UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

TRABALHO DE MESTRADO

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA SOBRE ESPAÇOS DE DIMENSÃO $n \geqslant 1$

MARIELZA JORGE FAVARO
Orientador:
Prof. Dr. ODELAR LEITE LINHARES

SÃO CARLOS
1973

Agradecimentos

Ao Professor Dr. Odelar Leite Linhares pela orientação do referido trabalho e amizade demonstrada.

Ao Professor Fernão Stella de Rodrigues Germano que gentilmente me ajudou na parte de programação dos métodos.

Aos Professores Dr. Mario Rameh Saab e Dr. Nelson Onuchic pelo incentivo durante todos estes anos.

À CAPES e ao CNPq pela concessão de auxílio para a publicação do trabalho.

Numerical Integration over Spaces of dimension $n \geq 1$

Marielza Jorge Favaro Adviser: Dr. Odelar Leite Linhares

Abstract

The purpose of this work is to discuss methods to calculate approximately multiple integrals. The approximations are of the form

$$\int \cdots \int_{R_n} w(x_1,\ldots,x_n)\, f(x_1,\ldots,x_n)\, dx_1 \ldots dx_n \simeq \sum_{i=1}^{N} A_i f(v_{1i},\ldots,v_{ni})$$

and are of a certain degree d.

Integration formulae for simple regions like simplex and complex are presented which generalize the one dimension Newton-Cotes formulae. Many of the existing generalizations of the Newton-Cotes formulae use a number of base-points $N = \frac{(n+d)!}{n!\ d!}$ whereas those discussed use mostly $N < \frac{(n+d)!}{n!\ d!}$ and are numerically better as analagous results are obtained with less base-points.

Integration formulae using orthogonal polynomials are also discussed which generalize the one dimension Gauss formulae. The result of A.H.Stroud [9] gives a necessary and suficient condition for the common zeros of a set of polynomials in n-variables to be used as base-points in an integration formula.

The main result of this work is the R. Franke theorem [10] that has practical interest because:

i) the hypothesis are more easely verified than those of A.H.Stroud;

ii) the number of orthogonal polynomials and that of base-points is well determined for each chosen n;

iii) the number of base-points is always given by $N \leq m^n < \frac{(n+d)!}{n!\ d!}$ which is numerically more feasible.

ÍNDICE

<u>Introdução</u>

O propósito deste trabalho é discutir métodos para se calcular aproximadamente integrais múltiplas. As aproximações que vamos considerar têm a forma:

$$\int_{R_n}\!\!\cdots\!\int w(x_1,\ldots,x_n)f(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n \simeq \sum_{i=1}^{N} A_i f(v_{1i}\ldots,v_{ni})$$

e são de um certo grau d, ou seja, são exatas para polinômios em n-variáveis de grau $\leq$ d.

O capítulo 3 dá fórmulas de integração para regiões simples como simplexo e complexo, que generalizam as fórmulas de Newton e Cotes em uma dimensão. Assim, o cálculo da integral múltipla de um certo polinômio em n-variáveis determina uma fórmula do tipo citado acima. Tal investigação foi feita por R. B. Guenther e E. L. Roetman [6]. Pelo desenvolvimento de Taylor aplicado a função f(x) conseguimos uma estimativa para o erro de truncamento. As fórmulas análogas às de Newton e Cotes usam um número de pontos $N = \frac{(n+d)!}{n!d!}$ e as que serão discutidas no capítulo 3 utilizam, na maioria delas, $N < \frac{(n+d)!}{n!d!}$, o que, do ponto de vista numérico é melhor, por se obter resultados análogos envolvendo menor número de pontos.

No capítulo 4 serão discutidas fórmulas de integração usando polinômios ortogonais, que generalizam as fórmulas de Gauss em uma variável. Inicialmente apresentaremos teoremas no plano, devidos a A. H. Stroud [8], cujas provas são construtivas. Estes resultados podem ser generalizados para $n \geq 2$, o que será feito no parágrafo 4.3. O resultado de A. H. Stroud [9], dá uma condição necessária e suficiente para que os zeros comuns de um conjunto de polinômios em n-variáveis possam ser usados como pontos bases numa fórmula de integração. Esta generalização utiliza um número de pontos bases $N < \frac{(n+d)!}{n!d!}$.

O resultado principal deste trabalho é o teorema de R.Franke [10] , discutido também no parágrafo 4.3, que generaliza o resultado acima mencionado de A. H. Stroud [8]. O teorema de R. Franke [10] tem valor e interesse prático, pelas seguintes razões:

i) as hipóteses são mais facilmente verificáveis que as de A.H.Stroud;

ii) o número de polinômios ortogonais e o de pontos-base é perfeitamente determinado para cada n escolhido;

iii) o número de pontos-base é sempre dado por $N \leq m^n < \frac{(n+d)!}{n!d!}$ que como já foi dito, é mais interessante sob o ponto de vista do cálculo prático.

Finalizando serão apresentados alguns exemplos a fim de comparar as fórmulas estudadas.

Foi acrescentada uma bibliografia mais extensa sobre o assunto, para servir de guia a interessados.

Capítulo 1

Pré-Requisitos

Apresentaremos neste capítulo algumas noções e fórmulas necessárias ao desenvolvimento do texto, as quais podem ser encontradas na bibliografia geral e serão apresentadas aqui apenas para facilitar a leitura do trabalho.

1.1 - Simplexo S(n) e Complexos T(n) e $T_2(n)$

Definição: Simplexo S(n)

Sejam os pontos $P_o = (o, \ldots, o)$; $P_1 = (h_1, o, \ldots, o)$; $P_2 = (o, h_2, o, \ldots, o)$; ... ; $P_n = (o, \ldots, o, h_n)$ do R^n, com $h_i > o$; $i=1, 2, \ldots, n$.

Chama-se n-simplexo S(n) determinado por estes pontos ao conjunto:

$$S(n) = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_n) \mid x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i P_i \text{ com } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \leq 1 \text{ e } \alpha_i \geq o \right\}$$

Os pontos P_o, P_1, ..., P_n são os vértices de S(n).

Vale, também, a seguinte fórmula (ver [1]):

$$\int_{S(n)} x_1^{p_1} x_2^{p_2} \cdots x_\alpha^{p_\alpha} \, dx = \frac{|S(n)| \Gamma(n+1) \Gamma(p_1+1) \cdots \Gamma(p_\alpha+1)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_\alpha+n+1)} h_1^{p_1} \cdots h_\alpha^{p_\alpha}$$

onde: $p_i \geq o$; $i = 1, 2, \ldots, \alpha$ e $\Gamma(z)$ é a função gama de Euler.

No caso dos p_i serem inteiros a fórmula acima fica:

$$\int_{S(n)} x_1^{p_1} x_2^{p_2} \cdots x_\alpha^{p_\alpha} \, dx = \frac{|S(n)| \; (n!)(p_1!)\cdots(p_\alpha!)}{(p_1+p_2+\cdots+p_\alpha+n)!} h_1^{p_1} \cdots h_\alpha^{p_\alpha}$$

Este é o caso que vai nos interessar.

Notemos que o volume do S(n) é dado por:

$$|S(n)| = \int_{S(n)} dx = \frac{h_1 \ldots h_n}{n!}$$

Construção do Complexo T(n)

Consideremos o S(n) de vértices P_o, $P_1, \ldots, P_n$. Por reflexão destes vértices sobre a origem formamos o complexo T(n), simétrico em relação a origem e com 2n+1 vértices P_o, $P_1, \ldots, P_n, P_{-1} = (-h_1, o, \ldots, o)$, $P_{-2} = (o, -h_2, o, \ldots, o)$, ..., $P_{-n} = (o, \ldots, o, -h_n)$

Deste modo o volume do T(n) é dado por:

$$|T(n)| = 2^n \frac{h_1 \ldots h_n}{n!}$$

Construção do Complexo $T_2(n)$

Seja o simplexo de vértices P_o, $P_{21} = (2h_1, o, \ldots, o)$; $P_{22} = (o, 2h_2, o, \ldots, o)$; ... ; $P_{2n} = (o, \ldots, o, 2h_n)$. Pela reflexão destes vértices sobre a origem formamos o complexo $T_2(n)$ de vértices P_o, P_{21}, ..., P_{2n}, $P_{-21} = (-2h_1, o, \ldots, o)$; $P_{-22} = (o, -2h_2, o, \ldots, o)$, ..., $P_{-2n} = (o, \ldots, o, -2h_n)$; cujo volume é, então, o seguinte:

$$|T_2(n)| = 2^{2n} \frac{h_1 \ldots h_n}{n!}$$

1.2 - Polinômio de Interpolação

Sejam x_o, x_1, ..., x_n n+1 pontos distintos em [a,b] e y_o, y_1, ..., y_n valores de uma função f(x) sobre os pontos dados.

Teorema

Existe um único polinômio $P_n(x)$ de grau n tal que:

$P_n(x_i) = y_i \quad ; \quad i = o, 1, \ldots, n$

Definição: Polinômio de Interpolação

O polinômio $P_n(x)$ é chamado polinômio de interpolação da função $f(x)$ sobre os pontos x_o, x_1, ..., x_n.

Consideremos os seguintes polinômios de grau n:

$$\ell_k(x) = \frac{(x-x_o)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_o)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)} \quad ;$$

$k = o, 1, \dots, n$

É claro que:

$$\ell_k(x_j) = \delta_{kj} = \begin{cases} o & \text{se } k \neq j \\ 1 & \text{se } k = j \end{cases}$$

Definição: Fórmula de Lagrange

O polinômio $P_n(x) = \sum_{k=o}^{n} y_k \ell_k(x)$; que é de grau n e $P_n(x_i) = y_i$; $i = o, 1, \dots, n$; é chamado polinômio de interpolação na fórmula de Lagrange.

Se os pontos distintos x_o, x_1, ..., x_n forem equidistantes e com a mudança de variável:

$$x = x_o + uh \quad ; \quad h = x_i - x_{i-1} \quad ; \quad i = 1, \dots, n$$

notemos que:

$$\ell_k(x_o + uh) = \frac{u(u-1)\dots(u-(k-1))(u-(k+1))\dots(u-n)}{k(k-1)\dots(k-(k-1))(k-(k+1))\dots(k-n)} = L_k(u) \quad ;$$

$k = o, 1, \dots, n$

Teorema

Sejam x_o, x_1, ..., x_n pontos distintos em $[a,b]$ e $f(x)$ uma função contínua e com derivadas de ordem n+1 contínuas em $[a,b]$.

Seja $P_n(x)$ o polinômio de interpolação da $f(x)$ sobre os pontos x_o, x_1, ..., x_n.

Então, em qualquer ponto $x \in [a,b]$, vale o seguinte:

$$\bar{E}(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{(x-x_o)(x-x_1)\dots(x-x_n)\, f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

para algum ξ em $[a,b]$. (ver [4]).

1.3 - Polinômios em n-variáveis; $n \geq 1$

Definição

Um polinômio de grau no máximo m em n-variáveis é uma função real de n-variáveis da forma:

$$P(x) = \sum_{\substack{i_1 + i_2 + \dots + i_n = o \\ i_j \geq o\ ;\ j=1,\dots,n}}^{m} a_{i_1,\dots,i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$$

Vamos, a seguir, definir uma ordem para os monômios de um polinômio.

Seja J o conjunto das ênuplas de inteiros não negativos e seja ϕ o correspondente conjunto de monômios, isto é, $j=(j_1,j_2,\dots,j_n) \in J$ e $\phi_j = x_1^{j_1} x_2^{j_2} \dots x_n^{j_n} \in \phi$. Definimos: $\sigma_k(j) = \sum_{i=k}^{n} j_i$ e ordenamos J do seguinte modo:

se i, $j \in J$, então, $i < j \iff \sigma_k(i) = \sigma_k(j)$, $k = 1,2,\dots,r-1$ e $\sigma_r(i)$ é menor que $\sigma_r(j)$ para algum r, $1 \leq r \leq n$. Esta ordem definida em J induz uma ordem em ϕ.

Teorema

Um polinômio em n-variáveis de grau m tem no máximo $\binom{m+n}{n}$ monômios.

1.4 - Polinômios Ortogonais

Dado um domínio $D \subset R^n$ e uma função peso $w(x)$ de sinal constante em D, então, para funções $f(x)$ e $g(x)$ tais que $w(x)\ f(x)\ g(x)$ é integrável sobre D, defininos o produto escalar por:

$$(f,g) = \int_D w(x)\ f(x)\ g(x)\ dx$$

Definição

Duas funções $f(x)$ e $g(x)$ são ortogonais se $(f,g) = o$.

Definição: Polinômio Ortogonal

Polinômio ortogonal é um polinômio que é ortogonal a todos polinômios de grau menor.

Teorema

Seja $\mathcal{P}_m$ o conjunto de todos polinômios ortogonais de grau m, então, $\mathcal{P}_m$ tem dimensão $\binom{n+m-1}{n-1}$ e tem uma base da forma:

$$B_m = \left\{ b_j \mid b_j = \phi_j(x) + \sum_{\sigma(i)=o}^{m-1} a_{j,i}\ \phi_i(x)\ ,\ \sigma(j) = m \right\}$$

onde:

$$j = (j_1, \ldots, j_n) \quad e \quad i = (i_1, \ldots, i_n).$$

Daremos um método para calcular os elementos de uma base para polinômios ortogonais em várias variáveis, que segue da prova do teorema anterior.

Os $\binom{m+n-1}{n-1}$ elementos da base para polinômios ortogonais de grau m são da forma:

$$b_j = \phi_j(x) + \sum_{\sigma(i)=0}^{m-1} a_{j,i}\,\phi_i(x) \quad ; \; \sigma(j) = \sigma_1(j) = m$$

O conjunto dos coeficientes $\{a_{j,i}\}$ é calculado resolvendo-se as $\binom{m+n-1}{n}$ equações lineares:

$$0 = (b_j, \phi_i) = \sum_{\sigma(k)=0}^{m-1} a_{j,k}\,(\phi_k, \phi_i) + (\phi_j, \phi_i)$$

onde

$i = 1, 2, \ldots, \binom{m+n-1}{n}$, (ver [2]).

<u>Caso n = 1</u>

Seja $[a,b]$ um intervalo finito ou infinito.

<u>Teorema</u>

Os zeros dos polinômios ortogonais reais são reais, simples, e estão localizados no interior de $[a,b]$. (Ver [3]).

1.5 - <u>Teoremas de Bezout e Max Noether</u>

Daremos aqui resultados sobre zeros comuns de polinômios em n-variáveis. O espaço próprio para consideração de zeros comuns de n polinômios em n-variáveis é o n-espaço complexo projetivo. A razão para isto é que os zeros comuns podem ser complexos e ou sobre o hiperplano no infinito.

<u>Teorema de Bezout</u>

Se os polinômios $P_{m_i}(x_1, \ldots, x_n)$ de grau m_i ; $i = 1,2,\ldots,n$ têm mais do que $m_1 \ldots m_n$ zeros comuns, então, eles têm infinitos ze ros comuns. Se o número de zeros comuns é finito, então, eles têm exatamente $m_1 \ldots m_n$, contando multiplicidades.

Notemos que os zeros comuns não precisam ser distintos. O teorema seguinte nos dá informação sobre a forma de polinômios que se anulam em todos os zeros comuns de outros polinômios.

Teorema Fundamental de Noether

Sejam $P_{m,i}(x_1, \ldots, x_n)$, polinômios de grau m ; $i = 1, \ldots n$, que têm exatamente m^n zeros comuns, todos dos quais são distintos. Seja $P_d(x_1, \ldots, x_n)$ um polinômio de grau d que se anula em cada um dos zeros comuns. Então, $d \geq m$ e existem polinômios $Q_{d-m,i}$ de grau $\leq d-m$; $i = 1, \ldots, n$ tal que:

$$P_d = Q_{d-m,1}\, P_{m,1} + \ldots + Q_{d-m,n}\, P_{m,n}$$

Teorema

Se os polinômios $P_{m_i}(x_1, \ldots, x_n)$; $i = 1, \ldots, n$ têm infinitos zeros comuns, eles não são todos finitos.

Caso n = 2

Em duas variáveis, os teoremas de Bezout e Noether podem ser enunciados numa forma mais poderosa.

Seja P_m um polinômio de grau m, então, P_m tem uma fatoração:

$$P_m(x_1,x_2) = P_{m_1}(x_1,x_2)\, P_{m_2}(x_1,x_2) \ldots P_{m_r}(x_1,x_2) \;;$$

$m = m_1 + \ldots + m_r$; $m_i \geq 1$; $i = 1, \ldots, r$; em fatores irredutíveis P_{m_i}, que são únicos exceto para sua ordem e para constantes múltiplas. Os P_{m_i} são chamados componentes de P_m.

Teorema de Bezout

Se os polinômios P_m e P_n de grau m e n, respectivamente, não têm componente em comum, então, eles têm m n zeros comuns.

Em geral, alguns dos zeros comuns de P_m e P_n podem ser de multiplicidade, complexos ou sobre uma reta no infinito.

Teorema de Noether

Suponhamos que os polinômios P_m e P_n não têm componente em comum e que seus zeros comuns (x_{1_i}, x_{2_i}) ; $i = 1, \ldots, m\,n$ sejam distintos. Se o polinômio não nulo, de grau s $P_s(x_1,x_2)$ se anula em todos estes pontos, então, $s \geq \min(m,n)$ e existem polinômios Q_{s-m}, Q_{s-n} de grau $\leq s-m$ e de grau $\leq s-n$, respectivamente, tal que:

$$P_s(x_1,x_2) = Q_{s-m}\, P_m + Q_{s-n}\, P_n$$

(Q_{s-m} ou Q_{s-n} podem ser nulos, mas, não ambos).

Capítulo 2

Integração Numérica na Reta

2.1 - Introdução

Neste capítulo serão discutidas as fórmulas de integração numérica de Newton e Cotes e de Gauss, na reta. Estas serão úteis nos capítulos seguintes e são apresentadas aqui com dupla finalidade: facilitar a leitura do texto e dar idéia das generalizações a serem feitas. Este capítulo será sucinto, pois o assunto tratado aqui é encontrado na bibliografia elementar de integração numérica (ver [4]).

2.2 - Fórmulas de Integração Numérica de Newton e Cotes

Trataremos agora, do problema de calcular $\int_a^b f(x)\, dx$ numericamente, onde $f(x)$ é uma função real de uma variável real e cujo valor é conhecido em certos pontos. Para isso substituimos $f(x)$ por seu polinômio de interpolação nestes pontos e faremos a integração direta do polinômio. Em geral, os valores da função são calculados em pontos equidistantes. Para este caso, determinaremos algumas fórmulas de integração numérica.

Seja $P_n(x) = \sum_{k=o}^{n} y_k\, \ell_k(x)$, o polinômio de interpolação da $f(x)$ sobre os pontos equidistantes $x_o, x_1, \ldots, x_n$. Então:

$$\int_{x_o}^{x_n} f(x)\, dx \simeq \int_{x_o}^{x_n} \sum_{k=o}^{n} y_k\, \ell_k(x)\, dx = \sum_{k=o}^{n} y_k \int_{x_o}^{x_n} \ell_k(x)\, dx$$

fazendo a mudança de variável:

$$u = \frac{x - x_o}{h} \quad \text{onde} \quad h = x_i - x_{i-1}\ ;\ i = 1, \ldots, n$$

$$\int_{x_o}^{x_n} f(x)\, dx \simeq \sum_{k=o}^{n} y_k\, h \int_{o}^{n} L_k(u)\, du = nh \frac{1}{n} \sum_{k=o}^{n} y_k \int_{o}^{n} L_k(u)\, du$$

seja:

$$C_k^n = \frac{1}{n} \int_o^n L_k(u)\, du$$

Portanto:

$$\int_{x_o}^{x_n} f(x)\, dx \simeq nh \sum_{k=o}^{n} C_k^n\, y_k \qquad (1)$$

onde os C_k^n satisfazem: $C_k^n = C_{n-k}^n$

Para n = 1, temos:

$$C_o^1 = - \int_o^1 (u-1)\, du = \frac{1}{2} \qquad e \qquad C_1^1 = \frac{1}{2}$$

Portanto:

$$\int_{x_o}^{x_1} f(x)\, dx \simeq \frac{h}{2} (y_o + y_1)$$

que é a chamada regra do trapézio.

Para n = 2,

$$C_o^2 = \frac{1}{4} \int_o^2 (u-1)(u-2)\, du = \frac{1}{6} \qquad e \qquad C_2^2 = \frac{1}{6}$$

$$C_1^2 = - \frac{1}{2} \int_o^2 u(u-2)\, du = \frac{4}{6}$$

Portanto:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}\,(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

que é a regra de Simpson.

Procedendo-se assim, para n = 3, temos:

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx \simeq \frac{3\,h}{8}\,(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3)$$

regra de $\frac{3}{8}$ de Simpson

e

para n = 4,

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)\,dx \simeq \frac{2h}{45}\,(7y_0 + 32y_1 + 12y_2 + 32y_3 + 7y_4)$$

Para uma relação mais completa ver [4, pág. 73].

<u>Teorema</u>

Sejam x_0, x_1, ..., x_n pontos distintos. A fórmula (1) é exata para polinômios de grau menor ou igual a n.

<u>Estudo do Erro</u>

Da aproximação de Lagrange:

$$f(x) \simeq \sum_{k=0}^{n} y_k\,\ell_k(x)$$

com o erro:

$$\overline{E}\,(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\,\ldots\,(x-x_n)\,f^{(n+1)}\,(\xi)}{(n+1)!}$$

foi obtida a fórmula de integração:

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq nh \sum_{k=0}^{n} C_k^n\, y_k$$

e onde o erro E associado pode ser expresso na forma:

$$E = \int_a^b \frac{(x-x_0)(x-x_1)\,\ldots\,(x-x_n)\, f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,dx$$

Teorema

Supomos que $f \in C^{n+1}([a,b])$ e que $(x-x_0)\,\ldots\,(x-x_n)$ não muda de sinal em $[a,b]$. Então, existe $\mu \in [a,b]$ tal que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = nh \sum_{k=0}^{n} C_k^n\, y_k + \frac{f^{(n+1)}(\mu)}{(n+1)!} \int_a^b (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)\,dx$$

Para $n = 1$:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \frac{h}{2}(y_0+y_1) + \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x-x_0)(x-x_1)\, f''(\xi)}{2}\,dx$$

como $(x-x_0)(x-x_1)$ não troca de sinal em $[x_0, x_1]$ e fazendo

$$u = \frac{x - x_0}{h} \quad ; \quad h = x_1 - x_0$$

temos que:

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{(x-x_0)(x-x_1)\, f''(\xi)}{2}\,dx = \frac{f''(\mu)\, h^3}{2} \int_0^1 u(u-1)\,du =$$

$$= -\frac{f''(\mu)\, h^3}{12}$$

Portanto:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx = \frac{h}{2}(y_0 + y_1) - \frac{h^3}{12} f''(\mu)$$

para algum $x_0 \leq \mu \leq x_1$.

Um inconveniente é que para muitos casos simples as condições de tal teorema não se verificam. Por exemplo, na regra de Simpson, a função $(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$ muda de sinal em $[a,b]$. Contudo é possível provar (ver [4]), que quando n é ímpar, o erro pode ser expresso na forma:

$$E = \frac{h^{n+2}\, f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_0^n u(u-1) \ldots (u-n)\, du$$

e quando n é par, na forma:

$$E = \frac{h^{n+3}\, f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_0^n \left(u - \frac{n}{2}\right)u(u-1) \ldots (u-n)\, du$$

onde:

$$x_0 < \xi < x_n \quad ; \quad u = \frac{x - x_0}{h} \quad ; \quad h = x_i - x_{i-1} \quad ; \quad i = 1,\ldots,n$$

Então, para n = 2:

$$E = \frac{h^5\, f^{(4)}(\xi)}{4!} \int_0^2 (u-1)u(u-1)(u-2)\, du = \frac{h^5\, f^{(4)}(\xi)}{4!}\left(-\frac{4}{15}\right) =$$

$$= -\frac{h^5\, f^{(4)}(\xi)}{90}$$

Logo:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\, dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) - \frac{h^5\, f^{(4)}(\xi)}{90} \; ; \; x_0 < \xi < x_2 .$$

Deste modo, para n = 3:

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)\, dx = \frac{3h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3) - \frac{3h^5 f^{(4)}(\xi)}{80}$$

$x_0 < \xi < x_3$, e para n = 4:

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)\, dx = \frac{2h}{45}(7y_0 + 32y_1 + 12y_2 + 32y_3 + 7y_4) -$$

$$- \frac{8h^7}{945} f^{(6)}(\xi) \; ; \quad x_0 < \xi < x_4.$$

Para uma relação mais completa, ver [4, pág. 73].

2.3 - Fórmulas de Integração Numérica de Gauss

Sejam f(x) e w(x) ≥ o definidas em [a,b] tais que w(x) f (x) é integrável nesse intervalo.

Se são dados n pontos distintos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ em [a,b], podemos determinar coeficientes $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tais que a fórmula:

$$\int_a^b w(x)\, f(x)\, dx \simeq \sum_{i=1}^{n} A_i\, f(x_i) \tag{2}$$

resulte exata quando f(x) é um polinômio de grau menor ou igual a n-1. Se tratarmos os coeficientes A_i e os pontos x_i com 2n incógnitas, é natural perguntar sobre a possibilidade de se determinar uma fórmula de integração que seja exata para polinômios de grau menor ou igual a 2n-1. A solução deste problema foi dada, inicialmente por Gauss e generalizada por Jacobi, usando polinômios ortogonais. Este tipo de raciocínio será generalizado no capítulo 4. As demonstrações omitidas são encontradas em [5].

Teorema

Supomos que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sejam distintos e m um inteiro, $0 \leq m \leq n-1$.

Então, podemos determinar coeficientes A_k tais que:

$$\int_a^b w(x)\, f(x)\, dx \simeq \sum_{k=1}^{n} A_k\, f(x_k)$$

seja exata para todos polinômios de grau $\leq n+m$ se e só se

$$P_n(x) = (x-x_1)(x-x_2) \ldots (x-x_n)$$

é ortogonal a todos polinômios de grau $\leq m$.

Prova

Seja $Q_{n-1}(x)$ o polinômio de interpolação da função $f(x)$ sobre os pontos $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Logo:

$$\int_a^b w(x)\, f(x)\, dx = \int_a^b w(x)\, Q_{n-1}(x)\, dx + \int_a^b w(x)\, E_{n-1}(x)\, dx$$

onde $E_{n-1}(x)$ é o erro na interpolação.

Por hipótese

$$\int_a^b w(x)\, f(x)\, dx \simeq \sum_{i=1}^{n} A_i\, f(x_i)$$

é exata para polinômios de grau $\leq n+m$. Assim, se $f(x)$ é um polinômio de grau n+m, temos que:

$f^{(n)}(x) = R_m(x)$ é um polinômio de grau m

Portanto:

$$E_{n-1}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ \dots\ (x-x_n)\ R_m\ (x)}{n!}$$

Portanto:

$$\int_a^b w(x)\ E_{n-1}(x)\ dx = 0$$

ou seja,

$$\int_a^b w(x)(x-x_1)(x-x_2)\ \dots\ (x-x_n)\ \frac{R_m(x)}{n!}\ dx = 0$$

$$\Longrightarrow \qquad ((x-x_1)(x-x_2)\ \dots\ (x-x_n),\ \frac{R_m(x)}{n!}) = 0$$

Portanto:

$$P_n(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ \dots\ (x-x_n)$$

é ortogonal a todo polinômio de grau $\leq m$.

Já vimos, no parágrafo 1.3, que os x_i ; $i = 1, \dots, n$ estão no interior de $[a,b]$.

Consideremos $Q_{n+m}(x)$ um polinômio de grau n+m e $K_{n-1}(x)$ seu polinômio de interpolação sobre os pontos $x_1, \dots, x_n$. Então,

$$K_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n} Q_{n+m}(x_k)\, \ell_k(x)$$

Portanto:

$$Q_{n+m}(x_k) - K_{n-1}(x_k) = 0 \quad ; \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Logo:

$$Q_{n+m}(x) - K_{n-1}(x) = (x-x_1)(x-x_2) \ldots (x-x_n)\, R_m(x) = P_n(x) R_m(x)$$

Como, $P_n(x)$ é ortogonal a todo polinômio de grau $\leq$ m, segue que:

$$\int_a^b w(x)\, Q_{n+m}(x)\, dx = \int_a^b w(x)\, K_{n-1}(x)\, dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left\{ \int_a^b w(x)\, \ell_k(x)\, dx \right\} Q_{n+m}(x_k)$$

Seja:

$$A_k = \int_a^b w(x)\, \ell_k(x)\, dx$$

Portanto, determinamos coeficientes A_k tais que

$$\int_a^b w(x)\, Q_{n+m}(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} A_k\, Q_{n+m}(x_k)$$

Teorema

Se $w(x)$ é não negativa em $[a,b]$, então, (2) não pode ser exata para todos polinômios de grau $\leq$ 2n.

Teorema

Se $w(x)$ é não negativa em $[a,b]$ e se (2) é exata para todos polinômios de grau $\leq$ 2n-2, então, todos os coeficientes A_i são positivos.

Fórmula Produto Cartesiano

Por uma fórmula de integração aproximada para uma integral múltipla sobre uma região n-dimensional, entendemos uma fórmula do tipo:

$$\int \cdots \int_{R_n} w(x_1,\ldots,x_n) f(x_1,\ldots,x_n) dx_n \ldots dx_1 \simeq \sum_{i=1}^{N} A_i\, f(v_i) \quad (3)$$

onde os pontos $v_i = (v_{i_1}, \ldots, v_{i_n})$ da região e os coeficientes A_i têm a propriedade que a aproximação é exata quando $f(x_1, \ldots, x_n)$ é um polinômio em n-variáveis que não excede a um certo grau d, ou seja, quando $f(x_1, \ldots, x_n)$ é uma combinação linear dos monômios:

$$x_1^{\alpha_1}\, x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} \quad ; \quad 0 \leq \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \leq d.$$

Quando a região $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$; $w(x) = w_1(x_1)\, w_2(x_2) \ldots w_n(x_n)$ e $f(x) = f_1(x_1)\, f_2(x_2) \ldots f_n(x_n)$, então:

$$\int \cdots \int_D w(x)\, f(x)\, dx = \int_{a_1}^{b_1} w_1(x_1)\, f_1(x_1)\, dx_1 \ldots \int_{a_n}^{b_n} w_n(x_n) f_n(x_n) dx_n$$

Se tivermos uma fórmula de quadratura para funções de uma variável:

$$\int_{a_i}^{b_i} w_i(x_i)\, x_i^{\alpha_i}\, dx_i = \sum_{k_i=1}^{m} A_{k_i}\, v_{k_i}^{\alpha_i} \quad ; \quad \alpha_i = 0, 1, \ldots, d$$

então:

$$\int \cdots \int_D w(x)\, x_1^{\alpha_1}\, x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}\, dx_n\, dx_{n-1} \ldots dx_1 =$$

$$= \sum_{k_1=1}^{m} \sum_{k_2=1}^{m} \ldots \sum_{k_n=1}^{m} A_{k_1} A_{k_2} \ldots A_{k_n}\, v_{k_1}^{\alpha_1}\, v_{k_2}^{\alpha_2} \ldots v_{k_n}^{\alpha_n}$$

que é uma fórmula de integração do tipo (3) exata para

$$0 \leq \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \leq d.$$

Esta fórmula é chamada fórmula produto cartesiano, onde usamos $N = m^n$ pontos $(v_{k_1}, v_{k_2}, \ldots, v_{k_n})$ com coeficientes $A_{k_1}, A_{k_2}, \ldots, A_{k_n}$.

Para o caso do cubo n-dimensional e função peso igual a 1, então:

$$\int_{-1}^{1} \ldots \int_{-1}^{1} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} \, dx_n \, dx_{n-1} \ldots dx_1 =$$

$$= \int_{-1}^{1} x_1^{\alpha_1} \, dx_1 \ldots \int_{-1}^{1} x_n^{\alpha_n} \, dx_n$$

Se:

$$\int_{-1}^{1} x_i^{\alpha_i} \, dx_i = \sum_{k_i=1}^{m} A_{k_i} v_{k_i}^{\alpha_i} \quad ; \quad \alpha_i = 0, 1, \ldots, d$$

temos que:

$$\int_{-1}^{1} \ldots \int_{-1}^{1} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \, dx_n \ldots dx_1 =$$

$$= \sum_{k_1=1}^{m} \ldots \sum_{k_n=1}^{m} A_{k_1} \ldots A_{k_n} v_{k_1}^{\alpha_1} \ldots v_{k_n}^{\alpha_n}$$

Para regiões simples como simplexo n-dimensional, esfera S_n e a superfície de S_n, ver [5].

Capítulo 3

Fórmulas de Newton e Cotes em n-dimensões, $n \geq 1$

3.1 - Introdução

Discutiremos aqui fórmulas de integração em n-dimensões, $n \geq 1$, que generalizam as fórmulas de Newton e Cotes na reta. A discussão é baseada no trabalho de R. B. Guenther e E. L. Roetman [6], que apresenta fórmulas de integração para algumas regiões simples, tais como simplexos e complexos. São ainda discutidas limitações para o erro de truncamento.

Seja $f(x)$ uma função real definida numa região D contida no R^n, em geral suposta de classe C^k.

3.2 - Regra do Trapézio

Seja $S(n)$ simplexo de vértices P_o, P_1, ..., P_n. Vamos determinar polinômio de 1ª ordem

$$p_1(x) = a + \sum_{i=1}^{n} b_i \, x_i$$

que coincide com $f(x)$ nos pontos P_o, P_1, ..., P_n. Então:

$$p_1(P_o) = a = f(P_o)$$

$$p_1(P_i) = f(P_o) + b_i \, h_i = f(P_i)$$

portanto:

$$b_i = \frac{1}{h_i} \left(f(P_i) - f(P_o)\right)$$

Para obtermos fórmula de quadratura, que generaliza a regra do Trapézio para $n = 1$, integramos $p_1(x)$ sobre $S(n)$:

$$\int_{S(n)} p_1(x)dx = \int_{S(n)} \Big(f(P_o)+\sum_{i=1}^{n} b_i x_i\Big)dx = f(P_o)|S(n)|+\sum_{i=1}^{n} b_i \int_{S(n)} x_i dx =$$

$$= f(P_o)|S(n)|+\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{h_i} \big(f(P_i)-f(P_o)\big)\frac{|S(n)|n!}{(n+1)!} h_i =$$

$$= \frac{|S(n)|}{(n+1)} \Big\{(n+1)f(P_o)-nf(P_o)+\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Big\} =$$

$$= \frac{|S(n)|}{(n+1)} \sum_{i=o}^{n} f(P_i)$$

Portanto:

$$\int_{S(n)} f(x)dx = \frac{|S(n)|}{(n+1)} \sum_{i=o}^{n} f(P_i) + E_1(f) \qquad (1)$$

onde:

$$E_1(f) = \int_{S(n)} \big(f(x) - p_1(x)\big)dx$$

é o erro de truncamento.

Estudo do Erro de Truncamento

Apliquemos o teorema de Taylor à função f(x) numa vizinhança da origem P_o:

$$f(x) = f(P_o) + \sum_{i=1}^{n} D_i\, f(P_o)\, x_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \overline{D_{ij}f}\, x_i\, x_j$$

onde:

$$D_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad ; \quad D_{ij} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

e a barra significa que as derivadas de f são calculadas num ponto intermediário conveniente.

Seja:

$$M = \max_{1\le i,j\le n} \left(\max_{x\in S(n)} | D_{ij}f(x)| \right)$$

e observando que:

$$2\, x_i\, x_j \le x_i^2 + x_j^2$$

e que

$$\left\{ f(P_i) = f(P_o) + D_i f(P_o)\, h_i + \frac{1}{2}\, \overline{D_{ii}f}\, h_i^2 \right\} \Longrightarrow$$

$$\left\{ |D_i f(P_o)\, h_i + f(P_o) - f(P_i)| = \frac{1}{2}\, |\, \overline{D_{ii}f}\, |\, h_i^2 \right\} \Longrightarrow$$

$$\left\{ |D_i f(P_o)\, h_i + f(P_o) - f(P_i)| \le \frac{1}{2}\, M\, h_i^2 \right\}$$

concluimos:

$$\int_{S(n)} f(x)dx = \int_{S(n)} \left(f(P_o) + \sum_{i=1}^{n} D_i f(P_o) x_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \overline{D_{ij}f}\, x_i x_j\right) dx =$$

$$= f(P_o)|S(n)| + \sum_{i=1}^{n} D_i f(P_o) \int_{S(n)} x_i\, dx +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \overline{D_{ij}f} \int_{S(n)} x_i\, x_j\, dx$$

Comparando este último resultado com (1), temos:

$$E_1(f) = f(P_o)|S(n)| + \sum_{i=1}^{n} D_i f(P_o) \frac{|S(n)|\, n!}{(n+1)!}\, h_i +$$

$$+ \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^{n} \overline{D_{ij}f} \int_{S(n)} 2\, x_i\, x_j\, dx - \frac{|S(n)|}{n+1} \sum_{i=o}^{n} f(P_i) \le$$

$$\le f(P_o)|S(n)| + \frac{|S(n)|}{n+1} \sum_{i=1}^{n} D_i f(P_o)\, h_i +$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{n} \overline{D_{ij}f} \int_{S(n)} (x_i^2 + x_j^2)dx - \frac{|S(n)|}{n+1}\sum_{i=1}^{n} f(P_i) -$$

$$-\frac{|S(n)|}{n+1} f(P_0)$$

Mas:

$$\int_{S(n)} (x_i^2 + x_j^2)\, dx = \frac{2|S(n)|}{(n+2)(n+1)} (h_i^2 + h_j^2)$$

Logo:

$$E_1(f) \leq |S(n)| \left\{ \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} f(P_o) + \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} D_i f(P_o)\, h_i + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2(n+2)(n+1)} \sum_{i,j=1}^{n} \overline{D_{ij}f}\, (h_i^2 + h_j^2) - \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} f(P_i) \right\}$$

Portanto:

$$|E_1(f)| \leq |S(n)| \left\{ \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} |D_i f(P_o)h_i + f(P_o) - f(P_i)| + \right.$$

$$+ \frac{2n\, M}{2(n+2)(n+1)} \sum_{i=1}^{n} h_i^2 \leq |S(n)| \left\{ \frac{M}{2(n+1)} \sum_{i=1}^{n} h_i^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{M\, n}{(n+2)(n+1)} \sum_{i=1}^{n} h_i^2 \right\} = \frac{|S(n)| M\, (3n+2)}{2(n+1)(n+2)} \sum_{i=1}^{n} h_i^2$$

Portanto:

$$|E_1(f)| \leq \frac{3\, n+2}{2(n+2)!}\, M\, h_1 \ldots h_n \sum_{i=1}^{n} h_i^2$$

<u>Observações</u>

1. Para n grande, $\frac{3\, n+2}{2(n+2)!}$ é muito pequeno. Portanto, podemos obter uma boa aproximação mesmo quando utilizamos valores muito grandes para os h_i.

2. Para n = 1, temos:

$$\int_{S(1)} f(x)\, dx = \frac{h_1}{2}\,(f(P_0) + f(P_1)) + E_1(f)$$

onde:

$$|E_1(f)| \leq \frac{5\, h_1^3}{12}\, M$$

que é a conhecida regra do Trapézio, para dimensão n = 1.

3.3 - Regra de Simpson

Seja $T(n)$ complexo de vértices P_0, $P_{\pm i}$; $i = 1, 2, \ldots, n$.

Consideremos polinômio de 2ª ordem:

$$p_2(x) = a + \sum_{i=1}^{n} b_i\, x_i + \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}\, x_i\, x_j$$

que coincide com $f(x)$ nos vértices de $T(n)$. Então:

$$p_2(P_0) = a = f(P_0)$$

$$p_2(P_i) = f(P_0) + b_i\, h_i + c_{ii}\, h_i^2 = f(P_i)$$

$$p_2(P_{-i}) = f(P_0) - b_i\, h_i + c_{ii}\, h_i^2 = f(P_{-i})$$

Portanto:

$$2f(P_0) + 2c_{ii}\, h_i^2 = f(P_i) + f(P_{-i})$$

$$c_{ii} = \frac{1}{2\, h_i^2}\,(f(P_i) + f(P_{-i}) - 2f(P_0)) \quad ; \quad i = 1,2,\ldots,n$$

$$b_i = \frac{1}{2\, h_i}\,(f(P_i) - f(P_{-i})) \quad ; \quad i = 1,2, \ldots, n$$

Então:

$$\int_{T(n)} p_2(x)dx = \int_{T(n)} \left(f(P_o) + \sum_{i=1}^{n} b_i\, x_i + \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}\, x_i\, x_j\right) dx =$$

$$= f(P_o)|T(n)| + \sum_{i=1}^{n} b_i \int_{T(n)} x_i\, dx + \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} \int_{T(n)} x_i\, x_j\, dx$$

Como $T(n)$ é simétrico em relação à origem:

$$\int_{T(n)} x_i\, dx = o$$

e

$$\int_{T(n)} x_i\, x_j\, dx = o \quad ; \quad \text{se } i \neq j$$

Portanto:

$$\int_{T(n)} p_2(x)dx = f(P_o)|T(n)| + \sum_{i=1}^{n} c_{ii} \frac{|T(n)n!\,2}{(n+2)!} h_i^2 = f(P_o)|T(n)| +$$

$$+ \frac{|T(n)|}{(n+2)(n+1)} \sum_{i=1}^{n} (f(P_i) - 2f(P_o) + f(P_{-i})) =$$

$$= \frac{2^n\, h_1 \ldots h_n}{n!} \left(f(P_o) + \frac{1}{(n+2)(n+1)} \sum_{i=1}^{n} (f(P_i) -\right.$$

$$\left. - 2f(P_o) + f(P_{-i}))\right) = \frac{2^n\, h_1 \ldots h_n}{(n+2)!}((n^2+n+2)f(P_o) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} (f(P_i) + f(P_{-i})))$$

Logo:

$$\int_{T(n)} f(x)\, dx = \frac{2^n\, h_1 \ldots h_n}{(n+2)!} ((n^2 + n + 2)\, f(P_o) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} (f(P_i) + f(P_{-i}))) + E_2(f) \qquad (2)$$

onde:

$$E_2(f) = \int_{T(n)} (f(x) - p_2(x))\,dx$$

é o erro de truncamento.

Estudo do Erro de Truncamento

Pela aplicação do teorema de Taylor à função f(x) numa vizinhança da origem P_o, temos:

$$f(x) = f(P_o) + \sum_{i=1}^{n} D_i f(P_o)\, x_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} D_{ij} f(P_o)\, x_i\, x_j +$$

$$+ \frac{1}{3!} \sum_{i,j,k=1}^{n} D_{ijk} f(P_o)\, x_i\, x_j\, x_k +$$

$$+ \frac{1}{4!} \sum_{i,j,k,\ell=1}^{n} \overline{D_{ijk\ell} f}\, x_i\, x_j\, x_k\, x_\ell$$

onde:

$$D_{ijk} f = \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \quad ; \quad D_{ijk\ell} f = \frac{\partial^4 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_\ell}$$

e a barra significa que as derivadas de f são calculadas num ponto conveniente.

Seja:

$$M = \max_{i,j,k,\ell} \left(\max_{x \in T(n)} | D_{ijk\ell} f(x) | \right)$$

Além disso,

$$x_i^4 + x_j^4 + x_k^4 + x_\ell^4 \geq 2\, x_i^2\, x_j^2 + 2\, x_k^2\, x_\ell^2 = 2\, ((x_i\, x_j)^2 +$$

$$+ (x_k\, x_\ell)^2) \geq 4 |x_i\, x_j\, x_k\, x_\ell|$$

e

$$f(P_i) - f(P_o) = D_i\, f(P_o)\, h_i + \frac{1}{2} D_{ii} f(P_o)\, h_i^2 + \frac{1}{3!} D_{iii} f(P_o) h_i^3 +$$

$$+ \frac{1}{4!} \overline{D_{iiii} f}\, h_i^4$$

e

$$f(P_{-i}) - f(P_o) = -D_i\, f(P_o)\, h_i + \frac{1}{2} D_{ii} f(P_o)\, h_i^2 -$$

$$- \frac{1}{3!} D_{iii} f(P_o)\, h_i^3 + \frac{1}{4!} \overline{D_{iiii} f}\, h_i^4$$

Portanto:

$$f(P_i) - 2f(P_o) + f(P_{-i}) = D_{ii} f(P_o)\, h_i^2 + \frac{1}{12} \overline{D_{iiii} f}\, h_i^4$$

Logo:

$$\left| D_{ii} f(P_o)\, h_i^2 - (f(P_i) - 2f(P_o) + f(P_{-i})) \right| =$$

$$= \frac{1}{12} \left| \overline{D_{iiii} f} \right| h_i^4 \leq \frac{1}{12} M\, h_i^4$$

Então:

$$\int_{T(n)} f(x)dx = \int_{T(n)} \Big((f(P_o) + \sum_{i=1}^{n} D_i f(P_o) x_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} D_{ij} f(P_o) x_i\, x_j +$$

$$+ \frac{1}{3!} \sum_{i,j,k=1}^{n} D_{ijk} f(P_o)\, x_i\, x_j\, x_k +$$

$$+ \frac{1}{4!} \sum_{i,j,k,\ell=1}^{n} \overline{D_{ijk\ell} f}\, x_i\, x_j\, x_k\, x_\ell \Big)\, dx$$

Pela simetria de $T(n)$:

$$\int_{T(n)} x_i\, x_j\, x_k = 0$$

Portanto:

$$\int_{T(n)} f(x)dx = f(P_o)|T(n)| + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} D_{ii}f(P_o) \int_{T(n)} x_i^2\, dx +$$

$$+ \frac{1}{4!}\sum_{i,j,k,\ell=1}^{n} \overline{D_{ijk\ell}f} \int_{T(n)} x_i\, x_j\, x_k\, x_\ell\, dx$$

Comparando este resultado com (2) resulta:

$$E_2(f) = f(P_o)|T(n)| + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} D_{ii}f(P_o) \int_{T(n)} x_i^2\, dx +$$

$$+ \frac{1}{4!}\sum_{i,j,k,\ell=1}^{n} \overline{D_{ijk\ell}f} \int_{T(n)} x_i\, x_j\, x_k\, x_\ell\, dx - f(P_o)|T(n)| -$$

$$- \frac{|T(n)|}{(n+2)(n+1)} \sum_{i=1}^{n}(f(P_i) - 2f(P_o) + f(P_{-i})) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} D_{ii}f(P_o)\, \frac{2|T(n)|n!}{(n+2)!}\, h_i^2 +$$

$$+ \frac{1}{4!}\sum_{i,j,k,\ell=1}^{n} \overline{D_{ijk\ell}f} \int_{T(n)} x_i\, x_j\, x_k\, x_\ell\, dx -$$

$$- \frac{|T(n)|}{(n+2)(n+1)} \sum_{i=1}^{n} (f(P_i) - 2f(P_o) + f(P_{-i})) =$$

$$= \frac{|T(n)|}{(n+2)(n+1)} \sum_{i=1}^{n} (D_{ii}f(P_o)h_i^2 - (f(P_i) - 2f(P_o) + f(P_{-i}))) +$$

$$+ \frac{1}{4!}\sum_{i,j,k,\ell=1}^{n} \overline{D_{ijk\ell}f} \int_{T(n)} x_i\, x_j\, x_k\, x_\ell\, dx$$

Portanto:

$$|E_2(f)| \leqslant \frac{|T(n)|M\, n!}{12\ (n+2)!} \sum_{i=1}^{n} h_i^4 + \frac{M}{4!}\sum_{i,j,k,\ell=1}^{n} \frac{1}{4} \int_{T(n)} (x_i^4 + x_j^4 +$$

$$+ x_k^4 + x_\ell^4)\, dx$$

Como:

$$\int_{T(n)} (x_i^4 + x_j^4 + x_k^4 + x_\ell^4)\, dx = \frac{|T(n)|\, n!\, 4!}{(n+4)!} (h_i^4 + h_j^4 + h_k^4 + h_\ell^4),$$

temos:

$$|E_2(f)| \leqslant \frac{|T(n)|\, M\, n!}{12(n+2)!} \sum_{i=1}^{n} h_i^4 +$$

$$+ \frac{|T(n)|\, M\, n!}{4(n+4)!} \sum_{i,j,k,\ell=1}^{n} (h_i^4 + h_j^4 + h_k^4 + h_\ell^4) =$$

$$= \frac{|T(n)|\, M\, n!}{12(n+2)!} \sum_{i=1}^{n} h_i^4 + \frac{|T(n)|\, M\, 4\, n^3\, n!}{4\,(n+4)!} \sum_{i=1}^{n} h_i^4 =$$

$$= \frac{|T(n)|\, M\, n!}{12(n+4)!} ((n+4)(n+3)+12\, n^3) \sum_{i=1}^{n} h_i^4 =$$

$$= \frac{n!\, (12\, n^3 + n^2 + 7\, n + 12)\, M |T(n)|}{12\, (n+4)!} \sum_{i=1}^{n} h_i^4$$

Portanto:

$$|E_2(f)| \leqslant \frac{2^n\, (12\, n^3 + n^2 + 7\, n + 12)}{12\, (n+4)!} M\, h_1 \dots h_n \sum_{i=1}^{n} h_i^4$$

<u>Observação</u>

Para $n = 1$:

$$\int_{T(1)} f(x)\, dx = \frac{h_1}{3} (4\, f(P_o) + f(P_1) + f(P_{-1})) + E_2(f)$$

onde:

$$|E_2(f)| \leqslant \frac{2}{45} M\, h_1^5$$

que é a regra de Simpson para dimensão 1.

3.4 - Regra de Ordem 4

Seja $T_2(n)$ complexo de vértices P_o, $P_{\pm 2i}$; $i = 1,2,\dots,n$.

Consideremos os pontos $P_{\pm i}$; $i = 1,\dots,n$ e os pontos da forma $P_{\pm i,\pm j} = (o,\dots,o,\ \pm h_i,\ o,\dots,o,\pm h_j,o,\dots,o)$; onde $\pm h_i$ é a $i^{\underline{ésima}}$ posição e $\pm h_j$ é a $j^{\underline{ésima}}$ posição; e com $i = 1,\dots,n-1$ e $j = i+1,\dots,n$.

Vamos, então, determinar polinômio de 4ª ordem:

$$p_4(x) = a + \sum_{i=1}^{n} b_i\, x_i + \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}\, x_i\, x_j +$$

$$+ \sum_{i,j,k=1}^{n} d_{ijk}\, x_i\, x_j\, x_k + \sum_{i=1}^{n} e_i\, x_i^4 +$$

$$+ \sum_{i<j} e_{ij}\, x_i^2\, x_j^2 + \sum_{i\neq j,k,\ell} e_{ijk\ell}\, x_i\, x_j\, x_k\, x_\ell$$

que coincide com $f(x)$ nos $2\,n^2 + 2\,n+1$ pontos P_o; $P_{\pm i}$; $P_{\pm i,\pm j}$; $P_{\pm 2i}$. Assim:

$$p_4(P_o) = a = f(P_o)$$

(I) $$p_4(P_i) = f(P_o) + b_i h_i + c_{ii} h_i^2 + d_{iii} h_i^3 + e_i h_i^4 = f(P_i)$$

(II) $$p_4(P_{-i}) = f(P_o) - b_i h_i + c_{ii} h_i^2 - d_{iii} h_i^3 + e_i h_i^4 = f(P_{-i})$$

(III) $$p_4(P_{2i}) = f(P_o) + 2b_i h_i + 2^2 c_{ii} h_i^2 + 2^3 d_{iii} h_i^3 + 2^4 e_i h_i^4 = f(P_{2i})$$

(IV) $$p_4(P_{-2i}) = f(P_o) - 2b_i h_i + 2^2 c_{ii} h_i^2 - 2^3 d_{iii} h_i^3 + 2^4 e_i h_i^4 = f(P_{-2i})$$

(V) $$\begin{aligned} p_4(P_{i,j}) = {} & f(P_o) + b_i h_i + b_j h_j + c_{ii} h_i^2 + c_{ij} h_i h_j + c_{ji} h_i h_j + \\ & + c_{jj} h_j^2 + d_{iii} h_i^3 + d_{iij} h_i^2 h_j + d_{iji} h_i^2 h_j + d_{ijj} h_i h_j^2 + \\ & + d_{jii} h_i^2 h_j + d_{jij} h_i h_j^2 + d_{jji} h_i h_j^2 + d_{jjj} h_j^3 + e_i h_i^4 + \\ & + e_j h_j^4 + e_{ij} h_i^2 h_j^2 + e_{ijjj} h_i h_j^3 + e_{jiii} h_i^3 h_j = f(P_{i,j}) \end{aligned}$$

$$\text{(VI)} \quad p_4(P_{i,-j}) = f(P_o) + b_ih_i - b_jh_j + c_{ii}h_i^2 - c_{ij}h_ih_j - c_{ji}h_ih_j +$$

$$+ c_{jj}h_j^2 + d_{iii}h_i^3 - d_{iij}h_i^2h_j - d_{iji}h_i^2h_j + d_{ijj}h_ih_j^2 -$$

$$- d_{jii}h_i^2h_j + d_{jij}h_ih_j^2 + d_{jji}h_ih_j^2 - d_{jjj}h_j^3 + e_ih_i^4 +$$

$$+ e_jh_j^4 + e_{ij}h_i^2h_j^2 - e_{ijjj}h_ih_j^3 - e_{jiii}h_i^3h_j = f(P_{i,-j})$$

$$\text{(VII)} \quad p_4(P_{-i,j}) = f(P_o) - b_ih_i + b_jh_j + c_{ii}h_i^2 - c_{ij}h_ih_j - c_{ji}h_ih_j +$$

$$+ c_{jj}h_j^2 - d_{iii}h_i^3 + d_{iij}h_i^2h_j + d_{iji}h_i^2h_j - d_{ijj}h_ih_j^2 +$$

$$+ d_{jii}h_i^2h_j - d_{jij}h_ih_j^2 - d_{jji}h_ih_j^2 + d_{jjj}h_j^3 + e_ih_i^4 +$$

$$+ e_jh_j^4 + e_{ij}h_i^2h_j^2 - e_{ijjj}h_ih_j^3 - e_{jiii}h_i^3h_j = f(P_{-i,j})$$

$$\text{(VIII)} \quad p_4(P_{-i,-j}) = f(P_o) - b_ih_i - b_jh_j + c_{ii}h_i^2 + c_{ij}h_ih_j + c_{ji}h_ih_j +$$

$$+ c_{jj}h_j^2 - d_{iii}h_i^3 - d_{iij}h_i^2h_j - d_{iji}h_i^2h_j - d_{ijj}h_ih_j^2 -$$

$$- d_{jii}h_i^2h_j - d_{jij}h_ih_j^2 - d_{jji}h_ih_j^2 - d_{jjj}h_j^3 + e_ih_i^4 +$$

$$+ e_jh_j^4 + e_{ij}h_i^2h_j^2 + e_{ijjj}h_ih_j^3 + e_{jiii}h_i^3h_j = f(P_{-i,-j})$$

Somando a equação (I) com a equação (II) e a (III) com a (IV) temos:

$$2\ f(P_o) + 2\ c_{ii}h_i^2 + 2\ e_ih_i^4 = f(P_i) + f(P_{-i})$$

ou seja

$$c_{ii}h_i^2 + e_ih_i^4 = \frac{1}{2}\ (f(P_i) - 2\ f(P_o) + f(P_{-i}))$$

e

$$2\ f(P_o) + 2.2^2c_{ii}h_i^2 + 2.2^4e_ih_i^4 = f(P_{2i}) + f(P_{-2i})$$

ou seja

$$2^2c_{ii}h_i^2 + 2^4e_ih_i^4 = \frac{1}{2}\ (f(P_{2i}) - 2\ f(P_o) + f(P_{-2i}))$$

Deste modo, determinamos o seguinte sistema linear:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2^2 & 2^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{ii}\ h_i^2 \\ e_i\ h_i^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\ (f(P_i) - 2\ f(P_o) + f\ (P_{-i})) \\ \frac{1}{2}\ (f(P_{2i}) - 2\ f(P_o) + f\ (P_{-2i})) \end{pmatrix}$$

que admite a seguinte solução:

$$c_{ii}h_i^2 = \frac{1}{24}\ (-f(P_{2i}) + 16f(P_i) - 30f(P_o) + 16f(P_{-i}) - f(P_{-2i}))$$

$$e_i h_i^4 = \frac{1}{24}\ (f(P_{2i}) - 4f(P_i) + 6f(P_o) - 4f(P_{-i}) + f(P_{-2i}))$$

Somando as equações (V), (VI), (VII) e (VIII) temos:

$$4\ f(P_o) + 4\ c_{ii}h_i^2 + 4\ c_{jj}h_j^2 + 4\ e_i h_i^4 + 4\ e_j h_j^4 + \\ + 4\ e_{ij}h_i^2 h_j^2 = f(P_{i,j}) + f(P_{i,-j}) + f(P_{-i,j}) + f(P_{-i,-j})$$

Portanto:

$$4\ e_{ij}h_i^2h_j^2 = f(P_{i,j}) + f(P_{-i,j}) + f(P_{i,-j}) + f(P_{-i,-j}) - \\ - 4\ f(P_o) - 4(\frac{1}{24}\ (-f(P_{2i}) + 16\ f(P_i) - 30\ f(P_o) + \\ + 16\ f(P_{-i}) - f(P_{-2i}))) - 4(\frac{1}{24}(-f(P_{2j}) + 16\ f(P_j) - \\ - 30\ f(P_o) + 16\ f(P_{-j}) - f(P_{-2j}))) - 4(\frac{1}{24}(f(P_{2i}) - \\ - 4\ f(P_i) + 6\ f(P_o) - 4\ f(P_{-i}) + f(P_{-2i}))) - \\ - 4\ (\frac{1}{24}\ (f(P_{2j}) - 4\ f(P_j) + 6\ f(P_o) - 4\ f(P_{-j}) + \\ + f(P_{-2j})))$$

Então:

$$4\ e_{ij}h_i^2h_j^2 = f(P_{i,j}) + f(P_{-i,j}) + f(P_{i,-j}) + f(P_{-i,-j}) + \\ + 4\ f(P_o) - 2\ f(P_i) - 2\ f(P_{-i}) - 2\ f(P_j) - 2\ f(P_{-j})$$

Logo:

$$\int_{T_2(n)} p_4(x)\,dx = \int_{T_2(n)} \Big(f(P_o) + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j +$$

$$+ \sum_{i,j,k=1}^{n} d_{ijk} x_i x_j x_k + \sum_{i=1}^{n} e_i x_i^4 + \sum_{i<j} e_{ij} x_i^2 x_j^2 +$$

$$+ \sum_{i\neq j,k,\ell} e_{ijk\ell}\, x_i x_j x_k x_\ell \Big)\,dx = f(P_o)|T_2(n)| +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} b_i \int_{T_2(n)} x_i\,dx + \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} \int_{T_2(n)} x_i x_j\,dx +$$

$$+ \sum_{i,j,k=1}^{n} d_{ijk} \int_{T_2(n)} x_i x_j x_k\,dx + \sum_{i=1}^{n} e_i \int_{T_2(n)} x_i^4\,dx +$$

$$+ \sum_{i<j} e_{ij} \int_{T_2(n)} x_i^2 x_j^2\,dx +$$

$$+ \sum_{i\neq j,k,\ell} e_{ijk\ell} \int_{T_2(n)} x_i x_j x_k x_\ell\,dx$$

Como $T_2(n)$ é uma região simétrica:

$$\int_{T_2(n)} x_i\,dx = 0 \quad ; \quad \int_{T_2(n)} x_i x_j\,dx = 0 \quad \text{se} \quad i \neq j$$

$$\int_{T_2(n)} x_i x_j x_k\,dx = 0 \quad ; \quad \int_{T_2(n)} x_i x_j x_k x_\ell\,dx = 0 \ ; \quad \text{pois } i \neq j,\ k,\ \ell$$

Então:

$$\int_{T_2(n)} p_4(x)dx = f(P_o)|T_2(n)| + \sum_{i=1}^{n} c_{ii} \int_{T_2(n)} x_i^2 dx + \sum_{i=1}^{n} e_i \int_{T_2(n)} x_i^4 dx +$$

$$+ \sum_{i<j} e_{ij} \int_{T_2(n)} x_i^2 x_j^2 dx = f(P_o)|T_2(n)| + \sum_{i=1}^{n} c_{ii} \frac{|T_2(n)|n!2}{(n+2)!} (2h_i)^2 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} e_i \frac{|T_2(n)|n!4!}{(n+4)!} (2h_i)^4 + \sum_{i<j} e_{ij} \frac{|T_2(n)|n!2(2)}{(n+4)!} (2h_i)^2 (2h_j)^2$$

Portanto:

$$\int_{T_2(n)} f(x)dx = f(P_o)|T_2(n)| + \frac{|T_2(n)|n!8}{(n+2)!} \sum_{i=1}^{n} c_{ii} h_i^2 +$$

$$+ \frac{|T_2(n)|n!2^4(4!)}{(n+4)!} \sum_{i=1}^{n} e_i h_i^4 + \frac{|T_2(n)|n!2^6}{(n+4)!} \sum_{i<j} e_{ij} h_i^2 h_j^2 + E_4(f) \qquad (3)$$

Portanto:

$$\int_{T_2(n)} f(x)dx = |T_2(n)| \Big\{ f(P_o) + \frac{8\ (n!)}{24.(n+2)!} \sum_{i=1}^{n} (-f(P_{2i}) + 16\ f(P_i) -$$

$$- 30\ f(P_o) + 16\ f(P_{-i}) - f(P_{-2i})) + \frac{4!\ 2^4.n!}{24.(n+4)!} \sum_{i=1}^{n} (f(P_{2i}) - 4\ f(P_i) +$$

$$+ 6\ f(P_o) - 4\ f(P_{-i}) + f(P_{-2i})) + \frac{2^6\ .n!}{4.(n+4)!} \sum_{i<j} (f(P_{i,j}) + f(P_{-i,j}) +$$

$$+ f(P_{i,-j}) + 4\ f(P_o) - 2\ f(P_i) - 2\ f(P_{-i}) - 2\ f(P_j) - 2\ f(P_{-j})) \Big\} +$$

$$+ E_4(f) = |T_2(n)| \Big\{ f(P_o)(1 - \frac{8.n!\ 30n}{24.(n+2)!} + \frac{4!\ 2^4.6n.n!}{24\ .\ (n+4)!} +$$

$$+ \frac{2^6.n!4n(n-1)}{4.(n+4)!\ 2}) + (\frac{-8.n!}{24(n+2)!} + \frac{4!\ 2^4.n!}{24(n+4)!}) \sum_{i=1}^{n} (f(P_{2i}) + f(P_{-2i}))) +$$

$$+ \frac{2^6.n!}{4(n+4)!} \sum_{i<j} (f(P_{i,j}) + f(P_{-i,j}) + f(P_{i,-j}) + f(P_{-i,-j})) +$$

$$+ \left(\frac{16.8.n!}{24(n+2)!} - \frac{4(4!)\ 2^4.n!}{24(n+4)!}\right)\sum_{i=1}^{n} (f(P_i) + f(P_{-i})) - \frac{2.2^6(n!)}{4(n+4)!} \sum_{i<j} (f(P_i) +$$

$$+ f(P_{-i}) + f(P_j) + f(P_{-j}))\Big\} + E_4(f) =$$

$$= \frac{|T_2(n)\ |\ n!}{(n+4)!} \Big\{ ((n+4)(n+3)(n+2)(n+1) - 10\ n(n+4)(n+3) + 96\ n +$$

$$+ 32\ n(n-1))f(P_o) + \left(\frac{48-(n+4)(n+3)}{3}\right) \sum_{i=1}^{n} (f(P_{2i}) + f(P_{-2i}))+$$

$$+ 16 \sum_{i<j} (f(P_{i,j}) + f(P_{-i,j}) + f(P_{i,-j}) + f(P_{-i,-j})) +$$

$$+ \frac{16(n+4)(n+3) - 192}{3} \sum_{i=1}^{n} (f(P_i) + f(P_{-i})) - 32 \sum_{i<j} (f(P_i) + f(P_j) +$$

$$+ f(P_{-i}) + f(P_{-j}))\Big\} + E_4(f)$$

Mas:

a) $$\sum_{i<j} f(P_i) = \sum_{i=1}^{n-1} f(P_i) \sum_{j=i+1}^{n} = \sum_{i=1}^{n-1} f(P_i)(n-i) = \sum_{i=1}^{n-1} n\ f(P_i) -$$

$$- \sum_{i=1}^{n-1} i\ f(P_i) = \sum_{i=1}^{n-1} n\ f(P_i) - \sum_{i=1}^{n-1} i\ f(P_i) - n\ f(P_n) + n\ f(P_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} nf(P_i) - \sum_{i=1}^{n} if(P_i)$$

b) $$\sum_{i<j} f(P_j) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} f(P_j) = 1\sum_{j=2}^{n} f(P_j) + 1\sum_{j=3}^{n} f(P_j) + \dots +$$

$$1\sum_{j=n}^{n} f(P_j) = \sum_{i=2}^{n} (i-1)\ f(P_i) = \sum_{i=1}^{n} (i-1)\ f(P_i)$$

Analogamente:

c) $\sum_{i<j} f(P_{-i}) = \sum_{i=1}^{n} n\, f(P_{-i}) - \sum_{i=1}^{n} i\, f(P_{-i})$

d) $\sum_{i<j} f(P_{-j}) = \sum_{i=1}^{n} (i-1)\, f(P_{-i})$

Então:

$$\sum_{i<j} (f(P_i) + f(P_j) + f(P_{-i}) + f(P_{-j})) = \sum_{i=1}^{n} (n\, f(P_i) - i\, f(P_i) + i\, f(P_i) -$$

$$- f(P_i) + n\, f(P_{-i}) - i\, f(P_{-i}) + i\, f(P_{-i}) - f(P_{-i})) =$$

$$= (n-1) \sum_{i=1}^{n} (f(P_i) + f(P_{-i}))$$

Assim:

$$\int_{T_2(n)} f(x)\, dx = \frac{|T_2(n)|\, n!}{(n+4)!} \left\{ (n^4 - 3n^2 - 6n + 24)\, f(P_o) + \right.$$

$$+ \frac{36 - 7n - n^2}{3} \sum_{i=1}^{n} (f(P_{2i}) + f(P_{-2i})) + 16 \sum_{i<j} (f(P_{i,j}) +$$

$$+ f(P_{-i,j}) + f(P_{i,-j}) + f(P_{-i,-j})) +$$

$$\left. + \frac{16\,(n^2 + n + 6)}{3} \sum_{i=1}^{n} (f(P_i) + f(P_{-i})) \right\} + E_4(f)$$

onde:

$$E_4(f) = \int_{T_2(n)} (f(x) - p_4(x))\, dx$$

é o erro de truncamento.

Estudo do Erro de Truncamento

Aplicando o teorema de Taylor à função f(x) numa vizinhança de P_o, temos:

$$f(x) = f(P_o) + \sum_{i=1}^{n} D_i f(P_o) x_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} D_{ij} f(P_o) x_i x_j +$$

$$+ \frac{1}{3!} \sum_{i,j,k=1}^{n} D_{ijk} f(P_o) x_i x_j x_k + \frac{1}{4!} \sum_{i,j,k,\ell=1}^{n} D_{ijk\ell} f(P_o) x_i x_j x_k x_\ell +$$

$$+ \frac{1}{5!} \sum_{i,j,k,\ell,m=1}^{n} D_{ijk\ell m} f(P_o) x_i x_j x_k x_\ell x_m +$$

$$+ \frac{1}{6!} \sum_{i,j,k,\ell,m,p=1}^{n} \overline{D_{ijk\ell mp} f} x_i x_j x_k x_\ell x_m x_p$$

onde:

$$D_{ijk\ell m} f = \frac{\partial^5 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_\ell \partial x_m} \quad ; \quad D_{ijk\ell mp} f = \frac{\partial^6 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_\ell \partial x_m \partial x_p}$$

e a barra significa que as derivadas de f são calculadas num ponto conveniente. Seja:

$$M = \max_{i,j,k,\ell,m,p} \left(\max_{x \in T_2(n)} | D_{ijk\ell mp} f(x)| \right)$$

Temos que:

$$f(P_{2i}) - f(P_o) = D_i f(P_o)\, 2h_i + \frac{1}{2} D_{ii} f(P_o)\, 4h_i^2 + \frac{1}{3!} D_{iii} f(P_o)\, 8h_i^3 +$$

$$+ \frac{1}{4!} D_{iiii} f(P_o)\, 16h_i^4 + \frac{1}{5!} D_{iiiii} f(P_o)\, 32\, h_i^5 + \frac{1}{6!} \overline{D_{iiiiii} f}\, 64h_i^6$$

$$f(P_{-2i}) - f(P_o) = - D_i f(P_o)\, 2h_i + \frac{1}{2} D_{ii} f(P_o)\, 4h_i^2 - \frac{1}{3!} D_{iii} f(P_o)\, 8h_i^3 +$$

$$+ \frac{1}{4!} D_{iiii} f(P_o)\, 16h_i^4 - \frac{1}{5!} D_{iiiii} f(P_o)\, 32h_i^5 + \frac{1}{6!} \overline{D_{iiiiii} f}\, 64h_i^6$$

$$f(P_i) - f(P_o) = D_i f(P_o)\, h_i + \frac{1}{2} D_{ii} f(P_o)\, h_i^2 + \frac{1}{3!} D_{iii} f(P_o)\, h_i^3 +$$

$$+ \frac{1}{4!} D_{iiii} f(P_o)\, h_i^4 + \frac{1}{5!} D_{iiiii} f(P_o)\, h_i^5 + \frac{1}{6!} \overline{D_{iiiiii} f}\, h_i^6$$

$$f(P_{-i}) - f(P_o) = - D_i f(P_o)\, h_i + \frac{1}{2} D_{ii} f(P_o)\, h_i^2 - \frac{1}{3!} D_{iii} f(P_o)\, h_i^3 +$$

$$+ \frac{1}{4!} D_{iiii} f(P_o)\, h_i^4 - \frac{1}{5!} D_{iiiii} f(P_o)\, h_i^5 + \frac{1}{6!} \overline{D_{iiiiii} f}\, h_i^6$$

Então:

$$f(P_{2i}) - 2\, f(P_o) + f(P_{-2i}) = 4\, D_{ii} f(P_o)\, h_i^2 + \frac{16\ (2)}{4!} D_{iiii} f(P_o)\, h_i^4 +$$

$$+ \frac{64\ (2)}{6!} \overline{D_{iiiiii} f}\, h_i^6$$

$$f(P_i) - 2\, f(P_o) + f(P_{-i}) = D_{ii} f(P_o)\, h_i^2 + \frac{2}{4!} D_{iiii} f(P_o)\, h_i^4 +$$

$$+ \frac{2}{6!} \overline{D_{iiiiii} f}\, h_i^6$$

Portanto:

$$c_{ii}\, h_i^2 = \frac{1}{24} (-f(P_{2i}) + 16 f(P_i) - 30 f(P_o) + 16 f(P_{-i}) - f(P_{-2i}))=$$

$$= \frac{1}{24} (12\, D_{ii} f(P_o)\, h_i^2 - \frac{2}{15} \overline{D_{iiiiii} f}\, h_i^6) = \frac{1}{2} D_{ii} f(P_o)\, h_i^2 - \frac{1}{180} \overline{D_{iiiiii} f}\, h_i^6$$

Portanto:

$$|c_{ii} h_i^2 - \frac{1}{2} D_{ii} f(P_o)\, h_i^2\,| = \frac{1}{180} h_i^6\, |\, \overline{D_{iiiiii} f}\, | \leqslant \frac{M\, h_i^6}{180}$$

e

$$e_i h_i^4 = \frac{1}{24} (f(P_{2i}) - 4 f(P_i) + 6 f(P_o) - 4 f(P_{-i}) + f(P_{-2i}))=$$

$$= \frac{1}{24} (\frac{24}{4!} D_{iiii} f(P_o)\, h_i^4 + \frac{120}{6!} \overline{D_{iiiiii} f}\, h_i^6) = \frac{1}{4!} D_{iiii} f(P_o) h_i^4 +$$

$$+ \frac{5}{6!} \overline{D_{iiiiii} f}\, h_i^6$$

Portanto:

$$\left| e_i\, h_i^4 - \frac{1}{4!} D_{iiii} f(P_o)\, h_i^4 \right| = \frac{5}{6!} h_i^6 \left| \overline{D_{iiiiii} f} \right| \leq \frac{M\, h_i^6}{144}$$

Também:

$$f(P_{i,j}) + f(P_{-i,j}) + f(P_{i,-j}) + f(P_{-i,-j}) - 4\, f(P_o) = 2\, D_{ii} f(P_o)\, h_i^2 +$$

$$+ 2\, D_{jj} f(P_o)\, h_j^2 + \frac{4}{4!} D_{iiii} f(P_o)\, h_i^4 + \frac{4}{4!} D_{jjjj} f(P_o)\, h_j^4 +$$

$$+ \frac{4}{4!} D_{iijj} f(P_o)\, h_i^2\, h_j^2 + \frac{4}{4!} D_{ijij} f(P_o)\, h_i^2\, h_j^2 + \frac{4}{4!} D_{ijji} f(P_o)\, h_i^2\, h_j^2 +$$

$$+ \frac{4}{4!} D_{jiij} f(P_o)\, h_i^2\, h_j^2 + \frac{4}{4!} D_{jiji} f(P_o)\, h_i^2\, h_j^2 + \frac{4}{4!} D_{jjii} f(P_o)\, h_i^2\, h_j^2 +$$

$$+ \frac{4}{6!} \overline{D_{iiiiii} f}\, h_i^6 + \frac{4}{6!} \overline{D_{jjjjjj} f}\, h_j^6 + \frac{4}{6!} \overline{D_{iiiijj} f}\, h_i^4\, h_j^2 +$$

$$+ \frac{4}{6!} \overline{D_{iiijij} f}\, h_i^4\, h_j^2 + \frac{4}{6!} \overline{D_{iiijji} f}\, h_i^4\, h_j^2 + \frac{4}{6!} \overline{D_{iijiij} f}\, h_i^4\, h_j^2 +$$

$$+ \frac{4}{6!} \overline{D_{iijiji} f}\, h_i^4\, h_2^2 + \frac{4}{6!} \overline{D_{iijjii} f}\, h_i^4\, h_j^2 + \frac{4}{6!} \overline{D_{ijiiij} f}\, h_i^4\, h_j^2 +$$

$$+ \frac{4}{6!} \overline{D_{ijiiji} f}\, h_i^4\, h_j^2 + \frac{4}{6!} \overline{D_{ijijii} f}\, h_i^4\, h_j^2 + \frac{4}{6!} \overline{D_{ijjiii} f}\, h_i^4\, h_j^2 +$$

$$+ \frac{4}{6!} \overline{D_{jiiiij} f}\, h_i^4\, h_j^2 + \frac{4}{6!} \overline{D_{jiiiji} f}\, h_i^4\, h_j^2 + \frac{4}{6!} \overline{D_{jiijii} f}\, h_i^4\, h_j^2 +$$

$$+ \frac{4}{6!} \overline{D_{jijiii} f}\, h_i^4\, h_j^2 + \frac{4}{6!} \overline{D_{jjiiii} f}\, h_i^4\, h_j^2 + \frac{4}{6!} \overline{D_{iijjjj} f}\, h_i^2\, h_j^4 +$$

$$+ \frac{4}{6!} \overline{D_{ijijjj} f}\, h_i^2\, h_j^4 + \frac{4}{6!} \overline{D_{ijjijj} f}\, h_i^2\, h_j^4 + \frac{4}{6!} \overline{D_{ijjjij} f}\, h_i^2\, h_j^4 +$$

$$+ \frac{4}{6!} \overline{D_{ijjjji} f}\, h_i^2\, h_j^4 + \frac{4}{6!} \overline{D_{jiijjj} f}\, h_i^2\, h_j^4 + \frac{4}{6!} \overline{D_{jijijj} f}\, h_i^2\, h_j^4 +$$

$$+ \frac{4}{6!} \overline{D_{jijjij} f}\, h_i^2\, h_j^4 + \frac{4}{6!} \overline{D_{jijjji} f}\, h_i^2\, h_j^4 + \frac{4}{6!} \overline{D_{jjiijj} f}\, h_i^2\, h_j^4 +$$

$$+ \frac{4}{6!} \overline{D_{jjijij} f}\, h_i^2\, h_j^4 + \frac{4}{6!} \overline{D_{jjijji} f}\, h_i^2\, h_j^4 + \frac{4}{6!} \overline{D_{jjjiij} f}\, h_i^2\, h_j^4 +$$

$$+ \frac{4}{6!} \overline{D_{jjjiji}f}\, h_i^2\, h_j^4 + \frac{4}{6!} \overline{D_{jjjjii}f}\, h_i^2\, h_j^4 =$$

$$= 2\, D_{ii}f(P_o)\, h_i^2 + 2\, D_{jj}f(P_o)\, h_j^2 + \frac{4}{4!} D_{iiii}f(P_o)\, h_i^4 + \frac{4}{4!} D_{jjjj}f(P_o)\, h_j^4 +$$

$$+ \frac{24}{4!} D_{iijj}f(P_o)\, h_i^2\, h_j^2 + \frac{4}{6!} \overline{D_{iiiiii}f}\, h_i^6 + \frac{4}{6!} \overline{D_{jjjjjj}f}\, h_j^6 +$$

$$+ \frac{60}{6!} \overline{D_{iijjjj}f}\, h_i^2\, h_j^4 + \frac{60}{6!} \overline{D_{iiiijj}f}\, h_i^4\, h_j^2$$

e

$$-2\, f(P_i) - 2\, f(P_j) + 8\, f(P_o) - 2\, f(P_{-j}) - 2\, f(P_{-i}) =$$

$$= -2\, D_i f(P_o)\, h_i - D_{ii}f(P_o)\, h_i^2 - \frac{2}{3!} D_{iii}f(P_o)\, h_i^3 - \frac{2}{4!} D_{iiii}f(P_o)\, h_i^4 -$$

$$- \frac{2}{5!} D_{iiiii}f(P_o)\, h_i^5 - \frac{2}{6!} \overline{D_{iiiiii}f}\, h_i^6 - 2\, D_j f(P_o)\, h_j - D_{jj}f(P_o)\, h_j^2 -$$

$$- \frac{2}{3!} D_{jjj}f(P_o)\, h_j^3 - \frac{2}{4!} D_{jjjj}f(P_o)\, h_j^4 - \frac{2}{5!} D_{jjjjj}f(P_o)\, h_j^5 -$$

$$- \frac{2}{6!} \overline{D_{jjjjjj}f}\, h_j^6 + 2\, D_i f(P_o)\, h_i - D_{ii}f(P_o)\, h_i^2 + \frac{2}{3!} D_{iii}f(P_o)\, h_i^3 -$$

$$- \frac{2}{4!} D_{iiii}f(P_o)\, h_i^4 + \frac{2}{5!} D_{iiiii}f(P_o)\, h_i^5 - \frac{2}{6!} \overline{D_{iiiiii}f}\, h_i^6 +$$

$$+ 2\, D_j f(P_o)\, h_j - D_{jj}f(P_o)\, h_j^2 + \frac{2}{3!} D_{jjj}f(P_o)\, h_j^3 - \frac{2}{4!} D_{jjjj}f(P_o)\, h_j^4 +$$

$$+ \frac{2}{5!} D_{jjjjj}f(P_o)\, h_j^5 - \frac{2}{6!} \overline{D_{jjjjjj}f}\, h_j^6 = -\, 2\, D_{ii}f(P_o)\, h_i^2 -$$

$$- \frac{4}{4!} D_{iiii}f(P_o)\, h_i^4 - \frac{4}{6!} \overline{D_{iiiiii}f}\, h_i^6 - 2\, D_{jj}f(P_o)\, h_j^2 -$$

$$- \frac{4}{4!} D_{jjjj}f(P_o)\, h_j^4 - \frac{4}{6!} \overline{D_{jjjjjj}f}\, h_j^6$$

Portanto:

$$4\, e_{ij} h_i^2\, h_j^2 = f(P_{i,j}) + f(P_{-i,j}) + f(P_{i,-j}) + f(P_{-i,-j}) + 4f(P_0) -$$

$$- 2f(P_i) - 2f(P_j) - 2f(P_{-i}) - 2f(P_{-j}) = D_{iijj}f(P_o)\, h_i^2\, h_j^2 +$$

$$+ \frac{60}{6!} \overline{D_{iijjjj}f}\, h_i^2\, h_j^4 + \frac{60}{6!} \overline{D_{iiiijj}f}\, h_i^4\, h_j^2 \text{ , ou seja:}$$

$$\left| e_{ij}\, h_i^2\, h_j^2 - \frac{1}{4} D_{iijj}f(P_o)\, h_i^2\, h_j^2 \right| = \frac{60}{4(6!)} \left| h_i^2\, h_j^4\, \overline{D_{iijjjj}f} + \right.$$

$$\left. + h_i^4\, h_j^2\, \overline{D_{iiiijj}f} \right| \leq \frac{60}{4(6!)} \left\{ h_i^2\, h_j^4 \left| \overline{D_{iijjjj}f} \right| + h_i^4\, h_j^2 \left| \overline{D_{iiiijj}f} \right| \right\} \leq$$

$$\leq \frac{60}{4(6!)} M \left\{ h_i^2\, h_j^4 + h_i^4\, h_j^2 \right\} =$$

$$= \frac{1}{48} M \left\{ h_i^2\, h_j^4 + h_i^4\, h_j^2 \right\} \leq \frac{1}{48} M\, (h_i^6 + h_j^6)$$

Também:

$$x_i^6 + x_j^6 + x_k^6 + x_\ell^6 + x_m^6 + x_p^6 \geq 6 \left| x_i\, x_j\, x_k\, x_\ell\, x_m\, x_p \right|$$

Então, integrando sobre $T_2(n)$ a função $f(x)$, dada por seu desenvolvimen to de Taylor, temos:

$$\int_{T_2(n)} f(x)\, dx = f(P_o) \left| T_2(n) \right| + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} D_{ii}f(P_o) \int_{T_2(n)} x_i^2\, dx +$$

$$+ \frac{1}{4!} \sum_{i=1}^{n} D_{iiii}f(P_o) \int_{T_2(n)} x_i^4\, dx + \frac{1}{4!} \Big(3 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} D_{iijj}f(P_o) \int_{T_2(n)} x_i^2\, x_j^2\, dx \Big) +$$

$$+ \frac{1}{6!} \sum_{i,j,k,\ell,m,p=1}^{n} \overline{D_{ijk\ell mp}f} \int_{T_2(n)} x_i\, x_j\, x_k\, x_\ell\, x_m\, x_p\, dx =$$

$$= f(P_o) \left| T_2(n) \right| + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} D_{ii}f(P_o) \int_{T_2(n)} x_i^2\, dx + \frac{1}{4!} \sum_{i=1}^{n} D_{iiii}f(P_o) \int_{T_2(n)} x_i^4 dx +$$

$$+ 2 \Big(\frac{3}{4!} \sum_{i<j} D_{iijj}f(P_o) \int_{T_2(n)} x_i^2\, x_j^2\, dx \Big) +$$

$$+ \frac{1}{6!} \sum_{i,j,k,\ell,m,p=1}^{n} \overline{D_{ijk\ell mp}f} \int_{T_2(n)} x_i\, x_j\, x_k\, x_\ell\, x_m\, x_p\, dx$$

pois, como $T_2(n)$ é simétrica:

$$\int_{T_2(n)} x_i\, x_j\, x_k\, x_\ell\, dx = 0$$

se são distintos em número ímpar, e

$$\int_{T_2(n)} x_i\, x_j\, x_k\, x_\ell\, x_m\, dx = 0 \quad .$$

Então:

$$\int_{T_2(n)} f(x)dx = f(P_o)\left|T_2(n)\right| + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} D_{ii}f(P_o)\,\frac{|T_2(n)|\,n!\,2}{(n+2)!}\,(2h_i)^2 +$$

$$+\frac{1}{4!}\sum_{i=1}^{n} D_{iiii}f(P_o)\,\frac{|T_2(n)|\,n!\,4!}{(n+4)!}\,(2\,h_i)^4 +$$

$$+\frac{6}{4!}\sum_{i<j} D_{iijj}f(P_o)\,\frac{|T_2(n)|\,n!\;2\;(2)}{(n+4)!}\,(2\,h_i)^2\,(2\,h_j)^2 +$$

$$+\frac{1}{6!}\sum_{i,j,k,\ell,m,p=1}^{n} \overline{D_{ijk\ell mp}f}\int_{T_2(n)} x_i\, x_j\, x_k\, x_\ell\, x_m\, x_p\, dx =$$

$$= f(P_o)\;|\;T_2(n)\;|\; + \frac{|\;T_2(n)\;|\;n!\;4}{(n+2)!}\sum_{i=1}^{n} D_{ii}f(P_o)\,h_i^2 +$$

$$+\frac{|\;T_2(n)\;|\;n!\;16}{(n+4)!}\sum_{i=1}^{n} D_{iiii}f(P_o)\,h_i^4 +$$

$$+\frac{|\;T_2(n)\;|\;n!\;16}{(n+4)!}\sum_{i<j} D_{iijj}f(P_o)\,h_i^2\,h_j^2 +$$

$$+\frac{1}{6!}\sum_{i,j,k,\ell,m,p=1}^{n} \overline{D_{ijk\ell mp}f}\int_{T_2(n)} x_i\, x_j\, x_k\, x_\ell\, x_m\, x_p\, dx$$

Subtraindo este último resultado de (3), temos:

$$E_4(f) = -\frac{|T_2(n)|\ 8\ n!}{(n+2)!}\sum_{i=1}^{n} c_{ii}h_i^2 - \frac{|T_2(n)|\ n!\ 2^4\ (4!)}{(n+4)!}\sum_{i=1}^{n} e_i\ h_i^4\ -$$

$$-\frac{|T_2(n)|\ 2^6\ n!}{(n+4)!}\sum_{i<j} e_{ij}\ h_i^2\ h_j^2 + \frac{|T_2(n)|\ 4\ n!}{(n+2)!}\sum_{i=1}^{n} D_{ii}f(P_o)\ h_i^2\ +$$

$$+\frac{|T_2(n)|\ 16\ n!}{(n+4)!}\sum_{i=1}^{n} D_{iiii}f(P_o)\ h_i^4 +$$

$$+\frac{|T_2(n)|16\ n!}{(n+4)!}\sum_{i<j} D_{iijj}f(P_o)\ h_i^2\ h_j^2 +$$

$$+\frac{1}{6!}\sum_{i,j,k,\ell,m,p=1}^{n} \overline{D_{ijk\ell mp}f}\int_{T_2(n)} x_i\ x_j\ x_k\ x_\ell\ x_m\ x_p\ dx$$

Portanto:

$$|E_4(f)| \leq \frac{|T_2(n)|\ 8\ n!}{(n+2)!}\sum_{i=1}^{n} \left| c_{ii}\ h_i^2 - \frac{1}{2} D_{ii}f(P_o)\ h_i^2 \right| +$$

$$+\frac{|T_2(n)|\ 16\ n!\ 4!}{(n+4)!}\sum_{i=1}^{n} \left| e_i\ h_i^4 - \frac{1}{4!} D_{iiii}f(P_o)\ h_i^4 \right| +$$

$$+\frac{|T_2(n)|\ 64\ n!}{(n+4)!}\sum_{i<j} \left| e_{ij}\ h_i^2\ h_j^2 - \frac{1}{4} D_{iijj}f(P_o)\ h_i^2\ h_j^2 \right| +$$

$$+\frac{1}{6!}\sum_{i,j,k,\ell,m,p=1}^{n} \left| \overline{D_{ijk\ell mp}f} \right| \int_{T_2(n)} | x_i\ x_j\ x_k\ x_\ell\ x_m\ x_p |\ dx \leq$$

$$\leq \frac{|T_2(n)|\ 8\ n!\ M}{(n+2)!\ 180}\sum_{i=1}^{n} h_i^6 + \frac{|T_2(n)|\ 16\ n!\ 4!\ M}{(n+4)!\ 144}\sum_{i=1}^{n} h_i^6 +$$

$$+\frac{|T_2(n)|\ 64\ n!\ M}{(n+4)!\ 48}\sum_{i<j} (h_i^6 + h_j^6) +$$

$$+\frac{M}{6.6!}\sum_{i,j,k,\ell,m,p=1}^{n} \int_{T_2(n)} (x_i^6 + x_j^6 + x_k^6 + x_\ell^6 + x_m^6 + x_p^6)\ dx$$

Mas:

e) $$\sum_{i<j} (h_i^6 + h_j^6) = \sum_{i<j} h_i^6 + \sum_{i<j} h_j^6 = \sum_{i=1}^{n} h_i^6\, n - \sum_{i=1}^{n} h_i^6\, i +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} h_i^6\, i - \sum_{i=1}^{n} h_i^6 = \sum_{i=1}^{n} n\, h_i^6 - \sum_{i=1}^{n} h_i^6 = (n-1) \sum_{i=1}^{n} h_i^6$$

f) $$\int_{T_2(n)} (x_i^6 + x_j^6 + x_k^6 + x_\ell^6 + x_m^6 + x_p^6)\, dx =$$

$$= \frac{|\, T_2(n)\, |\; n!\; 6!\; 2^6}{(n+6)!} (h_i^6 + h_j^6 + h_k^6 + h_\ell^6 + h_m^6 + h_p^6)$$

g) $$\sum_{i,j,k,\ell,m,p=1}^{n} (h_i^6 + h_j^6 + h_k^6 + h_\ell^6 + h_m^6 + h_p^6) = 6\, n^5 \sum_{i=1}^{n} h_i^6$$

Portanto:

$$|\, E_4(f)\, | \leq \frac{|\, T_2(n)\, |\; 2\; n!\; M}{(n+2)!\; 45} \sum_{i=1}^{n} h_i^6 + \frac{|\, T_2(n)\, |\; 4!\; n!\; M}{(n+4)!\; 9} \sum_{i=1}^{n} h_i^6 +$$

$$+ \frac{|\, T_2(n)\, |\; 4\; n!\; M\; (n-1)}{(n+4)!\; 3} \sum_{i=1}^{n} h_i^6 + \frac{|\, T_2(n)\, |\; n!\; 6!\; 2^6\; M\; 6\; n^5}{(n+6)!\; 6.6!} \sum_{i=1}^{n} h_i^6 =$$

$$= \frac{|T_2(n)\, |\; M\; n!}{(n+6)!\; 45} \Big\{ (n+6)(n+5)(n+4)(n+3)\; 2 + (n+6)(n+5)\; 120 +$$

$$+ (n+6)(n+5)(n-1)\; 60 + 45\; n^5\; 2^6 \Big\} \sum_{i=1}^{n} h_i^6 \implies$$

$$|\, E_4(f)\, | \leq \frac{|T_2(n)\, |\; M\; n!}{(n+6)!\; 45} \Big\{ 2880\; n^5 + 2\; n^4 + 96\; n^3 + 958\; n^2 + 3144\; n +$$

$$+ 2520 \Big\} \sum_{i=1}^{n} h_i^6$$

Observação

Para n = 1:

$$\int_{T_2(1)} f(x)\,dx = \frac{2\,h_1}{45}\left\{7f(P_{21}) + 32f(P_1) + 12f(P_0) + 32f(P_{-1}) + 7f(P_{-21})\right\} +$$

$$+ E_4(f)$$

onde:

$$|E_4(f)| \leq 0{,}1693\ M\ h_1^7$$

que é a quarta regra de Newton e Cotes, mencionadas no capítulo 2.

Capítulo 4

Integração Numérica e Polinômios Ortogonais

4.1 - Introdução

Neste capítulo apresentaremos aspectos da teoria da integração numérica utilizando polinômios ortogonais. Este procedimento generaliza o método de Gauss na reta.

Determinaremos fórmulas de integração de um certo grau d usando N pontos, com $N < \frac{(n+d)!}{n!d!}$. Inicialmente, estudaremos o caso particular da integração numérica no plano. Em seguida será apresentado o caso geral.

A fim de facilitar a redação, introduziremos as notações abaixo:

R_n é uma região n-dimensional;

P_m, $P_{m,i}$ são polinômios de grau m em n-variáveis;

Q_k, $Q_{k,i}^{\alpha,\beta}$ são polinômios de grau $\leq k$ em n-variáveis;

m, k são inteiros fixados, $m \geq 1$, $0 \leq k < m$ e $d = m + k$;

se U e V são conjuntos, $U \setminus V = \left\{ x \in U \mid x \notin V \right\}$;

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ são inteiros não negativos;

$S_{d,n} = \left\{ (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \mid 0 \leq \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \leq d \right\}$;

$C_{n+d,d} = \frac{(n+d)!}{n!d!}$ é o numéro de elementos em $S_{d,n}$;

S_N é um sub-conjunto de $S_{d,n}$ de N elementos;

$\mathfrak{X}$ é um conjunto de pontos que são zeros comuns de polinômios;

$\mathfrak{X}_N$ é um sub-conjunto de $\mathfrak{X}$ contendo N pontos;

$X_N(S_{d,n})$ é a matriz $C_{n+d,d}$ x N cujas linhas consistem dos vetores:

$$(x_{11}^{\alpha_1}\, x_{21}^{\alpha_2} \ldots x_{n1}^{\alpha_n}, \ldots, x_{1N}^{\alpha_1}\, x_{2N}^{\alpha_2} \ldots x_{nN}^{\alpha_n})$$

onde:

$$(x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{nj}) \in \mathcal{X}_N \quad \text{e} \quad (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in S_{d,n}$$

$X(S_N)$ é a matriz N x N cujas linhas são:

$$(x_{11}^{\alpha_1}\, x_{21}^{\alpha_2} \ldots x_{n1}^{\alpha_n}, \ldots, x_{1N}^{\alpha_1}\, x_{2N}^{\alpha_2} \ldots x_{nN}^{\alpha_n}) \; ; \quad (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in S_N$$

$w(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é uma função peso não negativa sobre R_n tal que as integrais $\int_{R_n} w(x_1, \ldots, x_n)\, x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}\, dx_1 \ldots dx_n$ existem para todos $\alpha_i \geq 0$;

$$I(f) = I(f(x_1, \ldots, x_n)) = \int_{R_n} w(x_1, \ldots, x_n)\, f\,(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n;$$

$I(1) > 0$.

<u>Definição</u>

Dizemos que uma fórmula de integração tem grau d se é exata para todo Q_d e existe pelo menos um P_{d+1} para o qual não é exata.

Para o desenvolvimento do trabalho usaremos o seguinte teorema devido a Stroud [7].

<u>Teorema 1</u>

Se um conjunto de polinômios $P_{m,1}(x_1,\ldots,x_n), \ldots$

$\ldots, P_{m,\ell}(x_1,\ldots,x_n)$, $\ell \geq 2$ satisfaz as condições abaixo, para algum inteiro k fixo, $0 \leq k < m$:

A.1. é linearmente independente e cada polinômio do conjunto é ortogonal a todo $Q_k(x_1,\dots,x_n)$;

A.2. os polinômios têm zeros comuns (x_i, y_i) ; $i = 1, 2, \dots, N$;

A.3. a matriz $X_N(S_{d,n})$ tem característica N;

A.4. para algum S_N tal que $X(S_N)$ é não singular vale:

para cada $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in S_{d,n} \setminus S_N$ existem polinômios

$Q_{k,1}^{\alpha_1,\dots,\alpha_n}(x_1,\dots,x_n),\dots,Q_{k,\ell}^{\alpha_1,\dots,\alpha_n}(x_1,\dots,x_n)$ tais que:

$$Q_{k,1}^{\alpha_1,\dots,\alpha_n} P_{m,1}+\dots+Q_{k,\ell}^{\alpha_1,\dots,\alpha_n} P_{m,\ell} = x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n} +$$

$$+\sum_{S_N} b_{\alpha_1^*,\dots,\alpha_n^*} \, x_1^{\alpha_1^*} \dots x_n^{\alpha_n^*}$$

então, existem constantes A_i ; $i = 1, 2, \dots, N$ tais que:

$$I(Q_d(x_1, \dots, x_n)) = \sum_{i=1}^{N} A_i \, Q_d\,(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ni}) \qquad (1)$$

para todos os polinômios de grau $\leq 2m-1$.

Prova

Consideremos S_N satisfazendo a condição A.4., então, o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x_{11}^{\alpha_{11}}\dots x_{n1}^{\alpha_{n1}} A_1 + \dots + x_{1N}^{\alpha_{11}}\dots x_{nN}^{\alpha_{n1}} A_N = I\,(x_1^{\alpha_{11}}\dots x_n^{\alpha_{n1}}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{11}^{\alpha_{1N}}\dots x_{n1}^{\alpha_{nN}} A_1 + \dots + x_{1N}^{\alpha_{1N}}\dots x_{nN}^{\alpha_{nN}} A_N = I\,(x_1^{\alpha_{1N}}\dots x_n^{\alpha_{nN}}) \end{cases}$$

onde $(\alpha_{1i}, \dots, \alpha_{ni}) \in S_N$; $i = 1, \dots, N$; tem uma única solução

$(A_1, A_2, \dots, A_n)$, pois a matriz dos coeficientes é não singular (pela condição A.4.).

Assim, a fórmula (1) é exata para $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ com $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in S_N$.

Provemos, agora, que (1) é exata para $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ com $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in S_{d,n} \setminus S_N$.

Seja:

$$T_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}(x_1,\dots,x_n) = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} + \sum_{S_N} b_{\alpha_1^*,\dots,\alpha_n^*} \, x_1^{\alpha_1^*} \dots x_n^{\alpha_n^*}$$

onde:

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in S_{d,n} \setminus S_N \quad e \quad (\alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*) \in S_N.$$

Neste caso:

$$I(T_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}) = \int \dots \int_{R_n} w(x_1,\dots,x_n) \, T_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}(x_1,\dots,x_n) dx_1 \dots dx_n =$$

$$= \int \dots \int_{R_n} w(x_1,\dots,x_n) \Bigg\{ \sum_{(\gamma_1,\dots,\gamma_n) \in S_{k,n}} (c^i_{\gamma_1,\dots,\gamma_n} x_1^{\gamma_1} \dots x_n^{\gamma_n} P_{m,1} +$$

$$+ \dots + c^{\ell}_{\gamma_1,\dots,\gamma_n} x_1^{\gamma_1} \dots x_n^{\gamma_n} P_{m,\ell}) \Bigg\} dx_1 \dots dx_n =$$

$$= \sum_{(\gamma_1,\dots,\gamma_n) \in S_{k,n}} \int \dots \int_{R_n} \Big\{ w(x_1,\dots,x_n) \, c^i_{\gamma_1,\dots,\gamma_n} x_1^{\gamma_1} \dots x_n^{\gamma_n} P_{m,1} +$$

$$+ \dots + w(x_1,\dots,x_n) \, c^{\ell}_{\gamma_1,\dots,\gamma_n} x_1^{\gamma_1} \dots x_n^{\gamma_n} P_{m,\ell} \Big\} dx_1 \dots dx_n =$$

$$= \sum_{(\gamma_1,\dots,\gamma_n) \in S_{k,n}} \Big\{ \int \dots \int_{R_n} w(x_1,\dots,x_n) c^i_{\gamma_1,\dots,\gamma_n} x_1^{\gamma_1} \dots x_n^{\gamma_n} P_{m,1} \, dx_1 \dots dx_n + \dots +$$

$$+ \int \cdots \int_{R_n} w(x_1,\ldots,x_n)\, c^{\ell}_{\gamma_1,\ldots,\gamma_n}\, x_1^{\gamma_1} \ldots x_n^{\gamma_n}\, P_{m,\ell}\, dx_1 \ldots dx_n \Bigg\} = 0$$

pela condição A.1. de ortogonalidade.

Por outro lado:

$$T_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} (x_{1i}, \ldots, x_{ni}) =$$

$$= \sum_{(\gamma_1,\ldots,\gamma_n) \in S_{k,n}} (c^{i}_{\gamma_1,\ldots,\gamma_n}\, x_1^{\gamma_1} \ldots x_n^{\gamma_n}\, P_{m,1}\, (x_{1i},\ldots,x_{ni}) +$$

$$+ \ldots + c^{\ell}_{\gamma_1,\ldots,\gamma_n}\, x_1^{\gamma_1} \ldots x_n^{\gamma_n}\, P_{m,\ell}\, (x_{1i}, \ldots, x_{ni})) = 0$$

pela condição A.2.

Portanto:

$$I(T_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}) = 0 = \sum_{i=1}^{N} A_i\, T_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(x_{1i},\ldots,x_{ni})$$

Logo, a fórmula (1) é exata para

$$T_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} (x_1,\ldots,x_n)$$

e para

$$\sum_{S_N} b_{\alpha^*_1,\ldots\,\alpha^*_n}\, x_1^{\alpha^*_1} \ldots x_n^{\alpha^*_n}$$

Como:

$$T_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} (x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} + \sum_{S_N} b_{\alpha^*_1, \ldots, \alpha^*_n}\, x_1^{\alpha^*_1} \ldots x_n^{\alpha^*_n} \implies$$

a fórmula (1) é exata para

$$x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \quad ; \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in S_{d,n} \setminus S_N$$

De fato:

$$I\,(T_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}) = I\,(x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}) +$$

$$+ \, I\,(\sum_{S_N} b_{\alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*} \, x_1^{\alpha_1^*} \dots x_n^{\alpha_n^*})$$

e

$$I\,(T_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}) = \sum_{i=1}^{N} A_i \, T_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} (x_{1i}, \dots, x_{ni}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} A_i \, (x_{1i}^{\alpha_1} \dots x_{ni}^{\alpha_n} + \sum_{S_N} b_{\alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*} \, x_{1i}^{\alpha_1^*} \dots x_{ni}^{\alpha_n^*}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} A_i \, x_{1i}^{\alpha_1} \dots x_{ni}^{\alpha_n} + \sum_{i=1}^{N} A_i \sum_{S_N} b_{\alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*} \, x_{1i}^{\alpha_1^*} \dots x_{ni}^{\alpha_n^*} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} A_i \, x_{1i}^{\alpha_1} \dots x_{ni}^{\alpha_n} + I\,(\sum_{S_N} b_{\alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*} \, x_1^{\alpha_1^*} \dots x_n^{\alpha_n^*}))$$

Portanto:

$$I(x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}) + I\,(\sum_{S_N} b_{\alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*} \, x_1^{\alpha_1^*} \dots x_n^{\alpha_n^*}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} A_i \, x_{1i}^{\alpha_1} \dots x_{ni}^{\alpha_n} + I(\sum_{S_N} b_{\alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*} \, x_1^{\alpha_1^*} \dots x_n^{\alpha_n^*})$$

ou seja:

$$I(x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}) = \sum_{i=1}^{N} A_i \, x_{1i}^{\alpha_1} \ldots x_{ni}^{\alpha_n}$$

e a fórmula (1) é então, exata para $x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$, com

$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in S_{d,n} \setminus S_N$.

4.2 - Integração Numérica no Plano

Neste parágrafo será estudado o trabalho [8] de A.H.Stroud, no qual é apresentada uma fórmula de integração para regiões planas. Serão utilizados resultados fundamentais de Álgebra, como os teoremas de Bezout e Noether e fornecidos pormenores que facilitarão a leitura do referido trabalho.

Teorema 2

Sejam $P_{m,1}(x,y)$ e $P_{m,2}(x,y)$ polinômios com as seguintes propriedades:

i) cada $P_{m,i}$ é ortogonal a todos Q_{m-1};

ii) $P_{m,1}$ e $P_{m,2}$ têm exatamente m^2 zeros comuns (x_i, y_i); $i = 1, \ldots, m^2$; todos distintos e finitos.

Então, existem constantes A_i ; $i = 1, \ldots, m^2$ tais que:

$$I\,(Q_{2m-1}(x,y)) = \sum_{i=1}^{m^2} A_i \, Q_{2m-1}(x_i, y_i)$$

para todos os polinômios de grau $\leq 2m-1$.

Prova

Vamos verificar se as condições do teorema 1 são satisfeitas e então, aplicá-lo.

Temos que os polinômios $P_{m,1}$ e $P_{m,2}$ têm exatamente m^2 zeros comuns, portanto, eles não têm nenhuma componente em comum. Logo, pelo teorema de Noether, todo polinômio Q_s que é zero em todos os pontos (x_i, y_i) ; $i = 1, \dots, m^2$ pode ser escrito na forma:

$$Q_s = Q'_{s-m,1} P_{m,1} + Q_{s-m,2} P_{m,2}$$

Sejam $K = m(m+1)$ e $M = m(2m+1)$; onde $K/2$ é o número de monômios $x^\alpha y^\beta$ de grau $\leq m-1$ e M é o número de monômios de grau $\leq 2m-1$. Vamos definir a matriz $\Pi_{K,M}$ de K linhas e M colunas do seguinte modo:

as $K/2$ primeiras linhas são formadas pelos coeficientes dos polinômios $x^\alpha y^\beta P_{m,1}$ e as seguintes $K/2$ linhas pelos coeficientes dos polinômios $x^\alpha y^\beta P_{m,2}$; $0 \leq \alpha+\beta \leq m-1$, ou seja as $K/2$ primeiras linhas pelos coeficientes de

$$P_{m,1} \ ; \ x\, P_{m,1} \ ; \ y\, P_{m,1} \ ; \ \dots ; \ x^{m-1} P_{m,1} \ ; \ \dots ; \ y^{m-1} P_{m,1}$$

e as $K/2$ seguintes pelos coeficientes de

$$P_{m,2} \ ; \ x\, P_{m,2} \ ; \ y\, P_{m,2} \ ; \ \dots ; \ x^{m-1} P_{m,2} \ ; \ \dots ; \ y^{m-1} P_{m,2}$$

Assim, as linhas foram formadas de tal modo que para cada (γ, δ) ; $0 \leq \gamma+\delta \leq 2m-1$; os coeficientes de $x^\gamma y^\delta$ em todos os polinômios

$$x^\alpha y^\beta P_{m,1} \quad \text{e} \quad x^\alpha y^\beta P_{m,2}$$

ocorrem na mesma coluna.

Esta matriz $\Pi_{K,M}$ tem característica K. De fato, se $\Pi_{K,M}$ tivesse característica $< K$, então, uma combinação linear das linhas de $\Pi_{K,M}$ seria o vetor nulo (com nem todos coeficientes na combinação linear sendo nulos); ou seja:

$$\gamma_1 x^{\alpha_1} y^{\beta_1} P_{m,1} + \dots + \gamma_r x^{\alpha_r} y^{\beta_r} P_{m,1} + \delta_1 x^{\alpha_1} y^{\beta_1} P_{m,2} + \dots +$$

$$+\delta_r x^{\alpha_r} y^{\beta_r} P_{m,2} = 0 \text{ ou seja}$$

$$(\gamma_1 x^{\alpha_1} y^{\beta_1} + \dots + \gamma_r x^{\alpha_r} y^{\beta_r}) P_{m,1} +$$

$$+ (\delta_1 x^{\alpha_1} y^{\beta_1} + \dots + \gamma_r x^{\alpha_r} y^{\beta_r}) P_{m,2} = 0$$

Portanto: $Q_{m-1,1} P_{m,1} + Q_{m-1,2} P_{m,2} = 0$ com $Q_{m-1,1}$ e $Q_{m-1,2}$ não simultaneamente nulos. Portanto:

$$Q_{m-1,1} P_{m,1} = - Q_{m-1,2} P_{m,2}$$

Como $P_{m,1}$ e $P_{m,2}$ não têm componentes em comum, para valer a igualdade $Q_{m-1,1}$ deveria conter as componentes de $P_{m,2}$ e $Q_{m-1,2}$ as componentes de $P_{m,1}$; absurdo, pois $Q_{m-1,1}$ e $Q_{m-1,2}$ têm grau no máximo m-1.

Assim $\Pi_{K,M}$ tem característica K e portanto, existe pelo menos uma sub-matriz de $\Pi_{K,M}$ de ordem K que é não singular. Seja $\Pi_{K,K}$ esta tal sub-matriz. Vamos definir:

$$S_K = \left\{(\alpha,\beta) \mid x^\alpha y^\beta \text{ é um monômio correspondente a uma coluna de } \Pi_{K,K}\right\}$$

e

$$S_{M-K} = \left\{(\alpha,\beta) \mid x^\alpha y^\beta \text{ é um monômio correspondente a uma coluna de } \Pi_{K,M} \text{ mas não de } \Pi_{K,K}\right\}.$$

Portanto, S_K contém K elementos e S_{M-K} contém $M-K = m(2m+1)-m(m+1) = 2m^2 + m - m^2 - m = m^2$ elementos. Seja:

$$X(S_{M-K}) = \begin{bmatrix} x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} & \dots & x_{m^2}^{\alpha_1} y_{m^2}^{\beta_1} \\ \dots\dots & & \dots\dots \\ x_1^{\alpha_{m^2}} y_1^{\beta_{m^2}} & \dots & x_{m^2}^{\alpha_{m^2}} y_{m^2}^{\beta_{m^2}} \end{bmatrix} \qquad (\alpha,\beta) \in S_{M-K}$$

e verifiquemos a condição A.3. do teorema 1, ou seja, verifiquemos que $X(S_{M-K})$ é não singular.

Assumimos que $X(S_{M-K})$ é singular. Então, existe uma combinação linear de suas linhas que é o vetor nulo, isto é:

$$\gamma_1 (x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1}, \ldots, x_{m^2}^{\alpha_1} y_{m^2}^{\beta_1}) + \ldots + \gamma_{m^2} (x_1^{\alpha_{m^2}} y_1^{\beta_{m^2}}, \ldots, x_{m^2}^{\alpha_{m^2}} y_{m^2}^{\beta_{m^2}}) \equiv 0$$

Portanto:

$$\gamma_1 x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} + \ldots + \gamma_{m^2} x_1^{\alpha_{m^2}} y_1^{\beta_{m^2}} = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\gamma_1 x_{m^2}^{\alpha_1} y_{m^2}^{\beta_1} + \ldots + \gamma_{m^2} x_{m^2}^{\alpha_{m^2}} y_{m^2}^{\beta_{m^2}} = 0$$

Seja:

$$Q_{2m-1} = \gamma_1 x^{\alpha_1} y^{\beta_1} + \ldots + \gamma_{m^2} x^{\alpha_{m^2}} y^{\beta_{m^2}} \neq 0$$

que é um polinômio de grau $\leq 2m-1$, pois $x^{\alpha} y^{\beta}$ pode ter grau no máximo 2m-1 desde que $(\alpha, \beta) \in S_{M-K}$. Como

$$Q_{2m-1}(x_i, y_i) = 0; \quad i = 1, \ldots, m^2,$$

pelo teorema de Noether existem $Q_{m-1,1}$ e $Q_{m-1,2}$ tais que

$$Q_{2m-1} = Q_{m-1,1} P_{m,1} + Q_{m-1,2} P_{m,2} \tag{I}$$

cujo lado direito de (I) representa uma combinação linear das linhas de $\Pi_{K,M}$. Como $\Pi_{K,K}$ é não singular, (I) deve conter pelo menos um monômio

$x^{\alpha} y^{\beta}$ que corresponde a uma coluna de $\Pi_{K,K}$, ou seja, Q_{2m-1} deve conter monômios $x^{\alpha} y^{\beta}$ com $(\alpha, \beta) \in S_{M-K}$, o que é absurdo. Daí, $X(S_{M-K})$ é não singular.

Provemos, finalmente, a condição A.4. do teorema 1:

para cada $x^{\alpha} y^{\beta}$ fixado, $(\alpha, \beta) \in S_K$, devemos provar que existem $Q_{m-1,1}$ e $Q_{m-1,2}$ tais que

$$Q_{m-1,1} P_{m,1} + Q_{m-1,2} P_{m,2} = x^{\alpha} y^{\beta} + \sum_{S_{M-K}} b_{\alpha^*, \beta^*} x^{\alpha^*} y^{\beta^*} \qquad \text{(II)}$$

Sejam:

$$Q_{m-1,1} = c_{11} + c_{12}x + c_{13}y + \dots + c_{1\frac{K}{2}} y^{m-1}$$

$$Q_{m-1,2} = c_{21} + c_{22}x + c_{23}y + \dots + c_{2\frac{K}{2}} y^{m-1}$$

$$P_{m,1} = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + \dots + a_{0m} y^{m}$$

$$P_{m,2} = b_{00} + b_{10}x + b_{01}y + \dots + b_{0m} y^{m}$$

Então:

$$(c_{11}a_{00} + c_{21}b_{00}, c_{11}a_{10} + c_{12}a_{00} + c_{21}b_{10} + c_{22}b_{00}, \dots) =$$

$$= (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, \dots, b_{\alpha^*, \beta^*}, \dots)$$

e notemos que resolver (II) é equivalente a resolver:

$$\Pi^{T}_{K,M}\, c = e'$$

onde

$$c = (c_{11}, \ldots, c_{1\frac{K}{2}}, c_{21}, \ldots, c_{2\frac{K}{2}}) ;$$

$$e' = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0, \ldots, b_{\alpha^*, \beta^*}, \ldots) ;$$

$$\pi_{K,M} = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{10} & a_{01} & a_{20} & a_{11} & a_{02} & \ldots\ldots \\ 0 & a_{00} & 0 & a_{10} & a_{01} & 0 & \ldots\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{00} & b_{10} & b_{01} & b_{20} & b_{11} & b_{02} & \ldots\ldots \\ 0 & b_{00} & 0 & b_{10} & b_{01} & 0 & \ldots\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix}$$

Além disso;

$$x^{\alpha} y^{\beta} + \sum_{S_{M-K}} b_{\alpha^*, \beta^*} x^{\alpha^*} y^{\beta^*}$$

é tal que os elementos de S_K só aparecem em $x^{\alpha} y^{\beta}$ e os elementos de S_{M-K} só aparecem em

$$\sum_{S_{M-K}} b_{\alpha^*, \beta^*} x^{\alpha^*} y^{\beta^*}$$

e como $\pi_{K,K}$ e não singular, podemos determinar o vetor c resolvendo o sistema linear:

$$\pi^T_{K,K} \, c = e$$

onde e é escolhido convenientemente do seguinte modo: se $x^{\alpha} y^{\beta}$ corresponde a i$\underline{\text{ésima}}$ coluna de $\pi_{K,K}$, então, tomamos e como tendo seu i$\underline{\text{ésimo}}$ elemento a unidade e os demais elementos nulos. O vetor solução c determina $Q_{m-1,1}$ e $Q_{m-1,2}$. Deste modo calculado c, então,

$$Q_{m-1,1}\, P_{m,1} + Q_{m-1,2}\, P_{m,2}$$

terá a forma (II).

Observemos que para construirmos fórmulas de integração usando o teorema 2, devemos escolher convenientemente os polinômios $P_{m,1}$ e $P_{m,2}$. O teorema seguinte vai mostrar que muitas vezes podemos usar $P_{m,1}$ e $P_{m,2}$ como sendo os seguintes polinômios:

$$P_{m,1} = P^{m,o} = x^m + Q_{m-1,o}\,(x,y)$$

e

$$P_{m,2} = P^{o,m} = y^m + Q_{m-1,m}\,(x,y)$$

<u>Teorema 3</u>

Os polinômios $P^{m,o}$ e $p^{o,m}$ não têm nenhuma componente em comum e seus m^2 zeros comuns são finitos.

<u>Prova</u>

Supomos que $P^{m,o}$ e $P^{o,m}$ tenham uma componente em comum, então,

$$P^{m,o} = P_{u,1}\, P_v \quad \text{e} \quad P^{o,m} = P_{u,2}\, P_v \quad ; \quad \text{com } u + v = m$$

Assim:

$$P_{u,1} = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + \dots + a_{u0}\, x^u + \dots + a_{0u}\, y^u$$

$$P_{u,2} = b_{00} + b_{10}x + b_{01}y + \dots + b_{u0}\, x^u + \dots + b_{0u}\, y^u$$

$$P_v = \alpha_{00} + \alpha_{10}x + \alpha_{01}y + \dots + \alpha_{v0}\, x^v + \dots + \alpha_{0v}\, y^v$$

Temos que:

$$P^{m,o} = x^m + Q_{m-1,o} \qquad \text{(III)}$$

$$P^{o,m} = y^m + Q_{m-1,m} \tag{IV}$$

Além disso:

$$P_{u,1}\, P_v = a_{00}\,\alpha_{00} + \ldots + (a_{u0}\,\alpha_{v0})\, x^{u+v} + \ldots + (a_{u0}\,\alpha_{0v}) x^u y^v + \ldots +$$
$$+ (a_{0u}\,\alpha_{v0})\, y^u x^v + \ldots + (a_{0u}\,\alpha_{0v})\, y^{u+v} \tag{V}$$

$$P_{u,2}\, P_v = b_{00}\,\alpha_{00} + \ldots + (b_{u0}\,\alpha_{v0}) x^{u+v} + \ldots + (b_{u0}\,\alpha_{0v}) x^u y^v + \ldots +$$
$$+ (b_{0u}\,\alpha_{v0})\, y^u x^v + \ldots + (b_{0u}\,\alpha_{0v})\, y^{u+v} \tag{VI}$$

Por (III) temos que o coeficiente de $x^m = 1$, portanto,

$a_{u0}\,\alpha_{v0} = 1 \Longrightarrow a_{u0} \neq 0 \quad$ e $\quad \alpha_{v0} \neq 0.$

Por (IV) temos que o coeficiente de $y^m = 1$, portanto,

$b_{0u}\,\alpha_{0v} = 1 \Longrightarrow b_{0u} \neq 0 \quad$ e $\quad \alpha_{0v} \neq 0.$

Logo, por (V) teríamos que o coeficiente de $x^u\, y^v$, $a_{u0}\,\alpha_{0v} \neq 0$, mas como $P_{u,1}\, P_v = P^{m,o}$, $x^u\, y^v$ deveria pertencer a $Q_{m-1,0}$; o que é absurdo, pois, $Q_{m-1,0}$ é um polinômio de grau m-1.

Supomos que $P^{m,o}$ e $P^{o,m}$ tenham um zero comum não finito, então, as coordenadas projetivas de tal ponto têm a forma $(u, \lambda, 0)$. Como

$$P^{m,o} = x^m + Q_{m-1,o} \quad \text{e} \quad P^{o,m} = y^m + Q_{m-1,m}$$

temos que $u^m = 0$; $\lambda^m = 0$ e portanto $u = 0$; $\lambda = 0$. Logo: $(u,\lambda,0) = (0,0,0)$ que não define um ponto no espaço projetivo.

<u>Teorema 4</u>

Se os m^2 zeros comuns de $P^{m,o}$ e $P^{o,m}$ são distintos, então, estes pontos podem ser usados como pontos numa fórmula de integração de grau 2m-1 para R_2 e $w(x,y)$.

Prova

Se os m^2 zeros comuns de $P^{m,o}$ e $P^{o,m}$ são distintos, então, estes polinômios satisfazem as condições i) e ii) do teorema 2. Logo, existem constantes A_i, $i = 1, \ldots, m^2$ tais que:

$$I\,(Q_{2m-1}(x,y)) = \sum_{i=1}^{m^2} A_i\, Q_{2m-1}\,(x_i,y_i)$$

para todos polinômios de grau $\leq$ 2m-1 e onde os (x_i,y_i), $i = 1,\ldots, m^2$ são os zeros de $P^{m,o}$ e $P^{o,m}$.

É de grande interesse prático notarmos que quando os polinômios do teorema 2 são os $P^{m,o}$ e $P^{o,m}$ então, o conjunto S_{M-K} pode ser tomado como sendo:

$$S_{M-K} = \left\{ (\alpha\,,\beta)\ \middle|\ 0 \leq \alpha \leq m-1 \quad ; \quad 0 \leq \beta \leq m-1 \right\}$$

De fato:

Notemos que a sub-matriz $\Pi_{K,K}$ de $\Pi_{K,M}$ cujas linhas são os coeficientes de

$$x^{\alpha}\, y^{\beta}\, P^{m,o} \qquad e \qquad x^{\alpha}\, y^{\beta}\, P^{o,m}$$

excluídos os (γ,δ) tais que $0 \leq \gamma \leq m-1$ e $0 \leq \delta \leq m-1$ é não singular.

Temos que:

$$
\mathcal{T}_{K,K} = \left[\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
a_{m-1,o} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & a_{o,m-1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
a_{m-2,o} & 0 & a_{m-1,o} & a_{m-2,1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & a_{m-1,0} & a_{0,m-1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & a_{o,m-2} & 0 & 0 & a_{1,m-2} & a_{o,m-1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\hdotsfor{19} \\
a_{1,o} & 0 & a_{2,o} & a_{1,1} & 0 & 0 & a_{3,o} & a_{2,1} & a_{1,2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\hdotsfor{19} \\
0 & a_{o,1} & 0 & 0 & a_{1,1} & a_{o,2} & 0 & 0 & 0 & a_{2,1} & a_{1,2} & a_{o,3} & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
b_{m-1,o} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & b_{o,m-1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
b_{m-2,o} & 0 & b_{m-1,o} & b_{m-2,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & b_{m-1,o} & b_{o,m-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & b_{o,m-2} & 0 & 0 & b_{1,m-2} & b_{o,m-1} & 0 & 0 & 0 & b_{2,m-2} & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\hdotsfor{19} \\
b_{1,o} & 0 & b_{2,o} & b_{1,1} & 0 & 0 & b_{3,o} & b_{2,1} & b_{1,2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\hdotsfor{19} \\
0 & b_{o,1} & 0 & 0 & b_{1,1} & b_{o,2} & 0 & 0 & 0 & b_{2,1} & b_{1,2} & b_{o,3} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{array}\right]
$$

onde:

$$P^{m,o} = a_{00} + a_{10}\,x + a_{01}\,y + a_{20}\,x^2 + a_{11}\,xy + a_{02}\,y^2 + \ldots + a_{m-1,o}\,x^{m-1} + \ldots + a_{o,m-1}y^{m-1} + x^m$$

$$P^{o,m} = b_{00} + b_{10}\,x + b_{01}\,y + b_{20}\,x^2 + b_{11}\,xy + b_{02}\,y^2 + \ldots + b_{m-1,o}\,x^{m-1} + \ldots + b_{o,m-1}y^{m-1} + y^m$$

Fazendo troca de linhas na matriz $\mathcal{T}_{K,K}$, chegamos a uma matriz $\mathcal{T}'_{K,K}$ triangular inferior, cujos elementos da diagonal são todos iguais a 1, ou seja:

$$
\pi'_{K,K} = \left[\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
a_{m-1,0} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & a_{0,m-1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
b_{m-1,0} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & b_{0,m-1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
a_{m-2,0} & 0 & a_{m-1,0} & a_{m-2,1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & a_{m-1,0} & a_{0,m-1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & a_{0,m-2} & 0 & 0 & a_{1,m-2} & a_{0,m-1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
b_{m-2,0} & 0 & b_{m-1,0} & b_{m-2,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & b_{m-1,0} & b_{0,m-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & b_{0,m-2} & 0 & 0 & b_{1,m-2} & b_{0,m-1} & 0 & 0 & 0 & b_{2,m-2} & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{1,0} & 0 & a_{2,0} & a_{1,1} & 0 & 0 & a_{3,0} & a_{2,1} & a_{1,2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & a_{0,1} & 0 & 0 & a_{1,1} & a_{0,2} & 0 & 0 & 0 & a_{2,1} & a_{1,2} & a_{0,3} & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
b_{1,0} & 0 & b_{2,0} & b_{1,1} & 0 & 0 & b_{3,0} & b_{2,1} & b_{1,2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & b_{0,1} & 0 & 0 & b_{1,1} & b_{0,2} & 0 & 0 & 0 & b_{2,1} & b_{1,2} & b_{0,3} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{array}\right]
$$

Logo, o determinante de $\pi_{K,K}$ será ± 1 e portanto, $\pi_{K,K}$ é não singular.

Assim:

$$S_{M-K} = \left\{ (\alpha, \beta) \mid 0 \leq \alpha \leq m-1 \ ; \ 0 \leq \beta \leq m-1 \right\}$$

4.3 - Caso Geral

Para uma dada região R_n e um dado grau d vamos apresentar dois teoremas para construir fórmulas de integração. O primeiro teorema é um dos mais recentes resultados de A. H. Stroud [9] e de grande valor teórico. O outro é construtivo e generaliza o teorema 2 deste capítulo. Portanto, nosso maior objetivo é discutir este segundo método, que se baseia no trabalho de Richard Franke [10].

Teorema 5

Sejam os polinômios $Q_{d,j}$; $j = 1, \ldots, K$ satisfazendo as condições seguintes:

a) os $Q_{d,j}$ são linearmente independentes;

b) $I(Q_{d,j}) = 0$; $\forall j$;

c) os $Q_{d,j}$ têm $N = \binom{d+n}{n} - K$ zeros comuns, $\mathfrak{X}_N = \left\{ v_k \mid k=1,\ldots N \right\}$

d) todo polinômio Q_d que é zero em todos v_k pode ser escrito como uma combinação linear dos $Q_{d,j}$.

Então:

a') os v_k podem ser usados como pontos numa fórmula de integração

$$I(f) \simeq \sum_{k=1}^{N} A_k \, f(v_k)$$

de grau d;

b') a matriz $X_N \, (S_{d,n})$ tem característica N.

Reciprocamente, consideremos o conjunto de pontos

$$\mathfrak{X}_N = \left\{ v_k \mid k = 1, \ldots, N \right\}$$

satisfazendo as condições a') e b'). Então, existem polinômios

$$Q_{d,j} \quad ; \quad j = 1, \ldots, K$$

tais que as condições a); b); c) e d) valem.

Lema 1

Sejam $Q_{d,j}$; $j = 1, \ldots, K$ satisfazendo a) e c) do teorema 5. Então, as condições d) e b') do teorema 5 são equivalentes.

As demonstrações foram omitidas, pois, são encontradas com bastante pormenor em [9].

A seguir, passaremos à discussão do resultado principal, demonstrando antes o seguinte:

Seja

$$N = \binom{2m-1+n}{n} - n\binom{m-1+n}{n}$$

o número de pontos que utilizaremos, então:

Lema 2

$$N \leq m^n \quad \text{para} \quad n,m \geq 1$$

Prova

Se $n = 1,2$, temos $N = m^n$. De fato:

$$N = \binom{2m}{1} - \binom{m}{1} = m^1 = m^n$$

$$N = \binom{2m+1}{2} - 2\binom{m+1}{2} = m^2 = m^n$$

Se $m = 1$, então $N = m^n = 1$. De fato:

$$N = \binom{n+1}{n} - n\binom{n}{n} = 1 = 1^n = m^n$$

Denotemos $\binom{2m-1+n}{n} - n\binom{m-1+n}{n}$ por N_n e façamos a prova por indução sobre n. Supomos que vale para $n = k$, ou seja $N_k \leq m^k$ e provemos que $N_{k+1} \leq mN_k \leq m^{k+1}$.

Temos que:

$$N_{k+1} = \binom{2m-1+k+1}{k+1} - (k+1)\binom{m-1+k+1}{k+1} = \frac{(2m+k)!}{(2m-1)!\,(k+1)!} - \frac{(k+1)\,(m+k)!}{(m-1)!\,(k+1)!} =$$

$$= \frac{(2m+k)(2m+k-1)!}{(2m-1)!\,(k+1)k!} + \frac{-(k+1)(m+k)(m+k-1)!}{(m-1)!\,(k+1)\,k!} = \frac{(2m+k-1)!(km+m-km+m+k)}{(k+1)\,(2m-1)!\,k!} +$$

$$+ \frac{(m+k-1)!\,(mk^2-mk-k^2+mk-m-k-mk^2-mk)}{(k+1)\,(m-1)!\,k!} =$$

$$= \frac{m(2m+k-1)!}{(2m-1)!k!} - \frac{mk(m+k-1)!}{(m-1)!k!} - \frac{(mk-m-k)(2m+k-1)!}{(k+1)(2m-1)!k!} + \frac{(mk-m-k)(k+1)(m+k-1)!}{(k+1)(m-1)!\,k!} =$$

$$= m\left\{\binom{2m-1+k}{k} - k\binom{m-1+k}{k}\right\} - \frac{mk-m-k}{k+1}\left\{\binom{2m+k-1}{k} - (k+1)\binom{m+k-1}{k}\right\} =$$

$$= m\,N_k - \frac{mk-m-k}{k+1}\left\{\binom{2m+k-1}{k} - (k+1)\binom{m+k-1}{k}\right\}$$

Se $m,k \geq 2 \Rightarrow mk - m - k \geq 0$. Também $(k+1) \geq 0$. Assim, se provarmos que:

$$\left\{\binom{2m+k-1}{k} - (k+1)\binom{m+k-1}{k}\right\} \geq 0 \qquad (1')$$

teremos que $N_{k+1} - m\,N_k \leq 0$, ou seja $N_{k+1} \leq m\,N_k$. Provemos, então, (1').

Seja

$$H_k = k!\left\{\binom{2m+k-1}{k} - (k+1)\binom{m+k-1}{k}\right\} =$$

$$= (2m+k-1)(2m+k-2)\ldots(2m) - (k+1)(m+k-1)(m+k-2)\ldots(m);$$

e mostremos, por indução sobre k, que $H_k \geq 0$.

$$H_1 = 2m - 2m = 0$$

Supomos que $H_\ell \geq 0$, então:

$$H_{\ell+1} = (2m+\ell)(2m+\ell-1) \dots (2m) - (\ell+2)(m+\ell)(m+\ell-1) \dots (m) =$$

$$= (2m+\ell)(2m+\ell-1) \dots (2m) - (\ell+2)(m+\ell)(m+\ell-1) \dots (m) +$$

$$+ (2m+\ell)(\ell+1)(m+\ell-1) \dots (m) - (2m+\ell)(\ell+1)(m+\ell-1) \dots (m) =$$

$$= (2m+\ell)\left\{(2m+\ell-1) \dots (2m) - (\ell+1)(m+\ell-1) \dots (m)\right\} +$$

$$+ \left\{(2m+\ell)(\ell+1) - (\ell+2)(m+\ell)\right\}(m+\ell-1) \dots (m) =$$

$$= (2m+\ell) H_\ell + ((m-1)\ell)(m+\ell-1) \dots (m) \geq H_\ell \geq 0$$

Portanto:

$$N_{k+1} \leq m N_k \leq m^{k+1}$$

Teorema 6

Sejam $P_{m,i}$; $i = 1, \dots, n$ polinômios em n-variáveis satisfazendo as condições seguintes:

i) cada $P_{m,i}$ é ortogonal a todo Q_{m-1};

ii) os $P_{m,i}$ têm exatamente m^n zeros comuns, $\mathfrak{X} = \left\{v_j \mid j = 1, \dots, m^n\right\}$ todos dos quais são distintos e finitos.

Então, existe um sub-conjunto $\mathfrak{X}_N = \left\{u_k \mid k = 1, \dots, N\right\}$ de $\mathfrak{X}$, onde:

$$N = \binom{2m-1+n}{n} - n\binom{m-1+n}{n}$$

e existem constantes A_k, $k = 1, \dots, N$ tais que:

$$I(Q_{2m-1}) = \sum_{k=1}^{N} A_k\, Q_{2m-1}\,(u_k)$$

para todo Q_{2m-1}.

Prova

A prova consiste em verificar que as condições a), b), c) e b') do teorema 5 são satisfeitas, com $d = 2m-1$.

Consideremos os $K = n\binom{m-1+n}{n}$ polinômios:

$$x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}\, P_{m,i} \quad ; \quad i = 1,\dots,n \quad ; \quad (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in S_{m-1,n} \qquad (2')$$

Assim, estes polinômios são de grau $\leq 2m-1$ e serão os $Q_{d,j}$ do teorema 5.

Como cada $P_{m,i}$ é ortogonal a todo Q_{m-1} $\Longrightarrow$

$$\int_{R_n} w(x_1,\dots,x_n)\,x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}\, P_{m,i}(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n = 0 \; ;$$

$\forall i = 1, \dots, n$

Logo, a condição b) está satisfeita.

Verifiquemos, agora, que os polinômios (2') são linearmente independentes. Supomos que uma combinação linear não trivial dos polinômios (2') é identicamente zero:

$$\sum_{i=1}^{n} \left\{ \sum_{(\alpha_1\dots,\alpha_n)\in S_{m-1,n}} a_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)i}\;\; x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n} \right\} P_{m,i} = 0 \qquad (3')$$

Consideremos o sistema de equações homogêneas, onde os t_i são incógnitas:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)i}\, t_i = 0 \quad ; \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in S_{m-1,n} \qquad (4')$$

ou seja:

$$\begin{cases} a_{(o,\dots,o)1}\, t_1 + a_{(o,\dots,o)2}\, t_2 + \dots + a_{(o,\dots,o)n}\, t_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{(o,\dots,m-1)1}\, t_1 + a_{(o,\dots,m-1)2}\, t_2 + \dots + a_{(o,\dots,m-1)n}\, t_n = 0 \end{cases}$$

que é um sistema de $\binom{m-1+n}{n}$ equações a n incógnitas e não todas das equações são triviais, por hipótese.

Assim, existe um conjunto de números arbitrariamente pequenos, $\{\varepsilon_i \ ; \ i = 1, \dots, n\}$ tal que $t_i = \varepsilon_i$ não é um conjunto solução de (4').

De fato, como nem todas as equações de (4') são triviais, existe pelo menos uma não trivial, para esta façamos o seguinte:

se não existisse $\{\varepsilon_i \ ; \ i = 1, \dots, n\}$ de modo que para $t_i = \varepsilon_i$ a equação considerada é não nula para ε_i arbitrariamente pequenos, então, para todos valores arbitrariamente pequenos de $t_1, t_2, \dots, t_n$ a equação em questão seria satisfeita.

Em particular ela seria satisfeita para t_1 arbitrariamente pequeno e $t_2 = t_3 = \dots = t_n = 0$. Deste modo, o coeficiente de t_1 na equação considerada seria zero. Repetindo o raciocínio para $t_2, t_3, \dots, t_n$ teríamos que os coeficientes de $t_2, t_3, \dots, t_n$ seriam nulos.

Vamos escolher o conjunto dos menores ε_i' s tal que o conjunto dos polinômios $P_{m,i} - \varepsilon_i$; $i = 1, \dots, n$ tenha exatamente m^n zeros comuns ζ_j ; $j = 1, \dots, m^n$, todos quais são distintos e finitos. Tais ε_i' s podem ser escolhidos usando o Teorema das Funções Implícitas.

Seja:

$$\begin{cases} y_1 = P_{m,1}(x_1, \ldots, x_n) \\ y_2 = P_{m,2}(x_1, \ldots, x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = P_{m,n}(x_1, \ldots, x_n) \end{cases} \qquad (5')$$

Temos que, se $(x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{nj})$ é zero comum dos $P_{m,i} \Rightarrow$ o jacobiano $J(P_{m,1}, \ldots, P_{m,n})(x_{1j}, \ldots, x_{nj}) \neq 0 \Rightarrow$, de (5'), que podemos tirar $x_1, \ldots, x_n$ em função de $y_1, \ldots, y_n$ nas vizinhanças de $(x_{1j}, \ldots, x_{nj})$ e de $(o, \ldots, o)$, (ver [11]).

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_{1j}(y_1, \ldots, y_n) \\ x_2 = \varphi_{2j}(y_1, \ldots, y_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = \varphi_{nj}(y_1, \ldots, y_n) \end{cases}$$

Considerando $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ arbitrariamente pequenos, então:

$$\begin{cases} \varphi_{1j}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = \tau_{1j} \\ \varphi_{2j}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = \tau_{2j} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_{nj}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = \tau_{nj} \end{cases}$$

e portanto:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = P_{m,1}(\tau_{1j}, \ldots, \tau_{nj}) \\ \varepsilon_2 = P_{m,2}(\tau_{1j}, \ldots, \tau_{nj}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varepsilon_n = P_{m,n}(\tau_{1j}, \ldots, \tau_{nj}) \end{cases}$$

Procedendo-se desta maneira para $j = 1, \ldots, m^n$ temos que:

$$P_{m,i} - \varepsilon_i \quad ; \quad i = 1, \ldots, n$$

têm m^n zeros comuns distintos e finitos. Como (3') é identicamente zero, então, é zero em todos os τ_j ; $j = 1, \ldots, m^n$; ou seja:

$$\sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in S_{m-1,n}} a_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)i} \; \tau_{1j}^{\alpha_1} \cdots \tau_{nj}^{\alpha_n} \Big) P_{m,i}(\tau_{ij}) = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in S_{m-1,n}} a_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)i} \; \tau_{1j}^{\alpha_1} \cdots \tau_{nj}^{\alpha_n} \Big) \varepsilon_i = 0$$

Portanto:

$$(a_{(o,\ldots,o)1} + a_{(1,\ldots,o)1}\tau_{1j}^{1} \cdots \tau_{nj}^{o} + \ldots + a_{(o,\ldots,m-1)1}\tau_{1j}^{o} \cdots \tau_{nj}^{m-1})\varepsilon_1 +$$

$$+(a_{(o,\ldots,o)2} + a_{(1,\ldots,o)2}\tau_{1j}^{1} \cdots \tau_{nj}^{o} + \ldots + a_{(o,\ldots,m-1)2}\tau_{1j}^{o} \cdots \tau_{nj}^{m-1})\varepsilon_2 +$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots +$$

$$+(a_{(o,\ldots,o)n} + a_{(1,\ldots,o)n}\tau_{1j}^{1} \cdots \tau_{nj}^{o} + \ldots + a_{(o,\ldots,m-1)n}\tau_{1j}^{o} \cdots \tau_{nj}^{m-1})\varepsilon_n = 0$$

Portanto:

$$a_{(o,\ldots,o)1}\varepsilon_1 + a_{(o,\ldots,o)2}\varepsilon_2 + a_{(o,\ldots,o)n}\varepsilon_n +$$

$$+(a_{(1,\ldots,o)1}\varepsilon_1 + a_{(1,\ldots,o)2}\varepsilon_2 + \ldots + a_{(1,\ldots,o)n}\varepsilon_n)\tau_{1j}^{1} \cdots \tau_{nj}^{o} +$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots +$$

$$+(a_{(o,\ldots,m-1)1}\varepsilon_1 + a_{(o,\ldots,m-1)2}\varepsilon_2 + \ldots + a_{(o,\ldots,m-1)n}\varepsilon_n)\tau_{1j}^{o} \cdots \tau_{nj}^{m-1} = 0 \qquad (6')$$

Seja:

$$Q_{m-1} = \sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in S_{m-1,n}} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)i}\, \varepsilon_i\right) x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$$

Então, por (6'), Q_{m-1} se anula nos pontos τ_j ; $j = 1,\dots m^n$.

Pelo teorema de Noether, um polinômio não nulo que satisfaz tal condição deve ser de grau no mínimo m. Logo, $Q_{m-1} \equiv 0$ e portanto, o coeficiente de cada $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ é zero, ou seja:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{(\alpha_1,\ \dots,\alpha_n)i}\, \varepsilon_i = 0$$

isto implica que os ε_i satisfazem (4'), o que contradiz a escolha dos ε_i; assim os polinômios (2') são linearmente independentes. Portanto, a condição a) está satisfeita.

Desde que os polinômios (2') são linearmente independentes, existe um sub-conjunto S_K de $S_{2m-1,n}$ tal que pelo menos um monômio $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$, onde $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in S_K$ aparece em qualquer combinação linear não trivial dos polinômios (2').

De fato; consideremos a matriz $B_{K,K+N}$ cujas linhas são os coeficientes dos polinômios:

$$x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} P_{m,i} \quad ; \quad i = 1, \dots, n \quad ; \quad (\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in S_{m-1,n}$$

Como tais polinômios são linearmente independentes, então, $B_{K,K+N}$ tem característica K. Assim, existe uma sub-matriz não singular $B_{K,K}$ de $B_{K,K+N}$.

Seja S_K o conjunto das ênuplas correspondentes aos monômios associados com as colunas de $B_{K,K}$.

Então, qualquer combinação linear não trivial dos polinômios (2') corresponde a uma combinação linear das linhas de $B_{K,K+N}$. Como $B_{K,K}$

é não singular, um elemento correspondente a alguma coluna em $B_{K,K}$ é não nulo, assim, o coeficiente do monômio associado com tal coluna é não nulo na combinação linear dos polinômios (2'). Portanto, S_K existe.

Seja:

$$S_N = \left\{ (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in S_{2m-1,n} \mid (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \notin S_K \right\}$$

Consideremos:

$$X(S_N) = \begin{bmatrix} x_{11}^{\alpha_{11}} \ldots x_{n1}^{\alpha_{n1}} & x_{12}^{\alpha_{11}} \ldots x_{n2}^{\alpha_{n1}} \ldots\ldots x_{1m^2}^{11} \ldots x_{n\,m^n}^{n1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ x_{11}^{1N} \ldots x_{n1}^{nN} & x_{12}^{1N} \ldots x_{n2}^{nN} \ldots\ldots x_{1m^n}^{1N} \ldots x_{n\,m^n}^{nN} \end{bmatrix}$$

e supomos que tenha característica $<N$.

Assim, existe uma combinação linear não trivial de suas linhas que é zero, ou seja:

$$a_{(\alpha_{11},\ldots,\alpha_{n1})} (x_{11}^{\alpha_{11}} \ldots x_{n1}^{\alpha_{n1}}, \ldots, x_{1m^n}^{\alpha_{11}} \ldots x_{nm^n}^{\alpha_{n1}}) +$$

$$+ a_{(\alpha_{12},\ldots,\alpha_{n2})} (x_{11}^{\alpha_{12}} \ldots x_{n1}^{\alpha_{n2}}, \ldots, x_{1m^n}^{\alpha_{12}} \ldots x_{nm^n}^{\alpha_{n2}}) + \ldots +$$

$$+ a_{(\alpha_{1N},\ldots,\alpha_{nN})} (x_{11}^{\alpha_{1N}} \ldots x_{n1}^{\alpha_{nN}}, \ldots x_{1m^n}^{\alpha_{1N}} \ldots x_{nm^n}^{\alpha_{nN}}) = 0$$

Portanto:

$$\begin{cases} a_{(\alpha_{11},\ldots,\alpha_{n1})} x_{11}^{\alpha_{11}} \ldots x_{n1}^{\alpha_{n1}} + \ldots + a_{(\alpha_{1N},\ldots,\alpha_{nN})} x_{11}^{\alpha_{1N}} \ldots x_{n1}^{\alpha_{nN}} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{(\alpha_{11},\ldots,\alpha_{n1})} x_{1m^n}^{\alpha_{11}} \ldots x_{nm^n}^{\alpha_{n1}} + \ldots + a_{(\alpha_{1N},\ldots,\alpha_{nN})} x_{1m^n}^{\alpha_{1N}} \ldots x_{nm^n}^{\alpha_{nN}} = 0 \end{cases} \tag{7'}$$

Seja

$$Q_{2m-1} = \sum_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in S_N} a(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\, x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

Por (7'), temos que Q_{2m-1} se anula em cada $v_k = (x_{1k}, \ldots, x_{nk})$; $k = 1, \ldots, m^n$.

Logo, pelo teorema de Noether $\Longrightarrow$

$$Q_{2m-1} = Q_{m-1,1}\, P_{m,1} + Q_{m-1,2}\, P_{m,2} + \ldots + Q_{m-1,n}\, P_{m,n} \qquad (8')$$

O lado direito de (8') é uma combinação linear dos polinômios (2'), logo, como já vimos, contém um monômio correspondente a um elemento de S_K; mas, Q_{2m-1} tem somente monômios correspondentes a elementos de S_N; o que é uma contradição. Assim, $X(S_N)$ tem característica N.

Seja $\mathfrak{X}_N$ um sub-conjunto de $\mathfrak{X} = \left\{ v_j \mid j = 1, \ldots, m^n \right\}$ tal que $X_N(S_N)$ é não singular. Então, $X_N(S_{2m-1,n})$ tem característica N. Logo, a condição b') está satisfeita.

Como $\mathfrak{X}_N$ é um sub-conjunto de $\mathfrak{X}$, a condição c) está satisfeita para os pontos de $\mathfrak{X}_N$.

Comentários Finais

Com a finalidade de ilustrar as fórmulas de integração obtidas nos capítulos anteriores, alguns exemplos serão apresentados. São, também, verificados os erros de truncamento, por comparação dos cálculos aproximados por meio das fórmulas de integração e do cálculo exato das integrais.

Exemplo 1

Consideremos $T_2(2)$ o complexo de vértices (o.3,o) ; (o,o.6) ; (-o.3,o) e (o,-o.6) e vamos calcular o valor aproximado de:

$$\int_{T_2(2)} (y^4 + 10\, x^2\, y^2 + 5\, x^3\, y - 20)\, dx\, dy$$

usando as fórmulas de integração estudadas neste trabalho. O valor exato da integral, a menos de erros de arredondamento, é:

$$\int_{T_2(2)} (y^4 + 10\, x^2\, y^2 + 5\, x^3\, y - 20) = -7{,}195596$$

a) usando quatro vezes a regra do Trapézio, obtém:

-7,184444 (vide programa (1))

cujo erro de truncamento é: 0,011152

b) pela regra de Simpson:

-7,192223 (vide programa (2))

cujo erro de truncamento é: 0,003373

c) pela regra de ordem 4, a integração numérica é exata.

d) usando fórmula que utiliza polinômios ortogonais:

-7,199028 (vide programa (4))

e o erro de truncamento é: 0,003432.

Pode-se, então, notar que os resultados numéricos alcançados por meio das fórmulas de integração numérica múltipla são muito bons.

Exemplo 2

Cálculo de uma integral elíptica

Para esta função, a integral é sempre feita aproximadamente, não existindo uma fórmula fechada que exprima sua integral.

Será apresentado abaixo, o valor de uma tal função por método numérico, com uso de polinômios ortogonais.

$$\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \frac{dx\, dy}{\sqrt{(2-x^2)(2-y^2\, x^2)}} \simeq 2,254407 \qquad \text{(vide programa (4))}$$

Bibliografia

[1] GRADSHTEYN, I.S.; RYZHIK, I.M. - Tables of integrals, series and products, translation edited by Alan Jeffrey. New York: Academic Press - 1965.

[2] HIRSCH, P.M. - Numerical evaluation and estimation of multiple integrals, Doctoral thesis, University of Wisconsin. Madison - 1966.

[3] DAVIS, P.J. - Interpolation and Approximation - 1963.

[4] HILDEBRAND, F.B. - Introduction to Numerical Analysis - 1956.

[5] STROUD, A.H.; SECREST, D. - Gaussian Quadrature Formulas - 1966.

[6] GUENTHER, R.B.; ROETMAN, E.L. - Newton-Cotes Formulae in n-dimensions. Numer. Math. 14, 330-345 - 1970.

[7] STROUD, A.H. - Integration Formulas and Orthogonal Polynomials. SIAM JOURNAL Num. Anal. 4, 381-389 - 1967.

[8] STROUD, A.H. - Integration Formulas and Orthogonal Polynomials for two variables. SIAM JOURNAL Num. Anal. 6, 222-229 - 1969.

[9] STROUD, A.H. - Integration Formulas and Orthogonal Polynomials. II. SIAM JOURNAL Num. Anal. 7, 271-276 - 1970.

[10] FRANKE, R. - Orthogonal Polynomials and Approximate Multiple Integration. SIAM JOURNAL Num. Anal. 8, 757-766 - 1971.

[11] LEFSCHETZ, S. - Algebraic Geometry. Princeton, New Jersey, pág. 12 - 1953.

Programa 1

```
PAGE   2    MARIELZA

*EXTENDED PRECISION
      FUNCTION F(H,I,J,MI,MJ)
      DIMENSION H(2)
      X=MI*I*H(1)
      Y=MJ*J*H(2)
      F=Y**4+10.*(X*Y)**2+5.*X**3*Y-20.
      RETURN
      END

FEATURES SUPPORTED
 ONE WORD INTEGERS
 EXTENDED PRECISION

CORE REQUIREMENTS FOR F
 COMMON        0  VARIABLES      18  PROGRAM      86

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 001E (HEX)

END OF COMPILATION

// DUP

*STORE       WS  UA  F
D 06 ENTRY POINT NAME ALREADY IN LET/FLET


// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*EXTENDED PRECISION
*ONE WORD INTEGERS
*IOCS(CARD,1403PRINTER)
      DIMENSION H(2)
      READ(2,1)N
    1 FORMAT(I5)
      WRITE(5,2)N
    2 FORMAT(1H1'REGRA DO TRAPEZIO'///' N='I5)
      READ(2,3)(H(I),I=1,N)
    3 FORMAT(8F10.0)
      WRITE(5,4)(H(I),I=1,N)
    4 FORMAT(///' VETOR   H'/1X,2F4.1)
      SOMA=F(H,0,0,1,1)+F(H,1,0,1,1)+F(H,0,1,1,1)
      V=H(1)*H(2)
      N1=N+1
      FAT=1.
      DO 6 J=1,N1
    6 FAT=FAT*FLOAT(J)
      AINTE=V*SOMA/FAT
      WRITE(5,7)AINTE
    7 FORMAT(///' VALOR DA INTEGRAL'E16.7)
      CALL EXIT
      END

FEATURES SUPPORTED
 ONE WORD INTEGERS
 EXTENDED PRECISION
 IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR
 COMMON        0  VARIABLES      32  PROGRAM     226

END OF COMPILATION

// XEQ
```

```
REGRA DO TRAPEZIO

N=    2


VETOR    H
 0.3 0.6

VALOR DA INTEGRAL  -0.1796111E 01
```

Programa 2

```
PAGE   1    MARIELZA

// JOB T                                                    MARIELZA

LOG DRIVE   CART SPEC   CART AVAIL   PHY DRIVE
  0000        0007        0007         0000
                          1111         0001

V2 M10   ACTUAL 32K  CONFIG 32K

// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
*EXTENDED PRECISION
      FUNCTION F(H,I,J,MI,MJ)
      DIMENSION H(2)
      X=MI*I*H(1)
      Y=MJ*J*H(2)
      F=Y**4+10.*(X*Y)**2+5.*X**3*Y-20.
      RETURN
      END

FEATURES SUPPORTED
 ONE WORD INTEGERS
 EXTENDED PRECISION

CORE REQUIREMENTS FOR F
 COMMON      0  VARIABLES     18   PROGRAM      86

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 001E (HEX)

END OF COMPILATION

// DUP

*STORE       WS  UA  F
CART ID 0007   DB ADDR  2BAF   DB CNT   0007

// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
*EXTENDED PRECISION
*IOCS(CARD,1403PRINTER)
      DIMENSION H(2)
      READ(2,1)N
    1 FORMAT(I5)
      WRITE(5,2)N
    2 FORMAT(1H1'REGRA DE SIMPSON'///' N='I5)
      READ(2,3)(H(I),I=1,N)
    3 FORMAT(8F10.0)
      WRITE(5,4)(H(I),I=1,N)
    4 FORMAT(///' VETOR   H'/1X,2F4.1)
      SOMA=(N**2+N+2)*F(H,0,0,1,1)+F(H,1,0,1,1)+F(H,1,0,-1,1)+F(H,0,1,
     11)+F(H,0,1,1,-1)
      V=(2**N)*H(1)*H(2)
      N1=N+2
      FAT=1.
      DO 5 J=1,N1
    5 FAT=FAT*FLOAT(J)
      AINTE=V*SOMA/FAT
      WRITE(5,7)AINTE
    7 FORMAT(///' VALOR DA INTEGRAL 'E15.7)
      CALL EXIT
      END

FEATURES SUPPORTED
 ONE WORD INTEGERS
 EXTENDED PRECISION
 IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR
 COMMON      0  VARIABLES     50   PROGRAM     280

END OF COMPILATION

// XEQ
```

REGRA DE SIMPSON

N=   2

VETOR   H
 0.3 0.6

VALOR DA INTEGRAL -0.7192223E 01

Programa 3

```
PAGE   1    MARIELZA

// JOB T                                                          MARIELZA

LOG DRIVE   CART SPEC   CART AVAIL  PHY DRIVE
  0000        0016        0016        0000

V2 M10   ACTUAL 32K  CONFIG 32K

// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
*EXTENDED PRECISION
      FUNCTION F(H,I,J,MI,MJ)
      DIMENSION H(2)
      X=MI*FLOAT(I)*H(1)
      Y=MJ*FLOAT(J)*H(2)
      F=Y**4+10.*(X*Y)**2+5.*X**3*Y-20.
      RETURN
      END

FEATURES SUPPORTED
 ONE WORD INTEGERS
 EXTENDED PRECISION

CORE REQUIREMENTS FOR F
 COMMON       0  VARIABLES      20  PROGRAM      94

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 0020 (HEX)

END OF COMPILATION

// DUP

*STORE        WS  UA  F
CART ID 0016   DB ADDR  4015   DB CNT   0008

// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
*EXTENDED PRECISION
*IOCS(CARD,1403PRINTER)
      DIMENSION H(2)
      READ(2,1)N
    1 FORMAT(I5)
      WRITE(5,2)N
    2 FORMAT(1H1'REGRA DE ORDEM QUATRO'///' N='I5)
      READ(2,3)(H(I),I=1,N)
    3 FORMAT(8F10.0)
      WRITE(5,4)(H(I),I=1,N)
    4 FORMAT(///' VETOR   H'/1X,2F4.1)
      S1=(N**4-3.*N**2-6.*N+24.)*F(H,0,0,1,1)
      S2=(36.-7.*N-N**2)/3.
      S2=S2*(F(H,1,0,2,1)+F(H,1,0,-2,1)+F(H,0,1,1,2)+F(H,0,1,1,-2))
      S3=16.*(F(H,1,1,1,1)+F(H,1,1,-1,1)+F(H,1,1,1,-1)+F(H,1,1,-1,-1))
      S4=(16.*(N**2+N+6.))/3.*(F(H,1,0,1,1)+F(H,1,0,-1, 1)+F(H,0,1,1,1)+
     FF(H,0,1,1,-1))
      SOMA=S1+S2+S3+S4
      V=2**(2*N)*H(1)*H(2)
      N1=4+N
      FAT=1.
      DO 5 J=1,N1
    5 FAT=FAT*FLOAT(J)
      AINTE=V*SOMA/FAT
      WRITE(5,6)AINTE
    6 FORMAT(///'VALOR DA INTEGRAL 'E15.7)
      CALL EXIT
      END

FEATURES SUPPORTED
 ONE WORD INTEGERS
 EXTENDED PRECISION
 IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR
 COMMON       0  VARIABLES      62  PROGRAM     490

END OF COMPILATION

// XEQ
```

REGRA DE ORDEM QUATRO

N= 2

VETOR H
0.1 0.3

VALOR DA INTEGRAL -0.7195593E 01

Programa 4

```
PAGE   1    MARIELZA

// JOB T                                                    MARIELZA

LOG DRIVE   CART SPEC   CART AVAIL  PHY DRIVE
  0000        0007        0007        0000
                          1111        0001

V2 M10   ACTUAL 32K  CONFIG 32K

// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
*EXTENDED PRECISION
*IOCS(CARD,1403PRINTER)
      DIMENSION X(10),Y(10)
      READ(2,1)M
    1 FORMAT(I5)
      N=M**2
      WRITE(5,2)
    2 FORMAT(1H1'INTEGRACAO NUMERICA COM POLINOMIOS ORTOGONAIS'///)
      WRITE(5,3)M
    3 FORMAT(1X,'M='I5//)
      READ(2,4)(X(I),I=1,N)
      READ(2,4)(Y(I),I=1,N)
    4 FORMAT(8F10.0)
      WRITE(5,6)(X(I),I=1,N)
    6 FORMAT(///' VETOR X'//(1X,8E15.7))
      WRITE(5,7)(Y(I),I=1,N)
    7 FORMAT(///' VETOR Y'//(1X,8E15.7))
      WRITE(5,21)
   21 FORMAT(///' CASO 1'////' VALORES DE G'//)
      SOMA =0.
      DO 23 I=1,N
      G=0.023287*X(I)**4-0.042526*X(I)**3*Y(I)-0.0324*X(I)**2*Y(I)**2
      G=G-0.022274*X(I)*Y(I)**3+0.033413*Y(I)**4-20.
      WRITE(5,22)G
   22 FORMAT(E15.7)
   23 SOMA=SOMA+G
      AINTE=0.09*SOMA
      WRITE(5,24)AINTE
   24 FORMAT(///' VALOR DA INTEGRAL 'E15.7/////' CASO 2'///' VALORES DE
     GG'//)
      SOMA=0.
      DO 25 I=1,N
      G=(2.-X(I)**2)*(2.-(X(I)*Y(I))**2)
      G=1./SQRT(G)
      WRITE(5,22)G
   25 SOMA=SOMA+G
      WRITE(5,26)SOMA
   26 FORMAT(///' VALOR DA INTEGRAL ' E15.7)
      CALL EXIT
      END

FEATURES SUPPORTED
 ONE WORD INTEGERS
 EXTENDED PRECISION
 IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR
 COMMON      0  VARIABLES      82  PROGRAM     506

END OF COMPILATION

// XEQ
```

INTEGRACAO NUMERICA COM POLINOMIOS ORTOGONAIS

M= 2

VETOR X

0.5773500E 00 0.5773500E 00 -0.5773500E 00 -0.5773500E 00

VETOR Y

0.5773500E 00 -0.5773500E 00 0.5773500E 00 -0.5773500E 00

CASO 1

VALORES DE G

-0.2000450E 02
-0.1999010E 02
-0.1999010E 02
-0.2000450E 02

VALOR DA INTEGRAL -0.7199028E 01

CASO 2

VALORES DE G

0.5636017E 00
0.5636017E 00
0.5636017E 00
0.5636017E 00

VALOR DA INTEGRAL 0.2254407E 01

OUTRAS REFERÊNCIAS

BARNHILL,R.E. - An error analysis for numerical multiple integration I, Math. Comput., v.22, 1968, pp.98-109. MR 37 2438.

____________ - An error analysis for numerical multiple integration II, Math. Comput., v. 22, 1968, pp.286-292. MR 37 6027.

BARNHILL,R.E., and NIELSON,G.M. - An error analysis for numerical multiple integration III, Math. Comput., v. 24, 1970, pp.301-314.

DAVIS,P.J. - A construction of nonnegative approximate quadratures,Math. Comput. v. 21, 1967, pp. 578-582. MR 36 5584.

HABER,S. - Numerical evaluation of multiple integrals, SIAM Review,v.12 1970, pp. 481-526.

HAMMER,P.C., and STROUD,A.H. - Numerical integration over simplexes,Math. Tables Aids Comput., v. 10, 1956, pp. 137-139. MR 19, 177.

HAMMER,P.C., and WYMORE,A.W. - Numerical evaluation of multiple integrals I, Math. Tables Aids Comput., v. 11, 1957, pp. 59-67. MR 19, 323.

HIRSCH,P.M. - Evaluation of orthogonal polynomials and relationship to evaluating multiple integrals. Math. Comput., v. 22, 1968, pp.280-285. MR 37 2441.

KRYLOV,V.I. - Approximate Calculation of Integrals (in Russian), 2nd ed. Moscow, 1967.

LETHER,F.G. - An error representation for product cubature rules, SIAM J. Numer. Anal., v. 7, 1970, pp. 363-365.

RABINOWITZ,P., and RICHTER,N. - Perfectly symmetric two-dimensional integration formulas with minimal numbers of points, Math. Comput., v. 23, 1969, pp. 765-779.

SILVESTER,P. - Symmetric quadrature formulae for simplexes, Math.Comput., v. 24, 1970, pp. 95-100.

STROUD,A.H. - Approximate integration formulas of degree 3 for simplexes, Math. Comput., v. 18, 1964, pp. 590-597. MR 29 6628.

____________ - Some fifth degree integration formulas for symmetric regions, Math. Comput., v. 20, 1966, pp. 90-97. MR 32 8503.

____________ - Some approximate integration formulas of degree 3 for an n-dimensional simplex, Numer. Math., v. 9, 1966, pp. 38-45. MR 35 7580.

STROUD, A.H. - Some fifth degree integration formulas for symmetric regions II, Numer. Math., v. 9, 1967, pp. 460-468. MR 36 1106.

__________ - A fifth degree integration formula for the n-simplex, SIAM J. Numer. Anal., v. 6, 1969, pp. 90-98.