UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

CAMPUS DE SÃO CARLOS

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS

PROPRIEDADES ASSINTÓTICAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE 2.a ORDEM PERTURBADAS DE EQUAÇÕES NÃO AUTONOMAS

Dirce Kiyomi Hayashida

ORIENTADOR:

Prof. Dr. Hildebrando Munhoz Rodrigues

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de "Mestre em Matemática".

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

SÃO CARLOS

1976

PROPRIEDADES ASSINTÓTICAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE 2ª ORDEM PERTURBADAS DE EQUAÇÕES NÃO AUTÔNOMAS

DIRCE KIYOMI HAYASHIDA

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

ORIENTADOR: PROF. Dr. HILDEBRANDO MUNHOZ RODRIGUES

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Ao Mário e

aos meus pais.

ASYMPTOTIC PROPERTIES OF PERTURBED NON AUTONOMOUS SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

Dirce Kiyomi Hayashida

Adviser: Prof.Dr. Hildebrando Munhoz Rodrigues

In this work we consider three parts.

In the first one we develop certain basic facts on the Invariance Theory for non Autonomous Systems.

In the second part, by using Liapunov Functions and the Invariance Theory, we give sufficients conditions to guarantee that every solution of the second order scalar equation

$$\text{(I)} \qquad \ddot{x} + f(t,x,\dot{x}) + g(x).p(\dot{x}) + h(t,x,\dot{x}) + k(t,x,\dot{x}) = 0$$

considered as a perturbed equation of

$$\text{(II)} \qquad \ddot{x} + f(t,x,\dot{x}) + g(x).p(\dot{x}) = 0,$$

tends to zero, with its derivative, as $t \to \infty$. We also give sufficients conditions to imply that the solution $(x,\dot{x}) = (0,0)$ of (I) is globally asymptotically stable.

In the third part we extend to Differential Equations like (I),the results obtained in the second part.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Hildebrando Munhoz Rodrigues pela compreensão, pela dedicação e segurança com que orientou este trabalho, os mais sinceros agradecimentos.

Ao Prof. Dr. Plácido Zoega Táboas pelas sugestões valiosas quando da leitura deste trabalho e pelo apoio amigo, minha profunda gratidão.

Aos professores e colegas do Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos e do Departamento de Matemática da Universidade Federal de São Carlos os meus agradecimentos pelo apoio e incentivo nesta primeira etapa.

Em memória do Prof. Dr. Achille Bassi, meu primeiro orientador.

Quero agradecer ainda à CAPES cujo auxílio através de bolsa de estudo possibilitou a realização dos cursos de pós-graduação.

Ao CNPq, FAPESP e FINEP mediante auxílios prestados ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Em [10], Ruas, J.G. trabalhando com a equação

$$\ddot{x} + f(x,\dot{x}) + g(x).p(\dot{x}) + h(t,x,\dot{x}) + k(t,x,\dot{x}) = 0$$

obteve condições suficientes para que toda solução $x(t)$ juntamente com sua derivada $\dot{x}(t)$ tenda a zero quando $t \to \infty$.

Em [9], Rodrigues, H.M. considerando a equação

$$\ddot{x} + f(t,x,\dot{x}) + g(x) + h(t,x,\dot{x}) + k(t,x,\dot{x}) = 0$$

dá condições para que toda solução $x(t)$ bem como a sua derivada $\dot{x}(t)$ tenda a zero quando $t \to \infty$.

O objetivo principal deste trabalho é obter propriedades assintóticas do tipo considerado acima para a equação

$$\text{(I)} \qquad \ddot{x} + f(t,x,\dot{x}) + g(x).p(\dot{x}) + h(t,x,\dot{x}) + k(t,x,\dot{x}) = 0,$$

considerada como perturbada da equação

$$\ddot{x} + f(t,x,\dot{x}) + g(x).p(\dot{x}) = 0$$

Para tanto utilizaremos uma combinação das técnicas utilizadas por Ruas e Rodrigues: funções de Lyapunoff e técnicas de invariança.

Este trabalho está intimamente ligado aos de [1] Avellar, C.E., [7] Pavlu, L.C. e [8] Pretto, P., que como os citados acima foram inspirados em idéais contidas em [5-a] e [5-b] Onuchic, N.

O capítulo I, além de pré-requisito para os capítulos posteriores tem valor em si, pois apresenta o desenvolvimento da teoria básica de

Invariança para Sistemas não Autônomos e para o qual foram utilizados os trabalhos de Miller, (3) e (4), (11) Sell e (9) Rodrigues.

No capítulo II, além dos objetivos mencionados acima obtivemos condições de estabilidade uniforme para a solução $x(t) \equiv 0$ da equação (I).

No capítulo III estendemos para sistemas de equações diferenciais do tipo (I), os resultados obtidos no capítulo II.

CAPÍTULO I

PRELIMINARES

Relacionaremos alguns fatos básicos sobre a Teoria de Invariança para Sistemas não Autônomos de Equações Diferenciais Ordinárias seguindo a ordem de idéias de Rodrigues, H.M. em (6) e (9).

Estes resultados serão fundamentais para o objetivo a que nos propusemos.

Seja $E = C(R\times W, R^n)$ o conjunto de todas funções contínuas de $R\times W \to R^n$, onde $W \subset R^n$, W aberto e $W \neq \phi$.

Vamos considerar em E a topologia da convergência uniforme nos subconjuntos compactos de $R\times W$.

Um sistema fundamental de vizinhanças para um elemento $P_0 \varepsilon E$ é dado por:

$$V(P_0,K,\varepsilon) = \{P\varepsilon E \mid \max_{(t,x)\varepsilon K} ||P(t,x)-P_0(t,x)|| < \varepsilon\}$$

com $\varepsilon > 0$; $K = [-\ell,\ell] \times M$, $\ell > 0$, $M \subset W$ compacto.

Seja $P \varepsilon E$ e $\tau \varepsilon R$.

Definimos $P_\tau \varepsilon E$ da seguinte maneira:

$$P_\tau : R\times W \to R^n$$

$$(t,x) \to P_\tau(t,x) = P(t+\tau,x)$$

Consideremos o conjunto $P = \{P_\tau \varepsilon E \mid \tau\varepsilon R\} \subset E$

Condições sobre $P \in E$:

a) Para cada $x \in W$ fixo, $P(t,x)$ é limitada em $t \in R$.

b) P é uniformemente contínua em conjuntos da forma $R\times M$ onde $M \subset W$, M compacto.

(i) Para todo $(t_0,x_0) \in R\times W$, o conjunto $\{P_\tau(t_0,x_0) | \tau \in R\}$ é relativamente compacto em R^n, isto é, é limitado.

(ii) $\mathcal{P}$ é equicontínuo em $R\times W$.

Lema I-1: As condições (a) e (b) são equivalentes às condições (i) e (ii) respectivamente.

Prova:

(1) (i) é equivalente a (a)

Para todo $(t_0,x_0) \in R\times W$ temos:

$$\{P_\tau(t_0,x_0) | \tau \in R\} = \{P(t_0+\tau,x_0) | \tau \in R\} = \{P(t,x_0) | t \in R\}$$

Logo $\{P_\tau(t_0,x_0) | \tau \in R\}$ é relativamente compacto no R^n

$\iff \{P(t,x_0) | t \in R\}$ é limitado $\iff$ existe $M = M(x_0)$ tal que $\| P(t,x_0) \| \leq M$ para qualquer $t \in R$.

(2) (ii) é equivalente a (b)

(ii) $\Rightarrow$ (b)

Supomos que (ii) é satisfeita. Então dado $x_0 \in W$, o conjunto $\mathcal{P}$ é eqüicontínuo em $(0,x_0)$.

Seja $\varepsilon > 0$. Existe $\delta = \delta(\varepsilon,x_0) > 0$ tal que para qualquer $(t,x) \in R\times W$ satisfazendo:

$$|t| < \delta \text{ e } \|x-x_0\| < \delta, \text{ temos } \|P_\tau(t,x)-P_\tau(0,x_0)\| < \varepsilon, \ \forall \tau \in R.$$

Logo: (I) $|t| < \delta$ e $\|x-x_0\| < \delta$ implicam $\|P(t+\tau,x)-P(\tau,x_0)\| < \varepsilon$ para qualquer $\tau \in R$.

Tomemos $t_1, t_2 \in R$ tais que $|t_1-t_2| < \delta$ e $x \in W$ tal que $\|x-x_0\| < \delta$.

Seja $\tau = t_1$ e $\bar{t} = t_2 - \tau = t_2 - t_1$. Então temos:
$|\bar{t}| = |t_2-t_1| < \delta$; $\|x-x_0\| < \delta$ e de (I) concluimos que $\|P(\bar{t}+\tau,x)-P(\tau,x_0)\| < \varepsilon$, ou seja,

(II) $\|P(t_2,x)-P(t_1,x_0)\| < \varepsilon$ para $|t_2-t_1| < \delta$ e $\|x-x_0\| < \delta$

Seja $M \subset W$, M compacto.

Para qualquer $y \in M$, por (II), existe $\delta = \delta(\varepsilon,y) > 0$ tal que: $|t_1-t_2| < \delta$ e $\|y-x\| < \delta$ implicam $\|P(t_2,y)-P(t_1,x)\| < \varepsilon$.

Para cada $y \in M$, seja $B(y, \frac{\delta(y)}{2})$ a bola em W, de raio $\frac{\delta(y)}{2}$ e centro em y.

Temos então que a coleção de bolas $\{B(y,\frac{\delta(y)}{2})\}_{y\in M}$ é um recobrimento aberto de M. Como M é compacto existem $x_1, x_2, \ldots, x_m \in M$ tal que $\{B(x_1,\frac{\delta(x_1)}{2});\ldots; B(x_m,\frac{\delta(x_m)}{2})\}$ é ainda recobrimento de M.

Seja $\delta_0 = \frac{1}{2}\min\{\delta(x_1),\ldots,\delta(x_m)\}$

Consideremos $t_1, t_2 \in R$ e $x, y \in M$ tais que $|t_1-t_2| < \delta_0$ e $\|x-y\| < \delta_0$.

Existe $j \in \{1,2,\ldots,m\}$ tal que $y \in B(x_j,\frac{\delta(x_j)}{2})$.

Seja $\delta_j = \delta(x_j)$. Temos então que $\|y-x_j\| < \frac{\delta_j}{2}$ e como $|t_1-t_2| < \delta_0 \leq \frac{\delta_j}{2}$ concluimos que

(III) $\|P(t_1,y) - P(t_2,x_j)\| < \varepsilon$

Além disso: $\|x-x_j\| \leq \|x-y\| + \|y-x_j\| < \delta_0 + \frac{\delta_j}{2} < \frac{\delta_j}{2} + \frac{\delta_j}{2} = \delta_j$

Logo,

(IV) $\|P(t_2,x)-P(t_2,x_j)\| < \varepsilon$

Concluimos de (III) e (IV) que:

$\|P(t_2,x)-P(t_1,y)\| \leq \|P(t_2,x)-P(t_2,x_j)\| + \|P(t_2,x_j)-P(t_1,y)\| < 2\varepsilon$

Assim, (b) está satisfeita

(b) $\Rightarrow$ (ii)

Suponhamos (b) satisfeita. Então dados $\varepsilon > 0$ e $M \subset W$, M compacto, existe $\delta = \delta(\varepsilon,M) > 0$ tal que:

(V) Se $t_1, t_2 \in R$, $|t_1-t_2| < \delta$ e $x_1, x_2 \in M$,

$\|x_1-x_2\| < \delta$ então $\|P(t_1,x_1)-P(t_2,x_2)\| < \varepsilon$.

Queremos provar que o conjunto $\mathcal{P} = \{P_\tau \varepsilon E \mid \tau \varepsilon R\}$ é equicontínuo em qualquer $(t_0,x_0) \in R \times W$, isto é, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(t_0,x_0,\varepsilon)$ tal que para qualquer $(t,x) \in R \times W$ satifazendo

$|t-t_0| < \delta$

$\|x-x_0\| < \delta$ temos $\|P(t+\tau,x)-P(t_0+\tau,x_0)\| < \varepsilon$

para qualquer $\tau \in R$.

Suponhamos que exista $(t_0,x_0) \in R \times W$ tal que $\mathcal{P}$ não seja equicontínuo em (t_0,x_0).

Em outras palavras isto quer dizer que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para qualquer $\delta > 0$ existe $t = t(\delta)$, $x = x(\delta)$ e $\tau = \tau(\delta)$ tal que:

$$\begin{matrix} |t-t_0| < \delta \\ \|x-x_0\| < \delta \end{matrix} \quad \text{e} \quad \|P(t+\tau,x)-P(t_0+\tau,x_0)\| \geq \varepsilon_0$$

Tomando $\delta_n = \frac{1}{n}$ temos que existem t_n, x_n e τ_n tal que

(VI) $\begin{array}{l} |t_n - t_0| < \frac{1}{n} \\ \|x_n - x_0\| < \frac{1}{n} \end{array}$ e $\|P(t_n+\tau_n,x_n)-P(t_0+\tau_n,x_0)\| \geq \varepsilon_0$

para qualquer n $(n=1,2,3,\ldots)$

Vemos que $x_n \to x_0$.

Consideramos o compacto $K = \{x_n | n=1,2,3,\ldots\} \cup \{x_0\}$

Usando (V) concluímos que existe $\bar{\delta} = \bar{\delta}(\varepsilon_0,K) > 0$ tal que

(VII) se $t_1, t_2 \in R$, $|t_1-t_2| < \bar{\delta}$ e $x_1, x_2 \in K$, $\|x_1-x_2\| < \bar{\delta}$ temos que $\|P(t_1,x_1)-P(t_2,x_2)\| < \varepsilon_0$.

Tomando $n_0 \in N$ tal que $\frac{1}{n_0} < \bar{\delta}$, de acordo com (VI) temos:

$\begin{array}{l} |t_{n_0} - t_0| < \frac{1}{n_0} \\ \|x_{n_0} - x_0\| < \frac{1}{n_0} \end{array}$ e $\|P(t_{n_0}+\tau_{n_0},x_{n_0})-P(t_0+\tau_{n_0},x_0)\| \geq \varepsilon_0$

Além disso temos: $|(t_{n_0}+\tau_{n_0})-(t_0+\tau_{n_0})| = |t_{n_0}-t_0| < \frac{1}{n_0} < \bar{\delta}$ e $\|x_{n_0}-x_0\| < \frac{1}{n_0} < \bar{\delta}$. Logo, utilizando (VII) concluimos que

$$\|P(t_{n_0}+\tau_{n_0},x_{n_0})-P(t_0+\tau_{n_0},x_0)\| < \varepsilon_0,$$

o que contraria (VI).

Logo (b) implica (ii)

Lema I-2: (Teorema de Ascoli)

Seja Z um espaço métrico, Y um espaço de Hausdorff localmente compacto e consideremos em $C(Y,Z)$ a topologia da convergência uniforme nas partes compactas de Y.

Então $F \subset C(Y,Z)$ é relativamente compacto em $C(Y,Z)$ se, e somente se:

(1) F é equicontínuo em Y.

(2) $F(x_0) = \{f(x_0) \in Z | f \in F\}$ é relativamente compacto em Z.

Corolário I-1: Seja $P \in E$

P tem as propriedades (a) e (b) se, e somente se, o conjunto $\mathcal{P}$ é relativamente compacto em E.

Corolário I-2: Seja $P \in E$ com as hipóteses (a) e (b)

Então dada uma sequência (τ_m), $\tau_m \in R$, existe uma subsequência (τ_{m_j}) e uma função $P^* \in E$ tal que $P_{\tau_{m_j}} \to P^*$ em E, quando $j \to \infty$, isto é, $P(t+\tau_{m_j},x) \to P^*(t,x)$ uniformemente em $[-\ell,\ell] \times M$ para todo $\ell > 0$, $\ell \in R$ e para todo compacto $M \subset W$. Além disso P^* satisfaz as condições (a) e (b).

Prova:

Suponhamos $P \in E$ satisfazendo as hipóteses (a) e (b).

Então, pelo Corolário I-1 podemos concluir que $\mathcal{P}$ é relativamente compacto em E.

Logo, toda sequência (P_{τ_m}), $P_{\tau_m} \in \mathcal{P}$ admite uma subsequência convergente em E.

Assim, dada uma sequência (τ_m), $\tau_m \in R$, existe uma subsequência (τ_{m_j}) e uma função $P^* \in E$ tal que $P_{\tau_{m_j}} \to P^*$ em E, quando $j \to \infty$, e portanto $P_{\tau_{m_j}}(t,x) = P(t+\tau_{m_j},x) \to P^*(t,x)$ uniformemente para $(t,x) \in [-\ell,\ell] \times M$, onde $\ell > 0$, $M \subset W$ compacto.

Mostremos agora que P^* satisfaz as condições (a) e (b).

Por simplicidade denotaremos com P_{τ_m} a subsequência $P_{\tau_{m_j}}$ considerada acima.

(1) P^* satisfaz a propriedade (a)

De fato. Como P satisfaz a propriedade (a) existe $M = M(x) \geq 0$ tal que $\|P(t,x)\| \leq M(x)$ para qualquer $t \in R$.

Seja $t_0 \in R$; então temos $P(t_0+\tau_m,x) \to P^*(t_0,x)$ quando $m\to\infty$. Mas, $\|P(t_0+\tau_m,x)\| \leq M(x)$. Logo, $\|P^*(t_0,x)\| \leq M(x)$.

(2) P^* satisfaz (b)

Com efeito. Como P satisfaz a propriedade (b), P é uniformemente contínua em todo conjunto da forma $R{\times}M$, $M \subset W$ compacto.

Portanto, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon,M) > 0$ tal que para quaisquer $t_1,t_2 \in R$; $x_1,x_2 \in M$ com $|t_1-t_2| < \delta$ e $\|x_1-x_2\| < \delta$ temos $\|P(t_1,x_1)-P(t_2,x_2)\| < \varepsilon$.

Como $P_{\tau_m} \to P^*$, dados t_1, t_2, x_1,x_2 nas condições acima, existe $n_0 = n_0(\varepsilon,M,t_1,t_2)$ satisfazendo

$$\|P(t_1+\tau_{n_0},x_1)-P^*(t_1,x_1)\| < \varepsilon$$

$$\|P(t_2+\tau_{n_0},x_2)-P^*(t_2,x_2)\| < \varepsilon$$

Logo, $\|P^*(t_1,x_1)-P^*(t_2,x_2)\| \leq \|P^*(t_1,x_1)-P(t_1+\tau_{n_0},x_1)\| +$
$+ \|P(t_1+\tau_{n_0},x_1)-P(t_2+\tau_{n_0},x_2)\| + \|P(t_2+\tau_{n_0},x_2)-P^*(t_2,x_2)\| < 3\varepsilon$.

Logo, P^* satisfaz a propriedade (b).

Sejam $P \in E = C(R{\times}W,R^n)$ e $\mathcal{P} = \{P_\tau \in E \mid \tau \in R\}$

Seja $\bar{\mathcal{P}}$ o fecho de $\mathcal{P}$ em E.

Definimos: $\hat{\Omega}(P) = \{P^* \in E \mid \exists$ sequência $t_m \to \infty$, com $P_{t_m} \to P^*$ em E, quando $m \to \infty\}$

Observações:

(1) Se P satisfaz (a) e (b) então a aplicação $j: R \to E$ definida

por:

$$\tau \to j(\tau) = P_\tau \text{ é contínua}$$

Prova:

Seja $P \varepsilon E$ fixada e consideremos $\tau_1 \varepsilon R$.

Tomemos uma vizinhança de P_{τ_1} da forma:

$V = V(P_{\tau_1},K,\varepsilon) = \{Q\varepsilon E | \max\limits_{(t,x)\varepsilon K} \|P_{\tau_1}(t,x)-Q(t,x)\| < \varepsilon\}$ com $\varepsilon > 0$,

$K = [-\ell,\ell] \times M$, $\ell > 0$, $M \subset W$ compacto.

Vamos provar que $\exists\ \delta = \delta(K,\varepsilon) > 0$, tal que $|\tau_1-\tau_2| < \delta \Rightarrow P_{\tau_2}\varepsilon V$.

Como $P(t,x)$ é uniformemente contínua em conjuntos da forma $R \times M$, $M \subset W$ compacto, existe $\delta = \delta(\varepsilon,M) > 0$ tal que para todo

$$\left.\begin{matrix} t_1,\ t_2 \ \varepsilon\ R, & |t_1-t_2| < \delta \\ x_1,\ x_2\ \varepsilon\ M, & \|x_1-x_2\| < \delta \end{matrix}\right. \quad \text{temos } \|P(t_1,x_1)-P(t_2,x_2)\| < \varepsilon/2$$

Fazendo $t_1 = \tau_1 + t$; $t_2 = \tau_2 + t$ e $x_1 = x_2 = x$ temos:

$|\tau_1-\tau_2| \leq \delta \Rightarrow |t_1-t_2| < \delta$ e portanto

$\|P(t+\tau_1,x)-P(t+\tau_2,x)\| = \|P_{\tau_1}(t,x)-P_{\tau_2}(t,x)\| < \frac{\varepsilon}{2}$, para todo $t \varepsilon R$ e $x \varepsilon M$.

Como $K \subset R \times M$, se $|\tau_1-\tau_2| < \delta$,

$$\max_{(t,x)\varepsilon K} \|P_{\tau_1}(t,x)-P_{\tau_2}(t,x)\| \leq \sup_{(t,x)\varepsilon R\times M} \|P_{\tau_1}(t,x)-P_{\tau_2}(t,x)\| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon,$$

ou seja, $P_{\tau_2} \varepsilon V$.

(2) Se $P \varepsilon E$ satisfaz as propriedades (a) e (b), então $\hat{\Omega}(P) \neq \phi$.

De fato. Basta tomar no Cor.I-2 (τ_m), $\tau_m \varepsilon R$ de modo que $\tau_m \to \infty$, quando $m \to \infty$.

(3) $\hat{\Omega}(P) \subset \bar{P}$

(4) Se $P(t,x) = P(x)$, então $\hat{\Omega}(P) = \{P\}$

(5) Se $P(t,x) = P(t+w,x)$, $\forall\ t \in R$ e $\forall\ x \in W$, então

$\mathcal{P} = \{P_\tau \in E \mid \tau \in [0,w]\}$ e $\bar{\mathcal{P}} = \hat{\Omega}(P) = \mathcal{P}$

Prova:

Mostraremos inicialmente que $\bar{\mathcal{P}} = \mathcal{P}$

Temos que: i) $\mathcal{P} \subset \bar{\mathcal{P}}$

ii) Seja $Q \in \bar{\mathcal{P}}$. Então existe (P_{t_m}) tal que:

(I) $P_{t_m} \to Q$ quando $m \to \infty$.

Como a aplicação $j: R \to E$ é periódica, de período w e $t_m \in R$, então $t_m = i_m.w + \tau_m$, $\tau_m \in [0,w]$, i_m inteiro.

Assim: $P_{t_m} = P_{i_m.w+\tau_m} = P_{\tau_m}$ com $\tau_m \in [0,w]$, e portanto existe (τ_{m_j}), $\tau_{m_j} \to \tau \in [0,w]$, quando $j \to \infty$.

Da continuidade de $j: R \to E$ segue que $P_{t_{m_j}} = P_{\tau_{m_j}} \to P_\tau$ quando $j \to \infty$.

Mas, de (I) segue que $P_{t_m} = P_{\tau_{m_j}} \to Q$ e consequentemente $P_\tau = Q$, ou seja, $Q \in \mathcal{P}$.

Para provar que $\hat{\Omega}(P) = \bar{\mathcal{P}}$, basta mostrar que $\bar{\mathcal{P}} \subset \hat{\Omega}(P)$, pois da observação (3) temos que $\hat{\Omega}(P) \subset \bar{\mathcal{P}}$.

Seja $Q \in \bar{\mathcal{P}}$. Então existe $Q_n \in \mathcal{P}$ tal que $Q_n \to Q$, quando $n \to \infty$.

Como $\mathcal{P} = \bar{\mathcal{P}} = \{P_\tau \in E \mid \tau \in [0,w]\}$, temos: $Q = P_\tau$, $Q_n = P_{\tau_n}$, com τ, $\tau_n \in [0,w]$ $(n = 1,2,\ldots)$.

Tomando $\sigma_n = \tau_n + n.w$ temos $\sigma_n \to \infty$, quando $n \to \infty$, e pela periodicidade de j, $P_{\tau_n} = P_{\sigma_n}$.

Assim, $P_{\sigma_n} \to P_\tau = Q$, isto é, $Q \in \hat{\Omega}(P)$.

(6) Se $P: R\times W \to R^n$ é contínua e periódica em t, então P satisfaz (a) e (b)

De fato.

Para cada $x_0 \in W$ fixo, $P(t,x_0)$ é contínua e periódica em R, e portanto limitada.

Assim, P satisfaz (a).

Vamos provar que $P(t,x)$ satisfaz (b).

Como por hipótese $P(t,x)$ é contínua em $R\times W$, então $P(t,x)$ é uniformemente contínua em conjuntos da forma $[0,2w]\times M$, onde $M \subset W$ é compacto.

Logo, dado $\varepsilon > 0$ existe $0 < \delta = \delta(\varepsilon,M) < w$ tal que para todo $t_1,t_2 \in [0,2w]$ e $x_1, x_2 \in M$ com:

$$\begin{array}{l} |t_1-t_2| < \delta \\ \|x_1-x_2\| < \delta \end{array} \quad \text{temos } \|P(t_1,x_1)-P(t_2,x_2)\| < \varepsilon$$

Se $\tau_1 \in R$, $\tau_1 = n.w + t_1$, $t_1 \in [0,w]$.

Consideremos $\tau_2 \in R$ tal que $|\tau_1-\tau_2| < \delta$. Então τ_2 é da forma: $\tau_2 = \tau_1 + t$ com $t \in [0,w]$; $\tau_2 = n.w + t_1 + t$.

Façamos $t_2 = t_1 + t$; assim $t_1,t_2 \in [0,2w]$ e se $|\tau_1-\tau_2| < \delta$ então $|t_2-t_1| < \delta$.

Logo, para todo $\tau_1, \tau_2 \in R$ e $x_1, x_2 \in M$ com

$$\begin{array}{l} |\tau_1-\tau_2| < \delta \\ \|x_1-x_2\| < \delta \end{array} \quad \text{temos } \|P(\tau_1,x_1)-P(\tau_2,x_2)\| < \varepsilon$$

(7) Se $P \in E$ satisfaz (a) e (b) então $P(t,x)$ é limitada em conjuntos da forma $R\times K$ onde $K \subset W$ é compacto.

Prova:

De (b) segue que dado um conjunto compacto $K \subset W$ existe $\delta=\delta(K)>0$ tal que $\|x-y\| < \delta$, $x, y \in K$ implica $\|P(t,x)-P(t,y)\| < 1$ para todo $t \in R$. Logo, se $x \in B(y,\delta)$ então $\|P(t,x)\| < 1 + \|P(t,y)\|$, para todo $t \in R$.

A coleção de bolas $\{B(y,\delta) | y \in K\}$ é um recobrimento de K. Como K é compacto existem $y_1, \dots, y_m \in K$ de modo que $\{B(y_i,\delta), i=1,2,\dots,m\}$ é ainda um recobrimento de K.

Da hipótese (a) segue que $\|P(t,y_i)\| \leq k_i$ para todo $t \in R$ e $i = 1,2, \dots, m$, onde $k_i < \infty$.

Seja $k = \max \{k_i : i = 1,2,\dots,m\}$.

Assim para cada $x \in K$ existe um índice $i_0 \in \{1,2,\dots,m\}$ tal que $x \in B(y_{i_0},\delta)$ e consequentemente $\|P(t,x)\| < 1 + \|P(t,y_{i_0})\| \leq 1 + k$, para todo $t \in R$.

Consideremos os sistemas:

$$\text{I-1)} \quad \dot{y} = P(t,y)$$

$$\text{I-2)} \quad \dot{x} = P(t,x) + S(t,x) + Q(t,x)$$

Hipóteses: H) P satisfaz (a) e (b)

H_0) $P(t,x)$ é limitada em conjuntos da forma $R \times K$, onde K é um compacto qualquer de W.

Da obs. (7) segue que $(H) \Rightarrow (H_0)$.

Hipóteses de Pequenês sobre as Perturbações

Seja $I = [0,\infty)$

H_1) $Q: I \times W \to R^n$ tal que para toda função contínua $x: I \to W$, $x(t) \in K$ para todo $t \geq 0$, $K \subset W$ compacto, temos:

$$\int_s^{s+t} Q(\tau,x(\tau))d\tau \to 0 \quad \text{uniformemente em} \quad t \in [0,1], \text{quando} \quad s \to \infty.$$

H_2) Seja $A \subset W$ fixo tal que a cada compacto $K \subset W$ e a cada $\varepsilon > 0$ corresponda $\delta = \delta(\varepsilon,K) > 0$ e $T_0 = T_0(\varepsilon,K) > 0$ tal que:

$$\begin{matrix} t \geq T_0 \quad \text{e} \\ x \in K,\ d(x,A) < \delta \end{matrix} \quad \text{implica } \|S(t,x)\| < \varepsilon$$

Observemos que (H_1) é verificada para $t \in [0,1]$ se, e somente se, (H_1) está verificada para $t \in [-p,p]$, $\forall\, p,\ p > 0$.

De fato.

Suponhamos (H_1) satisfeita para $t \in [0,1]$. Vamos mostrar primeiro que (H_1) está verificada para $t \in [0,p]$, $p > 0$.

Seja $m \geq p$, m inteiro. Se $t \in [0,p]$ então $\frac{t}{m} \in [0,1]$.

Temos que:

$$\int_s^{s+t} Q(\tau,x(\tau))d\tau = \int_s^{s+\frac{t}{m}} Q(\tau,x(\tau))d\tau + \int_{s+\frac{t}{m}}^{(s+\frac{t}{m})+\frac{t}{m}} Q(\tau,x(\tau))d\tau + \dots +$$

$$+ \int_{s+(m-1).\frac{t}{m}}^{(s+(m-1).\frac{t}{m})+\frac{t}{m}} Q(\tau,x(\tau))d\tau$$

Cada parcela do 2º membro é tal que

$$\int_{s+\frac{k.t}{m}}^{s+\frac{kt}{m}+\frac{t}{m}} Q(\tau,x(\tau))d\tau \to 0 \text{ , quando } s \to \infty, \text{ uniformemente em } t \in [0,p]$$

pois, $s \to \infty \Rightarrow s + \frac{kt}{m} \to \infty$; $t \in [0,p] \Rightarrow \frac{t}{m} \in [0,1]$.

Logo $\int_s^{s+t} Q(\tau,x(\tau))d\tau \to 0$, quando $s \to \infty$, uniformemente em $t \in [0,p]$, $\forall\, p,\ p > 0$.

Resta mostrar que $\int_s^{s+t} Q(\tau,x(\tau))d\tau \to 0$, quando $s \to \infty$, uniformemente em $t \in [-p,0]$, $\forall$ p, $p > 0$.

Se $t \in [-p,0]$, então $-t \in [0,p]$ e

$\int_s^{s+t} Q(\tau,x(\tau))d\tau = -\int_{s+t}^{s} Q(\tau,x(\tau))d\tau = -\int_{s+t}^{(s+t)-t} Q(\tau,x(\tau))d\tau$, que recai no caso acima.

Reciprocamente, se (H_1) é verificada para $t \in [-p,p]$, $\forall$ p, $p>0$, basta tomar $p = 1$; assim $[0,1] \subset [-1,1]$ e teremos (H_1) satisfeita para $t \in [0,1]$.

Lema I-3

Seja $x(t)$ contínua e tal que $x(t) \in K$ para todo $t \geq a$, $a > -\infty$, onde $K \subset W$; K compacto.

Então, o conjunto w-limite, Ω, de $x(t)$ é compacto, conexo e $x(t) \to \Omega$ quando $t \to \infty$.

Prova:

a) Ω é compacto

De fato. Seja (p_n) tal que $p_n \in \Omega$ $(n = 1,2,\ldots)$; $p_n \to p$ quando $n \to \infty$.

Consideremos (ε_j) sucessão decrescente tal que $\varepsilon_j \to 0$, quando $j \to \infty$.

Para cada j escolhemos n_j tal que $\|p_{n_j}-p\| < \frac{\varepsilon_j}{2}$.

Como $p_{n_j} \in \Omega$ existe $(t_k^{n_j})$, $t_k^{n_j} \to \infty$, quando $k \to \infty$, tal que $x(t_k^{n_j}) \to p_{n_j}$ quando $k \to \infty$.

Tomemos $t_{k_j}^{n_j} > j$ tal que $\|x(t_{k_j}^{n_j})-p_{n_j}\| < \frac{\varepsilon_j}{2}$

Assim: $\|x(t_{k_j}^{n_j})-p\| \leq \|x(t_{k_j}^{n_j})-p_{n_j}\| + \|p_{n_j}-p\| < \frac{\varepsilon_j}{2} + \frac{\varepsilon_j}{2} = \varepsilon_j$

Como $\varepsilon_j \to 0$ quando $j \to \infty$ concluimos que $x(t_{k_j}^{n_j}) \to p$, quando $j \to \infty$.

Isto é equivalente a dizer que $p \in \Omega$.

Portanto Ω é fechado e como $\Omega \subset K$, K compacto, segue que Ω é compacto.

b) Vamos mostrar que Ω é conexo

Suponhamos Ω não conexo.

Então existem dois compactos A e B, não vazios e disjuntos, tais que $\Omega = A \cup B$.

Como A e B são disjuntos, existe $\alpha > 0$ tal que $dist(A,B) = \alpha$.

Desde que os pontos de A e B são pontos w-limite de $x(t)$, existem sequências (t_m) e (t_m'), $t_m, t_m' \to \infty$, quando $m \to \infty$ tal que $dist(x(t_m),A)) < \alpha/2$ e $dist(x(t_m'),A) > \alpha/2$.

Podemos escolher (t_m) e (t_m') tal que $t_m < t_m'$ para todo m.

Como a distancia de um ponto P a um conjunto $A, dist(P,A)$, é função contínua do ponto, segue que existe uma sequência (τ_m), $t_m < \tau_m < t_m'$, $\tau_m \to \infty$ quando $m \to \infty$, tal que $dist(x(\tau_m),A) = \frac{\alpha}{2}$.

Como $x(\tau_m) \in K$ para todo m, K compacto, existe uma subsequência de $(x(\tau_m))$ convergente para um ponto Q pertencente a Ω, e $dist(Q,A) = \frac{\alpha}{2}$. Mas, isto implica que Q não pertence nem a A, nem a B, pois $dist(Q,B) \geq dist(A,B) - dist(Q,A) = \frac{\alpha}{2}$, o que é uma contradição.

Portanto, Ω é conexo.

c) Vamos provar agora que $x(t) \to \Omega$, quando $t \to \infty$.

Suponhamos que $x(t) \not\to \Omega$, quando $t \to \infty$, então existe constante $\rho > 0$ e (t_m), $t_m \to \infty$ quando $m \to \infty$ com $\text{dist}(x(t_m),\Omega) \geq \rho$ para todo m.

Como $x(t_m) \in K$, para todo m, podemos extrair uma subsequência de (t_m) (que também chamaremos de (t_m)) tal que $x(t_m) \to p$, quando $m \to \infty$. Logo $p \in \Omega$.

Como $\text{dist}(x(t_m),\Omega) \geq \rho \Rightarrow \lim\limits_{m\to\infty} \text{dist}(x(t_m),\Omega) \geq \rho \Rightarrow$
$\Rightarrow \text{dist}(\lim\limits_{m\to\infty} x(t_m),\Omega) \geq \rho \Rightarrow d(p,\Omega) \geq \rho$ (absurdo).

Teorema I-1:

Suponhamos que sejam satisfeitas as hipóteses (H), (H_1) e (H_2).

Seja $x(t)$ uma solução de (I-2) tal que $x(t) \in K$ para todo $t \in [a,\infty)$, $a \geq 0$ onde $K \subset W$; K compacto e $x(t) \to A$, quando $t \to \infty$.

Então, para cada $z \in \Omega(x(.))$ existem:

uma sequência (t_k), $t_k \to \infty$, quando $k \to \infty$; uma função $y(t)$ e $P^* \in \hat{\Omega}(P)$ tal que:

i) $y(0) = z$; $\dot{y}(t) = P^*(t,y(t))$, $\forall\ t \in R$

ii) $x(t+t_k) \to y(t)$ (quando $k \to \infty$) uniformemente nos subconjuntos compactos de R; $y(t) \in \Omega(x(.))$, $\forall\ t \in R$.

iii) $P_{t_k} \to P^*$, em E, quando $k \to \infty$.

iv) $\Omega = \Omega(x(.))$ é compacto, conexo e $x(t) \to \Omega$, quando $t \to \infty$.

Prova:

Sem perda de generalidade podemos supor que $x(t) \in K$, para todo $t \in [0,\infty)$, o que pode ser obtido através de uma conveniente mudança de variáveis.

Seja $z \in \Omega(x(.))$ e (ε_m) uma sucessão decrescente tal que $\varepsilon_m \to 0$, quando $m \to \infty$.

Como $z \in \Omega(x(.))$ existe uma sequência (t_m) que podemos supor crescente, $t_m \to \infty$ quando $m \to \infty$, tal que $x(t_m) \to z$, quando $m \to \infty$.

Seja $p > 0$ um número fixo; podemos supor $t_1 > p$.

Pela hipótese (H_2), dado $\varepsilon_k > 0$, $\exists\ \delta_k=\delta(\varepsilon_k,K)>0$ e $T_k=T(\varepsilon_k,K)>0$ tal que:

$$\left.\begin{array}{l} t \geq T_k \\ e\ x \in K,\ d(x,A) < \delta_k \end{array}\right. \quad \text{implica} \quad \|S(t,x)\| < \varepsilon_k$$

Como $x(t) \to A$ por hipótese, $\exists\ T_0^k \geq T_k$ tal que para todo $t \geq T_0^k$ temos $d(x(t),A) < \delta_k$.

Seja t_{m_k} tal que $t_{m_k}-p \geq T_0^k$; portanto para todo $t \geq t_{m_k}-p \geq T_0^k$ temos $d(x(t),A) < \delta_k$.

Por conveniência denotaremos a subsequência (t_{m_k}) por (t_k) e dessa forma podemos supor que se $t \geq t_{k-p}$ então $\|S(t,x(t))\| < \varepsilon_k$ (A)

Da hipótese (H) existe $L > 0$ tal que $\|P(t,x)\| \leq L$, $\forall\ t \in R$ e $\forall\ x \in K$, pois $(H) \Rightarrow (H_0)$, como já vimos.

Do fato de $x(t) \in K$, $\forall\ t \in [0,\infty)$ temos:

$$\|P(t,x(t))\| \leq L, \ \forall\ t \in [0,\infty)$$

Como (2) $\dot{x}(s) = P(s,x(s)) + S(s,x(s)) + Q(s,x(s))$ e também (t_k) é crescente com $t_1 > p > 0$, então $t_k \geq p > 0$ e para $t \in [-p,p]$ temos $t + t_k \geq 0$.

Portanto podemos integrar (2) de t_k a $t + t_k$ com $t \in [-p,p]$.

Teremos:

$$(3)\quad x(t+t_k) = x(t_k) + \int_{t_k}^{t+t_k} P(s,x(s))ds + \int_{t_k}^{t+t_k} S(s,x(s))ds +$$

$$+ \int_{t_k}^{t+t_k} Q(s,x(s))ds$$

Consideremos x_k: $[-p,p] \to W$ definida por

$$t \to x_k(t) = x(t+t_k)$$

Fazendo a seguinte mudança nas variáveis da 1ª integral: $\tau = s - t_k$ temos:

$$\int_{t_k}^{t+t_k} P(s,x(s))ds = \int_0^t P(\tau+t_k, x(\tau+t_k))d\tau = \int_0^t P(\tau+t_k, x_k(\tau))d\tau$$

Substituindo em (3) vem:

$$x_k(t) = x(t_k) + \int_0^t P(s+t_k, x_k(s))ds + \int_{t_k}^{t+t_k} S(s,x(s))ds + \int_{t_k}^{t+t_k} Q(s,x(s))ds$$

Considerando (H_1) temos que $\int_s^{s+t} Q(\tau,x(\tau))d\tau \to 0$ uniformemente em $t \in [-p,p]$, quando $s \to \infty$.

Assim, dado $\varepsilon_k > 0$ existe $\overline{T}_k = \overline{T}(\varepsilon_k)$ tal que $s \geq \overline{T}_k$ implica $\left\| \int_s^{s+t} Q(\tau,x(\tau))d\tau \right\| < \varepsilon_k$, $t \in [-p,p]$.

Tomamos (t_{m_k}) de forma que $t_{m_k} \geq \overline{T}_k$; por comodidade indicaremos ainda a sequência (t_{m_k}) por (t_k).

Logo, (4) $\left\| \int_{t_k}^{t_k+t} Q(\tau,x(\tau))d\tau \right\| < \varepsilon_k$, $t \in [-p,p]$.

Seja $U = C([-p,p], R^n)$ o conjunto das funções contínuas de

$[-p,p] \to R^n$ com a topologia da convergência uniforme.

Seja $F = \{x_k \varepsilon U | k=1,2,\ldots\}$. Vamos provar que F é equicontínuo em $[-p,p]$.

Sejam s_1, s_2, $-p \leq s_1 \leq s_2 \leq p$. De (3) segue que

$$x_k(s_2) = x(t_k)+\int_0^{s_2} P(s+t_k,x_k(s))ds+\int_{t_k}^{s_2+t_k} S(s,x(s))ds+\int_{t_k}^{s_2+t_k} Q(s,x(s))ds$$

$$x_k(s_1) = x(t_k)+\int_0^{s_1} P(s+t_k,x_k(s))ds+\int_{t_k}^{s_1+t_k} S(s,x(s))ds+\int_{t_k}^{s_1+t_k} Q(s,x(s))ds$$

Portanto,

$$\|x_k(s_2)-x_k(s_1)\| \leq \int_{s_1}^{s_2} \|P(s+t_k,x_k(s))\| ds + \left\|\int_{t_k}^{s_1+t_k} S(s,x(s))ds\right\| +$$

$$+ \left\|\int_{t_k}^{s_2+t_k} S(s,x(s))ds\right\| + \left\|\int_{t_k}^{s_1+t_k} Q(s,x(s))ds\right\| + \left\|\int_{t_k}^{s_2+t_k} Q(s,x(s))ds\right\|$$

(a_1) Como x_k: $[-p,p] \to W$

$$t \to x_k(t) = x(t+t_k); \quad t_k > p$$

e $t \varepsilon [-p,p] \Rightarrow t \geq -p$, então, $x_k(t) \varepsilon K$ para todo $t \varepsilon [-p,p]$.

De (H) segue que $\int_{s_1}^{s_2} \| P(s+t_k,x_k(s)) \| ds \leq \int_{s_1}^{s_2} Lds = L(s_2-s_1)$

De (A) temos que para todo $t \geq t_k-p$, $\|S(t,x(t))\| < \varepsilon_k$

se $s_j \geq 0$ e $s \varepsilon [t_k;s_j+t_k] \Rightarrow s \geq t_k \geq t_{k-p}$

se $s_j < 0$ e $s \varepsilon [t_k+s_j;t_k] \Rightarrow s \geq t_k + s_j \geq t_k - p$, $j = 1, 2$

Então: $\left\|\int_{t_k}^{s_j+t_k} S(s,x(s))\right\| \leq \left|\int_{t_k}^{s_j+t_k} \|S(s,x(s))\| ds\right| \leq \varepsilon_k |s_j| \leq \varepsilon_k . p$;

$j = 1, 2$.

Logo, de (a_1), (a_2) e (4) temos:

$$\|x_k(s_2)-x_k(s_1)\| \leq L(s_2-s_1) + 2.\varepsilon_k.p + 2\varepsilon_k$$

Como $\varepsilon_k \to 0$ quando $k \to \infty$, dado $\varepsilon > 0$ existe $K_0 = K_0(\varepsilon)$ tal que para todo $k \geq K_0$ implica $|2\varepsilon_k(p+1)| < \varepsilon/2$.

Assim, existe $\delta_1 = \frac{\varepsilon}{2L}$ tal que:

$$\left.\begin{array}{l} |s_2-s_1| < \delta \\ e\ k \geq K_0 \end{array}\right. \text{ implica } \|x_k(s_2)-x_k(s_1)\| < \varepsilon$$

Por outro lado, o conjunto $\{x_1,\ldots,x_{K_0-1}\}$ é equicontínuo em $[-p,p]$. Logo existe $\delta_2 > 0$ tal que se $|s_2-s_1| < \delta_2$ então $\|x_i(s_2)-x_i(s_1)\| < \varepsilon$, para todo $i = 1, 2, \ldots, K_0-1$.

Tomando $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\}$, para $|s_2-s_1| < \delta$ segue que $\|x_k(s_2)-x_k(s_1)| < \varepsilon$, para todo $k = 1, 2, 3, \ldots$

Portanto F é equicontínuo em $[-p,p]$.

Além disso F é uniformemente limitado pois, $x_k(t) \in K$,

$$\forall\, k,\ (k = 1,2,\ldots) \text{ e } \forall\, t \in [-p,p]$$

Do Lema I-2 resulta que F é relativamente compacto em U. Então existe uma subsequência de (x_k) (que também chamaremos de (x_k)) convergente em $U = C([-p,p],R^n)$, ou seja, existe $y \in U$ tal que $x_k \to y$ quando $k \to \infty$, em U, e portanto $x_k(t) = x(t+t_k) \to y(t)$ uniformemente em $[-p,p]$, quando $k \to \infty$.

Do Corolário I-2 segue que existe subsequência de (t_k) (que também chamaremos de (t_k)) tal que $P_{t_k} \to P^* \in \hat{\Omega}(P)$, em E, quando $k \to \infty$, e portanto, $P_{t_k}(t,x)=P(t+t_k,x)\to P^*(t,x)$ uniformemente em $[-p,p]\times K$, $p > 0$.

Temos ainda que $\int_0^t P_{t_k}(s,x_k(s))ds \to \int_0^t P^*(s,y(s))ds$ uniformemente em $t \in [-p,p]$, quando $k \to \infty$.

De fato, dado $\varepsilon > 0$, da continuidade uniforme de $P: R \times K \to R^n$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que para $t_1, t_2 \in R$, $|t_1-t_2| < \delta$ e

$x_1, x_2 \in K$, $\|x_1-x_2\| < \delta$ segue que

$$\|P(t_1,x_1)-P(t_2,x_2)\| < \frac{\varepsilon}{2.p} \Rightarrow \|P_{t_k}(t_1,x_1)-P_{t_k}(t_2,x_2)\| < \frac{\varepsilon}{2.p},$$

$(k = 1,2,\ldots)$ (B).

Além disso temos:

(C) $x(t+t_k) \to y(t)$ uniformemente em $[-p,p]$; então existe $K_1 = K_1(\delta)$ tal que $k \geq K_1$ implica $\|x(t+t_k)-y(t)\| < \delta$

De (B) e (C) segue que para $k \geq K_1$ e $s \in [-p,p]$

$$\|P_{t_k}(s,x_k(s))-P_{t_k}(s,y(s))\| < \frac{\varepsilon}{2.p}$$

(D) $P_{t_k}(t,x) \to P^*(t,x)$ uniformemente em $[-p,p] \times K$, $p > 0$ e portanto

$K' = K'(\varepsilon)$; $K' \geq K_1$ tal que para $k \geq K'$ temos:

$\|P_{t_k}(t,x)-P^*(t,x)\| < \frac{\varepsilon}{2.p}$ onde $t \in [-p,p]$ e $x \in K$.

Como $x_k(t) = x(t+t_k) \in K$, $k = 1,2,\ldots$ e $t \in [-p,p]$ com $x_k(t) \to y(t)$ quando $k \to \infty$, temos que $y(t) \in K$, $\forall\, t \in [-p,p]$.

De (D) segue que para $k \geq K'$ e $s \in [-p,p]$ $\|P_{t_k}(s,y(s))-P^*(s,y(s))\| < \frac{\varepsilon}{2.p}$

Nestas condições, para $k \geq K'$ e $s \in [-p,p]$, $p > 0$

$$\|P_{t_k}(s,x_k(s))-P^*(s,y(s))\| \leq \|P_{t_k}(s,x_k(s))-P_{t_k}(s,y(s))\| +$$

$$+ \|P_{t_k}(s,y(s))-P^*(s,y(s))\| < \frac{\varepsilon}{2.p} + \frac{\varepsilon}{2.p} = \frac{\varepsilon}{p} \text{ e consequentemente:}$$

$$\left\|\int_0^t P_{t_k}(s,x_k(s))ds - \int_0^t P^*(s,y(s))ds\right\| \leq \left|\int_0^t \|P_{t_k}(s,x_k(s))-P^*(s,y(s))\|ds\right|$$

$$< \left|\int_0^t \frac{\varepsilon}{p}\,ds\right| = \frac{\varepsilon}{p} \cdot |t| \leq \frac{\varepsilon}{p} \cdot p = \varepsilon$$

Recordemos que

(3) $$x_k(t)=x(t_k)+\int_0^t P_{t_k}(s,x_k(s))ds+\int_{t_k}^{t+t_k} S(s,x(s))ds+\int_{t_k}^{t+t_k} Q(s,x(s))ds$$

Fazendo $k \to \infty$ e como a convergência é uniforme em $t \in [-p,p]$ te

-remos:

$$y(t) = z + \int_0^t P^*(s,y(s))ds; \quad y(0) = z$$

Tomando $p = 1, 2, \ldots$ podemos garantir que existem sequências $(t_{p,k})$ onde $(t_{p+1,k})$ é subsequência de $(t_{p,k})$ e uma função $y(t)$: $y: R \to W$ tal que para $t_k = t_{k,k}$ (sucessão diagonal) temos:

i) $\dot{y}(t) = P^*(t,y(t)), \ \forall \ t \in R$ e $y(0) = z$

ii) $x(t+t_k) \to y(t)$ uniformemente nos subconjuntos compactos de R, quando $k \to \infty$.

Assim $x(t+t_k) \to y(t)$ em R, isto é, existe sequência (τ_k), $\tau_k = t+t_k$ tal que $x(\tau_k) \to y(t)$, $t \in R$. Logo $y(t) \in \Omega(x(.))$, para todo $t \in R$.

iii) $P_{t_k} \to P^*$ em E, quando $k \to \infty$.

iv) Como $x(t)$ é solução de (I-2) com $x(t) \in K$ para todo $t \in [a,\infty)$, $a \geq 0$ e $K \subset W$ compacto, do Lema I-3 segue que $\Omega = \Omega(x(.))$ é compacto, conexo e $x(t) \to \Omega$, quando $t \to \infty$.

Suponhamos válidas as hipóteses (H), (H_1), (H_2) e consideremos os sistemas:

(I-1) $\dot{y} = P(t,y)$

(I-2) $\dot{x} = P(t,x) + S(t,x) + Q(t,x)$

Definição:

Dizemos que $A \subset W$ é semi-invariante com relação a (I-1) se a cada $z \in A$ correspondem $P^* \in \hat{\Omega}(P)$ e uma função $y(t)$, solução de $\dot{y} = P^*(t,y)$, definida para todo $t \in R$ de modo que $y(t) \in A$ para qualquer $t \in R$ e $y(0) = z$.

(I) No caso em que P é periódica, de período w, a definição a cima pode ser formulada da seguinte maneira:

- Dizemos que $A \subset W$ é semi-invariante com relação a (I-1) se a cada $z \in A$ correspondem $\tau \in [0,w]$ e uma função $y(t)$ tal que $\dot{y}(t) = P_\tau(t,y(t))$, $y(0) = z$ e $y(t) \in A$ para todo $t \in R$, pois $\hat{\Omega}(P) = \{P_\tau \in E \mid \tau \in [0,w]\}$

(II) No caso autônomo, $A \subset W$ é semi-invariante com relação a (I-1) se a cada $z \in A$ existir $y(t)$ tal que $\dot{y}(t) = P(t,y(t))$, $y(0) = z$ e $y(t) \in A$ para todo $t \in R$, pois $\hat{\Omega}(P) = \{P\}$.

Corolário I-3:

Se $x(t)$ é uma solução de (I-2), $x(t) \in K$ para todo $t \in [a,\infty)$, $a \geq 0$; onde $K \subset W$ é compacto, então seu conjunto w-limite, $\Omega(x(.)) = \Omega$ é compacto, conexo e semi-invariante com relação a (I-1).

Observação:

Quando no sistema (I-2) $S \equiv 0$, basta tomar $A = W$.

Seja $E^1 = C(R\times W, R)$: o conjunto das funções contínuas de $R \times W \to R$.

Vamos considerar em E^1 a topologia da convergência uniforme nas partes compactas de $R \times W$.

Teorema I-2:

Suponhamos P satisfazendo a hipótese (H).

Seja $V: R \times W \to R$ tal que:

(a_1) $V(t,x)$ é limitada em t para cada x fixo.

(a_2) V é uniformemente contínua em conjuntos da forma $R \times M$, $M \subset W$, M compacto.

(a_3) $\dot{V}(t,x(t)) \leq 0$, onde $x(t)$ é uma solução qualquer de (I-1) que permanece em um compacto de W.

Seja U o conjunto de todos os $z \in W$ tal que existe $P^* \in \hat{\Omega}(P)$, $V^* \in \hat{\Omega}(V)$ e função $y(t)$ de modo que:

i) $\dot{y}(t) = P^*(t,y(t))$, para todo $t \in R$ e $y(0) = z$

ii) $y(t) \in W_0 \subset W$, para todo $t \in R$, onde W_0 é compacto.

iii) $\dot{V}^*(t,y(t)) = 0$ para todo $t \in R$.

Nestas condições, se $x(t)$ é uma solução de (I-1) que existe para $t \geq a$ e $x(t) \in W^* \subset W$ para $t \geq a$, onde W^* é compacto, então $x(t) \to U$, quando $t \to \infty$.

Prova:

Basta mostrar que $\Omega \subset U$, pois do Teorema (I-1) (tomando $S \equiv Q \equiv 0$) segue que $x(t) \to \Omega$, quando $t \to \infty$.

Como $H \Rightarrow H_0$, temos que V é limitada em $R \times W^*$.

Além disso $\dot{V}(t,x(t)) \leq 0$ implica que a função $V(t,x(t))$ é decrescente. Logo existe o limite: $\lim_{t\to\infty} V(t,x(t)) = V_0$, com V_0 finito.

O sistema (I-1) é um caso particular de (I-2) tomando $S \equiv Q \equiv 0$ e do Teorema I-1 segue que $\Omega \neq \emptyset$ e, para cada $z \in \Omega$, existe sequência (t_m), $t_m \to \infty$ quando $m \to \infty$, existe $P^* \in \hat{\Omega}(P) \subset \bar{\bar{P}}$ e função $y(t)$

tal que:

(α) $\dot{y}(t) = P^*(t,y(t))$ para todo $t \in R$; $y(0) = z$

(β) $x(t+t_m) \to y(t)$, quando $m \to \infty$, uniformemente nos compactos de R;

$y(t) \in \Omega(x(.))$, para todo $t \in R$.

(γ) $P_{t_m} \to P^*$ em E.

Podemos ainda supor a sequência (t_m) satisfazendo $V_{t_m} \to V^*$, quando $m \to \infty$, onde $V^* \in \hat{\Omega}(V) \subset \bar{V}$. Portanto, para cada $z \in \Omega$, $y(t)$ satisfaz as condições (i) e (ii) da definição de U.

Vamos verificar que $y(t)$ satisfaz (iii)

Já vimos que $V_{t_m} \to V^*$ quando $m \to \infty$. Mostramos também que $\lim_{t\to\infty} V(t,x(t)) = V_0$ e que $x(t+t_m) \to y(t)$, quando $m \to \infty$, uniformemente nos compactos de R.

Vamos demonstrar que $V^*(t,y(t)) = V_0$, para todo $t \in R$.

De fato. Tomando $t_0 \in R$ temos: $\lim_{m\to\infty} V(t_0+t_m,x(t_0+t_m)) = V_0$

Vamos mostrar que: $\lim_{m\to\infty} V(t_0+t_m,x(t_0+t_m)) = V^*(t_0,y(t_0))$ e ficará automaticamente que $V^*(t_0,y(t_0)) = V_0$, para todo $t_0 \in R$.

$|V(t_0+t_m,x(t_0+t_m)) - V^*(t_0,y(t_0))| \leq$

$\leq |V(t_0+t_m,x(t_0+t_m))-V(t_0+t_m,y(t_0))| + |V(t_0+t_m,y(t_0))-V^*(t_0,y(t_0))|$

Como V é uniformemente contínua em $R \times W^*$, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon,W^*) > 0$ tal que:

$$\left.\begin{array}{l} |t_1-t_2| < \delta\ ;\quad t_1,\ t_2 \in R \\ \|x_1-x_2\| < \delta\ ;\quad x_1,\ x_2 \in W^* \end{array}\right. \quad \text{implica} \quad |V(t_1,x_1)-V(t_2,x_2)| < \varepsilon$$

Mas, $x(t_0+t_m) \to y(t_0)$ quando $m \to \infty$, e portanto, existe $n_0 = n_0(\delta)$

tal que para $m \geq n_0$ temos $\|x(t_0+t_m)-y(t_0)\| < \delta$.

Assim, $m \geq n_0$ implica $|V(t_0+t_m,x(t_0+t_m))-V(t_0+t_m,y(t_0))| < \varepsilon$

Logo, $|V(t_0+t_m,x(t_0+t_m))-V(t_0+t_m,y(t_0))| \to 0$, quando $m \to \infty$.

Além disso, $|V(t_0+t_m,y(t_0))-V^*(t_0,y(t_0))| \to 0$, quando $m \to \infty$.

Segue então que $\lim_{m\to\infty} V(t_0+t_m,x(t_0+t_m)) = V^*(t_0,y(t_0))$, e portanto, $V^*(t_0,y(t_0)) = V_0$, para todo $t_0 \in R$.

Portanto $\dot{V}^*(t,y(t)) = 0$, para todo $t \in R$.

Logo (iii) está satisfeita e então $\Omega \subset U$.

CAPÍTULO II

Consideremos as equações:

(II-1) $\ddot{x} + f(t,x,\dot{x}) + g(x).p(\dot{x}) + h(t,x,\dot{x}) + k(t,x,\dot{x}) = 0$ ou equivalentemente:

(II-1') $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} + f(t,x,y) + g(x).p(y) + h(t,x,y) + k(t,x,y) = 0 \end{cases}$ e

(II-2) $\ddot{x} + f(t,x,\dot{x}) + g(x).p(\dot{x}) = 0$ ou equivalentemente:

(II-2') $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} + f(t,x,y) + g(x).p(y) = 0 \end{cases}$

Hipóteses:

(h_1) Seja $f: R^3 \to R$ contínua, satisfazendo

a) Para cada $(x,y) \in R^2$ fixado, $f(t,x,y)$ é limitada em t.

b) f é uniformemente contínua em conjuntos da forma $R \times K$, onde $K \subset R^2$ é compacto.

(h_2) $y.f(t,x,y) \geq y.F(x,y) \geq 0$ para todo $t,x,y \in R$, onde F é contínua no R^2.

Seja $E = \{(x,y) \in R^2 \mid y.F(x,y)=0\}$

(h_2') Para cada $x_0 \neq 0$, $x_0 \in R$, existe $\varepsilon = \varepsilon(x_0) > 0$ tal que:

$E \cap B_\varepsilon(x_0,0) \subset (\bigcup_{i\in I} H_i) \cup (\bigcup_{j\in J} V_j)$ onde os H_i são segmentos horizontais e os V_j são segmentos verticais e:

(i) $\overbrace{p_x(\bigcup_{j\varepsilon J} V_j)}^{0} = \phi$ e $\overline{p_y(\overset{0}{\bigcup_{i\varepsilon I}} H_i)} = \phi$ onde p_x e p_y são respectivamente as projeções sobre o eixo x e eixo y.

Observação:

A bola $B_\varepsilon(x_0,0)$ é considerada no R^2, enquanto que a aderência e interior que aparecem em (i) são considerados em R.

(h_2'') Os conjuntos $R^+ = \{(x,0)|x>0\}$ e $R^- = \{(x,0)|x<0\}$ são componentes conexas em relação ao espaço topológico $E - \{0,0\}$.

(h_3) Seja $h: [0,\infty)\times R^2 \to R$, h contínua e

$y[f(t,x,y) + h(t,x,y)] \geq 0$, para todo $t \geq 0$ e para todo $x, y \in R$.

(h_4) Seja $g: R \to R$ contínua e tal que $x.g(x) > 0$ para todo $x\varepsilon R$, $x \neq 0$ e $\int_0^x g(s)ds \to \infty$, quando $|x| \to \infty$.

(h_5) Seja $p: R \to R$ contínua tal que $p(y) > 0$, para todo $y \in R$, com $\int_0^y \frac{u}{p(u)}\, du \to \infty$, quando $|y| \to \infty$

(h_5') Seja $p: R \to R$ contínua e M, constante, tal que $0<\frac{1}{M}\leq p(y)\leq M$, para todo $y \in R$.

(h_6) Seja $k: [0,\infty) \times R^2 \to R$ contínua tal que existe $\beta: [0,\infty) \to R$ contínua, de modo que $|k(t,x,y)| \leq \beta(t)$ para todo $t \geq 0$ e para todo $x,y \in R$, e além disso $\int_0^\infty \beta(t)dt < \infty$.

(h_7) Para qualquer compacto B de R existe $\gamma_B: [0,\infty) \to R$ contínua tal que $\gamma_B(t) \to 0$, quando $t \to \infty$ e $\left|\int_s^{s+t} h(\tau,x(\tau),y(\tau))d\tau\right| \leq \gamma_B(s)$, para qualquer $t \in [0,1]$, onde x e y são funções contínuas arbitrárias, de $[0,\infty)$ em B.

(h_8) Para qualquer compacto B de R, existe $\lambda_B: [0,\infty) \to R$, contínua, tal que $|h(t,x,y)| \leq \lambda_B(t)$, para todo $t \geq 0$ e para todo $x, y \in B$, com $\int_s^{s+1} \lambda_B(\tau)d\tau \to 0$, quando $s \to \infty$.

Observação:

1) A condição h_8 pode ser satisfeita mesmo que $\lambda_B(t) \not\to 0$, quando $t \to \infty$ e $\int^\infty \lambda_B(t)dt = \infty$.

   Considere-se, por exemplo, $\lambda_B(t) = \lambda_B^1(t) + \lambda_B^2(t)$ com $\lambda_B^j(t) \geq 0$, $j = 1, 2$ e tais que:

   i) $\lambda_B^1(t) \to 0$, quando $t \to \infty$, com $\int^\infty \lambda_B^1(t)dt = \infty$

   ii) $\lambda_B^2(t) \not\to 0$, quando $t \to \infty$ e $\int^\infty \lambda_B^2(t)dt < \infty$

2) Demonstra-se que $h_8 \Rightarrow h_7$, mas não são equivalentes, como mostra o exemplo $h = (t \text{ sen } t^3, t \cos t^3)$.

Seja $G: [0,\infty) \times R^n \to R^n$ contínua, onde $G = \begin{pmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_n \end{pmatrix}$

Consideremos a equação: (II-3) $\quad \dot{x} = G(t,x)$.

Lema II-1

Seja $V: [0,\infty) \times R^n \to R$, de classe C^1, tal que:

(i) $\dot{V}(t,x) \leq 0$, para todo $t \geq 0$ e para todo $x \in R^n$, onde

$$\dot{V}(t,x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_j}(t,x).G_j(t,x) + \frac{\partial V}{\partial t}(t,x)$$

(ii) $V(t,x) \geq \alpha(x)$ onde $\alpha: R^n \to R$ é contínua e $\alpha(x) \to \infty$, quando $|x| \to \infty$.

Então toda solução de (II-3) é limitada no futuro.

Para uma prova deste lema, ver [1,pg.6]

Lema II-2

Suponhamos que f seja contínua e que estejam satisfeitas as hipóteses: h_3, h_4, h_5 e h_6.

Então para qualquer $\varepsilon > 0$ existem $T = T(\varepsilon) > 0$ e $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se $t \geq t_0 \geq T(\varepsilon)$ e $|x_0| + |y_0| < \delta$, então $|x(t)|+|y(t)|<\varepsilon$, para qualquer solução $(x(t),y(t))$ de (II-1') satisfazendo $(x(t_0),y(t_0)) = (x_0,y_0)$.

Demonstração:

Consideremos a função $V: [0,\infty) \times R^2 \to R$ definida da seguinte maneira:

$$V(t,x,y) = \left(\int_0^y \frac{u}{p(u)}\,du + \int_0^x g(s)ds\right)^{1/2} + \frac{\sqrt{2}}{2}.M^{3/2}.\int_t^\infty \beta(s)ds, \quad \text{onde } M > 0$$

é tal que $M \geq p(y) \geq \frac{1}{M} > 0$, para $y \in [-1,1]$.

Definimos: $$2m = \min_{|x|+|y|=\varepsilon} \left(\int_0^y \frac{u}{p(u)}\,du + \int_0^x g(s)ds\right)^{1/2}; \quad 0 < \varepsilon < 1$$

Como $\int_0^y \frac{u}{p(u)}\,du > 0$ para todo $y \neq 0$ e $\int_0^x g(s)ds > 0$ para todo $x \neq 0$ temos que:

(I) $\inf\limits_{|x|+|y|=\varepsilon} V(t,x,y) \geq 2m > 0$

Sejam $T = T(\varepsilon) > 0$ e $\delta = \delta(\varepsilon)$, $0 < \delta < \varepsilon$, tal que

$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot M^{3/2} \int_{T(\varepsilon)}^{\infty} \beta(t)dt < m$ e $\left(\int_0^y \frac{u}{p(u)}\,du + \int_0^x g(s)ds\right)^{1/2} < m$ para

$|x| + |y| \leq \delta(\varepsilon)$.

Assim, para $t \geq T(\varepsilon)$ e $|x| + |y| = \delta(\varepsilon)$,

$$V(t,x,y) \leq \left[\int_0^y \frac{u}{p(u)}\,du + \int_0^x g(s)ds\right]^{1/2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot M^{3/2} \cdot \int_{T(\varepsilon)}^{\infty} \beta(s)ds \leq$$

$$\leq \sup_{|x|+|y|=\delta(\varepsilon)} \left(\int_0^y \frac{u}{p(u)}\,du + \int_0^x g(s)ds\right)^{1/2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot M^{3/2} \cdot \int_{T(\varepsilon)}^{\infty} \beta(s)ds,$$

e portanto,

$$\text{(II)} \quad \sup_{\substack{t \geq T(\varepsilon) \\ |x|+|y|=\delta(\varepsilon)}} V(t,x,y) \leq \max_{|x|+|y|=\delta(\varepsilon)} \left[\int_0^y \frac{u}{p(u)}\,du + \int_0^x g(s)ds\right]^{1/2} +$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot M^{3/2} \int_{T(\varepsilon)}^{\infty} \beta(s)ds \quad < \quad m + m = 2m$$

Além disso, para $t \geq 0$, $(x,y) \neq (0,0)$ e $y \in [-1,1]$ temos:

$$\dot{V}_{(II-1')}(t,x,y) = \frac{\partial V}{\partial t}(t,x,y) + \frac{\partial V}{\partial x}(t,x,y).\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y}(t,x,y).\dot{y} =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot M^{3/2} \cdot \beta(t) + \frac{g(x).y}{2\left(\int_0^y \frac{u}{p(u)}\,du + \int_0^x g(s)ds\right)^{1/2}} +$$

$$+ \frac{\frac{y}{p(y)} \cdot \left[-f(t,x,y) - g(x).p(y) - h(t,x,y) - k(t,x,y)\right]}{2\left(\int_0^y \frac{u}{p(u)}\,du + \int_0^x g(s)ds\right)^{1/2}}$$

$$\leq -\frac{\sqrt{2}}{2}.M^{3/2}.\beta(t) - \frac{y\left[f(t,x,y)+h(t,x,y)\right]}{2.p(y)\left(\int_0^y \frac{u}{p(u)}\,du+\int_0^x g(s)ds\right)^{1/2}} -$$

$$- \frac{y.k(t,x,y)}{2.p(y).\left(\int_0^y \frac{u}{p(u)}\,du+\int_0^x g(s)ds\right)^{1/2}} \leq$$

$$\leq -\frac{\sqrt{2}}{2}.M^{3/2}.\beta(t) + \frac{|y|.|k(t,x,y)|}{2.p(y)\left(\int_0^y \frac{u}{p(u)}\,du+\int_0^x g(s)ds\right)^{1/2}} \leq$$

$$\leq -\frac{\sqrt{2}}{2}.M^{3/2}.\beta(t) + \frac{|y|.\beta(t)}{\frac{2}{M}\left(\frac{1}{M}.\frac{y^2}{2} + \int_0^x g(s)ds\right)^{1/2}} \leq$$

$$\leq -\frac{\sqrt{2}}{2}\,.\,M^{3/2}.\beta(t) + \frac{\frac{|y|}{\sqrt{2M}}.\beta(t)}{\frac{2}{M.\sqrt{2M}}\left[\left(\frac{y}{\sqrt{2M}}\right)^2+\int_0^x g(s)ds\right]^{1/2}} \leq$$

$$\leq -\frac{\sqrt{2}}{2}.M^{3/2}.\beta(t) + \frac{\sqrt{2}}{2}\,.\,M^{3/2}.\frac{\frac{|y|}{\sqrt{2M}}.\beta(t)}{\left[\left(\frac{y}{\sqrt{2M}}\right)^2 + \int_0^x g(s)ds\right]^{1/2}} \leq 0$$

Suponhamos que existam $t_0 \geq T(\varepsilon)$ e $(x_0,y_0) \in R^2$ com $|x_0|+|y_0|<\delta(\varepsilon)$ tal que para alguma solução $(x(t),y(t))$ de (II-1') satisfazendo $(x(t_0),y(t_0)) = (x_0,y_0)$ e para algum $\tilde{t} \geq t_0$ tenhamos $|x(\tilde{t})|+|y(\tilde{t})|\geq\varepsilon$.

Assim, existem t_1 e t_2 tal que $|x(t_1)| + |y(t_1)| = \delta$ e $|x(t_2)| + |y(t_2)| = \varepsilon$ e $\delta(\varepsilon) \leq |x(t)| + |y(t)| \leq \varepsilon$, para $t \in [t_1,t_2]$.

De (I) e (II) segue que $V(t_1,x(t_1),y(t_1)) < V(t_2,x(t_2),y(t_2))$ e como $(x(t),y(t)) \neq (0,0)$ para $t \in (t_1,t_2)$ concluimos que $V(t,x(t),y(t))$ é diferenciável em (t_1,t_2).

Logo existe $s \in (t_1,t_2)$ tal que $\dot{V}(s,x(s),y(s)) > 0$, o que é uma contradição.

Corolário II-1:

Suponhamos que alguma condição de unicidade para o problema do valor inicial seja satisfeita por (II-1). Suponhamos satisfeitas as hipóteses do Lema II-2, com $k(t,0,0) = 0$, para todo $t \geq 0$.

Então a solução nula de (II-1') é uniformemente estável.

Prova:

Primeiramente devemos mostrar que a função nula é solução de (II-1'), ou seja, que: $f(t,0,0) + g(0).p(0) + h(t,0,0) + k(t,0,0) = 0$, para $t \geq 0$.

a) $k(t,0,0) = 0$ para todo $t \geq 0$, por hipótese

b) De (h_4) temos que $x.g(x) > 0$ para todo $x \in R$, $x \neq 0$ e da continuidade de g, $x = 0$ é o único ponto onde $g(0) = 0$.

Assim, $g(0).p(y) = 0$ para todo $y \in R$, e em particular $g(0).p(0)=0$.

c) De (h_3) segue que $y[f(t,x,y)+h(t,x,y)] \geq 0$, para todo $t \geq 0$ e todo $x,y \in R$.

Então $f(t,x,0) + h(t,x,0) = 0$, para todo $x \in R$; em particular, $f(t,0,0) + h(t,0,0) = 0$, para todo $t \geq 0$.

Logo, a função nula é solução de (II-1'), para $t \geq 0$.

Do Lema II-2 e do fato que (II-1') satisfaz uma condição de unicidade em relação ao problema do valor inicial, dado $\varepsilon > 0$ existem $T = T(\varepsilon)$ e $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ tal que se $t \geq t_0 \geq T(\varepsilon)$ e $|x_0|+|y_0| < \delta_1$

então $|x(t)| + |y(t)| < \varepsilon$, para qualquer solução $(x(t),y(t))$ de (II-1') satisfazendo $(x(t_0),y(t_0)) = (x_0,y_0)$.

Por outro lado, como (II-1') satisfaz as condições de continuidade em relação às condições iniciais, existe $\delta = \delta(\varepsilon)$, $\delta \leq \delta_1$ tal que se $|x_0| + |y_0| < \delta$ então $|x(t)| + |y(t)| < \delta_1$ para todo $t \in [0,T(\varepsilon)]$ onde $(x(t),y(t))$ é uma solução de (II-1') tal que $(x(t_0),y(t_0)) = (x_0,y_0)$, qualquer $t_0 \in [0,T(\varepsilon)]$.

Então, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon)$ tal que se $|x_0| + |y_0| < \delta$ e $t \geq t_0$ implica $|x(t)| + |y(t)| < \varepsilon$, para a solução $(x(t),y(t))$ de (II-1') satisfazendo $(x(t_0),y(t_0)) = (x_0,y_0)$, qualquer que seja $t_0 \geq 0$.

Lema II-3:

Suponhamos que estejam satisfeitas as hipóteses h_3, h_4, h_5, h_5' e h_6. Então toda solução de (II-1') é limitada no futuro.

Prova:

Seja $w(t,x,y) = (1+\int_0^y \frac{u}{p(u)}\,du + \int_0^x g(s)ds)^{1/2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,.\,M^{3/2}\int_t^\infty \beta(s)ds$

Então temos: $w(t,x,y) \geq (1+\int_0^y \frac{u}{p(u)}\,du + \int_0^x g(s)ds)^{1/2} = \delta(x,y)$

Observemos que $\delta(x,y) \to \infty$, quando $|x| + |y| \to \infty$

Além disso, para todo $x,y \in R$ e $t \geq 0$ temos:

$$\dot{w}_{(II-1')}(t,x,y) = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x}\,.\,\dot{x} + \frac{\partial w}{\partial y}\,.\,\dot{y}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}\,.\,M^{3/2}\,.\beta(t) + \frac{g(x).y}{2\,(1+\int_0^y \frac{u}{p(u)}\,du + \int_0^x g(s)ds)^{1/2}} +$$

$$+\frac{\frac{y}{p(y)}\cdot\left[-f(t,x,y)-g(x).p(y)-h(t,x,y)-k(t,x,y)\right]}{2\left[1+\int_0^y \frac{u}{p(u)}\,du+\int_0^x g(s)ds\right]^{1/2}} =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot M^{3/2}.\beta(t) - \frac{y.\left[f(t,x,y)+h(t,x,y)\right]}{2.p(y).\left[1+\int_0^y \frac{u}{p(u)}\,du+\int_0^x g(s)ds\right]^{1/2}} -$$

$$- \frac{y.k(t,x,y)}{2.p(y)\left[1+\int_0^y \frac{u}{p(u)}\,du+\int_0^x g(s)ds\right]^{1/2}} \leq$$

$$\leq -\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot M^{3/2}.\beta(t) + \frac{|y|.|k(t,x,y)|}{2p(y).\left[1+\int_0^y \frac{u}{p(u)}\,du+\int_0^x g(s)ds\right]^{1/2}} \leq$$

$$\leq -\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot M^{3/2}.\beta(t) + \frac{|y|.\beta(t)}{\frac{2}{M}(1+\frac{1}{M}\int_0^y u\,du+\int_0^x g(s)ds)^{1/2}} =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot M^{3/2}.\beta(t) + \frac{|y|.\beta(t)}{\frac{2}{M}\left[\frac{1}{2M}(2M+y^2+2M.\int_0^x g(s)ds)\right]^{1/2}} =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot M^{3/2}.\beta(t) + \frac{|y|.\beta(t)}{\frac{2}{M}\cdot(\frac{1}{2M})^{1/2}\,(2M+y^2+2M\int_0^x g(s)ds)^{1/2}} =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot M^{3/2}.\beta(t) + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot M^{3/2}\cdot\frac{|y|.\beta(t)}{(2M+y^2+2M\int_0^x g(s)ds)^{1/2}} \leq 0$$

Logo, do Lema II-1 segue a tese.

Lema II-4:

Suponhamos satisfeitas as hipóteses h_1, h_3, h_4, h_5, h_5', h_6 e h_7. En tão o conjunto w-limite de toda solução $(x(t),y(t))$ de (II-1') é compacto, conexo e invariante relativamente a (II-2').

Prova:

Vamos usar o Corolário I-3, considerando

$$P(t,x,y) = \begin{pmatrix} y \\ -f(t,x,y)-g(x).p(y) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Q(t,x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ -h(t,x,y)-k(t,x,y) \end{pmatrix}$$

Verifiquemos se P e Q satisfazem as hipóteses (H) e (H_1)

a) Da hipótese (h_1) segue que P satisfaz (H)

b) $Q: I \times R^2 \to R$ deve ser tal que para toda função contínua $(x,y): I \times I \to R^2$, limitada, $\int_s^{s+t} Q(\tau,x(\tau),y(\tau))d\tau \to 0$ uniformemente em $t \in [0,1]$, quando $s \to \infty$.

Devemos mostrar então que dado $\varepsilon > 0$, existe $T = T(\varepsilon) > 0$ tal que para $s \geq T(\varepsilon)$ temos:

$$\left|\int_s^{s+t} Q(\tau,x(\tau),y(\tau))d\tau\right| < \varepsilon, \text{ qualquer que seja } t \in [0,1].$$

Mas,

$$\left|\int_s^{s+t} Q(\tau,x(\tau),y(\tau))d\tau\right| = \left|\int_s^{s+t} \begin{pmatrix} 0 \\ -h(\tau,x(\tau),y(\tau))-k(\tau,x(\tau),y(\tau)) \end{pmatrix} d\tau\right| \leq$$

$$\leq \left|\int_s^{s+t} \begin{pmatrix} 0 \\ -h(\tau,x(\tau),y(\tau)) \end{pmatrix} d\tau\right| + \left|\int_s^{s+t} \begin{pmatrix} 0 \\ -k(\tau,x(\tau),y(\tau)) \end{pmatrix} d\tau\right|$$

De h_7, existe $T_1 = T_1(\varepsilon)$ tal que para $s \geq T_1(\varepsilon)$, $|\gamma_B(t)| < \varepsilon/2$, onde B é um compacto qualquer de R.

Assim, $\left|\int_s^{s+t} \begin{pmatrix} 0 \\ -h(\tau,x(\tau),y(\tau)) \end{pmatrix} d\tau\right| \leq |\gamma_B(s)| < \varepsilon/2$, para qualquer $t \in [0,1]$.

Por outro lado, de h_6 existe $T_2 = T_2(\varepsilon)$ tal que para $s \geq T_2$ temos $\left|\int_s^{s+t} \beta(\tau)d\tau\right| < \varepsilon/2$.

Seja $T = \max\{T_1,T_2\}$. Assim, para todo $s \geq T$ implica:

$\left|\int_s^{s+t} Q(\tau,x(\tau),y(\tau))d\tau\right| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, qualquer que seja $t \in [0,1]$.

Do Lema II-3 segue que toda solução de (II-1') é limitada no futuro, e portanto, permanece num compacto.

Do Corolário I-3, no caso em que $S \equiv 0$ segue que o conjunto w-limite de toda solução $(x(t),y(t))$ de (II-1') é compacto, conexo e invariante em relação à (II-2').

Lema II-5

Suponhamos que as hipóteses h_1, h_2, h_2', h_3, h_4, h_5 e h_5' estejam satisfeitas. Então a origem pertence a todo conjunto compacto e invariante relativamente a (II-2').

Prova:

Da hipótese (h_2) temos que:

$$y.f(t,x,y) \geq y.F(x,y) \geq 0, \quad \text{para todo } t,x,y \in R.$$

Além disso vimos que $E = \{(x,y) \in R^2 | y.F(x,y)=0\}$

Seja M um conjunto compacto e invariante relativamente a (II-2') e seja $(x_0,y_0) \in M$. Como M é invariante existe $f^* \in \hat{\Omega}(f)$ e solução $(x_0(t), y_0(t))$ de:

$$(*) \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f^*(t,x,y)-g(x).p(y) \end{cases}$$

com $(x_0(0),y_0(0))=(x_0,y_0)$, tal que $(x_0(t),y_0(t)) \in M$, para todo $t \in R$.

Seja Ω o conjunto w-limite dessa solução

Como $(x_0(t),y_0(t)) \in M$, para todo $t \in R$, segue que $\Omega \neq \phi$, compacto e $\Omega \subset M$.

Vamos aplicar o Lema II-4 ao sistema (*) considerando as perturbações nulas.

Verifiquemos se as condições do referido Lema estão satisfeitas.

Como f satisfaz h_1, do corolário I-2, f^* satisfaz h_1.

As outras hipóteses do Lema II-4 são verificadas trivialmente. Logo, Ω é invariante relativamente ao sistema (*).

Afirmamos que $\Omega \subset E$.

Para provar isso vamos usar o Teorema I-2, aplicando-o ao sistema (*).

Seja $V(x,y) = \int_0^y \frac{u}{p(u)} du + \int_0^x g(s)ds$

As hipóteses (a_1) e (a_2) são facilmente verificadas.

Falta verificar (a_3). Temos:

$$\dot{V}_{(*)}(t,x,y) = \frac{\partial V}{\partial x}(t,x,y).\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y}(t,x,y).\dot{y}$$

$$= g(x).y + \frac{y}{p(y)} . [-f^*(t,x,y)-g(x).p(y)]$$

$$= \frac{-y.f^*(t,x,y)}{p(y)} \leq 0$$

Observemos que $y.f^*(t,x,y) \geq y.F(x,y) \geq 0$ para todo $(t,x,y) \in R$, onde $f^* \in \hat{\Omega}(f)$.

Logo, $\Omega \subset U$ onde U é o conjunto dos $(x_1,y_1) \in R^2$, tal que existe $f^{**} \in \hat{\Omega}(f^*)$ e solução $(x(t),y(t))$ de

$$(**)\quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f^{**}(t,x,y)-g(x).p(y) \end{cases}$$

tal que $(x(0),y(0)) = (x_1,y_1)$, satisfazendo:

(i) $(x(t),y(t)) \in D_0 \subset R^2$; D_0 compacto

(ii) $\dot{V}_{(**)}(x(t),y(t)) = 0$, para qualquer $t \in R$.

Afirmamos que $U \subset E$.

De fato, se $(x,y) \in U$ temos:

$$0 = \dot{V}_{(**)}(t,x,y) = \frac{-y.f^{**}(t,x,y)}{p(y)} \leq \frac{-y.F(x,y)}{p(y)} \leq 0$$

Logo $\frac{y.F(x,y)}{p(y)} = 0$, e como $\frac{1}{p(y)} > 0$, para todo $y \in R$, temos:

$y.F(x,y) = 0$, e portanto $(x,y) \in E$.

Concluimos assim que $U \subset E$.

Vamos mostrar agora que $\Omega \cap \{(x,0) | x \in R\} \neq \phi$.

Suponhamos que isso não seja verdade. Então para qualquer $(x,y) \in \Omega$ temos $y \neq 0$.

Como Ω é compacto existe $\alpha > 0$ tal que para $(x,y) \in \Omega$ temos $|y| > \alpha$.

Do fato de Ω ser não vazio e invariante relativamente a (*), existe $f^{**} \in \hat{\Omega}(f^*)$ e solução $(x(t),y(t))$ de

$$(**)\quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f^{**}(t,x,y)-g(x).p(y) \end{cases}$$

tal que $(x(t),y(t)) \in \Omega$, qualquer que seja $t \in R$.

Logo $|y(t)| > \alpha$ para todo $t \in R$, e então $|x(t)| \to \infty$, o que é uma contradição.

Seja $\tilde{x} \in R$ tal que $(\tilde{x},0) \in \Omega$.

Se $\tilde{x} = 0$, o lema está provado.

Suponhamos $\tilde{x} \neq 0$. Como Ω é invariante segue que existe solução $(x(t),y(t))$ de um sistema do tipo (**) tal que $(x(0),y(0)) = (\tilde{x},0)$ e $(x(t),y(t)) \in \Omega$, para todo $t \in R$.

Da hipótese (h_2^1) segue que existe $\varepsilon > 0$ tal que:

$$\Omega \cap B_\varepsilon(\tilde{x},0) \subset E \cap B_\varepsilon(\tilde{x},0) \subset (\bigcup_{i\in J} Hi) \cup (\bigcup_{j\in J} V_j),$$

onde $$\overbrace{P_x(\bigcup_{j\in J} V_j)}^{o} = \phi \quad e \quad \overset{o}{\overline{P_y(\bigcup_{i\in I} H_i)}} = \phi$$

Observemos que o eixo dos x tem que ser um dos H_i.

Consideremos $\bar{t} > 0$ tal que $(x(t),y(t)) \in \Omega \cap B_\varepsilon(\tilde{x},0)$, para todo $t \in [0,\bar{t}]$.

Afirmamos que não existe t_1 tal que $x(t_1) = x_1$, $y(t_1) = y_1$ com $x_1 > \tilde{x}$ e $y_1 > 0$.

Observação:

Da mesma maneira como será feito a seguir, demonstra-se que não existe t_1 tal que $x(t_1) = x_1$, $y(t_1) = y_1$ com $x_1 < \tilde{x}$ e $y_1 > 0$ ou $x_1 < \tilde{x}$ e $y_1 < 0$ ou $x_1 > \tilde{x}$ e $y_1 < 0$.

Suponhamos que existe $t_1 \in [0,\bar{t}]$ nas condições acima.
$y(t)$ sendo contínua assume todos os valores entre 0 e y_1.

Afirmamos que existe $\tilde{t} \in [0,t_1]$ tal que $y(\tilde{t}) \notin \overline{p_y(\bigcup_{i\in I} H_i)}$

Se isso não fosse verdade, teríamos que para qualquer $t \in [0,t_1]$, $y(t) \in \overline{p_y(\bigcup_{i\in I} H_i)}$. Logo o intervalo $(0,y_1)$ estaria contido em $\overline{p_y(\bigcup_{i\in I} H_i)}$, e portanto $\overset{o}{\overline{p_y(\bigcup_{i\in J} H_i)}} \neq 0$, o que contraria a hipótese.

Logo existe um intervalo aberto $A(\tilde{t})$, $\tilde{t} \in A(\tilde{t})$ tal que para todo

$t \in A(\tilde{t})$, $y(t) \notin \overline{p_y(\bigcup_{i\in I} H_i)}$ ou seja, $y(t) \notin p_y(\bigcup_{i\in I} H_i)$.

Deste modo, para qualquer $t \in A(\tilde{t})$ temos $(x(t),y(t)) \notin \bigcup_{i\in I} H_i$, o que implica que para qualquer $t \in A(\tilde{t})$,

(A) $\qquad (x(t),y(t)) \in \bigcup_{j\in J} V_j$ e $(x(t),y(t)) \notin \bigcup_{i\in I} H_i$

Seja j_0 tal que $(x(\tilde{t}),y(\tilde{t})) \in V_{j_0}$.

Afirmamos que $(x(t),y(t)) \in V_{j_0}$, para todo $t \in A(\tilde{t})$.

Suponhamos que não. Nestas condições existe $t' \neq \tilde{t}$, $t' \in A(\tilde{t})$ tal que $(x(t'),y(t')) \in V_{j_1}$, onde $V_{j_1} \cap V_{j_0} = \phi$. É claro que $x(t') \neq x(\tilde{t})$, pois senão $(x(t'),y(t'))$ pertenceria a V_{j_0}.

Suponhamos que $x(t') > x(\tilde{t})$. (Se $x(\tilde{t}) > x(t')$ a demonstração que segue é análoga).

De (A), como $x(t)$ assume todos os valores entre $x(\tilde{t})$ e $x(t')$, segue que o intervalo $(x(\tilde{t}),x(t'))$ está contido em $\overset{o}{p_x}(\bigcup_{j\in J} V_j)$, o que é uma contradição pois, por hipótese $\widehat{p_x(\bigcup_{j\in J} V_j)} = \phi$.

Logo, para qualquer $t \in A(\tilde{t})$ temos $(x(t),y(t)) \in V_{j_0}$.

Portanto $x(t)$ é constante em $A(\tilde{t})$ e consequentemente $\dot{x}(t)=y(t)=0$ em $A(\tilde{t})$.

Assim chegamos a um absurdo, pois teríamos então que, para todo $t \in A(\tilde{t})$, $(x(t),y(t))$ pertenceria ao eixo dos x, o que contraria (A), uma vez que o eixo dos x é um dos segmentos H_i.

Logo não existe $t_1 \in [0,\tilde{t}]$ tal que $(x(t_1),y(t_1)) = (x_1,y_1)$ com $x_1 \neq \tilde{x}$ e $y \neq 0$, ou seja, para todo $t \in [0,\tilde{t}]$ temos $x(t) = \tilde{x}$ ou $y(t) = 0$.

Seja $V^{\tilde{x}}$ a perpendicular ao eixo dos x pelo ponto $(\tilde{x},0)$. Temos assim que $(x(t),y(t)) \in V^{\tilde{x}} \cup \{(x,0) | x \in R\}$ para todo $t \in [0,\bar{t}]$.

Se existisse τ tal que $y(\tau) > 0$, existiria intervalo aberto $B(\tau)$, $\tau \in B(\tau)$, de modo que $y(t) > 0$, para todo $t \in B(\tau)$.

Logo teríamos $x(t)$ crescente em $B(\tau)$, o que não é possível, pois $(x(t),y(t))$ não permaneceria em $V^{\tilde{x}}$.

Analogamente não existe $\tau \in R$ tal que $y(\tau) < 0$.

Concluimos assim que $y(t) \equiv 0$ para $t \in [0,\bar{t}]$.

Como $y.f^{**}(t,x,y) \geq 0$, para todo $t,x,y \in R$ temos $f^{**}(t,x,0) = 0$, para todo t, $x \in R$.

Assim, para todo $t \in [0,\bar{t}]$ temos:

$0 = \dot{y}(t) = -f^{**}(t,x(t),0) - g(x(t)).p(0)$, e portanto, $g(x(t)).p(0) = 0$.

Consequentemente $g(x(t)) = 0$ para todo $t \in [0,\bar{t}]$; em particular, $g(x(0)) = g(\tilde{x}) = 0$, e portanto $\tilde{x} = 0$, o que contraria a hipótese.

Logo a origem pertence a $\Omega \subset M$.

Lema II-6:

Suponhamos que as hipótese h_1, h_2, h_2'', h_3, h_4, h_5 e h_5' estejam satisfeitas. Então a origem pertence a todo conjunto compacto e invariante relativamente a (II-2').

Prova

Sejam M um conjunto compacto e invariante relativamente a (II-2') e $(x_0,y_0) \in M$.

Como M é invariante existe $f^* \in \hat{\Omega}(f)$ e solução $(x_0(t),y_0(t))$ de

$$(*) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f^*(t,x,y)-g(x).p(y) \end{cases}$$

com $(x_0(0),y_0(0)) = (x_0,y_0)$ tal que $(x_0(t),y_0(t)) \in M$, para todo $t \in R$.

Seja Ω o conjunto w-limite dessa solução.

Do Lema II-5 temos os seguintes resultados:

a) $\Omega \subset M$; Ω invariante relativamente ao sistema (*).

b) $\Omega \subset E$ onde $E = \{(x,y) \in R^2 \mid y.F(x,y)=0\}$

c) $\Omega \cap \{(x,0) \mid x \in R\} \neq \phi$

Suponhamos que $(0,0) \notin \Omega$.

Consideremos então $\tilde{x} \in R$, $\tilde{x} \neq 0$, tal que $(\tilde{x},0) \in \Omega$. Logo $\Omega \subset E - \{(0,0)\}$.

De (c) e da hipótese (h_2'') podemos concluir que $\Omega \subset R^+ \cup R^-$, pois Ω é conexo, como já vimos.

Portanto, para todo $(x,y) \in \Omega$ temos: $x \neq 0$ e $y = 0$.

Por outro lado, existe $f^{**} \in \hat{\Omega}(f^*)$ e solução $(x(t),y(t))$ de

$$(**) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f^{**}(t,x,y)-g(x).p(y) \end{cases}$$

com $(x(0),y(0)) = (\tilde{x},0)$ e $(x(t),y(t)) \in \Omega$, para todo $t \in R$.

Como $y.f^{**}(t,x,y) \geq 0$ para todo $t,x,y \in R$, temos $f^{**}(t,x,0) = 0$ para todo t, $x \in R$.

Nestas condições $0 = -f^{**}(t,x(t),0) - g(x(t)).p(0)$, ou seja, $g(x(t)) = g(\tilde{x}) = 0$, qualquer que seja $t \in R$, e portanto $\tilde{x} = 0$, o que é uma contradição.

Logo a origem pertence a $\Omega \subset M$.

Teorema II-1

Suponhamos satisfeitas as hipóteses $h_1 - h_7$, bem como h_2' ou h_2''.

Então para toda solução $x(t)$ de (II-1) temos $x(t) \to 0$ e $\dot{x}(t) \to 0$, quando $t \to \infty$.

Prova:

Seja $(x(t),y(t))$ uma solução de (II-1').

Do Lema II-3 segue que essa solução é limitada no futuro.

Do Lema II-4 segue que Ω é compacto, conexo e invariante relativamente a (II-2'). Do Lema II-5 ou II-6, conforme usemos h_2' ou h_2'', concluimos que $(0,0) \in \Omega$.

Logo existe uma sequência (t_m), $t_m \to \infty$ quando $m \to \infty$, com $(x(t_m),y(t_m)) \to (0,0)$.

O Lema II-2 nos diz que dado $\varepsilon > 0$ existem $T = T(\varepsilon) > 0$ e $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tais que se $t \geq t_0 \geq T(\varepsilon)$ e $|x_0| + |y_0| < \delta$ então $|\bar{x}(t)| + |\bar{y}(t)| < \varepsilon$, para toda solução $(\bar{x}(t),\bar{y}(t))$ de (II-1') tal que $(\bar{x}(t_0),\bar{y}(t_0)) = (x_0,y_0)$.

Como $(x(t_m),y(t_m)) \to (0,0)$, quando $m \to \infty$, existe n_0 tal que $t_{n_0} \geq T$ e $|x(t_{n_0})| + |y(t_{n_0})| < \delta$.

Logo para todo $t \geq t_{n_0}$ temos $|x(t)| + |y(t)| < \varepsilon$.

Portanto $x(t) \to 0$ e $y(t) \to 0$, quando $t \to \infty$.

Corolário II-2:

Suponhamos que alguma condição de unicidade com respeito ao problema do valor inicial esteja satisfeita para (II-1'). Suponhamos que estejam satisfeitas as hipóteses $h_1 - h_7$, bem como h_2' ou h_2'' e que

$k(t,0,0) = 0$, para todo $t \geq 0$.

Então a origem é globalmente assintóticamente estável em relação a (II-1').

Demonstração:

Segue do Corolário II-1 e do Teorema anterior.

Observação:

Interessantes exemplos de Equações Diferenciais Ordinárias de 2ª Ordem, que tem interpretação física, podem ser encontradas em [2].

CAPÍTULO III

Neste capítulo procuraremos obter resultados na linha do capítulo anterior, para sistemas de Equações Diferenciais.

Consideremos a equação:

$$\text{(III)} \qquad \ddot{x} + f(t,x,\dot{x}) + g(x).p(\dot{x}) + h(t,x,\dot{x}) + k(t,x,\dot{x}) = 0,$$

ou seu equivalente:

$$\text{(III-1)} \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} + f(t,x,y) + g(x).p(y) + h(t,x,y) + k(t,x,y) = 0, \end{cases}$$

onde $x, y \in R^n$, $t \in J = [0,\infty)$ e

$f(t,x,y) = col(f_1(t,x_1,y_1), f_2(t,x_2,y_2), \ldots, f_n(t,x_n,y_n))$.

$g(x) = diag. (g_1(x_1), g_2(x_2), \ldots, g_n(x_n))$

$p(y) = col.(p_1(y_1), p_2(y_2), \ldots, p_n(y_n))$

$h(t,x,y) = col(h_1(t,x,y), h_2(t,x,y), \ldots, h_n(t,x,y))$

$k(t,x,y) = col(k_1(t,x,y), k_2(t,x,y), \ldots, k_n(t,x,y))$

são funções contínuas.

Explicitando (III-1) temos:

$$\text{(III-1)} \begin{cases} \dot{x}_j = y_j \quad ; \quad j = 1,2,\ldots, n \\ \dot{y}_j + f_j(t,x_j,y_j) + g_j(x_j).p_j(y_j) + h_j(t,x,y) + k_j(t,x,y)=0 \end{cases}$$

O objetivo nosso é obter condições para que toda solução $x(t)$ de (III) juntamente com a sua derivada $\dot{x}(t)$ tenda a zero, quando $t \to \infty$.

Para isso relacionaremos o comportamento das soluções de (III-1) com as soluções de:

$$\text{(III-2)} \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} + f(t,x,y) + g(x).p(y) = 0 \end{cases}$$

ou explicitamente:

$$\text{(III-2)}_j \quad \begin{cases} \dot{x}_j = y_j, \quad j = 1,2,\ldots, n \\ \dot{y}_j + f_j(t,x_j,y_j) + g_j(x_j).p_j(y_j) = 0 \end{cases}$$

Consideremos o seguinte conjunto de hipóteses em relação as funções que aparecem em (III-1):

(h_1) a) Para cada $(x,y) \varepsilon R^{2n}$ fixado, $f(t,x,y)$ é limitada em t.

b) f é uniformemente contínua em conjuntos da forma $R \times K$, onde $K \subset R^{2n}$ é compacto.

(h_2) $y_j.f_j(t,x_j,y_j) \geq y_j.F_j(x_j,y_j) \geq 0$, para x_j, $y_j \varepsilon R$, $j = 1,2,\ldots, n$; $t \varepsilon J$.

Seja $E_j = \{(\xi,\eta)\varepsilon R^2 | \eta.F_j(\xi,\eta)=0\}$; $j = 1,2, \ldots, n$

(h_2') Para cada $x_j^0 \neq 0$, $j = 1,2,\ldots, n$ existe $\varepsilon = \varepsilon(x_j^0) > 0$ tal que $E_j \cap B_\varepsilon((x_j^0,0)) \subset (\bigcup_{i\varepsilon I} H_{j_i}) \cup (\bigcup_{k\varepsilon K} V_{j_k})$, onde H_{j_i} são segmen tos horizontais e os V_{j_k} são segmentos verticais e

(i) $\quad \overset{\circ}{\overbrace{P_{x_j}(\bigcup_{k\in K} V_{j_k})}} \quad \text{e} \quad \overset{\circ}{\overline{P_{y_j}(\bigcup_{i\in I} H_{ji})}} = \phi$

onde p_{x_j} e p_{y_j} são respectivamente as projeções sobre o eixo x_j e eixo y_j.

Observação:

A bola $B_\varepsilon((x_j^0,0))$ é considerada no R^2 enquanto a aderência e interior que aparecem em (i) são consideradas em R.

(h_2'') Para cada j, $j = 1,2,\ldots, n$ os conjuntos:

$$R_j^+ = \{(x_j,0)\varepsilon R^2 | x_j>0\} \quad \text{e} \quad R_j^- = \{(x_j,0)\varepsilon R^2 | x_j<0\}$$

são componentes conexas com respeito ao espaço topológico $E_j-\{(0,0)\}$.

(h_3) $y_j.[f_j(t,x_j,y_j)+h_j(t,x,y)] \geq 0$ em $J \times R^{2n}$, $j = 1,2,\ldots, n$

(h_4) $x_j.g_j(x_j) > 0$ para todo $x_j \varepsilon R$, $x_j \neq 0$ e $\int_0^{x_j} g_j(s)ds \to \infty$, quando $|x_j| \to \infty$, $j = 1, 2, \ldots, n$

(h_5) $p_j(y_j) > 0$ para todo $y_j \varepsilon R$ e $\int_0^{y_j} \frac{s}{p_j(s)}\, ds \to \infty$, quando $|y_j| \to \infty$, $j = 1,2,\ldots, n$.

(h_5') $M > 0$, constante tal que $0 < \frac{1}{M} \leq p_j(y_j) \leq M$, para todo $y_j \varepsilon R$, $j = 1,2,\ldots, n$.

(h_6) Existe β: $[0,\infty) \to R$ contínua de modo que $|k(t,x,y)| < \beta(t)$, para todo $t \in J$ e para todo $x, y \in R^n$, e além disso $\int_0^\infty \beta(t)dt < \infty$.

(h_7) Para qualquer compacto B de R^n existe $\gamma_B: J \to R$ contínua tal que $\gamma_B(t) \to 0$, quando $t \to \infty$ e $\left|\int_s^{s+t} h(\tau,x(\tau),y(\tau)d\tau\right| \leq \gamma_B(s)$, para qualquer $t \in [0,1]$, onde $x(t)$ e $y(t)$ são funções contínuas arbitrárias de J em B.

Lema III-1:

Suponhamos válidas as hipótese h_3, h_4, h_5 e h_7. Então para cada $\varepsilon > 0$ existem $T = T(\varepsilon)$ e $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se $t \geq t_0 \geq T(\varepsilon)$ e $|x_0| + |y_0| < \delta$, então $|x(t)| + |y(t)| < \varepsilon$, para qualquer solução $(x(t),y(t))$ de (III-1) satisfazendo $x(t_0) = x_0$ e $y(t_0) = y_0$.

Demonstração:

Seja $\varepsilon > 0$ dado.

Consideremos a função de Lyapunoff: $V: J \times R^{2n} \to R^n$ definida da seguinte maneira:

$$V(t,x,y) = \left[\sum_{j=1}^{n}\left(\int_0^{y_j} \frac{u}{p_j(u)}\, du + \int_0^{x_j} g_j(s)ds\right)\right]^{1/2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot M^{3/2} \cdot \int_t^\infty \beta(s)ds$$

onde $M > 0$ é tal que $M \geq p_j(y_j) \geq \frac{1}{M} > 0$, para $y_j \in [-1,1]$, $j = 1,2, \ldots, n$.

Definimos $$2m = \min_{|x|+|y|=\varepsilon} \left[\sum_{j=1}^{n}\left(\int_0^{y_j} \frac{u}{p_j(u)}\, du + \int_0^{x_j} g_j(s)ds\right)\right]^{1/2}$$

De (h_4) e (h_5) segue que $m > 0$. Logo:

$$V(t,x,y) \geq \Big[\sum_{j=1}^{n}\Big(\int_0^{y_j} \frac{u}{p_j(u)}\,du + \int_0^{x_j} g_j(s)ds\Big)\Big]^{1/2}, \quad \text{para todo} \quad t \in J,$$

$x, y \in R^n$ e

$$\text{(I)} \quad \inf_{\substack{|x|+|y|=\varepsilon \\ t\geq 0}} V(t,x,y) \geq \min_{|x|+|y|=\varepsilon} \Big[\sum_{j=1}^{n}\Big(\int_0^{y_j} \frac{u}{p_j(u)}\,du + \int_0^{x_j} g_j(s)ds\Big)\Big]^{1/2} =$$

$$= 2m > 0$$

Sejam: $T = T(\varepsilon) \geq 0$ tal que $\left|\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot M^{3/2}\int_T^{\infty}\beta(s)ds\right| < m$ e

$0 < \delta = \delta(\varepsilon) < \varepsilon$ de modo que

$$\Big[\sum_{j=1}^{n}\Big(\int_0^{y_j} \frac{u}{p_j(u)}\,du + \int_0^{x_j} g_j(s)ds\Big)\Big]^{1/2} < m, \quad \text{para} \quad |x| + |y| \leq \delta(\varepsilon)$$

Assim, para $t \geq T(\varepsilon)$

$$V(t,x,y) \leq \Big[\sum_{j=1}^{n}\Big(\int_0^{y_j} \frac{u}{p_j(u)}\,du + \int_0^{x_j} g_j(s)ds\Big)\Big]^{1/2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot M^{3/2} \cdot \int_T^{\infty}\beta(s)ds$$

e portanto,

$$\text{(II)} \quad \sup_{\substack{|x|+|y|=\delta(\varepsilon) \\ t\geq T(\varepsilon)}} V(t,x,y) \leq \max_{|x|+|y|=\delta(\varepsilon)} \Big[\sum_{j=1}^{n}\Big(\int_0^{y_j} \frac{u}{p_j(u)}du + \int_0^{x_j} g_j(s)ds\Big)\Big]^{1/2} +$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot M^{3/2} \cdot \int_T^{\infty}\beta(s)ds \quad < \quad m + m = 2m$$

Além disso, para $(x,y) \neq (0,0)$, $t \geq 0$ e $y_j \in [-1,1]$, $j = 1, 2, \ldots, n$, temos:

$$\dot{V}_{(III-2)}(t,x,y) = \frac{\partial V}{\partial t}(t,x,y) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_j}(t,x,y) \cdot \dot{x}_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_j}(t,x,y) \cdot \dot{y}_j =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot M^{3/2} \cdot \beta(t) + \left[\frac{\sum_{j=1}^{n} g_j(x_j) \cdot y_j}{2\Big[\sum_{j=1}^{n}\Big(\int_0^{y_j} \frac{u}{j(u)}\,du + \int_0^{x_j} g_j(s)ds\Big)\Big]^{1/2}}\right] +$$

$$+\left[\frac{\sum_{j=1}^{n}\frac{y_j}{p_j(y_j)}\cdot\left[-f_j(t,x_j,y_j)-g_j(x_j)\cdot p_j(y_j)-h_j(t,x,y)-k_j(t,x,y)\right]}{2\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\int_0^{y_j}\frac{u}{p_j(u)}\,du+\int_0^{x_j}g_j(s)ds\right)\right]^{1/2}}\right]=$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot M^{3/2}\cdot\beta(t)-\left[\frac{\sum_{j=1}^{n}\frac{y_j}{p_j(y_j)}(f_j(t,x_j,y_j)+h_j(t,x,y)}{2\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\int_0^{y_j}\frac{u}{p_j(u)}\,du+\int_0^{x_j}g_j(s)ds\right)\right]^{1/2}}\right]-$$

$$-\left[\frac{\sum_{j=1}^{n}\frac{y_j}{p_j(y_j)}\cdot k_j(t,x,y)}{2\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\int_0^{y_j}\frac{u}{p_j(u)}\,du+\int_0^{x_j}g_j(s)ds\right)\right]^{1/2}}\right]\leq$$

$$\leq-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot M^{3/2}\,\beta(t)+\left[\frac{\sum_{j=1}^{n}\frac{|y_j|}{p_j(y_j)}\cdot|k_j(t,x,y)|}{2\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\int_0^{y_j}\frac{u}{p_j(u)}\,du+\int_0^{x_j}g_j(s)ds\right)\right]^{1/2}}\right]\leq$$

$$\leq-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot M^{3/2}\cdot\beta(t)+\left[\frac{M\cdot\beta(t)\cdot\sum_{j=1}^{n}|y_j|}{2\left[\frac{1}{M}\cdot\sum_{j=1}^{n}\left(\int_0^{y_j}u\,du+M\int_0^{x_j}g_j(s)ds\right)\right]^{1/2}}\right]=$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot M^{3/2}\cdot\beta(t)+\left[\frac{M\cdot\beta(t)\cdot\sum_{j=1}^{n}|y_j|}{2\left[\frac{1}{2M}\sum_{j=1}^{n}\left(y_j^2+2M\int_0^{x_j}g_j(s)ds\right)\right]^{1/2}}\right]=$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot M^{3/2}\cdot\beta(t)+\frac{M\cdot\beta(t)\cdot\sum_{j=1}^{n}|y_j|}{\frac{2}{(2M)^{1/2}}\left[\sum_{j=1}^{n}\left(y_j^2+2M\int_0^{x_j}g_j(s)ds\right)\right]^{1/2}}$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot M^{3/2}\cdot\beta(t)+\frac{\sqrt{2}\cdot M^{3/2}\cdot\beta(t)\cdot\sum_{j=1}^{n}|y_j|}{2\left[\sum_{j=1}^{n}\left(y_j^2+2M\int_0^{x_j}g_j(s)ds\right)\right]^{1/2}}\leq 0$$

Suponhamos agora que existam $t_0 \geq T(\varepsilon)$, $(x_0,y_0)\in R^{2n}$ com

$|x_0| + |y_0| < \delta(\varepsilon)$ e que, para alguma solução $(x(t),y(t))$de (III-1) satisfazendo $(x(t_0),y(t_0)) = (x_0,y_0)$ tenhamos algum $\bar{t} > t_0$ onde $|x(\bar{t})| + |y(\bar{t})| \geq \varepsilon$.

Então existem números reais t_1, t_2, $t_0 < t_1 < t_2 \leq \bar{t}$ tais que $|x(t_1)| + |y(t_1)| = \delta(\varepsilon)$ e $|x(t_2)| + |y(t_2)| = \varepsilon$ e $\delta(\varepsilon) \leq |x(t)| + |y(t)| \leq \varepsilon$, para $t \in [t_1,t_2]$.

De (I) e (II) segue que:

$$V(t_1,x(t_1),y(t_1)) < V(t_2,x(t_2),y(t_2))$$

e como $(x(t),y(t)) \neq (0,0)$ para $t \in (t_1,t_2)$ concluimos que $V(t,x(t),y(t))$ é diferenciável em (t_1,t_2).

Logo existe $s \in (t_1,t_2)$ tal que $\dot{V}(s,x(s),y(s)) > 0$, o que é uma contradição.

Corolário III-1:

Se impusermos que (III-1) satisfaça alguma condição de unicidade com relação ao problema do valor inicial e que sejam satisfeitas as hipóteses do Lema III-1, com $k_j(t,0,0) = 0$, para todo $t \geq 0$ e $j = 1, 2, \ldots, n$, teremos como resultado que a solução nula de (III-1) é uniformemente estável.

Prova:

Vamos mostrar inicialmente que a função nula é solução de (III-1).

a) $k_j(t,0,0) = 0$ para todo $t \geq 0$, $j = 1, \ldots, n$, por hipótese

b) Da continuidade de g e de (h_4) temos que $x_j = 0$ é o único ponto onde $g_j(0) = 0$, para todo $j = 1, \ldots, n$.

Logo $g_j(0).p_j(0) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n$

c) Como f e h são funções contínuas, e portanto, $f + h$ contínua, da hipótese (h_3) segue que $[f_j(t,x_j,y_j)+h_j(t,x,y)] = 0$ se $y_j = 0$, para todo $j = 1, 2, \ldots, n$

Assim, $f_j(t,0,0) + h_j(t,0,0) = 0$ para todo $t \geq 0$ e todo $j = 1, 2, \ldots, n$, e nestas condições

$f_j(t,0,0) + g_j(0).p_j(0) + h_j(t,0,0) + k_j(t,0,0) = 0$, para todo $t \geq 0$ e $j = 1,2, \ldots, n$.

Deste modo o Corolário é consequência do Lema III-1.

Lema III-2:

Suponhamos válidas as hipóteses h_3, h_4, h_5, h_5' e h_6.

Então toda solução de (III-1) é limitada no futuro.

Demonstração:

Seja $$w(t,x,y) = \left[1 + \sum_{j=1}^{n} \left(\int_0^{y_j} \frac{u}{p_j(u)}\,du + \int_0^{x_j} g_j(s)ds\right)\right]^{1/2} + \frac{\sqrt{2}}{2}.M^{3/2}.\int_t^{\infty} \beta(s)ds$$

Então temos: $$w(t,x,y) \geq \left[1 + \sum_{j=1}^{n} \left(\int_0^{y_j} \frac{u}{p_j(u)}\,du + \int_0^{x_j} g_j(s)ds\right)\right]^{1/2} = \delta(x,y)$$

Observemos que $\delta(x,y) \to \infty$, quando $|x_j| + |y_j| \to \infty$, $j = 1,2,\ldots,n$

Além disso, para todo $x, y \in R^n$ e $t \geq 0$ temos:

$$\dot{W}_{(III-1)}(t,x,y) = \frac{\partial w}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial x_j}\ (t,x,y).\dot{x}_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial y_j}.(t,x,y).\dot{y}_j =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}.\ M^{3/2}.\beta(t) + \frac{\sum_{j=1}^{n} g_j(x_j).y_j}{2\left[1+\sum_{j=1}^{n} \left(\int_0^{y_j} \frac{u}{p_j(u)}\,du + \int_0^{x_j} g_j(s)ds\right)\right]^{1/2}} +$$

$$+ \frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{y_j}{p_j(y_j)} \cdot \left[-f_j(t,x_j,y_j) - g_j(x_j).p_j(y_j) - h_j(t,x,y) - k_j(t,x,y)\right]}{2\left[1 + \sum_{j=1}^{n} \left(\int_0^{y_j} \frac{u}{p_j(u)}\,du + \int_0^{x_j} g_j(s)ds\right)\right]^{1/2}} =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}.\ M^{3/2}.\beta(t) - \frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{y_j}{p_j(y_j)}\left[f_j(t,x_j,y_j) + h_j(t,x,y)\right]}{2\left[1+\sum_{j=1}^{n} \left(\int_0^{y_j} \frac{u}{p_j(u)}\,du + \int_0^{x_j} g_j(s)ds\right)\right]^{1/2}} -$$

$$- \frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{y_j}{p_j(y_j)} \cdot k_j(t,x,y)}{2\left[1+\sum_{j=1}^{n} \left(\int_0^{y_j} \frac{u}{p_j(u)}\,du + \int_0^{x_j} g_j(s)ds\right)\right]^{1/2}} \leq$$

$$\leq -\frac{\sqrt{2}}{2}.\ M^{3/2}.\beta(t) + \frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{|y_j|}{p_j(y_j)} \cdot |k_j(t,x,y)|}{2\left[1+\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{M} \int_0^{y_j} u\,du + \int_0^{x_j} g_j(s)ds\right)\right]^{1/2}} \leq$$

$$\leq -\frac{\sqrt{2}}{2}.\ M^{3/2}.\beta(t) + \frac{M\sum_{j=1}^{n} |y_j|.\beta(t)}{2\left[1+\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{y_j^2}{2M} + \int_0^{x_j} g_j(s)ds\right)\right]^{1/2}} =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}.\ M^{3/2}.\beta(t) + \frac{M.\sum_{j=1}^{n} |y_j|.\beta(t)}{2\left[1 + \frac{1}{2M} \sum_{j=1}^{n} \left(y_j^2 + 2M \int_0^{x_j} g_j(s)ds\right)\right]^{1/2}} =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}.\ M^{3/2}.\beta(t) + \frac{M.\sum_{j=1}^{n} |y_j|.\beta(t)}{\frac{2}{(2M)^{1/2}}\left[2M+\sum_{j=1}^{n} \left(y_j^2 + 2M \int_0^{x_j} g_j(s)ds\right)\right]^{1/2}} =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot M^{3/2}.\beta(t) + \frac{\sqrt{2}}{2}.M^{3/2}. \frac{\sum_{j=1}^{n} |y_j|.\beta(t)}{\left[2M+\sum_{j=1}^{n}(y_j^2+2M\int_0^{x_j} g_j(s)ds\right]^{1/2}} \leq 0$$

Logo, do Lema II-1 segue a tese.

Lema III-3

Suponhamos válidas as hipóteses h_3 - h_4 - h_5 e h_6. Seja $(\bar{x}(t),\bar{y}(t))$ uma solução de (III-1) e para cada $j = 1, 2, \ldots, n$ consideremos o sistema:

$$(\text{III-1})_j \begin{cases} \dot{x}_j = y \\ \dot{y}_j + f_j(t,x_j,y_j) + g_j(x_j).p_j(y_j)+h_j(t,\hat{x}_j,\hat{y}_j)+k_j(t,\hat{x}_j,\hat{y}_j)=0 \end{cases}$$

onde $\hat{x}_j = (\bar{x}_1(t),\bar{x}_2(t), \ldots, \bar{x}_{j-1}(t), x_j, \bar{x}_{j+1}(t), \ldots,\bar{x}_n(t))$

$\hat{y}_j = (\bar{y}_1(t), \bar{y}_2(t), \ldots, \bar{y}_{j-1}(t), y_j, \bar{y}_{j+1}(t),\ldots, \bar{y}_n(t))$

Então para cada $\varepsilon > 0$ existem $T = T(\varepsilon) > 0$ e $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que para $t \geq t_0 \geq T(\varepsilon)$ e $(x_0^j,y_0^j) \in R_j^2$, com $|x_0^j| + |y_0^j| < \delta(\varepsilon)$ implicam $|x_j(t)| + |y_j(t)| < \varepsilon$, para toda solução $(x_j(t), y_j(t))$ de $(\text{III-1})_j$ satisfazendo $x_j(t_0) = x_0^j$ e $y_j(t_0) = y_0^j$.

A demonstração segue imediatamente do Lema II-2, uma vez que para cada $j = 1, 2, \ldots, n$ estamos nas condições do referido lema.

Lema III-4:

Suponhamos válidas as hipóteses h_1, h_3, h_4, h_5, $h_5^!$, h_6 e h_7. Então o conjunto w-limite de toda solução $(x(t),y(t))$ de (III-1) é compacto, conexo e invariante relativamente a (III-2).

Prova:

Do Lema III-2 segue que toda solução de (III-1) é limitada no futuro, e portanto, se Ω é o conjunto w-limite desta solução, Ω é compacto.

Fazendo $P(t,x,y) = \begin{pmatrix} y \\ -f(t,x,y)-g(x).p(y) \end{pmatrix}$ e

$$Q(t,x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ -h(t,x,y)-k(t,x,y) \end{pmatrix}$$

podemos ver que P e Q satisfazem as hipoteses do Corolário I-3; basta considerar em P a hipótese (h_1) e em Q as hipóteses (h_6) e (h_7).

Assim, do Corolário I-3, no caso em que $S \equiv 0$, segue que o conjunto w-limite de toda solução $(x(t),y(t))$ de (III-1) é conexo, compacto e invariante relativamente a (III-2).

Lema III-5

Suponhamos válidas as hipóteses h_1, h_2, $h_2^!$, h_3, h_4, h_5 e $h_5^!$. Então a origem do plano R_j^2 pertence a $p_j(M)$ para todo conjunto compacto M, invariante relativamente a (III-2) onde, se $(x,y) = (x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)$ então $p_j(x,y) = (x_j,y_j) \in R^2$; $j = 1,2, \ldots, n$.

Prova:

A demonstração segue do Lema II-5 desde que $p_j(M) \subset R_j^2$ seja invariante relativamente a $(III\text{-}2)_j$, para $j = 1, 2, \ldots, n$.

Vamos mostrar que para todo conjunto $M \subset R^{2n}$, compacto e invariante relativamente a (III-2), o conjunto $p_j(M) \subset R_j^2$ é invariante relativamente a $(III\text{-}2)_j$, para todo $j = 1, 2, \ldots, n$.

Seja $(x_j^0, y_j^0) \in p_j(M)$; então existe $(x_0, y_0) \in M$ tal que $p_j(x_0, y_0) = (x_j^0, y_j^0)$.

Como $(x_0, y_0) \in M$, M invariante, então existe $f^* \in \hat{\Omega}(f)$ e solução $(x(t), y(t))$ de

$$(*) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f^*(t,x,y) - g(x).p(y) \end{cases}$$

tal que $(x(t), y(t)) \in M$, para todo $t \in R$ e $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$.

Logo existe (t_m), $t_m \to \infty$ quando $m \to \infty$ tal que $f_{t_m} \to f^*$, quando $m \to \infty$. Isto equivale a dizer que $f_{j_{t_m}} \to f_j^*$, $j = 1, 2, \ldots, n$, quando $m \to \infty$, e portanto, $f_j^* \in \hat{\Omega}(f_j)$, para todo $j = 1, 2, \ldots, n$.

De $(x(t), y(t))$ ser solução de $(*)$ podemos concluir que $(x_j(t), y_j(t))$ é solução de

$$(*) \quad \begin{cases} \dot{x}_j = y_j \\ \dot{y}_j = -f_j^*(t, x_j, y_j) - g(x_j).p(y_j) \end{cases}$$

com $(x_j(0), y_j(0)) = (x_j^0, y_j^0)$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Por outro lado, $(x(t), y(t)) \in M$, para todo $t \in R$, logo $p_j(x(t), y(t)) \in p_j(M)$, qualquer que seja $j = 1, 2, \ldots, n$.

Mas, $p_j(x(t), y(t)) = (x_j(t), y_j(t))$ e consequentemente $(x_j(t), y_j(t)) \in p_j(M)$, para todo $t \in R$ e $j = 1, 2, \ldots, n$.

Portanto $p_j(M)$ é invariante relativamente a $(III-2)_j$.

Lema III-6

Suponhamos válidas as hipóteses h_1, h_2, h_2'', h_3, h_4, h_5 e h_5'. Então a origem do plano R_j^2 pertence a $p_j(M)$, para todo conjunto compacto M, invariante relativamente a (III-2), onde se $(x,y) = (x_1,\dots,x_n,y_1,y_2,\dots,y_n)$, então $p_j(x,y) = (x_j,y_j) \in R^2$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Prova:

Seja $M \subsetneq R^{2n}$ compacto e invariante relativamente a (III-2).

Do Lema III-5 sabemos que $p_j(M)$ é compacto e invariante relativamente a $(III-2)_j$, $j = 1, 2, \dots, n$.

E, do Lema II-6 segue que $(0,0)_j \in \Omega_j \subset p_j(M)$, para todo $j = 1, 2, \dots, n$.

Teorema III-1

Suponhamos válidas as hipóteses $h_1 - h_7$, bem como h_2' ou h_2''. Então para toda solução $(x(t),y(t))$ de (III-1) temos que $x(t) \to 0$ e $y(t) \to 0$, quando $t \to \infty$.

Prova:

Seja $(\bar{x}(t),\bar{y}(t))$ uma solução qualquer de (III-1).

Do Lema III-2 segue que esta solução é limitada no futuro. Seja Ω o seu conjunto w-limite.

Pelo Lema III-4 Ω é compacto e invariante relativamente a (III-2).

Do Lema III-5 ou III-6, conforme usemos (h_2') ou (h_2'') segue que $(0,0)_j \varepsilon \Omega_j$, para cada $j = 1, 2, \ldots, n$, onde Ω_j é o conjunto w-limite de $(\bar{x}_j(t),\bar{y}_j(t))$.

Logo, existe sequência (t_m^j) tal que $t_m^j \to \infty$, quando $m \to \infty$, e $(\bar{x}_j(t_m^j),\bar{y}_j(t_m^j)) \to (0,0)$, quando $m \to \infty$.

Como $(\bar{x}_j(t),\bar{y}_j(t))$ é solução de $(III\text{-}1)_j$, do Lema III-3 podemos garantir que dado $\varepsilon > 0$, existem $T = T(\varepsilon) > 0$ e $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se $t \geq t_0 \geq T(\varepsilon)$ e $(x_0^j,y_0^j) \varepsilon R_j^2$ com $|x_0^j| + |y_0^j| < \delta(\varepsilon)$ implicam $|\bar{x}_j(t)| + |\bar{y}_j(t)| < \varepsilon$, se $\bar{x}_j(t_0) = x_j^0$ e $\bar{y}_j(t_0) = y_j^0$.

Do fato de $(\bar{x}_j(t_m^j), \bar{y}_j(t_m^j)) \to (0,0)$, quando $m \to \infty$, existe n_0 tal que $t_{n0} \geq T$ e $|x(t_{n0})| + |y(t_{n0})| < \delta$. Logo, para todo $t > t_{n0}$ temos $|\bar{x}_j(t)| + |\bar{y}_j(t)| < \varepsilon$.

Portanto $\bar{x}_j(t) \to 0$ e $\bar{y}_j(t) \to 0$, quando $t \to \infty$, para $j = 1, 2, \ldots, n$.

Corolário III-2:

Suponhamos que alguma condição de unicidade em relação ao problema do valor inicial seja satisfeita por (III-1), e que sejam válidas as hipóteses do Teorema III-1, com $k_j(t,0,0) = 0$, para todo $j = 1, 2, \ldots, n$.

Então a origem é globalmente assitóticamente estável para (III-1).

Prova:

Segue do Corolário III-1 e do Teorema III-1.

BIBLIOGRAFIA

(1) AVELLAR, C.E. - "Propriedades de Estabilidade das Soluções de Sistemas de Equações Diferenciais de 2ª Ordem" - Dissertação de Mestrado - São Carlos, 1973.

(2) LA SALLE, J.P. x LEFSCHETZ, S. - "Stability by Lyapunov's Direct Method with Applications". New York, Academic Press, 1961.

(3) MILLER, R.K. - "Asymptotic Behavior of Solutions of Nonlinear Differential Equations", Trans. of the American Math.Society, Vol. 115, Issue 3, March, 1965, pgs 400-416.

(4) MILLER, R.K. - "Asymptotic Behavior of Nonlinear Delay-Differential Equations", Journal of Differential Equations, vol. 1, nº 3, July - 1965, pgs 293-305.

(5-a) ONUCHIC, N. - "Stability Properties of a Second Order Differential Equations", Acta Mexicana de Ciencia y Tecnologia, vol. III, nº 1, pgs 3-8, 1969.

(5-b) ONUCHIC, N. - "Invariance Properties in the Differential Equations with Applications to Stability Problems - SIAM J. Control, 9:97 - 104, february, 1971.

(6) ONUCHIC, N.; ONUCHIC, L. de La Rosa; TABOAS, P.Zoëga x RODRIGUES, H. Munhoz - "Invariance, Stability and Applications" - Seminário 5 - Seminário de Ecuaciones Diferenciales, Centro de Investigación y Estudios Avanzados y Organización de Los Estados Americanos, México, Verano - 1972.

(7) PAVLU, L.C. - "Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias de 2ª Ordem" - Comportamento Assintótico - Dissertação de Mestrado - São Carlos, 1974.

(8) PRETTO, P.W. - "Estabilidade e Comportamento Assintótico das Soluções de Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias de 2ª Ordem" - Dissertação de Mestrado - São Carlos, 1975.

(9) RODRIGUES, H. M. - "Invariança para Sistemas não Autônomos de Equações Diferenciais com Retardamento e Aplicação" - Dissertação de Mestrado - São Carlos, 1970.

(10) RUAS, J.G. Fº - "Propriedades Assintóticas de Equações Diferenciais Ordinárias de 2ª Ordem Perturbadas de Equações Autônomas" - Dissertação de Mestrado - São Carlos, 1973.

(11) SELL, G.R. - "Nonautonomous Differential Equations and Topological Dynamics I - The Basic Theory", Transactions of the American Mathematical Society, vol. 127, nº 2, May-1967, pgs 241-261.