I.C.M.S.C.

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

OPERADORES HIPOELÍTICOS DE PRIMEIRA ORDEM

WADILSON KLEBER FABRI PEREIRA

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

SÃO CARLOS - SÃO PAULO
BRASIL

OPERADORES HIPOELÍTICOS DE PRIMEIRA ORDEM

WADILSON KLEBER FABRI PEREIRA

Orientador: Prof. Dr. Adalberto Panobianco Bergamasco

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Matemática.

SÃO CARLOS
1982

À minha mãe, Maria,
minha esposa Cleuza e aos meus filhos Simone, Wadilson Kleber e Guilherme que souberam compreender nossa ausência do lar.

A G R A D E C I M E N T O S

Ao Prof. Dr. Adalberto Panobianco Bergamasco pela orientação segura e amiga que sempre nos dispensou e pelo incentivo na realização deste trabalho.

Aos amigos Prof. Dr. Hermano Souza Ribeiro e Gerson Petronilho pela boa vontade que sempre tiveram em discutir conosco assuntos relacionados com este trabalho e pelas sugestões formuladas.

Aos professores e funcionários do Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos e do Departamento de Matemática da Universidade Federal de São Carlos pela acolhida e apoio que nos dispensaram.

Aos colegas do Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Maringá pelo incentivo na realização deste trabalho.

À Sra. Neube Elisabeth Stabili que realizou este ótimo trabalho de datilografia.

Ao Sr. José Augusto Evaristo Filho que fez o trabalho de impressão.

Este trabalho só foi possível graças ao apoio das entidades CAPES, CNPq, FAPESP, FINEP.

ABSTRACT

In 1971, F. Treves stated the equivalence between the hypoellipticity of LPDO of principal type and order $m > 0$ and the properties (P) and (Q). He proved the sufficiency of (P) and (Q) and the necessity of (Q).

By using the result of Moyer and Hörmander ((P) is necessary for local solvability) one obtains a proof the above mentioned equivalence.

Our purpose is to prove tnat (P) e (Q) are sufficient for the hypoellipticity of first-order LPDO of principal type.

We include a detailed construction of approximate solutions to Cauchy problems; this is necessary in order to obtain parametrices for our operators.

One contribution is the statement and proof of the non-existence of hypoelliptic first-order LPDO of principal type with C^∞ coefficients in $\Omega \subset R^n$, $n \geq 3$.

Wadilson Kleber Fabri Pereira

Adviser: Prof. Dr. Adalberto Panobianco Bergamasco

ÍNDICE

I N T R O D U Ç Ã O

Este trabalho constitui-se na nossa dissertação de mestrado, apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos- Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

A dissertação baseia-se no artigo de F.Treves "Hypoelliptic Partial Differential Equations of Principal Type. Sufficiente Conditions and Necessary Condition", publicado em Comm. Pure and Applied Math., vol. 24, 631-670, 1971. As propriedades (P) e (Q), introduzidas por F.Treves e L. Niremberg em 1963, são condições necessárias e suficientes para a hipoeliticidade de ODP de tipo principal e ordem $m > 0$, com coeficientes C^∞. A prova da suficiência das condições é baseada no teorema de L.Schwartz ([25]). A existência de inversos aproximados, em algum sentido, para ODP, chamados parametrizes, é uma das hipóteses do teorema. A construção de parametrizes exige soluções para certos problemas de Cauchy, em geral não lineares e sem solução exata. A existência de soluções aproximadas, com determinado grau de aproximação, é suficiente para a construção de parametrizes.

O trabalho trata de ODP de primeira ordem de tipo principal com coeficientes C^∞ e está dividido em quatro capítulos. O capítulo 1 contém informações necessárias para a compreensão do texto. A construção de soluções aproximadas para certos problemas de Cauchy, contida no artigo citado acima, é detalhado no capítulo 2. A construção da parametriz para ODP de primeira ordem em duas variáveis independentes é desen volvida no capítulo 4. O capítulo 3 ajuda a esclarecer o significado das propriedades (P) e (Q), prova a não existência de ODP de primeira ordem em R^n, $n \geq 3$, hipoelíticos e caracteriza os operadores hipoelíticos de primeira ordem de tipo principal em duas variáveis.

CAPÍTULO 1

Pré-Requisitos

Indicaremos por Ω um aberto do R^n, $x = (x_1,\dots,x_n)$ será um elemento do R^n e $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n)$ um elemento do R_n, onde R_n é o dual do R^n.

Seja $\mathbb{N}$ o conjunto dos números inteiros não negativos. Dada a n-upla $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, definimos:

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n, \qquad \alpha! = \alpha_1!\alpha_2!\dots \alpha_n!$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1}.x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}, \quad \text{onde} \quad x \in R^n$$

Além disto, se $\beta \in \mathbb{N}^n$,

$\alpha + \beta = (\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\dots,\alpha_n+\beta_n)$

$\alpha \leq \beta$ se $\alpha_j \leq \beta_j$, $1 \leq j \leq n$

Para cada $j = 1, 2, \dots, n$, escrevemos

$$Dx_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad D_{x_j} = \frac{1}{i} Dx_j, \quad \text{onde } i = \sqrt{-1}$$

e se $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $D_x^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} D_{x_2}^{\alpha_2} \dots D_{x_n}^{\alpha_n}$

De acordo com estas notações, um operador diferencial parcial linear de ordem m, pode ser escrito:

$$P(x,D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

onde $a_\alpha(x)$ são funções C^∞ e a valores complexos.

Em particular, se $m = 1$, podemos escrever:

$$P(x,D) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x) D_{x_j} + c(x)$$

Denotamos a <u>parte principal</u> de $P(x,D)$ por

$$Pm(x,D) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

O polinômio obtido, substituindo-se D por ξ é chamado <u>polinômio característico</u>

$$P(x,\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) . \xi^\alpha$$

O <u>símbolo principal</u> de $P(x,D)$ é o polinômio homogêneo de grau m em relação a ξ:

$$P_m(x,\xi) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$$

Em particular, se $m = 1$, escrevemos:

$$P_m(x,\xi) = P(x,\xi) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x) \xi_j$$

Indicaremos por $D'(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as distribuições sobre Ω e por $E'(\Omega)$ o espaço vetorial das distribuições com suporte compacto em Ω. (Veja, por exemplo, [1]).

Definição

Sejam E e F espaços vetoriais topológicos, $u: E \to F$ uma aplicação linear e contínua e y' uma forma linear contínua sobre F. Isto é,

$y': F \to C$. Definimos

$$^t u: F' \to E' \quad \text{por} \quad ^t u(y') = y' \circ u$$

A aplicação $^t u$ é chamada transposto de u. E' e F' são os duais de E e F, respectivamente.

Então, se $u \in D'(\Omega)$, $\phi \in C_c^{\infty}(\Omega)$, temos

$$\langle u, {}^t P\phi\rangle = \langle Pu, \phi\rangle.$$

Notemos que a parte principal de P e de $^t P$ difere apenas do fator $(-1)^m$.

Fórmula Geral de Leibniz

Para u e $v \in C^{\infty}(\Omega)$, vale:

$$P(D)(u.v) = \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} D^{\alpha}u.P^{(\alpha)}(D)v$$

onde $P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_{\alpha}D^{\alpha}$ e $P^{(\alpha)}(D)$ é o operador diferencial parcial obtido do polinômio

$$P^{(\alpha)}(\eta) = D_{\eta}^{\alpha}P(\eta),$$

trocando a variável η por D. (Ver, por exemplo, [1]).

Definição

Uma função $\phi \in C^{\infty}(R^n)$ é rapidamente decrescente no infinito se

$$\lim_{x\to\infty} |x^{\alpha}D^{\beta}\phi(x)| = 0 \ , \quad \forall\ \alpha,\beta \in \mathbb{N}^n$$

O conjunto das funções deste tipo é indicado por $S(R^n)$. Observemos que $C_c^{\infty}(R^n)$ é um subespaço vetorial de $S(R^n)$.

Definição

A transformada de Fourier de uma função $f \in S(R^n)$ é definida por

$$Ff(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{R^n} e^{-i<x,\xi>} f(x)dx$$

onde $<x,\xi> = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \ldots + x_n\xi_n$

Definição

A transformada inversa de Fourier de uma função $g \in S(R^n)$ é definida por

$$F^{-1}g(\xi) = (2\pi)^{-n} \int_{R^n} e^{i<x,\xi>} g(x)dx$$

Fórmula de Inversão de Fourier.

$$f(x) = (2\pi)^{-n}\int_{R^n} e^{i<x,\xi>}\hat{f}(\xi)d\xi.$$

A família de seminormas

$$p_{\alpha,\beta}(\phi) = \sup_{x\in R^n} |x^{\alpha}D^{\beta}\phi(x)| \qquad \alpha,\beta \in \mathbb{N}^n$$

define uma topologia em $S(R^n)$, que se torna um espaço de Frechet. Seu dual $S'(R^n)$ é um subespaço de $D'(R^n)$ e os elementos de $S'(R^n)$ são chamados de distribuições temperadas. A transformada de Fourier de uma distribuição temperada, T, também é uma distribuição temperada e é definida por

$$<FT,\phi> = <T,F\phi> \ , \ \forall\ \phi \in S(R^n)$$

Seja P um operador diferencial de ordem m e $P_m(x,\xi)$ seu símbolo principal.

Definições:

1) P é dito de tipo principal em Ω se $\text{grad}_{\xi}P_m(x,\xi) \neq 0$, $\forall\ x \in \Omega$ e todo $\xi \in R_n|\{0\}$.

2) P é elítico em $x_0 \in \Omega$ se $P_m(x_0,\xi) \neq 0$ para todo $\xi \in R_n|\{0\}$.

P é elítico em um subconjunto $U\subset\Omega$ se for elítico em todos os pontos de U.

3) P é hipoelítico em Ω se, dado qualquer subconjunto $U\subset\Omega$ e qualquer distribuição u em U,

$$Pu \in C^{\infty}(U) \Rightarrow u \in C^{\infty}(U)$$

ou, equivalentemente, dado qualquer $U\subset\Omega$ e qualquer $u \in D'(\Omega)$,

$$Pu \in C^{\infty}(U) \Rightarrow u \in C^{\infty}(U).$$

Definição: (Ver [7], pag. 83)

Um operador $P = a_{\alpha}(x)D^{\alpha}$, com coeficientes $C^{\infty}(\Omega)$ é, dito localmente resolúvel em $x_0 \in \Omega$, se existir um aberto contendo x_0, $U \subset \Omega$, e tal que, para toda $f \in C^{\infty}(U)$, a equação $Pu = f$ possui uma solução $u \in D'(U)$.

Notemos que é suficiente assumirmos f com suporte compacto. Caso contrário, tomamos ϕf onde $\phi \in C_c^{\infty}$ e é identicamente igual a 1 em U.

Teorema dos Núcleos de Schwartz

A todo operador $L: C_c^{\infty}(\Omega_y) \to D'(\Omega_x)$, linear e contínuo, está associada uma única distribuição $K(x,y) \in D'(\Omega_x \times \Omega_y)$ [que chamamos um núcleo-distribuição] tal que, para todas $\phi \in C_c^{\infty}(\Omega_y)$, $\Psi \in C_c^{\infty}(\Omega_x)$. temos:

$$\langle K(x,y), \Psi(x) \otimes \phi(y) \rangle = \langle L\phi, \Psi \rangle$$

Reciprocamente, a cada $K(x,y)$ deste tipo está associado um único L. (Ver [25])

O Núcleo-Distribuição $\delta(x-y)$

Seja δ a medida de Dirac. Isto é:

$<\delta,\phi> = \phi(0)$, $\forall\ \phi \in C_c^\infty$

Seja $\delta_* : C_c^\infty(\Omega_y) \to D'(\Omega_x)$

$\phi \to \delta_*(\phi) = \delta*\phi$ (prod. de convolução)

Indicamos por $\delta(x-y)$ o núcleo-distribuição que está associado a δ_* pelo teorema dos núcleos de Schwartz.

Temos:

$$<\delta(x-y),\Psi(x) \otimes \phi(y)> = <\delta_*(\phi),\Psi> = <\phi(x),\Psi(x)> =$$

$$= \int_{R^n} \phi(x)\ \Psi(x)dx$$

<u>Definição</u>

Um <u>núcleo</u> <u>fundamental</u> (respect.<u>Parametriz</u>) de $P(x,D)$ é um núcleo distribuição $K(x,y) \in D'(\Omega_x \times \Omega_y)$ tal que

$$P(x,D)K(x,y) = \delta(x-y)$$

(respect. $P(x,D)K(x,y)-\delta(x-y) \in C^\infty(\Omega_x \times \Omega_y)$)

<u>Definições</u>:

1) Um núcleo-distribuição $K(x,y) \in D'(\Omega_x \times \Omega_y)$ (ou a aplicação associada, L) é dito <u>semi-regular em x</u> se L aplicar $C_c^\infty(\Omega)$ em $C^\infty(\Omega)$ e for contínua.

2) Dizemos que $K(x,y)$ é <u>semi-regular em y</u> se a aplicação associada $L: C_c^\infty(\Omega_y) \to D'(\Omega_x)$ pode ser estendida a uma aplicação linear e contínua de $E'(\Omega_y)$ em $D'(\Omega_x)$.

3) Dizemos que $K(x,y)$ é <u>regular</u>, se for semi-regular em x e em y.

4) $K(x,y)$ é dito <u>muito regular</u>, se for regular e, além disto, for uma função C^{∞} fora da diagonal.

<u>TEOREMA</u> (L.Scwartz)

Seja $P = P(x,D)$ um operador diferencial parcial com coeficientes C^{∞} em Ω e suponhamos que seu transposto, ${}^{t}P$, tem uma parametriz, $K(x,y)$, satisfazendo:

1) $K(x,y)$ é muito regular

2) $PK(x,y) - \delta(x,-y) = R(x,y) \in C^{\infty}(\Omega_x \times \Omega_y)$.

Então, $P(x,D)$ é hipoelítico.

Obs.: Na demonstração deste teorema ([25], pp.536) foi levado em consideração que $R \in C^{\infty}(\Omega_x \times \Omega_y)$.

<u>Teorema 1.1</u>:

Seja $P = P(x,D)$ um operador diferencial parcial com coeficientes $C^{\infty}(\Omega)$ e ${}^{t}P$ o seu transposto. Se dado qualquer $x_0 \in \Omega$ e qualquer inteiro $M > 0$, existir uma vizinhança, w, de x_0 em Ω e um núcleo-distribuição, $K(x,y)$, de ${}^{t}P$ em $w \times w$ tais que

$$^{t}P(x,D)K(x,y) = \delta(x-y) + R(x,y)$$

com as seguintes propriedades:

1) $K(x,y)$ é muito regular

2) $R(x,y)$ é uma função C^M em $W \times W$,

então $P(x,D)$ é hipoelítico em Ω.

<u>Prova</u>

Uma prova, para este teorema, consiste na duplicação dos argumentos de L. Schwartz (como em [25]) com algumas considerações adicionais.

Queremos provar que $\forall\ \tilde{\Omega} \subset \Omega$ e $\forall\ u \in D'(\tilde{\Omega})$, $Pu \in C^{\infty}(\tilde{\Omega}) \Rightarrow u \in C^{\infty}(\tilde{\Omega})$.

Vamos provar que $\forall\ x_0 \in \tilde{\Omega}$, $\exists$ uma vizinhança W de x_0 em $\tilde{\Omega}$ tal que se $Pu \in C^{\infty}(W)$ então $u \in C^{\infty}(W)$.

Seja $x_0 \in \tilde{\Omega}$ e $W \subset \tilde{\Omega}$. Seja ainda $g \in C_c^{\infty}(\tilde{\Omega})$ com $g|_W \equiv 1$. Então, $\forall\ u \in D'(\tilde{\Omega})$, $gu \in E'(\tilde{\Omega})$. Como toda distribuição com suporte compacto tem ordem finita, $\exists\ m \geq 0$ tq. $gu \in E'^{m}(\tilde{\Omega})$.

Agora, duplicando os argumentos de L.Schwartz, $\forall\ M \geq m$, se $Pu \in C^{\infty}(w)$ então $u \in C^M(W)$.

Desde que x_o é arbitrário, $u \in C^M(\tilde{\Omega})$. Como vale para todo $M \geq m$ e $C^{\infty} = \bigcap_{M=m}^{\infty} C^M$, podemos concluir que $u \in C^{\infty}(\tilde{\Omega})$.

c.q.d.

<u>Proposição 1.1</u>:

Para a equação diferencial com valor inicial,

$$\eta(t) = g(t,\eta(t))$$

$$\eta|_{t=0} = 0$$

Se $g(t,\eta)$ satisfaz a condição de Lipschitz em relação a η, então a única solução, η, satisfaz:

$$|\eta(t)| \leq \text{const.} \sup_{s\varepsilon[0,t]} \left| \int_0^s g(s',0)ds' \right|$$

e ainda

$$|\eta(t)| \leq \text{const.} \left| \int_0^t |g(s,0)|ds \right|$$

(a prova é feita duplicando os argumentos do método de Picard).

Em [16], encontramos:

Proposição 1.2:

Sejam $U \subset R^m$ aberto, $f: U \times [a,b] \times [a,b] \to R^n$, contínua, com $\frac{\partial f}{\partial t}$ contínua em $U \times [a,b] \times [a,b]$

Seja $g(x,t) = \int_a^t f(x,t,t')dt'$

Então para $x \varepsilon U$ e $t \varepsilon (a,b)$

$$\frac{\partial g}{\partial t}(x,t) = f(x,t,t) + \int_a^t \frac{\partial f}{\partial t}(x,t,t')dt'$$

e a observação:

$\frac{\partial g}{\partial t}(x,t)$ é contínua e, por indução,

se $f \varepsilon C^{\infty}$, temos que $g \varepsilon C^{\infty}$.

CAPÍTULO 2

<u>Soluções Aproximadas Para Certos Problemas de Cauchy:</u>

Seja U (respect. V) uma vizinhança da origem em R^n (respect. $C^n \cong R^{2n}$), T um real, $T > 0$ e W' um aberto no R^n.

Vamos considerar a função $f(x,t,\theta,z)$ a valores complexos, definida em $U \times (-T,T) \times W' \times V$ e C^∞ em (x,t,θ) e analítica em $z = (u,v) \in R^{2n}$.

Consideremos o problema:

$$\phi_t = f(x,t,\theta,\phi_x)$$

$$\phi\Big|_{t=0} = 0$$

Em geral, tais problemas não possuem solução. Por exemplo, consideremos $u = u(x,t)$ e

$$u_t + i\, u_x + i\, g_x(x) = 0$$

$$u\Big|_{t=0} = 0 \qquad \text{onde } g \text{ é não analítica.}$$

Este problema não possui solução, pois se u fosse uma solução, então

$$u(x,t) = u(x,t) + g(x)$$

seria solução de

$$v_t + i\, v_x = 0$$

$$v\Big|_{t=0} = g(x)$$

que não possui solução (g é não analítica)

O que faremos neste capítulo é mostrar que o problema

$$\phi_t = f(x,t,\theta,\phi_x)$$

$$\phi\Big|_{t=0} = 0$$

possui solução aproximada, cujo grau de aproximação é medido por certa função, $M(x,t,\theta)$, intimamente ligada à função f. O uso de $M(x,t,\theta)$ é adequado, porque ela aparece na construção de parametrizes de Equações Diferenciais Parciais.

Além disto, utilizando este resultado, mostraremos ainda que o problema

$$u_t = \sum_{j=1}^{n} C_j(x,t,\theta) u_{x_j} + C_0(x,t,\theta) u(x,t,\theta) + g(x,t,\theta)$$

$$u\Big|_{t=0} = u_0(x,\theta)$$

com $c_j(x,t,\theta)$, $c_0(x,t,\theta)$ e $g(x,t,\theta)$ são C^∞ em (x,t,θ) e onde no segundo membro aparece $u(x,t,\theta)$, também admite solução aproximada, cujo grau de aproximação é do mesmo tipo do problema anterior.

Este capítulo está baseado no apêndice de [18]. No entanto, resultados mais gerais no mesmo sentido são encontrados em [20] e

[21].

2.1. - O Problema de Cauchy Não Linear

Como dissemos, vamos procurar solução aproximada para o problema

$$\phi_t = f(x,t,\theta,\phi_x)$$

$$\phi\big|_{t=0} = 0$$

Introduzimos as funções:

$$F(x,t,\theta) = \int_0^t f(x,s,\theta,0)ds$$

$$M(x,t,\theta) = \left| \int_0^t |(\mathrm{grad}_{x,u,v}\, f)(x,s,\theta,0)|ds \right|$$

e vamos provar o

TEOREMA 2.1.1.

Para todo inteiro $J > 0$ e todo relativamente compacto $w \subset w'$, existe uma vizinhança da origem em R^{n+1}, $\Omega^J \subset U \times (-T,T)$, uma função $\phi^J(x,t,\theta)$, C^∞ em $\Omega^J \times W$ e uma constante $C^J > 0$ tal que para todo $(x,t,\theta) \in \Omega^J \times W$, tem-se:

$$(2.1.1) \qquad |\partial_x^\delta \partial_t^r \partial_\theta^\gamma \{\phi_t^J - f(x,t,\theta\phi_x^J\}| \leq C^J . M(x,t,\theta)^{J+1-|\alpha|-r-|\gamma|}$$

$$\text{se } |\alpha| + r + |\gamma| \leq J$$

(2.1.2) $\quad |\phi^J - F| \leq C^J . M^2$

Observemos que (2.1.2) $\Rightarrow \phi^J\big|_{t=0} = 0$. Basta ver que $F(x,0,\theta) = M(x,0,\theta) = 0$.

Para provar o teorema 2.1.1, precisamos do

<u>Lema 2.1.1</u>

Sob as mesmas hipóteses do teorema, existe $\phi^J \in C^\infty(\Omega^J \times W)$ e uma constante $C_0 > 0$ tais que

(2.1.3) $\quad |\phi^J_x| \leq C_0 . M$

Mas, observemos que

<u>Proposição 2.1.1</u>

Se

$$f_J(x,t,\theta,z) = \sum_{|\alpha+\beta| \leq J+1} \frac{u^\alpha}{\alpha!} \frac{v^\beta}{\beta!} \partial_u^\alpha \partial_v^\beta f(x,t,\theta,0), \text{ então,}$$

$$f(x,t,\theta,\phi^J_x) - f_J(x,t,\theta,\phi^J_x) = \sum_{|\bar\alpha| = J+2} (\phi^J_x)^{\bar\alpha} . R_{\bar\alpha}(x,t,\theta), \text{ onde}$$

$\bar\alpha = (\alpha,\beta)$.

<u>Prova</u>

Por Taylor, podemos escrever:

$$f(x,t,\theta,z) = \sum_{|\alpha+\beta| \leq J+1} \frac{u^\alpha}{\alpha!} \frac{v^\beta}{\beta!} \partial_u^\alpha \partial_v^\beta f(x,t,\theta,0) + R$$

onde R é uma soma de termos da forma

$$C_{J,\bar\alpha}\int_0^1 (1-s)^{J+1}\partial_z^{\bar\alpha} f(x,t,\theta,sz).z^{\bar\alpha}ds \quad \text{onde} \quad z = (u,v),$$

$$\bar\alpha = (\alpha,\beta) \quad e \quad |\bar\alpha| = |\alpha+\beta| = J + 2$$

então,

$$f(x,t,\theta,\phi_x^J) - f_J(x,t,\theta,\phi_x^J) =$$

$$= \sum_{|\bar\alpha|=J+2} (\phi_x^J)^{\bar\alpha}.C_{J,\bar\alpha}\int_0^1 (1-s)^{J+1}\partial_z^{\bar\alpha} f(x,t,\theta,s.\phi_x^J(x,t,\theta))ds$$

designando

$$R_{\bar\alpha}(x,t,\theta) = C_{J,\bar\alpha}\int_0^1 (1-s)^{J+1}\partial_z^{\bar\alpha} f(x,t,\theta,s.\phi_x^J(x,t,\theta))ds$$

temos:

$$f(x,t,\theta,\phi_x^J) - f_J(x,t,\theta,\phi_x^J) = \sum_{|\bar\alpha|=J+2} (\phi_x^J)^{\bar\alpha}.R_{\bar\alpha}(x,t,\theta)$$

como queríamos.

Como consequência do Lema 2.1.1 temos a

<u>Proposição 2.1.2</u>

Seja $f_J(x,t,\theta,z)$ como na proposição anterior. Então, se $\phi^J(x,t,\theta)$ satisfizer (2.1.1) com $f_J(x,t,\theta,\phi_x^J)$, tem-se que $\phi^J(x,t,\theta)$ satisfará (2.1.1) com $f(x,t,\theta,\phi_x^J)$.

Prova

$$|\partial_x^\alpha \partial_t^r \partial_\theta^\gamma \{\phi_t^J - f(x,t,\theta,\phi_x^J\}| \leq |\partial_x^\alpha \partial_t^r \partial_\theta^\gamma\{\phi_t^J - f_J(x,t,\theta,\phi_x^J)\}| +$$

$$+ |\partial_x^\alpha \partial_t^r \partial_\theta^\gamma \{f(x,t,\theta,\phi_x^J) - f_J(x,t,\theta,\phi_x^J)\}| \leq$$

$$\leq C_J . M^{J+1-|\alpha|-r-|\gamma|} + |\partial_x^\alpha \partial_t^r \partial_\theta^\gamma \{f_J(x,t,\theta,\phi_x^J) - f(x,t,\theta,\phi_x^J)\}|$$

Pela proposição anterior, podemos escrever:

$$|\partial_x^\alpha \partial_t \partial_\theta^\gamma \{\phi_t^J - f(x,t,\theta,\phi_x^J)\}| \leq C_J . M^{J+1-|\alpha|-r-|\gamma|} +$$

$$+ \sum_{|\bar{\alpha}|=J+2} |\partial_x^\alpha \partial_t^r \partial_\theta^\gamma \{(\phi_x^J)^{\bar{\alpha}} . R_{\bar{\alpha}}(x,t,\theta)\}|$$

Mas, observemos que

$$\sum_{|\bar{\alpha}|=J+2} |\partial_x^\alpha \partial_t^r \partial_\theta^\gamma \{(\phi_x^J)^{\bar{\alpha}} . R_{\bar{\alpha}}(x,t,\theta)\}| \leq$$

$$< \sum_{|\bar{\alpha}|=J+2} \sum_{\substack{\alpha' \leq \alpha \\ r' \leq r \\ \gamma' \leq \gamma}} |\tilde{C} . \partial_x^{\alpha'} \partial_t^{r'} \partial_\theta^{\gamma'} (\phi_x^J)^{\bar{\alpha}}| \, |\partial_x^{\alpha-\alpha'} \partial_t^{r-r'} \partial_\theta^{\gamma-\gamma'} R_{\bar{\alpha}}|$$

onde $\tilde{c}$ é constante e depende de α', r', γ' desde que $R_{\bar{\alpha}} \in C^\infty$, tomando $\Omega' \subset \Omega^J$ relativamente compacto, temos

$$|\partial_x^{\alpha-\alpha'} \partial_t^{r-r'} \partial_\theta^{\gamma-\gamma'} R_{\bar{\alpha}}(x,t,\theta)| \leq C_1 \quad \text{em} \quad \Omega' \times w, \quad \text{onde}$$

$w \subset w'$ é relativamente compacto.

Além disto, existe um número finito de parcelas em α', r',

γ'. Tomamos

$$c_2 = \max_{\substack{\alpha'\leq\alpha \\ r'\leq r \\ \gamma'\leq\gamma}} \tilde{c}$$

Observemos ainda que

$\partial_x^{\alpha'}\partial_t^{r'}\partial_\theta^{\gamma'}(\phi_x^J)^{\bar{\alpha}}$ é um polinômio em ϕ_x^J, de ordem λ com $|\lambda| \geq |\bar{\alpha}| - |\alpha'| - r' - |\gamma'| \geq 2$, cujos coeficientes, além de constantes, envolvem derivadas de ϕ_x^J da forma $\partial_x^{\alpha''}\partial_t^{r''}\partial_\theta^{\gamma''}(\phi_x^J)$. Os termos do polinômio terão ordem ≥ 2, pois $|\lambda| = J + 2$ e $|\alpha'| + r' + |\gamma'| \leq$ $\leq |\alpha| + r + |\gamma| \leq J$. Os termos de ordem $|\lambda| = 2$ ocorrerão quando $|\alpha'| + r' + |\gamma'| = |\alpha| + r + |\gamma| = J$.

Então, fatorando o termo em $(\phi_x^J)^\lambda$ com $|\lambda| = |\bar{\alpha}| - |\alpha| - r - |\gamma| = 2$, podemos escrever:

$$|\partial_x^{\alpha'}\partial_t^{r'}\partial_\theta^{\gamma'}(\phi_x^J)^{\bar{\alpha}}| = |(\phi_x^J)^\lambda| \;.\; |P(\phi_x^J)|$$

mas $|P(\phi_x^J)| \leq C_3$ em $\Omega' \times w$ e, usando (2.1.3)

$$|(\phi_x^J)^\lambda| \leq C_4 \;.\; M^{|\lambda|} = C_4\, M^{J+2-|\alpha|-r-|\gamma|}$$

Desta forma,

$$|\partial_x^\alpha\partial_t^r\partial_\theta^\gamma\{\phi_t^J - f(x,t,\theta,\phi_x^J)\}| \leq C.M^{J+1-|\alpha|-r-|\gamma|} + C'M^{J+2-|\alpha|-r-|\gamma|}$$

$$|\partial_x^\alpha\partial_t^r\partial_\theta^\gamma\{\phi_t^J - f(x,t,\theta,\phi_x^J)\}| \leq C.M^{J+1-|\alpha|-r-|\gamma|}\left[1 + \frac{C'}{C}M\right]$$

$$|\partial_x^\alpha\partial_t^r\partial_\theta^\gamma\{\phi_t^J - f(x,t,\theta,\phi_x^J)\}| \leq C_J\, M^{J+1\,|\alpha|-r-|\gamma|} \quad \text{em } \Omega' \times w.$$

No que segue, assumimos $f = f_J$ e omitiremos J. Assim, escreveremos Ω, ϕ, etc., em lugar de Ω^J ϕ^J etc., para J fixo.

Vamos introduzir uma variável $y = (y_1, y_2, \ldots y_n) \in R^n$ e a seguinte deformação de f.

$$\tilde{f}(x,y,t,\theta,z) = \sum_{|p| \leq J+1} \frac{y^p}{p!} \partial_x^p f(x,t,\theta,z)$$

Seja $\tilde{V}$ uma vizinhança da origem em $R^{2n+1} \times W$ e uma vizinhança da origem no espaço $\{(x,y,t,\theta)/y = 0\}$, e relativamente compacta em $\tilde{V}$.

Vamos considerar o problema:

$$w_t = \tilde{f}(x,y,t,\theta,w_y)$$

$$w\Big|_{t=0} = 0$$

Observemos que $\tilde{f}$ é analítica em y e em z e C^∞ em (x,t,θ). Além disto, x e θ atuam como parâmetros.

Então, pela observação 5.3 de [21] e pelo apêndice A de [16], o problema tem uma única solução $w = w(x,y,t,\theta)$, analítica em y e C^∞ em (x,t,θ), numa vizinhança da origem.

Vamos mostrar que $\phi = \phi(x,t,\theta) = w(x,0,t,\theta)$ satisfaz (2.1.1) e (2.1.3) e, além disto, que (2.1.3) $\Rightarrow$ (2.1.2)

<u>Proposição 2.1.3</u>

Em V, temos

$$|\tilde{f}_y(x,0,s,\theta,0)| \leq n.|(\mathrm{grad}_{x,u,v} f)(x,s,\theta,0)|$$

Prova:

$$\tilde{f}_y(x,y,t,\theta,z) = f(x,t,\theta,z) + \sum_{i=1}^{n} y_i\ \partial_{x_i} f(x,t,\theta,z) +$$

$$+ \sum_{\substack{i=1\\ j\leq i}}^{n} \frac{y_i y_j}{2!} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x,t,\theta,z) + \ldots + \sum_{|\alpha|=J+1} \frac{y^\alpha}{\alpha!} \partial_x^\alpha f(x,t,\theta,z)$$

então,

$$\tilde{f}_y(x,0,t,\theta,0) = (\partial_{y_1}\tilde{f}(x,0,t,\theta,0), \ldots, \partial_{y_n}\tilde{f}(x,0,t,\theta,0))$$

mas

$$(\partial_{y_i}\tilde{f})(x,0,t,\theta,0) = (\partial_{x_i} f)(x,t,\theta,0) \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

logo,

$$|\tilde{f}_y(x,0,t,\theta,0)| = |f_x(x,t,\theta,0)|$$

Como f assume o máximo em V e

$$|f_x(x,t,\theta,0)| = \max_{\substack{1\leq i\leq n\\ (x,0,t,\theta)\in V}} \{|(\partial_{x_i} f)(x,t,\theta,0)|\} \leq$$

$$\leq \max_{\substack{1\leq i\leq n\\ (x,0,t,\theta)\in V}} \{|\partial_{x_i} f(x,t,\theta,0)|, |\partial_{u_i} f(x,t,\theta,0)|, |\partial_{v_i} f(x,t,\theta,0)|\}$$

então,

$$|\tilde{f}_y(x,0,t,\theta,0)| \leq |(\mathrm{grad}_{x,u,v} f)(x,t,\theta,0)| \qquad \text{c.q.d.}$$

Lema 2.1.2.

Se V é suficientemente pequena, existe uma constante $c_2 > 0$ tal que:

(2.1.4) $$|w_y| \leq c_2 . M \quad \text{em } V.$$

Prova

Temos que $w_t = \tilde{f}(x,y,t,\theta,z)|_{z=w_y}$

$$(w_t)_y = (w_y)_t = \tilde{f}_y(x,y,t,\theta,w_y) + \tilde{f}_z(x,y,t,\theta,w_y).\partial_y w_y$$

se $\tilde{f}_z = (\tilde{f}_u,\tilde{f}_v)$ e $\partial_y w_y = w_{yy} = (\text{Re } w_{yy}, \text{Im } w_{yy})$ então,

(2.1.5) $$(w_y)_t = \tilde{f}_y(x,y,t,\theta,w_y) + \tilde{f}_u(x,y,t,\theta,w_y).\text{Re } w_{yy} +$$

$$+ \tilde{f}_v(x,y,t,\theta,w_y).\text{Im } w_{yy}$$

Desde que $(w|_{t=0})_y = w_y|_{t=0} = 0$ e tomando $y = 0$ em (2.1.5), temos

(2.1.6) $$\begin{cases} \eta_t = g(t,\eta(t)) \\ \eta|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

onde $\eta(t) = w_y(x,0,t,\theta)$ com x, θ parâmetros.

Isto é, (2.1.5) pode ser vista como uma Equação Diferencial Ordinária com valor inicial. Desde que $g(t,\eta(t))$ é de classe

C^∞, g satisfaz Lipschitz e, então pela proposição 1.1, afirmamos que a única solução de (2.1.6), $\eta(t)$, satisfaz:

$$|\eta(t)| \leq \text{const.} \left| \int_0^t |g(s',0)|ds' \right|$$

Além disto,

$$|\tilde{f}_y(x,0,s,\theta,0)| \leq n.|\text{grad}_{x,u,v} f(x,s,\theta,0)| \qquad \text{(proposição 2.1.3)}$$

e

$w_{yy} = w_{yy}(x,y,t,\theta)$ assume máximo em V. Isto é;

$$|\text{Re } w_{yy}(x,0,t,\theta)| \leq C \quad \text{e} \quad |\text{Im } w_{yy}(x,0,t,\theta)| \leq C$$

Como

$\tilde{f}_u(x,0,s,\theta,0) = f_u(x,s,\theta,0)$, $\tilde{f}_v(x,0,s,\theta,0) = f_v(x,s,\theta,0)$

$$|\tilde{f}_u(x,0,s,\theta,0)| = |f_u(x,s,\theta,0)| \leq |(\text{grad}_{x,u,v} f)(x,s,\theta,0)|$$

e

$$|\tilde{f}_v(x,0,s,\theta,0)| \leq |(\text{grad}_{x,u,v} f)(x,s,\theta,0)|$$

Desta forma,

$$|g(s,0)| \leq |\tilde{f}_y(x,0,s,\theta,0)| + |\tilde{f}_u(x,0,s,\theta,0)|.|\text{Re} w_{yy}(x,0,s,\theta)| +$$

$$+ |\tilde{f}_v(x,0,s,\theta,0)| \,.\, |\text{Im } w_{yy}(x,0,s,\theta)| \leq$$

$$\leq (1 + |\text{Re } w_{yy}(x,0,s,\theta)| + |\text{Im } w_{yy}(x,0,s,\theta)|).\text{grad}_{x,u,v} f(x,s,\theta,0)| \text{em } V.$$

Assim,

$|\eta(t)| = |w_y(x,0,t)| \leq \text{const.} \left| \int_0^t |\text{grad}_{x,u,v} f(x,s,\theta,0)| ds \right| = C_2 \,.\, M$ como queríamos.

Observação:

Uma consequência de (2.1.4) é que

(2.1.7) $$|\text{grad}_{u,v} f(x,s,\theta,w_y(x,0,s,\theta))| \leq |\text{grad}_{u,v} f(x,s,\theta,0)| + C_5 . M(x,s,\theta).$$

Basta observar que

$$(\text{grad}_{u,v} f)\ (x,s,\theta,w_y(x,0,s,\theta) = \text{grad}_{u,v} f(x,s,\theta,0) + O(|w_y|)$$

Lema 2.1.3:

Se V é suficientemente pequena, existe constante $c_3 > 0$, tal que, para todo α, β, r,γ com $|\alpha+\beta+\gamma| + r \leq J + 1$, tem-se :

(2.1.8) $$|\partial_x^\alpha\, \partial_y^\beta\, \partial_t^r\, \partial_\theta^\gamma (w_x - w_y)| \leq C_3 . M^{J+1-|\alpha+\beta+\gamma|-r} \quad \text{em } V.$$

Para provarmos este lema, precisamos conhecer melhor a expressão

$$L_{\alpha,\beta,r,\gamma}(w_x - w_y) = \partial_x^\alpha\, \partial_y^\beta\, \partial_t^r\, \partial_\theta^\gamma\, (w_x - w_y) \quad \text{quando } y = 0$$

Denotemos

$$G_{\alpha,\beta,r,\gamma}(x,t,\theta) = \partial_x^\alpha\, \partial_y^\beta\, \partial_t^r\, \partial_\theta^\gamma (w_x - w_y)\Big|_{y=0}$$

Proposição 2.1.4:

Em V e para α, β, r, γ tais que $|\alpha+\beta+\gamma|+r \leq J$, temos:

(2.1.9) $$\partial_t G_{\alpha,\beta,r,\gamma} = L_{\alpha,\beta,r,\gamma} \{\tilde{f}_u \cdot \text{grad}_y \text{Re}(w_x - w_y) + \tilde{f}_v \cdot \text{grad}_y \text{Im}(w_x - w_y)\}_{y=0}$$

PROVA

Da mesma forma como obtivemos (2.1.5), obtemos:

$$(w_x)_t = \tilde{f}_x(x,y,t,\theta,w_y) + \tilde{f}_u(x,y,t,\theta,w_y).\text{Re}\, w_{xy} + \tilde{f}_v(x,y,t,\theta,w_y).\text{Im}\, w_{xy}$$

Então,

$$\partial_t L_{\alpha,\beta,r,\gamma}(w_x - w_y) = L_{\alpha,\beta,r,\gamma}(w_x - w_y)_t =$$

$$= L_{\alpha,\beta,r,\gamma}\{\tilde{f}_x(x,y,t,\theta,w_y) - \tilde{f}_y(x,y,t,\theta,w_y)\} +$$

$$+ L_{\alpha,\beta,r,\gamma}\{\tilde{f}_u.\text{Re}(w_{xy} - w_{yy}) + \tilde{f}_v.\text{Im}(w_{xy} - w_{yy})\}$$

$$\partial_t L_{\alpha,\beta,r,\gamma}(w_x - w_y) = L_{\alpha,\beta,r,\gamma}\{\tilde{f}_x(x,y,t,\theta,w_y) - \tilde{f}_y(x,y,t,\theta,w_y)\} +$$

$$+ L_{\alpha,\beta,r,\gamma}\{\tilde{f}_u \cdot \text{grad}_y \text{Re}(w_x - w_y) + \tilde{f}_v \cdot \text{grad}_y \text{Im}(w_x - w_y)\}$$

Desta forma, basta mostrar que

$$L_{\alpha,\beta,r,\gamma}\ \tilde{f}_x(x,y,t,\theta,w_y)-\tilde{f}_y(x,y,t,\theta,w_y))\}_{y=0} = 0$$

Isto é:

$$\partial_x^\alpha\ \partial_t^r\ \partial_\theta^\gamma\ \{\partial_y^\beta[\tilde{f}_x(x,y,t,\theta,w_y)-\tilde{f}_y(x,y,t,\theta,w_y)]\}_{y=0} = 0$$

então, vamos mostrar que

$$\partial_y^\beta\{\tilde{f}_x-\tilde{f}_y\}_{y=0} = 0 \quad \text{para} \quad |\beta| \leq J$$

ora,

$$\partial_y^\beta\ \tilde{f}_x(x,y,t,\theta,w_y) = \sum_{|p|\leq J+1}\ \sum_{\gamma\leq\beta} \binom{\beta}{\gamma} \frac{1}{p!}\ \partial_y^\gamma y^p . \partial_y^{\beta-\gamma}(\partial_x^p f_x(x,t,\theta,w_y))$$

observemos que

$$\partial_y^\gamma\ y^p = p_1(p_1-1)\ldots(p_1-\gamma_1+1)\ldots p_n(p_n-1)\ldots(p_n-\gamma_n+1)y^{p-\gamma}$$

quando $y = 0$, os únicos termos da soma em p não nulos são aqueles em que $p = \gamma$ e, neste caso,

$$\frac{1}{p!}\ \partial_y^\gamma\ y^p\Big|_{y=0} = 1$$

Desta forma,

$$\partial_y^\beta\ \tilde{f}_x(x,y,t,\theta,w_y)\Big|_{y=0} = \sum_{\gamma\leq\beta} \binom{\beta}{\gamma}\ \partial_y^{\beta-\gamma}\{\partial_x^\gamma f_x(x,t,\theta,w_y(x,0,t))\}$$

Por outro lado,

$$\partial_y^\beta \tilde{f}_y(x,y,t,\theta,w_y) = \sum_{|p|\leq J+1} \partial_y^\beta\{\frac{1}{p!}\,\partial_y y^p.\partial_x^p f(x,t,\theta,w_y)\}$$

como

$$\frac{1}{p!}\,\partial_y y^p = (\frac{1}{p!}\,p\;y^{p-e_1},\ldots,\frac{1}{p!}\,p_n\;y^{p-e_n}$$

então, em cada coordenada de

$$\frac{1}{p!}\,\partial_y\;y^p\;\partial_x^p\;f(x,t,\theta,w_y),\quad \text{temos:}$$

$$\frac{p_i}{p!}\quad y^{p-e_i}\;\partial_x^p\;f(x,t,\theta,w_y)\quad \text{e, portanto,}$$

$$\partial_y^\beta\{\,\frac{p_i}{p!}\,y^{p-e_i}\;\partial_x^p\;f(x,t,\theta,w_y)\} = \sum_{\gamma\leq\beta}\binom{\beta}{\alpha}\frac{p_i}{p!}\,\partial_y^\gamma\;y^{p-e_i}\;\partial_y^{\beta-\gamma}\partial_x^p\;f(x,t,\theta,\tilde{w}_y)$$

mas

$$\frac{p_i}{p!}\,\partial_y^\gamma\;y^{p-e_i} = \frac{1}{p!}\,p_1(p_1-1)\ldots(p_1-\gamma_1+1)\ldots p_n(p_n-1)\ldots$$

$$\ldots(p_n-\gamma_n+1)y^{p-e_i-\gamma}$$

quando $y = 0$, o único termo não nulo na somatória em p, ocorre para $p = \gamma + e_i$ e, neste caso,

$$\frac{p_i}{p!}\,\partial_y^\gamma\;y^{p-e_i}\Big|_{y=0} = 1$$

Observemos ainda que se a i-ésima coordenada não é nula, todas as demais o serão.

Desta forma, a i-ésima coordenada de $\partial_y^\beta\,\tilde{f}_y(x,y,t,\theta,w_y)\Big|_{y=0}$ é dada por

$$\sum_{\gamma\leq\beta} \binom{\beta}{\gamma} \partial_y^{\beta-\gamma} \partial_x^{\gamma+e_i} f(x,t,\theta,w_y(x,0,t,\theta)) =$$

$$= \sum_{\gamma\leq\beta} \binom{\beta}{\gamma} \partial_y^{\beta-\gamma} \partial_x^{\gamma} f_{x_i}(x,t,\theta,w_y(x,0,t,\theta))$$

Então,

$$\partial_y^{\beta} \tilde{f}_y(x,y,t,w_y)\Big|_{y=0} = \sum_{\gamma\leq\beta} \binom{\beta}{\gamma} \partial_y^{\beta-\gamma}\partial_x^{\gamma} f_x(x,t,\theta,w_y(x,0,t,\theta))$$

Assim,

$$\partial_y^{\beta} \{\tilde{f}_x(x,y,t,w_y) - \tilde{f}_y(x,y,t,w_y)\}_{y=0} = 0$$

como queríamos.

Proposição 2.1.5

Em V, vale:

$$(2.1.10) \qquad \partial_t G^i_{\alpha,\beta,r,\gamma} = \sum c(x,t,\theta).G^i_{\alpha',\beta',r',\gamma'} +$$

$$+ \sum c(x,t,\theta).\ G^i_{\alpha',\beta',r',\gamma'}$$

onde $c(x,t,\theta)$ depende de $\alpha',\beta',r',\gamma'$, a primeira somatória é feita para $\alpha' \leq \alpha$, $\beta' \leq \beta + e_i$, $r' \leq r$, $\gamma' \leq \gamma$ e $|\alpha'+\beta'+\gamma'| + r' \leq$ $\lneq |\alpha+\beta+\gamma| + r$, a segunda somatória é feita para $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta + e_i$, $r' = r$ e $\gamma' = \gamma$ e além disto, G^i é a i-ésima coordenada de G.

Prova:

Temos

$$\operatorname{grad}_y \operatorname{Re}(w_x-w_y) = \begin{pmatrix} \partial_{y_1}\operatorname{Re}(w_x-w_y) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \partial_{y_n}\operatorname{Re}(w_x-w_y) \end{pmatrix}$$

onde

$$\partial_{y_i}\operatorname{Re}(w_x-w_y) = (\partial_{y_i}\operatorname{Re}(w_{x_1}-w_{y_1}),\ldots,\ \partial_{y_i}\operatorname{Re}(w_{x_n}-w_{y_n}))$$

e analogamente indicamos $\operatorname{grad}_y \operatorname{Im}(w_x-w_y)$

Além disto,

$$\tilde{f}_u = (\tilde{f}_{u_1},\ldots,\tilde{f}_{u_n}) \quad \text{e} \quad \tilde{f}_v = (\tilde{f}_{v_1},\ldots,\tilde{f}_{v_n})$$

Então,

$$\tilde{f}_u(x,y,t,\theta,w_y).\operatorname{grad}_y\operatorname{Re}(w_x-w_y) = (\tilde{f}_u.\partial_{y_1}\operatorname{Re}(w_x-w_y),\ldots,\tilde{f}_u.\partial_{y_n}\operatorname{Re}(w_x-w_y))$$

onde $\tilde{f}_u.\partial_{y_i}\operatorname{Re}(w_x-w_y) = \sum_{j=1}^{n} \tilde{f}_{u_j}\ .\ \partial_{y_i}\ \operatorname{Re}(w_{x_j}-w_{y_j})$

desta forma, a i-ésima coordenada de $\partial_y^\beta\ [\tilde{f}_u.\operatorname{grad}_y\operatorname{Re}(w_x-w_y)]$ quando $y=0$ será

$$\partial_y^\beta\ \tilde{f}_u.\partial_{y_i}\operatorname{Re}(w_x-w_y)\Big|_{y=0}$$

$$= \sum_{\gamma\leq\beta} \binom{\beta}{\gamma}\ \partial_y^{\beta-\bar{\gamma}}\ \tilde{f}_u\Big|_{y=0} .\partial_y^{\bar{\gamma}}\ \partial_{y_i}\operatorname{Re}(w_x-w_y)\Big|_{y=0}$$

Observemos que

$$\partial_y^{\beta-\gamma}\tilde{f}_u(x,y,t,\theta,w_y)\Big|_{y=0} = \sum_{|p|\leq J+1}\ \sum_{\beta''\leq\beta-\gamma} \binom{\beta-\bar{\gamma}}{\beta''}\partial^{\beta-\bar{\gamma}-\beta''}\ \frac{y^p}{p!}\ \partial_y^{\beta''}\partial_x^p f_u(x,t,\theta,w_y)\Big|_{y=0}$$

$$L_{\alpha,\beta,r,\gamma}\{\tilde{f}_u\cdot\partial_{y_i}\mathrm{Re}(w_x-w_y)+\tilde{f}_v\partial_{y_i}\mathrm{Im}(w_x-w_y)\}_{y=0}=$$

$$=\Sigma\Big[\text{const.}\sum_{\beta''\leq\beta-\beta'+e_i}\partial_x^{\lambda}\partial_y^{\beta''}\partial_t^{r-r'}\partial_\theta^{\gamma-\gamma'}f_z(x,t,\theta,w_y).$$

$$.\partial_x^{\alpha'}\partial_y^{\beta'}\partial_t^{r'}\partial_\theta^{\gamma'}(w_x-w_y)\Big]_{y=0}$$

onde a primeira somatória do segundo membro é feita para $\alpha \leq \alpha'$, $\beta' \leq \beta + e_i$, $r' \leq r$, $\gamma' \leq \gamma$ e onde $\lambda = \alpha - \alpha' + \beta - \beta' + e_i - \beta''$.

Denotando

$$\sum_{\beta''\leq\beta-\beta'+e_i} c.\partial_x^{\lambda}\partial_y^{\beta''}\partial_t^{r-r'}\partial_\theta^{\gamma-\gamma'}f_z(x,t,\theta,w_y)\Big|_{y=0}=c(x,t,\theta)$$

e separando os termos que possuem derivadas de ordem superior a $|\alpha+\beta+\gamma|+r$, obtemos a i-ésima coordenada de

$\partial_t\, G_{\alpha,\beta,r,\gamma}(x,t,\theta)$, dada por (2.1.10) c.q.d.

<u>Observações</u>:

1 - Se $|\alpha+\beta+\gamma|+r = k$, o segundo membro de (2.1.10) contém termos em $G_{\alpha',\beta',r',\gamma'}$ com $|\alpha'+\beta'+\gamma'| + r' = k + 1$

2 - Os coeficientes de $G_{\alpha',\beta',r',\gamma'}$ são derivadas parciais de primeira ordem de $f(x,t,\theta,z)$ com respeito a $u = \mathrm{Re}z$ e $V = \mathrm{Im}z$, calculadas em $z = w_y$.

Proposição 2.1.6

Em V, vale:

$$G^i_{\alpha,\beta,r,\gamma}\Big|_{t=0} = 0 \quad \text{para todo} \quad \alpha,\beta,r,\gamma \quad \text{tais que}$$

$$|\alpha+\beta+\gamma| + r \leq k.$$

Prova:

A afirmação é verdadeira quando $r = 0$, pois

$$W\Big|_{t=0} = 0 \Rightarrow (w_x - w_y)_{t=0} = 0 \Rightarrow (w\big|_{t=0})_x - (w\big|_{t=0})_y = 0$$

Então,

$$G^i_{\alpha,\beta,r,\gamma}(x,t,\theta)\Big|_{t=0} = \partial^\alpha_x \, \partial^\beta_y \, \partial^\gamma_\theta (w_x - w_y)\Big|_{t=0} = 0, \quad \forall \, \alpha, \beta, \gamma$$

ora $r' \leq r$ então $r = 0 \Rightarrow r' = 0$ e de (2.1.10) temos

$$\partial_t \, G^i_{\alpha,\beta,0,\gamma}\Big|_{t=0} = G^i_{\alpha,\beta,1,\gamma} = 0, \quad \forall \; \alpha, \beta, \gamma.$$

Suponhamos a afirmação válida para p. Então, de (2.1.10), obtemos:

$$\partial_t \, G^i_{\alpha,\beta,p,\gamma}\Big|_{t=0} = G^i_{\alpha,\beta,p+1,\gamma}\Big|_{t=0} = 0$$

Desta forma,

$$G^i_{\alpha,\beta,r,\gamma}(x,t,\theta)\Big|_{t=0} = 0, \quad \forall \ \alpha,\beta,r,\gamma \ \text{ com } \ |\alpha+\beta+\gamma|+r \le k$$

Proposição 2.1.7

Em V, vale:

$$|G^i_{\alpha,\beta,r,\gamma}(x,t,\theta)| \le \text{const.} \ \Sigma \ \Big| \int_0^t |c(x,s,\theta)| . |G_{\alpha',\beta',r',\gamma'}(x,s,\theta)| ds \Big|$$

onde $c(x,s,\theta)$ depende de $\alpha,\beta,r,\gamma,\alpha',\beta',r',\gamma'$ e a somatória do segundo membro é tomada para $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta' + e_i$, $r' = r$, $\gamma' = \gamma$

Prova:

A equação (2.1.10) pode ser vista como uma Equação Diferencial Ordinária com valor inicial, da forma:

$$\partial_t G^i_{\alpha,\beta,r,\gamma}(x,t,\theta) = \phi(x,t,\theta,G^i_{\alpha,\beta,r,\gamma}(x,t,\theta))$$

$$G_{\alpha,\beta,r,\gamma}(x,t,\theta)\Big|_{t=0} = 0$$

onde x e θ são parâmetros. De fato, observando que se

$$G^i_{\alpha,\beta,r,\gamma}(x,t,\theta) = \eta(x,t,\theta), \quad \text{então,}$$

$$\phi(x,t,\theta,\eta(x,t,\theta)) = A(x,t,\theta).\eta(x,t,\theta) + B(x,t,\theta)$$

onde $B(x,t,\theta) = \Sigma \ c(x,t,\theta).G^i_{\alpha',\beta',r',\gamma'}$

com $c(x,t,\theta)$ dependendo de $\alpha',\beta',r',\gamma'$ e a soma é feita para $\alpha'=\alpha$,

$\beta' = \beta + e_i$, $r' = r$, $\gamma' = \gamma$.

Então, $\phi(x,t,\theta,0) = B(x,t,\theta)$

Além disto, $\phi(x,t,\theta,\eta)$ satisfaz a condição de Lipschitz em relação a η, em V, pois é soma de funções C^∞.

Então, por Picard,

$$|G^i_{\alpha,\beta,r,\gamma}(x,t,\theta)| \leq \text{const.}\left|\int_0^t |\phi(x,s,\theta,0)|ds\right| =$$

$$= \text{const.}\left|\int_0^t |B(x,s)|ds\right| \leq$$

$$\leq \text{const.}\ \Sigma \left|\int_0^t |c(x,t,\theta)|.|G^i_{\alpha';\beta';r';\gamma'}(x,s,\theta)|ds\right|$$

como queríamos.

Como consequência, segue a

Proposição 2.1.8:

Em V, vale

$$(2.1.11) \qquad |G^i_{\alpha,\beta,r,\gamma}(x,t,\theta)| \leq \text{const.}\Sigma \left|\int_0^t |\text{grad}_{u,v} f(x,s,\theta,w_y(x,0,s,\ldots\right.$$

$$.\ |G^i_{\alpha';\beta';r';\gamma'}(x,s,\theta)|ds|$$

onde a somatória é realizada com $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta + e_i$, $r' = r$, $\gamma' = \gamma$

Prova:

Basta observar que

$$c(x,t,\theta) = \sum_{\beta''\leq\beta-\beta'+e_i} \partial_x^\lambda \partial_y^{\beta''} \partial_t^{r-r'} \partial_\theta^{\gamma-\gamma'} f_z(x,t,\theta,w_y)$$

onde $\lambda = \alpha + \beta - \alpha' - \beta' - \beta'' + e_i$

Quando $\alpha = \alpha'$, $\beta' = \beta + e_i$, $r' = r$, $\gamma' = \gamma$, temos $\lambda = \beta'' = 0$ então,

$c(x,t,\theta) = \mathrm{grad}_{u,v} f(x,t,\theta,w_y)$ e, de (2.1.10) segue (2.1.11), como queríamos.

Agora estamos em condições de provar o

Lema 2.1.3:

Se V é suficientemente pequena, existe constante $c_3 > 0$ tal que, para todo α, β, r, γ com $|\alpha+\beta+\gamma| + r \leq J + 1$, tem-se

(2.1.8) $$|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \partial_t^r \partial_\theta^\gamma (w_x - w_y)| \leq c_3 \, . \, M^{J+1-|\alpha+\beta+\gamma|-r} \quad \text{em } V.$$

Prova:

A afirmação é verdadeira quando $k = |\alpha+\beta+\gamma|+r = J + 1$, pois, neste caso $J + 1 - |\alpha+\beta+\gamma| - r = 0$ e para obtermos (2.1.8) basta mostrar que

$$|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \partial_t^r \partial_\theta^\gamma (w_x - w_y)| \leq c_3$$

Observe que $w = w(x,y,t,\theta)$ é limitado em V e, então, para cada (α,β,r,γ) tal que $|\alpha+\beta+\gamma| + r = J + 1$, temos

$$|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \partial_t^r \partial_\theta^\gamma (w_x - w_y)| \leq \text{const.}$$

Como existe um número finito de combinações com α,β,r,γ tais que $|\alpha+\beta+\gamma| + r = J + 1$, tomamos

$$c_3 = \max\{const/|\partial_x^\alpha\partial_y^\beta\partial_t^r\partial_\theta^\gamma(w_x-w_y)| \leq const, \ |\alpha+\beta+\gamma| + r = J + 1\}$$

Assim, (2.1.8) vale para α, β, r, γ tais que $|\alpha+\beta+\gamma| + r = J + 1$.

Façamos uma indução decrescente sobre $k = |\alpha+\beta+\gamma|+r$.

Observemos que, tomando (2.1.7) em (2.1.11), temos:

$$|G^i_{\alpha,\beta,r,\gamma}| \leq const. \ \Sigma \ \left| \int_0^t \{|grad_{u,v} f(x,s,\theta,0)|+C_5 .M\}.|G_{\alpha',\beta',r',\gamma'}|ds\right| \quad e$$

se α,β,r,γ são tais que $|\alpha+\beta+\gamma| + r = k$ então $|\alpha'+\beta'+\gamma'| + r' = k + 1$, uma vez que $\alpha = \alpha'$, $\beta' = \beta + e_i$, $r' = r$; $\gamma'=\gamma$

Neste caso, pela hipótese da indução,

$$|G^i_{\alpha',\beta',r',\gamma'}| \leq C \ . \ M^{J+1-|\alpha'+\beta'+\gamma'|-r'} = C.M^{J-k}$$

e portanto,

$$|G^i_{\alpha,\beta,r,\gamma}| \leq const.\left| \int_0^t \{grad_{u,v} f(x,s,\theta,0)+C_5 M\}.C\ M^{J-k}ds\right| \leq$$

$$\leq c' \left| \int_0^t |grad_{u,v} f(x,s,\theta,0)|.M^{J-k}(x,s,\theta)ds\right| + c''\left|\int_0^t M(x,s,\theta)^{J-\lambda+1}ds\right|$$

Desde que $M(x,s,\theta)$ é não decrescente em $(0,T)$,

$$\left|\int_0^t M(x,s,\theta)^{J-\lambda+1}ds\right| \leq \left|\int_0^t M(x,t,\theta)^{J-\lambda+1}ds\right| = M^{J-\lambda+1} \ . \ |t|$$

e

$$\left| \int_0^t |\mathrm{grad}_{u,v} f(x,s,\theta,0)| . M^{J-\lambda}(x,s,\theta)\, ds \right| \leq \left| \int_0^t |\mathrm{grad}_{x,u,v} f(x,s,\theta,0)|\, ds \right| . M^{J-\lambda} =$$

$$= M^{J-\lambda+1}$$

Desta forma,

$$|G^i_{\alpha,\beta,r,\gamma}(x,t,\theta)| \leq c_3\, M^{J+1-\lambda} \Rightarrow |G^i_{\alpha,\beta,r,\gamma}(x,t,\theta)| \leq$$

$$< c_3 . M^{J+1-|\alpha+\beta+\gamma|-r}$$

como queríamos provar.

Agora podemos provar o

LEMA 2.1.1

Para todo inteiro $J > 0$ e todo relativamente compacto $w \subset w'$, existe uma vizinhança da origem em R^{n+1}, $\Omega \subset U \times (-T,T)$, uma função C^∞ em $\Omega \times w$, $\phi(x,t,\theta)$ e uma constante $C_0 > 0$ tal que para todo $(x,t,\theta) \varepsilon \Omega \times W$, tem-se

(2.1.3) $\qquad |\phi_x| \leq C_0 . M(x,t,\theta)$

Prova

Tomando $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = r$ em (2.1.8), obtemos

$|w_x - w_y| \leq c_3 . M^{J+1} \Rightarrow |w_x| - |w_y| \leq C_3\, M^{j+1}$ em V mas quando $y = 0$, temos

$\phi(x,t) = w(x,0,t) \Rightarrow |\phi_x| = |w_x(x,0,t)|$ e por (2.1.4),

$|\phi_x| - c_2.M \leq c_3.M^{J+1} \Rightarrow |\phi_x| \leq (c_3 M^J + c_2).M$

Então, em V, tomando $C_0 = C_3.M^J + c_2$, $|\phi_x| \leq c_0.M$

Proposição 2.1.9

Em V, vale:

(2.1.12) $$|\partial_x^\alpha \partial_t^r \partial_\theta^\gamma \{\phi_t - f(x,t,\theta,\phi_x)\}| =$$

$$= |\partial_x^\alpha \partial_t^r \partial_\theta^\gamma \{W(x,t,\theta).(w_x - w_y)(x,0,t,\theta)\}|$$

onde $W(x,t,\theta)$ é C^∞ numa vizinhança da origem.

Prova

Temos $\phi(x,t,\theta) = w(x,0,t,\theta)$ logo,

$$\phi_t = w_t(x,0,t,\theta) = \tilde{f}(x,0,t,\theta,w_y)$$

mas

$\tilde{f}(x,0,t,\theta,w_y(x,0,t,\theta)) = f(x,t,\theta,w_y(x,0,t,\theta))$ e, além

disto,

$\phi_x = w_x$ quando $y = 0 \Rightarrow f(x,t,\theta,\phi_x) = f(x,t,\theta,w_x(x,0,t,\theta))$

logo,

$$\phi_t - f(x,t,\theta,\phi_x) = w_t(x,0,t,\theta) - f(x,t,\theta,\phi_x) =$$

$$= f(x,t,\theta,w_y(x,0,t,\theta) - f(x,t,\theta,w_x(x,0,t,\theta))$$

então,

$$|\partial_x^{\alpha}\partial_t^{r}\partial_\theta^{\gamma}\{\phi_t-f(x,t,\theta,\phi_x)\}| = |\partial_x^{\alpha}\partial_t^{r}\partial_\theta^{\gamma}\{f(x,t,\theta,w_y)-f(x,t,\theta,w_x)\}|$$

seja $h:[0,1] \to C$

definida por

$$h(s) = f(x,t,\theta,s.w_y(x,0,t,\theta) + (1-s)w_x(x,0,t,\theta))$$

Observe que h é C^{∞} e que

$h(1) = f(x,t,\theta,w_y)$, $h(0) = f(x,t,\theta,w_y)$ e ainda

$$h(1) - h(0) = \int_0^1 h'(s)ds$$

como $h'(s) = \text{grad}_{u,v} f(x,t,\theta,s.w_y+(1-s)w_x).(w_y-w_x)(x,0,t,\theta)$ e $w_y - w_x$ não depende de s,

$$f(x,t,\theta,w_y(x,0,t,\theta)) - f(x,t,\theta,w_y(x,0,t,\theta)) =$$

$$= \{\int_0^1 \text{grad}_{u,v} f(x,t,\theta,sw_y+(1-s)w_x)ds\}.(w_x-w_y)(x,0,t,\theta) =$$

$$= W(x,t,\theta).(w_x-w_y)(x,0,t,\theta)$$

e segue (2.1.12) como queríamos, observando que $W \in C^{\infty}$ numa vizinhança da origem.

Finalmente, estamos em condições de provar o

Teorema 2.1.1

Para todo $J > 0$, e todo relativamente compacto $W \subset W'$, existe uma vizinhança da origem em R^{2n+1}, $\Omega \subset U \times (-T,T)$, uma função C^∞, em $\Omega \times W$, $\phi(x,t,\theta)$, e uma constante $c > 0$ tal que, para todo $(x,t,\theta) \in \Omega \times w$, tem-se:

$$(2.1.1) \qquad |\partial_x^\alpha \partial_t^r \partial_\theta^\gamma \{\phi_t - f(x,t,\theta,\phi_x)\}| \leq C.M^{J+1-|\alpha|-r-|\gamma|}$$

$$\text{se} \quad |\alpha+\gamma| + r \leq J$$

e

$$(2.1.2) \qquad |\phi - F| \leq C.M^2$$

Prova

Aplicando Leibniz no segundo membro de (2.1.12), obtemos:

$$|\partial_x^\alpha \partial_t^r \partial_\theta^\gamma \{\phi_t - f(x,t,\theta,\phi_x)\}| \leq \sum_{\alpha' \leq \alpha} \sum_{r' \leq \gamma} \sum_{\gamma' \leq \gamma} | c.\partial_x^{\alpha-\alpha'} \partial_t^{r-r'} \partial_\theta^{\gamma-\gamma'} W(x,t,\theta)|.$$

$$. \, |\partial_x^{\alpha'} \partial_t^{r'} \partial_\theta^{\gamma'} (w_x - w_y)|$$

Como $W \in C^\infty$ em (x,t,θ) e $w \subset w'$ é relativamente compacto, W assume o máximo em w e, além disto, existe um número finito de parcelas em α', r', γ. Então,

$$c.|\partial_x^{\alpha-\alpha'} \partial_t^{r-r'} \partial_\theta^{\gamma-\gamma'} W(x,t,\theta)| \leq \text{const.} \quad \text{em} \quad w$$

Tomando $\beta' = 0$ em (2.1.8),

$$|\partial_x^{\alpha'} \partial_t^{\,'} \partial_\theta^{\gamma'} (w_x - w_y)(x,0,t)| \leq c_3.M^{J+1-|\alpha'|-r'-|\gamma'|}$$

mas $J+1-|\alpha'|-r'-|\gamma'| = J+1-|\alpha|-r-|\gamma|+|\alpha-\alpha'|+$

$+r-r'+|\gamma-\gamma'|$

logo:

$$M^{J+1-|\alpha'|-r'-|\gamma'|} = M^{J+1-|\alpha|-r-|\gamma|}M^{|\alpha-\alpha'|+r-r'+|\gamma-\gamma'|}$$

Em W, temos:

$$M^{J+1-|\alpha'|-r'-|\gamma'|} \leq c_4.M^{J+1-|\alpha|-r-|\gamma|}$$

e portanto, (2.1.1) está demonstrado.

Resta mostrar que (2.1.3) $\Rightarrow$ (2.1.2)

Queremos resolver

$$\phi_t = f(x,t,\theta,\phi_x) + g(x,t,\theta) \quad \text{onde}$$

$g(x,t,\theta)$ satisfaz (2.1.1) com $\alpha = r = \gamma = 0$

Então,

$$\phi_t - f(x,t,\theta,\phi_x) = (\text{grad}_z f)(x,t,\theta,0).\phi_x + 0(|\phi_x|^2) + g(x,t,\theta) \Rightarrow$$

$$\int_0^t \phi_t\, ds - \int_0^t f(x,s,\theta,0)ds = \int_0^t \text{grad}_z f(x,s,\theta,0).\phi_x ds +$$

$$+ \int_0^t 0(|\phi_x|^2)ds + \int_0^t g(x,s,\theta)ds.$$

Observando que

$$|\phi_x| \leq c_0.M \Rightarrow |\phi_x|^2 \leq c.M^2$$

e que $g(x,t,\theta)$ satisfaz (2.1.1),

$$|\phi-F| \le C_0 \, . \left| \int_0^t |\mathrm{grad}_z f(x,s,\theta,0)| \, . \, M(x,s,\theta)ds \right. +$$

$$+ \, c' \, . \left| \int_0^t M(x,s,\theta)^2 ds \right| + \left| \int_0^t |g(x,s,\theta)| ds \right| \le$$

$$\le c_0 . M^2 + c' M^2 . |t| + c'' . M^{J+1} . |t|$$

Lembrando que $M(x,s,\theta)$ é não decrescente em $(0,T)$ e que M assume o máximo em $w \subset w'$ e $|t| \le T$, temos

$$|\phi-F| \le C . M^2, \text{ como queríamos.}$$

2.2 - O Problema de Cauchy Linear

Vamos continuar denotando $U \subset R^n$, $(-T,T) \subset R$ e $w' \subset R^n$, como no parágrafo anterior.

Consideremos o problema:

$$(2.2.1) \quad \begin{cases} u_t = \sum_{j=1}^{n} c_j(x,t,\theta) u_{x_j} + c_0(x,t,\theta) . u(x,t,\theta) + g(x,t,\theta) \\ u\big|_{t=0} = u_0(x,\theta) \end{cases}$$

onde os coeficientes $c_j(x,t,\theta)$ $0 \le j \le n$ e a função $g(x,t,\theta)$ são funções a valores complexos e C^∞ em $u \times (-T,T) \times w'$ e $u_0(x,\theta)$ é a valores complexos e C^∞ em $U \times w'$.

Vamos definir:

$$M(x,t,\theta) = \int_0^t (\sum_{j=1}^{n} |c_j(x,s,\theta)^2|^{1/2} ds$$

$$h(x,t,\theta) = g(x,t,\theta) + \sum_{j=1}^{n} c_j(x,t,\theta)\partial_{x_j} u_0(x,\theta) +$$

$$+ c_0(x,t,\theta).u_0(x,\theta)$$

e

$$F(x,t,\theta) = \int_0^t h(x,s,\theta).\ \exp\{\int_s^t c_0(x,s',\theta)ds'\}ds$$

e estamos querendo provar o seguinte

Teorema 2.2.1

Para todo $J > 0$ e relativamente compacto w em w', existe uma vizinhança da origem em R^{n+1}, $\Omega \subset U \times (-T,T)$, uma função C^∞ em $\Omega \times w$ e constante $c_J > 0$ tal que para todo $(x,t) \in \Omega$ e todo $\theta \in w$, temos:

$$(2.2.2) \qquad |\partial_x^\alpha \partial_t^r \partial_\theta^\gamma \{u_t - \sum_{J=1}^{n} c_j . U_{x_j} - c_0 u - g\}| \leq c_J . M^{J+1-|\alpha|-r-|\gamma|}$$

$$\text{se } |\alpha| + r + |\gamma| \leq J$$

$$(2.2.3) \qquad |u - u_0 - F| \leq C_J . M^2$$

Prova

Vamos provar o teorema aplicando o que foi estabelecido para o problema não linear.

Inicialmente, observemos que duas diferenças aparecem: o apareci mento da condição inicial $u_0(x,\theta)$ e o termo em $u(x,t,\theta)$.

Podemos assumir $u_0(x,\theta) \equiv 0$, com a condição de substituirmos $g(x,t,\theta)$. por $h(x,t,\theta)$. Para ver isto, seja

$$\tilde{u}(x,t,\theta) = u(x,t,\theta) - u_0(x,\theta)$$

então,

$$\tilde{u}_t = u_t, \quad \tilde{u}_{x_j} = u_{x_j} - \partial_{x_j} u_0 \quad e \quad \tilde{u}\Big|_{t=0} = 0$$

e, portanto,

$$u_t - \Sigma\, c_j\, u_{x_j} - c_0 u - g = \tilde{u}_t - \Sigma\, c_j(\tilde{u}_{x_j} + \partial_{x_j} u_0) - c_0(\tilde{u}+u_0) - g \Longrightarrow$$

$$u_t - \Sigma c_j\, u_{x_j} - c_0 u - g = \tilde{u}_t - \Sigma c_j\, \tilde{u}_{x_j} - c_0\tilde{u} - h$$

Vamos agora utilizar a técnica de fatores integrantes.

Observemos que, pelo parágrafo anterior, para $J > 0$, existe uma vizinhança da origem em R^{n+1}, Ω, uma função $w(x,t,\theta)$, C^∞ em $\Omega \times w$ e uma constante $c > 0$, tal que

$$(2.2.5) \qquad \Big|\partial_x^\alpha \partial_t^r \partial_\theta^\gamma \{w_t - \sum_{j=1}^{n} c_j(x,t,\theta) w_{x_j} - c_0\}\Big| \leq c_J . M^{J+1-|\alpha|-r-|\gamma|}$$

$$(2.2.6) \qquad \Big|w - \int_0^t c_0(x,s,\theta)\,ds\Big| \leq c . M^2$$

Da mesma forma, existe Ω, vizinhança da origem, uma função $v(x,t,\theta)$, C^∞ em $\Omega \times w$ e uma constante $c' > 0$ tal que

(2.2.7) $$|\partial_x^\alpha \partial_t^r \partial_\theta^\gamma \{v_t - \sum_{j=1}^n c_j v_{x_j} - h.e^{w(x,t,\theta)}\}| \leq c'.M^{J+1-|\alpha|-r-|\gamma|}$$

se $|\alpha| + r + |\gamma| \leq J$

(2.2.8) $$|v - \int_0^t h(x,s,\theta)e^{w(x,s,\theta)}ds| \leq c'.M^2$$

Então, vamos mostrar que

$$u = v(x,t,\theta).e^{-w(x,t,\theta)}$$

satisfaz o teorema 2.2.1, com h no lugar de g e $u_0 \equiv 0$.

Se $u = v.e^{-w}$, então

$$u_{x_j} = v_{x_j} e^{-w} - w_{x_j} v.e^{-w}, \qquad u_t = v_t.e^{-w} - w_t.v.e^{-w}$$

Desta forma,

$$|\partial_x^\alpha \partial_t^r \partial_\theta^\gamma \{u_t - \sum_{j=1}^n c_j u_{x_j} - c_0 u - h\}| \leq$$

$$\leq |\partial_x^\alpha \partial_t^r \partial_\theta^\gamma \{(v_t - \Sigma c_j v_{x_j} - e^w h)e^{-w}\}| +$$

$$+ |\partial_x^\alpha \partial_t^r \partial_\theta^\gamma \{w_t - \Sigma c_j w_{x_j} - c_0)ve^{-w}\}|$$

aplicando Leibniz em ambas as parcelas,

$$|\partial_x^\alpha \partial_t^r \partial_\theta^\gamma \{u_t - \sum_{j=1}^n c_j u_{x_j} - c_0 u - h\}| \leq$$

$$\leq \sum_{\alpha'\leq\alpha} \sum_{r'\leq r} \sum_{\gamma'\leq\gamma} c.\{\partial_x^{\alpha'}\partial_t^{r'}\partial_\theta^\gamma \{v_t - \Sigma c_j v_{x_j} - h.e^w\}|.$$

$$. |\partial_x^{\alpha-\alpha'}\partial_t^{r-r'}\partial_\theta^{\gamma-\gamma'} e^w| +$$

$$+ \sum_{\alpha'<\alpha} \sum_{r'\leq r} \sum_{\gamma'\leq\gamma} c.|\partial_x^{\alpha'}\partial_t^{r'}\partial_\theta^{\gamma'}\{w_t - \Sigma c_j w_{x_j} - c_0\}| \cdot |\partial_x^{\alpha-\alpha'}\partial_t^{r-r'}\partial_\theta^{\gamma-\gamma'}\{v.e^{-w}\}|$$

agora, usando (2.2.5), (2.2.7), observando que v, w são C^∞ em $\Omega \times w$ e que existe um número finito de parcelas em α',β',γ', obtemos a validade de (2.2.2), usando a mesma técnica utilizada na demonstração da proposição 2.1.2.

Vamos mostrar agora que

$$|u-F| \leq c.M(x,t,\theta)^2$$

ora,

$$u - F = v.e^{-w} - \int_0^t h(x,s,\theta).e^{-\int_s^t c\,(x,s',\theta)ds'} ds \Rightarrow$$

$$u - F = v.e^{-w} - e^{-w(x,t,\theta)}\int_0^t h(x,s,\theta)\, e^{w(x,s,\theta)} ds +$$

$$+ e^{-w(x,t,\theta)}.\int_0^t h(x,s,\theta)e^{w(x,s,\theta)} ds - \int_0^t h(x,s,\theta).e^{-\int_s^t c_0(x,s',\theta)ds'} ds$$

$$u - F = e^{-w(x,t,\theta)}\left[v - \int_0^t h(x,s,\theta)e^{w(x,s,\theta)}ds\right] +$$

$$+ \int_0^t h(x,s,\theta)e^{w(x,s,\theta)-w(x,t,\theta)}\left[1 - e^{w(x,t,\theta)-w(x,s,\theta)-\int_s^t c_0(x,s',\theta)ds'}\right]ds$$

então,

$$|u-F| \leq |e^{-w(x,t,\theta)}|\cdot|v - \int_0^t h(x,s,\theta)e^{w(x,s,\theta)}ds| +$$

$$+ | \int_0^t |h(x,s,\theta)|\cdot|e^{w(x,s,\theta)-w(x,t,\theta)}| \cdot$$

$$\cdot|1 - e^{w(x,t,\theta)-w(x,s,\theta)-\int_s^t c_0(x,s',\theta)ds'}|ds|$$

Observemos que, usando a desigualdade do valor médio,temos:

$$| 1 - e^{w(x,t,\theta)-w(x,s,\theta) - \int_s^t c_0(x,s',\theta)ds'}| \leq$$

$$\leq c.|w(x,t,\theta)-w(x,s,\theta) - \int_s^t c_0(x,s',\theta)ds'| \leq$$

$$\leq c\cdot\{ |w(x,t,\theta) - \int_0^t c_0(x,s',\theta)ds'| +$$

$$+ |w(x,s,\theta) - \int_0^s c_0(x,s',\theta)ds'|\} \leq c.M(x,t,\theta)^2$$

a última desigualdade decorre de (2.2.6) e do fato de $M(x,s)$ ser não decrescente em $[0,T)$.

Além disto,

$$|v - \int_0^t h(x,s,\theta)e^{w(x,s,\theta)}ds| \leq C.M(x,t,\theta)^2 \quad \text{(é a expressão (2.2.8))}$$

Então,

$$|u(x,t,\theta) - F(x,t,\theta)| \leq C.M(x,t,\theta)^2$$

como queríamos demonstrar.

CAPÍTULO 3

Colocação do Problema

Vamos iniciar este capítulo definindo curva bicaracterística, fundamental para o que faremos.

Definição:

Seja $A(x,\xi)$ uma função a valores reais.

Uma curva bicaracterística de $A(x,\xi)$ passando pelo ponto (x_0,ξ_0) é a curva descrita pela solução (x,ξ) das equações de Hamilton-Jacobi:

$$\dot{x} = \text{grad}_\xi A(x,\xi) \quad , \qquad \dot{\xi} = -\text{grad}_x A(x,\xi)$$

com condições iniciais (x_0,ξ_0).

Observemos que A é constante ao longo de uma curva bicaracterística. Basta ver que

$$\frac{dA}{ds} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial A}{\partial x_j} \frac{dx_j}{ds} + \frac{\partial A}{\partial \xi_j} \frac{d\xi_j}{ds} \right) = 0$$

Definição:

Se A é nula ao longo de uma curva bicaracterística, ela é chamada bicaracterística nula.

Definição:

Seja A um campo vetorial, $A = (a_1, \dots, a_n)$

Uma curva característica de $A(x)$ passando pelo ponto x_0 é a curva descrita pela solução do sistema de equações diferenciais:

$$\frac{dx}{dt} = A(x) \quad \text{isto é,} \quad \frac{dx_j}{ds} = a_j(x), \quad j = 1, 2, \dots n$$

Observemos que para operadores diferenciais de primeira ordem, as curvas características são projeções, no espaço-x, das curvas bicaracterísticas.

Seja $\Omega \subset R^2$, $(x,t) \in \Omega$ e consideremos o operador de primeira ordem

$$(3.1) \qquad P(x,t,D_x,D_t) = D_t - i\, b(x,t) D_x$$

onde $b(x,t)$ é uma função C^∞ em Ω, a valores reais.

O símbolo principal do operador (3.1) é

$$P(x,t,\xi,\tau) = \tau - i b(x,t)\xi$$

o que faremos aqui é estudar uma condição suficiente para que o operador (3.1) seja hipoelítico em Ω.

Lembremo-nos de que

1) $P = P(x,t,D_x,D_t)$ é elítico em $(x,t) \in \Omega$ se $P(x,t,\xi,\tau) \neq 0$ para todo $(\xi,\tau) \in R_2 | \{0\}$.

P é elítico em $U \subset \Omega$, se for elítico em todos os pontos de U.

2) $P = P(x,t,D_x,D_t)$ é hipoelítico em Ω se para todo $U \subset \Omega$ e toda distribuição $u \in D'(U)$

$P\,u \in C^{\infty}(U) \Rightarrow u \in C^{\infty}(U)$

ou equivalentemente, para toda $u \in D'(\Omega)$,

$P\,u \in C^{\infty}(U) \Rightarrow u \in C^{\infty}(U)$.

Então, para mostrarmos que P é hipoelítico em Ω, basta mostrar que $\forall\, U \subset \Omega$ e $\forall\, (x_0,t_0) \in U$, $\exists\, V \subset U$, vizinhança de (x_0,t_0) tal que se $P\,u \in C^{\infty}(U) \Rightarrow u \in C^{\infty}(V)$.

Observemos que em (3.1), temos

$P(x,t,\xi,\tau) = 0 \iff \tau = 0$ e $b(x,t).\xi = 0$

Desta forma, temos que nos pontos $(x_0,t_0) \in \Omega$ tais que $b(x_0,t_0) \neq 0$, existe $V \subset \Omega$ onde $b(x,t) \neq 0$ e, portanto, P é elítico em V. Neste caso, nada temos a fazer pois P é hipoelítico (Ver [7] pág 270 ou [26] pág.50). Por este motivo, para mostrar que P é hipoelítico em Ω, devemos analisar apenas os pontos $(x_0,t_0) \in \Omega$ tais que $b(x_0,t_0) = 0$. Sob certas condições, podemos garantir que, apesar destes pontos, P é hipoelítico em Ω.

Vamos considerar duas propriedades:

$\forall (x_0,t_0) \in \Omega$ e $\forall\, (\xi_0,\tau_0) \in R_2|\{0\}$ e para qualquer complexo z tal que

(P) $P(x_0,t_0,\xi_0,\tau_0) = 0$ e $\mathrm{grad}_{\xi,\tau} \mathrm{Re}\, ZP(x_0,t_0,\xi_0,\tau_0) \neq 0$

A função $\mathrm{Im}\, ZP$, restrita à bicaracterística de $\mathrm{Re}\, ZP$ que passa por (x_0,t_0,ξ_0,τ_0), não muda de sinal e

(Q) Para todo $(x_0,t_0) \in \Omega$, $(\xi_0,\tau_0) \in R_2|\{0\}$ e Z como em (P), a função $\text{Im } ZP$ não é identicamente nula em vizinhança alguma de (x_0,t_0,ξ_0,τ_0) na bicaracterística de $\text{Re } ZP$ que passa por (x_0,t_0,ξ_0,τ_0).

Em outras palavras, se $\gamma(s)$ é a bicaracterística de ReZP que passa por (x_0,t_0,ξ_0,τ_0), então (P) significa que $\text{Im } ZP|_{\gamma(s)}$ não muda de sinal e (Q) significa que $\text{Im } ZP|_{\gamma(s)}$ não se anula identicamente em intervalo algum $(s_0-\varepsilon,\ s_0+\varepsilon)$

Vamos mostrar que se $P(x,t,D_x,D_t)$ satisfaz as propriedades (P) e (Q) então P é hipoelítico em Ω.

Isto é o

<u>Teorema 3.1</u>

Sejam $\Omega \subset R^2$ e $P(x,t,D_x,D_t) = D_t - ib(x,t)D_x$ satisfazendo (P) e (Q). Então P é hipoelítico em Ω.

Como consequência, mostraremos, no final deste capítulo, que podemos concluir pela hipoeliticidade de operadores mais gerais, de primeira ordem.

Vamos conhecer melhor as propriedades (P) e (Q).

Sejam $(x_0,t_0) \in \Omega$, $(\xi_0,\tau_0) \in R_2|\{0\}$ e $Z = \alpha + i\ \beta \in C$, tais que

$$P(x_0,t_0,\xi_0,\tau_0) = 0 \quad \text{e} \quad \text{grad}_{\xi,\tau}\text{ReZP}(x_0,t_0,\xi_0,\tau_0) \neq 0$$

ora,

$$P(x_0,t_0,\xi_0,\tau_0) = 0 \iff \tau_0 - ib(x_0,t_0)\xi_0 = 0 \iff \tau_0 = 0 \text{ e } b(x_0,t_0)=0$$

Além disto,

$$ZP(x,t,\xi,\tau) = \alpha\tau + \beta\, b(x,t)\xi + i(\beta\tau - \alpha b(x,t)\xi)$$

então,

$$\mathrm{grad}_{\xi,\tau} \mathrm{Re}\ ZP(x_0,t_0,\xi_0,\tau_0) = (\beta b(x_0,t_0),\alpha) = (0,\alpha)$$

Desta forma, é necessário tomarmos $\alpha \neq 0$. No que segue, consideraremos então $Z = 1$.

Proposição 3.1

Seja $P = P(x,t,D_x,D_t)$ dado por (3.1).

a) Seja P satisfazendo (P). Então $t \to b(x,t)$ não muda de sinal em intervalo algum contendo t_0.

b) Seja P satisfazendo (Q). Então $t \to b(x,t)$ não se anula identicamente em intervalo algum contendo t_0.

Prova

Sejam $(x_0,t_0) \in \Omega$, $(\xi_0,\tau_0) \in R_2|\{0\}$ tais que $P(x_0,t_0,\xi_0,\tau_0) = 0$ e $\mathrm{grad}_{\xi,\tau} \mathrm{Re}\ P(x_0,t_0,\xi_0,\tau_0) \neq 0$ isto é:

$$\tau_0 = 0 \quad \text{e} \quad b(x_0,t_0) = 0$$

Temos

$$P(x,t,\xi,\tau) = A(x,t,\xi,\tau) + i\, B(x,t,\xi,\tau) = \tau - ib(x,t)\xi.$$

Assim,

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\partial A}{\partial \xi} = 0 \Rightarrow x(s) = c^{te}$$

$$\frac{dt}{ds} = \frac{\partial A}{\partial \tau} = 1 \Rightarrow t(s) = s$$

$$\frac{d\xi}{ds} = -\frac{\partial A}{\partial x} = 0 \Rightarrow \xi(s) = c^{te}$$

$$\frac{d\tau}{ds} = -\frac{\partial A}{\partial t} = 0 \Rightarrow \tau(s) = c^{te}$$

Desta forma, a bicaracterística que passa por

$$\gamma(t) = (x_0, t, \xi_0, 0)$$

e então,

$$\mathrm{Im}P\Big|_{\gamma(t)} = b(x_0, t)\xi_0$$

Desta forma, $\mathrm{Im}\, P\Big|_{\gamma(t)}$ depende somente de t e, portanto, trivialmente verifica-se a) e b).

Vamos introduzir uma outra propriedade:

Sejam $(x_0, t_0) \in \Omega$, $(\xi_0, \tau_0) \in R_2 | ^3 0\}$ e $Z \in C$ tais que $P(x_0, t_0, \xi_0, \tau_0) = 0$ e $\mathrm{grad}_{\xi,\tau} \mathrm{Re}\, ZP(x_0, t_0, \xi_0, \tau_0) \neq 0$.

(R) A função $\mathrm{Im}\, ZP$ possui o mesmo sinal em uma vizinhança de $(x_0, t_0, \xi_0, \tau_0)$ no conjunto

$$\Sigma_Z = \{(x, t, \xi, \tau) \;/\; \mathrm{Re}ZP(x, t, \xi, \tau) = 0\}$$

Observemos que em uma vizinhança de $(x_0, t_0, \xi_0, \tau_0)$ o conjunto Σ é uma variedade de dimensão 3, pois é imagem inversa de valor regular. Então, a conjunção de (P) e (Q) implica na validade de (R) (Ver lema 2.1.1 de [16]). A recíproca não é verdadeira. Para ver isto, basta notar que, para o operador (3.1),

$$\Sigma = \{(x,t,\xi,0) \; / \; \xi \neq 0\}$$

Desta forma, em uma vizinhança de (x_0,t_0,ξ_0,τ_0), V em Σ, $\xi > 0$ (ou $\xi < 0$), e o sinal de $\operatorname{Im} P$ dependerá somente de $b(x,t)$. Tomamos $U \subset R$, vizinhança de t_0 e $b(x,t)$ tal que $t \to b(x,t)$ é identicamente nula em U e positiva (ou negativa) em R/U. Assim, (3.1) satisfaz (R) e não satisfaz (Q). Podemos notar, ainda, que (R) $\Rightarrow$ (P).

Além disto, as propriedades (P), (Q) e (R) são invariantes por mudança de variáveis e por multiplicação do símbolo principal do operador por funções complexas que não se anulam. (Ver [15]).

Vamos agora mostrar como provaremos o Teorema 3.1. Construiremos um inverso à direita, aproximado, para $P(x,t,D_x,D_t)$ com certas propriedades. Mais precisamente, vamos mostrar que para cada $(x_0,t_0) \in \Omega$ e qualquer inteiro $M > 0$, existe uma vizinhança de (x_0,t_0) em Ω, V, e um núcleo-distribuição $K(x,t,x',t')$ tal que

$$P(x,t,D_x,D_t)K(x,t,x',t') = \delta(x-x',t-t') + R(x,t,x',t')$$

com as seguintes propriedades:

$K(x,t,x',t')$ é muito regular e

$R(x,t,x',t')$ é uma função $C^M(V \times V)$

Observemos que o símbolo principal de ${}^tP$ é igual ao símbolo principal de P, a menos de sinal. Portanto, podemos trocar P por ${}^tP$ na nossa hipótese e, por simplicidade, construir uma parametriz para P, em lugar de ${}^tP$. Usando este fato e o teorema 1.1., poderemos concluir pela validade do teorema 3.1.

Consideremos agora o operador de primeira ordem:

$$(3.2) \qquad \tilde{P}(x,t,D_x,D_t) = D_t - i\, b(x,t)D_x + c(x,t)$$

onde $b(x,t)$ é como em (3.1) e $c(x,t)$ é C^∞ em Ω e a valores complexos.

Observemos que (3.1) é a parte principal de (3.2). Então, (3.2) satisfaz (P) e (Q) (e portanto (R)) se, e somente se, (3.1) satisfizer. Além disto, vale o

<u>Corolário 3.1</u>

Seja $P(x,t,D_x,D_t)$ satisfazendo (P) e (Q) e $\tilde{P}$ dado em (3.2). Então, $\tilde{P}(x,t,D_x,D_t)$ é hipoelítico em Ω.

<u>Prova</u>

Queremos provar que dado $U \subset \Omega$ e qualquer $u \in D'(U)$, $\tilde{P}\, u \in C^\infty(U) \Rightarrow u \in C^\infty(U)$.

Mostremos então que para qualquer $x_0 \in U$, existe $V \subset U$, vizinhança de x_0 em U tal que $\tilde{P}\, u \in C^\infty(U)$ implica que $u \in C^\infty(V)$.

Observemos que

$$\tilde{P}(x,t,D_x,D_t) = P(x,t,D_x,D_t) + c(x,t)$$

Como por hipótese P satisfaz (P), $P(x,t,D_x,D_t)$ é localmente resolúvel (Ver [14] e [4]). Isto é, dado $x_0 \in U$, $\exists\ V \subset U$ tal que $\forall\ f \in C^\infty(V)$, a equação $Pu = f$ possui solução $u \in D'(V)$.

Seja $w \in D'(V)$ tal que $Pw = c(x,t)$. Desde que P é hipoelítico em Ω (teorema 3.1) e $c(x,t)$ é C^∞ em Ω, temos que $w \in C^\infty(U)$.

Definimos então $v \in D'(U)$, $v = e^{w}.u$

então, $u = e^{-w}.v$ e, além disto,

$$Pu = P(v)e^{-w} + P(-w)v.e^{-w} = P(v)e^{-w} - c(x,t).u$$

Portanto,

$$\tilde{P}\, u = Pu + c(x,t)u = P(v).e^{-w} \Rightarrow P(v) = e^{w}.\tilde{P}(u)$$

Por hipótese, $\tilde{P}\, u \in C^{\infty}(U)$ e, portanto, $e^{w}\, \tilde{P}(u) \in C^{\infty}(V)$.

Como P é hipoelítico, temos $v \in C^{\infty}(V)$ e, então, $u = v\, e^{-w} \in C^{\infty}(V)$, como queríamos.

<u>Observação 3.1</u>

O corolário 3.1 vale para casos mais gerais. Basta que tenhamos condições de resolubilidade e hipoeliticidade para P que poderemos concluir pela hipoeliticidade para P.

Vale ainda alertar para os seguintes fatos:

1-Consideremos $b(x,t)$ analítica em Ω. Então, o operador $P(x,t,D_x,D_t) = D_t - ib(x,t)D_x$ é analítico-hipoelítico em Ω (Ver [16] e [19]).

2-Consideremos $b(x,t) = b(t)$. Então o operador $P(x,t,D_x,D_t) = D_t - ib(t)D_x$ possui solução fundamental C^{∞} fora da diagonal e, portanto, é hipoelitico em Ω. (Ver [4] e [26])

Vamos agora analisar o caso em que $\Omega \subset R^{n+1}$, $n \geq 2$ e os operadores de primeira ordem são de tipo principal em Ω.

Seja $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \Omega$ e consideremos

(3.3) $\qquad P(y,D) = \sum_{j=1}^{n+1} a_j(y) D_{y_j}$, $a_j \in C^\infty(\Omega)$ é a valores complexos, $1 \leq j \leq n+1$.

Lembremo-nos de que $P(y,D)$ é de tipo principal em Ω. Isto é, os coeficientes $a_j(y)$ não se anulam simultaneamente, em ponto algum de Ω.

<u>Teorema 3.2</u>

Qualquer que seja $y_0 \in \Omega$, existe uma mudança de variáveis $(y_1,\dots,y_{n+1}) \to (x_1,\dots,x_n,t)$ numa vizinhança de y_0, $\tilde{\Omega} \subset \Omega$, tal que o operador (3.3) toma a forma:

$$P(x,t,D_x,D_t) = g(x,t)\left[D_t + i\sum_{j=1}^{n} b_j(x,t) D_{x_j}\right]$$

onde $g \in C^\infty(\tilde{\Omega})$ é a valores complexos e não se anula em $\tilde{\Omega}$ e $b_j \in C^\infty(\tilde{\Omega})$, $1 \leq j \leq n$, são a valores reais.

<u>Prova</u>:

Desde que $P(y,D)$ é de tipo principal em Ω, $\forall\, y_0 \in \Omega$, existe um índice j para o qual $a_j(y_0) \neq 0$. Podemos supor que em coordenadas adequadas, $a_{n+1}(y_0) \neq 0$ e, por continuidade, $a_{n+1}(y) \neq 0$ em $\tilde{\Omega} \subset \Omega$.

Desta forma, escrevemos, em $\tilde{\Omega}$:

$$P(y,D) = a_{n+1}(y)\left[D_{y_{n+1}} + \sum_{j=1}^{n} [\alpha_j(y) + i\,\beta_j(y)] D_{y_j}\right]$$

onde α_j, $\beta_j \in C^\infty(\tilde{\Omega})$ e são a valores reais, e $a_{n+1}(y)$ não se anula em ponto algum de $\tilde{\Omega}$.

Vamos tomar, então,

$t = y_{n+1}$

e, para $k = 1,2,\dots,n$, seja x_k a solução da equação diferencial

$$(\partial_{y_{n+1}} + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(y) D_{y_j})\, x_k = 0$$

$$x_k|_{y_{n+1}=0} = y_k$$

Desde que $y_{n+1} = 0$ é não característica,para cada k, x_k é determinado de forma única e o determinante de $\partial_y(x,t)$ em y_0 é igual a 1. (Ver [7], teorema 1.7, pag. 53).

Introduzindo (x,t) como novas coordenadas, o operador P passa a ter a expressão:

$$P(x,t,D_x,D_t) = g(x,t)\left[D_t + i \sum_{j=1}^{n} b_j(x,t) D_{x_j}\right]$$

pois

$$Pu(x,t) = a_{n+1}(y)\left\{ \frac{\partial u}{\partial y_{n+1}} + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(y) \frac{\partial u}{\partial y_j} + i \sum_{j=1} \beta_j(y) \frac{\partial u}{\partial y_j}\right\} =$$

$$= a_{n+1}(y)\left\{\frac{\partial u}{\partial y_{n+1}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial y_{n+1}} + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(y) \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial y_j} + \right.$$

$$\left. + i \sum_{j=1}^{n} \beta_j(y) \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial y_j} \right\} =$$

$$= a_{n+1}(y)\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_k}\left(\frac{\partial x_k}{\partial y_{n+1}} + \sum_{j=1}^{n}\alpha_j(y)\frac{\partial x_k}{\partial y_j}\right) + i\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j\frac{\partial x_k}{\partial y_j}\right)\frac{\partial u}{\partial x_k}\}$$

observando que

$g(x,t) = a_{n+1}(x,t) \neq 0$ em Ω, $b_k(x,t) = \sum_{j=1}^{n}\beta_j \cdot \frac{\partial x_k}{\partial y_j}$ e que

$\left(\frac{\partial}{\partial y_{n+1}} + \sum_{j=1}^{n}\alpha_j(y)\frac{\partial}{\partial y_j}\right)x_k = 0$, obtemos

$$P(x,t,D_x,D_t) = g(x,t)\left[D_t - i\sum_{j=1}^{n} b_j(x,t)D_{x_j}\right] \qquad \text{c.q.d.}$$

Observemos que, desde que a conjunção de (P) e (Q) é invariante sob multiplicação do símbolo principal por funções que não se anulam e considerando a observação 3.1, podemos nos restringir ao estudo de operadores de primeira ordem da forma:

$$(3.4) \qquad P(x,t,D_x,D_t) = D_t - i\sum_{j=1}^{n} b_j(x,t)D_{x_j}$$

onde $b_j \in C^\infty(\Omega)$, a valores reais e $(x,t) = (x_1,\ldots,x_n,t) \in \Omega$.

Além disto, em [4] e [13] encontramos que se $P(x,t,D_x,D_t)$ satisfaz (P) então existe vizinhança de (x_0,t_0), U, e um vetor unitário $v(x)$ tal que

$$b(x,t) = |b(x,t)|v(x) \quad \text{em } U.$$

Isto significa que, nesta vizinhança, a direção e o sentido de $b(x,t)$ não dependem de t.

Em vista disto, vale o

Teorema 3.3

Seja $P(x,t,D_x,D_t)$ como em (3.4), satisfazendo (P) e (Q). Então em algum aberto suficientemente pequeno, existem coordenadas $(x_1,x_2,\ldots,x_n,t)$ tais que

$$P(x,t,D_x,D_t) = D_t - i|b(x,t)|v_1(x)D_{x_1}$$

Prova

Sejam $(x_0,t_0) \varepsilon \Omega$, $(\xi_0,\tau_0) \varepsilon R_{n+1}|\{0\}$ tais que $P(x_0,t_0,\xi_0,\tau_0) = 0$ e $grad_{\xi,\tau}P(x_0,t_0,\xi_0,\tau_0) \neq 0$.

Como sabemos, isto significa que

$$\tau_0 = 0 \quad e \quad \sum_{j=1}^{n} b_j(x_0,t_0)\xi_{0_j} = b(x_0,t_0).\xi_0 = 0$$

A bicaracterística de ReP que passa por (x_0,t_0,ξ_0,τ_0) é dada por

$$\gamma(t) = (x_0,t,\xi_0,0)$$

e

$$\operatorname{Im} P\Big|_{\gamma(t)} = b(x_0,t).\xi_0$$

Então, se vale (Q), $b(x,t)$ não pode anular-se identicamente em intervalo algum $(-T,T)$, contendo t_0. Além disto, se vale (P), existe vizinhança de (x_0,t_0), $\tilde{\Omega}$ tal que

$$b(x,t) = |b(x,t)|v(x) \quad \text{em } \tilde{\Omega}.$$

Observemos que desde que $b(x,t)$ não se anula identicamente em intervalo algum de (x_0,t_0), então $v(x)$ é uma função C^∞.

Seja

$$L = \sum_{j=1}^{n} v_j(x)\, D_{x_j} \quad \text{em} \quad \tilde{\Omega}.$$

Da mesma forma como fizemos no teorema anterior, escolhemos coordenadas convenientes, $(x_1,\ldots,x_n)$ numa vizinhança $U \subset \tilde{\Omega}$ de x_0 tal que $v_1(x) \neq 0$ em U e

$$L = v_1(x)\left[D_{x_1} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_j(x) D_{x_j}\right] \quad \text{em} \quad U$$

com $\alpha_j(x_0) = 0, \; j = 2,3,\ldots,n.$

Tomamos então

$x_1 = x_1$ e y_k, $k = 2,3,\ldots n$, a solução da equação

$$\left(D_{x_1} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_j(x) D_{x_j}\right) y_k = 0$$

$$y_k\Big|_{x_1=0} = x_k$$

Então, os y_k são unicamente determinados e o determinante de $\partial_{(x,t)}(x_1,y)$ é igual a 1. Introduzindo (x_1,y) como novas coordenadas, temos

$$L = v_1(x) D_{x_1}$$

Agora,

$$P(x,t,D_x,D_t) = D_t - i \sum_{j=1}^{n} b_j(x,t) D_{x_j} = D_t - i|b(x,t)| \sum_{j=1}^{n} v_j(x) D_{x_j}$$

Então, $P(x,t,D_x,D_t) = D_t - i|b(x,t)|v_1(x)\ D_{x_1}$ em U, como queríamos.

Corolário 3.2

Não existe operador

$$P(x,t,D_x,D_t) = D_t - i\sum_{j=1}^{n} b_j(x,t)D_{x_j}, \quad n \geq 2$$

que satisfaça (P) e (Q).

Prova:

Suponhamos que $P(x,t,D_x,D_t)$ satisfaça (P) e (Q). Então, pelo teorema,

$$P(x,t,D_x,D_t) = D_t - i|b(x,t)|v_1(x)D_{x_1}$$

Desde que a conjunção de (P) e (Q) é invariante por mudança de variáveis, sejam $(x_0,t_0) \in \Omega$ e $(\xi_0,\tau_0) = (0,\xi_{0,2},\ldots\xi_{0,n},0)$ então:

$$P(x_0,t_0,\xi_0,\tau_0) = 0 - i|b(x_0,t_0)|v_1(x_0).0 = 0$$

$$\text{grad}_{\xi,\tau}\ \text{Re}P(x_0,t_0,\xi_0,\tau_0) = (0,0,\ldots,0,1) \neq 0$$

Então, $\gamma(t) = (x_0,t,\xi_0,0)$ e

$$\text{Im}P\Big|_{\gamma(t)} = |b(x_0,t)|v_1(x_0).0 = 0 \quad \text{absurdo.}$$

Observação 3.2:

Existem operadores diferenciais de primeira ordem em $\Omega \subset R^{n+1}$, $n \geq 2$ que satisfazem (P), bem como operadores que satisfazem (Q).

Por exemplo, $\Omega \subset R^3$,

$P(x,t,D_x,D_t) = D_t$ ou $P(x,t,D_x,D_t) = D_t - it^2 D_x$ satisfazem (P) e $P(x,t,D_x,D_t) = D_t - i(D_x + t\, D_y)$ satisfaz (Q).

Observemos ainda que:

(1) Se P é hipoelítico então satisfaz (Q). Isto é o teorema III de [18].

(2) Se P é hipoelítico então ${}^tP$ é localmente resolúvel. Isto é uma consequência do Teorema do gráfico fechado. (Teorema 52.2 de [25]).

(3) Se ${}^tP$ é localmente resolúvel, então P satisfaz (P). (Ver [11])

Lembrando que se ${}^tP$ satisfizer (P) então P também satisfará, pela conjunção de (2) e (3) junto com (1), podemos afirmar que se P for hipoelítico, então P satisfará (P) e (Q).

Corolário 3.3

Não existe operador

$$P(x,t,D_x,D_t) = D_t - i\sum_{j=1}^{n} b_j(x,t)D_{x_j}, \quad n \geq 2, \text{ hipoelítico}$$

Prova

Suponhamos que $P(x,t,D_x,D_t)$ seja hipoelítico. Então, pela observação anterior, P satisfaz (P) e (Q) e, portanto pelo teorema, em coordenadas convenientes,

$$(*) \qquad P(x,t,D_x,D_t) = D_t - i|b(x,t)|v_1(x)D_{x_1}$$

Desde que hipoeliticidade é invariante por mudança de variáveis e o operador (*) não é hipoelítico, provamos o corolário.

Podemos então concluir que, provado o teorema 3.1, teremos provado que se P é um operador diferencial parcial de primeira ordem e de tipo principal e P satisfaz (P) e (Q), então P é hipoelítico.

Resta-nos, portanto, provar o teorema 3.1. E o faremos construindo uma parametriz para o operador (3.1).

CAPÍTULO 4

Construção da Parametriz

Neste capítulo vamos construir uma parametriz para o operador

$$P(x,t,D_x,D_t) = D_t - ib(x,t)D_x$$

O que vamos fazer é local. Então vamos assumir que o ponto (x_0,t_0) é a origem no R^2.

Seja $(\xi_0,\tau_0) \in R_2|\{0\}$ tal que

$$P(0,0,\xi_0,\tau_0) = 0 \quad e \quad grad_{\xi,\tau}P(0,0,\xi_0,\tau_0) \neq 0$$

Como vimos, nestas condições,

$$\tau_0 = 0 \quad e \quad b(0,0) = 0$$

Seja $M = (-\delta,\delta) \times (-T,T) \subset R^2$ uma vizinhança da origem e N uma vizinhança de $(\xi_0,0)$ em $R_2|\{0\}$. Então, uma vizinhança de $(0,0,\xi_0,0)$ no conjunto

$$\Sigma = \{(x,t,\xi,\tau) \;/\; ReP(x,t,\xi,\tau) = 0\}$$

é dada por

$$(M \times N)\cap\Sigma = \{(x,t,\xi,0)\}.$$

Vamos considerar

$$M \times \Gamma_+ = \{(x,t,\xi,0) \ / \ \xi > 0\} \qquad \text{e}$$

$$M \times \Gamma_- = \{(x,t,\xi,0) \ / \ \xi < 0\}$$

Vamos tomar $b(x,t) \geq 0$ em M. Então,

$b(x,t)\xi \geq 0$ em $M \times \Gamma_+$

e

$b(x,t)\xi \leq 0$ em $M \times \Gamma_-$

Nosso objetivo é construir para cada inteiro $M > 0$, um núcleo-distribuição $k(x,t,x',t')$ tal que, numa vizinhança da origem em $R^2 \times R^2$, $w \times w$, tenhamos:

$$P(x,t,D_x,D_t)K(x,t,x',t') - \delta(x-x',t-t') = R(x,t,x',t') \in C^M(w \times w)$$

Vamos procurar K tal que

$$K = K_+ + K_-$$

onde,

$$(K_+u)(x,t) = (2\pi)^{-1} \int_0^\infty \int_{-T}^t e^{i\phi(x,t,t')\xi} k(x,t,t')\tilde{u}(\xi,t')dt'd\xi$$

e

$$(K_-u)(x,t) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^0 \int_T^t e^{i\phi(x,t,t')\xi} k(x,t,t')\tilde{u}(\xi,t')dt'd\xi$$

e, onde

$\tilde{u}(\xi,t')$ é a transformada de Fourier de u em relação a x e ϕ e k são funções a determinar.

Vamos descrever como escolheremos a <u>função fase</u> e a <u>função amplitude</u>. (ϕ e k, respectivamente).

Temos que

$$P(x,t,D_x,D_t)K_+u(x,t) = (2\pi)^{-1}\int_0^\infty P(x,t,D_x,D_t)\int_{-T}^t e^{i\phi(x,t,t')\xi}k(x,t,t')\tilde{u}(\xi,t')dt'd\xi$$

desde que

$$D_x\int_{-T}^t e^{i\phi\xi}k(x,t,t')\tilde{u}(\xi,t')dt' = \int_{-T}^t e^{i\phi\xi}.\phi_x\xi+e^{i\phi\xi}D_xk(x,t,t').\tilde{u}(\xi,t')dt'=$$

$$= \int_{-T}^t e^{i\phi\xi}(D_x+\phi_x\xi)k(x,t,t')\tilde{u}(\xi,t')dt'$$

e

$$D_t\int_{-T}^t e^{i\phi\xi}k(x,t,t')\tilde{u}(\xi,t')dt' = \int_{-T}^t [e^{i\phi\xi}.\phi_t\xi.k(x,t,t')\tilde{u}(\xi,t') +$$

$$+ e^{i\phi\xi}D_tk\tilde{u}(\xi,t')]\,dt' + \frac{1}{i}e^{i\phi\xi}k(x,t,t')\tilde{u}(\xi,t')\Big|_{t'=t}$$

$$D_t\int_{-T}^t e^{i\phi\xi}k(x,t,t')\tilde{u}(\xi,t')dt' = \int_{-T}^t e^{i\phi\xi}(D_t + \phi_t\xi)k(x,t,t')\tilde{u}(\xi,t')dt' +$$

$$+ \frac{1}{i}e^{i\phi\xi}\kappa.\tilde{u}(\xi,t')\Big|_{t'=t}$$

Como $P(x,t,D_x,D_t) = D_t - ib(x,t)D_x$, podemos escrever:

$$P(x,t,D_x,D_t)\int_{-T}^{t} e^{i\phi\xi}k(x,t,t')\tilde{u}(\xi,t')dt' =$$

$$= \int_{-T}^{t} e^{i\phi\xi}P(x,t,D_x+\phi_x\xi,D_t+\phi_t\xi)k(x,t,t')\tilde{u}(\xi,t')dt' +$$

$$+ \frac{1}{i} e^{i\phi\xi}k\tilde{u}\Big|_{t'=t}$$

Então,

$$P(x,t,D_x,D_t)K_+u(x,t) = (2\pi)^{-1}\int_0^\infty \Big[\int_{-T}^{t} e^{i\phi\xi}P(x,t,D_x+\phi_x\xi,D_t+\phi_t\xi)k\tilde{u}(\xi,t')dt' +$$

$$+ \frac{1}{i} e^{i\phi\xi}k\tilde{u}(\xi,t')\Big|_{t'=t}\Big]d\xi.$$

Então,

$$P(x,t,D_x,D_t)K_+u(x,t) = (2\pi)^{-1}\int_0^\infty \int_{-T}^{t} e^{i\phi\xi}P(x,t,D_x+\phi_x\xi,D_t+\phi_t\xi)k\,\tilde{u}(\xi,t')dt'd\xi+$$

$$+ (2\pi)^{-1}\int_0^\infty \frac{1}{i} e^{i\phi(x,t,t')\xi}k(x,t,t')\Big|_{t'=t}\tilde{u}(\xi,t)d\xi.$$

Analogamente,

$$P(x,t,D_x,D_t)K_-u(x,t) = (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{0}\int_{T}^{t} e^{i\phi\xi}P(x,t,D_x+\phi_x\xi,D_t+\ _t\ )k\tilde{u}(\xi,t')dt'd\xi$$

$$+ (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{i}\ e^{i\phi\xi}k(x,t,t')\Big|_{t'=t}.\tilde{u}(\xi,t)d\xi.$$

então

$$P(x,t,D_x,D_t)K_-u(x,t) = -(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{0}\int_{t}^{T} e^{i\phi\xi}P(x,t,D_x+\phi_x\xi,D_t+\phi_t\xi)k\tilde{u}(\xi,t')dt'd\xi +$$

$$+ (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{i} e^{i\phi\xi}k\Big|_{t'=t}\tilde{u}(\xi,t)d\xi.$$

Vamos procurar ϕ e k tais que

(4.1) $$P(x,t,D_x+\phi_x\xi,D_t+\phi_t\xi)k = 0$$

(4.2) $$e^{i\phi\xi}k\Big|_{t'=t} = i\, e^{ix\xi}$$

Observemos que se conseguirmos ϕ e k desta forma, teremos:

$$P(x,t,D_x,D_t)K = (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\tilde{u}(\xi,t)d \;= u(x,t).$$

Mas, de (4.1), separando segundo os graus de homogeneidade em ξ, temos:

$$k_t - ib(x,t)k_x + (\phi_t\xi - ib(x,t)\phi_x\xi)k = 0$$

portanto, vamos requerer:

(4.3) $$k_t - ib(x,t)k_x = 0$$

(4.4) $$\phi_t - ib(x,t)\phi_x = 0$$

Além disto, para obtermos (4.2), basta tomarmos

$$(4.5)\qquad \begin{cases} \phi_t - ib(x,t)\phi_x = 0 \\ \phi\big|_{t'=t} = x \end{cases}$$

e

$$(4.6)\qquad \begin{cases} k_t - ib(x,t)k_x = 0 \\ k\big|_{t'=t} = i \end{cases}$$

Como em geral problemas como (4.5) e (4.6) não possuem soluções exatas, vamos encontrar soluções aproximadas através do que foi feito no capítulo 2. No entanto, observemos que não obteremos mais

$$P(x,t,D_x,D_t)\ K\ u(x,t) = u(x,t)$$

mas sim

$$P(x,t,D_x,D_t)Ku(x,t) = u(x,t) + R\ u(x,t)$$

<u>Observação</u>:

No nosso caso, o problema (4.6) possui solução exata e $k(x,t,t') \equiv i$ é uma solução. Isto significa que poderíamos ter tomado

$$(K_+u)(x,t) = (2\pi)^{-1}\int_0^\infty \int_{-T}^t e^{i\phi(x,t,t')\xi}\ i\ \tilde{u}(\xi,t')dt'd\xi$$

e $(K_-u)(x,t)$ de forma análoga e chegaríamos ao problema (4.7).

No entanto, desde que as soluções aproximadas para os problemas (4.5) e (4.6), que obtemos através do que foi feito no capítulo 2, são suficientes para o que desejamos (ver [5]), continuaremos tratando do problema como se existissem apenas soluções aproximadas. Isto ajudará a entendermos melhor o que ocorrerá quando o operador for de ordem $m > 1$, como em [18].

Estimativas para a função fase e para a função amplitude.

Os problemas (4.5) e (4.6) são lineares. Aplicando o teorema 2.2.1, temos, para cada $J > 0$, fixo:

$$(4.7) \qquad |\partial_x^\alpha \partial_t^r \partial_{t'}^{\gamma'}\{\phi_t - ib(x,t)\phi_x\}| \leq c.|B(x,t,t')|^{J+1-\alpha-r-r'}$$

$$\text{se} \quad \alpha + r + r' \leq J$$

$$(4.8) \qquad |\phi(x,t,t') - x - iB(x,t,t')| \leq c.|B(x,t,t')|^2$$

$$(4.9) \qquad |\partial_x^\alpha \partial_t^r \partial_{t'}^{r'}\{k_t - ib(x,t)k_x\}| \leq c.|B(x,t,t')|^{J+1-\alpha-r-r'}$$

$$\text{se} \quad \alpha + r + r' \leq J$$

$$(4.10) \qquad |k(x,t,t') - i| \leq c.|B(x,t,t')|^2$$

onde $B(x,t,t') = \displaystyle\int_{t'}^{t} b(x,s)ds$

Além disto, valem:

Proposição 4.1

Qualquer que seja $c > 0$, existe T suficientemente pequeno tal que se $|x| < \delta$, $|t|,|t'| < T$, temos

$$c.|B(x,t,t')|^2 \leq \frac{1}{2} |B(x,t,t')|$$

Prova

Temos que $B(x,t,t') = \int_{t'}^{t} b(x,s)ds$

como $t \to B(x,t,t')$ é contínua, dado $\varepsilon = \frac{1}{2c}$, tomamos T suficientemente pequeno $(T > 0)$ tal que:

$$|B(x,t,t') - B(x,t',t')| = |B(x,t,t)| \leq \frac{1}{2c}$$

Então,

$$c.|B(x,t,t')|^2 = c.|B(x,t,t')|.|B(x,t,t')| \leq \frac{1}{2} |B(x,t,t')|$$

c.q.d.

Proposição 4.2

Em $M \times (-T,T) = (-\delta,\delta) \times (-T,T) \times (-T,T)$, valem:

(4.11) $\quad \frac{1}{2} B(x,t,t') \leq \operatorname{Im}\phi(x,t,t') \leq \frac{3}{2} B(x,t,t')$ se $t \geq t'$

(4.12) $\quad \frac{3}{2} B(x,t,t') \leq \operatorname{Im}\phi(x,t,t') \leq \frac{1}{2} B(x,t,t')$ se $t \leq t'$.

Prova

Da estimativa (4.8) e da proposição 4.1, segue que

$$|\mathrm{Im}\phi - B(x,t,t')| \le |\phi - x - iB(x,t,t')| \le c.|B(x,t,t')|^2 \Rightarrow$$

$$|\mathrm{Im}\phi - B(x,t,t')| \le \frac{1}{2}|B(x,t,t')|$$

se $t \ge t'$, $|B(x,t,t')| = B(x,t,t')$ e, portanto,

$$-\frac{1}{2} B(x,t,t') < \mathrm{Im}\phi - B(x,t,t') \le \frac{1}{2} B(x,t,t')$$

e $\frac{1}{2} B(x,t,t') \le \mathrm{Im}\phi(x,t,t') \le \frac{3}{2} B(x,t,t')$

A demonstração para o caso em que $t \le t'$ é análoga.

c.q.d.

Como consequência, as estimativas (4.7) e (4.9) ficam:

(4.13) $$|\partial_x^\alpha \partial_t^r \partial_{t'}^{r'} \{\phi_t - ib(x,t)\phi_x\}| \le c.\{\mathrm{Im}\phi(x,t,t')\}^{J+1-\alpha-r-r'}$$

(4.14) $$|\partial_x^\alpha \partial_t^r \partial_{t'}^{r'} \{k_t - ib(x,t)k_x\}| \le c\{\mathrm{Im}\phi(x,t,t')\}^{J+1-\alpha-r-r'}$$

se $\alpha + r + r' \le J$.

Observemos ainda que, em vista de (4.8) e (4.10) e do fato de $B(x,t',t') = 0$, as soluções aproximadas para ϕ e k são tais que

$$\phi|_{t'=t} = x \quad \text{e} \quad K|_{t'=t} = i$$

Em vista disto, obtemos:

$$P(x,t,D_x,D_t)K_+u(x,t) = (2\pi)^{-1}\int_0^{\infty}\int_{-T}^{t} e^{i\phi\xi}P(x,t,D_x+\phi_x\xi,D_t+\phi_t\xi)k\tilde{u}(\xi,t')dt'd\xi +$$

$$+ (2\pi)^{-1}\int_0^{\infty} e^{ix\xi}\tilde{u}(\xi,t)d\xi$$

$$P(x,t,D_x,D_t)K_-u(x,t) = -(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{0}\int_{t}^{T} e^{i\phi\xi}P(x,t,D_x+\phi_x\xi,D_t+\phi_t\xi)k\ \tilde{u}(\xi,t')dt'd\xi +$$

$$+ (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{0} e^{ix\xi}\tilde{u}(\xi,t)d\xi$$

o que significa que

$$P(x,t,D_x,D_t)\ K\ u(x,t) = u(x,t) +$$

$$+(2\pi)^{-1}\left(\int_0^{\infty}\int_{-T}^{t}-\int_{-\infty}^{0}\int_{t}^{T}\right)\left[k_t-ib(x,t)k_x+\xi(\phi_t-ib(x,t)\phi_x)k\right]e^{i\phi\xi}\tilde{u}(\xi,t')dt'd\xi$$

Isto é:

$$R\ u(x,t) = (2\pi)^{-1}\left(\int_0^{\infty}\int_{-T}^{t}-\int_{-\infty}^{0}\int_{t}^{T}\right)\left[k_t-ib(x,t)k_x+\xi(\phi_t-ib(x,t)\ \phi_x)k\right]e^{i\phi\xi}\tilde{u}(\xi,t')$$

$$dt'd\xi.$$

Não incluimos neste trabalho uma prova de que a parametriz assim construída, satisfaz as condições do teorema 1.1. Isto pode ser feito observando [5] pp. 242. É também, um caso mais simples do que consta em [18] pp. 647.

Desta forma, em vista do teorema 1.1, fica demonstrado o teorema 3.1.

Para concluir este trabalho, gostaríamos de lembrar que no caso da função $b(x,t)$ ser independente de x, isto é, $b(x,t) = b(t)$, o operador (3.1) ficaria:

$$P(x,t,D_x,D_t) = D_t - ib(t)D_x$$

Neste caso, conseguimos soluções exatas para ϕ e k e, portanto, um núcleo fundamental para P.

O problema poderia ser posto da seguinte forma:

Procuramos $k = K_+ + K_-$ onde

$$K_+u(x,t) = (2\pi)^{-1}\int_0^{\infty}\int_{-T}^{t} e^{ix\xi - B(t,t')\xi} i\,\tilde{u}(\xi,t')dt'd\xi$$

$$K_-u(x,t) = (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{0}\int_{T}^{t} e^{ix\xi - B(t,t')\xi} i\,\tilde{u}(\xi,t')dt'd\xi$$

então,

$$P(x,t,D_x,D_t)K_+u(x,t) = (2\pi)^{-1}\int_0^{\infty}\Big[\int_{-T}^{t} e^{ix\xi - B(t,t')\xi}(iB_t(t,t')\xi -$$

$$- ib(t)\xi)i\tilde{u}(\xi,t')dt' + \frac{i}{i} e^{ix\xi - B(t,t')\xi}\tilde{u}(\xi,t')\Big|_{t'=t}\Big]d\xi$$

$P(x,t,D_x,D_t)K_-\ u(x,t)$ seria análogo e procuraríamos B tal que

$$B_t(t,t') = b(t)$$

$$B\big|_{t'=t} = 0$$

então $B(t,t') = \displaystyle\int_{t'}^{t} b(s)ds$.

Desta forma,

$$P(x,t,D_x,D_t)K\,u(x,t) = u(x,t)$$

ou, de outra forma, se construíssemos como o fizemos para o caso b(x,t), isto é, se procurássemos

$$K_+u(x,t) = (2\pi)^{-1}\int_0^{\infty}\int_{-T}^{t} e^{i\phi(x,t,t')\xi}k(x,t,t')\tilde{u}(\xi,t')dt'd\xi$$

e de forma análoga para $K_-u(x,t)$, teríamos de resolver os problemas de Cauchy:

$$\phi_t - ib(t)k_x = 0$$

$$\phi\Big|_{t'=t} = x$$

e $$k_t - ib(t)k_x = 0$$

$$k\Big|_{t'=t} = i$$

e constatamos que $\phi(x,t,t') = x - B(t,t')$ e $k(x,t,t') \equiv i$ são soluções para os problemas. Então, ainda aqui, obteríamos:

$$P(x,t,D_x,D_t)K\,u(x,t) = u(x,t).$$

(Ver [26]).

BIBLIOGRAFIA

[1] BARROS-Neto, J., "An Introduction to the Theory of Distributions", Marcel Dekker, Inc. New York, 1973.

[2] ____________, "Uma Introdução às equações diferenciais parciais com coeficientes constantes"- Notas de Curso - Instituto de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco-Recife, 1976

[3] ____________, "Alguns tipos de Núcleos-Distribuições", Notas de Matemática nº 22, IMPA, Rio de Janeiro, 1961.

[4] BERGAMASCO, A.P., "Resolubilidade Local e Hipoeliticidade de Operadores Diferenciais Parciais de Primeira Ordem", Dissertação de Mestrado, ICMSC-USP, São Carlos, 1974.

[5] CARDOSO, F. e HOUNIE, J., "First-Order Linear PDES and Uniqueness in the Cauchy Problem", Journal of Differential Equations, vol 33, 1979.

[6] ELSGOLTZ, L., Ecuaciones Diferencialès y Cálculo Variacional", Editorial Mir-Moscou, 1969.

[7] FOLLAND, G.B., "Introduction to Partial Differential Equations", Princeton University Press and University of Tokio Press. Princeton, New Jersey, 1976.

[8] HORMANDER, L., "An Introduction to Complex Analysis in Several Variables", North-Holland Publishing Company-Amsterdan-London, American Elsevier Publishing Company, Inc. - New York, 1973.

[9] ____________ , "Linear Partial Differential Operators", Springer-Verlag Berlin. Heidelberg. New York, 1969.

[10] ____________ , "Fourier Integral Operators I", Acta Math., 127 (1971) 79-183.

[11] ____________ , "Pseudo-Differential Operators of Principal Type", Proceedings NATO, Advanced Study Institute on Singularities in boundary Value Problems, Maratea, Italia, 1980.

[12] LIMA, E.L., "Análise no Espaço R^n", Editora Universidade de Brasília, 1970.

[13] NIREMBERG, L. e TREVES, F., "Solvability of a First-Order Linear Partial Differential Equations", Comm. Pure and Applied Math., vol. 16, 1963, 331-351.

[14] __________________________, "On Solvability of Linear Partial Differential Equations, Part. I: Necessary Conditions", Comm. Pure and Applied Math., vol 23, 1970, 1-38.

[15] NIREMBERG, L. e TREVES, F., "On Local Solvability of Linear Partial Differential Equations, Part. II. Suficient Conditions". Comm. Pure and Applied Math., vol. 23, 1970, 459-510.

[16] PETRONILHO, G., "Operadores Diferenciais Parciais Lineares Analítico-Hipoelítico de Tipo Principal", Dissertação de Mestrado, ICMSC-USP, São Carlos, 1978.

[17] STRAUSS, M. e TREVES, F., "First-Order Linear PDES and Uniqueness in the Cauchy Problem", Journal of Differential Equations, vol. 15, 1974.

[18] TREVES, F., "Hipoelliptic Partial Differential Equations of Principal Type. Sufficient Conditions and Necessary Conditions", Comm. Pure and Applied Math., vol. 24, 631-670, 1971.

[19] ________, "Analytic-Hipoelliptic Partial Differential Equations of Principal Type", Comm. Pure and Applied Math., vol. 24, 537-570, 1971.

[20] ________, "Solutions of Cauchy Problems Modulo Flat Functions", Comm. in Partial Differential Equations, 1(1), 45-72 (1976).

[21] ________, "Aproximate Solutions to Cauchy Problems", Journal of Differential Equations, vol. 11, 1972.

[22] TREVES, F., "A New Method of Proof of the Subelliptic Estimates", Comm. Pure and Applied Math., vol. 24, 71-115, 1971.

[23] ________ , "Integral Representation of solutions of Linear Partial Differential Equations II", Astérisque, 34-35(1976), 341-357

[24] ________ , "Basic Linear Partial Differential Equations", Academic Press New York. San Francisco. London, 1975.

[25] ________ , "Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels", Academic Press New York London, 1967.

[26] ________ , "On the Existence and Regularity of Solutions of Linear Partial Differential Equations", Proceedings of Symposia in Pure Math., AMS, vol. 23, 33-60, 1971.