_{j=2}^{m+1} S_j ,$$

onde, $\tilde{\tilde{c}} = \tilde{c} + p_m(y,\Psi)$ e S_j são operadores diferenciais parciais de ordem menor ou igual a j e com coeficientes de grau $m+1-j$ de homogeneidade, o que completa a prova da proposição. (c.q.d.).

Agora estamos em condições de provar (2.2.11). De fato, fazendo

$$y = (x^1,\ldots,x^n,t),\ \eta = (\xi_1,\ldots,\xi_\eta,\tau) \quad \text{e}$$

$$\Psi = \Psi(x,t,t',\xi) = (\Psi_1,\ldots,\Psi_n,\Psi_{n+1}) = (\xi_1+\phi_{x^1},\ldots,\xi_\eta+\phi_{x^n},\phi_t) =$$

$$= (\xi+\phi_x(x,t,t',\xi),\phi_t(x,t,t',\xi)),$$ na proposição anterior temos,

$$P(x,t,D_x+\xi+\phi_x,D_t+\phi_t) = p(x,t,\xi+\phi_x,\phi_t) + \sum_{j=1}^{m} P_j(x,t,t',\xi,D_x,D_t)$$

onde P_j são operadores diferenciais de ordem menor ou igual a j cujos coeficientes são funções analíticas de (x,t,t',ξ) e homogeneos de grau $m-j$ com relação a ξ. Além disso,

$$P_1(x,t,t',\xi,D_x,D_t) = \sum_{j=1}^{n} p_{\xi_j}(x,t,\xi+\phi_x,\phi_t)D_{x^j} +$$

$$+ p_\tau(x,t,\xi+\phi_x,\phi_t)\, D_t + C(x,t,t',\xi),$$

onde $C(x,t,t',\xi)$ têm as propriedades da proposição.

Seja $k(x,t,t',\xi,\tau) = \sum_{j=m-1}^{\infty} k_j(x,t,t',\xi,\tau)$. Então,

$$P(x,t,D_x+\xi+\phi_x,D_t+\phi_t)k(x,t,t',\xi,\tau) =$$

$$= p(x,t,\xi+\phi_x,\phi_t)k_{m-1}(x,t,t',\xi,\tau) +$$

$$+ p(x,t,\xi+\phi_x,\phi_t) \sum_{j=m}^{\infty} k_j(x,t,t',\xi,\tau) +$$

$$+ \left(\sum_{j=1}^{m} P_j(x,t,t';\xi,D_x,D_t)\right)k_{m-1}(x,t,t',\xi,\tau) +$$

$$+ \left(\sum_{j=1}^{m} P_j(x,t,t',\xi, D_x,D_t)\right) \left(\sum_{j=m}^{\infty} k_j(x,t,t',\xi,\tau)\right).$$

Logo, o termo de grau 1 é dado por:

$$p(x,t,\xi+\phi_x,\phi_t)\ k_{m-1}(x,t,t',\xi,\tau)$$

e será nulo se $p(x,t,\xi+\phi_x,\phi_t) = 0.$

O termo de grau zero é dado por:

$$P_1\ k_{m-1},$$

o de grau -1, por:

$$P_2\ k_{m-1} + P_1\ k_m,$$

o de grau -2, por:

$$P_3\ k_{m-1} + P_2 k_m + P_1\ k_{m+1},$$

....

o de grau $-m+1$, por:

$$P_m\ k_{m-1} + P_{m-1}\ k_m + \dots + P_1\ k_{m+(m-2)},$$

o de grau $-m$, por:

$$P_m\ k_m + P_{m-1}\ k_{m+1} + \dots + P_1 k_{m+(m-1)}$$

....

Assim, o termo de grau $-\nu \leq 0$ é dado por:

$$\sum_{\substack{\nu'=0 \\ (\nu'\geq\nu+1-m)}}^{\nu} P_{(\nu+1)-\nu'}(x,t,t',\xi,D_x,D_t)\ k_{m-1+\nu'}(x,t,t',\xi,\tau) =$$

$$= \sum_{\substack{\nu'=0 \\ (\nu'\geq\nu+1-m)}}^{\nu-1} P_{\nu+1-\nu'}\ k_{m-1+\nu'} + P_1\ k_{m-1+\nu} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} p_{\xi_j}(x,t,\xi+\phi_x,\phi_t)\, D_{x_j}\, k_{m-1+\nu} + p_\tau(x,t,\xi+\phi_x,\phi_t) D_t\, k_{m-1+\nu}$$

$$+ C(x,t,t',\xi) k_{m-1+\nu} + \sum_{\substack{\nu'=0 \\ (\nu' \geq \nu+1-m)}}^{\nu-1} \tilde{Q}_\nu^{\nu'}(x,t,t',\xi,D_x,D_t)\, k_{m-1+\nu'}$$

onde $C(x,t,t',\xi)$ é uma função analítica de x,t,t' (próximos da origem) e de ξ (no cone aberto Γ') e vale o mesmo para os coeficientes dos operadores. $\tilde{Q}_\nu^{\nu'} = P_{\nu+1-\nu'}$. O grau de homogeneidade de C é $m-1$ e dos coeficientes é $m-(\nu+1-\nu') = m-1-\nu+\nu'$ e a ordem de $\tilde{Q}_\nu^{\nu'}$ é menor ou igual a $\nu+1-\nu'$.

Prova da versão do Teorema de Stoke quando N = 1

Se $|f(k+ikw\delta')| \leq C\, k\, e^{-\frac{ck\delta'}{2}}$ e w é uma constante, afirmamos que

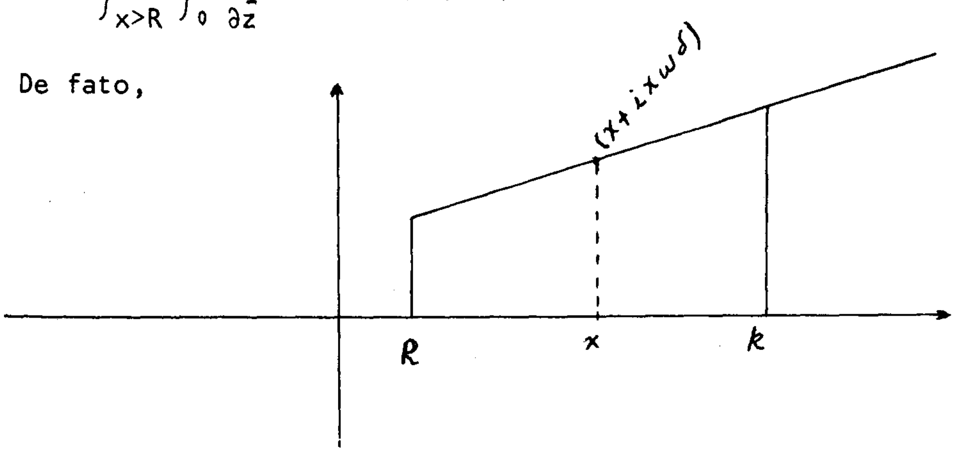
$$\int_{x>R} f(x)dx - \int_{x>R} f(x+ixw\delta)d(x+iw\delta) = J_1 + J_2$$

onde,

$$J_1 = R\int_0^{\delta} f(R+iRw\delta')(iw)d\delta'$$

$$J_2 = \int_{x>R}\int_0^{\delta} \frac{\partial f}{\partial \bar z}(x+ixw\delta')x(-2w)d\delta' dx$$

De fato,



Pelo Teorema de Green temos,

$$\int_C f(z)dz = \int_C f(z)dx + if(z)dy = \iint_{\text{Região}} i\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z)+i\frac{\partial f}{\partial y}(z)\right)dxdy$$

$$= \iint_{\text{região}} 2i\,\frac{\partial f}{\partial \bar z}(z)dxdy = \int_{k>x>R}\int_0^{\delta} 2i\,\frac{\partial f}{\partial \bar z}(x+ixw\delta')(ixw)d\delta' dx =$$

$$= \int_{k>x>R}\int_0^{\delta} \frac{\partial f}{\partial \bar z}(x+ixw\delta')\; x\; (-2w)d\delta' dx.$$

Mas,

$$\int_C f(z)dz = \int_{k>x>R} f(z)dz + \int_{x=k} f(z)dz - \int_{\substack{z=x+ixw\delta \\ k>x>R}} f(z)dz - \int_{x=R} f(z)dz$$

$$= \int_{k>x>R} f(x)dx + \int_0^{\delta} f(\gamma_1(\delta'))\gamma_1'(\delta')d\delta' - \int_{k>x>R} f(x+ixw\delta)d(x+ixw\delta)$$

$$- \int_0^{\delta} f(\gamma_2(\delta'))\gamma_2'(\delta')d\delta' =$$

$$= \int_{k>x>R} f(x)dx + \int_0^{\delta} f(k+ikw\delta')(ikw)d\delta' - \int_{k>x>R} f(x+ixw\delta)d(x+ixw\delta)$$

$$- \int_0^{\delta} f(R+iRw\delta')(iRw)d\delta'$$

onde $\gamma_1(\delta') = k + ikw\delta'$ e $\gamma_2(\delta') = R + iRw\delta'$.

Assim,

$$\int_{k>x>R} f(x)dx - \int_{k>x>R} f(x+ixw\delta)d(x+ixw\delta) =$$

$$= R \int_0^{\delta} f(R+iRw\delta')(iw)d\delta' + \int_{k>x>R} \int_0^{\delta} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} (x+ixw\delta')x(-2w)d\delta' dx$$

$$- \int_0^{\delta} f(k+ikw\delta')(ikw)d\delta'.$$

Passando o limite para $k \to +\infty$, obtemos

$$\int_{x>R} f(x)dx - \int_{x>R} f(x+ixw\delta)d(x+ixw\delta) =$$

$$= R \int_0^{\delta} f(R+iRw\delta')(iw)d\delta' + \int_{x>R} \int_0^{\delta} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(x+ixw\delta')x(-2w)d\delta' dx$$

$$- \lim_{k\to+\infty} \int_0^{\delta} f(k+ikw\delta')(ikw)d\delta'$$

Basta mostrar que,

$$\lim_{k\to+\infty} \int_0^{\delta} f(k+ikw\delta')(ikw)d\delta' = 0,$$

o que é fácil desde que $|f(k+ikw\delta')| \leq ck \quad e^{-\frac{ck\delta'}{2}}$

PROBLEMA DE CAUCHY (não-linear)

Seja $\Omega \subset R^n$ um aberto, onde a variável é denotada por $x = (x^1,\ldots,x^n)$. Consideremos uma aplicação analítica, u_0, de Ω em R^m; e um subconjunto aberto $\mathcal{O}$ de $R^{m(n+1)}$, contendo a imagem de Ω sob a aplicação:

$$x \to (u_0(x), \text{grad } u_0(x))$$

Seja, $f: \Omega \times (-T,T) \times \mathcal{O} \to R^m$ uma função analítica com relação a todas as variáveis exceto t $(t \in (-T,T))$ e contínua com relação a t, com m posivelmente maior do que um.

Consideremos o seguinte problema de Cauchy (não linear):

$$(1) \qquad \begin{cases} u_t = f(x,t,u,u_x) & , x \in U, \quad |t| < \delta \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in U \end{cases}$$

onde U é um subconjunto aberto de Ω e δ é um número tal que $0 < \delta \leq T$.

TEOREMA

Existe uma única solução $u(x,t)$ do problema (1) que é analítica com relação a x e de classe C^1 com relação a t.

(Ver M. Nagumo [12]).

Vamos resolver o seguinte problema de Cauchy (não-linear) (Seguindo Treves [17])

$$(2) \qquad \begin{cases} \phi_t(x,t,t',\xi) = \lambda(x,t,\xi+\phi_x(x,t,t',\xi)) \\ \phi|_{t=t'} = 0 \end{cases}$$

Definindo $\Psi(x,t,t',\xi) = \langle x,\xi\rangle + \phi(x,t,t',\xi)$ o problema (2) se transforma em

$$(3) \qquad \begin{cases} \Psi_t(x,t,t',\xi) = \lambda(x,t,\Psi_x(x,t,t',\xi)) \\ \Psi|_{t=t'} = \langle x,\xi\rangle \end{cases}$$

Estamos supondo que $\lambda(x,t,p)$ é holomorfa em (x,p), para x numa vizinhança da origem em C^n, p numa vizinhança complexa de ξ^0 em C_n e analítica com relação a t, para $|t| < \delta$ (t real)

As equações de Hamilton-Jacobi são dadas por:

$$(4) \qquad \frac{dx}{dt} = -\lambda_p(x,t,p) \qquad \frac{dp}{dt} = \lambda_x(x,t,p)$$

às quais adicionamos as condições iniciais

$$(5) \qquad x(t') = w \qquad p(t') = \xi$$

onde w pertence a uma vizinhança da origem em C^n e ξ pertence a uma vizinhança de ξ^0 em C_n.

As equações (4) e (5) têm uma única solução

$$(x(t,t',w,\xi),\ p(t,t',w,\xi))$$

que é analítica com relação a t, t' ($|t| < \delta$, $|t'| < \delta_1$) e holomorfa com relação a w,ξ (para w em alguma vizinhança da origem em C^n e para ξ numa vizinhança de ξ^0 em C_n).

Para cada t numa vizinhança de t' e ξ fixo a aplicação

$$w \to x(t,t',w,\xi)$$

é um holomorfismo próximo de $w = 0$; e a aplicação

$$x \to w(t,t',x,\xi)$$

é o holomorfismo inverso.

Seja,

$$\Psi(x,t,t',\xi) = \langle x,\xi\rangle + \int_{t'}^{t} \lambda(x,s,p(s,t',w(s,t',x,\xi),\xi))ds$$

Mostremos que Ψ é solução do problema (3).

De fato, $\Psi|_{t=t'} = \langle x,\xi\rangle$. Como

$$\Psi_t(x,t,t',\xi) = \lambda(x,t,p(t,t',w(t,t',x,\xi),\xi))$$

basta mostrar que

$$p(t,t',w(t,t',x,\xi),\xi) = \Psi_x(x,t,t',\xi).$$

Mas como em $t = t'$ temos que

$$p(t',t',w(t',t',x,\xi),\xi) = \Psi_x(x,t',t',\xi) = \xi$$

é suficiente mostrar que

$$\frac{d}{dt}[p(t,t',w,\xi) - \Psi_x(x,t,t',\xi)] = p_w\, w_t + p_t - \Psi_{xt} =$$

$$= p_w\, w_t + p_t - \lambda_x(x,t,p) - \lambda_p\, p_w\, w_x \quad \left(\text{pois, } \Psi_{xt} = \Psi_{tx} = \frac{\partial}{\partial x}\lambda(x,t,p)\right)$$

$= p_w(w_t - \lambda_p w_x) \equiv 0$ (Usamos o fato que x e t são variáveis independentes e que $p_t = \lambda_x(x,t,p)$.)

Se diferenciarmos com relação a t a identidade

$$x = x(t,t',w(t,t',x,\xi),\xi)$$

obtemos que

$$0 = x_w\, w_t + x_t = x_w\, w_t - \lambda_p(x,t,p)$$

e portanto,

$x_w\, w_t = \lambda_p(x,t,p)$ o que implica que

$w_t = \lambda_p(x,t,p)w_x$ que é nossa afirmação

Assim, Ψ é solução do problema (3) Logo,

$$\phi(x,t,t',\xi) = \int_{t'}^{t} \lambda(x,s,p(s,t',w(s,t',x,\xi),\xi))ds$$

é solução de (2).

Estendendo a definição de ϕ para t e t' complexos isto é, numa vizinhança complexa de $(-\delta,\delta)$ e de $(-\delta_1,\delta_1)$ vemos que ϕ é uma função holomorfa de x,t,t',ξ (isto segue da proposição B.11 do apêndice B) e portanto holomorfa de x,ξ e analítica de t, t' (t e t' reais).

Logo existe uma única solução do problema (2) que é holomorfa em x,ξ e analítica em t e t' (isto segue do teorema anterior fazendo

$$u = (\mathrm{Re}\,\phi,\ \mathrm{Im}\phi) \quad \text{e}$$

$$f(y,t,p_1,p_2) = (\mathrm{Re}\,\lambda(y,t,p_1+ip_2),\mathrm{Im}\,\lambda(y,t,p_1+ip_2))$$

onde $y \in R^{2n}$. Nesse caso o espaço de valores é o R^2 tanto para f como para u.

Como f é analítica em t é de classe C^1 em t e dai segue a unicidade.)

Observação:

Se $\lambda(x,t,p)$ é uma função analítica de x,t,p; para x numa vizinhança da origem em R^n, para $|t| < \delta$ (t real) e para p numa vizinhança de ξ^0 em R_n então o problema (2) tem uma única solução analítica $\phi(x,t,t',\xi)$.

De fato, consideramos a extensão de λ para x e p complexos e pela parte anterior sabemos que existe uma única solução $\phi(x,t,t',\xi)$ holomorfa em x,ξ e analítica em t e t' e portanto uma única solução ϕ analítica em x, t, t', ξ.

PROVA DO TEOREMA 1.2

Um núcleo que é semiregular em x e em y é dito um núcleo regular

Dizemos que um núcleo $K(x,y)$ é muito regular se:

a) ele é regular

b) $K(x,y)$ é uma função C^∞ fora da diagonal de $\Omega \times \Omega$

Seja $P(x,D_x)$ um operador diferencial parcial com coeficientes C^∞ em Ω. Dizemos que um núcleo $K(x,y)$ é um núcleo fundamental (respectivamente uma parametriz) de P se:

$$P(x,D_x)\ K(x,y) = \delta(x-y)$$

(resp. $P(x,D_x)K(x,y)-\delta(x-y) \in C^\infty(\Omega\times\Omega)$)

Em Treves [15] - pg 536, encontramos o seguinte

TEOREMA

Suponhamos que o transposto ${}^tP$ de P tenha uma parametriz que é muito regular. Então P é hipoelítico.

Nosso objetivo é provar o seguinte

TEOREMA

Seja $P = P(x,D_x)$ um operador diferencial parcial com coeficientes analíticos em Ω e supomos que seu transposto ${}^tP$ tem uma parametriz $K(x,y)$ satisfazendo as seguintes condições:

i) $K(x,y)$ é semiregular em x e em y;

ii) $K(x,y)$ é uma função analítica fora da diagonal em $\Omega \times \Omega$;

iii) $\quad {}^tP(y,D_y)K(x,y) - \delta(x-y) = R(x,y) \in A(\Omega\times\Omega)$.

Então, P é analítico-hipoelítico.

Prova

Pelo Teorema anterior P é hipoelítico.

É suficiente mostrar que se $u \in D'(U)$, onde U é um subconjunto aberto de Ω, é tal que $Pu \in A(U)$ então $u \in A(U)$. Como analiticidade é uma propriedade local, é suficiente mostrar que u é analítica em uma vizinhança w de um ponto arbitrário $a \in U$

Supomos inicialmente que $Pu = 0$ em U. Seja $g \in C_c^\infty(w)$ ser $= 1$ sobre $\bar{w}'$, onde w' é um subconjunto aberto tal que $a \in w' \subset \bar{w}' \subset w$ e seja $\rho \in C_c^\infty(R^n)$ ser igual a 1 sobre uma vizinhança pequena da origem e tal que seu suporte está contido na bola aberta $B_\varepsilon(0)$, com ε um número positivo a ser escolhido depois.

Temos que

$$P(g\,u) = 0 \quad \text{em} \quad w'.$$

Por outro lado, $P(g\,u)$ é uma distribuição com suporte compacto e como $K(x,y)$ é semiregular em y,

$$K\,P(g\,u) = \langle K(x,y),\ P(g\,u)(y)\rangle$$

está bem definido. Mas,

$$\langle K(x,y), P(g\,u)(y)\rangle = \langle {}^tP(y,D_y)K(x,y), (g\,u)(y)\rangle =$$

$$= \langle \delta(x-y), (g\,u)(y)\rangle + \langle R(x,y), (g\,u)(y)\rangle =$$

$$= (g\,u)(x) + \langle R(x,y), (g\,u)(y)\rangle$$

Assim,

$$(g\,u)(x) = \langle K(x,y),\ P(g\,u)(y)\rangle - \langle R(x,y), (g\,u)(y)\rangle.$$

O último termo é obviamente, uma função analítica de x desde que $R(x,y)$ é analítica e $g\,u \in C_c^\infty(w)$. Resta estudar o primeiro termo.

Escrevemos,

$$<K(x,y),P(g\,u)(y)> = <(1-\rho(x,y))K(x,y),P(g\,u)(y)> +$$
$$+ <\rho(x-y)K(x,y),P(g\,u)(y)>.$$

Note que, desde que $P(g\,u) = 0$ em w' e $g \in C_c^\infty(w)$ o suporte de $P(g\,u)$ está contido em $w\setminus w'$. Agora escolhemos $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que, quando $|x-a| < \varepsilon$ o suporte de $\rho(x-y)$, como uma função de y, está contido em w' e, se $x \in B_\varepsilon(a)$ e $y \in$ supp $P(g\,u)$, temos $|x-y| > \varepsilon$.

Com uma tal escolha,

$<\rho(x-y)K(x,y),P(g\,u)(y)> = 0$ para $x \in B_\varepsilon(a)$.

Por outro lado, afirmamos que a função

$$h(x) = <(1-\rho(x-y))K(x,y),P(g\,u)(y)>$$

é analítica na bola aberta $B_\varepsilon(a)$. De fato, temos

$$D^\alpha h(x) = <(1-\rho(x-y))D_x^\alpha K(x,y),P(g\,u)(y)> =$$
$$\int(1-\rho(x-y))D_x^\alpha\, K(x,y)P(g\,u)(y)dy.$$

Isso é justificado pelos seguintes fatos:

a) $P(g\,u) \in C_c^\infty(w)$;

b) como $x \in B_\varepsilon(a)$ e $y \in$ sup $P(g\,u)$, então $x \neq y$, e portanto $K(x,y)$ é uma função analítica;

c) como $x \in B_\varepsilon(a)$ e $y \in$ supp $P(g\,u)$, $|x-y| > \varepsilon$, assim $\rho(x-y) = 0$ e D_x^α aplica somente em $K(x,y)$.

Da analiticidade de $K(x,y)$ obtemos a estimativa,

$$|D_x^{\alpha} K(x,y)| \leq M^{|\alpha|+1}\alpha!,$$

que implica uma estimativa análoga para $|D^{\alpha}h(x)|$. Assim, h é analítica em $B_{\varepsilon}(a)$ e portanto $u(x)$ é analítica em $B_{\varepsilon}(a)$.

Suponhamos, a seguir, que $Pu = f$ seja uma função analítica (não identicamente nula) em U. Diminuindo U se necessário, existe, pelo teorema de Cauchy-Kovalevskaya, uma função analítica r, solução de

$$Pr = f, \text{ em } U.$$

Mas, então, $P(u-r) = 0$ em U e, pelo que acabamos de demonstrar, $u-r$ é analítica em $B_{\varepsilon}(a)$, logo u é analítica em $B_{\varepsilon}(a)$.

(c.q.d.)

<u>Observação</u>:

Podemos aplicar o Teorema de Cauchy-Kavalevskaya, pois, no nosso caso o operador P é de tipo principal em Ω.

APÊNDICE B

Proposição B.1:

Seja $A \subset R^n$ um conjunto mensurável (Lebesgue) e $V \subset R^m$ aberto.

Seja $f(x,t)$ definida em $A \times V$ tendo as seguintes propriedades:

i) para cada t fixo, $f(.,t)$ é mensurável em A.

ii) para cada x fixo, $f(x,.)$ é contínua em V.

iii) para cada $t_0 \in V$, existe um aberto U tàl que $t_0 \in U \subset V$ e existe $\Psi \in L^1(A)$ tal que

$$|f(x,t)| \leq \Psi(x) \quad \forall (x,t) \in A \times U.$$

Então a função,

$$g(t) = \int_A f(x,t)dx$$

é contínua em V (e está definida para todo $t \in V$).

Prova

Seja $t_0 \in V$ e $t_n \to t_0$ com $t_n \in V$. Queremos mostrar que $g(t_n) \to g(t_0)$, onde

$$g(t_n) = \int_A f(x,t_n)dx \text{ e } g(t_0) = \int_A f(x,t_0)dx$$

Sejam $r_n(x) = f(x,t_n)$ $(n=1,2,\ldots)$ e $r_0(x) = f(x,t_0)$.

Para cada $x \in A$ temos:

$r_n(x) = f(x,t_n) \to f(x,t_0) = r_0(x)$ pois, para cada $x \in A$, $f(x,.)$ é contínua em V.

As funções $r_n(x)$ e $r_0(x)$ são mensuráveis pois, para cada t fixo, $f(.,t)$ é mensurável em A.

De iii) sabemos que para $t_0 \in V$, existe um aberto $U_0 \subset V$ com $t_0 \in U_0 \subset V$ e existe $\Psi_0 \in L^1(A)$ tal que

$$|f(x,t)| \leq \Psi_0(x) \quad \forall\ (x,t) \in A \times U_0$$

Como $t_n \to t_0$, $\exists\ n_0$ tal que se $n \geq n_0 \Rightarrow t_n \in U_0$ e assim $|f(x,t_n)| \leq \Psi_0(x)$ para $n \geq n_0$.

Para cada t_i $(1 \leq i < n_0)$, de iii) segue que existe $U_i \subset V$ aberto com $t_i \in U_i$ e existe $\Psi_i \in L^1(A)$ tal que

$$|f(x,t)| \leq \Psi_i(x) \quad \forall\ (x,t) \in A \times U_i \qquad (1 \leq i < n_0)$$

Definindo,

$$\Psi(x) = \Psi_0(x) + \Psi_1(x) + \dots + \Psi_{n_0-1}(x),$$

temos que $\Psi \in L^1(A)$. Além disso,

$$|r_0(x)| = |f(x,t_0)| \leq \Psi_0(x) \leq \Psi(x), \quad \forall\ x \in A,$$

para $n \geq n_0$,

$$|r_n(x)| = |f(x,t_n)| \leq \Psi_0(x) \leq \Psi(x), \quad \forall\ x \in A,$$

para $1 \leq i \leq n_0 - 1$,

$$|r_i(x)| = |f(x,t_i)| \leq \Psi_i(x) \leq \Psi(x), \quad \forall\ x \in A.$$

Logo, $|r_n(x)| \leq \Psi(x)$ $\forall\ x \in A$ e $n = 0,1,2,\dots$, com $\Psi \in L^1(A)$.

Pelo Teorema da Convergência dominada de Lebesgue temos,

$$g(t_n) = \int_A f(x,t_n)dx = \int_A r_n(x)dx \to \int_A r_0(x)dx = \int_A f(x,t_0)dx = g(t_0)$$

Proposição B.2:

Sejam $A \subset R^n$ um conjunto mensurável (Lebesgue), $V \subset R^m$ um aberto e $W \subset R$ um aberto. Seja $f(x,t,s)$ definida em $A \times V \times W$ tendo as seguintes propriedades:

i) para cada (t,s) fixo, $f(.,t,s) \in L^1(A)$

ii) para cada (x,t) fixo, $f(x,t,.)$ é diferenciável em W.

iii) para cada t_0 e s_0 fixos, existe um aberto U com $s_0 \in U \subset W$ e existe $\Psi \in L^1(A)$ tal que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial s}(x,t_0,s)\right| \leq \Psi(x) \quad \forall\ (x,t_0,s) \in A \times \{t_0\} \times U$$

Então, a função

$g(t,s) = \int_A f(x,t,s)dx$ está definida em $V \times W$, existe $\frac{\partial g}{\partial s}(t,s)$, $\forall\ (t,s) \in V \times W$ e

$$\frac{\partial g}{\partial s}(t,s) = \int_A \frac{\partial f}{\partial s}(x,t,s)dx, \quad \forall (t,s) \in V \times W$$

Além disso, se a condição:

iv) para cada $(x,t) \in A \times V$, $f(x,t,.)$ é de classe $C^1(W)$

estiver satisfeita então, $\frac{\partial g}{\partial s}(t,s)$ será contínua em s para cada $t \in V$ fixo.

Se,

v) para cada $s_0 \in W$, existe U aberto com $(t,s_0) \in U$ e $U \subset V \times W$ e existe $\Psi \in L^1(A)$ tal que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial s}(x,t,s)\right| \leq \Psi(x), \ \forall\ (x,t,s) \in A \times U, \text{ e}$$

vi) para cada $x \in A$, $f(x,.,.)$ é derivável em s e $\frac{\partial f}{\partial s}(x,.,.)$ é contínua em $V \times W$,

estiverem satisfeitas então,

$$\frac{\partial q}{\partial s}(t,s) \text{ é contínua em } V \times W.$$

Prova

De i) segue que $g(t,s)$ está bem definida. De ii) segue que existe $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x,t,s+h)-f(x,t,s)}{h}$ e além disso,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x,t,s+h)-f(x,t,s)}{h} = \frac{\partial f}{\partial s}(x,t,s).$$

Queremos mostrar que existe $\frac{\partial g}{\partial s}(t,s)$ $\forall$ $(t,s) \in V \times W$ e

$$\frac{\partial g}{\partial s}(t,s) = \int_A \frac{\partial f}{\partial s}(x,t,s)dx, \quad \forall\ (t,s) \in V \times W.$$

Basta mostrar que para cada $(t,s) \in V \times W$, existe

$$\frac{\partial g}{\partial s}(t,s) \quad e \quad \frac{\partial g}{\partial s}(t,s) = \int_A \frac{\partial f}{\partial s}(x,t,s)dx$$

Observemos que,

$$\frac{g(t,s+h)-g(t,s)}{h} = \frac{\int_A f(x,t,s+h)dx - \int_A f(x,t,s)dx}{h} =$$

$$= \int_A \frac{f(x,t,s+h)-f(x,t,s)}{h}\, dx \quad e$$

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial s}(x,t,s)dx = \int_A \left(\lim_{h\to 0} \frac{f(x,t,s+h)-f(x,t,s)}{h}\right)dx$$

Tomando uma sequência qualquer $h_n \to 0$, vamos mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \frac{f(x,t,s+h_n) - f(x,t,s)}{h_n}\, dx =$$

$$= \int_A \left(\lim_{n\to\infty} \frac{f(x,t,s+h_n)-f(x,t,s)}{h_n}\right) dx$$

(se existir)

Definindo,

$$C_n(x) = \frac{f(x,t,s+h_n)-f(x,t,s)}{h_n}$$ vamos mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_A C_n(x)dx = \int(\lim_{n\to\infty} C_n(x))dx \quad \text{(se existir).}$$

De iii) sabemos que para cada $(s,t) \in W\times V$ existe um aberto U com $s \in U \subset W$ e existe $\Psi \in L^1(A)$ tal que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial s}(x,t,s)\right| \leq \Psi(x), \quad \forall\ (x,t,s) \in A \times \{t\} \times U$$

Seja $h_n \to 0$ tal que $s + h_n \in U$. De ii) e do teorema da média temos,

$$C_n(x) = \frac{f(x,t,s+h_n)-f(x,t,s)}{h_n} = \frac{\partial f}{\partial s}(x,t,s+\theta_n h_n),$$

com $0 < \theta_n < 1$, $\forall\ n$.

Logo, $|C_n(x)| \leq \Psi(x)$, $\forall\ x \in A$, $\forall\ n$.

As funções $C_n(x)$ são mensuráveis em A, pois de i) segue que $f(.,t,s)$ é mensurável. Como $\lim_{n\to\infty} C_n(x) = \frac{\partial f}{\partial s}(x,t,s)$, estamos nas condições do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \int_A C_n(x)dx = \int_A \frac{\partial f}{\partial s}(x,t,s)dx = \int_A (\lim_{n\to\infty} C_n(x))dx$$

(c.q.d.)

O restante segue da proposição - B.1.

Corolário

Sejam $A \subset R^n$ um conjunto mensurável (Lebesgue) e $V \subset R^m$ um aberto. Seja $f(x,t)$ definida em $A\times V$ tendo as seguintes propriedades:

i) para cada $t \in V$, $f(.,t) \in L^1(A)$

ii) para cada $x \in A$, $f(x,.) \in C^\infty(V)$

iii) para cada $t_0 \in V$ e para cada $p \in N^m$, existe um aberto U

com $t_0 \in U \subset V$ e existe $\Psi \in L^1(A)$ tal que

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^p f(x,t)\right| \leq \Psi(x), \quad \forall\ (x,t) \in A \times U.$$

Então a função,

$$g(t) = \int_A f(x,t)dx,$$

está bem definida e $g \in C^\infty(V)$.

Prova

A demonstração é feita por indução e observando-se que para obter um resultado igual ao da Proposição B.2 para uma variável t_j qualquer de $t = (t_1,\ldots,t_m)$ basta trocar-se a variável s com a variável t_j.

Lema B.1

Sejam $U \subset R^m$ aberto e $f: U \times [a,b] \to R^n$ contínua, com $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ contínua em $U \times [a,b]$. Então, $g: U \to R^n$, definida por

$$g(x) = \int_a^b f(x,t)dt,$$

é de classe C^1 e

$$g'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt.$$

(Ver Elon L.L. - [11] - pg 50)

Proposição B.3

Sejam $U \subset R^m$ aberto e $f: U \times [a,b] \to R^n$ contínua. Então, a função,

$$g(x,t) = \int_a^t f(x,s)ds,$$

é contínua.

Prova

Sejam $t_0 \varepsilon (a,b)$ e $x_0 \varepsilon U$.

$$|g(x,t)-g(x_0,t_0)|=$$

$$= \left|\int_a^t f(x,s)ds-\int_a^t f(x_0,s)ds+\int_a^t f(x_0,s)ds-\int_a^{t_0} f(x_0,s)ds\right| =$$

$$\leq \int_a^t |f(x,s)-f(x_0,s)|ds + \int_{t_0}^t |f(x_0,s)|ds.$$

Dado $\varepsilon > 0$, tomamos $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Para esse $\varepsilon' > 0$, existe $\delta' > 0$ (devido à continuidade de f) tal que se

$$|x-x_0| < \delta' \Rightarrow |f(x,s)-f(x_0,s)| < \varepsilon'.$$

Como f é contínua e $\{x_0\} \times [t_0,b]$ é compacto temos que $|f(x_0,s)| \leq M$.

Assim,

$$|g(x,t)-g(x_0,t_0)| \leq \varepsilon'(t-a)+M(t-t_0)\leq\varepsilon'(b-a)+M(t-t_0) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + M(t-t_0) < \frac{\varepsilon}{2} + M\,\delta < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

se $(|x-x_0|^2 + |t-t_0|^2)^{1/2} < \delta$ com $\delta = \min\{\delta',\frac{\varepsilon}{2M}\}$

Proposição B.4

Sejam $U \subset R$ aberto, $f: U \times [a,b]$ contínua com $\frac{\partial f}{\partial t}$ contínua em $U \times [a,b]$. Além disso, seja $\alpha: [a,b] \to U$ de classe C^1 em (a,b).

Então para $t \varepsilon (a,b)$, seja

$$g(t) = \int_{s_0}^{\alpha(t)} f(s,t)ds.$$

Então,

$$\frac{dg}{dt}(t) = f(\alpha(t),t).\alpha'(t) + \int_{s_0}^{\alpha(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(s,t)ds$$

Prova

Sejam, $u = \alpha(t)$ e $v = t$. Assim,

$$g(t) = \int_{s_0}^{u} f(s,v)ds = G(u,v) \quad \text{e}$$

$$\frac{dg}{dt}(t) = \frac{\partial G}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial G}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dt}$$

Mas,

$$\frac{\partial G}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \int_{s_0}^{u} f(s,v)ds = f(u,v),$$

$$\frac{\partial G}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} \int_{s_0}^{u} f(s,v)ds = \int_{s_0}^{u} \frac{\partial f}{\partial v}(s,v)ds.$$

Usamos o Lema B.1 e o teorema fundamental do Cálculo.

Assim,

$$\frac{dg}{dt}(t) = f(\alpha(t),t).\alpha'(t) + \int_{s_0}^{\alpha(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(s,t)ds \qquad \text{(c.q.d.)}$$

Observação:

a) Quando $\alpha(t) = t$ temos que

$$\frac{dg}{dt}(t) = f(t,t) + \int_{s_0}^{t} \frac{\partial f}{\partial t}(s,t)ds$$

b) Seja $h(t,t') = \int_{s_0}^{t'} \frac{\partial f}{\partial t}(s,t)ds$, que é contínua pela proposição B.3. Então

$$h(t,t) = \int_{s_0}^{t} \frac{\partial f}{\partial t}(s,t)ds$$ é contínua e assim

$\frac{dg}{dt}(t)$ é contínua e portanto g é de classe C^1.

Proposição B.5

Sejam $U \subset R^m$ aberto e $f: U \times [a,b] \times [a,b] \to R^n$ contínua. Então a função

$$g(x,t) = \int_a^t f(x,t,t')dt',$$

é contínua.

Prova

Análoga a da proposição B.3

Proposição B.6

Sejam $U \subset R^m$ aberto, $f: U \times [a,b] \times [a,b] \to R^n$ contínua com $\frac{\partial f}{\partial t}$ contínua em $U \times [a,b] \times [a,b]$.

Seja $g(x,t) = \int_a^t f(x,t,t')dt'$.

Então para $x \in U$ e $t \in (a,b)$,

$$\frac{\partial g}{\partial t}(x,t) = f(x,t,t) + \int_a^t \frac{\partial f}{\partial t}(x,t,t')dt'$$

Prova

Análoga a da proposição B.4.

Observação:

Segue da proposição B.6 que $\frac{\partial g}{\partial t}(x,t)$ é contínua. Além disso, do lema B.1 segue que,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \int_a^t \frac{\partial f}{\partial x}(x,t,t')dt', \text{ se } \frac{\partial f}{\partial x}(x,t,t')$$

é contínua em $U \times [a,b] \times [a,b]$ e que $\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ é contínua.

Portanto, se $f \in C^1$ temos que $g \in C^1$ e por indução concluimos que se $f \in C^\infty$ então $g \in C^\infty$.

<u>Definições</u>:

a) Uma curva (ou caminho) γ é uma aplicação contínua do intervalo fechado $[0,1] \subset R$ em C

b) $\gamma^* = \{z : z = \gamma(t)$ para algum $t \in [0,1]\}$

c) Para pontos z_0 e $z_1 \in C$, o segmento de reta, $[z_0,z_1]$, ligando z_0 a z_1 é o caminho dado por $\gamma(t) = (1-t)z_0+tz_1$, $0 \leq t \leq 1$.

d) Seja γ um caminho em C ligando z_0 a z_1, e f uma função contínua de γ^* em C. Então definimos a integral de f s/γ^* (ou de z_0 até z_1) por:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

<u>Proposição B.7</u>

Seja $G \subset C$ um aberto, e f uma função contínua de $G \times [0,1]$ em C satisfazendo:

i) para cada $t \in [0,1]$, $f(.,t)$ é holomorfa em G.

ii) $\frac{\partial f}{\partial z}(z,t)$ é contínua em $G \times [0,1]$.

Então para $z \in G$,

$g(z) = \int_0^1 f(z,t)dt$ é holomorfa em G, e sua derivada é dada por

$$g'(z) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)dt$$

Prova

Dado $z_0 \varepsilon G$ tomamos $R > 0$ tal que

$\bar{S}(z_0,R) \subset G$, onde $\bar{S}(z_0,R) = \{z: |z-z_0| \leq R\}$. Por hipótese, sabemos que $\frac{\partial f}{\partial z}(z,t)$ é contínua em $G \times [0,1]$ e portanto uniformemente contínua em $\bar{S}(z_0,R) \times [0,1]$.

Então dado $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ tal que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial z}(z,t) - \frac{\partial f}{\partial z}(z',t') \right| < \varepsilon,$$

se $z, z' \varepsilon \bar{S}(z_0,R)$, $t,t' \varepsilon [0,1]$ e $|z-z'| < \delta$, $|t-t'| < \delta$.

Suponhamos que $z \varepsilon \bar{S}(z_0,R)$, e consideremos $g(z)-g(z_0)$.

Temos,

$$g(z)-g(z_0) = \int_0^1 f(z,t)dt - \int_0^1 f(z_0,t)dt = \int_0^1 (f(z,t)-f(z_0,t))dt$$

$$= \int_0^1 \{ \int_{[z_0,z]} \frac{\partial f}{\partial z}(w,t)dw\} \, dt$$

Então,

$$\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0} - \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z}(z_0,t)dt = \{ \int_0^1 \{\int_{[z_0,z]} \frac{\partial f}{\partial z}(w,t)dw\}dt$$

$$- \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z}(z_0,t)dt\}.\frac{1}{z-z_0} =$$

$$= \int_0^1 \{ \frac{1}{z-z_0} \int_{[z_0,z]} \frac{\partial f}{\partial z}(w,t)dw - \frac{\partial f}{\partial z}(z_0,t)\} \, dt =$$

$$= \int_0^1 \{ \frac{1}{z-z_0} \int_{[z_0,z]} (\frac{\partial f}{\partial z}(w,t) - \frac{\partial f}{\partial z}(z_0,t))dw\}dt.$$

Se $|z-z_0| < \delta \Rightarrow |w-z_0| < \delta$ pois, $w \varepsilon [z_0,z]$,

Segue que,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial z}(w,t) - \frac{\partial f}{\partial z}(z_0,t) \right| < \varepsilon.$$

Então se $|z-z_0| < \delta$ temos,

$$\left| \frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0} - \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z}(z_0,t)dt \right| \leq \int_0^1 \frac{1}{|z-z_0|} \varepsilon . |z-z_0| dt = \varepsilon$$

Assim, $g'(z_0) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z}(z_0,t)dt$ e o resultado segue desde que z_0 foi tomado arbitrariamente.

Proposição B.8

Seja $G \subset C$ um aberto e $V \subset C$ um aberto convexo. Seja $f\colon G \times V \to C$ uma função contínua e se z_0 e z_1 pertencem a V seja $[z_0,z_1]$ o caminho ligando z_0 a z_1. Suponhamos que f satisfaça:

i) para cada $w \in [z_0,z_1]$, $f(.,w)$ é holomorfa em G.

ii) $\frac{\partial f}{\partial w'}(w',w)$ é contínua em $G \times V$.

Então para $w' \in G$,

$g(w') = \int_{z_0}^{z_1} f(w',w)dw$ é holomorfa em G e sua derivada é dada por:

$$g'(w') = \int_{z_0}^{z_1} \frac{\partial f}{\partial w'}(w',w)dw$$

Prova

Seja $\gamma(t) = (1-t)z_0 + t\,z_1$, $0 \leq t \leq 1$, e portanto $\gamma'(t) = z_1 - z_0$.

Assim,

$$g(w') = \int_{z_0}^{z_1} f(w',w)dw = \int_0^1 f(w',\gamma(t))\gamma'(t)dt =$$

$$= (z_1 - z_0) \int_0^1 f(w',\gamma(t))dt$$

Estamos nas condições da proposição B.7 e portanto $g(w')$ é holomorfa em G e vale

$$g'(w) = \int_{z_0}^{z_1} \frac{\partial f}{\partial w'} (w',w)dw$$

Observação:

Se f é holomorfa em $G \times V$, $g(w')$ independe do caminho que liga z_0 a z_1.

Proposição B.9

Seja $G \subset C$ um aberto e $f: G \times G \to C$ uma função holomorfa em $G \times G$. Então a função

$$g(z) = \int_{z_0}^{z} f(z,w)dw$$

é holomorfa em G, onde $z_0 \in G$.

Prova

Consideremos a função

$$h(z,w') = \int_{z_0}^{w'} f(z,w)dw$$

Para cada w' fixo, h é uma função holomorfa de z pela proposição B-8 e para cada z fixo, h é uma função holomorfa de

w' pois é uma primitiva.

Pelo Teorema 0.1, $h(z,w')$ é holomorfa em $G \times G$.

Seja $I(z) = (z,z)$. Assim, $g(z) = h(I(z))$ e portanto g é holomorfa como composição de aplicações holomorfas.

Proposição B.10

Sejam $G \subset C$ um aberto, $V \subset C$ um aberto e $f: G\times V\times V \to C$ uma função holomorfa. Então a função,

$$g(z,w) = \int_{z_0}^{w} f(z,w,w')dw'$$

é holomorfa em $G \times V$, onde $z_0 \in V$.

Prova

Fixando w, g é uma função holomorfa de z pela proposição B.8 e fixando z, g é uma função holomorfa de w pela proposição B.9. Pelo Teorema 0.1 temos que g é holomorfa em $G \times V$.

Observação

Vale o mesmo resultado se $G \subset C^n$.

Proposição B.11

Sejam $G \subset C$, $V \subset C$ abertos e $f:G \times V \times V \to C$ uma função holomorfa. Então a função,

$$g(z,w,w') = \int_{w'}^{w} f(z,w',z')dz'$$

é holomorfa em $G \times V \times V$.

Prova

Para w e w' fixos, g é holomorfa de z pela proposição B.8. Para z,w fixos g é holomorfa de w' pela proposição B.9. Para z e w' fixos, g é holomorfa de w pois é uma primitiva.

Assim, pelo Teorema 0.1, g é holomorfa em $G \times V \times V$.

Proposição B.12

Seja $G \subset C^n$ um aberto e $A \subset R^n$ aberto e $f: G \times A \to C$ satisfazendo:

i) para cada $z \in G$, $f(z,.) \in L^1(A)$

ii) para cada $t \in A$, $f(.,t)$ é holomorfa em G.

iii) Existe $h(t) \in L^1(A)$ tal que para $j = 1,\dots,n$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial z^j}(z,t)\right| \leq h(t) \quad \forall\ (z,t) \in G \times A$$

Então a função,

$$g(z) = \int_A f(z,t)dt$$

é holomorfa em G.

Observação:

Por simplicidade faremos a prova no caso $n = 1$

Prova

De i) segue que g está bem definida.

De ii) segue que existe

$$\lim_{r\to 0} \frac{f(z+r,t)-f(z,t)}{r} = \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)$$

Queremos mostrar que existe $g'(z)$ e $g'(z) = \int_A \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)dt$

Seja $z_0 \in G$ arbitrariamente fixo. Basta mostrar que existe

$$g'(z_0) \text{ e } g'(z_0) = \int_A \frac{\partial f}{\partial z}(z_0,t)dt$$

Observemos que,

$$\frac{g(z_0+r)-g(z_0)}{r} = \frac{\int_A f(z_0+r,t) - \int_A f(z_0,t)dt}{r} =$$

$$= \int_A \frac{f(z_0+r,t)-f(z_0,t)}{r}\, dt \quad \text{e}$$

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial z}(z_0,t)dt = \int_A \left(\lim_{r\to 0} \frac{f(z_0+r,t)-f(z_0,t)}{r}\right) dt$$

Tomando uma sequência qualquer $r_n \to 0$, vamos mostrar que,

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \frac{f(z_0+r_n,t)-f(z_0,t)}{r_n}\, dt = \int_A \left(\lim_{n\to\infty} \frac{f(z_0+r_n,t)-f(z_0,t)}{r_n}\right) dt$$

(se existir)

Definindo,

$$C_n(t) = \frac{f(z_0+r_n,t)-f(z_0,t)}{r_n},$$

vamos mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_A C_n(t)dt = \int_A (\lim_{n\to\infty} C_n(t))\, dt$$

(se existir)

De iii) sabemos que existe $h(t) \in L^1(A)$ tal que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial z}(z,t)\right| \leq h(t), \quad \forall\ (z,t) \in G \times A.$$

Portanto, pelo Teorema do valor médio temos,

$$|C_n(t)| = \left|\frac{f(z_0+r_n,t)-f(z_0,t)}{r_n}\right| \leq \sup_{0<\theta_n<1} \left|\frac{\partial f}{\partial z}(z_0+\theta_n r_n,t)\right|$$

$$\leq h(t)$$

Assim, $|C_n(t)| \leq h(t)$, $\forall\, t \in A$, $\forall n$

As funções $C_n(t)$ são mensuráveis pois de i) $f(z,.)$ é mensurável em A para cada $z \in G$. Além disso, para cada $t \in A$,

$$C_n(t) \to \frac{\partial f}{\partial z}(z_0,t)$$

Então pelo Teorema da Convergência dominada de Lebesgue temos:

$$\lim_{n\to\infty} \int_A C_n(t)dt = \int_A (\lim_{n\to\infty} C_n(t))dt$$

Como vale para qualquer sequência $r_n \to 0$, existe $g'(z_0)$ e $g'(z_0) = \int_A \frac{\partial f}{\partial z}(z_0,t)dt$.

Como z_0 foi tomado arbitrário segue que existe $g'(z)$, $\forall\, z \in G$ e $g'(z) = \int_A \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)dt$.

BIBLIOGRAFIA

[1] - ANDERSSON, K.G., "Propagation of analyticity of solutions of partial differential equations with constant coefficients", Arkiv for Matematik, 1971, pgs. 277-302.

[2] - BARROS-NETO, J., "An Introduction to the Theory of Distributions", Marcel Dekker, Inc. New York, 1973.

[3] - ______________ "Uma Introdução às Equações Diferenciais Parciais com Coeficientes Constantes" - Notas de Curso - Instituto de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco - Recife, 1976.

[4] - ELSGOLTZ, L., " Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional", Editorial Mir - Moscu, 1969.

[5] - FRIEDMAN, A., "Partial Differential Equations", Holt, New York, 1969.

[6] - HARTMAN, P., "Ordinary Differential Equations", John Wiley x Sons, Inc., New York - London. Sydney, 1964.

[7] - HÖRMANDER, L., "An Introduction to Complex Analysis in Several Variables", North-Holland Publishing Company-Amsterdan-London, American Elsevier Publishing Company, Inc. - New York, 1973.

[8] - ____________, "Fourier Integral Operators I", Acta Math. 127 (1971) 79-183

[9] - HÖRMANDER, L. "Linear Partial Differential Operators", Spriger-Verlag Berlin. Heidelberg. New York, 1969.

[10] - JOHN, F., "Partial Differential Equations", Springer-Verlag New York. Heidelberg Berlin, 1971.

[11] - LIMA, E.L., "Análise no Espaço R^n", Editora Universidade de Brasília, 1970.

[12] - M.NAGUMO, "Uber das Anfangswert problem partieller Differentialgleichungen", Japan Journal of Math., 18 (1941-1943), 41-47

[13] - NIRENBERG, L., e TREVES, F., "On Local Solvability of Linear Partial Differential Equations, Part I: Necessary Conditions, Comm. Pure and Applied Math., vol. 23, 1970, 1-38.

[14] - TREVES, F., "Analytic-Hypoelliptic Partial Differential Equations of Principal Type", Comm. on Pure and Appl.Math., vol. 24, 537-570 (1971)

[15] - __________ "Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels", Academic Press New York. London, 1967.

[16] - __________, "Basic Linear Partial Differential Equations", Academic Press New York. San Francisco. London, 1975.

[17] - __________, "Aproximate Solutions to Cauchy Problems", Journal of Differential Equations, vol. 11, 1972.

[18] - __________, "A New Method of Proof of the Subelliptic Estimates", Comm. Pure and Appl. Math., vol 24, 71-115(1971).